ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ΕΥΡΩΠΑΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ

(CURRENCY OPTIONS, BINARY OPTIONS, COMPOUND OPTIONS, CHOOSER OPTIONS, LOOKBACK OPTIONS, ASIAN OPTIONS)

ΤΑΝΤΟΥΛΟΥ ΕΛΕΝΗ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΣΠΗΛΙΩΤΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Π.Μ.Σ. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΙΣ ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ ΚΑΙ ΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

ΜΑΡΤΙΟΣ 2013

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα εργασία με τίτλο «Αποτίμηση παραγώγων Ευρωπαϊκού τύπου» αποτελεί την διπλωματική μου εργασία σχετικά με το πρόγραμμα μεταπτυχιακών σπουδών «Μαθηματική Προτυποποίηση στις Σύγχρονες Τεχνολογίες και την Οικονομία» με κατεύθυνση «Χρηματοοικονομικά» της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών (Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.) του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου (Ε.Μ.Π.).

Το αντικείμενο με το οποίο ασχολούμαι στην παρούσα εργασία είναι συγκεκριμένα η αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης (options) και μάλιστα των Currency, Binary, Compound, Chooser, Lookback και Asian Options. Όλα τα προαναφερθέντα αποτελούν ειδικές κατηγορίες παραγώγων Ευρωπαϊκού τύπου, δηλαδή συμβολαίων ανάμεσα σε δυο πλευρές με προκαθορισμένα κάποια χαρακτηριστικά, έκβαση ενός εκ δυο αποτελεσμάτων πληρωμής και καθορισμό στην αρχή μιας δίκαιης τιμής για το συμβόλαιο. Στην παρούσα εργασία αυτό που θα μας απασχολήσει είναι ο καθορισμός της δίκαιης τιμής πράγμα το οποίο απαιτεί περισσότερη εμβάθυνση στα μαθηματικά και συγκεκριμένα στο υπόβαθρο το οποίο χρειάζεται το οποίο είναι ένα μεγάλο κομμάτι της Θεωρίας Μέτρου και πιο ειδικά της Θεωρίας Πιθανοτήτων.

Όπως φαίνεται και αργότερα η εργασία είναι χωρισμένη σε τέσσερα κεφάλαια και στο τέλος παρατίθεται και η βιβλιογραφία που χρειάστηκα.

Στο πρώτο κεφάλαιο, υπάρχουν όλα εκείνα τα βασικά προαπαιτούμενα μαθηματικά τα οποία χρειάζονται για την καλύτερη κατανόηση των παρακάτω εννοιών όπως ορισμοί, θεωρήματα και πορίσματα που έχουν να κάνουν με Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, υπάρχει μια εισαγωγή στα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα και ειδικότερα στα δικαιώματα προαίρεσης, πώς συνδέονται με το μοντέλο Black-Scholes, και πώς γίνεται η αποτίμησή τους όσον αφορά αυτά του Ευρωπαϊκού τύπου τα οποία και μας απασχολούν.

Στο τρίτο κεφάλαιο γίνονται οι υπολογισμοί της δίκαιης τιμής (premium) πάνω σε δικαίωματα τέτοιου τύπου και ειδικότερα σε Currency, Binary, Compound, Chooser, Lookback και Asian Options όπου για τα πρώτα δυο οι υπολογισμοί είναι απλοί μέσω τελικού τύπου, για τα τρία επόμενα οι υπολογισμοί γίνονται και μέσω τελικού τύπου και μέσω προσέγγισης με την μέθοδο Monte Carlo και για τα το τελευταίο οι υπολογισμοί γίνονται μόνο με βάση την μέθοδο Monte Carlo μιας και δεν υπάρχει συγκεκριμένος τύπος για τον υπολογισμό αυτής της δίκαιης τιμής.

Στο τέταρτο και τελευταίο κεφάλαιο της εργασίας παρατίθενται οι σχετικοί κώδικες από το περιβάλλον της MatLab για καθένα από τα προγράμματα τα οποία επαξεργάστηκα συνοδευόμενα από κάποια σχόλια τα οποία θα βοηθήσουν τον εκάστοτε αναγνώστη στην καλύτερη κατανόησή τους.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα καταρχήν να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Σπηλιώτη Ιωάννη, Αν. Καθηγητή του Ε.Μ.Π., για το αμέριστο ενδιαφέρον που έδειξε κατά τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας μου, την υπομονή του και τη στήριξή του σε όλες τις δυσκολίες που αντιμετώπισα. Το θέμα της παρούσης εργασίας το οποίο και μου υπέδειξε ήταν εξ αρχής πολύ ενδιαφέρον και όπως αποδείχθηκε στην πορεία ένα πολύ σημεντικό και χρήσιμο εργαλείο το οποίο απαιτεί πολλές γνώσεις οι οποίες κατανοούνται ταυτόχρονα και στην πράξη και γίνονται κτήμα του εκάστοτε ατόμου που ασχολείται μαζί του.

Επιπρόσθετα θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της τριμελής επιτροπής, κ. Καρώνη Χρυσηίς, Καθηγήτρια, από την οποία απέσπασα κατά τη διάρκεια του μαθήματος της στο μεταπτυχιακό πρόγραμμα πολύτιμα εφόδια στατιστικής τα οποία με βοήθησαν και στη περάτωση της παρούσης εργασίας, όπως επίσης και τον κ. Φουσκάκη Δημήτριο, Επίκουρο Καθηγητή για το ενδιαφέρον που έδειξε για την εργασία μου και τα πολύτιμα σχόλια του όσον αφορά την καλύτερη δομή της.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Κεφάλαιο 1

Μαθηματικά Προαπαιτούμενα

1.Στοχαστικές Ανελίξεις

Μια στοχαστική ανέλιξη είναι μια διαδικασία που περιγράφει τη μεταβολή μιας ή περισσότερων μεταβλητών υπο καθεστώς αβεβαιότητας. Τέτοιες στοχαστικές ανελίξεις μπορεί να περιλαμβάνουν συνεχείς ή διακριτές τμές και ορίζουν τη διαδρομή τυχαίων μεταβλητών στον ίδιο χώρο πιθανοτήτων, όπου κάθε αλλαγή είναι ανεξάρτητη των προηγούμενων αλλαγών και κάθε μια περιγράφεται από όμοια κατανομή πιθανότητας.

Ορισμός 1.1.

Έστω $T \neq \varnothing$ ένα σύνολο δεικτών. Στοχαστική ανέλιξη στο T με τιμές στο $\mathbb{R}^m$ ονομάζεται μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $X_t, t \in T$ ορισμένων σε ένα χώρο πιθανότητας Ω, F, P και τιμές στο $\mathbb{R}^m$. Όταν το T παίρνει τιμές από το σύνολο των φυσικών αριθμών $T = \mathbb{N} = 1, 2, \ldots$ ή από το σύνολο των ακεραίων $T = \mathbb{Z} = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ αναφερόμαστε σε στοχαστική ανέλιξη διακριτού χρόνου ενώ αν το T είναι διάστημα του $\mathbb{R}$ θα αναφερόμαστε σε στοχαστική ανέλιξη συνεχούς χρόνου. Για τυχαίο αλλά δοσμένο $\omega \in \Omega$ η συνάρτηση $T \ni t \to X_t\ \omega \in \mathbb{R}^m$

ονομάζεται τροχιά της στοχαστικής ανέλιξης $X_t, t \in T$ και θα αναφερόμαστε σε αυτήν με τον όρο ω = τροχιά

2.Κίνηση Brown

Μια από τις πιο σημαντικές στοχαστικές διαδικασίες είναι η κίνηση Brown (μπορεί κανείς να την συναντήσει και με το όνομα διαδικασία Wiener, 1827) η οποία περιγράφει το πιθανοθεωρητικό εκείνο μοντέλο που σκοπεύει στην περιγραφή και ανάλυση της άτακτης κίνησης μικρών σωματιδίων όταν αυτά αιωρούνται μέσα σε κάποιο υγρό, υπό την επίδραση των συγκρούσεων που υφίστανται από τα μόρια του υγρού. Η παρατήρηση της κίνησης αυτής γίνεται για κάποιο χρονικό διάστημα [0,s] για το οποίο σε κάθε σωματίδιο, αντιστοιχεί μια τροχιά (x_1(t), x_2(t), x_3(t),...), $t \in [0,s]$ στο χώρο. Το πείραμα θεωρείται πείραμα τύχης αφού δύο σωματίδια μπορούν να διαγράψουν διαφορετικές τροχιές κατά το διάστημα [0,s] παρά το γεγονός ότι δεν υπάρχει αλλαγή στις συνθήκες στις οποίες βρίσκονται. Δηλαδή ένα σωματίδιο μπορεί να διαγράφει διαφορετικές τροχιές σε δύο επαναλήψεις του ίδιου πειράματος.

Ορισμός 1.2.

Τυπική μονοδιάστατη Κίνηση Brown ονομάζεται μια στοχαστική ανέλιξη $B_t, t \in 0,\infty$ με τιμές στο $\mathbb{R}$ ορισμένη σε ένα χώρο πιθανότητας Ω, F, P εφοδιασμένο με μία διύλιση $F_t, t \geq 0$ έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:

i) Για κάθε $t \geq 0$ η B_t είναι F_t-μετρήσιμη.

ii) Η στοχαστική ανέλιξη $B_t, t \geq 0$ έχει συνεχείς τροχιές.

iii) $B_0 = 0$ P-σ.β.

iv) Όταν $0 \leq s < t$ τότε η τ.μ. $B_t - B_s$ είναι ανεξάρτητη της σ-άλγεβρας F_s .

v) Όταν $θ \leq s < t$ τότε η τ.μ. $B_t - B_s$ ακολουθεί κανονική κατανομή $N \;\, 0, t-s$

Παρακάτω θα γράφουμε για μια κίνηση Brown: Η $B_t, t \geq 0$ είναι F_t -κίνηση Brown ή και η B_t, F_t $t \geq 0$ είναι μια κίνηση Brown.

Την στοχαστική ανέλιξη $\{B_t, t \in [0, s]\}$ όπου $s > 0$ θα την καλούμε ως μια F_t -κίνηση Brown στο [0, s].

Παρατηρήσεις

1) Απόρεια των παραπάνω είναι ότι μια F_t-κίνηση Brown είναι επίσης και μια F_t^B -κίνηση Brown, όπου $F_t^B = σ\;\, B_s, 0 \leq s \leq t$ $t \geq 0$.

2) Αν $\{B_t, t \geq 0\}$ είναι μια F_t-κίνηση Brown, τότε η στοχαστική ανέλιξη $\{-B_t, t \geq 0\}$ είναι επίσης μια F_t-κίνηση Brown όπως μπορούμε άμεσα να διαπιστώσουμε από τον παραπάνω Ορισμό. Άρα, με βάση τον Ορισμού 1.2 που παραθέσαμε παραπάνω δεν υπάρχει μία μόνο Κίνηση Brown.

Πρόταση 1.3.

Έστω $\{B_t, t \geq 0\}$ μια F_t-κίνηση Brown. Τότε ισχύουν τα παρακάτω συμπεράσματα:

α) Αν $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n$ τότε οι διαφορές $\{B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\}$, j = 1,2,…,n είναι ανεξάρτητες.

β) Η στοχαστική ανέλιξη $\{B_t, t \geq 0\}$ είναι F_t-martingale.

γ) Η στοχαστική ανέλιξη $\{B_t^2 - t, t \geq 0\}$ είναι επίσης F_t -martingale.

δ) Για οποιαδήποτε s, t ≥ 0, ισχύει ότι η συνδιακύμανση Cov (B_s, B_t) = min {s, t}.

ε) Αν 0 < t_1 < t_2 < … < t_n τότε το τυχαίο διάνυσμα $(B_{t_1}, B_{t_2}, ..., B_{t_n})$ ακολουθεί την Κανονική Κατανομή N(0, Γ) όπου $\Gamma = [\min\{t_i, t_j\}]_{t \leq i, j \leq n}$.

Από δώ και για όλη την υπόλοιπη εργασία όταν αναφερόμαστε σε μια F_t - κίνηση Brown θα θεωρούμε ότι: Ο χώρος πιθανότητας (Ω, F, P) στον οποίο ορίζεται είναι πλήρης και ότι, αν για ένα υποσύνολο $A \subset \Omega$ υπάρχει $N \in F$ με $P(N) = 0$ με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι $\Lambda \subset N$ τότε θα είναι και $\Lambda \in F_1$ για κάθε $t \geq 0$.

Η επόμενη ιδιότητα που θα εξετάσουμε αποτελεί μια ακόμα συμπεριφορά της κίνησης Brown. Η απλή Μαρκοβιανή ιδιότητα είναι η ακόλουθη:

$$P(B_{s+t} \in A | F_s) = P\left(B_{s+t} \in A | B_s\right)$$

για οποιαδήποτε $s, t > 0$ και $A \in B$.

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει η εξής ερμηνεία: κατά τη χρονική στιγμή s, και προκειμένου να εκτιμήσουμε την κατάσταση του συστήματος κατά την μελλοντική στιγμή s+t, δεν χρειάζεται όλη την «προϊστορία» F_s του συστήματος αλλά μόνο την κατάστασή του B_s κατά την παρούσα χρονική στιγμή s. Επίσης αποδεικνύεται ότι όταν $s, t > 0$, $y \in \Re$ και $A \in B$ τότε ισχύει η ακόλουθη σχέση

$$P\left(B_{s+t} \in A | B_s = y\right) = P\left(y + B_t \in A\right) \quad P_{B_s} \text{ - σ.β.}$$

η οποία διατυπώνεται με λόγια ως εξής:

Για οποιαδήποτε κατάσταση $B_s = y$ κατά τη χρονική στιγμή s, η εξέλιξη της Κίνησης Brown για χρόνο t είναι πιθανοθεωρητικά ίδια με την εξέλιξη για χρόνο t της

Κίνησης Brown που ξεκινά τη χρονική στιγμή y, η Κίνηση Brown δηλαδή ξεκινά ξανά από την αρχή κάθε στιγμή της.

<u>Πρόταση 1.4.</u>

Έστω μια F_t - κίνηση Brown $\{B_t, t \geq 0\}$ και τ είναι ένας F_t - χρόνος διακοπής με $P(\tau < \infty) = 1$. Ορίζουμε $V_t = B_{t+\tau} - B_\tau$, $t \geq 0$. Τότε η στοχαστική ανέλιξη $\{V_t, t \geq 0\}$ είναι μια F_t^V -κίνηση Brown ανεξάρτητη της F_t.

Ως άμεσο πόρισμα της προηγούμενης πρότασης 1.4. έχουμε την ισχυρή Μαρκοβιανή ιδιότητα της κίνησης Brown.

<u>Πόρισμα 1.5</u>

Έστω $\{B_t, t \geq 0\}$ μια F_t-κίνηση Brown και τ ένας F_t-χρόνος διακοπής με $P(\tau < \infty) = 1$. Τότε για $t > 0$, $A \in B$, $y \in \Re$ ισχύουν τα παρακάτω:

$P\ B_{\tau+t} \in A \,|\, F_\tau\ = P\ B_{\tau+t} \in A \,|\, \mathrm{B}_\tau \quad P$ –σ.β.

$P\ B_{\tau+t} \in A \,|\, B_\tau = y\ = P\ B_t + y \in A \quad P_{B_\tau}$ -σ.β.

3.Στοχαστικά Ολοκληρώματα

Ορισμός 1.6

Έστω $f \in L\ \ a,b$. Το ολοκλήρωμα Ito της f στο [a,b] ορίζεται από τη σχέση

$\int_a^b f(t)dB_t = \lim_n f(t)dB_t$ με την L^2-έννοια

όπου $f_n : n \in \mathbb{N}$ ακολουθία σ.α. από την $L^0\ \ a,b$ τέτοια ώστε

$\lim_n E[\int_a^b (f(t)-f_n(t))^2 dt] = 0$

Οι σημαντικότερες ιδιότητες του στοχαστικού ολοκληρώματος Ito διατυπώνονται στην παρακάτω Πρόταση.

Πρόταση 1.7

Έστω ότι $f,g \in L\ \ a,b$, $f_n, n \in \mathbb{N} \subset L\ \ a,b$, $c \in\ a,b$ και λ, $\mu \in \mathbb{R}$. Ισχύουν οι παρακάτω ισχυρισμοί:

α) $E[\int_a^b (f(t)dB_t] = 0$

β) $E\,|\int_a^b (f(t)dB_t|^2 = E\int_a^b f^2(t)dt.$

γ) $\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))dB_t = \lambda \int_a^b f(t)dB_t + \mu \int_a^b g(t)dB_t.$

δ) $\int_a^b f(t)dB_t = \int_a^c f(t)dB_t + \int_c^b f(t)dB_t.$

ε) Η τυχαία μεταβλητή $I = \int_a^b f(t)dB_t$ είναι F_b-μετρήσιμη.

στ) Αν $\lim_n E[\int_a^b (f_n(t)-f(t))^2 dt] = 0$ τότε $\lim_n \int_a^b f_n(t)dB_t = \int_a^b f(t)dB_t$ με την L^2-έννοια.

Παρατήρηση

Έστω $f \in L[a,b]$. Το στοχαστικό ολοκλήρωμα $I=\int_a^b f(s)dB_s$ δεν ορίζεται για το κάθε $\omega\in\Omega$ χωριστά όπως συμβαίνει π.χ. με ολοκληρώματα της μορφής $\int_a^b f(s)=\int_a^b f(s,\omega)ds$. Το στοχαστικό ολοκλήρωμα I ορίζεται ολικά ως ένα στοιχείο του $L^2(\Omega,dP)$ (είναι το L^2-όριο ακολουθίας τυχαίων μεταβλητών του $L^2(\Omega,dP)$) και άρα ο συμβολισμός $\int_a^b f(s,\omega)dB_s(\omega)$ δεν είναι αυτός ο οποίος φαινομενικά δείχνει. Πρόκειται για μια απεικόνιση $I:L[a,b]\to L^2(\Omega,dP)$ με την ιδιότητα $\|I(F)\|=\|f\|$ (ισομετρία) που συμπίπτει με την $\int_a^b f(t)dB_t=\sum_{i=0}^{n-1} f_i\left(B_{t_{i+1}}-B_{t_i}\right)$ όταν $f\in L^0[a,b]$

Ορισμός 1.8

Έστω $f \in P[0,T]$ και 0 < t ≤ T. Ονομάζεται στοχαστικό ολοκλήρωμα Ito της f στο [0, t], το όριο κατά πιθανότητα P της ακολουθίας τυχαίων μεταβλητών $\left(\int_0^t f_n(s)\,dB_s, n\in\mathbb{N}\right)$ για κάθε ακολουθία $(f_n, n\in\mathbb{N})\subset L[0,T]$ που ικανοποιεί την παρακάτω απαίτηση

$$\int_0^t f(s)dB_s=\overset{P}{\lim}\int_0^t f_n(s)dB_s.$$

4.Στοχαστικές Ανελίξεις ITO

4.Formula του ITO

Κάποιες στοχαστικές ανελίξεις που είναι συναρτήσεις της Κίνησης Brown είναι της μορφής

$$\int_0^t a(s)\,ds + \int_0^t \beta(s)\,dB_s\,,\ t \geq 0.$$

Αυτού του είδους οι ανελίξεις ονομάζονται ανελίξεις ΙΤΟ. Όπως και σε όλη την εργασία έτσι και εδώ ισχύουν τα εξης:

(Ω, F, P) είναι χώρος πιθανότητας εφοδιασμένος με μια διύλιση $(F_t,\ t \geq 0)$ για την οποία ισχύει ότι $N \subset F$, για κάθε $t \geq 0$ όπου $N = \{\Lambda \subset \Omega : \exists N \in F \mu\varepsilon \Lambda \subset \mathrm{N} \kappa\alpha\iota P(N) = 0\}$

Επίσης $\{B_t, t \geq 0\}$ είναι μια F_t-κίνηση Brown ορισμένη στον (Ω, F, P) με n διαστάσεις $(n \in N)$.

<u>Ορισμός 1.9</u>

Στοχαστική ανέλιξη ΙΤΟ στο $[0, \infty)$ με τιμές στο $\mathbb{R}^m$, ονομάζεται μια συνεχής στοχαστική ανέλιξη $\{X_t, t \geq 0\}$ για την οποία $\forall t \geq 0$ ισχύει:

$$X_t = \xi + \int_0^t a(s)\,ds + \int_0^t \beta(s)\,dB_s\,,\ \text{P-σ.β.}$$

όπου $\xi = (\xi_1, ..., \xi_m)$ τυχαίο διάνυσμα F_0-μετρήσιμο, $\beta \in P^{mxn}$ και η στοχαστική ανέλιξη $a(s) = (a_1(s), ..., a_m(s))$, $s \geq 0$ είναι $B_{[0,\infty)} \otimes F$-μετρήσιμη, F_s-προσαρμοσμένη και ικανοποιεί την παρακάτω απαίτηση:

$$P\left(\sum_{j=1}^{m} \int_0^r |a_j(s)|\,ds < \infty\right) = 1 \qquad \forall r \geq 0$$

<u>Παρατηρήσεις</u>

1) Μια στοχαστική ανέλιξη ΙΤΟ είναι F_t-προσαρμοσμένη
2) Προκύπτει ότι για $0 \leq s < t$ ισχύει:

$$X_t - X_s = \int_s^t a(r)\,dr + \int_s^t \beta(r)\,dB_r$$

γι’αυτό άλλωστε λέγεται και στοχαστικό διαφορικό και συχνά χρησιμοποιείται η γραφή $dX_t = a(t)\,dt + \beta(t)\,dB_t$, $X_0 = \xi$

3) Μια m-διάστατη Κίνηση Brown $\{B_t, t \geq 0\}$ είναι επίσης ανέλιξη ITO με $\alpha = \mathrm{O}$ και $\beta = \mathrm{I} = [\delta_{ij}]_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq m}}$.

Παρακάτω παραθέτουμε την formula του ITO:

<u>Πρόταση 1.10</u> (formula του ITO, m=n=1)

Έστω $X_t = \xi + \int_0^t a(s)\,ds + \int_0^t \beta(s)\,dB_s$, $t \geq 0$ μια ανέλιξη ITO και $f \in C^{1,2}([0,\infty)x\mathbb{R})$.

Τότε για όλα τα $t > 0$ ισχύει το παρακάτω:

$$f(t, X_t) - f(0, \xi) = \int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s) + a(s)\frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) + \frac{1}{2}\beta^2(s)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) \right] ds +$$

$$\int_0^t \beta(s)\frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)\,dB_s$$

Η formula του ITO ισχύει και για περισσότερες από μια διαστάσεις.

