



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής
Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης

**Η συνεχής συζυγής μέθοδος για το βέλτιστο έλεγχο ροής με
δέσμες ρευστού - Εφαρμογές εσωτερικής και εξωτερικής
αεροδυναμικής**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΓΕΩΡΓΙΟΣ Θ. ΔΗΜΗΤΡΑΚΟΠΟΥΛΟΣ

Επιβλέπων: ΚΥΡΙΑΚΟΣ Χ. ΓΙΑΝΝΑΚΟΓΛΟΥ

Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Μάρτιος 2012

Περιεχόμενα

Περίληψη	3
Abstract	6
Ευχαριστίες	10
Κεφάλαιο 1 ^ο : Γενικά για τον Έλεγχο Ροής	13
§ 1.1 : Ο έλεγχος ροής στην διάρκεια της ιστορίας	14
§ 1.2 : Ο έλεγχος του οριακού στρώματος	17
§ 1.3 : Ο παθητικός έλεγχος της ροής	22
§ 1.4 : Ο ενεργητικός έλεγχος της ροής.....	23
Κεφάλαιο 2 ^ο : Διατύπωση των Συζυγών Εξισώσεων	26
§ 2.1 : Διατύπωση των εξισώσεων ροής/εξισώσεων κατάστασης	27
§ 2.2 : Εισαγωγή στις συνεχείς συζυγείς εξισώσεις	30
§ 2.3 : Χρησιμοποιούμενες συναρτήσεις κόστους.....	32
§ 2.4 : Διατύπωση συνεχών συζυγών εξισώσεων του πεδίο ροής	35
§ 2.5 : Μεταβλητές σχεδιασμού και μοντελοποίηση του <i>jet</i>	41
§ 2.6 : Οριακές συνθήκες συζυγούς προβλήματος και παράγωγοι ευαισθησίας για το πρόβλημα εσωτερικής αεροδυναμικής	46
§ 2.7 : Οριακές συνθήκες συζυγούς προβλήματος και παράγωγοι ευαισθησίας για το πρόβλημα εξωτερικής αεροδυναμικής.....	54
§ 2.8 : Παράγωγοι ως προς τις μεταβλητές μοντελοποίησης του <i>jet</i>	62
Κεφάλαιο 3 ^ο : Αποτελέσματα βελτιστοποίησης στην εσωτερική αεροδυναμική... 65	
§ 3.1 : Γεωμετρία του προβλήματος	66
§ 3.2 : Επίλυση των εξισώσεων κατάστασης του αρχικού προβλήματος	69
§ 3.3 : Έλεγχος ορθότητας των παραγώγων	75
§ 3.4 : Βέλτιστος έλεγχος της ροής με χρήση μιας μεταβλητής σχεδιασμού και χωρίς περιορισμό στην παροχή του <i>jet</i>	77
§ 3.5 : Βέλτιστος έλεγχος της ροής με χρήση μιας μεταβλητής σχεδιασμού, με τη χρήση περιορισμού στην παροχή του <i>jet</i>	80
§ 3.6 : Διερεύνηση του εύρους του <i>slot</i>	83
Κεφάλαιο 4 ^ο : Αποτελέσματα βελτιστοποίησης στην εξωτερική αεροδυναμική ... 85	
§ 4.1 : Γεωμετρία του προβλήματος	85

§ 4.2 : Επίλυση των εξισώσεων κατάστασης του αρχικού προβλήματος	87
§ 4.3 : Βέλτιστος έλεγχος της ροής με χρήση δύο μεταβλητών σχεδιασμού και χωρίς περιορισμό στην παροχή του <i>jet</i>	92
Κεφάλαιο 5 ^ο : Παράγωγοι ευαισθησίας για τυρβώδη ροή.....	96
Κεφάλαιο 6 ^ο : Συμπεράσματα.....	99
Βιβλιογραφία.....	101

Περίληψη

Σκοπός της Διπλωματικής Εργασίας είναι η χρήση των συνεχών συζυγών μεθόδων (*continuous adjoint methods*) για τον ενεργητικό έλεγχο της ροής (*active flow control*) ασυμπίεστου ρευστού που είναι επιθυμητό να παρουσιάζουν βέλτιστη αεροδυναμική συμπεριφορά, όπως για παράδειγμα μειωμένο εύρος αποκόλλησης της ροής.

Οι συζυγείς μέθοδοι χρησιμοποιούνται για την εύρεση της κλίσης της συνάρτησης κόστους ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού του προβλήματος. Συγκεκριμένα, στη συνεχή συζυγή μέθοδο, οι συνεχείς συζυγείς εξισώσεις και οι αντίστοιχες οριακές συνθήκες προκύπτουν με παραγωγή της συνάρτησης κόστους επαυξημένης με το ολοκλήρωμα, σε όλο το πεδίο, του γινομένου των εξισώσεων κατάστασης (που στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι οι εξισώσεις *Navier Stokes* με χρήση του μοντέλου τύρβης *Spalart – Allmaras*) και των συζυγών μεταβλητών των συζυγών εξισώσεων. Η όλη διαδικασία οδηγεί στο σύστημα των συζυγών μερικών διαφορικών εξισώσεων, το οποίο διακριτοποιείται και επιλύεται με σκοπό τον προσδιορισμό του πεδίου των συζυγών μεταβλητών και, μέσω αυτών, των αντίστοιχων παραγώγων ευαισθησίας ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού του προβλήματος.

Στη παρούσα εργασία, χρησιμοποιούνται δύο διαφορετικές συναρτήσεις κόστους ανάλογα με το εξεταζόμενο πρόβλημα. Για την περίπτωση εσωτερικής ροής, η συνάρτηση κόστους είναι οι απώλειες ολικής πίεσης μεταξύ εισόδου και εξόδου, ενώ για την περίπτωση εξωτερικής αεροδυναμικής, αυτή είναι η οπισθέλκουσα εξαιτίας της πίεσης και των δυνάμεων λόγω συνεκτικότητας που ασκούνται πάνω στο σώμα.

Ο ενεργητικός έλεγχος της ροής με τη χρήση δεσμών ρευστού χρησιμοποιείται γιατί είναι ικανός να αυξήσει σημαντικά την άνωση και να μειώσει την οπισθέλκουσα σε αεροτομές, καθώς επίσης και να μειώσει τις απώλειες ολικής πίεσης σε αγωγούς με την έγχυση ή την αναρρόφηση μικρής ποσότητας ρευστού. Με τον τρόπο αυτό, ελέγχεται κατάλληλα η ανάπτυξη του οριακού στρώματος, η οποία παίζει πολύ

σημαντικό ρόλο στην εμφάνιση της αποκόλλησης της ροής. Διάφορα πειράματα κατά το παρελθόν έδειξαν ότι η έγχυση και η αναρρόφηση ρευστού μπορούν να τροποποιήσουν σημαντικά τη μορφή του πεδίου ροής και να οδηγήσουν έτσι σε καλύτερη αεροδυναμική συμπεριφορά.

Η συζυγής μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα εργασία σκοπεύει αρχικά στην εύρεση της βέλτιστης θέσης στην οποία θα τοποθετηθεί η δέσμη του ρευστού (*jet*) κατά μήκος της επιφάνειας ενός σώματος αεροδυναμικής μορφής. Επιπλέον, προσδιορίζεται και το είδος της δέσμης του ρευστού (*jet* έγχυσης ή αναρρόφησης) που θα χρησιμοποιηθεί ώστε να αποφευχθεί ή να ελαχιστοποιηθεί η αποκόλληση της ροής, που έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία σημαντικών απωλειών στην ροή. Αυτό συμβαίνει γιατί ο έλεγχος της ροής, βασισμένος στην έγχυση ή αναρρόφηση ρευστού, αποδεδειγμένα μπορεί να κατευθύνει την εξέλιξη του οριακού στρώματος της ροής. Συνεπώς, εκτός από την ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης, ο έλεγχος ροής με τη χρήση δεσμών ρευστού (δηλαδή η μέθοδος που μελετάται στη συγκεκριμένη εργασία) μπορεί να εφαρμοστεί για τον έλεγχο της μετάβασης από στρωτή σε τυρβώδη ροή, για την αύξηση ή τη μείωση της τύρβης, τον έλεγχο της θέσης εμφάνισης καθέτων κυμάτων κρούσης και σε πληθώρα άλλες εφαρμογές.

Τοπικά υψηλές τιμές των παραγώγων ευαισθησίας πάνω στο περίγραμμα του υπό μελέτη σώματος φανερώνουν το προτεινόμενο («βέλτιστο») σημείο τοποθέτησης του *jet* κατά μήκος του σώματος, διότι το νόημα των παραγώγων ευαισθησίας είναι πώς θα αλλάξει η συνάρτηση κόστους με αλλαγή των μεταβλητών σχεδιασμού του προβλήματος. Άρα, εάν τοποθετηθεί ένα *jet* στη θέση όπου εμφανίζονται οι υψηλότερες τιμές των παραγώγων ευαισθησίας, αναμένεται μεγαλύτερη μεταβολή της συνάρτησης κόστους σε σχέση με την αντίστοιχη μεταβολή εάν η δέσμη του ρευστού τοποθετηθεί σε οποιοδήποτε άλλο σημείο του σώματος. Επιπλέον, το πρόσημο των παραγώγων ευαισθησίας υποδεικνύει τον κατάλληλο τύπο της δέσμης του ρευστού που πρέπει να χρησιμοποιηθεί. Συγκεκριμένα, με βάση την υιοθετηθείσα σύμβαση προσήμων, το αρνητικό πρόσημο των παραγώγων σημαίνει αναρρόφηση ρευστού, ενώ το θετικό υποδηλώνει την ανάγκη έγχυσης ρευστού.

Στη συνέχεια, έχοντας εντοπίσει την κατάλληλη θέση έγχυσης ή αναρρόφησης ρευστού, προσδιορίζουμε τη βέλτιστη κατανομή ταχύτητας του *jet* που θα μας οδηγήσει στην βέλτιστη λύση του προβλήματος, δηλαδή στη μικρότερη τιμή της συνάρτησης κόστους. Αυτό γίνεται με διαδοχικούς κύκλους βελτιστοποίησης, κατά

τους οποίους χρησιμοποιούνται οι ανανεούμενες παράγωγοι ευαισθησίας που προκύπτουν από την επίλυση των συζυγών εξισώσεων. Με βάση αυτές τις παραγώγους, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της απότομης καθόδου (*steepest descent*) ώστε να προσδιορίζουμε κάθε φορά μια νέα κατανομή ταχύτητας του *jet* που θα μας δώσει μικρότερη τιμή της συνάρτησης κόστους σε σχέση με την αρχική περίπτωση αλλά και την προηγούμενη επανάληψη του αλγορίθμου βελτιστοποίησης.

Η παραπάνω διαδικασία πραγματοποιείται μέχρι σύγκλισης του προβλήματος, δηλαδή μέχρι την εύρεση του ελαχίστου της συνάρτησης κόστους, που συνεπάγεται μηδενισμό (στην πραγματικότητα πολύ μικρές τιμές) των παραγώγων ευαισθησίας (λόγω έλλειψης επιβολής περιορισμών). Έτσι, προκύπτει η βέλτιστη ροή, δηλαδή η ροή που όταν ελέγχεται με δέσμη ρευστού, εμφανίζονται σε αυτήν οι ελάχιστες απώλειες λόγω της χρήσης του *jet*.

Συνοπτικά, στην παρούσα διπλωματική εργασία:

- Έγινε η μαθηματική ανάπτυξη του συζυγούς προβλήματος με σκοπό την εύρεση των συζυγών εξισώσεων, των αντίστοιχων οριακών συνθηκών αλλά και των παραγώγων ευαισθησίας.
- Με τη χρήση του λογισμικού *OpenFOAM* πραγματοποιήθηκε η αριθμητική επίλυση των εξισώσεων κατάστασης και των συζυγών εξισώσεων. Σημειώνεται ότι ο επιλύτης του συζυγούς προβλήματος αποτελεί συνεισφορά της Μονάδας Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής και Βελτιστοποίησης.
- Αποδείχθηκε η ορθότητα των παραγώγων ευαισθησίας, γεγονός που εξασφαλίζει ότι η μέθοδος κατευθύνεται προς τη βέλτιστη λύση με σωστή κατεύθυνση.
- Έγινε εφαρμογή της μεθόδου σε δύο διαφορετικά προβλήματα, αρχικά σε ένα αγωγό (εσωτερική αεροδυναμική) και σε μια αεροτομή (εξωτερική αεροδυναμική).

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS

SCHOOL OF MECHANICAL ENGINEERING

FLUIDS SECTION

PARALLEL CFD & OPTIMIZATION UNIT

The continuous adjoint method to the optimal flow control using steady jets – Applications in internal and external aerodynamics

Diploma Thesis

Georgios T. Dimitrakopoulos

Advisor: K. C. Giannakoglou, Professor NTUA

Abstract

The aim of this diploma thesis is the adaptation and use of continuous adjoint methods for the optimal active flow control of incompressible fluids, aiming at optimal aerodynamic performance.

The adjoint method is used to compute the derivatives of the objective function with respect to the design variables. To do so, the objective function, augmented with the integral, across the field, of the product of the state equations (which in this case are the Navier-Stokes equations along with the turbulence model Spalart-Allmaras), is used in order to find the adjoint equations and the corresponding boundary conditions. The whole process leads to the adjoint

system of partial differential equations, which are discretized and solved to determine the field of the adjoint variables and, through them, their sensitivity derivatives with respect to the design variables of the problem.

In this study, two different objective functions are optimized, depending on the examined problem. In the case of internal flows, the objective function is the total pressure losses between the inlet and outlet of the domain, while in the case of external aerodynamics, the objective function to be minimized is the drag due to pressure and viscous forces exerted on the body.

The active control of the flow with the use of steady jets is used because it provides significant increase in airfoil lift and reduction in the total pressure losses in channels with the injection or suction of small quantities of fluid. This results to an adequate development of the boundary layer and leads to reduction of flow separation.

The adjoint method used in this work originally aims at finding the best location of the jet along the surface of an aerodynamic body shape. Moreover, the type of the jet (suction or blowing jet) to be used to avoid or minimize flow separation is determined.

Local high values of sensitivity derivatives on the contour of the body under consideration indicate the proposed (optimum) location of the jet along the body, because the sensitivity derivatives show how the cost function alters by changing the design variables of the problem. So, if a jet is used in a position where the values of the sensitivity derivatives are the highest, a higher reduction in the objective function is expected in contrast to the corresponding change if the jet was placed elsewhere on the body. Moreover, the sign of the sensitivity derivatives indicates the appropriate type of jet to be used. Specifically, based on the adopted sign convention, the negative sign of the derivative recommends suction, while the positive one indicates the need for blowing.

Having identified the optimal location of the jet, its optimal velocity distribution must then be determined in order to find the optimal solution, i.e. that corresponding to lowest value of the objective function. This is done by successive optimization cycles, during which the sensitivity derivatives, obtained

by solving the adjoint equations, are used. Based on these derivatives, with the use of the steepest descent method, it is able to identify a new velocity distribution of the jet that will give the lowest value of the objective function with respect to the original case and the previous iteration of the optimization algorithm.

The above procedure is performed until convergence of the problem, i.e. by finding the minimum value of the objective function, which implies zero (in fact very small values) of the sensitivity derivatives. This gives the optimal flow, i.e. the flow that, when it is controlled by the jet, yields minimum losses.

Apart from minimizing the total pressure losses, flow control using steady jets (i.e. the method developed in this work) can be applied to control the transition from laminar to turbulent flow, to control turbulence, to control the position of shock waves and, also in a variety of other applications.

In summary, in this diploma thesis:

- The mathematical development of the adjoint problem was performed in order to find the adjoint equations, their boundary conditions and the sensitivity derivatives.
- Using the software *OpenFOAM*, the state and the adjoint equations were numerically solved. The adjoint solver pre-existed at the Parallel CFD & Optimization Unit and the present thesis contributed with the extension to the optimal active flow control.
- The sensitivity derivatives values were validated by comparing them with finite differences.
- Two different problems were studied, namely a channel flow (internal aerodynamics) for the minimization of total pressure losses, and, an airfoil (external aerodynamics) for drag reduction or increase in lift at high angles of attack, where the uncontrolled airfoil is stalled.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Κυριάκο Γιαννάκογλου για τη δυνατότητα που μου προσέφερε να ασχοληθώ με ένα τόσο ενδιαφέρον θέμα, καθώς και για την καθοδήγηση που μου προσέφερε σε όλη τη διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας. Επίσης, θα ήθελα να τον ευχαριστήσω για τις γνώσεις που με βοήθησε να αποκομίσω και οι οποίες συνέβαλαν σημαντικά στις έως τώρα σπουδές μου.

Ακόμα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον υποψήφιο διδάκτορα Βαγγέλη Παπουτσή και τον διδάκτορα Δημήτριο Παπαδημητρίου για την βοήθειά τους τόσο σε τεχνικά όσο και σε επιστημονικά ζητήματα της διπλωματικής μου εργασίας. Ήταν δίπλα μου σε κάθε πρόβλημα και πρόθυμοι να με βοηθήσουν σε οποιαδήποτε απορία.

Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω την διδάκτορα Βαρβάρα Ασούτη και τον υποψήφιο διδάκτορα Ξενοφώντα Τρομπούκη για τις συμβουλές τους και τη βοήθειά τους σε θέματα σχετιζόμενα άμεσα με τη διπλωματική μου.

Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω την οικογένειά μου και τους φίλους μου για την συμπαράσταση, την υπομονή τους και την δύναμη και αντοχή που μου έδωσαν κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.

*Αφιερώνω αυτήν την
εργασία
στον ανιψιό μου Αναστάση,
και στους φίλους μου Γιώργο και Ορέστη*

Κεφάλαιο 1^ο

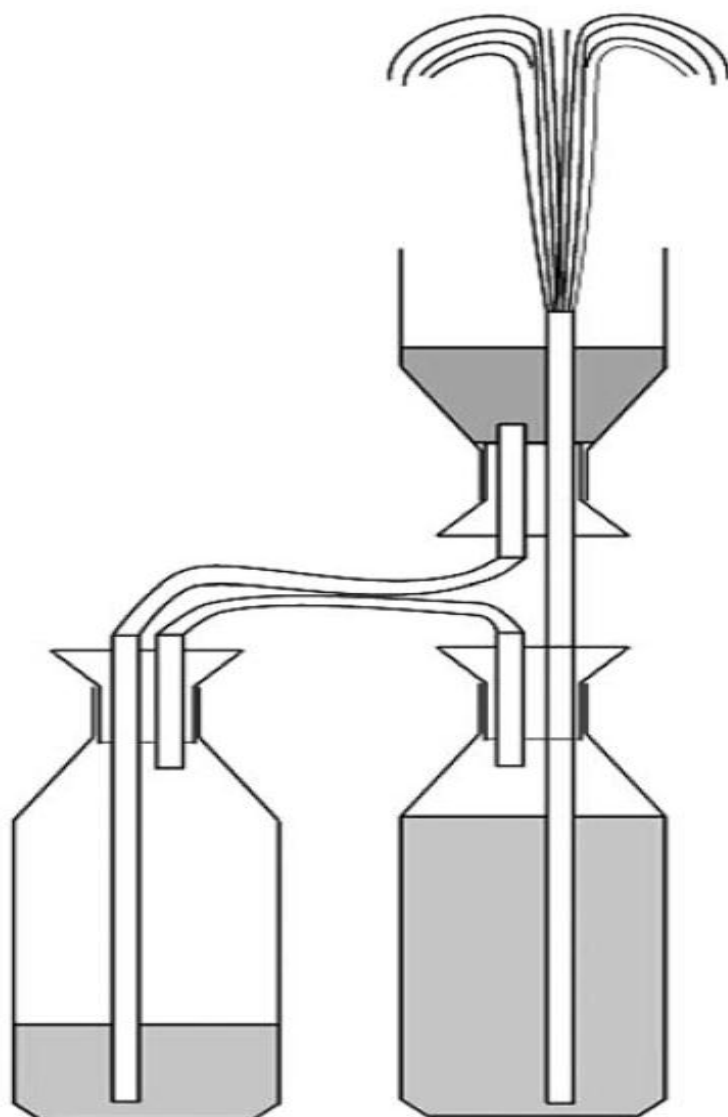
Γενικά για τον Έλεγχο Ροής ^[1]

Μια ματιά στη βιβλιογραφία δείχνει ότι ο έλεγχος ροής επηρεάζει αρκετούς τομείς των Μηχανολόγων Μηχανικών. Εξωτερική αεροδυναμική απόδοση, εσωτερική ροή σε συστήματα πρόωσης, ακουστικές εκπομπές και θόρυβος, αστάθεια καύσης, μετάβαση και διαχείριση της τύρβης είναι μερικοί μόνο από τους τομείς που μπορούν να επωφεληθούν από την εφαρμογή του ελέγχου ροής. Το όφελος των σύγχρονων τεχνικών ελέγχου της ροής, κοινό σε όλους τους τομείς των Ρευστών, είναι η δυνατότητα που προσφέρει για την επίτευξη μεγάλης κλίμακας αλλαγών στη συμπεριφορά της ροής εξασφαλίζοντας χαμηλά (ενεργητικός έλεγχος ροής) ή μηδενικά (παθητικός έλεγχος ροής) επίπεδα κατανάλωσης ενέργειας. Αυτό υποθέτει ότι στη ροή υπάρχουν ειδικοί μηχανισμοί, οι οποίοι, με κατάλληλη διέγερση, βελτιώνουν ή αλλάζουν ριζικά τη συμπεριφορά του ρευστού. Για το λόγο αυτό, οι μέθοδοι του σύγχρονου ελέγχου ροής είναι στενά συνδεδεμένοι με την ιστορία της θεωρίας του οριακού στρώματος και τη θεωρία ευστάθειας της ροής.

Οι παράγραφοι που ακολουθούν εξετάζουν πώς η κατανόηση της φυσικής του προβλήματος άλλαξαν την άποψη της επιστημονικής κοινότητας όσον αφορά τον έλεγχο της ροής. Ξεκινώντας με εμπειρικές προσεγγίσεις για το σχεδιασμό μεγάλης κλίμακας έργων πολιτικού μηχανικού, με το πέρασμα των χρόνων εμφανίζεται μια σταδιακή βελτίωση στην ικανότητα ελέγχου ροών. Αυτό οφείλεται στη κατανόηση του ρόλου της συνεκτικότητας στη διαμόρφωση του οριακού στρώματος και των μηχανισμών αστάθειας της ροής που ελέγχουν την εμφάνιση της τύρβης.

§ 1.1 : Ο έλεγχος ροής στην διάρκεια της ιστορίας

Από μια ευρεία οπτική, θα μπορούσε κανείς να πει ότι ο έλεγχος ροής εφαρμόστηκε από τους πρώτους μηχανικούς της ιστορίας, όπως ο Ήρωνας (περίπου 120 π.Χ.). Το βιβλίο του Ήωνα περιγράφει μια συλλογή πνευματικών συσκευών (δηλαδή συσκευών πεπιεσμένου αέρα) για τον έλεγχο της ροής των σημαντικών για την εποχή υγρών, κυρίως του νερού και του κρασιού. Η κατανόηση της έννοιας της υδροστατικής πίεσης οδήγησε στο σχεδιασμό της κρήνης του Ήωνα, στην οποία η ροή φτάνει πάνω από το ύψος της δεξαμενής τροφοδοσίας (Σχήμα.1.1.1). Η κατασκευή δείχνει έναν τρόπο με τον οποίο η βαρυτική δυναμική ενέργεια του νερού,



Σχήμα 1.1.1 : Σκαρίφημα του μηχανισμού της κρήνης του Ήωνα.

σε συνδυασμό με την πίεση του εγκλωβισμένου αέρα, προκαλεί εκτόξευση του νερού πιο ψηλά από την ελεύθερη στάθμη του. Κατά τη διάρκεια της Αναγέννησης, μηχανικοί όπως ο *Leonardo da Vinci* (1452 – 1519) επινόησαν διάφορες διατάξεις για τη δρομολόγηση νερού από ποτάμια και ταμειυτήρες με σκοπό να προμηθεύσουν πηγές με νερό καθώς και για την παροχή ενέργειας σε μύλους, έργα που αποτελούσαν κοινό στόχο για τους πολιτικούς μηχανικούς. Ωστόσο, η διαθέσιμη γνώση ήταν μικρή (τουλάχιστον πριν από 1687, όταν το 2^ο Βιβλίο του Νεύτωνα «*Principia Mathematica*» δόθηκε στη δημοσιότητα), αναγκάζοντας τους μηχανικούς να βασίζονται κυρίως στην εμπειρία, τη διαίσθηση ή σε εμπειρικές προσεγγίσεις.

Η κατάσταση βελτιώθηκε σημαντικά κατά τον 18^ο αιώνα, με τον *Daniel Bernoulli* και το μαθητή του *Leonhard Euler* να θέτουν τη θεωρητική βάση για τη μοντελοποίηση ιδανικών ροών. Με την κατανόηση της συμπεριφοράς της ροής και των αρχών που συνδέουν πίεση, κινητική και δυναμική ενέργεια στη ροή των ρευστών, μπορούσε πλέον να εξηγηθεί η φυσική του πνευματικού μηχανισμού του Ήρωνα. Ο έλεγχος ροής στους μηχανικούς του 18^{ου} αιώνα σήμαινε την ικανότητα να προβλεφθούν οι δυνάμεις, οι πιέσεις και οι ταχύτητες. Η εξίσωση *Bernoulli* κατέστησε δυνατή την πρόβλεψη της πτώση πίεσης μέσα σε ένα ακροφύσιο και, την ανάκτηση πίεσης σε ένα διαχύτη, εφόσον δεν υπήρχε αποκόλληση της ροής. Ωστόσο, επειδή τότε ήταν άγνωστο πότε τα συνεκτικά φαινόμενα θα οδηγούσαν στην αποκόλληση της ροής, η κατάσταση για τους μηχανικούς πριν το 1900 εμπεριείχε σοβαρά προβλήματα.

Ο *Gad – el – Hak* (1996) αναφέρεται στη περίοδο που προηγείται της θεωρίας του οριακού στρώματος του *Prandtl* ως «εμπειρική εποχή». Στην πραγματικότητα, η συγκεκριμένη περίοδος ήταν πολύ παραγωγική, ακόμη και χωρίς την κατανόηση των επιδράσεων της συνεκτικότητας στη ροή. Οι μηχανισμοί της άνωσης, της οπισθέλκουσας και της αποκόλλησης της ροής δεν ήταν πλήρως κατανοητοί εκείνη την εποχή. Ωστόσο, μπορούσαν να επιτευχθούν βελτιώσεις στην αεροδυναμική απόδοση από αλλαγές στη γεωμετρία (χωρίς κατανάλωση ενέργειας), μέθοδος στην οποία αναφερόμαστε σήμερα ως παθητικό έλεγχο της ροής (*passive flow control*). Ένα κλασικό παράδειγμα μιας εμπειρικής προσέγγισης σε παθητικό έλεγχο της ροής συναντάται στην ιστορία του τρόπου σχεδιασμού της μπάλας του γκολφ. Στις αρχές του 1800, παίκτες παρατήρησαν ότι η μπάλα ταξιδεύει μακρύτερα όταν η επιφάνειά

της ήταν τραχιά ή γρατζουνισμένη. Σχέδια που μελετούν την τραχύτητα που σκόπιμα πρέπει να προστεθεί στην επιφάνεια της μπάλας το 1880 αποτελούν την πρώτη απόπειρα παθητικού ελέγχου της ροής στηριζόμενη στην εμπειρική γνώση. Παρά το γεγονός ότι εκείνη την εποχή οι μηχανικοί δεν μπορούσαν ενδεχομένως να κατανοήσουν τη φυσική των μηχανισμών που κρύβονται πίσω από τη βελτίωση της απόδοσης ή τη βελτιστοποίηση της ροής μεταβάλλοντας την ταχύτητα, τα αποτελέσματα ήταν πραγματικά και μετρήσιμα, και οι μπάλες του γκολφ σήμερα συνεχίζουν να έχουν τραχεία επιφάνεια. Η εμπειρική προσέγγιση για τη βελτίωση της απόδοσης χρησιμοποιείται ακόμα και σήμερα, με πολλές βιομηχανίες να αναζητούν νέα μοντέλα τραχύτητας σε μια προσπάθεια να αυξήσουν τον ανταγωνισμό. Παρόλα αυτά, χωρίς μια ολοκληρωμένη θεωρία για την πρόβλεψη της αποκόλλησης της ροής, δεν ήταν δυνατό να βελτιστοποιηθεί η αεροδυναμική απόδοση.

Την ίδια περίπου εποχή, ο συνεχώς αναπτυσσόμενος τομέας της Αεροναυπηγικής είχε κάνει σταθερή πρόοδο στην πραγματοποίηση επανδρωμένης πτήσης χρησιμοποιώντας εμπειρικές μεθόδους ελέγχου της ροής. Οι *Lilienthal*, *Langley*, *Chanute*, *Curtis*, και οι αδελφοί *Wright* ήταν σε θέση να σχεδιάσουν πτερύγια και ιπτάμενες μηχανές χωρίς να γνωρίζουν τη θεωρία που διέπει την αποκόλληση της ροής. Αν και η επίδραση του φαινομένου της απώλειας στήριξης (*stall*) στη μείωση της άνωσης ήταν γνωστή, τα αίτια που ήταν υπεύθυνα για την αποκόλληση της ροής δεν ήταν κατανοητά. Οι αδελφοί *Wright* χρησιμοποίησαν αρχικά τα δεδομένα του *Lilienthal* και του *Chanute* για το σχεδιασμό των ανεμοπτέρων τους το 1900 και 1901, αλλά, όπως αναφέρθηκε από τον *Anderson* (2003), στα ανεμόπτερα αναπτυσσόταν πολύ μικρότερη άνωση από αυτή που είχε προβλεφθεί. Χωρίς τη κατανόηση των φαινομένων που εμφανίζονται σε μια πτέρυγα, οι αδελφοί *Wright* δεν μπορούσαν να εξηγήσουν τις διαφορές ανάμεσα στις μετρήσεις της άνωσης και της οπισθέλκουσας σε σχέση με τις αναμενόμενες τιμές. Τα εκτεταμένα πειράματα σε αεροδυναμική σήραγγα που πραγματοποίησαν οι αδελφοί *Wright* οδήγησαν στην καλύτερη κατανόηση των πλεονεκτημάτων της υψηλής αναλογίας πλάτους-μήκους (*aspect ratio*) των πτερυγίων. Το ανεμόπτερό τους το 1902 κατάφερε να επιτύχει την αναμενόμενη απόδοση με βάση τα δικά τους δεδομένα, θέτοντας τις βάσεις για την ιστορική τους πτήση το 1903.

Η ανάπτυξη από τον *Prandtl* της θεωρίας του οριακού στρώματος έγινε ταυτόχρονα με την εφεύρεση του αεροπλάνου. Η διάσημη δημοσίευσή του παρουσιάστηκε τον

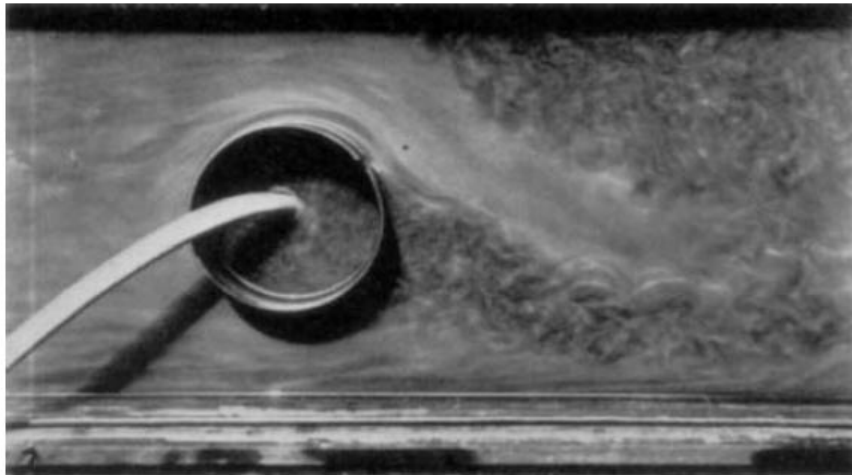
Αύγουστο του 1904, λιγότερο από ένα χρόνο μετά την πρώτη πτήση των αδελφών *Wright*, τον Δεκέμβριο του 1903. Η έρευνα του *Prandtl* σχετικά με τη φυσική που είναι υπεύθυνη για την αποκόλληση της ροής δεν είχε αρχικά καμία σχέση με την Αεροναυπηγική, αλλά υποκινήθηκε από το ενδιαφέρον του για την πρόβλεψη της οπισθέλκουσας και των απωλειών που σχετίζονται με συνεκτικές ροές. Δηλαδή, η επιστήμη του ελέγχου της ροής βρίσκει τις αρχές της στην θεωρία του οριακού στρώματος του *Prandtl*. Μέσα στα επόμενα 20 χρόνια, ο τομέας της Αεροναυπηγικής διερεύνησε τη χρήση ελέγχου του οριακού στρώματος για να καθυστερήσει την αποκόλληση και να ενισχύσει της άνωση του αεροσκάφους.

Οι τρεις παράγραφοι που ακολουθούν περιλαμβάνουν στοιχεία του ελέγχου του οριακού στρώματος (*boundary layer control – BLC*), καθώς και του παθητικού και ενεργητικού ελέγχου της ροής. Η πρώτη παράγραφος (§1.1.2) αναφέρεται στη φιλοσοφία της αλλαγής του οριακού στρώματος σε μια προσπάθεια να υπάρξει κάποιο πλεονέκτημα στην απόδοση. Ο έλεγχος του οριακού στρώματος αναπτύχθηκε κατά τη περίοδο από το 1920 έως το 1970. Με την ανακάλυψη των δινών σε τυρβώδεις ροές και την κατανόηση ότι αστάθειες στη ροή μπορούν με κατάλληλη διαχείριση να οδηγήσουν σε μεγάλης κλίμακας βελτιώσεις στην απόδοση, η φιλοσοφία του ελέγχου του οριακού στρώματος άλλαξε σε έλεγχο αστάθειας της ροής. Αστάθεια και επίπεδο της τύρβης μπορούν πια να ελεγχθούν με παθητικό (§1.1.3) ή ενεργητικό (§1.1.4) έλεγχο. Η αλλαγή στην ονοματολογία αντανακλά την αλλαγή στον τρόπο σκέψης σχετικά με τον έλεγχο της ροής.

§ 1.2 : Ο έλεγχος του οριακού στρώματος

Ο ρόλος του οριακού στρώματος στον προσδιορισμό της θέσης αποκόλλησης της ροής άρχισε να γίνεται κατανοητός μετά το 1920. Αυτή η αντίληψη ήταν ένα σημαντικό βήμα προς την κατεύθυνση του ενεργητικού ελέγχου ροής. Η πρώτη σκόπιμη χρήση του ελέγχου ροής για την καθυστέρηση της αποκόλλησης πρέπει να αποδοθεί στον *Prandtl*, ο οποίος χρησιμοποίησε δέσμες συνεχούς αναρρόφησης

ρευστού για να απομακρυνθεί το οριακό στρώμα από τα τοιχώματα των διαχυτών, αυξάνοντας έτσι τις επιδόσεις τους. Η αναρρόφηση του επέβαλε ο *Prandtl* ήταν κυρίως μια διαγνωστική τεχνική για την απόκτηση γνώσης πάνω στη φυσική της ροής. Η δημοσίευση^[2] που περιγράφει τη θεωρία του οριακού στρώματος περιελάμβανε απεικόνιση της ροής, αποδεικνύοντας την ικανότητα της αναρρόφησης ρευστού να καταστείλει την αποκόλληση της ροής από τη μία πλευρά ενός κυλίνδρου



Σχήμα 1.2.1 : Φωτογραφία του *Prandtl* με απεικόνιση της απορρόφησης ρευστού γύρω από κύλινδρο (*Betz*, 1961).

(Σχήμα 1.2.1). Το βιβλίο των *Prandtl* και *Tietjens* (1934) περιέχει φωτογραφίες που παρουσιάζουν απεικόνιση του ελέγχου ροής με τη χρήση αναρρόφησης ρευστού για τον έλεγχο της αποκόλλησης της ροής σε διαχύτες. Αυτά είναι ίσως τα δυο πρώτα παραδείγματα ελέγχου του οριακού στρώματος, τεχνικών που πραγματοποιήθηκαν με βάση την κατανόηση της φυσικής της ροής. Ο *Prandtl* συνέχισε να πειραματίζεται με τη σταθερή αναρρόφηση ρευστού, με καλώδια και κινούμενες επιφάνειες να τροποποιήσει τις ροές, αλλά, σύμφωνα με τον *Betz* (1961), εργάστηκε κυρίως προς την ανάπτυξη της θεωρίας για να κατανοηθεί και να προβλεφθεί η φυσική της αντίστασης της ροής.

