ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΣΤΗΝ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

ΘΕΜΑ: ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟΝ ΕΛΕΓΧΟ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ - ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

την φοιτήτριας **Βουλή Ειρήνης**

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: **Κολέτσος Ιωάννης**

ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

Κολέτσος Ιωάννης Επίκ. Καθ. ΕΜΠ

Τυχόπουλος Ευάγγελος Επίκ. Καθ. ΕΜΠ

Φουσκάκης Δημήτριος Επίκ. Καθ. ΕΜΠ

15 Μαρτίου 2013

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

' Και η επιστήμη που ξέρει για ποιό σκοπό πρέπει να γίνει το κάθε πράγμα, είναι η εγκυρότερη όλων των επιστημών και η πιο έγκυρη από κάθε άλλη σχετική επιστήμη, και ο σκοπός αυτός είναι το καλό του πραγματος και γενικά το υπέρτατο αγαθό ολόκληρης της φύσης '
(Αριστοτέλης, Μεταφυσικά)

Η Επιχειρησιακή Έρευνα ισχυρίζεται ότι ασχολείται με τον τρόπο και όχι με την κατάληξη ή αλλιώς τον σκοπό. Ο σκοπός αυτός θα παραμείνει απορία των ανθρώπων και σίγουρα η απάντηση δε δίνεται από τη λογική. Δεν είναι μια επιστήμη κατανοητή μόνο από Μαθηματικούς, με την οποία μόνο εκείνοι μπορούν να ασχοληθούν, αλλά συνδέει πολλές άλλες ειδικότητες, όπως μηχανικοί, managers , λογιστές, αναλυτές και πολλούς άλλους μέσω μιας κοινής γλώσσας κατανοητής απ΄ όλους.

Η Επιχειρησιακή Έρευνα (Operetions research ή management Science) είναι απλά μια επιστημονική προσέγγιση στη λήψη αποφάσεων που έχουν σκοπό τον καλύτερο σχεδιασμό και λειτουργία ενός συστήματος, συνήθως κάτω από συνθήκες που απαιτούν την κατανομή των περιορισμένων πόρων. (Σύστημα εννούμε έναν οργανισμό ανεξάρτητων συνεργατών που δουλεύουν μαζί για να πετύχουν κοινούς στόχους.)

Ο όρος ' Επιχειρησιακή Έρευνα' επινοήθηκε κατά τη διάρκεια του Β΄ Παγκοσμίου Πολέμου, όταν οι Βρετανοί στρατιωτικοί ζήτησαν από επιστήμονες και μηχανικούς να ασχοληθούν και να προσπαθήσουν να επιλύσουν διάφορα στρατιωτικά προβλήματα, όπως η ανάπτυξη και η κατάλληλη τοποθέτηση των ραντάρ και η διαχείρηση αυτοκινητοπομπών, βομβαρδισμούς και επιχειρήσεις καταστολής υποβρυχίων και εξόρυξης. Η επιστημονική προσέγγιση στη λήψη αποφάσεων συνήθως περιλαμβάνει τη χρήση ενός ή περισσότερων μαθηματικών μοντέλων, δηλαδή μαθηματικών αναπαραστάσεων μιας πραγματικής κατάστασης που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να πάρουμε καλύτερες αποφάσεις ή απλά για την καλύτερη κατανόηση της κατάστασης αυτής.

Μερικά παραδείγματα χρήσης της Επιχειρησιακής Έρευνας είναι τα ακόλουθα:

- Διαχείρηση αποθεμάτων της επιχείρησης
- Διαχείρηση κονδυλίων
- Προβλήματα στρατηγικής
- Αποφάσεις προώθησης προϊόντων
- Οικονομικές επιπτώσεις της σύνθεσης ενός προϊόντος
- Ανάπτυξη ουρών αναμονής
- Οργάνωση ναυτικών επιχειρήσεων σε καιρό πολέμου
- Προγραμματισμός γεωργικής παραγωγής
- Θέση εργοστασίου

και πολλά άλλα παραδείγματα-προβλήματα των οποίων η επίλυσή τους γίνεται μέσω της επιστήμης της Επιχειρησιακής Έρευνας.

1.1 Είδη μοντέλων

1. **Στατικά και Δυναμικά Μοντέλα**
   Στατικό μοντέλο είναι εκείνο που οι μεταβλητές απόφασης δεν περιλαμβάνουν ακολουθίες αποφάσεων σε πολλαπλές περιόδους, ενώ το δυναμικό είναι το ακριβώς αντίθετο.

2. **Γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα**
   Στα γραμμικά μοντέλα οι μεταβλητές απόφασης εμφανίζονται στην αντικειμενική συνάρτηση και στους περιορισμούς πολλαπλασιασμένες με σταθερές και μεταξύ τους προστίθενται. Αν δε συμβαίνει αυτό έχουμε μη γραμμικά μοντέλα.

3. **Ακέραια και μη ακέραια μοντέλα**
   Αν οι μεταβλητές απόφασης είναι μόνο ακέραιοι αριθμοί, τότε το μοντέλο είναι ακέραιο, αλλιώς μη ακέραιο.

4. **Ντετερμινιστικό και Στοχαστικό μοντέλο**
   Αν για κάθε τιμή των μεταβλητών απόφασης, η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι γνωστή είτε ικανοποιούνται οι περιορισμοί είτε όχι, τότε έχουμε ντετερμινιστικό μοντέλο, ειδάλλως το μοντέλο μας λέγεται στοχαστικό.

1.2 Τα 7 βήματα της διαδικασίας ’ οικοδόμισης ’ και επίλυσης μοντέλου

Για να λύσουμε οποιοδήποτε πρόβλημα μέσω της επιχειρησιακής, πρέπει κάθε φορά να ακολουθήσουμε τα παρακάτω 7 βήματα:

1ο Βήμα: Διατύπωση του προβλήματος: Κατ΄ αρχάς ορίζεται το πρόβλημα, περιλαμβάνοντας τους στόχους και τα τμήματα που πρέπει να μελετηθούν πριν ξεκινήσουμε την επίλυση του προβλήματος.

2ο Βήμα: Παρατήρηση Συστήματος : Συλλέγονται δεδομένα προς εκτίμηση της αξίας των παραμέτρων που επηρρεάζουν το σύστημα.

3ο Βήμα: Διατύπωση μαθηματικού μοντέλου για το πρόβλημα

4ο Βήμα: Επαλήθευση του μοντέλου και χρήση του για προβλέψεις

5ο Βήμα: Συλλογή κατάλληλων εναλλακτικών: Δοσμένου του μοντέλου και ενός συνόλου εναλλακτικών που ανταποκρίνονται στο σύστημα, η επιχειρησιακή έρευνα επιλέγει τη βέλτιστη εναλλακτική λύση.

6ο Βήμα: Παρουσίαση αποτελέσματος και συμπερασμάτων μελέτης του συστήματ

7ο Βήμα: Εφαρμογή και αξιολόγηση προτάσεων: Εάν το σύστημα δεχτεί τις προτάσεις, ο αναλυτής βοηθά στην υλοποίησή τους. Το σύστημα πρέπει να παρακολουθείται διαρκώς (και σε κάθε μεταβολή του περιβάλλοντος να προσαρμόζεται) για να εξασφαλιστεί ότι οι προτάσεις επιτρέπουν στο σύστημα να πετύχει τους στόχους του.

Βιβλιογραφία

[29667869-Methods-and-Models-of-Operations-Research] Arnold Kaufmann, Brofesseur a 1'Institut Polytechnique de Grenoble , Conseilleur Scientifique a la Compagnie des Machines Bull

[Operations Research. An Introduction (Prentice Hall 2007.8.ed)] Hamdy A. Taha

[Operations-Research-Applications-and-Algorithms] Wayne-L-Winston

[Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα] Κολέτσος Ιωάννης, Στογιάννης Δημήτριος, Αθήνα 2012, Εκδόσεις Συμεών

Κεφάλαιο 2

Εισαγωγή στον Έλεγχο Αποθεμάτων

Κάθε προϊόν για να φτάσει τελειοποιημένο στα χέρια του πελάτη, περνάει μέσα από μια σειρά διαδικασιών, με στόχο τη βέλτιστη τελική του μορφή. Για παράδειγμα, το κρασί πριν φτάσει στο ποτήρι μας, έχει περάσει από διάφορα στάδια για να γίνει η τελική του μορφή, δηλαδή διαλέγονται συγκεκριμένες ποικιλίες σταφυλιών σε συγκεκριμένη χρονική περίοδο, από αυτά παίρνουν το χυμό τους που γίνεται μούστος και ένα μέρος του, με τη βοήθεια χημικών επιστημόνων που του βάζουν διάφορες ουσίες και αρώματα μετατρέπεται στο κρασί που είναι στο ποτήρι μας. Όμως δεν είναι τόσο απλά τα πράγματα, αφού δεν λάβαμε υπ΄ όψην καθυστερήσεις, την πιθανότητα του απρόοπτου, π.χ. έκτακτες καιρικές συνθήκες που έχουν σαν αποτέλεσμα την απώλεια της σοδειάς με ό,τι αυτό συνεπάγεται , τις μεταβολές της ζήτησης και πολλές άλλες παραμέτρους. Όλα αυτά λοιπόν μελετώνται από το κομμάτι της Επιχειρησιακής Έρευνας που λέγεται **Έλεγχος Αποθεμάτων**.

Παρακάτω παραθέτονται οι λόγοι για τους οποίους χρειάζεται να μελετάμε και να γνωρίζουμε την κατάλληλη ποσότητα αποθεμάτων:

- **Οικονομικοί λόγοι:**Μια παραγγελία έχει συνήθως κόστος ανεξάρτητο των ποσοτήτων που παραγγέλνουμε, π.χ. το κόστος της τηλεφωνικής κλήσης ή του φαξ που στέλνει αυτός που παραγγέλνει. Συνήθως αυτό το σταθερό κόστος είναι γραφικά ύλη. Επίσης υπάρχει και το κόστος μεταφοράς που μπορεί για μεγάλες ποσότητες αποθεμάτων που μπορεί να παραγγείλουμε να είναι μικρότερο σε σχέση με μικρότερη ποσότητα, όπου θα αναγκαζόμασταν να παραγγείλουμε περισσότερες φορές και να πληρώσουμε παραπάνω. Αυτό επηρρεάζει και το κόστος ανα μονάδα προϊόντος.

- **Αβεβαιότητες:** Το προϊόν μετατρέπεται στην τελική του μορφή μέσα από μια διαδικασία επεξεργασίας των πρώτων υλών. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να οδηγηθούμε σε πιθανές απώλειες, που οι επιπτώσεις τους μελετώνται από τον Έλεγχο Αποθεμάτων για να είμαστε προετοιμασμένοι, καθώς επίσης γίνεται προσπάθεια για την ελαχιστοποίησή τους.

- **Επίπεδο εξυπηρέτησης πελατών:** Σε μια επιχείρηση, κατάστημα κ.λ.π., ο Έλεγχος Αποθεμάτων εξετάζει όλα τα πιθανά σενάρια μεταβολής ζήτησης ή αγοράς ώστε κάθε φορά να έχουμε κατάλληλες ποσότητες αποθεμάτων με αποτέλεσμα και οι πελάτες και οι επιχειρήσεις να είναι ευχαριστημένοι.

2.1 Είδη Αποθεμάτων

Στα παραγωγικά συστήματα υπάρχουν 3 είδη αποθεμάτων:

- **Αποθέματα πρώτων υλών:** Λόγω διάφορων παραγόντων, όπως το κόστος γραφειοκρατίας, μεταφοράς, μεταβολές στην οικονομία, απεργίες, απρόβλεπτα καιρικά φαινόμενα κ.λ.π. αποθηκεύονται απο επιχειρήσεις όπως εργοστάσια παρασκευής αποθέματα πρώτων υλών ώστε να μην υπάρξει καθυστέρηση στην παραγωγική διαδικασία.

- **Αποθέματα προϊόντων που δεν έχουν ολοκληρωθεί:** Αποθέματα ¨μισοτελειωμένων' προιόντων μπορεί να έχουμε λόγω της αβεβαιότητας που μας προκαλεί πιθανή βλάβη τυ μηχανήματος που ολοκληρώνει την παρασκευή τους. Τέτοιου είδους αποθέματα σπάνια τα συναντάμε.

- **Αποθέματα τελικού προϊόντος:** Η ποσότητα αυτών των αποθεμάτων είναι πιο μεταβλητή σε σχέση με τα παραπάνω, λόγω μεταβλητότητας της ζήτησης.

2.2 Σχεδιασμός Συστημάτων Απογραφής Αποθεμάτων

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η ανάγκη διατήρησης αποθεμάτων και πρώτων υλών είναι μεγάλη. Ο σχεδιασμός των συστημάτων απογραφής αναφέρεται στη διαδικασία του ποσού των αποθεμάτων και της συχνότητας αναπλήρωσης των ποσοτήτων που καταναλώνονται. Απαντάει δηλαδή στα ερωτήματα *πόσο συχνά* και *πόσο μεγάλη* πρέπει να είναι η παραγγελία.

Υπάρχουν περιπτώσεις που χρειαζόμαστε μεγάλες ποσότητες αποθεμάτων και περιπτώσεις που χρειαζόμαστε λίγα αποθέματα.Ένα σημαντικό κριτήριο για την επιλογή μεγέθους αποθεμάτων είναι το κόστος αποθήκευσης. Δεν μπορεί κάποιος να αυξάνει απεριόριστα την ποσότητα αποθεμάτων επ΄ αόριστον για την εξάλειψη όλων των διαταραχών της παραγωγικής διαδικασίας, διότι το πραγματικό κόστος διατήρησής τους θα μπορούσε να υπερβεί μια ενδεχόμενη ζημία λόγω έλλειψής τους. Από την άλλη, αν δεν κρατάμε αρκετά αποθέματα προκειμένου να γίνει η μείωση του κόστους διατήρησης, τότε λόγω ζήτησης θα αναγκαζόμαστε να προβούμε σε περισσότερες παραγγελίες για να αποφύγουμε απώλειες όπως οι απώλειες πελατών λόγω έλλειψης αυτών που μας ζητάνε.

Ο σχεδιασμός συστήματος απογραφής αποθεμάτων έχει σαν σκοπό την εύρεση μιας μέσης λύσης μεταξύ των πλεονεκτημάτων και μειωνεκτημάτων ενός χαμηλού επίπεδου αποθεμάτων με τα αντίστοιχα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα των μεγάλων ποσοτήτων που αποθηκεύουμε. Δηλαδή στην ουσία ελαχιστοποιείται το συνολικό κόστος.

Οι παράγοντες που μας κάνουν να θέλουμε υψηλά επίπεδα αποθεμάτων είναι οι εξείς:

1. **Κόστος παραγγελίας και εγκατάστασης:**
   Όταν παραγγέλνουμε υλικά από έναν προμηθευτή, πρέπει να γίνεται μια σειρά ενεργειών με σαφείς δαπάνες, όπως έρευνα αγοράς, κόστος μεταφοράς, κ.λ.π. οι οποίες είναι ανεξάρτητες από το κόστος παραγγελίας. Για παράδειγμα, μια επιχείρηση χρειάζεται πρώτες ύλες, π.χ. γάλα για την παρασκευή γλυκών. Πρέπει να κάνει έρευνα αγοράς για να διαλέξει τον παραγωγό με την καλύτερη ποιότητα, να υπολογίσει το κόστος μεταφοράς αναλόγως το πόσο μακρυά βρίσεται ο παραγωγός και τις προσφορές που υπάρχουν, συν το κόστος παραγγελίας. Αν παραγγείλει και μηχανήματα, πρέπει να υπολογίσει μαζί με τα παραπάνω και το κόστος εγκατάστασής τους.
   Τα κόστη εγκατάστασης έχουν να κάνουν με κόστη που σχετίζονται με την απεγκατάστασης μηχανημάτων και με την απαιτούμενη επανεγκατάσταση αυτών που ήδη έχουμε ή καινούργιων, προκειμένου να συνεχιστεί η παραγωγική διαδικασία με βελτιωμένες συνθήκες. Αυτό όμως περιλαμβάνει διακοπή εργασίας για κάποιο χρονικό διάστημα ξοδεύοντας χρόνο και χρήμα για την αλλαγή διάταξης των μηχανημάτων, αλλαγές στο χρονοδιάγραμμα και προσωρινή α-

πώλεια αποτελεσματικότητας λόγω του χρόνου που χρειάζεται το προσωπικό να μάθει να χειρίζεται άνετα τον νέο εξοπλησμό. Όλες αυτές οι δαπάνες περιλαμβάνονται στο κόστος εγκατάστασης, το λεγόμενο *Set up cost*. Το Set up cost είναι κόστος ανεξάρτητο από το πλήθος των παραγόμενων μονάδων, καθώς είτε φτιάξουμε μια μονάδα είτε χιλιάδες, οι αρχικές δαπάνες παραμένουν ίδιες.

2. **Ποσοτικές εκπτώσεις:**
   Πολλές φορές οι παραγγελίες μεγάλων ποσοτήτων οδηγούν σε μείωση του μοναδιαίου κόστους αγοράς ή παραγωγής αντικειμένων. Οι περισσότεροι παραγωγοί εξετάζουν το ενδεχόμενο παροχής εκπτώσεων για έναν πελάτη που αγοράζει μεγάλες ποσότητες. Επίσης για ποσοτικές εκπτώσεις μπορούμε να μιλήσουμε όταν κάνουμε οι ίδιοι παραγωγή προιόντων, παράγωντας μεγαλύτερη ποσότητα προιόντων με αποτέλεσμα να χρησιμοποιήσουμε αποδοτικότερο εξοπλισμό,με αποτέλεσμα να μειωθεί το κόστος ανά μονάδα προιόντος. Έτσι έχουμε μειωμένες τιμές προιόντων το οποίο συνεπάγεται μεγαλύτερες ποσότητες παραγγελίας που κάνουν πελάτες σέμάς.

3. **Αναξιόπιστες πηγές εφοδιασμού:**
   Όταν οι πηγές εφοδιασμού είναι αναξιόπιστες, ο επιχειρηματίας μπορεί να αποφασίσει να αποθηκεύσει μεγάλες ποσότητες αποθεμάτων για να μην έχει απώλειες, λόγω του ότι υπάρχει κίνδυνος να ξεμείνει. Αυτό είναι σημαντικό κίνητρο για αύξηση αποθεμάτων.

4. **Επίπεδο εξυπηρέτησης πελατών**

5. **Πρόβλεψη εξέλιξης τιμών**

Οι παράγοντες που πιέζουν για χαμηλά επίπεδα αποθήκευσης είναι:

1. **Κόστος αποθήκευσης και εγκατάστασης**

2. **Κόστος ευκαιρίας και σε πόρους (π.χ. μικρός χώρος αποθήκευσης) και σε χρήματα**

3. **Κόστος χρηματοδότησης**

4. **Κόστος διαχείρησης αποθέματος**

Βιβλιογραφία

[29667869-Methods-and-Models-of-Operations-Research] Arnold Kaufmann, Brofesseur a 1'Institut Polytechnique de Grenoble , Conseilleur Scientifique a la Compagnie des Machines Bull

[Operations Research. An Introduction (Prentice Hall 2007.8.ed)] Hamdy A. Taha

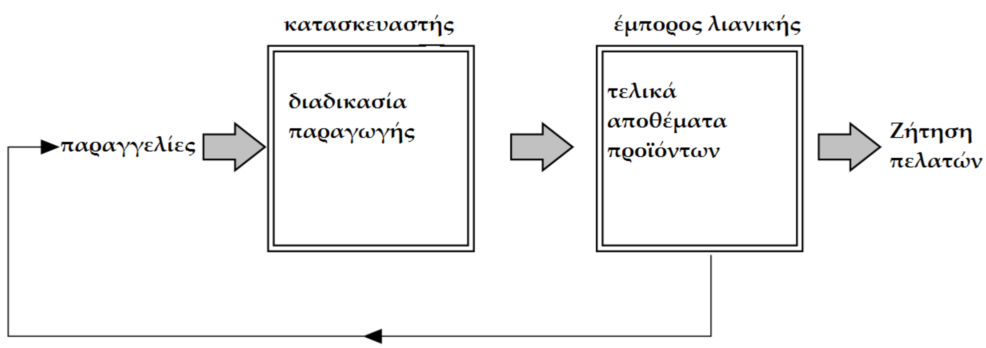
[Operations-Research-Applications-and-Algorithms] Wayne-L-Winston

[Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα] Κολέτσος Ιωάννης, Στογιάννης Δημήτριος, Αθήνα 2012, Εκδόσεις Συμεών

Κεφάλαιο 3

Μέθοδοι και Μοντέλα Ελέγχου Αποθεμάτων

3.1 Μια απλή ταξινόμηση των μοντέλων διαχείρησης αποθεμάτων



ινεντορψ σψστεμ.πνγ

Έστω ότι η λειτουργία του πιο απλοποιϊημένου συστήματος κίνησης αποθεμάτων περιγράφεται από το σχήμα. Μια παραγγελία μεγέθους Q μονάδων, όπου Q είναι ποσότητα παραγγελίας, βρίσκεται στα χέρια του προμηθευτή. Ο προμηθευτής θα μπορούσε να είναι ένα πρωτογενές παραγωγικό στάδιο ή ένας εξωτερικός αποθηκευτικός χώρος που περιέχει αυτή την ποσότητα, πέραν του φυσικού προσώπου. Η παραγγελία παραλαμβάνεται μετά από κάποιο χρονικό διάστημα, μεγάλο ή μικρό, που το συμβολίζουμε με L (Lead time) Τα αποθέματα χρησιμοποιούνται για να ικανοποιήσουν τη ζήτηση των πελατών, D (Demand). Υπάρχουν διάφορες παραλλαγές της διαδικασίας ζήτησης -προσφοράς καθώς και διάφορων ειδών αποθέματα. Αυτά τα είδη αποθεμάτων μπορούν τα ταξινομηθούν με βάση τα ακόλουθα κριτήρια:

Περιοχή αποθήκευσης: Πολύ συχνά οι περιοχές μεταξύ προμηθευτών και πελατών δεν είναι συγκεκριμένες, σε αντίθεση με άλλες περιπτώσεις που τα αποθέματα βρίσκονται σε συγκεκριμένους αποθηκευτικούς χώρους (single-location models). Στην περίπτωση που έχουμε περισσότερους από έναν χώρους αποθήκευσης τα αποθέματα ονομάζονται multi-echelon inventory models ή SC inventory mondels.