<u>5.Θεώρημα Girsanov</u>

Έστω $\{B_t, t \geq 0\}$ μια μονοδιάστατη F_t-κίνηση Brown στον χώρο πιθανότητας (Ω, F, P) και $T > 0$. Για τυχαίο $\mu \in \mathbb{R}$, ορίζουμε στον (Ω, F_T) ένα μέτρο με τον παρακάτω τρόπο:

$$\tilde{P}(A) = \int_A e^{\mu B_T - \frac{1}{2}\mu^2 T}\,dP, \quad A \in F_T .$$

Αν θεωρήσουμε την στοχαστική ανέλιξη $\{M_t = e^{\mu B_T - \frac{1}{2}\mu^2 T}, t\in [0,T]\}$, η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\tilde{P}(A) = \int_A M_T dP, \quad A\in F_T$$

Είναι όμως γνωστό (από παραπάνω) ότι η στοχαστική ανέλιξη $\{M_t =, t\in [0,T]\}$ είναι F_T-martingale και άρα $E(M_T) = E(M_0) = 1$. Από την τελευταία διαπίστωση και την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι η συνολοσυνάρτηση $\tilde{P}$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας στην (Ω, F_T). Προκύπτει όμως και κάτι άλλο από το γεγονός ότι η στοχαστική ανέλιξη $\{M_t =, t\in [0,T]\}$ είναι F_T-martingale:

Επειδή για κάθε $t\in [0,T]$ έχουμε $E(M_T \mid F_T) = M_t$, P-σ.β., θα έχουμε και ότι

$$\tilde{P}(A) = \int_A e^{\mu B_T - \frac{1}{2}\mu^2 T} dP, \quad \forall A\in F_t \subset F_T$$

δηλαδή, ο περιορισμός του μέτρου πιθανότητας $\tilde{P}$ στην σ-άλγεβρα F_t δίνεται από την παραπάνω σχέση. Αυτό μας επιτρέπει να γράψουμε (για τυχόν $t\in [0,T]$ και τυχούσα $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ φραγμένη)

$$\tilde{E}\left[f(B_t)\right] = \int f(B_t)\, d\tilde{P} = \int f(B_t)\, e^{\mu B_T - \frac{1}{2}\mu^2 T} d\tilde{P} =$$

$$= \int f(x)\, e^{\mu B_T - \frac{1}{2}\mu^2 T} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{2t}x^2} dx = \int f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{2t}(x-\mu t)^2} dx =$$

$$= \int f(y+\mu t) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{2t}y^2} dy = E\left[f(B_t+\mu t)\right].$$

Αν λοιπόν θεωρήσουμε την στοχαστική ανέλιξη $X_t = B_t + \mu t, t\geq 0$ που είναι γνωστή ως κίνηση Brown με συντελεστή διεύθυνσης μ, έχουμε βρεί την παρακάτω σχέση

$\tilde{E}\left[f(B_t)\right]=E\left[f(X_t)\right]$

Η παραπάνω σχέση μπορεί επίσης να γενικευτεί για οποιεσδήποτε χρονικές στιγμές $0 \le t_1 < \ldots < t_n \le T$ και να γίνει $\tilde{E}\left[f(B_{t_1},\ldots,B_{t_n})\right]=E\left[f(X_{t_1},\ldots,X_{t_n})\right]$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει η ακόλουθη δυνατότητα: Πιθανοθεωρητικά προβλήματα εκφρασμένα στο μέτρο P που σφορούν την $(X_t, t \ge 0)$, μπορούν να μετασχηματιστούν σε προβλήματα που να αφορούν την $(B_t, t \ge 0)$ αλλά εκφρασμένα στο μέτρο $\tilde{P}$.

<u>Λήμμα 1.11</u>

Έστω (Ω, F, P) χώρος πιθανότητας, $T > 0$ και $(Z_t, t \in [0,T])$ ένα F_t-martingale με $E(Z_0)=1$ και $Z_t > 0 \quad \forall t \in [0,T]$. Αν Q είναι μέτρο πιθανότητας οριζόμενο στον (Ω, F_T) από τη σχέση $Q(A) = \int_A Z_T dP$ και X είναι τυχαία μεταβλητή F_t-μετρήσιμη με $E_P(|XZ_t|) < \infty$ τότε για $0 \le s \le t$ ισχύει ότι $E_Q(X \mid F_s) = \frac{1}{Z_s} E_P(XZ_t \mid F_s) \quad P,Q$-σ.β.

<u>Πρόταση 1.12</u> (Θεώρημα Girsanov, n=1)

Έστω (Ω, F, P) χώρος πιθανότητας στον οποίο ορίζεται μια μονοδιάστατη Κίνηση Brown και η αντίστοιχη τυπική διύλιση $(F_t, t \ge 0)$ δηλαδή $F_t = \sigma(F_t^B \cup N)$ όπου $F_t^B = \sigma(B_s, 0 \le s \le t)$ και $N = \{\Lambda \subset \Omega : \exists N \in F \mu\varepsilon \Lambda \subset N \kappa\alpha\iota P(N) = 0\}$. Έστω ακόμα $T > 0$ και στοχαστική ανέλιξη $a \in P[0,T]$ τέτοια ώστε η στοχαστική ανέλιξη

$$Z_t = e^{\int_0^t a(s)\,dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t a^2(s)\,ds}, \quad t \in [0,T]$$

να είναι F_t-martingale. Ορίζουμε στον (Ω, F, P) το μέτρο πιθανότητας Q από τη σχέση

$$Q(A) = \int_A Z_T\,dP, \quad A \in F_T$$

Τότε η στοχαστική ανέλιξη $W_t = B_t - \int_0^t a(s)\,ds$, $t \in [0,T]$ είναι F_t-Κίνηση Brown για μέτρο Q.

Κεφαλαιο 2

Χρηματοοικονομικό μοντέλο Black-Scholes.

Αποτίμηση Δικαιωμάτων Προαίρεσης (Options)

1. Εισαγωγή - Η έννοια του παράγωγου προϊόντος

Σ'αυτό το κεφάλαιο πρόκειται να ασχοληθούμε με τα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα και την αποτίμησή τους η οποία απαιτεί το μαθηματικό υπόβαθρο που παρουσιάστηκε στα προηγούμενα κεφάλαια.

Ως παράγωγο προϊόν θεωρούμε μια διμερή σύμβαση η οποία μπορεί να αναφέρεται σε μετοχές, δείκτες μετοχων, ομόλογα, συνάλλαγμα ή και εμπορεύματα. Τα παράγωγα προϊόντα συναλλάσονται στο χρηματιστήριο παραγώγων το οποίο αποτελεί έναν οργανισμό που διασφαλίζει την εύρυθμη λειτουργία της αγοράς αυτών των προϊόντων. Τα πιο γνωστά παράγωγα προϊόντα είναι:

- Τα προθεσμιακά συμβόλαια, τα οποία είναι η απλούστερη μορφή παραγώγου. Τα συμβόλαια αυτά συνήθως πραγματοποιούνται μεταξύ δυο χρηματοοικονομικών ιδρυμάτων με μια συμφωνία αγορας-πώλησης ανάμεσά τους με καθορισμένη ημερομηνία λήξης τους στο μέλλον και αφορούν μια συγκεκριμένη ποσότητα αγαθού και σε συγκεκριμένη τιμή συναλλαγής. Για τα προθεσμιακά συμβόλαια συνήθως δεν γίνεται διαπραγμάτευσή τους στην χρηματιστηριακή αγορά.
- Τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (future contracts), τα οποία αποτελούν το ίδιο μοντέλο με τα προθεσμιακά συμβόλαια που περιγράψαμε

παραπάνω μόνο που συναλλάσονται από το χρηματιστήριο παραγώγων και άρα εγγυόνται ως προς την εκπλήρωσή τους (υπάρχει νομική ισχύ).

- Τα προϊόντα δανεισμού τίτλων (stock repo and stock reverse repo), τα οποία αφορούν την παραχώρηση τίτλων ως δάνειο ή την απόκτησή τους ως δάνειο. Και τέλος,
- Τα δικαιώματα προαίρεσης (options), τα οποία ειναι και το αντικείμενο μελέτης αυτής της εργασίας. Τα δικαιώματα αυτά αποτελούν συμβόλαια μεταξύ δυο αντισυμβαλομένων (τον εκδότη και τον κάτοχο του δικαιώματος) τα οποία δίνουν το δικαίωμα και όχι την υποχρέωση στην πλευρά του κατόχου να ασκήσει το δικαίωμα του. Το πλεονέκτημα αυτό του εκδότη αντισταθμίζεται από την καταβολή ενός αντιτίμου (premium) από τον κάτοχο. Τα δικαιώματα προαίρεσης είναι εγγυημένα από το Χρηματιστήριο Παραγώγων.

2. Δικαιώματα Προαίρεσης

Τα δικαιώματα προαίρεσης έχουν τις δυο ακόλουθες μορφές:

- Call δικάιωμα αγοράς
- Put δικάιωμα πώλησης

Και τα εξης χαρακτηριστικά τα οποία αναφέρονται και στις δυο παραπάνω μορφές:

- Τιμή άσκησης δικαιώματος Κ (strike price), η οποία είναι καθορισμένη από την χρονική στιγμή έναρξης του option.
- Χρονος άσκησης δικαιώματος Τ (maturity time), ο οποίος αποτελεί ουσιαστικά τη χρονική διάρκεια ισχύος του δικαιώματος μέχρι τη λήξη του
- Αντίτιμο-Δίκαιη Τιμή c (premium), το οποίο αποτελεί την τιμή που καταβάλει ο κάτοχος στον εκδότη την ημέρα έναρξης του συμβολαίου ώστε να είναι δίκαιη η πορεία της συναλλαγής ανεξαρτήτως αποτελέσματος

- Τιμή του αγαθού στον χρόνο λήξης του συμβολαίου St.

Πληροφοριακά αναφέρουμε τον ακόλουθο τύπο δικαιώματος προαίρεσης (American option) του οποίου το δικαίωμα ασκείται οποιαδήποτε στιγμή στο χρονικό διάστημα [0,T]. Εμείς θα ασχοληθούμε παρακάτω με τα δικαιώματα Ευρωπαϊκού τύπου στα οποία το δικαίωμα ασκείται ακριβώς σε χρόνο T.

3. Μοντέλο Black-Scholes

Παρακάτω αναλύουμε την συμπεριφορά στο χρόνο μιας επένδυσης στην αγορά χρήματος η οποία μπορεί να είναι απλή κατάθεση ή δανεισμός. Έτσι αν r(t), t ≥ 0 είναι το επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού και K(t), t ≥ 0 η συνάρτηση κεφαλαίου, τότε για ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα [t, t + Δt] κατά τη διάρκεια του οποίου το επιτόκιο θεωρείται σταθερό και ίσο με r(t), η μεταβολή του κεφαλαίου είναι η ακόλουθη $K(t+\Delta t)-K(t)=r(t)K(t)\Delta t.$

Κατά συνεπεια η διαφορική εξίσωση που περιγράφεται παρακάτω με αρχική συνθήκη την $K(0)=\kappa$ και $dK(t)=r(t)K(t)dt$

όπου $t\geq 0$ και κ το αρχκό κεφάλαιο να είναι η καταλληλότερη για το παραπάνω μοντελο το οποίο περιγράψαμε.

Η λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης είναι η ακόλουθη $K(t)=\kappa e^{\int_0^t r(s)ds}$, $t\geq 0$.

Στη συνέχεια κάνουμε την αντικατάσταση $\beta(t)=e^{rt}$, $t\geq 0$ όταν $r(t)=r$ και $r\geq 0$ στην παραπάνω λύση όπου β(t), t ≥ 0 η λύση της παρακάτω διαφορικής εξίσωσης

$$\begin{cases} d\beta(t)=r(t)\beta(t)dt \\ \beta(0)=1 \end{cases} \tag{3.1}$$

όταν το αρχικό κεφάλαιο γίνει μια χρηματική μονάδα.

Και άρα από την αντικατάσταση το αποτέλεσμα που παίρνουμε είναι η σχέση

$K(t) = \kappa\beta(t), \quad t \geq 0$

Στη συνέχεια μας ενδιαφέρει η μεταβολή της τιμής μιας μετοχής σε σχέση με την προσφορά και τη ζήτησή της στην αγορά. Μ'αυτόν τον τρόπο ορίζουμε ότι άνοδο στη ζήτηση προκαλεί άνοδο της τιμής της κ.ο.κ. Όμως αυτό που ενδιαφέρει σε μια μετοχή είναι η απόδοσή της την οποία ορίζουμε ως $\frac{dX_t}{X_t}$ όπου dX_t είναι η μεταβολή της τιμής της στο χρονικό διάστημα [t, t + dt]. Υποθέτουμε λοιπόν ότι

$$\frac{dX_t}{X_t} = b dt \text{ όπου } b \in \mathbb{R}. \qquad (3.2)$$

Όμως το παραπάνω μοντέλο (3.2) γίνεται ρεαλιστικότερο με την πρόσθεση ενός λευκού θορύβου $\{\sigma\xi_t\}$ με σ > 0 στο δεύτερο μέλος της (3.2) το οποίο μας οδηγεί στην παρακάτω σχέση

$$\frac{dX_t}{X_t} = b dt + \sigma\xi_t dt. \qquad (3.3)$$

Χρησιμοποιώντας την θεωρία για την στοχαστική ολοκλήρωση ΙΤΟ για την (3.3) θα μπορούσαμε να καταλήξουμε στην επόμενη σχέση $dX_t = bX_t dt + \sigma X_t dB_t$.

Άρα λοιπόν, για να περιγράψουμε την εξέλιξη στο χρόνο της τιμής υποκείμενων τίτλων καταλήγουμε στο επόμενο στοχαστικό μοντέλο

$$X_t = x + \int_0^1 bX_s ds + \int_0^t \sigma X_s dB_s, \; t \geq 0 \qquad (3.4)$$

όπου $b \in \mathbb{R}$, σ > 0 και x > 0.

Η Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση (3.4) αναφέρεται σε ένα χώρο πιθανότητας (Ω, F, P) στον οποίο ορίζεται η κίνηση Brown $\{B_t,\ t \geq 0\}$ που περιγράψαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο και ο οποίος είναι εφοδιασμένος με την εξης διύλιση

$$F_t = \sigma(F_t^B \cup N_p),\ N_p = \{\Lambda \subset \Omega : \exists N \in F \text{ με } \Lambda \subset N \text{ και } P(N) = 0\}$$

Παρατηρούμε ότι η παραπάνω Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση (3.4) είναι γραμμική και η λύση της περιγράφεται από τη σχέση $X_t = xe^{(b-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma B_t},\ t \geq 0$ (3.5)

μέσω της οποίας συμπεραίνουμε ότι $\ln X_t = \ln x + (b - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t,\quad t \geq 0$

και άρα $\ln X_t \sim N(\ln x + (b - \frac{1}{2}\sigma^2)t,\ \sigma^2 t),\quad t \geq 0.$

Συγκεκριμένα για $0 \leq s < t$ συμπεραίνουμε από την (3.5) ότι ισχύει για την Xt

$$X_t = X_s e^{(b-\frac{1}{2}\sigma^2)(t-s)+\sigma(B_t - B_s)}$$

Και αντίστοιχα ότι $\ln \frac{X_t}{X_s} \sim N((b - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-s),\ \sigma^2(t-s)).$ (3.6)

Ακόμα από την (3.5) έχουμε ότι $F_t^B = F_t^X$ και συνεπώς

$$F_t = \sigma(F_t^B \cup N_p) = \sigma(F_t^X \cup N_p)$$

Ο συντελεστής σ > 0 εκτιμάται από παρατηρήσεις $X_{t_0} = x_0,\ X_{t_1} = x_1, ..., X_{t_n} = x_n$ που λαμβάνονται σε χρονικές στιγμές $t_0, t_1, \ldots, t_n$ με $t_i - t_{i-1} = \tau$ για κάθε i = 1, 2, …, n.

Λόγω της (3.6), οι τιμές $u_i = \ln\left(x_i / x_{i-1}\right)$, $i = 1,2,\ldots n$ αποτελούν δείγμα της κατανομής $N((b - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau, \tau\sigma^2)$ και συνεπώς η παράμετρος σ^2 εκτιμάται από την ακόλουθη σχέση

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{\tau}\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i - \bar{u})^2.$$

4. Χαρτοφυλάκια στο μοντέλο Black-Scholes

Η ενότητα αυτή μαζί με τις επόμενες που ακολουθούν είναι βοηθητική για την αναπτύξη της μαθηματικής επεξεργασίας προβλημάτων που τέθηκαν σε προηγούμενες παραγράφους, για το μοντέλο Black-Scholes. Όλα από δω και πέρα θα αναφέρονται στον χώρο πιθανότητας (Ω, F, P) στον οποίο ορίζεται μια μονό-διάσταση κίνηση Brown $\{B_t,\ t \geq 0\}$ και η τυπική της διύλιση, δηλαδή, $F_t = \sigma(F_t^B \cup N_p)$ $, t \geq 0$ όπως ορίσαμε και παραπάνω όπου $F_t^B = \sigma(B_s, 0 \leq s \leq t)$ και $N_p = \{\Lambda \subset \Omega : \exists N \in F$ με $\Lambda \subset N$ και $P(N) = 0\}$. Το μοντέλο αγοράς (β, X) στο οποίο αναφερόμαστε είναι το γνωστό μοντέλο Black-Scholes, δηλαδή

$$\beta(t) = 1 + \int_0^t r\beta(s)ds,\ \ 0 \leq t \leq T \tag{4.1}$$

$$X_t = x + \int_0^t bX_s ds + \int_0^t \sigma X_s dB_s,\ \ 0 \leq t \leq T \tag{4.2}$$

όπου $r \geq 0$, $b \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, $x > 0$, $T > 0$.

Το r αναπαριστά το επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού, το x αναπαριστά την τιμή του υποκείμενου τίτλου X κατά τη χρονική στιγμή t = 0 και T είναι ο χρόνος άσκησης των δικαιωμάτων των option. Επίσης η (4.1) μπορεί να γραφεί και μ'αυτή τη μορφή

$$\beta(t) = e^{rt}, \ \ 0 \le t \le T \tag{4.3}$$

με την $\beta^{-1}(t) = e^{-rt}, \ \ 0 \le t \le T$ να ικανοποιεί την εξίσωση

$$\beta^{-1}(t) = 1 + \int_0^t -r\beta^{-1}(s)ds. \tag{4.4}$$

Καλούμε **χαρτοφυλάκιο** για την αγορά (β, X) ένα ζεύγος φ = (φ_0, φ_1) όπου φ_0, φ_1 είναι στοχαστικές ανελίξεις με τιμές στο $\mathbb{R}$, μετρήσιμες και F_t -προσαρμοσμένες. Ονομάζεται **ανέλιξη αξίας** του χαρτοφυλακίου φ = (φ_0, φ_1) η ακόλουθη στοχαστική ανέλιξη

$$Y_t^{\varphi} = \varphi_0(t)\beta(t) + \varphi_1(t)X_t, \ \ 0 \le t \le T. \tag{4.5}$$

Για κάθε χρονική στιγμή $t \in [0,T]$, $\varphi_0(t)$ και αντίστοιχα $\varphi_1(t)$ είναι ο αριθμός των τίτλων β αντίστοιχα X που διαθέτει ο επενδυτής. Όμως όλα τα χαρτοφυλάκια δεν είναι αποδεκτά και αυτό το δείχνουμε παρακάτω. Σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα [t, t + Δt] κατά τη διάρκεια του οποίου μπορούμε να θεωρήσουμε το χαρτοφυλάκιο φ σταθερό, η μεταβολή της αξίας του είναι η ακόλουθη

$$Y^{\varphi}(t + \Delta t) - Y^{\varphi}(t) = \varphi_0(t)(\beta(t + \Delta t) - \beta(t)) + \varphi_1(t)(X(t + \Delta t) - X(t)).$$

Έτσι λοιπόν αποδεχόμαστε μόνον τα χαρτοφυλάκια φ = (φ_0, φ_1) για τα οποία ισχύει η παρακάτω σχέση

$$dY_t^{\varphi} = \varphi_0(t)d\beta(t) + \varphi_1(t)dX_t \tag{4.6}$$

ή ισοδύναμα

$$Y_t^{\varphi} = Y_0^{\varphi} + \int_0^t [r\varphi_0(s)\beta(s) + b\varphi_1(s)X_s]ds + \int_0^t \sigma\varphi_1(s)X_s dB_s, \ \ 0 \le t \le T \qquad (4.7)$$

κάνοντας απαραίτητη την προϋπόθεση ότι ισχύει η παρακάτω σχέση για την τετραγωνική σύγκλιση

$$\int_0^T |\varphi_0(s)| ds + \int_0^T |\varphi_1(s)X_s|^2 ds < \infty \ \ P - \sigma.\beta. \qquad (4.8)$$

Και έτσι με βάση τα παραπάνω περνάμε στον επόμενο όρισμό:

<u>Ορισμός 2.1</u>

Έστω ένα μοντέλο αγοράς (β, X) όπως το ορίσαμε και παραπάνω στις σχέσεις (4.1), (4.2). Ένα χαρτοφυλάκιο φ = (φ_0, φ_1) ονομάζεται **αυτοχρηματοδοτούμενο** για την (β, X) όταν ικανοποιεί την (4.8) και η ανέλιξη αξίας του $Y^{\varphi} = \varphi_0\beta + \varphi_1 X$ ικανοποιεί την (4.7). Το σύνολο των αυτοχρηματοδοτούμενων χαρτοφυλακίων θα γράφεται ***X***.

Στη συνέχεια, οι στοχαστικές ανελίξεις $\beta^{-1}X$, $\beta^{-1}Y$. αποκτούν ιδιαίτερη σημασία. Η σημασία αυτή είναι η εξής: Αν η αγορά χρήματος δίνει επιτόκιο r τότε ένα ευρώ την (μελλοντική) χρονική στιγμή t έχει σημερινή (t = 0) αξία e^{-rt}. Συνεπώς $\beta_t^{-1}X_t$ (αντίστοιχα $\beta_t^{-1}Y_t^{\varphi}$) είναι η σημερινή, (t = 0), αξία του τίτλου X (αντίστοιχα χαρτοφυλακίου φ) που θα έχει τιμή X_t (αντίστοιχα Y_t^{φ}) κατά την (μελλοντική) χρονική στιγμή t > 0.

Πρόταση 2.2

Έστω ένα μοντέλο αγοράς (β, X) όπως στις (4.1), (4.2) και $\varphi \in X$ Τότε ισχύει για

$$t \in [0,T] \qquad \beta_t^{-1} X_t = x + \int_0^t (b-r)\beta^{-1}(s) X_s ds + \int_0^t \sigma \beta^{-1}(s) X_s dB_s \tag{4.9}$$

$$\beta_t^{-1} Y_t^{\varphi} = Y_0^{\varphi} + \int_0^t (b-r)\varphi_1(s)\beta^{-1}(s) X_s ds + \int_0^t \sigma \varphi_1(s)\beta^{-1}(s) X_s dB_s \tag{4.10}$$

Απόδειξη

Και οι δύο ζητούμενες σχέσεις προκύπτουν με τη βοήθεια της formula του Ito. Όσον αφορά την σχέση (4.10) έχουμε: από τις (4.4) και (4.7) και με τη βοήθεια της formula του Ito έχουμε

$$\beta^{-1}(t) Y_t^{\varphi} = Y_0^{\varphi} + \int_0^t [-r\beta^{-1}(s) Y_s + r\varphi_0(s) + b\beta^{-1}(s)\varphi_1(s) X_s] ds$$
$$+ \int_0^t \sigma \beta^{-1}(s)\varphi_1(s) X_s dB_s.$$

Αντικαθιστώντας τώρα μέσα στο ολοκληρώμα την Y_s από την (4.5) προκύπτει η

$$\beta^{-1}(t) Y_t^{\varphi} = Y_0^{\varphi} + \int_0^t [-r\beta^{-1}(s)\varphi_1(s) X_s + b\beta^{-1}(s)\varphi_1(s) X_s] ds$$
$$+ \int_0^t \sigma \beta^{-1}(s)\varphi_1(s) X_s dB_s.$$

που είναι και η ζητούμενη.