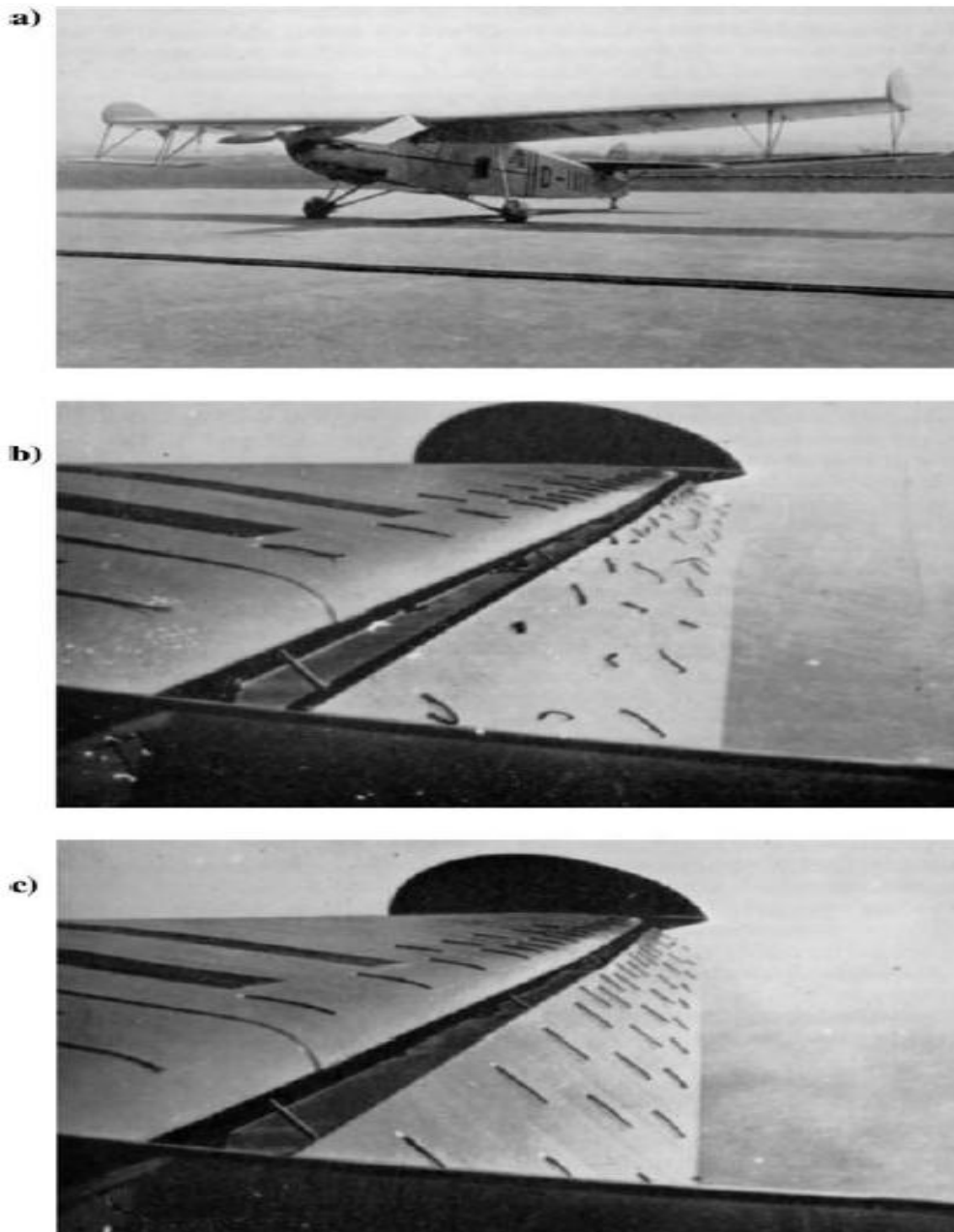
Νέες έννοιες του ελέγχου του οριακού στρώματος για την αύξηση της άνωσης διερευνήθηκαν από αεροναυπηγούς, αρχής γενομένης από τη δεκαετία του 1920. Το 1921, ο *Baumann* κατοχύρωσε με δίπλωμα ευρεσιτεχνίας τη χρήση δεσμών αέρα που βρίσκονται σε ειδικές υποδοχές πάνω σε πτερύγιο ως μια συσκευή αύξησης της άνωσης. Η πρώτη χρήση σταθερών δεσμών αέρα για την αύξηση της άνωσης στις Ηνωμένες Πολιτείες αναφέρθηκε από τους *Knight* και *Bamber* (1929). Στα

πειράματά τους διερεύνησαν την επίδραση του πλάτους της υποδοχής του *jet*, την θέση της υποδοχής του *jet*, καθώς και την πίεση του αέρα τροφοδοσίας εντός της αεροτομής (η οποία καθορίζει την παροχή μάζας της δέσμης) για την αύξηση της άνωσης. Οι ερευνητές απέδειξαν μια αύξηση 151% στο λόγο L/D για μια συμβατική διδιάστατη αεροτομή. Πειράματα ελέγχου του οριακού στρώματος σε αεροτομές χρησιμοποιώντας αναρρόφηση ρευστού διεξήχθησαν στα τέλη του 1920 από τους *Ackeret et al.* (1926) και *Schrenk* (1928, 1931). Το πρώτο αεροπλάνο για τη διεξαγωγή πειραμάτων ελέγχου του οριακού στρώματος με αναρρόφηση ρευστού κατασκευάστηκε στο Αεροδυναμικό Ερευνητικό Ινστιτούτο του *Goettingen*, στην Γερμανία (*Schrenk*, 1940). Οι φωτογραφίες του *Betz* (1961) δείχνουν το συγκεκριμένο αεροπλάνο και τα πτερύγια του (Σχήμα 1.2.2), και αποδεικνύουν την ικανότητα του ελέγχου του οριακού στρώματος με αναρρόφηση ρευστού στην επανακόλληση της ροής σε πραγματικές συνθήκες πτήσης.

Με βάση τη θεωρία του οριακού στρώματος, ο *Dryden* (1955) εφοδίασε την Αεροναυπηγική βιομηχανία με τις πρώτες πρακτικές εφαρμογές, ανάλογα με τις ανάγκες τους για πρόβλεψη της αποκόλλησης της ροής. Ανέφερε, επίσης ότι η θεωρία του οριακού στρώματος απέδειξε την αξία της πρώτης στον τομέα της Αεροναυπηγικής, προτού χρησιμοποιηθεί σε άλλους τομείς της μηχανολογίας.

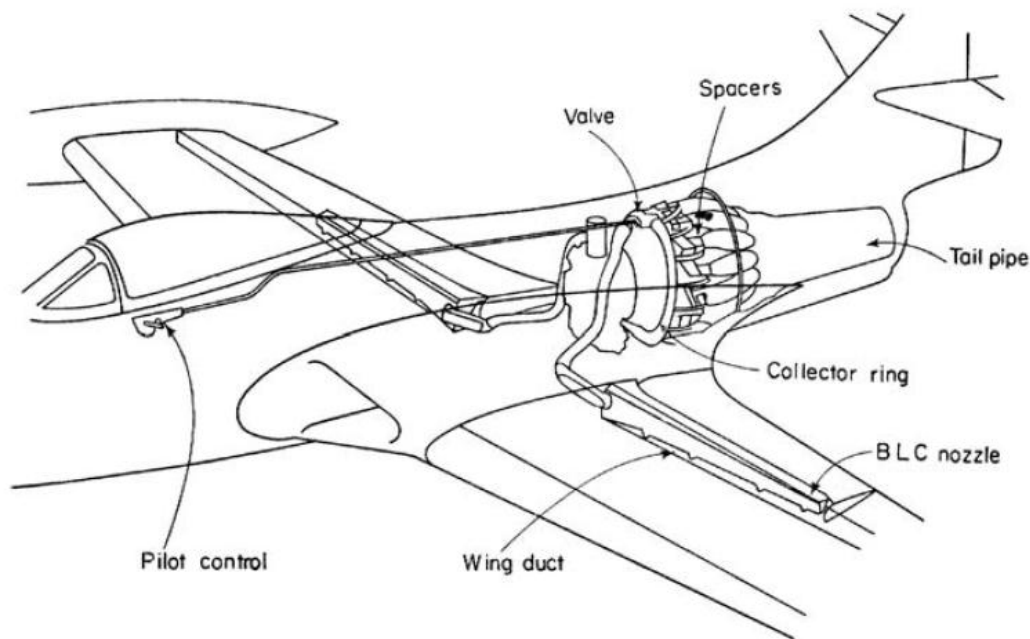
Μετά το Δεύτερο Παγκόσμιο Πόλεμο, η ώθηση προς την κατεύθυνση υψηλών ταχυτήτων, υπερηχητικών αεροσκαφών οδήγησε σε αεροτομές με μεγαλύτερο φορτίο και λεπτότερη κατανομή πάχους. Ωστόσο, τα μικρά πτερύγια απαιτούσαν μικρότερες ταχύτητες προσγείωσης για την αποφυγή απώλειας στήριξης, χαρακτηριστικά που δεν είναι επιθυμητά για ένα αεροπλάνο. Σε διάφορα αεροσκάφη, ως λύση του προβλήματος των μικρών πτερυγίων χρησιμοποιήθηκαν τεχνικές σταθερής έγχυσης ρευστού για την αύξηση της άνωσης σε χαμηλές ταχύτητες πτήσης. Παράδειγμα αποτελεί η τεχνική «*blown flaps*», που αναπτύχθηκε από τα μέσα της δεκαετίας του 1950 μέχρι τα μέσα της δεκαετίας του 1960. Αυτές οι σταθερές δέσμες αέρα, οι οποίες διοχετεύονται πάνω στην επιφάνεια του πτερύγιου, κατάφεραν να καθυστερήσουν την αποκόλληση της ροής με αποτέλεσμα να μειωθεί σημαντικά η ταχύτητα απώλειας στήριξης αεροσκαφών με μικρά πτέρυγα. Το αεροσκάφος *Blackburn B – 103 Buccaneer* χρησιμοποιεί πλήρη έλεγχο του οριακού στρώματος, τόσο στο μέτωπο προσβολής όσο και στην ακμή εκφυγής (*Donald*, 1997). Τα αεροσκάφη *Lockheed F – 104 Starfighter* και *BAC TSR – 2*

χρησιμοποιούν την τεχνική «*blown flaps*» για να μειώσουν την ταχύτητα προσγείωσης και τις αποστάσεις απογείωσης. Ένα σχεδιάγραμμα του συστήματος αυτού φαίνεται στο σχήμα 1.2.3 για το αεροσκάφος *Grumman F9F – 4*.



Σχήμα 1. 2. 2 : Πειράματα με αναρρόφηση ρευστού για την επανακόλληση της ροής γύρω από αεροτομή.

- a) Φωτογραφία του αεροπλάνου του *Schrenk*
- b) Πτερύγιο με ίνες (*tufts*) που φανερώνει την αποκόλληση της ροής
- c) Χρήση ελέγχου του οριακού στρώματος μέσω αναρρόφησης ρευστού για την επανακόλληση της ροής

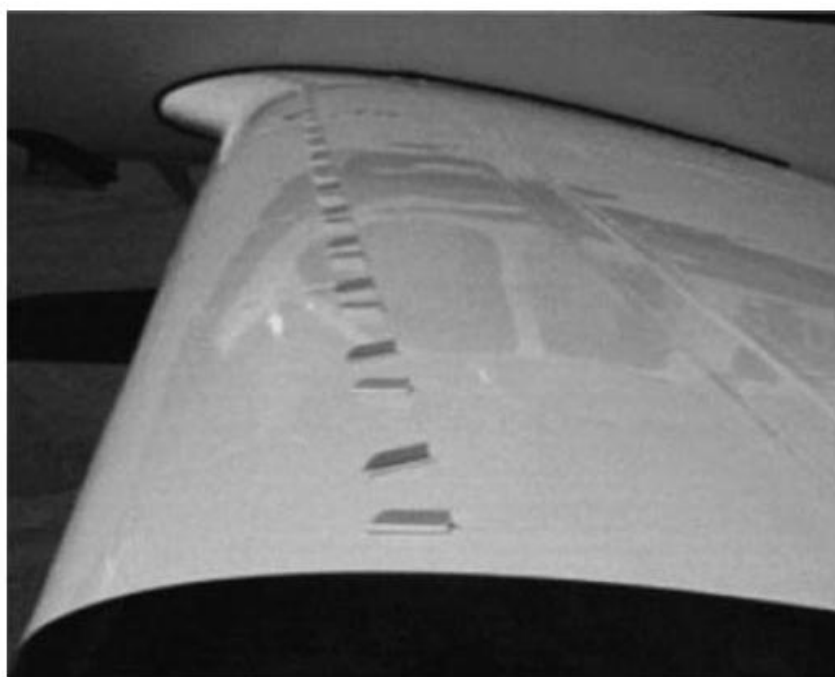


Σχήμα 1. 2. 3 : Σχεδιάγραμμα του συστήματος έγχυσης ρευστού του αεροπλάνου *Grumman F9F – 4*.

Η μετάβαση σε λεπτές αεροτομές δημιούργησε επίσης την ανάγκη καλύτερης κατανόησης των φαινομένων απώλειας στήριξης, που για λεπτές αεροτομές συνδέονται συχνά με την αποκόλληση της ροής κοντά στο μέτωπο προσβολής. Το πρόβλημα μελετήθηκε εκτενώς σε αεροτομές *NACA* στα τέλη της δεκαετίας του 1940 και του 1950. Τα αποτελέσματα των *Gault* (1949, 1955) και *McCullough* και *Gault* (1949) είναι αντιπροσωπευτικά των εν λόγω μελετών. Η έρευνα σε αεροτομές *NACA* περιελάμβανε την εφαρμογή της αναρρόφησης ρευστού κοντά στο μέτωπο προσβολής της αεροτομής με σκοπό τον έλεγχο της αποκόλλησης της ροής, γνωστής σήμερα στρωτή φυσαλίδα αποκόλλησης (*laminar separation bubble*). Οι *Nuber* και *Needham* (1948) κατέληξαν στο ότι η πιο αποτελεσματική εφαρμογή της αναρρόφησης για την αεροτομή *NACA 64 A212* ήταν στο 4,5% της χορδής της αεροτομής, οδηγώντας σε αύξηση του συντελεστή άνωσης κατά 25% περίπου. Συμπληρωματικές μελέτες αναρρόφησης ρευστού σε αεροδυναμικές σήραγγες έγιναν από τους *Dannenber* και *Weiberg* (1942) και *Weiberg* και *Dannenber* (1954), μεταξύ άλλων. Τα αποτελέσματα της δοκιμαστικής πτήσης αεροσκάφους με αναρρόφηση ρευστού αναφέρθηκαν από τους *Hunter* και *Johnson* (1954).

§ 1.3 : Ο παθητικός έλεγχος της ροής

Τεχνικές παθητικού ελέγχου της ροής είναι άφθονες στην αεροδιαστημική βιομηχανία, επειδή σε γενικές γραμμές είναι απλές να εφαρμοστούν και εύκολες στη συντήρηση. Μερικά κοινά παραδείγματα παθητικού ελέγχου ροής περιλαμβάνουν τη χρήση γεννητριών στροβιλισμού (*vortex generators*) στις πτέρυγες των αεροσκαφών, *spoilers* στο μέτωπο προσβολής κοιλοτήτων για την καταστολή του συντονισμού (*Clark, 1979*), *riblets* στην επιφάνεια των πτερυγίων για τη μείωση των αντιστάσεων τριβής (*Bechert et al., 1997*). Οι γεννήτριες στροβιλισμού χρησιμοποιούνται για την πρόσδοση ενέργειας στην τύρβη του οριακού στρώματος. Χρησιμοποιούνται στα πτερύγια για να μειώσουν την ταχύτητα στην οποία συμβαίνει απώλεια στήριξης και στον κάθετο σταθεροποιητή για να βελτιωθεί η απόδοση του πτερυγίου. Μια σειρά από γεννήτριες στροβιλισμού στο πτερύγιο του αεροσκάφους *Beech Bonanza* φαίνεται στο Σχήμα. 1.3.1. Βέβαια, με τη χρήση γεννητριών στροβιλισμού προστίθεται αντίσταση στη ροή κατά τη διάρκεια της πτήσης, ακόμα και όταν η ροή είναι προσκολλημένη.



Σχήμα 1.3.1 : Γεννήτριες στροβιλισμού στο πτερύγιο του *Beech Bonanza*.

Για τη μείωση της οπισθέλκουσας μπορούν να χρησιμοποιηθούν και άλλοι τύποι παθητικού ελέγχου της ροής. Για παράδειγμα, σωστά σχεδιασμένα *riblets* μπορούν να μειώσουν την αντίσταση τριβής καταστέλλοντας τη διαδικασία δημιουργίας δινών. Σύμφωνα με τον DeMeis^[3] (1988), ταινία *riblet* που αναπτύχθηκε από την εταιρεία 3M στη δεκαετία του 1980 χρησιμοποιήθηκε σε αγώνες ιστιοπλοϊκών και συγκεκριμένα στο γιοτ *Stars and Stripes* για να βοηθήσει το πλήρωμα να κερδίσει το Κύπελλο της Αμερικής το 1986. Παρόμοια ταινία *riblet* χρησιμοποιείται από τις εταιρίες *Boeing* και *Airbus* στα εμπορικών πτήσεων αεροσκάφη για μείωση της οπισθέλκουσας (Mecham, 1996).

Ίσως από τα πιο σημαντικά παραδείγματα του παθητικού ελέγχου των οριακών στρωμάτων είναι οι μεγάλης άνωσης, και σε ορισμένες περιπτώσεις μικρού αριθμού *Reynolds*, αεροτομές που σχεδιάστηκαν από τον Liebeck (1976). Το περίγραμμα αυτών των αεροτομών σχεδιάστηκε για να έχουν αφενός υψηλό συντελεστή άνωσης και αφετέρου τέτοια ανάκτηση πίεσης *Stratford* έτσι ώστε τα τυρβώδη οριακά στρώματα να παραμένουν προσκολλημένα με τη μέγιστη δυνατή κλίση πίεσης. Το περίγραμμα παρήγαγε επίσης ένα σημείο μετάβασης στην κατανομή της πίεσης που θα μπορούσε να προκαλέσει την μετάβαση από στρωτό σε τυρβώδες οριακό στρώμα πριν από την είσοδο στην περιοχή ανάκτησης πίεσης *Stratford*. Με άλλα λόγια, ολόκληρο το σχήμα αεροτομής δημιουργήθηκε έχοντας υπόψη τη συμπεριφορά οριακού στρώματος.

§ 1.4 : Ο ενεργητικός έλεγχος της ροής

Ο όρος ενεργητικός έλεγχος ροής συνήθως υποθέτει πρόσδοση ενέργειας στη ροή από κάποιο επενεργητή. Ο ενεργητικός έλεγχος ροής προσφέρει ορισμένα πλεονεκτήματα σε επιδόσεις σε σχέση με τον παθητικό, με το ανάλογο πάντα κόστος. Ο ενεργητικός έλεγχος μπορεί να απενεργοποιηθεί όταν δεν χρειάζεται, και μπορεί να προσαρμόζεται στις μεταβαλλόμενες συνθήκες λειτουργίας. Επιπλέον, με τον ενεργητικό έλεγχο έχουμε λιγότερες απώλειες, δηλαδή μικρότερη αντίσταση, σε

σύγκριση με παθητικές τεχνικές ελέγχου, αλλά είναι συνήθως πιο πολύπλοκος να εφαρμοστεί σε σχέση με τις παθητικές μεθόδους, λόγω της χρήσης του επενεργητή.

Οι τεχνικές του ενεργητικού ελέγχου της ροής που περιγράφονται στις προηγούμενες παραγράφους αλλάζουν τη δομή του οριακού στρώματος. Αυτό που είναι γνωστό σήμερα ως «ενεργητικός έλεγχος ροής» έχει ως στόχο να αλλάξει τη συμπεριφορά της ροής με το χειρισμό των ασταθειών της, χρησιμοποιώντας επενεργητές που καταναλώνουν πολύ μικρή ενέργεια. Ο έλεγχος ροών με χαμηλή κατανάλωση ενέργειας δεν είναι νέα έννοια και τα βασικά προβλήματα της αποκόλλησης της ροής (τόσο για την εσωτερική όσο και για την εξωτερική αεροδυναμική), της αύξησης της άνωσης, της ανάμιξης και της μείωσης της οπισθέλκουσας συνεχίζουν να αποτελούν το επίκεντρο του ενδιαφέροντος σήμερα, ακριβώς όπως για τον *Prandtl* και τους συνεργάτες του στις αρχές του 20^{ου} αιώνα. Ωστόσο, παρόλο που αυτά τα προβλήματα δεν έχουν αλλάξει πολύ τα τελευταία 100 χρόνια, αυτό που έχει αλλάξει είναι η κατανόηση της συμπεριφοράς της ροής, ιδίως όσον αφορά τη σταθερότητα των ροών. Πλέον, οι δυνατότητες πρόβλεψης και μέτρησης που διαθέτουμε για την αντιμετώπιση των ασταθειών έχουν εξελιχθεί σημαντικά.

Ένα πρόσθετο στοιχείο πρόκλησης σημαντικών εξελίξεων στον ενεργητικό έλεγχο της ροής συνέβη στη δεκαετία του 1990, όταν η Υπολογιστική Ρευστοδυναμική ^[2] (*CFD*) άρχισε να χρησιμοποιείται ως εργαλείο για την υπολογιστική διερεύνηση νέων εννοιών στον ενεργητικό έλεγχο ροής. Ο έλεγχος μέσω *CFD* αποδείχθηκε ένας ισχυρός συνδυασμός που οδηγεί σε καλύτερη κατανόηση της φυσικής της ροής και, συνεπώς, σε νέες προκλήσεις στη θεωρία ελέγχου.

Η υψηλής πιστότητας άμεση αριθμητική προσομοίωση τυρβωδών ροών, μέσω αξιόπιστων μοντέλων τύρβης, κατέστησε δυνατή τη διεξαγωγή πολλών υπολογιστικών πειραμάτων, στα οποία μπορούν να προσδιοριστούν όλες οι εμπλεκόμενες μεταβλητές της ροής. Χρησιμοποιήθηκαν αριθμητικές προσομοιώσεις (*Jimenez και Pinelli* ^[4], 1999) για να δημιουργηθούν ιδανικές ροές, οι οποίες και έφεραν στο φως λεπτομέρειες σχετικά με τη φύση της τύρβης κοντά σε τοιχώματα. Η καλύτερη κατανόηση της φυσικής της τυρβώδους ροής έπαιξε καθοριστικό ρόλο στην έναρξη σχεδιασμού νέων συστημάτων ελέγχου της ροής στο τοίχωμα των σωμάτων.

Ωστόσο, δεν ήταν μόνο η Υπολογιστική Ρευστοδυναμική χρήσιμη για την παροχή στοιχείων σχετικά με τη ροή, απλά ήταν πιο αποδεκτή από τους ερευνητές για

πειράματα που βασίζονταν στην ενσωμάτωση της σύγχρονης θεωρίας ελέγχου σε σχέση με αντίστοιχα πειράματα σε αεροδυναμική σήραγγα. Η προκύπτουσα τομή μεταξύ των δύο κλάδων (Υπολογιστική Ρευστοδυναμική και πραγματικά πειράματα σε σήραγγα) έδωσε την ευκαιρία να δοκιμαστούν νέες έννοιες ελέγχου της ροής. Για παράδειγμα, για πρώτη φορά, ήταν δυνατό να δοκιμαστούν περιορισμοί απόδοσης (*Bewley, 2001, Bewley και Aamo, 2002*), να ευρεθούν βέλτιστοι αλγόριθμοι ελέγχου (*Collis et al, 2001*), και να μελετηθεί η ελαχιστοποίηση στις απαιτήσεις του επενεργητή που οδηγεί στην επίτευξη μιας επιθυμητής κατάστασης ροής (*Suzuki et al., 2004*). Η πρώτη ολοκληρωμένη χρήση της άμεσης αριθμητικής προσομοίωσης και της βέλτιστης θεωρίας ελέγχου, συμπεριλαμβανομένων και επενεργητών και αισθητήρων, ήταν από τους *Joslin et al. (1997)*.

Κεφάλαιο 2^ο

Διατύπωση των Συζυγών Εξισώσεων

Οι συζυγείς διατυπώσεις^[5] είναι μαθηματικά – υπολογιστικά εργαλεία υπολογισμού της κλίσης μιας αντικειμενικής συνάρτησης, εξασφαλίζοντας ταυτόχρονα την ικανοποίηση των βασικών εξισώσεων του μελετούμενου προβλήματος, που σε αυτή τη περίπτωση είναι οι εξισώσεις *Navier – Stokes* με την ενσωμάτωση του μοντέλου τύρβης *Spalart – Allmaras*^[6]. Οι συζυγείς μέθοδοι είναι ιδιαίτερα χρήσιμες στα προβλήματα βελτιστοποίησης γιατί η εύρεση της κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης μπορεί να οδηγήσει (για παράδειγμα, με τη μέθοδο της απότομης καθόδου) στη λύση που εξασφαλίζει την ελάχιστη τιμή της.

Οι συζυγείς μέθοδοι χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: τις διακριτές και τις συνεχείς συζυγείς μεθόδους. Στη διακριτή συζυγή μέθοδο (*discrete adjoint method*), πρώτα διακριτοποιούνται και γραμμικοποιούνται (αν είναι μη γραμμικές) η αντικειμενική συνάρτηση και οι εξισώσεις ροής και, στη συνέχεια, παράγεται η προς επίλυση συζυγής εξίσωση από τις διακριτοποιημένες εξισώσεις της ροής. Η τελευταία προκύπτει σε μητρική μορφή και είναι έτοιμη προς αριθμητική επίλυση.

Αντίθετα, η συνεχής συζυγής μέθοδος (*continuous adjoint method*) πρώτα γραμμικοποιείται και μετά διακριτοποιείται. Η μέθοδος βασίζεται σε μια επαυξημένη μορφή της αντικειμενικής συνάρτησης, F_{aug} , η οποία συντίθεται από την αναλυτική έκφραση της αντικειμενικής συνάρτησης (για παράδειγμα, μια ολοκληρωματική ποσότητα) και από το ολοκλήρωμα (σε όλο το χωρίο) των εξισώσεων κατάστασης (δηλαδή των εξισώσεων ροής) πολλαπλασιασμένων με τη συνάρτηση των συζυγών μεταβλητών. Στη συνέχεια, προσπαθώντας να καταστεί η μεταβολή της επαυξημένης αντικειμενικής συνάρτησης ανεξάρτητη κάθε μεταβολής των μεγεθών της ροής

εντοπίζονται οι ποσότητες που πρέπει να μηδενισθούν και αυτή η διαδικασία μας οδηγεί στις συνεχείς συζυγείς εξισώσεις και τις αντίστοιχες οριακές συνθήκες.

§ 2.1 : Διατύπωση των εξισώσεων ροής/εξισώσεων κατάστασης ^[7]

Για ασυμπίεστο, συνεκτικό ρευστό και χρονικά μόνιμη ροή, οι αντίστοιχες εξισώσεις της μέσης ροής (*RANS*) είναι οι εξισώσεις *Navier – Stokes*, που σε ταυνοστική γραφή για στρωτή ροή έχουν την παρακάτω μορφή:

- Εξίσωση συνέχειας:

$$R^p = \frac{\partial V_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.1.1)$$

- Εξίσωση ορμής:

$$R_i^u = V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \right] = 0, \quad i = 1,2,3 \quad (2.1.2)$$

όπου : V_i : οι συνιστώσες της ταχύτητας

p : η κινηματική στατική πίεση (δηλαδή η στατική πίεση του ρευστού διαιρεμένη με τη σταθερή πυκνότητα αυτού)

ν : η κινηματική συνεκτικότητα του ρευστού

Για την περίπτωση που η ροή είναι τυρβώδης, χρησιμοποιώντας το μοντέλο τύρβης των *Spalart – Allmaras* ^[6], η εξίσωση ορμής παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$R_i^u = V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \right] = 0, \quad i = 1,2,3 \quad (2.1.3)$$

ενώ έχουμε επιπλέον μια μερική διαφορική εξίσωση του μοντέλου τύρβης με την παρακάτω μορφή:

$$R^{\tilde{\nu}} = \frac{\partial (V_j \tilde{\nu})}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\tilde{\nu}}{\sigma} \right) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right] - \frac{C_{b2}}{\sigma} \left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right)^2 - \tilde{\nu} P(\tilde{\nu}) + \tilde{\nu} D(\tilde{\nu}) = 0 \quad (2.1.4)$$

όπου : $\tilde{\nu}$: η μεταβλητή του μοντέλου τύρβης

ν_t : ο συντελεστής τυρβώδους συνεκτικότητας

Ο συντελεστής τυρβώδους συνεκτικότητας ν_t εκφράζεται συναρτήσει της μεταβλητής $\tilde{\nu}$ ως εξής:

$$\nu_t = \tilde{\nu} f_{U_1} \quad (2.1.5)$$

Οι όροι παραγωγής $P(\tilde{\nu})$ και καταστροφής $D(\tilde{\nu})$ της εξίσωσης (2.1.4) δίνονται από τις παρακάτω εκφράσεις:

$$P(\tilde{\nu}) = C_{b_1} \tilde{Y} \quad (2.1.6)$$

$$D(\tilde{\nu}) = C_{W_1} f_W(\tilde{Y}) \frac{\tilde{\nu}}{d^2} \quad (2.1.7)$$

όπου:

$$\tilde{Y} = Y f_{U_3} + \frac{\tilde{\nu}}{d^2 \kappa^2} f_{U_2} \quad (2.1.8)$$

$$Y = \left| e_{ijk} \frac{\partial V_k}{\partial x_j} \vec{l}_i \right| \quad (2.1.9)$$

$$f_{U_1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{U_1}^3} \quad (2.1.10)$$

$$f_{U_2} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\chi}{c_{U_2}}\right)^3} \quad (2.1.11)$$

$$f_{U_3} = \frac{(1 + \chi f_{U_1})}{c_{U_2}} \left[3 \left(1 + \frac{\chi}{c_{U_2}}\right) + \left(\frac{\chi}{c_{U_2}}\right)^2 \right] \left(1 + \frac{\chi}{c_{U_2}}\right)^{-3} \quad (2.1.12)$$

$$\chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu} \quad (2.1.13)$$

$$f_W = g \left(\frac{1 + c_{W_3}^6}{g + c_{W_3}^6} \right)^{1/6} \quad (2.1.14)$$

$$g = r + c_{W_2} (r^6 - r) \quad (2.1.15)$$

$$r = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{Y} \kappa^2 d^2} \quad (2.1.16)$$

με : Y : το μέτρο της στροβιλότητας

d : την απόσταση του υπόψη κόμβου από το στερεό τοίχωμα

Οι σταθερές του μοντέλου, όπως χρησιμοποιήθηκε εδώ, είναι:

$$C_{b_1} = 0,1355 \quad (2.1.17)$$

$$C_{b_2} = 0,622 \quad (2.1.18)$$

$$\kappa = 0,4187 \quad (2.1.19)$$

$$\sigma = \frac{2}{3} \quad (2.1.20)$$

$$c_{W_1} = \frac{C_{b_1}}{\kappa} + \frac{(1 + C_{b_2})}{\sigma} \quad (2.1.21)$$

$$c_{W_2} = 0,3 \quad (2.1.22)$$

$$c_{W_3} = 2 \quad (2.1.23)$$

$$c_{U_1} = 7,1 \quad (2.1.24)$$

$$c_{U_2} = 5 \quad (2.1.25)$$

Το σύμβολο *Levi – Civita* e_{ijk} που χρησιμοποιείται στο μέτρο της στροβιλότητας ορίζεται ως:

$$e_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{όταν } (i, j, k) \in (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2) \\ -1 & \text{όταν } (i, j, k) \in (1,3,2), (3,2,1), (2,1,3) \\ 0 & \text{όταν } i = j, j = k, k = i \end{cases} \quad (2.1.26)$$

Παρατηρώντας τις εξισώσεις για στρωτή (εξισώσεις 2.1.1, 2.1.2) και τυρβώδη ροή (εξισώσεις 2.1.1, 2.1.3, 2.1.4), προκύπτει ότι εάν στις εξισώσεις κατάστασης της τυρβώδους ροής θέσουμε:

$$\tilde{\nu} = \nu_t = 0 \quad (2.1.27)$$

προκύπτουν οι αντίστοιχες εξισώσεις για τη στρωτή ροή. Για το λόγο αυτό, η ανάπτυξη της συνεχούς συζυγούς μεθόδου θα γίνει για την περίπτωση της τυρβώδους ροής και όταν αναφερόμαστε σε στρωτή ροή, το μόνο που χρειάζεται είναι να μηδενίζουμε τα μεγέθη $\tilde{\nu}$ και ν_t στις τελικές εκφράσεις των συζυγών εξισώσεων (η μερική διαφορική εξίσωση του μοντέλου τύρβης εκφυλίζεται σε ταυτότητα) και των αντίστοιχων οριακών συνθηκών.

§ 2.2 : Εισαγωγή στις συνεχείς συζυγείς εξισώσεις [8],[9]

Στην γενική περίπτωση, η επίλυση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης ως προς ένα προκαθορισμένο κριτήριο, εκφρασμένο μαθηματικά από μια συνάρτηση κόστους $F = F(\mathbf{U}(\mathbf{b}), \mathbf{b})$, υλοποιείται μέσω της ελαχιστοποίησης της συνάρτησης F στο χώρο των δυνατών λύσεων των μεταβλητών σχεδιασμού \mathbf{b} . Με το σύμβολο \mathbf{U} ορίζονται οι μεταβλητές της ροής. Έτσι, με βάση την παραπάνω σχέση, η εξάρτηση της συνάρτησης κόστους από τις μεταβλητές σχεδιασμού είναι διττή: υπάρχει άμεση εξάρτηση από τις μεταβλητές σχεδιασμού (για παράδειγμα, αλλαγή της γεωμετρίας του σώματος) και έμμεση εξάρτηση, γιατί αλλαγή στις μεταβλητές σχεδιασμού θα οδηγήσει σε ένα διαφορετικό πεδίο ροής που θα τροποποιήσει την τιμή της συνάρτησης κόστους.

Στην ειδική περίπτωση των προβλημάτων ελέγχου της ροής, οι μεταβλητές σχεδιασμού είναι οι ταχύτητες επάνω στο τοίχωμα του μελετούμενου σώματος. Δηλαδή, εάν αφαιρεθεί ένα κομμάτι του στερεού τοιχώματος για να τοποθετηθεί το *jet*, η ταχύτητα που έχει το ρευστό (μετά την τοποθέτηση του *jet*) στο εν λόγω σημείο αποτελεί τη μεταβλητή σχεδιασμού του προβλήματος. Γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι με τον τρόπο αυτό, δεν υπάρχει μεταβολή στη γεωμετρία του σώματος. Για το λόγο αυτό, υπάρχει μόνο έμμεση εξάρτηση της συνάρτησης κόστους από τις μεταβλητές σχεδιασμού, επομένως:

$$F = F(\mathbf{U}(\mathbf{b})) \quad (2.2.1)$$

Αφετηρία για τη διατύπωση του συζυγούς προβλήματος αποτελεί ο ορισμός της επαυξημένης συνάρτησης κόστους F_{aug} . Αυτή δημιουργείται από την πρόσθεση στη συνάρτηση κόστους, του χωρικού (στο πεδίο ροής) ολοκληρώματος, των εξισώσεων της ροής πολλαπλασιασμένων με τα πεδία των πολλαπλασιαστών *Lagrange*. Οι τελευταίοι ταυτίζονται με τις λεγόμενες συζυγείς μεταβλητές (*adjoint* ή *co-state variables*). Σύμφωνα με τα παραπάνω, η επαυξημένη συνάρτηση κόστους ορίζεται ως:

$$F_{aug} = F + \int_{\Omega} \Psi_k R_k^U d\Omega, k = 1,2,3 \quad (2.2.2)$$

Στην παραπάνω εξίσωση, R_k^U είναι οι εκφράσεις των εξισώσεων κατάστασης με βάση τις εξισώσεις 2.1.1, 2.1.3 και 2.1.4 και $\Psi_i = \{u_i, q, \tilde{v}_a\}^T$ το διάνυσμα των συζυγών μεταβλητών. Με u_i, q, \tilde{v}_a συμβολίζονται, αντιστοίχως, οι συζυγείς μεταβλητές ως προς την ταχύτητα, την πίεση και τη μεταβλητή του μοντέλου τύρβης. Εάν αναπτύξουμε την εξίσωση 2.2.2, λαμβάνουμε την παρακάτω μορφή:

$$F_{aug} = F + \int_{\Omega} u_i R_i^U d\Omega + \int_{\Omega} q R^p d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{v}_a R^{\tilde{v}} d\Omega \quad (2.2.3)$$

Σκοπός της συζυγούς μεθόδου είναι να υπολογιστούν οι παράγωγοι ευαισθησίας $\frac{\delta F}{\delta b_m}$, οι οποίες εκφράζουν τη μεταβολή της συνάρτησης κόστους F ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού \mathbf{b}_m , όπου m ο αριθμός των μεταβλητών σχεδιασμού.

