

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΕΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ



**ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ ΕΝΤΑΣΕΩΣ
ΤΩΝ ΤΑΣΕΩΝ ΚΙ, ΚΙΙ, ΚΙΙΙ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ
ΤΩΝ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΚΟΠΑΛΑΣ Ν. ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΟΥΣΑ: Β. Γ. Βαδαλούκα, Επίκουρη Καθηγήτρια Ε.Μ.Π.

ΜΕΛΗ: Αιμ. Σιδερίδης, Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Δ. Ε. Μανωλάκος, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ 2013

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ.....	2
<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....</u>	4
<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΘΕΩΡΙΑ ΡΩΓΜΩΝ.....</u>	7
2.1 ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΩΝ ΡΩΓΜΩΝ ΜΕ ΤΙΣ ΤΑΣΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ WESTERGAARD.....	8
2.2 ΤΥΠΟΙ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ ΤΗΣ ΡΩΓΜΗΣ.....	9
2.2.1 ΕΦΕΛΚΥΣΤΙΚΟΣ ΤΥΠΟΣ –I.....	10
2.2.2 ΣΥΝΕΠΙΠΕΔΟΣ ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΟΣ ΤΥΠΟΣ –II.....	12
2.2.3 ΕΓΚΑΡΣΙΟΣ ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΟΣ ΤΥΠΟΣ –III.....	13
<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΟΠΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ.....</u>	15
3.1 ΓΕΝΙΚΑ.....	16
3.2 ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΟΠΤΙΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ.....	17
3.3 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΟΠΤΙΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΕΝΤΑΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΓΙΑ ΟΠΤΙΚΩΣ ΙΣΟΤΡΟΠΑ ΥΛΙΚΑ.....	21
3.4 ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΕΓΚΑΡΣΙΑΣ ΡΩΓΜΗΣ.....	22
<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΣΗΜΑΝΤΙΚΟΤΕΡΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ PAPER ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ.....</u>	27
4.1 ΓΕΝΙΚΑ.....	28
4.2 ΕΞΙΣΩΣΗ ΑΝΑΚΛΩΜΕΝΗΣ ΚΑΥΣΤΙΚΗΣ ΓΙΑ K_{III} ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ.....	28

4.3 Η ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΥ I, II, III.....	36
4.4 ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΘΕΩΡΗΤΙΚΩΝ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ, ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΕΝΩΝ ΜΕΣΩ ΤΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ MATLAB.....	40
<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ ΕΝΤΑΣΕΩΣ ΤΩΝ ΤΑΣΕΩΝ K_I, K_{II}, K_{III} ΑΠΟ ΚΑΥΣΤΙΚΕΣ ΠΟΥ ΠΡΟΕΚΥΨΑΝ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ.....</u>	66
5.1 ΓΕΝΙΚΑ.....	67
5.2 ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ.....	67
5.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ K _I , K _{II} , K _{III} ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ ΕΝΤΑΣΕΩΣ ΤΩΝ ΤΑΣΕΩΝ.....	70
5.4 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΩΝ.....	72
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	81
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	83

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η Μηχανική του παραμορφώσιμου σώματος ασχολείται με τη μελέτη της συμπεριφοράς των σωμάτων που υπόκεινται σε εξωτερικές φορτίσεις. Σκοπός της μελέτης αυτής είναι να υπολογιστούν οι παραμορφώσεις και οι τάσεις σε κάθε σημείο του σώματος. Όπως έχει πειραματικά αποδειχθεί όταν τα εξωτερικά φορτία είναι μικρά τότε οι παραμορφώσεις είναι γραμμικές συναρτήσεις των εξωτερικών φορτίων. Η ιδιότητα αυτή των σωμάτων χαρακτηρίζεται γραμμική ελαστικότητα. Στα πλαίσια της ελαστικότητας θα αντιμετωπισθεί η Μηχανική των Θραύσεων των υλικών και κυρίως των επιπέδων προβλημάτων ρωγμών.

Ο προσδιορισμός του τασικού και παραμορφωσιακού πεδίου στη κλασική θεωρία ελαστικότητας, για καταστάσεις που αντιστοιχούν μακριά της θραύσης ή της ρηγμάτωσης των υλικών, πραγματοποιείται δια αναγωγής του προβλήματος σε πρόβλημα συνόρων αναφερόμενο στο υλικό, το οποίο χαρακτηρίζεται από κάποιο νόμο ελαστικότητας ή πλαστικότητας. Στην περίπτωση αυτή τα σύνορα και η παραμορφωσιακή κατάσταση του υλικού θεωρούνται ως δεδομένα εφόσον τα εφαρμοσμένα φορτία προκαλούν μικρές παραμορφώσεις των συνόρων.

Μετά από ορισμένη κρίσιμη τιμή του φορτίου εμφανίζονται ρωγμές οι οποίες αντιστοιχούν σε επιφάνειες ασυνέχειας του διανύσματος των μετατοπίσεων. Έχουμε επομένως αλλαγή των συνόρων και έτσι ο προσδιορισμός του τασικού και παραμορφωσιακού πεδίου είναι δύσκολος διότι ανάλογα με το πρόβλημα απαιτούνται προσθετές συνθήκες που οδηγούν στο καθορισμό των συνόρων.

Προς αποφυγή των ανυπέρβλητων δυσχερειών που παρουσιάζονται στη θεωρία της ελαστικότητας το πρόβλημα αυτό διατυπώνεται ως εξής: **«Ζητείται η επίλυση των διαφορικών εξισώσεων ελαστικότητας εντός περιοχής περικλειόμενης υπό συνόρου, στην οποία υπάρχουν ρωγμές, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες».**

Η ρωγή μπορεί προσεγγιστικά να θεωρηθεί σαν μια κοιλότητα εντός του σώματος της οποίας η απόσταση των απέναντι παρειών των χειλών της είναι μικρή σχετικά με το μήκος της. Η πρώτη πληρέστερη θεώρηση της δομής της ρωγμής παρά τα άκρα της οφείλεται στον A.A Griffith ο οποίος, με τη κλασική θεωρία της ελαστικότητας και τη λύση του Inglis, οδηγήθηκε σε απειρισμό των τάσεων παρά τα άκρα της ρωγμής και ότι τα άκρα της ρωγμής είναι στρογγυλά με ακτίνα καμπυλότητας της τάξεως της μοριακής αποστάσεως. Παρατηρείται ότι οι τάσεις στα άκρα των ρωγμών δύναται να είναι πεπερασμένες, εφόσον οι απέναντι παρειές της ρωγμής παρουσιάζουν στο υπόψη σημείο κοινή εφαπτόμενη

και δεν είναι ελεύθερες τάσεων. Όμως , σε τέτοια μορφή συνόρων της ρωγμής αποδεικνύεται ότι η απελευθερούμενη ενέργεια δι' απειροστή μεταβολή των συνόρων της ρωγμής ισούται με μηδέν. Επομένως μόνο τέτοιου είδους καμπύλες δύναται να αποτελούν το σύνορο των εν ισορροπία ρωγμών. Εάν οι επιφάνειες της ρωγμής θεωρηθούν ελεύθερες τάσεων τότε για οποιαδήποτε μορφή συνόρων της ρωγμής οι τάσεις γίνονται άπειρες οπότε δε δύναται να υπάρχουν ρωγμές σε ισορροπία. Προς τούτο για να προκύψουν παραδεκτές λύσεις πρέπει να θεωρηθούν μοριακές δυνάμεις συνάφειας παρά τα άκρα της ρωγμής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο
ΘΕΩΡΙΑ ΡΩΓΜΩΝ

2.1 ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΩΝ ΡΩΓΜΩΝ ΜΕ ΤΙΣ ΤΑΣΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ WESTERGAARD

Τα δισδιάστατα προβλήματα των ρωγμών μπορεί να επιλυθούν κατά τον Westergaard, εφόσον η τασική συνάρτηση Airy ορισθεί δια της σχέσης:

$$F = \operatorname{Re}\bar{Z} + y\operatorname{Im}\bar{Z} \quad (2.1)$$

όπου Z αναλυτική συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής $z=x+iy$, και:

$$\bar{Z} = \frac{d\bar{Z}}{dz} \quad (2.2)$$

Συνεπώς αντικατάσταση στις σχέσεις $\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$, $\sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, $\tau_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$, που γνωρίζουμε ότι ισχύουν από τη Μηχανική, προκύπτουν οι τάσεις (τύπος- I):

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \operatorname{Re}Z - y\operatorname{Im}Z' \quad (2.3)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \operatorname{Re}Z + y\operatorname{Im}Z' \quad (2.4)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -y\operatorname{Re}Z' \quad (2.5)$$

Άλλες μορφές της τασικής συνάρτησης Airy είναι:

$$F = -y\operatorname{Re}Z \quad (2.6)$$

που περιγράφει το δεύτερο τύπο παραμόρφωσης (II) και ομοίως αποδεικνύεται ότι οι τάσεις παρέχονται από τις σχέσεις:

$$\sigma_{xx} = 2\text{Im}Z + y\text{Re}Z' \quad (2.7)$$

$$\sigma_{yy} = -y\text{Re}Z' \quad (2.8)$$

$$\tau_{xy} = \text{Re}Z - y\text{Im}Z' \quad (2.9)$$

Για τον τρίτο τύπο (III) παραμόρφωσης του Airy είναι της μορφής:

$$F = -\text{Re}Z$$

Από την οποία προκύπτουν οι τάσεις:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y} = \text{Im}Z' \quad (2.10)$$

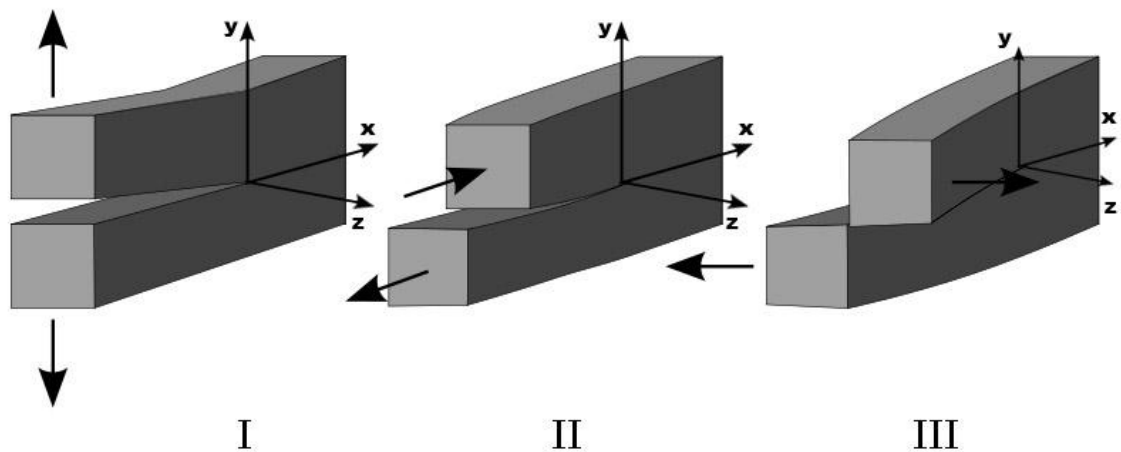
$$\tau_{yz} = -\frac{\partial F}{\partial x} = \text{Re}Z' \quad (2.11)$$

Τελικά για οποιαδήποτε παραμόρφωσης της ρωγμής η τασική συνάρτηση Westergaard προκύπτει με κατάλληλο συνδυασμό των τασικών συναρτήσεων των παραπάνω τριών τύπων απλής παραμόρφωσης.

2.2 ΤΥΠΟΙ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ ΤΗΣ ΡΩΓΜΗΣ

Ο G.R. Irwin, με την προϋπόθεση ότι οι ρωγμές εντός των στερεών δύναται να θεωρηθούν ως επιφάνειες ασυνέχειας του διανύσματος της

μετατόπισης, παρατήρησε ότι υπάρχουν τρεις ανεξάρτητοι τρόποι μετακίνησης των χειλίων της ρωγμής. Οι τρεις αυτοί τύποι παραμορφώσεις παρουσιάζονται στο σχήμα που ακολουθεί:



Οι τρεις βασικοί τύποι παραμόρφωσης της ρωγμής

2.2.1 ΕΦΕΛΚΥΣΤΙΚΟΣ ΤΥΠΟΣ -I

Οι παρειές της ρωγμής τείνουν να διαχωριστούν συμμετρικά ως προς το επίπεδο της ρωγμής προ της παραμόρφωσης. Η τασική συνάρτηση Westergaard για τον τύπο-I δίνεται από τη σχέση $Z = \frac{\sigma z}{\sqrt{z^2 - a^2}}$.

Για προσεγγιστική λύση προκύπτει η συνάρτηση:

$$Z_I = \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi\zeta}} \quad (2.12)$$

Θέτοντας:

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \quad (2.13)$$

στη σχέση (2.12) προκύπτει:

$$Z_I = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi\zeta}} \quad (2.14)$$

Ο συντελεστής K_I είναι χαρακτηριστικός του τύπου $-I$ και ονομάζεται **εφελκυστικός συντελεστής έντασης των τάσεων** (stress intensity factor).

Επίσης ο K_I δύναται να προκύψει από τη σχέση:

$$K_I = \lim_{z \rightarrow a} \sqrt{2\pi\sqrt{z-a}} \sigma_{yy} \quad (2.15)$$

Ή από την:

$$K_I = \lim_{z \rightarrow a} \sqrt{2\pi\sqrt{z-a}} Z_I(z) \quad (2.16)$$

Θέτοντας :

$$\zeta = r e^{i\theta} \quad (2.17)$$

και αντικαθιστώντας στις σχέσεις (2.3)-(2.5), προκύπτουν οι τάσεις σε πολικές συντεταγμένες (Η προσεγγιστική αυτή λύση ισχύει για $0 < r/a \ll 1$) :

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (2.18)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (2.19)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (2.20)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (2.21)$$

2.2.2 ΣΥΝΕΠΙΠΕΔΟΣ ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΟΣ ΤΥΠΟΣ -II

Οι παρειές της ρωγμής τείνουν να ολισθήσουν η μια σχετικά προς την άλλη προς αντίθετες κατευθύνσεις αλλά εντός του ίδιου επιπέδου. Η φασική συνάρτηση Westergaard για τον τύπο -II δίνεται από τη σχέση:

$$Z_{II} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi z}}, \quad \text{με } K_{II} = \tau\sqrt{\pi a} \quad (2.22)$$

όπου η σταθερά K_{II} είναι η χαρακτηριστική του τύπου-II και ονομάζεται **συνεπίπεδος συντελεστής έντασης των τάσεων**. Από τις σχέσεις (2.7)-(2.9) προκύπτουν οι τάσεις σε πολικές συντεταγμένες:

$$\sigma_{xx} = - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \quad (2.23)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (2.24)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (2.25)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad , \quad \text{για } 0 < r/a \ll 1 \quad (2.26)$$

Ο συντελεστής έντασης των τάσεων K_{II} προκύπτει από τη σχέση:

$$K_{II} = \sqrt{2\pi r} \lim_{r \rightarrow 0} \tau_{xy} \quad (2.27)$$

2.2.3 ΕΓΚΑΡΣΙΟΣ ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΟΣ ΤΥΠΟΣ -III

Οι παρειές της ρωγμής τείνουν να διαχωριστούν προς αντίθετες εγκάρσιες κατευθύνσεις υπό την επίδραση ίσων και αντίθετων δυνάμεων, κάθετων προς το επίπεδο του σώματος. Η τασική συνάρτηση του Westergaard για τον τύπο K-III δίνεται από τη σχέση:

$$Z_{III} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi \zeta}} \quad (2.28)$$

όπου η σταθερά K_{III} είναι η χαρακτηριστική του τύπου III και

ονομάζεται **μη συνεπίπεδος διατμητικός συντελεστής εντάσεως των τάσεων**. Από τις σχέσεις (2.10-2.11) προκύπτουν οι τάσεις σε πολικές συντεταγμένες:

$$\tau_{xz} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (2.29)$$

$$\tau_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \quad (2.30)$$

όπου K_{III} δίνεται από τη σχέση:

$$K_{III} = \sqrt{2\pi r} \lim_{r \rightarrow 0} \tau_{xy}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο

ΟΠΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ

3.1 ΓΕΝΙΚΑ

Στα προβλήματα ρωγμών η πιο ενδιαφέρουσα περιοχή είναι η παρά το άκρο της ρωγμής. Εντός και κοντά στη μικρή αυτή περιοχή οι μεταβολές των τάσεων και των παραμορφώσεων είναι απότομες. Το γεγονός αυτό καθιστά δύσκολη την επίλυση του προβλήματος με τις κλασικές μεθόδους πειραματικής ανάλυσης των τάσεων και παραμορφώσεων.

Η πειραματική μέθοδος που ονομάστηκε Οπτική Μέθοδος των Καστικών και βασίζεται στις αρχές της γεωμετρικής οπτικής αναπτύχθηκε από τον καθηγητή Π.Σ. Θεοχάρη, ενώ πρώτη εφαρμογή της φαίνεται να έχει γίνει από τον Manogg, οποίος χρησιμοποίησε διερχόμενο φως για την μελέτη διάδοσης ρωγμών σε Plexiglas.

Είναι μέθοδος, η οποία μπορεί να εφαρμοστεί σε διαφανή και μη διαφανή υλικά, σε στατικά και δυναμικά προβλήματα και η οποία κρίνεται ως η μόνη ενδεδειγμένη για την ικανοποιητική παρακολούθηση των απότομων μεταβολών του εντατικού πεδίου και της διανομής των τάσεων εντός της μικρής ιδιόμορφης (singular) περιοχής κοντά στο άκρο της ρωγμής.

Η επικρατούσα ιδιομορφία των τάσεων στο άκρο μιας ρωγμής ή οπής μετατρέπεται βάσει αυστηρών μαθηματικών κανόνων, σε οπτική ιδιομορφία. Η οπτική αυτή ιδιομορφία προέρχεται από τη συγκέντρωση των ακτίνων φωτός, οι οποίες αποκλίνουν από την καταπονούμενη περιοχή πλησίον της ρωγμής, επί ιδιόμορφης καμπύλης στο χώρο, η οποία καλείται **Καστική**.

3.2 ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΟΠΤΙΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ

Οι φωτεινές ακτίνες $r_{1,2}$ οι οποίες ανακλώνται στην πίσω επιφάνεια της πλάκας σχηματίζουν κυματικά μέτωπα:

$$S(x, y, z) = \text{σταθ}. \quad (3.1)$$

Εάν $s(x, y)$ εκφράζει την οπτική πορεία της αντίστοιχης φωτεινής ακτίνας μεταξύ επιπέδων παράλληλων προς το μέσο επίπεδο της φορτισμένης πλάκας και κειμένων επί των παράπλευρων επιφανειών της πλάκας τότε ισχύει η σχέση:

$$S(x, y, z) = z - s(x, y) = \text{σταθ}. \quad (3.2)$$

και από αυτή προκύπτει:

$$\text{grad } S(x, y, z) = \mathbf{k} - \frac{\partial s}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial s}{\partial y} \mathbf{j} \quad (3.3)$$

όπου $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα του τρισσορθογώνιου συστήματος συντεταγμένων $Oxyz$ του οποίου η αρχή O συμπίπτει με το άκρο της ρωγμής, ο άξονας Ox συμπίπτει με τον άξονα της ρωγμής, ο άξονας Oz είναι κάθετος είναι στη πλάκα και ο οπτικός δρόμος από τη πλάκα σε τυχαίο σημείο P είναι. (Σχ. 3.1)

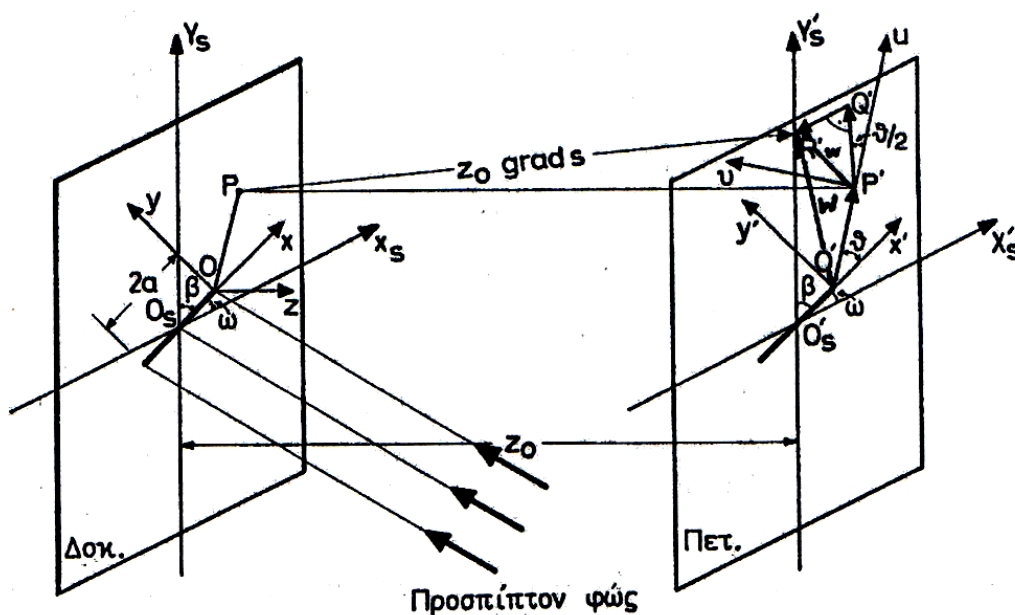
Η απόκλιση των ανακλώμενων φωτεινών ακτινών σε απόσταση z_0 από το μέσο του επιπέδου της πλάκας εκφράζεται με το διάνυσμα \mathbf{w} επί του επιπέδου $z=z_0$ και δίνεται σύμφωνα με τη θεωρία της

Εικονικής από τη σχέση :

$$w = z_0 \text{ grad } S(x, y, z) \quad (3.4)$$

και σύμφωνα με τις σχέσεις (3.1) και (3.2) προκύπτει:

$$w = -z_0 \text{ grad } s(x, y) = -z_0 \left(\frac{\partial s}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial s}{\partial y} \mathbf{j} \right) \quad (3.5)$$



Σχήμα 3.1: Γεωμετρία της ρηγματωμένης πλάκας και σχετική θέση της πλάκας και του πετάσματος αναφοράς

Δεδομένου ότι τα κυματικά μέτωπα των προσπιπτουσών φωτεινών ακτινών επί του μέσου επιπέδου της πλάκας είναι παράλληλα προς το επίπεδο αυτό, ισχύει η σχέση:

$$s(x, y) = s_0 + \Delta s_{r,t}(x, y) \quad (3.6)$$

όπου s_0 παριστάνει σταθερά για κάποιο κυματικό μέτωπο από την πλάκα και η οποία απαλείφεται κατά τον υπολογισμό των κλίσεων και $\Delta s_{r,t}$ παριστάνει τη μεταβολή του οπτικού δρόμου δια της πλάκας. Αντικαθιστώντας τη σχέση (3.4) στη σχέση (3.6) προκύπτει:

$$\mathbf{w} = -z_0 \text{grad} \Delta s_{r,t}(x, y) \quad (3.7)$$

Οι αιχμές του διανύσματος \mathbf{w} καθορίζουν πάνω στο επίπεδο $z=z_0$ περιβάλλουσα (καυστική), η οποία είναι στενά συνδεδεμένη με τον τρόπο παραμόρφωσης των περιοχών της πλάκας, από τις οποίες αναδύονται οι φωτεινές ακτίνες.