Παρατήρηση

Παρατηρούμε ότι το δεύτερο μέλος της (4.10) δεν εμπεριέχει το φ_0 αλλά μόνο το φ_1. Αυτό μας επιτρέπει να βρίσκουμε το φ_0 όταν δίνεται το φ_1. Συγκεκριμένα:

Έστω ότι δίνεται $y \in \mathbb{R}$ και φ_1 μετρήσιμη, F_t-προσαρμοσμένη με $\int_0^T |\varphi_1(s)X_s|^2 ds < \infty$ P-σ.β. Θέτουμε για $t \in [0,T]$

$$G_t^{\varphi_1} \equiv \int_0^t (b-r)\varphi_1(s)\beta^{-1}(s)X_s ds + \int_0^t \sigma\varphi_1(s)\beta^{-1}(s)X_s dB_s. \qquad (4.11)$$

και ορίζουμε $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1)$ όπου

$$\varphi_0(t) = y + G_t^{\varphi_1} - \varphi_1(t)\beta^{-1}(t)X_t, \quad 0 \le t \le T. \qquad (4.12)$$

Τότε με $Y^\varphi = \varphi_0\beta + \varphi_1 X$ συμπεραίνουμε άμεσα ότι

$$Y_t^\varphi = \beta_t(y + G_t^{\varphi_1}), \quad 0 \le t \le T.$$

Η τελευταία σχέση με τη βοήθεια της formula του Ito και της (4.12) συνεπάγεται την (4.7) και συνεπώς $\varphi \in X$ ή πιο συγκεκριμένα $\varphi \in X_y$.

Στη συνέχεια παραθέτουμε τον ορισμό σύμφωνα με τον οποίο συμπεραίνουμε αν ένα χαρτοφυλάκιο είναι αποδεκτό ή όχι.

Ορισμός 2.3

Ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο $\varphi \in X$ ονομάζεται **αποδεκτό** όταν υπάρχει $\Lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $Y^\varphi \ge \Lambda$ $dt \otimes dP$-σ.β. Το σύνολο των αποδεκτών χαρτοφυλακίων θα σημειώνεται $\bar{X}$. Ιδιαίτερα για $y \in \mathbb{R}$ θα είναι

$$\bar{X}_y = \{\varphi \in \bar{X} : Y_0^\varphi = y \text{ P-σ.β.}\}.$$

5. Martingale μέτρα πιθανότητας

Θεωρούμε ξανά το μοντέλο αγοράς (β, X) με β, X όπως στις (4.1), (4.2). Θέτουμε

$$\theta = \frac{b-r}{\sigma} \quad \text{και} \quad Z_t = e^{-\theta B_t - \frac{1}{2}\theta^2 t}, \quad t \geq 0. \tag{5.1}$$

Η στοχαστική ανέλιξη $\{Z_t, t \geq 0\}$ είναι F_t-martingale όπως έχουμε αποδείξει στο προηγούμενο κεφάλαιο και συνεπώς η σχέση $Q(A) = \int_A Z_T dP, \quad A \in F_t$ (5.2)

ορίζει ένα μέτρο πιθανότητας στον χώρο πιθανότητας (Ω, F, P). Μάλιστα το μέτρο Q είναι ισοδύναμο του μέτρου P, δηλαδη

$$P(A) = 0 \Leftrightarrow Q(A) = 0 \quad \forall A \in F_t \tag{5.3}$$

Ανακαλώντας το Θεώρημα Girsanov, η στοχαστική ανέλιξη

$$w_t = B_t + \theta_t, \quad 0 \leq t \leq T \tag{5.4}$$

είναι μια F_t -κίνηση Brown, για το μέτρο Q.

Όπως και παραπάνω η διύλιση $\{F_t, t \geq 0\}$ είναι η τυπική διύλιση της κίνησης Brown $\{B_t, t \geq 0\}$, δηλαδή $F_t = \sigma(F_t^B \cup N_p)$ Όμως λόγω της (5.4) ισχύει $F_t^B = F_t^W \quad \forall t \geq 0$ και λόγω της (5.3) ισχύει $N_P = N_Q$ και συνεπώς

$$F_t = \sigma(F_t^B \cup N_p) = \sigma(G_t^W \cup N_Q) \tag{5.5}$$

Πρόταση 2.4

Έστω (β, X) μοντέλο αγοράς όπως στις (4.1), (4.2) και Q το μέτρο πιθανότητας στον χώρο πιθανότητας Ω, F_t που ορίζεται από τις σχέσεις (5.1), (5.2). Τότε υπό το μέτρο πιθανότητας Q και για τυχαίο φ = (φ_0, φ_1) $\in X$ ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$dX_t = rX_t dt + \sigma X_t dW_t,\ 0 \le t \le T \tag{5.6}$$

$$\beta_t^{-1} X_t = x + \int_0^t \sigma \beta_s^{-1} X_s dW_s,\ 0 \le t \le T \tag{5.7}$$

$$\beta_t^{-1} Y_t^{\varphi} = Y_0^{\varphi} + \int_0^t \sigma \beta_s^{-1} \varphi_1(s) X_s dW_s,\ 0 \le t \le T. \tag{5.8}$$

<u>Απόδειξη</u>

Κάνουμε την αντικατάσταση $dB_t = dW_t - \theta dt$ και έτσι μ'αυτόν τόν τρόπο από την σχέση (4.10) προκύπτει ότι

$$\beta_t^{-1} Y_t^{\varphi} = Y_0^{\varphi} + \int_0^t (b-r)\varphi_1(s)\beta_s^{-1} X_s ds + \int_0^t \sigma\varphi_1(s)\beta^{-1}(s) X_s dW_s -$$
$$- \int_0^t \sigma\varphi_1(s)\beta^{-1}(s) X_s \theta ds$$

Ξέρουμε ότι ισχύει η ισότητα $\theta = \dfrac{b-r}{\sigma}$ και κάνοντας αντικατάσταση καταλήγουμε στην παραπάνω σχέση (5.8) που είναι και η ζητούμενη της απόδειξης.

Με βάση τα όσα αναφέραμε παραπάνω έχουμε τα ακόλουθα συμπεράσματα:

Πόρισμα

(α) Υπό το μέτρο πιθανότητας Q η στοχαστική ανέλιξη $\{\beta_t^{-1}X_t, 0 \le t \le T\}$ είναι F_t -martingale.

(β) Υπό το μέτρο πιθανότητας Q η στοχαστική ανέλιξη $\{\beta_t^{-1}Y_t^{\varphi}, 0 \le t \le T\}$ είναι F_t-local martingale και ιδιαίτερα αν $\varphi \in \bar{X}$ είναι η F_t-supermartingale.

Απόδειξη

(α) Από το θεώρημα Ito των Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων έχουμε ότι για τυχαίο $m \in$ ισχύει $E_P|X_t|^{2m} \le c \ \ \forall t \in [0,T]$.

Επίσης $E_p|Z_t|^2 = e^{\theta^2 t} E_p(e^{-2\theta B_t - \frac{1}{2}(2\theta)^2 t}) = e^{\theta^2 t}$ αφού η στοχαστική ανέλιξη $e^{-2\theta B_t - \frac{1}{2}(2\theta)^2 t}, t \ge 0$ είναι martingale.

Επειδή $E_Q|X_t|^2 = E_p|X_t|^2 Z_T$ συμπεραίνουμε ότι $E_Q \int_0^T |X_t|^2 dt < \infty$

Και χρησιμοποιόντας την σχέση (5.7) προκύπτει το ζητούμενο.

(β) Αφού $\varphi \in X$ είναι $P(\int_0^T \varphi_1^2(s) X_s^2 ds < \infty) = 1$ και επειδή τα μέτρα πιθανότητας P, Q είναι ισοδύναμα συμπεραίνουμε ότι και $Q(\int_0^T \varphi_1^2(s) X_s^2 ds < \infty) = 1$. Σύμφωνα με τη θεωρία της στοχαστικής ολοκλήρωσης και την σχέση (5.8) συμπεραίνουμε ότι η στοχαστική ανέλιξη $\{\beta_t^{-1}Y_t^{\varphi}, 0 \le t \le T\}$ είναι F_t -local martingale. Αν τώρα $\varphi \in \bar{X}_0$

τότε η στοχαστική ανέλιξη $\beta^{-1}Y^{\varphi}$ είναι κάτω φραγμένη και συνεπώς είναι supermartingale.

<u>Σημείωση</u>

Αν θέσουμε $\bar{X}_t = \beta_t^{-1}X_t,\ 0 \le t \le T$ τότε οι σχέσεις (5.7), (5.8) γράφονται ως εξης

$$d\bar{X}_t = \sigma\bar{X}_t dW_t,\ \bar{X}_0 = x,\ 0 \le t \le T$$

$$d(\beta_t^{-1}Y_t^{\varphi}) = \varphi_1(t)d\bar{X}_t,\ 0 \le t \le T.$$

Η ύπαρξη του μέτρου πιθανότητας Q και των συνεπειών της (Πρόταση 2.4) χαρακτηρίζει το μοντέλο αγοράς ως μοντέλο χωρίς φαινόμενο **arbitrage** δηλαδή ευκαιριών κέρδους χωρίς κίνδυνο. Πιο συγκεκριμένα, δεν υπάρχει χαρτοφυλάκιο $\varphi \in \bar{X}_0$ με $Y_T^{0,\varphi} \ge 0$ P-σ.β. και $P(Y_T^{0,\varphi} > 0) > 0$. Πράγματι, έστω ότι υπάρχει χαρτοφυλάκιο $\varphi \in \bar{X}_0$ με αυτές τις ιδιότητες. Σύμφωνα με το Πόρισμα της Πρότασης (2.4) η στοχαστική ανέλιξη $\{\beta_t^{-1}Y_t^{0,\varphi}, 0 \le t \le T\}$ είναι supermartingale για το μέτρο Q και συνεπώς

$$E_Q(Y_t^{0,\varphi}) \le E_Q(Y_t^{0,\varphi}) = 0. \qquad (5.9)$$

Όμως $Y_t^{0,\varphi} \ge 0$ P-σ.β. και λόγω της ισοδυναμίας των μέτρων P, Q θα είναι $Y_t^{0,\varphi} \ge 0$ Q-σ.β. Συνεπώς η (5.9) συνεπάγεται ότι $Q(Y_t^{0,\varphi} > 0) = 0$ και άρα $P(Y_t^{0,\varphi} > 0) = 0$ - συμπέρασμα άτοπο.

Παρακάτω θα ασχοληθούμε με το να εξετάσουμε αν υπάρχει και ποια είναι η σχέση ανάμεσα στο μέτρου πιθανότητας Q και της δίκαιης τιμής (premium) που εμείς ζητούμε. Η εξέλιξη του υποκείμενου τίτλου και ιδίως της επικαιροποιημένης αξίας του $\bar{X}_t \equiv \beta_t^{-1} X_t,\ 0 \le t \le T$ είναι κατά την (4.9) και υπό το μέτρο πιθανότητας P

$$d\bar{X}_t = (b-r)\bar{X}_t dt + \sigma \bar{X}_t dB_t,\ \bar{X}_0 = x.$$

Όπως βλέπουμε το κομμάτι $(b-r)\bar{X}_t dt$ αν υπήρχε μόνο του (σ = 0) τότε η δίκαιη τιμή δεν θα έχει κανένα νόημα. Το όλο ζήτημα για την δίκαιη τιμή οφείλεται στο κομμάτι $\sigma \bar{X}_t dB_t$ μόνον. Αυτό λοιπόν ακριβώς κάνει το μέτρο Q: αγνοεί το κομμάτι $(b-r)\bar{X}_t dt$ και λαμβάνει υπόψη μόνο το $\sigma \bar{X}_t dB_t$. Για να είμαστε ακριβείς, αγνοεί τον συντελεστή b, αλλά δεν αγνοεί τον συντελεστή r πράγμα που φαίνεται καλύτερα στην (5.6). Σ’αυτή τη σχέση το ζεύγος (X, W) είναι μια ασθενής λύση της Στοχαστικής Διαφορικής Εξίσωσης

$$X_t^* = rX_t^* dt + \sigma X_t^* dW_t^*,\ X_0^* = x$$

για την οποία ισχύει ισχυρή άρα και ασθενής μοναδικότητα. Αυτό σημαίνει ότι προσδιορίζει μια κατανομή στο $C([0,T],\mathbb{R})$ που εξαρτάται από τα r, σ, x και όχι από το b. Δηλαδή το μέτρο P θεωρείται ότι αντανακλά τις προτιμήσεις των επενδυτών απέναντι στον κίνδυνο. Αντίθετα το μέτρο πιθανότητας Q θεωρείται «ουδέτερο κινδύνου» **(risk-neutral measure).** Ένα μέτρο πιθανότητας όπως το Q, δηλαδή ισοδύναμο του μέτρου P και υπό το οποίο η στοχαστική ανέλιξη $\{\bar{X}_t, 0 \le t \le T\}$ είναι F_t-martingale ονομάζεται **ισοδύναμο martingale μέτρο πιθανότητας.**

6. Δικαιώματα Ευρωπαϊκού τύπου

Προχωρούμε τώρα στον απαραίτητο ορισμό στα πλαίσια ενός μοντέλου αγοράς (β, Χ). Ακολουθούν παραδείγματα που διευκρινίζουν τη σημασία του.

Ορισμός 2.5

Έστω Τ>0 και (β, Χ) μοντέλο αγοράς όπως ορίσαμε στις (4.1), (4.2). **Δικαίωμα Ευρωπαϊκού τύπου χρόνου άσκησης Τ** ονομάζεται μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή $Y: \Omega \to [0,\infty)$ που είναι F_t-μετρήσιμη.

Συνεπώς αν $h: 0,\infty \to [0,\infty)$ είναι μη αρνητική Borel συνάρτηση τότε η $Y = h(X_T)$ είναι ένα δικαίωμα Ευρωπαϊκού τύπου χρόνου άσκησης Τ. Αναφέρουμε μερικά συνήθη παραδείγματα τέτοιων δικαιωμάτων.

Παραδείγματα

A) European call option

Το δικαίωμα είναι $Y = (X_T - K)^+$ όπου ο αριθμός Κ ονομάζεται **τιμή άσκησης** του δικαιώματος (strike price) και X_t η τιμή κλεισίματος του υποκείμενου τίτλου την ημέρα λήξης Τ.

B) European put option

Το δικαίωμα είναι $Y = (K - X_T)^+$. όπου Κ και εδώ η τιμή άσκησης του δικαιώματος και X_t η τιμή κλεισίματος του υποκείμενου τίτλου την ημέρα λήξης Τ.

Γ) Currency option

Το δικαίωμα είναι $Y = \left(X_T - \delta\right)^+$ όπου δ εδώ η αντίστοιχη τιμή άσκησης του διακαιώματος όπως στα προηγούμενα δικαιώματα μ.ονο που είναι ίση με $Ke^{-r_1 T}$ όπου r_1 είναι το επιτόκιο του ξένου νομίσματος T είναι ο χρόνος μέχρι τη λήξη και X_t η τιμή κλεισίματος του υποκείμενου τίτλου την ημέρα λήξης T.

Δ) Binary option

Το δικαίωμα είναι $Y = q \begin{cases} 1, X_T > K \\ 0, X_T \leq K \end{cases}$ όπου q είναι το μέρος του υποκείμενου τίτλου που θα λάβει ο κάτοχος αν εκπληρωθεί το δικαίωμα και X_t η τιμή κλεισίματος του υποκείμενου τίτλου την ημέρα λήξης T.

Ε) Compound option

Το δικαίωμα είναι $Y = \left(\tilde{c}\left(X_T, T\right) - K, 0\right)^+$ όπου $\tilde{c}(S_{T_1}, T_1) = S_{T_1} N(d_1) - X_2 e^{-r(T_2 - T_1)} N(d_2)$, K strike price και X_T η τιμή κλεισίματος του υποκείμενου τίτλου την ημέρα λήξης T.

Στ) Chooser option

Το δικαίωμα είναι $Y = \left(c\left(X_{T_c}, T - T_c; K\right), p\left(X_{T_c}, T - T_c; K\right)\right)^+$ όπου K strike price, X_{T_c} η τιμή κλεισίματος του υποκείμενου τίτλου την ημέρα επιλογής λήξης του δικαιώματος T_c ενώ T η τελική ημέρα λήξης του δικαιώματος.

Z) Lookback option

Το δικαίωμα είναι $Y = \ X_T - m_{T_0}^T, 0 \ ^{+}$ όπου $m_{T_0}^T = \min_{T_0 \le \xi \le T} X_\xi$ η ελάχιστη τιμή του υποκείμενου τίτλου στο χρονικό διάστημα T_0, T , K strike price, X_T η τιμή κλεισίματος του υποκείμενου τίτλου την ημέρα λήξης του δικαιώματος T.

H) Asian option

Το δικαίωμα είναι $Y = \ A - K, 0 \ ^{+}$ όπου $A(t) = \dfrac{1}{T - T_0} \int_{T_0}^{t} S(\tau) d\tau$ η μέση τιμή των τιμών του υποκείμενου τίτλου σε χρονικό διάστημα T_0, T και K strike price.

<u>Ορισμός 2.6</u>

Έστω Y ένα δικαίωμα Ευρωπαϊκού τύπου χρόνου άσκησης $T > 0$ αναφερόμενο στο μοντέλο αγοράς. Στρατηγική αντιστάθμισης κινδύνου για το Y (hedging strategy) με αρχική αξία $y \ge 0$ λέγεται ένα χαρτοφυλάκιο $\varphi = \ \varphi_0, \varphi_1 \ \in \mathrm{X}$ με $Y_T^{y,\varphi} = Y$, P - σ.β.

Δίκαιη τιμή για το δικαίωμα Y λέγεται το

$$\rho \ \ \mathrm{Y} \ \ = \inf \ \ y \ge 0 : \exists \varphi \in \tilde{\mathrm{X}}_y \mu\varepsilon Y_T^{y,\varphi} = YP - \sigma.\beta.$$

<u>Σημείωση</u>

Λόγω του ότι για τυχαία $y \ge 0$, $\varphi \in \tilde{\mathrm{X}}_y$, η στοχαστική ανέλιξη $\beta^{-1}\mathrm{Y}^{y,\varphi}$ είναι Q-supermartingale έχουμε το συμπερασμα ότι

$$\rho \ \ \mathrm{Y} \ \ \ge \mathrm{E}_Q \ \ \beta_{\mathrm{T}}^{-1}\mathrm{Y}$$

Πρόταση 2.7

Έστω $\mathrm{T} > 0$ και ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα Y χρόνου άσκησης T για το μοντέλο αγοράς β, X . Υποθέτουμε ότι $\mathrm{E}_Q \; Y \; < \infty$ όπου Q μέτρο πιθανότητας. Έστω τώρα $\varphi \in \tilde{\mathrm{X}}_y$ μια στρατηγική αντιστάθμισης κινδύνου για το Y με αρχική αξία $y \geq 0$. Τότε η στοχαστική ανέλιξη $\beta_t^{-1} \mathrm{Y}_t^{y,\varphi}, 0 \leq t \leq T$ είναι $F_t - martingale$ για το μέτρο Q όταν και μόνο όταν $y = \tilde{y} = \mathrm{E}_Q \; \beta_{\mathrm{T}}^{-1} \mathrm{Y}$.

<u>Απόδειξη</u>

Υποθέτουμε ότι $y = \tilde{y} = \mathrm{E}_Q \; \beta_{\mathrm{T}}^{-1} \mathrm{Y}$. Κατά το Πόρισμα που ορίσαμε παραπάνω η στοχαστική ανέλιξη $\beta_t^{-1} \mathrm{Y}_t^{y,\varphi}, 0 \leq t \leq T$ είναι $F_t - martingale$ για το μέτρο Q. Όμως $E_Q \; \beta_{\mathrm{T}}^{-1} \mathrm{Y}_T^{y,\varphi} \; = \mathrm{E}_Q \; \beta_{\mathrm{T}}^{-1} Y \; = y = E_Q \; \beta_0^{-1} \mathrm{Y}_0^{y,\varphi}$ και συνεπώς η στοχατική ανέλιξη $\beta_t^{-1} \mathrm{Y}_t^{y,\varphi}, 0 \leq t \leq T$ είναι $F_t - martingale$ για το μέτρο Q.

Αμέσως τώρα διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε στη συνέχεια το θεμελιώδες αποτέλεσμα.

Πρόταση 2.8

Έστω $\mathrm{T} > 0$ και Y ένα Ευρωπαϊκό δικαιώμα χρόνου άσκησης T για το μοντέλο β, X που έχουμε ορίσει. Υποθέτουμε ότι $\mathrm{E}_Q \; Y \; < \infty$ όπου Q το μοντέλο πιθανότητας που ορισαμε στις σχέσεις (5.1) και (5.2) πιο πάνω. Τότε $\rho \; \mathrm{Y} \; \geq \mathrm{E}_Q \; \beta_{\mathrm{T}}^{-1} \mathrm{Y} \; = \hat{y}$ και υπάρχει μια μοναδική στρατηγική αντιστάθμισης κινδύνου $\varphi \in \tilde{\mathrm{X}}_y$ με αρχική αξία $\hat{y}$ για το δικαίωμα Y.

Απόδειξη

Ορίζουμε $M_t = \mathrm{E}_Q\left(\beta_{\mathrm{T}}^{-1} Y \mid F_t\right),\ 0 \le t \le T$. Η στοχαστική ανέλιξη M είναι $F_t - martingale$ για το μέτρο Q. Επειδή για την κίνηση Brown $\left(W_t, 0 \le t \le T\right)$ την οριζόμενη στην (5.4) ισχύει $F_t = \sigma\left(\Phi_t^W \cup N_Q\right)$, το martingale M αναπαρίσταται ως στοχαστικό ολοκλήρωμα ως προς W $$M_t = \hat{y} + \int_0^t \psi(s)\, dW_s \quad \text{Q-σ.β.},\quad 0 \le t \le T$$

όπου $\psi \in P\left(0,T\right)$. Ορίζουμε $\hat{\varphi} = \left(\hat{\varphi}_0, \hat{\varphi}_1\right)$ με

$$\hat{\varphi}_1(t) = \beta(t)\frac{\psi(t)}{\sigma X_t},\ 0 \le t \le T$$

$\hat{\varphi}_0$ με $\hat{y}$ αντί του y και $\hat{\varphi}_1$ αντί φ_1. Από προηγούμενη παρατήρηση ξέρουμε ότι ισχύει $\hat{\varphi} \in \mathrm{X}_{\hat{y}}$.

