



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΕΛΕΤΗΣ ΠΛΟΙΟΥ ΚΑΙ ΘΑΛΑΣΣΙΩΝ ΜΕΤΑΦΟΡΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ SURF-RIDING
ΣΕ ΑΚΟΛΟΥΘΟΥΝΤΕΣ ΚΥΜΑΤΙΣΜΟΥΣ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

ΚΟΝΤΟΛΕΦΑΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Κ. ΣΠΥΡΟΥ

ΑΘΗΝΑ, ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2012

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1	ΓΕΝΙΚΗ ΕΙΣΑΓΩΓΗ	1
2	ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΟΥ ΠΛΟΙΟΥ	
2.1	ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΙΝΗΣΗΣ	3
2.2	ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ	4
2.3	ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΤΟΥ ΑΡΙΣΤΕΡΟΥ ΜΕΛΟΥΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΙΝΗΣΗΣ	5
2.4	ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΤΟΥ ΔΕΞΙΟΥ ΜΕΛΟΥΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΙΝΗΣΗΣ	6
2.4.1	ΓΕΝΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ	6
2.4.2	ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΡΟΗΣ	6
2.4.2.1	ΤΟ ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ	6
2.4.2.2	ΓΡΑΜΜΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ (ΒΗΜΑ ΠΡΩΤΟ)	10
2.4.2.3	ΑΠΟΣΥΝΘΕΣΗ ΤΟΥ ΜΗ ΜΟΝΙΜΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ (ΒΗΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟ)	11
2.4.3	ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΤΩΝ ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΦΟΡΤΙΣΕΩΝ	13
3	ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΟΙ ΚΥΜΑΤΙΣΜΟΙ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ	
3.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	15
3.2	ΠΕΔΙΑΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ	15
3.3	ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ (ΚΥΜΑΤΙΣΜΟΙ AIRY)	16
3.4	ΘΕΩΡΙΑ ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ ΚΑΤΑ STOKES	18
3.5	ΟΡΙΑ ΙΣΧΥΟΣ	20
4	ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΙΝΗΣΗΣ ΚΑΤΑ ΤΟ ΔΙΑΜΗΚΕΣ	
4.1	ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ	22
4.2	ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΕΠΙΜΕΡΟΥΣ ΟΡΩΝ	22
4.3	ΤΕΛΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ	26
5	ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΗΣ FROUDE-KRYLOV	
5.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	27
5.2	ΤΟ ΥΠΟ ΜΕΛΕΤΗ ΠΛΟΙΟ	27
5.3	ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΤΟΥ ΠΛΟΙΟΥ	27
5.3.1	ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ	28
5.3.2	ΒΡΕΧΟΜΕΝΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΝΟΜΕΩΝ ΚΑΙ ΚΕΝΤΡΟ ΑΥΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΤΟΥ ΤΟΠΙΚΟΥ ΒΥΘΙΣΜΑΤΟΣ	29
5.3.3	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΤΟΠΙΚΩΝ ΒΥΘΙΣΜΑΤΩΝ	30
5.3.4	ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ	31
5.4	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΗΣ FROUDE-KRYLOV	31
5.5	ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ (FIT) ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ	33

6	ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ	
6.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	35
6.2	ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ	35
6.2.1	ΓΕΝΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ	35
6.2.2	ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ	37
6.2.3	ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ	40
6.3	ΔΙΑΚΛΑΔΩΣΕΙΣ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ	43
6.4	ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΣΥΝΕΧΙΣΗ	45
6.4.1	ΓΕΝΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ	45
6.4.2	ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΣΥΝΕΧΙΣΗΣ	46
7	ΤΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ SURF-RIDING	
7.1	ΓΕΝΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ	48
7.2	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ	48
7.3	ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΟΥ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ	49
8	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ ΤΟΥ ΠΛΟΙΟΥ	
8.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΣΕ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ MATLAB/MATCONT	52
8.2	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	53
8.2.1	ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΕΙΣ	53
8.2.2	ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΩΝ ΣΤΑΣΙΜΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ ΑΠΟΚΡΙΣΕΩΝ	55
8.2.2.1	ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΣΥΝΕΧΙΣΗ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟ f_n	55
8.2.2.2	ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΣΥΝΕΧΙΣΗ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟ H	58
8.2.3	ΟΡΙΑ ΤΟΥ SURF-RIDING ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ f_n, H	60
8.3	ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ	61
9	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	64
	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	66

1 ΓΕΝΙΚΗ ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Είναι σε γενικές γραμμές γνωστό πως οι συνθήκες φόρτισης κατά τη λειτουργία ενός πλοίου υπό έντονο κυματικό καθεστώς ενδέχεται να οδηγήσουν στην εκδήλωση ασταθών συμπεριφορών, ακόμα και στην ανατροπή⁽¹⁾. Αν και η τελευταία αποτελεί ενδεχόμενο με ιδιαίτερα μικρή πιθανότητα εμφάνισης, εντούτοις ο αντίκτυπος της αναμένεται να έχει σημαντικές κοινωνικές, περιβαλλοντικές και οικονομικές διαστάσεις. Καθίσταται σαφές πως η ευστάθεια αποτελεί ζήτημα πρωταρχικής σημασίας, το οποίο οφείλει να αντιμετωπισθεί κατά τη διαδικασία μελέτης και σχεδίασης ενός πλοίου.

Παρόλο που η σχετική θεωρία φαίνεται να εξελίσσεται παράλληλα με την ιστορία της ναυπηγικής, η πολυδιάστατη φύση του προβλήματος της ευστάθειας δεν είχε, σε μεγάλο βαθμό, αναδειχθεί μέχρι πρόσφατα. Η παραδοσιακή αντίληψη του χώρου περιοριζόταν στη μελέτη περιπτώσεων κατά τις οποίες οι διεγείρουσες δυνάμεις δρούσαν σε διευθύνσεις τέτοιες, ώστε να επάγουν με ευθύ τρόπο περιστροφές γύρω από τον διαμήκη άξονα του πλοίου⁽²⁾. Το ερευνητικό πεδίο αρχίζει να διευρύνεται περί τα μέσα του εικοστού αιώνα, όταν μορφές αστάθειας που συνδέονται με τις κινήσεις του πλοίου σε διαφορετικές διευθύνσεις προσελκύουν σταδιακά το επιστημονικό ενδιαφέρον.

Το 1948 ο Davidson [2], σε μια πρωτοποριακή για την εποχή μελέτη, αποδεικνύει πως ένα κατευθυντικά ευσταθές σε ήρεμο νερό πλοίο μπορεί να καταστεί ασταθές⁽³⁾ στην περίπτωση που συναντήσει κυματισμούς διαδιδόμενους προς κοινή με αυτήν της ταχύτητας του κατεύθυνση (ακολουθώντας κυματισμοί). Το 1951 ο Grim [10] επισημαίνει την πιθανότητα εμφάνισης του φαινομένου *surf-riding* –μιας ιδιάζουσας συμπεριφοράς κατά την οποία το πλοίο «παγιδεύεται» στην περιοχή της κοιλάδας ενός κύματος και ταξιδεύει με την ταχύτητα φάσης του τελευταίου– στην περίπτωση απότομων και μεγάλου μήκους ακολουθούντων κυματισμών. Το φαινόμενο παρατηρείται πειραματικά το 1962 από τους Du Cane και Goodrich [5] και αναφέρεται η διασύνδεση του με μια μορφή κατευθυντικής αστάθειας γνωστής υπό τον όρο *broaching*⁽⁴⁾. Στα τέλη της δεκαετίας του '80 ο Kan [12] διερευνά πειραματικά και θεωρητικά τη διαμήκη συμπεριφορά του πλοίου σε ακολουθούντες κυματισμούς και διαπιστώνει, μεταξύ άλλων, τη συνύπαρξη διαφορετικών αποκρίσεων για κάποια περιοχή ταχυτήτων η απόκριση του πλοίου μπορεί να έχει είτε περιοδικό (periodic surging) είτε μόνιμο χαρακτήρα (surf-riding) αναλόγως των αρχικών συνθηκών. Τέλος, στα μέσα της δεκαετίας του '90 ο Σπύρου [17] διερευνά τη συμπεριφορά του πλοίου κατά τη διάρκεια του *broaching* και προσεγγίζει με ποιοτικό⁽⁵⁾ τρόπο τη δυναμική της μετάβασης από τη διαμήκη περιοδική κίνηση στο *surf-riding*. Επιπλέον, προτείνει τέσσερις βασικούς μηχανισμούς οι οποίοι οδηγούν στο *broaching*: δύο από αυτούς συνδέονται άμεσα με το φαινόμενο *surf-riding*. Η διαμήκης συμπεριφορά του πλοίου μελετάται περαιτέρω από τον Σπύρου [19, 21, 23].

Ο αριθμός των σχετικών με το φαινόμενο του *surf-riding* δημοσιεύσεων δεν περιορίζεται στις ανωτέρω αναφορές. Οι συγκεκριμένες αποτελούν ίσως τις περισσότερο αξιοσημείωτες. Γεγονός πάντως αποτελεί ότι ο Διεθνής Ναυτιλιακός Οργανισμός (International Maritime Organization), αναγνωρίζοντας τη σοβαρότητα των συνεπειών που ενδέχεται να έχει το *surf-riding* πάνω στην ασφάλεια των πλοίων, προέβη στην έκδοση μιας οδηγίας προς τον πλοίαρχο (IMO, MSC.1/Circ.1228). Η οδηγία περιλαμβάνει σειρά λειτουργικών μέτρων για την αποφυγή επικίνδυνων καταστάσεων. Αξίζει τέλος να σημειωθεί ότι στη δεύτερη γενιά –η οποία βρίσκεται στο στάδιο ανάπτυξης– κριτηρίων του IMO για την άθικτη ευστάθεια, φαίνεται να ενσωματώνονται έλεγχοι για το «ευπρόσβλητο» των πλοίων αναφορικά με το φαινόμενο *surf-riding*.

(1) Στο σύνολο των περιπτώσεων αυτή συνιστά το τελικό στάδιο μιας ασταθούς συμπεριφοράς· ωστόσο η εκδήλωση κάποιας μορφής αστάθειας δε θα οδηγήσει αναγκαστικά στην ανατροπή.

(2) Κίνηση διατοιχισμού (roll).

(3) Το πλοίο δε δύναται να διατηρήσει την επιθυμητή ευθύγραμμη πορεία του.

(4) Ο όρος αναφέρεται στην απότομη, μη ηθελημένη στροφή του πλοίου, η οποία μπορεί να οδηγήσει στην ανατροπή του μετά από την ανάπτυξη μεγάλης εγκάρσιας κλίσης – καθώς ενέργεια μεταφέρεται στη διεύθυνση διατοιχισμού. Μαζί με την αυθεντική απώλεια ευστάθειας (pure loss of stability) και την παραμετρική αστάθεια (parametric instability) το φαινόμενο *broaching* αποτελεί έναν από τους θεμελιώδεις μηχανισμούς που οδηγούν στην ανατροπή του πλοίου σε περιβάλλον ακολουθούντων κυματισμών.

(5) Αναφορά στην ποιοτική (qualitative) ανάλυση – σε αντιδιαστολή με την ποσοτική (quantitative) ανάλυση.

Η παρούσα μελέτη αποτελεί συνέχεια της διπλωματικής εργασίας του Ρεμιγιάκη [35]. Η μεθοδολογία η οποία είχε αναπτυχθεί για την περίπτωση των κυματισμών Stokes δεύτερης τάξης χρησιμοποιείται για τη διερεύνηση του φαινομένου surf-riding σε ακολουθούντες κυματισμούς τρίτης και πέμπτης τάξης. Ιδιαίτερη βαρύτητα δίνεται στον καθορισμό των περιοχών του παραμετρικού χώρου του συστήματος στις οποίες η απόκριση του πλοίου εμφανίζει διαφορετικά ποιοτικά χαρακτηριστικά – αποκλειστικά περιοδική, αποκλειστικά στάσιμη ή συνύπαρξη της περιοδικής και της στάσιμης απόκρισης. Η μελέτη έχει ως αντικειμενικό σκοπό τη σύγκριση των αποτελεσμάτων για τις περιπτώσεις των αρμονικών κυματισμών και των κυματισμών Stokes δεύτερης, τρίτης και πέμπτης τάξης, σε μια προσπάθεια εκτίμησης της επίδρασης που επιφέρει η χρήση διαφορετικών κυματικών θεωριών στον τρόπο με τον οποίο διευθετούνται τα όρια της ευστάθειας του συστήματος.

Η διπλωματική εργασία περιλαμβάνει εννέα κεφάλαια. Στα κεφάλαια 2 έως 4 και 6 με 7 αναπτύσσεται το απαιτούμενο θεωρητικό υπόβαθρο, ενώ στα κεφάλαια 5, 8 και 9 παρουσιάζονται η μεθοδολογία, τα αποτελέσματα και τα συμπεράσματα της μελέτης.

Συγκεκριμένα, το δεύτερο κεφάλαιο αποτελεί μια εισαγωγή στη δυναμική του πλοίου. Παρατίθενται οι εξισώσεις κίνησης και περιγράφεται εν συντομία το υδροδυναμικό πρόβλημα στην περίπτωση του υδρομηχανικού συστήματος που συντίθεται από το πλοίο και το ρευστό – το τελευταίο περατούται εκ των άνω σε μια ελεύθερη επιφάνεια και εδράζεται πάνω σε έναν οριζόντιο και αδιαπέραστο πυθμένα. Τέλος, περιγράφεται η διαδικασία βάσει της οποίας αντιμετωπίζεται το υδροδυναμικό πρόβλημα και δίνεται η γενική μορφή των υδροδυναμικών φορτίσεων.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται με συνοπτικό τρόπο η γραμμική θεωρία κυματισμών καθώς και η θεωρία κυματισμών κατά Stokes και παρατίθεται το μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε για την περιγραφή του κυματικού περιβάλλοντος. Ακολουθούν λίγα σχόλια για τις περιοχές ισχύος των θεωριών.

Στο τέταρτο κεφάλαιο περιγράφεται το μαθηματικό μοντέλο ενός βαθμού ελευθερίας, βάσει του οποίου πραγματοποιήθηκε η διερεύνηση της δυναμικής συμπεριφοράς του πλοίου κατά το διάμηκες. Αναφέρονται οι παραδοχές και οι υποθέσεις που οδηγούν στην τελική μορφή της εξίσωσης κίνησης και ο τρόπος με τον οποίο ενσωματώνεται σε αυτήν η εκάστοτε κυματική θεωρία.

Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε για τον υπολογισμό της επαγόμενης από τους κυματισμούς δύναμης κατά τη διαμήκη διεύθυνση του πλοίου. Η μεθοδολογία περιλαμβάνει την επίλυση των εξισώσεων ισορροπίας κατά τις διευθύνσεις heave και pitch κατά μήκος του κύματος, τον υπολογισμό της διαμήκου συνιστώσας της δύναμης Froude-Krylov και την παρεμβολή των αποτελεσμάτων. Οι παρεμβολικοί τύποι χρησιμοποιούνται σε επόμενο κεφάλαιο προκειμένου να απλοποιηθεί η διαδικασία επίλυσης της εξίσωσης κίνησης.

Στο έκτο κεφάλαιο παρατίθενται στοιχεία της θεωρίας δυναμικών συστημάτων. Παρουσιάζονται βασικές έννοιες όπως ο χώρος φάσεων, η ευστάθεια και οι διακλαδώσεις δυναμικών συστημάτων. Στο τέλος του κεφαλαίου περιγράφεται εν συντομία η μέθοδος αριθμητικής συνέχισης.

Στο έβδομο κεφάλαιο περιγράφεται το φαινόμενο surf-riding. Παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίο το φαινόμενο εκδηλώνεται και πραγματοποιείται μια τοπολογική προσέγγιση της δυναμικής του φαινομένου.

Στο όγδοο κεφάλαιο παρατίθενται τα αποτελέσματα της διερεύνησης της δυναμικής συμπεριφοράς του πλοίου. Για την αριθμητική μελέτη χρησιμοποιήθηκε το πακέτο συνέχισης MATLAB/MATCONT.

Τέλος, στο ένατο κεφάλαιο πραγματοποιείται ο σχολιασμός των αποτελεσμάτων και παρατίθενται τα συμπεράσματα της παρούσας μελέτης.

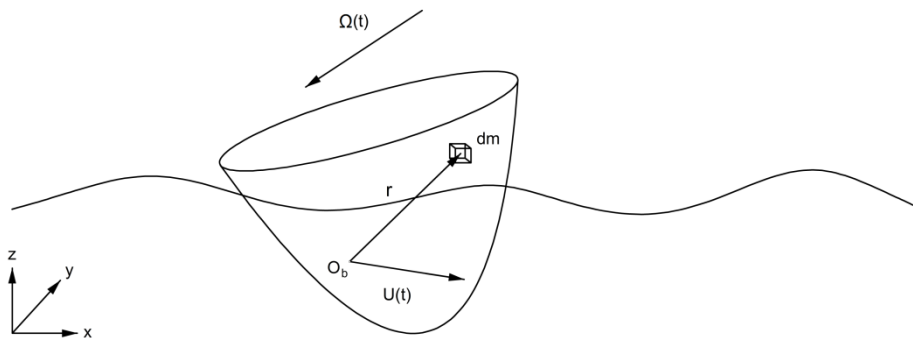
2 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΟΥ ΠΛΟΙΟΥ

2.1 ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΙΝΗΣΗΣ

Το πρόβλημα προσδιορισμού των δυναμικών αποκρίσεων ενός επιπλέοντος σώματος μπορεί σε πολλές περιπτώσεις να απλοποιηθεί μέσω της υπόθεσης του απαραμόρφωτου στερεού. Η συγκεκριμένη θεώρηση ευσταθεί, σε πρώτη προσέγγιση, λόγω του εν γένει χαμηλόσυχνου χαρακτήρα των δυναμικών φαινομένων τα οποία προκύπτουν ως αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης των σωμάτων⁽¹⁾ και του περιρρέοντος ρευστού. Υπό το πρίσμα αυτό, ένα επιπλέον σώμα ελεύθερο εξωτερικών κινηματικών περιορισμών χαρακτηρίζεται από έξι βαθμούς ελευθερίας: η θέση του στο χώρο μπορεί να ορισθεί πλήρως μέσω έξι ανεξάρτητων γενικευμένων συντεταγμένων.

Η μεταφορά του φυσικού προβλήματος στο μαθηματικό του αντίστοιχο (υπό την παραδοχή που διατυπώθηκε) πραγματοποιείται σε πρώτο επίπεδο μέσω της κατάστρωσης των εξισώσεων κίνησης του επιπλέοντος σώματος⁽²⁾. Οι τελευταίες αποτελούν εκφράσεις των θεωρημάτων μεταβολής της ορμής και μεταβολής της στροφορμής. Η ανάπτυξη των εξισώσεων θα βασισθεί σε έννοιες της δυναμικής του απολύτως στερεού.

Έστω ένα ελεύθερα επιπλέον στερεό σώμα. Με O_b συμβολίζεται ένα σωματοπαγές κέντρο αναφοράς, ενώ με \vec{r} η διανυσματική ακτίνα από το κέντρο αυτό προς ένα τυχαίο στοιχείο, μάζας dm , του στερεού (Σχήμα 2.1). Έστω εν συνεχεία ότι το σώμα κινείται με ταχύτητα $(\vec{U}(t), \vec{\Omega}(t))$. Η γραμμική ταχύτητα $\vec{U}(t)$ αναφέρεται στο σημείο O_b , ενώ ως γνωστόν η γωνιακή ταχύτητα $\vec{\Omega}(t)$ έχει χαρακτήρα ελεύθερου διανύσματος.



Σχήμα 2.1 : Ελεύθερα επιπλέον στερεό σώμα

Η ταχύτητα \vec{U}_σ του στοιχείου μάζας dm σε δεδομένη χρονική στιγμή δίνεται από την έκφραση,

$$\vec{U}_\sigma = \vec{U} + \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad (2.1)$$

Συνεπώς, η ορμή του στοιχείου δίνεται από το γινόμενο,

$$(\vec{U} + \vec{\Omega} \times \vec{r}) dm \quad (2.2)$$

ενώ η στροφορμή του ίδιου από τον όρο,

$$\vec{r} \times (\vec{U} + \vec{\Omega} \times \vec{r}) dm \quad (2.3)$$

(1) Ο όρος αναφέρεται στις συνήθεις ναυπηγικές κατασκευές.

(2) Για τη μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς του σώματος ως προϊόν αλληλεπίδρασης με το περιρρέον ρευστό απαιτείται, σε επόμενο στάδιο, η μοντελοποίηση του πεδίου ροής.

Δεδομένου ότι $dm = \rho_\sigma dV$, οι εκφράσεις για τη συνολική ορμή (\bar{L}) και τη στροφορμή (\bar{H}) του σώματος μπορούν να γραφούν στη μορφή,

$$\bar{L} = \int_{V_b} \rho_\sigma (\bar{U} + \bar{\Omega} \times \bar{r}) dV \quad (2.4. \alpha)$$

και

$$\bar{H} = \int_{V_b} \rho_\sigma \bar{r} \times (\bar{U} + \bar{\Omega} \times \bar{r}) dV \quad (2.4. \beta)$$

όπου ρ_σ , dV η πυκνότητα και ο όγκος (αντίστοιχα) του στοιχείου μάζας dm και V_b ο συνολικός όγκος του στερεού.

Στο σημείο αυτό τα θεωρήματα μεταβολής της ορμής και της στροφορμής μπορούν να διατυπωθούν ως ακολούθως,

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{V_b} \rho_\sigma (\bar{U} + \bar{\Omega} \times \bar{r}) dV \right) = \bar{F} \quad (2.5. \alpha)$$

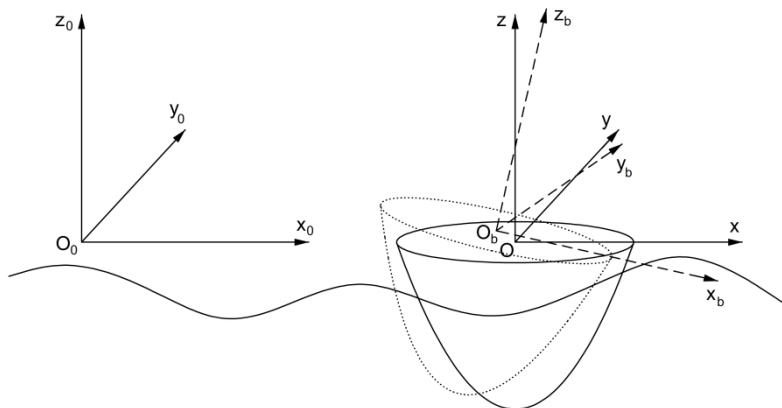
και

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{V_b} \rho_\sigma \bar{r} \times (\bar{U} + \bar{\Omega} \times \bar{r}) dV \right) + m \bar{U} \times \bar{U}_G = \bar{K} \quad (2.5. \beta)$$

όπου \bar{F} και \bar{K} οι συνολικά εφαρμοζόμενες στο σώμα εξωτερικές δυνάμεις και ροπές, m η συνολική μάζα του στερεού και \bar{U}_G η ταχύτητα του κέντρου μάζας αυτού. Ο δεύτερος όρος στο αριστερό μέλος της τελευταίας σχέσης εμφανίζεται λόγω της κίνησης –με ταχύτητα \bar{U} – του κέντρου αναφοράς των ροπών.

2.2 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

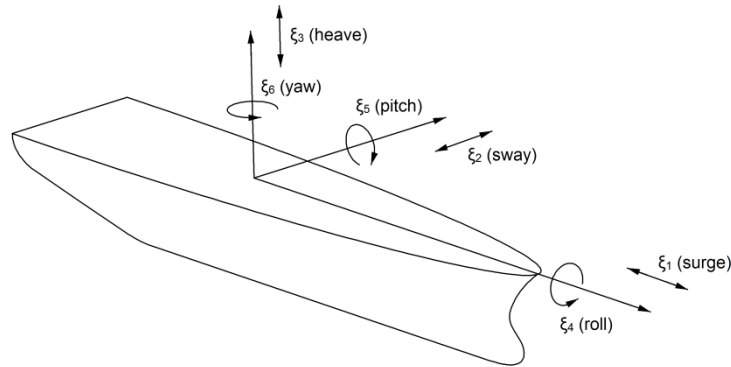
Για τη διαχείριση των εμπλεκόμενων στο πρόβλημα (2.5) κινηματικών και δυναμικών μεγεθών χρησιμοποιούνται, ως επί το πλείστον, τρία διαφορετικά συστήματα συντεταγμένων. Ένα ακίνητο ως προς την επιφάνεια της γης σύστημα αναφοράς (Α.Σ. : $O_0x_0y_0z_0$), ένα σωματοπαγές σύστημα (Σ.Σ. : $O_bx_by_bz_b$) το οποίο ακολουθεί πλήρως τις κινήσεις του σώματος και ένα κινούμενο σύστημα (Κ.Σ. : $Oxyz$) το οποίο ακολουθεί τη μέση κίνηση του (Σχήμα 2.2).



Σχήμα 2.2 : Συστήματα συντεταγμένων

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η θέση του σώματος στο χώρο ορίζεται πλήρως μέσω έξι ανεξάρτητων γενικευμένων συντεταγμένων. Οι γενικευμένες συντεταγμένες ξ_i , $i = 1(1)6$ επιλέγονται έτσι, ώστε τα μεγέθη ξ_1 , ξ_2 και ξ_3 να αντιστοιχούν στις καρτεσιανές συντεταγμένες του σωματοπαγούς κέντρου αναφοράς ως προς το σύστημα το κινούμενο με τη μέση ταχύτητα του σώματος, ενώ τα μεγέθη ξ_4 , ξ_5 και ξ_6 αντιστοιχούν στις περιστροφές γύρω από τους σωματοπαγείς άξονες. Οι τελευταίες ταυτίζονται σε πρώτη προσέγγιση⁽³⁾ με τις αντίστοιχες περιστροφές γύρω από τους άξονες του συστήματος το οποίο ακολουθεί τη μέση κίνηση του στερεού.

Στην περίπτωση του πλοίου οι κινήσεις ξ_i , $i = 1(1)6$ ακολουθούν συγκεκριμένη ονοματολογία (Σχήμα 2.3).



Σχήμα 2.3 : Οι κινήσεις του πλοίου

2.3 ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΤΟΥ ΑΡΙΣΤΕΡΟΥ ΜΕΛΟΥΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΙΝΗΣΗΣ

Επιλέγοντας για την επεξεργασία των σχέσεων (2.5) το σωματοπαγές σύστημα αξόνων⁽⁴⁾ και δεδομένου ότι τα γεωμετρικά και αδρανειακά χαρακτηριστικά του πλοίου παραμένουν αμετάβλητα ως προς αυτό, τα θεωρήματα μεταβολής της ορμής και της στροφορμής αναδιατυπώνονται ως εξής,

$$\int_{V_b} \rho_\sigma \frac{d}{dt} (\bar{U} + \bar{\Omega} \times \bar{r}) dV = \bar{F} \quad (2.6. \alpha)$$

και

$$\int_{V_b} \rho_\sigma \frac{d}{dt} \left\{ \bar{r} \times (\bar{U} + \bar{\Omega} \times \bar{r}) \right\} dV = \bar{K} \quad (2.6. \beta)$$

Για την περαιτέρω ανάπτυξη των εκφράσεων (2.6) καθίσταται προφανής η ανάγκη προσδιορισμού μιας σχέσης, η οποία θα συνδέσει τον αδρανειακό ρυθμό μεταβολής ενός διανύσματος με το ρυθμό μεταβολής των συνιστωσών του σε ένα κινούμενο σύστημα. Προς τούτο παρατίθεται, χωρίς απόδειξη, το ακόλουθο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ. Έστω $\bar{a}(t)$ ένα (αδρανειακό) διάνυσμα και $S(t)$ ένα κινούμενο σύστημα συντεταγμένων. Εάν το σύστημα $S(t)$ περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\bar{\Omega}(t)$ τότε,

$$\frac{d\bar{a}(t)}{dt} = \partial_t \bar{a}(t) + \bar{\Omega}(t) \times \bar{a}(t) \quad (2.7)$$

όπου $\frac{d\bar{a}(t)}{dt}$ ο αδρανειακός ρυθμός μεταβολής του διανύσματος $\bar{a}(t)$ και $\partial_t \bar{a}(t)$ ο ρυθμός μεταβολής των συ-

(3) Υπό την υπόθεση απειροστών κινήσεων. Στην περίπτωση αυτή η περιστροφή $\bar{\theta} = (\xi_4, \xi_5, \xi_6)$ μπορεί να αντιμετωπιστεί ως διάνυσμα.

(4) Το Σ.Σ. δεν επιλέγεται για την περιγραφή του «σχετικού» προβλήματος – ως προς παρατηρητή επί του πλοίου. Καθ' όλη τη διάρκεια της ανάλυσης χρησιμοποιούνται απόλυτα (αδρανειακά) και όχι σχετικά μεγέθη.

νιστωσών του διανύσματος $\bar{a}(t)$ ως προς το κινούμενο σύστημα $S(t)$.

Με χρήση του ανωτέρω θεωρήματος και της γνωστής ταυτότητας,

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b} (\bar{a} \cdot \bar{c}) - \bar{c} (\bar{a} \cdot \bar{b}) \quad (2.8)$$

οι παράγωγοι που εμφανίζονται στις σχέσεις (2.6) αναλύονται ως προς το σωματοπαγές σύστημα (Σ.Σ.),

$$\frac{d}{dt} (\bar{U} + \bar{\Omega} \times \bar{r}) = \partial_t \bar{U} + \partial_t \bar{\Omega} \times \bar{r} + \bar{\Omega} \times \bar{U} + \bar{\Omega} (\bar{\Omega} \cdot \bar{r}) - \bar{r} (\bar{\Omega} \cdot \bar{\Omega}) \quad (2.9. \alpha)$$

και

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \bar{r} \times (\bar{U} + \bar{\Omega} \times \bar{r}) \right\} = & \bar{r} \times \partial_t \bar{U} + (\bar{r} \cdot \bar{r}) \partial_t \bar{\Omega} - \bar{r} (\bar{r} \cdot \partial_t \bar{\Omega}) \\ & + \bar{r} (\bar{U} \cdot \bar{\Omega}) - \bar{U} (\bar{r} \cdot \bar{\Omega}) + (\bar{r} \times \bar{\Omega})(\bar{r} \cdot \bar{\Omega}) \end{aligned} \quad (2.9. \beta)$$

2.4 ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΤΟΥ ΔΕΞΙΟΥ ΜΕΛΟΥΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΙΝΗΣΗΣ

2.4.1 ΓΕΝΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Ο προσδιορισμός του όρου της φόρτισης αποτελεί πρόβλημα πρωταρχικής σημασίας το οποίο ενσωματώνεται στο πλαίσιο οποιασδήποτε διαδικασίας που αποσκοπεί στη διερεύνηση των δυναμικών αποκρίσεων του πλοίου. Σε γενικές γραμμές και παρά την εμφάνιση φαινομένων αλληλεπίδρασης καθίσταται δυνατή η ανάλυση του σε επιμέρους συνεισφορές. Οι τελευταίες αφορούν τις φορτίσεις λόγω του περιρρέοντος ρευστού, τις φορτίσεις από το σύστημα πρόωσης, τις επιφάνειες ελέγχου του πλοίου, τον άνεμο και διάφορα άλλα αίτια. Η σχετική βαρύτητα των συνεισφορών αυτών μπορεί να διαφοροποιείται ανάλογα με το υπό μελέτη πρόβλημα επιτρέποντας, σε συγκεκριμένες περιπτώσεις, την παράβλεψη ορισμένων εξ αυτών λόγω μικρής ποσοστιαίας συμβολής στο σύνολο της φόρτισης· ο όρος παρ' όλα αυτά που αναφέρεται στην επίδραση του ρευστού αποτελεί πάντα σημαντικό ποσοστό της τελευταίας. Στο εναπομένον κομμάτι της ενότητας αυτής διαχειριζόμαστε το πρόβλημα προσδιορισμού των δυνάμεων και των ροπών που ασκούνται από το περιρρέον ρευστό στην περίπτωση αλληλεπίδρασης πλοίου –κινούμενου με σταθερή πρόσω ταχύτητα– και κυματισμών⁽⁵⁾.

2.4.2 ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΡΟΗΣ

2.4.2.1 ΤΟ ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Καθίσταται γρήγορα σαφές πως κάθε προσπάθεια αναλυτικής έκφρασης των φορτίσεων από το ρευστό προϋποθέτει τη μοντελοποίηση του πεδίου ροής γύρω από το πλοίο. Τα χαρακτηριστικά του πεδίου μπορούν στη συνέχεια να οδηγήσουν σε κλειστές εκφράσεις για τις ασκούμενες σε αυτό δυνάμεις και ροπές.

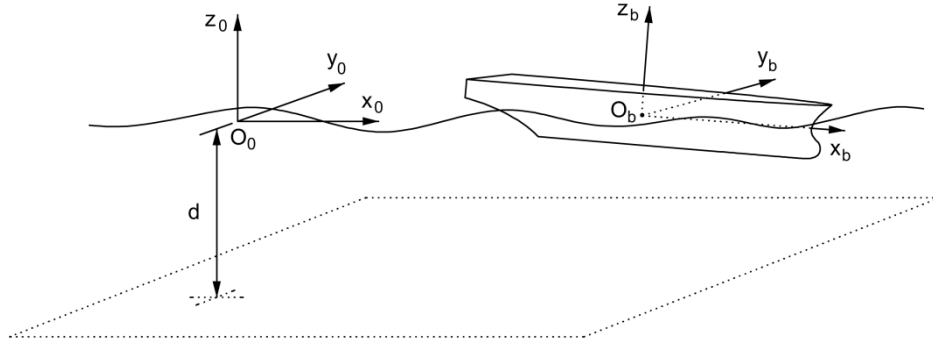
Οι βασικές παραδοχές οι οποίες εισάγονται προς απλοποίηση του προβλήματος προσδιορισμού των χαρακτηριστικών (κινηματικών και δυναμικών) του πεδίου ροής αφορούν το ασυμπίεστο και τη μη συνεκτική φύση του θαλασσινού νερού, καθώς και το αστρόβιλο της ροής. Οι δύο πρώτες παραδοχές υποκαθιστούν τις απαιτούμενες καταστατικές εξισώσεις⁽⁶⁾, ενώ η τελευταία επιτρέπει τη χρήση της έννοιας του δυναμικού ταχύτητας.

(5) Θεωρούμε το εύρος φάσματος των επιφανειακών κυματισμών βαρύτητας καθώς οι τελευταίοι αποτελούν το κύριο αίτιο φόρτισης πλοίων και λουπιών θαλάσσιων κατασκευών.

(6) Το υπό διερεύνηση πρόβλημα συντίθεται από εξισώσεις διατήρησης (όπως αυτές διατυπώνονται στα πλαίσια της μηχανικής των ρευστών), καταστατικές εξισώσεις και κατάλληλες οριακές συνθήκες.

Επιπρόσθετα, το πεδίο ροής θεωρείται διδιάστατο⁽⁷⁾ και περιορίζεται εντός του χωρίου το οποίο ορίζουν η ελεύθερη επιφάνεια και ο επίπεδος –ευρισκόμενος σε σταθερό βάθος d – αδιαπέραστος πυθμένας.

Το υδροδυναμικό πρόβλημα θα διατυπωθεί αρχικά για την περίπτωση πλοίου το οποίο διατηρεί σταθερή μέση θέση στο χώρο γύρω από την οποία εκτελεί ταλαντώσεις μικρού πλάτους. Η αρχή του συστήματος αναφοράς τοποθετείται στο επίπεδο της αδιατάρακτης ελεύθερης επιφάνειας (Σχήμα 2.4).



Σχήμα 2.4 : Γεωμετρία του υδρομηχανικού συστήματος

Η εισαγωγή της έννοιας του δυναμικού ταχύτητας περιορίζει τον αριθμό των αγνώστων συναρτήσεων u, w (συνιστώσες της ταχύτητας \vec{V} του σωματιδίου του ρευστού κατά τη x και z αντίστοιχα διεύθυνση) σε μία άγνωστη συνάρτηση φ (δυναμικό ταχύτητας), για την οποία ως γνωστόν ισχύει⁽⁸⁾,

$$\vec{V} = \nabla\varphi \quad \Leftrightarrow \quad u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \quad , \quad w = \frac{\partial\varphi}{\partial z} \quad (2.10)$$

Το πρόβλημα μπορεί να οριστεί πλήρως –δεδομένων των όσων προηγήθηκαν– μέσω των εξισώσεων διατήρησης της ορμής (εξισώσεις Euler) και διατήρησης της μάζας (εξίσωση συνέχειας), εισάγοντας παράλληλα τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες.