Έλεγχος: Στα παραπάνω μοντέλα, οι πολλαπλές τοποθεσίες μπορεί να είναι κάτω από τον έλεγχο ενός ατόμου (centralized SC inventory models) ή κάθε χώρος αποθήκευσης έχει το δικό του άτομο να τον ελέγχει (decentralized SC inventory models).

Lead Times: Στην πραγματικότητα το L είναι μια τυχαία μεταβλητή. Όμως, για διευκόλυνση, είτε τη θεωρούμε μια σταθερά $L \geq 0$ ή θεωρούμε ότι ο χρόνος αναμονής είναι ντετερμινιστικός ή ότι ακολουθεί μια από τις γνωστές μας κατανομές (στοχαστικός χρόνος αναμονής).

Διαδικασία ζήτησης: Παρομοίως η ζήτηση (D) μπορεί να είναι γνωστή και σταθερή ή τ.μ. που ακολουθεί γνωστή κατανομή.

Χωρητικότητα

Πλήθος αντικειμένων

Επιλογή προμηθευτών .

Οι σπουδαιότερες έννοιες που εμφανίζονται σε ένα σύστημα αποθεμάτων είναι οι παρακάτω:

1. **Ζήτηση (D):**
   Η ζήτηση αντιπροσωπεύει τις ποσότητες των προϊόντων που ζητούνται ανά περίοδο. Το μέγεθος της ζήτης, για μια ορισμένη μελλοντική χρονική περίοδο, είναι δυνατόν να είναι γνωστό εκ των προτέρων. Τότε, τα συστήματα αυτά των αποθεμάτων ονομάζονται προσδιοριστικά. Στα προσδιοριστικά συστήματα αποθεμάτων το μέγεθος τη ζήτησης μπορεί να είναι σταθερό για ίσα χρονικά διαστήματα (στατική ζήτηση) ή να είναι γνωστός ο τρόπος μεταβολής του (δυναμική ζήτηση). Σε πολλά συστήματα αποθεμάτων είναι αδύνατο να προσδιοριστεί εκ των προτέρων το μέγεθος της ζήτησης, αλλά γνωρίζουμε την κατανομή των αποθεμάτων της. Η κατανομή αυτή μπορεί να είναι συνεχής ή ασυνεχής. Τα συστήματα αυτών των αποθεμάτων ονομάζονται στοχαστικά. π.χ.

(α′) Βιοτεχνία επίπλων είναι υποχρεωμένη να παραδίδει στα καταστήματα 200 έπιπλα την εβδομάδα. Η ζήτηση είναι σταθερή, άρα στατική.

(β′) Βιοτεχνία επίπλων είναι υποχρεωμένη να παραδώσει στα καταστήματα 200 έπιπλα την πρώτη εβδομάδα, 150 την επόμενη, 300 τη μεθεπόμενη κλπ. Σε ευτή την περίπτωση η ζήτηση είναι δυναμική.

(γ′) Η ζήτηση συγκεκριμένης μάρκας laptop ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο λ=1/10. Εφόσον ακολουθεί κάποια κατανομή, είναι στοχαστική.

2. **Αναπλήρωση ή εφοδιασμός (Q):**
   Με τον όρο αναπλήρωση (ή εφοδιασμό) εννοούμε την ποσότητα ενός προϊόντος που προστίθεται στα αποθέματα. Την ποσότητα αυτή τη συμβολίζουμε με Q και το μέγεθός της μπορεί να είναι σταθερό ή να μεταβάλλεται. Η προμήθεια της ποσότητας Q μπορεί να γίνει με αγορά ή με παραγωγή.

3. **Χρόνος αναπλήρωσης ή εφοδιασμού (L):**
   Είναι η χρονική περίοδος μεταξύ της έκδοσης μιας παραγγελίας για την αναπλήρωση (ή εφοδιασμό) ενός προϊόντος, και της εισόδου του προϊόντος αυτού στην αποθήκη. Ο χρόνος αναπλήρωσης μπορεί να είναι σταθερός ή να μεταβάλλεται και συμβολίζεται με το γράμμα L.

4. **Χρονική στιγμή εφοδιασμού - συχνότητα:**
   Οι δύο παραπάνω μεταβλητές μας δηλώνουν πότε και πόσο συχνά πρέπει να γίνεται η αναπλήρωση. Εκείνος που παίρνει τις αποφάσεις για την τύχη μιας επιχείρησης, μπορεί να ελέγχει και τις δύο μεταβλητές συγχρόνως ή μόνο τη μία, π.χ. δεν ελέγχουμε τη συχνότητα επισκέψεων ενός πελάτη αλλά την ποσότητα προϊόντν που αγοράζει. Όταν ένα προϊόν αγοράζεται ανά μερίδες δεν ελέγχουμε την ποσότητα που βάζουμε αλλά τη συχνότητα παραγωγής.

5. **Κύκλος παραγωγής ή παραγγελίας:**
   Είναι το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαχρονικών παραγγελιών ή παραγωγών.

6. **Πολιτική διαχείρησης αποθεμάτων:**
   Με τον όρο πολιτική διαχείρησης αποθεμάτων εννοούμε μια σειρά κανόνων , βάση των οποίω αποφασίζεται το πότε και σε ποιά ποσότητα πρέπει να αναπληρωθεί το απόθεμα.

7. **Κόστος:**
   Σε ένα σύστημα αποθεμάτων εμφανίζονται συνήθως οι παρακάτω μορφές κόστους:

Κόστος παραγωγής ή παραγγελίας: Το κόστος παραγωγής ή παραγγελίας αποτελείται από δύο συνιστώσες. Ένα σταθερό κόστος που είναι ανεξάρτητο από την ποσότητα που παράγεται ή παραγγέλεται και ένα μεταβλητό κόστος ανάλογο της ποσότητας που παράγεται ή παραγγέλεται. Στο σταθερό κόστος Κ, που ονομάζεται και κόστος προπαρασκευής, περιλαμβάνονται όλες οι δαπάνες για την έναρξη ενός παραγωγικού κύκλου ή την έκδοση μιας παραγγελίας, όπως είναι τα διοικητικά, τα διαχειριστικά έξοδα, το κόστος των προκαταρκτικών εργασιών, τα έξοδα παραλαβής των υλικών κλπ. Εάν συμβολίσουμε με c το κόστος παραγγελίας ή παραγωγής μιας μονάδας προϊόντος, τότε το κόστος για την παραγγελία ή παραγωγή Q μονάδων θα είναι $c * Q$. Άρα το κόστος παραγγελίας ή παραγωγής Q μονάδων προϊόντων είναι K_1=K* Q.

Κόστος διατήρησης αποθεμάτων: Είναι το κόστος που καταβάλλεται για τη διατήρηση μιας ποσότητας ενός προϊόντος ως απόθεμα στην πορεία του χρόνου. Το κόστος διατήρησης μεταβάλλεται ανάλογα με την ποσότητα του αποθέματος και τη χρονική διάρκεια αποθεματοποίησης, αποτελείται δε από τις παρακάτω συνιστώσες:

(α′) Κόστος επενδεδυμένου κεφαλαίου. Είναι ανάλογο προς το επίπεδο του αποθέματος και προς το χρόνο που παραμένει το προϊόν ως απόθεμα και υπολογίζεται συνήθως με το επιτόκιο που ισχύει στην αγορά.

(β′) Κόστος αποθήκευσης. Περιλαμβάνει τη δαπάνη του ενοικίου, τα έξοδα για τη λειτουργία και συντήρηση των κτιρίων αποθήκευσης, καθώς και τα έξοδα για τη φύλαξη των προϊόντων.

(γ′) Κόστος διαχείρησης λογιστικών εργασιών.

(δ΄) Κόστος ασφάλισης των αποθεμάτων.

(ε΄) Κόστος απόσβεσης. Οφείλεται στην παλαίωση ή στην αλλοίωση των προϊόντων. Το κόστος αυτό είναι ιδιαίτερα αισθητό στα εποχιακά προϊόντα, στα εμπορεύματα που έχπυν σχέση με τη μόδα και τα τρόφιμα.

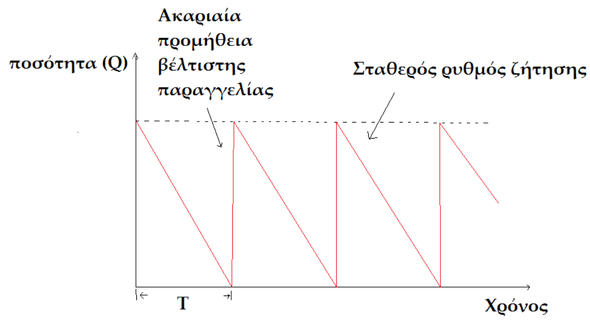
(ϛ΄) Κόστος εσωτερικής κίνησης. Περιλαμβάνει τις δαπάνες των εργασιών για τη μετακίνηση των αποθεμάτων στο χώρο αποθήκευσης, τα χρήματα που καταβάλλονται σε φορτηγά, γερανούς, πλατφόρμες κτλ.

Κόστος έλλειψης:
Το κόστος έλλειψης εμφανίζεται όταν οι ποσότητες ενός προϊόντος που υπάρχουν ως απόθεμα, δεν επαρκούν για να ικανοποιήσουν τη ζήτηση. Η ζήτηση αυτή έχει ως συνέπεια την απώλεια κερδών λόγω των χαμένων πωλήσεων και την απώλεια αξιοπιστίας της επιχείρησης. Εάν η έλλειψη έχει σχέση με τις πρώτες ύλες ή με προϊόντα που χρησιμοποιούνται στην παραγωγή, τότε οι απώλειες για την επιχείρηση συνίσταται στην παύση λειτουργίας των μηχανολογικών εγκαταστάσεων , στη διακοπή της εργασίας των εργατών και στην αναβολή εκτέλεσης παραγωγικών προγραμμάτων.

Το κόστος έλλειψης μπορεί να αντιμετωπιστεί με τακτά περιστασιακά μέτρα. Κάτι τέτοιο όμως έχει ως συνέπεια μεγαλύτερο κόστος προπαρασκευής, κόστος έκτακτης εργασίας, αυξημένο διαχειριστικό κόστος, περισσότερες δαπάνες μεταφοράς, καθώς και κόστος από την μεταβολή των προγραμμάτων παραγωγής. Το κόστος έλλειψης είναι ανάλογο ως προς την ποσότητα και τη χρονική διάρκεια της έλλειψης, όταν στο σύστημα αποθεμάτων δεν επιτρέπονται απώλειες παραγγελιών, και ανάλογο ως προς την ποσότητα έλλειψης, όταν επιτρέπονται οι απώλειες.

Έστω ότι ο χρόνος μεταξύ της παραγγελίας και της παραλαβής του προϊόντος στο ράφι είναι μηδενικός (L=0). Σ΄ αυτή την περίπτωση υπάρχουν δύο κύριες μέθοδοι της στοιχειώδους διατήρησης των αποθεμάτων:

Περιοδικό σύστημα: , όπου ο χρόνος μεταξύ δύο παραγγελιών είναι σταθερός (T=σταθερά). Αυτή η μέθοδος έχει το μειονέκτημα ότι υπάρχει ο κίνδυνος εξάντλησης των αποθεμάτων που μπορούν να αποδειχθούν δαπανηρά.

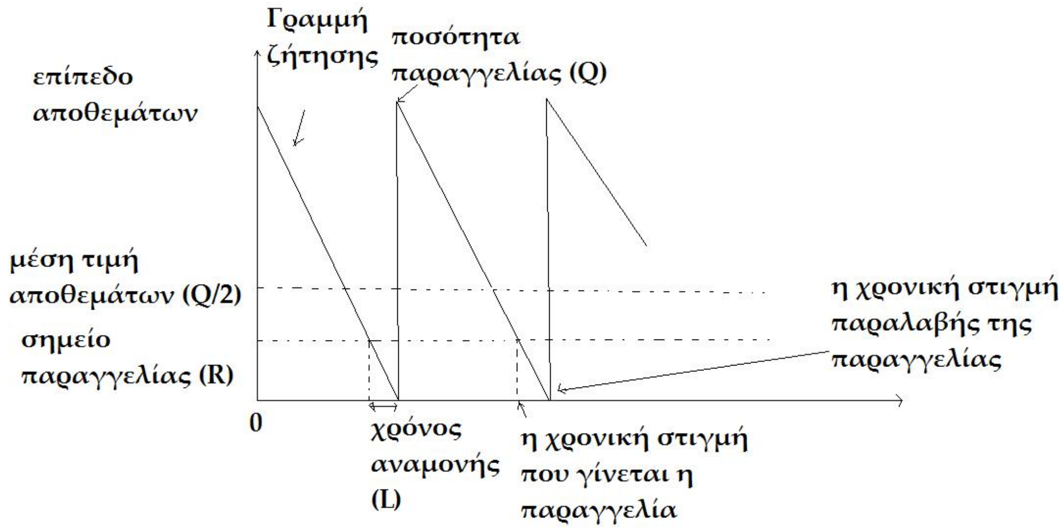


῝Ψ῝ΛΕ TIME=T.ϑπγ

Μη-περιοδικό σύστημα , όπου ο χρόνος T είναι τ.μ. Εδώ δεν υπάρχει ο κίνδυνος εξάντλησης των αποθεμάτων, με αποτέλεσμα λιγότερες δαπάνες. Ωστόσο αυτή η μέθοδος είναι δυσκολότερο να συστηματοποιηθεί σε σχέση με την πρώτη.

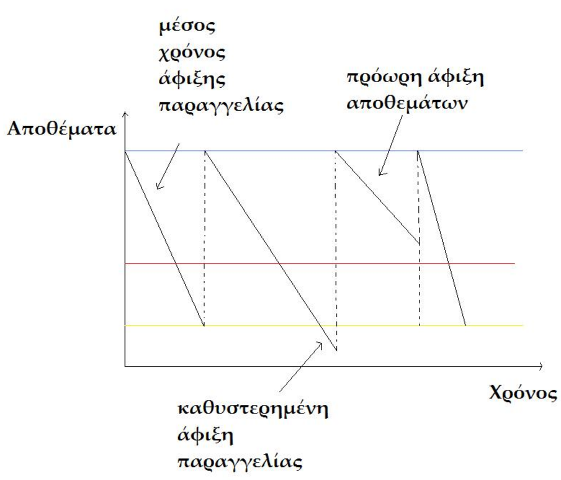
Έστω ότι η παραλαβή της παραγγελίας δε γίνεται ακαριαία τη στιγμή που την κάνουμε, δηλαδή $L \neq 0$. Σάυτή την περίπτωση ξεχωρίζουμε και πάλι δυο υποπεριπτώσεις:

(α΄) Το L είναι σταθερό.



λεαδ τιμε.ϑπγ

(β΄) Το L είναι τυχαία μεταβλητή.



Βιβλιογραφία

[29667869-Methods-and-Models-of-Operations-Research] Arnold Kaufmann, Brofesseur a 1'Institut Polytechnique de Grenoble , Conseilleur Scientifique a la Compagnie des Machines Bull

[Operations Research. An Introduction (Prentice Hall 2007.8.ed)] Hamdy A. Taha

[Operations-Research-Applications-and-Algorithms] Wayne-L-Winston

[Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα] Κολέτσος Ιωάννης, Στογιάννης Δημήτριος, Αθήνα 2012, Εκδόσεις Συμεών

Κεφάλαιο 4

Βασικό Μοντέλο **EOQ**

Για τη μελέτη του βασικού μοντέλου EOQ, κάνουμε τις παρακάτω υποθέσεις:

(α΄) Η ζήτηση (D) είναι σταθερή.

(β΄) Αν μια παραγγελία ανεξαρτήτως μεγέθους (έστω Q μονάδες) φτάνει στην επιχείρηση, τότε έχουμε και ένα κόστος παραγγελίας και εγκατάστασης K.

(γ΄) Ο χρόνος αναμονής από την παραγγελία ως την παραλαβή της είναι 0 ($L = 0$).

(δ΄) Δεν υπάρχουν ελλείψεις.

(ε΄) Το ετήσιο κόστος για την αποθήκευση του αποθέματος είναι K_c.

Το μοντέλο *EOQ* καθορίζει μια πολιτική παραγγελιών που ελαχιστοποιεί σε ετήσια βάση το κόστος παραγγελίας, το κόστος αγοράς και το κόστος αποθήκευσης, λαμβάνοντας υπ΄ όψην τις παραπάνω προϋποθέσεις.

Κατ΄ αρχάς, απ΄τη στιγμή που προϊόντα τα φτάνουν ακαριαία με το που γίνονται οι παραγγελίες, δεν πρέπει να παραγγέλνουμε όταν το επίπεδο των αποθεμάτων $R > 0$, γιατί έτσι θα έχουμε περιττό κόστος αποθήκευσης. Από την άλλη όμως, κάνοντας την παραγγελία όταν το απόθεμα φτάσει σε ένα επίπεδο $R > 0$, προλαμβάνουμε την πιθανότητα να ξεμείνουμε από το συγκεκριμένο προϊόν, με ό,τι αυτό συνεπάγεται. Αυτές οι παρατηρήσεις μας δείχνουν ότι η πολιτική που ελαχιστοποιεί τα ετήσια κόστη πρέπει να γίνεται όταν $R > 0$ και κάθε φορά να παραγγέλνουμε την ίδια ποσότητα.

Έστω Q η ποσότητα παραγγελίας όταν $R = 0$, και Q^* η ποσότητα που ελαχιστοποιεί το ετήσιο κόστος (Τ῀(χ». Τότε έχουμε τον εξής τύπο για το ετήσιο κόστος:

$TC(q)$= ετήσιο κόστος παραγγελίας (OC)+ετήσιο κόστος αποθήκευσης (CC)+ετήσιο κόστος αγοράς.

Αφού κάθε φορά παραγγέλνουμε Q μονάδες, το πλήθος παραγγελιών κάθε χρόνο είναι $\frac{D}{q}$. Έτσι:

$$\frac{\text{Κόστος Παραγγελίας}}{\text{Έτος}} = \frac{\text{Κόστος παραγγελίας}}{\text{Παραγγελία}} * \frac{\text{Παραγγελίες}}{\text{Έτος}} = \frac{K * D}{Q} \tag{4.1}$$

Το κόστος αγοράς μιας μονάδας προϊόντων έστω ότι το συμβολίζουμε με P. Άρα:

$$\text{Κόστος Αγοράς} = \frac{\text{Κόστος Αγοράς}}{\text{Μονάδα}} * \frac{\text{Μονάδες που αγοράζουμε}}{\text{χρόνο}} = P * D. \tag{4.2}$$

.

Ορισμός: Κάθε χρονική περίοδος που ξεκινά από τη στιγμή που φτάνουν οι παραγγελίες στα χέρια της επιχείρησης και τελειώνει τη στιγμή λίγο πριν γίνει η επόμενη παραγγελία λέγεται *κύκλος*.

Κάθε κύκλος έχει χρονική διάρκεια $\frac{Q}{D}$, και οι κύκλοι συνολικά είναι $\frac{D}{Q}$ το χρόνο.