Εξάλλου από τον ορισμό $\psi = \sigma \hat{\varphi}_1 \beta^{-1} \mathrm{X}$ και συνεπώς $\forall t \in \left[0, \mathrm{T}\right]$

$$M_t = \hat{y} + \int_0^t \sigma \hat{\varphi}_1(s)\, \beta_s^{-1} \mathrm{X}_s dW_s,\ \text{Q-σ.β.}$$

Και συγκρίνοντας με την (5.8)(με $\hat{\varphi}$ όπου φ) συμπεραίνουμε

$$\beta_t^{-1} \mathrm{Y}_t^{y,\varphi} = M_t \ge 0 \quad \text{Q-σ.β.},\quad 0 \le t \le T$$

Από την τελευταία συμπεραίνουμε αφενός μεν $\varphi \in \mathrm{X}_{\hat{y}}$ και αφετέρου ότι $\beta_{\mathrm{T}}^{-1} \mathrm{Y}_T^{\hat{y},\hat{\varphi}} = \beta_{\mathrm{T}}^{-1} Y$, άρα $Y_T^{\hat{y},\hat{\varphi}} = Y$ Q-σ.β.

Είναι προφανές τώρα ότι $\rho\left(\mathrm{Y}\right) \le \hat{y}$. Είναι όμως ήδη γνωστό ότι $\rho\left(\mathrm{Y}\right) \ge E_Q\left(\beta_{\mathrm{T}}^{-1} \mathrm{Y}\right) = \hat{y}$ και συνεπώς $\hat{y} = \rho\left(\mathrm{Y}\right)$.

Απομένει να δείξουμε ότι η στρατηγική $\hat{\varphi}$ είναι η μόνη στο $\tilde{\mathrm{X}}_{\hat{y}}$. Πράγματι έστω

$\varphi' \in \tilde{\mathrm{X}}_{\hat{y}}$ με $Y_T^{\hat{y},\varphi'} = Y$ P-σ.β. (Q-σ.β. επίσης). Οι στοχαστικές ανελίξεις $\beta^{-1}\mathrm{Y}^{\hat{y},\hat{\varphi}}$, $\beta^{-1}\mathrm{Y}^{\hat{y},\varphi'}$

είναι $F_t - martingale$ για το μέτρο Q και συνεπώς για κάθε $t \in \ 0,T$

$$\beta^{-1}\mathrm{Y}^{\hat{y},\hat{\varphi}} = \mathrm{E}_Q \ \ \beta_{\mathrm{T}}^{-1}Y \,|\, F_t \ \ = \beta^{-1}\mathrm{Y}^{\hat{y},\varphi'}, \text{ Q-σ.β.}$$

Επικαλούμενοι την (5.8) συμπεραίνουμε ότι για κάθε $t \in \ 0,T$

$$\int_0^t \sigma\hat{\varphi}_1 \ \ s \ \ \beta_s^{-1}\mathrm{X}_s dW_s = \int_0^t \sigma\varphi_1' \ \ s \ \ \beta_s^{-1}\mathrm{X}_s dW_s, \quad \text{Q-σ.β}$$

και θέτοντας

$$V_t = \int_0^t \sigma\beta_s^{-1}X_s \ \ \hat{\varphi}_1 \ \ s \ \ - \varphi' \ \ s \ \ \ dW_s$$

έχουμε $V_t^2 = 0$ Q-σ.β., $\forall t \in \ 0,\mathrm{T}$.

Αρκεί τώρα εφαρμογή της φόρμουλα του Ito στην V_t^2 για να συμπεράνουμε ότι

$\hat{\varphi}_1 = \varphi_1' \quad dt \otimes dQ$ Q-σ.β. Επειδή έχουμε ότι $\hat{\varphi}_0\beta + \hat{\varphi}_1 = \varphi_0'\beta + \varphi_1'\mathrm{X}$ (μη διακρινόμενες)

συμπεραίνουμε ότι και $\hat{\varphi}_0 = \varphi_0' \ \ dt \otimes dQ$, Q-σ.β. Τελικά $\hat{\varphi} = \varphi' \quad dt \otimes dQ$, Q-σ.β. και

αφού τα μέτρα P,Q είναι ισοδύναμα εξασφαλίζουμε ότι $\hat{\varphi} = \varphi' \quad dt \otimes dP$, P -σ.β..

<u>Ορισμός 2.9</u>

Με βάση τις προϋποθέσεις της παραπάνω Πρότασης 2.8 θέτουμε $\hat{Y}_t = \mathrm{Y}_t^{\hat{y},\hat{\varphi}}$,

$0 \le t \le T$ και έχουμε τα ακόλουθα συμπεράσματα.

Η στοχαστική ανέλιξη $\hat{Y}_t, 0 \le t \le T$ ονομάζεται ανέλιξη αξίας του δικαιώματος Y.

7. Αποτίμηση δικαιωμάτων Ευρωπαϊκού Τύπου

Για δικαιώματα της μορφής $Y = h(X_T)$ όπου $h:(0,\infty) \to [0,\infty)$ συνεχής με $E_Q[h(X_T)] < \infty$ στο μέτρο πιθανότητας Q όπως το ορίσαμε στις προηγούμενες παραγράφους έχουμε $\hat{Y}_t = E_Q[e^{-r(T-t)}h(X_T)\,|F_t]$

όπου $X_T = x + \int_0^T rX_s ds + \int_0^T \sigma X_s dW_s$ η αντίστοιχη εξίσωση από το μοντέλο Black-Scholes για το μέτρο Q.

και συνεπώς με αντικατάσταση της δεύτερης σχέσης στην πρώτη προκύπτει η ακόλουθη σχέση $\hat{Y}_t = E_Q[e^{-r(T-t)}h(X_t + \int_t^T rX_s ds + \int_t^T \sigma X_s dW_s\,|F_t].$

Τώρα μπορούμε να γράψουμε $\hat{Y}_t = g(t, X_t)$ (7.1)

με $g(t,\xi) \equiv E_Q(e^{-r(T-t)}h(\xi + \int_t^T rX_s ds + \int_t^T \sigma X_s dW_s))$

ή αλλιώς πιο σύντομα $g(t,\xi) = E_Q(e^{-r(T-t)}h(X^t(\xi,T))),\ \xi > 0$ (7.2)

όπου $X^t(\xi,u),\ t \le u \le T$ η λύση της Στοχαστικής Διαφορικής Εξίσωσης (υπό το μέτρο Q) $X_u = \xi + \int_t^u rX_s ds + \int_t^u \sigma X_s dW_s,\ t \le u \le T.$

Όμως η λύση αυτής της Στοχαστικής Διαφορικής Εξίσωσης γράφεται και

$$X_u^t = \xi e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(u-t)+\sigma(W_u - W_t)},\ t \le u \le T$$

και θέτοντας $\lambda = r - \frac{1}{2}\sigma^2$ προκύπτει η εξης σχέση

$$g(t,\xi) = E_Q[e^{-r(T-t)}h(\xi e^{\lambda(T-t)+\sigma(W_T - W_t)})].$$

Επειδή η τυχαία μεταβλητή $W_T - W_t$ ακολουθεί κατανομή N (0, T – t) για $0 \le t \le T$ και κατανομή δ_0 για t = T συμπεραίνουμε ότι

$$g(t,\xi) = \begin{cases} \dfrac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi e^{\lambda(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}}) e^{\frac{y^2}{2}} dy, & 0 \le t \le T \\ h(\xi), & t = T \end{cases} \tag{7.3}$$

Προκύπτει άμεσα ότι $g \in C([0,T] \times (0,\infty))$. και κάνοντας τώρα τον μετασχηματισμό

$$\xi e^{\lambda(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}} = z$$

έχουμε για $0 \le t \le T$ $\quad g(t,\xi) = e^{-r(T-t)} \int_0^{\infty} h(z) K(t,z,\xi) dz$ (7.4)

όπου $K(t,z,\xi) = \dfrac{1}{\sigma z\sqrt{2\pi(T-\tau)}} \exp\{-\dfrac{[\ln z - \ln\xi - \alpha(T-t)]^2}{2\sigma^2(T-t)}\}.$

Υποθέτουμε τώρα ότι η συνάρτηση h ικανοποιεί την απαίτηση:

Για c > 0, $m \ge 1$ ισχύει $h(x) \le c(1+x^m)$ $\forall x \in (0,\infty)$. (7.5)

Υπό τη συνθήκη αυτή, από την (7.4) συνάγουμε ότι

$$h \in C^{1,2}([0,T) \times (0,\infty))$$

και συνεπώς εφαρμόζεται η formula του Ito στην στοχαστική ανέλιξη

$$e^{-rt}\hat{Y}_t = e^{-rt} g(t, X_t), \quad 0 \le t \le T$$

$$e^{-rt}\hat{Y}_t = \hat{y} + N_t + \int_0^t \beta_s^{-1} \frac{\partial g}{\partial \xi}(s, X_s) \sigma X_s dW_s$$

όπου $N_t = \int_0^t e^{-rs} Lg(s, X_s) ds$, $Lg = \dfrac{\partial g}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\sigma^2\xi^2 \dfrac{\partial^2 g}{\partial \xi^2} + r\xi \dfrac{\partial g}{\partial \xi} - rg.$

Όμως σύμφωνα με την (6.6) το πρώτο μέλος είναι F_t-martingale και το στοχαστικό ολοκλήρωμα του δευτέρου μέλους είναι F_t-local martingale (υπό το μέτρο Q πάντα) και συνεπώς $N_t = 0$ Q-σ.β. Τελικά $e^{-rt}\hat{Y}_t = \hat{y} + \int_0^t \beta_s^{-1} \frac{\partial g}{\partial \xi}(s, X_s)\sigma X_s dW_s,\ 0 \le t \le T.$

Όμως
$$e^{-rt}\hat{Y}_t = M_t \equiv \hat{y} + \int_0^t \psi(s) dW_s,\ 0 \le t \le T$$

και άρα η ψ θα είναι ίση με
$$\psi = \beta^{-1}\frac{\partial g}{\partial \xi}(\cdot, X)\sigma X.$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την σχέση (6.9) συμπεραίνουμε ότι ισχύει το ακόλουθο

$$\hat{\varphi}_1(t) = \frac{\partial g}{\partial \xi}(t, X_t),\ \hat{\varphi}_0(t) = e^{-rt}g(t, X_t) - e^{-rt}\frac{\partial g}{\partial \xi}(t, X_t)X_t,\ t \in [0, T). \qquad (7.6)$$

<u>Πρόταση 2.10</u>

Έστω ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα $Y = h(X_T)$ όπου $h: (0,\infty) \to [0,\infty)$ συνεχής με μαθηματική ελπίδα ως προς το μέτρο Q $E_Q[h(X_T)] < \infty.$ Τότε η ανέλιξη αξίας Y και η δίκαιη τιμή ρ(Y) δίνονται από τις σχέσεις

$$Y_t = g(t, X_t),\ \ 0 \le t \le T$$

$$\rho(Y) = g(0, x)$$

όπου g η συνάρτηση η οριζόμενη από την σχέση (7.3) με $\lambda = r - \frac{1}{2}\sigma^2.$ Επιπλέον υπό τη συνθήκη (7.5), το μοναδικό χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης κινδύνου $\hat{\varphi} = (\hat{\varphi}_0 - \hat{\varphi}_1)$ δίνεται από τις σχέσεις (7.6).

Αν θεωρήσουμε τώρα το πρόβλημα Cauchy

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2x^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+rx\frac{\partial V}{\partial x}-rV=0 \text{ στο } [0,T)\times(0,\infty)$$
$$V(T,x)=h(x),\ x\in(0,\infty) \tag{7.7}$$

και υποθέσουμε ότι υπάρχει γι'αυτό μοναδική λύση $V\in C([0,T]\times(0,\infty))\cap C^{1,2}([0,T)\times(0,\infty))$ που ικανοποιεί τις απαιτήσεις του Θεωρήματος Feynman-Kac. Στην περίπτωση αυτή εφαρμόζεται το Θεώρημα Geynman-Kac και η λύση V αναπαρίσταται στοχαστικά ακριβώς όπως η συνάρτηση g στην σχέση (7.2), είναι δηλαδή V = g και συνεπώς

$$\hat{Y}_t=g(t,X_t)=V(t,X_t),\ 0\le t\le T \tag{7.8}$$

και άρα η δίκαιη τιμή του δικαιώματος Y είναι ίση με

$$\rho(Y)=g(0,x)=V(0,x). \tag{7.9}$$

Το πρόβλημα Cauchy (7.7) είναι γνωστό ως **εξίσωση Black-Scholes.**

Συχνα, στη θέση της συνάρτησης g, χρησιμοποιείται η συνάρτηση F που ορίζεται από την εξης ακόλουθη σχέση

$$F(t,\xi)=g(T-t,\xi)=V(T-t,\xi),\ 0\le t\le T,\ \xi>0.$$

Τότε $\hat{Y}_t=F(T-t,X_t),\ 0\le t\le T$ και ρ(Y) = F(T, x).

Οι σχέσεις (7.6) γράφονται για $0\le t\le T$

$$\hat{\varphi}_1(t)=\frac{\partial F}{\partial \xi}(T-t,X_t),\ \hat{\varphi}_0(t)=e^{-r(T-t)}F(T-t,X_t)-e^{-r(T-t)}\hat{\varphi}_1(t)X_t$$

και το πρόβλημα Cauchy (7.7) αναδιατυπώνεται σε

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + rx\frac{\partial F}{\partial x} - rF \text{ στο } (0,T]\times(0,\infty)$$

$$F(0,x) = h(x),\ x \in (0,\infty).$$

Ενδεικτικά αναφέρουμε τον τύπο για τα European Options που είναι γνωστή ως Black-Scholes formula και έχει ως εξής:

$$\rho(Y) = g_c(0,x) = x\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2) \qquad (7.10)$$

όπου $d_1 = \dfrac{\ln(x/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$, $d_2 = \dfrac{\ln(x/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$.

Κεφαλαιο 3

Currency options

Ξεκινώντας από το μοντέλο Black-Scholes (β, X) που ορίσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, θα δώσουμε στη συνέχεια μια συγκεκριμένη ερμηνεία που θα περιγράφει ένα παράδειγμα δικαιώματος προαίρεσης. Έστω $X_t, 0 \le t \le T$ να είναι η τιμή της μονάδας ενός ξένου νομίσματος σε μονάδες του ντόπιου νομίσματος. Το δικαίωμα που θα εξετάσουμε είναι το παρακάτω και αφορά ισοτιμία:

$$\mathrm{Y} = (X_T - \delta)^{+} \text{ όπου } \delta > 0$$

Ο εκδότης του δικαιώματος σχηματίζει ένα χαρτοφυλάκιο (φ_0, φ_1), από το εντόπιο και το ξένο νόμισμα αντίστοιχα, του οποίου η αξία (στο εντόπιο νόμισμα) να είναι $\mathrm{Y}^{\varphi} = \varphi_0 \beta + \varphi_1 \gamma X$ με $\gamma(t) = e^{r_1 t}$, $0 \le t \le T$ και $r_1 \ge 0$ να είναι το επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού του ξένου νομίσματος. Αυτό συμβαίνει γιατί σήμερα ($t = 0$) η αξία του ενός δολαρίου σαν παράδειγμα ξένου νομίσματος είναι $X_0 = x$€ αλλά την χρονική στιγμή $t > 0$ το ένα δολάριο γίνεται $e^{r_1 t}$ και συνεπώς η αξία του σε ευρώ για παράδειγμα εντόπιου νομίσματος θα είναι $e^{r_1 t} X_t$ (αφού X_t είναι η αξία σε ευρώ του ενός δολαρίου κατά τη χρονική στιγμή t).

Αν τώρα θέσουμε $X_t^* = e^{r_1 t} X_t$, $0 \le t \le T$ τότε με απλή εφαρμογή της φόρμουλας του Ito πέρνουμε σαν αποτέλεσμα ότι

$$dX_t^* = (b + r_1) X_t^* dt + \sigma X_t^* dB_t, \quad X_0^* = x$$

Έτσι μπορούμε το παραπάνω πρόβλημα να το ανάγουμε πλέον στο μοντέλο (β, X^*) στο οποίο το δικαίωμα Y μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$Y = \left(e^{-r_1 T} X_T^* - \delta\right)^+ = \left(e^{-r_1 T} X_T^* - e^{-r_1 T} e^{r_1 T}\delta\right)^+ = e^{-r_1 T}\left(X_T^* - e^{r_1 T}\delta\right)^+ = e^{-r_1 T}\left(X_T^* - K\right)^+$$

όπου $K = e^{r_1 T}\delta$

και συνεπώς η ανέλιξη αξίας του δικαιώματος Y είναι η ακόλουθη

$$\hat{Y}_t = e^{-r_1 T} E_Q\left[e^{-r(T-t)}\left(X_T^* - K\right) \mid F_t\right], \quad 0 \le t \le T$$

όπου Q είναι το martingale μέτρο πιθανότητας για το μοντέλο (β, X^*), όπως

περιγράφηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, δηλαδή το $Q(A) = \int_A Z_T dP$, $A \in F_T$

όπου $Z_T = e^{-\theta B_T - \frac{1}{2}\theta^2 T}$ και $\theta = \dfrac{b + r_1 - r}{\sigma}$.

Άρα, συνεπάγεται ότι $\hat{Y}_t = e^{-r_1 T} g_c\left(t, X_T^*\right)$, $0 \le t \le T$

όπου g_c η συνάρτηση

$$g_c(t,\xi) = \xi\Phi(d_+) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_-)$$

με $$d_+ = d_+(t,\xi) = \frac{\ln\left(\frac{\xi}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

και $$d_- = d_-(t,\xi) = \frac{\ln\left(\frac{\xi}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Όμως ξέρουμε ότι η τιμή άσκησης δικαιώματος είναι πλέον $K = e^{r_1 T}\delta$ και αντίστοιχα $X_t^* = e^{r_1 t} X_t$ και συνεπώς με αντικατάσταση στους παραπάνω τύπους έχουμε:

$$d_+ = d_+\left(t, X_t^*\right) = \frac{\ln\left(\frac{X_t}{\delta}\right) + \left(r - r_1 + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_- = d_-\left(t, X_t^*\right) = \frac{\ln\left(\frac{X_t}{\delta}\right) + \left(r - r_1 - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Τελικά από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι

$$\hat{Y}_t = e^{-r_1\ T-t}\ X_t \Phi\ \ d_+{}' \ \ -\delta e^{-r\ T-t}\ \Phi\ \ d_-{}'$$

όπου d_+' και d_-' είναι οι σχέσεις που ορίσαμε παραπάνω.

Ειδικότερα η δίκαιη τιμή (premium) είναι

$$\hat{Y}_0 = e^{-r_1 T} x \Phi\ \ d_1\ \ -\delta e^{-rT} \Phi\ \ d_2$$

όπου

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{x}{\delta}\right) + \left(r - r_1 + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\mathrm{T}}{\sigma\sqrt{\mathrm{T}}} \quad \text{και} \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{x}{\delta}\right) + \left(r - r_1 - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\mathrm{T}}{\sigma\sqrt{\mathrm{T}}}$$

ΠΙΝΑΚΕΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΩΝ CURRENCY OPTIONS

Για X=60€ αρχική τιμή της μετοχής, K=90€ τιμή άσκησης δικαιώματος, r=0.05 επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού ξένου νομίσματος, r1=0.02 επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού εντόπιου νομίσματος, T=1/4 του χρόνου ο χρόνος λήξης του δικαιώματος, σ=0.1 διακύμανση της κανονικής κατανομής παίρνουμε πραγματική τιμή για το premium του currency option 5.9518€. Αλλάζοντας την διακύμανση παρατηρούμε ότι αλλάζει και η τιμή του premium και συγκεκριμένα όταν αυξάνεται η διακύμανση η δίκαιη τιμή μειώνεται.

σ (volatility)	premium
0.05	5.9588 €
0.10	5.9518 €
0.15	5.8748 €
0.20	5.7150 €

Αλλάζοντας τώρα την τιμή για τον χρόνο λήξης του δικαιώματος σε T=1/2 του χρόνου η δίκαιη τιμή παίρνει την τιμή 0.830815€ και αυξάνοντας την διακύμανση παρατηρούμε για ακόμη μια φορά την δίκαιη τιμή να μειώνεται, με πολύ μικρό ρυθμό βέβαια.

σ (volatility)	premium
0.05	0.830818 €
0.10	0.830815 €
0.15	0.830439 €
0.20	0.828583 €

Binary options

Στα οικονομικά, ένα binary παράγωγο είναι ένας τύπος παραγώγου όπου η αποπληρωμή είναι είτε κάποια καθορισμένη μονάδα της μετοχής ή τίποτα πολύτως. Οι δυο κύριοι τύποι binary παραγώγου είναι οι εξης, cash-or-nothing binary option και asset-or-nothing binary option. Στο πρώτο πληρωνουμε ένα συγκεκριμένο ποσό χρημάτων αν το παράγωγο λήξει in-the-money ενώ στο δεύτερο πληρώνουμε την τιμή «ασφάλειας» της μετοχής για την οποία παίζεται το παιχνίδι. Έτσι, τα παράγωγα είναι binary (διωνυμικά) και φυσικά αφού υπάρχουν δυο μόνο πιθανά αποτελέσματα. Επίσης λέγονται και all-or-nothing (όλα ή τίποτα) παράγωγα, digital options, ή και fixed return options. Να σημειώσουμε ότι τα παράγωγα binary είναι σχεδόν πάντα Ευρωπαϊκού Τύπου.

Όταν αγοράζουμε ένα παράγωγο binary τα πιθανά κέρδη που αυτό θα επιφέρει είναι σίγουρα και γνωστά πριν γίνει η αγορά. Τα binary παράγωγα μπορούν να αγοραστούν φαινομενικά για οποιοδήποτε οικονομικό προϊόν και στις δυο κατευθύνσεις της αγοράς, είτε αγοράζοντας ένα “Call/Up” option, είτε ένα “Put/Down” option. Αυτό σημαίνει ότι ο επενδυτής μπορεί να επενδύσει σε long ή short σε οποιοδήποτε οικονομικό προϊόν απλά αγοράζοντας ένα binary option. Αυτού του είδους τα options προσφέρονται για έναν συγκεκριμένο χρόνο λήξης ο οποίος μπορεί να είναι είτε για παράδειγμα 5-30 λεπτά αργότερα στο μέλλον, μια ώρα μπροστά ή στο κλείσιμο των μετοχών της μέρας . Επίσης να σημειώσουμε ότι τα binary options δεν μπορούν να ξαναπωληθούν αφότου αγοραστούν πριν την ημερομηνία λήξης τους.

Ξεκινάμε πάντα από το μοντέλο Black-Scholes (β,X) που ορίσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο

$$\beta(t) = 1 + \int_0^t r\beta(s)\,ds \qquad \text{με} \qquad 0 \le t \le T$$

και
$$X_t = x + \int_0^t bX_s ds + \int_0^t \sigma X_s dB_s \qquad 0 \le t \le T$$

όπου $r \ge 0$, το επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού του υποκείμενου τίτλου, $b \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$,η διακύμανση της κανονικής κατανομής $x > 0$,η αρχική τιμή της μετοχής την ημέρα έναρξης του συμβολαίου και $T > 0$η διάρκεια του συμβολαίου.