Αν συμβολίσουμε με δ το ολικό διαφορικό μιας συνάρτησης, τότε το ολικό διαφορικό της επαυξημένης συνάρτησης κόστους F_{aug} δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\begin{aligned} \delta F_{aug} = & \delta F + \int_{\Omega} \delta u_i R_i^U d\Omega + \int_{\Omega} u_i \delta R_i^U d\Omega + \int_{\Omega} u_i R_i^U \delta(d\Omega) + \\ & + \int_{\Omega} \delta q R^p d\Omega + \int_{\Omega} q \delta R^p d\Omega + \int_{\Omega} q R^p \delta(d\Omega) + \int_{\Omega} \delta \tilde{v}_a R^{\tilde{v}} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \tilde{v}_a \delta R^{\tilde{v}} d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{v}_a R^{\tilde{v}} \delta(d\Omega) \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Επειδή για τις εξισώσεις κατάστασης ισχύει ότι :

$$R_i^U = R^p = R^{\tilde{v}} = 0$$

η εξίσωση 2.2.4 παίρνει την απλοποιημένη μορφή:

$$\begin{aligned} \delta F_{aug} = & \delta F + \int_{\Omega} u_i \delta R_i^U d\Omega + \int_{\Omega} q \delta R^p d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{v}_a \delta R^{\tilde{v}} d\Omega + \\ & \int_{\Omega} (u_i R_i^U + q R^p + \tilde{v}_a R^{\tilde{v}}) \delta(d\Omega) \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Επιπλέον, όσον αφορά τον όρο $\delta(d\Omega)$, αυτός είναι μηδέν γιατί στον έλεγχο ροής δεν έχουμε αλλαγή του σχήματος του μελετούμενου σώματος και, προφανώς, ούτε

αλλαγή του πλέγματος (όπως θα συνέβαινε στην περίπτωση βελτιστοποίησης μορφής). Έτσι, έχουμε τελικά:

$$\delta F_{aug} = \delta F + \int_{\Omega} u_i \delta R_i^U d\Omega + \int_{\Omega} q \delta R^p d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{v}_a \delta R^{\tilde{v}} d\Omega \quad (2.2.6)$$

Για ένα οποιοδήποτε μέγεθος Φ της ροής θα ισχύει ^[10]:

$$\Phi = \Phi(\mathbf{b}_m) \quad (2.2.7)$$

Επομένως, με βάση τον ορισμό του διαφορικού, θα ισχύει:

$$\delta \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{b}_m} \delta \mathbf{b}_m \quad (2.2.8)$$

όπου $\Phi = R_i^U$ ή $\Phi = R^p$ ή $\Phi = R^{\tilde{v}}$. Σε αντιπαράθεση με την παραπάνω έκφραση αναφέρουμε ότι σε προβλήματα βελτιστοποίησης μορφής, για ένα οποιοδήποτε μέγεθος Φ της ροής ισχύει:

$$\Phi = \Phi(\mathbf{b}_m, \mathbf{x}_k) \Rightarrow \delta \Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{b}_m} \right)_{\mathbf{x}_k = \text{const}} \delta \mathbf{b}_m + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}_k} \right)_{\mathbf{b}_m = \text{const}} \delta \mathbf{x}_k$$

όπου ο όρος \mathbf{x}_k αναφέρεται στις αλλαγές τις γεωμετρίας του πλέγματος.

Άρα, για την εξίσωση 2.2.6 θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \delta F_{aug} &= \delta F + \int_{\Omega} u_i \frac{\partial R_i^U}{\partial \mathbf{b}_m} \delta \mathbf{b}_m d\Omega + \int_{\Omega} q \frac{\partial R^p}{\partial \mathbf{b}_m} \delta \mathbf{b}_m d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{v}_a \frac{\partial R^{\tilde{v}}}{\partial \mathbf{b}_m} \delta \mathbf{b}_m d\Omega \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\delta F_{aug}}{\delta \mathbf{b}_m} = \frac{\delta F}{\delta \mathbf{b}_m} + \int_{\Omega} u_i \frac{\partial R_i^U}{\partial \mathbf{b}_m} d\Omega + \int_{\Omega} q \frac{\partial R^p}{\partial \mathbf{b}_m} d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{v}_a \frac{\partial R^{\tilde{v}}}{\partial \mathbf{b}_m} d\Omega \quad (2.2.9) \end{aligned}$$

Η παραπάνω εξίσωση (2.2.9) εκφράζει τη μεταβολή της συνάρτησης κόστους ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού.

§ 2.3 : Χρησιμοποιούμενες συναρτήσεις κόστους

Όπως έχει αναφερθεί ήδη σε προηγούμενο κεφάλαιο, επιδιώκεται ο εντοπισμός του βέλτιστου ελέγχου της ροής σε μια περίπτωση εσωτερικής και μια εξωτερικής

αεροδυναμικής. Για το λόγο αυτό, θα χρησιμοποιηθούν δύο διαφορετικές συναρτήσεις κόστους.

Η πρώτη περίπτωση αφορά προβλήματα εσωτερικής αεροδυναμικής, στα οποία γίνεται προσπάθεια ελαχιστοποίησης των απωλειών ολικής πίεσης της ροής που διατρέχει τη σχετική γεωμετρία, για συγκεκριμένες συνθήκες ροής. Δηλαδή, επιθυμείται η ελαχιστοποίηση της διαφοράς ολικής πίεσης μεταξύ της εισόδου (Γ_I) και της εξόδου (Γ_O) του χωρίου ροής (για προβλήματα στα οποία δεν υπάρχει συναλλαγή έργου). Η αντίστοιχη συνάρτηση κόστους αποτελείται μόνο από ολοκληρώματα στο σύνορο του χωρίου και δίνεται από την παρακάτω έκφραση:

$$F_{in} = \int_{\Gamma_I} \left\{ p + \frac{1}{2} (V_i \eta_i)^2 \right\} d\Gamma_I - \int_{\Gamma_O} \left\{ p + \frac{1}{2} (V_i \eta_i)^2 \right\} d\Gamma_O + \frac{w}{2} \int_{\Gamma_S} \{ V_i \eta_i \}^2 d\Gamma_S \quad (2.3.1)$$

όπου: Γ_S : το τμήμα του συνόρου (*slot*) πάνω στο οποίο θα γίνει τοποθέτηση του *jet*

η_i : το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στο σύνορο του υπό μελέτη σώματος με κατεύθυνση από το σύνορο προς τα έξω

$V_i \eta_i$: η παροχή ρευστού από το αντίστοιχο σύνορο

w : συντελεστής βάρους που επιτρέπει τον περιορισμό της παροχής ρευστού που θα διέλθει από το *slot*

Ο τελευταίος όρος της εξίσωσης (2.3.1) αποτελεί περιορισμό στην παροχή όγκου εισόδου ή εξόδου του ρευστού από το *slot*.

Το διαφορικό της συνάρτησης 2.3.1 δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\begin{aligned} \delta F_{in} &= \int_{\Gamma_I} \{ \delta p + (V_i \eta_i) \delta V_i \eta_i \} d\Gamma_I - \int_{\Gamma_O} \{ \delta p + (V_i \eta_i) \delta V_i \eta_i \} d\Gamma_O + w \int_{\Gamma_S} \{ V_i \eta_i \delta V_i \eta_i \} d\Gamma_S \\ \stackrel{(2.2.8)}{\implies} \frac{\delta F_{in}}{\delta b_m} &= \int_{\Gamma_I} \left\{ \frac{\partial p}{\partial b_m} + (V_i \eta_i) \frac{\partial V_i}{\partial b_m} \eta_i \right\} d\Gamma_I - \int_{\Gamma_O} \left\{ \frac{\partial p}{\partial b_m} + (V_i \eta_i) \frac{\partial V_i}{\partial b_m} \eta_i \right\} d\Gamma_O + \\ &\quad + w \int_{\Gamma_S} \left\{ V_i \eta_i \frac{\partial V_i}{\partial b_m} \eta_i \right\} d\Gamma_S \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Η δεύτερη περίπτωση που εξετάζεται αφορά προβλήματα εξωτερικής αεροδυναμικής, στα οποία σκοπός είναι να ελαχιστοποιηθεί η αντίσταση και να αυξηθεί η άνοση

ανάλογα με τον έλεγχο που ο μηχανικός θέλει να επιτύχει στη ροή. Η αντίστοιχη συνάρτηση κόστους δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$F_{ex} = D - wL \quad (2.3.3)$$

όπου : D : η οπισθέλκουσα

L : η άνωση

w : συντελεστής βάρους (καθορίζεται, κατά περίπτωση, από το χρήστη)

Στην εξίσωση (2.3.3) θα μπορούσε προφανώς να εισαχθεί περιορισμός για την παροχή όγκου του *jet*, ωστόσο παραλείπεται και αποτελεί αντικείμενο μελλοντικής έρευνας.

Τα μεγέθη D και L υπολογίζονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$D = \int_{\Gamma_W} \left\{ -(v + v_t) \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \eta_j + p \eta_i \right\} r_i d\Gamma_W \quad (2.3.4)$$

$$L = \int_{\Gamma_W} \left\{ -(v + v_t) \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \eta_j + p \eta_i \right\} r'_i d\Gamma_W \quad (2.3.5)$$

Για τα διανύσματα r_i και r'_i που εμφανίζονται στις σχέσεις (2.3.4) και (2.3.5) ισχύει:

- r_i είναι το μοναδιαίο διάνυσμα παράλληλο στην κατεύθυνση της επ' άπειρον ταχύτητας της ροής
- r'_i είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην κατεύθυνση της επ' άπειρον ταχύτητας της ροής

Τελικά, για τη συνάρτηση κόστους F_{ex} θα έχουμε:

$$(2.3.3) \xrightarrow{(2.3.4)} \xrightarrow{(2.3.5)} F_{ex} = \int_{\Gamma_W} \left\{ -(v + v_t) \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \eta_j + p \eta_i \right\} (r_i - w r'_i) d\Gamma_W \quad (2.3.6)$$

Για ευκολία στις πράξεις, τίθεται:

$$\Lambda = r_i - w r'_i \quad (2.3.7)$$

Οπότε η τελική έκφραση της συνάρτησης κόστους θα είναι:

$$(2.3.6) \xrightarrow{(2.3.7)} F_{ex} = \Lambda \int_{\Gamma_W} \left\{ -(v + v_t) \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \eta_j + p \eta_i \right\} d\Gamma_W \quad (2.3.8)$$

Το διαφορικό της εξίσωσης (2.3.8) δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\begin{aligned} \delta F_{ex} &= \Lambda \int_{\Gamma_W} \left\{ -\delta v_t \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \eta_j - (v + v_t) \delta \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \eta_j + \delta p \eta_i \right\} d\Gamma_W \Rightarrow \\ \stackrel{(2.2.8)}{\implies} \frac{\delta F_{ex}}{\delta b_m} &= \Lambda \int_{\Gamma_W} \left\{ -\frac{\partial v_t}{\partial b_m} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \eta_j - (v + v_t) \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial V_i}{\partial b_m} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial V_j}{\partial b_m} \right) \right] \eta_j + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial p}{\partial b_m} \eta_i \right\} d\Gamma_W \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

§ 2.4 : Διατύπωση συνεχών συζυγών εξισώσεων του πεδίου ροής

Στην μεταβολή της επαυξημένης συνάρτησης κόστους (εξίσωση 2.2.9) εμφανίζονται οι μερικές παράγωγοι των υπολοίπων εξισώσεων της ροής, δηλαδή οι ποσότητες $\frac{\partial R_i^U}{\partial b_m}$, $\frac{\partial R^p}{\partial b_m}$, $\frac{\partial R^{\tilde{v}}}{\partial b_m}$. Για τη διατύπωση των συζυγών εξισώσεων, οι παραπάνω ποσότητες πρέπει να αντικατασταθούν με τις αναλυτικές τους εκφράσεις, όπως αυτές υπολογίζονται από τη διαφορίση των εξισώσεων της ροής (εξισώσεις 2.1.3, 2.1.2, 2.1.4). Έτσι, προκύπτουν οι παρακάτω αναλυτικές εκφράσεις:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_i^U}{\partial b_m} &= \frac{\partial V_j}{\partial b_m} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + V_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial V_i}{\partial b_m} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p}{\partial b_m} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial v_t}{\partial b_m} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \right] - \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (v + v_t) \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial V_i}{\partial b_m} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial V_j}{\partial b_m} \right) \right] \right\} = 0 \quad , \quad i = 1,2,3 \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

$$\frac{\partial R^p}{\partial b_m} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial V_j}{\partial x_j} \right) = 0 \quad (2.4.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R^{\tilde{v}}}{\partial b_m} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial V_j}{\partial b_m} \tilde{v} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(V_j \frac{\partial \tilde{v}}{\partial b_m} \right) - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial \tilde{v}}{\partial b_m} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \right] - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(v + \frac{\tilde{v}}{\sigma} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial b_m} \right) \right] \\ &\quad - \frac{2C_{b_2}}{\sigma} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial b_m} \right) + \tilde{v} \left[\frac{\partial D}{\partial b_m} - \frac{\partial P}{\partial b_m} \right] + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial b_m} (D - P) = 0 \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

Για τον όρο $\frac{\partial v_t}{\partial b_m}$, με βάση τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε:

$$\frac{\partial v_t}{\partial b_m} = \frac{\partial v_t}{\partial \tilde{v}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial b_m} \quad (2.4.4)$$

Τονίζεται ότι στις παραπάνω εξισώσεις, και συγκεκριμένα στους όρους που εμφανίζεται η δεύτερη παράγωγος, έχει γίνει εναλλαγή των παραγώγων $\frac{\partial}{\partial x_j}$ και $\frac{\partial}{\partial b_m}$ με βάση το παρακάτω θεώρημα από τη μαθηματική ανάλυση:

Έστω η συνάρτηση $Z = f(x, y)$ που είναι ορισμένη στην περιοχή D και ότι M είναι εσωτερικό σημείο του D . Αν οι μερικές παράγωγοι f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} υπάρχουν στο D και αν οι f_{xy} και f_{yx} είναι συνεχείς τότε $f_{xy} = f_{yx}$ στο M .

Υπενθυμίζεται ότι, όταν προσδιοριστεί η τελική έκφραση των συνεχών συζυγών εξισώσεων, αυτές θα διακριτοποιηθούν ώστε να γίνει η αριθμητική τους επίλυση και έτσι θα προκύψουν οι συζυγείς μεταβλητές σε διακριτά σημεία (κόμβους) του χωρίου επίλυσης. Κάποιος εύλογα θα μπορούσε να αναρωτηθεί πώς αποδεικνύεται ότι η συνέχεια των παραγώγων συνεχίζει να υφίσταται κατά τη μετάβαση από το συνεχές στο διακριτοποιημένο χωρίο. Δηλαδή, γιατί η συνέχεια των παραγώγων να ισχύει και στο διακριτοποιημένο χωρίο;

Η απάντηση λοιπόν σε μια τέτοια εύλογη απορία είναι ότι, όταν γράφονται οι εξισώσεις της ροής, τις συζυγείς εξισώσεις και κυρίως όταν παραγωγίζεται η επαυξημένη αντικειμενική συνάρτηση F_{aug} , οι διαδικασίες αυτές αναφέρονται στο συνεχές πεδίο της ροής. Σε αυτό, τα μεγέθη της ροής είναι συνεχή και το ίδιο ισχύει και για τις μερικές τους παραγώγους. Όταν προσδιοριστεί η τελική μορφή των συνεχών συζυγών εξισώσεων, αυτές αναφέρονται ακόμα στο συνεχές πεδίο, οπότε δεν εισάγεται κανένα μαθηματικό σφάλμα στη θεωρία που παρουσιάζεται και συνεπώς η εναλλαγή των παραγώγων μπορεί να πραγματοποιηθεί ορθώς με χρήση του προηγούμενου θεωρήματος.

Τα ανωτέρω παρατίθενται ώστε να γίνει φανερό ένα ακόμα πλεονέκτημα που έχει η συνεχής συζυγής μέθοδος έναντι της διακριτής, στην οποία υπενθυμίζεται ότι η προς επίλυση συζυγής εξίσωση προκύπτει από τις διακριτοποιημένες εξισώσεις της ροής.

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (2.4.1 – 2.4.4) στην επαυξημένη αντικειμενική συνάρτηση (2.2.9), με αλγεβρικές πράξεις και με χρήση του θεωρήματος *Gauss* προκύπτει η παρακάτω αναλυτική έκφραση:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} = & \frac{\delta F}{\delta b_m} + \int_{\Omega} \frac{\partial V_i}{\partial b_m} \left\{ -V_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial q}{\partial x_i} - \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}_a}{\partial x_i} \right. \\
& - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\tilde{v}_a \tilde{v} \frac{C_S}{S} e_{ijz} e_{ilm} \frac{\partial V_z}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v + v_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \left. \right\} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial b_m} \left\{ -\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right\} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial b_m} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_t}{\partial \tilde{v}} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) - V_j \frac{\partial \tilde{v}_a}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(v + \frac{\tilde{v}}{\sigma} \right) \frac{\partial \tilde{v}_a}{\partial x_j} \right] \right. \\
& + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \tilde{v}_a}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} + \frac{2C_{b_2}}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\tilde{v}_a \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \right) + \tilde{v}_a (D - P) + \tilde{v}_a \tilde{v} C_{\tilde{v}} \left. \right\} d\Omega \\
& + \int_{\Gamma} \frac{\partial V_i}{\partial b_m} \left\{ u_j V_j \eta_i + u_i V_j \eta_j - q \eta_i + \tilde{v}_a \tilde{v} \eta_i \right. \\
& + (v + v_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \eta_j + \tilde{v}_a \tilde{v} \frac{C_S}{S} e_{ijz} e_{ilm} \frac{\partial V_z}{\partial x_j} \eta_l \left. \right\} d\Gamma \\
& + \int_{\Gamma} \frac{\partial p}{\partial b_m} \{ u_j \eta_j \} d\Gamma \\
& + \int_{\Gamma} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial b_m} \left\{ -u_i \frac{\partial v_t}{\partial \tilde{v}} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \eta_j + \tilde{v}_a V_j \eta_j - \frac{1}{\sigma} \tilde{v}_a \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \eta_j \right. \\
& - \frac{2C_{b_2}}{\sigma} \tilde{v}_a \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \eta_j + \left(v + \frac{\tilde{v}}{\sigma} \right) \frac{\partial \tilde{v}_a}{\partial x_j} \eta_j \left. \right\} d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma} \left\{ u_i (v + v_t) \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial V_i}{\partial b_m} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial V_j}{\partial b_m} \right) \right] \eta_j \right. \\
& + \tilde{v}_a \left(v + \frac{\tilde{v}}{\sigma} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial b_m} \right) \eta_j \left. \right\} d\Gamma \tag{2.4.5}
\end{aligned}$$

Στην παραπάνω εξίσωση, οι εκφράσεις C_S και $C_{\tilde{v}}$ προκύπτουν με κατάλληλες πράξεις με βάση τα αντίστοιχα μεγέθη στην εξίσωση του μοντέλου τύρβης *Spalart – Allmaras*. Η αναλυτική έκφραση των μεταβλητών C_S και $C_{\tilde{v}}$ αναφέρεται στις δημοσιεύσεις [8] και [9] της βιβλιογραφίας. Ακόμη, στην παραπάνω εξίσωση υπάρχουν δύο ειδών ολοκληρωματικές εκφράσεις: ολοκληρώματα σε όλο το χωρίο και σε ολοκληρώματα στα σύνορα του χωρίου.

Στη συνέχεια, η παράγωγος της επαυξημένης αντικειμενικής συνάρτησης $\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m}$ καθίσταται ανεξάρτητη των μεταβολών των ροϊκών μεγεθών του χωρίου ροής. Για να γίνει αυτό, πρέπει να μηδενιστούν οι συντελεστές των όρων $\frac{\partial V_i}{\partial b_m}$, $\frac{\partial p}{\partial b_m}$ και $\frac{\partial \tilde{v}}{\partial b_m}$. Έτσι, προκύπτουν οι πεδιακές συζυγείς εξισώσεις και έχουν την παρακάτω μορφή:

$$-V_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial q}{\partial x_i} - \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}_a}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\tilde{v}_a \tilde{v} \frac{C_S}{S} e_{ijz} e_{ilm} \frac{\partial V_z}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v + v_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] = 0 \quad , \quad i = 1,2,3 \quad (2.4.6)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.4.7)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_t}{\partial \tilde{v}} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) - V_j \frac{\partial \tilde{v}_a}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(v + \frac{\tilde{v}}{\sigma} \right) \frac{\partial \tilde{v}_a}{\partial x_j} \right] + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \tilde{v}_a}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} + \tilde{v}_a (D - P) + \tilde{v}_a \tilde{v} C_{\tilde{v}} + \frac{2C_{b_2}}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\tilde{v}_a \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \right) = 0 \quad (2.4.8)$$

Η πρώτη εξίσωση (2.4.6) αποτελεί τη συζυγή εξίσωση της ορμής, η δεύτερη (2.4.7) την συζυγή εξίσωση της συνέχειας, ενώ η τρίτη (2.4.8) την συζυγή εξίσωση του μοντέλου τύρβης *Spalart - Allmaras*.

Οι συζυγείς εξισώσεις, αφού διακριτοποιηθούν και επιλυθούν αριθμητικά (μαζί με τις κατάλληλες οριακές συνθήκες) με τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων, θα οδηγήσουν στον προσδιορισμό του πεδίου των συζυγών μεταβλητών $\Psi_i = \{u_i, q, \tilde{v}_a\}^T$.

Στο σημείο αυτό πρέπει να γίνουν κάποιες σημαντικές επισημάνσεις. Καταρχάς, παρατηρώντας τις συζυγείς εξισώσεις (2.4.6 – 2.4.8) και κάνοντας μια σύγκριση με τις εξισώσεις *Navier – Stokes* μαζί με την εξίσωση του μοντέλου τύρβης *Spalart - Allmaras* (δηλαδή τις εξισώσεις κατάστασης), διαπιστώνεται ότι έχουν παρόμοια μορφή. Αυτό σημαίνει ότι η αριθμητική επίλυση των συζυγών εξισώσεων μπορεί να στηριχθεί σε υπολογιστικά εργαλεία επίλυσης των εξισώσεων κατάστασης, τα οποία ο μηχανικός έχει ήδη στην κατοχή του. Υπενθυμίζεται ότι, για να επιλυθούν οι συζυγείς εξισώσεις, χρειάζεται να έχουν προηγουμένως επιλυθεί οι εξισώσεις κατάστασης (μαζί με τις αντίστοιχες οριακές συνθήκες), δηλαδή να έχει

προσδιοριστεί το πεδίο της ροής. Κάτι τέτοιο είναι απαραίτητο γιατί, στις συζυγείς εξισώσεις, εμφανίζονται τα μεγέθη της ροής (ταχύτητα, πίεση και μεταβλητή του μοντέλου τύρβης) και οι χωρικές παράγωγοί τους. Συνεπώς, η ομοιότητα των δύο τύπων εξισώσεων (συζυγών και κατάστασης) αποτελεί πλεονέκτημα, γιατί, αν οι συζυγείς εξισώσεις και οι εξισώσεις κατάστασης δεν είχαν παρόμοια μορφή, ο προγραμματιστής θα ήταν αναγκασμένος να αφιερώσει χρόνο (που τώρα τον εξοικονομεί) για την διακριτοποίηση των συζυγών εξισώσεων.

Μια άλλη σημαντική παρατήρηση είναι ότι οι συζυγείς εξισώσεις είναι ίδιες τόσο για την περίπτωση του προβλήματος εσωτερικής όσο και εξωτερικής αεροδυναμικής βελτιστοποίησης που μελετώνται εδώ. Αυτό συμβαίνει γιατί, οι δύο αντικειμενικές συναρτήσεις F_{ex} και F_{in} αποτελούνται από ολοκληρώματα στο όριο του υπό μελέτη προβλήματος. Είναι δηλαδή η φύση του προβλήματος τέτοια ώστε οι απώλειες ολικής πίεσης (για την περίπτωση εσωτερικής αεροδυναμικής) καθώς και η άνωση και η οπισθέλκουσα αντίστοιχα (για την περίπτωση εξωτερικής αεροδυναμικής) να αποτελούνται από όρους που ολοκληρώνονται σε σημεία του ορίου του υπό μελέτη χωρίου. Συνεπώς, οι όροι που προκύπτουν από την παράγωγο των αντικειμενικών συναρτήσεων συνεισφέρουν μόνο στις παραγώγους ευαισθησίας και στις αντίστοιχες οριακές συνθήκες του προβλήματος, με τη διαφορά ότι για το πρόβλημα εσωτερικής αεροδυναμικής, η συνεισφορά της συνάρτησης κόστους βρίσκεται στις οριακές συνθήκες εισόδου και εξόδου, ενώ για το πρόβλημα εξωτερικής αεροδυναμικής, η αντίστοιχη συνεισφορά βρίσκεται στις οριακές συνθήκες του τοιχώματος του σώματος.

Αντιθέτως, σε περίπτωση που η συνάρτηση κόστους περιλαμβάνει και όρους στο εσωτερικό του χωρίου ολοκλήρωσης, αυτοί υπαισέρχονται στις παραπάνω εξισώσεις με μορφή που εξαρτάται από το είδος των όρων αυτών, δηλαδή από την μαθηματική έκφρασή τους στα αντίστοιχα ολοκληρώματα του χωρίου. Ένα παράδειγμα μιας τέτοιας περίπτωσης θα μπορούσε να αποτελεί η εύρεση της βέλτιστης λύσης που εξασφαλίζει μειωμένη γένεση εντροπίας στη ροή που έπεται μιας αεροτομής. Για να επιτευχθεί κάτι τέτοιο, η συνάρτηση κόστους θα έπρεπε να περιέχει το ολοκλήρωμα με τους αντίστοιχους όρους της τύρβης, με την ολοκλήρωση να γίνεται όχι στα όρια του χωρίου (όπως στις προηγούμενα αναφερθείσες περιπτώσεις), αλλά σε όλο το χωρίο του υπό μελέτη προβλήματος.

Έχοντας πλέον καταστήσει την παράγωγο της επαυξημένης αντικειμενικής συνάρτησης $\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m}$ ανεξάρτητη των μεταβολών των ροϊκών μεγεθών στο χωρίο ροής, η έκφραση της εξίσωσης (2.4.5) αποκτά μια πιο βολική μορφή ως εξής:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} = & \frac{\delta F}{\delta b_m} + \int_{\Gamma} \frac{\partial V_i}{\partial b_m} \left\{ u_j V_j \eta_i + u_i V_j \eta_j - q \eta_i + \tilde{v}_a \tilde{v} \eta_i \right. \\
& + (v + v_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \eta_j + \tilde{v}_a \tilde{v} \frac{C_S}{S} e_{ijz} e_{ilm} \frac{\partial V_z}{\partial x_j} \eta_l \left. \right\} d\Gamma \\
& + \int_{\Gamma} \frac{\partial p}{\partial b_m} \{ u_j \eta_j \} d\Gamma \\
& + \int_{\Gamma} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial b_m} \left\{ -u_i \frac{\partial v_t}{\partial \tilde{v}} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \eta_j + \tilde{v}_a V_j \eta_j - \frac{1}{\sigma} \tilde{v}_a \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \eta_j \right. \\
& - \frac{2C_{b_2}}{\sigma} \tilde{v}_a \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \eta_j + \left(v + \frac{\tilde{v}}{\sigma} \right) \frac{\partial \tilde{v}_a}{\partial x_j} \eta_j \left. \right\} d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma} \left\{ u_i (v + v_t) \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial V_i}{\partial b_m} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial V_j}{\partial b_m} \right) \right] \eta_j \right. \\
& \left. + \tilde{v}_a \left(v + \frac{\tilde{v}}{\sigma} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial b_m} \right) \eta_j \right\} d\Gamma \tag{2.4.9}
\end{aligned}$$

Καθιστώντας την παραπάνω εξίσωση ανεξάρτητη των μεταβολών των μεταβλητών ροής στο όριο της ολοκλήρωσης, θα προκύψουν οι οριακές συνθήκες του συνεχούς συζυγούς προβλήματος και οι αντίστοιχες παράγωγοι ευαισθησίας.

Ανάλογα με την περίπτωση που εξετάζουμε (εσωτερική ή εξωτερική αεροδυναμική), θα προκύψουν διαφορετικές οριακές συνθήκες και παράγωγοι ευαισθησίας. Για το λόγο αυτό, δεν θα προχωρήσουμε στην εύρεση των παραπάνω σε αυτό το κεφάλαιο. Τα κεφάλαια που ακολουθούν αναφέρονται ξεχωριστά σε εσωτερική και εξωτερική αεροδυναμική. Η εύρεση των παραγώγων ευαισθησίας και των οριακών συνθηκών θα γίνει στα αντίστοιχα κεφάλαια, ώστε ο αναγνώστης να έχει μια οργανωμένη και γενική προσέγγιση των αντίστοιχων προβλημάτων.

§ 2.5 : Μεταβλητές σχεδιασμού και μοντελοποίηση του *jet*

Μέχρι στιγμής, όλα όσα έχουν γραφεί για τις εξισώσεις κατάστασης, τις συζυγείς εξισώσεις και τις συναρτήσεις κόστους αποτελούν γενικές εκφράσεις, οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για οποιοσδήποτε μεταβλητές σχεδιασμού b_m . Ωστόσο, προτού προσδιοριστούν οι οριακές συνθήκες του συζυγούς προβλήματος και οι αντίστοιχες παράγωγοι ευαισθησίας, πρέπει να γίνει αναφορά στις μεταβλητές σχεδιασμού του προβλήματος, καθώς και στην αντίστοιχη μοντελοποίηση του *jet*. Για τη μοντελοποίηση αυτή, αξίζει να αναφερθεί ότι θα πραγματοποιηθεί με δύο διαφορετικούς τρόπους, ο οποίοι θα παρουσιασθούν στη συνέχεια.

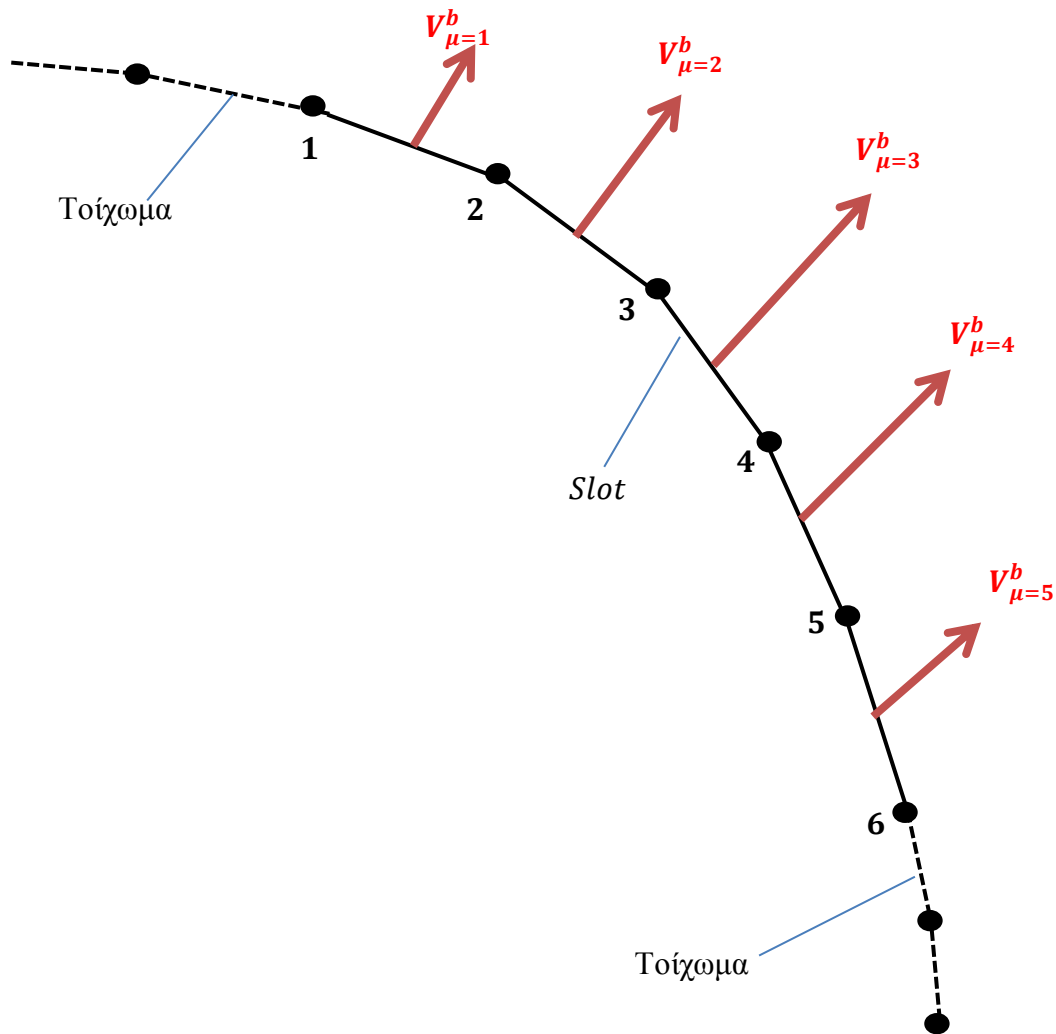
Έστω ότι επιθυμείται ο έλεγχος της ροής που διαρρέει τα τοιχώματα ενός σώματος. Για τον έλεγχο της ροής με έγχυση ή αναρρόφηση ρευστού υποτίθεται ότι «αφαιρείται» ένα κομμάτι του τοιχώματος (*slot*) του σώματος και μέσω αυτού διέρχεται το ρευστό. Υπενθυμίζεται ότι, κατά τη διακριτοποίηση του προβλήματος, το *slot* αποτελείται από $N + 1$ κόμβους (*nodes*) και αντίστοιχα N μέτωπα (*faces*), όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.5.1, στο οποίο παρουσιάζεται ένα παράδειγμα τμήματος ενός τοιχώματος με *slot* αποτελούμενο από 5 μέτωπα (6 κόμβοι). Με βάση το ίδιο σχήμα, οι μεταβλητές σχεδιασμού του προβλήματος ελέγχου της ροής είναι οι ταχύτητες του ρευστού σε κάθε μέτωπο του *slot*.

Στο Σχήμα 2.5.1, με διακεκομμένη γραμμή συμβολίζεται το τοίχωμα, ενώ με συνεχή το *slot*. Οι μεταβλητές σχεδιασμού του προβλήματος είναι οι ταχύτητες $V_{i\mu}^b$, όπου:

- $i = 1,2,3$ οι συνιστώσες της ταχύτητας του αγωγού στις τρεις διαστάσεις επάνω στο τοίχωμα του αγωγού
- $\mu = 1, \dots, N$ αριθμός των μετώπων (*faces*) του τοιχώματος του αγωγού.
- Το σύμβολο b δηλώνει ότι οι ταχύτητες του τοιχώματος αποτελούν μεταβλητές σχεδιασμού του προβλήματος, για αντιδιαστολή με την ταχύτητα στα όρια του χωρίου.

Ωστόσο, είναι προφανές ότι, εάν επιλεγούν ως μεταβλητές σχεδιασμού τις ταχύτητες σε κάθε μέτωπο του *slot*, στο πρόβλημα βελτιστοποίησης εισάγονται αρκετές μεταβλητές σχεδιασμού, οι οποίες δυσκολεύουν τη σύγκλιση του αλγορίθμου (δηλαδή απαιτούνται αρκετοί κύκλοι βελτιστοποίησης μέχρι τη σύγκλιση και εύρεση

της βέλτιστης λύσης), αν και δεν θα έκανε πιο ακριβό υπολογιστικά την επίλυση του συζυγούς προβλήματος, καθώς αυτό είναι ανεξάρτητο των μεταβλητών σχεδιασμού. Επιπλέον, ένα άλλο πρόβλημα που υπεισέρχεται είναι ότι, κατά μήκος του *slot* ενδέχεται η βέλτιστη λύση να οδηγεί σε κατανομή ταχύτητας του *jet*, το οποίο να παρουσιάζει μεγάλη ανομοιομορφία, χωρίς να ανταποκρίνεται σε φυσική λύση του προβλήματος.



Σχήμα 2. 5. 1 : Παράδειγμα μεταβλητών σχεδιασμού του προβλήματος ελέγχου της ροής για *slot* αποτελούμενο από 5 μέτωπα (6 κόμβοι).

Για τους δύο παραπάνω λόγους, θα πρέπει να γίνει μοντελοποίηση του *jet* με τέτοιο τρόπο ώστε, αφενός να εξασφαλίζεται μικρός αριθμός μεταβλητών σχεδιασμού, αφετέρου η κατανομή της ταχύτητας του *jet* να είναι ομοιόμορφη.