Το μέσο απόθεμα κατά τη διάρκεια ενός κύκλου είναι $\frac{Q}{2}$, δηλαδή το μισό του μέγιστου αποθέματος που έχει επιτευχθεί κατά τη διάρκεια του κύκλου. Αυτό το μέγεθος ισχύει για κάθε μοντέλου του οποίου η ζήτηση είναι σταθερή. Το ετήσιο κόστος αποθήκευσης υπολογίζεται ως εξής:

$$\text{Κόστος Αποθήκευσης} = \frac{\text{Κόστος Αποθήκευσης}}{\text{Κύκλο}} * \frac{\text{κύκλους}}{\text{χρόνο}} \tag{4.3}$$

Αφού το μέσο επίπεδο αποθέματος κατά τη διάρκεια κάθε κύκλου είναι $Q2$ και το μήκος κάθε κύκλου είναι $\frac{Q}{D}$, έχουμε:

$$\frac{\text{Κόστος αποθήκευσης}}{\text{κύκλο}} = \frac{Q}{2} * \frac{Q}{D} * K_c = \frac{Q^2 * K_c}{2D} \tag{4.4}$$

$$\text{Κόστος Αποθήκευσης} = \frac{Q^2 * K_c}{2D} * \frac{D}{Q} = K_c * \frac{Q}{2}. \tag{4.5}$$

Άρα το συνολικό ετήσιο κόστος υπολογίζεται από τον τύπο:

$$TC = OC + CC + p * D \tag{4.6}$$

δηλαδή:

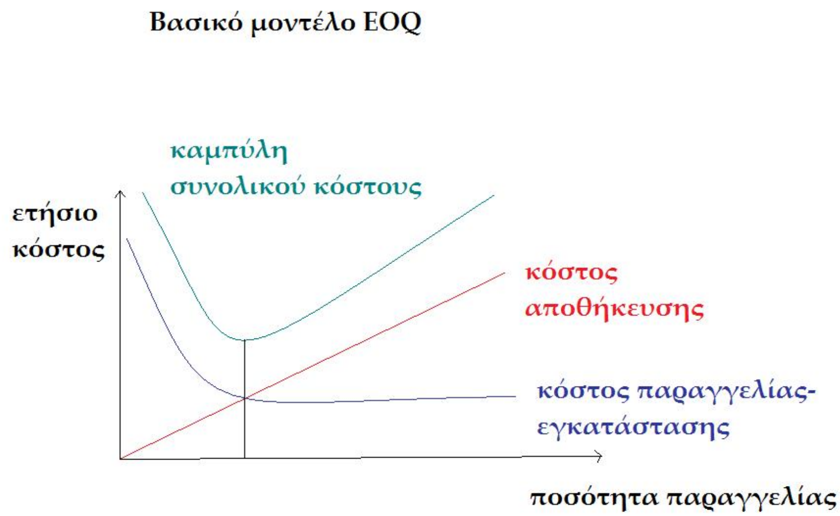
$$TC(q) = \frac{K * D}{Q} + K_c * \frac{Q}{2} + p * D \tag{4.7}$$

Για να βρούμε την τιμή του Q^* που ελαχιστοποιεί το TC, εργαζόμαστε ως εξής:

$$TC^{'} = 0 \Leftrightarrow -\frac{KD}{Q^2} + \frac{K_c}{2} = 0 \Leftrightarrow Q^* = \sqrt{\frac{2KD}{K_c}}. \tag{4.8}$$

$$TC"(Q) = \frac{2KD}{Q^3} > 0 \ \ \forall Q > 0 \tag{4.9}$$

, άρα το Q^* ελαχιστοποιεί το συνολικό ετήσιο κόστος.


Βασικό μοντέλο EOQ
καμπύλη
συνολικού κόστους
ετήσιο
κόστος
κόστος
αποθήκευσης
κόστος παραγγελίας-
εγκατάστασης
ποσότητα παραγγελίας

μοδελ.θπγ

4.1 Πλεονεκτήματα του μοντέλου EOQ :

Η ανάλυση EOQ είναι πολύ απλή, χρειάζεται όμως προσοχή στα στοιχεία κόστους. Λόγω της απλότητάς της χτησιμοποιείται σε μεγάλη κλίμακα μιας και αποτελεί αρκετά καλή προσέγγιση της βέλτιστης πολιτικής παραγγελιών, ακόμη και όταν η ζήτηση είναι άγνωστη (τ.μ.). Ένα χαρακτηριστικό της είναι ότι η συνάρτηση $TC(Q)$ είναι σχεδόν ' επίπεδη ' στην περιοχή της EOQ. Αυτό σημαίνει ότι μικρά σφάλματα στην εκτίμηση των παραμέτρων, τα οποία οδηγούν σε σφάλμα στην τιμή του EOQ, δε μεταβάλλουν σημαντικά το κόστος, δηλαδή:
Έστω

$$Q = (1+p) * Q^* = (1+p) * \sqrt{\frac{2KD}{K_c}}. \tag{4.10}$$

Τότε,

$$TC(Q) = \frac{KD}{(1+p)\sqrt{\frac{2KD}{K_c}}} + \frac{1+p}{2} * \sqrt{\frac{2KD}{K_c}} + p*D = \sqrt{\frac{2KD}{K_c}} * \frac{1}{2} * (1+p+\frac{1}{1+p}) + p*D \Leftrightarrow \tag{4.11}$$

$$TC(Q) = TC(Q^*) * \frac{1}{2} * (1+p+\frac{1}{1+p}) \Leftrightarrow \tag{4.12}$$

$$\frac{TC(Q) - TC(Q^*)}{TC(Q^*)} = \frac{p^2}{2*(1+p)} \tag{4.13}$$

,όπου p ένας πολύ μικρός αριθμός.

Έτσι,για παράδειγμα, ένα σφάλμα 50% στον υπολογισμό του EOQ οδηγεί σε αύξηση του κόστους μόλις κατά 8% , ενώ αντιθέτως ένα σφάλμα -50% στον υπολογισμό του EOQ οδηγεί σε αύξηση του κόστους κατά 25%.

Παράδειγμα: Έστω ότι η ετήσια ζήτηση είναι $D = 10000$ μονάδες, το κόστος παραγγελίας K=2 ευρώ, το κόστος μεταφοράς $K_c = 0,16$ ευρώ ανά μονάδα. Τότε
$EOQ = \sqrt{\frac{2KD}{K_c}} = \sqrt{\frac{2*10000*2}{0{,}16}} = 500$ μονάδες.
Το πλήθος των παραγγελιών το χρόνο που πρέπει να γίνουν είναι:

$\sqrt{\frac{D}{EOQ}} = \frac{10.000}{500} = 20$.
$TC = \frac{KD}{Q} + K_c * \frac{Q}{2} + p * D =$
$2 * \frac{10.000}{500} + 0,16 * \frac{500}{2} + 8 * 10.000 = 80.080$ ευρώ.

Εάν ελέγξουμε το κόστος για οποιαδήποτε άλλη ποσότητα εκτός από 500 μονάδες, θα δούμε ότι το κόστος είναι υψηλότερο.
π.χ. Έστω ότι κάθε φορά παραγγέλνουμε 600 κομμάτια. Τότε:
$TC = 8 * 10.000 + 2 * \frac{10.000}{600} + 0,16 * \frac{600}{2} = 80.081$ ευρώ.
Αν σε κάθε παραγγελία ζητάμε 300 κομμάτια, δηλαδή μικρότερη ποσότητα από το EOQ, θα έχουμε:
$TC = 8 * 10.000 + 2 * \frac{10.000}{300} + 0,16 * \frac{300}{2} = 80.091$ ευρώ.
Άρα το EOQ είναι η πιο συμφέρουσα ποσότητα που μπορούμε κάθε φορά να παραγγέλνουμε.

4.2 Χρόνος Αναμονής και Σημείο Παραγγελίας

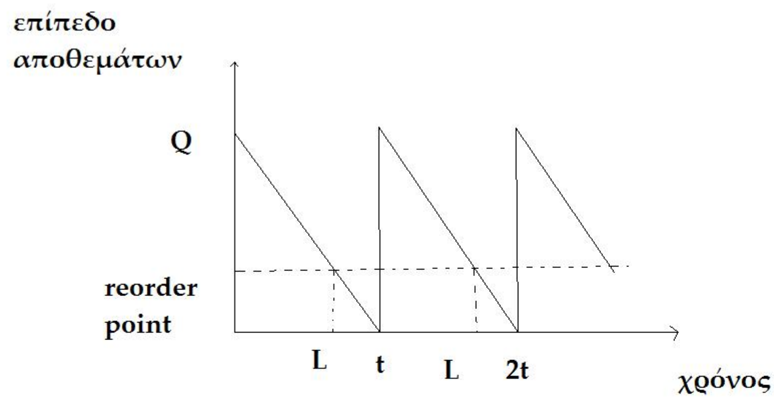
Υπάρχει ακόμα μια σημαντική παράμετρος στο σχεδιασμό συστήματος αποθεμάτων. Συνήθως, οι παραγγελίες δε φτάνουν τη στιγμή ακριβώς που γίνονται. Όπως αναφέραμε παραπάνω, ο χρόνος μεταξύ της παραγγελίας και της παραλαβής λέγεται Lead Time (L). Στα ντετερμινιστικά μοντέλα, το L είναι μια γνωστή σταθερά, ενώ στα στοχαστικά μοντέλα το L είναι τ.μ.

Πρέπει να προσέξουμε το εξής ενδεχόμενο. Εάν κάποιος περιμένει μέχρι τα αποθέματά του να τελειώσουν για να παραγγείλει, θα μείνει το χρονικό διάστημα L χωρίς αποθέματα αναγκαστηκά, με όλες τις συνέπειες που θα υπάρξουν. Επομένως η παραγγελία πρέπει να φτάσει πριν ξεμείνει η αποθήκη από τα αποθέματα. Υπάρχουν δύο μέθοδοι με τις οποίες μπορούμε να προλάβουμε την κατάσταση αυτή. Στην πρώτη μέθοδο, ο χρόνος που τελειώνουν τα αποθέματα είναι εκτιμώμενος, και η παραγγελία τοποθετείται σε νωρίτερη χρονική στιγμή από τον εκτιμώμενο χρόνο. Αν για παράδειγμα ο χρόνος αναμονής είναι 10 μέρες, ο υπεύθυνος μπορεί να εκτιμήσει το πότε θα τελειώσει το απόθεμα ώστε η παραγγελία να γίνει 10 μέρες νωρίτερα.

Η δεύτερη μέθοδος που χρησιμοποιείται και συχνότερα, βασίζεται στο επίπεδο των αποθεμάτων. Η παραγγελία γίνεται μόλις το επίπεδο φτάσει σε ένα σημείο, το λεγόμενο **σημείο παραγγελίας** ή **reorder point (R)**. Αυτό σημαίνει ότι εάν η παραγγελία γίνει όταν τα αποθέματα φτάσουν στο reorder point, θα τελειώσουν μόλις η παραγγελία φτάσει στα χέρια μας. Έτσι, το reorder point είναι η ποσότητα που έχει πέσει το απόθεμα, η οποία ικανοποιεί τη ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής. Ο τύπος που υπολογίζει το reorder point είναι:

$$R = L * D$$

.



ποιντ.θπγ

4.3 Σταδιακή παράδοση παραγγελίας

Έστω τώρα ότι οι μονάδες που παραγγέλνουμε δε φτάνουν μετά από συγκεκριμένο χρονικό διάστημα, αλλά με ομοιόμορφο ρυθμό P για μια χρονική περίοδο. Αυτό το μοντέλο είναι ιδιαίτερα χρήσιμο στις περιπτώσεις που οι μονάδες παράγονται σε εσωτερικές εγκαταστάσεις και αποθηκεύονται για να ικανοποιήσουν μια ομοιόμορφη ζήτηση. Αυτό το μοντέλο αναφέρεται και ως μοντέλο *μοντέλο οικονομικής ποσότητας παραγωγής (EPQ)*.

Η πρώτη προϋπόθεση για να δημιουργηθεί απόθεμα είναι ότι ο ρυθμός τροφοδοσίας P είναι μεγαλύτερος από το ρυθμό ζήτησης D κατά τη διάρκεια της περιόδου παραγωγής ή προμήθειας. Κατά τη διάρκεια της ζήτησης, τα αποθέματα τοποθετούνται με σταθερό ρυθμό P μονάδων ανά περίοδο και πωλούνται με ρυθμό D μονάδων ανά περίοδο. Έτσι, σάυτό το χρονικό διάστημα, το απόθεμα συσσωρεύεται με ρυθμό $P - D$ μονάδες ανά περίοδο. Η παράμετρος σχεδιασμού γι΄ αυτό το σύστημα είναι πάλι η ποσότητα παραγγελίας, αλλά σε αυτή την περίπτωση το μέγιστο επίπεδο παραγγελίας δεν ισούται υποχρεωτικά με την ποσότητα παραγγελίας. Ο λόγος είναι ότι δε χρειάζεται κάποιος χρόνος μέχρι να λάβουμε όλη την ποσότητα που παραγγείλαμε και κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου κάποιες από τις μονάδες που είχαν φτάσει καταναλώνονται. Ένας άλλος τρόπος καθορισμού αυτού του μοντέλου είναι ο καθορισμός του χρονικού διαστήματος ανεφοδιασμού αντί της ποσότητας παραγγελίας. Γνωρίζοντας το ρυθμό και την περίοδο ανεφοδιασμού, μπορεί να προσδιοριστεί η ποσότητα παραγγελίας.

Το μοντέλο αυτό μπορεί να τυποποιηθεί εύκολα με τρόπο παρόμοιο με αυτόν του βασικού μοντέλου EOQ. Η μόνη διαφορά εδώ είναι ότι το επίπεδο του μέσου αποθέματος δεν είναι το μισό της μέγιστης ποσότητας παραγγελίας. Αφού το σύστημα είναι ακόμα γραμμικό και το ελάχιστο απόθεμα είναι 0, το μέσο απόθεμα υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\text{Μέσο Απόθεμα} = \frac{\text{Μέγιστο Απόθεμα} + \text{Ελάχιστο Απόθεμα}}{2} = \frac{\text{Μέγιστο Απόθεμα} + 0}{2} = \frac{\text{Μέγιστο Α}}{2}$$

Έτσι εάν το μέσο απόθεμα το εκφράσουμε σε όρους ποσότητας παραγγελιών, το μέσο κόστος του συστήματος αποθεμάτων μπορεί να βρεθεί σαν συνάρτηση της ποσότητας αυτής.
Έστω ST είναι η περίοδος ανατροφοδότησης, Q η ποσότητα παραγγελίας και P ο ρυθμός ανατροφοδότησης. Τότε:

$$ST = \frac{Q}{P} \tag{4.15}$$

Κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου, το επίπεδο των αποθεμάτων αυξάνεται κατά $P - D$ μονάδες ανά μονάδα χρόνου. Αν θεωρήσουμε ότι η παράδοση των παραγγελιών ξεκινά ακριβώς τη στιγμή που το απόθεμα έχει φτάσει στις 0 μονάδες, το μέγιστο επίπεδο αποθεμάτων ισούται με τη συγκέντρωση κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου. Σάυτή την περίπτωση, το βέλτιστο απόθεμα Q^* δίνεται από τον τύπο:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 * K * D}{K_c(1 - \frac{D}{P})}} \tag{4.16}$$

και το βρίσκουμε πάλι από την παραγώγιση του TC που τώρα ο τύπος του είναι:

$$TC = K_c * \frac{Q}{2} * (1 - \frac{D}{P}) + \frac{K * D}{Q} \tag{4.17}$$

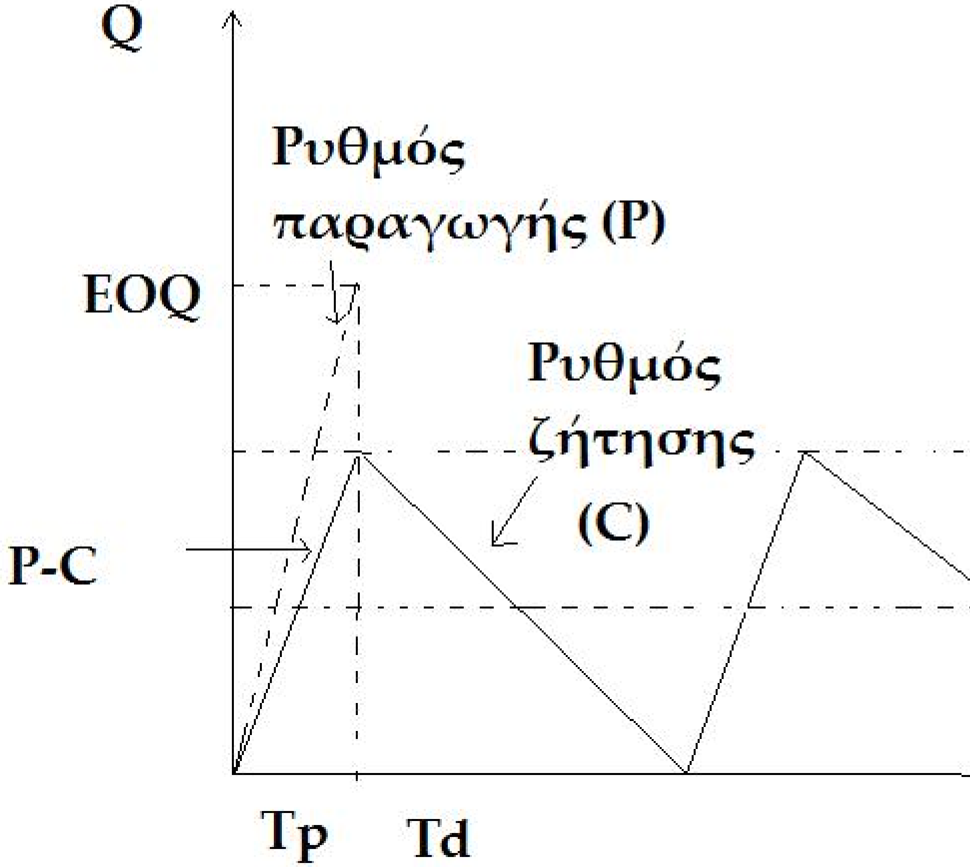
, όπου

$$OC = \frac{K * D}{Q} \tag{4.18}$$

και

$$CC = K_c * \frac{Q}{2} * (1 - \frac{D}{P}) \tag{4.19}$$

.



δεμανδ.θπγ

4.4 *EOQ* Μοντέλο με ελλείμματα

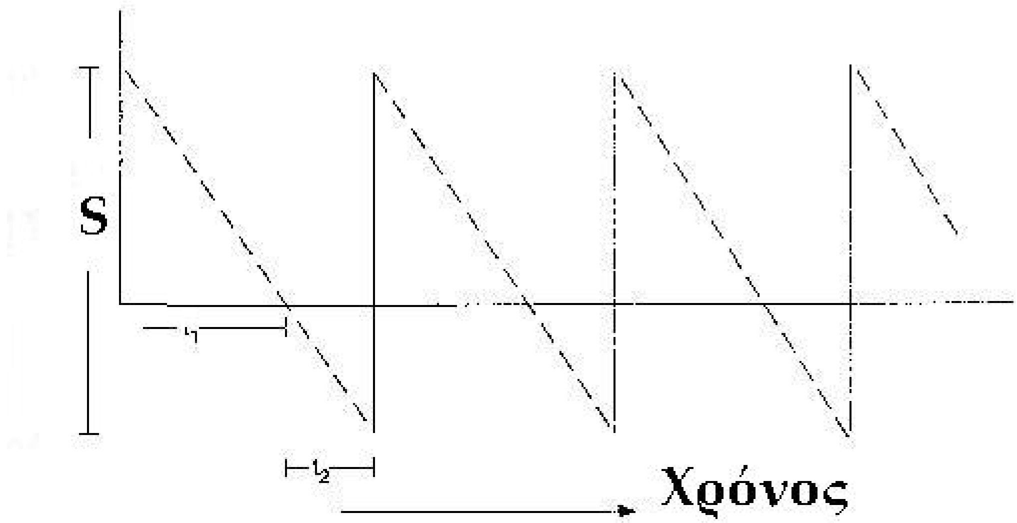
Σ' αυτό το μοντέλο έχουμε την περίπτωση έλλειψης αποθεμάτων χωρίς άμεση αντικατάσταση, όπως συνέβαινε στις παραπάνω περιπτώσεις. Αυτό όμως έχει ως συνέπεια να υπάρχει κάποιο κόστος για κάθε μονάδα που ζητάει ο πελάτης και να πρέπει να περιμένει έως ότου καταφτάσει η παραγγελία λόγω έλλειψης του προϊόντος, εναλλακτικά μπορεί να πάει σε κάποιον άλλο και να βρει αμέσως αυτό που χρειάζεται. Τα αποθέματα που βρίσκονται σε έλλειψη και υπάρχει ζήτηση γι' αυτά λέγονται αρνητικά αποθέματα. Όταν φτάσουν οι παραγγελίες, πρώτα ικανοποιείται η ζήτηση που γίνεται κατά τη διάρκεια της έλλειψης. Η υπόλοιπη ποσότητα που μένει καθορίζει και τη μέγιστη ποσότητα του προϊόντος που θα αποθηκευτεί. Εδώ πρέπει να προσέξουμε τα εξής σημεία. Πρώτον, υποτίθεται ότι η παραγγελία καταφτάνει όταν το αρνητικό απόθεμα φτάσει σε ένα κατώτατο όριο S. Συνεπώς, το $reorder\ \ point$ παίρνει τη μορφή:

$$R = D * L - S$$

Εάν έχουμε μοντέλα που δεν επιτρέπεται το αρνητικό απόθεμα, δηλαδή $S = 0$, έχουμε τον παλιό τύπο του $reorder\ \ point$, δηλαδή:

$$R = D * L$$

Το δεύτερο σημείο που πρέπει να προσέξουμε είναι ότι εάν ο πελάτης περιμένει να φτάσει το προϊόν, αυτή η αναμονή του μπορεί να αντισταθμιστεί με άλλους παράγοντες, όπως π.χ. οι εκπτώσεις, η πτώση της τιμής λόγω του ότι το προϊόν δεν είναι πλέον στη μόδα, καινούργιες ανταγωνιστικές τιμές από άλλες εταιρίες κλπ κλπ. Όλα αυτά είναι δαπάνες για τον επιχειρηματία, που μπορεί να θεωρηθούν και ως ποινές για την καθυστερημένη παράδοση του προϊόντος στον πελάτη. Αυτές οι δαπάνες συμβολίζονται με F , το οποίο συγκεκριμένα είναι κόστος επιστρεφόμενης παραγγελίας ανά μονάδας προϊόντος, ανά μονάδα χρόνου.