Για οπτικώς ισότροπα υλικά λοιπόν με συντελεστή διπλοδιαθλαστικότητας $\zeta_{r,t}=0$ και για την πρώτη ακτίνα την ανακλώμενη από την πίσω επιφάνεια της πλάκας έχουμε:

$$\mathbf{w} = -2z_0 dc_r \text{grad}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (3.8)$$

Αντίστοιχα για την πρώτη ακτίνα τη διερχόμενη από τη πλάκα:

$$\mathbf{w} = -z_0 dc_t \text{grad}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (3.9)$$

Οι παραπάνω σχέσεις μπορούν γενικά να γράφουν:

$$\mathbf{w} = -\epsilon z_0 dc_{r,t} \text{grad}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (3.10)$$

Για την πρώτη ακτίνα την ανακλώμενη από την εμπρός επιφάνεια της πλάκας ισχύει ότι, εάν α είναι η γωνία στροφής λόγω της παραμόρφωσης τότε η απόκλιση φ της ανακλώμενης ακτίνας, σύμφωνα με το νόμο της οπτικής του Snell, δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi = 2\alpha \quad (3.11)$$

και η γωνία α δίνεται από τη σχέση:

$$\alpha = \text{grad} \frac{\Delta d}{2} = -\text{grad} \left[\frac{vd}{2E} (\sigma_1 + \sigma_2) \right] \quad (3.12)$$

οπότε η γωνία φ είναι:

$$\varphi = -\frac{vd}{E} \text{grad}(\sigma_1 + \sigma_2) = -dc_f \text{grad}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (3.13)$$

όπου:

$$c_f = \frac{v}{E} \quad (3.14)$$

είναι η ταυροοπτική σταθερά για την πρώτη ανακλώμενη ακτίνα από την εμπρός επιφάνεια της πλάκας. Το διάνυσμα απόκλισης w , της ανακλώμενης ακτίνας πάνω στο πέτασμα σε απόσταση z_0 από την πλάκα, δίνεται από τη σχέση:

$$w = -z_0 dc_f \text{grad}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (3.15)$$

Γενικά μπορεί να γραφτεί:

$$w = -\varepsilon z_0 dc_{r,t,f} \text{grad}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (3.16)$$

Στην περίπτωση όπου η προσπίπτουσα στη πλάκα φωτεινή δέσμη είναι αποκλίνουσα, (+), ή συγκλίνουσα, (-), ο συντελεστής μεγέθυνσης της οπτικής διάταξης δίνεται από τη σχέση:

$$\lambda_m = \frac{z_0 \pm z_i}{z_i} \quad (3.17)$$

όπου z_0 είναι η απόσταση της εστίας της φωτεινής δέσμης από την πλάκα και z_i η απόσταση της εστίας της φωτεινής δέσμης από το δοκίμιο. Θέτοντας:

$$C_{r,t,f}^* = -\frac{\varepsilon z_0 d c_{r,t,f}}{\lambda_m} \quad (3.18)$$

Τελικά, για τα οπτικώς ισότροπα υλικά, δύναται να γράφει:

$$w = C_{r,t,f}^* \text{grad}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (3.19)$$

3.3 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΟΠΤΙΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΕΝΤΑΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΓΙΑ ΟΠΤΙΚΩΣ ΙΣΟΤΡΟΠΑ ΥΛΙΚΑ

Κατά την επίλυση του επιπέδου εντατικού προβλήματος με τη μέθοδο των μιγαδικών συναρτήσεων το άθροισμα των κυρίων τάσεων δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \sigma_1 + \sigma_2 = 4\text{Re}\Phi(z) \quad (3.20)$$

και από αυτή τελικά καταλήγουμε στην **εξίσωση της αρχικής καμπύλης της καυστικής**:

$$\left| 4C_{r,t,f}^* \Phi''(z) \right| = 1 \quad (3.21)$$

Η **εξίσωση της καυστικής** προκύπτει:

$$W = z + 4C_{r,t,f}^* \overline{\Phi'(z)} \quad (3.22)$$

Στην περίπτωση όπου χρησιμοποιείται η τασική συνάρτηση Westergaard Z , η οποία συνδέεται με την $\Phi(z)$ με τη σχέση $2\Phi(z)=Z$, τότε η εξίσωση της αρχικής καμπύλης της καυστικής γίνεται:

$$|2C_{r,t,f}^* Z''(z)| = 1 \quad (3.23)$$

και με τη σειρά της η εξίσωση της καυστικής, λαμβάνοντας υπόψη και το συντελεστή μεγέθυνσης λ_m γίνεται:

$$W = \lambda_m [z + 2C_{r,t,f}^* \overline{Z'(z)}] \quad (3.24)$$

3.4 ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΕΓΚΑΡΣΙΑΣ ΡΩΓΜΗΣ

Η συνάρτηση Westergaard για ρωγή μήκους $2a$ εντός απείρων διαστάσεων ελαστικού σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$Z_1 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi\zeta}}, \quad K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \quad (3.25)$$

όπου σ είναι η ομοιόμορφη τάση κάθετη προς τον άξονα της ρωγμής και ζ είναι η μιγαδική μεταβλητή η οποία δίνεται από τη σχέση $\zeta = re^{i\theta}$.

Τελικά αποδεικνύεται ότι η σχέση (3.23) της αρχικής καμπύλης μπορεί να γραφτεί ως :

$$\left| 2C_{r,t,f}^* \frac{3K_I}{4\sqrt{2\pi}} \zeta^{-5/2} \right| = 1 \quad (3.26)$$

από την οποία προκύπτει η ακτίνα της αρχικής καμπύλης:

$$|\zeta| = r_0 = \left(\frac{3}{2} C_{r,t,f}^* \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} \right) \quad (3.27)$$

και θέτοντας:

$$|C_{r,t,f}| = \frac{|C_{r,t,f}^*| K_I}{\sqrt{2\pi}} = \frac{\varepsilon z_0 d C_{r,t,f} K_I}{\lambda_m \sqrt{2\pi}} \quad (3.28)$$

η σχέση που εκφράζει την ακτίνα της αρχικής καμπύλης της καυστικής γράφεται:

$$|\zeta| = r_0 = \left(\frac{3}{2} C_{r,t,f} \right)^{2/5} \quad (3.29)$$

δηλαδή η αρχική καμπύλη είναι κύκλος ακτίνας r_0 , η οποία ορίζεται από την παραπάνω σχέση.

Για την εξίσωση της καυστικής προκύπτει:

$$\frac{W}{\lambda_m} = \zeta + C_{r,t,f} \bar{\zeta}^{-\frac{3}{2}} \quad (3.30)$$

και χρησιμοποιώντας την πολική μορφή της ζ

$$\zeta = r e^{i\theta} \quad , \quad \bar{\zeta} = r e^{-i\theta}$$

η σχέση (3.30) γράφεται:

$$\frac{W}{\lambda_m} = r_0 \left(e^{i\theta} + \frac{2}{3} + e^{3i\theta/2} \right) \quad (3.31)$$

Ισχύει όμως ότι:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta \quad , \quad e^{3i\theta/2} = \cos\frac{3\theta}{2} + i \sin\frac{3\theta}{2} \quad (3.32)$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στην εξίσωση προκύπτει:

$$\frac{W}{\lambda_m} = r_0 \left(\cos\theta + \frac{2}{3} \cos\frac{3\theta}{2} \right) + ir_0 \left(\sin\theta + \frac{2}{3} \sin\frac{3\theta}{2} \right) \quad (3.33)$$

και θέτοντας το

$$W = x'_{r,t,f} + iy'_{r,t,f}$$

συγκρίνοντας με τη τελευταία σχέση προκύπτουν οι παραμετρικές εξισώσεις των καυστικών:

$$x'_{r,t,f} = \lambda_m r_0 \left(\cos\theta + \frac{2}{3} \cos\frac{3\theta}{2} \right) \quad (3.34)$$

$$y'_{r,t,f} = \lambda_m r_0 \left(\sin\theta + \frac{2}{3} \sin\frac{3\theta}{2} \right) \quad (3.35)$$

Οι παραπάνω δυο σχέσεις αποτελούν τις παραμετρικές εξισώσεις της λαμβανομένης παρά τα άκρα της ρωγμής καυστικής, η οποία είναι μια συμμετρική καμπύλη με άξονα συμμετρίας τον άξονα της ρωγμής. Από τις παραμετρικές εξισώσεις της καυστικής συμπεραίνεται ότι αυτή είναι κλειστή καμπύλη, περατωμένη, και περιοδική με περίοδο 4π .

Η μέγιστη διάμετρος της καυστικής κατά μήκος του άξονα συμμετρίας

της είναι:

$$D_l^{\max} = 3r_0\lambda_m \quad (3.36)$$

Αντίστοιχα η μέγιστη εγκάρσια διάμετρος, D_t^{\max} , της καυστικής προκύπτει:

$$D_t^{\max} = 2y' = 3.1702r_0\lambda_m \quad (3.37)$$

Οι ανωτέρω σχέσεις αποτελούν χαρακτηριστικές αναλλοίωτες της καυστικής.

Θέτοντας:

$$\delta_l^{\max} = 3.00, \quad \delta_t^{\max} = 3.1702 \quad (3.38)$$

οι σχέσεις (3.38) και (3.39) μπορούν να γράφουν:

$$D_l^{\max} = \lambda_m r_0 \delta_l^{\max} \quad (3.39)$$

$$D_t^{\max} = \lambda_m r_0 \delta_t^{\max} \quad (3.40)$$

όπου δ_l^{\max} , δ_t^{\max} ονομάζονται συντελεστές διόρθωσης των διαμέτρων (correction factors) D_l^{\max} , D_t^{\max} της καυστικής αντίστοιχα.

Από τις σχέσεις (3.28), (3.29), (3.39), (3.40) υπολογίζεται ο συντελεστής έντασης των τάσεων K_I .

$$K_I = \frac{2\sqrt{2\pi}}{3\epsilon z_0 d \lambda_m^{3/2} c_{r,t,f}} \left(\frac{D_{l,t}^{\max}}{\delta_{l,t}^{\max}} \right)^{5/2} \quad (3.41)$$

Από τη σχέση αυτή υπολογίζεται ο συντελεστής έντασης των τάσεων K_I , για τον τύπο-I (εφελκυστικό τύπο) της παραμόρφωσης της ρωγμής, από τις διαμέτρους της καυστικής που σχηματίζεται παρά τα άκρα της ρωγμής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο

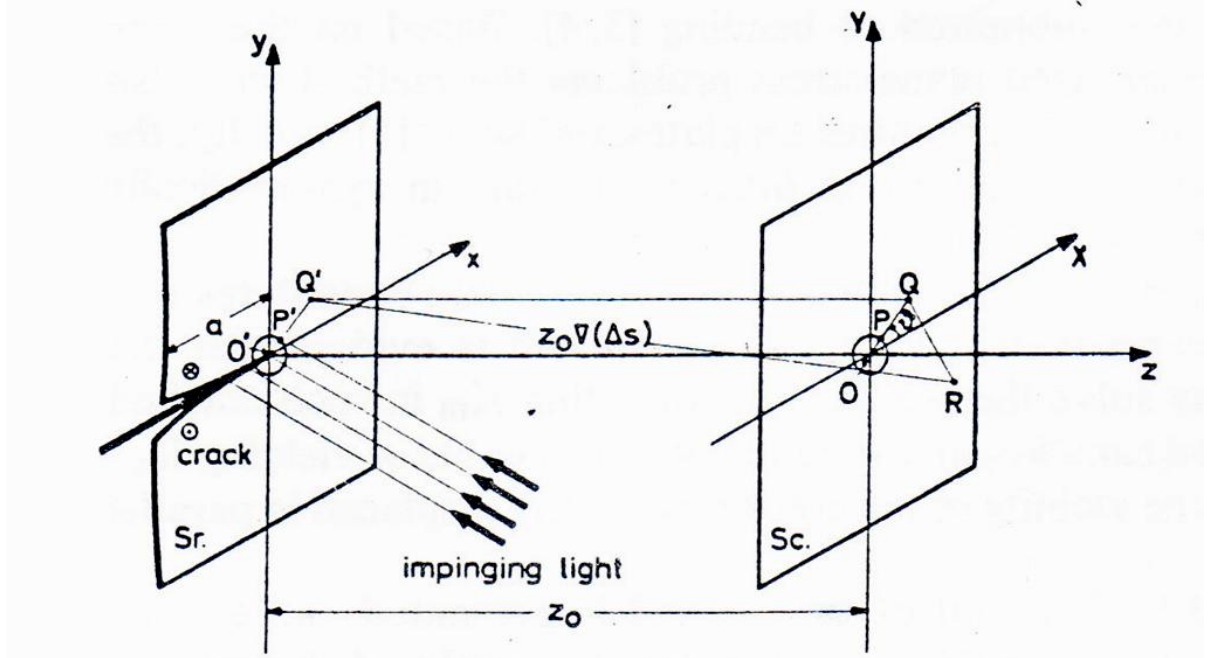
ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΣΗΜΑΝΤΙΚΟΤΕΡΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ PAPER ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ

4.1 ΓΕΝΙΚΑ

Το συγκεκριμένο κεφάλαιο είναι βασισμένο σε paper του καθηγητή Π.Σ. Θεοχάρη που εκδόθηκε το 1980 με τίτλο «The reflected caustics method for the evaluation of mode III stress intensity factor», τα κύρια μέρη του οποίου παραθέτονται στη συνέχεια.

4.2 ΕΞΙΣΩΣΗ ΑΝΑΚΛΩΜΕΝΗΣ ΚΑΥΣΤΙΚΗΣ ΓΙΑ K_{III} ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ

Για να λάβουμε ανακλώμενη καυστική από τα πλευρικά παραμορφωμένα χείλη της ρωγμής υπό παραμόρφωση τύπου K_{III} , μια παράλληλη δέσμη φωτός (συγκλίνουσα ή αποκλίνουσα) προσπίπτει πάνω στις επιφάνειες των δύο παρειών της ρωγμής, τα οποία υπό παραμόρφωση τύπου K_{III} καθίστανται κυλινδρικές επιφάνειες αντίθετων διευθύνσεων έχοντας καμπυλότητα που παρουσιάζεται στο σχήμα 4.1. Η εκτροπή αυτών των κυλινδρικών επιφανειών μειώνεται όσο το x πλησιάζει την αρχή του συστήματος καρτεσιανών συντεταγμένων $O'xyz$, του οποίου ο άξονας $O'z$ τοποθετείται στο μέσο του επιπέδου της πλάκας του δοκιμίου και συμπίπτει επίσης με τη διεύθυνση των ακτίνων φωτός.



Σχήμα 4.1. Παρουσίαση σχετικών θέσεων του δοκιμίου S_r και του πετάσματος S_c , καθώς και της γεωμετρίας ρηγματωμένης πλάκας υπό παραμόρφωση τύπου -III.

Οι ανακλώμενες ακτίνες από το εμπρός και από το πίσω επίπεδο του δοκιμίου εκφράζονται από τη σχέση $z=f(x,y)$, υπακούουν το νόμο ανάκλασης του Snell και αποκλίνουν. Όταν αποτυπωθούν πάνω σε πέτασμα (S_c) τοποθετημένο σε απόσταση z_0 από το δοκίμιο, οι αποκλίσεις τους εκφράζονται σε παραμετρική μορφή από τις απλοποιημένες εκφράσεις:

$$X = \lambda_m - 2(z_0 + \varepsilon d) \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \quad (4.1)$$

$$Y = \lambda_{my} - 2(z_0 + \varepsilon d) \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \quad (4.2)$$

όπου (X, Y) είναι οι συντεταγμένες του σημείου Q του πετάσματος S_c , το

οποίο ανταποκρίνεται στο σημείο $Q'(X,Y)$ (σχήμα 3.1). της παραμορφωμένης επιφάνειας $Sr(z=f(x,y))$ του δείγματος. Σε αυτές τις σχέσεις έχουμε:

d : πάχος της πλάκας

και

ε : είτε ίσο με το μηδέν για ανακλάσεις από το μπροστινό επίπεδο είτε ίσο με τη μονάδα για ανακλάσεις από το πίσω επίπεδο της πλάκας. Οι εξισώσεις (4.1), (4.2) μπορούν να γραφτούν και ως εξής:

$$(X, Y) = \lambda_m(x, y) - 2(z_0 + \varepsilon d) \text{grad}f(x, y) \quad (4.3)$$

Στις παραπάνω σχέσεις ο συντελεστής λ_m ορίζει τον οπτικό συντελεστή μεγέθυνσης και ισούται με:

$$\lambda_m = \frac{z_0 + z_i}{z_i} \quad (4.4)$$

όπου z_i είναι η απόσταση μεταξύ της εστίασης της δέσμης φωτός και του δοκιμίου. Η τιμή του είναι θετική για αποκλίνουσα δέσμη ενώ είναι αρνητική για συγκλίνουσα. Στις περιπτώσεις υπό μελέτη σε αυτήν την εργασία, όπου μόνο ανακλώμενες ακτίνες φωτός λαμβάνονται υπόψη, η ποσότητα z_0 είναι πάντα θετική. Επιπλέον ο λόγος μεγέθυνσης λ_m είναι πάντα θετικός, καθότι για μεγάλες μεγεθύνσεις της καυστικής συνήθως λαμβάνεται $z_0 > z_i$.

Στην περίπτωση παραμόρφωσης τύπου –III η αρχική επίπεδη και ομαλή επιφάνεια γύρω από την άκρη της ρωγμής, αλλάζει κατά τη διάρκεια της παραμόρφωσης σε κυλινδρική και η μορφή της εκφράζεται από τη

μετατόπιση $w = \frac{K_{III}}{G} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sin \frac{\theta}{2}$. Συνεπώς οι παραμετρικές εξισώσεις (4.1), (4.2) παίρνουν την μορφή:

$$X = \lambda_m x - 2(z_0 + \varepsilon d) \frac{\partial w(x,y)}{\partial x}, \quad Y = \lambda_m y - 2(z_0 + \varepsilon d) \frac{\partial w(x,y)}{\partial y} \quad (4.5)$$

Διαφορίζοντας τη σχέση της μετατόπισης ως προς r , θ και χρησιμοποιώντας την μετατροπή σε σύστημα συντεταγμένων $O'xy$ βρίσκουμε ότι:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{K_{III}}{(2\pi r)^{1/2}G} \sin \frac{\theta}{2} \quad \text{και} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{K_{III}}{(2\pi r)^{1/2}G} \cos \frac{\theta}{2} \quad (4.6)$$

Τότε οι παραμετρικές εξισώσεις της καυστικής που προκύπτουν από τις σχέσεις (4.5) είναι:

$$X = \lambda_m r_0 \cos \theta + 2(z_0 + \varepsilon d) \frac{K_{III}}{(2\pi r_0)^{1/2}G} \sin \frac{\theta}{2} \quad (4.7)$$

$$Y = \lambda_m r_0 \sin \theta - 2(z_0 + \varepsilon d) \frac{K_{III}}{(2\pi r_0)^{1/2}G} \cos \frac{\theta}{2}$$

όπου r_0 είναι το διάνυσμα σε πολικές συντεταγμένες (για $-\pi < \theta < \pi$) κατάλληλης καμπύλης πάνω στο δοκίμιο, της οποίας τα σημεία (x,y) αντιστοιχούν στα σημεία (X,Y) της καυστικής. Αυτή η καμπύλη ονομάζεται αρχική ή γενέτειρα καμπύλη της καυστικής. Αυτή η καμπύλη μπορεί να καθοριστεί από το γεγονός ότι για να σχηματιστεί η καυστική, η συντεταγμένη X (ή Y) πρέπει να πάρει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή για $Y=\text{σταθερό}$ (ή $X=\text{σταθερό}$). Αυτές οι συνθήκες ικανοποιούνται αν η ισχύει:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r \lambda_m^2 - r^{-2} (z_0 + \varepsilon d)^2 \frac{K_{III}^2}{2\pi G^2} = 0 \quad (4.8)$$

Κι αν θέσουμε $C_3 = \left[\frac{z_0 + \varepsilon d}{\lambda_m G} \right]$ τότε προκύπτει:

$$r_0 = \left(\frac{(z_0 + \varepsilon d) K_{III}}{(2\pi)^{1/2} \lambda_m G} \right)^{2/3} = \frac{1}{(2\pi)^{1/3}} (|C_3 K_{III}|)^{2/3} \quad (4.9)$$

Πρακτικά σε όλες τις περιπτώσεις η ικανοποίηση της εξίσωσης (4.9) για ένα ζεύγος (x,y) επάνω στο δοκίμιο σημαίνει τον σχηματισμό της καυστικής πάνω στο πέτασμα Sc από τα αντίστοιχα σημεία (X,Y), τα οποία καθορίζονται από τις παραμετρικές εξισώσεις (4.7).

Η εξίσωση (4.9) υποδεικνύει ότι η αρχική καμπύλη της καυστικής πάνω στο δοκίμιο εξαρτάται μόνο από την απόλυτη τιμή του συντελεστή K_{III} και της σταθερής C_3 , που εξαρτάται από την πειραματική διάταξη και τις μηχανικές ιδιότητες του υλικού. Για παραμορφώσεις τύπου –III, όπου μόνο ανακλώμενες καυστικές συναντώνται, αυτή η σταθερή είναι πάντα θετική.

Μπορεί άμεσα να προκύψει από την (4.9) ότι για ανακλάσεις από το εμπρός ή το πίσω επίπεδο του δείγματος αυτή η καμπύλη είναι περιφέρεια κύκλου που περικλείει το άκρο της ρωγμής O' .

Είναι προφανές από την εξίσωση (4.9) ότι το r_0 θα πρέπει να είναι επαρκώς μικρό ώστε η αρχική καμπύλη της καυστικής να είναι πλησίον του άκρου της ρωγμής.