Τελικά, φτάνουμε στην παρακάτω εξίσωση που αποδίδει τη δίκαιη τιμή του δικαιώματος

$$Y = Xe^{-qT}\Phi(d_1)$$

με
$$d_1 = \frac{\ln\frac{X}{K} + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

όπου K η τιμή άσκησης του δικαιώματος (strike price) και q το μέρος του υποκείμενου τίτλου που θα αποδώσει ο εκδότης στον κάτοχο την ημέρα λήξης του συμβολαίου αν εξασκείσει το δικαίωμά του.

και
$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

η κανονική κατανομή.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΣΤΑ BINARY OPTIONS

Για X=60€ αρχική τιμή της μετοχής, K=90€ strike price, r=0.02 επιτόκιο, T=1/4 του χρόνου ο χρόνορ λήξης του συμβολαίου, σ=0.1 διακύμανση κανονικής κατανομής, η δίκαιη τιμή (premium) του Binary Option είναι 17.09681€ και αυξάνοντας την διακύμανση εδώ βλέπουμε ότι υπάρχει μείωση του premium αρχικά η οποία αρχίζει να εξασθενεί όταν η διακύμανση φτάνει το 20%.

σ (volatility)	Premium
0.05	29.588904 €
0.10	17.096810 €
0.15	12.739471 €
0.20	19.749801 €

Αλλάζοντας τώρα την τιμή για τον χρόνο λήξης του δικαιώματος σε T=1/2 του χρόνου η δίκαιη τιμή παίρνει την τιμή 25.886714 € και αυξάνοντας την διακύμανση παρατηρούμε για ακόμη μια φορά την δίκαιη τιμή να μειώνεται, με τον ίδιο ρυθμό όπως και αρχικά.

σ (volatility)	Premium
0.05	29.705147 €
0.10	25.886714 €
0.15	14.984146 €
0.20	19.867923 €

Compound options

Ένα δικαίωμα προαίρεσης τύπου compound “σύνθετο” είναι απλά ένα δικαίωμα πάνω σε ένα άλλο δικαίωμα (option on an opiton). Υπάρχουν 4 κύριοι τύποι compound διακιωμάτων, που τα παραθέτουμε ονομαστικά και είναι τα, call on a call, call on a put, put on a call και put on a put. Εμείς παρακάτω θα ασχοληθούμε περεταίρω με την περίπτωση του call on a call. Ένα compound δικαίωμα, έχει δυο τιμές άσκησης δικαιώματος (strike price) και δυο χρόνους λήξης. Γενικά, θεωρούμε ένα call on a call όπου και τα δυο calls είναι Ευρωπαϊκού τύπου. Στον πρώτο χρόνο T_1, ο κάτοχος του compound δικαιώματος έχει το δικαίωμα να αγοράσει το υποβόσκον call δικαίωμα για την πρώτη τιμή άσκησης δικαιώματος K_1. Το υποβόσκον call δικαίωμα δίνει το δικαίωμα στον κάτοχό του να αγοράσει τον υποβόσκοντα υποκείμενο τίτλο για την δεύτερη τιμή άσκησης δικαιώματος K_2 σε έναν αργότερο χρόνο λήξης T_2. Ας θεωρήσουμε ως $c(S,T)$ και $\tilde{c}(S_{T_1},T_1)$ να είναι οι αξίες του παραγώγου call-on-a-call και του υποβόσκοντος call παραγώγου αντίστοιχα, όπου S_t και S_{T_1} είναι αντίστοιχα η τιμή της μετοχής σε παρόντα χρόνο t και η τιμή της μετοχής στον χρόνο πρώτης λήξης T_1. Ας σημειώσουμε ότι το compound παράγωγο θα εξασκηθεί σε χρόνο T_1 μόνο όταν $\tilde{c}(S_{T_1},T_1) > K_1$.

Ας θεωρήσουμε την συνήθη Γεωμετρική κίνηση Brown για την τιμή του υποβόσκοντα τίτλου, πλαισιωμένη από αναλυτικές φόρμουλες αποτίμησης για τα Ευρωπαϊκής μορφής compound δικαιώματα με όρους από την διμεταβλητή συνάρτηση κανονικής κατανομής. Από χρόνο $t = T_2$ μέχρι χρόνο $t = T_1$ (γυρνώντας πίσω στο χρόνο), η αξία του υποβόσκοντος call δικαιώματος δίνεται από την φόρμουλα Black-Scholes για call options. Συγκεκριμένα, όταν $t = T_1$, έχουμε να ισχύει ότι

$$\tilde{c}(S_{T_1}, T_1) = S_{T_1} N(d_1) - K_2 e^{-r(T_2 - T_1)} N(d_2) ,$$

όπου

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_{T_1}}{K_2} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T_2 - T_1)}{\sigma \sqrt{T_2 - T_1}} , \quad \text{και} \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T_2 - T_1} .$$

Η κρίσιμη τιμή για S_{T_1}, δηλωμένη από το X, πάνω στην οποία το compound παράγωγο θα εξασκηθεί σε χρόνο T_1 δίνεται λύνοντας την μη-γραμμική αλγεβρική εξίσωση $\tilde{c}(S_{T_1}, T_1) = \mathrm{K}_1 .$

Η συνάρτηση αποπληρωμής του compound δικαιώματος σε χρόνο ίσο με T_1 είναι

$$c(X, T_1) = \max(\tilde{c}(S_{T_1}, T_1) - K_1, 0)$$

Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση για την μαθηματική ελπίδα, η τιμή του compound δικαιώματος για $t < T_1$ δίνεται από την σχέση

$$\begin{aligned} c(S,t) &= e^{-r(T_1 - t)} \int_0^\infty \max(\tilde{c}(S_{T_1}, T_1) - K_1, 0) \psi(S_{T_1}; S) dS_{T_1} \\ &= e^{-r(T_1 - t)} \int_{\mathrm{K}}^\infty [S_{T_1} \Phi(d_1) - K_2 e^{-r(T_2 - T_1)} \Phi(d_2) - \mathrm{K}_1] \psi(S_{T_1}; S) dS_{T_1} \end{aligned} \qquad (2.1)$$

όπου η συνάρτηση πυκνότητας δίνεται από τη σχέση

$$\psi(S_{T_1};S)=\frac{1}{S_{T_1}\sigma\sqrt{2\pi(T_1-t)}}\ \exp\left(-\frac{\{\ln S_{T_1}-[\ln S+(r-\frac{\sigma^2}{2})(T_1-t)]\}^2}{2\sigma^2(T_1-t)}\right)$$

Ο τελευταίος όρος στην εξίσωση (2.1) είναι εύκολα αναγνωρίσιμος ως

τρίτος όρος= $=-\mathrm{K}_1 e^{-r(T_1-t)}\int_{\mathrm{K}}^{\infty}\psi(S_{T_1};S)dS_{T_1}=-\mathrm{K}_1 e^{-r(T_1-t)}\Phi(a_2)$

όπου

$$a_1=\frac{\ln\frac{S}{\mathrm{K}}+(r+\frac{\sigma^2}{2})(T_1-t)}{\sigma\sqrt{T_1-t}},\qquad \text{και} \qquad a_2=a_1-\sigma\sqrt{T_1-t}$$

Για να αποτιμήσουμε τους άλλους δυο όρους, είναι βολικό να χρησιμοποιήσουμε τους μετασχηματισμούς: $x=\ln S_{T_2}$ και $y=\ln S_{T_1}$. Ο δεύτερος όρος της εξίσωσης (2.1) μπορεί να εκφραστεί ως εξης

δεύτερος όρος $=-\mathrm{K}_2 e^{-r(T_2-t)}\int_{\mathrm{K}}^{\infty}\Phi(d_2)\psi(S_{T_1};S)dS_{T_1}$

$$=-\mathrm{K}_2 e^{-r(T_2-t)}\int_{\mathrm{K}}^{\infty}\int_{\mathrm{K}_2}^{\infty}\psi(S_{T_2};S_{T_1})\psi(S_{T_1};S)dS_{T_2}dS_{T_1}$$

$$=-\mathrm{K}_2 e^{-r(T_2-t)}\int_{\ln \mathrm{K}}^{\infty}\int_{\ln \mathrm{K}_2}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T_1-t)}}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T_2-T_1)}}$$

$$\exp\left(-\frac{\{y-[\ln S+(r-\frac{\sigma^2}{2})(T_1-t)]\}^2}{2\sigma^2(T_1-t)}\right)$$

$$\exp\left(-\frac{\{x-[y+(r-\frac{\sigma^2}{2})(T_2-T_1)]\}^2}{2\sigma^2(T_2-T_1)}\right)dxdy$$

Περαιτέρω, αν ορίσουμε ως

$$y'=\frac{y-[\ln S+(r-\frac{\sigma^2}{2})(T_1-t)]}{\sigma(T_1-t)} \quad \text{και} \quad x'=\frac{x-[\ln S+(r-\frac{\sigma^2}{2})(T_2-t)]}{\sigma(T_2-t)}$$

και επίσης

$$\rho=\sqrt{\frac{T_1-t}{T_2-t}}$$

τότε τα παραπάνω ολοκληρώματα μπορούν να εκφραστούν ως εξης

δεύτερος όρος $=-\mathrm{K}_2e^{-r(T_2-t)}\int_{-a_2}^{\infty}\int_{-b_2}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}$

$$\exp\left(-\frac{(x'-\rho y')^2}{2(1-\rho^2)}-\frac{y'^2}{2}\right)dx'dy'$$

$$=-\mathrm{K}_2e^{-r(T_2-t)}\int_{-\infty}^{a_2}\int_{-\infty}^{b_2}\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\exp\left(-\frac{x'^2-2\rho x'y'+y'^2}{2(1-\rho^2)}\right)dx'dy'$$

$$=-\mathrm{K}_2e^{-r(T_2-t)}\Phi_2(a_2,b_2;\rho)$$

όπου $\Phi_2(a_2, b_2; \rho)$ είναι η διμεταβλητή συνάρτηση κανονικής κατανομής με συντελεστή συσχέτισης ρ, και b_1, b_2 δοσμένα από τη σχέση

$$b_1 = \frac{\ln\frac{S}{K^2} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T_2 - t)}{\sigma\sqrt{T_2 - t}}, \quad \text{και} \quad b_2 = b_1 - \sigma\sqrt{T_2 - t}.$$

Σημειώνουμε ότι η $\Phi_2(a_2, b_2; \rho)$ μπορεί να ερμηνευτεί ως η πιθανότητα να συμβεί $S_{T_1} > X$ σε χρόνο T_1 και $S_{T_2} > X$ σε χρόνο T_2, δεδομένου ότι η τιμή του υποκείμενου τίτλου σε χρόνο t ισούται με S_t.

Όμοια, ο πρώτος όρος στην εξίσωση (2.1) μπορεί να εκφραστεί ως εξής

$$\text{πρώτος όρος} = e^{-r(T_1 - t)} \int_K^\infty S_{T_1} \Phi(d_1) \psi(S_{T_1}; S) dS_{T_1}$$

$$= e^{-r(T_1 - t)} \int_{\ln K}^\infty \int_{\ln K_2}^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T_1 - t)}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T_2 - T_1)}} e^{-r(T_2 - T_1)}$$

$$\exp(-\frac{\{y - [\ln S + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T_1 - t)]\}^2}{2\sigma^2(T_1 - t)})$$

$$\exp(x - \frac{\{x - [y + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T_2 - T_1)]\}^2}{2\sigma^2(T_2 - T_1)}) dxdy$$

$$= e^{-r(T_1 - t)} \int_{\ln K}^\infty \int_{\ln K_2}^\infty \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} \frac{1}{\sigma\sqrt{T_1} - t} \frac{1}{\sigma\sqrt{T_2 - t}} e^{-r(T_1 - t)}$$

$$\exp\left(-\frac{\{y-[\ln S+(r-\frac{\sigma^2}{2})(T_1-t)]\}^2}{2\sigma^2(T_1-t)}\right)$$

$$\exp\left(x-\frac{\{x-[y+(r-\frac{\sigma^2}{2})(T_2-T_1)]\}^2}{2\sigma^2(T_2-T_1)}\right)dxdy\ .$$

Τώρα, θεωρούμε τα

$$\tilde{y}=\frac{y-[\ln S+(r-\frac{\sigma^2}{2})(T_1-t)]}{\sigma\sqrt{T_1-t}} \quad \text{και} \quad \tilde{x}=\frac{x-[\ln S+(r-\frac{\sigma^2}{2})(T_2-t)]}{\sigma\sqrt{T_2-t}}$$

τα παραπάνω ολοκληρώματα μπορούν να εκφραστούν ως εξης

πρώτος όρος $=S\int_{-\infty}^{a_1}\int_{-\infty}^{b_1}\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{\tilde{x}^2-2\rho\tilde{x}\tilde{y}+\tilde{y}^2}{2(1-\rho^2)}\right)d\tilde{x}d\tilde{y}$

$$=S\Phi_2(a_1,b_1;\rho)$$

Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα στις παραπάνω εξισώσεις, η τιμή ενός call-on-a-call compound παραγώγου βρίσκεται να είναι

$$c(S,t)=S\Phi_2(a_1,b_1;\rho)-\mathrm{K}_2e^{-r(T_2-t)}\Phi_2(a_2,b_2;\rho)-\mathrm{K}_1e^{-r(T_1-t)}\Phi(a_2)$$

όπου τα a_1, b_1, a_2 και b_2δίνονται από τις παραπάνω εξισώσεις και X είναι η λύση της αρχικής εξίσωσης. Η παράμετρος ρ είναι ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ των επικαλυπτούμενων προσαυξήσεων Brown των ποσοτήτων $T_1 - t$ και $T_2 - t$ από την τωρινή χρονική στιγμή t, και δίνεται από τη σχέση

$$\rho = \frac{\operatorname{cov}(Z(T_2) - Z(t), Z(T_1) - Z(t))}{\sqrt{\operatorname{var}(Z(T_2) - Z(t))\operatorname{var}(Z(T_1) - Z(t))}} = \sqrt{\frac{T_1 - t}{T_2 - t}}$$

Μπορούμε και να επεκτείνουμε την παραπάνω φόρμουλα αποτίμησης σε συνδυασμό ενός απλού Ευρωπαϊκού δικαιώματος με ένα currency δικαίωμα ισοτιμιάς που αφορά ένα ξένο νόμισμα με το εντόπιο. Ας αφήσουμε r το επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού του εντόπιου νομίσματος και ας θέσουμε r_f το επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού του ξένου νομίσματος. Τότε η αποτίμηση της φόρμουλας ενός call-on-a-call δικαιώματος προαίρεσης δίνεται από τις εξής ακόλουθες σχέσεις.

$$\begin{aligned} c(S,t) &= Se^{-r_f(T_2-t)}\Phi_2(a,b;\rho) \\ &\quad -\mathrm{K}_2 e^{-r(T_2-t)}\Phi_2\left(a-\sigma\sqrt{T_1-t},\, b-\sigma\sqrt{T_2-t};\rho\right) \\ &\quad -\mathrm{K}_1 e^{-r(T_1-t)}\Phi\left(a-\sigma\sqrt{T_1-t}\right) \end{aligned}$$

όπου

$$a = \frac{\ln\left(\frac{S}{\mathrm{X}}\right) + \left(r - r_f + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T_1 - t)}{\sigma\sqrt{T_1 - t}}, \quad \text{και} \quad b = \frac{\ln\left(\frac{S}{K_2}\right) + \left(r - r_f + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T_2 - t)}{\sigma\sqrt{T_2 - t}}$$

και X είναι λύση της μη-γραμμικής αλγεβρικής εξίσωσης

$$\mathrm{X}e^{-r_f(T_2-T_1)}\Phi(d) - K_2 e^{-r_f(T_2-T_1)}\Phi\left(d - \sigma\sqrt{T_2 - T_1}\right) - K_1 = 0$$

όπου $$d = \frac{\ln\left(\frac{X}{K_2}\right) + \left(r - r_f + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T_2 - T_1)}{\sigma\sqrt{T_2 - T_1}}$$

ΠΙΝΑΚΕΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΩΝ COMPOUND OPTION

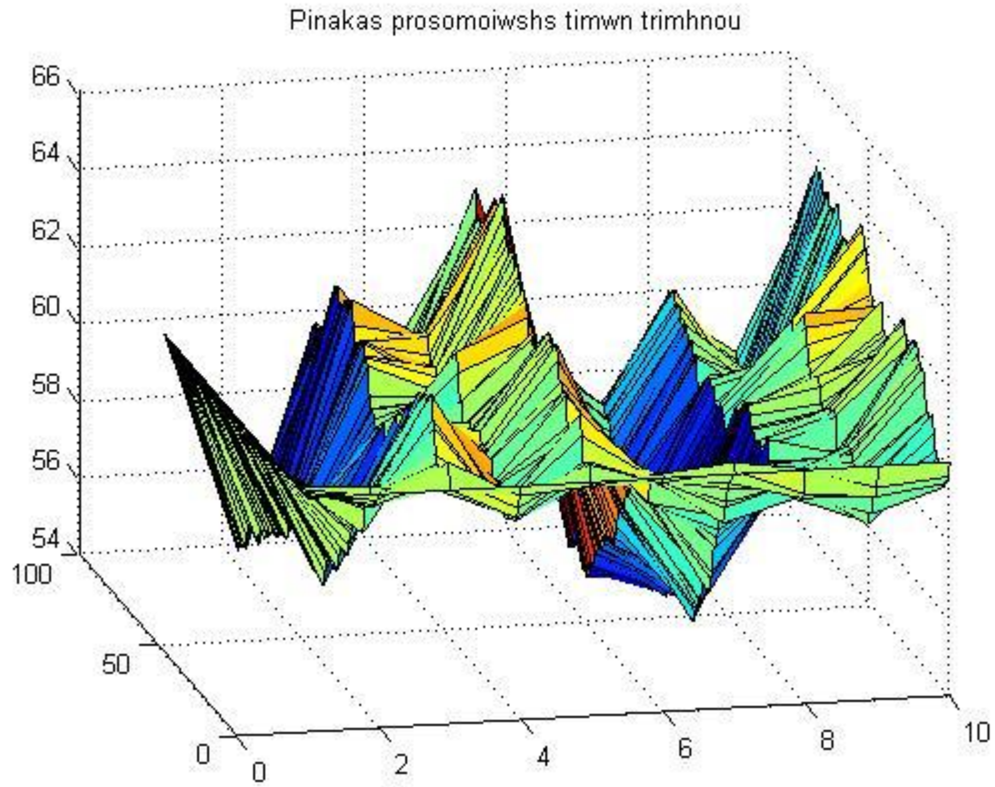
Οι παρακάτω πίνακες περιέχουν τα αποτελέσματα των υπολογισμών για διάφορες τιμές παραμέτρων στα compound options. Η μέθοδος Monte Carlo περιλαμβάνει την εξης διαδικασία. Ξεκινάμε θεωρώντας έναν πίνακα S_T [91,N] στην MatLab όλο με μονάδες. Επίσης θεωρούμε έναν πίνακα cracks [91,N] γεμάτο με τιμές τυχαίες από την κανονική κατανομή. Ακόμα ορίζουμε έναν πίνακα [91,N] με την πρώτη στήλη να έχει μόνο τις τιμές S_0 (αρχικές τιμές της μετοχής) και τις επόμενες στήλες του να συμπληρώνονται στη συνέχεια ως εξης. Παίρνουμε την σχέση $\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} = e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t+\sigma\in\sqrt{\Delta t}}$ (βιβλίο Kwok, σελ. 225) και αντικαθιστούμε όπου $\Delta t = \frac{1}{360}$, r επιτόκιο, σ διακύμανση, $\in$ τα στοιχεία του πίνακα cracks που ορίσαμε παραπάνω και S_t τις τιμές των προηγούμενων στοιχείων των στηλών του πίνακα. Έτσι, με αυτόν τον τρόπο μόλις συμπληρωθεί ο πίνακας παίρνουμε κάθε στοιχείο της τελευταίας γραμμής, το αντικαθιστούμε στην σχέση που περιγράφει το option και παίρνουμε μια καινούργια τιμή. Αυτήν την διαδικασία την εκτελούμε για όλα τα στοιχεία της γραμμής του πίνακα και τα αποτελέσματα που παίρνουμε τα προσθέτουμε, τα διαιρούμε με N (το πλήθος τους), και το αποτέλεσμα το πολλαπλασιάζουμε με τον συντελεστή e^{-rt} και έχουμε το αποτέλεσμα για την προσέγγιση Monte Carlo.

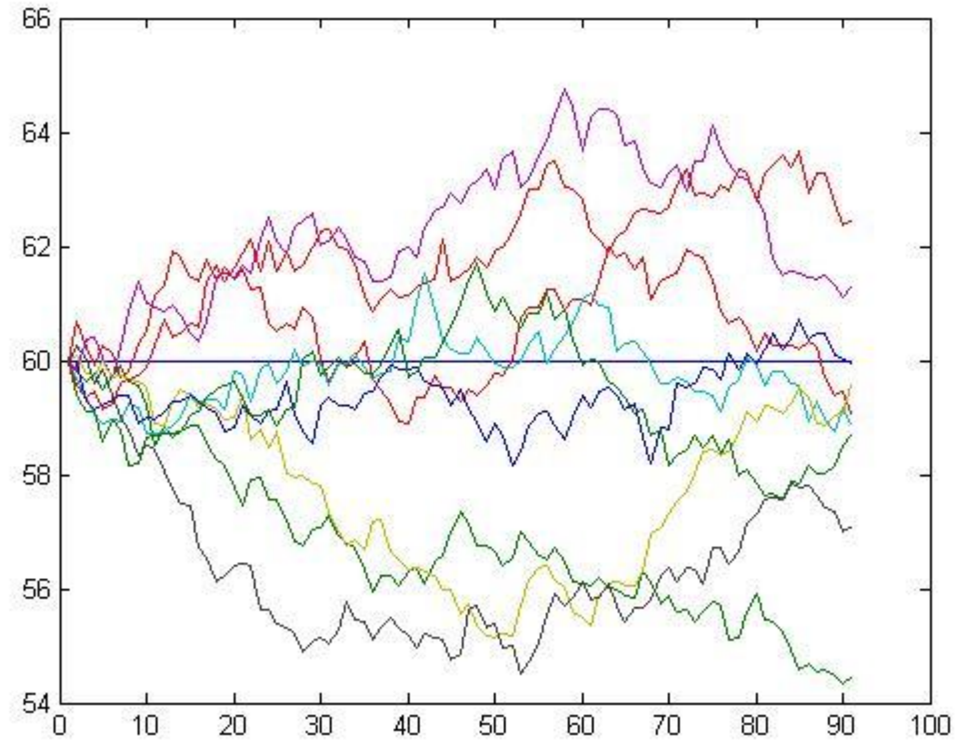
Στον παρακάτω πίνακα έχουμε τα αποτελέσματα για ενδεικτικές τιμές παραμέτρων S=60€ αρχική τιμή του υποκείμενου τίτλου, K2=30€ τιμή άσκησης δικαιώματος για το compound δικαίωμα, K1=90€ τιμή άσκησης δικαιώματος για τον υποβόσκοντα υποκείμενο τίτλο, T1=1/2 χρόνος λήξης του υποβόσκοντος δικαιώματος, T2=1/4 χρόνος λήξης του compound δικαιώματος, r=0.02 επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού και σ=0.1 διακύμανση κανονικής κατανομής.