Ένα βολικός τρόπος που δίνει λύση και στα δύο παραπάνω προβλήματα είναι η θεώρηση ότι η κατανομή του *jet* στο *slot* είναι παραβολικής μορφής. Μια τέτοια υπόθεση δεν διαφέρει παρά πολύ από την πραγματικότητα, εάν ληφθεί υπόψη ότι η έγχυση ή η αναρρόφηση του ρευστού θα γίνεται με κάποιο σωλήνα ο οποίος θα αφαιρεί ή θα προσθέτει ρευστό στη διερχόμενη ροή. Από όσα είναι γνωστά από την Μηχανική των Ρευστών, για ασυμπίεστη, στρωτή και μόνιμη ροή εντός αγωγών κυκλικής διατομής, η κατανομή της ταχύτητας είναι παραβολική (εννοείται ότι ο αγωγός είναι ευθύς). Για το δεύτερο ζητούμενο, υπάρχουν δύο ειδών λύσεις:

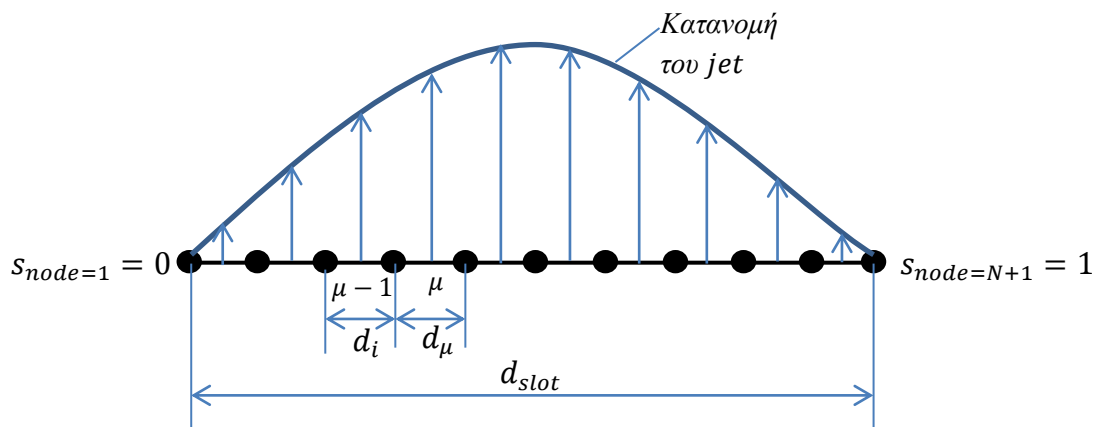
- Μοντελοποίηση της παραβολικής κατανομής ταχύτητας του *jet* με μια μεταβλητή σχεδιασμού:

Σε αυτήν την περίπτωση, η κατανομή του *jet* επάνω στο *slot* δίνεται από το παρακάτω πολυώνυμο:

$$V_{\mu}^b = \kappa s_{\mu}(1 - s_{\mu}) \quad (2.5.1)$$

όπου : V_{μ}^b : το μέτρο της ταχύτητας επάνω σε κάθε μέτωπο του *slot*

κ : η μοναδική μεταβλητή σχεδιασμού



Σχήμα 2.5.2 : Παράδειγμα παραβολικής κατανομής της ταχύτητας στο *slot* με τη χρήση μιας μεταβλητής σχεδιασμού

s_{μ} : η τοπική αδιάστατη απόσταση του κέντρου του κάθε μετώπου μ από τον πρώτο κόμβο που ορίζει το *slot*, με βάση το σχήμα 2.5.2 ($0 \leq s_{\mu} \leq 1$) και τη σχέση:

$$s_{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{\mu-1} d_i + \frac{d_{\mu}}{2}}{d_{slot}} \quad (2.5.2)$$

Στο λογισμικό *OpenFOAM*, τα μεγέθη της ροής (και συνεπώς και η ταχύτητα) εκφράζονται στο μέσο των κελιών του πλέγματος (*cell – centered*) και όχι επάνω στους κόμβους του πλέγματος (*mesh – centered*). Για το λόγο αυτό, η ταχύτητα V_{μ}^b είναι η ταχύτητα με μέτρο που δίνεται από την σχέση (2.5.1) και με διεύθυνση κάθετη στο μέσο του αντίστοιχου μετώπου του *slot*. Αυτό υλοποιείται υπολογιστικά χρησιμοποιώντας την οριακή συνθήκη *surfaceNormalFixedValue* του *OpenFOAM*, η οποία λαμβάνει το μέτρο της ταχύτητας V_{μ}^b σε κάθε μέτωπο με βάση τη σχέση (2.5.1) και, ανάλογα με το πρόσημο της ταχύτητας (δηλαδή ανάλογα με το πρόσημο της μεταβλητής σχεδιασμού κ), η ταχύτητα σε κάθε μέτωπο του *slot* (και, συνεπώς, και το παραβολικό προφίλ του *jet*) ορίζεται με ίδια ή αντίθετη διεύθυνση σε σχέση με τη διεύθυνση του καθέτου μοναδιαίου διανύσματος επάνω στο μέτωπο του *slot* (υπενθυμίζεται ότι το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα έχει φορά από το μέτωπο του *slot* και προς τα έξω). Κάτι τέτοιο είναι πολύ σημαντικό γιατί, θετική τιμή της μεταβλητής σχεδιασμού κ προκαλεί αναρρόφηση ρευστού ενώ αρνητική τιμή προκαλεί έγχυση ρευστού.

Τέλος, η σχέση (2.5.1) έχει διαμορφωθεί με τέτοιο τρόπο ώστε στο μέσο του διαστήματος του *slot* να εμφανίζεται η μέγιστη τιμή της ταχύτητας (μηδενική παράγωγος της ταχύτητας το μέσο του *slot*), ενώ στον πρώτο και τον τελευταίο κόμβο που ορίζουν το *slot*, η ταχύτητα να είναι μηδενική. Ωστόσο, ταχύτητα στο πρώτο και στο τελευταίο μέτωπο του *slot* υπάρχει και ορίζεται από τη σχέση (2.5.1) με βάση την απόσταση s_{μ} .

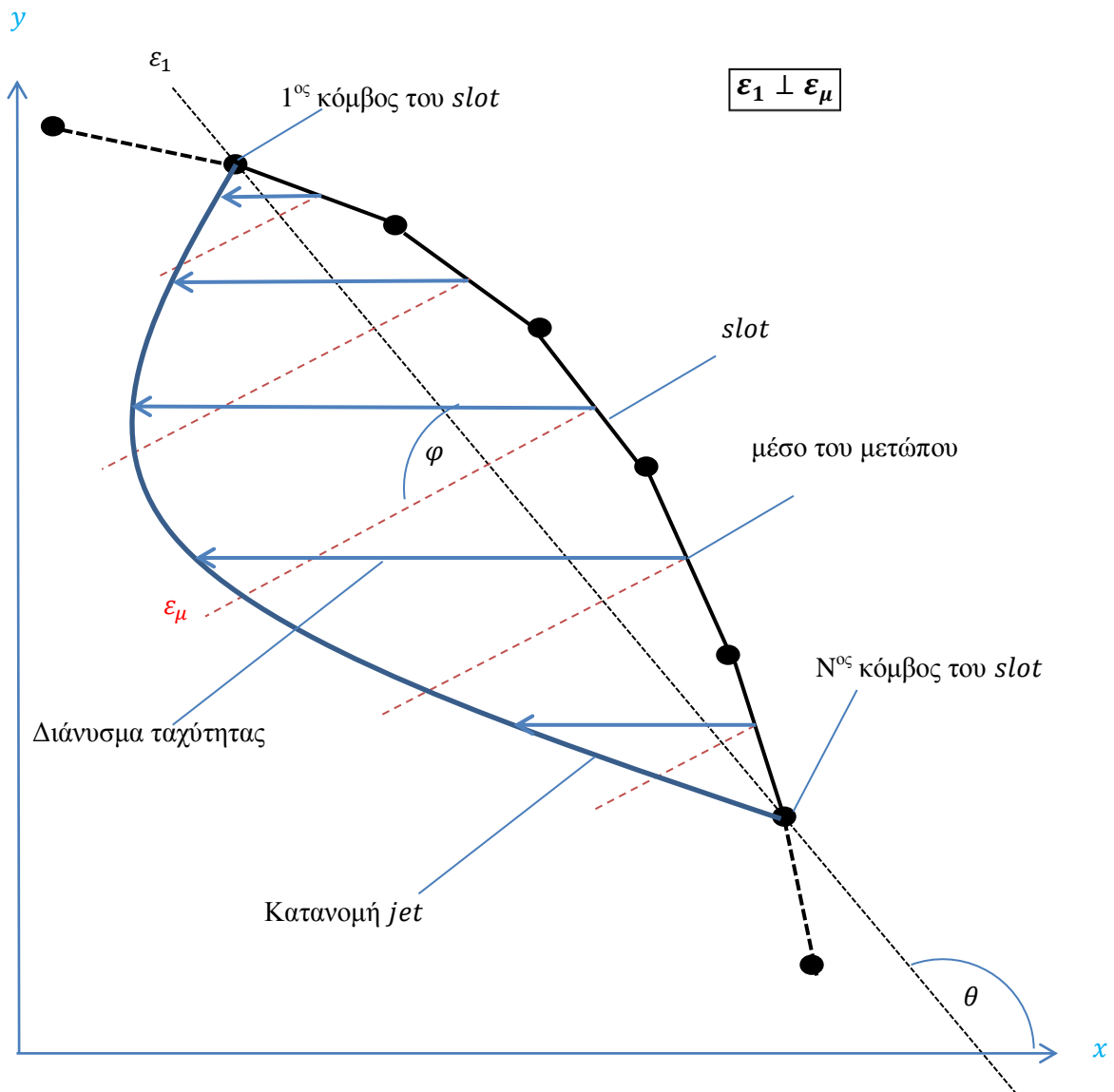
- Μοντελοποίηση της παραβολικής κατανομής ταχύτητας του *jet* με δύο μεταβλητές σχεδιασμού.

Η περίπτωση αυτή είναι περισσότερο γενική της προηγούμενης καθώς, εκτός από το μέτρο της ταχύτητας σε κάθε μέτωπο του *slot*, μπορεί να εισαχθεί ως μεταβλητή σχεδιασμού και η γωνία που καθορίζει τη διεύθυνση του παραβολικού προφίλ της ταχύτητας.

Οι καρτεσιανές συνιστώσες της ταχύτητας του *jet* δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$V_{\mu,x}^b = \kappa s_{\mu} (1 - s_{\mu}) \cos(90^{\circ} + \theta + \varphi) \quad (2.5.3)$$

$$V_{\mu,y}^b = \kappa s_{\mu} (1 - s_{\mu}) \sin(90^{\circ} + \theta + \varphi) \quad (2.5.4)$$



Σχήμα 2.5.3 : Παράδειγμα παραβολικής κατανομής της ταχύτητας στο slot με τη χρήση δύο μεταβλητών σχεδιασμού

όπου : $V_{\mu,x}^b$: το διάνυσμα της ταχύτητας επάνω σε κάθε μέτωπο του *slot* κατά την x κατεύθυνση

$V_{\mu,y}^b$: το διάνυσμα της ταχύτητας επάνω σε κάθε μέτωπο του *slot* κατά την y κατεύθυνση

κ : η μεταβλητή σχεδιασμού που καθορίζει το μέτρο των διανυσμάτων

φ : η μεταβλητή σχεδιασμού που καθορίζει τη διεύθυνση του διανύσματος της ταχύτητας

θ : γωνία που ορίζει την κλίση του *slot*, με βάση το Σχήμα 2.5.3

s_μ : η τοπική αδιάστατη απόσταση του κέντρου του κάθε μετώπου μ από τον πρώτο κόμβο που ορίζει το *slot*, με βάση όσα ειπώθηκαν και για την περίπτωση μιας μεταβλητής σχεδιασμού.

§ 2.6 : Οριακές συνθήκες συζυγούς προβλήματος και παράγωγοι ευαισθησίας για το πρόβλημα εσωτερικής αεροδυναμικής

Έχοντας προσδιορίσει τις συνεχείς συζυγείς εξισώσεις, το επόμενο βήμα για την επίλυσή τους είναι ο προσδιορισμός των αντίστοιχων οριακών συνθηκών. Όπως έχει ήδη αναφερθεί σε προηγούμενη ενότητα, η εύρεση των οριακών συνθηκών του συζυγούς προβλήματος, καθώς και των αντίστοιχων παραγώγων ευαισθησίας γίνεται καθιστώντας την εξίσωση (2.4.9) ανεξάρτητη των μεταβολών των ροϊκών μεγεθών του συνόρου ολοκλήρωσης.

Για το πρόβλημα εσωτερικής αεροδυναμικής, η εξίσωση από την οποία θα προκύψουν οι οριακές συνθήκες του συζυγούς προβλήματος επαναλαμβάνεται παρακάτω για την γενική περίπτωση όπου η ροή είναι τυρβώδης και γίνεται χρήση του μοντέλου τύρβης *Spalart – Allmaras*:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F_{aug}}{\delta V_{i\mu}^b} = & \frac{\delta F_{in}}{\delta V_{i\mu}^b} + \int_{\Gamma} \frac{\partial V_i}{\partial V_{i\mu}^b} \left\{ u_j V_j \eta_i + u_i V_j \eta_j - q \eta_i + \tilde{v}_a \tilde{v} \eta_i \right. \\
& + (v + v_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \eta_j + \tilde{v}_a \tilde{v} \frac{C_S}{S} e_{ijz} e_{ilm} \frac{\partial V_z}{\partial x_j} \eta_l \left. \right\} d\Gamma \\
& + \int_{\Gamma} \frac{\partial p}{\partial V_{i\mu}^b} \{ u_j \eta_j \} d\Gamma \\
& + \int_{\Gamma} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial V_{i\mu}^b} \left\{ -u_i \frac{\partial v_t}{\partial \tilde{v}} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \eta_j + \tilde{v}_a V_j \eta_j - \frac{1}{\sigma} \tilde{v}_a \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \eta_j \right. \\
& - \frac{2C_{b2}}{\sigma} \tilde{v}_a \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \eta_j + \left(v + \frac{\tilde{v}}{\sigma} \right) \frac{\partial \tilde{v}_a}{\partial x_j} \eta_j \left. \right\} d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma} \left\{ u_i (v + v_t) \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial V_i}{\partial V_{i\mu}^b} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial V_j}{\partial V_{i\mu}^b} \right) \right] \eta_j \right. \\
& \left. + \tilde{v}_a \left(v + \frac{\tilde{v}}{\sigma} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial V_{i\mu}^b} \right) \eta_j \right\} d\Gamma \tag{2.6.1}
\end{aligned}$$

όπου :

$$\Gamma = \Gamma_I + \Gamma_O + \Gamma_W + \Gamma_S$$

Στην παραπάνω σχέση, μετά από υπολογιστική διερεύνηση, βρέθηκε ότι ο όρος $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial V_j}{\partial V_{i\mu}^b} \right)$ είναι πολύ μικρός και ουσιαστικά δεν συνεισφέρει στην παράγωγο ευαισθησίας. Για το λόγο αυτό απαλείφεται στην πορεία της διαδικασίας που ακολουθεί.

Σε προηγούμενο κεφάλαιο έχουμε δείξει ότι το διαφορικό της συνάρτησης κόστους του προβλήματος δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F_{in}}{\delta V_{i\mu}^b} = & \int_{\Gamma_I} \left\{ \frac{\partial p}{\partial V_{i\mu}^b} + (V_j \eta_j) \frac{\partial V_i}{\partial V_{i\mu}^b} \eta_i \right\} d\Gamma_I - \int_{\Gamma_O} \left\{ \frac{\partial p}{\partial V_{i\mu}^b} + (V_j \eta_j) \frac{\partial V_i}{\partial V_{i\mu}^b} \eta_i \right\} d\Gamma_O + \\
& + w \int_{\Gamma_S} \left\{ V_j \eta_j \frac{\partial V_i}{\partial V_{i\mu}^b} \eta_i \right\} d\Gamma_S \tag{2.6.2}
\end{aligned}$$

όπου τα αντίστοιχα ολοκληρώματα ορίζονται σε είσοδο, έξοδο και στο *slot*.

Υπενθυμίζεται ότι οι εξισώσεις που προκύπτουν είναι γενικές και αναφέρονται σε τυρβώδη ροή. Για την περίπτωση στρωτής ροής, αρκεί στις τελικές εκφράσεις των

οριακών συνθηκών και των παραγώγων ευαισθησίας που θα προκύψουν να μηδενιστούν οι όροι \tilde{v} και v_t .

- Οριακές συνθήκες συζυγούς προβλήματος στην είσοδο

Με χρήση των εξισώσεων (2.6.1) και (2.6.2), προκύπτει η παρακάτω έκφραση:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\delta F_{aug}}{\delta V_{i\mu}^b} \right|_I &= \int_{\Gamma_I} \frac{\partial V_i}{\partial V_{i\mu}^b} \left\{ V_j \eta_j \eta_i + u_j V_j \eta_i + u_i V_j \eta_j - q \eta_i + \tilde{v}_a \tilde{v} \eta_i \right. \\
&+ (v + v_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \eta_j + \tilde{v}_a \tilde{v} \frac{C_S}{S} e_{ijz} e_{ilm} \frac{\partial V_z}{\partial x_j} \eta_l \left. \right\} d\Gamma_I \\
&+ \int_{\Gamma_I} \frac{\partial p}{\partial V_{i\mu}^b} \{u_j \eta_j + 1\} d\Gamma_I \\
&+ \int_{\Gamma_I} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial V_{i\mu}^b} \left\{ -u_i \frac{\partial v_t}{\partial \tilde{v}} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \eta_j + \tilde{v}_a V_j \eta_j - \frac{1}{\sigma} \tilde{v}_a \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \eta_j \right. \\
&- \frac{2C_{b2}}{\sigma} \tilde{v}_a \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \eta_j + \left(v + \frac{\tilde{v}}{\sigma} \right) \frac{\partial \tilde{v}_a}{\partial x_j} \eta_j \left. \right\} d\Gamma_I \\
&- \int_{\Gamma_I} \left\{ u_i (v + v_t) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial V_i}{\partial V_{i\mu}^b} \right) \eta_j \right. \\
&+ \tilde{v}_a \left(v + \frac{\tilde{v}}{\sigma} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial V_{i\mu}^b} \right) \eta_j \left. \right\} d\Gamma_I \tag{2.6.3}
\end{aligned}$$

Με βάση τις οριακές συνθήκες των εξισώσεων κατάστασης για την ταχύτητα, τη στατική πίεση και τη μεταβλητή του μοντέλου τύρβης, ισχύει:

$$V_i \rightarrow \text{συνθ. Dirichlet} \Rightarrow V_i = \text{const} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial V_i}{\partial V_{i\mu}^b} = 0}$$

$$p \rightarrow \text{συνθ. Neumann} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x_k} \eta_k = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial V_{i\mu}^b} \left(\frac{\partial p}{\partial x_k} \eta_k \right) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial p}{\partial V_{i\mu}^b} \right) \eta_k = 0}$$

$$\tilde{v} \rightarrow \text{συνθ. Dirichlet} \Rightarrow \tilde{v} = \text{const} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \tilde{v}}{\partial V_{i\mu}^b} = 0}$$

Με βάση τα παραπάνω, η εξίσωση (2.6.3) γίνεται:

$$\left. \frac{\delta F_{aug}}{\delta V_{i\mu}^b} \right|_I = \int_{\Gamma_I} \frac{\partial p}{\partial V_{i\mu}^b} \{u_j \eta_j + 1\} d\Gamma_I \tag{2.6.4}$$

Για να προκύψουν οι οριακές συνθήκες εισόδου του συζυγούς προβλήματος, η έκφραση (2.6.4) καθίσταται ανεξάρτητη των μεταβολών των ροϊκών μεγεθών στο σύνορο εισόδου. Για να γίνει αυτό τίθεται:

$$u_j \eta_j + 1 = 0 \Rightarrow u_j \eta_j = -1 \Rightarrow u_j \eta_j \eta_j = -\eta_j \Rightarrow \boxed{u_j = -\eta_j} \quad j = 1, 2, 3$$

Τέλος, για τη συζυγή στατική πίεση και τη συζυγή μεταβλητή του μοντέλου τύρβης τίθεται:

$$\boxed{\frac{\partial q}{\partial x_k} \eta_k = 0}$$

$$\boxed{\tilde{v}_a = 0}$$

- Οριακές συνθήκες συζυγούς προβλήματος στην έξοδο

Με χρήση των εξισώσεων (2.6.1) και (2.6.2), προκύπτει η παρακάτω έκφραση:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta F_{aug}}{\delta V_{i\mu}^b} \right|_O &= \int_{\Gamma_O} \frac{\partial V_i}{\partial V_{i\mu}^b} \left\{ -V_j \eta_j \eta_i + u_j V_j \eta_i + u_i V_j \eta_j - q \eta_i + \tilde{v}_a \tilde{v} \eta_i \right. \\ &\quad \left. + (v + v_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \eta_j + \tilde{v}_a \tilde{v} \frac{C_S}{S} e_{ijz} e_{ilm} \frac{\partial V_z}{\partial x_j} \eta_l \right\} d\Gamma_O \\ &\quad + \int_{\Gamma_O} \frac{\partial p}{\partial V_{i\mu}^b} \{ u_j \eta_j - 1 \} d\Gamma_O \\ &\quad + \int_{\Gamma_O} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial V_{i\mu}^b} \left\{ -u_i \frac{\partial v_t}{\partial \tilde{v}} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \eta_j + \tilde{v}_a V_j \eta_j - \frac{1}{\sigma} \tilde{v}_a \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \eta_j \right. \\ &\quad \left. - \frac{2C_{b2}}{\sigma} \tilde{v}_a \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \eta_j + \left(v + \frac{\tilde{v}}{\sigma} \right) \frac{\partial \tilde{v}_a}{\partial x_j} \eta_j \right\} d\Gamma_O \\ &\quad - \int_{\Gamma_O} \left\{ u_i (v + v_t) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial V_i}{\partial V_{i\mu}^b} \right) \eta_j \right. \\ &\quad \left. + \tilde{v}_a \left(v + \frac{\tilde{v}}{\sigma} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial V_{i\mu}^b} \right) \eta_j \right\} d\Gamma_O \end{aligned} \quad (2.6.5)$$

Με βάση τις οριακές συνθήκες των εξισώσεων κατάστασης για την ταχύτητα, τη στατική πίεση και τη μεταβλητή του μοντέλου τύρβης ισχύει:

$$V_i \rightarrow \text{συνθ. Neumann} \Rightarrow \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \eta_k = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial V_{i\mu}^b} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} \eta_k \right) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial V_i}{\partial V_{i\mu}^b} \right) \eta_k = 0}$$

$$p \rightarrow \text{συνθ. Dirichlet} \Rightarrow p = \text{const} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial p}{\partial V_{i\mu}^b} = 0}$$

$$\tilde{v} \rightarrow \text{συνθ. Neumann} \Rightarrow \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_k} \eta_k = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial V_{i\mu}^b} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_k} \eta_k \right) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial V_{i\mu}^b} \right) \eta_k = 0}$$

Με βάση τα παραπάνω, η εξίσωση (2.6.5) γίνεται:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta F_{aug}}{\delta V_{i\mu}^b} \right|_O &= \int_{\Gamma_O} \frac{\partial V_i}{\partial V_{i\mu}^b} \left\{ -V_j \eta_j \eta_i + u_j V_j \eta_i + u_i V_j \eta_j - q \eta_i + \tilde{v}_a \tilde{v} \eta_i \right. \\ &\quad \left. + (v + v_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \eta_j + \tilde{v}_a \tilde{v} \frac{C_S}{S} e_{ijz} e_{ilm} \frac{\partial V_z}{\partial x_j} \eta_l \right\} d\Gamma_O \\ &\quad + \int_{\Gamma_O} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial V_{i\mu}^b} \left\{ -u_i \frac{\partial v_t}{\partial \tilde{v}} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \eta_j + \tilde{v}_a V_j \eta_j \right. \\ &\quad \left. + \left(v + \frac{\tilde{v}}{\sigma} \right) \frac{\partial \tilde{v}_a}{\partial x_j} \eta_j \right\} d\Gamma_O \end{aligned} \quad (2.6.6)$$

Για να προκύψουν οι οριακές συνθήκες εξόδου του συζυγούς προβλήματος, η έκφραση (2.6.6) καθίσταται ανεξάρτητη των μεταβολών των ροϊκών μεγεθών του ορίου της εξόδου. Για να γίνει αυτό τίθεται:

$$\begin{aligned} -V_j \eta_j \eta_i + u_j V_j \eta_i + u_i V_j \eta_j - q \eta_i + \tilde{v}_a \tilde{v} \eta_i + (v + v_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \eta_j \\ + \tilde{v}_a \tilde{v} \frac{C_S}{S} e_{ijz} e_{ilm} \frac{\partial V_z}{\partial x_j} \eta_l = 0, \quad i = 1, 2, 3 \\ -u_i \frac{\partial v_t}{\partial \tilde{v}} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \eta_j + \tilde{v}_a V_j \eta_j + \left(v + \frac{\tilde{v}}{\sigma} \right) \frac{\partial \tilde{v}_a}{\partial x_j} \eta_j = 0 \end{aligned}$$

- Οριακές συνθήκες συζυγούς προβλήματος στο τοίχωμα

Με χρήση των εξισώσεων (2.6.1) και (2.6.2), προκύπτει η παρακάτω έκφραση:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta F_{aug}}{\delta V_{i\mu}^b} \right|_W &= \int_{\Gamma_W} \frac{\partial V_i}{\partial V_{i\mu}^b} \left\{ u_j V_j \eta_i + u_i V_j \eta_j - q \eta_i + \tilde{v}_a \tilde{v} \eta_i + (v + v_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \eta_j \right. \\ &\quad \left. + \tilde{v}_a \tilde{v} \frac{C_S}{S} e_{ijz} e_{ilm} \frac{\partial V_z}{\partial x_j} \eta_l \right\} d\Gamma_W + \int_{\Gamma_W} \frac{\partial p}{\partial V_{i\mu}^b} \{ u_j \eta_j \} d\Gamma_W \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Gamma_W} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial V_{i\mu}^b} \left\{ -u_i \frac{\partial v_t}{\partial \tilde{v}} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \eta_j + \tilde{v}_a V_j \eta_j - \frac{1}{\sigma} \tilde{v}_a \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \eta_j - \frac{2C_{b2}}{\sigma} \tilde{v}_a \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \eta_j \right. \\
& \quad \left. + \left(\nu + \frac{\tilde{v}}{\sigma} \right) \frac{\partial \tilde{v}_a}{\partial x_j} \eta_j \right\} d\Gamma_W \\
& - \int_{\Gamma_W} \left\{ u_i (\nu + \nu_t) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial V_i}{\partial V_{i\mu}^b} \right) \eta_j \right. \\
& \quad \left. + \tilde{v}_a \left(\nu + \frac{\tilde{v}}{\sigma} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial V_{i\mu}^b} \right) \eta_j \right\} d\Gamma_W \tag{2.6.7}
\end{aligned}$$

Με βάση τις οριακές συνθήκες των εξισώσεων κατάστασης για την ταχύτητα, τη στατική πίεση και τη μεταβλητή του μοντέλου τύρβης ισχύει:

$$V_i \rightarrow \text{συνθ. Dirichlet} \Rightarrow V_i = \text{const} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial V_i}{\partial V_{i\mu}^b} = 1}$$

γιατί η ταχύτητα στο τοίχωμα αποτελεί μεταβλητή σχεδιασμού του προβλήματος.

Ακόμη:

$$p \rightarrow \text{συνθ. Neumann} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x_k} \eta_k = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial V_{i\mu}^b} \left(\frac{\partial p}{\partial x_k} \eta_k \right) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial p}{\partial V_{i\mu}^b} \right) \eta_k = 0}$$

$$\tilde{v} \rightarrow \text{συνθ. Dirichlet} \Rightarrow \tilde{v} = \text{const} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \tilde{v}}{\partial V_{i\mu}^b} = 0}$$

Με βάση τα παραπάνω, η εξίσωση (2.6.7) γίνεται:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F_{aug}}{\delta V_{i\mu}^b} \Big|_W & = \int_{\Gamma_W} \left\{ u_j V_j \eta_i + u_i V_j \eta_j - q \eta_i + \tilde{v}_a \tilde{v} \eta_i + (\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \eta_j \right. \\
& \quad \left. + \tilde{v}_a \tilde{v} \frac{C_S}{S} e_{ijz} e_{ilm} \frac{\partial V_z}{\partial x_j} \eta_l \right\} d\Gamma_W + \int_{\Gamma_W} \frac{\partial p}{\partial V_{i\mu}^b} \{u_j \eta_j\} d\Gamma_W \tag{2.6.8}
\end{aligned}$$

Για να προκύψουν οι οριακές συνθήκες του συζυγούς προβλήματος στο τοίχωμα, η έκφραση (2.6.8) καθίσταται ανεξάρτητη των μεταβολών των ροϊκών μεγεθών του τοιχώματος. Για να γίνει αυτό τίθεται:

$$u_j \eta_j = 0 \Rightarrow u_j \eta_j \eta_j = 0 \Rightarrow \boxed{u_j = 0} \quad j = 1, 2, 3$$

Τέλος, για τη συζυγή στατική πίεση και την συζυγή μεταβλητή του μοντέλου τύρβης τίθεται:

$$\boxed{\frac{\partial q}{\partial x_k} \eta_k = 0}$$

$$\boxed{\tilde{v}_a = 0}$$

Με βάση τα παραπάνω, οι παράγωγοι ευαισθησίας στο τοίχωμα θα δίνονται από την σχέση:

$$\left. \frac{\delta F_{aug}}{\delta V_{i\mu}^b} \right|_W = \int_{\Gamma_W} \left\{ -q\eta_i + (v + v_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \eta_j \right\} d\Gamma_W, \quad i = 1,2,3 \quad (2.6.9)$$

Αντίστοιχα, για κάθε μέτωπο μ του τοιχώματος, η αντίστοιχη παράγωγος ευαισθησίας θα είναι:

$$\left. \frac{\delta F_{aug}}{\delta V_{jet}^b} \right|_{W,\mu} = \left[-q\eta_i + (v + v_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \eta_j \right] \Big|_{\mu} \eta_{i\mu} \quad (2.6.10)$$

χωρίς άθροιση στο δείκτη μ .

- Οριακές συνθήκες συζυγούς προβλήματος στο slot

Με χρήση των εξισώσεων (2.6.1) και (2.6.2), προκύπτει η παρακάτω έκφραση:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta F_{aug}}{\delta V_{i\mu}^b} \right|_S &= \int_{\Gamma_S} \frac{\partial V_i}{\partial V_{i\mu}^b} \left\{ wV_j\eta_j\eta_i + u_jV_j\eta_i + u_iV_j\eta_j - q\eta_i + \tilde{v}_a\tilde{v}\eta_i \right. \\ &\quad \left. + (v + v_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \eta_j + \tilde{v}_a \frac{C_s}{S} e_{ijz} e_{ilm} \frac{\partial V_z}{\partial x_j} \eta_l \right\} d\Gamma_S \\ &\quad + \int_{\Gamma_S} \frac{\partial p}{\partial V_{i\mu}^b} \{u_j\eta_j\} d\Gamma_S \\ &\quad + \int_{\Gamma_S} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial V_{i\mu}^b} \left\{ -u_i \frac{\partial v_t}{\partial \tilde{v}} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \eta_j + \tilde{v}_a V_j \eta_j - \frac{1}{\sigma} \tilde{v}_a \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \eta_j \right. \\ &\quad \left. - \frac{2C_{b2}}{\sigma} \tilde{v}_a \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \eta_j + \left(v + \frac{\tilde{v}}{\sigma} \right) \frac{\partial \tilde{v}_a}{\partial x_j} \eta_j \right\} d\Gamma_S \\ &\quad - \int_{\Gamma_S} \left\{ u_i (v + v_t) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial V_i}{\partial V_{i\mu}^b} \right) \eta_j \right. \\ &\quad \left. + \tilde{v}_a \left(v + \frac{\tilde{v}}{\sigma} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial V_{i\mu}^b} \right) \eta_j \right\} d\Gamma_S \end{aligned} \quad (2.6.11)$$

Με βάση τις οριακές συνθήκες των εξισώσεων κατάστασης για την ταχύτητα, τη στατική πίεση και τη μεταβλητή του μοντέλου τύρβης ισχύει:

$$V_i \rightarrow \text{συνθ. Dirichlet} \Rightarrow V_i = \text{const} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial V_i}{\partial V_{i\mu}^b} = 1}$$

γιατί η ταχύτητα στο *slot* αποτελεί μεταβλητή σχεδιασμού του προβλήματος.

Ακόμη:

$$p \rightarrow \text{συνθ. Neumann} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x_k} \eta_k = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial V_{i\mu}^b} \left(\frac{\partial p}{\partial x_k} \eta_k \right) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial p}{\partial V_{i\mu}^b} \right) \eta_k = 0}$$

$$\tilde{v} \rightarrow \text{συνθ. Neumann} \Rightarrow \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_k} \eta_k = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial V_{i\mu}^b} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_k} \eta_k \right) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial V_{i\mu}^b} \right) \eta_k = 0}$$

Με βάση τα παραπάνω, η εξίσωση (2.6.11) γίνεται:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta F_{aug}}{\delta V_{i\mu}^b} \right|_S &= \int_{\Gamma_S} \left\{ w V_j \eta_j \eta_i + u_j V_j \eta_i + u_i V_j \eta_j - q \eta_i + \tilde{v}_a \tilde{v} \eta_i \right. \\ &\quad \left. + (v + v_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \eta_j + \tilde{v}_a \tilde{v} \frac{C_S}{S} e_{ijz} e_{ilm} \frac{\partial V_z}{\partial x_j} \eta_l \right\} d\Gamma_S \\ &\quad + \int_{\Gamma_S} \frac{\partial p}{\partial V_{i\mu}^b} \{u_j \eta_j\} d\Gamma_S \\ &\quad + \int_{\Gamma_S} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial V_{i\mu}^b} \left\{ -u_i \frac{\partial v_t}{\partial \tilde{v}} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \eta_j + \tilde{v}_a V_j \eta_j \right. \\ &\quad \left. + \left(v + \frac{\tilde{v}}{\sigma} \right) \frac{\partial \tilde{v}_a}{\partial x_j} \eta_j \right\} d\Gamma_S \end{aligned} \quad (2.6.12)$$

Για να προκύψουν οι οριακές συνθήκες του συζυγούς προβλήματος στο *slot*, η έκφραση (2.6.12) καθίσταται ανεξάρτητη των μεταβολών των ροϊκών μεγεθών του *slot*. Για να γίνει αυτό τίθεται:

$$u_j \eta_j = 0 \Rightarrow u_j \eta_j \eta_j = 0 \Rightarrow \boxed{u_j = 0} \quad j = 1, 2, 3$$

$$\tilde{v}_a V_j \eta_j + \left(v + \frac{\tilde{v}}{\sigma} \right) \frac{\partial \tilde{v}_a}{\partial x_j} \eta_j = 0$$

Τέλος, για τη συζυγή στατική πίεση τίθεται:

$$\boxed{\frac{\partial q}{\partial x_k} \eta_k = 0}$$

Με βάση τα παραπάνω, οι παράγωγοι ευαισθησίας στο *slot* θα δίνονται από την σχέση:

$$\left. \frac{\delta F_{aug}}{\delta V_{i\mu}^b} \right|_S = \int_{\Gamma_S} \left\{ wV_j \eta_j \eta_i - q\eta_i + (v + v_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \eta_j \right\} d\Gamma_S, i = 1,2,3 \quad (2.6.13)$$

Αντίστοιχα, για κάθε μέτωπο μ του *slot*, η αντίστοιχη παράγωγος ευαισθησίας θα είναι:

$$\left. \frac{\delta F_{aug}}{\delta V_{jet}^b} \right|_{S,\mu} = \left[wV_j \eta_j \eta_i - q\eta_i + (v + v_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \eta_j \right]_{\mu} \eta_{i\mu} \quad (2.6.14)$$

χωρίς άθροιση στο δείκτη μ .

§ 2.7 : Οριακές συνθήκες συζυγούς προβλήματος και παράγωγοι ευαισθησίας για το πρόβλημα εξωτερικής αεροδυναμικής

Για το πρόβλημα εσωτερικής αεροδυναμικής, η εξίσωση από την οποία θα προκύψουν οι οριακές συνθήκες του συζυγούς προβλήματος επαναλαμβάνεται παρακάτω για τη γενική περίπτωση όπου η ροή είναι τυρβώδης και γίνεται χρήση του μοντέλου τύρβης *Spalart – Allmaras*:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta V_{i\mu}^b} &= \frac{\delta F_{ex}}{\delta V_{i\mu}^b} + \int_{\Gamma} \frac{\partial V_i}{\partial V_{i\mu}^b} \left\{ u_j V_j \eta_i + u_i V_j \eta_j - q\eta_i + \tilde{v}_a \tilde{v} \eta_i \right. \\ &\quad \left. + (v + v_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \eta_j + \tilde{v}_a \tilde{v} \frac{C_S}{S} e_{ijz} e_{ilm} \frac{\partial V_z}{\partial x_j} \eta_l \right\} d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma} \frac{\partial p}{\partial V_{i\mu}^b} \{u_j \eta_j\} d\Gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Gamma} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial V_{i\mu}^b} \left\{ -u_i \frac{\partial v_t}{\partial \tilde{v}} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \eta_j + \tilde{v}_a V_j \eta_j - \frac{1}{\sigma} \tilde{v}_a \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \eta_j - \frac{2C_{b_2}}{\sigma} \tilde{v}_a \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \eta_j \right. \\
& \quad \left. + \left(v + \frac{\tilde{v}}{\sigma} \right) \frac{\partial \tilde{v}_a}{\partial x_j} \eta_j \right\} d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma} \left\{ u_i (v + v_t) \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial V_i}{\partial V_{i\mu}^b} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial V_j}{\partial V_{i\mu}^b} \right) \right] \eta_j \right. \\
& \quad \left. + \tilde{v}_a \left(v + \frac{\tilde{v}}{\sigma} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial V_{i\mu}^b} \right) \eta_j \right\} d\Gamma \tag{2.7.1}
\end{aligned}$$

όπου :

$$\Gamma = \Gamma_I + \Gamma_O + \Gamma_W + \Gamma_S$$

Όπως και στο προηγούμενο εδάφιο, ο όρος $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial V_j}{\partial V_{i\mu}^b} \right)$ **αγνοείται** στην πορεία της διαδικασίας που ακολουθεί.