Στην πραγματικότητα αυτή η αρχική καμπύλη ξεκινά από $\theta = -\pi$ και τερματίζεται για $\theta = +\pi$. Επιπλέον οι εξισώσεις (4.7) λόγω της (4.9) παίρνουν τη μορφή:

$$W = X + iY = \lambda_m r_0 \left\{ \exp(i\theta) + 2e \exp \left[i \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \right] \right\} \quad (4.10)$$

$$\text{όπου: } e = \frac{K_{III}}{|K_{III}|}$$

Από τη σχέση (4.10) προκύπτει το ζευγάρι των παραμετρικών εξισώσεων για την καυστική:

$$X = \lambda_m r_0 \left(\cos\theta + 2\sin\frac{\theta}{2} \right)$$

$$- \pi \leq \theta \leq \pi$$
(4.11)

$$Y = \lambda_m r_0 \left(\sin\theta + 2\cos\frac{\theta}{2} \right)$$

Με βάση τις παραπάνω εξισώσεις μπορούμε να σχεδιάσουμε την μορφή τυπικής καυστικής για ανακλάσεις από το μπροστινό επίπεδο όπου $\varepsilon=0$. Η καυστική από το πίσω επίπεδο του δοκιμίου είναι παρόμοια με την καυστική του μπροστά επιπέδου και ελαφρώς μετατοπισμένη σε σχέση με αυτό, αν το d είναι σχετικά παρεμφερές με το z_0 . Όμως για τα πειράματα με τα οποία θα ασχοληθούμε όπου $z_0 \gg d$, οι δυο καυστικές πρακτικά συμπίπτουν.

Το σχήμα 4.2 σελ.36 παρουσιάζει το διανυσματικό διάγραμμα για σχηματισμό της καυστικής ABCDEF για παραμόρφωση τύπου -III.

Από τις παραμετρικές σχέσεις της καυστικής (4.11) μπορούμε προκύπτει ότι αυτή η καμπύλη δεν παρουσιάζει συμμετρία προς τους άξονες Ox και Oy .

Το τμήμα ABC της καμπύλης σχηματίζεται για γωνίες $-\pi \geq \theta \geq 0$, ενώ αντίστοιχα το τμήμα CDEF σχηματίζεται για γωνίες $-\pi \leq \theta \leq 0$.

Συγκεκριμένα το σημείο A (αρχή της καμπύλης) έχει συντεταγμένες $(\lambda_m r_0, 0)$ και το F (τέλος της καμπύλης) $(-3\lambda_m r_0, 0)$ αντίστοιχα. Συνεπώς η απόσταση AF κατά μήκος του άξονα Ox είναι:

$$(AF) = 4\lambda_m r_0 \quad (4.12)$$

Μπορεί περαιτέρω να δηχθεί ότι η καμπύλη είναι εφαπτόμενη στον άξονα Ox στο σημείο A και κάθετη στον ίδιο άξονα στο σημείο F .

Τα ακραία σημεία B και E της καυστικής από τον άξονα Ox και Oy αντιστοιχούν σε γωνίες $\theta_B=60^\circ$ και $\theta_E=-60^\circ$ και έχουν συντεταγμένες:

σημείο B ($X_{max}^B = (3/2)\lambda_m r_0$, $Y_B = -\sqrt{3/2} \lambda_m r_0$ και σημείο E ($X_E = -(1/2)\lambda_m r_0$, $Y_{max}^E = -3\sqrt{3/2} \lambda_m r_0$. Τέλος ο άξονας Oy τέμνει την καυστική στο σημείο D με συντεταγμένες $X_D=0$, $Y_D = -2.543\lambda_m r_0$ και $\theta=-43^\circ$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η μέγιστη διαμήκης διάμετρος της καυστικής δίνεται από τη σχέση:

$$D_i^{\max} = 4.5\lambda_m r_0 \quad (4.13)$$

όπου το μέγιστο της εγκάρσιας απόστασης είναι:

$$Y_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\lambda_m r_0 \quad (4.14)$$

Η θέση της άκρης της ρωγμής μπορεί να οριστεί από τις συντεταγμένες X_{\max} , Y_{\max} που μετρώνται από τα σημεία B και E της καυστικής που αντιστοιχούν στα μέγιστα σημεία αυτής της καμπύλης, στα οποία οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες προς τους άξονες της ρωγμής. Αυτές οι συντεταγμένες δίνονται από τους τύπους:

$$X_{\max} = -1.5 \lambda_m r_0 \quad , \quad Y_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \lambda_m r_0 \quad (4.15)$$

Με αυτόν τον τρόπο όχι μόνο μπορεί να προσδιοριστεί η άκρη της ρωγμής, αλλά επίσης ο συντελεστής εντάσεως των τάσεων K_{III} μπορεί να προσδιοριστεί.

$$K_{III} = 0.263 \frac{G}{z_0 \lambda_m^{1/2}} (D_i^{\max})^{3/2}$$

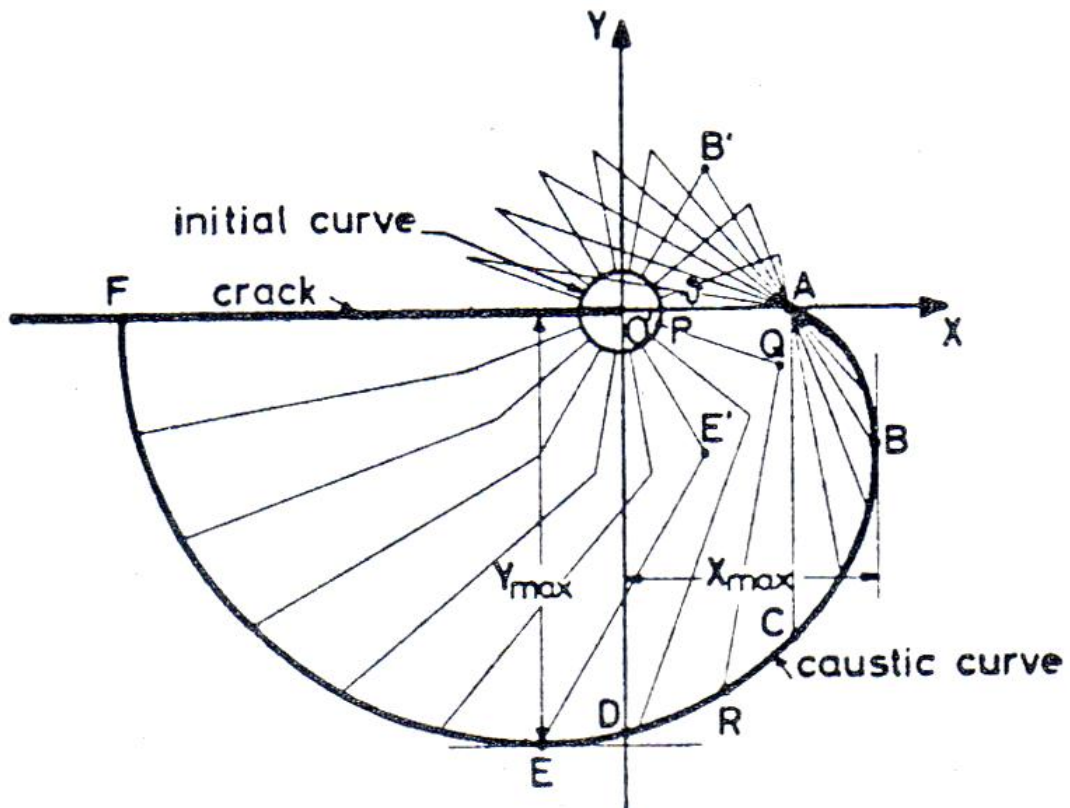
ή

(4.16)

$$K_{III} = 0.599 \frac{G}{z_0 \lambda_m^{1/2}} (Y_{\max})^{3/2}$$

Τελικά η γωνία δ που σχηματίζεται ανάμεσα στη γραμμή FB, που συνδέει το μακρύτερο σημείο B της καυστικής στην διεύθυνση του άξονα κατά την διεύθυνση του άξονα των x με το σημείο F στο άκρο της καυστικής, και του άξονα της ρωγμής ισούται με:

$$|\tan \delta| = \frac{1}{3\sqrt{3}} \quad \text{και} \quad |\delta| = 10^\circ 53' 36'' \quad (4.17)$$



Σχήμα 4.2

4.3 Η ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΥ I, II, III.

Θεωρούμε την περίπτωση της ρηγματωμένης ελαστικής πλάκας που είναι υπό παραμόρφωση συνδυασμένου τύπου I, II, III. Σε αυτήν την περίπτωση κατά μήκος του άξονα O'z στην περιοχή πλησίον της ρωγμής ισχύουν:

$$\varepsilon_{zI} = -\frac{\nu}{E} \frac{2K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2}, \quad \varepsilon_{zII} = -\frac{\nu}{E} \frac{2K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} \sin \frac{\theta}{2}$$

και

$$w = -\frac{r}{G} \frac{2K_{III}}{(2\pi r)^{1/2}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (4.18)$$

Τελικά καταλήγουμε ότι οι παραμετρικές εξισώσεις της καυστικής εκφράζονται από:

$$X_0 = \lambda_m r_0 \cos \theta + \frac{z_0}{r_0^{3/2}} \left(C_1 \cos \frac{3\theta}{2} - C_2 \sin \frac{3\theta}{2} \right) - \frac{z_0}{r_0^{1/2}} C_3 \sin \frac{\theta}{2} \quad (4.19)$$

$$Y_0 = \lambda_m r_0 \sin \theta + \frac{z_0}{r_0^{3/2}} \left(C_1 \sin \frac{3\theta}{2} + C_2 \cos \frac{3\theta}{2} \right) - \frac{z_0}{r_0^{1/2}} C_3 \cos \frac{\theta}{2}$$

Επιπλέον η εξίσωση για την αρχική καμπύλη δίνεται από:

$$\lambda_m^2 r_0^5 - A_3^2 r_0^2 + 2A_3 (A_1 \sin \theta + A_2 \cos \theta) r_0 - (A_1^2 + A_2^2) = 0 \quad (4.20)$$

όπου οι σταθερές C_i για την καυστική δίνονται ως:

$$C_1 = \frac{cdK_I}{(2\pi)^{1/2}}, \quad C_2 = \frac{cdK_{II}}{(2\pi)^{1/2}} \quad \text{και} \quad C_3 = \frac{2K_{III}}{G(2\pi)^{1/2}} \quad (4.21)$$

ενώ οι σταθερές A_i για την αρχική καμπύλη εκφράζονται από τις σχέσεις:

$$A_1 = \frac{3z_0 cdK_I}{2(2\pi)^{1/2}}, \quad A_2 = \frac{3z_0 cdK_{II}}{2(2\pi)^{1/2}} \quad \text{και} \quad A_3 = \frac{z_0 K_{III}}{G(2\pi)^{1/2}} \quad (4.22)$$

Στις παραπάνω σχέσεις c είναι η οπτική σταθερά των ανακλώμενων ακτίνων από την μπροστά (c_f) ή την πίσω (c_r) επιφάνεια του δοκιμίου πάχους d . Επιπλέον για K_{III} ισχύει ότι $z_0 + d \approx z_0$ και για αυτό το λόγο οι δυο καυστικές, που σχηματίζονται από τα δυο επίπεδα του δοκιμίου για την περίπτωση τύπου-III, σχεδόν ταυτίζονται.

Αν θέσουμε

$$|A| = (A_1^2 + A_2^2)^{1/2} = \frac{3}{2} z_0 |C| \quad (4.23)$$

και λαμβάνοντας υπόψη ότι η γωνία ω σχηματίζεται μεταξύ του άξονα μιας πλάγιας ρωγμής και του εγκάρσιου άξονα μιας άπειρης πλάκας που υπόκειται σε απλή τάση εκφράζεται από την:

$$\tan\omega = \frac{K_{II}}{K_I} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{A_2}{A_1}$$

τότε οι παραμετρικές εξισώσεις της καυστικής για την αρχική καμπύλη παίρνουν τη μορφή:

$$W = X + iY = \rho e^{i\varphi} = \lambda_m z + z_0 C \bar{z}^{-\frac{3}{2}} - iz_0 C_3 \bar{z}^{-\frac{1}{2}} \quad (4.24)$$

όπου ρ , φ είναι οι πολικές συντεταγμένες που προσδιορίζουν τα σημεία της καυστικής στον σύστημα OXY.

$$X = \lambda_m r_0 \cos\theta + |C| z_0 r_0^{-3/2} \cos\left(\frac{3\theta}{2} + \omega\right) + z_0 r_0^{-1/2} C_3 \sin\frac{\theta}{2} \quad (4.25.1)$$

$$Y = \lambda_m r_0 \sin\theta + |C| z_0 r_0^{-3/2} \sin\left(\frac{3\theta}{2} + \omega\right) - z_0 r_0^{-1/2} C_3 \cos\frac{\theta}{2} \quad (4.25.2)$$

και

$$\lambda_m^2 r_0^5 - A_3^2 r_0^2 + 2|A|A_3 \sin(\theta + \omega)r_0 - |A|^2 = 0 \quad (4.26)$$

με

$$|C| = (C_1^2 + C_2^2)^{1/2}, \quad C_1 = |C|\cos\omega, \quad C_2 = |C|\sin\omega$$

και

$$z = re^{i\theta}, \quad C = C_1 + iC_2, \quad \text{και} \quad \bar{z} = re^{-i\theta} \quad (4.27)$$

Από τη σχέση (3.24) μπορούμε να εκφράσουμε τις καυστικές σε πολικές συντεταγμένες ως:

$$\begin{aligned} \rho = & \lambda_m r_0 \cos(\theta - \varphi) + |C|z_0 r_0^{-\frac{3}{2}} \cos\left(\frac{3\theta}{2} + \omega - \varphi\right) \\ & + z_0 r_0^{-1/2} C_3 \sin\left(\frac{\theta}{2} - \varphi\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = & \lambda_m r_0 \sin(\theta - \varphi) + |C|z_0 r_0^{-\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{3\theta}{2} + \omega - \varphi\right) - \\ & z_0 r_0^{-1/2} C_3 \cos\left(\frac{\theta}{2} - \varphi\right) \end{aligned}$$

(4.28)

4.4 ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΘΕΩΡΗΤΙΚΩΝ ΚΑΥΣΤΙΚΩΝ, ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΕΝΩΝ ΜΕΣΩ ΤΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ MATLAB.

Οι μονάδες μέτρησης των τιμών των σταθερών που χρησιμοποιούνται για τη δημιουργία των καυστικών μέσω του matlab είναι:

για τους συντελεστές εντάσεως των τάσεων εκφρασμένες σε $N/m^{3/2}$, για το πάχος d του δοκιμίου σε m , το μέτρο ελαστικότητας του υλικού σε Pa , η εστιακή απόσταση z επίσης σε m και τελικά οι οπτικές σταθερές του υλικού c_r , c_f σε m^2/N .

Η ρουτίνα που δημιουργήθηκε για τον σχηματισμό των καυστικών είναι η εξής:

```
KI=10000;
```

```
KII=0;
```

```
KIII=0;
```

```
x=KII/KI;
```

```
w=atan(x);
```

```
d=0.003;
```

```
zo=1.72;
```

```
zi=0.54;
```

```
E=3400000000;
```

```
v=0.34;
```

```
cf=10^(-10);
```

```
cr=-1.7*(10^(-10));
```



```

lm=(zo+zi)/zi;
G= E/(2*(1+v));
A1= (3*z*cf*d*KI)/(2*((2*pi)^0.5));
A2= (3*z*cf*d*KII)/(2*((2*pi)^0.5));
A3= (z*KIII)/(G*((2*pi)^0.5));
C1= (cf*d*KI)/((2*pi)^0.5);
C2= (cf*d*KII)/((2*pi)^0.5);
C3= (2*KIII)/(G*((2*pi)^0.5));
A= ((A1^2)+ (A2^2))^0.5;
C= ((C1^2)+ (C2^2))^0.5;

tmp=0;
for th=-pi:0.01:pi
    tmp=tmp+1;
    p=[lm^2 0 0 -(A3.^2) 0 (2.*A.*A3.*abs(sin(th+w))-(A.^2))];
    r = roots(p);

    j=0;
    for iter=1:1:5
        if isreal(r(iter))&& r(iter)>0
            j=j+1;
            r_new(j)=r(iter); %dhmiourgw mia nea metablth pou apothkeuei
mono pragmatikous thetikous
            r_final=min(r_new);
        end
    end

```

end

$$X(\text{tmp}) = l_m * r_{\text{final}} * \cos(\text{th}) - C * z * (r_{\text{final}}^{-1.5}) * \cos((1.5 * \text{th}) + w) + z * (r_{\text{final}}^{-0.5}) * C_3 * \sin(\text{th}/2);$$

$$Y(\text{tmp}) = l_m * r_{\text{final}} * \sin(\text{th}) - C * z * (r_{\text{final}}^{-1.5}) * \sin((1.5 * \text{th}) + w) - z * (r_{\text{final}}^{-0.5}) * C_3 * \cos(\text{th}/2);$$

end

$$A_{1n} = (3 * z * cr * d * KI) / (2 * ((2 * \pi)^{0.5}));$$

$$A_{2n} = (3 * z * cr * d * KII) / (2 * ((2 * \pi)^{0.5}));$$

$$A_{3n} = (z * KIII) / (G * ((2 * \pi)^{0.5}));$$

$$C_{1n} = (cr * d * KI) / ((2 * \pi)^{0.5});$$

$$C_{2n} = (cr * d * KII) / ((2 * \pi)^{0.5});$$

$$C_{3n} = (2 * KIII) / (G * ((2 * \pi)^{0.5}));$$

$$A_n = ((A_{1n}^2) + (A_{2n}^2))^{0.5};$$

$$C_n = ((C_{1n}^2) + (C_{2n}^2))^{0.5};$$

tmpn=0;

for thn=-pi:0.01:pi

 tmpn=tmpn+1;

 pn=[l_m^2 0 0 -(A_{3n}^2) 0 (2.*A_n.*A_{3n}.*abs(sin(thn+w))-(A_n.^2))];

```

rn = roots(pn);

jn=0;
for itern=1:1:5
    if isreal(rn(itern))&& rn(itern)>0
        jn=jn+1;
        r_newn(jn)=rn(itern); %dhmiourgw mia nea metablth pou
        apothkeuei mono pragmatikous thetikous
        r_finaln=min(r_newn);
    end
end

end

Xn(tmpn)=lm* r_finaln*cos(thn) + Cn*z*(r_finaln^(-
1.5))*cos((1.5*thn)+ w) + z*(r_finaln^(-0.5))*C3n*sin(thn/2);

Yn(tmpn)=lm* r_finaln*sin(thn) + Cn*z*(r_finaln^(-
1.5))*sin((1.5*thn)+ w) - z*(r_finaln^(-0.5))*C3n*cos(thn/2);

end

figure; hold on; plot(X,Y); plot(Xn,Yn); hold off;

```

Επεξήγηση του προγράμματος:

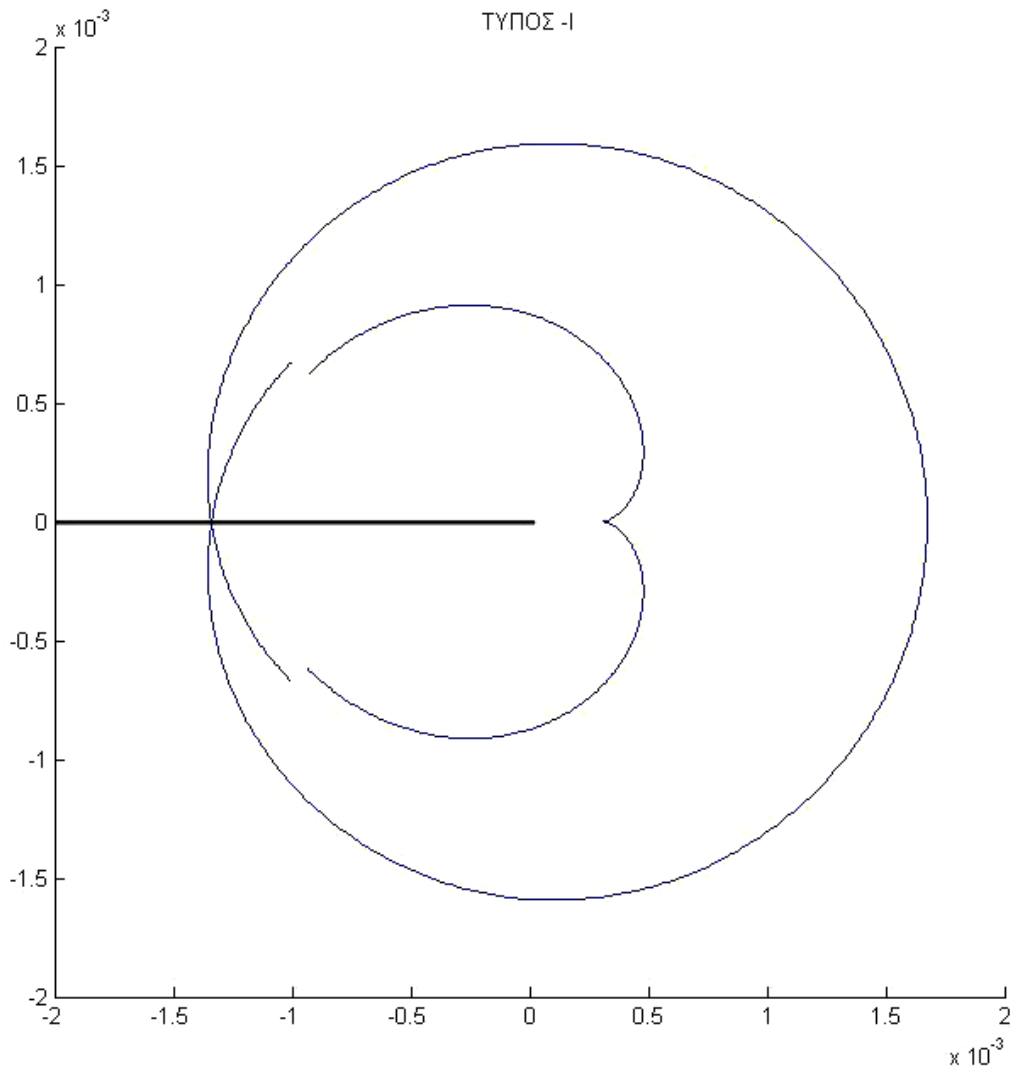
Αρχικά δίνονται οι σταθερές καθώς και οι τιμές για τα K_I , K_{II} , K_{III} . Επίσης ορίζονται οι μεταβλητές, όπως αυτές παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 4. Στη συνέχεια αρχικοποιείται ο μετρητής tmr και ορίζεται το εύρος της γωνίας θ , όπως και το βήμα κατά το οποίο θα αυξάνεται σε κάθε επανάληψη η τιμή της. Αμέσως μετά ορίζεται η εξίσωση 5^{ου} βαθμού από την οποία θα προκύψει η ακτίνα της αρχικής καμπύλης r_0 . Επόμενο βήμα είναι η αριθμητική επίλυση της εξίσωσης και η εύρεση των ριζών.