Η εξίσωση της συνέχειας –ενσωματώνοντας τις υποθέσεις της μη συμπιεστότητας και της μη στροβιλιότητας– απλοποιείται σημαντικά και καταλήγει στη γνωστή εξίσωση Laplace για το δυναμικό ταχύτητας,

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.11. \alpha)$$

Παράλληλα, η ολοκλήρωση των εξισώσεων Euler –υπό τις παραδοχές που αναφέρθηκαν– οδηγεί στην εξίσωση Bernoulli, η οποία για την περίπτωση μη μόνιμης ροής παίρνει την ακόλουθη μορφή,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right)^2 \right] + g z + \frac{p}{\rho} = q(t)$$

Με κατάλληλο εκ νέου ορισμό⁽⁹⁾ το δυναμικό «απορροφά» το χρονικά εξαρτώμενο όρο του δεύτερου μέλους χωρίς να αλλοιώνεται το παραγόμενο εξ' αυτού πεδίο ταχυτήτων· η εξίσωση διατυπώνεται τελικά ως ακολούθως,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right)^2 \right] + g z + \frac{p}{\rho} = 0 \quad (2.11. \beta)$$

όπου στην ανωτέρω σχέση,

(7) Θεώρηση η οποία προϋποθέτει κυματισμούς τα μέγιστα διάδοσης των οποίων συνιστούν παράλληλες ευθείες πάνω στο x - y επίπεδο.

(8) Στις σχέσεις που ακολουθούν οι χωρικές παράγωγοι $\partial/\partial x$ και $\partial/\partial z$ νοούνται ως προς το ακίνητο σύστημα συντεταγμένων και χρησιμοποιούνται, χάριν απλότητας, αντί του συμβολισμού $\partial/\partial x_0$ και $\partial/\partial z_0$.

(9) $\Phi = \varphi - Q(t)$, $\frac{\partial Q}{\partial t} = q(t)$.

g η επιτάχυνση της βαρύτητας,
 p η διαφορά τοπικής και ατμοσφαιρικής πίεσης και
 ρ η πυκνότητα του ρευστού.

Οι συνθήκες συναρμογής των πεδιακών μεγεθών στα σύνορα του προβλήματος –καθώς και στις διεπιφάνειες των υποσυστημάτων του– διατυπώνονται μέσω μιας λογικής διαδικασίας η οποία περιγράφει το εξιδανικευμένο από τις εισηγμένες υποθέσεις φαινόμενο. Έτσι, κατά μήκος του αδιαπέραστου οριζόντιου πυθμένα η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας θα πρέπει αναγκαστικά να μηδενίζεται, γεγονός το οποίο από-τυπώνεται στη συνοριακή συνθήκη πυθμένα (συνθήκη μη εισχώρησης),

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=-d} = 0 \quad (2.11. \gamma)$$

Στην ελεύθερη επιφάνεια $n = n(x, t)$ ⁽¹⁰⁾ εισάγονται δύο συνθήκες. Η κινηματική συνθήκη χαρακτηρίζει την ελεύθερη επιφάνεια ως υλική γραμμή η οποία μπορεί να παραμορφώνεται χωρίς όμως να διακόπτεται η συνέχεια της,

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=n} = \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial x} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{z=n} + \frac{\partial n}{\partial z} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=n} \quad (2.11. \delta)$$

ενώ η δυναμική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας εκφράζει το αξίωμα δράσης-αντίδρασης στη διεπιφάνεια νερού και αέρα,

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{z=n} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right]_{z=n} + g n = 0 \quad (2.11. \epsilon)$$

Τέλος, στη βρεχόμενη επιφάνεια της γάστρας του πλοίου ισχύει η συνθήκη συνέχειας των κάθετων ταχυτήτων ρευστού και στερεού (συνθήκη μη εισχώρησης),

$$\nabla \varphi \bar{n} = \left[\bar{U} + \bar{\Omega} \times (\bar{r} + \bar{r} \times \bar{\theta} - \bar{\xi}) \right] \bar{n}, \quad (x, z) \in S_b \quad (2.11. \sigma\tau)$$

όπου,

\bar{n} το κάθετο στην επιφάνεια της γάστρας μοναδιαίο διάνυσμα με φορά προς τα έξω,

$\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$,

$\bar{\theta} = (\xi_4, \xi_5, \xi_6)$ και

S_b η επιφάνεια του βυθισμένου τμήματος της γάστρας.

Το γενικό υδροδυναμικό πρόβλημα –απλοποιημένο σε πρώτο επίπεδο μέσω των παραδοχών που έχουν μέχρι στιγμής διατυπωθεί– περιλαμβάνει το σύνολο των εξισώσεων (2.11)⁽¹¹⁾. Ο μετασχηματισμός των τελευταίων στο κινούμενο σύστημα (Κ.Σ.)⁽¹²⁾ οδηγεί στις ακόλουθες εκφράσεις,

$$\nabla^2 \varphi = 0, \quad (x, z) \in \mathbb{R} \times (-d, n) \quad (2.12. \alpha)$$

(10) Ο συμβολισμός χρησιμοποιείται για να περιγράψει την ανύψωση της επιφάνειας της θάλασσας.

(11) Το πρόβλημα συμπληρώνει μια πρόσθετη συνθήκη, η επ' άπειρον συνθήκη, η οποία παρουσιάζεται ως λογική απαίτηση για τη μορφή των λύσεων που θα προκύψουν.

(12) Θεωρούμε την περίπτωση στην οποία το πλοίο διατηρεί σταθερή πρόσω ταχύτητα U εκτελώντας ταυτόχρονα ταλαντωτικές κινήσεις μικρού πλάτους προς όλες τις διευθύνσεις.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad z = -d \quad (2.12. \beta)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - U \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \varphi + 2 \nabla \varphi \nabla \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} - U \frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi \right\} + \frac{1}{2} \nabla \varphi \nabla (\nabla \varphi)^2 + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad z = n \quad (2.12. \gamma)$$

$$\nabla \varphi \bar{n} = \left[\bar{U} + \bar{\Omega} \times (\bar{r} + \bar{r} \times \bar{\theta} - \bar{\xi}) \right] \bar{n}, \quad (x, z) \in S_b \quad (2.12. \delta)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - U \frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + g z + \frac{p}{\rho} = 0 \quad (2.12. \epsilon)$$

Οι συναρτήσεις $\varphi = \varphi(x, z, t)$, $n = n(x, t)$, $\bar{r} = \bar{r}(t)$, $\bar{n} = \bar{n}(t)$ και οι χωρικές παραγωγίσεις νοούνται πλέον ως προς το κινούμενο σύστημα. Η έκφραση (2.12.γ) προκύπτει μετά τον συνδυασμό των συνθηκών ελεύθερης επιφάνειας.

Στο σημείο αυτό εισάγεται ο συμβολισμός, βλ. σχέσεις (2.6),

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{HD} + \mathbf{F}_{RD} = (\bar{F}_{HD}, \bar{K}_{HD}) + (\bar{F}_{RD}, \bar{K}_{RD}) \quad (2.13)$$

όπου \mathbf{F}_{HD} το διάνυσμα των υδροδυναμικών φορτίσεων και \mathbf{F}_{RD} το διάνυσμα του υπολειπόμενου⁽¹³⁾ όρου της φόρτισης.

Οι αναπτυσσόμενες στο πλοίο υδροδυναμικές φορτίσεις μπορούν να αναπαρασταθούν μέσω του ολοκληρώματος του χρονικά μεταβαλλόμενου όρου της πίεσης⁽¹⁴⁾ πάνω στο βρεχόμενο τμήμα της γάστρας του πλοίου,

$$\bar{F}_{HD} = - \iint_{S_b} p_{HD} \bar{n} dS \quad (2.14. \alpha)$$

και

$$\bar{K}_{HD} = - \iint_{S_b} p_{HD} \bar{r} \times \bar{n} dS \quad (2.14. \beta)$$

όπου p_{HD} η υδροδυναμική συνιστώσα της πίεσης, η οποία με χρήση της εξίσωσης Bernoulli (2.12.ε) μπορεί να εκφραστεί ως ακολούθως,

$$p_{HD} = -\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} - U \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi - \frac{1}{2} \rho (\nabla \varphi)^2 \quad (2.15)$$

Η επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών που διαμορφώνεται από την εξίσωση Laplace –σχέση (2.12.α)– συνοδεία των συνοριακών συνθηκών –σχέσεις (2.12.β) έως (2.12.δ)– θα μπορούσε να οδηγήσει στη μορφή της συνάρτησης δυναμικού από την οποία, μέσω των εκφράσεων (2.14) και (2.15), θα προέκυπταν οι υδροδυναμικές φορτίσεις.

Το πρόβλημα όμως δεν είναι διαχειρίσιμο⁽¹⁵⁾ στην ως έχουσα μορφή του. Η δυσκολία οφείλεται τόσο στη μη γραμμικότητα της συνθήκης στην ελεύθερη επιφάνεια, όσο και στη σύζευξη του υδροδυναμικού με το κινηματικό πρόβλημα (2.6). Το τελευταίο γίνεται αντιληπτό μετά από παρατήρηση της συνθήκης στο βυθισμένο τμήμα της

(13) Στο μέρος αυτό, το οποίο περιλαμβάνει το σύνολο των φορτίσεων που αναφέρθηκαν σε προηγούμενη παράγραφο, έχουν ενσωματωθεί και οι υδροστατικές φορτίσεις.

(14) Η υπόθεση για το μη συνεκτικό της ροής επιτρέπει τον υπολογισμό φορτίσεων οι οποίες εμφανίζονται ως αποτέλεσμα του εφαρμοζόμενου, στο βυθισμένο τμήμα της γάστρας, πεδίου ορθών τάσεων (πίεσεων). Οι φορτίσεις λόγω διατμητικών (συνεκτικών) τάσεων μπορούν να ενσωματωθούν στο υπολειπόμενο τμήμα της φόρτισης και να μοντελοποιηθούν μέσω διαφορετικών θεωρήσεων.

(15) Υπό την έννοια της εξαγωγής λύσης σε κλειστή μορφή.

γάστρας (το δυναμικό ταχύτητας είναι συζευγμένο με τις κινήσεις του πλοίου) και των εξισώσεων κίνησης (2.6) – οι εξισώσεις είναι συζευγμένες με το δυναμικό ταχύτητας μέσω των υδροδυναμικών φορτίσεων. Η αποσύζευξη του υδροδυναμικού από το κινηματικό πρόβλημα πραγματοποιείται σε δύο βήματα.

2.4.2.2 ΓΡΑΜΜΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ (ΒΗΜΑ ΠΡΩΤΟ)

Θεωρούμε την κάτωθι μορφή για το δυναμικό ταχύτητας,

$$\varphi(x, z, t) = \varphi_s(x, z) + \varphi_u(x, z, t) \quad (2.16)$$

όπου $\varphi_s(x, z)$ το μόνιμο τμήμα⁽¹⁶⁾ της συνάρτησης δυναμικού και $\varphi_u(x, z, t)$ μια μη μόνιμη διαταραχή – ως αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης πλοίου και κυματισμών.

Υποθέτοντας ότι, πρώτον, η συνάρτηση $n = n(x, t)$ της ανύψωσης αποτελεί διαταραχή⁽¹⁷⁾ του επιπέδου ηρεμίας της θάλασσας, δεύτερον, η γάστρα του πλοίου είναι λεπτόγραμμη, και τρίτον, το πλοίο εκτελεί ταλαντώσεις απειροστού πλάτους γύρω από τη μέση θέση του⁽¹⁸⁾, γραμμικοποιούμε το πρόβλημα (2.12) το οποίο διατυπώνεται τελικά ως ακολούθως,

$$\nabla^2 \varphi_s = 0, \quad \nabla^2 \varphi_u = 0, \quad (x, z) \in \mathbb{R} \times (-d, 0) \quad (2.17. \alpha)$$

$$\frac{\partial \varphi_s}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_u}{\partial z} = 0, \quad z = -d \quad (2.17. \beta)$$

$$U^2 \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial x^2} + g \frac{\partial \varphi_s}{\partial z} = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \varphi_u + g \frac{\partial \varphi_u}{\partial z} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad z = 0 \quad (2.17. \gamma)$$

$$\nabla \varphi_s \cdot \bar{n} = \bar{v} \cdot \bar{n}, \quad \nabla \varphi_u \cdot \bar{n} = (\bar{u} + \bar{v} \times \bar{\theta} + \bar{\Omega} \times \bar{r}) \cdot \bar{n}, \quad (x, z) \in S_b \quad (2.17. \delta)$$

όπου,

$$\bar{v} = (U, 0, 0)$$

$$\bar{u} = (u_1, u_2, u_3) \text{ και}$$

S_b η βρεχόμενη επιφάνεια της γάστρας στη μέση θέση της τελευταίας,

ενώ η εξίσωση Bernoulli λαμβάνει τη μορφή,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - U \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi + g z + \frac{p}{\rho} = 0 \quad (2.18)$$

Η υδροδυναμική συνιστώσα της πίεσης δίνεται στην περίπτωση αυτή από τη σχέση,

$$p_{HD} = -\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} - U \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi \quad (2.19)$$

συνεπώς, οι υδροδυναμικές φορτίσεις μπορούν να εκφραστούν ως ακολούθως,

(16) Η συνάρτηση $\varphi_s(x, z)$ περιγράφει το αναπτυσσόμενο μόνιμο (ως προς το κινούμενο σύστημα συντεταγμένων) πεδίο ροής λόγω της μόνιμης κίνησης του πλοίου πάνω στην αδιατάρακτη ελεύθερη επιφάνεια.

(17) Οι τιμές της συνάρτησης $n = n(x, t)$ έχουν δηλαδή χαρακτήρα «μικρών» αριθμών.

(18) Τα επιμέρους δυναμικά $\varphi_s(x, z)$ και $\varphi_u(x, z, t)$ –καθώς και οι παράγωγοι αυτών– αποκτούν, μέσω της δεύτερης και της τρίτης (αντίστοιχα) υπόθεσης, χαρακτήρα μικρών μεγεθών.

$$F_{HDi} = \rho \iint_{S_b} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} - U \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi \right\} n_i dS, \quad i = 1(1)6 \quad (2.20)$$

όπου F_{HDi} , $i = 1(1)6$ οι συνιστώσες του όρου της υδροδυναμικής φόρτισης,

n_i , $i = 1(1)3$ οι συνιστώσες του διανύσματος \bar{n} και

$$(n_4, n_5, n_6) = (r_2 n_3 - r_3 n_2, r_3 n_1 - r_1 n_3, r_1 n_2 - r_2 n_1)$$

2.4.2.3 ΑΠΟΣΥΝΘΕΣΗ ΤΟΥ ΜΗ ΜΟΝΙΜΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ (ΒΗΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟ)

Η συνθήκη γάστρας (2.17.δ) μας οδηγεί στην ακόλουθη γραμμική αποσύνθεση του μη μόνιμου όρου της συνάρτησης δυναμικού,

$$\begin{aligned} \varphi_u(x, z, t) &= \varphi_{ID}(x, z, t) + \varphi_R(x, z, t) \\ &= [\varphi_I(x, z, t) + \varphi_D(x, z, t)] + \sum_{j=1}^6 \varphi_{Rj}(x, z, t) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Στην ανωτέρω σχέση ο όρος φ_{ID} συμβολίζει την ανεξάρτητη των κινήσεων του πλοίου συνιστώσα του δυναμικού ταχύτητας, η οποία περιλαμβάνει το *δυναμικό του αδιατάρακτου προσπίπτοντος κυματισμού* (φ_I) καθώς και το *δυναμικό περίθλασης* (φ_D)· το τελευταίο περιγράφει την αλλοίωση του κυματικού πεδίου λόγω της παρουσίας του πλοίου στη μέση θέση του υπό πλήρη κινηματικό περιορισμό⁽¹⁹⁾. Ο όρος φ_R αναφέρεται ως *συνολικό δυναμικό ακτινοβολίας* και περιγράφει το πεδίο των αναπτυσσόμενων πάνω στην αδιατάρακτη ελεύθερη επιφάνεια κυματισμών λόγω της εξαναγκασμένης ταλάντωσης του πλοίου.

Υποθέτοντας αρμονικό χαρακτήρα για το διεγείρον αίτιο (προσπίπτον κυματισμός) και δεδομένης της γραμμικής φύσης του προβλήματος, οι αποκρίσεις του υδρομηχανικού συστήματος αναμένονται αρμονικές. Εισάγουμε τον συμβολισμό,

$$\varphi_I(x, z, t) = \Re \left\{ \hat{\varphi}_I(x, z) e^{i\omega t} \right\} \quad (2.22. \alpha)$$

όπου η συνάρτηση $\hat{\varphi}_I(x, z)$ παίζει τον ρόλο του μιγαδικού πλάτους του χρονικά αρμονικού δυναμικού $\varphi_I(x, z, t)$. Με ακριβώς ανάλογο τρόπο,

$$\varphi_D(x, z, t) = \Re \left\{ \hat{\varphi}_D(x, z) e^{i\omega t} \right\} \quad (2.22. \beta)$$

$$\varphi_{Rj}(x, z, t) = \Re \left\{ \hat{\varphi}_{Rj}(x, z) e^{i\omega t} \right\}, \quad j = 1(1)6 \quad (2.22. \gamma)$$

$$\xi_j(t) = \Re \left\{ \hat{\xi}_j e^{i\omega t} \right\}, \quad j = 1(1)6 \quad (2.22. \delta)$$

$$\frac{d^v \xi_j(t)}{dt^v} = \Re \left\{ (i\omega)^v \hat{\xi}_j e^{i\omega t} \right\}, \quad j = 1(1)6, \quad v = 1, 2, \dots \quad (2.22. \epsilon)$$

Κάνοντας χρήση των σχέσεων (2.21) και (2.22) το πρόβλημα (2.17) –όσον αφορά τον μη μόνιμο όρο του δυναμικού– γράφεται ως ακολούθως,

$$\nabla^2 \left(\hat{\varphi}_I + \hat{\varphi}_D + \sum_{j=1}^6 \hat{\varphi}_{Rj} \right) = 0, \quad (x, z) \in \mathbb{R} \times (-d, 0) \quad (2.23. \alpha)$$

(19) Το πλοίο «αναγκάζεται» να παραμένει ακίνητο.

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\hat{\varphi}_I + \hat{\varphi}_D + \sum_{j=1}^6 \hat{\varphi}_{Rj} \right) = 0, \quad z = -d \quad (2.23.β)$$

$$\left(i\omega - U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \left(\hat{\varphi}_I + \hat{\varphi}_D + \sum_{j=1}^6 \hat{\varphi}_{Rj} \right) + g \frac{\partial}{\partial z} \left(\hat{\varphi}_I + \hat{\varphi}_D + \sum_{j=1}^6 \hat{\varphi}_{Rj} \right) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad z = 0 \quad (2.23.γ)$$

$$\nabla \left(\hat{\varphi}_I + \hat{\varphi}_D + \sum_{j=1}^6 \hat{\varphi}_{Rj} \right) \bar{n} = i\omega \sum_{j=1}^6 \xi_j n_j - U \xi_6 n_2 + U \xi_5 n_3, \quad (x, z) \in S_b \quad (2.23.δ)$$

Η ανωτέρω μορφή της συνθήκης γάστρας υποδεικνύει τη θεώρηση,

$$\hat{\varphi}_{Rj} = \hat{\varphi}_j \xi_j, \quad j = 1(1)6 \quad (2.24)$$

μέσω της οποίας η σχέση (2.23.δ) αναδιατυπώνεται ως ακολούθως,

$$\begin{aligned} \nabla(\hat{\varphi}_I + \hat{\varphi}_D) \bar{n} + \sum_{j=1}^4 (\nabla \hat{\varphi}_j \bar{n} - i\omega n_j) \xi_j + (\nabla \hat{\varphi}_5 \bar{n} - i\omega n_5 - U n_3) \xi_5 \\ + (\nabla \hat{\varphi}_6 \bar{n} - i\omega n_6 + U n_2) \xi_6 = 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

Η απαίτηση ικανοποίησης της τελευταίας έκφρασης για κάθε τιμή των πλατών ξ_j , $j = 1(1)6$ οδηγεί στο διαχωρισμό της συνθήκης γάστρας σε επιμέρους συνθήκες για κάθε ένα από τα δυναμικά $\hat{\varphi}_D$ και $\hat{\varphi}_j$, $j = 1(1)6$,

$$\nabla \hat{\varphi}_D \bar{n} = -\nabla \hat{\varphi}_I \bar{n} \quad (2.26.α)$$

$$\nabla \hat{\varphi}_j \bar{n} = i\omega n_j + U m_j, \quad j = 1(1)6 \quad (2.26.β)$$

όπου,

$$m_j = 0, \quad j = 1(1)4, \quad m_5 = n_3 \quad \text{και} \quad m_6 = -n_2$$

Τα προβλήματα περίθλασης και ακτινοβολίας μπορούν στο σημείο αυτό να διατυπωθούν ως εξής⁽²⁰⁾,

$$\nabla^2 \hat{\varphi}_D = 0, \quad (x, z) \in \mathbb{R} \times (-d, 0) \quad (2.27.α)$$

$$\frac{\partial \hat{\varphi}_D}{\partial z} = 0, \quad z = -d \quad (2.27.β)$$

$$\left(i\omega - U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \hat{\varphi}_D + g \frac{\partial \hat{\varphi}_D}{\partial z} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad z = 0 \quad (2.27.γ)$$

$$\nabla \hat{\varphi}_D \bar{n} = -\nabla \hat{\varphi}_I \bar{n}, \quad (x, z) \in S_b \quad (2.27.δ)$$

και

$$\nabla^2 \hat{\varphi}_j = 0, \quad j = 1(1)6, \quad (x, z) \in \mathbb{R} \times (-d, 0) \quad (2.28.α)$$

(20) Το πρόβλημα του αδιατάρακτου πεδίου θα παρατεθεί σε επόμενο κεφάλαιο.

$$\frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial z} = 0, \quad j = 1(1)6, \quad z = -d \quad (2.28. \beta)$$

$$\left(i\omega - U \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \hat{\varphi}_j + g \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial z} = 0, \quad j = 1(1)6, \quad x \in \mathbb{R}, \quad z = 0 \quad (2.28. \gamma)$$

$$\nabla \hat{\varphi}_j \bar{n} = i\omega n_j + m_j, \quad j = 1(1)6, \quad (x, z) \in S_b \quad (2.28. \delta)$$

Η ανεξαρτησία των επιμέρους δυναμικών ακτινοβολίας $\hat{\varphi}_j$, $j = 1(1)6$ από τις κινήσεις του πλοίου καθιστά δυνατή την αποσύζευξη των υδροδυναμικών εξισώσεων (2.17) από τις εξισώσεις κίνησης (2.6).

2.4.3 ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΤΩΝ ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΦΟΡΤΙΣΕΩΝ

Η εισαγωγή των εκφράσεων (2.21) και (2.24) στη σχέση (2.20) οδηγεί στην κάτωθι μορφή για τις υδροδυναμικές φορτίσεις,

$$\hat{F}_{HDj} = \rho \iint_{S_b} \left(i\omega - U \frac{\partial}{\partial x}\right) (\hat{\varphi}_I + \hat{\varphi}_D) n_j dS + \rho \iint_{S_b} \left(i\omega - U \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\sum_{k=1}^6 \hat{\xi}_k \hat{\varphi}_k\right) n_j dS, \quad j = 1(1)6 \quad (2.29)$$

ή

$$\hat{F}_{HDj} = \hat{F}_{Wj} + \hat{F}_{Rj}, \quad j = 1(1)6 \quad (2.30)$$

όπου οι όροι \hat{F}_{Wj} και \hat{F}_{Ri} , $i = 1, (1)6$ αναφέρονται ως *διεγείρουσες* –λόγω των κυματισμών– φορτίσεις και φορτίσεις *ακτινοβολίας* (ή υδρομηχανικές φορτίσεις) αντίστοιχα. Οι διεγείρουσες φορτίσεις αναλύονται περαιτέρω στις φορτίσεις *Froude-Krylov* (\hat{F}_{Ij}) και φορτίσεις *περίθλασης* (\hat{F}_{Dj}),

$$\hat{F}_{Ij} = \rho \iint_{S_b} \left(i\omega - U \frac{\partial}{\partial x}\right) \hat{\varphi}_I n_j dS, \quad j = 1(1)6 \quad (2.31. \alpha)$$

και

$$\hat{F}_{Dj} = \rho \iint_{S_b} \left(i\omega - U \frac{\partial}{\partial x}\right) \hat{\varphi}_D n_j dS, \quad j = 1(1)6 \quad (2.31. \beta)$$

ενώ θέτοντας,

$$T_{jk} = \rho \iint_{S_b} \left(i\omega - U \frac{\partial}{\partial x}\right) \hat{\varphi}_k n_j dS, \quad j, k = 1(1)6 \quad (2.32. \alpha)$$

και

$$T_{jk} = \omega^2 A_{jk} - i\omega B_{jk}, \quad j, k = 1(1)6 \quad (2.32. \beta)$$

οι υδρομηχανικές φορτίσεις εκφράζονται ως ακολούθως⁽²¹⁾,

$$\hat{F}_{Rj} = \sum_{k=1}^6 \left\{ \hat{\xi}_k \left[\rho \iint_{S_b} \left(i\omega - U \frac{\partial}{\partial x}\right) \hat{\varphi}_k n_j dS \right] \right\} = \sum_{k=1}^6 \hat{\xi}_k T_{jk}, \quad j = 1(1)6 \quad (2.33. \alpha)$$

(21) Οι συντελεστές A_{jk} και B_{jk} , $j, k = 1(1)6$ ονομάζονται *πρόσθετοι αδρανειακοί συντελεστές* (ή πρόσθετες μάζες) και *συντελεστές απόσβεσης ακτινοβολίας* – αντίστοιχα.

ñ

$$\hat{F}_{Rj} = \sum_{k=1}^6 \left[-(i\omega)^2 \hat{\xi}_k A_{jk} - (i\omega) \hat{\xi}_k B_{jk} \right], \quad j = 1(1)6 \quad (2.33.\beta)$$

3 ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΟΙ ΚΥΜΑΤΙΣΜΟΙ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ

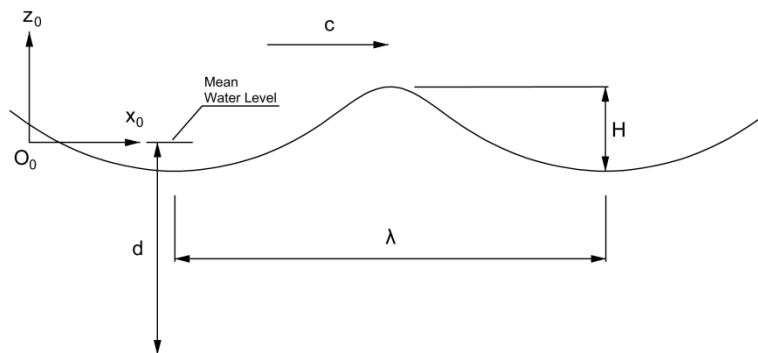
3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι επιφανειακοί θαλάσσιοι κυματισμοί⁽¹⁾ εντάσσονται σε ένα ευρύτερο σύνολο κυματικών φαινομένων τα οποία πραγματεύεται ο κλάδος της μηχανικής των ρευστών. Το μαθηματικό πρόβλημα διατυπώνεται με τη βοήθεια εξισώσεων διατήρησης, καταστατικών εξισώσεων και κατάλληλων οριακών συνθηκών. Η επίλυση του αποσκοπεί στον πλήρη προσδιορισμό των κινηματικών και δυναμικών χαρακτηριστικών του κυματικού πεδίου. Στη γενική του όμως μορφή το πρόβλημα δεν επιδέχεται αναλυτική λύση. Η εισαγωγή απλοποιητικών παραδοχών και η ανάπτυξη μοντέλων πάνω στη βάση αυτών παρέχουν προσεγγιστικές λύσεις σε κλειστή μορφή, ενώ τα μοντέλα παραμένουν αξιόπιστα εφόσον οι περιορισμοί που επιβάλλονται με την εισαγωγή των απλουστεύσεων δεν παραβιάζονται⁽²⁾.

Στα πλαίσια της σύντομης ανάλυσης που ακολουθεί προσεγγίζεται ντετερμινιστικά το φαινόμενο των επιφανειακών κυματισμών βαρύτητας θεωρώντας πως στην επιφάνεια της θάλασσας διαδίδονται –προς μία κατεύθυνση και χωρίς να μεταβάλλουν τη μορφή τους– κυματισμοί με περίοδο T και ύψος H .

3.2 ΠΕΔΙΑΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Εισάγονται στο σημείο αυτό (όπως και στην περίπτωση του προηγούμενου κεφαλαίου) οι υποθέσεις για το ασυμπύεστο και τη μη συνεκτική φύση του θαλασσινού νερού. Το πεδίο ροής θεωρείται αστρόβιλο και δισδιάστατο. Η αρχή του συστήματος αναφοράς τοποθετείται στο επίπεδο της αδιατάρακτης ελεύθερης επιφάνειας (Σχήμα 3.1), ενώ ο οριζόντιος πυθμένας ταυτίζεται με το επίπεδο $z = -d$.



Σχήμα 3.1 : Γεωμετρία του προβλήματος

Το πρόβλημα συνοριακών τιμών διαμορφώνεται από την εξίσωση της συνέχειας, τη συνθήκη στον αδιαπέραστο πυθμένα και την κινηματική και δυναμική συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια⁽³⁾⁽⁴⁾⁽⁵⁾,

$$\nabla^2 \varphi = 0, \quad (x, z) \in \mathbb{R} \times (-d, n) \quad (3.1. \alpha)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad z = -d \quad (3.1. \beta)$$

(1) Ο όρος χρησιμοποιείται στα πλαίσια της ενότητας αυτής για να περιγράψει τους διαδιδόμενους στην επιφάνεια της θάλασσας κυματισμούς με περίοδο από 3 έως 25 περίπου δευτερόλεπτα.

(2) Υπάρχουν παρ' όλα αυτά περιπτώσεις μοντέλων που δίνουν ικανοποιητικές προβλέψεις και εκτός της προβλεπόμενης περιοχής ισχύος τους.

(3) Όπως αυτές έχουν διατυπωθεί κατά την ανάπτυξη του υδροδυναμικού προβλήματος της παραγράφου 2.4.

(4) Στην παρούσα ενότητα χρησιμοποιούνται τα σύμβολα $x, z, \partial/\partial x$ και $\partial/\partial z$ αντί των $x_0, z_0, \partial/\partial x_0$ και $\partial/\partial z_0$.

(5) Ο συμβολισμός $n = n(x, t)$ ο οποίος εμφανίζεται ως το όριο του γεωμετρικού χωρίου πάνω στο οποίο επιβάλλονται οι συνθήκες ελεύθερης επιφάνειας χρησιμοποιείται για να περιγράψει την ανύψωση της επιφάνειας της θάλασσας.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad z = n \quad (3.1. \gamma)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + g n = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad z = n \quad (3.1. \delta)$$

και συνοδεύεται από την εξίσωση Bernoulli,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + g z + \frac{p}{\rho} = 0 \quad (3.2)$$

Η ρητή καθώς και η πεπλεγμένη⁽⁶⁾ μη γραμμικότητα των δύο συνθηκών στην ελεύθερη επιφάνεια δεν επιτρέπουν την αναλυτική αντιμετώπιση του προβλήματος (3.1). Οι κυματικές θεωρίες που αναπτύσσονται από το σημείο αυτό παρακάμπτουν τις δυσκολίες λύνοντας κάποιο προσεγγιστικό σε κάθε περίπτωση πρόβλημα.

Στις παραγράφους που ακολουθούν θα παρατεθούν στοιχεία της γραμμικής θεωρίας κυματισμών καθώς και της θεωρίας κυματισμών κατά Stokes. Στην πρώτη περίπτωση το πρόβλημα γραμμικοποιείται πλήρως, ενώ στα πλαίσια της δεύτερης το δυναμικό και η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας αναπτύσσονται σε σειρές διαταραχών μέσω των οποίων καθορίζεται η τάξη του μοντέλου – η ικανοποίηση παρ' όλα αυτά των συνθηκών στην ελεύθερη επιφάνεια ακολουθεί τη φιλοσοφία της γραμμικής θεώρησης, όσον αφορά στη διαχείριση του προβλήματος της πεπλεγμένης μη γραμμικότητας.

Εκτός των δύο ανωτέρω προσεγγίσεων υπάρχουν και άλλες δημοφιλείς θεωρίες που αναπτύσσονται πάνω στον ίδιο πυρήνα, με πιο σημαντικές ίσως αυτές της θεωρίας ελλειπτικών κυμάτων (Cnoidal Waves) και των μεθόδων προσέγγισης κατά Fourier (Fourier approximation methods).

3.3 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ (ΚΥΜΑΤΙΣΜΟΙ AIRY)

Στα πλαίσια της γραμμικής θεώρησης υποθέτουμε αρμονικό χαρακτήρα για το πεδίο της ανύψωσης ήτοι,

$$n(x, t) = \frac{H}{2} \cos(kx - \omega t), \quad (3.3)$$

όπου,

H το ύψος κύματος,

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ο αριθμός κύματος,

λ το μήκος κύματος και

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ η κυκλική συχνότητα κύματος.

Υπενθυμίζονται εδώ δύο ακόμα μεγέθη τα οποία συνοδεύουν την έννοια του αρμονικού προοδευτικού κυματισμού,

το πλάτος, $\alpha = \frac{H}{2}$ και

η ταχύτητα φάσης του κύματος, $c = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$.

Υπό την υπόθεση κυματισμών απειροστού πλάτους ($\alpha/\lambda \ll 1$) το πρόβλημα (3.1) μπορεί να γραμμικο-

(6) Η μορφή της ελεύθερης επιφάνειας πάνω στην οποία θα πρέπει να ικανοποιηθούν οι δύο συνθήκες δεν είναι γνωστή και πρέπει να προκύψει ως μέρος της λύσης (Free Boundary Problem).

ποιηθεί. Οι συνθήκες στην ελεύθερη επιφάνεια γράφονται σε πρώτο στάδιο στη μορφή $f(x, z, t) = 0$ και αναπτύσσονται κατά Taylor στη θέση $z = 0$,

$$f(x, z, t) = f(x, 0, t) + n \frac{\partial f}{\partial z}(x, 0, t) + \frac{n^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, 0, t) + O(n^3). \quad (3.4)$$

Η αντιμετώπιση της δυσκολίας που εισάγει η πεπλεγμένη μη γραμμικότητα συνίσταται στη θεώρηση μόνο του πρώτου όρου της ανωτέρω σειράς λόγω του ότι $n \sim \alpha \ll \lambda$. Σε δεύτερο στάδιο οι ίδιες οριακές συνθήκες γραμμικοποιούνται θεωρώντας τη σχετική τάξη μεγέθους των όρων που υπεισέρχονται σε αυτές.

Το πρόβλημα διατυπώνεται μετά το πέρας της ανωτέρω διαδικασίας ως ακολούθως,

$$\nabla^2 \varphi = 0, \quad (x, z) \in \mathbb{R} \times (-d, 0) \quad (3.5. \alpha)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad z = -d \quad (3.5. \beta)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad z = 0 \quad (3.5. \gamma)$$

ενώ συμπληρώνεται από τη γραμμικοποιημένη εξίσωση Bernoulli,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + g z + \frac{p}{\rho} = 0 \quad (3.6)$$

και τον περιορισμό (κυματισμοί απειροστού πλάτους),

$$\frac{\alpha}{\lambda} \ll 1$$

Το πρόβλημα (3.5) επιλύεται μέσω της μεθόδου χωρισμού των μεταβλητών και λαμβάνεται η ακόλουθη αναλυτική έκφραση για το δυναμικό ταχύτητας,

$$\varphi(x, z, t) = \frac{H}{2} \frac{g}{\omega} \frac{\cosh[k(z+d)]}{\cosh(kd)} \sin(kx - \omega t) \quad (3.7)$$

Σε συνδυασμό με τις σχέσεις (2.13) η ανωτέρω έκφραση παρέχει πλήρως τα κινηματικά χαρακτηριστικά του πεδίου⁽⁷⁾, ενώ με χρήση της (3.6) καταλήγουμε στην κάτωθι μορφή για το πεδίο πιέσεων⁽⁸⁾,

$$p(x, z, t) = -\rho g z + \rho g \frac{H}{2} \frac{\cosh[k(z+d)]}{\cosh(kd)} \cos(kx - \omega t) \quad (3.8)$$

Η τελευταία σχέση που θα παρατεθεί στην ενότητα της γραμμικής θεωρίας είναι γνωστή και ως εξίσωση διασποράς· μέσω αυτής καταδεικνύεται η συναρτησιακή εξάρτηση της κυκλικής συχνότητας από τον αριθμό κύματος –για δεδομένο βάθος νερού– και αποκαλύπτεται η διασκορπιστική φύση του μέσου⁽⁹⁾ στο οποίο διαδίδονται οι κυματισμοί βαρύτητας. Στα πλαίσια λοιπόν των κυμάτων Airy,

(7) Οι τροχιές των σωματιδίων του ρευστού προκύπτουν από την ολοκλήρωση των σχέσεων (2.13)· η παραγωγή των τελευταίων οδηγεί στο πεδίο επιταχύνσεων.

(8) Παρατηρείστε τη συνεισφορά δύο όρων, ενός στατικού και ενός δυναμικού, στο μέγεθος της πίεσης.