Σε προηγούμενο κεφάλαιο αποδείχτηκε ότι το διαφορικό της συνάρτησης κόστους του προβλήματος δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F_{ex}}{\delta V_{i\mu}^b} &= \Lambda \int_{\Gamma_W} \left\{ -\frac{\partial v_t}{\partial V_{i\mu}^b} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \eta_j - (v + v_t) \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial V_i}{\partial V_{i\mu}^b} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial V_j}{\partial V_{i\mu}^b} \right) \right] \eta_j + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial p}{\partial V_{i\mu}^b} \eta_i \right\} d\Gamma_W \Rightarrow \\
\frac{\delta F_{ex}}{\delta V_{i\mu}^b} &= \Lambda \int_{\Gamma_W} \left\{ -\frac{\partial v_t}{\partial V_{i\mu}^b} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \eta_j - (v + v_t) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial V_i}{\partial V_{i\mu}^b} \right) \eta_j + \frac{\partial p}{\partial V_{i\mu}^b} \eta_i \right\} d\Gamma_W \tag{2.7.2}
\end{aligned}$$

- Οριακές συνθήκες συζυγούς προβλήματος στην είσοδο

Με χρήση των εξισώσεων (2.7.1) και (2.7.2), προκύπτει η παρακάτω έκφραση:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F_{aug}}{\delta V_{i\mu}^b} \Big|_I &= \int_{\Gamma_I} \frac{\partial V_i}{\partial V_{i\mu}^b} \left\{ u_j V_j \eta_i + u_i V_j \eta_j - q \eta_i + \tilde{v}_a \tilde{v} \eta_i + (v + v_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \eta_j \right. \\
& \quad \left. + \tilde{v}_a \tilde{v} \frac{C_S}{S} e_{ijz} e_{ilm} \frac{\partial V_z}{\partial x_j} \eta_l \right\} d\Gamma_I + \int_{\Gamma_I} \frac{\partial p}{\partial V_{i\mu}^b} \{u_j \eta_j\} d\Gamma_I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Gamma_I} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial V_{i\mu}^b} \left\{ -u_i \frac{\partial v_t}{\partial \tilde{v}} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \eta_j + \tilde{v}_a V_j \eta_j - \frac{1}{\sigma} \tilde{v}_a \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \eta_j - \frac{2C_{b_2}}{\sigma} \tilde{v}_a \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \eta_j \right. \\
& \quad \left. + \left(\nu + \frac{\tilde{v}}{\sigma} \right) \frac{\partial \tilde{v}_a}{\partial x_j} \eta_j \right\} d\Gamma_I \\
& - \int_{\Gamma_I} \left\{ u_i (\nu + \nu_t) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial V_i}{\partial V_{i\mu}^b} \right) \eta_j \right. \\
& \quad \left. + \tilde{v}_a \left(\nu + \frac{\tilde{v}}{\sigma} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial V_{i\mu}^b} \right) \eta_j \right\} d\Gamma_I \tag{2.7.3}
\end{aligned}$$

Με βάση τις οριακές συνθήκες των εξισώσεων κατάστασης για την ταχύτητα, τη στατική πίεση και τη μεταβλητή του μοντέλου τύρβης, ισχύει:

$$V_i \rightarrow \text{συνθ. Dirichlet} \Rightarrow V_i = \text{const} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial V_i}{\partial V_{i\mu}^b} = 0}$$

$$p \rightarrow \text{συνθ. Neumann} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x_k} \eta_k = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial V_{i\mu}^b} \left(\frac{\partial p}{\partial x_k} \eta_k \right) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial p}{\partial V_{i\mu}^b} \right) \eta_k = 0}$$

$$\tilde{v} \rightarrow \text{συνθ. Dirichlet} \Rightarrow \tilde{v} = \text{const} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \tilde{v}}{\partial V_{i\mu}^b} = 0}$$

Με βάση τα παραπάνω, η εξίσωση (2.7.3) γίνεται:

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta V_{i\mu}^b} \Big|_I = \int_{\Gamma_I} \frac{\partial p}{\partial V_{i\mu}^b} \{u_j \eta_j\} d\Gamma_I \tag{2.7.4}$$

Για να προκύψουν οι οριακές συνθήκες εισόδου του συζυγούς προβλήματος, η έκφραση (2.6.4) καθίσταται ανεξάρτητη των μεταβολών των ροϊκών μεγεθών στο σύνορο εισόδου. Για να γίνει αυτό τίθεται:

$$u_j \eta_j = 0 \Rightarrow u_j \eta_j \eta_j = 0 \Rightarrow \boxed{u_j = 0} \quad j = 1, 2, 3$$

Τέλος, για τη συζυγή στατική πίεση και την συζυγή μεταβλητή του μοντέλου τύρβης τίθεται:

$$\boxed{\frac{\partial q}{\partial x_k} \eta_k = 0}$$

$$\boxed{\tilde{v}_a = 0}$$

- Οριακές συνθήκες συζυγούς προβλήματος στην έξοδο

Με χρήση των εξισώσεων (2.7.1) και (2.7.2), προκύπτει η παρακάτω έκφραση:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\delta F_{aug}}{\delta V_{i\mu}^b} \right|_O &= \int_{\Gamma_O} \frac{\partial V_i}{\partial V_{i\mu}^b} \left\{ u_j V_j \eta_i + u_i V_j \eta_j - q \eta_i + \tilde{v}_a \tilde{v} \eta_i + (v + v_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \eta_j \right. \\
&\quad + \tilde{v}_a \tilde{v} \frac{C_S}{S} e_{ijz} e_{ilm} \frac{\partial V_z}{\partial x_j} \eta_l \left. \right\} d\Gamma_O + \int_{\Gamma_O} \frac{\partial p}{\partial V_{i\mu}^b} \{ u_j \eta_j \} d\Gamma_O \\
&\quad + \int_{\Gamma_O} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial V_{i\mu}^b} \left\{ -u_i \frac{\partial v_t}{\partial \tilde{v}} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \eta_j + \tilde{v}_a V_j \eta_j - \frac{1}{\sigma} \tilde{v}_a \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \eta_j \right. \\
&\quad - \frac{2C_{b2}}{\sigma} \tilde{v}_a \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \eta_j + \left(v + \frac{\tilde{v}}{\sigma} \right) \frac{\partial \tilde{v}_a}{\partial x_j} \eta_j \left. \right\} d\Gamma_O \\
&\quad - \int_{\Gamma_O} \left\{ u_i (v + v_t) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial V_i}{\partial V_{i\mu}^b} \right) \eta_j \right. \\
&\quad \left. + \tilde{v}_a \left(v + \frac{\tilde{v}}{\sigma} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial V_{i\mu}^b} \right) \eta_j \right\} d\Gamma_O \tag{2.7.5}
\end{aligned}$$

Με βάση τις οριακές συνθήκες των εξισώσεων κατάστασης για την ταχύτητα, την κινηματική στατική πίεση και τη μεταβλητή του μοντέλου τύρβης ισχύει:

$$V_i \rightarrow \text{συνθ. Neumann} \Rightarrow \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \eta_k = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial V_{i\mu}^b} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} \eta_k \right) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial V_i}{\partial V_{i\mu}^b} \right) \eta_k = 0}$$

$$p \rightarrow \text{συνθ. Neumann} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x_k} \eta_k = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial V_{i\mu}^b} \left(\frac{\partial p}{\partial x_k} \eta_k \right) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial p}{\partial V_{i\mu}^b} \right) \eta_k = 0}$$

$$\tilde{v} \rightarrow \text{συνθ. Neumann} \Rightarrow \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_k} \eta_k = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial V_{i\mu}^b} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_k} \eta_k \right) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial V_{i\mu}^b} \right) \eta_k = 0}$$

Με βάση τα παραπάνω, η εξίσωση (2.7.5) γίνεται:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\delta F_{aug}}{\delta V_{i\mu}^b} \right|_O &= \int_{\Gamma_O} \frac{\partial V_i}{\partial V_{i\mu}^b} \left\{ u_j V_j \eta_i + u_i V_j \eta_j - q \eta_i + \tilde{v}_a \tilde{v} \eta_i + (v + v_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \eta_j \right. \\
&\quad \left. + \tilde{v}_a \tilde{v} \frac{C_S}{S} e_{ijz} e_{ilm} \frac{\partial V_z}{\partial x_j} \eta_l \right\} d\Gamma_O + \int_{\Gamma_O} \frac{\partial p}{\partial V_{i\mu}^b} \{ u_j \eta_j \} d\Gamma_O \\
&\quad + \int_{\Gamma_O} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial V_{i\mu}^b} \left\{ -u_i \frac{\partial v_t}{\partial \tilde{v}} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \eta_j + \tilde{v}_a V_j \eta_j + \left(v + \frac{\tilde{v}}{\sigma} \right) \frac{\partial \tilde{v}_a}{\partial x_j} \eta_j \right\} d\Gamma_O \tag{2.7.6}
\end{aligned}$$

Για να προκύψουν οι οριακές συνθήκες εξόδου του συζυγούς προβλήματος, η έκφραση (2.7.6) καθίσταται ανεξάρτητη των μεταβολών των ροϊκών μεγεθών του συνόρου εξόδου. Για να γίνει αυτό τίθεται:

$$u_j \eta_j = 0 \Rightarrow u_j \eta_j \eta_j = 0 \Rightarrow \boxed{u_j = 0} \quad j = 1, 2, 3$$

$$-q \eta_i + \tilde{v}_a \tilde{v} \eta_i + (v + v_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \eta_j + \tilde{v}_a \tilde{v} \frac{C_S}{S} e_{ijz} e_{ilm} \frac{\partial V_z}{\partial x_j} \eta_l = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{q = \tilde{v}_a \tilde{v} \eta_i + (v + v_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \eta_j \eta_i + \tilde{v}_a \tilde{v} \frac{C_S}{S} e_{ijz} e_{ilm} \frac{\partial V_z}{\partial x_j} \eta_l \eta_i}$$

$$\boxed{-u_i \frac{\partial v_t}{\partial \tilde{v}} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \eta_j + \tilde{v}_a V_j \eta_j + \left(v + \frac{\tilde{v}}{\sigma} \right) \frac{\partial \tilde{v}_a}{\partial x_j} \eta_j = 0}$$

- Οριακές συνθήκες συζυγούς προβλήματος στο τοίχωμα

Με χρήση των εξισώσεων (2.7.1) και (2.7.2), προκύπτει η παρακάτω έκφραση:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta F_{aug}}{\delta V_{i\mu}^b} \right|_W &= \int_{\Gamma_W} \frac{\partial V_i}{\partial V_{i\mu}^b} \left\{ u_j V_j \eta_i + u_i V_j \eta_j - q \eta_i + \tilde{v}_a \tilde{v} \eta_i + (v + v_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \eta_j \right. \\ &\quad \left. + \tilde{v}_a \tilde{v} \frac{C_S}{S} e_{ijz} e_{ilm} \frac{\partial V_z}{\partial x_j} \eta_l \right\} d\Gamma_W + \int_{\Gamma_W} \frac{\partial p}{\partial V_{i\mu}^b} \{ u_j \eta_j + \Lambda \eta_j \} d\Gamma_W \\ &\quad + \int_{\Gamma_W} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial V_{i\mu}^b} \left\{ -u_i \frac{\partial v_t}{\partial \tilde{v}} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \eta_j + \tilde{v}_a V_j \eta_j - \frac{1}{\sigma} \tilde{v}_a \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \eta_j \right. \\ &\quad \left. - \frac{2C_{b_2}}{\sigma} \tilde{v}_a \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \eta_j + \left(v + \frac{\tilde{v}}{\sigma} \right) \frac{\partial \tilde{v}_a}{\partial x_j} \eta_j \right\} d\Gamma_W \\ &\quad - \int_{\Gamma_W} \left\{ u_i (v + v_t) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial V_i}{\partial V_{i\mu}^b} \right) \eta_j + \tilde{v}_a \left(v + \frac{\tilde{v}}{\sigma} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial V_{i\mu}^b} \right) \eta_j \right. \\ &\quad \left. - \Lambda \frac{\partial v_t}{\partial V_{i\mu}^b} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \eta_j - \Lambda (v + v_t) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial V_i}{\partial V_{i\mu}^b} \right) \eta_j \right\} d\Gamma_W \quad (2.7.7) \end{aligned}$$

Με βάση τις οριακές συνθήκες των εξισώσεων κατάστασης για την ταχύτητα, τη στατική πίεση και τη μεταβλητή του μοντέλου τύρβης ισχύει:

$$V_i \rightarrow \text{συνθ. Dirichlet} \Rightarrow V_i = \text{const} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial V_i}{\partial V_{i\mu}^b} = 1}$$

γιατί η ταχύτητα στο τοίχωμα αποτελεί μεταβλητή σχεδιασμού του προβλήματος.

Ακόμη:

$$p \rightarrow \text{συνθ. Neumann} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x_k} \eta_k = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial V_{i\mu}^b} \left(\frac{\partial p}{\partial x_k} \eta_k \right) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial p}{\partial V_{i\mu}^b} \right) \eta_k = 0}$$

$$\tilde{v} \rightarrow \text{συνθ. Dirichlet} \Rightarrow \tilde{v} = \text{const} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \tilde{v}}{\partial V_{i\mu}^b} = 0}$$

$$v_t \rightarrow \text{συνθ. Dirichlet} \Rightarrow v_t = \text{const} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial v_t}{\partial V_{i\mu}^b} = 0}$$

Με βάση τα παραπάνω, η εξίσωση (2.7.7) γίνεται:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta F_{aug}}{\delta V_{i\mu}^b} \right|_W &= \int_{\Gamma_W} \left\{ u_j V_j \eta_i + u_i V_j \eta_j - q \eta_i + \tilde{v}_a \tilde{v} \eta_i + (v + v_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \eta_j \right. \\ &\quad \left. + \tilde{v}_a \tilde{v} \frac{C_S}{S} e_{ijz} e_{ilm} \frac{\partial V_z}{\partial x_j} \eta_l \right\} d\Gamma_W + \int_{\Gamma_W} \frac{\partial p}{\partial V_{i\mu}^b} \{ u_j \eta_j + \Lambda \eta_j \} d\Gamma_W \\ &\quad + \int_{\Gamma_W} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial V_{i\mu}^b} \left\{ -u_i \frac{\partial v_t}{\partial \tilde{v}} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \eta_j + \tilde{v}_a V_j \eta_j - \frac{1}{\sigma} \tilde{v}_a \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \eta_j \right. \\ &\quad \left. - \frac{2C_{b2}}{\sigma} \tilde{v}_a \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \eta_j + \left(v + \frac{\tilde{v}}{\sigma} \right) \frac{\partial \tilde{v}_a}{\partial x_j} \eta_j \right\} d\Gamma_W \\ &\quad - \int_{\Gamma_W} \left\{ u_i (v + v_t) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial V_i}{\partial V_{i\mu}^b} \right) \eta_j + \tilde{v}_a \left(v + \frac{\tilde{v}}{\sigma} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial V_{i\mu}^b} \right) \eta_j \right. \\ &\quad \left. - \Lambda \frac{\partial v_t}{\partial V_{i\mu}^b} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \eta_j - \Lambda (v + v_t) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial V_i}{\partial V_{i\mu}^b} \right) \eta_j \right\} d\Gamma_W \quad (2.7.8) \end{aligned}$$

Για να προκύψουν οι οριακές συνθήκες στο τοίχωμα του συζυγούς προβλήματος, η έκφραση (2.7.8) καθίσταται ανεξάρτητη των μεταβολών των ροϊκών μεγεθών του τοιχώματος.

Για να γίνει αυτό τίθεται:

$$u_j \eta_j + \Lambda \eta_j = 0 \Rightarrow u_j \eta_j \eta_j = -\Lambda \eta_j \eta_j \Rightarrow u_j = -\Lambda \Rightarrow \boxed{u_j = w r_i' - r_i} \quad j = 1,2,3$$

Τέλος, για τη συζυγή στατική πίεση και τη συζυγή μεταβλητή του μοντέλου τύρβης τίθεται:

$$\boxed{\frac{\partial q}{\partial x_k} \eta_k = 0}$$

$$\boxed{\tilde{v}_a = 0}$$

Με βάση τα παραπάνω, οι παράγωγοι ευαισθησίας στο τοίχωμα θα δίνονται από την σχέση:

$$\left. \frac{\delta F_{aug}}{\delta V_{i\mu}^b} \right|_W = \int_{\Gamma_W} \left\{ -q\eta_i + (v + v_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \eta_j \right\} d\Gamma_W, \quad i = 1,2,3 \quad (2.7.9)$$

Αντίστοιχα, για κάθε μέτωπο μ του τοιχώματος, η αντίστοιχη παράγωγος ευαισθησίας θα είναι:

$$\left. \frac{\delta F_{aug}}{\delta V_{jet}^b} \right|_{W,\mu} = \left[-q\eta_i + (v + v_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \eta_j \right] \Big|_{\mu} \eta_{i\mu} \quad (2.7.10)$$

χωρίς άθροιση στο δείκτη μ .

- Οριακές συνθήκες συζυγούς προβλήματος στο slot

Με χρήση των εξισώσεων (2.7.1) και (2.7.2), προκύπτει η παρακάτω έκφραση:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta F_{aug}}{\delta V_{i\mu}^b} \right|_S &= \int_{\Gamma_S} \frac{\partial V_i}{\partial V_{i\mu}^b} \left\{ u_j V_j \eta_i + u_i V_j \eta_j - q\eta_i + \tilde{v}_a \tilde{v} \eta_i + (v + v_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \eta_j \right. \\ &\quad \left. + \tilde{v}_a \tilde{v} \frac{C_S}{S} e_{ijz} e_{ilm} \frac{\partial V_z}{\partial x_j} \eta_l \right\} d\Gamma_S + \int_{\Gamma_S} \frac{\partial p}{\partial V_{i\mu}^b} \{ u_j \eta_j \} d\Gamma_S \\ &\quad + \int_{\Gamma_S} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial V_{i\mu}^b} \left\{ -u_i \frac{\partial v_t}{\partial \tilde{v}} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \eta_j + \tilde{v}_a V_j \eta_j - \frac{1}{\sigma} \tilde{v}_a \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \eta_j \right. \\ &\quad \left. - \frac{2C_{b_2}}{\sigma} \tilde{v}_a \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \eta_j + \left(v + \frac{\tilde{v}}{\sigma} \right) \frac{\partial \tilde{v}_a}{\partial x_j} \eta_j \right\} d\Gamma_S \\ &\quad - \int_{\Gamma_S} \left\{ u_i (v + v_t) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial V_i}{\partial V_{i\mu}^b} \right) \eta_j + \tilde{v}_a \left(v + \frac{\tilde{v}}{\sigma} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial V_{i\mu}^b} \right) \eta_j \right\} d\Gamma_S \quad (2.7.11) \end{aligned}$$

Με βάση τις οριακές συνθήκες των εξισώσεων κατάστασης για την ταχύτητα, τη στατική πίεση και τη μεταβλητή του μοντέλου τύρβης ισχύει:

$$V_i \rightarrow \text{συνθ. Dirichlet} \Rightarrow V_i = \text{const} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial V_i}{\partial V_{i\mu}^b} = 1}$$

γιατί η ταχύτητα στο *slot* αποτελεί μεταβλητή σχεδιασμού του προβλήματος.

Ακόμη:

$$p \rightarrow \text{συνθ. Neumann} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x_k} \eta_k = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial V_{i\mu}^b} \left(\frac{\partial p}{\partial x_k} \eta_k \right) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial p}{\partial V_{i\mu}^b} \right) \eta_k = 0}$$

$$\tilde{v} \rightarrow \text{συνθ. Neumann} \Rightarrow \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_k} \eta_k = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial V_{i\mu}^b} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_k} \eta_k \right) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial V_{i\mu}^b} \right) \eta_k = 0}$$

Με βάση τα παραπάνω, η εξίσωση (2.7.11) γίνεται:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta F_{aug}}{\delta V_{i\mu}^b} \right|_S &= \int_{\Gamma_S} \left\{ u_j V_j \eta_i + u_i V_j \eta_j - q \eta_i + \tilde{v}_a \tilde{v} \eta_i + (v + v_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \eta_j \right. \\ &\quad \left. + \tilde{v}_a \tilde{v} \frac{C_S}{S} e_{ijz} e_{ilm} \frac{\partial V_z}{\partial x_j} \eta_l \right\} d\Gamma_S + \int_{\Gamma_S} \frac{\partial p}{\partial V_{i\mu}^b} \{u_j \eta_j\} d\Gamma_S \\ &\quad + \int_{\Gamma_S} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial V_{i\mu}^b} \left\{ -u_i \frac{\partial v_t}{\partial \tilde{v}} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \eta_j + \tilde{v}_a V_j \eta_j + \left(v + \frac{\tilde{v}}{\sigma} \right) \frac{\partial \tilde{v}_a}{\partial x_j} \eta_j \right\} d\Gamma_S \\ &\quad - \int_{\Gamma_S} \left\{ u_i (v + v_t) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial V_i}{\partial V_{i\mu}^b} \right) \eta_j + \tilde{v}_a \left(v + \frac{\tilde{v}}{\sigma} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial V_{i\mu}^b} \right) \eta_j \right\} d\Gamma_S \quad (2.7.12) \end{aligned}$$

Για να προκύψουν οι οριακές συνθήκες του συζυγούς προβλήματος στο *slot*, η έκφραση (2.7.12) καθίσταται ανεξάρτητη των μεταβολών των ροϊκών μεγεθών του *slot*. Για να γίνει αυτό τίθεται:

$$u_j \eta_j = 0 \Rightarrow u_j \eta_j \eta_j = 0 \Rightarrow \boxed{u_j = 0} \quad j = 1, 2, 3$$

Τέλος, για τη συζυγή στατική πίεση και τη συζυγή μεταβλητή του μοντέλου τύρβης τίθεται:

$$\boxed{\frac{\partial q}{\partial x_k} \eta_k = 0}$$

$$\boxed{\tilde{v}_a V_j \eta_j + \left(v + \frac{\tilde{v}}{\sigma} \right) \frac{\partial \tilde{v}_a}{\partial x_j} \eta_j = 0}$$

Με βάση τα παραπάνω, οι παράγωγοι ευαισθησίας στο *slot* θα δίνονται από την σχέση:

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta V_{i\mu}^b} \Big|_S = \int_{\Gamma_S} \left\{ -q\eta_i + \tilde{v}_a \tilde{v} \eta_i + (v + v_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \eta_j + \tilde{v}_a \tilde{v} \frac{C_S}{S} e_{ijz} e_{ilm} \frac{\partial V_z}{\partial x_j} \eta_l \right\} d\Gamma_S \quad , \quad i = 1,2,3 \quad (2.7.13)$$

Αντίστοιχα, για κάθε μέτωπο μ του *slot*, η αντίστοιχη παράγωγος ευαισθησίας θα είναι:

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta V_{jet}^b} \Big|_{S,\mu} = \left[-q\eta_i + \tilde{v}_a \tilde{v} \eta_i + (v + v_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \eta_j + \tilde{v}_a \tilde{v} \frac{C_S}{S} e_{ijz} e_{ilm} \frac{\partial V_z}{\partial x_j} \eta_l \right] \Big|_{\mu} \eta_{i\mu} \quad (2.7.14)$$

χωρίς άθροιση στο δείκτη μ .

§ 2.8 : Παράγωγοι ως προς τις μεταβλητές μοντελοποίησης του *jet*

Στα προηγούμενα εδάφια παρουσιάστηκε ο αναλυτικός προσδιορισμός των παραγώνων ευαισθησίας της επαυξημένης αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις ταχύτητες σε κάθε μέτωπο του *slot*, $\frac{\delta F_{aug}}{\delta V_{i\mu}^b}$. Ωστόσο, με βάση τα όσα αναφέρθηκαν στο εδάφιο § 2.8, οι μεταβλητές σχεδιασμού στο πρόβλημα βελτιστοποίησης του ελέγχου της ροής δεν είναι οι ταχύτητες σε κάθε μέτωπο του *slot*, αλλά η μεταβλητή σχεδιασμού κ για την περίπτωση μοντελοποίησης της κατανομής ταχύτητας του *jet* με μια μεταβλητή σχεδιασμού και οι μεταβλητές σχεδιασμού κ και φ για την περίπτωση μοντελοποίησης της κατανομής ταχύτητας του *jet* με δύο μεταβλητές σχεδιασμού.

Για την εύρεση της βέλτιστης κατανομής της ταχύτητας του *jet*, πρέπει να εισαχθεί ένας βρόχος βελτιστοποίησης στον οποίο, σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης, οι τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού πρέπει να ανανεώνονται. Η ανανέωση των μεταβλητών σχεδιασμού γίνεται με τη χρήση της μεθόδου της απότομης καθόδου, η οποία για μια

οποιαδήποτε μεταβλητή σχεδιασμού έχει την παρακάτω μαθηματική έκφραση, όπου πλέον η επαυξημένη αντικειμενική συνάρτηση F_{aug} μπορεί να γραφεί F , χωρίς το σύμβολο της επαυξημένης αντικειμενικής συνάρτησης:

$$b^{(n)} = b^{(n-1)} - \eta \left(\frac{\delta F}{\delta b} \right)^{(n-1)} \quad (2.8.1)$$

Στην παραπάνω έκφραση, ο δείκτης n φανερώνει τον αύξοντα αριθμό του κύκλου βελτιστοποίησης, ενώ η μεταβλητή η είναι μια διαστατή μεταβλητή που παίρνει τέτοια τιμή ώστε να ρυθμίζει κατάλληλα τη μεταβολή της μεταβλητής σχεδιασμού με βάση την παράγωγο $\frac{\delta F}{\delta b}$.

Γίνεται, λοιπόν, κατανοητό ότι, οι παράγωγοι $\frac{\delta F}{\delta V_{i\mu}^b}$ που υπολογίστηκαν προηγουμένως πρέπει να χρησιμοποιηθούν για την εξαγωγή των παραγώγων $\frac{\delta F}{\delta \kappa}$ και $\frac{\delta F}{\delta \varphi}$.

Για την περίπτωση μοντελοποίησης του *jet* με μια μεταβλητή σχεδιασμού, η σχέση που καθορίζει την κατανομή της ταχύτητας στο μέτωπο του *slot* είναι:

$$V_{\mu}^b = \kappa s_{\mu} (1 - s_{\mu}) \quad (2.8.2)$$

Από την επίλυση των συζυγών εξισώσεων, είναι γνωστές σε κάθε μέτωπο του *slot* οι παράγωγοι $\left. \frac{\delta F}{\delta V_{jet}^b} \right|_{\mu}$. Συνεπώς, με βάση τον κανόνα της αλυσίδας θα ισχύει:

$$\frac{\delta F}{\delta \kappa} = \sum_{\mu=1}^N \left. \frac{\delta F}{\delta V_{jet}^b} \right|_{\mu} \left. \frac{\delta V_{jet}^b}{\delta \kappa} \right|_{\mu} \xrightarrow{(2.8.2)} \frac{\delta F}{\delta \kappa} = \sum_{\mu=1}^N \left. \frac{\delta F}{\delta V_{jet}^b} \right|_{\mu} s_{\mu} (1 - s_{\mu}) \quad (2.8.3)$$

Για την περίπτωση μοντελοποίησης του *jet* με δύο μεταβλητές σχεδιασμού, οι σχέσεις που καθορίζουν την κατανομή της ταχύτητας στο μέτωπο του *slot* είναι:

$$V_{\mu,x}^b = \kappa s_{\mu} (1 - s_{\mu}) \cos(90^{\circ} + \theta + \varphi) \quad (2.8.4)$$

$$V_{\mu,y}^b = \kappa s_{\mu} (1 - s_{\mu}) \sin(90^{\circ} + \theta + \varphi) \quad (2.8.5)$$

Για την αντικειμενική συνάρτηση δF ισχύει:

$$F = F(V_{\mu,x}^b, V_{\mu,y}^b) \Rightarrow \delta F_{aug} = \sum_{\mu=1}^N \left[\left(\frac{\partial F}{\partial V_{\mu,x}^b} \right) \delta V_{\mu,x}^b + \left(\frac{\partial F}{\partial V_{\mu,y}^b} \right) \delta V_{\mu,y}^b \right] \quad (2.8.6)$$

Άρα, με βάση τη σχέση (2.8.6) θα ισχύει:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta \kappa} &= \sum_{\mu=1}^N \left[\left(\frac{\partial F}{\partial V_{\mu,x}^b} \right) \frac{\delta V_{\mu,x}^b}{\delta \kappa} + \left(\frac{\partial F}{\partial V_{\mu,y}^b} \right) \frac{\delta V_{\mu,y}^b}{\delta \kappa} \right] \xrightarrow{(2.8.4),(2.8.5)} \\ \Rightarrow \frac{\delta F}{\delta \kappa} &= \sum_{\mu=1}^N \left[\left(\frac{\partial F}{\partial V_{\mu,x}^b} \right) s_{\mu} (1 - s_{\mu}) \cos(90^{\circ} + \theta + \varphi) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial F}{\partial V_{\mu,y}^b} \right) s_{\mu} (1 - s_{\mu}) \sin(90^{\circ} + \theta + \varphi) \right] \end{aligned} \quad (2.8.7)$$

Ομοίως:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta \varphi} &= \sum_{\mu=1}^N \left[\left(\frac{\partial F}{\partial V_{\mu,x}^b} \right) \frac{\delta V_{\mu,x}^b}{\delta \varphi} + \left(\frac{\partial F}{\partial V_{\mu,y}^b} \right) \frac{\delta V_{\mu,y}^b}{\delta \varphi} \right] \xrightarrow{(2.8.4),(2.8.5)} \\ \Rightarrow \frac{\delta F}{\delta \varphi} &= \sum_{\mu=1}^N \left[- \left(\frac{\partial F}{\partial V_{\mu,x}^b} \right) \kappa s_{\mu} (1 - s_{\mu}) \sin(90^{\circ} + \theta + \varphi) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial F}{\partial V_{\mu,y}^b} \right) \kappa s_{\mu} (1 - s_{\mu}) \cos(90^{\circ} + \theta + \varphi) \right] \end{aligned} \quad (2.8.8)$$

Στη συνέχεια παρατίθεται συνοπτικά ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης. Για n κύκλους βελτιστοποίησης, τα βήματα που ακολουθούνται σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης i , είναι:

- Βήμα 1 : Αρχικοποίηση μεταβλητών σχεδιασμού
 - Βήμα 2 : Προσδιορισμός της κατανομής της ταχύτητας του *jet*
 - Βήμα 3 : Επίλυση των εξισώσεων κατάστασης
 - Βήμα 4 : Επίλυση των συζυγών εξισώσεων
 - Βήμα 5 : Υπολογισμός των παραγώγων ευαισθησίας ως προς τις ταχύτητες στο *slot*
 - Βήμα 6 : Υπολογισμός των παραγώγων ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού που μοντελοποιούν την κατανομή της ταχύτητας του *jet*
 - Βήμα 7 : Ανανέωση των μεταβλητών σχεδιασμού με την χρήση της μεθόδου της απότομης καθόδου
 - Βήμα 8 : Έλεγχος αν $i < n$
 - Βήμα 9 : Τέλος αλγορίθμου
- Για $i < n$ →
- Για $i = n$ →

Κεφάλαιο 3^ο

Αποτελέσματα βελτιστοποίησης στην εσωτερική αεροδυναμική

Όπως έχει αναφερθεί ήδη από τα πρώτα κεφάλαια, για την αποτελεσματικότητα της μεθόδου, η οποία αναλύθηκε προηγουμένως, μελετήθηκε το πρόβλημα της ροής εσωτερικά ενός αγωγού, στον οποίο η ροή αλλάζει κατεύθυνση κατά 90 μοίρες. Υπενθυμίζεται ότι, στόχος του προβλήματος εσωτερικής αεροδυναμικής είναι η ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης ανάμεσα στην είσοδο και την έξοδο του αγωγού, με δυνατότητα να τεθεί ως περιορισμός (με την προσθήκη αντίστοιχου όρου στη συνάρτηση κόστους) η παροχή που εισέρχεται ή εξέρχεται από την υποδοχή (*slot*) της δέσμης του ρευστού.

Η συνεχής συζυγής μέθοδος χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας, αφού προηγουμένως προσδιορίστηκε η έκφραση των οριακών συνθηκών για την επίλυση του συζυγούς προβλήματος. Οι οριακές συνθήκες του συζυγούς προβλήματος προέκυψαν με χρήση της εξίσωσης (2.4.9) και καθιστώντας την παράγωγο της επαυξημένης αντικειμενικής συνάρτησης $\frac{\delta F}{\delta V_{i\mu}^b}$ ανεξάρτητη των μεταβολών των ροϊκών μεγεθών στο σύνορο ολοκλήρωσης.

Η εύρεση των παραγώγων ευαισθησίας ως προς τις ταχύτητες (κάθετες ή όχι) στο τοίχωμα του αγωγού παράγουν ένα χάρτη ευαισθησίας (*sensitivity map*), ο οποίος υποδεικνύει τη βέλτιστη θέση τοποθέτησης του *jet* καθώς και το είδος του *jet* (έγχυση – αναρρόφηση). Ο προσδιορισμός της βέλτιστης θέσης του *jet* είναι μεγάλης σημασίας, γιατί παρέχει τη δυνατότητα εύρεσης της βέλτιστης λύσης μέσω προσδιορισμού της κατανομής της ταχύτητας επάνω στο *jet*.

Όσον αφορά τον προσδιορισμό της κατανομής της ταχύτητας του *jet*, η αντιμετώπιση γίνεται με τρόπο που έχει ήδη αναφερθεί σε προηγούμενο κεφάλαιο. Τονίζεται ότι, για το πρόβλημα εσωτερικής αεροδυναμικής που εξετάζεται σε αυτό το κεφάλαιο έχει χρησιμοποιηθεί το μοντέλο μιας μεταβλητής σχεδιασμού για την κατανομή της ταχύτητας του *jet*.

Τέλος, για την εύρεση της βέλτιστης κατανομής της ταχύτητας του *jet*, γίνεται χρήση των παραγώγων ευαισθησίας $\frac{\delta F}{\delta V_{i\mu}^b}$ με σκοπό τον προσδιορισμό των παραγώγων της συνάρτησης κόστους ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού $\frac{\delta F}{\delta b}$. Με τον τρόπο αυτό, γίνεται δυνατή η χρήση ενός βρόχου βελτιστοποίησης, στο οποίο, η τιμή των μεταβλητών σχεδιασμού θα αλλάζει σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης με βάση τις αντίστοιχες παραγώγους.

§ 3.1 : Γεωμετρία του προβλήματος

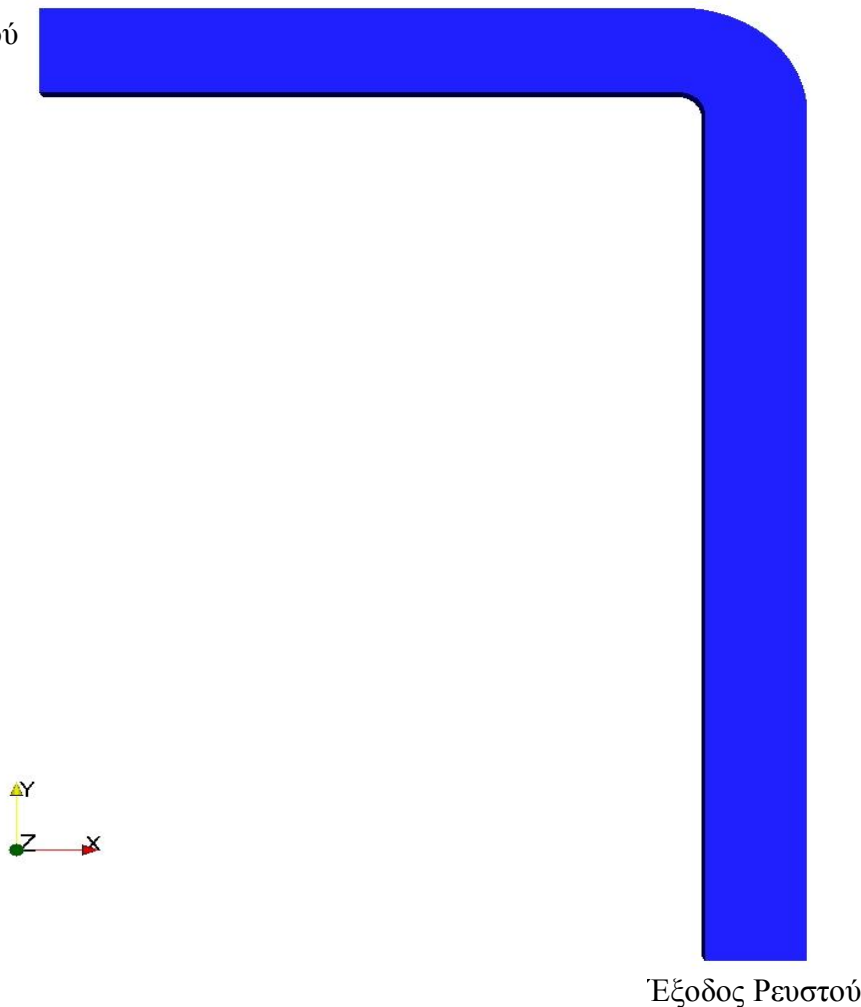
Πριν παρουσιασθούν τα αποτελέσματα της συζυγούς μεθόδου, πρέπει να γίνει αναφορά στη γεωμετρία του αγωγού, του οποίου η ροή επιθυμείται να ελεγχθεί, καθώς και να οριστούν τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος. Η γεωμετρία του αγωγού φαίνεται στο Σχήμα 3.1.1.