Στο σημείο αυτό δημιουργούμε έναν εσωτερικό βρόγχο ώστε να περιορίσουμε τις ρίζες στις πραγματικές θετικές και τελικά να κρατήσουμε τη μικρότερη εξ αυτών. Τελικά για το ζεύγος (θ, r_0) από τις σχέσεις για X, Y αντίστοιχα λαμβάνουμε το συγκεκριμένο ζευγάρι (X, Y) σε κάθε επανάληψη ως την εξάντληση του εύρους της γωνίας θ .

Το τμήμα του προγράμματος μετά τον ορισμό των σταθερών, επαναλαμβάνεται με τη χρήση όμως της οπτικής σταθεράς c_r στη θέση της c_f , ώστε τελικά να λάβουμε τους δυο κλάδους των καυστικών.

ΤΥΠΟΣ I:

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα παραπάνω παρουσιάζεται η περίπτωση τύπου I. Η μορφή της καυστικής παρουσιάζεται στο σχήμα 4.3

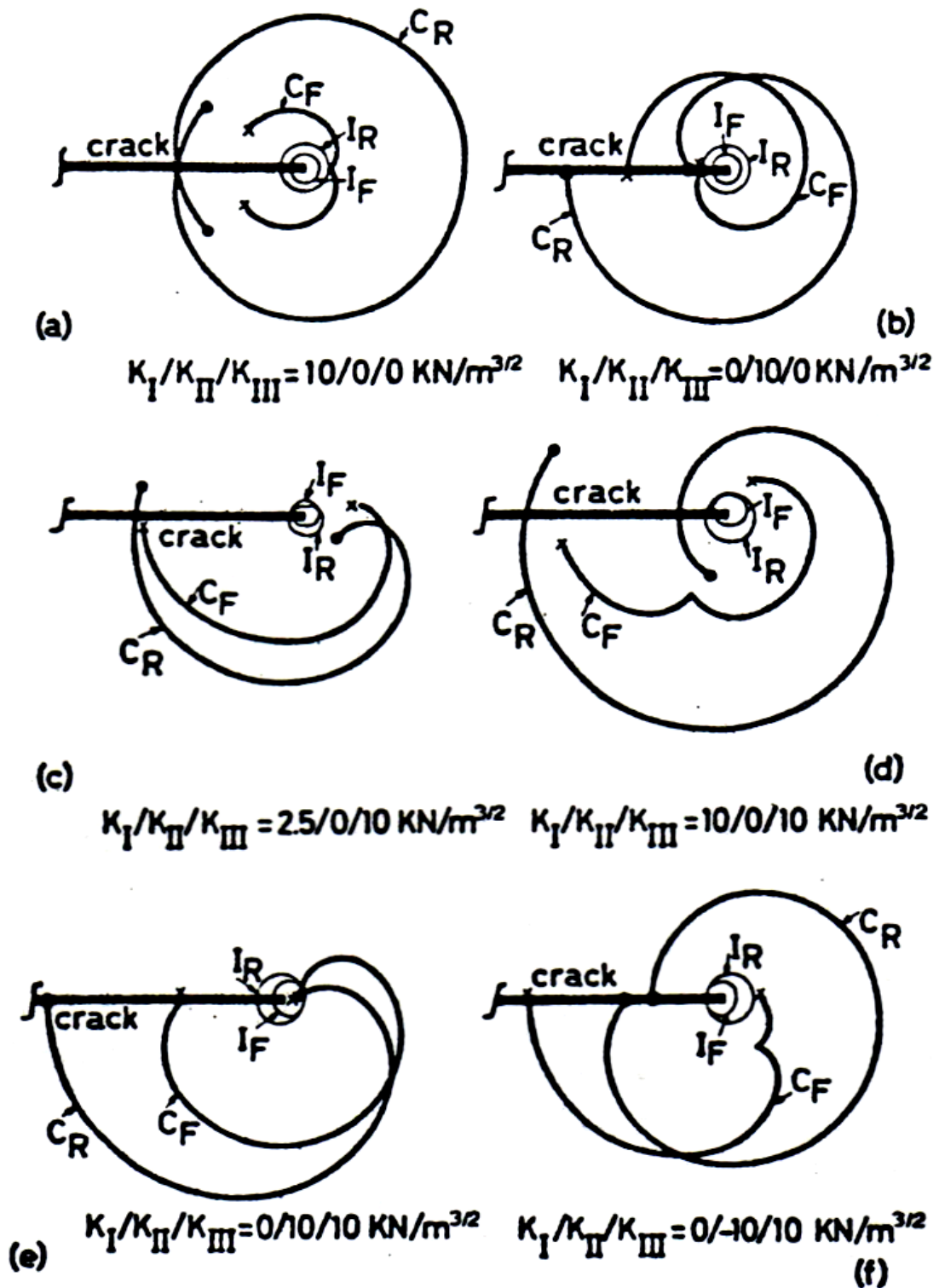


Σχήμα 4.3 ΤΥΠΟΣ-I

Σύμφωνα με τη θεωρία του paper που αναπτύχθηκε στο κεφάλαιο 4 αυτής της εργασίας, αναμέναμε συμμετρική καυστική ως προς τον άξονα της ρωγμής γεγονός που επιβεβαιώνεται και από τη θεωρητική καυστική που λάβαμε.

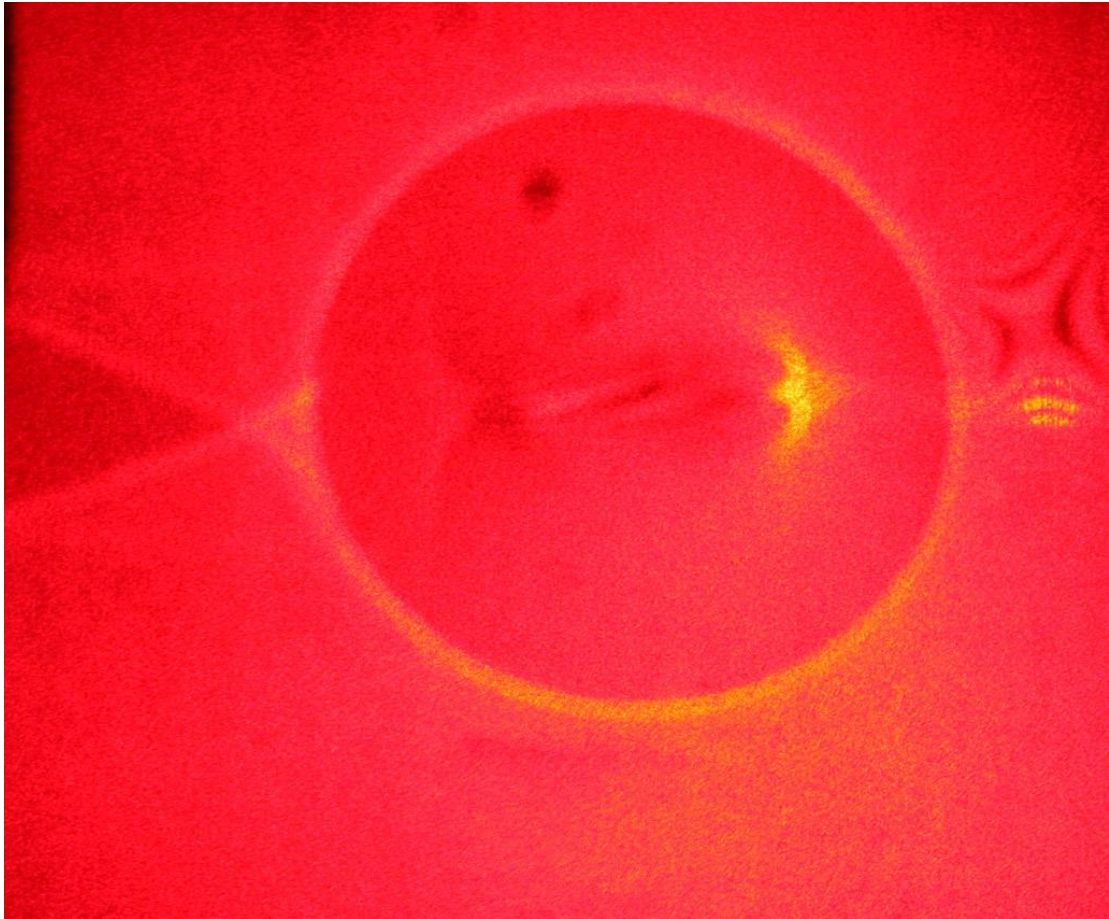
Στο paper, που μελετάται, δίνεται το σχήμα 4.4 για διάφορες περιπτώσεις καταπόνησης της ρωγμής τύπου –I, τύπου –II και συνδυασμού αυτών με τον τύπο-III.

Για το συγκεκριμένο παράδειγμα που μόλις παρουσιάσαμε παρατηρούμε την περίπτωση (a), στην οποία δίνεται η καυστική με $K_{II}=K_{III}=0$ και $K_I=10.000 \text{ N/m}^{3/2}$, χωρίς να αναφέρονται πάντως αναλυτικά οι τιμές των υπόλοιπων παραμέτρων και σταθερών για καμιά από τις περιπτώσεις που παρουσιάζονται. Υπάρχει λοιπόν ταύτιση όσο αφορά τη μορφή της καυστικής.



Σχήμα 4.4

Όσο αφορά τη μορφή της καυστικής για περίπτωση τύπου -I και την συμμετρικότητα αυτής, μπορούμε να επιβεβαιώσουμε τις παρατηρήσεις μας και από πειραματικά δεδομένα όπως η φωτογραφία που παρατίθεται:

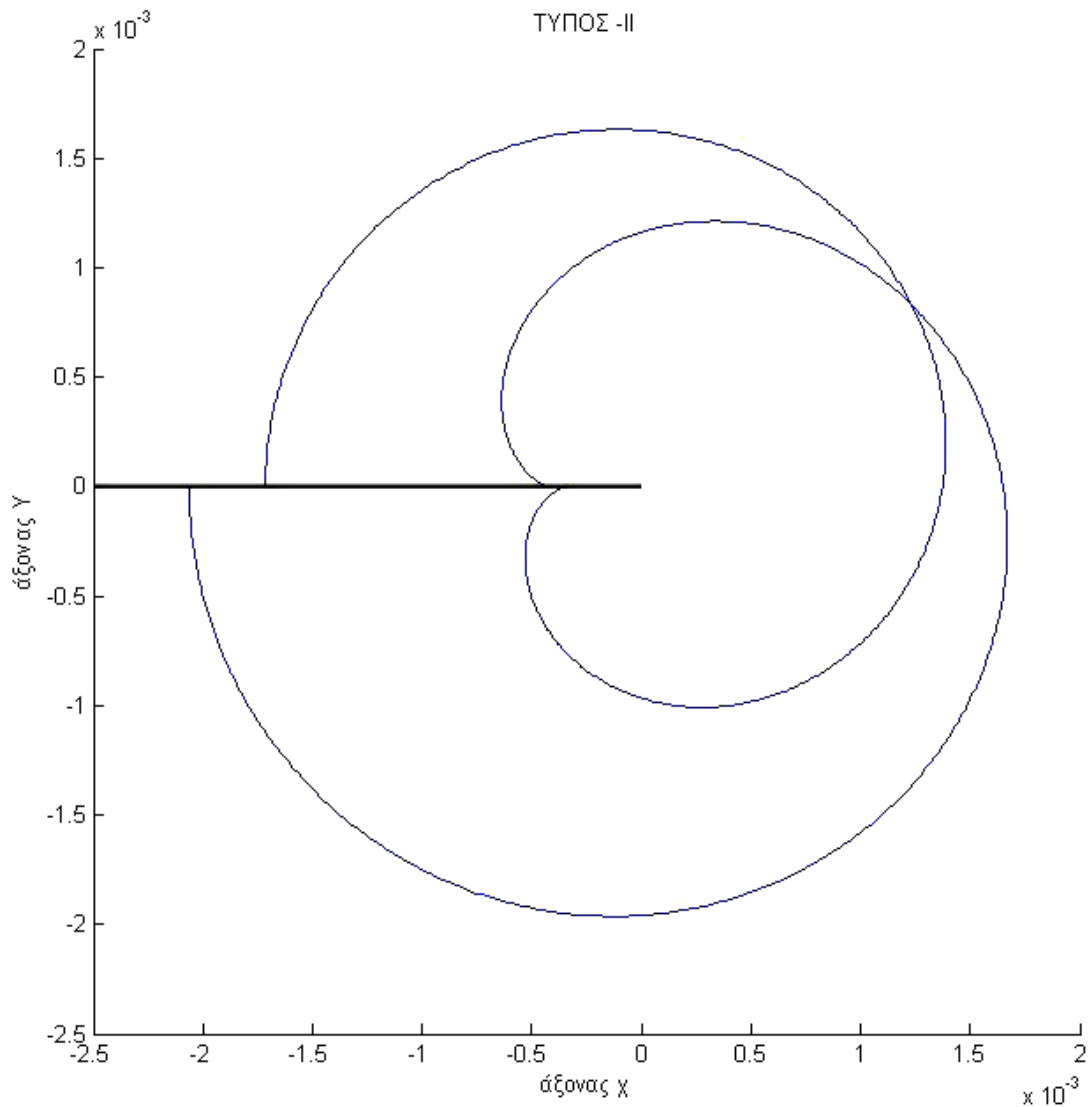


Η φωτογραφία έχει ληφθεί κατά τη διάρκεια πειράματος για την εκπόνηση διδακτορικής διατριβής με τίτλο «Μελέτη στη διάδοση της ρωγμής υπό στατικά και δυναμικά φορτία», από την Πολιτικό Μηχανικό Δ.Π.Θ. και υποψήφια διδάκτορα του τομέα Μηχανικής Φαίδρα Θ. Γιβαννάκη.

Παρόλο που η εσωτερική καυστική δεν έχει σχηματιστεί απόλυτα, καθώς επίσης και δεν είναι απολύτως ευδιάκριτα τα άκρα της εξωτερικής καυστικής, εντούτοις είναι χαρακτηριστική η μορφή της καθώς και η συμμετρικότητά της ως προς τον άξονα της ρωγμής.

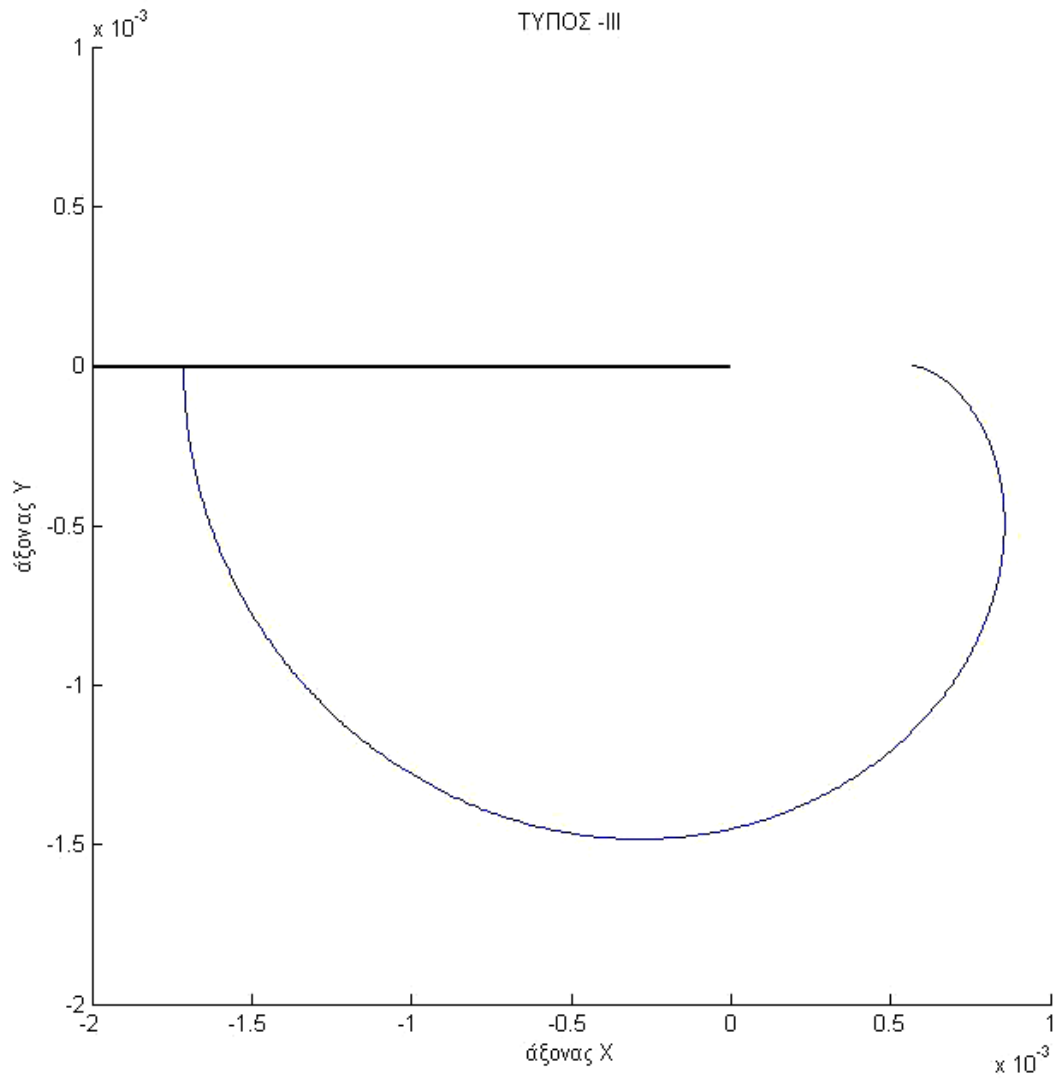
ΤΥΠΟΣ –II:

Μηδενίζοντας τις τιμές στο πρόγραμμα για τα K_{II} και K_{III} και δίνοντας τιμή $10.000 \text{ N/m}^{3/2}$ στο K_{II} η καυστική έχει την εξής μορφή:



Συγκρίνοντας με το σχήμα 4.4 (b) είναι εμφανής πάλι η σύγκλιση των μορφών. Παρατηρούμε επίσης πως ισχύει το γεγονός ότι όταν η $K_I=0$, τότε οι καυστικές έχουν το αρχικό και τελικό τους σημείο πάνω στον άξονα της ρωγμής. Το ίδιο θα φανεί και αμέσως παρακάτω για την περίπτωση όπου $K_I=K_{II}=0$ και $K_{III}=10.000 \text{ N/m}^{3/2}$.

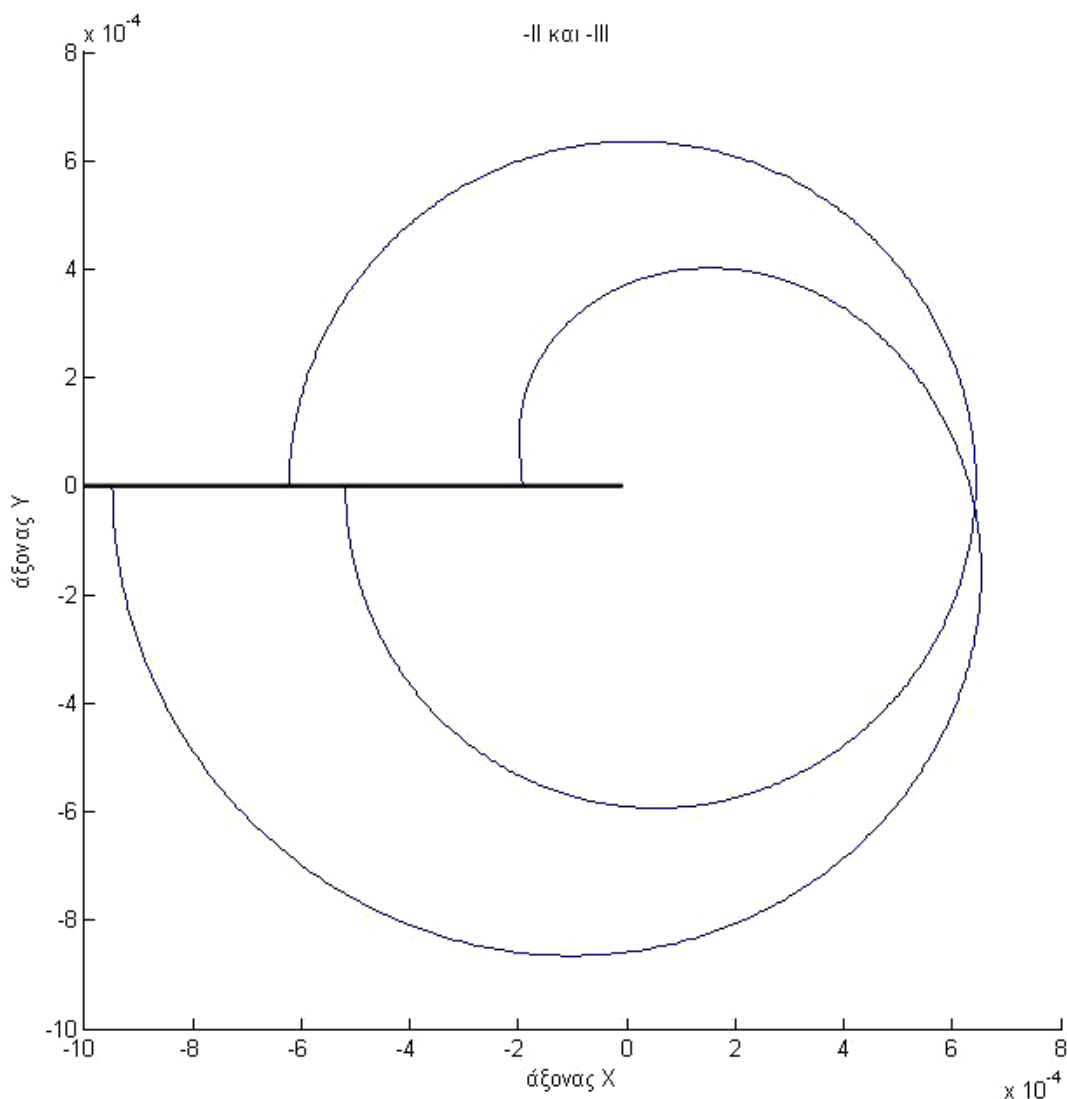
ΤΥΠΟΣ -III:



Σημειώνεται ξανά η ταύτιση της μορφής της καυστικής, σύμφωνα και με το σχήμα 4.2, που παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 4.2.

ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ ΤΥΠΩΝ –II και –III:

Για $K_I=0$ και $K_{II}=K_{III}=10000 \text{ N/m}^{3/2}$ η καυστική που δίνει το Matlab είναι:

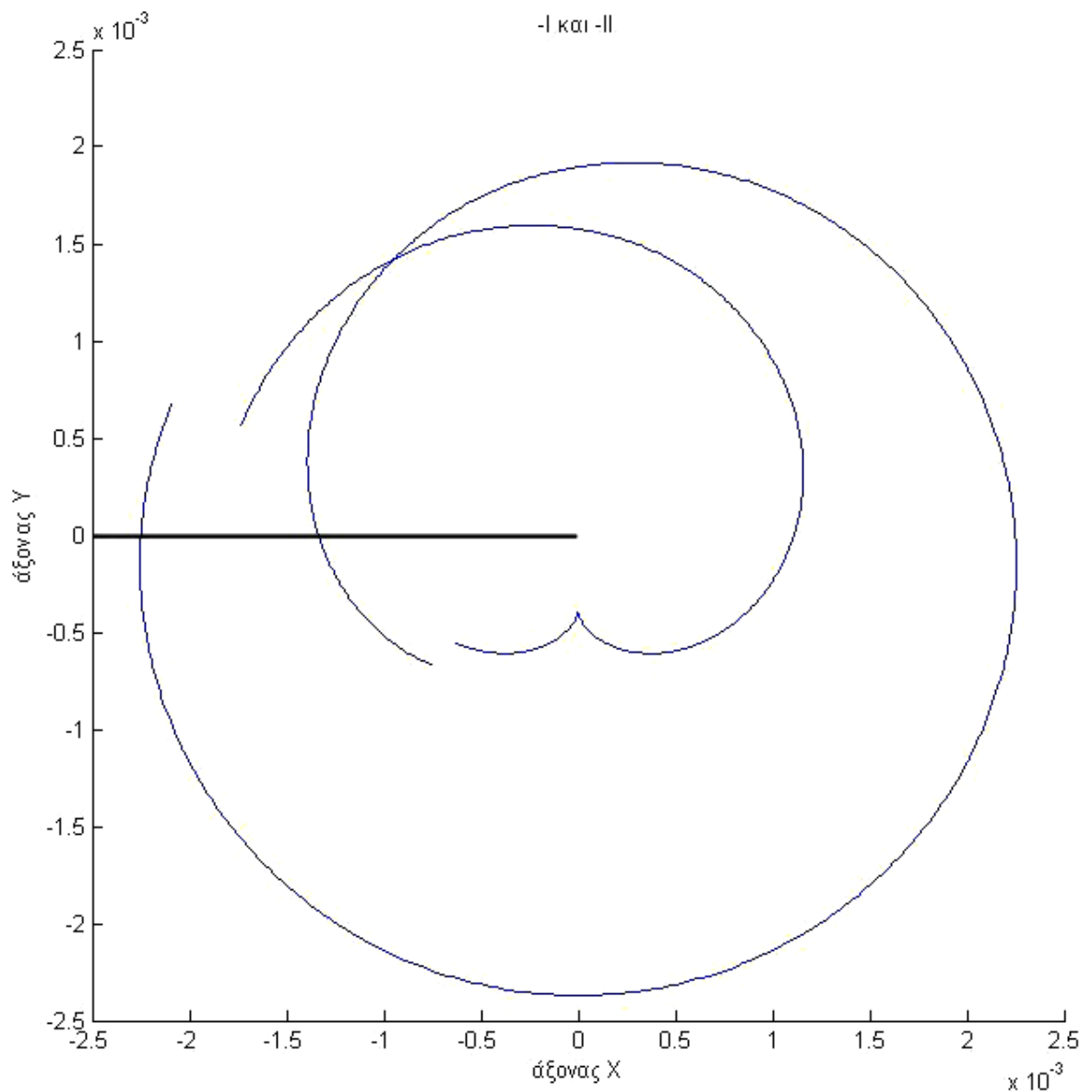


Τονίζεται ξανά το γεγονός ότι με απουσία του K_I τα ακραία σημεία και των δύο καυστικών βρίσκονται επί του άξονα της ρωγμής. Στη συγκεκριμένη περίπτωση βέβαια δεν έχουμε απόλυτη ταύτιση όσο αφορά τη μορφή των καυστικών που λάβαμε από το Matlab σε σχέση με όσα παρουσιάζονται στο paper. Η μορφή της εσωτερικής καυστικής του σχήματος 4.4 (e) είναι όμοια με την εσωτερική καυστική που μόλις παρουσιάστηκε, εκτός από το γεγονός ότι το αρχικό της σημείο βρίσκεται πάνω στην προέκταση του άξονα της ρωγμής και όχι πάνω στον ίδιο τον άξονα. Όσον αφορά την εξωτερική καυστική έχουμε επιπλέον τη

διαφοροποίηση ότι στην περίπτωση του paper παρουσιάζεται το αρχικό της σημείο να βρίσκεται πιο κοντά στο άκρο της ρωγμής σε σχέση με το τελικό της σημείο. Αντίθετα, με τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν στο Matlab, σχηματίστηκε εξωτερική καυστική παρόμοιας μορφής αλλά με το τελικό της σημείο πιο κοντά στην άκρη της ρωγμής από ότι το αρχικό.

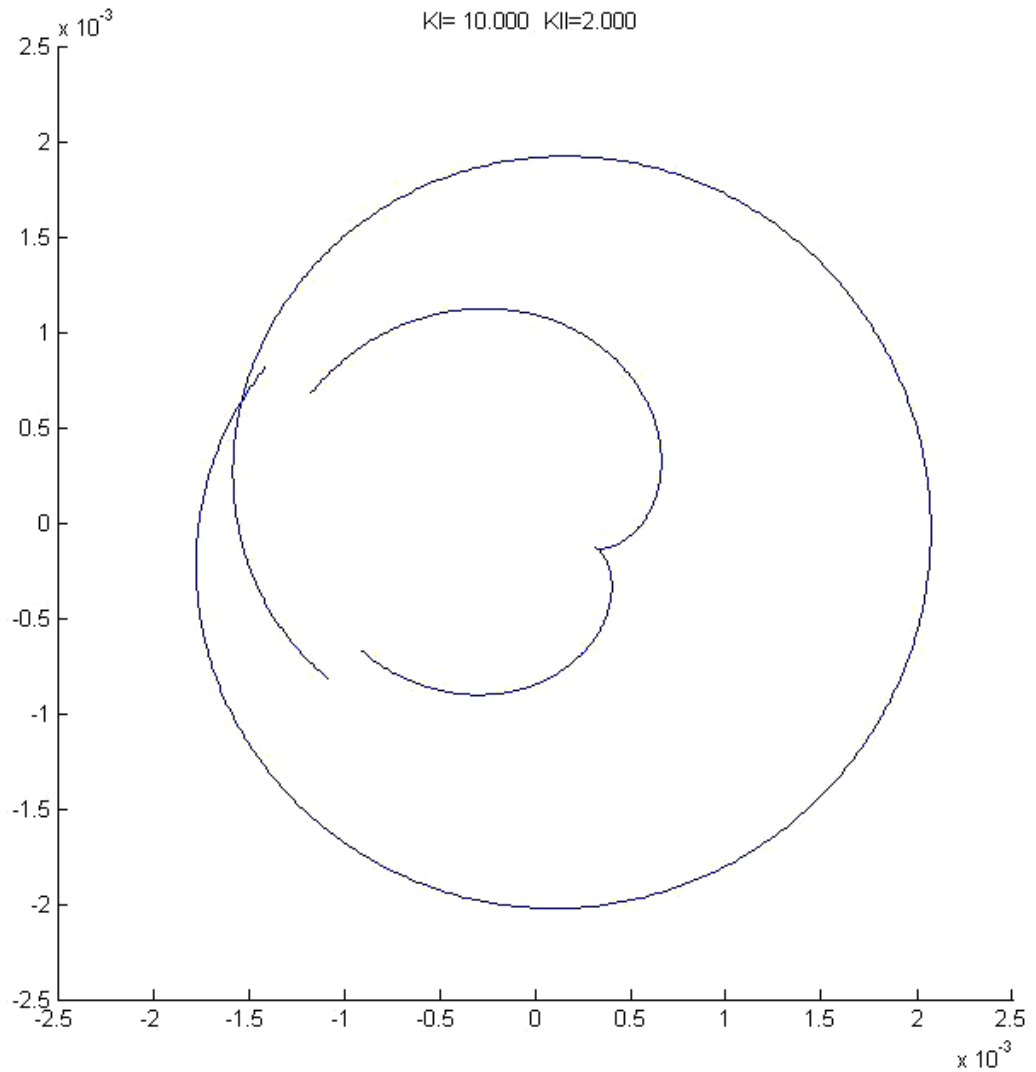
ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ ΤΥΠΩΝ -I και -II:

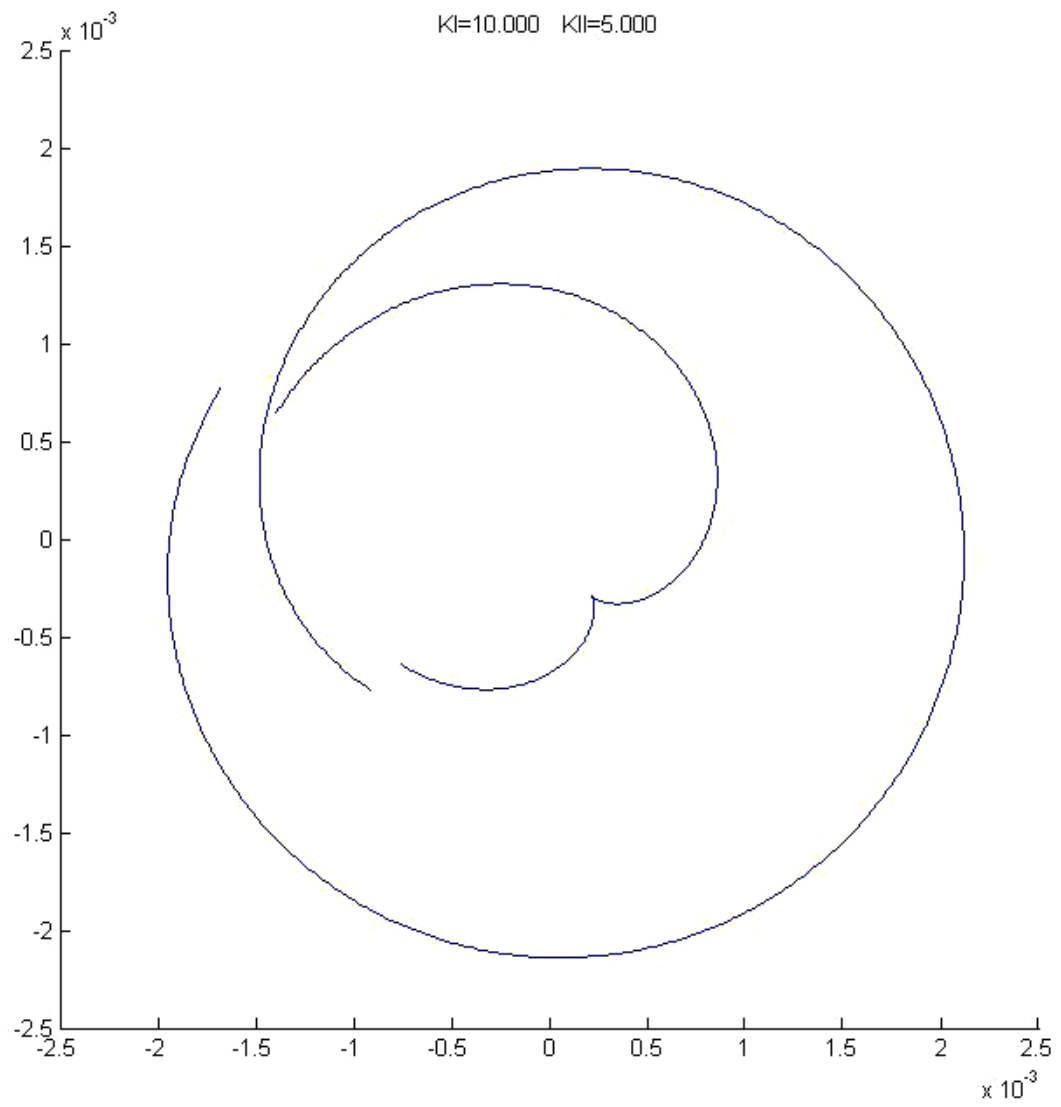
Για $K_I=K_{II}=10000 \text{ N/m}^{3/2}$ και $K_{III}=0$

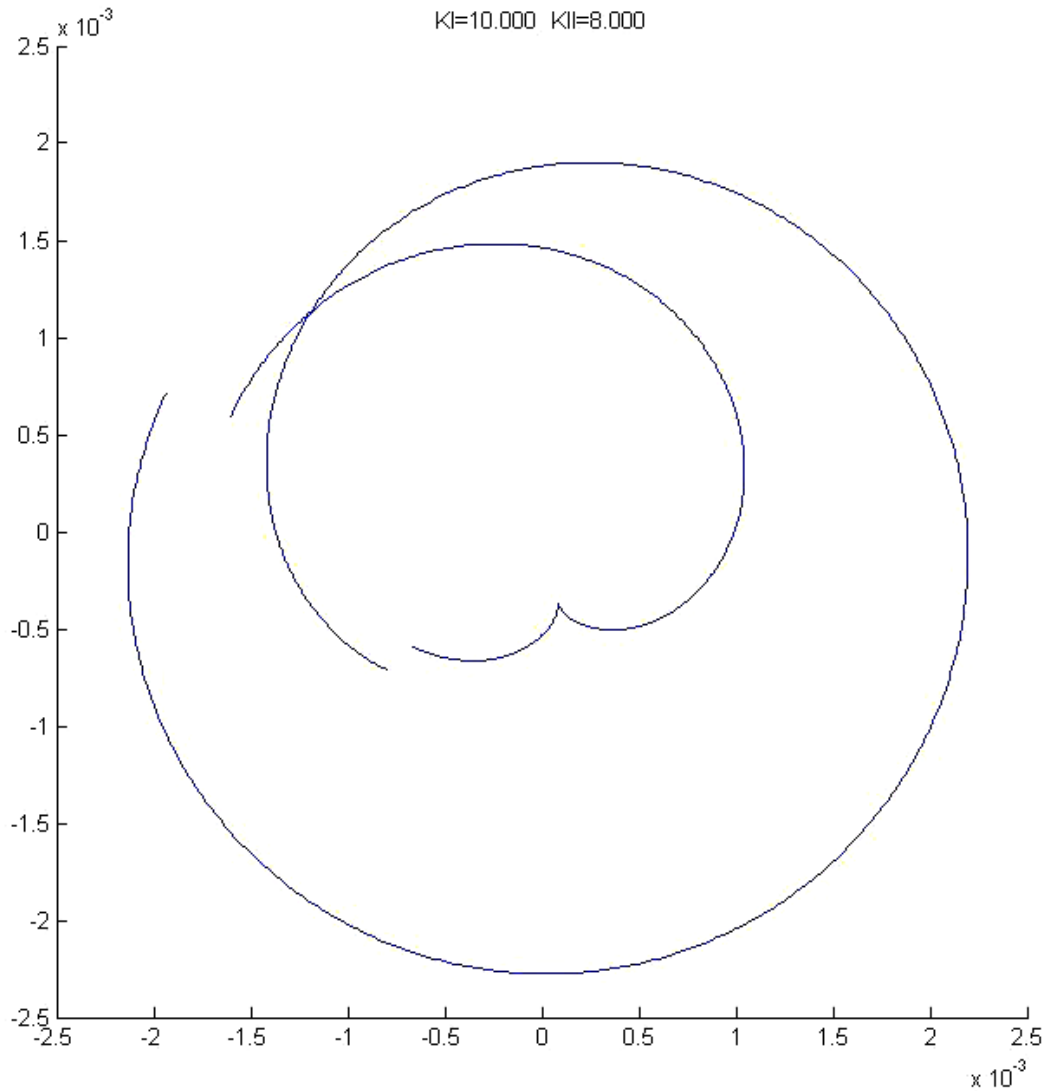


Σημειώνεται ότι στο υπό διερεύνηση paper δεν έχουν παρουσιαστεί καυστικές καμπύλες για συνδυασμό καταπόνησης της ρωγμής τύπου $-I$ και $-II$ ταυτόχρονα.

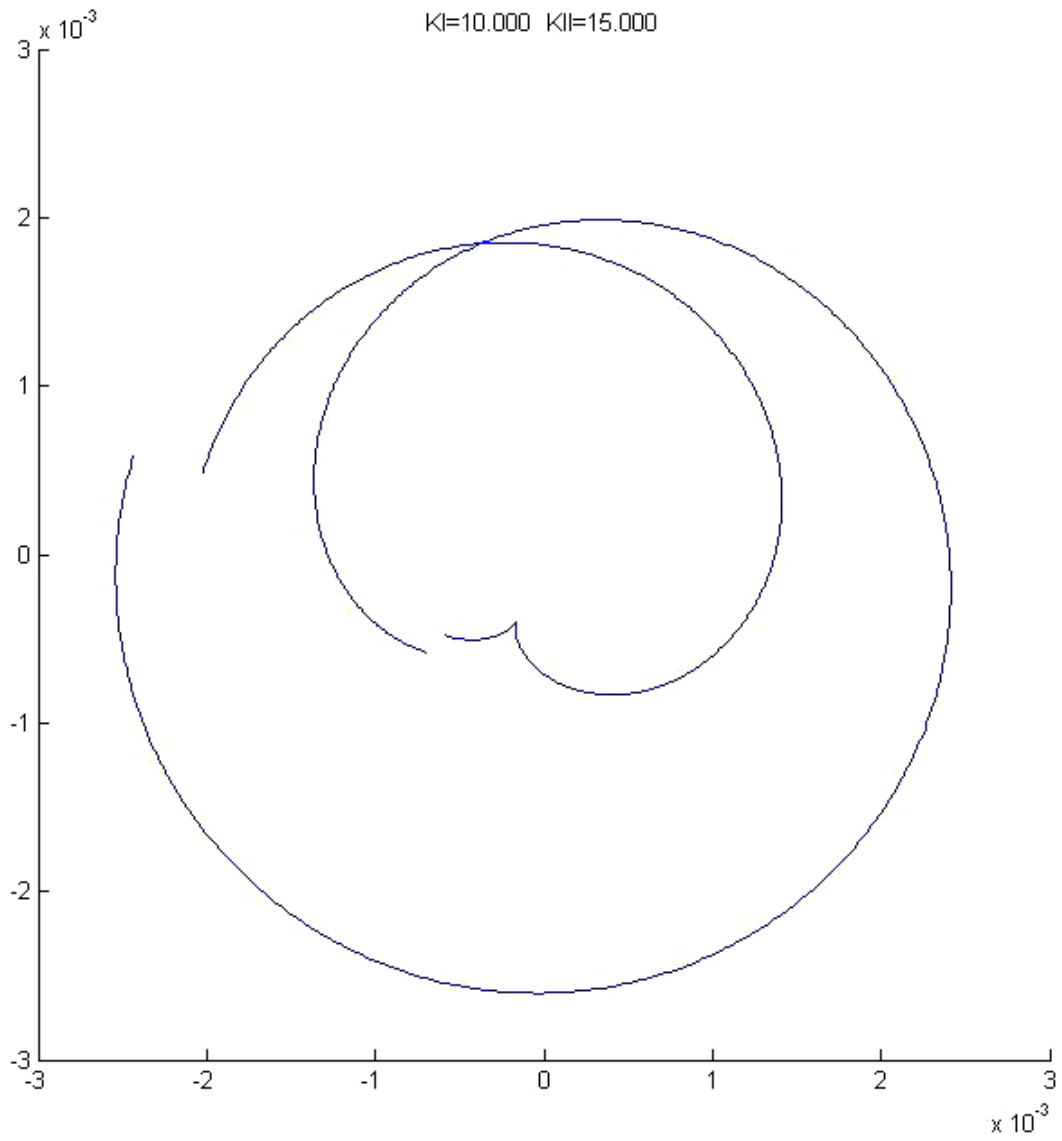
Με διαφοροποίηση των τιμών των K_I , K_{II} γίνεται εμφανής η επίδραση τους στη μορφή της καυστικής (όλες οι τιμές των συντελεστών εντάσεως των τάσεως δίνονται σε $N/m^{3/2}$):

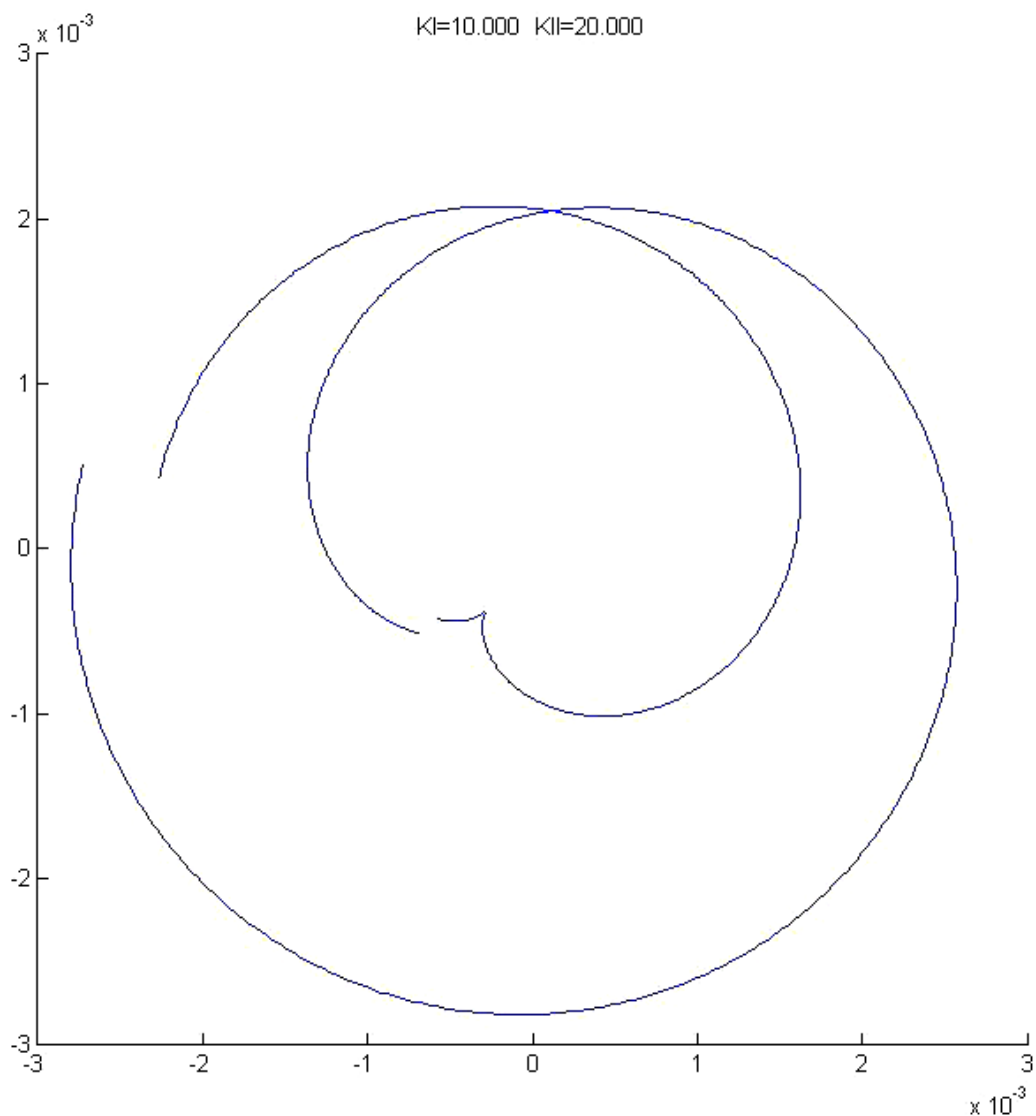






Αυτό που παρατηρείται είναι ότι αύξηση της τιμής του συντελεστή K_{II} έχει ως αποτέλεσμα την ολοένα και μεγαλύτερη απομάκρυνση των άκρων της εξωτερικής καυστικής καμπύλης και ταυτόχρονα την περιστροφή της εσωτερικής με ωρολογιακή φορά. Αυτό συνεχίζει και γίνεται και για αύξηση περαιτέρω του K_{II} ώστε να είναι πλέον μεγαλύτερο του K_I όπως χαρακτηριστικά φαίνεται και από τις επόμενες καυστικές καμπύλες.