ςοστ.θπγ

Σχήμα 4.1: Αρνητικό απόθεμα

Για να δείξουμε το μοντέλο αυτό με τύπους, θα χρησιμοποιήσουμε 3 μεταβλητές, την ποσότητα παραγγελίας Q, τη μέγιστη ποσότητα αρνητικού αποθέματος S και τη μέγιστη ποσότητα αποθέματος I_{max}. Η ποσότητα παραγγελίας δίνεται λοιπόν από τον τύπο:

$$Q = I_{max} + S$$

Όπως προαναφέραμε, όταν η ελάχιστη ποσότητα αποθέματος φτάνει μέχρι το 0, το μέσο απόθεμα το ορίζουμε ως το μισό του μεγίστου. Να σημειωθεί όμως ότι το απόθεμα είναι 0 για κάποιο χρονικό διάστημα. Αν θέσουμε t_2 αυτό το χρονικό διάστημα, θα έχουμε:

Κόστος αποθήκευσης ανά μονάδα την περίοδο $t_2 = 0$

Κόστος αποθήκευσης ανά μονάδα την περίοδο $t_1 = K_c * \frac{Q-S}{2}$

Μέσο κόστος αποθήκευσης ανά μονάδα χρόνου$=\frac{K_c * \frac{Q-S}{2} * t_1 + 0 * t_2}{t_1 + t_2} = \frac{t_1}{t} * K_c * \frac{Q-S}{2}$, όπου $t_1 + t_2 = t$.

Το t_2 είναι ο χρόνος κατά τον οποίο το αρνητικό απόθεμα πέφτει μέχρι την τιμή S με ρυθμό D μονάδων ανά μονάδα χρόνου. Έτσι, $t_2 = \frac{S}{D}$. Το $t = t_1 + t_2$ είναι η περίοδος κατά την οποία Q μονάδες ξοδεύονται με ρυθμό D μονάδων ανά μονάδα χρόνου. Συνεπώς,$t_1 = t - t_2 = \frac{Q-S}{D}$.Άρα,

Μέσο κόστος αποθήκευσης ανά μονάδα χρόνου$= \frac{\frac{Q-S}{D}}{\frac{Q}{D}} * \frac{K_c*(Q-S)}{2} = \frac{K_c*(Q-S)^2}{2*Q}$.

Το κόστος παραγγελίας παραμένει ως έχει: $OC = \frac{K*D}{Q}$

Αυτή τη φορά για το συγκεκριμένο μοντέλο έχουμε ένα ακόμα κόστος, το κόστος απώλειας. Σαν F συμβολίζουμε το κόστος ανά μονάδα αρνητικών αποθεμάτων, ανά μονάδα χρόνου. Το μέσο αρνητικό απόθεμα είναι $\frac{S}{2}$ και το υπολογίζουμε κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος t_2. Τότε:

Αρνητικό κόστος ανά μονάδα χρόνου κατά τη διάρκεια $t_1 = 0$

Αρνητικό κόστος ανά μονάδα χρόνου κατά τη διάρκεια $t_2 = F * \frac{S}{2}$.

Έτσι,

Μέσο αρνητικό κόστος ανά μονάδα χρόνου$=\frac{t_1*0+t_2*\frac{F*S}{2}}{t} = \frac{F*S^2}{2Q}$.

Άρα,το συνολικό κόστος αποθεμάτων ανά μονάδα είναι:

$TC = CC+OC+$Αρνητικό κόστος ανά μονάδα χρόνου$=\frac{K_c*(Q-S)^2}{2*Q} + \frac{K*D}{Q} + \frac{F*S^2}{2*Q}$

Κάνοντας τις ίδιες διαδικασίες για να βρούμε τη βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας, δηλαδή θέτοντας $\frac{\partial TC}{\partial Q} = 0$ και $\frac{\partial TC}{\partial S} = 0$ βρίσκουμε τελικά:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2*K*D}{K_c}} * \sqrt{\frac{K_c+F}{F}}$$
$$S^* = \sqrt{\frac{2*K*D}{K_c}} * \sqrt{\frac{K_c^2}{F*(K_c+F)}}$$

Παράδειγμα: Έστω ότι σε ένα videoclub η ετήσια ζήτηση είναι $D = 10.000$ ταινίες το χρόνο, $F = 1$ ευρώ η ταινία, $K_c = 0,5$ ευρώ η ταινία το έτος και K=20 ευρώ.

Επομένως, $Q^* = \sqrt{\frac{2*20*10.000}{0,5} * \frac{1+0,5}{1}} \simeq 1.095$ ταινίες

$S^* = 1.095 * \frac{0,5}{1+0,5} \simeq 365$ ταινίες.

Βιβλιογραφία

[en.wikipedia.org/wikiiEconomic_order _quantity#Example]

[29667869-Methods-and-Models-of-Operations-Research] Arnold Kaufmann, Brofesseur a 1'Institut Polytechnique de Grenoble , Conseilleur Scientifique a la Compagnie des Machines Bull

[Operations Research. An Introduction (Prentice Hall 2007.8.ed)] Hamdy A. Taha

[Operations-Research-Applications-and-Algorithms] Wayne-L-Winston

[Notes in inventory management] Author: Dr. Dimitrios Blaxos

[Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα] Κολέτσος Ιωάννης, Στογιάννης Δημήτριος, Αθήνα 2012, Εκδόσεις Συμεών

Κεφάλαιο 5

EOQ με εκπτώσεις

5.1 Α.) EOQ με εκπτώσεις και σταθερό κόστος αποθήκευσης

Έως τώρα υποθέταμε ότι το ετήσιο κόστος δεν εξαρτάται από το μέγεθος της παραγγελίας και έτσι μπορούσαμε να αγνοήσουμε το ετήσιο κόστος αγοράς όταν υπολογίζαμε την ποσότητα της παραγγελίας που ελαχιστοποιεί το ετήσιο συνολικό κόστος. Στην πραγματικότητα όμως, οι προμηθευτές μειώνουν την τιμή αγοράς ανά μονάδα προϊόντος για μεγάλες παραγγελίες. Τέτοιου είδους μειώσεις αναφέρονται ως *εκπτώσεις ποσότητας*. Εάν ένας προμηθευτής προσφέρει εκπτώσεις ποσότητας, το ετήσιο κόστος αγοράς θα εξαρτηθεί από το μέγεθος της παραγγελίας. Το κόστος αποθήκευσης θεωρούμε ότι μένει σταθερό και ανεξάρτητο του κόστους αγοράς. Επομένως, ενώ στις προηγούμενες περιπτώσεις μπορούσαμε να αγνοήσουμε το κόστος αγοράς, εφ΄ όσον έμενε σταθερό, και υπολογίζαμε τη βέλτιστη ποσότητα χωρίς αυτό, τώρα όμως αφού εξαρτάται από το μέγεθος της παραγγελίας πρέπει να το λάβουμε υπ΄ όψην στους υπολογισμούς. Έτσι, για να βρούμε τη βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας, χρειαζόμαστε μια νέα προσέγγιση.

Έστω Q η ποσότητα παραγγελίας. Το γενικό μοντέλο ποσοτικών εκπτώσεων μπορεί να περιγραφτεί ως εξής:

- Αν $Q < b_1$, κάθε μονάδα κοστίζει P_1 ευρώ.
- Αν $b_1 \leq Q < b_2$, κάθε μονάδα κοστίζει P_2 ευρώ.

.
.
.

- Αν $b_{i-2} \leq Q < b_{i-1}$, κάθε μονάδα κοστίζει P_{i-1} ευρώ.
- Αν $b_{i-1} \leq Q < b_i \leq \infty$, κάθε μονάδα κοστίζει P_i ευρώ.

Τα $b_1, b_2, ..., b_{i-1}$ λέγονται σημεία μεταβολής της τιμής και ισχύει $P_i < P_{i-1} < ... < P_2 < P_1$. Υποθέτουμε ότι το κόστος αποθήκευσης παραμένει σταθερό.

Παράδειγμα: Έστω ότι το Πλαίσιο θέλει να προμηθευτεί με τηλεοράσεις. Ένας προμηθευτής του κάνει τις παρακάτω εκπτώσεις:

Ποσότητα	**Τιμή (ευρώ)**
1-99	430 ευρώ/ τηλεόραση
100-199	425 ευρώ/ τηλεόραση
200+	420 ευρώ / τηλεόραση

Τα σημεία μεταβολής είναι : $b_1 = 99$ τηλεοράσεις με $P_1 = 430$ ευρώ το κομμάτι, $b_2 = 199$ τηλεοράσεις με 425 ευρώ το κομμάτι και $b_3 \geq 200$ τηλεοράσεις με $P_3 = 420$ ευρώ το κομμάτι.

. Πριν εξηγήσουμε τον τρόπο με τον οποίο βρίσκουμε την ποσότητα παραγγελίας που ελαχιστοποιεί το συνολικό ετήσιο κόστος, θα χρησιμοποιήσουμε τους παρακάτω όρους:

.

(α') $TC_i(Q)$= συνολικό ετήσιο κόστος (περιλαμβάνοντας κόστος αποθήκευσης, αγοράς και παραγγελίας), αν κάθε παραγγελία είναι για Q μονάδες στην τιμή P_i.

(β') EOQ_i= η ποσότητα που ελαχιστοποιεί το συνολικό ετήσιο κόστος αν για κάθε ποσότητα παραγγελίας το κόστος αγοράς είναι P_i ανά μονάδα.

(γ') Το EOQ_i είναι αποδεκτό αν $b_{i-1} \leq EOQ_i \leq b_i$

(δ') $TC(Q)$= πραγματικό ετήσιο κόστος εάν κάθε φορά παραγγέλνουμε Q μονάδες προϊόντων.

Στόχος είναι να βρούμε την ποσότητα Q_i που ελαχιστοποιεί το $TC(Q_i)$. Τα βήματα που ακολουθούμε είναι τα παρακάτω:

Βήμα 1: Υπολογίζουμε με το γνωστό τύπο το EOQ_i :

$$EOQ = \sqrt{\frac{2*K*D}{K_c}}$$

Βήμα 2: Υπολογίζουμε τα $TC_i = OC + CC + P_i * D$ για τις διάφορες τιμές P_i στις διάφορες κατηγορίες .

Βήμα 3: Επιλέγουμε την ποσότητα και την κατηγορία τιμής με το μικρότερο κόστος.

Παράδειγμα (συνέχεια): Στο προηγούμενο παράδειγμα, έστω ότι το κόστος αποθήκευσης είναι $K_c = 120$ ευρώ, το κόστος παραγγελίας είναι K=150 ευρώ και η ετήσια ζήτηση είναι D=1.000 μονάδες. Σύμφωνα με τα παραπάνω βήματα:

Βήμα 1:

$$EOQ = \sqrt{\frac{2 * 150 * 1000}{120}} = 50 \tag{5.1}$$

τηλεοράσεις.

Βήμα 2: (α′)

$$TC_1(Q = 50) = OC+CC+P_1*D = \frac{1000}{50}*150+\frac{50}{2}*120+430*1000 = 436000 \tag{5.2}$$

ευρώ.

(β′) Όσο απομακρυνόμαστε από το EOQ, τόσο αυξάνει το TC :

$$TC_2(Q = 100) < TC(Q = 199) \tag{5.3}$$

$$TC_2(Q = 100) = \frac{1000}{100} * 150 + \frac{100}{2} * 120 + 425 * 1000 = 432500 \tag{5.4}$$

ευρώ.
Παρατηρούμε ότι $TC_2 < TC_{EOQ}$.

(γ′)

$$TC_3(Q = 200) = \frac{1000}{200} * 150 + \frac{200}{2} * 120 + 420 * 1000 = 432750 \tag{5.5}$$

ευρώ.

Βήμα 3: Επιλέγουμε επομένως $Q \in (100, 199)$ και για $Q = 100$ μονάδες έχουμε $mincost = 432500$ ευρώ.

.

5.2 Β.) *EOQ*με εκπτώσεις και κόστος αποθήκευσης ως ποσοστό της τιμής

Αυτή η περίπτωση είναι παρόμοια με την παραπάνω, με τη διαφορά ότι το κόστος αποθήκευσης εκφράζεται σαν ποσοστό του κόστους αγοράς του αντικειμένου, με αποτέλεσμα το ετήσιο κόστος αποθήκευσης να εξαρτάται επίσης από το μέγεθος της παραγγελίας. Τα βήματα που ακολουθούμε σε αυτή την περίπτωση για την εύρεση της βέλτιστης ποσότητας παραγγελίας με το ελάχιστο συνολικό κόστος είναι τα παρακάτω:

Βήμα 1: Βρίσκουμε χωριστά EOQ για κάθε τιμή K_c.

Βήμα 2: Υπολογίζουμε τα συνολικά κόστη από τον τύπο TC

(α΄) Αν η EOQ του βήματος 1 είναι δεκτή, τότε υπολογίζουμε $TC(Q = EOQ)$

(β΄) Αν η EOQ του βήματος 1 απορρίπτεται, τότε:

i. Αν η EOQ είναι μικρότερη του διαστήματος τιμών, ως Q επιλέγουμε το αριστερό άκρο του διαστήματος (μικρότερη τιμή).

ii. Αν η EOQ είναι μεγαλύτερη του διαστήματος τιμών, ως Q επιλέγουμε το δεξί άκρο (μεγαλύτερη τιμή).

Βήμα 3: Συγκρίνουμε τα TC του βήματος 2.

Παράδειγμα: Έστω ότι η ετήσια ζήτηση σε σκληρούς δίσκους σε συγκεκριμένη εταιρία στα $Multirama$ είναι D=2.000, το κόστος παραγγελίας είναι K=150 ευρώ και το κόστος αποθήκευσης $K_c = 15\%$ της αξίας του προϊόντος. Τότε, λόγω ποσοτικής έκπτωσης που παρέχει η εταιρεία στα $Multirama$, οι τιμές διαμορφώνονται ως εξής:

Ποσότητα	**Τιμή (ευρώ)**	**Κόστος αποθήκευσης**
1-49	1.100	$15\% * 1100 = 165$ ευρώ
50-99	1000	$15\% * 1000 = 150$ ευρώ
100+	900	$15\% * 900 = 135$ ευρώ

(α′) $P = 1.100$ ευρώ,

$$EOQ_1 = \sqrt{\frac{2*150*2000}{165}} \approx 60 \tag{5.6}$$

, απορρίπτεται, αφού $60 \notin [1,49]$. Άρα , επιλέγουμε Q=49.

$$TC(Q=49) = \frac{2000}{49}*150 + \frac{49}{2}*165 + 1100*2000 = 2.210.165 \tag{5.7}$$

ευρώ.

(β′) $P = 1000$ ευρώ,

$$EOQ_2 = \sqrt{\frac{2*150*2000}{150}} \approx 63 \tag{5.8}$$

δεκτή, αφού $63 \in (53, 99)$

$$TC(Q=63) = \frac{2000}{63}*150 + \frac{63}{2}*150 + 1000*2000 = 2.009.478 \tag{5.9}$$

ευρώ.

(γ′) $P = 900$ ευρώ,

$$EOQ_3 = \sqrt{\frac{2*150*2000}{135}} \approx 67 \tag{5.10}$$

απορρίπτεται διότι $67 \notin [100, \infty)$, άρα παίρνουμε $Q = 100$.
$TC(Q = 100) = 1.809.750$ ευρώ, που είναι και το μικρότερο συνολικό κόστος.

Επομένως, η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας είναι $Q = 100$ μονάδες.

Κεφάλαιο 6

EOQ με διαβαθμίσεις στην τιμή αγοράς

Σάυτή την περίπτωση θεωρούμε ότι ο προμηθευτής μας κάνει την εξής έκπτωση για το προϊόν που θέλουμε να παραγγείλουμε:

$$P = \begin{cases} P_1, Q \leq q \\ P_2, Q > q \end{cases}$$

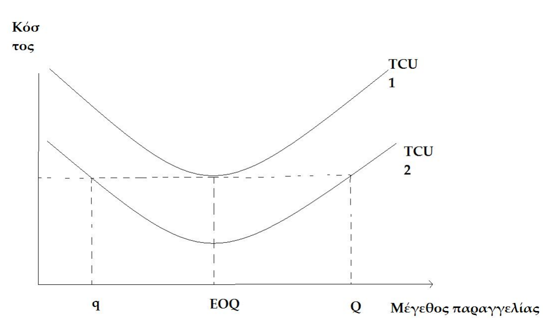
Τότε, το κόστος αγοράς διαμορφώνεται ως εξής:

$$P * C = \begin{cases} D * P_1, Q \leq q \\ D * P_2, Q > q \end{cases}$$

Υπενθυμίζουμε ότι:

Συνολικό Κόστος = Κόστος Αποθήκευσης + Κόστος Παραγγελίας + Κόστος Αγοράς

$$EOQ = \sqrt{\frac{2 * K * D}{K_c}} \tag{6.1}$$



ωιτη σαλες 1.θπγ

Άρα:

$$TC = \begin{cases} TC_1(Q) = D * P_1 + \frac{K*D}{Q} + \frac{Q}{2} * K_c, & Q \leq q \\ TC_2(Q) = D * P_2 + \frac{K*D}{Q} + \frac{Q}{2} * K_c, & Q > q \end{cases} \tag{6.2}$$

Ορίζουμε τις 3 περιοχές ως εξής:
1η περιοχή: $(\mathbf{0},\ EOQ)$
2η περιοχή: $(EOQ\mathbf{,}\ Q)$
3η περιοχή: $(Q,\ \ \infty)$,
όπου το $Q(> EOQ)$ καθορίζεται:

$TC_2(Q) = TC_1(EOQ)$

$$TC_2(Q) = D * P_2 + \frac{K * D}{Q} + \frac{Q}{2} * K_c = TC_1(EOQ) \Leftrightarrow \tag{6.3}$$

$$Q^2 + \frac{2 * (P_2 * D - TC_1(EOQ))}{K_c} * Q + \frac{2 * K * D}{K_c} = 0 \tag{6.4}$$

Τελικά το

$$optEOQ = E\hat{O}Q : \tag{6.5}$$

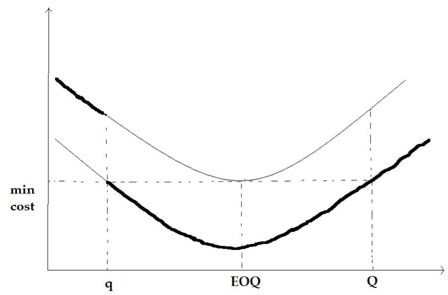
$$E\hat{O}Q = \begin{cases} EOQ, & q \in (0, EOQ) \bigcup (Q, \infty) \\ q, & q \in (EOQ, Q) \end{cases} \tag{6.6}$$

Τελικά τα βήματα που ακολουθούμε για να βρούμε το $E\hat{O}Q$ σάυτό το μοντέλο είναι:

Βήμα 1: Υπολογίζουμε το EOQ με το γνωστό τύπο:

$$EOQ = \sqrt{\frac{2 * K * D}{K_c}} \tag{6.7}$$

Αν $q \in (0, EOQ)$, τότε $E\hat{O}Q = EOQ$



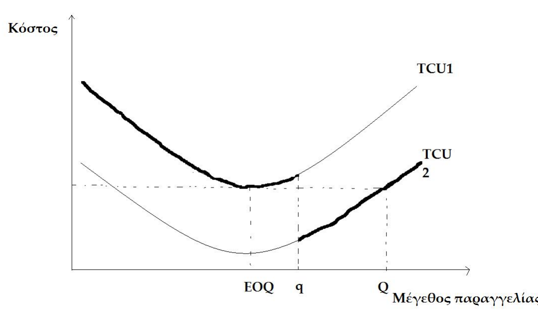
ωιτη σαλες 2.θπγ

Βήμα 2: Καθορίζω την ποσότητα Q $(Q > EOQ)$ λύνοντας το τριώνυμο:

$$Q^2 + \frac{2 * (P_2 * D - TC_1(EOQ))}{K_c} * Q + \frac{2 * K * D}{K_c} = 0 \qquad (6.8)$$

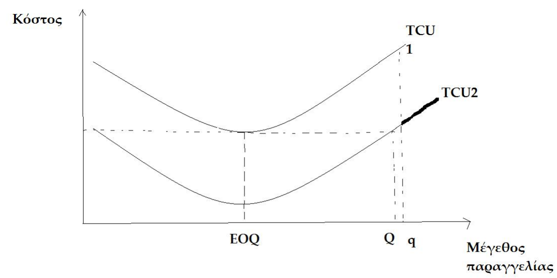
Βήμα 3: Προσδιορίζω τη 2η και 3η περιοχή:

- Αν $q \in (EOQ, Q)$, τότε $E\hat{O}Q = q$,με $mincost = TC_2(q)$



ωιτη σαλες 3.θπγ

- Αν $q \in (Q, \infty)$, τότε $E\hat{O}Q = EOQ$ με $TC = TC_1(EOQ)$



ωιτη σαλες 4.ϑπγ

6.1 Μοντέλο EOQ με πολλά είδη και περιορισμένο χώρο αποθήκευσης

Το μοντέλο αυτό αφορά $n(> 1)$ προϊόντα τα οποία διαχειριζόμαστε για την ικανοποίηση της ζήτησης που υπάρχει στην αγορά, για τα οποία υπάρχει ο περιορισμός χωρητικότητας της αποθήκης που χρησιμοποιείται για τη φύλαξή τους. Θεωρούμε ότι η ζήτηση είναι γνωστή και σταθερή, D_i. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι δεν επιτρέπονται ελλείμματα αποθέματος. Για κάθε προϊόν $i, i = 1, 2, ..., n$, ορίζουμε:

D_i : ζήτηση του $i-$ προϊόντος
K_i : κόστος παραγγελίας του $i-$προϊόντος
K_{c_i}: κόστος αποθήκευσης ανά μονάδα προϊόντος και χρόνου
Q_i: μέγεθος παραγγελίας του $i-$προϊόντος
a_i: απαιτούμενος χώρος αποθήκευσης μιας μονάδας από το $i-$είδος
A: μέγιστος διαθέσιμος χώρος αποθήκευσης για όλα τα n προϊόντα

Υπό την υπόθεση της μη ύπαρξης ελλειμμάτων, το μαθηματικό μοντέλο δίνεται από τον τύπο:

$$TC(Q_1, Q_2, ..., Q_n) = \sum_{i=1}^{n}(\frac{K_i * D_i}{Q_i} + P_i * D_i + K_{c_i} * \frac{Q_i}{2}) \tag{6.9}$$

,

με περιορισμό:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i * Q_i \leq A, \quad Q_i \geq 0 \ \ \forall i = 1, 2, ..., n \tag{6.10}$$

Τα βήματα προκειμένου να ορίσουμε τις κατάλληλες ποσότητες παραγγελίας Q_i^*, είναι:

Βήμα 1: Υπολογίζουμε τις ποσότητες:

$$Q_i^* = \sqrt{\frac{2 * K_i * D_i}{K_{c_i}}}, \quad i = 1, 2, ..., n \tag{6.11}$$

Βήμα 2: Ελέγχουμε αν οι ποσότητες $Q_i^*, \quad i = 1, 2, ..., n$, ικανοποιούν τον περιορισμό που τέθηκε για τον χώρο αποθήκευσης. Αν τον ικανοποιούν, σταματάμε και οι ποσότητες Q_i^* είναι οι καλύτερες δυνατές. Διαφορετικά, προχωράμε στο επόμενο βήμα:

Βήμα 3: Χρησιμοποιούμε τους πολλαπλασιαστές της μεθόδου *Lagrange*, προκειμένου να βρούμε τις τιμές των ποσοτήτων παραγγελιών. Η συνάρτηση *Lagrange* δίνεται από τον τύπο:

$$L(\lambda, Q_1, Q_2, ..., Q_n) = TC(Q_1, Q_2, ..., Q_n) - \lambda * (\sum_{i=1}^{n} a_i * Q_i - A) = \sum_{i=1}^{n} (\frac{K_i * D_i}{Q_i} + P_i * D_i + \frac{K_{c_i} *}{2} \tag{6.12}$$

,

όπου λ (< 0) είναι ο πολλαπλασιαστής *Lagrange*. Θέτουμε τις μερικές παραγώγους ίσες με 0 (αναγκαία και ικανή συνθήκη λόγω της κυρτότητας της αντικειμενικής συνάρτησης και της κυρτής εφικτής περιοχής) και έχουμε:

$$\frac{\partial L}{\partial Q_i} = -\frac{K_i * D_i}{Q_i^2} + \frac{K_{c_i}}{2} - \lambda * a_i = 0 \Leftrightarrow Q_i^* = \sqrt{\frac{2 * K_i * D_i}{K_{c_i} - 2 * \lambda_{opt}^* * a_i}}, \ i = 1, 2, ..., n \tag{6.13}$$

και

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}$$

$= -\sum_{i=1}^{n} a_i * Q_i + A = 0.(6.14)$

Λύνοντας το σύστημα εξισώσεων με κάποια αριθμητική μέθοδο (αφού δεν είναι γραμμικό) λαμβάνουμε τις κατάλληλες ποσότητες παραγγελίας που ελαχιστοποιούν το μέσο συνολικό κόστος ανά χρονική μονάδα. Η συνηθέστερη μέθοδος είναι η δοκιμή αρνητικών τιμών στο λ, μειώνοντάς το κάθε φορά κατά μια μικρή ποσότητα, π.χ. λ= -0.1, -0.2,

-0.3, ... , έως ότου για κάποια τιμή του λ, τα

$$Q_i^* = \sqrt{\frac{2 * K_i * D_i}{K_{c_i} - 2 * \lambda_{opt} * a_i}(6.15)}$$

να ικανοποιούν τον περιορισμό του αποθηκευτικού χώρου και να επαληθεύουν τη

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0. \tag{6.16}$$

Παράδειγμα:

i	K_i (ευρώ)	D_i**(ημερήσια)**	K_{c_i}**(ευρώ)**	a_i (m^2)
1	30	200	0,9	0,4
2	15	400	0,3	0,1
3	45	400	0,6	0,2

Βήμα 1: Θεωρώ λ=0.

$$EOQ_1 = \sqrt{\frac{2 * 30 * 200}{0,9}} = 115,5 \tag{6.17}$$

μονάδες προϊόντος 1.

$$EOQ_2 = \sqrt{\frac{2 * 15 * 400}{0,3}} = 200 \tag{6.18}$$

μονάδες προϊόντος 2

$$EOQ_3 = \sqrt{\frac{2 * 45 * 00}{0,46}} = 244,9 \tag{6.19}$$

μονάδες προϊόντος 3.

$$\sum_{i=1}^{3} a_i * Q_i = 115,5 * 0,4 + 200 * 0,1 + 244,9 * 0,2 = 115,2 > 100m^2 \tag{6.20}$$

λ	Q_1	Q_2	Q_3	$\sum_{i=1}^{3} a_i * Q_i - A$
0	115,6	200,0	244,9	15,2
-0,1	110,7	193,6	237,2	11,1
-0,2	106,4	187,9	230,1	7,37
-0,3	102,6	182,6	223,6	**4,02**
-0,4	99,2	177,7	217,6	**-0,82**
-0,5	96,1	173,2	212,1	-1,82

$-0,4 < \lambda_{opt} < -0,3$. Σ′ αυτή την περίπτωση θέτουμε λ=-0,35, το οποίο βρίσκουμε κάνοντας τον ίδιο πίνακα όπως τον παραπάνω για λ= -0,31, -0,32, -0,33 , ..., -0,4.

Βιβλιογραφία

[Methods and Models of Operations Research, Introduction] Arnold Kaufmann

[Operations Research, Applications and Algorithms] Wayne L. Winston

[Σημειώσεις στη θεωρία Ελέγχου Αποθεμάτων] Οικονόμου Αντώνης

[Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα] Κολέτσος Ιωάννης, Στογιάννης Δημήτριος, Αθήνα 2012, Εκδόσεις Συμεών

Κεφάλαιο 7

Στοχαστικό Σύστημα Αποθεμάτων

Έως τώρα, σε όλα τα μοντέλα που είχαμε μελετήσει, η ζήτηση θεωρούσαμε ότι είναι σταθερή ή γνωστή. Επίσης, θεωρούσαμε ότι οι μονάδες που παραγγέλναμε έφταναν ακριβώς τη στιγμή που περιμέναμε ότι θα φτάσουν. Αυτές οι παραδοχές εξαλείφουν αβεβαιότητες και επιτρέπουν κατά κάποιο τρόπο απλές λύσεις για το σχεδιασμό συστημάτων αποθεμάτων. Πολλοί λίγοι παρασκευαστές μπορούν να ισχυριστούν ότι ξέρουν ακριβώς πως θα είναι η ζήτηση. Επίσης, είναι πολύ σπάνιο το να είναι βέβαιοι ότι ο προμηθευτής θα παραδώσει τις ποσότητες που είχαμε παραγγείλει ακριβώς στην ώρα τους. Έτσι η εφαρμογή ντετερμινιστικών μοντέλων μπορεί να οδηγήσει σε ορισμένα ανεπιθύμητα αποτελέσματα.

Εαν το δούμε ρεαλιστικά, οι νέες παραγγελίες δε φτάνουν πάντα τη στιγμή που εξαντλήται και η τελευταία μονάδα αποθέματος. Για παράδειγμα, μια επιχείρηση πουλάει μπαταρίες αυτοκινήτων. Κατά μέσο όρο, καταφτάνουν σε ημερήσια βάση 10 αυτοκίνητα που χρειάζονται μπαταρία. Έστω ότι η επιχείρηση χρησιμοποιεί ένα ντετερμινιστικό μοντέλο ελέγχου αποθεμάτων και παραγγελιών, 100 μπαταρίες κάθε 10 ημέρες. Επίσης, ας υποθέσουμε ότι ο χρόνος αναμονής είναι 3 ημέρες, που αυτό συνεπάγεται όι το σημείο παραγγελίας είναι 30 μπαταρίες. Υποθέτουμε ότι μια μέρα ο επιχειρηματίας παρατηρεί ότι υπάρχουν μόνο 30 μπαταρίες που δεν έχουν καταναλωθεί και παραγγέλνει την καινούργια ποσότητα. Αν η ζήτηση είναι ντετερμινιστική και είναι ακριβώς 10 μπαταρίες την ημέρα, δεν θα υπάρχει κανένα πρόβλημα, και οι 30 μπαταρίες επαρκούν για τις 3 μέρες που θα κάνει να φτάσει η παραγγελία. Εντούτοις, η ζήτηση συνήθως δεν είναι σταθερή, κάτι που σπανίως συμβαίνει. Το πιθανότερο μέσα σ΄ αυτές τις 3 μέρες, ο συνολικός αριθμός μπαταριών να είναι 40, 30, 20 ή οποιοσδήποτε άλλος αριθμός. Αν η ζήτηση αυτές τις 3 ημέρες τύχει να είναι 20 μπαταρίες, τότε δεν υπάρχει πρόβλημα, αλλά αν είναι 40 ή οποιαδήποτε άλλη ποσότητα άνω των 30, το κατάστημα δεν θα έχει την επαρκή ποσότητα για να καλύψει τη ζήτηση και για κάποιο χρονικό διάστημα θα έχει έλλειψη αποθέματος, και λέμε ότι είναι out of stock. Δηλαδή, ένα σύστημα απογραφής αποθεμάτων είναι **out of stock** όταν δεν υπάρχουν μονάδες που να μπορούν να καλύψουν τη ζήτηση ή εστω ένα μέρος της.

Σαν άλλο παράδειγμα έστω ότι έχουμε να κάνουμε με κινητήρες, με χρόνο αναμονής 3 ημέρες και σημείο παραγγελίας 3.000 κινητήρες. Αν γίνει μια παραγγελία όταν το απόθεμα φτάσει στις 3.000 μονάδες, θεωρώντας ότι έχουμε έναν σταθερό ρυθμό κατανάλωσης των 1.000 μονάδων την ημέρα, οι κινητήρες θα επαρκούν για τις επόμενες 3 ημέρες. Ωστόσο, εάν για κάποιο λόγο η παραγγελία φτάσει την 4η ημέρα και όχι της 3η, θα έχουμε για μια ημέρα μηδενικό απόθεμα και έτσι οι πελάτες που θέλουν συνολικά τους 1.000 κινητήρες δεν θα εξυπηρετηθούν. Πάλι αυτό το σύστημα αποθεμάτων θα βρεθεί out of stock για άλλο λόγο όμως αυτή τη φορά.

Οι ανεπιθύητες συνέπειες της μη-ύαρξης αποθεμάτων ποικίλλουν αναλόγως τη φύση της επιχείρησης. Για παράδειγμα, στην περίπτωση του καταστήματος με τις μπαταρίες, οι πελάτες ίσως να είναι πρόθυμοι να περιμένουν μια ακόμα ημέρα για να αντικαταστήσουν τις μπαταρίες τους. Σ′ αυτή την περίπτωση, το ενδεχόμενο να ξεμείναι το κατάστημα από αποθέματα δεν επιφέρει κάποιο αρνητικό αποτέλεσμα. Από την άλλη, ίσως να μη θέλουν να περιμένουν και αναγκαστηκά να πάνε σε κάποιο γειτονικό κατάστημα για να εξυπηρετηθούν με ίσως υψηλότερο κόστος. Είναι επίσης πιθανό οι πελάτες να προτιμήσουν το άλλο κατάστημα για τις επόμενες αγορές τους, με αποτέλεσμα την απώλεια κέρδους και μελλοντικών εσόδων. Στην περίπτωση των ηλεκτρικών κινητήρων που χρησιμοποιούνται στην κατασκευή ηλεκτρικών συσκευών,το να μην είναι διαθέσιμοι για μια ημέρα σημαίνει ότι μπορεί να σταματήσει η όλη διαδικασία κατασκευής, οδηγώντας έτσι σε αισθητή απώλεια.

Το κόστος που έχει η μη διαθεσιμότητα αποθεμάτων λέγεται κόστος έλλειψης (**shortage cost**). Το μέγεθος αυτού του κόστους εξαρτάται από τη φύση της επιχείρησης. Το κόστος έλλειψης μπορεί κάπως να αποφευχθεί με τη διατήρηση κάποιων αποθεμάτων, τα λεγόμενα αποθέματα ασφαλείας (**safety stock**).

Τα στοχαστικά μοντέλα αποθεμάτων έχουν σχεδιαστεί για την ανάλυση συστήματος αποθεμάτων όπου, όπως προαναφέραμε, υπάρχει σημαντική αβεβαιότητα για τη μελλοντική ζήτηση. Οι δυο πολύ σημαντικές ποσότητες στις οποίες στηρίζεται το μοντέλο είναι:

R **: σημείο παραγγελίας (reorder point)**
Q**: ποσότητα παραγγελίας**

Οι παραπάνω ποσότητες κάνουν την πολιτική διαχείρησης αποθεμάτων πολύ απλή. Α βασική πολιτική είναι η εξής:
¨Κάθε φορά που το επίπεδο αποθέματος πέφτει στις R μονάδες, γίνεται νέα παραγγελία Q μονάδων για αναπλήρωση αποθέματος ’
Αυτού του είδους η πολιτική ονομάζεται συχνά (R, Q) - πολιτική.

Οι παραδοχές για το μοντέλο:

(α΄) Κάθε φορά θα μιλάμε για ένα είδος προϊόντων.

(β΄) Το επίπεδο αποθεμάτων είναι υπό συνεχή αναθεώρηση, που σημαίνει ότι η ποσότητα αυτή θα μας είναι γνωστή.

(γ΄) Η (R,Q)- πολιτική θα χρησιμοποιηθεί, προκειμένου οι μόνες αποφάσεις που θα πάρουμε να αφορούν μόνο τις ποσότητες R και Q.

(δ΄) Υπάρχει χρόνος αναμονής από τη στιγμή της παραγγελίας μέχρι τη στιγμή που καταφτάνει το προϊόν στην επιχείρηση. Ο χρόνος αναμονής θα είναι ή σταθερός ή μεταβλητός.

(ε΄) Η ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής είναι μη σταθερή. Όμως η κατανομή πιθανότητας της ζήτησης είναι γνωστή (ή τουλάχιστον θα έχουμε μια εκτίμησή της).

(ϛ΄) Εάν η ζήτηση είναι μεγαλύτερη του $reorderpoint$ κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής, με αποτέλεσμα η επιχείρηση να μην έχει προϊόντα γι΄ αυτό το χρονικό διάστημα, η ποσότητα που ζητείται και δεν ικανοποιείται εκείνη τη στιγμή ικανοποιείται ακριβώς τη στιγμή που φτάνει η παραγγελία, και η ποσότητα που απομένει καταχωρείται στα αποθέματα.

(ζ΄) Κάθε φορά που γίνεται μια παραγγελία, έχουμε και ένα σταθερό κόστος εγκατάστασης ($setupcost$) που συμβολίζεται όπως και στις μη στοχαστικές μεθόδους που εξετάσαμε με K.

(η΄) Εκτός του κόστους εγκατάστασης, έχουμε και το κόστος παραγγελίας που είναι ανάλογο της ποσότητας Q.

(θ΄) Για κάθε μονάδα αποθεμάτων, υπάρχει συγκεκριμένο κόστος αποθήκευσης, το K_c, ανά μονάδα χρόνου.

(ι΄) Όταν η επιχείρηση δεν έχει αποθέματα για να ικανοποιήσει τη ζήτηση μέχρι να καταφτάσει η νέα παραγγελία, υπάρχει συγκεκριμένο κόστος έλλειψης ανά μονάδα προϊόντος που εκλείπει, το K_u, ανά μονάδα χρόνου, και παύει να υφίσταται με το που ικανοποιηθούν οι πελάτες που βρίσκονται σε κατάσταση αναμονής.

7.1 Απόθεμα Ασφαλείας

Στο παράδειγμα με το κατάστημα με τις μπαταρίες αυτοκινήτων, έστω ότι η νέα παραγγελία έγινε όταν υπήρχε απόθεμα 40 μπαταριών αντί για 30. Έτσι, θα μπορούσαν να ανταποκριθούν στη ζήτηση 40 μπαταριών κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής μέχρι να καταφτάσει η παραγγελία. Από την άλλη, αν η παραγγελία έφτανε κανονικά τη 10η ημέρα, θα είχαν μείνει 10 απούλητες μπαταρίες. Επίσης, υπάρχει περίπτωση η ζήτηση να είναι μικρότερη της αναμενόμενης. Αυτό μπορεί να σημαίνει ότι όταν φτάσει η παραγγελία, θα έχουμε επιπλέον 20 μονάδες απόθεμα.