(9) Ρευστό με ελεύθερη επιφάνεια.

$$\omega^2 = g k \tanh(k d) \quad (3.9)$$

ή κάνοντας χρήση της γνωστής σχέσης για την ταχύτητα φάσης του κύματος,

$$c^2 = \frac{g}{k} \tanh(k d) \quad (3.10)$$

3.4 ΘΕΩΡΙΑ ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ ΚΑΤΑ STOKES

Η κεντρική ιδέα της θεωρίας Stokes αφορά στην ανάπτυξη των εμπλεκόμενων στο πρόβλημα (3.1) μεγεθών σε σειρές διαταραχών· η λύση θα περιγράφεται δηλαδή μέσω εκφράσεων της μορφής,

$$\varphi(x, z, t) = \sum_1^{\nu} \varepsilon^{\nu} \varphi^{(\nu)}(x, z, t) \quad (3.11)$$

και

$$n(x, z, t) = \sum_1^{\nu} \varepsilon^{\nu} n^{(\nu)}(x, z, t) \quad (3.12)$$

με τον εκθέτη ^(ν) να δηλώνει το ν-οστό όρο ανάπτυξης και την τάξη του μοντέλου να καθορίζεται από την τιμή του τελευταίου. Ως παράμετρος διαταραχής μπορεί να χρησιμοποιηθεί το μέγεθος $\varepsilon = k \frac{H}{2}$ ⁽¹⁰⁾.

Η αναλυτική μη γραμμικότητα των συνθηκών στην ελεύθερη επιφάνεια λαμβάνεται υπόψη αναπτύσσοντας το δυναμικό ταχύτητας και τις παραγώγους του σε σειρές Taylor γύρω από τη θέση της αδιατάρακτης επιφάνειας. Τα αναπτύγματα εισάγονται στις συνθήκες (2.11.δ) και (2.11.ε) και οι όροι διατάσσονται σε δυνάμεις της παραμέτρου διαταραχής. Η απαίτηση ισχύος των συνθηκών για κάθε τιμή του ε οδηγεί στην εξίσωση των συντελεστών των δυνάμεων με το μηδέν και στην κατασκευή, μέσω της διαδικασίας αυτής, των συνθηκών ν-τάξης⁽¹¹⁾ για την ελεύθερη επιφάνεια.

Το πρόβλημα πρώτης τάξης συμπίπτει, όπως γίνεται σαφές, με το πρόβλημα (3.5). Στο σημείο αυτό δεν κρίνεται σκόπιμο να παρατεθούν προβλήματα ανώτερης τάξης λόγω της έκτασης και της πολυπλοκότητας τους⁽¹²⁾. Σημειώνεται πάντως πως για την απόκτηση λύσης στο ν-τάξης πρόβλημα απαιτείται η γνώση των λύσεων για τις τάξεις έως και $\nu - 1$. Το πεδίο πιέσεων υπολογίζεται μέσω της έκφρασης που έχει αποκτηθεί για το δυναμικό ταχύτητας και της εξίσωσης Bernoulli (3.2), από την οποία αμελούνται όροι τάξης μεγαλύτερης του ν .

Ευρεία εφαρμογή σε προβλήματα στα οποία υπεισέρχεται η δράση θαλάσσιων κυματισμών βρίσκει η θεωρία πέμπτης τάξης. Ένα εύχρηστο μοντέλο με καλές ιδιότητες σύγκλισης έχει παρουσιαστεί σχετικά πρόσφατα από τον Fenton (Fenton 1985). Στη γενική του μορφή το μοντέλο περιλαμβάνει και την επίδραση θαλάσσιου ρεύματος, η οποία στα πλαίσια της εργασίας αυτής θα αμεληθεί.

Σύμφωνα λοιπόν με το προαναφερθέν μοντέλο το δυναμικό ταχύτητας περιγράφεται από την έκφραση,

$$\varphi(x, z, t) = C_0 (g/k^3)^{1/2} \sum_{i=1}^5 \varepsilon^i \sum_{j=1}^i A_{ij} \cosh[j k(z+d)] \sin[j k(x - c t)] + \dots \quad (3.13)$$

ενώ η ανύψωση της επιφάνειας της θάλασσας δίνεται από τη σχέση,

(10) Στην πρωτότυπη εργασία του Stokes (Stokes, 1847) χρησιμοποιείται το μέγεθος $\varepsilon = \alpha k$, το οποίο αναφέρεται στο πλάτος της θεμελιώδους συχνότητας και όχι στο ήμισυ του ύψους του κύματος.

(11) Μέσω των συντελεστών της ν-οστής δύναμης του ε .

(12) Αν και η αίσθηση εποπτείας που δημιουργείται στο μελετητή του πρωτοτάξιου προβλήματος δεν χάνεται τελείως σε αυτό της δεύτερης τάξης.

$$n(x, t) = (1/k) \sum_{i=1}^5 \varepsilon^i \sum_{j=1}^i B_{ij} \cos[j k(x - c t)] + \dots \quad (3.14)$$

Μέσω του θεωρήματος Bernoulli παρέχεται η μορφή του πεδίου πιέσεων,

$$p(x, z, t) = \rho R - \rho g z - \frac{1}{2} [(u - c)^2 + w^2] \quad (3.15)$$

όπου R η σταθερά Bernoulli με,

$$R = (g/k) \left[\frac{1}{2} C_0^2 + \varepsilon^2 E_2 + \varepsilon^4 E_4 + \dots \right] \quad (3.16)$$

ενώ η εξίσωση διασποράς διατυπώνεται ως ακολούθως,

$$c = (g/k)^{1/2} [C_0 + \varepsilon^2 C_2 + \varepsilon^4 C_4 + \dots] \quad (3.17)$$

Στις ανωτέρω σχέσεις ως παράμετρος διαταραχής έχει χρησιμοποιηθεί το μέγεθος $\varepsilon = k \frac{H}{2}$. Οι εμφανιζόμενοι συντελεστές αποτελούν εκφράσεις των υπερβολικών συναρτήσεων της αδιάστατης παραμέτρου kd . Στις σχέσεις που ακολουθούν χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $S = \text{sech}(2kd)$.

$$A_{11} = 1/\sinh(kd)$$

$$A_{22} = 3S^2/(2(1 - S)^2)$$

$$A_{31} = (-4 - 20S + 10S^2 - 13S^3)/(8 \sinh(kd)(1 - S)^3)$$

$$A_{33} = (-2S^2 + 11S^3)/(8 \sinh(kd)(1 - S)^3)$$

$$A_{42} = (12S - 14S^2 - 264S^3 - 45S^4 - 13S^5)/(24(1 - S)^5)$$

$$A_{44} = (10S^3 - 174S^4 + 291S^5 + 278S^6)/(48(3 + 2S)(1 - S)^5)$$

$$A_{51} = (-1184 + 32S + 13232S^2 + 21712S^3 + 20940S^4 + 12554S^5 - 500S^6 - 3341S^7 - 670S^8)$$

$$/(64 \sinh(kd)(3 + 2S)(4 + S)(1 - S)^6)$$

$$A_{53} = (4S + 105S^2 + 198S^3 - 1376S^4 - 1302S^5 - 117S^6 + 58S^7)/(32 \sinh(kd)(3 + 2S)(1 - S)^6)$$

$$A_{55} = (-6S^3 + 272S^4 - 1552S^5 + 852S^6 + 2029S^7 + 430S^8)/(64 \sinh(kd)(3 + 2S)(4 + S)(1 - S)^6)$$

$$B_{11} = 1$$

$$B_{22} = \coth(kd)(1 + 2S)/(2(1 - S))$$

$$B_{31} = -3(1 + 3S + 3S^2 + 2S^3)/(8(1 - S)^3)$$

$$B_{33} = -B_{31}$$

$$B_{42} = \coth(kd)(6 - 26S - 182S^2 - 204S^3 - 25S^4 + 26S^5)/(6(3 + 2S)(1 - S)^4)$$

$$B_{44} = \coth(kd)(24 + 92S + 122S^2 + 66S^3 + 67S^4 + 34S^5)/(24(3 + 2S)(1 - S)^4)$$

$$B_{53} = 9(132 + 17S - 2216S^2 - 5897S^3 - 6292S^4 - 2687S^5 + 194S^6 + 467S^7 + 82S^8)$$

$$/(128(3 + 2S)(4 + S)(1 - S)^6)$$

$$B_{55} = 5(300 + 1579S + 3176S^2 + 2949S^3 + 1188S^4 + 675S^5 + 1326S^6 + 827S^7 + 130S^8) / (384(3 + 2S)(4 + S)(1 - S)^6)$$

$$B_{51} = -(B_{53} + B_{55})$$

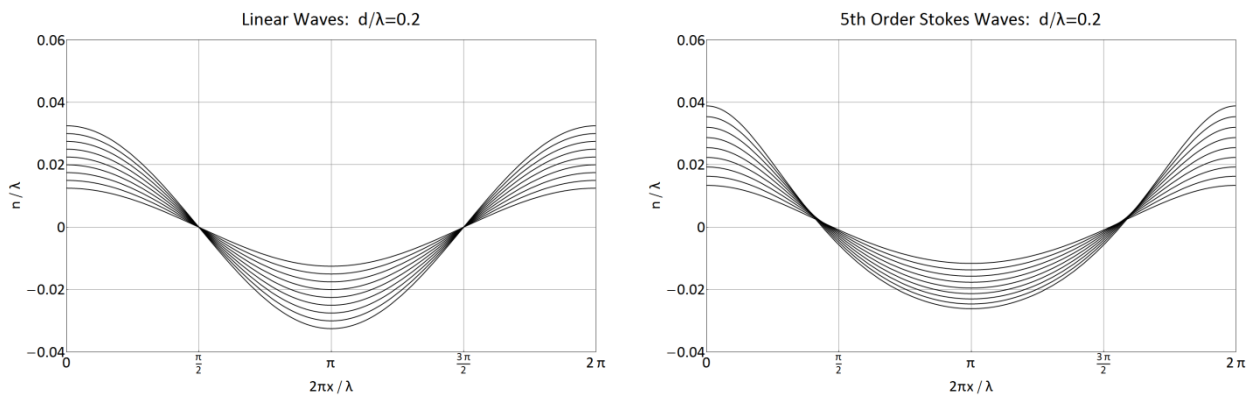
$$C_0 = (\tanh(kd))^{1/2}$$

$$C_2 = (\tanh(kd))^{1/2} (2 + 7S^2) / (4(1 - S)^2)$$

$$C_4 = (\tanh(kd))^{1/2} (4 + 32S - 116S^2 - 400S^3 - 71S^4 + 146S^5) / (32(1 - S)^5)$$

$$E_2 = \tanh(kd)(2 + 2S + 5S^2) / (4(1 - S)^2)$$

$$E_4 = \tanh(kd)(8 + 12S - 152S^2 - 308S^3 - 42S^4 + 77S^5) / (32(1 - S)^5)$$



Σχήμα 3.2 : Ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας για διαφορετικούς λόγους H/λ , γραμμικοί κυματισμοί και κυματισμοί Stokes πέμπτης τάξης

3.5 ΟΡΙΑ ΙΣΧΥΟΣ

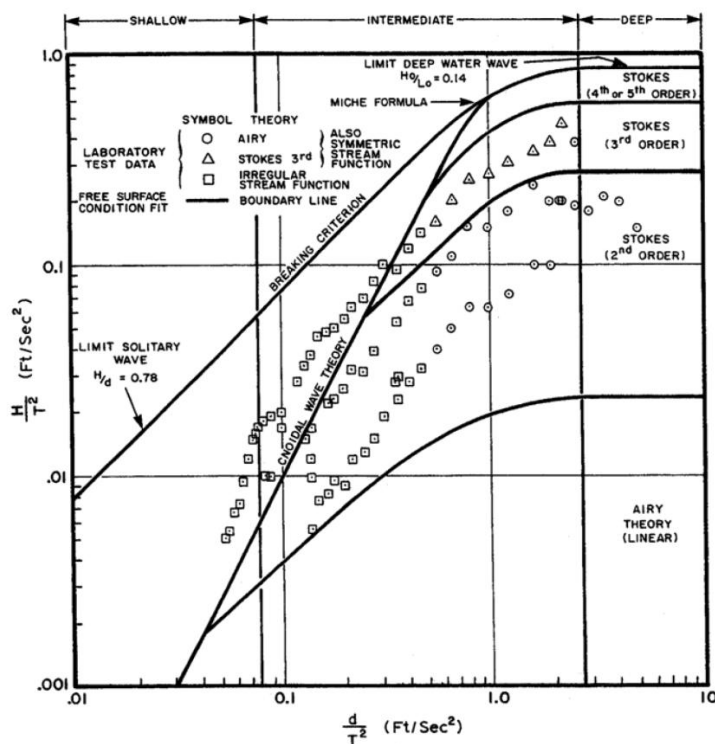
Η περιοχή ισχύος μιας κυματικής θεωρίας μπορεί να καθοριστεί βάσει της αναλυτικής και της πειραματικής εγκυρότητας της. Η πρώτη αναφέρεται στο μέτρο στο οποίο η συγκεκριμένη θεωρία ικανοποιεί το σύνολο των εξισώσεων που συνιστούν το μαθηματικό πρόβλημα – εξισώσεις (3.1). Ωστόσο, η διαπίστωση της αναλυτικής εγκυρότητας δε διασφαλίζει τη συνεπή αναπαράσταση του φυσικού φαινομένου καθώς στο πρόβλημα έχει ενσωματωθεί αριθμός απλοποιητικών παραδοχών. Η πειραματική εγκυρότητα από την άλλη μεριά αναφέρεται στον βαθμό στον οποίο θεωρητικά αποτελέσματα και πειραματικές μετρήσεις συμφωνούν.

Ο Dean [4] αναφέρει ότι η αξιολόγηση της αναλυτικής και της πειραματικής εγκυρότητας διαφορετικών θεωριών θα μπορούσε να κατευθύνει με αποδοτικό τρόπο την έρευνα των κυματικών φαινομένων του θαλάσσιου περιβάλλοντος. Έτσι, εάν μπορούσε σε γενικές γραμμές ναδειχθεί ότι η θεωρία η οποία εμφανίζεται ως η πλέον αναλυτικά έγκυρη αποτελεί και την περισσότερο έγκυρη σε πειραματικό επίπεδο, τότε θα διαπιστωνόταν το αξιόπιστο του μαθηματικού προτύπου. Συνεπώς, το αναλυτικό σφάλμα μιας κυματικής θεωρίας θα αποτελούσε έναν καλό δείκτη της πειραματικής εγκυρότητας της. Εάν μάλιστα η διαφορά της θεωρίας από τα πειραματικά δεδομένα ήταν της ίδιας τάξης με το εκτιμώμενο σφάλμα των πειραματικών μετρήσεων και το γεγονός αυτό αποτελούσε τη γενική εικόνα, τότε η έρευνα θα έπρεπε να κινηθεί προς την κατεύθυνση της βελτίωσης των μετρήσεων. Διαφορετικά –εάν η διαφορά αυτή ήταν αρκετά μεγαλύτερη από το εκτιμώμενο πειραματικό σφάλμα⁽¹³⁾– νέες προσπάθειες θα έπρεπε να καταβληθούν πάνω στη διατύπωση και την επίλυση του προβλήματος.

(13) Ειδικά στον βαθμό εκείνον που θα επηρέαζε τις οποιοσδήποτε μηχανολογικές εφαρμογές.

Ο Chakrabarti [1] βασιζόμενος στις εργασίες των Dean (1968) και LeMehaute (1970) προσδιορίζει –μέσω της παραμέτρου Ursell⁽¹⁴⁾– τα όρια ισχύος διαφορετικών κυματικών θεωριών (σχήμα 3.3). Τα πειραματικά δεδομένα –στο ίδιο διάγραμμα– επαληθεύουν την αναλυτική εγκυρότητα της θεωρίας Stokes τρίτης τάξης, ενώ η γραμμική θεωρία εμφανίζεται να δίνει καλά αποτελέσματα και εκτός της περιοχής ισχύος της. Σημειώνεται ότι η πειραματική εγκυρότητα των θεωριών βασίζεται στη σύγκριση των προφίλ της δυναμικής πίεσης.

Θα πρέπει, κλείνοντας την ενότητα αυτή, να επαναφέρει κανείς στη μνήμη του την ακανόνιστη και περίπλοκη μορφή της επιφάνειας της θάλασσας, καθώς μπορεί εύκολα να απομακρυνθεί από την πραγματικότητα – ειδικά εάν καταπιάνεται με τη μελέτη του μαθηματικού προβλήματος. Υπενθυμίζεται ότι οι ανωτέρω θεωρίες υποθέτουν την περιοδικότητα και το αμετάβλητο της μορφής των κυματισμών. Αντιθέτως, κοντά στην περιοχή του γενεσιουργού μετεωρολογικού φαινομένου κύματα με έντονες διαφορές στο ύψος και την περίοδο μπορούν να κινούνται προς διαφορετικές κατευθύνσεις· οι λόγοι ύψους προς μήκος κύματος ενδέχεται να λαμβάνουν υψηλές τιμές και συχνά παρατηρείται θραύση των κυμάτων. Καθώς οι κυματισμοί απομακρύνονται από την περιοχή δημιουργίας τους αποκτούν πιο ομαλά χαρακτηριστικά και το σύστημα τους εμφανίζει μια κύρια κατεύθυνση διάδοσης. Όμως, ακόμα και υπό αυτές τις συνθήκες ένα ντετερμινιστικό μοντέλο δεν είναι σε θέση να αναπαραστήσει με πλήρη συνέπεια το φαινόμενο. Η περιγραφή του τελευταίου θα ήταν καταλληλότερο, λόγω της φύσης του, να πραγματοποιηθεί πάνω σε μια πιθανοθεωρητική βάση. Οι ντετερμινιστικές προσεγγίσεις αποτελούν ωστόσο πρακτικά εργαλεία, κατάλληλα για τη διαχείριση μεγάλου αριθμού προβλημάτων.



Σχήμα 3.3 : Περιοχές ισχύος των κυματικών θεωριών (Chakrabarti, 1987)

(14) $U_R = H \lambda^2 / d^3$

4 ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΙΝΗΣΗΣ ΚΑΤΑ ΤΟ ΔΙΑΜΗΚΕΣ

4.1 ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Περιορίζουμε σε έναν, αυτόν κατά την έννοια της διαμήκου γραμμικής μετατόπισης, τους βαθμούς ελευθερίας κίνησης του πλοίου και θεωρούμε την περίπτωση ακολουθούντων κυματισμών⁽¹⁾. Η εξίσωση που περιγράφει την κίνηση του πλοίου κατά το διάμηκες ως προς ένα σύστημα κινούμενο με την ταχύτητα φάσης του κύματος λαμβάνει την ακόλουθη μορφή,

$$(m - X_{\dot{\xi}}) \ddot{\xi} = T - R + X_w \quad (4.1)$$

όπου,

m η μάζα του πλοίου,

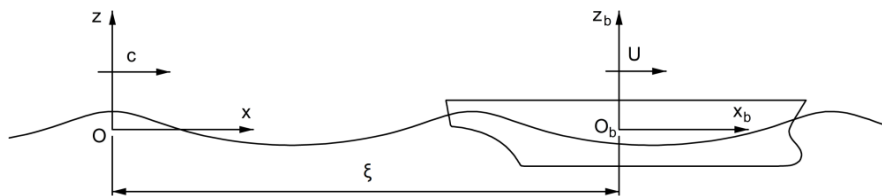
$X_{\dot{\xi}}$ η πρόσθετη μάζα κατά τη διαμήκη διεύθυνση,

ξ η θέση του μέσου νομέα του πλοίου ως προς το σύστημα το κινούμενο με την ταχύτητα φάσης του κύματος⁽²⁾,

T η δύναμη ώσης,

R η αντίσταση και

X_w η διεγείρουσα (λόγω των κυματισμών) δύναμη κατά τη διαμήκη διεύθυνση.



Σχήμα 4.1 : Πλοίο σε ακολουθούντες κυματισμούς

4.2 ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΕΠΙΜΕΡΟΥΣ ΟΡΩΝ

Η πρόσθετη μάζα μπορεί, δεδομένων των μικρών τιμών της συχνότητας συνάντησης, να θεωρηθεί σταθερή και να αντικατασταθεί από την ασυμπτωτική τιμή της⁽³⁾. Επιπλέον, λόγω των μεγάλων τιμών του λόγου λ/L ⁽⁴⁾ καθίσταται δυνατή η υπέρθεση των όρων της ώσης και της αντίστασης στη μορφή που αυτοί αποκτούν για την περίπτωση του πλοίου σε ήρεμο νερό με τις διεγείρουσες δυνάμεις.

Σε συμφωνία με τα ανωτέρω, η ώση εκφράζεται συναρτήσει της αδρανειακής ταχύτητας του πλοίου και των στροφών της έλικας ως ακολούθως,

$$T = \tau_0 n^2 + \tau_1 n U + \tau_2 U^2 \quad (4.2)$$

όπου,

n οι στροφές της έλικας,

(1) Κυματισμοί των οποίων η κατεύθυνση διάδοσης ταυτίζεται με την κατεύθυνση του διανύσματος της ταχύτητας του πλοίου.

(2) Η αρχή του συστήματος Oxz τοποθετείται σε κάποια κορυφή αναφοράς, ενώ το σωματοπαγές κέντρο O_b βρίσκεται επί του επιπέδου της μέσης τομής.

(3) Καθώς $\omega_e \rightarrow 0$, όπου ω_e η συχνότητα συνάντησης πλοίου-κύματος. Σημειώνεται ότι λόγω των μικρών τιμών της συχνότητας ω_e ο όρος απόσβεσης (ακτινοβολίας) έχει αμεληθεί από την εξίσωση (4.1).

(4) Όπου L το μήκος του πλοίου.

$U = c + \xi$ η αδρανειακή ταχύτητα του πλοίου,

c η ταχύτητα φάσης του κύματος και

τ_i , $i = 0,1,2$ συντελεστές οι οποίοι υπολογίζονται μέσω των κάτωθι εκφράσεων,

$$\tau_0 = \kappa_0(1 - t_p) \rho D^4 \quad (4.3. \alpha)$$

$$\tau_1 = \kappa_1(1 - t_p)(1 - w_p) \rho D^3 \quad (4.3. \beta)$$

$$\tau_2 = \kappa_2(1 - t_p)(1 - w_p)^2 \rho D^2 \quad (4.3. \gamma)$$

Στις ανωτέρω σχέσεις όπου t_p ο συντελεστής μείωσης ώσης, ρ η πυκνότητα του θαλασσινού νερού, D η διάμετρος της έλικας και w_p ο συντελεστής ομόρρου⁽⁵⁾. Οι τιμές των συντελεστών κ_i , $i = 0,1,2$ επιλέγονται έτσι, ώστε ο συντελεστής ώσης K_T να προσεγγίζεται κατάλληλα από το ακόλουθο πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ως προς τον συντελεστή προχώρησης J ,

$$K_T = \kappa_0 + \kappa_1 J + \kappa_2 J^2 \quad (4.4)$$

όπου,

$$J = \frac{U(1 - w_p)}{n D} \quad (4.5)$$

Η αντίσταση του πλοίου μπορεί να προσεγγισθεί μέσω ενός πολυωνύμου, στην προκειμένη περίπτωση τρίτου βαθμού,

$$R = r_1 U + r_2 U^2 + r_3 U^3 \quad (4.6)$$

όπου r_i , $i = 1,2,3$ κατάλληλοι συντελεστές.

Τέλος, η επαγόμενη από το πεδίο των κυματισμών δύναμη λαμβάνει –σύμφωνα με τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε από τον Hamamoto– την ακόλουθη μορφή,

$$X_w = - \iiint_{V_b} \frac{\partial p}{\partial x} dV \quad (4.7)$$

όπου V_b ο όγκος του βυθισμένου τμήματος της γάστρας και p το πεδίο των υδροδυναμικών πιέσεων του αδιατάρακτου κυματικού πεδίου⁽⁶⁾ εκφρασμένο ως προς το κινούμενο με την ταχύτητα φάσης του κύματος σύστημα συντεταγμένων η χωρική παράγωγος $\partial/\partial x$ νοείται ως προς το τελευταίο. Καθίσταται προφανές πως η τελευταία σχέση αποτελεί έκφραση της οριζόντιας συνιστώσας της δύναμης Froude-Krylov.

Μέσω των σχέσεων (4.2), (4.6) και (4.7) η εξίσωση κίνησης (4.1) αναδιατυπώνεται ως ακολούθως,

$$(m - X_{\ddot{u}}) \ddot{\xi} + \left[3 r_3 c^2 + 2 (r_2 - \tau_2) c + r_1 - \tau_1 n \right] \dot{\xi} + (3 r_3 c + r_2 - \tau_2) \xi^2 + r_3 \xi^3 + \iiint_{V_b} \frac{\partial p}{\partial x} dV = \tau_0 n^2 - r_1 c + \tau_1 c n + (\tau_2 - r_2) c^2 - r_3 c^3 \quad (4.8)$$

(5) Οι συντελεστές μείωσης ώσης και ομόρρου αναφέρονται σε ήρεμο νερό.

(6) Η ποσοστιαία συμβολή των δυνάμεων περιθλάσης στο σύνολο των διεγερουσών δυνάμεων θεωρείται αμελητέα. Η συγκεκριμένη υπόθεση οδηγεί (για την περίπτωση του φαινομένου surf-riding) σε ικανοποιητικά αποτελέσματα.

Το ανωτέρω μαθηματικό μοντέλο θα χρησιμοποιηθεί στα πλαίσια της παρούσας μελέτης για τη διερεύνηση των δυναμικών αποκρίσεων του πλοίου κατά το διάμηκες. Θα θεωρηθεί η περίπτωση των γραμμικών κυματισμών, καθώς και οι περιπτώσεις των κυματισμών Stokes δεύτερης, τρίτης και πέμπτης τάξης.

Καθίσταται σαφές, μετά από παρατήρηση της (4.8), πως η διαφορά ανάμεσα στις εξισώσεις που περιγράφουν τη συμπεριφορά του πλοίου σε κυματισμούς διαφορετικών τάξεων εντοπίζεται στον όρο της δύναμης Froude-Krylov και στην ταχύτητα φάσης του κύματος⁽⁷⁾. η επίδραση του κυματικού περιβάλλοντος εκδηλώνεται μέσω των διαφορετικών κατανομών της πίεσης πάνω στο βρεχόμενο τμήμα της γάστρας⁽⁸⁾ και των διαφορετικών συχνοτήτων συνάντησης.

Δεδομένων των σχέσεων (3.8) και (3.15) και κάνοντας χρήση του μετασχηματισμού $x_0 = c t + x$ ⁽⁹⁾, καταλήγουμε στην ακόλουθη έκφραση,

$$\frac{\partial p^{(v)}}{\partial x} = \sum_{i=1}^v D_{vi} \sin ikx, \quad v = 1,2,3,5 \quad (4.9)$$

όπου ο δείκτης (v) , $v = 1,2,3,5$ δηλώνει την τάξη της κυματικής θεωρίας και

$$D_{11} = -\rho g \varepsilon C_0^2 A_{11} \cosh[k(z+d)]$$

$$D_{21} = B_{11}$$

$$D_{22} = \frac{1}{2} \rho g \varepsilon^2 C_0^2 \left\{ A_{11}^2 - 8 A_{22} \cosh[2k(z+d)] \right\}$$

$$D_{31} = B_{11} + \rho g \varepsilon^3 \left\{ C_0^2 A_{11} A_{22} \cosh[3k(z+d)] - (C_0^2 A_{31} + C_0 C_2 A_{11}) \cosh[k(z+d)] \right\}$$

$$D_{32} = B_{22}$$

$$D_{33} = 3 \rho g \varepsilon^3 C_0^2 \left\{ A_{11} A_{22} \cosh[k(z+d)] - 3 A_{33} \cosh[3k(z+d)] \right\}$$

$$D_{51} = B_{31} + \rho g \varepsilon^5 \left\{ 3 C_0^2 A_{22} A_{33} \cosh[5k(z+d)] + C_0^2 (A_{11} A_{42} + A_{22} A_{31}) \cosh[3k(z+d)] - (C_0^2 A_{51} + C_0 C_2 A_{31} + C_0 C_4 A_{11}) \cosh[k(z+d)] \right\}$$

$$D_{52} = B_{22} + \rho g \varepsilon^4 \left\{ C_0^2 A_{11} A_{31} - 4 (C_0^2 A_{42} + C_0 C_2 A_{22}) \cosh[2k(z+d)] + 3 C_0^2 A_{11} A_{33} \cosh[4k(z+d)] \right\}$$

$$D_{53} = B_{33} + 3 \rho g \varepsilon^5 \left\{ C_0^2 (A_{11} A_{42} + A_{22} A_{31}) \cosh[k(z+d)] - 3 (C_0^2 A_{53} + C_0 C_2 A_{33}) \cosh[3k(z+d)] + 2 C_0^2 A_{11} A_{44} \cosh[5k(z+d)] \right\}$$

$$D_{54} = 2 \rho g \varepsilon^4 C_0^2 \left\{ 2 A_{22}^2 + 3 A_{11} A_{33} \cosh[2k(z+d)] - 8 A_{44} \cosh[4k(z+d)] \right\}$$

$$D_{55} = 5 \rho g \varepsilon^5 C_0^2 \left\{ 3 A_{22} A_{33} \cosh[k(z+d)] + 2 A_{11} A_{44} \cosh[3k(z+d)] - 5 A_{55} \cosh[5k(z+d)] \right\}$$

Οι εκφράσεις των εμπλεκόμενων στις ανωτέρω σχέσεις συντελεστών έχουν παρατεθεί στην παράγραφο των

(7) Η γραμμική θεωρία και η θεωρία Stokes δεύτερης τάξης δε διαφοροποιούνται ως προς το συγκεκριμένο μέγεθος.

(8) Η γεωμετρία του τμήματος αυτού διαφοροποιείται για κάθε τάξη.

(9) Όπου x_0 οι τετμημένες των σημείων του χώρου ως προς το ακίνητο σύστημα –στο οποίο είναι εκφρασμένες οι σχέσεις (3.8) και (3.15)– και x οι τετμημένες ως προς το κινούμενο με την ταχύτητα φάσης του κύματος σύστημα αναφοράς.

κυματισμών κατά Stokes.

Η οριζόντια συνιστώσα της δύναμης Froude-Krylov για την περίπτωση του προβλήματος πρώτης τάξης μπορεί –μέσω του μετασχηματισμού $x = \xi + x_b$, όπου x_b οι τετμημένες των σημείων του χώρου ως προς το σωματοπαγές σύστημα αναφοράς– να γραφεί ως ακολούθως,

$$X_w^{(1)} = - \iiint_{V_b} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x} dV = - \iiint_{V_b} D_{11} \sin[k (\xi + x_b)] dV \quad (4.10)$$

και τελικά να πάρει τη μορφή,

$$\begin{aligned} X_w^{(1)} &= \rho g \varepsilon C_0^2 A_{11} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cosh \left\{ k [z_p(x_b) + d] \right\} S(x_b) \sin[k (\xi + x_b)] dx_b \\ &= \rho g \varepsilon C_0^2 A_{11} \cos k\xi \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cosh \left\{ k [z_p(x_b) + d] \right\} S(x_b) \sin kx_b dx_b \\ &\quad + \rho g \varepsilon C_0^2 A_{11} \sin k\xi \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cosh \left\{ k [z_p(x_b) + d] \right\} S(x_b) \cos kx_b dx_b \\ &= f_s \sin k\xi + f_c \cos k\xi = f_{11} \sin[k (\xi - \theta)] = f_{11} \sin k\xi^* \end{aligned} \quad (4.11. \alpha)$$

όπου,

$z_p(x_b)$ το κέντρο πίεσης πάνω στον νομέα x_b και,

$S(x_b)$ το εμβαδόν της βρεχόμενης επιφάνειας του νομέα στη θέση x_b .

Σε αντιστοιχία με το ανωτέρω αποτέλεσμα καταλήγουμε στις κάτωθι εκφράσεις για τα προβλήματα μεγαλύτερης τάξης,

$$X_w^{(2)} = f_{21} \sin k\xi^* + f_{22} \sin 2k\xi^* \quad (4.11. \beta)$$

$$X_w^{(3)} = f_{31} \sin k\xi^* + f_{32} \sin 2k\xi^* + f_{33} \sin 3k\xi^* \quad (4.11. \gamma)$$

$$X_w^{(5)} = f_{51} \sin k\xi^* + f_{52} \sin 2k\xi^* + f_{53} \sin 3k\xi^* + f_{54} \sin 4k\xi^* + f_{55} \sin 5k\xi^* \quad (4.11. \delta)$$

ή σε ενοποιημένη μορφή για όλες τις τάξεις,

$$X_w^{(v)} = \sum_{i=1}^v f_{vi} \sin ik\xi^*, \quad v = 1,2,3,5 \quad (4.12)$$

Σημειώνεται πως τα πλάτη f_{vi} παρουσιάζουν εξάρτηση από το ύψος κύματος, το μήκος κύματος, το βάθος νερού και τη διαμήκη θέση του πλοίου πάνω στο κύμα – λόγω των διαφορών μεταξύ των τοπικών βυθισμάτων σε

κάθε θέση.

4.3 ΤΕΛΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Εισάγοντας τη σχέση (4.12) στην έκφραση (4.8) και δεδομένου ότι $\dot{\xi}^* = \dot{\xi} = U - c$, καταλήγουμε τελικά στην ακόλουθη εξίσωση κίνησης για το πρόβλημα ν -τάξης,

$$(m - X_u) \ddot{\xi}^* + \left[3 r_3 c^2 + 2 (r_2 - \tau_2) c + r_1 - \tau_1 n \right] \dot{\xi}^* + (3 r_3 c + r_2 - \tau_2) \xi^{*2} + r_3 \xi^{*3} + \sum_{i=1}^{\nu} f_{vi} \sin ik\xi^* = \tau_0 n^2 - r_1 c + \tau_1 c n + (\tau_2 - r_2) c^2 - r_3 c^3, \quad \nu = 1,2,3,5 \quad (4.13)$$

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να επισημανθεί μια «παρατυπία» η οποία δεν αναφέρθηκε στην πορεία της παρούσας ανάλυσης. Η γραμμική αποσύνθεση του συνολικού δυναμικού –όπως αυτή περιγράφηκε στο δεύτερο κεφάλαιο για το γραμμικοποιημένο υδροδυναμικό πρόβλημα– δεν μπορεί να επεκταθεί στα προβλήματα ανώτερης τάξης. Ο λόγος είναι προφανής: ελλείψει γραμμικού χαρακτήρα ο συγκεκριμένος χειρισμός δεν επιτρέπει την αναγωγή του γενικού προβλήματος στα επιμέρους προβλήματα περίθλασης, ακτινοβολίας και αδιατάρακτου πεδίου⁽¹⁰⁾. Η διατυπωθείσα μέθοδος αποτελεί κατ' αυτόν τον τρόπο μια παρεκβολή της διαδικασίας βάσει της οποίας αντιμετωπίζεται το γραμμικό πρόβλημα στη μη γραμμική περιοχή των προβλημάτων μεγαλύτερης τάξης.

(10) Η έννοια συνεπώς των επιμέρους δυναμικών δεν μπορεί να μεταφερθεί με νόμιμο (από θεωρητικής σκοπιάς) τρόπο στα προβλήματα ανώτερης τάξης.

5 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΗΣ FROUDE-KRYLOV

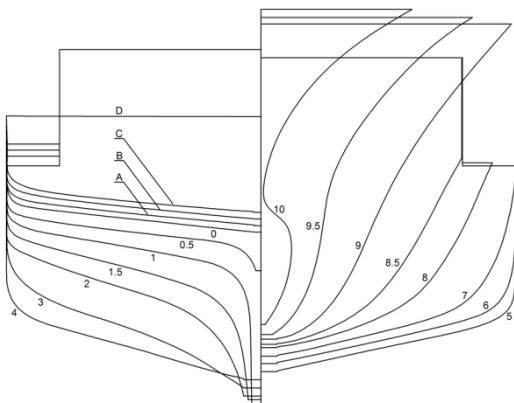
5.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Για τη διερεύνηση των δυναμικών αποκρίσεων του πλοίου μέσω της εξίσωσης (4.13) απαιτείται ο υπολογισμός (σε οποιοδήποτε σημείο κατά μήκος του κύματος) της οριζόντιας συνιστώσας της δύναμης Froude-Krylov· η διαδικασία περιπλέκεται καθώς η τελευταία εξαρτάται από τη γεωμετρία του βυθισμένου τμήματος της γάστρας. Συγκεκριμένα, για τον υπολογισμό των εκφράσεων (4.12) απαιτείται η γνώση των μεγεθών «εμβαδόν βρεχόμενου τμήματος νομέα» και «κέντρο πίεσης νομέα»⁽¹⁾ κατά μήκος του πλοίου⁽²⁾. Η απλοποιητική παραδοχή που μπορεί να εισαχθεί (δεδομένων των μικρών τιμών της συχνότητας συνάντησης) αφορά στη στατική θεώρηση της ισορροπίας του πλοίου⁽³⁾ καθώς το τελευταίο κινείται διαγράφοντας το κύμα. Η διαχείριση της εξίσωσης κίνησης (4.13) παραμένει παρ' όλα αυτά «προβληματική»⁽⁴⁾.

Για τον λόγο αυτό επιχειρείται, στα πλαίσια της παρούσας ενότητας, η κατασκευή συναρτήσεων οι οποίες θα προσεγγίζουν κατάλληλα την τιμή της οριζόντιας συνιστώσας της δύναμης Froude-Krylov. Στις παραγράφους που ακολουθούν παρουσιάζονται τα επιμέρους στάδια της διαδικασίας.