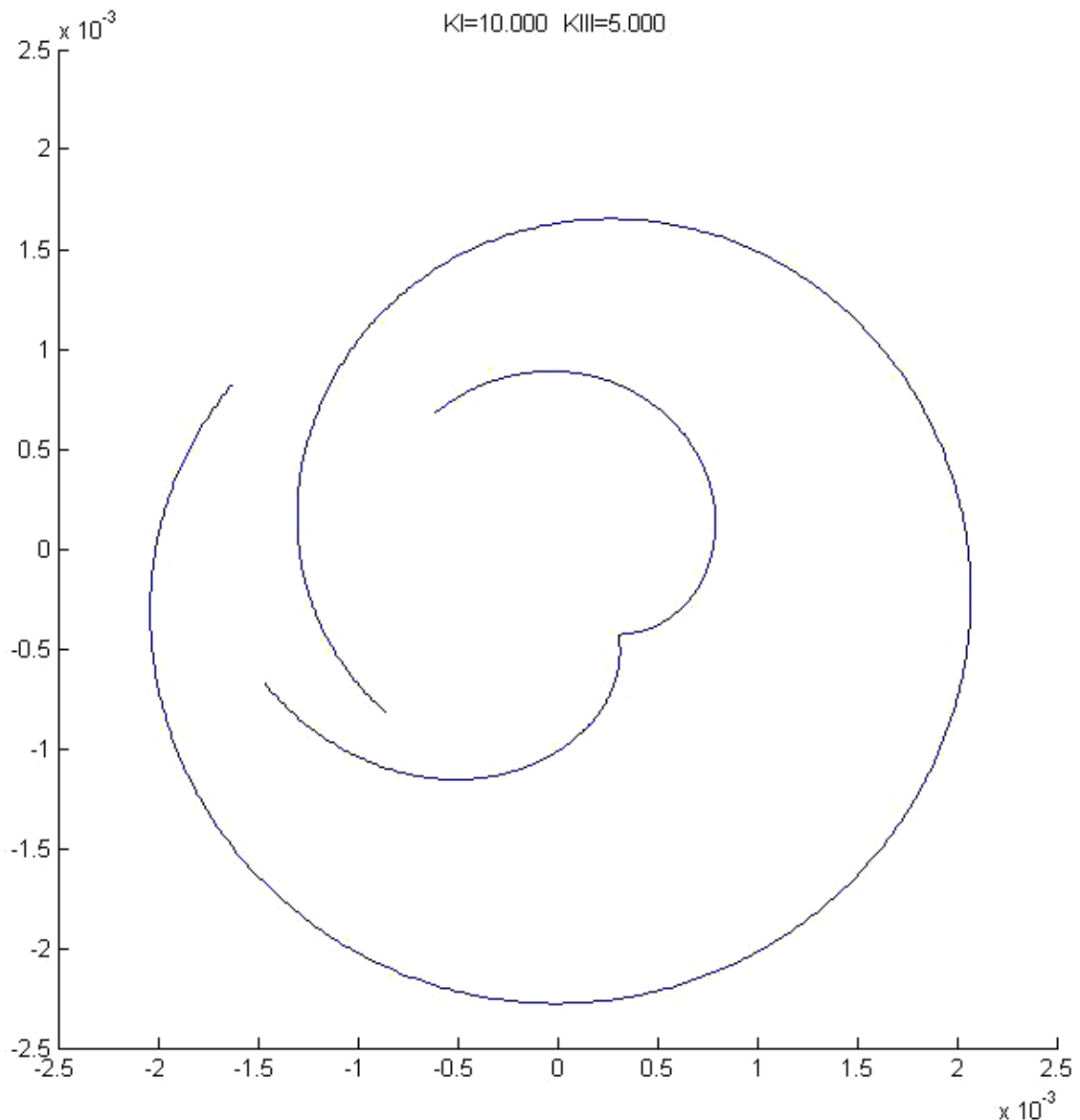


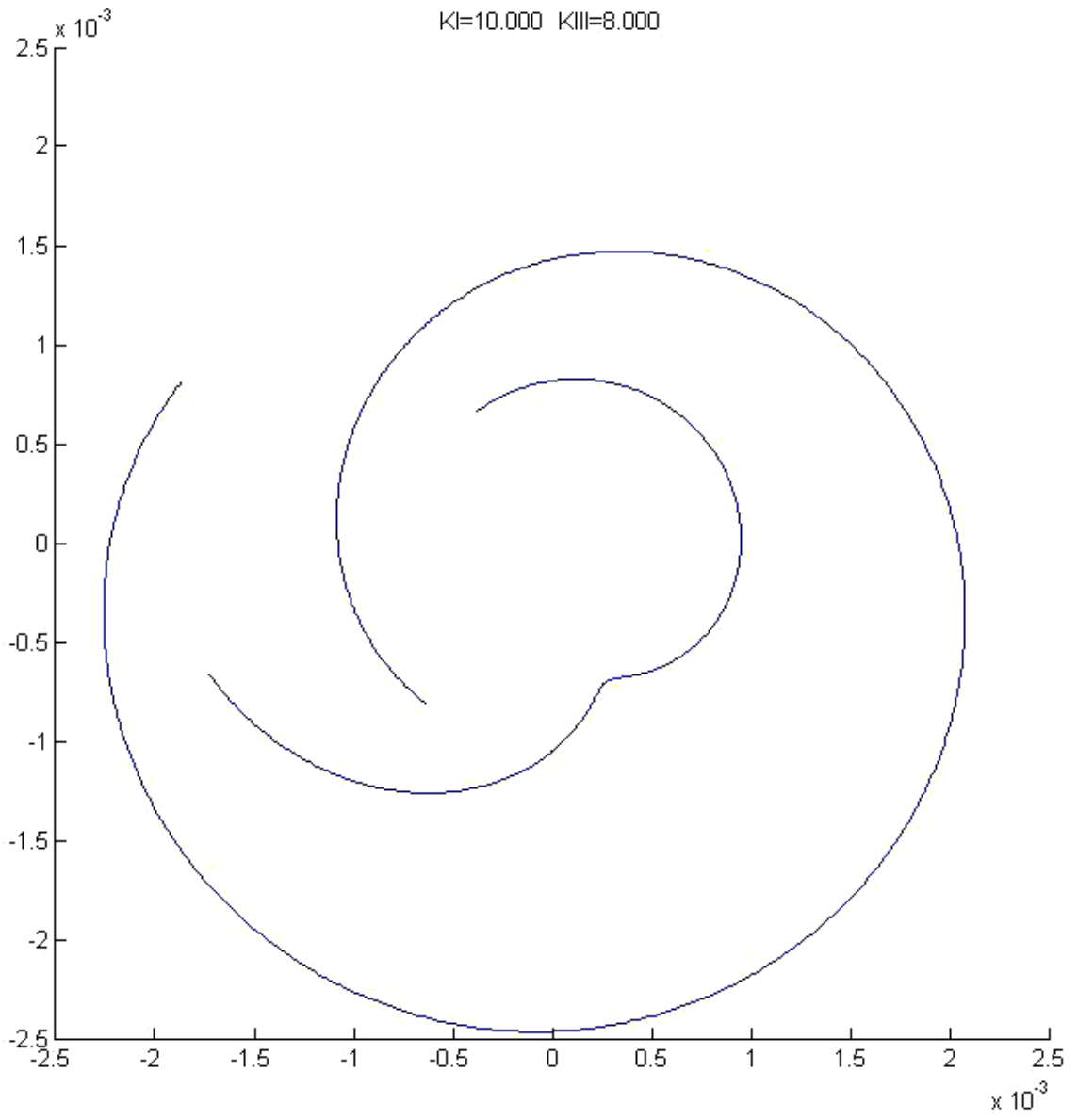


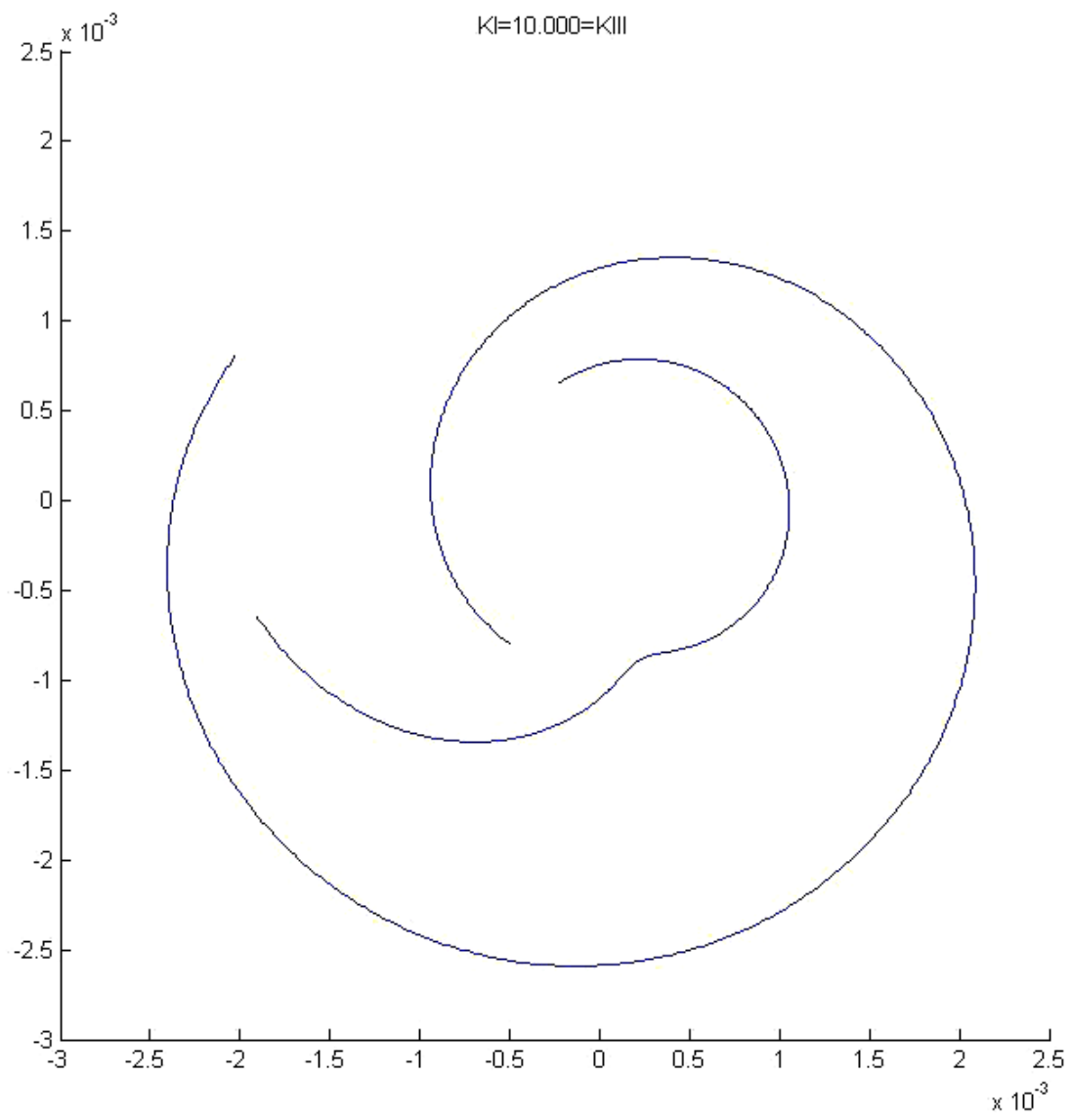
Τελικά συνεχίζοντας να αυξάνουμε το K_{II} , καταλήγουν οι καυστικές να έχουν τη μορφή που ταυτίζεται με εκείνη για καταπόνηση της ρωγμής μόνο με K_{II} . Αυτό συμβαίνει διότι η επίδραση του K_I γίνεται αμελητέα από ένα σημείο και μετά.

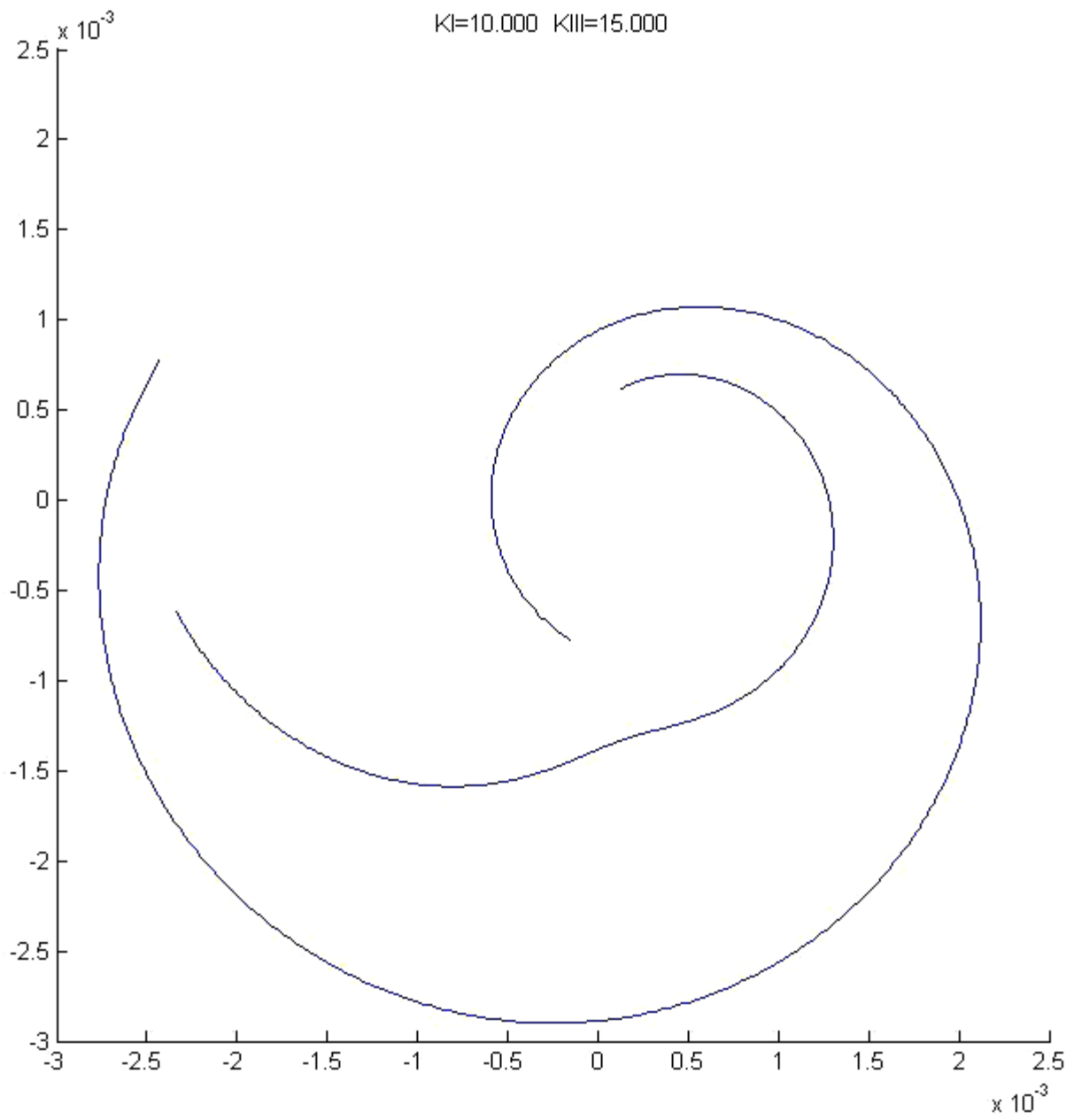
ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ ΤΥΠΟΥ –I και –III:

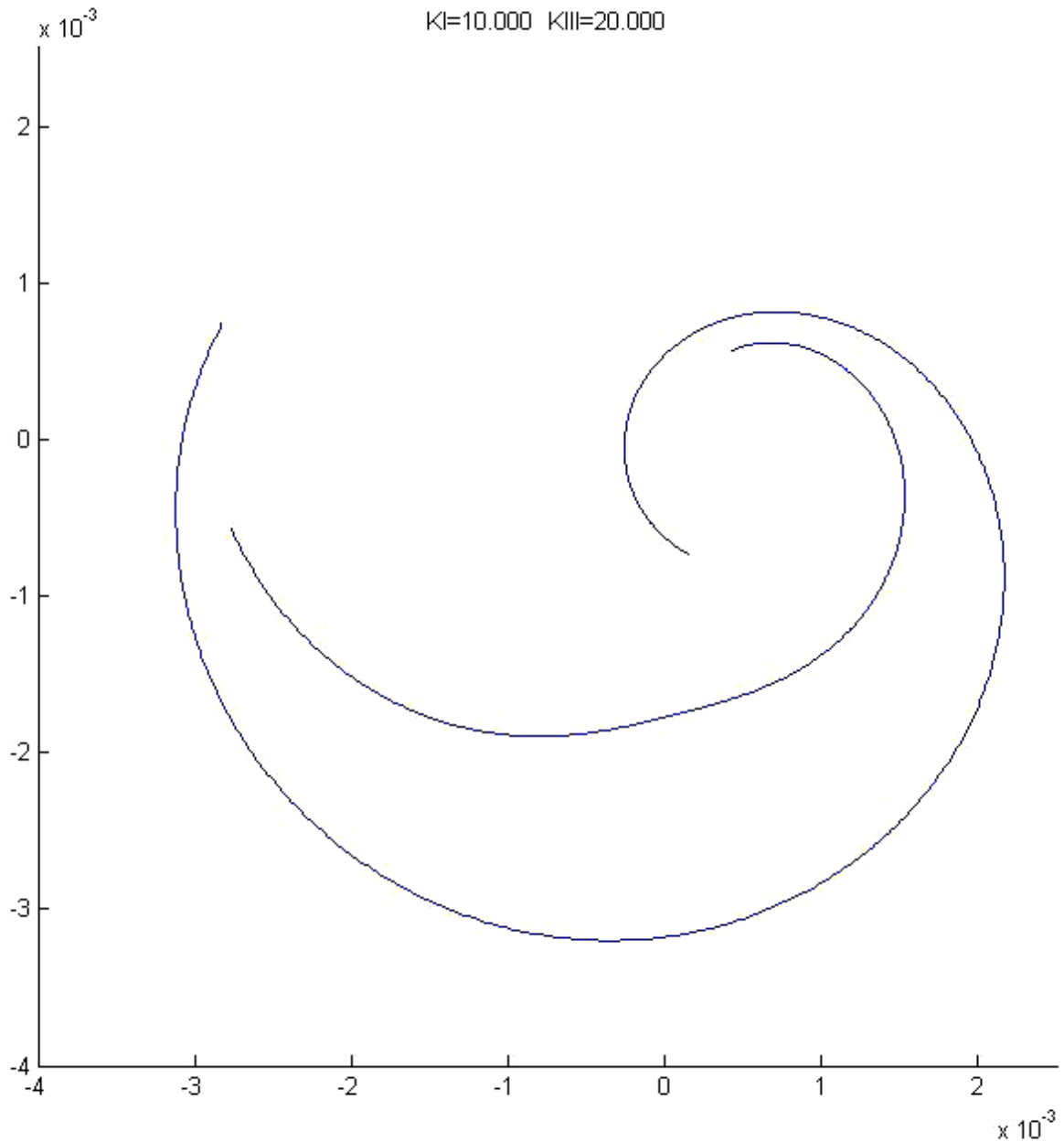
Θα παρουσιαστεί η επίδραση που έχει η αύξηση του K_{III} όμοια με την προηγούμενη περίπτωση. Ξεκινώντας από μικρές τιμές του K_{III} σε σχέση με το K_I , θα καταλήξουμε σε καυστικές που θα είναι πολύ κοντά στη μορφή των καυστικών που προκύπτουν από τύπου –III φόρτιση.