Για να χειριστούμε αυτές τις αβεβαιότητες, πρέπει να θεωρήσουμε τη ζήτηση τ.μ. με μέση ζήτηση 30 μονάδες για το χρόνο αναμονής. Εάν θέσουμε σαν σημείο παραγγελίας τις 40 μονάδες, οι μονάδες που θα μείνουν σαν απόθεμα όταν φτάσει η νέα παραγγελία είναι επίσης τ.μ. με μέση τιμή 10. Η ποσότητα των 10 μονάδων λέγεται απόθεμα ασφαλείας ($safetystock$) . Τα αποθέματα ασφαλείας είναι σημαντικά γιατί μας δείχνουν πόσες επιπλέον μονάδες θα έπρεπε να κρατήσουμε σε σχέση με την αναμενόμενη ζήτηση για να αντιμετωπίσουμε τις αβεβαιότητες. Το απόθεμα ασφαλείας των 10 μονάδων ίσως να μη μπορέσει να λύσει όλα τα προβλήματα που θα προκύψουν στα έξοδα του συγκεκριμένου καταστήματος. Για παράδειγμα, μπορεί η ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής να φτάσει τις 50 μονάδες, με αποτέλεσμα να υπάρχει πάλι έλλειμμα 10 μονάδων. Έτσι, ίσως το απόθεμα ασφαλείας με 20 μπαταρίες να είναι καλύτερο από το προηγούμενο γιατί ανταποκρίνεται σε μεγαλύτερες αποκλίσεις της αναμενόμενης ζήτησης. Σε ακραίες περιπτώσεις, ένα τεράστιο απόθεμα ασφαλείας θα ήταν απαραίτητο.

Αν και ένα μεγάλο απόθεμα ασφαλείας εξαλείφει τον κίνδυνο του να ξεμείνει το κατάστημα από μπαταρίες κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής της νέας παραγγελίας, δημιουργούνται άλλα προβλήματα. Ένα μεγάλο απόθεμα ασφαλείας προσθέτει στην επιχείρηση κόστη αποθήκευσης. Αυξάνεται το κεφάλαιο που δαπανά η επιχείρηση για τα αποθηκευμένα προϊόντα και επίσης αύξηση παρουσιάζουν και τα έξοδα ασφάλισης και φόρων. Αυτό σημαίνει ότι το απόθεμα ασφαλείας δε γίνεται να αυξάνεται επ΄ αόριστον προκειμένου να εξαλειφθεί εντελώς ο κίνδυνος της μη ανταπόκρισης του καταστήματος στη ζήτηση. Αντιθέτως, πρέπει να υπάρχει ισορροπία μεταξ·υ των ζημιών που οφείλονται στην εξάντληση των αποθεμάτων και στο κόστος αποθήκευσης επιπλέον μονάδων.

Η βέλτιστη ποσότητα του αποθέματος ασφαλείας είναι η τιμή για την οποία το άθροισμα τοου κόατους απώλειας αποθεμάτων και του κόστους αποθήευσης αποθεμάτων ελαχιστοποιείται. Στα στοχαστικά συστήματα αποθεμάτων, η ζήτηση ή ο χρόνος αναμονής ή και τα δύο μαζί είναι τ.μ. Έτσι, το έλλειμμα θα είναι και αυτό τ.μ.

Πριν ξεκινήσουμε να μελετάμε τα στοχαστικά μοντέλα αποθεμάτων, πρέπει να τονιστούν δυο σημεία για το απόθεμα ασφαλείας. Πρώτων, όταν υπάρχει το απόθεμα ασφαλείας, αλλάζει η διαδικασία με την οποία βρίσκουμε το σημείο παραγγελίας. Χωρίς απόθεμα ασφαλείας, το σημείο παραγγελίας εξαρτάται μόνο από το χρόνο αναμονής και τη ζήτηση. Με την παρουσία αποθέματος ασφαλείας, η τιμή προστίθεται στο προηγούμενο σημείο παραγγελίας, ώστε να ικανοποιηθούν οι διακυμάνσεις της ζήτησης. Έτσι έχουμε τον τύπο:

$$R + L * d + safety\ \ stock$$

όπου,

R: σημείο παραγγελίας ($reorderpoint$)
L: χρόνος αναμονής ($leadtime$)
d: ημερήσιος ρυθμός ζήτησης

όπως είχαν οριστεί και παραπάνω στα προηγούμενα μοντέλα.

Είναι σημαντικό σ′ αυτό το σημείο να εξετάσουμε προσεχτικά αυτή τη σχέση. Καθώς ο παράγοντας που επηρρεάζει άμεσα την απόφασή μας είναι το σημείο παραγγελίας και όχι τόσο το απόθεμα ασφαλείας, εμείς πρέπει πρώτα να καθορίσουμε το σημείο παραγγελίας και στη συνέχεια το απόθεμα ασφαλείας. Το απόθεμα ασφαλεία βρίσκεται από τον τύπο:

$$\textbf{Απόθεμα Ασφαλείας} = R - L * d$$

Όταν χρησιμοποιούμε το απόθεμα ασφαλείας για στοχαστικά μοντέλα, ένας καλύτερος τύπος που το καθορίζει είναι:

$$\textbf{Απόθεμα Ασφαλείας} = R - \textbf{Αναμενόμενη τιμή της ζήτησης κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής.}$$

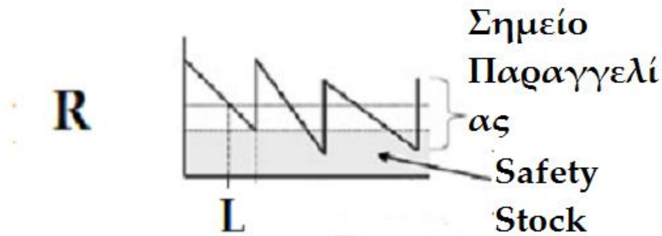
Το δεύτερο σημαντικό σημείο που πρέπει να συγκρατήσουμε, είναι ότι αφού θέτουμε σαν βάση για την παραγγελία το σημείο παραγγελίας, η διακύμανση της ζήτησης δε δημιουργεί προβλήματα. Για παράδειγμα, στο κατάστημα με τις μπαταρίες, έστω ότι καταφτάνει η παραγγελία των 100 μονάδων. Τις πρώτες δυο μέρες υποθέτουμε ότι η ζήτηση είναι 10 μπαταρίες τη μέρα. Την τρίτη μέρα από τις 80 μπαταρίες πουλήθηκαν οι 20 και το απόθεμα μειώθηκε στις 60. Αφού το απόθεμα δεν έφτασε ακόμα στις 30 μπαταρίες, που είναι και το σημείο παραγγελίας, το κατάστημα δεν κάνει ακόμα καμία ενέργεια. Έστω ότι την επόμενη μέρα έφυγαν 30 μπαταρίες και το απόθεμα έφτασε στο σημείο παραγγελίας. Τώρα, κατά τη διάρκεια των 3 ημερών, εάν η ζήτηση είναι 15, 15 και 10 μονάδες, το κατάστημα θα ξεμείνει από αποθέματα σε 2 μέρες παρόλο που η παραγγελία έγινε εγκαίρως, αφού δεν θα έχει προλάβει να καταφτάσει πριν τελειώσει ο χρόνος αναμονής.

Το παραπάνω παράδειγμα μας δείχνει ότι το να υπάρχει ζήτηση 20 και 30 μονάδων πριν φτάσουμε στο σημείο παραγγελίας δε δημιουργεί πρόβλημα, ενώ οι ζήτηση 15 μονάδων δυο συνεχόμενες μέρες μετά τη μέρα που πραγματοποιήθηκε η νέα παραγγελία, δημιουργεί προβλήματα.

Για την αντιμετώπιση των αβεβαιοτήτων, όπως και σε κάθε άλλο στοχαστικό σύστημα, θα χρειαστεί να γνωρίζουμε τη στοχαστική συμπεριφορά του συστήματος. Σ' αυτή την περίπτωση, θα χρησιμοποιήσουμε την κατανομή της πιθανότητας για τη ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής. Το πρόβλημα προκύπτει από το γεγονός ότι δεδομένης της συνάρτησης κατανομής πιθανότητας της ζήτησης ανά μέρα ή ανά οποιαδήποτε άλλη χρονική περίοδο, δεν είναι πάντα εύκολο να προσδιοριστεί η κατανομή κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής, που περιλαμβάνει διάφορες χρονικές περιόδους. Δηλαδή, αν θέσουμε σαν συνάρτηση κατανομής ζήτησης μια συνάρτηση $f(x)$, η συνάρτηση κατανομής της ζήτησης κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής δεν είναι πάντα ίδια με την $f(x)$ Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να πρέπει πρώτα να καθορίσουμε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της ζήτησης κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής, προκειμένου να αξιολογήσουμε τα αποθέματα ασφαλείας.

7.2 Μέγιστο και Ελάχιστο Σύστημα με Αποθέματα Ασφαλείας

Εδώ το απόθεμα ασφαλείας προστίθεται στο μέγιστο-ελάχιστο σύστημα αποθεμάτων. Στο παρακάτω σχήμα, όταν φτάσει η νέα παραγγελία, υπάρχει ακόμα ένας αριθμός ίσος με το απόθεμα ασφαλείας.



στοςκ 2.ϑπγ

Όπως προαναφέρθηκε, εξ' αιτίας της τυχαίας ζήτησης, ο αριθμός των μονάδων που απομένουν όταν φτάσει η νέα παραγγελία είναι τυχαία μεταβλητή. Στο σχήμα, παρατηρούμε ότι όταν έφτασε η πρώτη παραγγελία, τα αποθέματα που υπήρχαν ήδη δεν έπεσαν κάτω από το σημείο παραγγελίας και μετά τον ανεφοδιασμό ανέβηκαν σε μια Q ποσότητα. Όταν έφτασε η δεύτερη παραγγελία, τα αποθέματα είχαν πέσει κάτω από το *reorder point* και έφτασαν μέχρι ένα σημείο του αποθέματος ασφαλείας, με αποτέλεσμα η καθορισμένη ποσότητα που είχαμε παραγγείλει να ανεβάσει το απόθεμα σε ένα σημείο μικρότερο του προηγούμενου Q. Ομοίως και με την τρίτη παραγγελία κ.ο.κ. Σε γενικές γραμμές παρατηρούμε ότι αυτές οι διακυμάνσεις έχουν ως αποτέλεσμα η νέα παραγγελία να ανεβάζει το απόθεμα σε ένα σύνολο επιπέδων με ανώτερο και κατώτερο όριο. Στο μέγιστο όριο φτάνει όταν η ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής δεν ξεπερνάει το απόθεμα ασφαλείας και η ζήτηση γίνεται ακριβώς έτσι όπως είχαμε υπολογίσει στην καλύτερη των περιπτώσεων, όπως γίνεται και όταν καταφτάνει στο σχήμα η πρώτη παραγγελία. Έτσι, έχουμε τον τύπο:

$$Q_{max} = \textbf{Απόθεμα Ασφαλείας}(SS) + EOQ$$

Για λόγους απλότητας, υοπθέτουμε ότι η μείωση του επιπέδου αποθεμάτων ακολουθεί μια γραμμική πορεία μέχρι να φτάσει το ελάχιστο επίπεδο, $Q_{min} = SS$, όπου λαμβάνεται η νέα παραγγελία. Αυτή η υπόθεση βραχυπρόθεσμα φαίνεται παράλογη λόγω του ότι η ζήτηση είναι τ.μ. , αλλά μακροπρόθεσμα δεν επηρρεάζεται σημαντικά η ακρίβεια των εκτιμήσεων του κόστους. Η κύρια επίδραση για την τυχαία ζήτηση σχετικά με το κόστος συμβαίνει κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής, όπου υπάρχει η πιθανότητα έλλειψης.

Τώρα, αφού προσδιορίσαμε το μέγιστο και ελάχιστο επίπεδο αποθεμάτων, μπορούμε να προσδιορίσουμε το συνολικό κόστος με τον γνωστό τύπο:

Συνολικό Κόστος (TC)= Κόστος παραγγελίας (OC) + Κόστος αποθήκευσης (CC)+ Κόστος αγοράς (SC)

Σύμφωνα με όσα προαναφέραμε, γνωρίζουμε ότι :

$$CC = E$$

(μέσο απόθεμα)$= E(\frac{Q_{max}+Q_{min}}{2}) = E(\frac{EOQ+\text{Απόθεμα Ασφαλείας} + \text{Αποθεμα Ασφαλείας}}{2}) =$ $E(\frac{EOQ}{2} + \text{Απόθεμα Ασφαλείας})$(7.1)

$$OC = \frac{K * D}{Q} \tag{7.2}$$

Άρα,

$$TC = E(\frac{Q}{2} + SS) + \frac{K * D}{Q} + SC \tag{7.3}$$

όπου SC: κόστος αγοράς ($Shortage\ \ cost$)

Ο τελευταίος τύπος θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για την ελαχιστοποίηση του κόστους βρίσκοντας τις βέλτιστες τιμές για τις μεταβλητές απόφασης Q και SS, υπό τον όρο ότι εκφράζουμε το κόστος αγοράς ως συνάρτηση των δύο μεταβλητών. Αυτό είναι πιθανό αν γνωρίζουμε την κατανομή πιθανότητας της τυχαίας ζήτησης κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής. Μελετάμε πιο πολύ τη ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής γιατί είναι η μόνη χρονική περίοδος που υπάρχει η πιθανότητα έλλειψης αποθέματος. Ο υπολογισμός του κόστους έλλειψης χρησιμοποιώντας αυτή την κατανομή γίνεται με τον ακόλουθο τρόπο:

Έστω ότι η ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής εκφράζεται μέσω της τ.μ.X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(q)$. Επίσης, έστω D και

D_L οι αναμενόμενες τιμές της ζήτησης ανά χρονική περίοδο και της ζήτησης κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής, αντίστοιχα. Οι ελλείψεις συμβαίνουν αν η ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής είναι μεγαλύτερη του σημείου παρεγγελίας R. Το σημείο παραγγελίας σ΄ αυτή την περίπτωση είναι:

$$R = D_L + SS$$

Η αναμενόμενη ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής D_L υπολογίζεται ως εξής:

$$D_L = \int_R^{+\infty} x * f(x)dx \tag{7.4}$$

Τώρα, η μόνη φορά που μπορεί να έχουμε έλλειμμα, είναι όταν η ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής ξεπεράσει το σημείο παραγγελίας. Έτσι,

$$SC = \begin{cases} 0, \text{αν} \quad X \leq R \\ P * E(\#\text{μονάδων}), \text{αν} \quad X > R \end{cases} \tag{7.5}$$

,

όπου P είναι το κόστος αγοράς ανά μονάδα και E(.) η μέση τιμή. Παρατηρούμε ότι το κόστος αγοράς ανά μονάδα είναι ανεξάρτητο της διάρκειας της έλλειψης. Με άλλα λόγια, αν ένα προϊόν το αγοράζουμε κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής, το κόστος αγοράς του θα είναι P ανεξάρτητα από το αν το αγοράσουμε 1 μέρα ή 5 μέρες πριν φτάσει η παραγγελία.

Όμως η ζήτηση που υπερβαίνει το σημείο παραγγελίας, , περιλαμβάνει όλες τις τιμές ζήτησης μεγαλύτερες του R. Τώρα, αν η ζήτηση είναι X και το σημείο παραγγελίας R, η έλλειψη θα μπορούσε να είμαι τ.μ. που θα μπορούσαμε να τη συμβολίσουμε $X - R$. Η μέση τιμή αυτής της τ.μ. είναι:

$$E(X - R) = \int_R^{+\infty} (X - R) * f(x)dx \tag{7.6}$$

&

$$\frac{SC}{L} = P * \int_{R}^{+\infty} (X - R) * f(x)dx \tag{7.7}$$

Όπως έχουμε πει, υπάρχουν συνολικά

$$\frac{D}{Q} \tag{7.8}$$

χρόνοι αναμονής ανά περίοδο.

$$SC = \frac{D * P}{Q} * \int_{R}^{+\infty} dx \tag{7.9}$$

Αν και δεν είναι προφανές, το κόστος είναι συνάρτηση των Q και SS μόνο. Το P είναι γνωστό και η ζήτηση, όπως φαίνεται και από τα άκρα του ολοκληρώματος, κυμαίνεται μεταξύ του $+\infty$ και $R = D_L + SS$. Έτσι, το συνολικό κόστος θα είναι:

$$TC = E(\frac{Q}{2} + SS) + \frac{K * D}{Q} + \frac{D * P}{Q} * \int_{D_L+SS}^{+\infty} (X - D_L - SS) * f(x)dx \tag{7.10}$$

Τώρα, αν δούμε τη ζήτηση σαν διακριτή τ.μ. , ο τύπος μεταβάλλεται ως εξής:

$$TC = E(\frac{Q}{2} + SS) + \frac{K * D}{Q} + \frac{P * D}{Q} * \sum_{x_i > R} (X_i - R) * P(X_i) \tag{7.11}$$

όπου το άθροισμα είναι για ζήτηση μεγαλύτερη του σημείου παραγγελίας και $P(x_i)$ η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής της (διακριτής) ζήτησης κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής.

Βιβλιογραφία

[Methods and Models of Operations Research, Introduction] Arnold Kaufmann

[Operations Research, Applications and Algorithms] Wayne L. Winston

[Σημειώσεις στη θεωρία Ελέγχου Αποθεμάτων] Οικονόμου Αντώνης

[Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα] Κολέτσος Ιωάννης, Στογιάννης Δημήτριος, Αθήνα 2012, Εκδόσεις Συμεών

Κεφάλαιο 8

Μοντέλα Απόφασης Μιας Περιόδου

Σε πολλές περιπτώσεις, αυτός που αποφασίζει για την ποσότητα παραγγελίας, είναι αντιμέτωπος με το πρόβλημα καθορισμού της τιμής Q για μια μεταβλητή (το Q μπορεί να είναι η ποσότητα παραγγελίας ενός προϊόντος από αυτά που βρίσκονται στα αποθέματα ή κάποια υπηρεσία κ.λ.π.). Μετά τον καθορισμό της ποσότητας Q, παρατηρείται ότι η ζήτηση D είναι ως επί των πλείστων τ.μ. . Ο υπεύθυνος, βάσει των D και Q επιβαρύνεται με ένα συνολικό κόστος $TC(Q, D)$. Υποθέτουμε ότι οι συνθήκες είναι ιδανικές και το άτομο δε βρίσκεται σε περιβάλλον που ίσως συμβούν αναπάντεχα περιστατικά, επομένως το ζητούμενο είναι να επιλέξει την ιδανική ποσότητα Q που θα ικανοποιήσει τους πελάτες και θα ελαχιστοποιήσει το κόστος. Δεδομένου ότι η απόφαση γίνεται μια φορά, έμε ότι το μοντέλο αυτό είναι μοντέλο απόφασης μιας περιόδου.

8.1 Η έννοια της Οριακής Ανάλυσης

Για το μοντέλο απόφασης μιας περιόδου, θεωρούμε τώρα ότι η D είναι μια διακριτή τ.μ. που παίρνει ακέραιες τιμές, με $P(D = d) = p(d)$. Έστω $E(Q)$ το αναμενόμενο κόστος από την ποσότητα Q που παραγγείλαμε. Τότε:

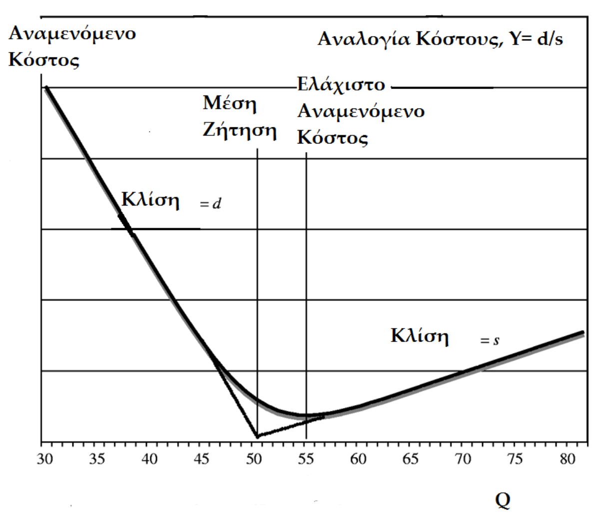
$$E(Q) = \sum_d p(d) * TC(d, Q)$$

Σε πιο πρακτικές εφαρμογές, η $E(Q)$ είναι μια κυρτή συνάρτηση, για την οποία υπάρχει μια τιμή Q^* που την ελαχιστοποιεί, δηλαδή $\forall Q \neq Q^*, \quad E(Q) - E(Q^*) \geq 0$, και πιο συγκεκριμένα $E(Q^* + 1) - E(Q^*) \geq 0$

Έτσι, λόγω της κυρτότητάς της, μπορούμε να βρούμε την κατάλληλη ποσότητα Q^* που ελαχιστοποιεί το αναμενόμενο κόστος. Να σημειωθεί ότι $E(Q+1) - E(Q)$ είναι η αλλαγή που συμβαίνει στο αναμενόμενο κόστος, αν αυξήσουμε την ποσότητα κατά μια μονάδα.