Η τιμή που προκύπτει υπολογίζοντας μόνο τον τύπο για τα compound option είναι 15.2607€.

Όπως παρατηρούμε και αναφέρει και ο Kwok στο βιβλίο του η μέθοδος Monte Carlo τείνει για τις περισσότερες περιπτώσεις options να υποεκτιμά την πραγματική τιμή και όπως φαίνεται ενώ τα νούμερα είναι ίδιας τάξης μεγέθους να χρειάζεται πάρα πολλές επαναλήψεις για να φτάσει τελικά την τιμή που προκύπτει από τον τύπο ή τουλάχιστον να φτάσει πολύ κοντα. Επίσης παρατηρούμε και τον χρόνο εκτέλεσης να αλλάζει και συγκεκριμένα να μεγαλώνει όσο μεγαλώνει και το πλήθος των τροχιών που εξετάζουμε. Το απόλυτο σφάλμα των επαναλήψεων των τροχιών για μεγαλύτερο αριθμό τροχιών παρατηρούμε ότι ελλατώνεται που σημαίνει ότι πλησιάζουμε να έχουμε όλο και πιο μικρές αποκλίσεις από τις τιμές που παίρνουμε κάθε φορά σε κάθε επανάληψη 10,100,1000,10000 και 100000 τροχιών.

Επαναλήψεις Monte Carlo	Premium	Χρόνος εκτέλεσης	Απόλυτο σφάλμα
10	10.560538 €	0.953125 sec	4.6999
100	14.899515 €	0.656250 sec	0.36092
1000	14.892413 €	1.093750 sec	0.36080
10000	14.900500 €	5.890625 sec	0.35993
100000	14.908690 €	9.198004 sec	0.34970


Pinakas prosomoiwshs timwn trimhnou
66
64
62
60
58
56
54
100
50
0
0
2
4
6
8
10


66
64
62
60
58
56
54
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

Συγκρίνοντας τώρα ένα απλό δικαίωμα Ευρωπαϊκού τύπου με S=60€ αρχική τιμή υποκείμενου τίτλου, K=90€ τιμή άσκησης δικαιώματος, T=1/2 του χρόνου ο χρόνος λήξης του δικαιώματος, r=0.02 επιτόκιο και σ=0.1 διακύμανση για το οποίο παίζουν δυο συμβαλλόμενοι με premium που φτάνει τα 1.524669 € με εκείνο το compound δικαίωμα που παίζουν δυο άλλοι συμβαλλόμενοι πάνω στο πρώτο με τις ίδιες παραμέτρους προσθέτωντας K2=30€ τιμή άσκησης δικαιώματος, T2=1/2 του χρόνου ο χρόνος λήξης του δικαιώματος και κρατώντας σταθερό τον χρόνο λήξης του πρώτου παιχνιδιού και αλλάζοντας τον χρόνο λήξης του compound έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα.

(T σταθερο) Tc αλλάζει	**Premium**
2 μήνες	4.653031 €
3 μήνες	15.260173 €
4 μήνες	21.398470 €
5 μήνες	24.867836 €

Παρατηρούμε ότι αλλάζει το premium και συγκεκριμένα μεγαλώνει όταν ο χρόνος λήξης του compound πλησιάζει πολύ κοντά τον χρόνο λήξης του Ευρωπαϊκού παιχνιδιού πάνω στο οποίο δημιουργήθηκε.

Chooser options

Ένα δικαίωμα προαίρεσης «επιλογής» (chooser option) δίνει το δικαίωμα στον κάτοχο να διαλέξει, μετά από μια προσυμφωνημένη ημερομηνία T_C στο μέλλον, εάν το παράγωγο θα είναι ένα Ευρωπαϊκού τύπου call ή put με μια γνωστή τιμή άσκησης δικαιώματος (strike price) K για τον υπόλοιπο χρόνο που απομένει μέχρι τη λήξη του χρόνου $T-T_c$. Αν ο παρόν χρόνος έχει παρθεί ίσος με το μηδέν, η αποπληρωμή (payoff) του δικαιώματος chooser την ημέρα επιλογής που πλέον θα είναι T_C είναι ίση με

$$V(S_{T_c},T_c)=\max(c(S_{T_c},T-T_c;K),p((S_{T_c},T-T_c;K)),$$

όπου $T-T_c$ είναι ο χρόνος μέχρι τη λήξη και στις περιπτώσεις call και put, και S_{T_c} είναι η τιμή της μετοχής σε χρόνο T_C. Θεωρουμε ότι οι πληρωμές για το υποβόσκον δικαίωμα είναι συνεχείς μερίσματα αποδιδόμενα στην τιμή q. Από την σχέση την λεγόμενη call-put charity, η παραπάνω συνάρτηση αποπληρωμής μπορεί να εκφραστεί ως

$$V(S_{T_c},T_c)=\max(c,c+Ke^{-r(T-T_c)}-S_{T_c}e^{-q(T-T_c)})$$

$$=c+e^{-q(T-T_c)}\max(0,Ke^{-(r-q)(T-T_c)}-S_{T_c}).$$

Ως εκ τούτου, το δικαίωμα chooser είναι ισότιμο με τον συνδυασμό ενός call με εξασκούμενη τιμή K και χρόνου λήξης T και $e^{-q(T-T_c)}$ μονάδες από ένα put με τιμή άσκησης δικαιώματος (strike price) $Ke^{-(r-q)(T-T_c)}$ και χρόνο λήξης T_C. Εφαρμόζοντας την εξίσωση Black-Scholes, για τα παραπάνω call και put δικαιώματα, η τιμή του δικαιώματος chooser την δεδομένη χρονική στιγμή βρίσκεται να είναι ίση με

$$
\begin{aligned}
V(S,0) = Se^{-qT}\Phi(x) - Ke^{-rT}\Phi(x-\sigma\sqrt{T}) + e^{-q(T-T_c)}& \\
[Ke^{-(r-q)(T-T_c)}e^{-rT_c}\Phi(-y+\sigma\sqrt{T_c}) - Se^{-qT_c}\Phi(-y)]& \\
= Se^{-qT}\Phi(x) - Ke^{-rT}\Phi(x-\sigma\sqrt{T})& \\
+Ke^{-rT}\Phi(-y+\sigma\sqrt{T_c}) - Se^{-qT}\Phi(-y)&
\end{aligned}
$$

όπου S είναι η τωρινή τιμή της μετοχής και

$$
x = \frac{\ln\frac{S}{K} + (r-q+\frac{\sigma^2}{2})\mathrm{T}}{\sigma\sqrt{T}}, \qquad y = \frac{\ln\frac{S}{K} + (r-q)T + \frac{\sigma^2}{2}\mathrm{T}_c}{\sigma\sqrt{T_c}}
$$

ΠΙΝΑΚΕΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΩΝ CHOOSER OPTION

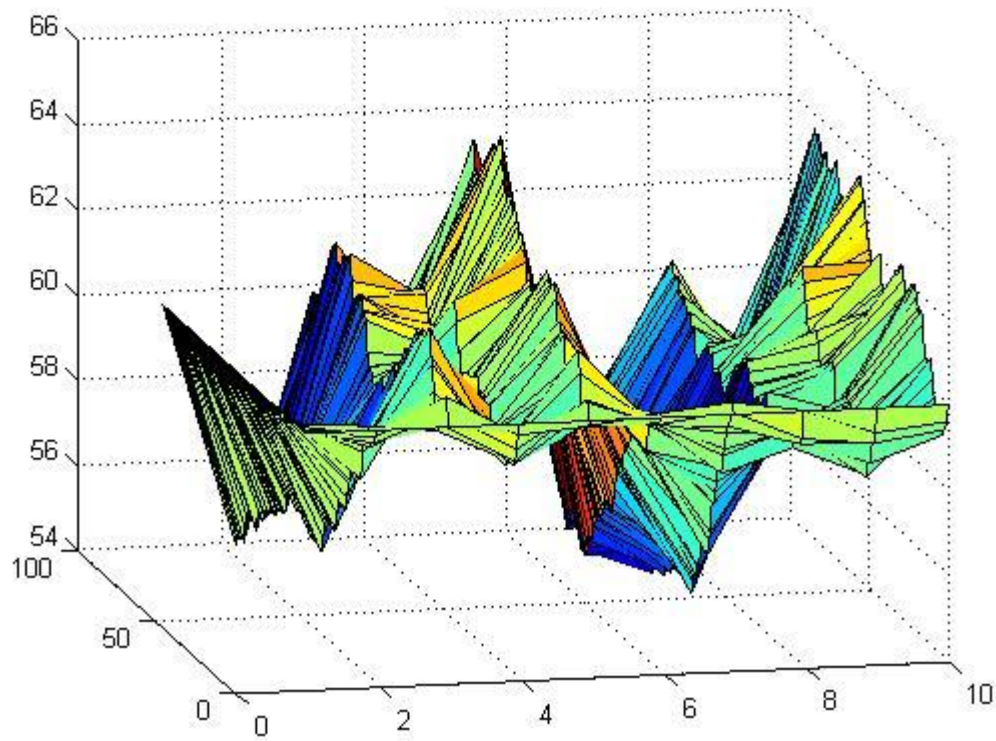
Θεωρώντας S=60€ αρχική τιμή μιας μετοχής, K=90€ τιμή άσκησης του δικαιώματος (strike price), T=1/2 του χρόνου ο χρόνος λήξης του υποβόσκοντος δικαιώματος προαίρεσης (underlying option), Tc=1/4 του χρόνου ο χρόνος λήξης του chooser option, r=0.02 επιτόκιο, σ=0.1 η διακύμανση της κανονική κατανομής παίρνουμε ως αποτέλεσμα η δίκαιη τιμή (premium) που πρέπει να καταβάλλει ο κάτοχος στον εκδότη στην έναρξη του παίγνιου να είναι 4.955138€.

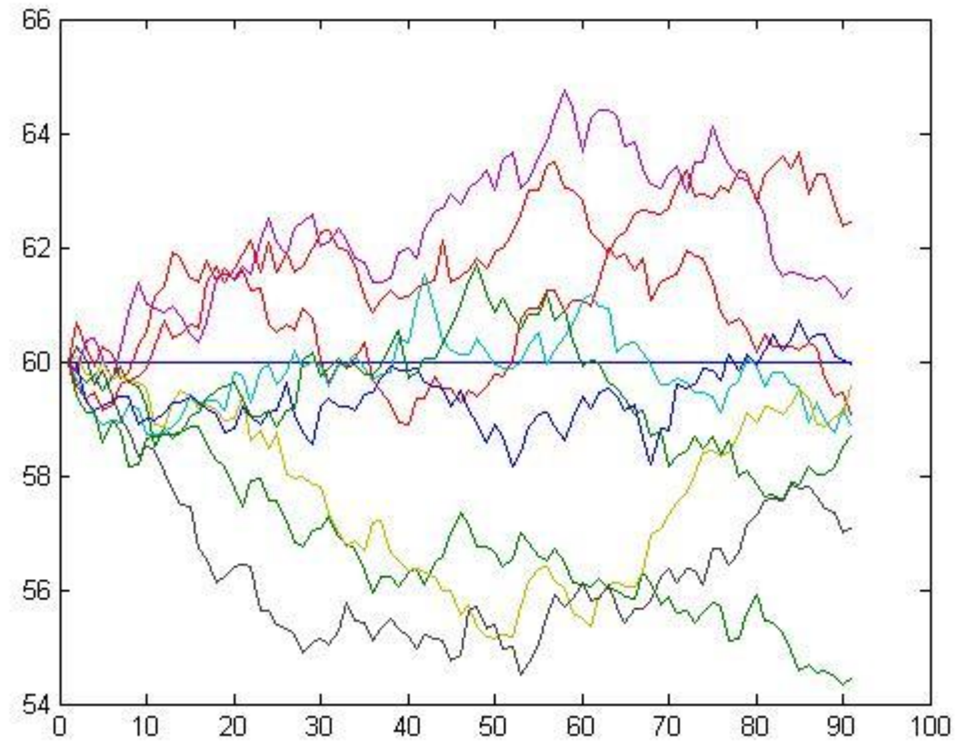
Σε αντίθεση με τα δικαιώματα compound εδώ οι επαναλήψεις Monte Carlo πλησιάζουν πιο πολύ την πραγματική τιμή του δικαιώματος.

Επίσης παρατηρούμε για τον χρόνο εκτέλεσης ότι όσο αυξάνονται οι επαναλήψεις της μεθόδου Monte Carlo τόσο αυξάνεται και ο χρόνος που απαιτείται για να φανεί το αριθμητικό αποτέλεσμα.

Τέλος, το απόλυτο σφάλμα παρατηρούμε ότι μικραίνει όσο οι επαναλήψεις αυξάνονται που σημαίνει ότι όσο περισσότερες τροχιές παίρνουμε της λύσης τόσο μικρότερη είναι και η απόκλιση μεταξύ των τιμών.

Επαναλήψεις (Monte Carlo)	**Premium**	**Χρόνος εκτέλεσης**	**Απόλυτο σφάλμα**
10	5.100899 €	0.625 sec	0.14576
100	4.899515 €	0.75 sec	0.055624
1000	4.892413 €	1.03125 sec	0.055226
10000	4.900500 €	5.25 sec	0.054638
100000	4.908510 €	8.109 sec	0.044406


66
64
62
60
58
56
54
100
50
0
0
2
4
6
8
10


66
64
62
60
58
56
54
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

Αλλάζοντας την τιμή της διακύμανσης της κανονικής κατανομής για διάφορες τιμές από 0.05 εως και 0.2 αλλάζει και η τιμή για το premium η οποία όπως βλέπουμε αυξάνεται καθώς αυξάνεται και η διακύμανση.

σ (volatility)	**Premium**
0.05	4.910308 €
0.10	4.955138 €
0.15	4.987958 €
0.20	5.036823 €

Επίσης αφήνοντας σταθερό τον χρόνο λήξης του υποβόσκοντος υποκείμενου τίτλου (T) και αλλάζοντας τον χρόνο λήξης του chooser option (Tc) παρατηρούμε ότι αλλάζει και η τιμή του premium και συγκεκριμένα όταν το δεύτερο πλησιάζει το πρώτο η τιμή της δίκαιης τιμής (premium) αυξάνεται αρκετά.

(T σταθερο) Tc αλλάζει	**Premium**
2 μήνες	2.719347 €
3 μήνες	4.955138 €
4 μήνες	9.030346 €
5 μήνες	16.461022 €

Lookback Options

Τα παράγωγα Lookback είναι παράγωγα εξαρτώμενα από μονοπάτι (path dependent) των οποίων οι πληρωμές (payoffs) εξαρτώνονται από τη μέγιστη ή την ελάχιστη τιμή ενός υποβόσκοντος δικαιώματος που επιτυγχάνεται σε συγκεκριμένη χρονική περίοδο (περίοδος lookback). Εμείς θεωρούμε τα δικαιώματα lookback των οποίων αυτή η χρονική περίοδος είναι ολόκληρος ο χρόνος μέσα στον οποίο ορίζεται. Ορίζουμε ως T τον χρόνο λήξης του παραγώγου και $[T_0, T]$ την χρονική περίοδο lookback. Επίσης ορίζουμε την μέγιστη και ελάχιστη πραγματοποιήσιμη τιμή από χρόνο T_o σε χρόνο t όπου $(T_0 \le t \le T)$ ως:

$$m_{T_o}^t = \min_{T_o \le \xi \le t} S_\xi$$

και

$$M_{T_0}^t = \max_{T_0 \le \xi \le t} S_\xi$$

αντίστοιχα. Οι παραπάνω σχέσεις υπονοούν συνεχή παρακολούθηση της τιμής τουυποκείμενου τίτλου, ενώ η διακριτή παρακολούθηση για ακρότατο είναι υιοθετημένη στην πρακτική εκτέλεση. Τα δικαιώματα προαίρεσης lookback κατηγοριοποιούνται σε δυο τύπους: τα σταθερού χτυπήματος (fixed strike), και τα κυμαινόμενου χτυπήματος (floating strike). Ένα floating strike lookback call δίνει στον κάτοχο το δικάιωμα να αγοράσει στην ελάχιστη πραγματοποιήσιμη τιμή ενώ ένα floating strike put επιτρέπει στον κάτοχο να πουλήσει στην υψηλότερη πραγματοποιήσιμη τιμή κατά την περίοδο lookback. Οι τελικές τιμές τους δίνονται από τις σχέσεις $\max(S_T - m_{T_0}^T, 0)$ και $\max(M_{T_o}^T - S_T, 0)$ αντίστοιχα. Τα δικαιώματα floating strike lookback είναι κατά μια έννοια «μη-δικαιώματα» αφού εξασκούνται πάντα στη λήξη. Ένα fixed strike lookback call δικαίωμα είναι ένα call δικαίωμα στη μέγιστη πραγματοποιήσιμη τιμή. Αντίστοιχα ένα fixed strike lookback put δικαίωμα είναι ένα put δικαίωμα στην ελάχιστη πραγματοποιήσιμη τιμή. Έτσι, οι τελικές πληρωμές για τα fixed strike lookback διακιώματα call και put είναι $\max(M_{T_o}^{T} - X, 0)$ και $\max(X - m_{T_0}^{T}, 0)$ αντίστοιχα. Τα διακιώματα τύπου lookback απαιτούν από τον κάτοχο να παραμείνει ολόκληρη την συμφωνηθήσα χρονική περίοδο στην αγορά. Γενικά μιλώντας, τα δικαιώματα τύπου lookback είναι τα πιο επιθυμητά σε επενδυτές που έχουν ισχυρή πεποίθηση για το εύρος κίνησης των τιμών σε μια συγκεκριμένη περίοδο αλλά όχι στο τέλος.

Σ'αυτήν την παράγραφο, παράγουμε την φόρμουλα τιμολόγησης για τους δυο προαναφερθέντες τύπους παραγώγων lookback. Αυτή η αναλυτική φόρμουλα είναι πεπερασμένη για τα παράγωγα Ευρωπαικού τύπου και *συνεχής* για την τιμή του ακρότατου που υποθέτουμε. Οι διωνυμικές κατασκευές για την αριθμητική εκτίμηση των δικαιωμάτων τύπου lookback θα συζητηθούν επίσης. Στην διαδικασία παραγωγής, διατηρούμε τις συνήθεις υποθέσεις της εξίσωσης Black-Scholes. Έτσι μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η διαδικασία για τη στοχαστική μεταβλητή $U_\xi = \ln\frac{S_\xi}{S}$ είναι κανονική με μέση τιμή $\mu = r - \frac{\sigma^2}{2}$ και διακύμανση σ^2, όπου r είναι το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου και S είναι η τιμή σε τρέχοντα χρόνο t.

Ορίζουμε τις παρακάτω στοχαστικές μεταβλητές

$$y_T = \ln\frac{m_t^T}{S} = \min\{U_\xi, \xi \in [t, \mathrm{T}]$$

$$Y_T = \ln\frac{M_t^T}{S} = \max\{U_\xi, \xi \in [t, T]$$

και γράφουμε $\tau = T - t$. Για $y \le 0$ και για $y \le u$, μπορούμε να συμπεράνουμε την ακόλουθη συνάρτηση κατανομής από την συνάρτηση πυκνότητας της λογαριθμικής τιμής κίνησης με την παρουσία ενός «κάτω και έξω φράγματος» (down-and-out barrier)

$$P_r(U_T \ge u, y_T \ge y) = \Phi(\frac{-u+\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}) - e^{\frac{2\mu y}{\sigma^2}} \Phi(\frac{-u+2y+\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}) .$$

Όμοια, για $y \ge 0$ και $y \ge u$ η αντίστοιχη συνάρτηση κατανομής δίνεται από

$$P_r(U_T \le u, y_T \le y) = \Phi(\frac{u-\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}) - e^{\frac{2\mu y}{\sigma^2}} \Phi(\frac{u-2y-\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}) .$$

Παίρνοντας, $y = u$ στις παραπάνω δύο συναρτήσεις κατανομής, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

$$P_r(y_T \ge y) = \Phi(\frac{-y+\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}) - e^{\frac{2\mu y}{\sigma^2}} \Phi(\frac{y+\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}), \quad y \le 0 \qquad (5.1)$$

$$P_r(Y_T \ge y) = \Phi(\frac{y-\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}) - e^{\frac{2\mu y}{\sigma^2}} \Phi(\frac{-y-\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}), \quad y \ge 0$$

Αυτές τις συναρτήσεις κατανομής θα τις χρησιμοποιήσουμε και αργότερα για τον υπολογισμό των διαφόρων τύπων lookback δικαιωμάτων.

European Floating Strike Lookback Options

Αν θέσουμε το t να είναι ο τωρινός χρόνος και $\tau = \mathrm{T} - t$ να είναι ο χρόνος λήξης. Ο τωρινός χρόνος λαμβάνεται να είναι ανάμεσα στην περίοδο lookback $[T_0, T]$, δηλαδή $t \in [T_0, T]$. Αν θέσουμε S να είναι η τιμή του κεφαλαίου και $m_{T_0}^t$ να είναι η ελάχτιστη πραγματοποιούμενη τιμή από τον χρόνο T_0 στον τωρινό χρόνο t. Η τιμή ενός floating strike lookback παραγώγου είναι μια συνάρτηση των $S, m_{T_o}^t$ και τ.