Όσον αφορά τα στοιχεία της γεωμετρίας του αγωγού, αναφέρονται τα εξής γεωμετρικά χαρακτηριστικά:

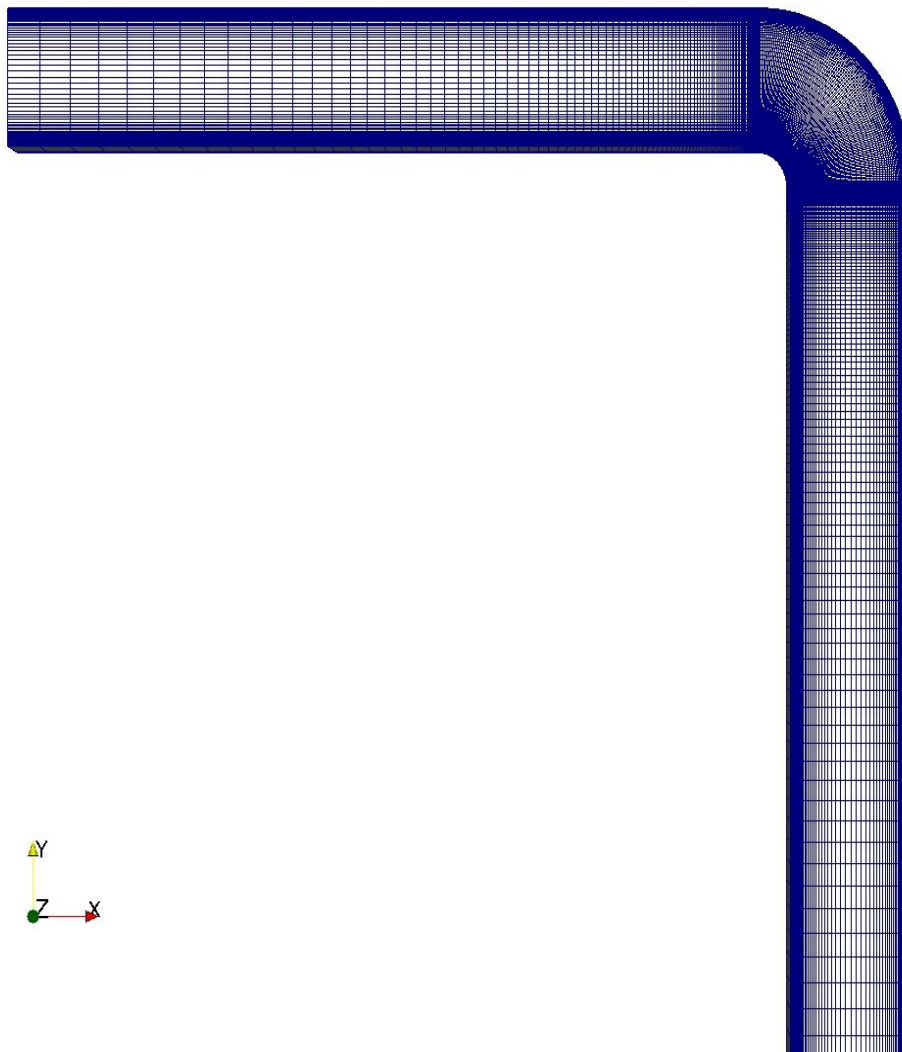
- Διατομή του αγωγού σταθερή και ίση με $d = 0,4 \text{ (m)}$
- Οριζόντιο τμήμα του αγωγού, $L_h = 2,5 \text{ (m)}$
- Κάθετο τμήμα του αγωγού, $L_v = 4,0 \text{ (m)}$
- Γωνία στροφής της ροής, $\omega = 90^\circ$
- Βάθος αγωγού, $B = 0,1 \text{ (m)}$

Στο Σχήμα 3.1.2 παρουσιάζεται το πλέγμα του αγωγού. Για το συγκεκριμένο αγωγό το πλέγμα είναι δομημένο και χρησιμοποιήθηκαν $(n_x \times n_y \times n_z) = (339 \times 201 \times 2)$ κόμβοι, όπου τα n_x, n_y, n_z αποτυπώνουν τον αριθμό των κόμβων διακριτοποίησης κατά το μήκος, πλάτος (διατομή αγωγού) και βάθος του αγωγού, αντίστοιχα. Ο αριθμός των κόμβων n_x, n_y προέκυψε ως ο ελάχιστος αριθμός κόμβων που εξασφαλίζουν ανεξαρτησία της λύσης των εξισώσεων κατάστασης από το πλέγμα που χρησιμοποιείται. Επιπλέον, επειδή το λογισμικό *OpenFOAM*^[10], με το οποίο πραγματοποιήθηκαν όλοι οι υπολογισμοί, αδυνατεί να μελετήσει διδιάστατα προβλήματα, παρά μόνο τριδιάστατα, ο αριθμός n_z επιλέγεται ως ο ελάχιστος αριθμός κόμβων που μετατρέπουν την διδιάστατη γεωμετρία σε τριδιάστατη (στην ουσία προστίθεται εικονικό βάθος στη γεωμετρία) με ταυτόχρονη επιβολή συνθηκών συμμετρίας στην τρίτη διάσταση (βάθος).

Είσοδος Ρευστού



Σχήμα 3. 1. 1 : Γεωμετρία του αγωγού



Σχήμα 3.1.2 : Δομημένο πλέγμα στο εσωτερικό του αγωγού

Επιπλέον, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.1.2, έχει γίνει πύκνωση του πλέγματος κοντά στο τοίχωμα του αγωγού, αλλά κυρίως στο σημείο αλλαγής της κατεύθυνσης της ροής. Όσον αφορά το πυκνό πλέγμα κοντά στο τοίχωμα, η επιλογή αυτή έγινε ώστε να υπολογίζονται με ακρίβεια τα συνεκτικά φαινόμενα. Για την πύκνωση στην γωνία του αγωγού θα γίνει αναφορά παρακάτω, μπορεί όμως να αναφερθεί εν συντομία ότι ο λόγος της πύκνωσης οφείλεται στην επιθυμία να προσδιοριστεί με ακρίβεια ο τρόπος αλλαγής της κατεύθυνσης της ροής.

§ 3.2 : Επίλυση των εξισώσεων κατάστασης του αρχικού προβλήματος

Αφού αναφέρθηκαν τα βασικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά του υπό μελέτη αγωγού, καθώς και τα στοιχεία της διακριτοποίησης, ακολουθεί η διαδικασία επίλυσης των εξισώσεων κατάστασης του αρχικού προβλήματος, δηλαδή του προβλήματος στο οποίο αναζητείται η εύρεση της βέλτιστης θέσης τοποθέτησης του *jet*. Υπενθυμίζεται ότι στόχος της βελτιστοποίησης είναι η ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης μεταξύ εισόδου και εξόδου του αγωγού (με χρήση ή όχι περιορισμού για την παροχή στο *slot*), με την αντίστοιχη μαθηματική έκφραση να παίρνει τη μορφή:

$$F_{in} = \int_{\Gamma_I} \left\{ p + \frac{1}{2} (V_i \eta_i)^2 \right\} d\Gamma_I - \int_{\Gamma_O} \left\{ p + \frac{1}{2} (V_i \eta_i)^2 \right\} d\Gamma_O + \frac{w}{2} \int_{\Gamma_S} \{ V_i \eta_i \}^2 d\Gamma_S \quad (3.2.1)$$

Το επόμενο βήμα για την αριθμητική επίλυση του αρχικού προβλήματος είναι ο προσδιορισμός των οριακών συνθηκών. Τα είδη των οριακών συνθηκών μαζί με τις αντίστοιχες τιμές παρουσιάζονται συνοπτικά στον επόμενο πίνακα. Τονίζεται ότι το σύνορο χωρίζεται σε τέσσερις περιοχές: το σύνορο εισόδου του ρευστού στον αγωγό, το σύνορο εξόδου, το τοίχωμα του αγωγού, καθώς και το σύνορο της θέσης τοποθέτησης του *jet*, που από εδώ και πέρα θα ονομάζεται συνοπτικά *slot*. Υπενθυμίζεται ότι στο αρχικό πρόβλημα το οποίο εξετάζεται στην παρούσα φάση, δεν έχει τοποθετηθεί *jet* στον αγωγό, άρα το *slot* έχει τις ίδιες οριακές συνθήκες με το τοίχωμα του αγωγού.

Επιπλέον, στο συγκεκριμένο πρόβλημα, η ροή είναι ασυμπίεστη και στρωτή ($\tilde{\nu} = \nu_t = 0$), ενώ για τον αριθμό *Reynolds* της ροής, ορισμένος με βάση την ομοιόμορφη ταχύτητα εισόδου του ρευστού στον αγωγό ισχύει:

$$Re = \frac{V_I D}{\nu} = 400$$

Ακολουθεί ο πίνακας με τις αντίστοιχες οριακές συνθήκες.

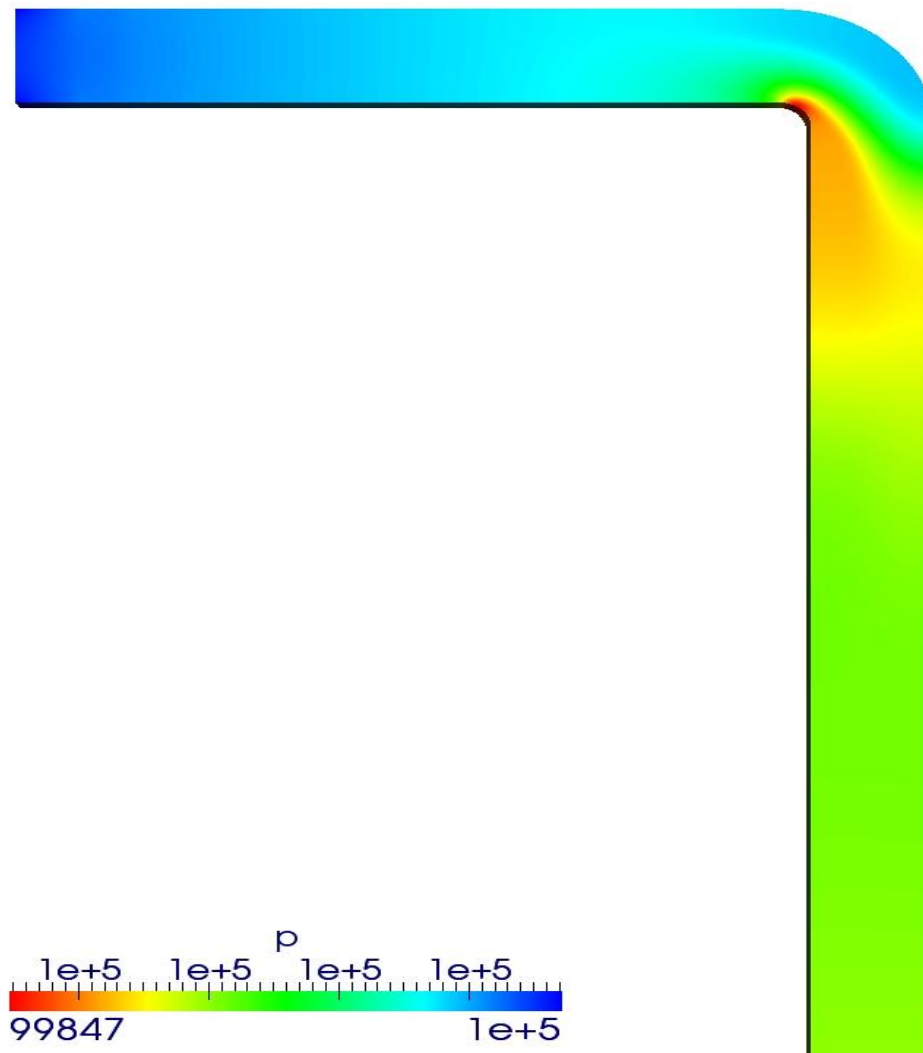
<u>Τμήμα</u> <u>Συνόρου</u>	<u>Συνθήκες</u>	<u>Μέγεθος ροής</u>	<u>Είδος οριακής</u> <u>συνθήκης</u>	<u>Τιμή</u> <u>μεγέθους</u>
<u>Είσοδος</u>	Ταχύτητα	$\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$ σε (m/sec)	<i>Dirichlet</i> $\frac{\partial V_i}{\partial V_{i\mu}^b} = 0$	(15,0,0)
	Στατική πίεση P (N/m^2)		<i>Neumann</i> $\frac{\partial P}{\partial x_k} \eta_k = 0$	–
<u>Έξοδος</u>	Ταχύτητα	$\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$ σε (m/sec)	<i>Neumann</i> $\frac{\partial V_i}{\partial x_k} \eta_k = 0$	–
	Στατική πίεση P (N/m^2)		<i>Dirichlet</i> $\frac{\partial P}{\partial V_{i\mu}^b} = 0$	$1 \cdot 10^5$
<u>Τοίχωμα</u>	Ταχύτητα	$\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$ σε (m/sec)	<i>Dirichlet</i> $\frac{\partial V_i}{\partial V_{i\mu}^b} = 0$	(0,0,0)
	Στατική πίεση P (N/m^2)		<i>Neumann</i> $\frac{\partial P}{\partial x_k} \eta_k = 0$	–
<u>Slot</u>	Ταχύτητα	$\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$ σε (m/sec)	<i>Dirichlet</i> $\frac{\partial V_i}{\partial V_{i\mu}^b} = 1$	Ανάλογα με τις μεταβλητές σχεδιασμού
	Στατική πίεση P (N/m^2)		<i>Neumann</i> $\frac{\partial P}{\partial x_k} \eta_k = 0$	–

Με βάση τις παραπάνω συνοριακές συνθήκες, επιλύονται οι εξισώσεις κατάστασης για μηδενική ταχύτητα στο τοίχωμα και έτσι προκύπτει το πεδίο της ροής. Στο Σχήμα 3.2.1 δίνεται το πεδίο ταχύτητας της ροής, ενώ στο Σχήμα 3.2.2 το αντίστοιχο της κινηματικής στατικής πίεσης. Διαπιστώνεται ότι η ροή ακολουθεί μια παραβολική κατανομή κατά μήκος του αγωγού, με μέγιστη τιμή στο μέσο του αγωγού, όπως ακριβώς αναμένεται με βάση και τα όσα είναι γνωστά από την Μηχανική των Ρευστών^[11] για τους αγωγούς κυκλικών κυρίως διατομών.



Σχήμα 3.2.1 : Πεδίο ταχύτητας του αγωγού

Παρατηρώντας το Σχήμα 3.2.2 γίνεται εμφανές ότι η στατική πίεση μειώνεται κατά μήκος του αγωγού, γεγονός που ως γνωστόν οφείλεται στις τριβές του ρευστού στα τοιχώματα του αγωγού. Ωστόσο, ενδιαφέρον παρουσιάζει η απότομη πτώση της στατικής πίεσης στην γωνία του αγωγού, δηλαδή στο σημείο όπου η ροή αλλάζει κατεύθυνση. Με βάση το Σχήμα 3.2.1 και, παρατηρώντας προσεκτικά το πεδίο ταχύτητας στη γωνία του αγωγού, εντοπίζεται μια περιοχή χαμηλών ταχυτήτων. Σε αυτή τη περιοχή η ροή να αποκολλάται, οδηγώντας σε αυξημένες απώλειες ολικής πίεσης της ροής. Για να εντοπιστεί η αποκόλληση της ροής παρουσιάζεται το πεδίο ταχύτητας της ροής μαζί με τις αντίστοιχες γραμμές ροής.

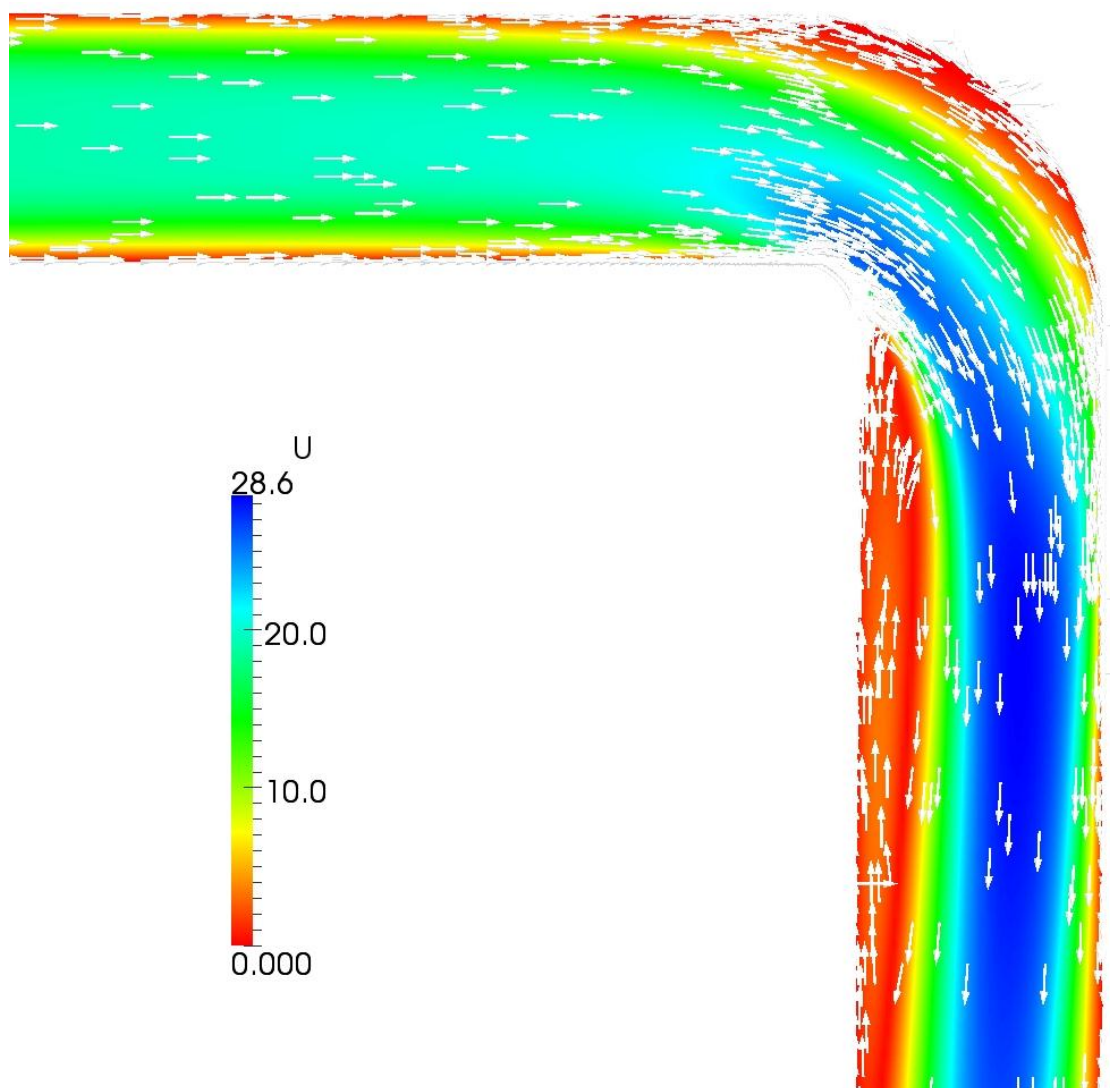


Σχήμα 3.2.2 : Πεδίο της κινηματικής στατικής πίεσης της ροής

Στο επόμενο σχήμα (Σχήμα 3.2.3) απεικονίζονται οι γραμμές ροής της ταχύτητας. Με βάση αυτό το σχήμα παρατηρείται αποκόλληση της ροής μετά τη γωνία του αγωγού. Λόγω αυτής της ισχυρής αποκόλλησης, αναμένονται υψηλές απώλειες ολικής πίεσης μεταξύ εισόδου και εξόδου του ρευστού.

Η τιμή της συνάρτησης κόστους για το αρχικό πρόβλημα είναι:

$$F_{in,initial} = 224,99 \left(N \cdot m / kg \right)$$

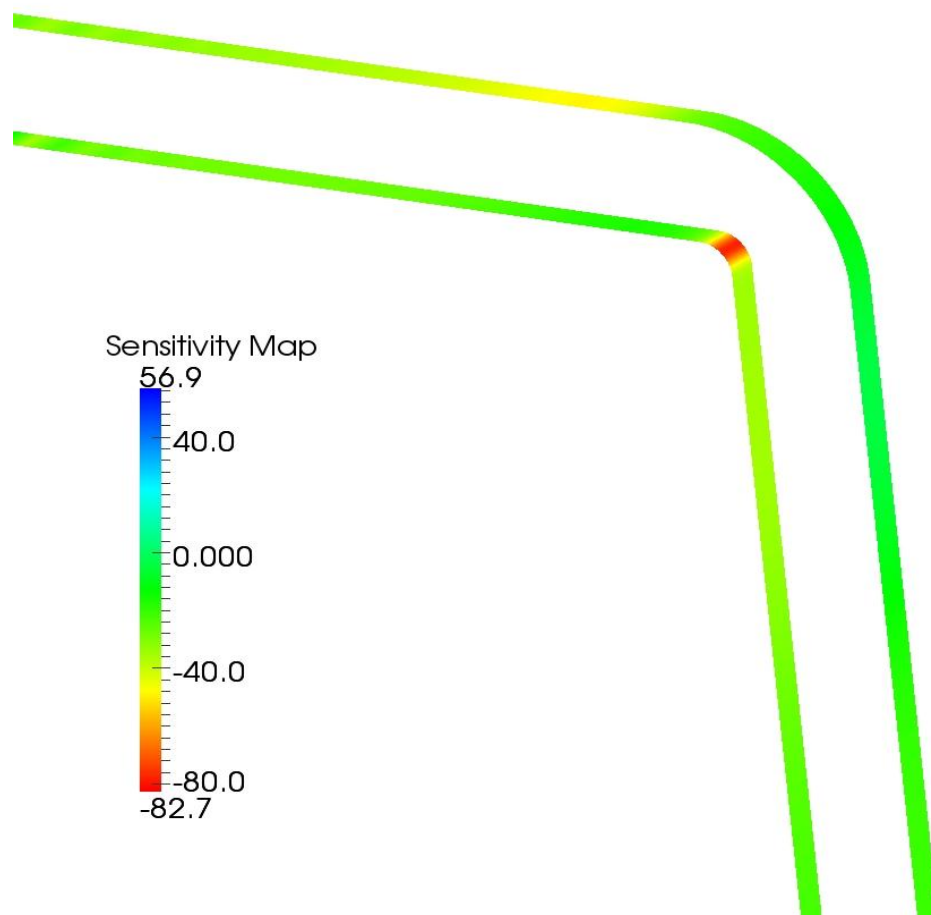


Σχήμα 3.2.3 : Αποκόλληση της ροής

Αφού επιλυθεί το ευθύ πρόβλημα για μηδενική ταχύτητα του τοιχώματος, στη συνέχεια επιλύεται το συζυγές πρόβλημα. Έπειτα υπολογίζονται οι παράγωγοι ως προς τις ταχύτητες στο τοίχωμα με σκοπό την παραγωγή του χάρτη ευαισθησίας και τον προσδιορισμό της βέλτιστης θέσης τοποθέτησης του *jet*.

Στο Σχήμα 3.2.4 παρουσιάζεται ο χάρτης ευαισθησίας για το αρχικό πρόβλημα.

Η βέλτιστη θέση τοποθέτησης του *jet* βρίσκεται στην περιοχή του τοιχώματος του μελετούμενου σώματος με το υψηλότερο μέτρο των παραγώγων ευαισθησίας. Με βάση το Σχήμα 3.2.4, η θέση αυτή βρίσκεται στη γωνία του αγωγού, ενώ το αρνητικό πρόσημο των παραγώγων ευαισθησίας υποδηλώνει ότι πρέπει να χρησιμοποιηθεί *jet* αναρρόφησης ρευστού.



Σχήμα 3. 2. 4 : Παράγωγοι ευαισθησίας του αρχικού προβλήματος

§ 3.3 : Έλεγχος ορθότητας των παραγώγων

Αφού επιλυθεί το ευθύ και το συνεχές πρόβλημα για μηδενική ταχύτητα στο τοίχωμα, υπολογιστούν οι παράγωγοι ευαισθησίας και επιλεγεί το σημείο τοποθέτησης του *jet* με βάση το χάρτη ευαισθησίας, πρέπει να γίνει ο προσδιορισμός της βέλτιστης κατανομής της ταχύτητας του *jet*. Για το λόγο αυτό, υλοποιείται βρόχος βελτιστοποίησης όπου, σε κάθε κύκλο επιλύεται το ευθύ και το συζυγές πρόβλημα για μια συγκεκριμένη κατανομή ταχύτητας στο *jet* (συγκεκριμένη μεταβλητή σχεδιασμού) και υπολογίζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας και η παράγωγος ως προς την μοναδική παράμετρο που μοντελοποιεί την ταχύτητα στο *jet*. Με τη χρήση της μεθόδου της απότομης καθόδου, ανανεώνεται η τιμή της παραμέτρου του μοντέλου του *jet* και χρησιμοποιείται στον επόμενο κύκλο βελτιστοποίησης.

Συνεπώς, είναι ιδιαίτερα σημαντικό να εξασφαλιστεί ότι η παράγωγος που υπολογίζεται με χρήση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου είναι ακριβής, γεγονός που οδηγεί τον αλγόριθμο εύρεσης της βέλτιστης λύσης προς τη σωστή κατεύθυνση.

Για το λόγο αυτό, υπολογίζεται η παράγωγος $\frac{\delta F}{\delta \kappa}$ για διάφορες τιμές της μεταβλητής σχεδιασμού κ , υπολογίζεται η παράγωγος με τη χρήση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου και η ίδια παράγωγος με την χρήση πεπερασμένων διαφορών. Για την εύρεση της τελευταίας, χρησιμοποιείται η σχέση:

$$\frac{\delta F}{\delta \kappa} = \frac{F_{+\varepsilon} - F_{-\varepsilon}}{2\varepsilon} \quad (3.3.1)$$

Δηλαδή, για τον υπολογισμό της παραγώγου $\frac{\delta F}{\delta \kappa}$ για ένα συγκεκριμένο κ , πρέπει να επιλυθεί το ευθύ πρόβλημα μια φορά για την τιμή $\kappa + \varepsilon$ και άλλη μια φορά για την τιμή της μεταβλητής σχεδιασμού $\kappa - \varepsilon$, όπου το ε είναι μια πολύ μικρή ποσότητα (πχ. $\varepsilon = 0,0001$), και να υπολογισθεί η αντίστοιχη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης F .

Η τιμή της παραγώγου που προκύπτει με πεπερασμένες διαφορές είναι ακριβής, και για το λόγο αυτό θα συγκριθεί με την αντίστοιχη παράγωγο που υπολογίζεται με βάση τη συζυγή μέθοδο.

Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα.

Μεταβλητή σχεδιασμού κ	Συνεχής συζυγής μέθοδος $\frac{\delta F}{\delta \kappa}$	Μέθοδος πεπερασμένων διαφορών $\frac{\delta F}{\delta \kappa}$	Σχετική διαφορά παραγώγων
-100	-0,21728	-0,21909	0,83%
-50	-0,21839	-0,21956	0,54%
0	-0,31115	-0,31289	0,56%
5	-0,32356	-0,32545	0,58%
10	-0,33010	-0,33212	0,61%
15	-0,32834	-0,33044	0,64%
50	-0,18979	-0,19085	0,56%
100	-0,08458	-0,08500	0,49%
150	-0,04890	-0,04928	0,78%
200	-0,031433	-0,03183	1,27%

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα γίνεται φανερό ότι η συνεχής συζυγής μέθοδος υπολογίζει με ακρίβεια τις παραγώγους, αφού στην πλειονότητα των περιπτώσεων η σχετική διαφορά σε σχέση με πεπερασμένες διαφορές είναι μικρότερη του 1%. Αυτό σημαίνει ότι κατά τους διάφορους κύκλους βελτιστοποίησης, η λύση θα μεταβάλλεται προς τη σωστή κατεύθυνση.

§ 3.4 : Βέλτιστος έλεγχος της ροής με χρήση μιας μεταβλητής σχεδιασμού και χωρίς περιορισμό στην παροχή του *jet*

Αφού προσδιορίστηκε η βέλτιστη θέση του *jet* και εξασφαλίστηκε ότι οι παράγωγοι που υπολογίζονται με τη συνεχή συζυγή μέθοδο είναι ακριβείς, υλοποιείται ο βρόχος βελτιστοποίησης με σκοπό την εύρεση της βέλτιστης κατανομής της ταχύτητας στο *jet*.

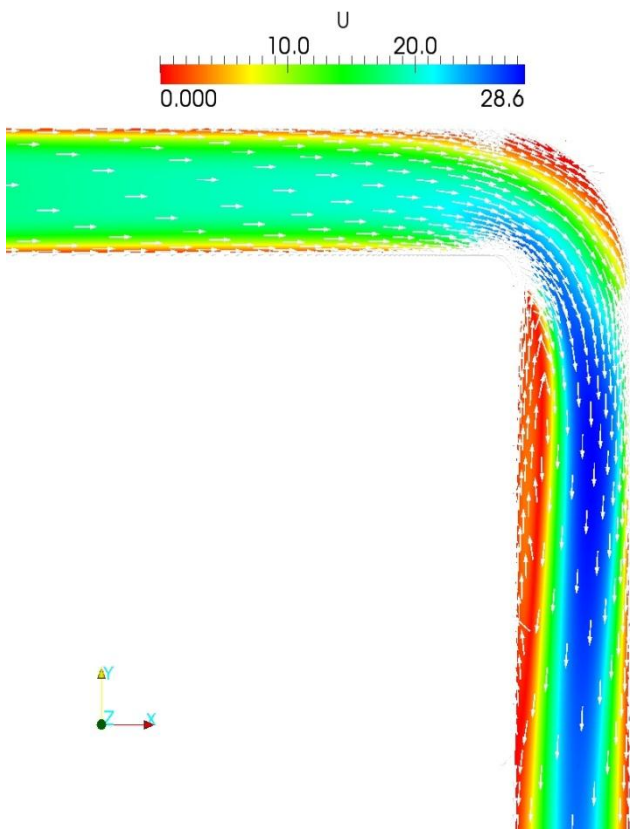
Η υποδοχή του *jet* τοποθετείται σε ένα μικρό τμήμα της περιοχής υψηλών (κατά μέτρο) παραγών ευαισθησίας και στη συγκεκριμένη περίπτωση μεταξύ $38^\circ - 52^\circ$ της γωνιακής απόστασης του αγωγού. Μετά την ολοκλήρωση της βελτιστοποίησης προκύπτει ο βέλτιστος έλεγχος της ροής. Υπενθυμίζεται ότι, για τη συγκεκριμένη περίπτωση δεν έχει χρησιμοποιηθεί περιορισμός για την παροχή όγκου που εισέρχεται ή εξέρχεται από το *slot*, δηλαδή $w = 0$.

Το πεδίο ταχύτητας της βέλτιστης λύσης παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.4.2, ενώ στο Σχήμα 3.4.1 παρουσιάζεται το πεδίο ταχύτητας της αρχικής περίπτωση για σύγκριση. Στο Σχήμα 3.4.2 γίνεται εμφανής η μείωση του εύρους της αποκόλλησης της ροής σε σχέση με την αρχική περίπτωση, γεγονός που εξασφαλίζει μειωμένες απώλειες ολικής πίεσης μεταξύ εισόδου και εξόδου του αγωγού. Κάτι τέτοιο προσδιορίζεται και από την τιμή της συνάρτησης κόστους F , που για το βέλτιστο έλεγχο της ροής έχει τιμή:

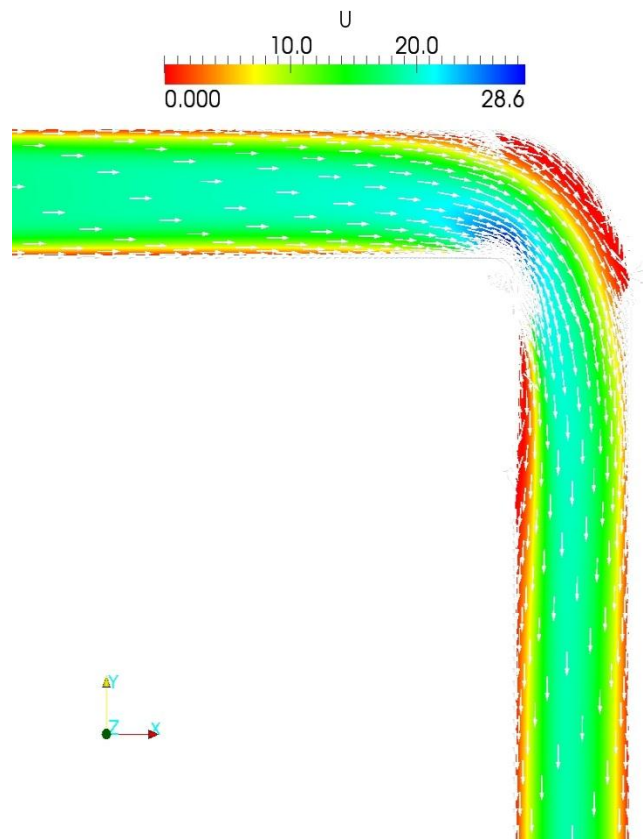
$$F_{in,optimal} = 146,76 \left(N \cdot m / kg \right)$$

Στο Σχήμα 3.4.3 παρουσιάζεται ο χάρτης ευαισθησίας του αρχικού προβλήματος και στο Σχήμα 3.4.4 για τη βέλτιστη λύση. Είναι εμφανές ότι στο σημείο τοποθέτησης του *jet*, οι παράγωγοι ευαισθησίας είναι μηδέν, γεγονός που δείχνει ότι, για τη δεδομένη θέση του *slot*, έχει επιτευχθεί η βέλτιστη λύση. Αυτή επιτυγχάνεται για την τιμή της μεταβλητής σχεδιασμού:

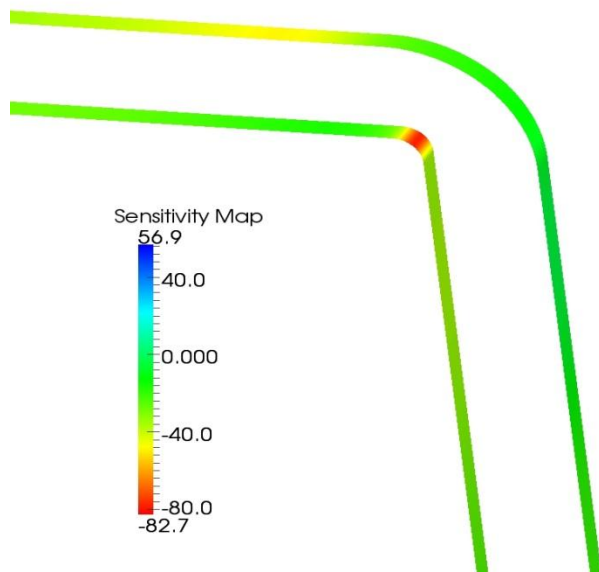
$$\kappa = 245,02$$



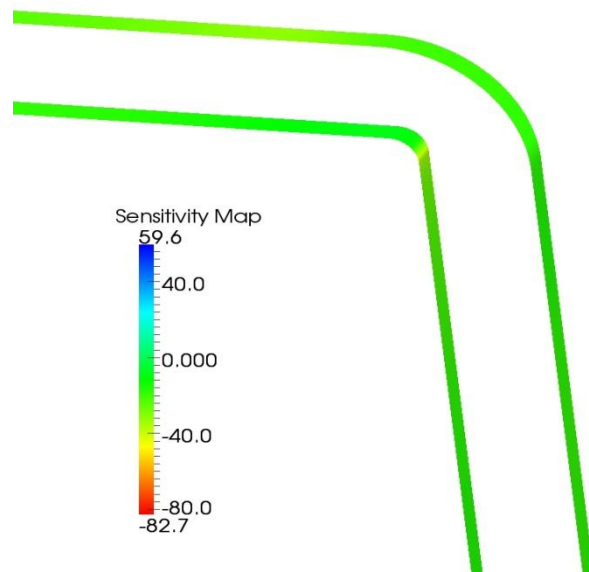
Σχήμα 3.4.1 : Πεδίο ταχύτητας αρχικού προβλήματος



Σχήμα 3.4.2 : Πεδίο ταχύτητας για το βέλτιστο έλεγχο της ροής ($w = 0$)

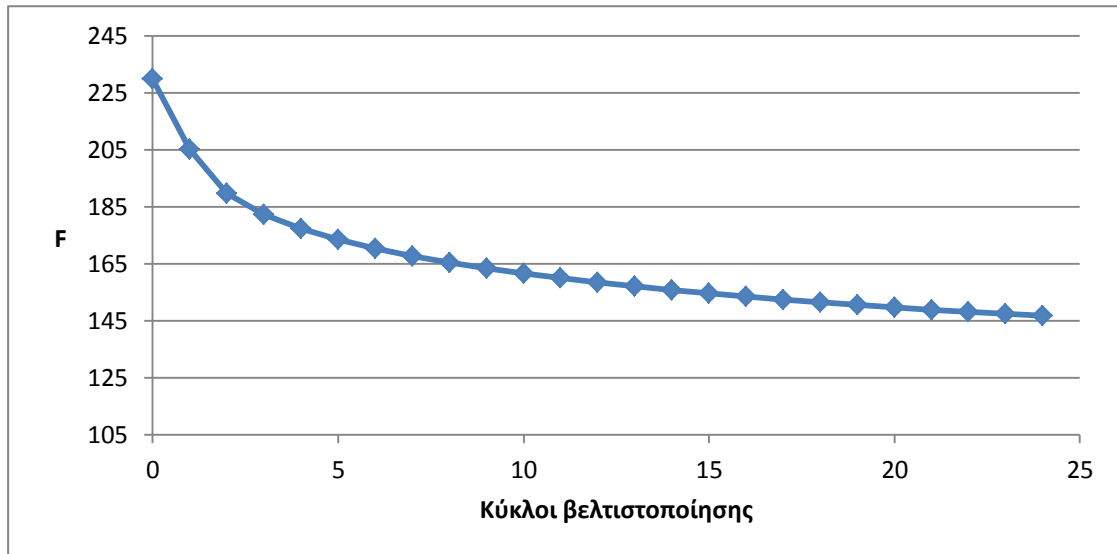


Σχήμα 3.4.3 : Παράγωγοι ευαισθησίας αρχικού προβλήματος

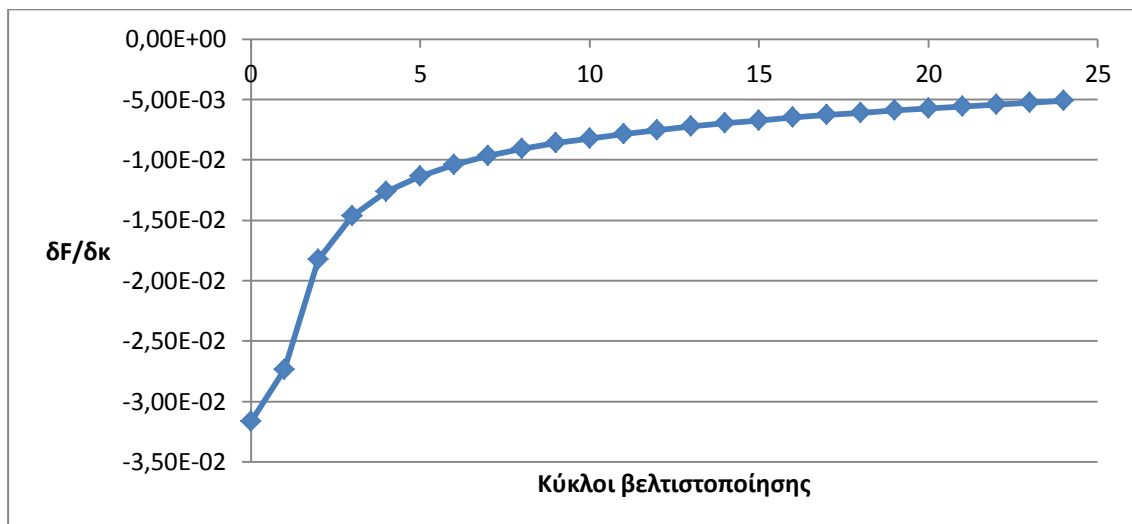


Σχήμα 3.4.4 : Παράγωγοι ευαισθησίας για το βέλτιστο έλεγχο της ροής ($w = 0$)

Τα Σχήματα 3.4.5 και 3.4.6 παρουσιάζουν την πορεία της αντικειμενικής συνάρτησης F και της παραγώγου $\frac{\delta F}{\delta \kappa}$ κατά τη βελτιστοποίηση. Με βάση αυτά τα σχήματα διαπιστώνεται ότι επιτυγχάνεται σύγκλιση του αλγορίθμου. Η σύγκλιση είναι αργή, δηλαδή επιτυγχάνεται μετά από αρκετούς κύκλους βελτιστοποίησης, αυτό όμως εξαρτάται από την τιμή η που έχει επιλεγεί στη μέθοδο της απότομης καθόδου.