5.2 ΤΟ ΥΠΟ ΜΕΛΕΤΗ ΠΛΟΙΟ

Το θεωρούμενο πλοίο είναι ένα ιαπωνικό αλιευτικό (*Purse Seiner*) το οποίο έχει αποτελέσει αντικείμενο εκτενούς μελέτης από τον ΙΤΤC.



Σχήμα 5.1 : *Purse Seiner*, σχέδιο εγκάρσιων τομών

L_{BP}	34.50 m
B	7.60 m
D	3.07 m
T_f	2.50 m
T_a	2.80 m
$C_b^{(5)}$	0.587
$\Delta^{(5)}$	435.65 t
$LCG^{(5)(6)}$	0.66 m
KG	3.36 m

Πίνακας 5.1 : *Purse Seiner*, χαρακτηριστικά μεγέθη

5.3 ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΤΟΥ ΠΛΟΙΟΥ

Θεωρούμε ορθογώνιο σύστημα αξόνων Oxz κινούμενο με την ταχύτητα φάσης του κύματος (Σχήμα 5.2). Τα δύο επιπλέον συστήματα αναφέρονται στο σωματοπαγές κέντρο O_b : το σύστημα $O_b x_b z_b$ ακολουθεί πλήρως τις κινήσεις του πλοίου (Σ.Σ.), ενώ το σύστημα $O_b X_b Z_b$ αποτελεί παράλληλη μεταφορά του συστήματος του κινού-

(1) Το μέγεθος εξαρτάται από την κατανομή της πίεσης στο βυθισμένο τμήμα του νομέα.

(2) Ή διαφορετικά, γνώση των συναρτήσεων $S = S(x_b)$ και $z_p = z_p(x_b)$, $x_b \in [-L/2, L/2]$.

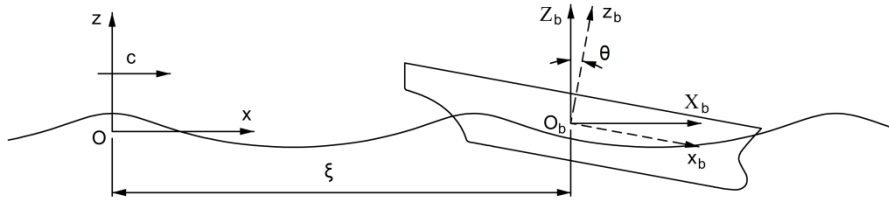
(3) Ισορροπία κατά την έννοια των κινήσεων ξ_3 και ξ_5 (heave και pitch αντίστοιχα).

(4) Η εξίσωση (4.13) αντιμετωπίζεται σε επόμενη ενότητα με αριθμητικές μεθόδους. Το επίθετο «προβληματική» χρησιμοποιείται καθώς απαιτείται η επανάληψη της διαδικασίας υπολογισμού της δύναμης Froude-Krylov σε κάθε βήμα της μεθόδου.

(5) Για τον υπολογισμό των μεγεθών (μέσω της γεωμετρίας των νομέων) κατασκευάστηκε πρόγραμμα σε κώδικα FORTRAN.

(6) Η τιμή της διαμήκουσ θέσης του κέντρου βάρους επιλέχθηκε έτσι ώστε να συμπίπτει με την τιμή της διαμήκουσ θέσης του κέντρου άντωσης στη δεδομένη κατάσταση βυθισμάτων. Το μέγεθος αναφέρεται ως προς το μέσο νομέα του πλοίου με θετική τη φορά προς την πλώρη.

μενου με τη φασική ταχύτητα του κύματος.



Σχήμα 5.2 : Συστήματα συντεταγμένων

5.3.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

Για την ισορροπία του πλοίου σε τυχούσα θέση πάνω στο κύμα αρκεί⁽⁷⁾,

$$B = \Delta \quad (5.1. \alpha)$$

$$B X_B = \Delta X_G \quad (5.1. \beta)$$

όπου,

B η δύναμη άντωσης,

Δ το εκτόπισμα του πλοίου και

X_B και X_G οι τετμημένες των κέντρων άντωσης και βάρους (αντίστοιχα) του πλοίου ως προς το σύστημα $O_b X_b Z_b$.

Η δύναμη άντωσης μπορεί να εκφραστεί ως ακολούθως,

$$B = \rho g V_b = \rho g \iiint_{V_b} dx_b dy_b dz_b = \rho g \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx_b \iint_{S_b} dy_b dz_b = \rho g \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} S(x_b) dx_b \quad (5.2)$$

όπου,

$S(x_b)$ το εμβαδόν του βρεχόμενου τμήματος του νομέα στη θέση x_b .

Για τον υπολογισμό των μεγεθών X_G και X_B απαιτείται ο μετασχηματισμός των συντεταγμένων των κέντρων βάρους και άντωσης του πλοίου από το σωματοπαγές σύστημα⁽⁸⁾ στο σύστημα $O_b X_b Z_b$. Στην περίπτωση που το πρώτο στρέφεται, έστω κατά γωνία θ , ως προς το δεύτερο, οι συντεταγμένες αυτές ακολουθούν τον κάτωθι κανόνα μετασχηματισμού,

$$\begin{Bmatrix} X_b \\ Z_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ -\sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_b \\ z_b \end{Bmatrix} = \tilde{a} \begin{Bmatrix} x_b \\ z_b \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

όπου \tilde{a} το μητρώο στροφής⁽⁹⁾. Συνεπώς,

(7) Σε συμφωνία με τη ψευδοστατική θεώρηση.

(8) (LCG, VCG) και (LCB, VCB) αντίστοιχα.

(9) Θετική φορά η αντιωρολογιακή.

$$X_G = LCG \cos \theta - VCG \sin \theta \quad (5.4. \alpha)$$

$$X_B = LCB \cos \theta - VCB \sin \theta \quad (5.4. \beta)$$

Τέλος, η διαμήκης και η κατακόρυφη θέση του κέντρου άντωσης εκφράζονται με τη βοήθεια των ακόλουθων σχέσεων,

$$LCB = \frac{1}{V_b} \iiint_{V_b} x_b dV = \left(\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} S(x_b) dx_b \right)^{-1} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x_b S(x_b) dx_b \quad (5.5. \alpha)$$

και

$$VCB = \frac{1}{V_b} \iiint_{V_b} z_b dV = \left(\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} S(x_b) dx_b \right)^{-1} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} z_c(x_b) S(x_b) dx_b \quad (5.5. \beta)$$

όπου,

$z_c(x_b)$ η κατηγμένη του κέντρου της βρεχόμενης επιφάνειας του νομέα στη θέση x_b .

Το σύστημα (5.1) μπορεί στο σημείο αυτό να γραφεί ως εξής,

$$\rho g \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} S(x_b) dx_b = \Delta \quad (5.6. \alpha)$$

$$\cos \theta \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x_b S(x_b) dx_b - \sin \theta \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} z_c(x_b) S(x_b) dx_b - (LCG \cos \theta - VCG \sin \theta) \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} S(x_b) dx_b = 0 \quad (5.6. \beta)$$

Η επίλυση του ανωτέρω συστήματος μπορεί να οδηγήσει, δεδομένου ότι τα μεγέθη $S(x_b)$ και $z_c(x_b)$ συνδέονται με το τοπικό βύθισμα των νομέων, στις τιμές της κατακόρυφης βύθισης –ή ανύψωσης– και της στροφής του πλοίου περί τον εγκάρσιο άξονα του (γωνία διαγωγής)⁽¹⁰⁾.

5.3.2 ΒΡΕΧΟΜΕΝΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΝΟΜΕΩΝ ΚΑΙ ΚΕΝΤΡΟ ΑΥΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΤΟΥ ΤΟΠΙΚΟΥ ΒΥΘΙΣΜΑΤΟΣ

Η γεωμετρία της γάστρας του υπό μελέτη πλοίου περιγράφεται με τη βοήθεια δεκαεννέα θεωρητικών νομέων. Οι νομείς εισάγονται σε περιβάλλον RHINOCEROS· ακολουθεί η επεξεργασία τους και η δημιουργία ζευγών $(T, S(T))$ και $(T, z_c(T))$ ⁽¹¹⁾, όπου T το τοπικό βύθισμα του νομέα. Τα αποτελέσματα προσεγγίζονται μέσω πολυωνύμων (polynomial fit to data) της μορφής,

$$S(T) = \alpha_0 + \alpha_1 T + \alpha_2 T^2 + \dots + \alpha_n T^n \quad (5.7)$$

(10) Για τις οποίες το τελευταίο ισορροπεί σε τυχαίο σημείο κατά μήκος κύματος δεδομένων χαρακτηριστικών και τάξης.

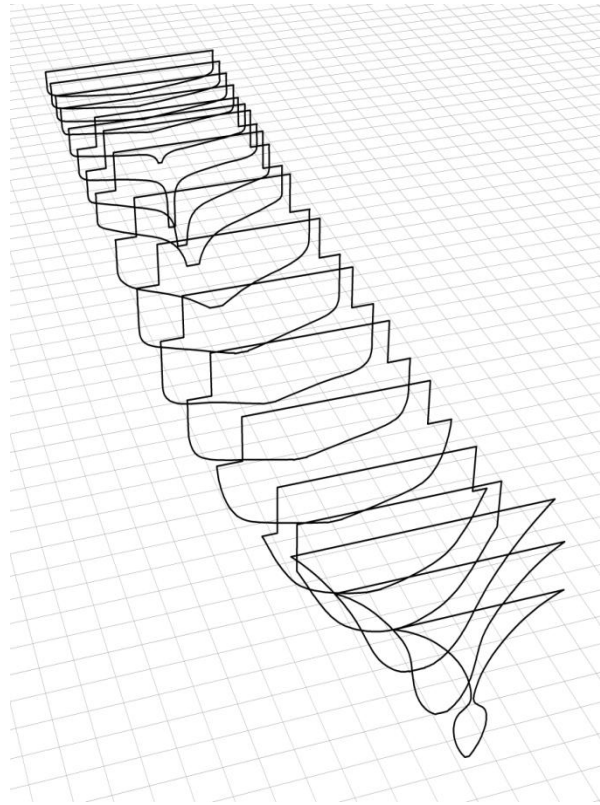
(11) Τα μεγέθη S και z_c αναφέρονται πλέον σε συγκεκριμένο νομέα. Η ανεξάρτητη μεταβλητή «τοπικό βύθισμα» έχει κατ' αυτόν τον τρόπο αντικαταστήσει τη μεταβλητή «θέση νομέα».

και

$$z_c(T) = \beta_0 + \beta_1 T + \beta_2 T^2 + \dots + \beta_m T^m \quad (5.8)$$

ΝΟΜΕΑΣ	ΘΕΣΗ [m]
D	-21.65
C	-20.55
B	-19.45
A	-18.35
0	-17.25
0.5	-15.525
1	-13.8
1.5	-12.075
2	-10.35
3	-6.9
4	-3.45
5	0
6	3.45
7	6.9
8	10.35
8.5	12.075
9	13.8
9.5	15.525
10	17.25

Πίνακας 5.2 : *Purse Seiner*, θέση θεωρητικών νομέων



Σχήμα 5.2 : *Purse Seiner*, εισαγωγή των νομέων σε περιβάλλον RHINOCEROS

5.3.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΤΟΠΙΚΩΝ ΒΥΘΙΣΜΑΤΩΝ

Η παρουσία των κυματισμών δυσχεραίνει τον υπολογισμό των βυθισμάτων καθώς, λόγω της διαγωγής του πλοίου, τα σημεία τομής των νομέων με την ελεύθερη επιφάνεια μετατοπίζονται κατά μήκος του κύματος. Έστω $n = n(x)$ η έκφραση για την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας ως προς το σύστημα το οποίο κινείται με τη φασική ταχύτητα. Η σχέση μετασχηματισμού (5.3) μπορεί να γραφεί ως εξής,

$$\begin{Bmatrix} x_b \\ z_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_b \\ Z_b \end{Bmatrix} \quad (5.9)$$

Εάν με x_s συμβολίσουμε την απόσταση ενός νομέα από το κέντρο O_b (ως προς το σωματοπαγές σύστημα), τότε η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας στη θέση αυτή μπορεί να υπολογισθεί μέσω της (5.9) ως εξής,

$$z_s = -X \sin \theta + n(\xi + X) \cos \theta \quad (5.10)$$

όπου,

ξ η θέση του κέντρου O_b ⁽¹²⁾ ως προς το σύστημα το κινούμενο με την ταχύτητα φάσης του κύματος και

(12) Ως κέντρο αναφοράς λαμβάνεται το σημείο τομής τριών επιπέδων του μέσου νομέα, της αδιατάρακτης επιφάνειας της θάλασσας και του διαμήκους επιπέδου συμμετρίας του πλοίου.

X η ρίζα της εξίσωσης⁽¹³⁾,

$$X \cos \theta + n(\xi + X) \sin \theta - x_s = 0 \quad (5.11)$$

Το τοπικό βύθισμα του νομέα στη θέση x_s υπολογίζεται τελικά –δεδομένης της τιμής του βυθίσματος για ίσαλο που αντιστοιχεί στο επίπεδο $z_b = 0$ (συμβολισμός T_0)⁽¹⁴⁾ – μέσω της σχέσης,

$$T = T_0 + z_s + \tau \quad (5.12)$$

όπου,

τ η κατακόρυφη –κατά την έννοια του σωματοπαγούς συστήματος αναφοράς– βύθιση (ή ανύψωση)⁽¹⁵⁾.

Πρέπει να σημειωθεί ότι λόγω της ανωτέρω θεώρησης το κέντρο αναφοράς O_b μετακινείται κατά μήκος του κύματος καθώς μεταβάλλεται η τιμή του μεγέθους τ . Το γεγονός αυτό λαμβάνεται υπόψιν στις σχέσεις υπολογισμού της δύναμης Froude-Krylov.

5.3.4 ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

Η διαδικασία συνεχίζεται με την αριθμητική επίλυση του συστήματος (5.6). Τα ολοκληρώματα που εμπλέκονται υπολογίζονται μέσω της μεθόδου Simpson, ενώ για την εύρεση των τιμών της κατακόρυφης βύθισης και της γωνίας διαγωγής χρησιμοποιείται αλγόριθμος βασισμένος στη μέθοδο διχοτόμησης. Ο τελευταίος συνοψίζεται (α) στην εφαρμογή της μεθόδου σε διάστημα γωνιών $[\theta_\alpha, \theta_\beta]$ και (β) στην εκ νέου εφαρμογή της μεθόδου⁽¹⁶⁾ σε διάστημα κατακόρυφων βυθίσεων $[\tau_\alpha, \tau_\beta]$ σε κάθε βήμα υπολογισμών της (α) – ή διατυπωμένο διαφορετικά, ικανοποίηση της ισορροπίας των δυνάμεων σε κάθε βήμα της διαδικασίας που αποσκοπεί στην ικανοποίηση της ισορροπίας των ροπών⁽¹⁷⁾.

5.4 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΗΣ FROUDE-KRYLOV

Δεδομένων των τιμών της κατακόρυφης βύθισης και της γωνίας διαγωγής (για τις οποίες το πλοίο ισορροπεί σε συγκεκριμένη θέση επί του κύματος) καθίσταται δυνατός ο υπολογισμός της οριζόντιας συνιστώσας της δύναμης Froude-Krylov. Η σύνθεση των σχέσεων (4.7) και (4.9) οδηγεί στην ακόλουθη έκφραση για το πρόβλημα ν -τάξης,

$$X_w^{(\nu)} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \sum_{i=1}^{\nu} D_{vi} S(x_b) \sin[i k (\xi + x_b)] dx_b, \quad \nu = 1,2,3,5 \quad (5.13)$$

Υπενθυμίζεται ότι οι συντελεστές D_{vi} εξαρτώνται από τη μεταβλητή θέσης (και από τα χαρακτηριστικά του κύματος) καθώς εκφράζονται συναρτήσει του κέντρου πίεσης $z_p(x_b)$. Το τελευταίο μέγεθος υπολογίζεται σε

(13) Η εξίσωση (5.11) επιλύεται με χρήση αριθμητικών μεθόδων. Στο πρόγραμμα που κατασκευάστηκε στα πλαίσια της παρούσας μελέτης χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος Newton-Raphson.

(14) Το μέγεθος προφανώς αναφέρεται στην περίπτωση του πλοίου σε ήρεμο νερό.

(15) Θετικές τιμές για βύθιση. Η κατακόρυφη μετακίνηση του πλοίου ακολουθεί της στροφής περί τον εγκάρσιο άξονα του. Σε διαφορετική περίπτωση οι σχέσεις (5.10) και (5.11) οφείλουν να μετασχηματιστούν, καθώς η ελεύθερη επιφάνεια χαρακτηρίζεται πλέον από τα σημεία $(X_b, Z_b) = (X, \tau + n(\xi + X))$ αντί των $(X_b, Z_b) = (X, n(\xi + X))$.

(16) Και ενώ η διαδικασία (α) βρίσκεται σε εξέλιξη.

(17) Η δομή του αλγορίθμου δικαιολογεί τη σύμβαση για το μέγεθος τ . Σε κάθε βήμα της διαδικασίας για την εξίσωση των δυνάμεων δεν απαιτείται η αριθμητική επίλυση της (5.11) –όπως αυτή θα διαμορφωνόταν σύμφωνα με τη σημείωση (15)– αλλά η απλή εφαρμογή της σχέσης (5.12).

κάθε νομέα μέσω της σχέσης,

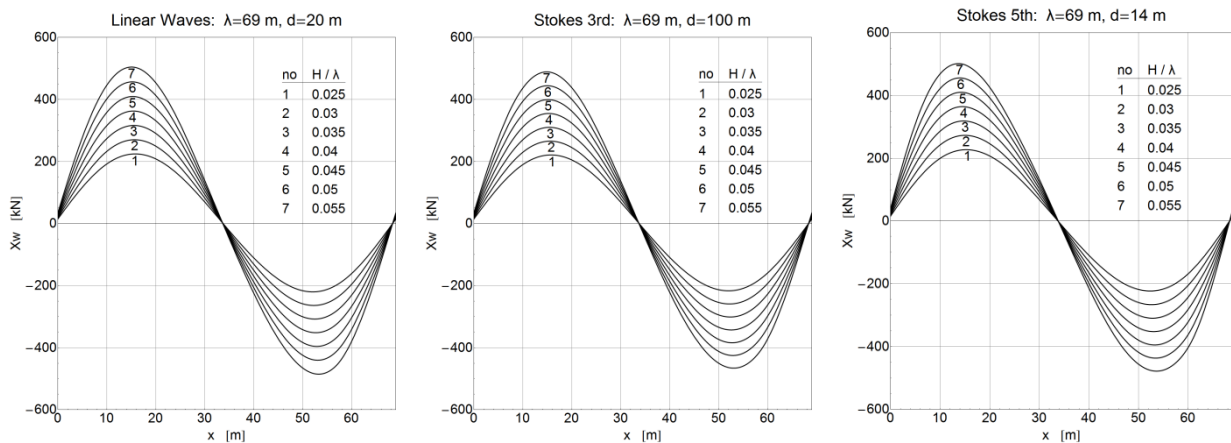
$$z_p^{(v)} = \int_{z_\alpha}^{z_\beta} p^{(v)} z dz \left(\int_{z_\alpha}^{z_\beta} p^{(v)} dz \right)^{-1}, \quad v = 1,2,3,5 \quad (5.14)$$

όπου,

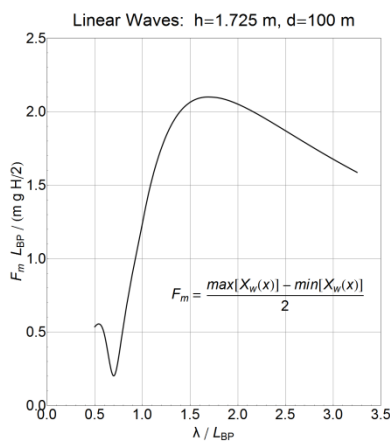
$p^{(v)}$ η έκφραση της πίεσης για το v -τάξης πρόβλημα και

$[z_\alpha, z_\beta]$ οι κατηγμένες που ορίζουν τα όρια του βρεχόμενου τμήματος του νομέα (κατώτατο και ανώτατο σημείο).

Ο υπολογισμός της δύναμης Froude-Krylon πραγματοποιείται μέσω προγράμματος σε κώδικα FORTRAN: το τελευταίο κατασκευάστηκε στα πλαίσια της παρούσας μελέτης. Το πρόγραμμα παρέχει τη δυνατότητα επιλογής των χαρακτηριστικών, της τάξης και του αριθμού των σημείων επί του κύματος, για τα οποία θα επιστραφεί –αφού επιλυθούν οι εξισώσεις ισορροπίας– η τιμή της οριζόντιας συνιστώσας της δύναμης Froude-Krylon. Σημειώνεται ότι για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων που εμφανίζονται στις σχέσεις (5.13) και (5.14) χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος Simpson.



Σχήμα 5.3 : Οριζόντια συνιστώσα της δύναμης Froude-Krylon, κυματισμοί διαφορετικών χαρακτηριστικών και τάξης (υπολογισμοί σε 200 σημεία κατά μήκος του κύματος)



Σχήμα 5.4

5.5 ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ (FIT) ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

Η τιμή της δύναμης Froude-Krylon κατά μήκος κύματος δεδομένων χαρακτηριστικών και τάξης προσεγγίζεται μέσω συναρτήσεων της μορφής,

$$X^{(v)}(x) = a_0 + \sum_{i=1}^N a_i \sin(i k x + b_i), \quad v = 1,2,3,5 \quad (5.15)$$

όπου,

x η διαμήκης θέση του σωματοπαγούς κέντρου αναφοράς ως προς το σύστημα Oxz ,

$a_i, i = 0(1)N$ και $b_i, i = 1(1)N$ προσδιοριστέες παράμετροι και

N θετικός ακέραιος η τιμή του οποίου εξαρτάται από την τάξη της κυματικής θεωρίας ως ακολούθως,

$$N = \begin{cases} 5 & \text{εάν } v = 1 \text{ ή } v = 2 \\ 7 & \text{εάν } v = 3 \\ 8 & \text{εάν } v = 5 \end{cases} \quad (5.16)$$

Επιθυμώντας τη –σε επόμενο στάδιο– διερεύνηση της παραμετρικής εξάρτησης του φαινομένου surf-riding από το ύψος κύματος (H), προβαίνουμε στην κατασκευή πολυωνυμικών συναρτήσεων (ως προς το συγκεκριμένο μέγεθος) οι οποίες προσεγγίζουν τα πλάτη και τις φάσεις της τριγωνομετρικής σειράς (5.15): η τελευταία μπορεί να γραφεί στη μορφή⁽¹⁸⁾,

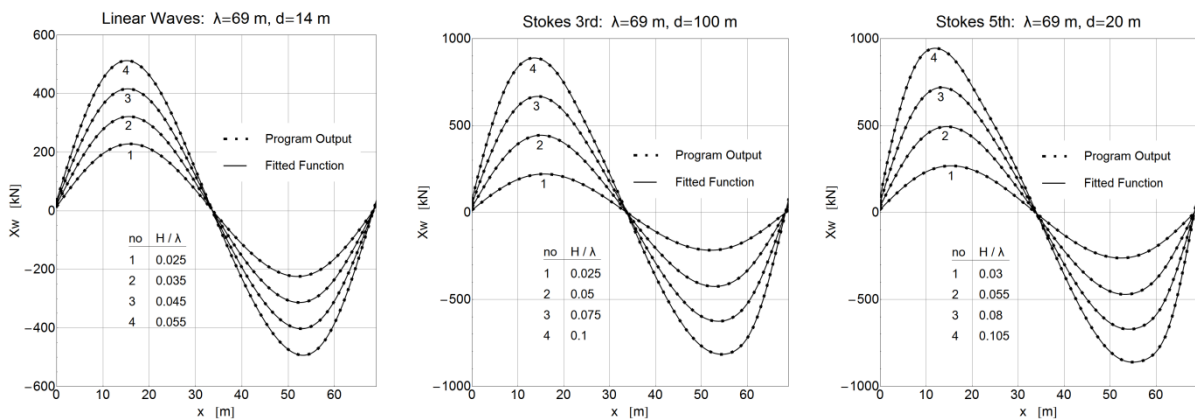
$$X^{(v)}(x; H) = a_0(H) + \sum_{i=1}^N a_i(H) \sin(i k x + b_i(H)), \quad v = 1,2,3,5 \quad (5.17)$$

όπου,

$$a_i(H) = \alpha_{0i} + \alpha_{1i} H + \alpha_{2i} H^2 + \dots + \alpha_{ji} H^j, \quad i = 0(1)n \quad (5.18. \alpha)$$

$$b_i(H) = \beta_{0i} + \beta_{1i} H + \beta_{2i} H^2 + \dots + \beta_{mi} H^m, \quad i = 1(1)n \quad (5.18. \beta)$$

Η προσέγγιση της δύναμης Froude-Krylon πραγματοποιήθηκε σε υπολογιστικό περιβάλλον MATHEMATICA.



Σχήμα 5.5 : Η διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχεί στα αποτελέσματα του προγράμματος υπολογισμού της δύναμης Froude-Krylon –σχέση (5.13)– ενώ με συνεχή γραμμή αναπαρίσταται η προσεγγιστική σχέση (5.17)

Στο σημείο αυτό η εξίσωση κίνησης (4.13) διατυπώνεται ως εξής,

$$\begin{aligned}
 (m - X_{\dot{u}}) \ddot{\xi} + \left[3 r_3 c^2 + 2 (r_2 - \tau_2) c + r_1 - \tau_1 n \right] \dot{\xi} + (3 r_3 c + r_2 - \tau_2) \xi^2 \\
 + r_3 \xi^3 + \sum_{i=1}^N a_i \sin(i k \xi + b_i) = a_0 + \tau_0 n^2 - r_1 c + \tau_1 c n + (\tau_2 - r_2) c^2 - r_3 c^3 \quad (5.19)
 \end{aligned}$$

με την τιμή του ακέραιου N να καθορίζεται από την τάξη της κυματικής θεωρίας σύμφωνα με τη σχέση (5.16).

(18) Η κατασκευή της (5.17) απαιτεί την επανάληψη της διαδικασίας προσδιορισμού των παραμέτρων a_i , $i = 0(1)N$ και b_i , $i = 1(1)N$ της σειράς (5.15) για ικανό αριθμό κυμάτων διαφορετικού ύψους.

6 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

6.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο όρος δυναμικό φαινόμενο αναφέρεται σε οποιαδήποτε εξελισσόμενη στο χρόνο διεργασία: την εξέλιξη αυτήν μπορούμε να την αντιληφθούμε ως ακολουθία αλληλεξαρτώμενων στιγμιοτύπων. Συγκεκριμένα παραδείγματα δυναμικών φαινομένων ενδέχεται να αφορούν φυσικά, κοινωνικά ή βιολογικά συστήματα, τα οποία, σε ορισμένες περιπτώσεις, δυνάμεθα να αντιληφθούμε και να αναλύσουμε διαισθητικά. Ωστόσο, για την κατανόηση και την ερμηνεία πολύπλοκων δυναμικών συμπεριφορών απαιτείται ο συστηματικός τρόπος προσέγγισης τους. Τα μαθηματικά εργαλεία που χρησιμοποιούνται προς την κατεύθυνση αυτή προέρχονται, κατά κύριο λόγο, από τους χώρους της γραμμικής άλγεβρας και των διαφορικών εξισώσεων⁽¹⁾. Η δομή των τελευταίων καθιστά δυνατή την αναπαράσταση της μεταβολής και της αλληλεξάρτησης των μεγεθών του συστήματος στον χρόνο, ενώ οι έννοιες της γραμμικής άλγεβρας διευκολύνουν τη διαχείριση του μεγάλου (σε γενικές γραμμές) αριθμού των μεταβλητών.

Το ενδιαφέρον μας περιορίζεται, στα πλαίσια της παρούσας ενότητας, στη μελέτη δυναμικών συστημάτων των οποίων τα χαρακτηριστικά μεγέθη παρουσιάζουν εξάρτηση από μία μεταβλητή, τον χρόνο. Οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις αποτελούν τα μαθηματικά πρότυπα τα οποία αναπαράγουν τη συμπεριφορά και τη χρονική εξέλιξη των συστημάτων αυτών⁽²⁾.

6.2 ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

6.2.1 ΓΕΝΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Ένα δυναμικό σύστημα n -τάξης μπορεί να ορισθεί με τη βοήθεια n το πλήθος *συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης* ως ακολούθως,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), \dots, x_n(t), t) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1(t), \dots, x_n(t), t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1(t), \dots, x_n(t), t)\end{aligned}\tag{6.1}$$

όπου $x_i(t)$, $i = 1(1)n$ οι μεταβλητές του συστήματος ή *μεταβλητές κατάστασης* και,

$$\dot{x}_i(t) \equiv \frac{dx_i(t)}{dt}, \quad i = 1(1)n$$

Οι μεταβλητές ενδέχεται, ανάλογα με τη φύση του υπό εξέταση προβλήματος, να αναπαριστούν πληθυσμούς διαφορετικών ειδών σε ένα οικοσύστημα, συγκεντρώσεις ουσιών ή ενώσεων που μετέχουν σε μία χημική αντίδραση, συνιστώσες των διανυσμάτων θέσης και ταχύτητας ενός κινούμενου σώματος κ.ά.

Η από κοινού επίλυση των εξισώσεων (6.1) αποτελεί τον πλέον ευθύ τρόπο με τον οποίο αξιοποιείται ένα μαθηματικό μοντέλο. Το σύστημα μπορεί σε ορισμένες περιπτώσεις να αντιμετωπισθεί αναλυτικά: ωστόσο, η χρήση αριθμητικών μεθόδων για την παραγωγή συγκεκριμένων λύσεων⁽³⁾ είναι, στην πλειοψηφία των προβλημάτων

(1) Στην περίπτωση που η ανεξάρτητη μεταβλητή χρόνος μεταβάλλεται ομαλά διατρέχοντας κάποιο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών – περίπτωση συνεχούς χρόνου. Το υπόβαθρο για τη μοντελοποίηση φαινομένων τα οποία «εξελίσσονται» σε διακριτό χρόνο παρέχουν (αντί των διαφορικών εξισώσεων) οι εξισώσεις διαφορών.

(2) Σε αντίθετη περίπτωση (εξάρτηση των μεγεθών του συστήματος από περισσότερες της μίας μεταβλητές) για την προτυποποίηση του φαινομένου χρησιμοποιείται η έννοια της μερικής διαφορικής εξίσωσης.

(3) Διαδικασία η οποία συχνά αναφέρεται ως προσομοίωση.

των, επιβεβλημένη. Αντιλαμβάνεται όμως κανείς ότι μια ενδελεχής ανάλυση του συστήματος δεν μπορεί να βασισθεί πάνω σε μία και μοναδική προσομοίωση. Κάθε μοντέλο αντιπροσωπεύει ένα σύνολο λύσεων, καθεμία από τις οποίες καθορίζεται μέσω των διαφορετικών αρχικών συνθηκών και των διαφορετικών τιμών των παραμέτρων του συστήματος. Συνεπώς, για την ασφαλή εξαγωγή συμπερασμάτων απαιτείται η πραγματοποίηση μεγάλου αριθμού προσομοιώσεων. Ο αριθμός αυτός αυξάνει γρήγορα με τον αριθμό των ανεξάρτητων παραμέτρων, γεγονός το οποίο περιορίζει τη χρησιμότητα των αριθμητικών μεθόδων επίλυσης.

Η θεωρία δυναμικών συστημάτων κατά κύριο λόγο αποσκοπεί στην υπέρβαση του σταδίου παραγωγής συγκεκριμένων λύσεων και στη διατύπωση διαδικασιών, μέσα από τις οποίες θα προκύψουν πληροφορίες-σχέσεις οι οποίες χαρακτηρίζουν τη δομή ενός συστήματος – π.χ. σχέσεις μεταξύ συγκεκριμένων παραμέτρων και του τρόπου με τον οποίο αυτές επιδρούν στη λύση. Η εξαγωγή τέτοιων πληροφοριών πραγματοποιείται εμμέσως⁽⁴⁾, με χρήση εναλλακτικών μεθόδων ανάλυσης. Στην κατηγορία αυτή ανήκουν οι γεωμετρικές μέθοδοι.

Ας θεωρήσουμε το ακόλουθο σύστημα δεύτερης τάξης⁽⁵⁾,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), x_2(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1(t), x_2(t)) \end{aligned} \quad (6.2)$$

ή σε διανυσματική γραφή,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \quad (6.3)$$

όπου,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t)) \text{ και}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = (f_1(\mathbf{x}(t)), f_2(\mathbf{x}(t)))$$

Το διάνυσμα $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$ συχνά αναφέρεται ως *διάνυσμα κατάστασης* του συστήματος. Σημειώνεται ότι το σύστημα (6.2) είναι *αυτόνομο*⁽⁶⁾ οι συναρτήσεις f_i , $i = 1,2$ δεν εξαρτώνται άμεσα από τον χρόνο.

Η λύση του ανωτέρω συστήματος –δεδομένου ενός διανύσματος αρχικών συνθηκών– θα δίνεται από το ζεύγος των βαθμωτών συναρτήσεων $x_1(t)$ και $x_2(t)$. Εύκολα διαπιστώνει κανείς πως η έκφραση $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$ αναπαριστά δισδιάστατη καμπύλη⁽⁶⁾ σε χώρο, τα σημεία του οποίου ορίζονται μέσω των συντεταγμένων (x_1, x_2) . Η καμπύλη και ο χώρος αυτός ονομάζονται *τροχιά* και *χώρος φάσεων* (ή καταστάσεων) αντίστοιχα. Αποδεικνύεται πως αν οι συναρτήσεις f_i , $i = 1,2$ είναι συνεχείς συναρτήσεις των x_j , $j = 1,2$ με συνεχείς μερικές παραγώγους $\partial f_i / \partial x_j$, $i, j = 1,2$, τότε από κάθε σημείο του χώρου φάσεων διέρχεται μία και μόνο λύση⁽⁴⁾· οι τροχιές καταλαμβάνουν τη συνολική έκταση του χώρου –αφού κάθε σημείο του τελευταίου μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως αρχική συνθήκη– χωρίς όμως να τέμνονται. Το εφαιπτόμενο διάνυσμα ή διάνυσμα ταχύτητας της καμπύλης λαμβάνεται με παραγωγή του διανύσματος κατάστασης,

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) = (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t))$$

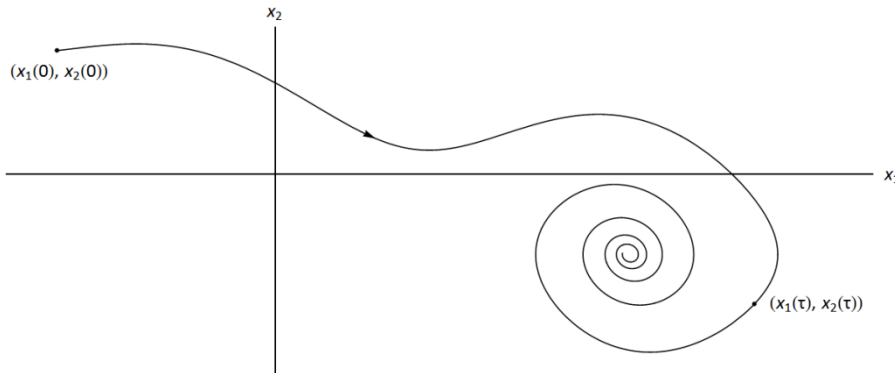
Παρατηρεί κανείς ότι το σύστημα (6.3) ορίζει ένα διανυσματικό πεδίο στον χώρο καταστάσεων. Οι τροχιές του συστήματος αποτελούν τις πεδιακές γραμμές του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}) \hat{i} + f_2(\mathbf{x}) \hat{j}$, όπου \hat{i} , \hat{j} τα μοναδιαία διανύσματα κατά τις διευθύνσεις των αξόνων Ox_1 και Ox_2 αντίστοιχα. Μία οποιαδήποτε αρχική

(4) Χωρίς να απαιτηθεί η επίλυση (με την κλασσική έννοια) του συστήματος.

(5) Θαδειχθεί στη συνέχεια ότι η εξίσωση κίνησης (5.19) μπορεί να αναχθεί σε ένα σύστημα δεύτερης τάξης. Για την ακρίβεια, μία συνήθης διαφορική εξίσωση m -τάξης μπορεί να αναχθεί σε ένα σύστημα m συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης.

(6) Ο χρόνος νοείται εδώ ως παράμετρος της καμπύλης. Καθώς μεταβάλλεται η τιμή της παραμέτρου το διάνυσμα κατάστασης του συστήματος διαγράφει την καμπύλη αυτή.

συνθήκη θα κινηθεί στον χώρο αυτόν –καθώς η παράμετρος χρόνος μεταβάλλει την τιμή της– διαγράφοντας την καμπύλη που αναπαρίσταται παραμετρικά μέσω της έκφρασης $\mathbf{x}(t)$, σύμφωνα με τη φορά που υποδεικνύει το διάνυσμα ταχύτητας $\dot{\mathbf{x}}(t)$ ⁽⁷⁾.