Ακολουθώντας την ουδέτερου κινδύνου προσέγγιση μειωμένων προσδοκιών, η τιμή ενός Ευρωπαϊκού floating strike lookback call δικαιώματος δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$c(S, m_{T_o}^t, \tau) = e^{-r\tau} E(S_T - \min(m_{T_o}^t, m_t^T))$$

όπου E είναι η αναμενόμενη ελπίδα σε ουδέτερο κινδύνο. Σημειώνουμε εδώ ότι $m_{T_o}^T = \min(m_{T_o}^t, m_t^T)$ και $e^{-r\tau} E(S_T) = S$. Στον τωρινό χρόνο, $m_{T_o}^t$ είναι μια γνωστή ποσότητα ενώ η κατανομή του m_t^T είναι συνδεδεμένη με μια συνάρτηση κατανομής η οποία είναι δοσμένη στην εξίσωση (5.1). Τώρα, θεωρούμε

$$E(\min(m_{T_o}^t, m_t^T)) = E(m_{T_o}^t \mid m_{T_o}^t \le m_t^T) + E(m_t^T \mid m_{T_o}^t > m_t^T) \tag{5.2}$$

$$= m_{T_o}^t P_r(m_{T_o}^t \le m_t^T) + E(m_t^T \mid m_{T_o}^t > m_t^T)\,.$$

Για να εκτιμήσουμε τον πρώτο όρο της εξίσωσης (5.2), αντικαθιστούμε το $y = \ln \frac{m_{T_o}^t}{S}$ στην εξίσωση (5.1) και παίρνουμε,

$$m_{T_o}^t P_r(m_{T_o}^t \le m_t^T) =$$

$$m_{T_o}^t P_r(\ln \frac{m_t^T}{S} \ge \ln \frac{m_{T_o}^t}{S}) =$$

$$m_{T_o}^t [\Phi(\frac{-\ln \frac{m_{T_o}^t}{S} + \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}) - (\frac{S}{m_{T_o}^t})^{1-\frac{2r}{\sigma^2}} \Phi(\frac{\ln \frac{m_{T_o}^t}{S} + \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}})]$$

Η συνάρτηση πυκνότητας $f(y)$ κατ’ αντιστοιχία με την συνάρτηση κατανομής που παρουσιάζεται στην εξίσωση (5.1) δίνεται από τη σχέση

$$f(y) = \frac{\partial}{\partial y} \mathrm{P}_r(y_T < y) = \frac{\partial}{\partial y}[1 - P_r(y_T \ge y)]$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} n(\frac{-y + \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}) + \frac{2\mu}{\sigma^2} e^{\frac{2\mu y}{\sigma^2}} \Phi(\frac{y + \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}) + e^{\frac{2\mu y}{\sigma^2}} \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} n(\frac{y + \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}})$$

Τώρα, ο δεύτερος όρος στην εξίσωση (5.2) μπορεί να εκφραστεί ως εξής

$$\mathrm{E}(m_t^T \mid m_t^T < m_{T_0}^t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\ln\frac{m_{T_0}^t}{S}} Se^y f(y)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\ln\frac{m_{T_0}^t}{S}} Se^y [\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} n(\frac{-y+\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}) + \frac{2\mu}{\sigma^2} e^{\frac{2\mu y}{\sigma^2}} \Phi(\frac{y+\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}) + e^{\frac{2\mu y}{\sigma^2}} \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} n(\frac{y+\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}})]dy$$

Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι η ολοκλήρωση του πρώτου όρου δίνει το ίδιο αποτέλεσμα όπως και αυτό του τρίτου όρου. Απευθείας ολοκλήρωση του πρώτου όρου δίνει

$$\int_{-\infty}^{\ln\frac{m_{T_0}^t}{S}} \frac{S}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} e^{y-\frac{(-y+\mu\tau)^2}{2\sigma^2\tau}} dy$$

$$= \frac{S}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} e^{(\mu+\frac{\sigma^2}{2})\tau} \int_{-\infty}^{\ln\frac{m_{T_0}^t}{S}} e^{-\frac{[y-(\mu+\sigma^2)r]^2}{2\sigma^2 r}} dy$$

$$= Se^{rT}\Phi(\frac{\ln\frac{m_{T_o}^t}{S} - (r+\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}),$$

ενώ η αξία του δεύτερου ολοκληρώματος οδηγεί σε

$$\int_{-\infty}^{\ln\frac{m_{T_0}^t}{S}} \frac{2\mu}{\sigma^2} Se^y e^{\frac{2\mu y}{\sigma^2}} \Phi(\frac{y+\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}})dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\ln\frac{m_{T_0}^t}{S}} S \frac{2\mu}{2\mu+\sigma^2} [\frac{d}{dy} e^{\frac{2\mu+\sigma^2}{\sigma^2}y}] \Phi(\frac{y+\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}})dy$$

$$= \frac{2\mu}{2\mu+\sigma^2} S\{e^{\frac{2\mu+\sigma^2}{\sigma^2}y} \Phi(\frac{y+\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}})]_{-\infty}^{\ln\frac{m_{T_0}^t}{S}} - \int_{-\infty}^{\ln\frac{m_{T_0}^t}{S}} e^{\frac{2\mu+\sigma^2}{\sigma^2}y} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{(y+\mu\tau)^2}{2\sigma^2\tau}} dy\}$$

$$= \frac{2\mu}{2\mu+\sigma^2} S[e^{\frac{2\mu+\sigma^2}{\sigma^2}\ln\frac{m_{T_0}^t}{S}} \Phi(\frac{\ln\frac{m_{T_0}^t}{S} + \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}) - e^{(\mu+\frac{\sigma^2}{2})\tau} \Phi(\frac{\ln\frac{m_{T_0}^t}{S} - (\mu+\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}})]$$

$$= (1-\frac{\sigma^2}{2r})S[(\frac{m_{T_0}^t}{S})^{\frac{2r}{\sigma^2}} \Phi(\frac{\ln\frac{m_{T_0}^t}{S} + (r-\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}) - e^{rT}\Phi(\frac{\ln\frac{m_{T_0}^t}{S} - (r+\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}})].$$

Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα, η τιμή του Ευρωπαϊκού floating strike lookback call δικαιώματος δίνεται ως εξής

$$c(S, m_{T_0}^t, \tau) = [S\Phi(d_m) - e^{-r\tau} m_{T_0}^t \Phi(d_m - \sigma\sqrt{\tau})]$$

$$+e^{-r\tau}\frac{\sigma^2}{2r}S[(\frac{S}{m_{T_0}^t})^{-\frac{2r}{\sigma^2}}\Phi(-d_m + \frac{2r}{\sigma}\sqrt{\tau}) - e^{r\tau}\Phi(-d_m)]$$

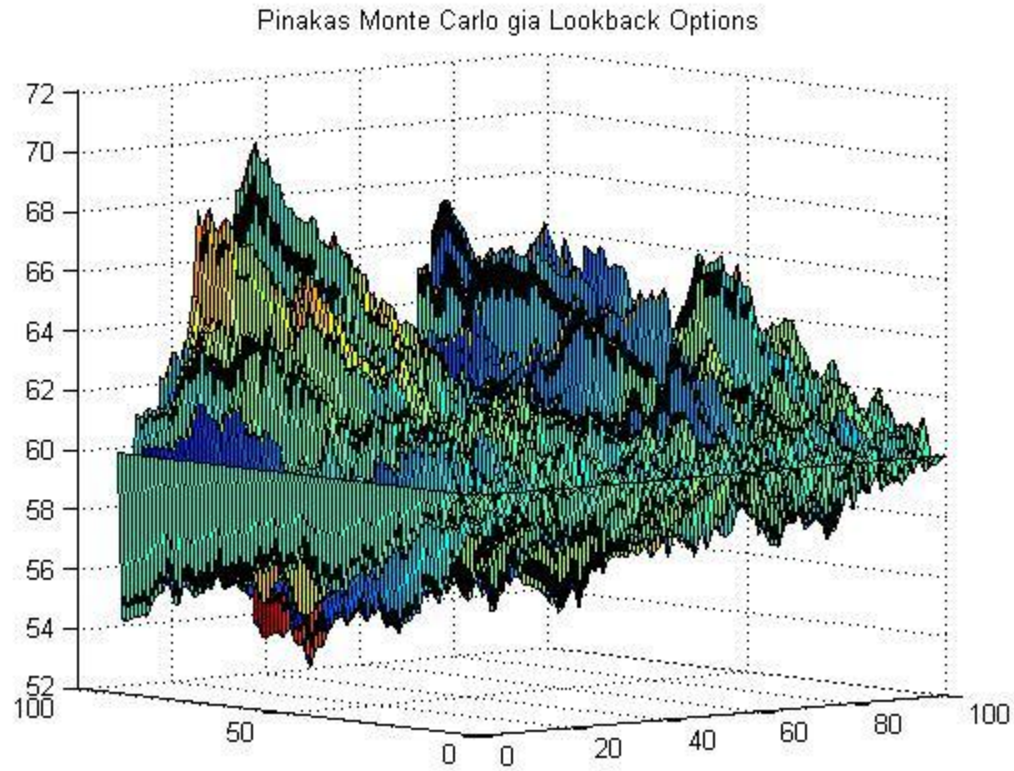
όπου,

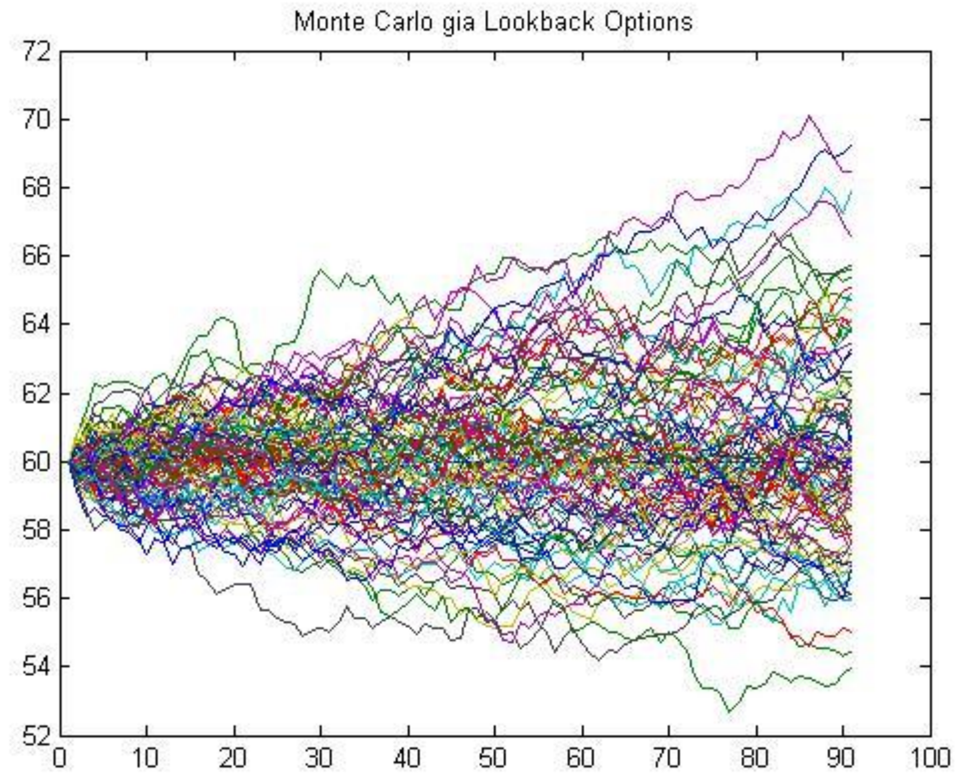
$$d_m = \frac{\ln\frac{S}{m_{T_0}^t} + (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

ΠΙΝΑΚΕΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΩΝ LOOKBACK OPTION

Θεωρώντας S=100€ αρχική τιμή του υποκείμενου τίτλου, T=1 χρόνο ο χρόνος λήξης του δικαιώματος, r=0.1 επιτόκιο, σ=0.3 η διακύμανση της κανονικής κατανομής, η πραγματική τιμή του premium του δικαιώματος με βάση τον υπολογιστικό τύπο είναι 31.583454€. Παρατηρούμε λοιπόν ότι με την μέθοδο Monte Carlo η σύγκλιση προς την τιμή αυτή είναι μικρή αρχικά όμως παίρνοντας παρα πολλές επαναλήψεις φτάνουμε την παραπάνω τιμη. Ουτως ή άλλως η συγκεκριμένη μέθοδος όπως έχουμε αναφέρει και παραπάνω τείνει να υποεκτιμά την αξία του δικαιώματος ακομά και σε πολλές επαναλήψεις απαιτόντας πάρα πολλές για να γίνει έγκυρο το αποτέλεσμα. Επίσης παρατηρούμε όπως κάθε φορά άλλωστε ότι ο χρόνος εκτέλεσης αυξάνεται όσο αυξάνονται και οι επαναλήψεις. Όσο για το απόλυτο σφάλμα παρατηρούμε ότι και εδώ μειώνεται όσο οι επαναλήψεις αυξάνονται που σημαίνει ότι έχουμε μικρή απόκλιση στις τιμές των επαναλήψεων 10, 100, 1000, 10000 και 100000 τροχιών.

Επαναλήψεις (Monte Carlo)	Premium	Χρόνος εκτέλεσης	Απόλυτο σφάλμα
10	26.878245 €	0.484375 sec	4.7052
100	30.733748 €	0.703125 sec	0.84771
1000	30.922423 €	1.078125 sec	0.66103
10000	31.093133 €	5.734375 sec	0.49032
100000	31.168202 €	6.102398 sec	0.48525


Pinakas Monte Carlo gia Lookback Options
72
70
68
66
64
62
60
58
56
54
52
100
50
0
0
20
40
60
80
100


Monte Carlo gia Lookback Options
72
70
68
66
64
62
60
58
56
54
52
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

Και αλλάζοντας την τιμή της διακύμανσης παίρνοντας τιμές σε ένα διάστημα από 0.05 εως και 0.2 και κρατώντας σταθερές τις υπόλοιπες παραμέτρους έχουμε το συμπέρασμα ότι όσο αυξάνεται η διακύμανση τόσο μεγαλώνει και η δίκαιη τιμή (premium) που θα καταβάλλει την ημέρα έναρξης του συμβολαίου ο κάτοχος στον εκδότη του δικαιώματος.

σ (volatility)	**Premium**
0.05	17.765206 €
0.10	20.199728 €
0.15	23.028652 €
0.20	25.919625 €

Ασιατικά Δικαιώματα προαίρεσης (Asian Options)

Τα Ασιατικά δικαιώματα προαίρεσης είναι «κατά μέσο όρο» διακιώματα όπου η τελική πληρωμή εξαρτάται από κάποια μορφή μέσης τιμής της τιμή του υποβόσκοντος υποκείμενου τίτλου πάνω σε ένα μέρος του ή σε όλη τη διάρκειά του. Υπάρχουν συνήθεις καταστάσεις όπου οι έμποροι μπορεί να ενδιαφέρονται να αντισταθμίσουν ενάντια στην μέση τιμή του προϊόντος σε μια περίοδο απ'ότι στην τιμή κατά τη διάρκεια όλης της περιόδου. Για παράδειγμα, υποθέτουμε ότι ένας κατασκευαστής αναμένει να κάνει αρκετές αγορές χαλκού για το εργοστάσιο του σε κάποιο συγκεκριμένο χρόνο στο μέλλον. Θα ενδιαφερόταν να αποκτήσει μια προστασία της τιμής του η οποία συνδέεται με την μέση τιμή του χαλκού για μια μεγάλη περίοδο. Η αντιστάθμιση του κινδύνου ενάντια στην μέση τιμή μπορεί να επιτευχθεί παρά το κράτημα ενός κατάλληλου παραγώγου μέσης τιμής. Τα παράγωγα μέσης τιμής είναι ιδιαίτερα χρήσιμα για υποθέσεις που περιλαμβάνουν εμπόριο σε μικρό-εμπορευόμενα εμπορεύματα. Η χρήση τέτοιων οικονομικών οργάνων μπορεί να μας κανει να αποφύγουμε τον επιδέξιο χειρισμό της τιμής κοντά στο τέλος της περιόδου.

Τα περισσότερα Ασιατικά διακαιώματα προαίρεσης είναι Ευρωπαϊκού τύπου και χωρίζονται σε δυο κλάσεις. Τα παράγωγα με μέση αξία (average value options) και τα παράγωγα με μέση αξία της τιμής άσκησης δικαιώματος (average strike options). Οι συναρτήσεις τελικής αποπληρωμής ενός average value call διακιώματος και ενός average strike call δικαιώματος είναι οι $\max(A-X,0)$ και $\max(S_T-A,0)$ αντίστοιχα, όπου S_T είναι η τιμή της μετοχής κατά τη λήξη, K είναι η τιμή άσκησης του δικαιώματος (strike price) , και το A υποδηλώνει μορφή μιας μέσης τιμής της τιμής του υποβόσκοντος υποκείμενου τίτλου. Η αξία του A εξαρτάται από το μονοπάτι ακολουθούμενο από την τιμή του υποκείμενου τίτλου. Η κοινή διαδικασία αποτίμησης μέσου όρου είναι η διακριτή αριθμητική μέθοδος ορισμένη από τη ακόλουθη σχέση

$$A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S(t_i)$$

Εδώ, $S(t_i)$ είναι η τιμή του υποκείμενου τίτλου σε διακριτό χρόνο $t_i, i = 1, 2, ..., n$. Στο όριο $n \to \infty$, η δειγματοληπτικοί διακριτοί μέσοι όροι γίνονται συνεχείς. Ο συνεχής αριθμητικός μέσος όρος δίνεται από την σχέση

$$A = \frac{1}{T_2 - T_1}\int_{T_1}^{T_2} S(t)dt$$

όπου $[T_1, T_2]$ είναι το διάστημα μεταξύ του οποίου παίρνουμε τον μέσο όρο.

Δικαιώματα average value με συνεχή αριθμητικό μέσο όρο

Θεωρούμε ένα Ευρωπαϊκού τύπου call δικαίωμα με συνάρτηση τελικής αποπληρωμής δοσμένη από τη σχέση

$$V(S, A(T), T) = \max(A(T) - \mathrm{K}, 0) \qquad (6.1)$$

όπου T είναι ο χρόνος λήξης, Κ είναι η τιμή άσκησης του δικαιώματος (strike price) και

$$A(t) = \frac{1}{T - T_0}\int_{T_0}^{t} S(\tau)d\tau\ , \quad 0 < \mathrm{T}_0 < \mathrm{T}, \quad \tau > \mathrm{T}_0\ .$$

Σημειώνουμε ότι το διάστημα $[\mathrm{T}_0, \mathrm{T}]$ είναι το τελικό διάστημα χρόνου πάνω στο οποίο η μέση αξία της τιμής του υποκείμενου τίτλου υπολογίζεται και το $A(t)$ γίνεται η πραγματική μέση τιμή μόνο μετά από χρόνο $t = T$. Να σημειώσουμε εδώ ότι δεν περιλαμβάνουμε κανένα μέρισμα μέσα στον υποκείμενο τίτλο. Κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος (T_0, T), η κυρίαρχη εξίσωση για την αξία του Ασιατικού παραγώγου $V(S, A, t)$ δίνεται από τη σχέση

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{T - T_0} S \frac{\partial V}{\partial A} - rV = 0, \qquad (6.2)$$

με $S > 0$, $A > 0$, $T_0 < t < T$.

Η συνάρτηση τελικής αποπληρωμής δίνεται από την εξίσωση (6.1). Εδώ, θα θέλαμε να δείξουμε ότι μια τέτοια ακριβής αναλυτική λύση υπάρχει όταν το $A(t) \geq X$ και από αυτό μπορούμε να συμπεράνουμε τις απαιτούμενες συνοριακές συνθήκες ώστε να ισχύει $A(t) \leq X$.

Όταν $A(t) \geq X$, η τελική αποπληρωμή του δικαιώματος εγγυάται να είναι θετική από τη στιγμή που η $A(t)$ είναι μια αύξουσα συνάρτηση χρόνου. Σε μια τέτοια περίπτωση, η τελική αποπληρωμή μπορεί να εκφραστεί ως εξης

$$\frac{1}{T - T_0} \int_{T_0}^{T} S(\tau) d\tau - K = \frac{1}{T - T_0} \int_{T_0}^{t} S(\tau) d\tau - K + \frac{1}{T - T_0} \int_{t}^{T} S(\tau) d\tau$$

$$= A(t) - K + \frac{1}{T - T_0} \int_{t}^{T} S(\tau) d\tau .$$

Η παραπάνω αποπληρωμή μπορεί επίσης να επιτευχθεί χρησιμοποιώντας την ακόλουθη διπλότυπη αυτο-χρηματοδοτούμενη στρατηγική χαρτοφυλακίου (selffinancing duplicating portfolio strategy). Για τον πρώτο όρο, ένας επενδυτής μπορεί να επενδύσει $(A(t)-K)e^{-r(T-t)}$ δολάρια σε χαμηλού κινδύνου ομόλογα έτσι ώστε το ποσό του $A(t)-K$ να είναι ασφαλές για χρόνο $t=T$. Για να σιγουρέψουμε την υποσχόμενη απόδοση από τον δεύτερο όρο, ο επενδυτής πρέπει να μεταβιβάσει $\frac{1}{T-T_0}e^{-r(T-t)}\Delta\tau$ μονάδες μιας μετοχής σε ένα ομόλογο χαμηλού κινδύνου κάθε φορά που περνά το χρονικό διάστημα $(\tau,\tau+\Delta\tau)$. Ο συνολικός αριθμός απαιτούμενων μονάδων της μετοχής απο χρόνο t σε χρόνο T για κάθε μεταβίβαση είναι ο ακόλουθος

$$\frac{1}{T-T_0}\int_t^T e^{-r(T-t)}dr = \frac{1-e^{-r(T-t)}}{r(T-T_0)}$$

Από την αρχή της μη-αυθαιρεσίας, η αξία του δικαιώματος ισούται με την αξία του παραπάνω διπλότυπου χαρτοφυλακίου. Ως εκ τούτου, η αξία του δικαιώματος για $A(t)\geq K$ δίνεται από τη σχέση

$$V(S,A,t) = (A(t)-K)e^{-r(T-t)} + \frac{1-e^{-r(T-t)}}{r(T-T_0)}S\,,\ A(t)\geq K \qquad (6.3)$$

Ενώ η διακύμανση σ δεν φαίνεται ρητά σ'αυτή τη φόρμουλα, φαίνεται όμως ρητά στην S και την A.

Για $A(t)\leq K$, η τιμή του παραγώγου διέπεται από την εξίσωση (6.2), αλλά δεν υπάρχει διαθέσιμη καμία κλειστή φόρμα αναλυτικής λύσης. Ωστόσο, η αξία του δικαιώματος μπορεί να επιτευχθεί με τον υπολογισμό πεπερασμένων διαφορών, όπως υπάρχει παρακάτω χρησιμοποιώντας τις ακόλουθες συνοριακές υποθέσεις

$$V(0,A,t) = \max(e^{-r(T-t)}(A(t)-K),0)$$

$$\lim_{S\to\infty}\frac{\partial V}{\partial S}(S,A,t)=\frac{T-t}{T-T_0}e^{-r(T-t)}$$

$$V(S,K,t)=\frac{1}{T-T_0}\frac{1-e^{-r(T-t)}}{r}S$$

Η τελευταία συνοριακή συνθήκη επιτυγχάνεται θέτοντας $A=K$ στην σχέση (6.3). Παρακάτω συναντούμε αυστηρές ταλαντώσεις στην λύση με πεπερασμένες διαφορές εφόσον η εξίσωση (6.3) μοιάζει μια δισδιάστατη εξίσωση διάχυσης αλλά με τον όρο διάχυσης να λείπει σε μια από τις χωρικές διαστάσεις.