Για να καθορίσουμε το Q^*, ξεκινάμε με $Q = 0$. Αν $E(1) - E(0) \leq 0$, μπορούμε να αυξήσουμε το Q από 0 σε 1. Τώρα ελέγχουμε αν $E(2) - E(1) \leq 0$. Αν αυτό αληθεύει, τότε η αύξηση του Q σε 2 μονάδες από 1 που ήταν, μειώνει το αναμενόμενο κόστος. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο, μέχρι να φτάσουμε στην κατάλληλη ποσότητα Q^* που την αυξάνουμε κατά μια μονάδα, σε $Q^* + 1$, οπότε το αναενόμενο κόστος αρχίζει να αυξάνεται. Έτσι, αν $E(Q^* + 1) - E(Q^*) \geq 0 \Rightarrow \forall Q \geq Q^*, E(Q+1) - E(Q) \geq 0$. Επομένως, το Q^* πρέπει να είναι η ποσότητα που το $E(Q)$ παίρνει την ελάχιστη τιμή. Αν η $E(Q)$ δεν είναι κυρτή, τότε η παραπάνω μέθοδος δε θα μας δώσει απαραίτητα το βέλτιστο Q.

Αυτή η προσέγγιση μας καθορίζει το Q^* μέσω του επανειλημμένου υπολογισμού της επίδρασης από την προσθήκη μιας οριακής μονάδας στην τιμή του Q. Γι' αυτό το λόγο καλείται συχνά **Οριακή Ανάλυση**. Η Οριακή Ανάλυση είναι πολύ χρήσιμη όταν είναι εύκολο να καθοριστεί μια απλή έκφραση για το $E(Q+1) - E(Q)$



δεμανδ.πνγ

8.2 Το πρόβλημα του εφημεριδοπώλη: Διακριτή ζήτηση

Οι οργανιμοί αντιμετωπίζουν συχνά προβλήματα με τα αποθέματά τους, όταν συμβαίνουν τα παρακάτω:

(α′) Ο οργανισμός αποφασίζει για το πόσες μονάδες θα παραγγείλει. Έστω Q ο αριθμός αυτών των μονάδων.

(β′) Με πιθανότητα $p(d)$ γίνεται η ζήτηση d μονάδων. Θεωρούμε ότι η d πρέπει να είναι μη αρνητικός ακέραιος αριθμός. Υποθέτουμε ότι D τ.μ. που αντιπρωσοπεύει τη ζήτηση.

(γ′) Αναλόγως των d και Q υπάρχει το συνολικό κόστος που εξαρτάται από αυτές τις 2 μεταβλητές, το $TC(d, Q)$.

Τα προβλήματα που προκύπτουν εξαιτίας των παραπάνω, ονομάζονται συχνά <u>προβλήματα του εφημεριδοπώλη</u>. Για να καταλάβουμε το λόγο της ονομασίας, έστω ότι ένας προμηθευτής πρέπει να αποφασίσει πόσες εφημερίδες πρέπει να παραγγέλνει κάθε μέρα από το εργοστάσιο που τις παράγει. Αν ο προμηθευτής παραγγείλει πάρα πολλές εφημερίδες, στο τέλος της ημέρας θα μείνει με πολλές απούλητες και άχρηστες πλέον εφημερίδες. Από την άλλη, αν παραγγείλει πολύ λίγες εφημερίδες, ίσως να χάσει τα κέρδη που θα μπορούσε να είχε κερδίσει εάν είχε παραγγείλει μεγαλύτερη ποσότητα και οι πελάτες θα είναι απογοητευμένοι. Ο πωλητής πρέπει να βρει την ιδανική ποσότητα παραγγελίας που εξισορροπεί τα δυο κόστη.

Τώρα θα δείξουμε πώς η οριακή ανάλυση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να λυθεί το πρόβλημα του εφημεριδοπώλη, όταν η ζήτηση είναι διακριτή τ.μ. και το $TC(d, Q)$ έχει την ακόλουθη μορφή:

$$TC(d,Q) = c_0 * Q + \textbf{ όρους που δεν αφορούν το } Q\textbf{,}\ (d \leq Q)$$
$$TC(d,Q) = -c_u * Q + \textbf{ όροι που δεν αφορούν το } Q\textbf{,}\ (d \geq Q+1)$$

Το c_0 είναι το κόστος ανά μονάδα όταν υπάρχουν πολλά παραπάνω αποθέματα. Αν $d \leq Q$ παραγγείλαμε μεγαλύτερη ποσότητα από όη κανονικά χρειαζόμασταν. Εάν το μέγεθος της παραγγελίας αυξηθεί από Q σε $Q + 1$, τότε το κόστος αυξάνεται κατά c_0. Ομοίως, αν $d \geq Q + 1$ έχουμε έλλειμμα. Αν $d \geq Q + 1$ και αυξήσουμε το μέγεθος της παραγγελίας κατά μια μονάδα, θα έχουμε και λιγότερο έλλειμμα κατά μια μονάδα. Έτσι, το κόστος μειώνεται κατά c_u. Επομένως, το c_u είναι το ανά μονάδα κόστος ελλείμματος.

Για να καθορίσουμε τη βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας μέσω της οριακής ανάλυσης, έστω $E(Q)$ το αναμενόμενο κόστος αν παραγγείλουμε Q μονάδες. Ο στόχος του προμηθευτή είναι να βρεθεί η ποσότητα Q^* ώστε το $E(Q)$ να ελαχιστοποιηθεί. Αν η $E(Q)$ είναι κυρτή συνάρτηση τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την οριακή ανάλυση.

Έτσι, πρέπει να βρούμε τη μικρότερη τιμή Q, για την οποία $E(Q+1)-E(Q)\geq 0$. Για να υπολογίζουμε το $E(Q+1)-E(Q)$, πρέπει να λάβουμε υπ' όψην δύο περιπτώσεις:

(α') **1η περίπτωση:** $d \leq Q+1$. Σάυτή την περίπτωση, το να παραγγείλουμε $Q+1$ μονάδες αντί για Q, έχει ως αποτέλεσμα να αυξηθεί ήδη το κορεσμένο εμπόρευμά μας κατά μια μονάδα. Αυτό αυξάνει το κόστος κατ·α c_0 μονάδες. Η πιθανότητα να συμβεί αυτή η περίπτωση είναι $P(D \leq Q)$, όπου D η τ.μ. της ζήτησης.

(β') **2η περίπτωση:** $d \geq Q+1$. Σάυτή την περίπτωση το να παραγγείλουμε $Q+1$ μονάδες αντί για Q μας δίνει τη δυνατότητα να έχουμε μια λιγότερη μονάδα. Αυτό μειώνει το κόστος κατά c_u. Η πιθανότητα να συμβεί κάτι τέτοιο είναι: $P(D \geq Q+1) = 1 - P(D \leq Q)$.

Εν ολοίγοις, σε ποσοστό $P(D \leq Q)$, το να παραγγείλουμε $Q+1$ μονάδες θα κοστίσει c_0 περισσότερο από το να παραγγείλουμε Q μονάδες, και σε ποσοστό $P(D \geq Q+1)$, το να παραγγείλουμε $Q+1$ μονάδες θα κοστίσει c_u λιγότερο πό το να παραγγείλουμε Q μονάδες. Έτσι, κατά μέσο όρο, το να παραγγείλουμε $Q+1$ μονάδες θα κοστίσει :

$$c_0 * P(D \leq Q) - c_u * [1 - P(D \leq Q)]$$

από το να παραγγέλναμε Q μονάδες.

Πιο τυπικά, πρέπει να δείξουμε ότι:

$E(Q+1)-E(Q) = c_0 * P(D \leq Q) - c_u * [1-P(D \leq Q)] = (c_0+c_u) * P(D \leq Q) - c_u$

Τότε θα ισχύει ότι $E(Q+1)-E(Q) \geq 0$ αν

$(c_0+c_u) * P(D \leq Q) - c_u \geq 0 \Leftrightarrow P(D \leq Q) \geq \frac{c_u}{c_0+c_u}$.

Έστω $F(Q) = P(D \geq Q)$ η συνάρτηση κατανομής ζήτησης. Δεδομένου ότι μπορούμε να εφαρμόσουμε την οριακή ανάλυση, πρέπει μόνο να δείξουμε ότι η $E(Q)$ ελαχιστοποιείται από τη μικρότερη τιμή Q, την Q^*, ικανοποιώντας τη σχέση:

$$F(Q^*) \geq \frac{c_u}{c_0 + c_u}(8.1)$$

8.3 Το ¨Πρόβλημα του Εφημεριδοπώλη¨: Βέλτιστο Επίπεδο Αποθεμάτων με Αβέβαιη Συνεχής Ζήτηση σε μια μόνο περίοδο'

Το κλασσικό πρόβλημα του εφημεριδοπώλη, μελετάει το επίπεδο των αποθεμάτων που απαιτείται κάτω από την αβέβαιη (συνεχής αυτή τη φορά) ζήτηση. Το ζητούμενο είναι, όπως και στην περίπτωση της διακριτής ζήτησης, να καθοριστεί ο βέλτιστος αριθμός προϊόντων ως αποθέματα για την κάλυψη της αβέβαιης συνεχούς ζήτησης για μια μόνο περίοδο. Η βέλτιστη αυτή τιμή δίνεται από την εξισορρόπιση των κόστων μεταξύ :

- της αποθήκευσης μεγάλου αριθμού αποθεμάτων
- της μη- ικανοποίησης της ζήτησης.

Έστω :

c_0: κόστος ανά προϊόν για τα προϊόντα που πλεονάζουν ως αποθέματα
c_u: κόστος ανά προϊόν που βρίσκεται σε έλλειμμα και δεν ικανοποιεί τη ζήτηση (κόστος έλλειψης ανά προϊόν)
x: η ζήτηση σε συγκεκριμένη χρονική περίοδο (πλήθος προϊόντων)
$f(x)$: συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της ζήτησης
$F(x) = \int_0^x f(y)dy$: αθροιστική συνάρτηση κατανομής της ζήτησης
Q : ο αριθμός των προϊόντων που βρίσκονται αποθηκευμένα ως αποθέματα.

Το βέλτιστο κόστος εξισορρόπισης εξαρτάται από τον αναμενόμενο αριθμό των προϊόντων έναντι της ζήτησης και από τη ζήτηση.

Το αναμενόμενο κόστος $C(Q)$ δίνεται από τον τύπο :

$$C(Q) = c_0 * E(\text{πλήθος προϊόντων που υπερβαίνουν τη ζήτηση}) + c_u * E(\text{πλήθος προϊόντων που βρίσκονται σε έλλειμμα}) =$$

$$c_0 * \int_0^Q (Q - x) * f(x)dx + c_u * \int_Q^{+\infty} (x - Q) * f(x)dx$$

Η βέλτιστη ποσότητα Q^* που θα πρέπει να βρίσκεται το απόθεμα, δίνεται από τον τύπο:

$$\frac{d}{dQ}C(Q) = 0 \tag{8.2}$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του *Leibnitz* για την παραγώγιση σε ολοκλήρωμα, έχουμε :

$$\frac{d}{dQ}C(Q) = c_0 * \int_0^Q \frac{\vartheta}{\vartheta Q} * [(Q-x) * f(x)]dx + c_u * \int_Q^{+\infty} \frac{\vartheta}{\vartheta Q} * [(x-Q) * f(x)]dx = \tag{8.3}$$

$$c_0 * \int_0^Q f(x)dx - c_u * \int_Q^{+\infty} f(x)dx = \tag{8.4}$$

$$c_0 * F(Q) - c_u * [1 - F(Q)] = (c_0 + c_u) * F(Q) - c_u \tag{8.5}$$

Έτσι, θέτοντας

$$\frac{d}{dQ}C(Q) = 0 \tag{8.6}$$

, η βέλτιστη ποσότητα Q^* δίνεται από τον τύπο

$$F(Q^*) = \frac{c_u}{c_u + c_0} \tag{8.7}$$

Το κόστος πλεονασμού c_0 και το κόστος έλλειψης c_u μπορούν να εκφραστούν μέσω των ακόλουθων οικονομικών παραμέτρων. Έστω:

c : κόστος ανά προϊόν
a: τιμή πώλησης ανά προϊόν
p: κύρωση έλλειψης προϊόντων ανά προϊόν
v: υπολειμματική αξία ανά προϊόν

Το κέρδος για κάθε προϊόν είναι $a - c$. Έτσι, το χαμένο κέρδος ανά προϊόν για την αδυναμία κάλυψης της ζήτησης είναι $a - c$. Ένα πρόσθετο κόστος της ανικανοποίητης ζήτησης είναι οι κυρώσεις των χαμένων πωλήσεων, p , που αντιπροσωπεύπυν την απώλεια ορισμένων πελατών σε μελλοντικές περιόδους. Ως εκ τούτου, το κόστος έλλειψης είναι :

$$c_u = a + p - c$$

Για τα απούλητα προϊόντα που έχουν απομείνει αφού η ζήτηση είχε ικανοποιηθεί, το καθαρό κόστος ανά μονάδα είναι το κόστος μείον την υπολειμματική αξία. Επομένως, το περίσσειο κόστος c_0 είναι :

$$c_0 = c - v$$

Η βέλτιστη ποσότητα Q^* λοιπόν, σύμφωνα με όσα προαναφέραμε, δίνεται από τον τύπο:

$$F(Q^*) = \frac{a + p - c}{a + p - v} \tag{8.8}$$

Παράδειγμα: Το Σεπτέμβρη, το κεντρικό βιβλιοπωλείο του Παπασωτηρίου θα έπρεπε να αποφασίσει πόσα ημερολόγια πρέπει να παραγγείλει για το έτος 2013, για να είναι έτοιμα προς πώληση στο τέλος του Οκτώβρη. Κάθε ημερολόγιο κοστίζει 1 ευρώ και πωλείται 2,5 ευρώ. Μετά την Πρωτοχρονιά, τα απούλητα ημερολόγια επιστρέφονται στον προμηθευτή με 0,50 ευρώ επιστροφή για το καθένα. Ο υπεύθυνος του βιβλιοπωλείου πιστεύει ότι το πλήθος των ημερολογίων που θα πουληθούν έων της 1η Γενάρη ακολουθεί την κατανομή πιθανότητας που δείχνει ο Πίνακας 1. Το ζητούμενο είναι να αυξηθεί το το αναμενόμενο νέο κέρδος από την πώληση των ημερολογίων. Πόσα ημερολόγια θα πρέπει να είχε παραγγείλει παραγγείλει ο υπεύθυνος του βιβλιοπωλείου το Σεπτέμβρη;

Πίνακας 1

	πλήθος ημερολογίων που πουλήθηκαν	Πιθανότητα
Οκτώβρης	150	0,2
Νοέμβρης	250	0,3
Δεκέμβρης	400	0,8

Έστω Q= πλήθος ημερολογίων που παραγγείλαμε το Σεπτέμβρη
d = πλήθος ημερολογίων που πουλήθηκαν έως 1η Γενάρη

Αν $d \leq Q$, τότε συμβαίνουν τα κόστη του Πίνακα 2:

Πίνακας 2: Υπολογισμός Συνολικού κόστους για $d \leq Q$

	Κόστος
Αγορά Q ημερολογίων με 1 ευρώ το ημερολόγιο	1*Q
Πώληση d ημερολογίων με 2,5 ευρώ το ημερολόγιο	-2,5* d
Επιστροφή $Q-d$ ημερολογίων με 0,5 ευρώ το ημερολόγιο	$-0,5*(Q-d)$
Συνολικό κόστος	$0,5*Q-2*d$

Πίνακας 3: Υπολογισμός Συνολικού Κόστους αν $d \geq Q+1$

	Κόστος
Αγορά Q ημερολογίων με 1 ευρώ το καθένα	1*Q
Πώληση d ημερολογίων με 2,5 ευρώ το καθένα	-2,5*Q
Συνολικό κόστος	$-1,5*Q$

Αν $d \geq Q+1$, συμβαίνουν τα κόστη του Πίνακα 3. Τότε:

$-c_u = -1,5$ ευρώ ή $c_u = 1,5$ ευρώ
Άρα:

$$\frac{c_u}{c_0 + c_u} = \frac{1,5}{0,5 + 1,5} = \frac{1,5}{2} = 0,75 \tag{8.9}$$

Ο υπεύθυνος του βιβλιοπωλείου πρέπει να παραγγείλει Q^* ημερολόγια,όπου Q^* είναι ο ελάχιστος αριθμός για τον οποίο:
$P(D \leq Q^*) \geq 0,75$. Παρατηρούμε από τον Πίνακα 1 ότι το μόνο Q για το οποίο $P(D \leq Q^*) \geq 0,75$ είναι για $Q = 400$, άρα $Q^* = 400$ ημερολόγια πρέπει να παραγγείλει το βιβλιοπωλείο για να έχει τα μέγιστα δυνατά έσοδα.

Βιβλιογραφία

[en.wikipedia.org/wikiiEconomic_order _quantity#Example]

[29667869-Methods-and-Models-of-Operations-Research] Arnold Kaufmann, Brofesseur a 1'Institut Polytechnique de Grenoble , Conseilleur Scientifique a la Compagnie des Machines Bull

[Operations Research. An Introduction (Prentice Hall 2007.8.ed)] Hamdy A. Taha

[Operations-Research-Applications-and-Algorithms] Wayne-L-Winston

[Notes in inventory management] Author: Dr. Dimitrios Blaxos

[Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα] Κολέτσος Ιωάννης, Στογιάννης Δημήτριος, Αθήνα 2012, Εκδόσεις Συμεών

Κεφάλαιο 9

"*Probabilized*" Μοντέλο EOQ

Κάποιοι επαγγελματίες έχουν προσπαθήσει να προσαρμόσουν το ντετερμινιστικό μοντέλο EOQ έτσι ώστε να αντανακλά την πιθανοτική φύση της ζήτησης χρησιμοποιώντας μια προσέγγιση που επιθέτει ένα σταθερό ρυθμιστικό απόθεμα ασφαλείας στο επίπεδο των αποθεμάτων, σε ολόκληρο το χρονικό σχεδιασμό. Το μέγεθος αυτού του ρυθμιστικού αποθέματος προσδιορίζεται έτσι ώστε η πιθανότητα να εξαντληθεί το απόθεμα κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής (της περιόδου μεταξύ της χρονικής στιγμής που πραγματοποιείται η παραγγελία και της χρονικής στιγμής που καταφτάνει) δεν ξεπερνά μια προκαθορισμένη τιμή.

Έστω:

$L =$ Χρόνος αναμονής μεταξύ της στιγμής που γίνεται η παραγγελία και της χρονικής στιγμής που καταφτάνει

$d_L =$ Τυχαία μεταβλητή που αντιπροσωπεύει τη ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής

$\mu_L =$ Μέση ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής

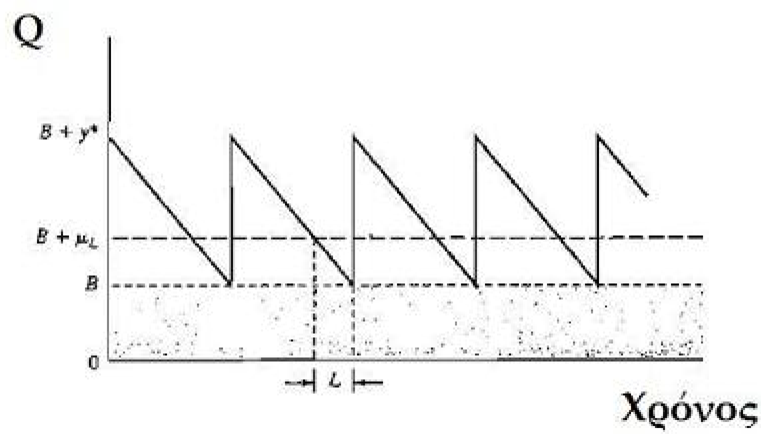
$\sigma_L =$ Τυπική απόκλιση της ζήτησης κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής

B= Σταθερό ρυθμιστικό απόθεμα ασφαλείας

α= Η μέγιστη επιτρεπτή πιθανότητα εξάντλησης του αποθέματος κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής

Η βασική παραδοχή που κάνουμε για το μοντέλο είναι ότι η ζήτηση d_L κατά τη διάρεια του χρόνου αναμονής L ακολουθεί την κανονική κατανομή, με μέση τιμή μ_L και τυπική απόκλιση σ_L, δηλαδή $d_L \sim N(\mu_L, \sigma_L)$.