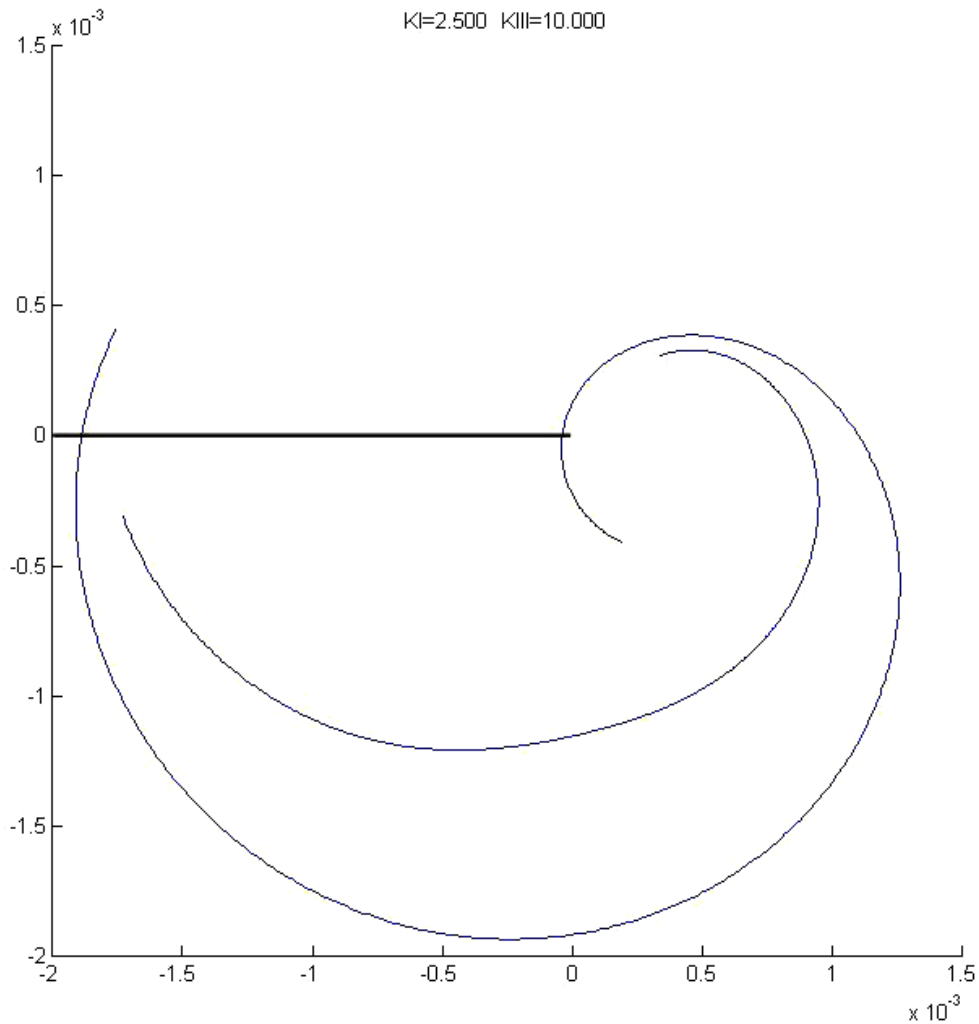








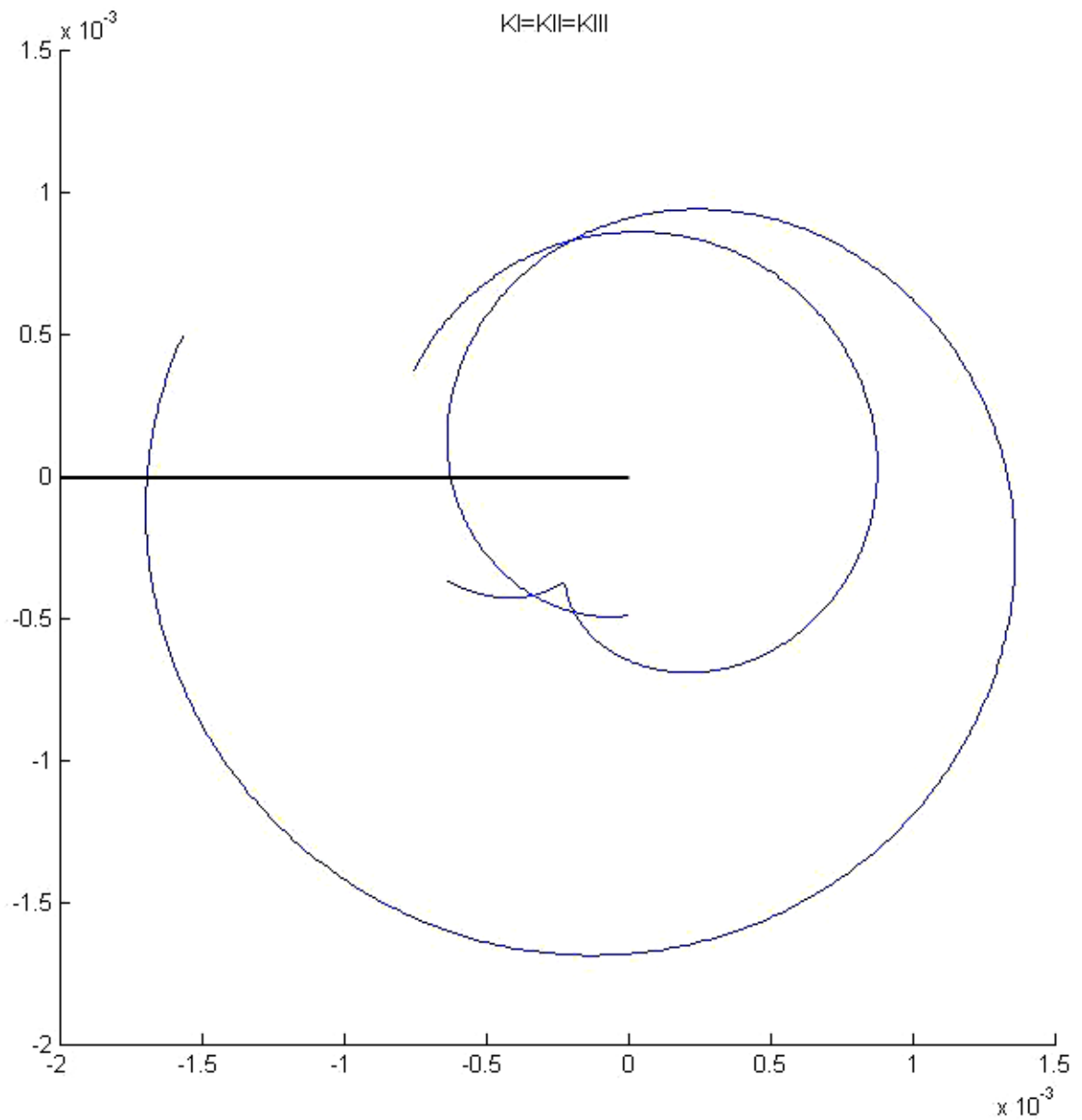
Παρατηρείται ότι σε σχέση με το σχήμα 4.4. (d) η μόνη διαφορά που υπάρχει ως προς τη μορφή των καυστικών είναι το γεγονός ότι η εσωτερική που δίνεται από το Matlab είναι ελαφρώς στραμμένη αντιωρολογιακά. Για να γίνει η σύγκριση και με το σχήμα 4.4. (c) πρέπει να παρουσιαστεί το ζεύγος καυστικών για $KI=2500 \text{ N/m}^{3/2}$ και $KIII=10000 \text{ N/m}^{3/2}$:



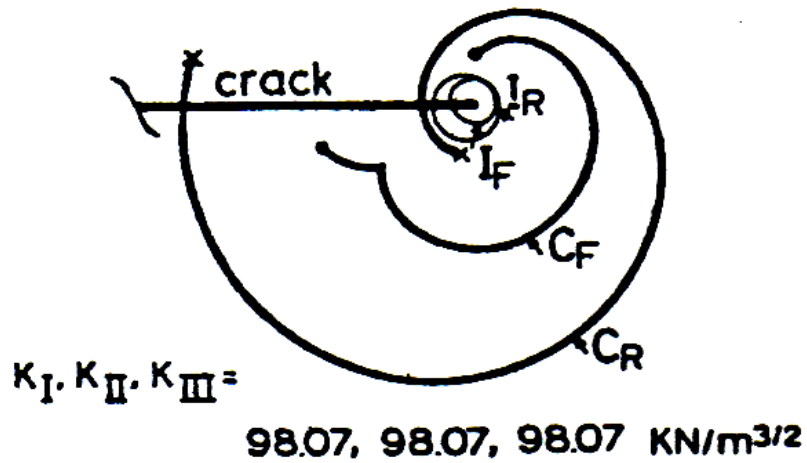
Υπάρχει σαφής ομοιότητα, αλλά και διαφορά στις λεπτομέρειες. Αρχικά παρατηρούμε ότι και στις δυο περιπτώσεις το ένα άκρο της κάθε καυστικής βρίσκεται στο θετικό μέρος του άξονα Y και το άλλο στο αρνητικό μέρος. Η διαφορά είναι ότι στην περίπτωση της καυστικής από το Matlab η εξωτερική καυστική δεν τέμνει σε κάποιο σημείο την εσωτερική κι επίσης τέμνει τον άξονα της ρωγμής κι όχι την προέκταση αυτού.

ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ ΤΥΠΩΝ -I, -II και -III:

Για $K_I=K_{II}=K_{III}= 5000 \text{ N/m}^{3/2}$ προκύπτει το ζεύγος των καυστικών:



Κι αντίστοιχα από το paper παρουσιάζεται :



Σχήμα 4.5

Είναι εμφανές ότι η μορφή των καυστικών στις δυο αυτές περιπτώσεις θα ταυτιζόταν αν οι δυο κλάδοι, της εσωτερικής και εξωτερικής καυστικής που δίνονται από Matlab, δεν έτεμναν ο ένας τον άλλο και μάλιστα κοντά στα αρχικά τους σημεία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο

ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ ΕΝΤΑΣΕΩΣ ΤΩΝ ΤΑΣΕΩΝ ΚΙ, ΚΙΙ, ΚΙΙΙ ΑΠΟ ΚΑΥΣΤΙΚΕΣ ΠΟΥ ΠΡΟΕΚΥΨΑΝ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ

5.1 ΓΕΝΙΚΑ

Όπως και το προηγούμενο κεφάλαιο έτσι και το συγκεκριμένο, είναι βασισμένο στο paper του καθηγητή Θεοχάρη. Παρουσιάζονται οι εξισώσεις και ο τρόπος υπολογισμού των συντελεστών εντάσεως των τάσεων χρησιμοποιώντας πειραματικά δεδομένα.

5.2 ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ

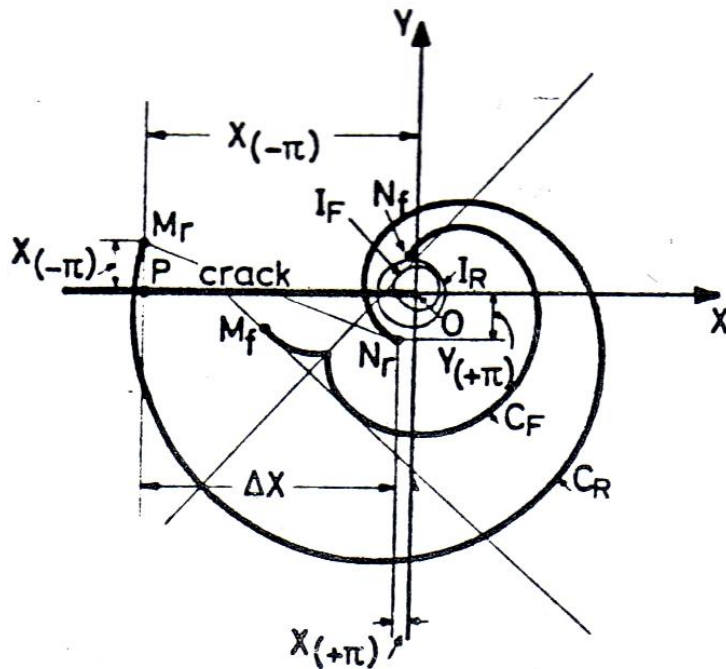
Για να ορίσουμε τις συντεταγμένες των ακραίων σημείων της καυστικής M_f , N_f και M_r , N_r (σχήμα 5.1), χρησιμοποιούμε στις εξισώσεις (4.19) και (4.20) τις τιμές $\theta = \pm\pi$ και προκύπτει:

Για $\theta=-\pi$

$$X(-\pi) = - \left(\lambda_m r_{0(-\pi)} + z_0 r_{0(-\pi)}^{-3/2} C_2 + z_0 r_{0(-\pi)}^{-1/2} C_3 \right) \quad (5.1.1)$$

$$Y(-\pi) = z_0 r_{0(-\pi)}^{-3/2} C_1 \quad (5.1.2)$$

$$\lambda_m^2 r_{0(-\pi)}^5 - A_3^2 r_{0(-\pi)}^2 - 2A_2 A_3 r_{0(-\pi)} - (A_1^2 + A_2^2) = 0 \quad (5.1.3)$$



Σχήμα 5.1 Θεωρητική καυστική για συνδυασμό τύπων I,II και III.

Για $\theta=\pi$

$$X(\pi) = -\lambda_m r_{0(\pi)} + z_0 r_{0(\pi)}^{-3/2} C_2 + z_0 r_{0(\pi)}^{-1/2} C_3 \quad (5.2.1)$$

$$Y(\pi) = -z_0 r_{0(\pi)}^{-3/2} C_1 \quad (5.2.2)$$

$$\lambda_m^2 r_{0(\pi)}^5 - A_3^2 r_{0(\pi)}^2 - 2A_2 A_3 r_{0(\pi)} - (A_1^2 + A_2^2) = 0 \quad (5.2.3)$$

Οι συντεταγμένες $X(\pm\pi)$, $Y(\pm\pi)$ των ακραίων σημείων της καυστικής αρκούν για τον υπολογισμό των τριών συντελεστών εντάσεως των τάσεων, καθώς και για τον υπολογισμό της ακτίνας r_0 των αντίστοιχων αρχικών καμπυλών. Επισημαίνεται ότι συνήθως χρησιμοποιούμε για τη μέτρηση των $X(\pm\pi)$, $Y(\pm\pi)$ την εξωτερική καυστική (C_r) μιας και είναι μεγαλύτερη και συνεπώς είναι ευκολότερες οι μετρήσεις.

Για $\theta=0$ οι συντεταγμένες δίνονται από τις εξισώσεις (5.3):

$$X(0) = \lambda_m r_{0(0)} + z_0 r_{0(0)}^{-3/2} C_1$$

$$Y(0) = z_0 r_{0(0)}^{-3/2} C_2 - z_0 r_{0(0)}^{-1/2} C_3$$

$$\lambda_m^2 r_{0(0)}^5 - A_3^2 r_{0(0)}^2 + 2A_2 A_3 r_{0(0)} - (A_1^2 - A_2^2) = 0$$

Από τις παραπάνω προκύπτει:

- (i) Η αρχική καμπύλη είναι κύκλος για $K_I, K_{II} \neq 0$ και $K_{III} = 0$ (εξίσωση 4.26)

$$r_{0I,II} = \left| \frac{3}{2} C_p K \right|^{2/5} \quad (5.4)$$

$$\text{με } C_p = \frac{z_0 dc}{(2\pi)^{1/2} G \lambda_m}, \quad K = (K_I^2 + K_{II}^2)^{1/2}$$

- (ii) Η αρχική καμπύλη για $K_I = K_{II} = 0$ και $K_{III} \neq 0$ δίνεται από την:

$$r_{0III} = \left| \frac{z_0 K_{III}}{(2\pi)^{1/2} G \lambda_m} \right|^{2/3} \quad (5.5)$$

(iii) Για $K_{III} \neq 0$ και K_I και/ή K_{II} διάφορο το μηδενός, η αρχική καμπύλη είναι κλειστή καμπύλη που μοιάζει με κύκλο και εκφράζεται από ένα πολυώνυμο πέμπτου βαθμού. Μπορεί να προκύψει από τις εξισώσεις (4.19) και (4.20) ότι και οι αρχικές και οι καυστικές καμπύλες, είναι περιοδικές, αφού η παράμετρος θ έχει περίοδο 2π . Επιπλέον η αρχική καμπύλη είναι κλειστή καμπύλη και συνεπώς όταν η γωνία θ παίρνει τις τιμές $-\pi$ ή $+\pi$ προκύπτει:

$$r_{0(-\pi)} = r_{0(+\pi)} = r_0 \quad (5.6)$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (5.1.2) και (5.2.2) εύκολα προκύπτει ότι $Y(-\pi)$ και $Y(+\pi)$ των ακραίων σημείων M και N της καυστικής εξαρτώνται αποκλειστικά από την τιμή K_I . Συγκεκριμένα ισχύει:

$$Y_{(-\pi)} = -Y_{(+\pi)} = z_0 r_{0(\pm\pi)}^{-3/2} C_1 = -\frac{z_0 c d K_I}{(2\pi)^{1/2} r_{0(\pm\pi)}^{3/2}} \quad (5.7)$$

Συνεπώς η τιμή του συντελεστή εντάσεως των τάσεων του τύπου I δίνεται:

$$K_I = \pm \frac{(2\pi)^{1/2} r_0^{3/2}}{z_0 c d} Y_{(\pm\pi)} \quad (5.8)$$

Όταν λοιπόν ο συντελεστής K_I ισούται με το μηδέν τότε τα ακραία σημεία των καυστικών βρίσκονται πάνω στον άξονα του X . Αυτό το γεγονός επιβεβαιώνεται και από τις θεωρητικές καυστικές που λάβαμε μέσω του matlab για τους τύπους II, III και συνδυασμό αυτών.

5.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ K_I , K_{II} , K_{III} ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ ΕΝΤΑΣΕΩΣ ΤΩΝ ΤΑΣΕΩΝ

Από τις σχέσεις (5.1.1) και (5.2.1) προκύπτει ότι η ακτίνα των αρχικών καμπυλών των καυστικών δίνεται από τη σχέση:

$$r_{0(\pm\pi)} = -\frac{X_{(-\pi)} + X_{(+\pi)}}{2\lambda_m} \quad (5.9)$$

όπου $X(-\pi)$ και $X(+\pi)$ είναι οι τετμημένες των ακραίων σημείων M, N της καυστικής και $r_{0(\pm\pi)}$ οι αντίστοιχες ακτίνες των αρχικών καμπυλών.

Χρησιμοποιώντας αυτές τις τιμές στη σχέση (5.8) λαμβάνουμε την τιμή του K_I από τη σχέση:

$$K_I = \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}} Y_{(-\pi)}}{z_0 c d} \left[-\frac{X_{(-\pi)} + X_{(\pi)}}{2\lambda_m} \right]^{3/2} \quad (5.10)$$

Για να καθορίσουμε τις σχέσεις για K_{II} και K_{III} εξετάζουμε τις σχέσεις (5.1.1), (5.1.3) και (5.2.1). Από αυτό το σύστημα εξισώσεων προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_0} C_2 + C_3 &= \frac{r_0^{1/2}}{z_0} \left[\frac{X_{(\pi)} - X_{(-\pi)}}{2} \right] \\ \frac{3}{r_0} C_2 + C_3 &= -\frac{2}{z_0} \left[\lambda_m^2 r_0^3 - \frac{A_1^2}{r_0^2} \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (5.11)$$

όπου η ακτίνα r_0 δίνεται από τη σχέση (5.9) και A_1 από τη σχέση (4.22.α).

Έτσι πλέον το σύστημα μετασχηματίζεται σε:

$$C_2 = -\frac{r_0}{z_0} \left[\lambda_m^2 r_0^3 - \frac{A_1^2}{r_0^2} \right]^{1/2} - \frac{r_0^{3/2}}{2z_0} \left[\frac{X_{(\pi)} - X_{(-\pi)}}{2} \right] \quad (5.12)$$

$$C_3 = \frac{3r_0^{1/2}}{2z_0} \left[\frac{X_{(\pi)} - X_{(-\pi)}}{2} \right] + \frac{1}{z_0} \left[\lambda_m^2 r_0^3 - \frac{A_1^2}{r_0^2} \right]^{1/2} \quad (5.13)$$

Μετά τον υπολογισμό των C_2 , C_3 υπολογίζονται τα K_{II} , K_{III} αντίστοιχα από τις εξισώσεις (4.21), που παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο

κεφάλαιο.

5.4 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΩΝ

5.4.1.

Στο υπό μελέτη paper υπάρχει παρουσίαση δεδομένων από παράδειγμα πειραματικής διαδικασίας και η εύρεση των συντελεστών εντάσεως των τάσεων.

Συγκεκριμένα γίνεται αναφορά σε πλάκα δοκιμίου από Plexiglas πάχους $d=0.01$ m . Ο συντελεστής μεγέθυνσης έχει τιμή 4 και η απόσταση $z_0=0.6$ m . Δίνονται οι οπτικές σταθερές του συγκεκριμένου υλικού:

$$c_f = \frac{\nu}{E} = \frac{0.33}{3.138 \times 10^6} \text{ m}^2/\text{KN} \quad \text{και} \quad c_r = -3.24 \times c_f$$

Δίνεται επίσης ότι για φόρτιση με $KI=KII=KIII=98.07$ KN/m^{3/2} , ύστερα από τις μετρήσεις στην καυστική τα αποτελέσματα είχαν ως εξής:

(i) Οι θεωρητικές τιμές των συντεταγμένων των ακραίων σημείων της καυστικής:

$$\begin{aligned} X_{(-\pi)} &= -0.002654 \text{ m} & X_{(\pi)} &= 0.00007356 \text{ m} \\ Y_{(-\pi)} &= -0.0008525 \text{ m} & Y_{(\pi)} &= 0.0008525 \text{ m} \end{aligned}$$

(ii) Οι πειραματικές τιμές μετρήθηκαν:

$$\begin{aligned} X_{(-\pi)} &= -0.00270 \text{ m} & X_{(\pi)} &= 0.000072 \text{ m} \\ Y_{(-\pi)} &= -0.00086 \text{ m} & Y_{(\pi)} &= 0.00086 \text{ m} \end{aligned}$$

Με βάση τις πειραματικές τιμές λοιπόν η σχέση (5.9) δίνει:

$r_{0(\pm\pi)} = 0.0003285 \text{ m}$ (σε αντίθεση με την θεωρητική τιμή που είναι ίση με 0.0003224)

Τελικά, από τις σχέσεις (5.10), (5.12) και (5.13) παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τους συντελεστές εντάσεων των τάσεων ως εξής:

$$K_I = 101.79 \text{ KN/m}^{3/2}$$

$$K_{II} = 111.60 \text{ KN/m}^{3/2}$$

$$K_{III} = 103.95 \text{ KN/m}^{3/2}$$

Σημειώνεται μάλιστα ότι σε σχέση με τις θεωρητικές τιμές υπάρχει απόκλιση κατά 4.00% όσο αφορά το K_I , 13.80% για K_{II} και 6% για K_{III} . Τονίζεται μάλιστα ότι ενώ στην περίπτωση του K_{II} είναι σχετικά υψηλή η απόδοση, εντούτοις στους άλλους δυο συντελεστές είναι ικανοποιητικά χαμηλή.