Σχήμα 6.1 : Τροχιά στον χώρο καταστάσεων

Η κατασκευή ενός διαγράμματος το οποίο απεικονίζει τις διαφορετικές τροχιές και κατά προέκταση τον τρόπο με τον οποίο ένα σύνολο αρχικών συνθηκών εξελίσσεται κινούμενο στον χώρο φάσεων παρέχει, όπως γίνεται αντιληπτό, σημαντική πληροφορία ποιοτικού χαρακτήρα για τις λύσεις και συνεπώς για τη συμπεριφορά ενός συστήματος. Ένα διάγραμμα του τύπου αυτού καλείται *πορτραίτο φάσεων* η δομή του καθορίζεται σε μεγάλο βαθμό από τα *στάσιμα σημεία* (fixed points) του συστήματος. Τα τελευταία ικανοποιούν τη σχέση,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (6.4)$$

και αντιστοιχούν σε σημεία ισορροπίας· εάν το διάνυσμα κατάστασης του συστήματος λάβει την τιμή \mathbf{x}^* , τότε διατηρεί την τιμή αυτή σε κάθε μελλοντικό χρόνο. Ένα στάσιμο σημείο μπορεί σε γενικά πλαίσια να χαρακτηριστεί ως *ασταθές* ή *ασυμπτωτικά ευσταθές*, ανάλογα με το εάν μικρές διαταραχές γύρω από τη θέση ισορροπίας μεγεθύνονται ή αποσβένονται (αντίστοιχα) στον χρόνο⁽⁸⁾.

6.2.2 ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Στην περίπτωση που οι συναρτήσεις f_i , $i = 1(1)n$ είναι της μορφής,

$$f_i(x_1(t), \dots, x_n(t), t) = a_{i1}(t) x_1(t) + \dots + a_{in}(t) x_n(t) + w_i(t), \quad i = 1(1)n \quad (6.5)$$

τότε οι εξισώσεις (6.1) συνιστούν ένα n -τάξης γραμμικό σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Το σύστημα αυτό μπορεί να αναπαρασταθεί μέσω της κάτωθι διανυσματικής έκφρασης,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{w}(t) \quad (6.6)$$

όπου,

(7) Παρατηρήστε την αντιστοιχία του διανυσματικού πεδίου \mathbf{f} με το (μόνιμο) πεδίο ταχυτήτων ενός συνεχούς μέσου· η κατάσταση $\mathbf{x}(t)$ του συστήματος μπορεί να θεωρηθεί ως σωματίδιο το οποίο ρέει κατά μήκος των γραμμών ροής του πεδίου.

(8) Ειδικότερα, έστω \mathbf{x}^* ένα σημείο ισορροπίας. Λέμε ότι το σημείο αυτό είναι **ευσταθές**, όταν υπάρχει $R_0 > 0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $R < R_0$ υπάρχει r με $0 < r < R$ έτσι ώστε εάν $\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^*\| < r$ τότε $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| < R$ για κάθε $t > 0$.

Το σημείο \mathbf{x}^* ονομάζεται **ασυμπτωτικά ευσταθές** εάν είναι ευσταθές και επιπλέον υπάρχει $r_0 > 0$ τέτοιο, ώστε εάν $\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^*\| < r_0$ τότε $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}^*$ καθώς $t \rightarrow +\infty$.

Ένα σημείο ισορροπίας ονομάζεται **οριακά ευσταθές** εάν είναι ευσταθές αλλά όχι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Τέλος, ένα σημείο ισορροπίας ονομάζεται **ασταθές** όταν δεν είναι ευσταθές.

$\mathbf{A}(t)$ ο $n \times n$ πίνακας του συστήματος με $\mathbf{A}(t) = [a_{ij}(t)]$ και $\mathbf{w}(t)$ το διάνυσμα διέγερσης.

Αποδεικνύεται ότι η λύση⁽⁹⁾ του συστήματος (6.6) δίνεται, δεδομένης της μορφής της διέγερσης και ενός διανύσματος αρχικών συνθηκών $\mathbf{x}(0)$, από την έκφραση,

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, 0) \mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(t, \tau) \mathbf{w}(\tau) d\tau \quad (6.7)$$

όπου,

$\Phi(t, \tau)$ ο πίνακας μετάβασης (phase-transition matrix) που αντιστοιχεί στο ομογενές σύστημα,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) \quad (6.8)$$

Ως πίνακας μετάβασης του ανωτέρω συστήματος ορίζεται ο $n \times n$ πίνακας-συνάρτηση $\Phi(t, \tau)$ ο οποίος ικανοποιεί τις σχέσεις,

$$\frac{d}{dt} \Phi(t, \tau) = \mathbf{A}(t) \Phi(t, \tau) \quad (6.9)$$

$$\Phi(\tau, \tau) = \mathbf{I} \quad (6.10)$$

Αν υποθέσουμε ότι η κατάσταση $\mathbf{x}(\tau)$ του συστήματος (6.8) σε δεδομένη χρονική στιγμή $t = \tau$ είναι καθορισμένη, τότε για κάθε t ισχύει,

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, \tau) \mathbf{x}(\tau) \quad (6.11)$$

γεγονός το οποίο δικαιολογεί τον αποδιδόμενο στον πίνακα $\Phi(t, \tau)$ χαρακτηρισμό, εφόσον η γνώση του τελευταίου επιτρέπει τη μετάβαση από τη δεδομένη κατάσταση $\mathbf{x}(\tau)$ σε οποιαδήποτε άλλη κατάσταση του συστήματος⁽¹⁰⁾.

Μπορεί να δειχθεί ότι στην περίπτωση ενός συστήματος της μορφής⁽¹¹⁾,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) \quad (6.12)$$

ο υπολογισμός του πίνακα μετάβασης διευκολύνεται σε μεγάλο βαθμό εφόσον ο πίνακας \mathbf{A} διαγωνοποιείται. Τα χαρακτηριστικά όμως μεγέθη $\lambda_1, \mathbf{e}_1; \dots; \lambda_n, \mathbf{e}_n$ (ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα γραμμικώς ανεξάρτητα⁽¹²⁾ ιδιοδιανύσματα του πίνακα \mathbf{A}) δεν αξιοποιούνται μόνο στα πλαίσια της ανωτέρω διαδικασίας. Οι έννοιες των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα \mathbf{A} είναι στενά συνδεδεμένες με τον γραμμικό μετασχηματισμό $\mathbf{A} \mathbf{x}$ ⁽¹³⁾ και επιτρέπουν την εις βάθος διερεύνηση της δομής του γραμμικού συστήματος (6.12). Κάθε ιδιοδιάνυσμα ορίζει ένα υποσύστημα πρώτης τάξης το οποίο, αν και ενσωματωμένο στο γενικό σύστημα, συμπεριφέρεται αυτόνομα. Συνεπώς, εάν ο πίνακας του συστήματος διαθέτει n το πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα τότε το σύστημα μπορεί να αποσυντεθεί σε ένα σύνολο n ανεξάρτητων συστημάτων πρώτης τάξης. Το τελευταίο συμπέρασμα μπορεί να εξαχθεί με ευθύ τρόπο μέσω του ακόλουθου κανόνα αλλαγής μεταβλητών,

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{M} \mathbf{z}(t) \quad (6.13)$$

όπου,

(9) Προκειμένου να εξασφαλισθεί η ύπαρξη και η μοναδικότητα της λύσης οι συντελεστές $a_{ij}(t)$, $i, j = 1(1)n$ και $w_i(t)$, $i = 1(1)n$ θεωρούνται συνεχείς συναρτήσεις του χρόνου.

(10) Ο πίνακας μετάβασης προκύπτει με φυσικό τρόπο στην περίπτωση των συστημάτων διακριτού χρόνου. Στα συστήματα συνεχούς χρόνου η εισαγωγή του ίσως φαντάζει αυθαίρετη.

(11) Γραμμικό σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης με σταθερούς συντελεστές.

(12) Εφόσον έχουμε υποθέσει ότι ο πίνακας \mathbf{A} διαγωνοποιείται.

$$\mathbf{M} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$$

Εισάγοντας την έκφραση (6.13) στο σύστημα (6.12),

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{M} \mathbf{z}(t)$$

ή

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{M} \mathbf{z}(t)$$

και κάνοντας χρήση της σχέσης,

$$\mathbf{A} = \mathbf{M} \mathbf{\Lambda} \mathbf{M}^{-1} \quad (6.14)$$

όπου,

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_n \end{pmatrix}$$

καταλήγουμε στην κάτωθι έκφραση,

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{\Lambda} \mathbf{z}(t)$$

ή αναλυτικότερα,

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{z}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

Το διάνυσμα κατάστασης του συστήματος (6.12) μπορεί λοιπόν να εκφραστεί –μέσω του μετασχηματισμού (6.13)– ως γραμμικός συνδυασμός των ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα \mathbf{A} ήτοι,

$$\mathbf{x}(t) = z_1(t) \mathbf{e}_1 + \dots + z_n(t) \mathbf{e}_n \quad (6.16)$$

όπου οι συντελεστές $z_i(t)$, $i = 1(1)n$ μεταβάλλουν την τιμή τους συναρτήσει του χρόνου με τρόπο τον οποίο υποδεικνύει το σύστημα των ασύζευκτων διαφορικών εξισώσεων (6.15). Συνεπώς, το αρχικό σύστημα μπορεί να θεωρηθεί ως σύνολο ανεξάρτητων συστημάτων πρώτης τάξης, κάθε ένα από τα οποία «εξουσιάζει» τον συντελεστή ενός ιδιοδιανύσματος. Εάν μάλιστα το διάνυσμα κατάστασης του συστήματος ευθυγραμμιστεί με κάποιο ιδιοδιάνυσμα, τότε το πρώτο διατηρεί τη διεύθυνση αυτή σε κάθε μελλοντικό χρόνο· η κατάσταση $\mathbf{x}(t)$ μπορεί να μεταβάλλει μέτρο, όχι όμως διεύθυνση.

Εκτός από τους μηχανισμούς που ρυθμίζουν τον τρόπο με τον οποίο το σύστημα (6.12) μεταβάλλει κατάσταση, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν και τα σημεία στα οποία αυτό ισορροπεί – τα στάσιμα, όπως έχει ήδη αναφερθεί, σημεία του συστήματος⁽¹⁴⁾. Η ευστάθεια ενός σημείου ισορροπίας \mathbf{x}^* καθορίζεται από τη δομή (13) Ως γνωστόν ένα μη μηδενικό διάνυσμα \mathbf{x} ονομάζεται ιδιοδιάνυσμα του πίνακα \mathbf{A} εάν υπάρχει αριθμός λ τέτοιος, ώστε $\mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$. Ο αριθμός λ ονομάζεται ιδιοτιμή του πίνακα \mathbf{A} και αντιστοιχεί στο ιδιοδιάνυσμα \mathbf{x} . Τα ιδιοδιανύσματα ορίζουν τις ιδιαίτερες εκείνες διευθύνσεις τις οποίες ο γραμμικός μετασχηματισμός $\mathbf{A} \mathbf{x}$ απεικονίζει στον εαυτό τους – καθώς τα ιδιοδιανύσματα \mathbf{x} και οι εικόνες τους $\mathbf{A} \mathbf{x}$ είναι συγγραμμικά διανύσματα με συντελεστή συγγραμμικότητας λ .

(14) Το σύστημα $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t)$ έχει πάντα την αρχή $\mathbf{x} = 0$ ως σημείο ισορροπίας. Εάν $\det(\mathbf{A}) = 0$, τότε υπάρχουν και άλλα (άπειρα το πλήθος) σημεία ισορροπίας.

του πίνακα $\mathbf{A}^{(15)}$. Στην περίπτωση που ισχύει $\Re(\lambda_i) < 0$ για κάθε i με $i = 1(1)n$, τότε το σημείο \mathbf{x}^* είναι ασυμπτωτικά ευσταθές· εάν υπάρχει έστω και μία τιμή του δείκτη i για την οποία ισχύει $\Re(\lambda_i) > 0$, τότε το σημείο ισορροπίας \mathbf{x}^* είναι ασταθές⁽¹⁶⁾.

Στην ειδική περίπτωση ενός συστήματος **δεύτερης τάξης** κάθε σημείο ισορροπίας \mathbf{x}^* δύναται (ανάλογα με τις ιδιοτιμές του πίνακα \mathbf{A}) να ενταχθεί σε μία από τις ακόλουθες γενικές κατηγορίες,

πραγματικές ιδιοτιμές,

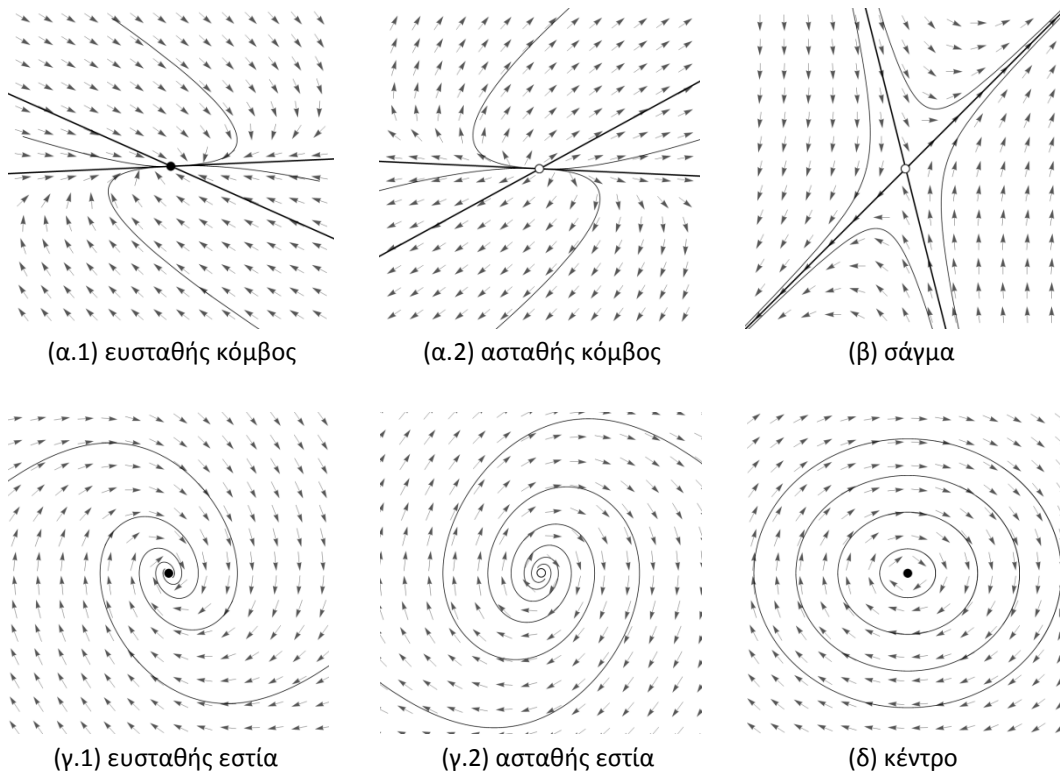
(α) εάν $\lambda_i < 0$ για κάθε i με $i = 1,2$ ($\lambda_i > 0$ για κάθε i με $i = 1,2$), τότε το σημείο ονομάζεται *ευσταθής (ασταθής) κόμβος*⁽¹⁷⁾,

(β) εάν $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, τότε το σημείο ονομάζεται *σάγμα* (saddle point),

μιγαδικές ιδιοτιμές,

(γ) εάν $\Re(\lambda_i) < 0$, $i = 1,2$ ($\Re(\lambda_i) > 0$, $i = 1,2$), τότε το σημείο ονομάζεται *ευσταθής (ασταθής) εστία*⁽¹⁸⁾,

(δ) εάν $\Re(\lambda_i) = 0$, $i = 1,2$, τότε το σημείο ονομάζεται *κέντρο* (center).



Σχήμα 6.2 : Τοπολογία του χώρου φάσεων

6.2.3 ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Ένα μη γραμμικό σύστημα n -τάξης περιγράφεται στη γενική του μορφή από το σύνολο των διαφορικών εξι-

(15) Και δεν εξαρτάται με άμεσο τρόπο από το ίδιο το σημείο.

(16) Στην περίπτωση όπου $\Re(\lambda_i) = 0$ για μία ή περισσότερες τιμές του i με $i = 1(1)n$, για τον προσδιορισμό της ευστάθειας απαιτείται περαιτέρω ανάλυση.

(17) Στη διεθνή βιβλιογραφία αναφέρονται ως *stable* και *unstable node* (αντίστοιχα).

(18) *Stable* και *unstable focus* (ή *spiral*) αντίστοιχα.

ώσεων (6.1). Σε πολυάριθμες περιπτώσεις πρακτικού ενδιαφέροντος οι συναρτήσεις f_i , $i = 1(1)n$ δεν εμφανίζουν άμεση χρονική εξάρτηση· το σύστημα εν προκειμένω καλείται αυτόνομο⁽¹⁹⁾ και μπορεί να αναπαρασταθεί ως ακολούθως,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{aligned} \quad (6.17)$$

Η ανάλυση ενός συστήματος της ανωτέρω μορφής βασίζεται (για λόγους που έχουν ήδη αναφερθεί) στον προσδιορισμό των ποιοτικών χαρακτηριστικών των λύσεων και όχι στις καθαυτά λύσεις. Τα στάσιμα σημεία, οι κλειστές τροχιές οι οποίες αντιστοιχούν σε περιοδικές λύσεις και η διευθέτηση των τροχιών στη γειτονιά των στάσιμων ή περιοδικών αυτών λύσεων συνθέτουν το πορτραίτο φάσεων και συνοψίζουν, μέσω του τελευταίου, τη συμπεριφορά του υπό μελέτη συστήματος.

Η εύρεση των σημείων ισορροπίας ενός μη γραμμικού δυναμικού συστήματος εμφανίζει σε γενικές γραμμές αυξημένη δυσκολία⁽²⁰⁾. Τα στάσιμα σημεία αποτελούν στην προκειμένη περίπτωση λύσεις μη γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων· ένα σύστημα μπορεί να έχει ένα, κανένα, οποιοδήποτε πεπερασμένο ή άπειρο πλήθος σημείων ισορροπίας, τα οποία δύνανται να κατανέμονται με οποιοδήποτε τρόπο στον χώρο φάσεων.

Καθίσταται σαφές –μέσω της παρατήρησης (8)– πως ο χαρακτήρας της ευστάθειας εξαρτάται με αποκλειστικό τρόπο από τη δομή του συστήματος στη γειτονιά ενός σημείου ισορροπίας. Το γεγονός αυτό καθιστά σε πολλές περιπτώσεις νόμιμη (από θεωρητικής σκοπιάς) την αντικατάσταση της πλήρους μη γραμμικής περιγραφής του συστήματος από μία απλούστερη, η οποία προσεγγίζει το υπό μελέτη σύστημα στην περιοχή του στάσιμου σημείου. Είναι προφανές ότι η διαδικασία αυτή διευκολύνει (από τεχνικής σκοπιάς) την εξαγωγή συμπερασμάτων.

Η διερεύνηση της ευστάθειας ενός μη γραμμικού συστήματος μπορεί σε αρκετές περιπτώσεις να αναχθεί στη μελέτη μιας γραμμικοποιημένης εκδοχής του τελευταίου. Η διαδικασία αυτή συχνά αναφέρεται ως πρώτη (ή έμμεση) μέθοδος Lyapunov. Κάθε συνάρτηση f_i , $i = 1(1)n$ του συστήματος (6.17) μπορεί να προσεγγισθεί στην περιοχή ενός σημείου ισορροπίας \mathbf{x}^* ως ακολούθως,

$$f_i(\mathbf{x}^* + \mathbf{y}) = f_i(x_1^* + y_1, \dots, x_n^* + y_n) \cong f_i(\mathbf{x}^*) + y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} f_i(\mathbf{x}^*) + \dots + y_n \frac{\partial}{\partial x_n} f_i(\mathbf{x}^*), \quad i = 1(1)n \quad (6.18)$$

όπου $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$ μια διαταραχή γύρω από το σημείο \mathbf{x}^* . Συνεπώς,

$$\begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}^* + \mathbf{y}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}^* + \mathbf{y}) \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}^*) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}^*) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

ή σε μητρική μορφή,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^* + \mathbf{y}) \cong \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) + \mathbf{F} \mathbf{y} \quad (6.20)$$

όπου \mathbf{F} ο *Ιακωβιανός πίνακας* της \mathbf{f} στο σημείο $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$.

Θέτοντας $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^* + \mathbf{y}(t)$ και κάνοντας χρήση της σχέσης (6.20) το σύστημα (6.17) προσεγγίζεται στη γειτονιά του στάσιμου σημείου \mathbf{x}^* μέσω του κάτωθι γραμμικού συστήματος,

(19) Το σύστημα (6.1) αποτελεί ειδική περίπτωση ενός αυτόνομου δυναμικού συστήματος τάξης $n+1$ με $x_{n+1} = t$, $\dot{x}_{n+1} = 1$.

(20) Σε σύγκριση με τη γραμμική περίπτωση.

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{F} \mathbf{y}(t) \quad (6.21)$$

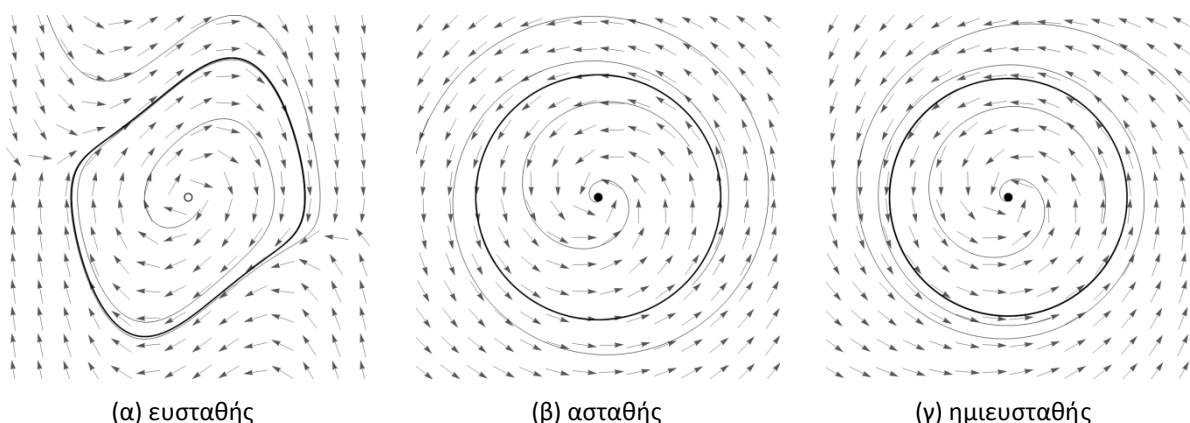
όπου το διάνυσμα κατάστασης αντιπροσωπεύει πλέον τη διαταραχή γύρω από το σημείο ισορροπίας: το σημείο αυτό καλείται *υπερβολικό*, εάν δεν υπάρχουν ιδιοτιμές του πίνακα του ανωτέρω συστήματος με μηδενικό πραγματικό μέρος.

Σύμφωνα με το θεώρημα Hartman-Grobman το πορτραίτο φάσεων του μη γραμμικού συστήματος (6.17) στην περιοχή ενός υπερβολικού στάσιμου σημείου είναι τοπολογικά ισοδύναμο με το πορτραίτο του γραμμικού συστήματος (6.21) – ο χαρακτήρας της ευστάθειας διατηρείται κατά τη μετάβαση από το μη γραμμικό στο γραμμικό σύστημα. Συνεπώς, η μελέτη της ευστάθειας του πλήρους συστήματος ανάγεται (εκτός από την οριακή περίπτωση όπου για τουλάχιστον μία ιδιοτιμή λ του πίνακα \mathbf{F} ισχύει $\Re(\lambda) = 0$) σε αυτή της γραμμικής προσέγγισης.

Σε αντίθεση με την πρώτη, η δεύτερη (ή άμεση) μέθοδος Lyapunov αντιμετωπίζει το ίδιο το σύστημα αντί της γραμμικής εκδοχής του. Η κεντρική ιδέα της μεθόδου έγκειται στην εύρεση μιας συνεχώς διαφορίσιμης πραγματικής συνάρτησης⁽²¹⁾ η οποία εμφανίζει φθίνοντα χαρακτήρα καθώς το σύστημα εξελίσσεται στο χρόνο. Η συγκεκριμένη μέθοδος πλεονεκτεί της πρώτης καθώς μπορεί να εφαρμοσθεί σε οριακές περιπτώσεις ($\Re(\lambda) = 0$), ενώ παράλληλα δύναται να επεκτείνει την ανάλυση σε περιοχές πέραν της γειτονιάς κάποιου σημείου ισορροπίας. Γενικώς, μια συνάρτηση αυτού του τύπου μέσω της οποίας καθίσταται δυνατή η εξαγωγή συμπερασμάτων για την ευστάθεια ενός συστήματος καλείται συνάρτηση Lyapunov. Δυστυχώς δεν υπάρχει συστηματικός τρόπος για την εύρεση τέτοιου τύπου συναρτήσεων – η κατασκευή τους σε αρκετές περιπτώσεις αποτελεί ένα εξαιρετικά δύσκολο εγχείρημα.

Η ιδέα των συναρτήσεων Lyapunov μπορεί σε πολλές περιπτώσεις να γενικευθεί προκειμένου να καταστεί δυνατή η διαχείριση ειδικών περιπτώσεων – π.χ. αυτόνομων συστημάτων των οποίων το διάνυσμα κατάστασης τείνει να ακολουθεί ένα συγκεκριμένο μοτίβο με την πάροδο του χρόνου. Η κατάσταση του συστήματος θα μπορούσε στην περίπτωση αυτή να προσεγγίζει έναν *οριακό κύκλο*: μια απομονωμένη⁽²²⁾ κλειστή τροχιά.

Οι οριακοί κύκλοι αποτελούν εγγενώς μη γραμμικά φαινόμενα (ένα γραμμικό σύστημα δε δύναται να απόκριθεί κατ' αυτόν τον τρόπο⁽²³⁾) και μοντελοποιούν συστήματα τα οποία εμφανίζουν αυτοσυντηρούμενη ταλαντωτική συμπεριφορά: το σύστημα μπορεί να ταλαντώνεται απουσία εξωτερικής φόρτισης, ενώ το πλάτος, η περίοδος και η μορφή της ταλάντωσης καθορίζονται από τη δομή του συστήματος – το τελευταίο θα επιστρέψει στον «κανονικό» τρόπο ταλάντωσης ακόμα και αν διαταραχθεί ελαφρά. Στην περίπτωση αυτή (κάθε γειτονική τροχιά προσεγγίζει την κλειστή καμπύλη) ο οριακός κύκλος καλείται *ευσταθής*: στην αντίθετη περίπτωση καλείται *ασταθής*, ενώ μπορούν να εμφανιστούν και *ημιευσταθείς* οριακοί κύκλοι⁽²⁴⁾ (σχήμα 6.3).



Σχήμα 6.3 : Οριακοί κύκλοι στο επίπεδο

(21) Η συνάρτηση αυτή απεικονίζει το διάνυσμα κατάστασης του συστήματος σε κάποιο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών.

(22) Οι γειτονικές τροχιές δεν μπορούν να συνιστούν κλειστές καμπύλες.

(23) Ένα γραμμικό σύστημα μπορεί αναμφισβήτητα να αποκρίνεται με περιοδικό τρόπο: οι κλειστές τροχιές που αντιστοιχούν στις περιοδικές λύσεις δεν είναι όμως απομονωμένες – βλ. σχήμα 6.2(δ).

(24) Stable, unstable και half-stable limit cycle αντίστοιχα.

6.3 ΔΙΑΚΛΑΔΩΣΕΙΣ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Ένα δυναμικό σύστημα καλείται σε γενικές γραμμές *δομικά ευσταθές*, εάν τα ποιοτικά χαρακτηριστικά των λύσεων παραμένουν αναλλοίωτα σε μικρές διαταραχές του συστήματος⁽²⁵⁾ – στην αντίθετη περίπτωση το σύστημα καλείται *δομικά ασταθές*.

Θεωρούμε το ακόλουθο δυναμικό σύστημα n -τάξης⁽²⁶⁾,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}; p_1, \dots, p_m) \quad (6.22)$$

όπου $p_i, i = 1(1)m$ παράμετροι του συστήματος. Καθώς το διάνυσμα $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m)$ κινείται στον χώρο $P \subseteq \mathbb{R}^m$ ⁽²⁷⁾ το πορτραίτο καταστάσεων του συστήματος τροποποιείται. Δύο ενδεχόμενα είναι πιθανά: είτε η τοπολογία του πορτραίτου παραμένει ισοδύναμη με αυτήν του αρχικού συστήματος, είτε η τοπολογία αυτή μεταβάλλεται.

Η εμφάνιση ενός πορτραίτου φάσεων διαφορετικής τοπολογίας κάτω από μεταβολές των παραμέτρων του συστήματος (6.22) ονομάζεται *διακλάδωση*⁽²⁸⁾. Η διαφοροποίηση αυτή λαμβάνει χώρα καθώς το διάνυσμα \mathbf{p} διέρχεται από κάποιο *σημείο διακλάδωσης*, έστω \mathbf{p}_{cr} . Συνεπώς το σύστημα,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}; \mathbf{p}_{cr}) \quad (6.23)$$

είναι δομικά ασταθές.

Παραδείγματα διακλαδώσεων ενδέχεται να αφορούν μεταβολές στον αριθμό και στον χαρακτήρα (όσον αφορά την ευστάθεια) στάσιμων σημείων, κλειστών τροχιών ή τροχιών οι οποίες συνδέουν υπερβολικά σημεία. Επιπρόσθετα, μια διακλάδωση μπορεί να έχει τοπικό (αντ. καθολικό) χαρακτήρα⁽²⁹⁾, εάν ο εντοπισμός της καθίσταται (αντ. δεν μπορεί να καταστεί) δυνατός μέσα από την ανάλυση μιας οσοδήποτε μικρής περιοχής μιας μόνιμης λύσης⁽³⁰⁾.

Στην περίπτωση ενός συστήματος *δεύτερης τάξης* μπορούμε να διακρίνουμε επτά συνήθεις τύπους διακλαδώσεων. Οι τρεις πρώτοι αφορούν τη δημιουργία, την καταστροφή ή τη μεταβολή του τύπου της ευστάθειας στάσιμων σημείων: οι τέσσερις τελευταίοι σχετίζονται με την εμφάνιση ή την εξαφάνιση περιοδικών αποκρίσεων.

Saddle-node bifurcation: αποτελεί τον βασικό μηχανισμό δημιουργίας και καταστροφής στασιμών σημείων. Δύο στάσιμες συνυπάρχουσες λύσεις, ένας ευσταθής κόμβος και ένα σάγμα, συγκλίνουν, συγχωνεύονται και τελικά καταστρέφονται⁽³¹⁾ καθώς μια παράμετρος μεταβάλλει την τιμή της. Η διαδικασία μπορεί να περιγραφεί με την αντίθετη φορά: ένα ζεύγος στάσιμων σημείων «γεννιέται» σε μια περιοχή στην οποία το σύστημα δεν εμφάνιζε, μέχρι πρότινος, λύσεις με στάσιμο χαρακτήρα⁽³²⁾.

Transcritical bifurcation: αποτελεί τον βασικό μηχανισμό μεταβολής του τύπου της ευστάθειας ενός στάσιμου σημείου. Αντιπροσωπευτική είναι η περίπτωση κατά την οποία ένας ευσταθής κόμβος και ένα σάγμα συγκλίνουν, συγχωνεύονται και τελικά ανταλλάσσουν χαρακτήρα καθώς μεταβάλλεται μια παράμετρος του συστήματος.

Pitchfork bifurcation: ο τύπος αυτός είναι συνήθης σε φυσικά προβλήματα τα οποία εμφανίζουν συμμετρία. Στη *supercritical* εκδοχή της διακλάδωσης ένας ευσταθής κόμβος αποσταθεροποιείται καθώς «γεννιέται» ένα νέο ζευγάρι ευσταθών κόμβων. Στη *subcritical* εκδοχή ένα ζευγάρι σαγματών συγχωνεύεται με έναν ευσταθή κόμβο

(25) Η τοπολογική δηλαδή δομή του πορτραίτου φάσεων δε μεταβάλλεται. Ένας πιο αυστηρός ορισμός θα αφορούσε την τοπολογική ισοδυναμία των ροών που αντιστοιχούν στα διανυσματικά πεδία τα οποία ορίζονται μέσω του αρχικού και του διαταραγμένου συστήματος. Η διαταραχή έχει τον χαρακτήρα μεταβολών πάνω στις τιμές των παραμέτρων του συστήματος.

(26) Ή ορθότερα, την m -παραμετρική οικογένεια δυναμικών συστημάτων n -τάξης.

(27) Ο χώρος αυτός συχνά αναφέρεται ως *παραμετρικός χώρος*.

(28) Στη διεθνή βιβλιογραφία χρησιμοποιείται ο όρος *bifurcation*.

(29) *Local* και *global bifurcation* αντίστοιχα.

(30) Ο όρος αναφέρεται σε σημεία ισορροπίας ή κλειστές τροχιές.

(31) Το σύστημα δεν εμφανίζει πλέον στάσιμες λύσεις στη γειτονιά των σημείων.

(32) Η θεώρηση της διαδικασίας με τη συγκεκριμένη φορά οδήγησε στη διατύπωση του όρου *blue sky bifurcation*. Τα στάσιμα σημεία εμφανίζονται με απροσδόκητο (*out of a clear blue sky*) τρόπο.

αποσταθεροποιώντας τον τελευταίο· υπάρχουν ωστόσο περιπτώσεις στις οποίες ευσταθείς καταστάσεις σε απομακρυσμένες θέσεις δύναται να συνυπάρχουν (σε συγκεκριμένη περιοχή τιμών κάποιας παραμέτρου) με τον ευσταθή κόμβο. Το γεγονός αυτό μπορεί να οδηγήσει την κατάσταση του συστήματος, καθώς η τιμή μιας παραμέτρου διαγράφει κάποιο διάστημα, σε απομακρυσμένους ελκυστές⁽³³⁾ – το φαινόμενο ονομάζεται άλμα (jump). Η κατάσταση μάλιστα του συστήματος ενδέχεται να παραμένει στο απομακρυσμένο σημείο ισορροπίας ακόμα και αν η φορά με την οποία η παράμετρος διαγράφει το διάστημα αντιστραφεί τη «στιγμή» που διαπιστώθηκε το άλμα – φαινόμενο υστέρησης (hysteresis).

Hopf bifurcation: στη *supercritical* εκδοχή η εμφάνιση ενός ευσταθούς οριακού κύκλου αποσταθεροποιεί μια προϋπάρχουσα (του κύκλου) εστία⁽³⁴⁾ με ευσταθή χαρακτήρα. Στη *subcritical* εκδοχή της διακλάδωσης η ευσταθής εστία περιβάλλεται από έναν ασταθή οριακό κύκλο, ο οποίος με τη σειρά του περιβάλλεται από έναν ευσταθή. Καθώς μια παράμετρος του συστήματος μεταβάλλει την τιμή της ο πρώτος συρρικνώνεται, καθιστώντας την εστία (στο όριο καθώς το πλάτος του⁽³⁵⁾ μηδενίζεται) ασταθή· αρχικές συνθήκες οι οποίες μέχρι πρότινος οδηγούσαν το σύστημα σε ηρεμία, οδηγούν πλέον σε ταλαντώσεις μεγάλου πλάτους – άλμα σε απομακρυσμένο ελκυστή. Ο συγκεκριμένος τύπος διακλάδωσης συνδέεται στενά με φαινόμενα υστέρησης.

Saddle-node bifurcation of cycles: σε αναλογία με την διακλάδωση saddle-node (of fixed points) που περιγράφηκε ανωτέρω, ένας ημιευσταθής οριακός κύκλος εμφανίζεται με απροσδόκητο τρόπο καθώς μια παράμετρος του συστήματος μεταβάλλεται. Εν συνεχεία διασπάται σε δύο οριακούς κύκλους, έναν ευσταθή και έναν ασταθή. Ακολουθώντας την αντίστροφη διαδικασία, ένας ευσταθής και ένας ασταθής οριακός κύκλος συγκρούονται και αλληλοκαταστρέφονται.

Infinite period bifurcation: ο συγκεκριμένος τύπος διακλάδωσης αφορά οριακούς κύκλους των οποίων η περίοδος αυξάνει μέχρι την εμφάνιση ενός στάσιμου σημείου επί του κύκλου· ως συνέπεια, η περίοδος του τελευταίου απειρίζεται. Στη συνέχεια το στάσιμο σημείο διασπάται σε έναν ευσταθή κόμβο και ένα σάγμα.

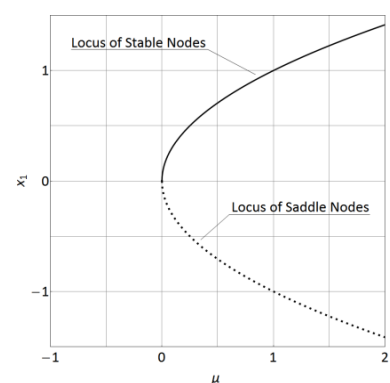
Homoclinic bifurcation: αποτελεί ακόμα έναν μηχανισμό εμφάνισης ή εξαφάνισης περιοδικών αποκρίσεων. Ένας οριακός κύκλος πλησιάζει κάτω από τη μεταβολή μιας παραμέτρου ένα σάγμα. Στο σημείο διακλάδωσης ο οριακός κύκλος μετατρέπεται σε *ομοκλιτική τροχιά*· η τροχιά ξεκινάει και καταλήγει στο ίδιο στάσιμο σημείο. Η ομοκλιτική σύνδεση δεν εμμένει σε περαιτέρω μεταβολή της παραμέτρου.