Arithmetic Averaging Call using Finite Difference Calculation (Αριθμητική προσέγγιση με την μέθοδο των πεπρασμένων διαφορών)

Η συγκεκριμένη παράγραφος παρατίθεται για να έχει ο αναγνώστης μια πλήρη εικόνα των πιθανών αριθμητικών πρσεγγίσεων της δίκαιης τιμής όμως παραμένει σε θεωρητικό επίπεδο καθώς στην συγκεκριμένη εργασία εργαστήκαμε μόνο πάνω στη μέθοδο προσέγγισης Monte Carlo. Έτσι, με την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών για να αποτιμήσουμε ένα Ασιατικό παράγωγο, βρίσκουμε την αξία του παραγώγου σε κάθε κόμβο για όλες τις πιθανές τιμές του μονοπατιού της συνάρτησης $F(S,t)$ η οποία μπορεί να απαντηθεί πάνω σ'αυτόν τον κόμβο. Δυστυχώς, ο αριθμός των πιθανών τιμών για την μέση τιμή της αξίας F σε έναν διωνυμικό κόμβο για τα παράγωγα αριθμητικού μέσου όρου μεγαλώνει εκθετικά σε 2^n όπου n είναι ο αριθμός των χρονο-βημάτων από το άκρο ενός διωνυμικού δέντρου. Κατά συνέπεια, τα διωνυμικά σχέδια που δεν θέτουν περιορισμούς στον αριθμό των πιθανών F τιμών σε έναν κόμβο γίνονται υπολογιστικά ακατόρθωτα. Μια πιθανή λύση αυτού του προβλήματος είναι να περιορίσουμε τις πιθανές τιμές της F σε ένα συγκεκριμένο σύνολο από προκαθορισμένες τιμές. Η αξία του παραγώγου $V(S,F,t)$ για άλλες τιμές της F εξασφαλίζεται από τις γνωστές τιμές της V στις προκαθορισμένες τιμές της F με παρεμβολή μεταξύ των κομβικών τιμών. Οι μέθοδοι παρεμβολής συμπεριλαμβάνουν τον κοντινότερο κόμβο παρεμβολής, γραμμικής και τετραγωνικής παρεμβολής.

Παρουσιάζουμε εδώ λοιπόν, την τεχνική της παρεμβολής μέσω της κατασκευής του FSG αλγορίθμου για την αποτίμηση ενός arithmetic averaging call παραγώγου.

Πρώτα από όλα, ορίζουμε την κατά μέσο όρο αριθμητική μεταβλητή ως

$$A_t = \frac{1}{t}\int_0^t S_u du \qquad (6.1.a)$$

Η τελική αποπληρωμή ενός Ασιατικού call παραγώγου δίνεται από το $\max(S_T - A_T, 0)$, όπου το A_T είναι ο αριθμητικός μέσος όρος του S_T σε μια χρονική περίοδο $[0,T]$. Για ένα δοσμένο βήμα χρόνου Δ_t, κατασκευάζουμε τα στοιχειωδη βηματα να είναι

$$\Delta W = \sigma\sqrt{\Delta_t} \text{ και } \Delta Y = \rho\Delta W, \quad \rho < 1,$$

Και ορίζουμε τις πιθανές τιμές για τα S_T και A_T στο νιοστό χρονικό βήμα απο τις σχέσεις

$$S_j^n = S_0 e^{j\Delta W} \text{ και } A_k^n = S_0 e^{k\Delta Y},$$

Όπου οι j και k είναι ακέραιοι , και S_0 είναι η τιμή της μετοχής στο άκρο ενός διωνυμικού δέντρου. Παίρνουμε $\frac{1}{\rho}$ να είναι ένας ακέραιος. Όσο μεγαλύτερη είναι η επιλεγμένη τιμή του ακεραίου για το $\frac{1}{\rho}$, τόσο καλύτερη είναι η ποσοτικοποιήση μιας μέσης τιμής για την μετοχή. Διαφορίζοντας την εξίσωση (6.1.a) με προσοχή στο t, παίρνουμε τη σχέση $d(tA_t) = S_t dt$,

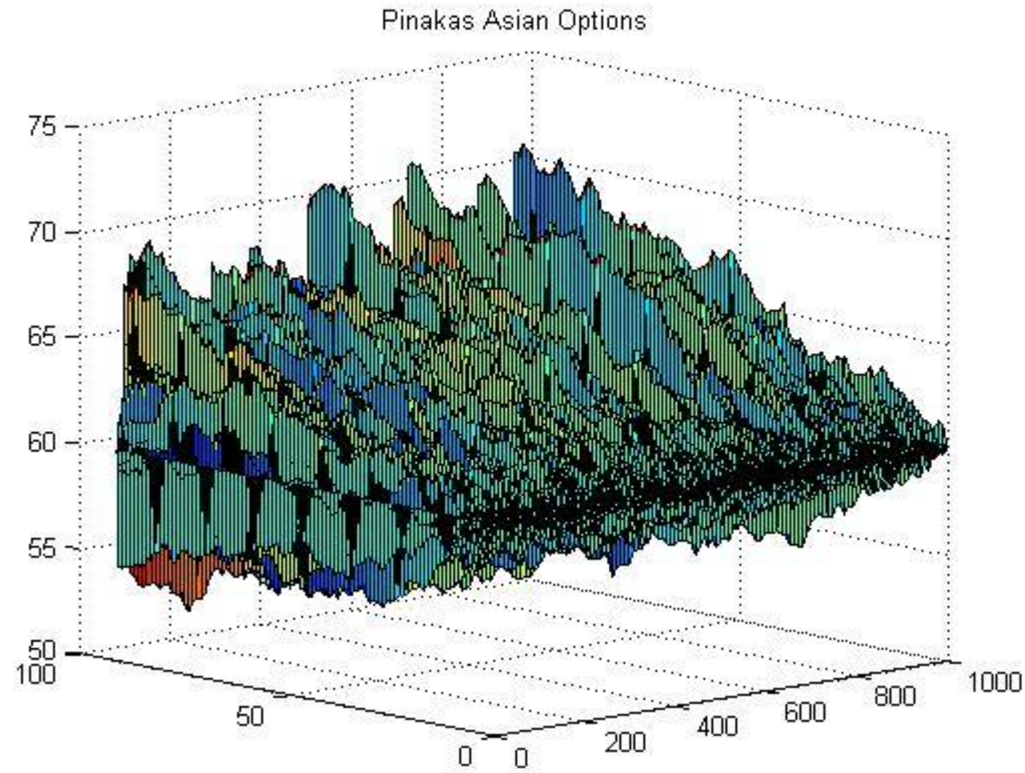
Και της οποίας το διακριτό ανάλογο δίνεται από τη σχέση

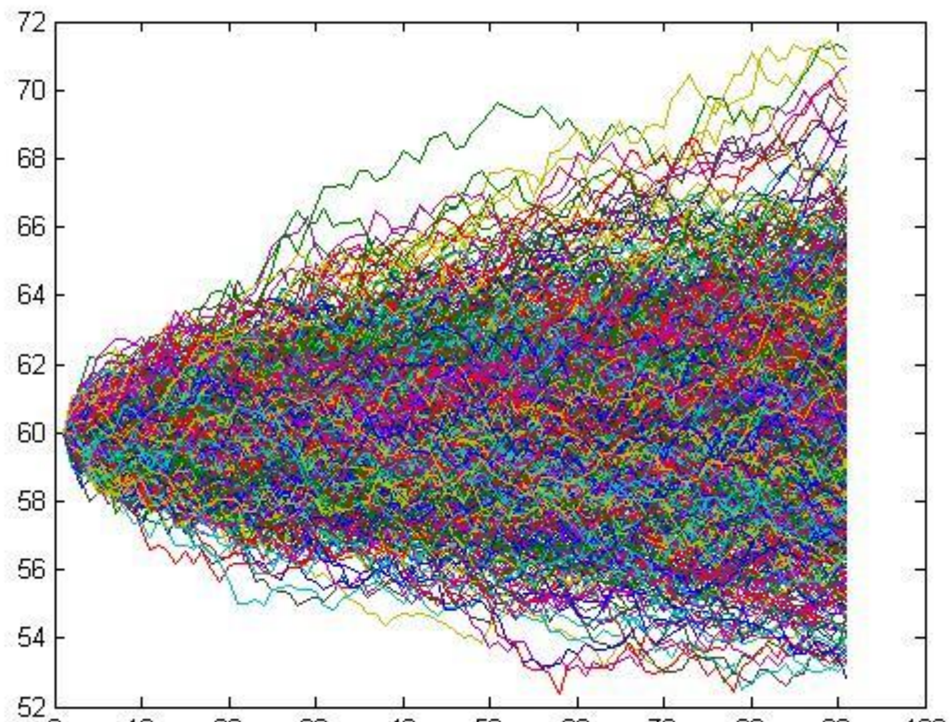
$$A_{t+\Delta t} = \frac{(t+\Delta t)A_t + \Delta_t S_{t+\Delta t}}{t+2\Delta t}$$

ΠΙΝΑΚΕΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΩΝ ASIAN OPTION

Λαμβάνοντας S0=60€ ως αρχική τιμή της μετοχής, K=90€ ως τιμή άσκησης του δικαιώματος (strike price), r=0.02 επιτόκιο, T=1/4 του χρόνου ο χρόνος λήξης του δικαιώματος και σ=0.1 η διακύμανση της κανονικής κατανομής έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα για την δίκαιη τιμή (premium) υπολογίζοντας τα μόνο με την προσεγγιστική μέθοδο Monte Carlo και για τα οποία φαίνεται ότι όσο μεγαλώνουν οι επαναλήψεις η δίκαιη τιμή συγκλίνει σε έναν αριθμό κοντά στα 10.8€ περίπου. Επίσης παρατηρούμε όπως και στις προηγούμενες εφαρμογές της μεθόδου Monte Carlo παραπάνω ότι ο χρόνος εκτέλεσης των επαναλήψεων μεγαλώνει όσο αυτές αυξάνονται.

Επαναλήψεις (Monte Carlo)	**Premium**	**Χρόνος εκτέλεσης**
10	5.012306	0.53125 sec
100	8.683597	0.53125 sec
1000	10.053187	1.03125 sec
10000	10.507152	5.140625 sec
100000	10.729824	8.002409 sec


Pinakas Asian Options



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Σε αυτό το κεφάλαιο παραθέτονται τα προγράμματα υπολογισμού των δίκαιων τιμών των αντίστοιχων δικαιωμάτων προαίρεσης Currency, Binary, Compound, Chooser, Lookback και Asian στο πρόγραμμα MatLab όπως επίσης με πράσινο χρώμα παρατίθενται κάποια διευκρινιστικά σχόλια για την καλύτερη κατανόησή τους από τον αναγνώστη.

ΚΩΔΙΚΑΣ CURRENCY OPTION ΓΙΑ ΑΠΛΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΑΠΟ ΤΥΠΟ

```
function CurrencyOnePrice(S0,K,r,r1,T,sigma)

format long
%Eleni Tantoulou
%SEMFE 2013
% Currency Option (stoxastikes anelikseis)

%timh tou option



sig= sigma^2;

dt_s= sqrt(T); %riza T

d1 = (log(S0/K) + (r-r1+(0.5*sig))*T)/(sigma*dt_s);

d2 = (log(S0/K) + (r-r1-(0.5*sig))*T)/(sigma*dt_s);

Y= exp(-r1*T)*S0*normcdf(d1) - K*exp(-r*T)*normcdf(d2);

S_T=exp(r1*T)*Y;

Y_c=exp(-r1*T)*abs(S_T-K);

disp(['Timh Currency Option: '])

disp([Y_c])




end
```

ΚΩΔΙΚΑΣ BINARY OPTION ΓΙΑ ΑΠΛΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΑΠΟ ΤΥΠΟ

```
function BinaryOption(S0,K,r,sigma,T)
%Eleni Tantoulou
%SEMFE 2013
%BINARYOPTION



d1=(log(S0/K)+(r+sigma^2/2)*T)/(sigma*sqrt(T));

d2=d1-sigma*sqrt(T);

call_asset=abs(S0*normcdf(d1)-K*normcdf(d2))*exp(-r*T/365);

disp(['Timh gia asset or nothing call: '])

disp([call_asset])




end
```

ΚΩΔΙΚΑΣ COMPOUND OPTION ΓΙΑ ΑΠΛΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΑΠΟ ΤΥΠΟ ΚΑΙ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ MONTE CARLO

```
function CompoundCalls(S0,Tc,Kc,T,K,r,sigma)
%Eleni Tantoulou
%SEMFE 2013
%Compound call option.
%------------------------------------------


    function Pr=EC(S0,Tc,Kc,T,K,r,sigma)



N2a=mvncdf([h(S0,Sstar,r,sigma,Tc)+sigma*sqrt(Tc)
k(S0,K,r,sigma,T)+sigma*sqrt(T)],[0 0], [1 sqrt(Tc/T); sqrt(Tc/T) 1]);
N2b=mvncdf([h(S0,Sstar,r,sigma,Tc) k(S0,K,r,sigma,T)],[0 0], [1 sqrt(Tc/T);
sqrt(Tc/T) 1]);

% Ypologismos tou premium gia to Compound Option
Pr=S0*N2a-K*exp(-r*T)*N2b-Kc*exp(-r*Tc)*normcdf(h(S0,Sstar,r,sigma,Tc));



%----xrhsimopoioumenes synarthseis

 function y = k(S,K,r,sigma,T)
y=(log(S/K)+(r-0.5*sigma^2)*T)/(sigma*sqrt(T));
 end

function y = h(S,Sstar,r,sigma,Tc)
y=(log(S/Sstar)+(r-0.5*sigma^2)*Tc)/(sigma*sqrt(Tc));
end

function [p] = mvncdf(x, mu, Sigma)


f = zeros(m,1);
f(1) = normcdf(x(1) / C(1,1));

y = zeros(m,1);

err = 2 * errMax;
while err > errMax && N < Nmax
    w = unifrnd(0,1,m-1,1);
    for i = 2:m
        y(i-1) = norminv(w(i-1)*f(i-1));
        q = 0;
        for j = 1:i-1
            q = q + C(i,j)*y(j);
        end
        f(i) = normcdf((x(i) - q) / C(i,i)) * f(i-1);
    end
    N = N + 1;
```

```
    del = (f(m) - p) / N;
    p = p + del;
    varSum = (N-2) * varSum / N + del^2;
    err = alph * sqrt(varSum);
end

end
    end




Pr=EC(S0,Tc,Kc,T,K,r,sigma);
Pr=max(abs(Pr-K),0);
disp('Pragmatikh Timh gia to premium tou European Compound Option: ')
disp([Pr])


N=input('Dwste to plithos twn epanalhpsewn Monte Carlo: ');

%Monte Carlo Simulation.
%
%N epanalhpseis
randn('state',0)
for i=2:Nst+1
for j=2:N
    S_T(i,j)=S_T(i,j).*exp((r-0.5*sigma^2)*dt+sigma*sqrt(dt).*cracks(i,j));
end
end
S_T=cumprod(S_T,1);
S_T=S_T.*S0;
price=zeros(1,Nst+1);
for i=1:N
price(i)=abs(Kc-S_T(Nst+1,i));
end
price=price*exp(-r*(T-Tc));
ECMC=mean(price);



disp(['Timh Monte Carlo gia to premium tou European Compound Option: '])
disp([ECMC])
figure(1)
plot(S_T)
title('Compound Option - Prosomoiwsh timwn trimhnou')

figure(2)
surf(S_T)
title('Pinakas prosomoiwshs timwn trimhnou')

end
```

ΚΩΔΙΚΑΣ CHOOSER OPTION ΓΙΑ ΑΠΛΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΑΠΟ ΤΥΠΟ ΚΑΙ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ MONTE CARLO

```
function  ChooserOption(S,T,Tc,K,r,sigma)
%Eleni Tantoulou
%Chooser Option


    function Premium=CO(S,T,Tc,X,r,sigma)

x=[log(S/X)+(r+(sigma^2/2))*T]/(sigma*sqrt(T))/365;

y=[log(S/X)+r*T+(sigma^2/2)*Tc]/(sigma*sqrt(Tc));

Premium=S*normcdf(x)-X*exp(-r*T)*normcdf(x-sigma*sqrt(T)) + X*exp(-
r*(T))*normcdf(-y+sigma*sqrt(Tc)) -S*normcdf(-y);

    end

Prem=CO(S,T,Tc,K,r,sigma);
disp(['Pragmatikh Timh tou premium gia to Chooser Option: '])
disp([exp(-r*(T-Tc))*Prem])

N=input('Dwste ton arithmo twn kleisimatwn gia Monte Carlo: ');


%Monte Carlo Simulation.

%N kleisimata

for j=2:N

for i=2:Nst+1

S_T(i,j)=S_T(i,j).*exp((r-0.5*sigma^2)*dt+sigma*sqrt(dt).*cracks(i,j));

End

End

S_T=cumprod(S_T,1);

S_T=S_T.*S;

for i=1:N

price(i)=max(-S_T(Nst+1,i)+K);

price(i)=price(i)*exp(-r*(T-Tc));

end

COMC=mean(price);
```

```
disp(['Timh Monte Carlo gia to premium tou Chooser Option: '])

disp([COMC])

%plot

figure(1)

title('Chooser Option')

plot(S_T)

figure(2)

surf(S_T)

end
```

ΚΩΔΙΚΑΣ LOOKBACK OPTION ΓΙΑ ΑΠΛΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΑΠΟ ΤΥΠΟ ΚΑΙ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ MONTE CARLO

```
function LookbackOption(S,T,r,sigma)

% Eleni Tantoulou
% Lookback Option Pricing.
%------------------------------------

    function pr=LOOKBACK_VAL(S, T, r, sigma)

%arxikopoihsh timwn.

pr=0;
min1=1;
min2=1;
term1=0;
term2=0;
bCoeff = S*exp(-r*T)*(sigma*sigma)/(2*(r));
parenthesi1=0;
parenthesi2=0;
temp=0;
ST=rand;
dt=sigma*sqrt(T);
EST=mean(ST-min(min1,min2));
value=exp(-r*T)*EST;
   a1 = ( log(S/S_min) + (r + 0.5*sigma*sigma)*T ) / dt;
   a2 = a1 - dt;



 dm=a1/dt;
 c=(term1-term2)+(exp(-r*T)*sigma^2*S_min/(2*r))*[parenthesi1^(-
2*r/sigma^2)+ parenthesi2-exp(r*T)*normcdf(dm)];


    end


premium=LOOKBACK_VAL(S, T, r, sigma);
disp(['Pragmatikh Timh gia Lookback Option: '])
disp([exp(-r*T)*premium])
N=input('Dwste to plithos twn epanalhpsewn Monte Carlo: ');

%Monte Carlo Simulation.
%
%N epanalhpseis

for j=2:N
for i=2:Nst+1
S_T(i,j)=S_T(i,j).*exp((r-0.5*sigma^2)*dt+sigma*sqrt(dt).*cracks(i,j));
end
end
S_T=cumprod(S_T,1);
S_T=S_T.*S;
for i=1:N
```

```
price(i)=abs(S_T(Nst+1,i)-S_min);
price(i)=price(i)*exp(-r*T);
end
LBMC=mean(price);

disp(['Timh Monte Carlo gia to Lookback Option: '])
disp([LBMC])
%plot
%figure(1)
%title('Lookback Option')
%plot(S_T)
%title('Monte Carlo gia Lookback Options')
%figure(2)
%surf(S_T)
%title('Pinakas Monte Carlo gia Lookback Options')


end
```

ΚΩΔΙΚΑΣ ASIAN OPTION ΓΙΑ ΑΠΛΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ MONTE CARLO

```
function AsianOption(S0,K,r,T,sigma)
% Eleni Tantoulou
% Asian Calls

N=input('Dwste to plithos twn epanalhpsewn Monte Carlo: ');

R = exp(-r*T);

%h methodos
tim=1/360;

n=1-sqrt(1/N);
randn('state',0)
cracks=randn(Nst+1,N);
S_T=ones(Nst+1,N);
S_T(1,:)=S0*ones(1,N);
for j=2:N
for i=2:Nst+1
S_T(i,j)=S_T(i,j).*exp((r-0.5*sigma^2)*tim+sigma*sqrt(tim).*cracks(i,j));
end
end
S_T=cumprod(S_T,1);
c=zeros(1,N);


    function [P_A,AOV]=AC(S0,K,r,T,sigma,N,S_T)

    m = (r - sigma^2/2)*tim;
    s = sigma*sqrt(tim);
    S = cumsum([log(S0), 1],2);
    arithmetic_mean = mean(exp(S));
    Asian= abs([arithmetic_mean-K;zeros(1)]);
    P_A= mean(Asian)*(1-1/sqrt(N));



%epistrofh ths timhs
disp(['Timh Monte Carlo gia to premium tou Asian Option: '])
disp([exp(-r*T)*pr])
%plot
figure(1)
title('Asian Option')
plot(S_T)
%figure(2)
%plot(mean(S_T))
figure(2)
surf(S_T)
title('Pinakas Asian Options')



end
```

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΑ ΒΙΒΛΙΑ

(1) Bernt Oksendal “Stochastic Differential Equations”, Springer

(2) Yue-Kuen Kwok, “Mathematical Models of Financial Derivatives”, Springer

(3) Yue-Kuen Kwok.”Mathematical Models of Financial Derivatives”, Springer (second edition)

(4) Marek Capinski, Tomas Zastawnieck, “Mathematics for finance. An introduction to Financial Engineering”, Springer

(5) Elliot, R.J. – Kopp, P.E. “Mathematics of Financial Markets”, Springer

(6) Hull, J. Futures, “Options and other Derivatives, 4th edition”, Prentice-Hall 2000

(7) Lmberton, D. – Lapeyre, B. “Introduction au calcul stochastique appliqué a la finance”, ellipses, 1997

(8) Seydel, R. “Tools for computational Finance, 2nd ed.”, Springer 2002

(9) Sri Krishnamurthy, «Approaches to implementing Monte Carlo Methods in matlab», Wilmote magazine 2009

ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ

(10) Σπηλιώτης Ιωάννης, «Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις», Συμεών

(11) Βασιλείου Π.- Χ., «Στοχαστικά Χρηματοοικονομικά», εκδ. Ζήτη 2001

(12) Μπούτσικας Μιχαήλ, «Παράγωγα χρηματοοικονομικά Προϊόντα», 2005-07

(13) Στεφανάκος, «Programming in MatLab», εκδ. Συμμετρία 2011

ΑΡΘΡΑ

[1] Bin Peng, Yupi Han (2004), “A study on the Binary option Model and its Pricing”, Proceedings of the Academy of Accounting and financial Studies, Volume 9, Number 1, 71-75, New Orleans.

[2] Pricing path-dependent options: Monte Carlo simulation and reduction techniques, Quantitatice Methods for Finance and Risk Analysis, London School of Economics, 2009

[3] Geske, R, “The valuation of compound options”, Journal of Financial Economics, vol 7

[4] Garman, M. B. and S.W. Kohlhagen, “Foreign currency option values”, Journal of International Money and Finance, vol 2.

[5] Zhang, R., P.A. “Flexible Asian Options”, Journal of Financial Engineering, vol 3

[6] Heynen, R. C. and H. M. Kat, “Lookback options with descrete and partial monitoring of the underlying price”, Applied Mathematical Finance, vol.2

[7] Hunter, W.C. and D.W. Stowe, “Path-dependent options: valuation and applications”, Federal Reserve Bnk of Atlanta Economic Review

[8] Brennan. M.J. and E.S. Schwartz, “Finite difference method and jump processes arising in the pricing of contigent claims”, Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 13

[9] Kim, I.J. and S. J. Byun, “Optimal exercise boundary in a binomial option pricing model”, Journal of Financial Engineering, vol.3