Σχήμα 3.4.5 : Αντικειμενική συνάρτηση F συναρτήσει των κύκλων βελτιστοποίησης

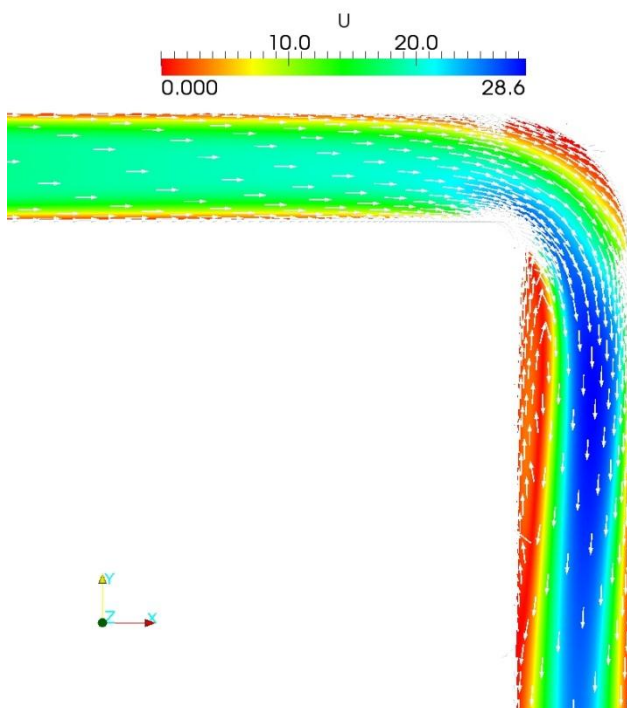


Σχήμα 3.4.6 : Παράγωγος $\frac{\delta F}{\delta \kappa}$ συναρτήσει των κύκλων βελτιστοποίησης

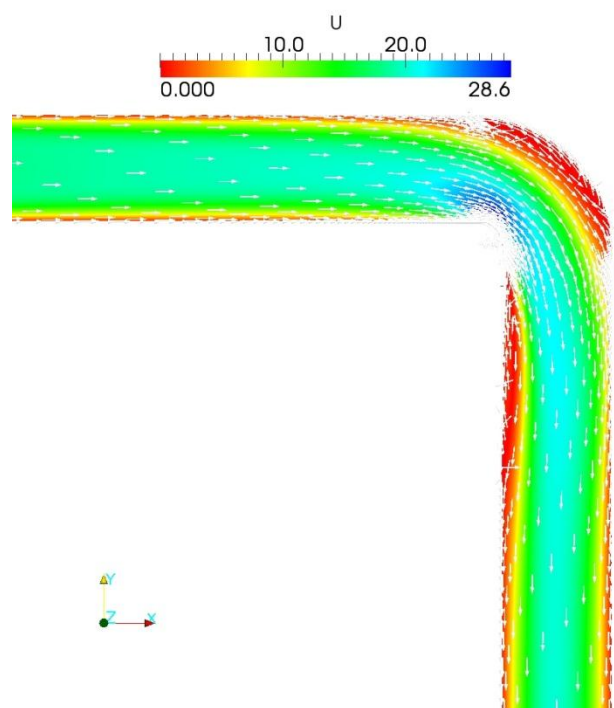
Τέλος, όσον αφορά την παροχή όγκου που εξέρχεται από το *slot*, αυτή είναι το 16,67% της παροχής όγκου εισόδου στον αγωγό. Αυτή η τιμή είναι αρκετά σημαντική, καθώς αποτελεί απώλεια παροχής από την έξοδο του αγωγού. Έτσι αποφασίστηκε η εισαγωγή περιορισμού για την παροχή του *slot* και μελετάται στην επόμενη παράγραφο.

§ 3.5 : Βέλτιστος έλεγχος της ροής με χρήση μιας μεταβλητής σχεδιασμού, με τη χρήση περιορισμού στην παροχή του *jet*

Μελετάται η ίδια περίπτωση σε σχέση με τη παράγραφο § 3.5, με τη διαφορά όμως ότι εισάγεται περιορισμός στην αντικειμενική συνάρτηση με σκοπό τη μείωση της παροχής που εξέρχεται από το *slot*. Για τιμή του όρου βαρύτητας $w = 100$, στα Σχήματα 3.5.1 και 3.5.2 παρουσιάζεται το πεδίο ταχύτητας για την αρχική περίπτωση και για το βέλτιστο έλεγχο της ροής.

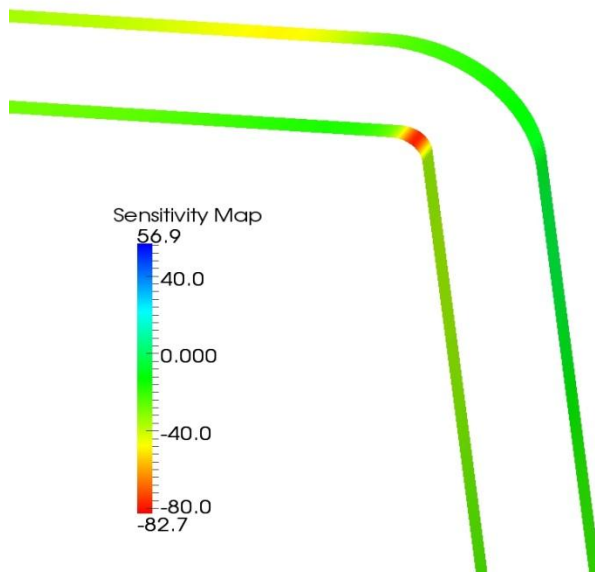


Σχήμα 3.5.1 : Πεδίο ταχύτητας αρχικού προβλήματος

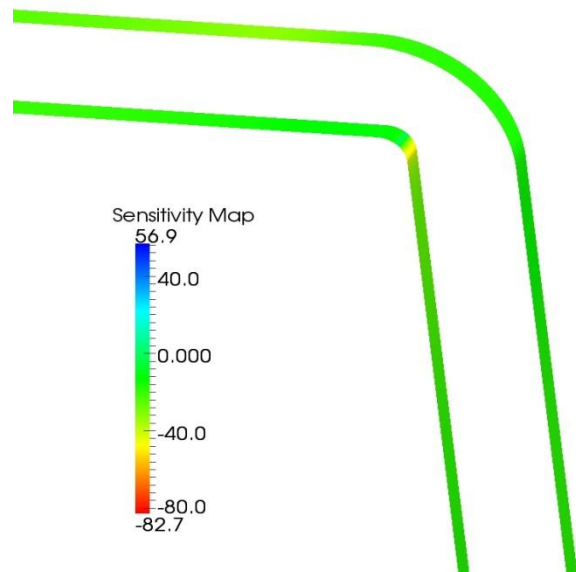


Σχήμα 3.5.2 : Πεδίο ταχύτητας για το βέλτιστο έλεγχο της ροής ($w = 100$)

Παρατηρώντας τα δύο προηγούμενα σχήματα εξάγεται το συμπέρασμα ότι για το βέλτιστο έλεγχο της ροής με περιορισμό της παροχής που εξέρχεται από το *slot*, η αποκόλληση της ροής μειώνεται σημαντικά σε σχέση με την αρχική περίπτωση, το εύρος της όμως είναι ελαφρά αυξημένο σε σχέση με την περίπτωση χωρίς περιορισμό στην παροχή ($w = 0$).



Σχήμα 3.5.3 : Παράγωγοι ευαισθησίας αρχικού προβλήματος



Σχήμα 3.5.4 : Παράγωγοι ευαισθησίας για το βέλτιστο έλεγχο της ροής ($w = 100$)

Η τιμή της συνάρτησης κόστους είναι:

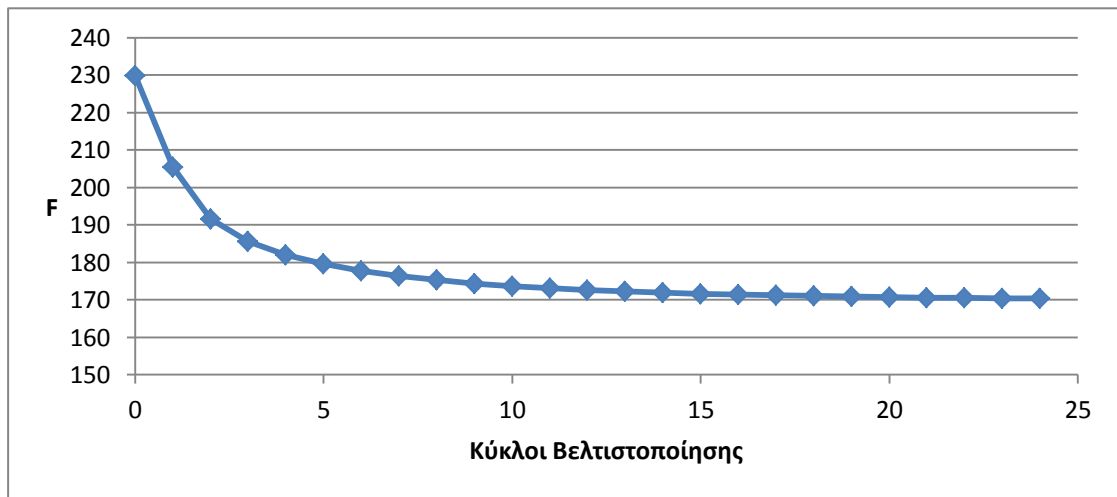
$$F_{in,optimal} = 170,38 \left(N \cdot m / kg \right)$$

Στα Σχήματα 3.5.3 και 3.5.4 παρουσιάζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας για την αρχική περίπτωση και τη βέλτιστη λύση. Οι παράγωγοι ευαισθησίας είναι μηδέν στο σημείο τοποθέτησης του *jet*, ωστόσο υπάρχει μια περιοχή μετά το σημείο τοποθέτησης του *jet* όπου οι παράγωγοι ευαισθησίας είναι τοπικά αυξημένες (κατά μέτρο). Αυτό οφείλεται στο γεγονός εισαγωγής περιορισμού για την παροχή που εξέρχεται από το *slot* και υποδεικνύει ότι η αποκόλληση της ροής μπορεί να μειωθεί με αναρρόφηση επιπλέον ρευστού, όπως έγινε και στην περίπτωση με $w = 0$, όπου αυτή η περιοχή αυξημένων τοπικά παραγώγων ευαισθησίας δεν υπήρχε.

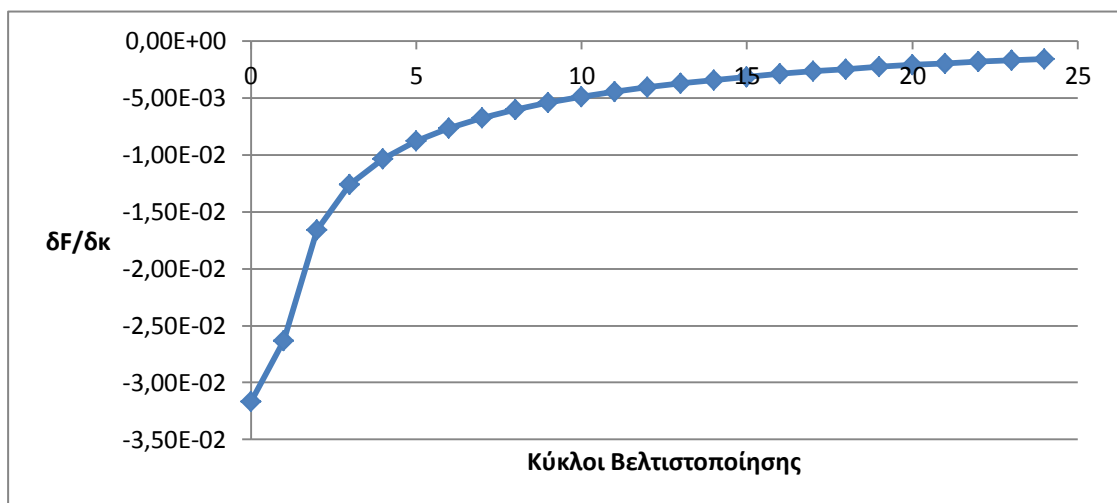
Στα Σχήματα 3.5.5 και 3.5.6 παρουσιάζεται η τιμή της συνάρτησης κόστους F και της παραγώγου $\frac{\delta F}{\delta \kappa}$ στους κύκλους βελτιστοποίησης. Ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης συγκλίνει, ενώ ο βέλτιστος έλεγχος της ροής η βέλτιστη λύση επιτυγχάνεται για μεταβλητή σχεδιασμού:

$$\kappa = 173,87$$

Τέλος, η ογκομετρική παροχή που εξέρχεται πλέον από το slot έχει μειωθεί και είναι το 11,83% της παροχής εισόδου στον αγωγό. Συνεπώς, με κατάλληλη επιλογή της παραμέτρου w μπορεί να ρυθμιστεί η παροχή στο *slot*.



Σχήμα 3.5.5 : Αντικειμενική συνάρτηση F συναρτήσει των κύκλων βελτιστοποίησης



Σχήμα 3.5.6 : Παράγωγος $\frac{\delta F}{\delta \kappa}$ συναρτήσει των κύκλων βελτιστοποίησης

§ 3.6 : Διερεύνηση του εύρους του *slot*

Μέχρι στιγμής, ο βέλτιστος έλεγχος της ροής για τις δύο περιπτώσεις που παρουσιάστηκαν πραγματοποιήθηκε με σταθερή θέση του *slot* (με γωνιακή θέση $38^\circ - 52^\circ$ της γωνίας του αγωγού), η οποία δεν αλλάζει κατά τους διάφορους κύκλους βελτιστοποίησης. Συνεπώς, μπορεί η θέση τοποθέτησης του *jet* να υποδεικνύεται από το χάρτη ευαισθησίας, ωστόσο η επιλογή του εύρους του *jet* είναι (στη χρησιμοποιηθείσα εκδοχή της μεθόδου) επιλογή του μηχανικού-χρήστη.

Γεννιέται, λοιπόν, εύλογα το ερώτημα πώς αλλάζει η βέλτιστη λύση με την αλλαγή του εύρους του *slot*. Στον επόμενο πίνακα παρουσιάζεται παραμετρική μελέτη που σχετίζει τη γωνιακή θέση του *jet* με τις απώλειες ολικής πίεσης ανάμεσα στην είσοδο και την έξοδο του αγωγού, με την μεταβλητή σχεδιασμού κ και με την παροχή που εξέρχεται από το *slot*. Ο πίνακας περιλαμβάνει την παραμετρική μελέτη για την περίπτωση ή μη χρήσης περιορισμού στην ογκομετρική παροχή που εξέρχεται από το *slot*.

Εύρος <i>slot</i> (σε μοίρες της γωνίας του αγωγού)	Απώλειες ολικής πίεσης μεταξύ εισόδου-εξόδου	Μεταβλητή σχεδιασμού κ	$\frac{Q_{slot}}{Q_{in}} 100(\%)$
<u>$W = 0$</u>			
$38^\circ - 52^\circ$	146,76	245,02	16,67
$35^\circ - 55^\circ$	136,84	241,21	23,41
$30^\circ - 60^\circ$	131,55	213,61	31,08
$25^\circ - 65^\circ$	130,50	179,98	34,91
<u>$W = 100$</u>			
$38^\circ - 52^\circ$	170,38	173,88	11,83
$35^\circ - 55^\circ$	169,60	134,85	13,09
$30^\circ - 60^\circ$	168,95	90,45	13,16
$25^\circ - 65^\circ$	167,96	67,11	13,02

Από τον παραπάνω πίνακα εξάγονται τα εξής χρήσιμα συμπεράσματα. Καταρχάς, και για τις δύο περιπτώσεις ($w = 0$ και $w = 100$), με την αύξηση του εύρους του *slot*

μειώνονται οι απώλειες ολικής πίεσης μεταξύ της εισόδου και της εξόδου του αγωγού. Αυτό συμβαίνει γιατί αυξάνεται η περιοχή με μεγάλη τιμή των παραγώγων ευαισθησίας στην οποία τοποθετείται το *slot*, συνεπώς η βέλτιστη λύση (στην οποία επιτυγχάνεται μηδενισμός των παραγώγων ευαισθησίας) οδηγεί σε μικρότερες απώλειες ολικής πίεσης μεταξύ εισόδου-εξόδου του αγωγού.

Ένα δεύτερο ενδιαφέρον συμπέρασμα είναι ότι με την αύξηση του εύρους του *slot* μειώνεται η μεταβλητή σχεδιασμού κ . Αυτό συμβαίνει γιατί η αναρρόφηση του ρευστού γίνεται από μεγαλύτερο *slot*, συνεπώς η ταχύτητα εκεί είναι μικρότερη και αυτό έχει αντικτυπο στη μεταβλητή σχεδιασμού κ , η οποία, όπως έχει ήδη αναφερθεί, ρυθμίζει το μέτρο των διανυσμάτων των ταχυτήτων που συνθέτουν το *jet*. Δηλαδή, το ύψος της παραβολικής κατανομής ταχύτητας μειώνεται με την αύξηση του εύρους του *slot*.

Τέλος, το πιο σημαντικό συμπέρασμα είναι ότι με την αύξηση του εύρους του *slot* αυξάνεται και η ογκομετρική παροχή που εξέρχεται από το *slot*. Ειδικά για την περίπτωση χωρίς περιορισμό στην αναρροφούμενη παροχή ($w = 0$), αναρροφάται σημαντικό ποσοστό της παροχής εισόδου στον αγωγού. Ωστόσο, το πρόβλημα επιλύεται με την εισαγωγή περιορισμού ($w = 100$) στην παροχή όγκου που εξέρχεται από το *jet*, ο οποίος οδηγεί στο να παγώνει η αναρροφούμενη παροχή περίπου στο 13% της παροχής όγκου εισόδου στον αγωγό για την πλειονότητα των περιπτώσεων.

Κεφάλαιο 4^ο

Αποτελέσματα βελτιστοποίησης στην εξωτερική αεροδυναμική

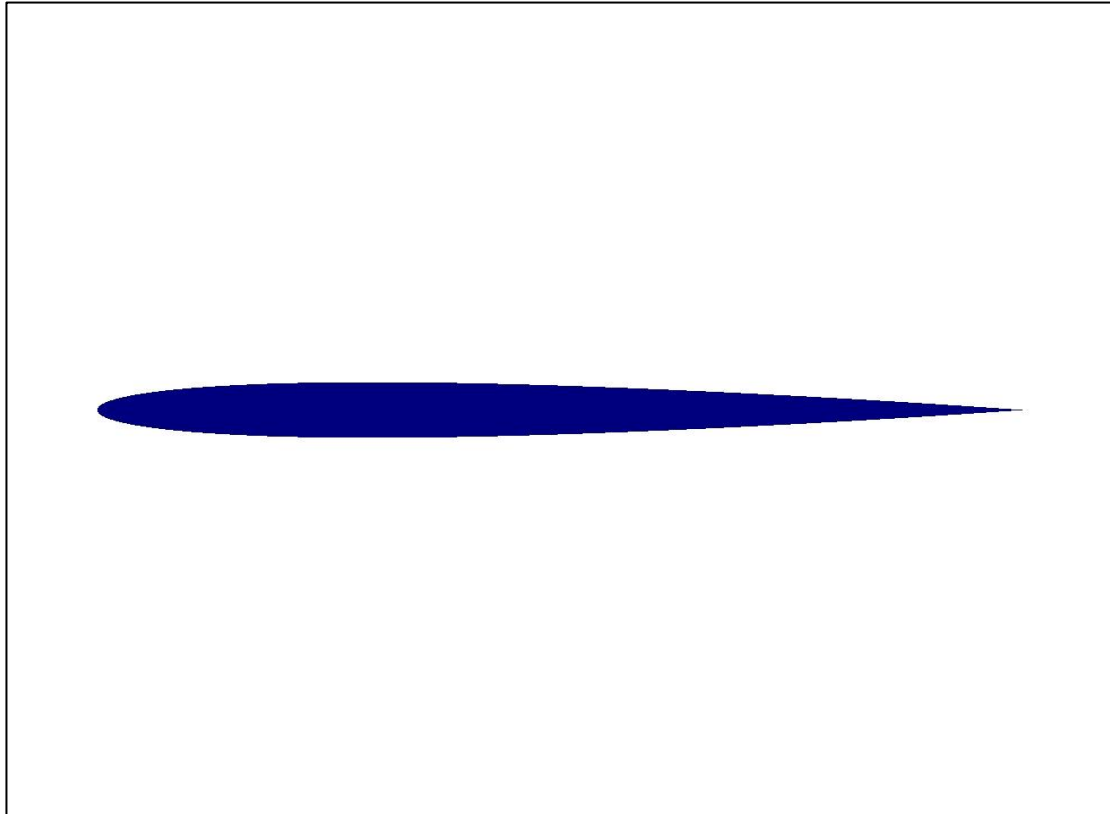
Σε αυτό το κεφάλαιο εφαρμόζεται η συνεχής συζυγής μέθοδος για το βέλτιστο έλεγχο της ροής για την περίπτωση ενός προβλήματος εξωτερικής αεροδυναμικής. Η διαδικασία που ακολουθείται είναι η ίδια με όσα αναφέρθηκαν στο κεφάλαιο για το πρόβλημα εσωτερικής αεροδυναμικής. Δηλαδή, πρώτα επιλύεται το ευθύ και το συζυγές πρόβλημα για μηδενική ταχύτητα στο τοίχωμα του μελετούμενου σώματος, υπολογίζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας και, μέσω του χάρτη ευαισθησίας, προσδιορίζεται η, αμετάβλητη στη συνέχεια, βέλτιστη θέση τοποθέτησης του *jet*. Έπειτα, ξεκινά ο βρόχος βελτιστοποίησης, μέσω του οποίου θα προσδιοριστεί η βέλτιστη κατανομή της ταχύτητας του *jet* ανάλογα με τον στόχο που επιθυμείται να επιτευχθεί.

Στο πρόβλημα εξωτερικής αεροδυναμικής χρησιμοποιήθηκε το μοντέλο του *jet* με δύο μεταβλητές σχεδιασμού.

§ 4.1 : Γεωμετρία του προβλήματος

Για το πρόβλημα εξωτερικής αεροδυναμικής, μελετάται η ροή γύρω από αεροτομή τύπου *NACA 0008*, της οποίας η χορδή είναι $c = 1$. Υπενθυμίζεται ότι, παρόλο που το πρόβλημα είναι διδιάστατο, επειδή το λογισμικό *OpenFoam* επιλύει μόνο

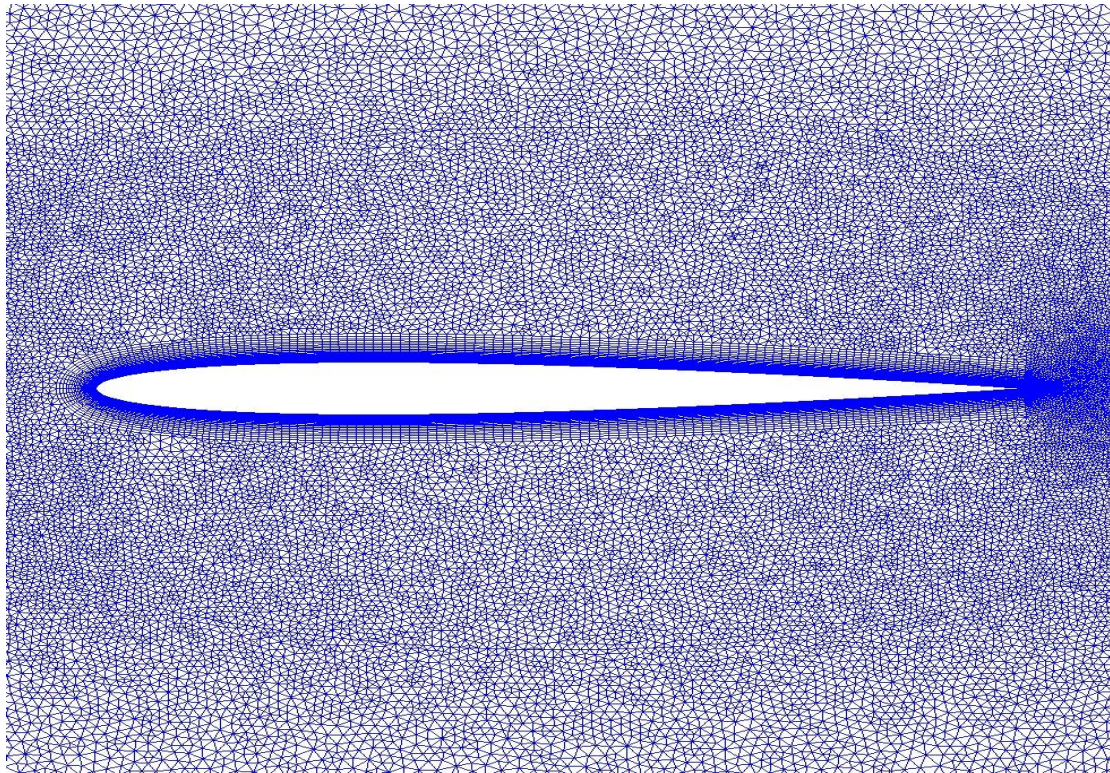
τρισδιάστατα προβλήματα, προσδίδεται βάθος στην αεροτομή και ταυτόχρονα επιβάλλεται κατάλληλη οριακή συνθήκη συμμετρίας. Τέλος, αναφέρεται ότι η απόσταση του συνόρου εισόδου μέχρι το μέτωπο προσβολής της αεροτομής είναι $9c$, όπου c η χορδή της αεροτομής, ενώ ίδια είναι και η απόσταση της ακμής εκφυγής μέχρι το σύνορο εξόδου. Στο σχήμα 4.1.1 παρουσιάζεται η γεωμετρία της αεροτομής *NACA 0008* που χρησιμοποιήθηκε.



Σχήμα 4.1.1 : Γεωμετρία της αεροτομής *NACA 0008*

Στο Σχήμα 4.1.2 παρουσιάζεται το πλέγμα της αεροτομής. Το πλέγμα είναι υβριδικό, δηλαδή οι πρώτες στρώσεις κοντά στο τοίχωμα της αεροτομής αποτελούνται από τετραπλευρικά στοιχεία, ενώ το υπόλοιπο πλέγμα μακριά από το τοίχωμα από τριγωνικά στοιχεία. Το πλέγμα αποτελείται συνολικά από 237.424 κόμβους και από 670.256 στοιχεία, εξάεδρα και πρίσματα συνολικά, στις τρεις διαστάσεις.

Τέλος, πρέπει να αναφερθεί ότι οι κόμβοι που συνθέτουν τη γεωμετρία της αεροτομής *NACA 0008* δίδονται από την επίσημη ιστοσελίδα της *NACA* ^[13], στην οποία ο κάθε ενδιαφερόμενος μπορεί να επιλέξει οποιαδήποτε αεροτομή τύπου



Σχήμα 4.1.2 : Υβριδικό πλέγμα γύρω από την αεροτομή *NACA 0008*

NACA και παραμετροποιήσει τη γεωμετρία της με οποιοδήποτε αριθμό κόμβων επιθυμεί.

§ 4.2 : Επίλυση των εξισώσεων κατάστασης του αρχικού προβλήματος

Αφού αναφέρθηκαν τα βασικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά της αεροτομής, καθώς και τα στοιχεία της διακριτοποίησης, ακολουθεί η επίλυση των εξισώσεων κατάστασης του αρχικού προβλήματος, δηλαδή του προβλήματος στο οποίο αναζητείται η εύρεση της βέλτιστης θέσης τοποθέτησης του *jet*. Στόχος του προβλήματος είναι να διατηρηθεί σταθερή η οπισθέλκουσα και να αυξηθεί η άνωση που ασκείται στην αεροτομή. Υπενθυμίζεται η μαθηματική έκφραση της συνάρτησης κόστους:

$$F_{ex} = D - wL \quad (4.2.1)$$

όπου τα αντίστοιχα μεγέθη δίνονται από τις εξής σχέσεις:

$$D = \int_{\Gamma_w} \left\{ -(v + v_t) \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \eta_j + p \eta_i \right\} r_i d\Gamma_w \quad (4.2.2)$$

$$L = \int_{\Gamma_w} \left\{ -(v + v_t) \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \eta_j + p \eta_i \right\} r'_i d\Gamma_w \quad (4.2.3)$$

Για την περίπτωση που εξετάζεται, ο όρος βαρύτητας w επιλέγεται ίσος με $w = 0,05$. Η συγκεκριμένη τιμή προέκυψε μετά από κατάλληλη διερεύνηση του όρου βαρύτητας ώστε η οπισθέλκουσα να παραμένει σταθερή κατά το βέλτιστο έλεγχο της ροής, ενώ αντίθετα επιθυμείται η κατά το δυνατό μεγαλύτερη αύξηση της άνωσης.

Για την αριθμητική επίλυση του αρχικού προβλήματος πρέπει να προσδιοριστούν οι οριακές συνθήκες. Τα είδη των οριακών συνθηκών μαζί με τις αντίστοιχες τιμές παρουσιάζονται συνοπτικά στον επόμενο πίνακα. Όπως και για την περίπτωση του προβλήματος εσωτερικής αεροδυναμικής που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, το σύνορο χωρίζεται σε τέσσερις περιοχές: τα όρια εισόδου και εξόδου, το τοίχωμα της αεροτομής, καθώς και το όριο της θέσης τοποθέτησης του *jet(slot)*.

Επιπλέον, στο συγκεκριμένο πρόβλημα, η ροή είναι και πάλι ασυμπίεστη και στρωτή ($\tilde{v} = v_t = 0$), ενώ για αριθμό *Reynolds* της ροής, ορισμένο με βάση το μέτρο της επ' άπειρον ταχύτητας εισόδου του ρευστού στον αγωγό ισχύει:

$$Re = \frac{V_\infty c}{\nu} = 6000$$

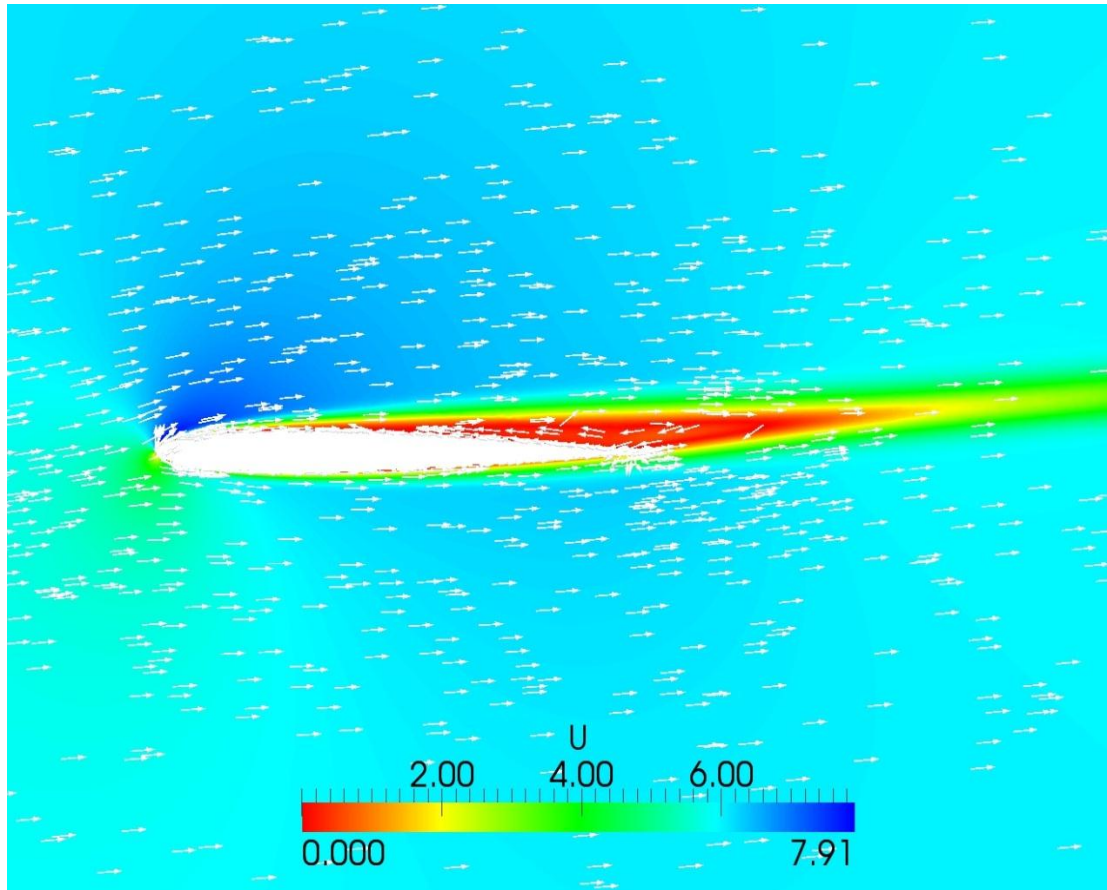
Επίσης, όσον αφορά την κατεύθυνση της επ' άπειρον ταχύτητα της ροής, αυτή επιλέγεται με τέτοιο τρόπο ώστε η αεροτομή για τον παραπάνω αριθμό *Reynolds* να βρίσκεται στην περιοχή απώλειας στήριξης. Υπενθυμίζεται ότι απώλεια στήριξης σε μια πτέρυγα εμφανίζεται όταν η αύξηση της γωνίας της επ' άπειρον ταχύτητας της ροής σε σχέση με την αεροτομή οδηγεί σε μείωση της άνωσης. Με βάση την έρευνα των *Kunz* και *Kroo* ^[14], η αεροτομή *NACA 0008*, για $Re = 6000$, βρίσκεται στην περιοχή απώλειας στήριξης όταν η κατεύθυνση της επ' άπειρον ταχύτητας της ροής είναι:

$$\alpha_\infty = 5^\circ$$

Ακολουθεί ο πίνακας με τις αντίστοιχες οριακές συνθήκες.