Οι τρεις τελευταίοι (τέσσερις πρώτοι) τύποι διακλαδώσεων έχουν καθολικό (τοπικό) χαρακτήρα, ενώ ο πρώτος και ο τελευταίος συνδέονται άμεσα με το φαινόμενο surf-riding. Το σχήμα 6.4 αποτελεί το *διάγραμμα διακλάδωσης* του συστήματος (saddle-node bifurcation),

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \mu - x_1^2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 \end{aligned} \quad (6.24)$$

Διαγράμματα αυτού του τύπου απεικονίζουν τις μεταβολές στη θέση, την ευστάθεια και τον αριθμό των σημείων ισορροπίας ενός συστήματος συναρτήσει μιας παραμέτρου. Στο σχήμα 6.5 απεικονίζονται τα διαφορετικά στιγμιότυπα του πορτραίτου φάσεων του συστήματος,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \mu x_2 + x_1 - x_1^2 + x_1 x_2 \end{aligned} \quad (6.25)$$



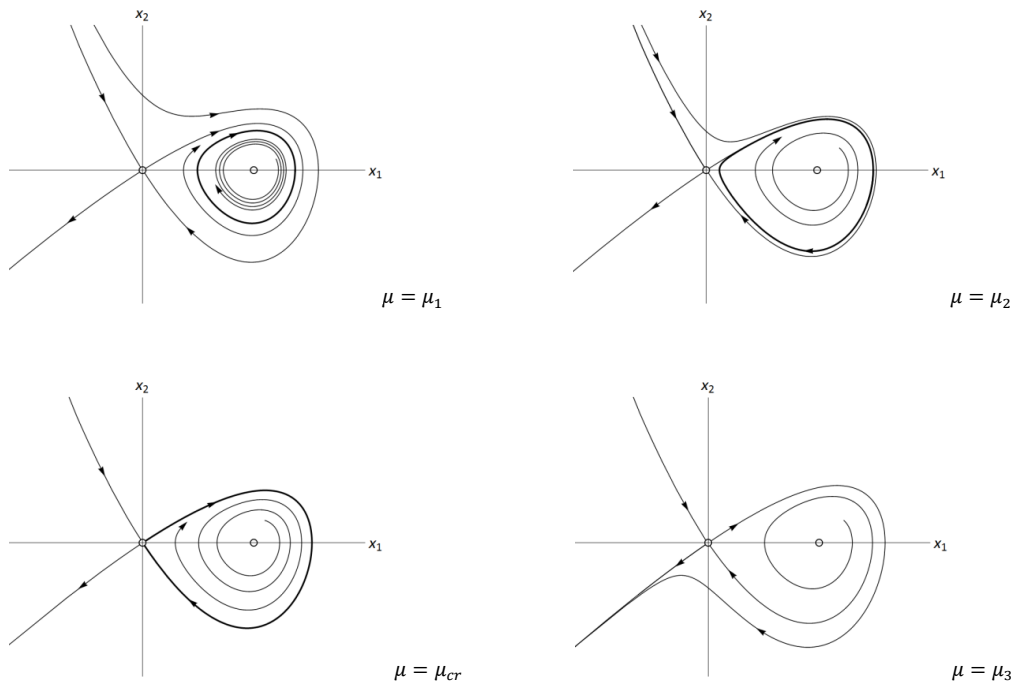
Σχήμα 6.4

(33) Ο όρος *ελκυστής* προσδιορίζει ένα υποσύνολο του χώρου φάσεων το οποίο έλκει τις παρακείμενες τροχιές (attractor). Ο όρος *απωθητής* (repeller) χρησιμοποιείται στην περίπτωση που το υποσύνολο αυτό απωθεί τις γειτονικές τροχιές.

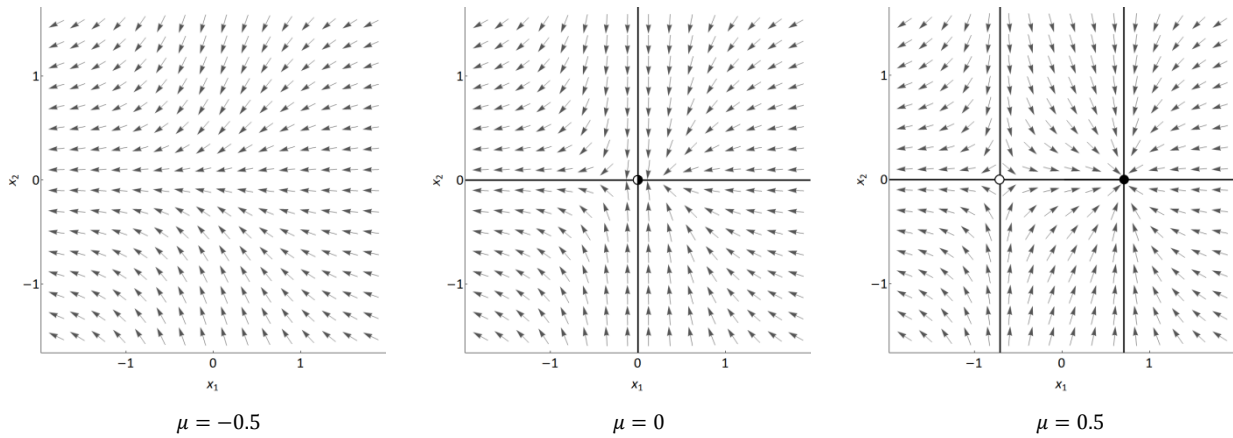
(34) Η εστία περιβάλλεται από τον οριακό κύκλο.

(35) Ή ορθότερα, το πλάτος της περιοδικής κίνησης την οποία ο συγκεκριμένος οριακός κύκλος περιγράφει.

στο οποίο ένας οριακός κύκλος καταστρέφεται αφού προηγουμένως έχει μετατραπεί σε ομοκλινική τροχιά (homoclinic bifurcation).



Σχήμα 6.5 : $\mu_1 < \mu_2 < \mu_{cr} < \mu_3$



Σχήμα 6.6 : Πορτραίτα φάσεων του συστήματος (6.24) για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου μ

6.4 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΣΥΝΕΧΙΣΗ

6.4.1 ΓΕΝΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Έστω το κάτωθι σύστημα μη γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}; p) = 0 \tag{6.26}$$

όπου $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ και $p \in \mathbb{R}$. Οι μέθοδοι αριθμητικής συνέχισης αποσκοπούν στον προσεγγιστικό υπολογισμό των λύσεων του ανωτέρω συστήματος καθώς η παράμετρος p μεταβάλλει την τιμή της⁽³⁶⁾. Καθίσταται προφανής η ταύτιση των κοινών λύσεων των εξισώσεων (6.26) με τα στάσιμα σημεία του δυναμικού συστήματος,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}; p) \quad (6.27)$$

Υπό κατάλληλες προϋποθέσεις και δεδομένου ενός σημείου ισορροπίας \mathbf{x}_0 για το οποίο ισχύει,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0; p_0) = 0 \quad (6.28)$$

οι αλγόριθμοι αριθμητικής συνέχισης δύνανται να «ακολουθούν» τις στάσιμες λύσεις στα διαφορετικά μέλη της μονοπαραμετρικής οικογένειας συστημάτων (6.27), οι οποίες είναι συνδεδεμένες με την αρχική λύση (6.28). Κατά τη διαδικασία συνέχισης μπορεί επιπλέον να καταστεί δυνατός, μέσω συναρτήσεων ελέγχου, ο εντοπισμός διακλαδώσεων και αλλαγών στην ευστάθεια. Η μέθοδος βρίσκει εφαρμογή και στις περιπτώσεις λύσεων χωρίς στάσιμο χαρακτήρα, όπως π.χ. περιοδικών, ομοκλινικών και ετεροκλινικών τροχιών ή γενικότερα λύσεων οι οποίες ικανοποιούν κάποιο πρόβλημα συνοριακών τιμών. Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας η συνέχιση των μόνιμων αποκρίσεων του πλοίου πραγματοποιήθηκε σε περιβάλλον MATLAB/MATCONT.

6.4.2 ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΣΥΝΕΧΙΣΗΣ

Έστω η λεία συνάρτηση $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Επιθυμούμε τον υπολογισμό της καμπύλης η οποία αντιστοιχεί στη λύση $\mathbf{f}(\mathbf{y}) = 0$ ⁽³⁷⁾. Η αριθμητική συνέχιση αποτελεί μια τεχνική η οποία αποσκοπεί στην εύρεση μιας ακολουθίας διαδοχικών σημείων \mathbf{y}_i , $i = 1, 2, \dots$ που προσεγγίζουν την ανωτέρω καμπύλη. Για τον υπολογισμό των σημείων, τα οποία οφείλουν να ικανοποιούν κάποιο καθορισμένο κριτήριο ανοχής,

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{y}_i)\| \leq \varepsilon, \text{ για κάποιο } \varepsilon > 0$$

και μια πρόσθετη συνθήκη,

$$\|\delta\mathbf{y}_i\| \leq \varepsilon'$$

όπου $\varepsilon' > 0$ και $\delta\mathbf{y}_i$ η τελευταία διόρθωση Newton, χρησιμοποιείται –συνήθως– μια διαδικασία πρόβλεψης-διόρθωσης.

Δεδομένου λοιπόν ενός σημείου \mathbf{y}_i επί της καμπύλης και ενός κανονικοποιημένου εφαπτομενικού, στο ίδιο σημείο, διανύσματος \mathbf{v}_i – για το τελευταίο προφανώς ισχύει,

$$\mathbf{f}_y(\mathbf{y}_i) \mathbf{v}_i = 0, \quad \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle = 1$$

καθίσταται δυνατός ο υπολογισμός, σε δύο βήματα, του σημείου \mathbf{y}_{i+1} .

Πρόβλεψη: σε αρκετές περιπτώσεις η αρχική εκτίμηση \mathbf{Y}^0 πραγματοποιείται πάνω στη διεύθυνση του εφαπτομενικού διανύσματος,

$$\mathbf{Y}^0 = \mathbf{y}_i + h \mathbf{v}_i$$

όπου h κάποιο προκαθορισμένο βήμα.

Διόρθωση: υποθέτοντας ότι το \mathbf{Y}^0 βρίσκεται κοντά στη ζητούμενη καμπύλη και χρησιμοποιώντας μια πα-

(36) Το σύστημα (6.26) μπορεί σε γενικές γραμμές να χαρακτηρίζεται από μεγάλο αριθμό παραμέτρων· στην προκειμένη περίπτωση θεωρούμε, χάριν απλότητας, τη μονοπαραμετρική περίπτωση.

(37) $\mathbf{y} = (\mathbf{x}, p)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}$.

ρόμοια με τη Newton μέθοδο υπολογίζουμε το σημείο \mathbf{y}_{i+1} . Οι επαναληπτικές διαδικασίες αυτής της μορφής εφαρμόζονται σε περιπτώσεις συστημάτων τα οποία χαρακτηρίζονται από κοινό αριθμό εξισώσεων και αγνώστων. Συνεπώς, το σύστημα συμπληρώνει μια πρόσθετη συνθήκη έτσι ώστε,

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}) = 0$$

$$g(\mathbf{y}) = 0$$

Ο προσδιορισμός της πραγματικής συνάρτησης $g(\mathbf{y})$ μπορεί να πραγματοποιηθεί με διαφορετικούς τρόπους. Για περισσότερες πληροφορίες ο αναγνώστης παραπέμπεται στο εγχειρίδιο χρήσης του κώδικα MATCONT [6].

7 ΤΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ SURF-RIDING

7.1 ΓΕΝΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Ο όρος *surf-riding* περιγράφει μια μάλλον ιδιάζουσα κατάσταση κατά την οποία η απόκριση του πλοίου εμφανίζει στάσιμο χαρακτήρα ως προς παρατηρητή κινούμενο με την ταχύτητα φάσης του κύματος. Ο τελευταίος αντιλαμβάνεται το πλοίο σταματημένο στην περιοχή κάποιας κοιλάδας αν και η σχετική ταχύτητα πλοίου⁽¹⁾-κύματος θα έπρεπε, σε συμφωνία με τις επιλεγμένες στροφές της έλικας, να λαμβάνει μη μηδενική τιμή. Η ανωτέρω συμπεριφορά αναμένεται να εκδηλωθεί σε περιβάλλον κυματισμών με μήκος συγκρίσιμο με το μήκος του πλοίου και κατεύθυνση διάδοσης η οποία σχηματίζει μηδενική (*following seas*) ή μικρή σχετικά γωνία (*quartering seas*) με το διάνυσμα της ταχύτητας του τελευταίου.

Η επικινδυνότητα μιας ενδεχόμενης εμπλοκής με το φαινόμενο δεν είναι προφανής. Το *surf-riding* δύναται ωστόσο να ενεργοποιήσει ασταθείς συμπεριφορές οι οποίες συνδέονται με τις κινήσεις του πλοίου σε διαφορετικές διευθύνσεις. Θεωρείται κατ' αυτόν τον τρόπο προάγγελος του *broaching*, το οποίο μπορεί με τη σειρά του να οδηγήσει στην ανάπτυξη μεγάλης εγκάρσιας κλίσης, ακόμα και στην ανατροπή. Ο Σπύρου [17] αναφέρει δύο μηχανισμούς που οδηγούν στο *broaching* και συνδέονται άμεσα με το φαινόμενο *surf-riding*: ο πρώτος σχετίζεται με τις συνθήκες οι οποίες οδηγούν σε αυτό, ενώ ο δεύτερος με τις συνθήκες κατά την απόπειρα απεμπλοκής από αυτό.

Τα χαρακτηριστικά της διαμήκουσ απόκρισης του πλοίου ενδέχεται να ενεργοποιήσουν και άλλες μορφές αστάθειας. Ένα πλοίο το οποίο λειτουργεί σε περιβάλλον ακολουθούντων κυματισμών μπορεί να εκτελεί διαμήκεις περιοδικές ταλαντώσεις τέτοιας μορφής, ώστε την παρατεταμένη παραμονή του στην περιοχή των κορυφών του κύματος –όπου η ροπή επαναφοράς κατά τη διεύθυνση *roll* εμφανίζει μειωμένη ή και αρνητική σε κάποιες περιπτώσεις τιμή– να τη διαδέχεται μια σύντομη διέλευση από την περιοχή των κοιλάδων (*asymmetric surging*). Στην περίπτωση αυτή υπάρχει πιθανότητα, εάν η διέλευση του πλοίου από τη «γειτονιά» κάποιας κορυφής διαρκέσει τον απαιτούμενο⁽²⁾ χρόνο, το τελευταίο να ανατραπεί με αιφνίδιο, μη ταλαντωτικό τρόπο (*pure loss of stability*).

7.2 ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Το φαινόμενο *surf-riding* επιβεβαιώνεται πειραματικά για πρώτη φορά από τους Du Cane και Goodrich [5]. Η εικόνα γίνεται πιο ξεκάθαρη είκοσι πέντε περίπου χρόνια αργότερα –ενδεχομένως λόγω των εξελίξεων στην τεχνολογία μετρήσεων και αισθητήρων– όταν ο Kan πραγματοποιεί μεγάλο αριθμό πειραμάτων. Οι δοκιμές διεξάγονται σε πειραματική δεξαμενή και αφορούν αυτοπροωθούμενο μοντέλο μικρού αλιευτικού σκάφους, το οποίο δύναται να διατηρεί ευθύγραμμη πορεία σε κανονικούς ακολουθούντες κυματισμούς μέσω συστήματος τηλεκατεύθυνσης. Στο σχήμα 7.1 παρουσιάζεται η διακύμανση της διαμήκουσ συνιστώσας της ταχύτητας του μοντέλου συναρτήσει των στροφών της έλικας. Γίνεται προφανές ότι μια απότομη αλλαγή της ταχύτητας λαμβάνει χώρα για συγκεκριμένο αριθμό περιστροφών – περί τις 18 στροφές ανά λεπτό. Η αλλαγή αυτή σηματοδοτεί τη μετάβαση από την διαμήκη περιοδική ταλάντωση μεγάλου πλάτους (*surging of large amplitude*) στη μόνιμη κατάσταση που περιγράφεται με τον όρο *surf-riding*. Στην κατάσταση αυτή η ταχύτητα του μοντέλου συμφωνεί με την τροποποιημένη, μη γραμμική ταχύτητα φάσης του κύματος [12],

$$c^2 = \frac{g}{k} (1 + k^2 \alpha^2 + 1.25 k^4 \alpha^4 + \dots) \quad (7.1)$$

όπου,

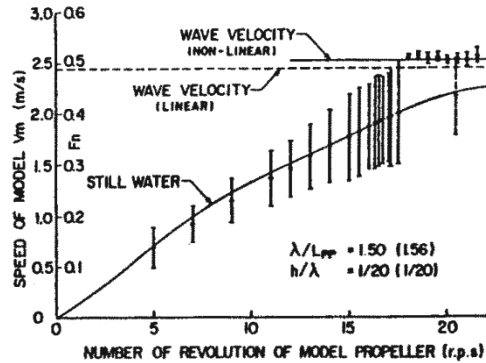
α το πλάτος και k ο αριθμός κύματος.

(1) Αναφορά στην ταχύτητα την οποία θα ανέπτυσσε το πλοίο σε ήρεμο νερό.

(2) Υπό την έννοια του κρίσιμου.

Από το σχήμα 7.1 προκύπτει ακόμα μία σημαντική παρατήρηση· η απόκριση του πλοίου χάνει τον περιοδικό της χαρακτήρα τη στιγμή που η διαμήκης ταχύτητα του πλοίου, συμπεριλαμβανομένης και της ταλαντωτικής συνιστώσας, λαμβάνει οριακά την τιμή της ταχύτητας φάσης του κύματος.

Στην ίδια εργασία αναφέρεται μεταξύ άλλων και η αρνητική επίδραση που επιφέρει η εκδήλωση του φαινομένου surf-riding στην αποτελεσματικότητα του πηδαλίου, καθώς επέρχεται μείωση στην ταχύτητα της εισερχόμενης σε αυτό ροής.



Σχήμα 7.1 : Διακύμανση της διαμήκουσ συνιστώσας της ταχύτητας (Kan, 1990)

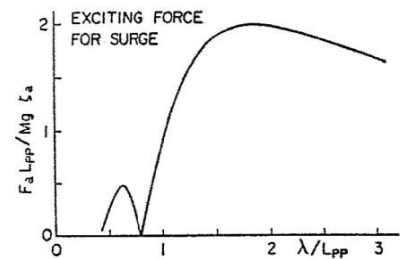
7.3 ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΟΥ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ

Βασιζόμενος πάνω σε ένα μαθηματικό μοντέλο ενός βαθμού ελευθερίας ο Kan προβαίνει στη διερεύνηση της διαμήκουσ συμπεριφοράς του πλοίου σε περιβάλλον ακολουθούντων κυματισμών. Για τον υπολογισμό των διεγερουσών δυνάμεων χρησιμοποιεί την υπόθεση Froude-Krylov. Στο σχήμα 7.2 με F_a συμβολίζεται το πλάτος της δύναμης Froude-Krylov κατά τη διαμήκη διεύθυνση – παρατηρείστε την ομοιότητα με το σχήμα 5.4.

Ο Kan σημειώνει την ύπαρξη δύο σημείων στατικής ισορροπίας, ενός ευσταθούς σημείου και ενός σάγματος, για συγκεκριμένο εύρος παραμέτρων⁽³⁾. Το ευσταθές σημείο αντιπροσωπεύει την εφικτή, από φυσικής άποψης, μόνιμη απόκριση (surf-riding) και εντοπίζεται εντός της περιοχής $(-\lambda/4, \lambda/4)$ από την κοιλάδα του κύματος. Η ασταθής λύση βρίσκεται εκτός της προαναφερθείσας περιοχής.

Η ολοκλήρωση της διαφορικής εξίσωσης κίνησης οδηγεί στην υπόνοια συνύπαρξης διαφορετικών αποκρίσεων. Το πλοίο δύναται να εκτελεί διαμήκεις περιοδικές ταλαντώσεις καθώς το κύμα το προσπερνάει (periodic surging), είτε να αποκρίνεται με στάσιμο –ως προς παρατηρητή κινούμενο με την ταχύτητα φάσης του κύματος– τρόπο (surf-riding) αναλόγως των αρχικών συνθηκών. Η εγκυρότητα των προσομοιώσεων αξιολογείται βάσει των πειραματικών δεδομένων (Σχήμα 7.3).

Η συνύπαρξη διαφορετικών αποκρίσεων καθίσταται προφανής μετά από ανάλυση του χώρου φάσεων. Σε χαμηλούς αριθμούς $f_n^{(4)}$ ο περιοδικός ελκυστής εμφανίζεται ως η μοναδική λύση του συστήματος (periodic surging) – κάθε αρχική συνθήκη καταλήγει πάνω στην κυματοειδή γραμμή του σχήματος 7.4 (α). Για ενδιάμεσες τιμές του αριθμού f_n ο χώρος φάσεων διαιρείται σε δύο ελκτικά χωρία. Αρχικές συνθήκες οι οποίες περικλύονται από τους ευσταθείς κλάδους του σάγματος –διακεκομμένη γραμμή, σχήματα 7.4 (β) και (γ)– έλκονται από το ευσταθές στάσιμο σημείο· συνθήκες έξω από την περιοχή αυτή οδηγούν την κατάσταση του συστήματος στον περιοδικό ελκυστή. Τέλος, για μεγαλύτερες τιμές του αριθμού f_n το σύστημα καταλήγει ανεξαρτήτως των αρχι-

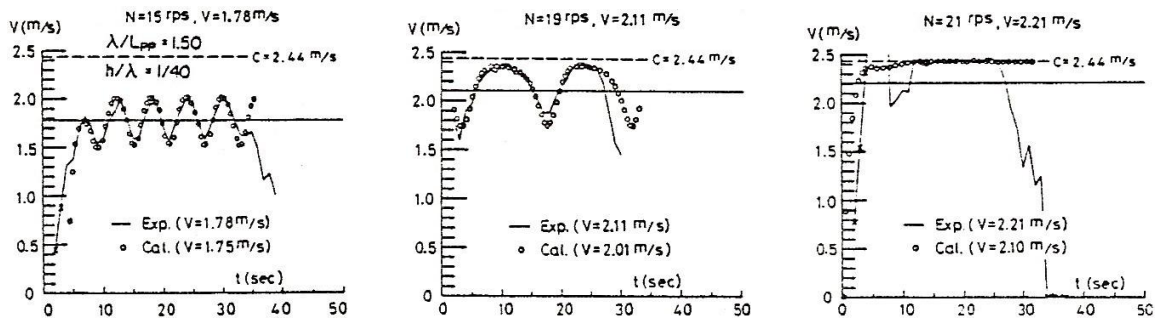


Σχήμα 7.2 : Δύναμη Froude-Krylov κατά τη διαμήκη διεύθυνση (Kan, 1990)

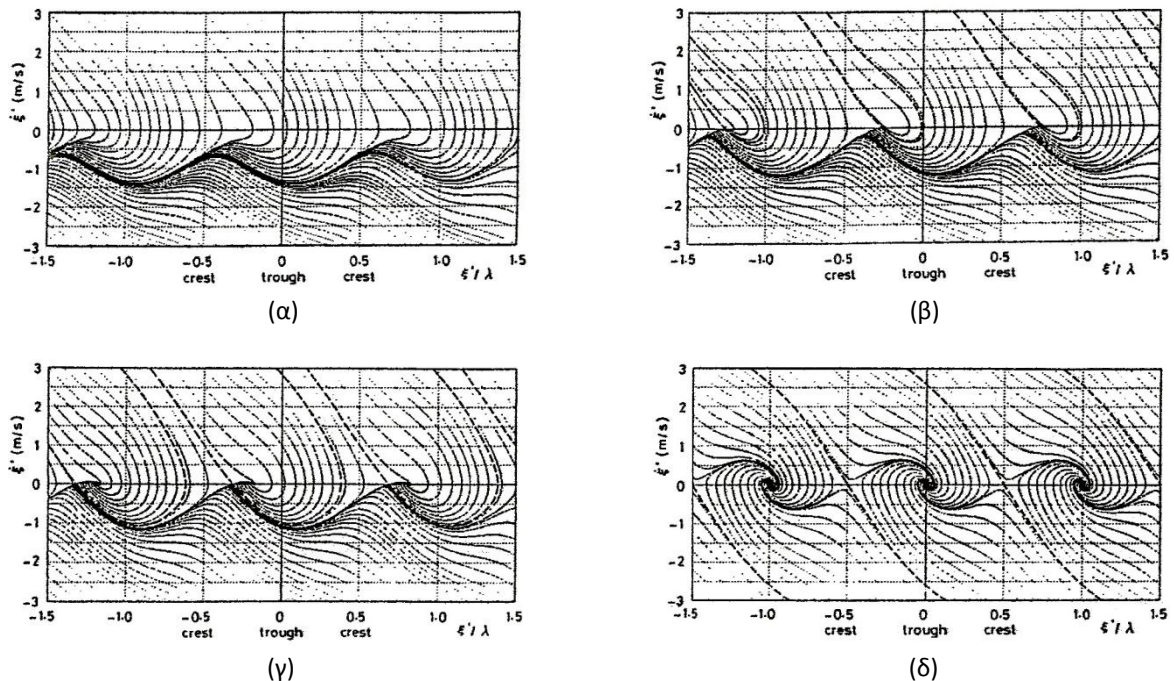
(3) Η εξίσωση κίνησης ορίζει, μέσω κατάλληλου μετασχηματισμού, ένα μη γραμμικό δυναμικό σύστημα δεύτερης τάξης.

(4) Ο αριθμός Froude (f_n) εισάγεται ως μέγεθος αντιπροσωπευτικό των περιστροφών της έλικας.

κών συνθηκών, στο surf-riding – σχήμα 7.4 (δ).



Σχήμα 7.3 : Σύγκριση προσομοιώσεων και πειραματικών δεδομένων (Kan, 1990)



Σχήμα 7.4 : Διαγράμματα φάσεων για διαφορετικούς αριθμούς f_n (Kan, 1990)

Από τα ανωτέρω καθίσταται προφανής η ύπαρξη δύο κρίσιμων τιμών της ταχύτητας, έστω V_{lcr} και $V_l^{(5)}$. Κάτω από την πρώτη το surf-riding δε δύναται να εμφανιστεί, ενώ πάνω από τη δεύτερη το φαινόμενο εκδηλώνεται για κάθε αρχική συνθήκη (global surf-riding). Στην ενδιάμεση περιοχή ταχυτήτων το πλοίο θα αποκρίνεται είτε με περιοδικό, είτε με στάσιμο τρόπο, αναλόγως των αρχικών συνθηκών (Σχήμα 7.5).

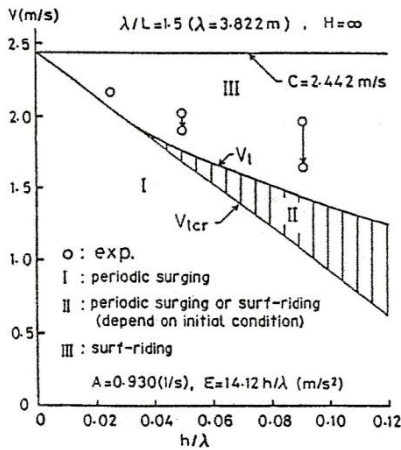
Η εξαφάνιση της περιοδικής απόκρισης και η εκδήλωση του καθολικού surf-riding σχετίζεται άμεσα με τον τύπο διακλάδωσης ομοκλινούς σύνδεσης (homoclinic bifurcation). Ο Σπύρου [17] προσεγγίζει με ποιοτικό τρόπο τη μετάβαση από την περιοδική απόκριση στο surf-riding κάτω από οποιαδήποτε αρχική συνθήκη (Σχήμα 7.6). Οι τέσσερις τομές αντιστοιχούν σε διαφορετικούς αριθμούς f_n . Στην τομή (α) το σύστημα αποκρίνεται με περιοδικό τρόπο⁽⁶⁾. Στην τομή (β) εμφανίζεται ένα στάσιμο σημείο, το οποίο στη συνέχεια –τομή (γ)– διασπάται σε ένα ευσταθές σημείο και ένα σάγμα (saddle-node bifurcation). Το σύστημα καθ' όλη τη διάρκεια του γεγονότος συνεχίζει να επιδέχεται περιοδική λύση. Ο οριακός κύκλος όμως παραμορφώνεται σταδιακά και πλησιάζει, με εφαιπτομενικό τρόπο, τους κλάδους του σάγματος (Σχήμα 7.7). Στην κρίσιμη τιμή του αριθμού f_n ο περιοδικός ελκυστής συγκρούεται με τον ασταθές σημείο και μετατρέπεται σε ομοκλινική σύνδεση. Περαιτέρω αύξηση του

(5) Τα μεγέθη αναφέρονται στην ταχύτητα που επιτυγχάνει το πλοίο σε ήρεμο νερό για δεδομένες περιστροφές της έλικας

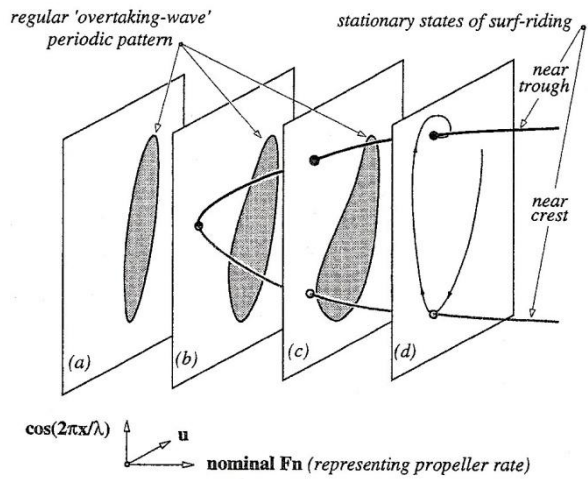
(6) Ο τρόπος με τον οποίο καθίσταται δυνατή η αναπαράσταση των περιοδικών αποκρίσεων υπό τη μορφή κλειστών τροχιών θα φανεί στο επόμενο κεφάλαιο.

αριθμού f_n οδηγεί στην καταστροφή της ομοκλινικής σύνδεσης· κάθε αρχική συνθήκη οδηγείται πλέον στο ευσταθές σημείο-ελκυστή – τομή (d).

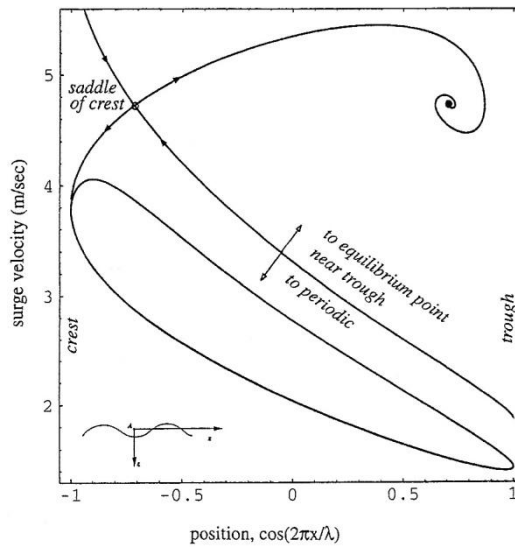
Αξίζει τέλος να σημειωθεί ότι καθώς ο οριακός κύκλος πλησιάζει το ασταθές σημείο και λόγω του ότι μια οποιαδήποτε αρχική συνθήκη η οποία εκκινεί από τον ευσταθή κλάδο που κατευθύνεται προς αυτό πλησιάζει το στάσιμο σημείο σε άπειρο χρόνο, η απόκριση του συστήματος εμφανίζει χαμηλόσυχνα χαρακτηριστικά. Η διέλευση μάλιστα από την περιοχή της κορυφής του κύματος διαρκεί δυσανάλογα μεγάλο χρονικό διάστημα σε σχέση με το πέρασμα από την περιοχή της κοιλάδας. Αυτή ακριβώς η συμπεριφορά περιγράφεται από τους όρους *asymmetric surging* και *surging of large amplitude*.



Σχήμα 7.5 : Κρίσιμη ταχύτητα συναρτήσει του ύψους κύματος (Kan, 1990)



Σχήμα 7.6 : Εξαφάνιση της περιοδικής απόκρισης (Σπύρου, 1996)



Σχήμα 7.7 : Ευσταθείς και ασταθείς κλάδοι του σάγματος (Σπύρου, 1996)

8 ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ ΤΟΥ ΠΛΟΙΟΥ

8.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΣΕ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ ΜΑΤLAB/MATCONT

Η εξίσωση κίνησης (5.19) αναδιατυπώνεται, κάνοντας χρήση των μετασχηματισμών $x = \xi$ και $y = \xi$, υπό τη μορφή συστήματος διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης,

$$\dot{x} = y \quad (8.1. \alpha)$$

$$\dot{y} = A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3 + A_4 \sum_{i=1}^N a_i \sin(i k x + b_i) \quad (8.1. \beta)$$

Θέτοντας εν συνεχεία,

$$\alpha = \sin kx, \quad \beta = \cos kx \quad (8.2)$$

συνθέτουμε το κάτωθι σύστημα,

$$\dot{\alpha} = \alpha + k \beta y - \alpha(\alpha^2 + \beta^2) \quad (8.3. \alpha)$$

$$\dot{\beta} = \beta - k \alpha y - \beta(\alpha^2 + \beta^2) \quad (8.3. \beta)$$

$$\begin{aligned} \dot{y} = A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3 + A_4 \sum_{i=1}^N a_i \left\{ \sin b_i \sum_{k=0}^i (-1)^k \binom{i}{2k} \alpha^{2k} \beta^{i-2k} \right. \\ \left. + \cos b_i \sum_{k=1}^i (-1)^{k-1} \binom{i}{2k-1} \alpha^{2k-1} \beta^{i-2k+1} \right\} \end{aligned} \quad (8.3. \gamma)$$

Στις ανωτέρω εκφράσεις,

$$A_0 = \left[a_0 + \tau_0 n^2 - r_1 c + \tau_1 c n + (\tau_2 - r_2) c^2 - r_3 c^3 \right] / (m - X_{\dot{u}})$$

$$A_1 = \left[\tau_1 n - 3 r_3 c^2 - 2(r_2 - \tau_2) c \right] / (m - X_{\dot{u}})$$

$$A_2 = \left[\tau_2 - 3 r_3 c - r_2 \right] / (m - X_{\dot{u}})$$

$$A_3 = -r_3 / (m - X_{\dot{u}})$$

$$A_4 = -1 / (m - X_{\dot{u}})$$

N θετικός ακέραιος η τιμή του οποίου καθορίζεται από την τάξη της κυματικής θεωρίας –βλ. σχέση (5.16)– και

$$\binom{i}{k} = \begin{cases} \frac{i!}{k!(i-k)!}, & \text{εάν } 0 \leq k \leq i \\ 0, & \text{εάν } k > i \end{cases}$$

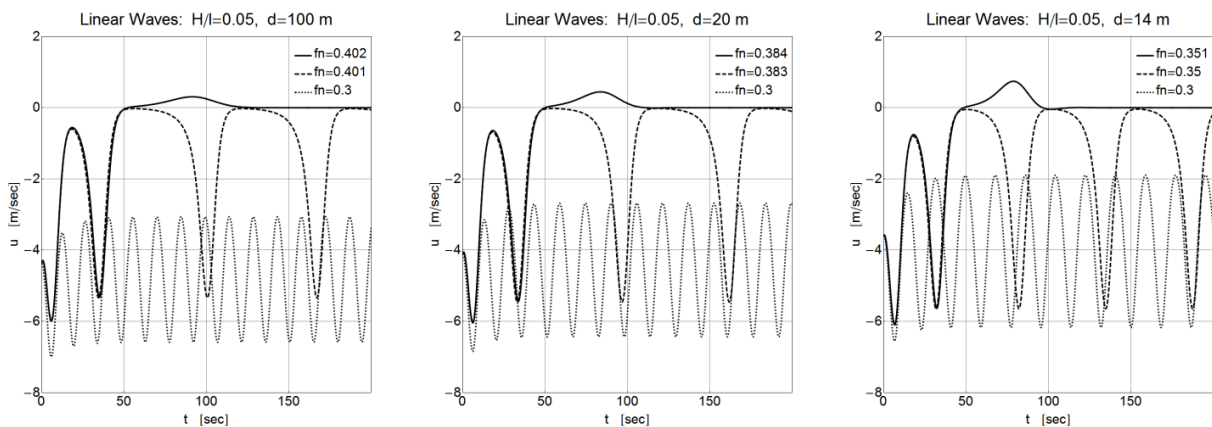
Τα συστήματα (8.1) και (8.3) εισάγονται σε περιβάλλον MATLAB/MATCONT. Εφόσον κάθε μία από τις μεταβλητές x και y διατρέχει κάποιο υποσύνολο, έστω X και Y αντίστοιχα, των πραγματικών αριθμών, η κατάσταση του συστήματος (8.1) εξελίσσεται εντός διαστήματος I του \mathbb{R}^2 με $I = X \times Y$. Παράλληλα, η εξέλιξη του συστήματος (8.3) είναι καταλληλότερο να προβληθεί, καθώς οι εισηγμένες μεταβλητές α και β συναρτώνται με το μέγεθος x , σε χώρο δύο διαστάσεων. Στην προκειμένη περίπτωση η μεταβλητή θέσης α (ή β) διατρέχει το φραγμένο διάστημα $[-1, 1]$. Το γεγονός αυτό καθιστά δυνατή τη διαγραμματική απεικόνιση των σταδίων της διακλάδωσης ομοκλινούς σύνδεσης καθώς οι περιοδικές αποκρίσεις του πλοίου μπορούν πλέον να αναπαρασταθούν υπό τη μορφή κλειστών τροχιών.