Έγινε προσπάθεια να επαληθευτούν τα άνωθεν αποτελέσματα χρησιμοποιώντας το matlab και τα ίδια δεδομένα που παρατίθενται και παραπάνω. Η ρουτίνα του υπολογισμού και τα αποτελέσματα έχουν ως εξής (επισημαίνεται ότι δεν δίνεται μονάδα μέτρησης του μέτρου ελαστικότητας E του υλικού αλλά προφανώς δίνεται σε KPa):

$$d=0.01;$$

$$z=0.6;$$

$$E=3.138*(10^6);$$

$$\nu=0.33;$$

$$cf=1.05*(10^{(-7)});$$

$$cr=-3.24*cf ;$$

$$G = E / (2 * (1 + \nu));$$

$$l_m = 4$$

$$Y_1 = -0.00086;$$

$$X_1 = -0.00270;$$

$$X_2 = -0.000072;$$

$$r = -(X_1 + X_2) / (2 * l_m)$$

$$K_I = (((2 * \pi)^{0.5} * Y_1) / (z * c * r * d)) * (-(X_1 + X_2) / (2 * l_m))^{1.5}$$

$$A_1 = (3 * z * c * r * d * K_I) / (2 * ((2 * \pi)^{0.5}));$$

$$C_2 = ((-r/z) * (((l_m^2 * (r^3)) - ((A_1^2) / (r^2)))^{0.5})) - ((r^{1.5}) / (2 * z)) * ((X_2 - X_1) / 2);$$

$$C_3 = (((3 * (r^{0.5})) / (2 * z)) * ((X_2 - X_1) / 2)) + ((1/z) * (((l_m^2 * (r^3)) - ((A_1^2) / (r^2)))^{0.5}));$$

$$K_{II} = (C_2 * ((2 * \pi)^{0.5})) / (c * r * d)$$

$$K_{III} = (C_3 * G * ((2 * \pi)^{0.5})) / 2$$

Τα αποτελέσματα που λήφθηκαν ήταν:

$$r = 3.4650e-004 \text{ m}$$

$$K_I = 6.8117 \text{ KN/m}^{3/2}$$

$$K_{II} = 9.2184 \text{ KN/m}^{3/2}$$

$$K_{III} = 113.6597 \text{ KN/m}^{3/2}$$

Συνεπώς $r_0 = 0.0003465 \text{ m}$, η τιμή του οποίου είναι διαφορετική από την υπολογισμένη πειραματικά αλλά και από την θεωρητική τιμή όπως αυτή παρουσιάζεται στο paper. Η απόκλιση των τιμών βέβαια είναι μικρής τάξης μεγέθους.

Δεν ισχύει το ίδιο και για τις τιμές των συντελεστών εντάσεως των τάσεων. Παρατηρούμε ότι οι διαφορές στις περιπτώσεις των K_I , K_{II} είναι

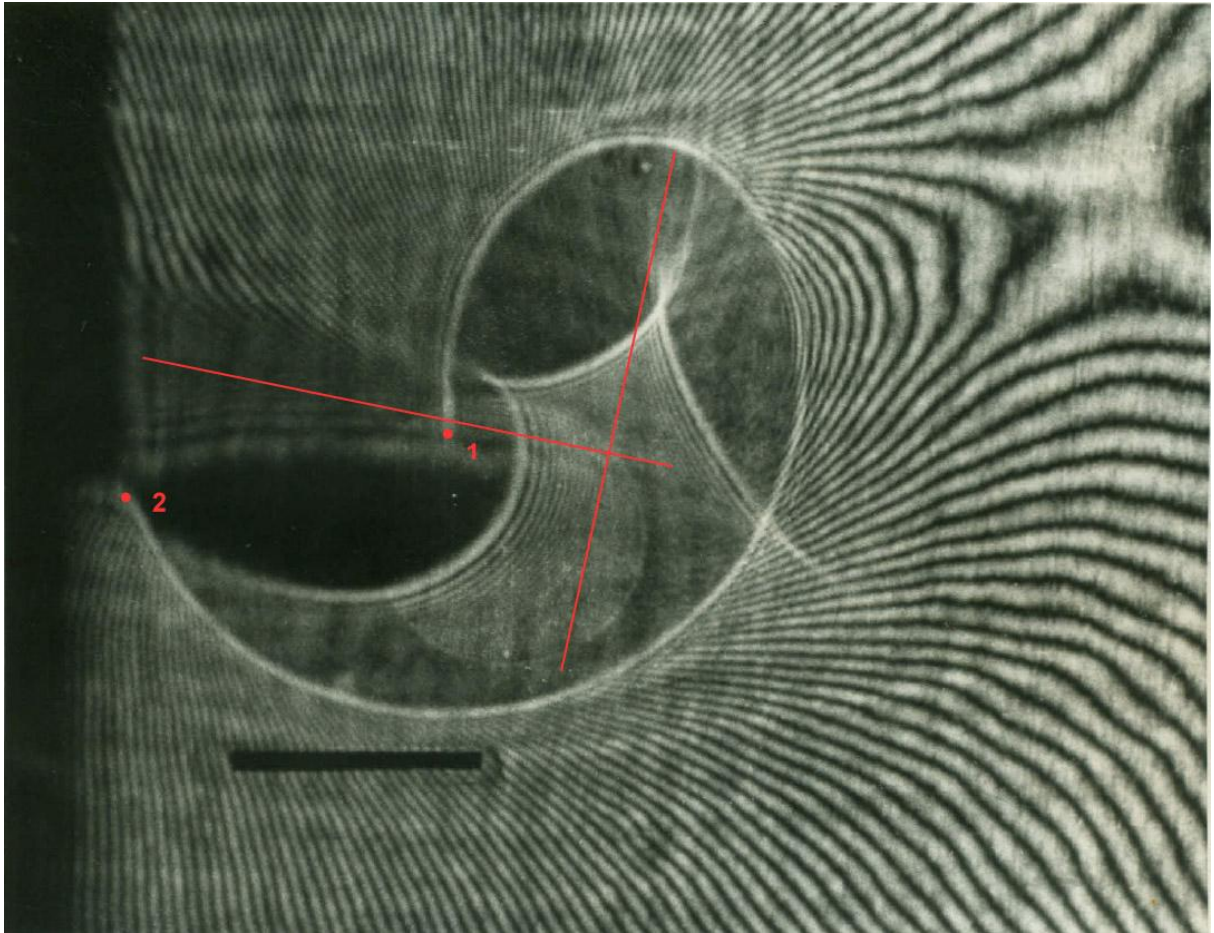
πολύ μεγάλες, σε σχέση με τις τιμές που παρουσιάζονται στο paper. Μόνο στην περίπτωση του K_{III} έχουμε σχετική σύγκλιση.

Σημειώνεται επίσης ότι οι τιμές των $X(-\pi)$, $X(\pi)$, $Y(-\pi)$ και $Y(\pi)$ που παρουσιάζονται να έχουν μετρηθεί από την εικόνα της καυστικής στο paper, έχουν ακρίβεια έως και $8^{ου}$ δεκαδικού ψηφίου, όπως χαρακτηριστικά φαίνεται στην περίπτωση του $X_{(\pi)}=0.00007356$ m. Αμφισβητείται το κατά πόσο υπήρχε η δυνατότητα μέτρησης της συγκεκριμένης απόστασης με τόσο μεγάλη ακρίβεια.

5.4.2

Είναι αποδεδειγμένο και θεωρητικά και πειραματικά ότι όταν η διερχόμενη καυστική, που λαμβάνουμε στο πίσω πέτασμα, είναι συμμετρική ως προς τον άξονα της ρωγμής, τότε δεν υπάρχει παραμόρφωση τύπου $-II$ στη ρωγμή. Στα επόμενα δύο παραδείγματα που ακολουθούν η διερχόμενη καυστική είναι συμμετρική και συνεπώς $K_{II}=0$.

Στο σχήμα 5.2 παρουσιάζεται η μορφή της καυστικής, καθώς και τα δυο ακραία σημεία της. Ο «μάρτυρας», που φαίνεται με μαύρο χρώμα στο κάτω μέρος της καυστικής, είναι μήκους 2 cm και θα βοηθήσει να γίνει η αναγωγή κατά τη μέτρηση πάνω στη φωτογραφία των $X_{(-\pi)}$, $X_{(\pi)}$ και $Y_{(-\pi)}$ που απαιτούνται για τον υπολογισμό των συντελεστών εντάσεως των τάσεων.



Σχήμα 5.2

Σύμφωνα με τον τρόπο που παρουσιάζεται στο σχήμα 5.1 για την μέτρηση των συντεταγμένων των ακραίων σημείων της καυστικής παίρνουμε, μετρώντας από τη φωτογραφία που παρατίθεται στο σχήμα 5.2:

$X_{(-\pi)} = -6.1 \text{ cm}$ (απόσταση από την συμβολή των αξόνων για το σημείο 2). Επειδή μετρώντας τον μάρτυρα έχουμε ότι το μήκος του είναι ίσο με 3.3 cm , συμπεραίνουμε ότι η πραγματική τιμή του $X_{(-\pi)}$ είναι:

$$X_{(-\pi)} = 2 * (-6.1 / 3.3) = -3.697 \text{ cm} = -0.03697 \text{ m}$$

Αντίστοιχα η μετρίσιμη τιμή του $X_{(\pi)} = -2.1 \text{ cm}$ (σημείο 1) και με αναγωγή έχουμε

$$X_{(\pi)} = -1.273 \text{ cm} = -0.01273 \text{ m}$$

και

$$Y_{(-\pi)} = 2 * (-1.8/3.2) = -1.125 \text{ cm} = -0.01125 \text{ m}$$

Τα στοιχεία που έχουμε για το δοκίμιο και τις σταθερές έχουν ως εξής:

Υλικό δοκιμίου Lexan. Συνεπώς:

$$\nu = 0.36$$

$$E = 2.8 \text{ GPa}$$

$$c_f = 1.286 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{N}$$

$$c_r = -2.04 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{N}$$

$$\text{πάχος δοκιμίου } d = 0.003 \text{ m}$$

$$\text{Εστιακές αποστάσεις } z_0 = 1.72 \text{ m}, z_i = 0.54 \text{ m}$$

Επειδή $K_{II} = 0$, συνεπώς και $C_2 = 0$. Όμως τότε προκύπτει:

$$0 = -\frac{r_0}{z_0} \left[\lambda_m^2 r_0^3 - \frac{A_1^2}{r_0^2} \right]^{1/2} - \frac{r_0^{3/2}}{2z_0} \left[\frac{X(\pi) - X(-\pi)}{2} \right] \quad (\alpha)$$

$$C_3 = \frac{3r_0^{1/2}}{2z_0} \left[\frac{X(\pi) - X(-\pi)}{2} \right] + \frac{1}{z_0} \left[\lambda_m^2 r_0^3 - \frac{A_1^2}{r_0^2} \right]^{1/2} \quad (\beta)$$

$$\text{Από την } (\alpha) \text{ όμως έχουμε: } \frac{1}{z_0} \left[\lambda_m^2 r_0^3 - \frac{A_1^2}{r_0^2} \right]^{1/2} = -\frac{r_0^{1/2}}{2z_0} \left[\frac{X(\pi) - X(-\pi)}{2} \right]$$

Αντικαθιστώντας στη (β) τελικά προκύπτει:

$$\begin{aligned} C_3 &= \frac{3r_0^{1/2}}{2z_0} \left[\frac{X(\pi) - X(-\pi)}{2} \right] - \frac{r_0^{1/2}}{2z_0} \left[\frac{X(\pi) - X(-\pi)}{2} \right] = \\ &= \frac{r_0^{1/2}}{z_0} \left[\frac{X(\pi) - X(-\pi)}{2} \right] \end{aligned}$$

το οποίο όμως ισούται και με $\frac{2K_{III}}{G(2\pi)^{1/2}}$.

Συνεπώς από matlab:

$$d=0.003;$$

$$z_o=1.72;$$

$$z_i=0.54;$$

$$E=2.8*(10^9);$$

$$\nu=0.36;$$

$$c_r=(-2.04)*(10^{(-10)});$$

$$G= E/(2*(1+\nu));$$

$$l_m=(z_o+z_i)/z_i;$$

$$Y_1=-0.01125;$$

$$X_1=-0.03697;$$

$$X_2=-0.01273;$$

$$r=(-(X_1+X_2))/(2*l_m)$$

$$K_I=(((2*\pi)^{0.5}*Y_1)/(z_o*c_r*d))*((-X_1+X_2)/(2*l_m))^{1.5}$$

$$A_1=(3*z_o*c_r*d*K_I)/(2*((2*\pi)^{0.5}));$$

$$C_3=((r^{0.5})/z_o)*((X_2-X_1)/2);$$

$$K_{III}=(C_3*G*((2*\pi)^{0.5}))/2$$

Τα αποτελέσματα είναι τα εξής:

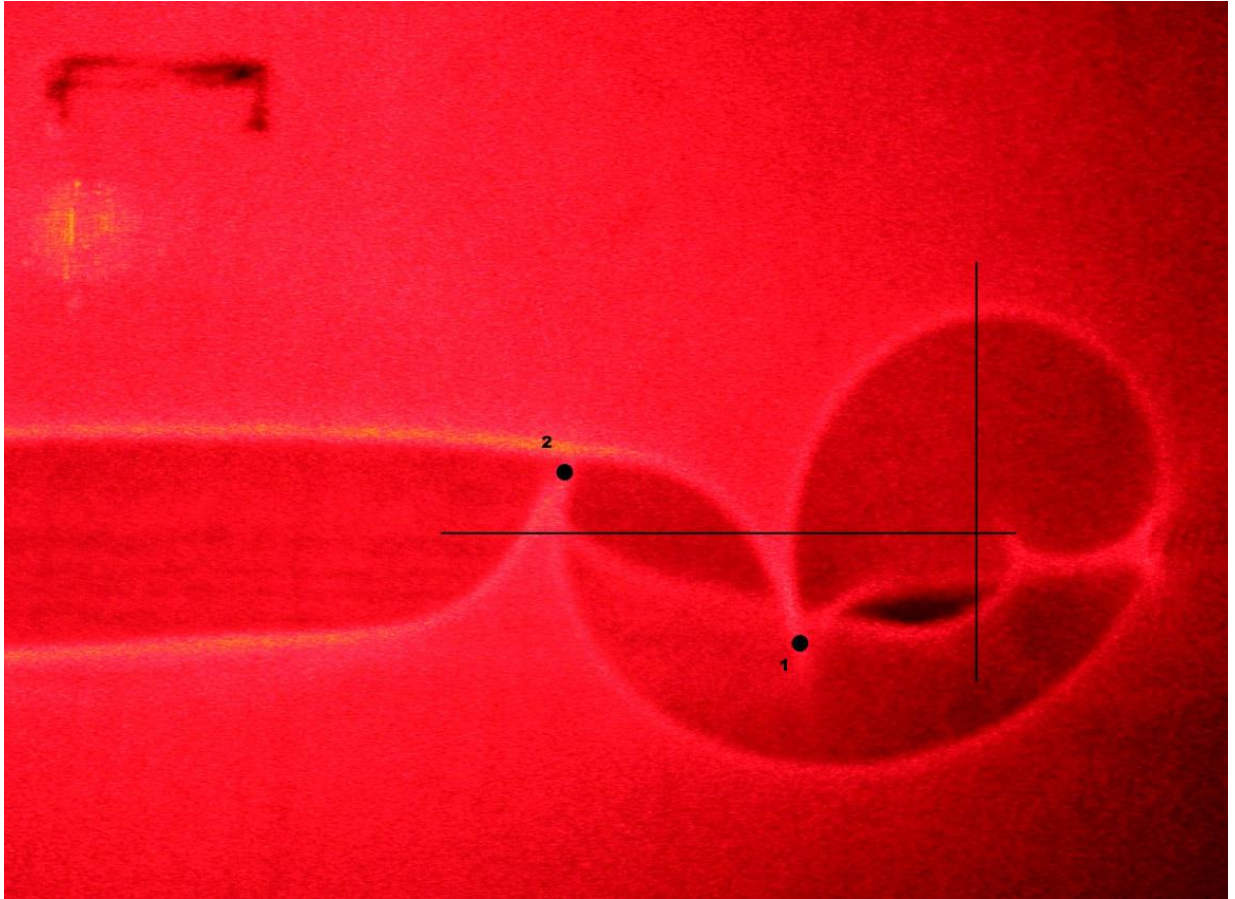
$$r = 0.0059 \text{ m}$$

$$K_I = 1.2257e+007 \text{ N/m}^{3/2}$$

$$K_{III} = 7.0053e+005 \text{ N/m}^{3/2}$$

Χρησιμοποιώντας, όπως παραπάνω, φωτογραφία καυστικής από πείραμα της υποψήφιας διδάκτορος του τομέα Μηχανικής Φαίδρας Θ.

Γιβαννάκη, εξετάζουμε σε δεύτερο παράδειγμα αν λειτουργεί η πειραματική μέθοδος υπολογισμού των συντελεστών εντάσεως των τάσεων K_I , K_{II} , K_{III} .



Τα νέα δεδομένα με τα οποία τροφοδοτήθηκε το πρόγραμμα είναι:

$$d= 0.004 \text{ m}$$

$$z_o=1.735 \text{ m}$$

$$z_i=0.21\text{m}$$

κι επειδή το υλικό του δοκιμίου είναι Plexiglas ισχύει:

$$\nu=0.34$$

$$E= 3.4 \text{ GPa}$$

$$c_f=1 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{N}$$

$$cr = -1.70 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{N}$$

Υπολογίζοντας από την εικόνα και με δεδομένο ότι ο «μάρτυρας» είναι 2 cm προκύπτει:

$X_{(\pi)} = -2.4 \text{ cm}$ (απόσταση από την συμβολή των αξόνων για το σημείο 1).
Επειδή μετρώντας τον μάρτυρα έχουμε ότι το μήκος του είναι ίσο με 2.7cm, συμπεραίνουμε ότι η πραγματική τιμή του $X_{(-\pi)}$ είναι:

$$X_{(\pi)} = 2 * (-2.4/2.7) = -1.778 \text{ cm} = -0.01778 \text{ m}$$

Αντίστοιχα η μετρίσιμη τιμή του $X_{(-\pi)} = -5.6 \text{ cm}$ και με αναγωγή έχουμε

$$X_{(-\pi)} = -4.148 \text{ cm} = -0.04148 \text{ m}$$

και

$$Y_{(-\pi)} = 2 * (0.8/2.7) = 0.5926 \text{ cm} = 0.005926 \text{ m}$$

Τα αποτελέσματα είναι:

$$r = 0.0032 \text{ m}$$

$$KI = -2.2782e+006 \text{ N/m}^{3/2}$$

$$KIII = 6.1424e+005 \text{ N/m}^{3/2}$$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

- Η θεωρητική μέθοδος αποτύπωσης καυστικών καμπυλών όπως αυτή παρουσιάζεται στο κεφάλαιο 4 λειτουργεί ικανοποιητικά. Πρέπει να τονιστεί όμως ότι υπάρχει πιθανότητα, για συνδυασμούς τιμών των συντελεστών εντάσεως των τάσεων K_I , K_{II} , K_{III} και των διαφορών μεταβλητών ή σταθερών, οι οποίες χρησιμοποιούνται στις εξισώσεις από τις οποίες προκύπτουν οι καυστικές, να μην είναι δυνατόν να υπάρξουν συνεχείς καμπύλες. Αυτό συμβαίνει διότι υπάρχει πιθανότητα να μην έχει πραγματική θετική λύση η εξίσωση:

$$\lambda_m^2 r_0^5 - A_3^2 r_0^2 + 2|A|A_3 \sin(\theta + \omega)r_0 - |A|^2 = 0$$

από την οποία προκύπτει η ακτίνα της αρχικής καμπύλης της καυστικής. Σε μια τέτοια περίπτωση δεν μπορούμε να αποφανθούμε, με αυτή τη μέθοδο και με τις συγκεκριμένες εξισώσεις, για τη μορφή των καυστικών.

- Στη σχέση (5.13) υπάρχει η πιθανότητα η υπόριζη ποσότητα

$\left[\lambda_m^2 r_0^3 - \frac{A_1^2}{r_0^2} \right]$ να παίρνει αρνητική τιμή. Σε μια τέτοια περίπτωση η μέθοδος δεν μπορεί να δώσει αποτελέσματα σε ότι αφορά τον πειραματικό προσδιορισμό των τιμών των συντελεστών εντάσεως των τάσεων. Δεν μπορούμε να αποφανθούμε ούτε σχετικά με το εύρος των τιμών των μεταβλητών της υπόριζης ποσότητας, για τις οποίες παίρνει αρνητικές τιμές επειδή:

στη σχέση υπεισέρχεται η μεταβλητή A_1 , η οποία δίνεται από τη σχέση

$$A_1 = \frac{3z_0 cdK_I}{2(2\pi)^{1/2}}$$

κι από την οποία είναι εμφανές ότι υπάρχει εξάρτηση από τον συντελεστή K_I .

Με τη σειρά του ο συντελεστής K_I , όπως παρουσιάστηκε στη σχέση (5.10):

$$K_I = \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}} Y_{(-\pi)}}{z_0 cd} \left[-\frac{X_{(-\pi)} + X_{(\pi)}}{2\lambda_m} \right]^{3/2}$$

εξαρτάται από : $X_{(-\pi)}, X_{(\pi)}, Y_{(-\pi)}$. Συνεπώς υπάρχει γραμμική εξάρτηση μεταξύ A_1, K_I καθώς και μεταξύ των K_I και $Y_{(-\pi)}$. Όμως δεν ισχύει το ίδιο για $X_{(-\pi)}, X_{(\pi)}$ και K_I .

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- 1. Γ.Α Παπαδόπουλος, Πειραματική Μηχανική των Θραύσεων-Οπτικές Μέθοδοι Ανάλυσης των Τάσεων. Εκδ. Κλειδάριθμος, Αθήνα 2007.**
- 2. G.A. Papadopoulos, FRACTURE MECHANICS, The Experimental Method of Caustics and The Det.-Criterion of Fracture, Springer-Verlag, London, 1993.**
- 3. P.S. Theocaris, The Reflected Caustics Method for The Evaluation of Mode III Stress Intensity Factor, Int. J. Mech. Sci. Vol. 23, pp. 105-117, 1981.**
- 4. Φ. Θ. Γιβαννάκη , Μελέτη στη διάδοση της ρωγμής υπό στατικά και δυναμικά φορτία, Διδακτορική Διατριβή, Αθήνα, 2013.**
- 5. M. Kalechman, Practical Matlab Basics for Engineers, New York, USA, 2009.**
- 6. E. W. Gekeler, Mathematical Methods for Mechanics, Heidelberg, Germany, 2008.**