<u>Τμήμα</u> <u>Συνορίου</u>	<u>Συνθήκες</u>	<u>Μέγεθος ροής</u>	<u>Είδος οριακής</u> <u>συνθήκης</u>	<u>Τιμή</u> <u>μεγέθους</u>
<u>Είσοδος</u>	Ταχύτητα $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$ σε (m/sec)		<i>Dirichlet</i> $\frac{\partial V_i}{\partial V_{i\mu}^b} = 0$	(6,0,0)
	Στατική πίεση P (N/m ²)		<i>Neumann</i> $\frac{\partial P}{\partial x_k} \eta_k = 0$	–
<u>Εξόδος</u>	Ταχύτητα $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$ σε (m/sec)		<i>Neumann</i> $\frac{\partial V_i}{\partial x_k} \eta_k = 0$	–
	Στατική πίεση P (N/m ²)		<i>Neumann</i> $\frac{\partial P}{\partial x_k} \eta_k = 0$	–
<u>Τοίχωμα</u>	Ταχύτητα $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$ σε (m/sec)		<i>Dirichlet</i> $\frac{\partial V_i}{\partial V_{i\mu}^b} = 0$	(0,0,0)
	Στατική πίεση P (N/m ²)		<i>Neumann</i> $\frac{\partial P}{\partial x_k} \eta_k = 0$	–
<u>Slot</u>	Ταχύτητα $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$ σε (m/sec)		<i>Dirichlet</i> $\frac{\partial V_i}{\partial V_{i\mu}^b} = 1$	Ανάλογα με τις μεταβλητές σχεδιασμού
	Στατική πίεση P (N/m ²)		<i>Neumann</i> $\frac{\partial P}{\partial x_k} \eta_k = 0$	–

Με βάση τις παραπάνω οριακές συνθήκες, επιλύονται οι εξισώσεις κατάστασης για μηδενική ταχύτητα *jet* στο τοίχωμα και έτσι προκύπτει το πεδίο της ροής. Στο Σχήμα 4.2.1 δίνεται το πεδίο ταχύτητας της ροής, ενώ στο Σχήμα 4.2.2 το αντίστοιχο της στατικής πίεσης.



Σχήμα 4.2.1 : Πεδίο ταχύτητας και γραμμές ροής του αρχικού προβλήματος

Παρατηρώντας το Σχήμα 4.2.1 γίνεται εμφανές ότι η ροή αποκολλάται στην πλευρά υποπίεσης της αεροτομής. Κάτι τέτοιο έχει ως αποτέλεσμα να μειώνεται η άνωση της αεροτομής και να βρίσκεται στην περιοχή απώλειας στήριξης.

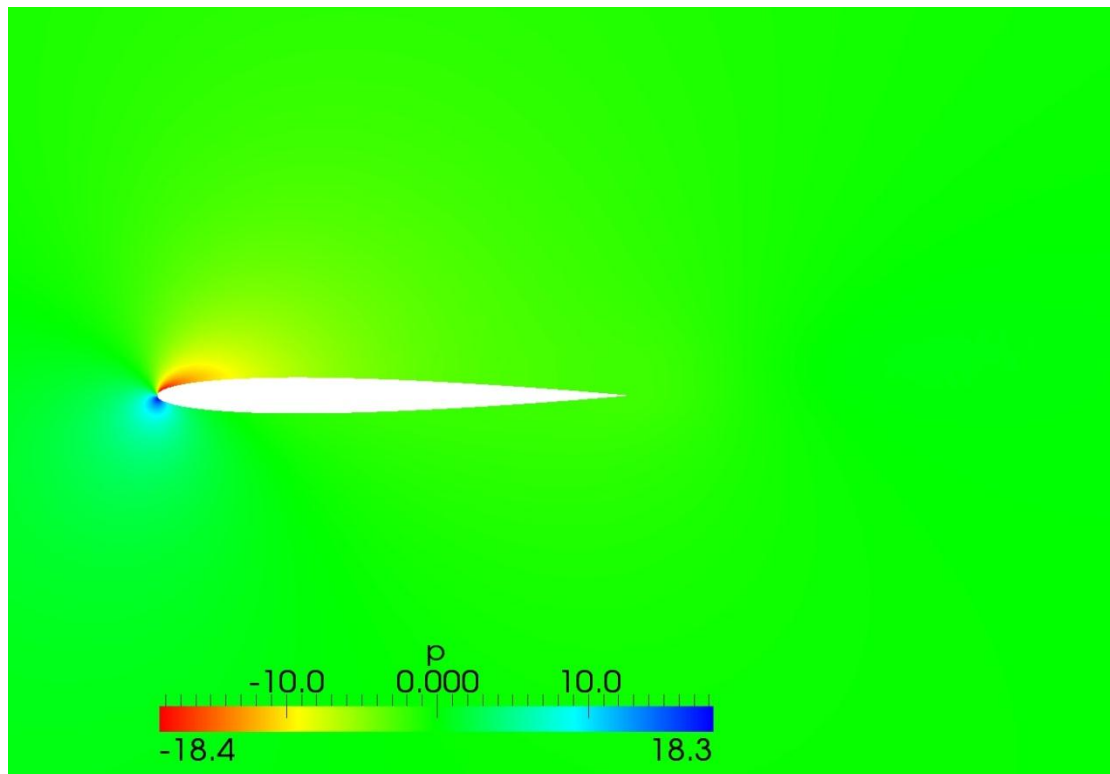
Όσον αφορά τους συντελεστές άνωσης και οπισθέλκουσας για το αρχικό πρόβλημα προκύπτει ότι:

$$C_{D_{initial}} = 0,0499$$

$$C_{L_{initial}} = 0,254$$

Τέλος, η τιμή της συνάρτησης κόστους για το αρχικό πρόβλημα είναι:

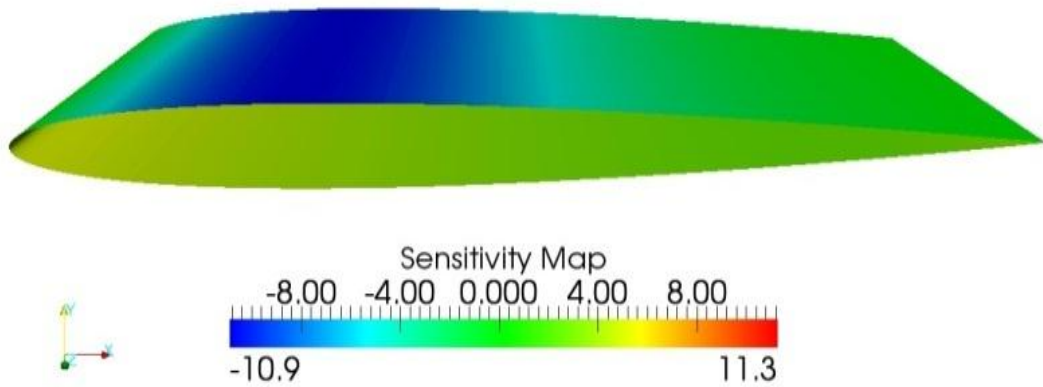
$$F_{ex,initial} = 0,334$$



Σχήμα 4.2.2 : Πεδίο της κινηματικής στατικής πίεσης της ροής

Αφού επιλυθεί το ευθύ πρόβλημα για μηδενική ταχύτητα του τοιχώματος, στη συνέχεια επιλύεται το συνεχές συζυγές πρόβλημα. Έπειτα υπολογίζονται οι παράγωγοι ως προς τις ταχύτητες στο τοίχωμα με σκοπό την παραγωγή του χάρτη ευαισθησίας και τον προσδιορισμό της βέλτιστης θέσης τοποθέτησης του *jet*.

Στο Σχήμα 4.2.1 παρουσιάζεται ο χάρτης ευαισθησίας για το αρχικό πρόβλημα. Η βέλτιστη θέση τοποθέτησης του *jet* βρίσκεται στην περιοχή του τοιχώματος του μελετούμενου σώματος με το υψηλότερο μέτρο των παραγώγων ευαισθησίας. Με βάση το Σχήμα 4.2.1, η θέση αυτή βρίσκεται στην πλευρά υποπίεσης της αεροτομής, ενώ το αρνητικό πρόσημο των παραγώγων ευαισθησίας υποδηλώνει ότι πρέπει να χρησιμοποιηθεί *jet* αναρρόφησης ρευστού. Το *jet* αναρρόφησης θα απορροφήσει τα στοιχεία του ρευστού χαμηλής κινητικής ενέργειας που ανακυκλοφορούν, επιτρέποντας στο οριακό στρώματα να συνεχίσει την ανάπτυξή του.

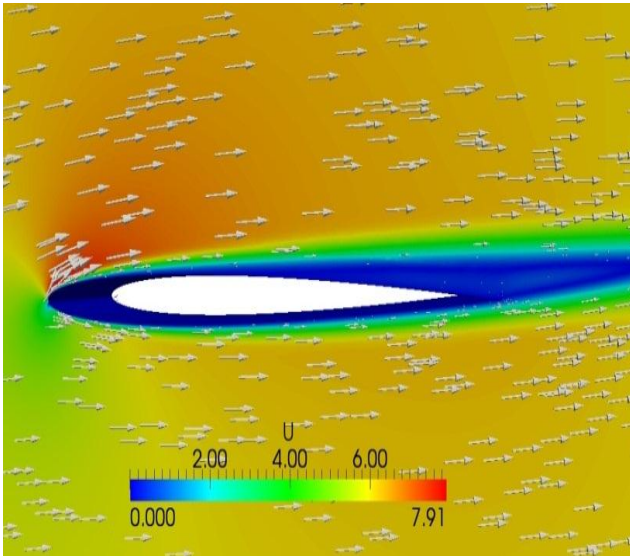


Σχήμα 4.2.4 : Παράγωγοι ευαισθησίας του αρχικού προβλήματος

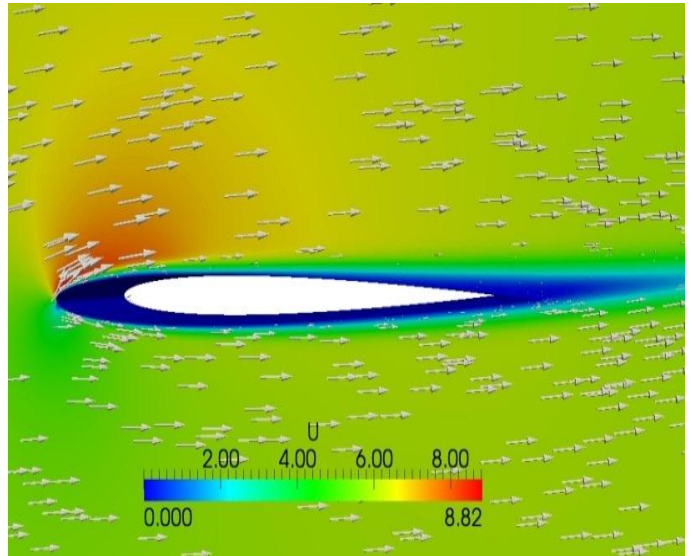
§ 4.3 : Βέλτιστος έλεγχος της ροής με χρήση δύο μεταβλητών σχεδιασμού και χωρίς περιορισμό στην παροχή του *jet*

Αφού προσδιορίστηκε η βέλτιστη θέση τοποθέτησης του *jet*, υλοποιείται ο βρόχος βελτιστοποίησης με σκοπό την εύρεση της βέλτιστης κατανομής της ταχύτητας στο *jet*. Η σχισμή του *jet* τοποθετείται στην πλευρά υποπίεσης της αεροτομής και στο σημείο όπου εμφανίζονται οι μεγαλύτερες (κατά μέτρο) παράγωγοι ευαισθησίας.

Το πεδίο ταχύτητας της βέλτιστης λύσης παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.3.2, ενώ στο Σχήμα 4.3.1 παρουσιάζεται το πεδίο ταχύτητας της αρχικής περίπτωση για σύγκριση. Στο Σχήμα 4.3.2 γίνεται εμφανής η μείωση του εύρους της αποκόλλησης της ροής σε σχέση με την αρχική περίπτωση, γεγονός που οδηγεί σε αύξηση της άνωσης της αεροτομής.



Σχήμα 4.3.1 : Πεδίο ταχύτητας και γραμμές ροής του αρχικού προβλήματος



Σχήμα 4.3.2 : Πεδίο ταχύτητας και γραμμές ροής για το βέλτιστο έλεγχο της ροής

Με το βέλτιστο έλεγχο της ροής, οι συντελεστές άνωσης και οπισθέλκουσας είναι:

$$C_{D_{optimal}} = 0,050$$

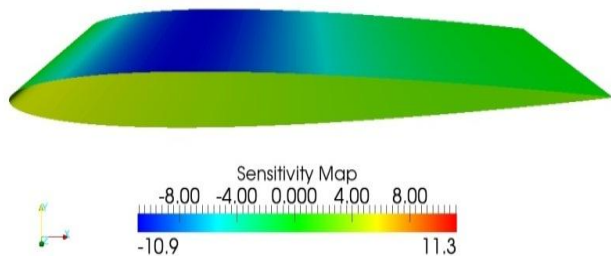
$$C_{L_{optimal}} = 0,409$$

Από τις παραπάνω τιμές διαπιστώνεται ότι ο σκοπός της βελτιστοποίησης επετεύχθη, καθώς ο συντελεστής οπισθέλκουσας παρέμεινε σταθερός, ενώ ο συντελεστής άνωσης αυξήθηκε σημαντικά. Μάλιστα, η αύξηση αυτή πλησιάζει το 50% σε σχέση με το συντελεστή άνωσης του αρχικού προβλήματος.

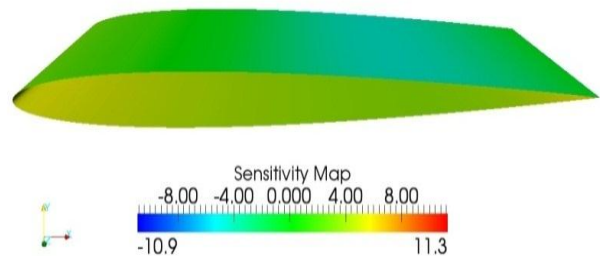
Τέλος, η τιμή της συνάρτησης κόστους για το βέλτιστο έλεγχο της ροής είναι:

$$F_{ex,optimal} = 0,256$$

Στο Σχήμα 4.3.3 παρουσιάζεται ο χάρτη ευαισθησίας του αρχικού προβλήματος και στο Σχήμα 4.3.4 για τη βέλτιστη λύση. Είναι εμφανές ότι στο σημείο τοποθέτησης του *jet*, οι παράγωγοι ευαισθησίας τείνουν στο μηδέν, γεγονός που δείχνει ότι, για τη δεδομένη θέση του *slot*, έχει επιτευχθεί η βέλτιστη λύση. Μάλιστα, όσον αφορά τον χάρτη ευαισθησίας της βέλτιστης λύσης, υπάρχει μια περιοχή υψηλών (κατά μέτρο) παραγώγων ευαισθησίας μετά το σημείο τοποθέτησης του *jet*. Κάτι τέτοιο υποδεικνύει ότι εάν τοποθετηθεί ένα δεύτερο *jet* σε εκείνη τη περιοχή, η αποκόλληση της ροής θα μειωθεί περισσότερο και, συνεπώς, αναμένεται περαιτέρω αύξηση της άνωσης.



Σχήμα 4.3.3 : Παράγωγοι ευαισθησίας αρχικού προβλήματος



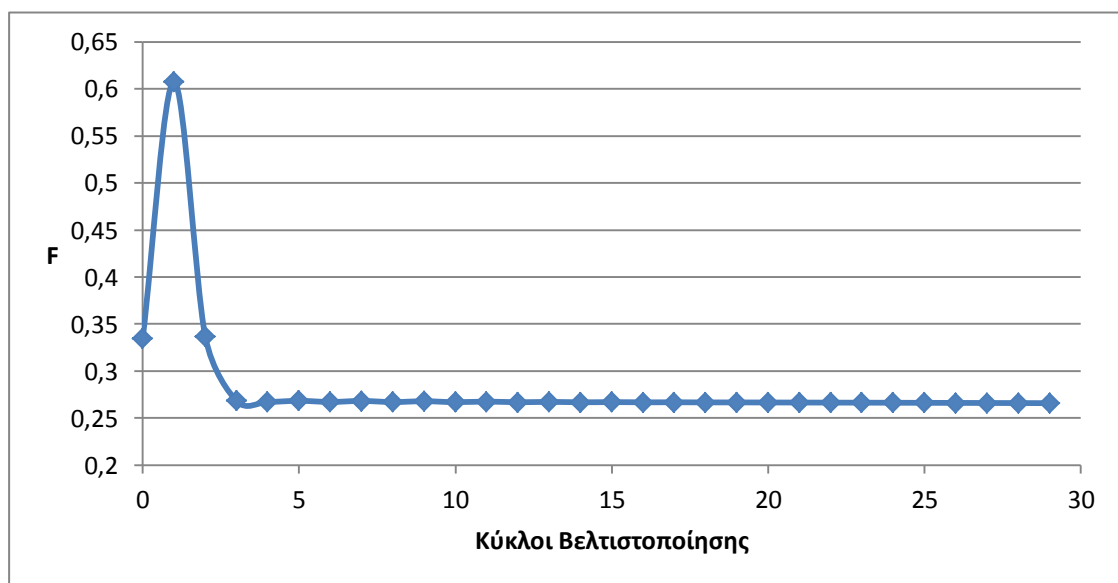
Σχήμα 4.3.4 : Παράγωγοι ευαισθησίας για το βέλτιστο έλεγχο της ροής

Η βέλτιστη λύση επιτυγχάνεται για μεταβλητές σχεδιασμού:

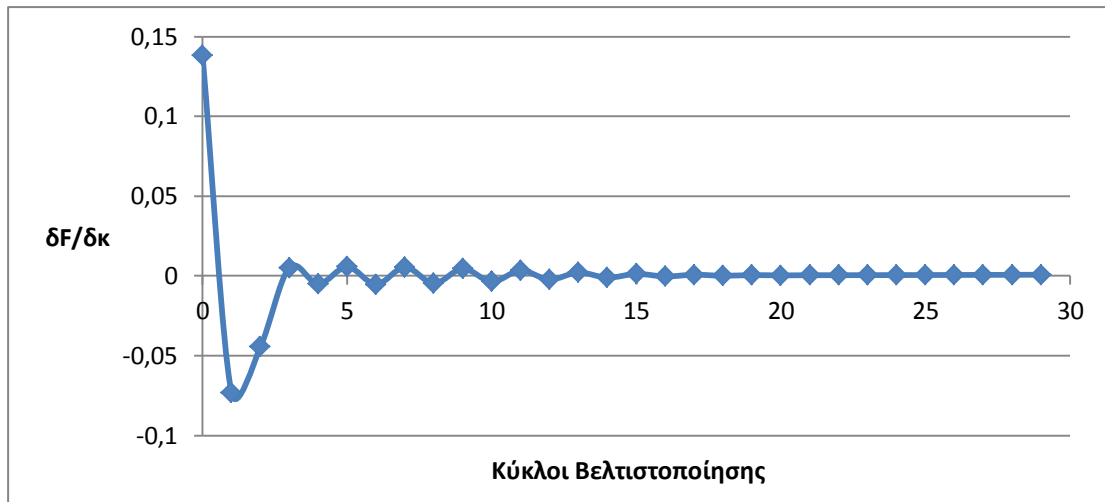
$$\kappa = -1,65$$

$$\varphi = 53,25^\circ$$

Τα Σχήματα 4.3.5, 4.3.6 και 4.3.7 παρουσιάζουν την πορεία της συνάρτησης κόστους F και των παραγώγων $\frac{\delta F}{\delta \kappa}$ και $\frac{\delta F}{\delta \varphi}$ για τους διάφορους κύκλους βελτιστοποίησης.

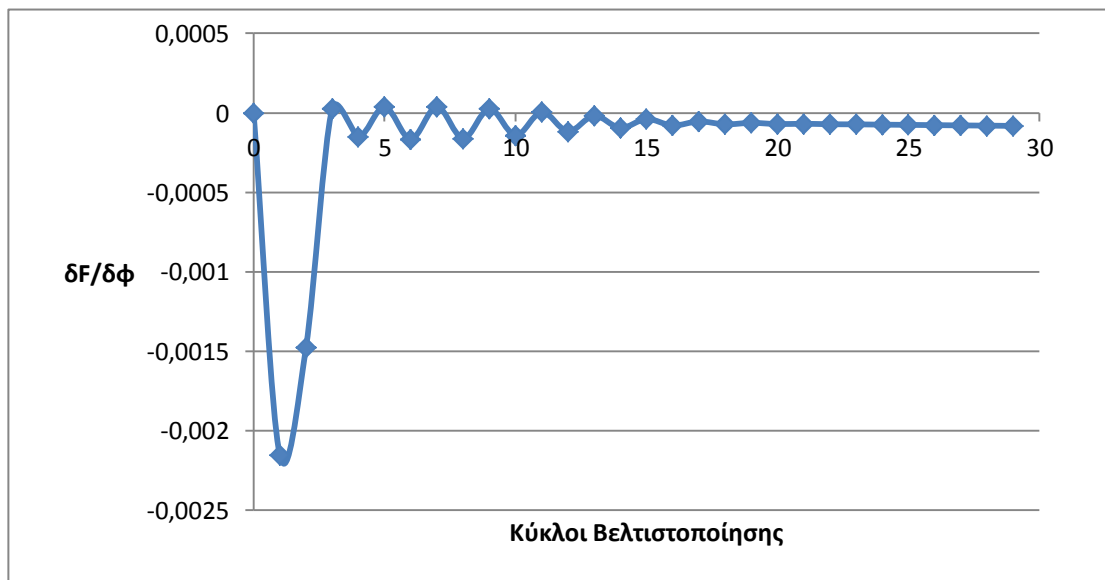


Σχήμα 4.3.5 : Συνάρτηση κόστους F συναρτήσει των κύκλων βελτιστοποίησης



Σχήμα 4.3.6 : Παράγωγος $\frac{\delta F}{\delta \kappa}$ συναρτήσει των κύκλων βελτιστοποίησης

Με βάση αυτά τα σχήματα διαπιστώνεται ότι επιτυγχάνεται σύγκλιση του αλγορίθμου. Η μέθοδος συγκλίνει μέσα στους πρώτους 5 κύκλους βελτιστοποίησης, γεγονός που οφείλεται στη τιμή η που έχει επιλεγεί στη μέθοδο της απότομης καθόδου. Σε αυτή οφείλεται επίσης και η ταλάντωση που παρατηρείται στα σχήματα 4.3.6 και 4.3.7 για τις παραγώγους ως προς τις παραμέτρους του μοντέλου του *jet*.



Σχήμα 4.3.7 : Παράγωγος $\frac{\delta F}{\delta \phi}$ συναρτήσει των κύκλων βελτιστοποίησης

Κεφάλαιο 5^ο

Παράγωγοι ευαισθησίας για τυρβώδη ροή

Στα κεφάλαια 3 και 4 παρουσιάστηκαν τα αποτελέσματα για την περίπτωση στρωτής ροής. Ωστόσο, η συνεχής συζυγής μέθοδος αναπτύχθηκε για τυρβώδεις ροές με χρήση του μοντέλου τύρβης των *Spalart – Allmaras*.

Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι να γίνει κατανοητή η διαφορά ανάμεσα στις ακριβείς παραγώγους ευαισθησίας που υπολογίζονται μέσω της μαθηματικής ανάπτυξης που έχει ήδη παρουσιασθεί στο 2^ο κεφάλαιο, σε σχέση με τις παραγώγους που υπολογίζονται με βάση τη συνήθη υπόθεση ότι οι παράγωγοι των μεγεθών συνεκτικότητας ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού είναι μηδέν, δηλαδή ότι:

$$\frac{\delta v_t}{\delta V_{i\mu}^b} = \frac{\delta \tilde{\nu}}{\delta V_{i\mu}^b} = 0$$

Για το λόγο αυτό, μελετάται το πρόβλημα της ροής γύρω από την αεροτομή *NACA 0012* ^{[15],[16]}. Στόχος είναι η ελαχιστοποίηση της οπισθέλκουσας. Η αντίστοιχη συνάρτηση κόστους έχει την εξής μαθηματική έκφραση:

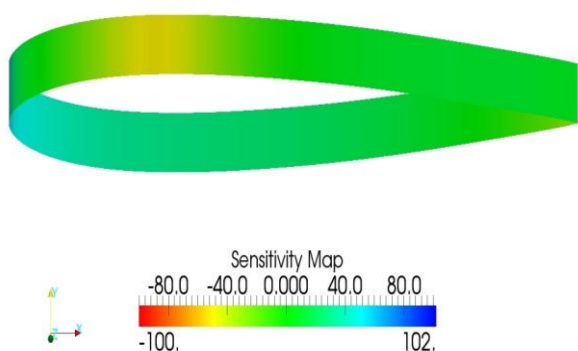
$$F_{ex} = \int_{\Gamma_w} \left\{ -(v + v_t) \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \eta_j + p \eta_i \right\} r_i d\Gamma_w$$

Για συνθήκες της ροής:

$$Re = 1.000.000$$

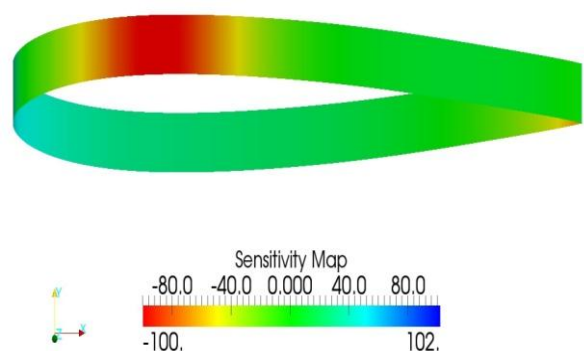
$$a_\infty = 12^\circ$$

επιλύονται το ευθύ και το συζυγές πρόβλημα για μηδενική ταχύτητα στο τοίχωμα της αεροτομής, υπολογίζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας και παράγεται ο χάρτης ευαισθησίας, ο οποίος υποδεικνύει τη βέλτιστη θέση τοποθέτησης του *jet*. Οι χάρτες ευαισθησίας για τις δύο περιπτώσεις παρουσιάζονται στα σχήματα 5.1 και 5.2.



Σχήμα 5.1 : Παράγωγοι ευαισθησίας με την υπόθεση ότι:

$$\frac{\delta v_t}{\delta V_{i\mu}^b} = \frac{\delta \tilde{v}}{\delta V_{i\mu}^b} = 0$$



Σχήμα 5.2 : Ακριβείς παράγωγοι ευαισθησίας

Από τα δύο παραπάνω σχήμα γίνεται φανερό ότι, ενώ και στις δύο περιπτώσεις ο χάρτης ευαισθησίας υποδεικνύει ότι πρέπει να γίνει αναρρόφηση ρευστού στην πλευρά υποπίεσης της αεροτομής, εντούτοις οι παράγωγοι που υπολογίζονται έχουν εντελώς διαφορετική απόλυτη τιμή. Συνεπώς, αν χρησιμοποιηθεί η υπόθεση μηδενικών παραγών των συνεκτικών μεγεθών ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, κατά τη διάρκεια προσδιορισμού της βέλτιστης κατανομής της ταχύτητας του *jet*, η παράγωγος που θα υπολογίζεται σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης θα εμπεριέχει (έστω και μικρό) σφάλμα. Συνεπώς, αν επιθυμείται ο βέλτιστος έλεγχος της ροής για προβλήματα όπου η ροή είναι τυρβώδης, για την εφαρμογή όλης της μεθόδου που αναπτύχθηκε, είναι αναγκαίο να γίνεται ακριβής υπολογισμός των παραγών.

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι να γίνει κατανοητό γιατί δεν πρέπει να χρησιμοποιείται η υπόθεση μηδενικών παραγώγων των μεγεθών συνεκτικότητας ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού. Για το λόγο αυτό, δεν πραγματοποιήθηκε βελτιστοποίηση ως προς την κατανομή της ταχύτητας του *jet* γιατί η διαδικασία είναι ίδια με αυτή που περιγράφηκε σε προηγούμενα κεφάλαια.

Κεφάλαιο 6^ο

Συμπεράσματα

Η έρευνα που πραγματοποιεί τα τελευταία χρόνια η Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής και Βελτιστοποίησης στοχεύει, μεταξύ άλλων, στην ανάπτυξη συζυγών μεθόδων για τον υπολογισμό της πρώτης ή ανώτερης τάξης παραγώγων κατάλληλων αντικειμενικών συναρτήσεων που χρησιμοποιούνται στην αεροδυναμική βελτιστοποίηση. Όσον αφορά τη συνεχή συζυγή μέθοδο, έχουν γίνει αρκετές δημοσιεύσεις που αναφέρονται σε εφαρμογές εσωτερικής και εξωτερικής αεροδυναμικής^{[17]–[19]}, με τη χρήση διαφόρων αντικειμενικών συναρτήσεων^[20] και για τον υπολογισμό παραγώγων πρώτης ή ανώτερης^{[21]–[24]} τάξης. Ακόμη, σημαντική είναι η έρευνα που έχει πραγματοποιηθεί σε προβλήματα αντίστροφου σχεδιασμού^[25].

Στην παρούσα διπλωματική εργασία αναπτύχθηκε η συνεχής συζυγής μέθοδος για την περίπτωση ασυμπίεστου ρευστού και μόνιμης χρονικά ροής με χρήση του μοντέλου τύρβης των *Spalart – Allmaras*. Σκοπός της μεθόδου είναι η εύρεση της βέλτιστης θέσης τοποθέτησης του *jet*, η εύρεση του είδους του *jet* (*jet* έγχυσης ή αναρρόφησης) και ο προσδιορισμός της βέλτιστης κατανομής ταχύτητας του *jet*.

Για τον έλεγχο της αποτελεσματικότητας της μεθόδου, μελετήθηκαν προβλήματα με συναρτήσεις κόστους την ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης μεταξύ της εισόδου και της εξόδου, που είναι κατάλληλη για προβλήματα εσωτερικής αεροδυναμικής, και, την ελαχιστοποίηση της οπισθέλκουσας με ταυτόχρονη δυνατότητα αύξησης της άνωσης για προβλήματα εξωτερικής αεροδυναμικής.

Τα όσα αναπτύχθηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια φανερώνουν ότι η μέθοδος που αναπτύχθηκε αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο στα χέρια του μηχανικού, καθώς παρέχει τη δυνατότητα του βέλτιστου ελέγχου της ροής με μικρό υπολογιστικό κόστος. Το υπολογιστικό κόστος για την επίλυση του συζυγούς προβλήματος είναι πρακτικά το ίδιο με το να επιλυθεί το ευθύ πρόβλημα, συνεπώς για την υλοποίηση ενός βρόχου βελτιστοποίησης με N κύκλους βελτιστοποίησης, το υπολογιστικό κόστος είναι $2N + 2$, γιατί πρέπει να ληφθεί υπόψη το κόστος του ευθέως και του συζυγούς προβλήματος για την εύρεση της βέλτιστης θέσης τοποθέτησης του *jet*.

Επιπλέον, η ιδέα μοντελοποίησης της κατανομής της ταχύτητας του *jet* παρέχει μια ευελιξία στο μηχανικό, καθώς, αφενός μπορεί σε διαφορετικά προβλήματα να χρησιμοποιήσει το κατάλληλο μοντέλο, αφετέρου σε περίπτωση που επιθυμείται αλλαγή στο μοντέλο, οι αλλαγές που πρέπει να γίνουν στον κώδικα που υπολογίζει την παράγωγο ως προς τις παραμέτρους του *jet* είναι ελάχιστες.

Τέλος, αποδείχτηκε ο λόγος για τον οποίο θα πρέπει να υπολογίζονται οι ακριβείς παράγωγοι ευαισθησίας, χωρίς να γίνεται η υπόθεση ότι η παράγωγος των μεγεθών συνεκτικότητας ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού είναι μηδενική. Οι παράγωγοι ευαισθησίας πρέπει να είναι ακριβείς ώστε να εξασφαλίζεται ότι η βελτιστοποίηση κατευθύνεται προς τη βέλτιστη λύση.

Βιβλιογραφία

- [1]: R. D. Joslin, D. N. Miller: Fundamentals and Applications of Modern Flow Control. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Volume 231.
- [2]: L. Prandtl, O. G. Tietjens: Fundamentals of Hydro and Aeromechanics, by Prandtl and Tietjens, United Engineering Trustees, Inc., 1934
- [3]: R. DeMeis: Stick-to-it riblets, Aerospace America, January 1988, p.14
- [4]: J. Jimenez, A. Pinelli: The autonomous cycle of near-wall turbulence. J. Fluid Mech. 389, 335 – 359, 1999.
- [5]: Κ. Χ. Γιαννάκογλου: Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στην Αεροδυναμική. Αθήνα 2006.
- [6]: P. Spalart, S. Allmaras: A one-equation turbulence model for aerodynamic flows, AIAA Paper 92 – 0439, 1992.
- [7]: Α. Σ. Ζυμάρης: Συζυγείς μέθοδοι για το σχεδιασμό μορφών με βέλτιστη αεροδυναμική συμπεριφορά σε στρωτές και τυρβώδεις ροές. Διδακτορική Διατριβή. Αθήνα 2010.
- [8]: A. S. Zymaris, D. I. Papadimitriou, K. C. Giannakoglou, C. Othmer: Continuous adjoint approach to the Spalart – Allmaras turbulence model for incompressible flows. Computers & Fluids. December 2008.
- [9]: A.S.Zymaris, D.I.Papadimitriou, K.C.Giannakoglou, C.Othmer,: Adjoint Wall Functions, A New Concept for Use in Aerodynamic Shape Optimization. J. Comp. Phys., 229, 5228-5245, 2010.
- [10]: Ν. Καδιανάκης, Σ. Καρανάσιος, Α. Φελλούρης: Ανάλυση ΙΙ – Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Εκδόσεις Ε.Μ.Π.. Αθήνα 2007.
- [11]: *OpenFoam*, official web site <http://www.openfoam.com/>
- [12]: Δ. Σ. Μαθιουλάκης, Ι. Σ. Αναγνωστόπουλος, Δ. Γ. Τουζόπουλος: Βιομηχανική Ρευστομηχανική. Αθήνα 2006.
- [13]: <http://www.mh-aerotoools.de/airfoils/javafoil.htm>

- [14] : P. J. Kunz, I. M. Kroo: analysis, Design and Testing of Airfoils for use at Ultra-Low Reynolds Numbers. *Fixed and Flapping Wing Aerodynamics for Micro Air Vehicle Applications*, edited by T. J. Mueller, Vol. 195, *Progress in Aeronautics and Astronautics*, AIAA, Reston, VA, 2001, Chap. 3.
- [15] : L. Huang, P. G. Huang, R. P. LeBeau: Numerical Study of Blowing and Suction Control Mechanism on NACA 0012 Airfoil. *Journal of Aircraft*, Vol. 41, No. 5, September-October 2004.
- [16] : L. Huang, P. G. Huang, R. P. LeBeau, T. Hauser: Optimization of Blowing and Suction Control on NACA 0012 Airfoil using EARND Genetic Algorithm with Diversity Control. *Doctoral Dissertations*. Paper 385, 2004. (http://uknowledge.uky.edu/gradschool_diss/385)
- [17] : D.I.Papadimitriou, K.C.Giannakoglou: Compressor Blade Optimization using a Continuous Adjoint Formulation. ASME Paper GT-2006/90466, 2006.
- [18] : D.I.Papadimitriou, K.C.Giannakoglou: A Continuous Adjoint Formulation with Emphasis to Aerodynamic-Turbomachinery Optimization. ECCOMAS CFD 2006 Conference, Egmond Aan Zee, Sept. 2006.
- [19] : D.I.Papadimitriou, K.C.Giannakoglou: Total pressure losses minimization in turbomachinery cascades, using a new continuous adjoint formulatio. *Proc. IMechE, Part A, J. Power & Energy (Special Issue on Turbomachinery)*, 221, 865-872, 2007.
- [20] : D.I. Papadimitriou, K.C. Giannakoglou: A continuous adjoint method with objective function derivatives based on boundary integrals for inviscid and viscous flows. *Computers & Fluids*, 36, 325-341, 2007.
- [21] : D.I.Papadimitriou, K.C.Giannakoglou: Direct, Adjoint and Mixed Approaches for the Computation of Hessian in Airfoil Design Problems. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 56(10), 1929-1943, 2008.
- [22] : D.I.Papadimitriou, K.C.Giannakoglou: Computation of the Hessian Matrix in Aerodynamic Inverse Design using Continuous Adjoint Formulations. *Computers & Fluids*, 37, 1029-1039, 2008.
- [23] : D.I.Papadimitriou, K.C.Giannakoglou: Aerodynamic Shape Optimization using First- and Second-Order Adjoint and Direct Approaches. *Arch. Comp. Meth. Eng. (State of the Art Reviews)*, 15(4), 447-488, 2008.
- [24] : D.I.Papadimitriou, K.C.Giannakoglou: One-Shot Shape Optimization Using the Exact Hessian. ECCOMAS CFD 2010, 5th European Conference on CFD, Lisbon, June 2010.

[25] : D.I.Papadimitriou, K.C.Giannakoglou: The Continuous Direct-Adjoint Approach for Second Order Sensitivities in Viscous Aerodynamic Inverse Design Problems. Computers & Fluids, 38, 1539-1548, 2009.