Σημειώνεται ότι κατά την επεξεργασία των ανωτέρω συστημάτων με το πακέτο συνέχισης MATCONT, οι στροφές της έλικας (n) αντικαθίστανται με πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ως προς τον αριθμό Froude (f_n) που επιτυγχάνει το πλοίο σε ήρεμο νερό⁽¹⁾.

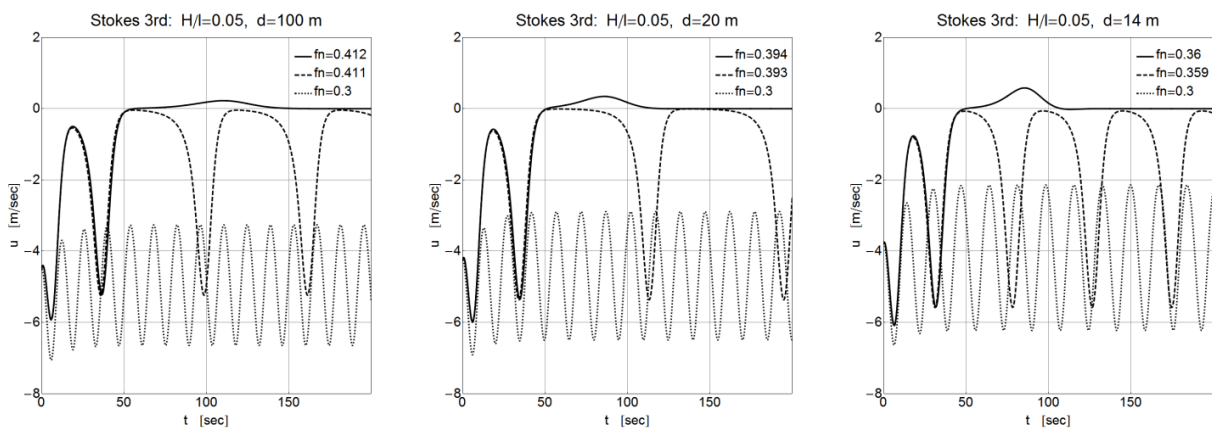
8.2 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

8.2.1 ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΕΙΣ

Τα κάτωθι διαγράμματα αφορούν σειρά προσομοιώσεων που πραγματοποιήθηκε για κυματισμούς διαφορετικών χαρακτηριστικών και τάξης – σημειώνεται ότι η τιμή της παραμέτρου λ (μήκος κύματος) διατηρείται σταθερή και ίση με $2L = 69 \text{ m}$, όπου L το μήκος του πλοίου, καθ' όλη τη διάρκεια της αριθμητικής μελέτης. Ο κατακόρυφος άξονας αντιστοιχεί, στο σύνολο των περιπτώσεων, στη σχετική ταχύτητα του πλοίου (το οποίο τοποθετείται στην κορυφή ενός κύματος με αρχική ταχύτητα $U = 6 \text{ m/s}$) ως προς αυτή του κυματισμού.

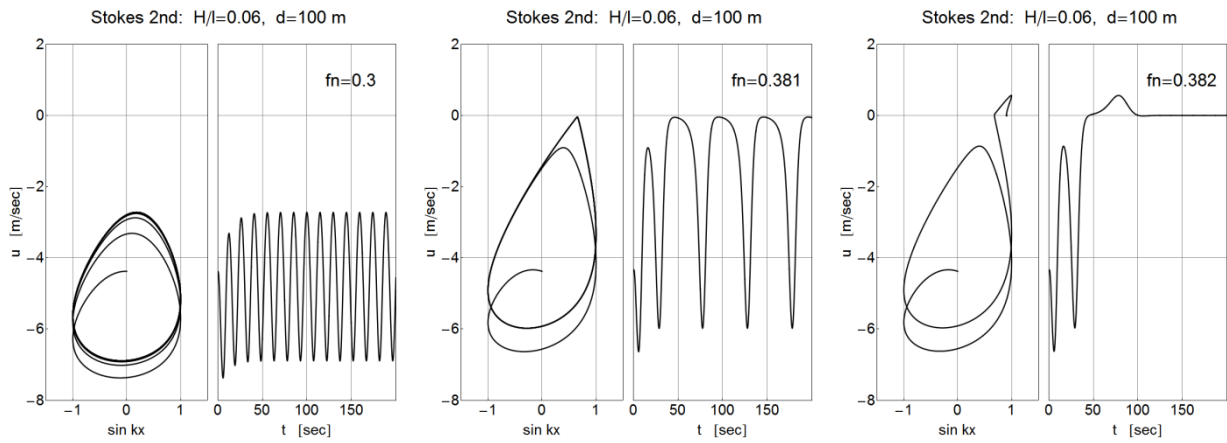


Σχήμα 8.1

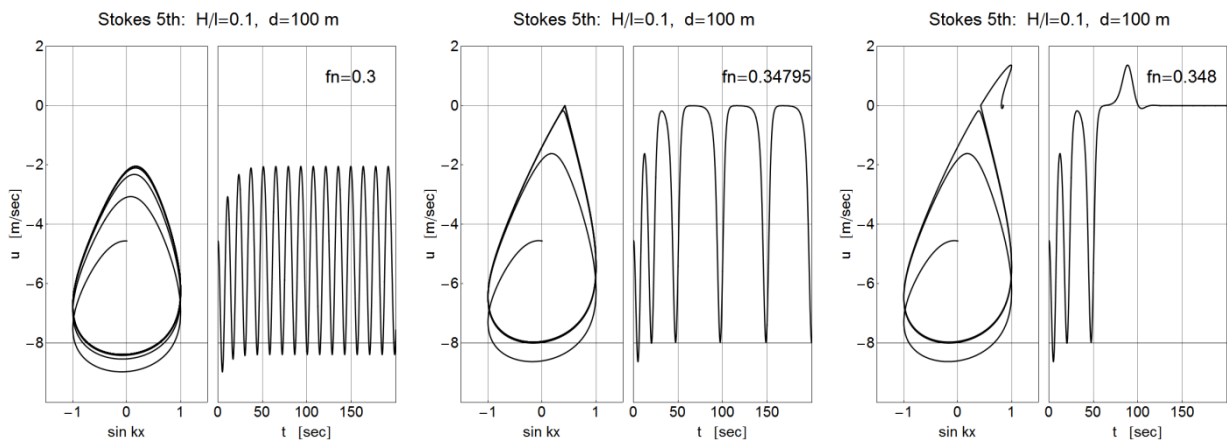


Σχήμα 8.2

(1) $n = 16.064574 f_n^2 + 4.30072 f_n + 0.417978$



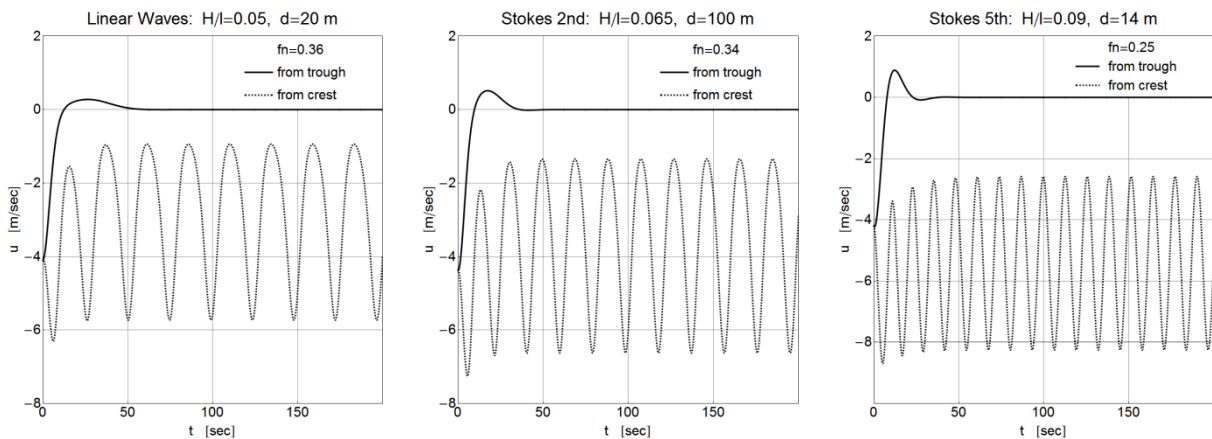
Σχήμα 8.3



Σχήμα 8.4

Από τα ανωτέρω σχήματα καθίσταται προφανής ο τρόπος με τον οποίο επιδρά η μεταβολή του αριθμού Froude στην απόκριση του πλοίου· για μικρές σχετικά τιμές η τελευταία εμφανίζει περιοδικό χαρακτήρα, ο οποίος όμως χάνει τη συμμετρικότητα του καθώς κινούμαστε σε μέσες περιοχές τιμών. Περαιτέρω αύξηση του αριθμού Froude οδηγεί, μετά το πέρας του μεταβατικού σταδίου, στην εκδήλωση του surf-riding.

Η διευθέτηση των τροχιών στο αριστερό τμήμα των διαγραμμάτων, όσον αφορά τα σχήματα 8.3 και 8.4, δε θα πρέπει να προκαλεί σύγχυση – καθώς αυτές φαίνεται ότι τέμνονται. Η εικόνα που παρουσιάζεται αποτελεί προβολή των «δρόμων» που ακολούθησαν οι συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες στον τρισδιάστατο χώρο φάσεων του συστήματος (8.3).



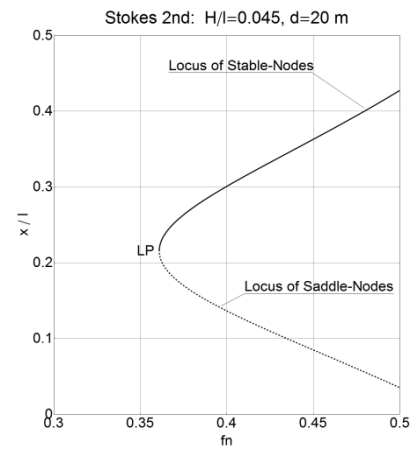
Σχήμα 8.5

Τα διαγράμματα του σχήματος 8.5 αφορούν τέλος προσομοιώσεις για δύο διαφορετικά σημεία εκκίνησης επί του κύματος (κορυφή και κοιλάδα) – η αρχική ταχύτητα του πλοίου είναι κοινή και ίση με 6 m/s σε κάθε περίπτωση. Γίνεται προφανές ότι ο συνδυασμός των χαρακτηριστικών του κύματος και του αριθμού Froude οδηγεί (και στις τρεις περιπτώσεις) το σύστημα στην παραμετρική εκείνη περιοχή, όπου στάσιμη και περιοδική απόκριση συνυπάρχουν.

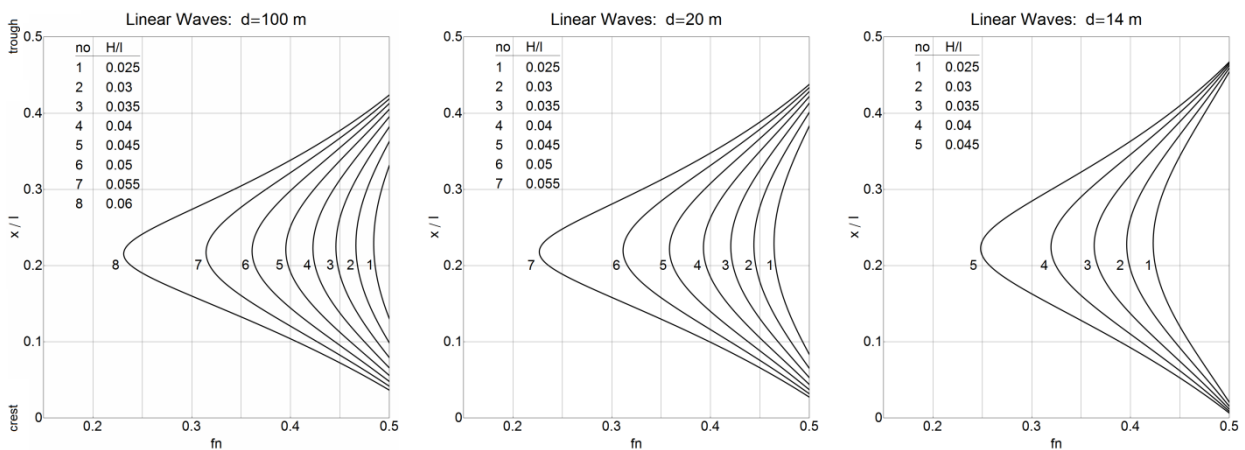
8.2.2 ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΩΝ ΣΤΑΣΙΜΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ ΑΠΟΚΡΙΣΕΩΝ

8.2.2.1 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΣΥΝΕΧΙΣΗ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟ f_n

Εφόσον ο προσδιορισμός των στάσιμων αποκρίσεων είναι πλέον εφικτός μέσω της αριθμητικής ολοκλήρωσης των διαφορικών εξισώσεων (8.1) επιχειρείται, στο στάδιο αυτό, η αριθμητική συνέχιση τους ως προς την παράμετρο f_n . Η διαδικασία θα οδηγήσει στην κατασκευή διαγραμμάτων τα οποία με τη σειρά τους θα παράσχουν πληροφορίες για τον αριθμό, τη θέση και την ευστάθεια⁽²⁾ των στάσιμων σημείων του συστήματος. Στο σχήμα 8.6 απεικονίζεται η θέση του ευσταθούς σημείου (surf-riding) καθώς και του σάγγατος συναρτήσεως του αριθμού Froude για κυματισμό συγκεκριμένης τάξης και χαρακτηριστικών. Με LP συμβολίζεται το *οριακό σημείο* (limit point) το οποίο ως υποθέσουμε ότι αντιστοιχεί στην τιμή $(f_n)_{lcr}$. Καθίσταται σαφές ότι η τιμή αυτή σηματοδοτεί μια ποιοτική αλλαγή⁽³⁾ στον τρόπο απόκρισης του πλοίου. Για αριθμούς Froude κάτω από την τιμή $(f_n)_{lcr}$ το τελευταίο αποκρίνεται με περιοδικό τρόπο ανεξαρτήτως των αρχικών συνθηκών· το surf-riding θα αποτελέσει δυνατό ενδεχόμενο εφόσον ο αριθμός Froude υπερβεί τη συγκεκριμένη τιμή. Στα σχήματα που ακολουθούν παρουσιάζονται αντίστοιχα διαγράμματα για μεγάλο αριθμό κυματισμών διαφορετικών χαρακτηριστικών και τάξης.



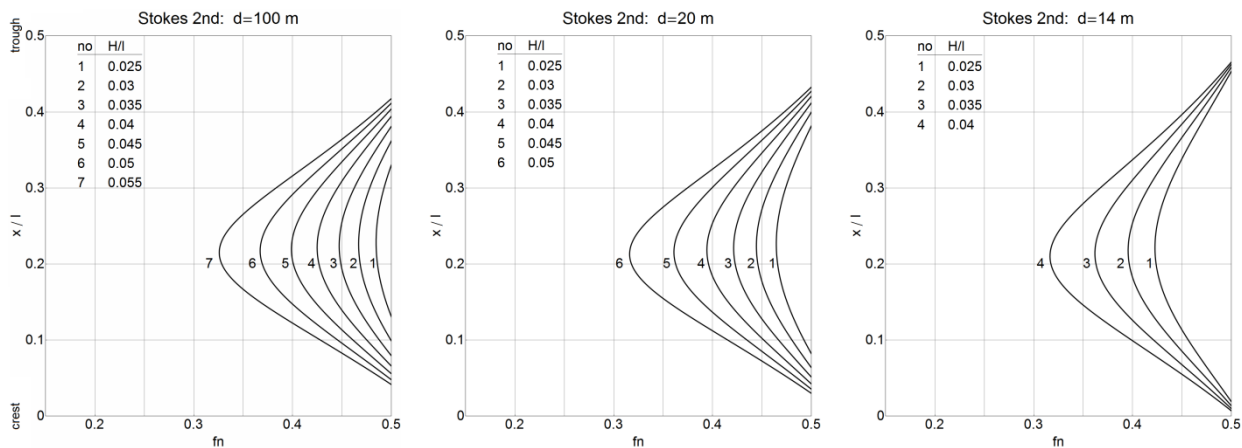
Σχήμα 8.6



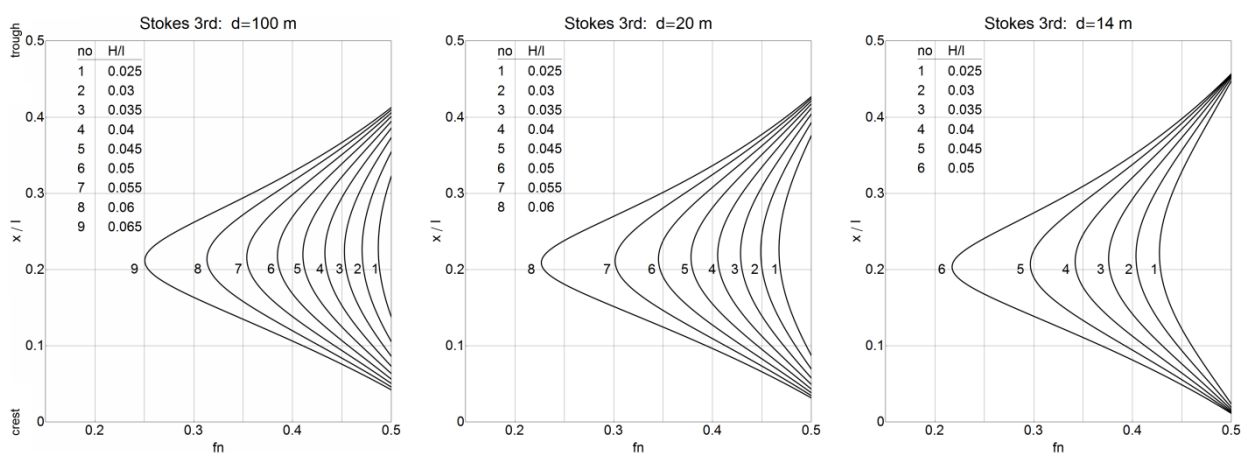
Σχήμα 8.7

(2) Ο χαρακτήρας της ευστάθειας προσδιορίζεται μέσω των ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα της γραμμικής προσέγγισης του συστήματος στην περιοχή του υπό εξέταση σημείου – βλ. κεφάλαιο 6.

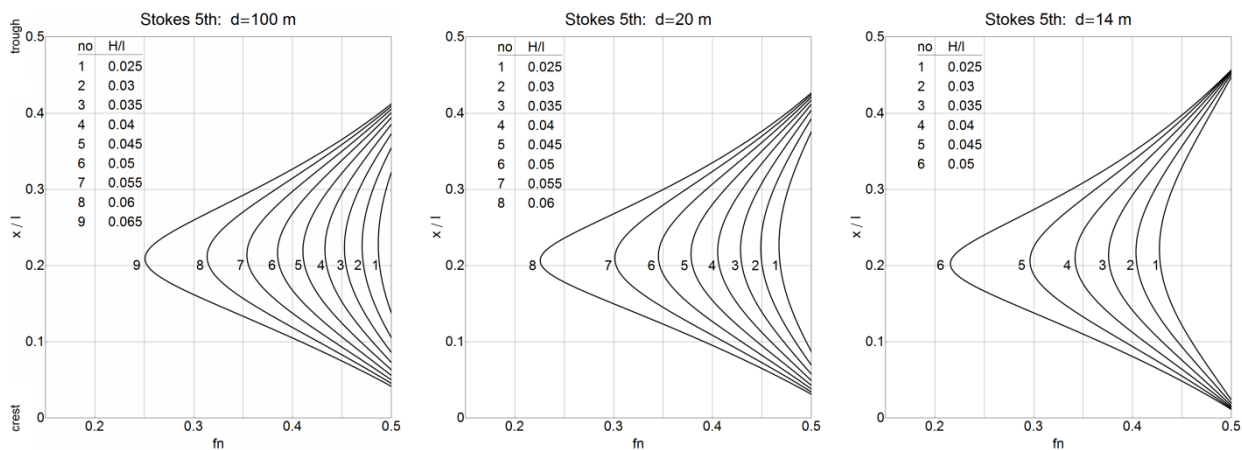
(3) Η ποιοτική αυτή αλλαγή επέρχεται ως συνέπεια μιας διακλάδωσης σάγγατος-κόμβου (saddle-node bifurcation). Παρατηρήστε την ομοιότητα των σχημάτων 6.4 και 8.6.



Σχήμα 8.8



Σχήμα 8.9

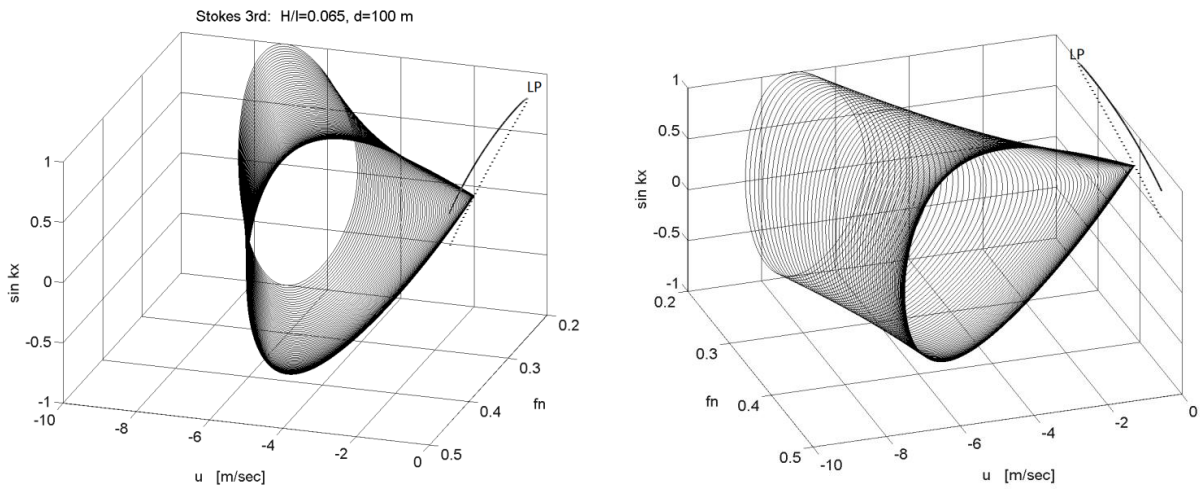


Σχήμα 8.10

Από τα σχήματα 8.7 έως 8.10 μπορεί να εξαχθεί το συμπέρασμα ότι η τιμή $(f_n)_{lcr}$ μειώνεται (δηλ. το φαινόμενο surf-riding εκδηλώνεται για λιγότερες περιστροφές της έλικας – μικρότερες ταχύτητες του πλοίου) καθώς μειώνεται η τιμή της παραμέτρου d (βάθος νερού) ή αυξάνεται η τιμή της παραμέτρου H (ύψος κύματος)⁽⁴⁾. Το αντίθετο αποτέλεσμα φαίνεται να έχει, χωρίς όμως να είναι ξεκάθαρο για όλες τις περιπτώσεις, η αύξηση της τάξης της κυματικής θεωρίας – αναφορά σε κυματισμούς κοινών χαρακτηριστικών (H, λ, d) .

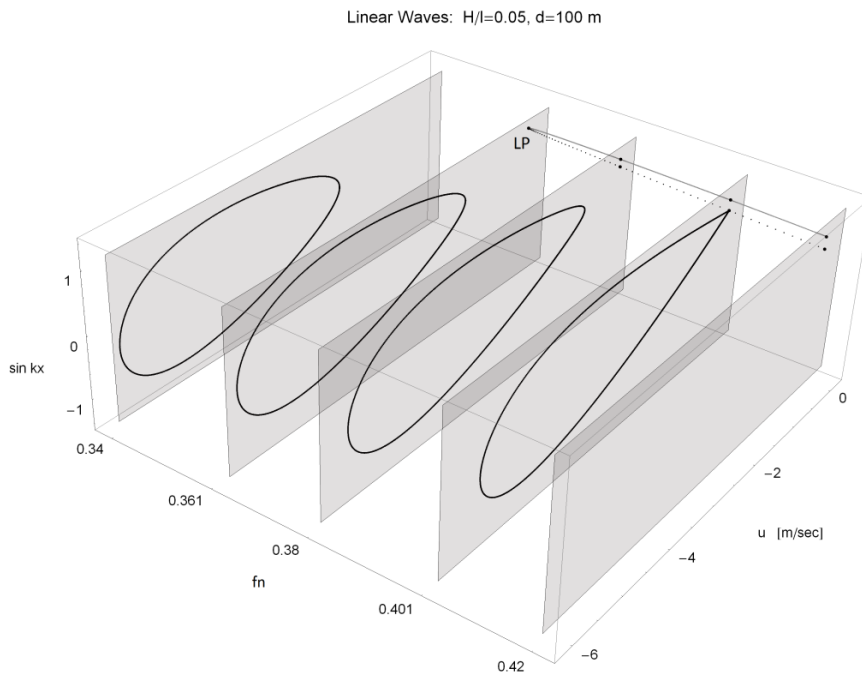
(4) Σημειώνεται ότι η ταχύτητα φάσης του κύματος μειώνεται με τη μείωση του βάθους νερού, ενώ για τις περιπτώσεις των κυματισμών τρίτης και πέμπτης τάξης αύξηση του ύψους κύματος συνεπάγεται αύξηση της φασικής ταχύτητας.

Μέσω του πακέτου MATLAB/MATCONT καθίσταται δυνατή η συνέχιση των περιοδικών αποκρίσεων του συστήματος (8.3). Στο σχήμα 8.11 διακρίνεται μια f_n -παραμετρική οικογένεια οριακών κύκλων⁽⁵⁾. Στο ίδιο σχήμα έχει αναπαρασταθεί και ο γεωμετρικός τόπος των στάσιμων αποκρίσεων του συστήματος – σε αναλογία με το διάγραμμα 8.6. Γίνεται φανερό ότι ο οριακός κύκλος (periodic surging) διαφοροποιεί τη μορφή του κάτω από μεταβολές του αριθμού Froude και πλησιάζει, καθώς η τιμή του τελευταίου αυξάνεται, τον κλάδο των σαγμάτων. Η ομοκλιτική σύνδεση πραγματοποιείται τη στιγμή που ο περιοδικός ελκυστής συγκρούεται με το σάγμα για κάποια τιμή, έστω $(f_n)_{ucr}$, του αριθμού Froude. Για μεγαλύτερες τιμές της παραμέτρου f_n ο οριακός κύκλος εξαφανίζεται και το ευσταθές σημείο (surf-riding) αποτελεί τη μόνη δυνατή, από φυσικής άποψης, επιλογή.



Σχήμα 8.11

Στο σχήμα 8.12 απεικονίζονται στιγμιότυπα της ανωτέρω διαδικασίας (το σχήμα αναφέρεται σε κυματισμό διαφορετικών χαρακτηριστικών και τάξης) για πέντε τιμές της παραμέτρου f_n . Στην τομή $f_n = 0.361$ παρατηρούμε την εμφάνιση του οριακού σημείου, ενώ στην τομή $f_n = 0.401$ την πραγματοποίηση της ομοκλιτικής σύνδεσης.

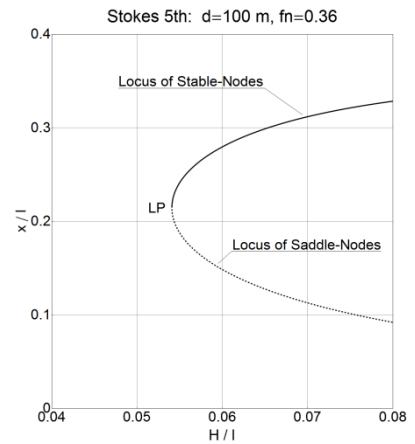


Σχήμα 8.12

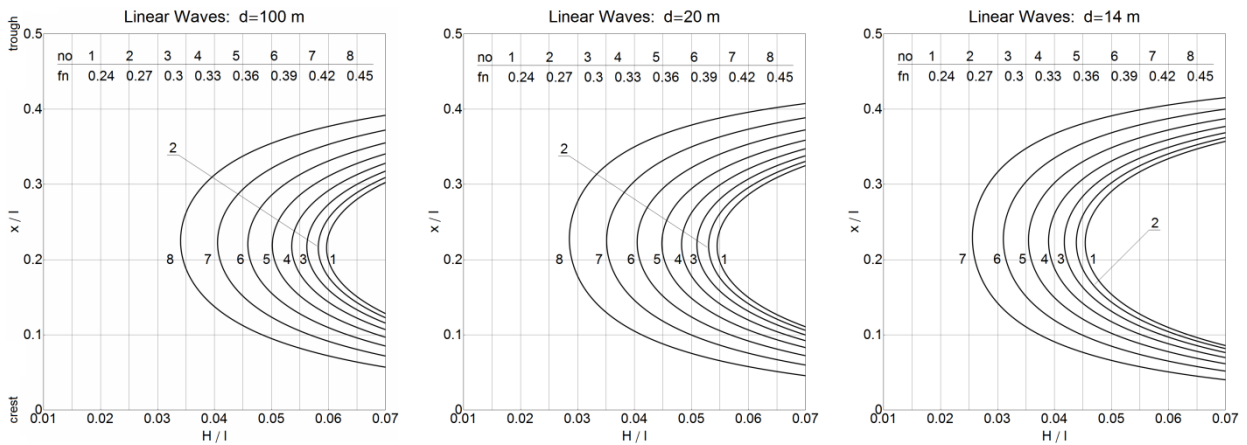
(5) Κάθε οριακός κύκλος αντιστοιχεί σε μία τιμή του αριθμού Froude, ή διαφορετικά, βρίσκεται επί επιπέδου κάθετου στον άξονα της παραμέτρου f_n .

8.2.2.2 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΣΥΝΕΧΙΣΗ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟ H

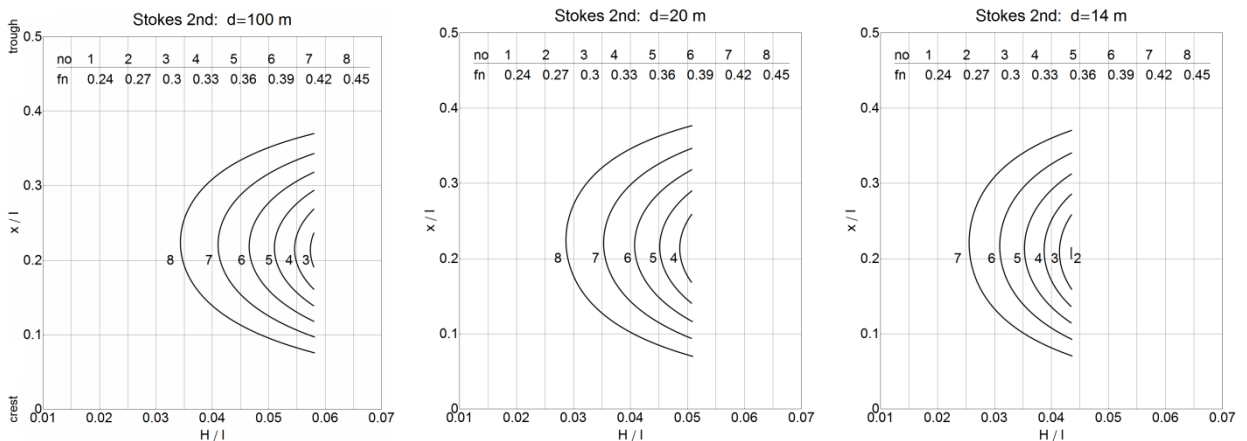
Με ακριβώς ανάλογο με αυτόν της παραγράφου 8.2.2.1 τρόπο οι στάσιμες αποκρίσεις του συστήματος (8.1) συνεχίζονται αριθμητικά ως προς την παράμετρο H . Στην περίπτωση αυτή το οριακό σημείο εμφανίζεται στην τιμή $(H)_{lcr}$. Η τελευταία αποτελεί κάτω φράγμα της περιοχής τιμών της παραμέτρου «ύψος κύματος» στην οποία (περιοχή) η εμφάνιση του surf-riding καθίσταται δυνατή. Αναγνωρίζονται και σε αυτή την περίπτωση οι κλάδοι της ευστάθειας – σχήμα 8.13. Ακολουθεί αριθμός διαγραμμάτων για διαφορετικά βάθη νερού, αριθμούς Froude και κυματισμούς διαφορετικών τάξεων. Σημειώνεται, καθώς αυτό παραλείφθηκε στα πλαίσια της προηγούμενης παραγράφου, ότι για την περίπτωση των κυματισμών Stokes δεύτερης τάξης η αριθμητική συνέχιση σταματάει σε αρκετά μικρότερες τιμές του ύψους κύματος –σε σχέση με τις λουπές τάξεις– καθώς λήφθηκαν υπόψη (όπως και για τις περιπτώσεις των κυματισμών τρίτης και πέμπτης τάξης) τα όρια ισχύος της κυματικής θεωρίας. Οι περιορισμοί δεν εφαρμόζονται στην περίπτωση των κυμάτων Airy, σε μια προσπάθεια να αξιολογηθεί η χρησιμότητα της συγκεκριμένης θεωρίας όσον αφορά την ικανότητα πρόβλεψης των ορίων του surf-riding σε ακραίο κυματικό καθεστώς.



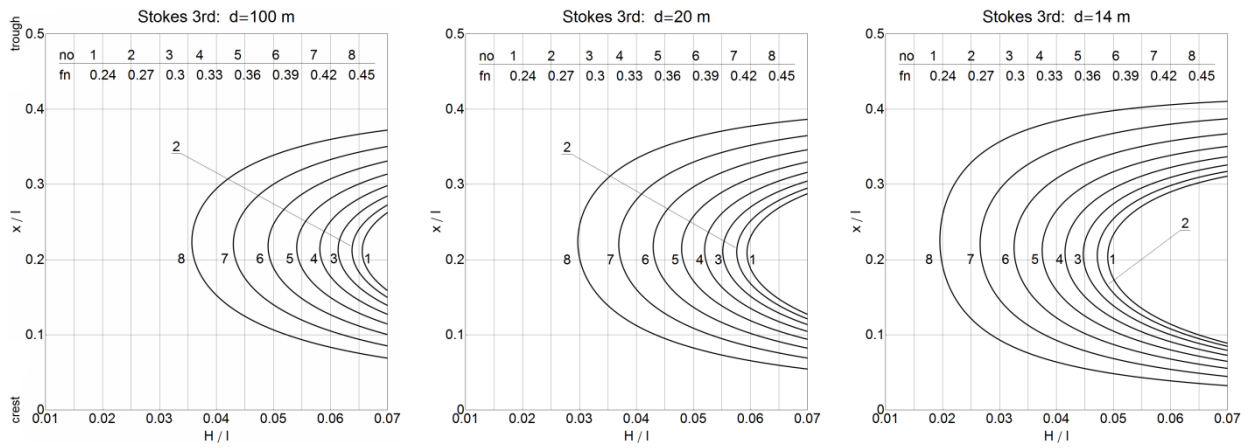
Σχήμα 8.13



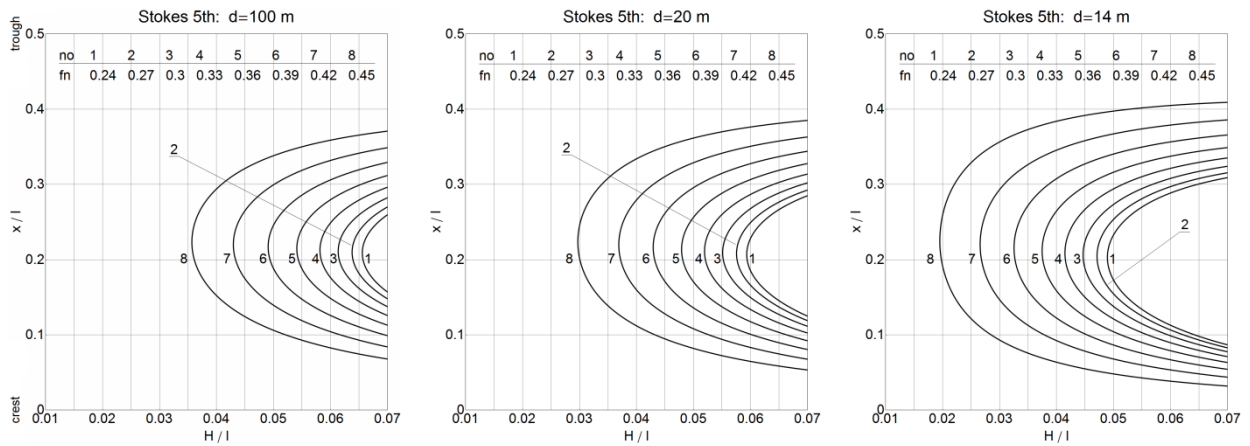
Σχήμα 8.14



Σχήμα 8.15



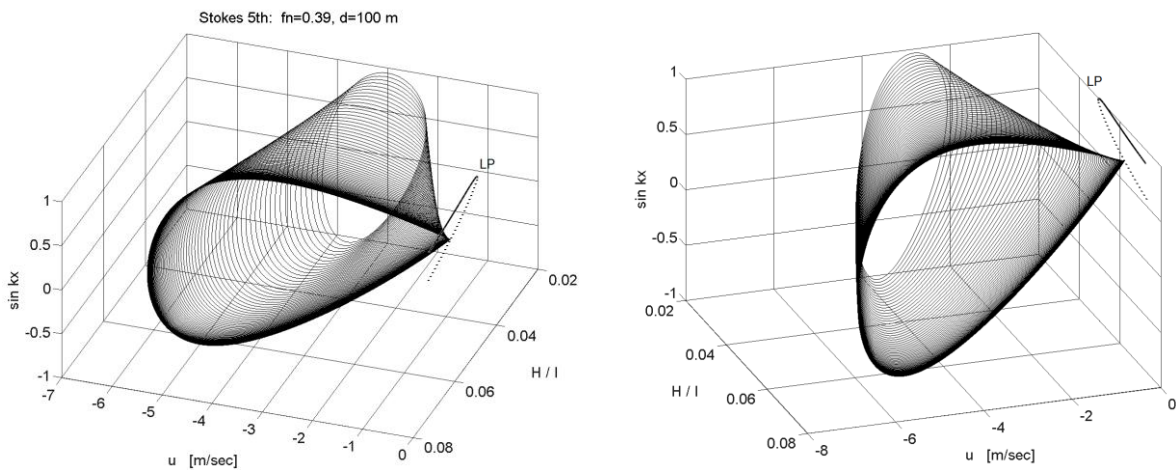
Σχήμα 8.16



Σχήμα 8.17

Παρατηρείται, μετά από εξέταση των σχημάτων 8.14 έως 8.17, ότι η τιμή $(H)_{lcr}$ μειώνεται καθώς αυξάνεται ο αριθμός Froude ή μειώνεται η παράμετρος «βάθος νερού».

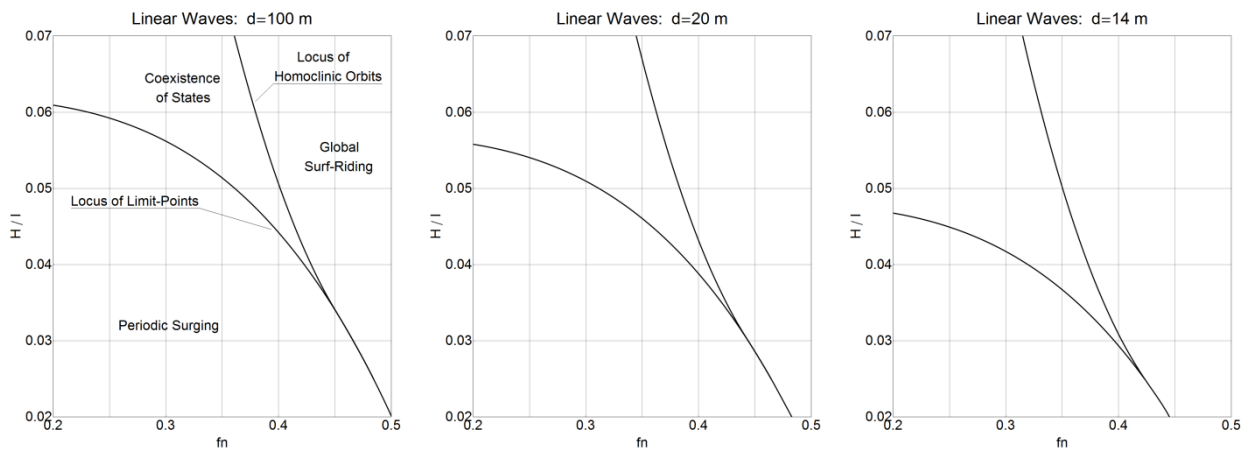
Οι περιοδικές αποκρίσεις του συστήματος (8.3) συνεχίζονται αριθμητικά ως προς την παράμετρο H . Στο σχήμα 8.18 διακρίνεται μία H -παραμετρική οικογένεια οριακών κύκλων καθώς και ο γεωμετρικός τόπος των στάσιμων αποκρίσεων του συστήματος – σε πλήρη αναλογία με το σχήμα 8.11. Η τιμή $(H)_{lcr}$ (κατά την οποία πραγματοποιείται η ομοκλινική σύνδεση) εμφανίζεται ως το κάτω φράγμα της περιοχής τιμών της παραμέτρου H στην οποία το surf-riding αποκτά καθολικό χαρακτήρα.



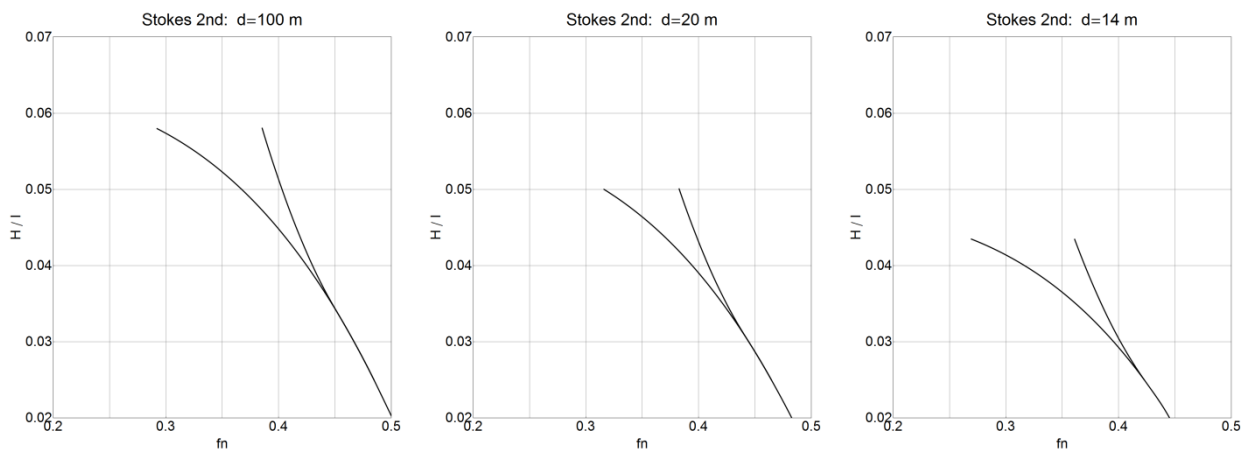
Σχήμα 8.18

8.2.3 ΟΡΙΑ ΤΟΥ SURF-RIDING ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ f_n, H

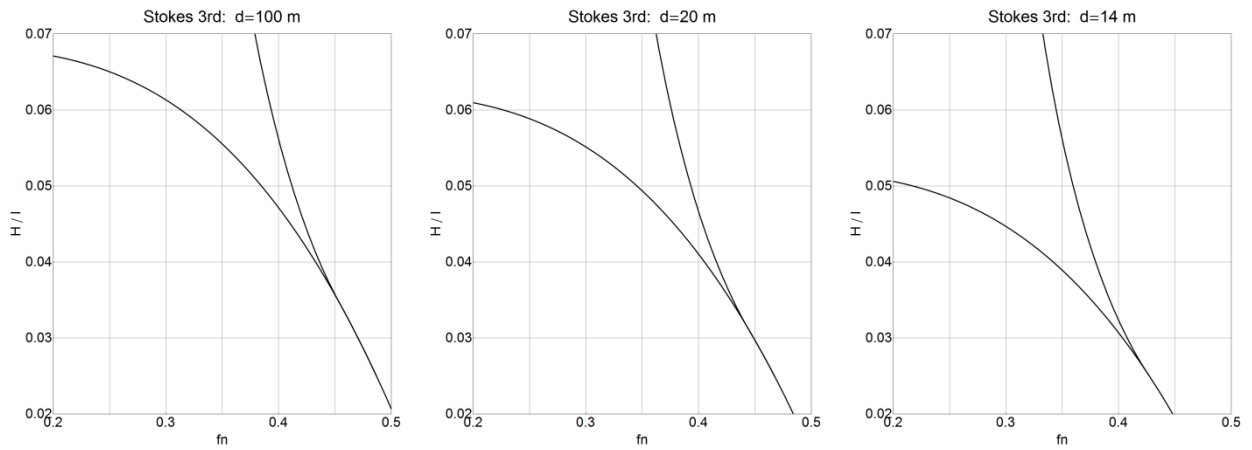
Στο σημείο αυτό επιχειρείται ο προσδιορισμός των περιοχών επί του f_n - H επιπέδου, στις οποίες η απόκριση του πλοίου εμφανίζει διαφορετικά ποιοτικά χαρακτηριστικά – αποκλειστικά περιοδική, αποκλειστικά στάσιμη ή συνύπαρξη των αποκρίσεων. Εκκινώντας από ένα οριακό σημείο (limit point, βλ. σχήματα 8.6 και 8.13) και μεταβάλλοντας τις ανωτέρω (δύο) παραμέτρους του συστήματος (συνέχιση συνδιάστασης-2) κατασκευάζεται η καμπύλη η οποία οριοθετεί την περιοχή εκδήλωσης του φαινομένου surf-riding – *κάτω όριο* του surf-riding. Η καμπύλη αυτή αποτελεί, όπως γίνεται αντιληπτό, τον γεωμετρικό τόπο των ζευγών (f_n, H) των οποίων οι τιμές οδηγούν –για δεδομένη σε κάθε περίπτωση επιλογή των παραμέτρων d και λ – στην εμφάνιση του οριακού σημείου στο χώρο φάσεων του συστήματος – στο σχήμα 8.19 στην καμπύλη αυτή αποδίδεται ο χαρακτηρισμός *locus of limit points*. Το *άνω όριο* του surf-riding, το οποίο με ακριβώς αντίστοιχο τρόπο αποτελεί τον γεωμετρικό τόπο των σημείων που οδηγούν –εφόσον επιλεγούν οι τιμές τους– στην εμφάνιση της ομοκλιτικής σύνδεσης, θα μπορούσε να κατασκευαστεί με αριθμητική συνέχιση μιας ομοκλιτικής τροχιάς. Το τελευταίο εγχείρημα δεν κατέστη δυνατό μέσω του πακέτου MATLAB/MATCONT. Για την κατασκευή του ορίου συνεχίστηκε αριθμητικά μεγάλος αριθμός περιοδικών αποκρίσεων μέχρι του σημείου εμφάνισης της διακλάδωσης ομοκλινούς σύνδεσης (βλ. σχήματα 8.11 και 8.18). Το *άνω όριο* του surf riding διακρίνεται στο σχήμα 8.19 (locus of homoclinic orbits). Σημειώνεται, στο ίδιο σχήμα, η συνύπαρξη της στάσιμης και της περιοδικής απόκρισης στην περιοχή ανάμεσα στο *άνω* και στο *κάτω όριο*, καθώς και η εξαφάνιση της τελευταίας στις περιοχές τιμών δεξιά του *άνω* ορίου. Ακολουθούν τα διαγράμματα ευστάθειας του συστήματος για κάθε τάξη και τρεις, ανά περίπτωση, τιμές της παραμέτρου d . Υπενθυμίζεται πως το μήκος του κύματος διατηρείται σταθερό ($\lambda = 69\text{ m}$) καθ' όλη τη διάρκεια της μελέτης.



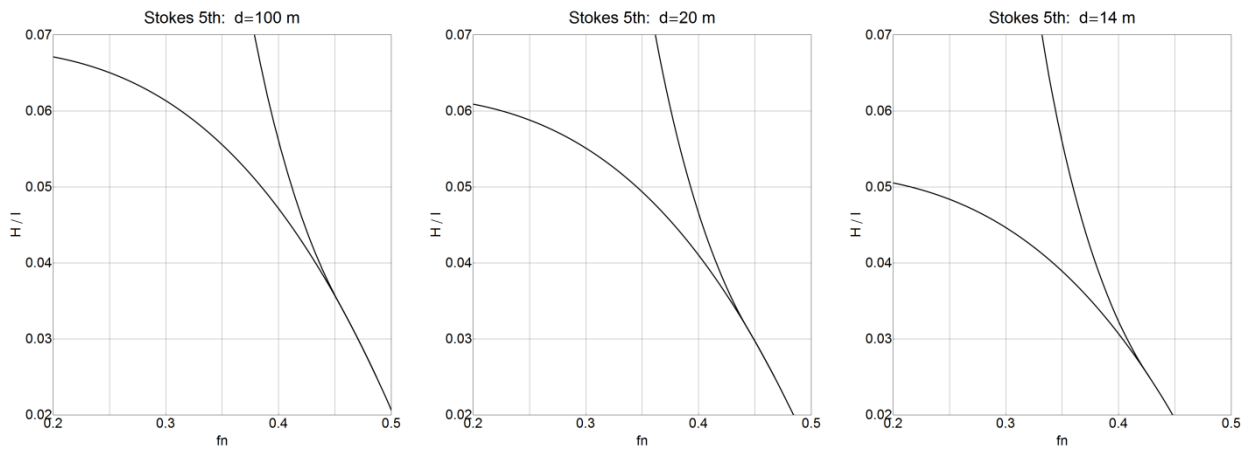
Σχήμα 8.19



Σχήμα 8.20



Σχήμα 8.21

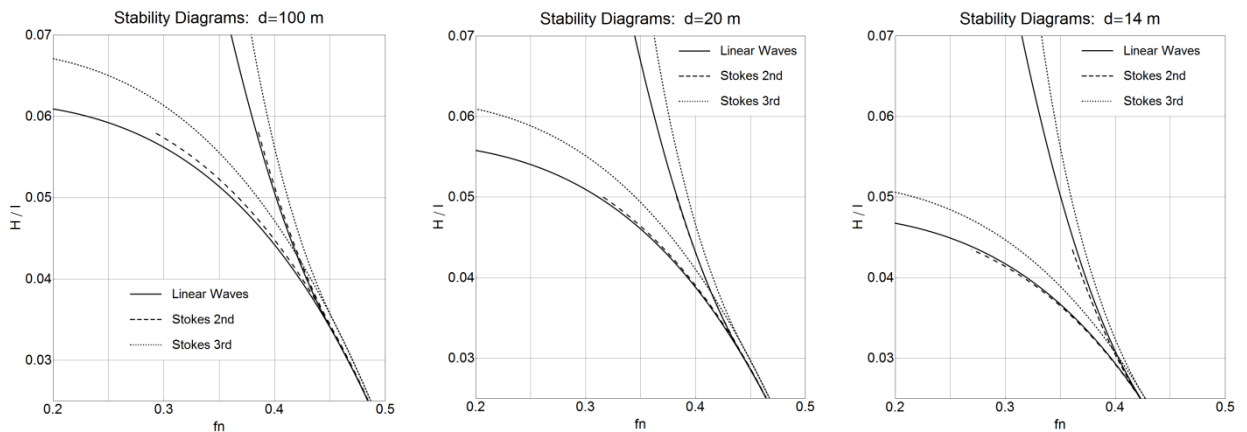


Σχήμα 8.22

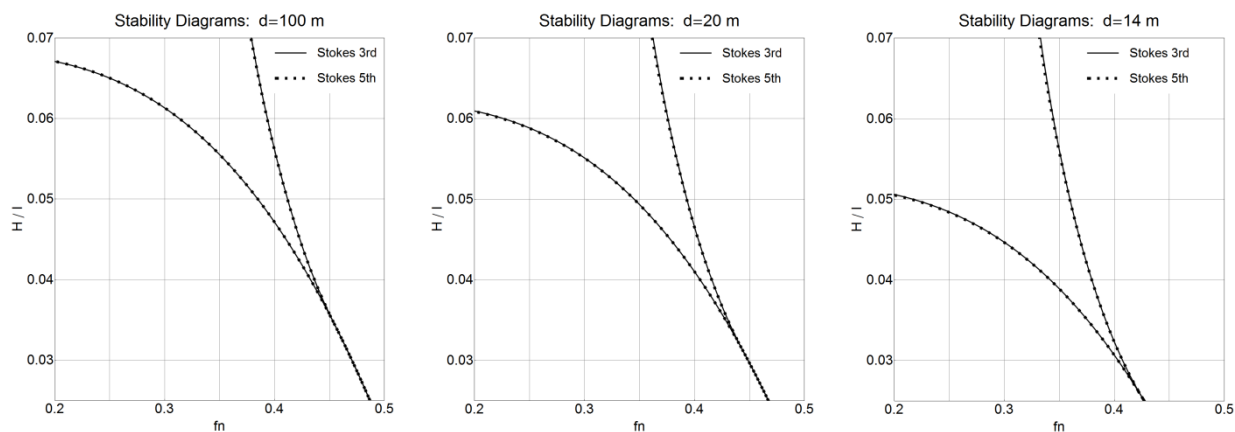
Τα ανωτέρω διαγράμματα καθιστούν σαφή τον τρόπο με τον οποίο επιδρά η παράμετρος d στα όρια του surf-riding: σε κάθε περίπτωση η μείωση του βάθους συνεπάγεται την μετατόπιση του άνω και κάτω ορίου σε περιοχές οι οποίες χαρακτηρίζονται από μικρότερες τιμές των παραμέτρων f_n και H .

8.3 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

Στο σχήμα 8.23 συγκεντρώνονται τα διαγράμματα ευστάθειας που αφορούν τους κυματισμούς πρώτης, δεύτερης και τρίτης τάξης, ενώ στο σχήμα 8.24 συγκρίνονται οι περιπτώσεις των κυματισμών τρίτης και πέμπτης τάξης.



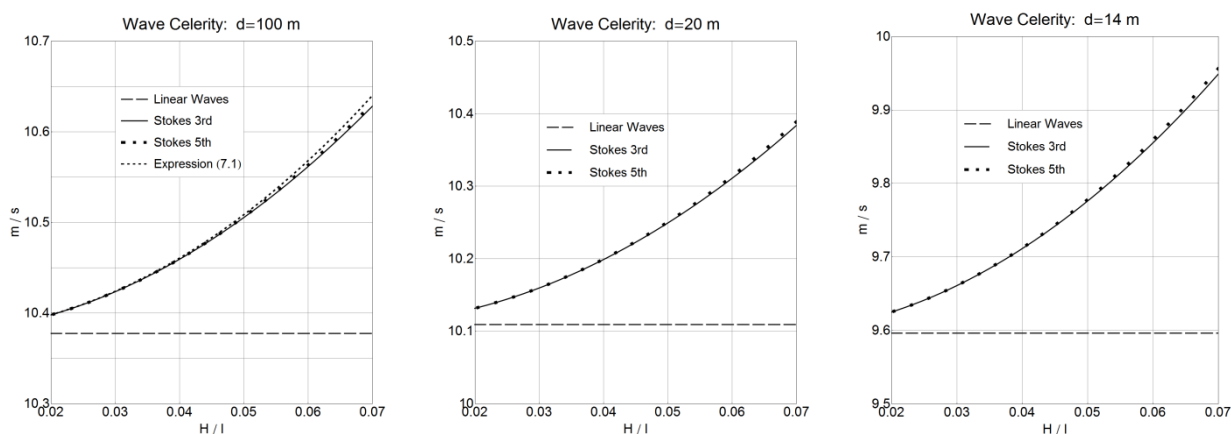
Σχήμα 8.23



Σχήμα 8.24

Σημειώνεται η μικρή απόκλιση των ορίων που προβλέπουν οι θεωρίες πρώτης και δεύτερης τάξης. Η γραμμική θεωρία εμφανίζεται οριακά αυστηρότερη στην περίπτωση των κυματισμών σε βαθύ νερό ($d = 100 \text{ m}$), ενώ η εικόνα δείχνει να αντιστρέφεται καθώς προσεγγίζεται η περιοχή του ρηχού νερού. Στην περίπτωση όπου $d = 14$ (κάτω όριο της περιοχής νερού ενδιαμέσου βάθους) η θεωρία δεύτερης τάξης δίνει οριακά αυστηρότερες προβλέψεις – εμφάνιση του surf-riding σε περιοχές οι οποίες χαρακτηρίζονται από μικρότερες τιμές των παραμέτρων f_n και H .

Η απόκλιση των αποτελεσμάτων μεταξύ των θεωριών πρώτης και τρίτης τάξης είναι σημαντικά μεγαλύτερη. Σε κάθε περίπτωση η γραμμική θεωρία εμφανίζεται αυστηρότερη, ενώ η σχετική απόσταση μεταξύ των ορίων του surf-riding μεγαλώνει καθώς αυξάνεται το ύψος του κύματος. Τα αίτια της ασυμφωνίας αυτής είναι μάλλον γνωστά: οι κυματισμοί Airy και Stokes τρίτης τάξης χαρακτηρίζονται από διαφορετική ταχύτητα φάσης για κοινές τιμές των παραμέτρων λ , H και d ⁽⁶⁾. Ως αποτέλεσμα, η κίνηση του πλοίου γίνεται αντιληπτή με διαφορετικό τρόπο στα δύο κυματικά περιβάλλοντα – ο αριθμός Froude του τελευταίου αντιστοιχίζεται σε δύο διαφορετικές τιμές της σχετικής ταχύτητας πλοίου-κύματος. Η διαφορά ανάμεσα στα όρια της ευστάθειας που προβλέπουν οι δύο θεωρίες είναι ως εκ τούτου αναμενόμενη⁽⁷⁾. Στο σχήμα 8.25 δίνεται η ταχύτητα φάσης των κυματισμών πρώτης, τρίτης και πέμπτης τάξης συναρτήσει του ύψους κύματος για τις διαφορετικές τιμές της παραμέτρου d . Στο σχήμα έχει συμπεριληφθεί και η τροποποιημένη, σύμφωνα με τη σχέση (7.1), ταχύτητα φάσης – η τελευταία αναφέρεται σε βαθύ νερό.



Σχήμα 8.25

(6) Το γεγονός δημιουργεί προβληματισμό αναφορικά με τον τρόπο διαχείρισης του ζητήματος, καθώς δεν είναι προφανής ο συσχετισμός εκείνος των παραμέτρων ο οποίος θα επιτρέψει την «ένα προς ένα» αντιπαράθεση –εάν αυτή είναι δυνατή– των προβλημάτων πρώτης, τρίτης και πέμπτης τάξης. Για τη σύγκριση των διαφορετικών προβλημάτων κρίθηκε σκόπιμο, απουσία κάποιας εναλλακτικής επιλογής με ορθότερο χαρακτήρα, να διατηρούνται σταθερές οι τιμές των παραμέτρων λ , H και d . Έτσι, ενώ «όμοια» προβλήματα πρώτης και δεύτερης τάξης χαρακτηρίζονται από κοινή ταχύτητα φάσης, «όμοια» προβλήματα πρώτης, τρίτης και πέμπτης τάξης διαφέρουν ως προς το τελευταίο μέγεθος.

Παρατηρείται, στο διάγραμμα που αφορά το βαθύ νερό, η μικρή απόκλιση της μη γραμμικής ταχύτητας (7.1) από τις ταχύτητες φάσης των κυματισμών τρίτης και πέμπτης τάξης. Υπενθυμίζεται ότι η ταχύτητα η οποία δίνεται από την έκφραση (7.1) συμφωνεί, όπως αυτό σημειώνεται στην εργασία του Kan, με την ταχύτητα του πειραματικού μοντέλου στην κατάσταση surf-riding.

Τέλος, από το σχήμα 8.24 γίνεται προφανής η ταύτιση των ορίων της ευστάθειας για τις περιπτώσεις των κυματισμών τρίτης και πέμπτης τάξης – στη θεωρούμενη περιοχή τιμών της παραμέτρου H καθώς τα αποτελέσματα αποκλίνουν ελαφρώς για ιδιαίτερα μεγάλους λόγους H/λ .

(7) Εκτιμάται πως η απόκλιση των αποτελεσμάτων οφείλεται κατά κύριο λόγο στη διαφορά των ταχυτήτων διάδοσης των κυματισμών και όχι στον όρο της διέγερσης – καθώς η μορφή του τελευταίου για την περίπτωση των κυματισμών Stokes τρίτης τάξης δε διαφοροποιείται σημαντικά σε σχέση με αυτή των προβλημάτων πρώτης και δεύτερης τάξης. Η συμφωνία των αποτελεσμάτων για τα προβλήματα τρίτης και πέμπτης τάξης (σχήμα 8.24) σε συνδυασμό με την ιδιαίτερα μικρή διαφορά που εμφανίζουν οι προβλεπόμενες μέσω των αντίστοιχων θεωριών φασικές ταχύτητες (σχήμα 8.25) ενισχύουν την ανωτέρω πεποίθηση.

9 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας διερευνήθηκε αριθμητικά η δυναμική συμπεριφορά ενός πλοίου κατά το διάμηκες. Η μελέτη βασίσθηκε σε ένα απλό μαθηματικό μοντέλο ενός βαθμού ελευθερίας, μέσω του οποίου κατέστη δυνατή η πρόβλεψη της απόκρισης του πλοίου σε περιβάλλον ακολουθούντων κυματισμών. Για την περιγραφή του κυματικού περιβάλλοντος θεωρήθηκαν οι περιπτώσεις των γραμμικών κυματισμών και των κυματισμών Stokes δεύτερης, τρίτης και πέμπτης τάξης. Οι υπολογισμοί πραγματοποιήθηκαν για ένα μικρό αλιευτικό, καθώς ο συγκεκριμένος τύπος πλοίων λειτουργεί υπό περιβαλλοντικές συνθήκες οι οποίες –σε συνδυασμό με τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του σκάφους– ευνοούν την εκδήλωση του φαινομένου surf-riding.

Ιδιαίτερη προσπάθεια καταβλήθηκε για τον υπολογισμό –σύμφωνα με τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε από τον Ρεμιγιάκη [35]– της διαμήκους συνιστώσας της δύναμης Froude-Krylov και την κατασκευή παρεμβολικών τύπων μέσω των τελευταίων απλοποιήθηκε σημαντικά η διαδικασία επίλυσης της εξίσωσης κίνησης. Για τη μελέτη του φαινομένου surf-riding αναπτύχθηκε αριθμός προγραμμάτων τα οποία καλύπτουν τις περιπτώσεις των κυματισμών Airy και Stokes που αναφέρθηκαν σε τρεις, διαφορετικού βάθους θάλασσες – το μήκος των κυματισμών διατηρείται σε κάθε περίπτωση σταθερό. Τα προγράμματα παρείχαν τη δυνατότητα διερεύνησης της παραμετρικής εξάρτησης των αποκρίσεων του πλοίου από τα μεγέθη «ύψος κύματος» και «αριθμός Froude».

Τα κύρια συμπεράσματα της μελέτης συνοψίζονται στις ακόλουθες γραμμές.

- (1) Η γραμμική θεωρία και η θεωρία Stokes δεύτερης τάξης δε διαφοροποιούνται σημαντικά όσον αφορά στην πρόβλεψη του άνω και κάτω ορίου του surf-riding στο επίπεδο f_n-H . Σε θάλασσες μεγάλου βάθους η θεωρία πρώτης τάξης εμφανίζεται οριακά αυστηρότερη· η εικόνα αντιστρέφεται καθώς προσεγγίζεται η περιοχή του ρηχού νερού.
- (2) Η θεωρία Stokes τρίτης τάξης εμφανίζεται λιγότερο συντηρητική σε σχέση με τις θεωρίες πρώτης και δεύτερης τάξης. Το γεγονός αυτό εκτιμάται ότι οφείλεται –κατά κύριο λόγο– στη διαφορά των ταχυτήτων φάσης που προβλέπουν οι κυματικές θεωρίες και όχι στον όρο της διέγερσης.
- (3) Τα όρια της ευστάθειας που προβλέπει η θεωρία πέμπτης τάξης ταυτίζονται (πρακτικά) με αυτά που προβλέπονται μέσω της θεωρίας τρίτης τάξης.
- (4) Εκτιμάται ότι οι θεωρίες τρίτης και πέμπτης τάξης προβλέπουν με μεγαλύτερη ακρίβεια τα όρια του surf-riding –ειδικά το άνω όριο– καθώς οι αντίστοιχες ταχύτητες φάσης βρίσκονται κοντά σε αυτήν που αναφέρεται στην εργασία του Kan ως ταχύτητα του μοντέλου στην κατάσταση surf-riding. Η πεποίθηση αυτή ενισχύεται μετά από παρατήρηση των διαγραμμάτων 7.3, στα οποία η γραμμική θεωρία εμφανίζεται να συμφωνεί με τα πειραματικά δεδομένα για τιμές της ταχύτητας του πλοίου (αριθμό περιστροφών της έλικας) κατάτι μικρότερες.
- (5) Η θεωρία τρίτης τάξης αποτελεί, λόγω των (3) και (4), μια «καλή» επιλογή όσον αφορά στην πρόβλεψη των ορίων του surf-riding.
- (6) Η θεωρία κυματισμών Airy δύναται να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση των ορίων της ευστάθειας και εκτός της περιοχής ισχύος της –διατηρώντας τον όγκο των υπολογισμών σε χαμηλά επίπεδα– δίνοντας ωστόσο συντηρητικές προβλέψεις.

Για την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων της παρούσας εργασίας και προκειμένου να αποκτηθεί μια γενικότερη εικόνα όσον αφορά τη δυναμική συμπεριφορά του πλοίου σε μη γραμμικούς κυματισμούς, προτείνονται οι ακόλουθες κατευθύνσεις.

- (1) Μελέτη συζευγμένων κινήσεων του πλοίου σε περιβάλλον μη γραμμικών κυματισμών.
- (2) Διεξαγωγή πειραματικών δοκιμών και σύγκριση των εξαγόμενων με τις αριθμητικές προβλέψεις.
- (3) Πρόβλεψη του άνω ορίου του surf-riding σε μη γραμμικούς κυματισμούς με χρήση της μεθόδου Melnikov.
- (4) Επέκταση της μελέτης. Ενδεικτικά αναφέρεται η ενσωμάτωση της διαδικασίας υπολογισμού των δυνάμεων Froude-Krylov στον κώδικα του MATCONT γεγονός το οποίο θα επιτρέψει την ολοκληρωμένη μελέτη της εξάρτησης του φαινομένου surf-riding από τις παραμέτρους του συστήματος, καθώς και η επανάληψη της διαδικασίας για πλοία διαφορετικών γεωμετριών προκειμένου να διερευνηθεί η επίδραση που επιφέρουν στο φαινόμενο μορφολογικές μεταβολές της γάστρας.

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Chakrabarti S. K. (1987) *Hydrodynamics of Offshore Structures*, Springer Verlag
- [2] Davidson K. S. M. (1948) A Note on the Steering of Ships in Following Seas, 7th *International Congress of Applied Mechanics*, London, England
- [3] de Kat J. O. and Paulling J. R. (1989) The Simulation of Ship Motions and Capsizing in Severe Seas, *SNAME Annual Meeting*, Presentation, No. 5
- [4] Dean R. G. (1974) Evaluation and Development of Water Wave Theories for Engineering Application, Coastal Engineering Research Center, U.S. Army Engineer Waterways Experiment Station, Special Report No. 1
- [5] Du Cane P. and Goodrich G. J. (1962) The Following Sea, Broaching and Surging, *Trans. RINA*, Vol. 104, No. 2, 109-140
- [6] Dhooge A., Govaerts W., Kuznetsov Yu. A., Mestrom W., Riet A.M., Sautois B. (2006) *MATCONT and CL_MATCONT: Continuation Toolboxes in MATLAB*
- [7] Eda H. (1972) Direction Stability and Control of Ships in Waves, *J. Ship Res.* 16, 205-218
- [8] Fenton J. D. (1985) A Fifth-Order Stokes Theory for Steady Waves, *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, Vol. 111, No. 2
- [9] Fenton J. D. (1990) Nonlinear Wave Theories, *The Sea, Vol. 9: Ocean Engineering Science*, Eds. B. Le Méhauté and D.M. Hanes, Wiley, New York
- [10] Grim O. (1951) Das Schiff in von Achtern Anlaufender See, *JSTG*, Vol. 45, 264-287
- [11] Hamamoto M., Fujino M. and Kim Y. S. (1994) Dynamic Stability of a Ship in Quartering Seas, *Stability 1994*
- [12] Kan M. (1990) Surging of Large Amplitude and Surf-riding of Ships in Following Seas, *Sel. Pap. Naval Archit. Ocean Engin.*, Soc. Naval Archit. Japan
- [13] Kinsman B. (1965) *Wind Waves: Their Generation and Propagation on the Ocean Surface*, Prentice-Hall
- [14] Kuznetsov Yu. A. (1998) *Elements of Applied Bifurcation Theory*, 2nd edition, Springer-Verlag, New York
- [15] Luenberger D. G. (1979) *Introduction to Dynamic Systems*, John Wiley and Sons
- [16] Massel S. R. (1996) *Ocean Surface Waves: Their Physics and Prediction*, World Scientific
- [17] Spyrou K. J. (1996) Dynamic Instability in Quartering Seas: The Behavior of a Ship During Broaching, *Journal of Ship Research*, Vol. 40, No. 1, 46-59
- [18] Spyrou K. J. and Thompson J. M.T. (2000) The Nonlinear Dynamics of Ship Motion: A Field Overview and Some Recent Developments, *Philosophical Transactions*, Royal Society, London, 1735-1760

- [19] Spyrou K. J. (2000) On the Parametric Rolling of Ships in a Following Sea under Simultaneous Nonlinear Periodic Surging, *Philosophical Transactions*, Royal Society, London, 1813-1834
- [20] Spyrou K. J. (2001) The Nonlinear Dynamics of Ships in Broaching, *Marie Curie Fellowships Annals*, Vol. 1
- [21] Spyrou K. J. (2006) Asymmetric Surging of Ships in Following Seas and its Repercussions for Safety, *Nonlinear Dynamics*, 43, 149-172, Springer
- [22] Spyrou K. J. (2010) Historical Trails of Ship Broaching-to, *Trans RINA*, Vol. 152, Part A4
- [23] Spyrou K. J. and Tigkas I. G. (2011) Nonlinear Surge Dynamics of a Ship in Astern Seas: "Continuation Analysis" of Periodic States with Hydrodynamic Memory, *Journal of Ship Research*, Vol. 55, No. 1
- [24] Stokes G. G. (1847) On the Theory of Oscillatory Waves, *Transactions*, Cambridge Philosophical Society, Vol. 8
- [25] Strogatz S. H. (2000) *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Perseus Book Publishing
- [26] Thai Marine Meteorological Center (2006) Water Wave Mechanics (Part II), EM 1110-2-1100
- [27] Thomas G. A. and Relinson M. R. (1991) Surf Riding and Loss of Control of Fishing Vessels in Severe Following Seas, *The Royal Institution of Naval Architects, Spring Meetings*
- [28] Ohkusu M. (1986) Prediction of Wave Forces on a Ship Running in Following Waves with Low Encounter Frequency, *J.S.N.A*, Japan, Vol. 159
- [29] Wahab R. and Swaan W. A. (1964) Coursekeeping and Broaching of Ships in Following Seas, *International Shipbuilding Progress*, Vol. 7, No. 4, 293-301
- [30] Αθανασούλης Γ. και Μπελιμπασάκης Κ. (2002) *Κυματικά Φαινόμενα στο Θαλάσσιο Περιβάλλον*, Σημειώσεις Μαθήματος
- [31] Αθανασούλης Γ. και Λουκάκης Θ. (1997) *Υδροδυναμική και Δυναμική Θαλάσσιων Συστημάτων*, Σημειώσεις Μαθήματος
- [32] Μαυράκος Σ. (1999) *Μελέτη και Σχεδίαση Πλωτών Κατασκευών*, Σημειώσεις Μαθήματος
- [33] Παναγιωτακόπουλος Χρήστος (2008) *Μελέτη Συστημάτων Lotcka-Volterra*
- [34] Πολίτης Γ. (2005) *Γραμμική Θεωρία Κυματισμών Ελεύθερης Επιφάνειας, Αντίσταση Πλοίου*, Σημειώσεις Μαθήματος, 2^η Έκδοση
- [35] Ρεμιγιάκης Α. (2010) *Αριθμητική Μελέτη του Φαινομένου Surf-Riding σε Ακολουθούντες Κυματισμούς*, Διπλωματική Εργασία
- [36] Σπύρου Κ. (2006) *Ευστάθεια Διατοιχισμού Πλοίου και Υπόβαθρο Κανονισμών*, Σημειώσεις Μαθήματος
- [37] Σπύρου Κ. (2008) *Σχεδίαση Πλοίων για Ελκτικότητα και Δυναμική Ευστάθεια*, Σημειώσεις Μαθήματος
- [38] Τσαγγάρης Σ. (1995) *Μηχανική των Ρευστών*, Εκδόσεις Συμείων