Το παρακάτω σχήμα απεικονίζει τη σχέση μεταξύ του ρυθμιστικού αποθέματος B και των παραμέτρων του ντετερμινιστικού μοντέλου EOQ που περιλαμβάνουν το χρόνο αναμονής L, τη μέση ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής μ_L και του EOQ, που στο παρακάτω σχήμα συμβολίζεται με y^*



στοςκ.θπγ

Η κατάσταση της πιθανότητας που χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό του B μπορεί να γραφτεί ως:

$$P(d_L \geq B + \mu_L) \leq \alpha$$

Μπορούμε αντί του d_L να χρησιμοποιήσουμε την τυποποιημένη μεταβλητή

$$z = \frac{d_L - \mu_L}{\sigma_L} \tag{9.1}$$

, όπου $z \sim N(0,1)$.
Έτσι, έχουμε:

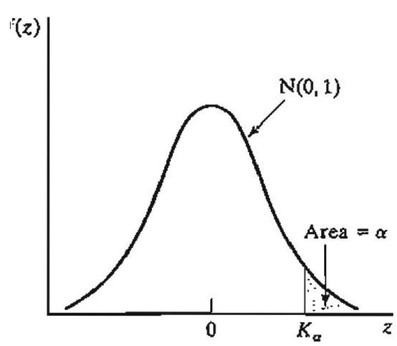
$$P(z \geq \frac{B}{\sigma_L}) \leq \alpha \tag{9.2}$$

Στο σχήμα που ακολουθεί, το σημείο που ξεκινάει η κάθετη στα δεξιά, μπορούμε να το ορίσουμε ως K_α, για το οποίο ισχύει:

$$P(z \geq K_\alpha) = \alpha \tag{9.3}$$

Έτσι, το μέγεθος του ρυθμιστικού αποθέματος πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση:

$$B \geq \sigma_L * K_\alpha \tag{9.4}$$



διστριβυτιον.θπγ

Η ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής L συνήθως περιγράφεται από τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ανά μονάδα χρόνου (π.χ. ανά ημέρα ή εβδομάδα), από την οποία μπορεί να καθοριστεί η κατανομή της ζήτησης κατά τη διάρκεια του L (d_L). Δεδομένου ότι η ζήτηση ανά μονάδα χρόνου ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή D και τυπική απόκλιση ς, η μέση τιμή μ_L και η τυπική απόκλιση σ_L της ζήτησης κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής L , υπολογίζονται ως εξής:

$$\mu_L = D * L$$
$$\sigma_L = \sqrt{\sigma s^2 * L}$$

Ο τύπος του σ_L απαιτεί το L να είναι (με στρογγυλοποίηση) ακέραιος αριθμός.

Παράδειγμα: Στον Κωτσόβολο έστω ότι η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας φορτιστών των κινητών *Sony Ericsson* **είναι** $EOQ = 2000$ **μονάδες. Εάν η ημερίσια ζήτηση είναι Κανονική με μέση τιμή** $D = 50$ **φορτιστές αι τυπική απόκλιση σ=15 φορτιστές, δηλαδή N(50, 15), πρέπει να καθοριστεί το ρυθμιστικό απόθεμα ώστε η πιθανότητα έλλειψης των συγκεκριμένων φορτιστών να είναι κάτω από α=0,04. Δίνεται ότι ο χρόνος αναμονής είναι** $L = 4$ **εργάσιμες ημέρες.**

Από τους παραπάνω τύπους, $\mu_L = D * L = 50 * 4 = 2000$ φορτιστές, $\sigma_L = \sqrt{\sigma^2 * L} = \sqrt{15^2 * 4} = 2 * 15 = 30$ φορτιστές.
Δοσμένου του $K_{.04} = 1,640$, το μέγεθος του ρυθμιστικό απόθεμα είναι:

$$B \geq 30 * 1,640 = 49,2 \text{ φορτιστές } \textit{Sony Ericsson.}$$

Έτσι, η βέλτιστη πολιτική αποθεμάτων με ρυθμιστικό απόθεμα B για παραγγελία 2000 μονάδων είναι να παραγγέλνουμε όταν το απόθεμα πέσει στις 49,2+4*50=49,2+200=249,2 μονάδες.

Βιβλιογραφία

[en.wikipedia.org/wikiiEconomic_order _quantity#Example]

[29667869-Methods-and-Models-of-Operations-Research] Arnold Kaufmann, Brofesseur a 1'Institut Polytechnique de Grenoble , Conseilleur Scientifique a la Compagnie des Machines Bull

[Operations Research. An Introduction (Prentice Hall 2007.8.ed)] Hamdy A. Taha

[Operations-Research-Applications-and-Algorithms] Wayne-L-Winston

[Notes in inventory management] Author: Dr. Dimitrios Blaxos

[Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα] Κολέτσος Ιωάννης, Στογιάννης Δημήτριος, Αθήνα 2012, Εκδόσεις Συμεών

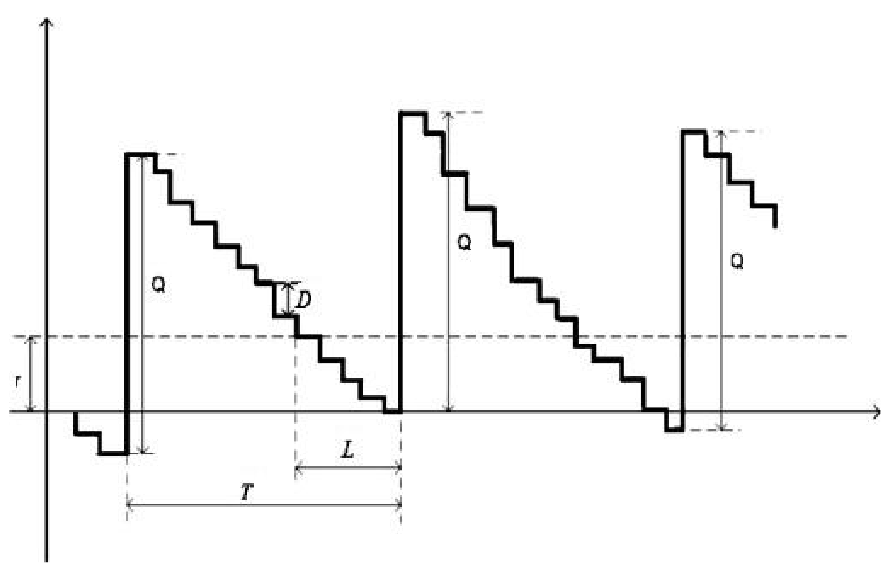
Κεφάλαιο 10

Πολιτικές Αντικατάστασης Αποθεμάτων

Οι βασικές τεχνικές αντικατάστασης αποθεμάτων σε συνεχώς αναθεωρούμενα και περιοδικά αναθεωρούμενα συστήματα, είναι οι εξής:

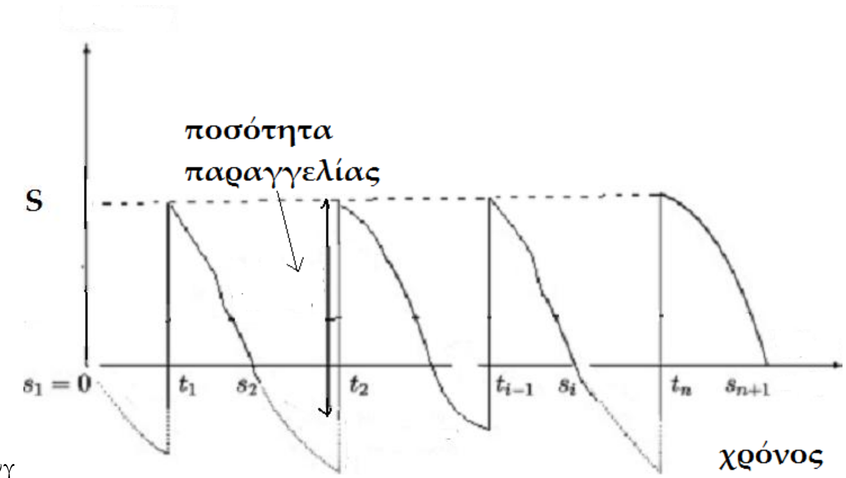
- Συνεχώς Αναθεωρούμενα Συστήματα:

  (r, Q) **Πολιτική:** Κάθε φορά που τα αποθέματα πέφτουν σε ένα επίπεδο r ή και παρακάτω, η παραγγελία καταφτάνει σε συγκεκριμένη ποσότητα Q.



πολιςψ.θπγ

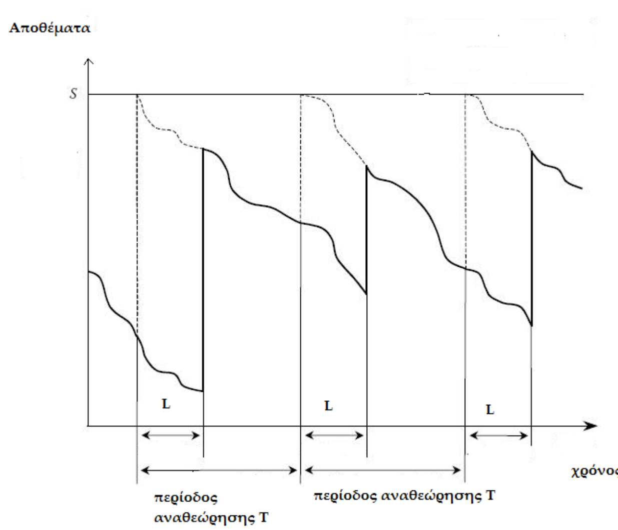
(r, S) **Πολιτική:** Όποτε το επίπεδο των αποθεμάτων πέφτει σε ένα επίπεδο χαμηλότερο ή ίσο του r, η ποσότητα της νέας παραγγελίας διαμορφώνεται κατάλληλα, ώστε το απόθεμα να αυξάνεται σε μια σταθερή ποσότητα S.



πολιςψ.πνγ

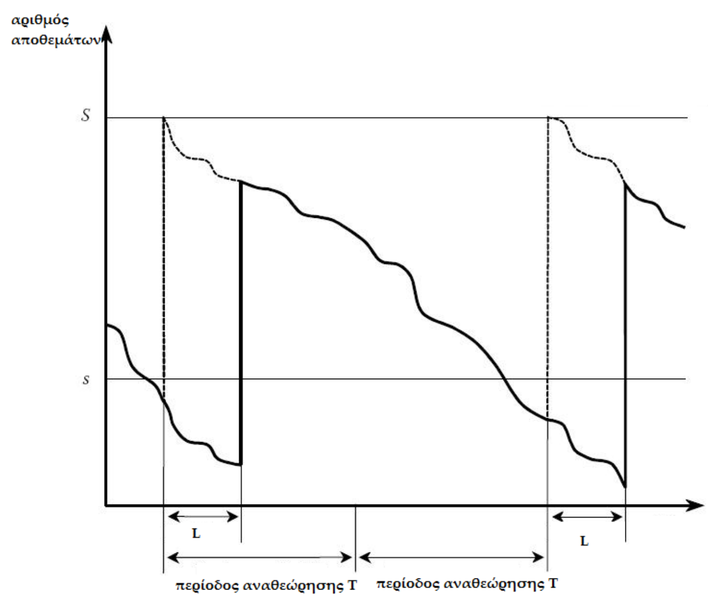
- <u>Περιοδικά Αναθεωρούμενα Συστήματα:</u>

(T, S) **Πολιτική:** Το επίπεδο των αποθεμάτων αναθεωρείται σε τακτικές στιγμές, που απέχουν κατά χρονικά διαστήματα μήκους Τ. Σε κάθε αναθεώριση γίνεται και η παραγγελία σε ποσότητα τέτοια, ώστε το απόθεμα να φτάνει σε ένα σταθερό επίπεδο S.



πολιςψ.πνγ

(T, s, S) **Πολιτική:** Το επίπεδο των αποθεμάτων αναθεωρείται σε τακτές χρονικές στιγμές, που το χρονικό διάστημα μεταξύ τους είναι μήκους T. Σε κάθε αναθεώριση, εάν η ποσότητα των αποθεμάτων είναι μικρότερη ή ίση του s , γίνεται παραγγελία μεγέθους τέτοιου ώστε τα προϊόντα να φτάσουν σε ένα σταθερό επίπεδο S. Αν όμως στην αναθεώρηση δουν ότι η ποσότητα του αποθέματος είναι ακόμα πάνω από s, δε γίνεται παραγγελία. Αυτή η πολιτική είναι και γνωστή ως (r, S) -πολιτική περιοδικής αναθεώρησης.



πολιςψ.πνγ

Οι ποσότητες Q, r, S, T ορίζονται ως εξής:

Q : ποσότητα παραγγελίας
r: σημείο παραγγελίας
S: το σταθερό επίπεδο που φτάνει το απόθεμα με την έλευση της παραγγελίας
T: περίοδος αναθεώρησης (το χρονικό διάστημα μεταξύ δυο αναθεωρήσεων)

Μία απ΄τις πλέον κοινές μεθόδους για τη διαχείρηση συστημάτων αποθεμάτων με στοχαστική ζήτηση είναι η πολιτική σημείου και ποσότητας παραγγελίας, δηλαδ·η η (Q, r) πολιτική. Κάτω από την (Q, r) - πολιτική τα αγαθά στα αποθέματα που τελειώνουν συνεχώς επιθεωρούνται και τοποθετούνται καινούργιες παραγγελίες κάθε φορά που η ποσότητα πέφτει κάτω από το σημείο r. Οι τιμές Q και r επιλέγονται με τέτοιο τρόπο, ώστε το συνολικό κόστος των αποθεμάτων (Κόστος παραγγελίασ+ Κόστος αποθήκευσης + Κόστος αγοράς) να ελαχιστοποιηθεί.

Θεωρούμε ότι:

- Η ζήτηση των προϊόντων είναι τυχαία μεταβλητή με σταθερή μέση τιμή και διακύμανση
- Η ζήτηση ενός προϊόντος είναι ανεξάρτητη από τη ζήτηση άλλων διαφορετικών προϊόντων
- Ο χρόνος αναμονής είναι τυχαία μεταβλητή με σταθερή μέση τιμή και διακύμανση
- Οι χρόνοι αναμονής είναι ανεξάρτητοι

Έστω:

r: σημείο παραγγελίας
Q: ποσότητα παραγγελίας
D: μέση ζήτηση (πλήθος προϊόντων ανά μονάδα χρόνου)
σ_D^2 :διακύμανση ζήτησης
L: μέσος χρόνος αναμονής
σ_L^2: τυπική απόκλιση χρόνου αναμονής
k : συντελεστής επιπέδου υπηρεσίας
K: κόστος παραγγελίας
K_c: κόστος αποθήκευσης ανά προϊόν

Η τυπική απόκλιση της ζήτησης σ_D^2 , ορίζεται ως ζήτηση σε μια χρονική μονάδα. Αφού οι ζητήσεις ανά χρονική μονάδα για ξεχωριστά προϊόντα είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες, η τυπική απόκλιση της ζήτησης σε προκαθορισμένη χρονική στιγμή για t μονάδες είναι $\sigma_D^2 * t$

Το σημείο παραγγελίας r και η ποσότητα παραγγελίας Q στην (r, Q) - πολιτική, δίνονται από τους ακόλουθους τύπους:

$$r = D * L + k * \sqrt{L * \sigma_D^2 + D^2 * \sigma_L^2}$$

$$X = \sqrt{\frac{2*K*D}{K_c}} \tag{10.1}$$

ρ

Το σημείο παραγγελίας r, με τον πρώτο τύπο, είναι το επίπεδο των αποθεμάτων που χρειάζονται για να καλυφθεί η ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής. Ο πρώτος όρος, $D * L$, είναι κατά μέσο όρο το απόθεμα που χρειάζεται. Ο δεύτερος όρος, $k * \sqrt{L * \sigma_D^2 + D^2 * \sigma_L^2}$, είναι το επιπλέον απόθεμα που χρειάζεται για να αποφευχθεί το έλλειμμα λόγω της τυχαιότητας της ζήτησης και του χρόνου αναμονής. Αυτό το επιπλέον απόθεμα είναι το απ'οθεμα ασφαλείας που είχαμε κάνει λόγο σε προηγούμενο κεφάλαιο ($Safety\ \ Stock$). Άρα:

$$Safety\ \ Stock = k * \sqrt{L * \sigma_D^2 + D^2 * \sigma_L^2} \tag{10.2}$$

Οι παραπάνω δυο όροι του r βασίζονται στο ότι η ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής έχει μέση τιμή $D*L$ και τυπική απόκλιση $\sqrt{L * \sigma_D^2 + D * \sigma_L^2}$.

Ο συντελεστής επιπέδου υπηρεσιών k, είναι μια αδιάστατη σταθερά που αντιπροσωπεύει τον αριθμό των τυπικών αποκλίσεων πέραν της μέσης τιμής $D * L$, που απαιτούνται για να επιτευχθεί ένα συγκεκριμένο επίπεδο εξυπηρέτησης (δηλαδή, ένα συγκεκριμένο μέτρο απόδοσης για την ικανοποίηση της ζήτησης από τα αποθέματα). Το επίπεδο των υπηρεσιών μετράται τυπικά χρησιμοποιώντας μια από τις ακόλουθες δυο ποσότητες α και β :

α= η πιθανότητα να καλυφθεί η ζήτηση από τα αποθέματα
β= το ποσοστό της ζήτησης που καλύπτεται από τα αποθέματα (επίσης γνωστό ως ποσοστό πλήρωσης ή "$fill\ \ rate$")

Η πιθανότητα α είναι η αναλογία των κύκλων αναπλήρωσης, στην οποία δεν εμφανίζεται έλλειψη. Το ποσοστό "*fill rate*" β είναι το ποσοστό των συνολικών αποθεμάτων που ζητούνται, τα οποία δεν είναι σε έλλειψη. Εάν η ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής έχει μια γενική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_l(x)$, τότε οι ποσότητες α και β δίνονται από τους τύπους:

$$a = 1 - \int_{r}^{+\infty} f_l(x)dx \tag{10.3}$$

και

$$b = 1 - \frac{1}{Q} * \int_{r}^{+\infty} (x - r) * f_l(x)dx \tag{10.4}$$

όπου το r εχει σχέση με τον συντελεστή επιπέδου υπηρεσιών k.

Αν η ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής είναι κανονική κατανομή, τότε οι ποσότητες α και β σχετίζονται με το συντελεστή k ως εξής:

$$\alpha = \Phi(k)$$

και

$$b = 1 - \frac{\sigma_l}{Q} * \frac{1}{\sqrt{2 * \pi}} * exp(\frac{-1}{2} * k^2) - k * [1 - F(k)] \tag{10.5}$$

όπου $\Phi(k)$ είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυποποιημένης κανονικής κατανομής, δηλαδή:

$$F(k) = \int_{-\infty}^{k} \frac{1}{\sqrt{2*\pi}} * exp\frac{-1}{2} * x^2 dx \qquad (10.6)$$

και σ_l η τυπική απόκλιση της ζήτησης κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής, δηλαδή:

$$\sigma_l = \sqrt{L * \sigma_D^2 + D^2 * \sigma_L^2} \qquad (10.7)$$

Για να επιβεβαιώσουμε ότι η πιθανότητα α θα [αίρνει μεγάλες τιμές, ο συντελεστής προσφοράς υπηρεσιών k είναι μεταξύ των αριθμών 2 και 3. Όταν $k = 2$, α=97,7 % και όταν $k = 3$, α=99,9%.

Η σχέση μεταξύ του ποσοστού πλήρωσης β και του συντελεστή προσφοράς υπηρεσιών k, είναι πολυπλοκότερη σε σχέση με το α, αφού εξαρτάται από την ποσότητα παραγγελίας Q. Η EOQ, όπως τη βρίσκουμε από το γνωστό τύπο

$$EOQ = \sqrt{\frac{2 * K * D}{K_c}} \qquad (10.8)$$

παρέχει μια χρήσιμη ευρετική προσέγγιση για το Q, που επιτρέπει το r να εκτιμηθεί χωριστά από το Q. Για δοσμένο κόστος έλλειψης ανά προϊόν, τα r και Q μπορούν να βελτιστοποιηθούν από κοινού.

Αν η ζήτηση κάθε προϊόντος και ανά μονάδα χρόνου ακολουθεί την κανονική κατανομή, με σταθερό χρόνο αναμονής ($\sigma_L^2 = 0$), τότε η ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής ακολουθεί κανονική κατανομή. Αν όμως η ζήτηση ανά μονάδα προϊόντος και χρόνου ακολουθεί κανονική κατανομή και ο χρόνος αναμονής είναι μεταβλητός ($\sigma_L^2 > 0$), τότε σε γενικές γραμμές η ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής δεν ακολουθεί την κανονική κατανομή. στην περίπτωση του μεταβλητού χρόνου αναμονής οι σχέσεις μεταξύ του συντελεστή επιπέδου υπηρεσιών k και των ποσοτήτων α και β, μπορεί να είναι αρκετά καλές προσεγγίσεις.

10.1 (r, S) Πολιτική: Καθορισμός Σημείου Παραγγελίας (r) και το μέγεθος της Παραγγελίας μέχρι ένα Ανώνατο Σημείο (S)

Μια από τις σημαντικότερες εξελίξεις της θεωρίας διαχείρησης αποθεμάτων, είναι η απόδειξη ότι η (r, S) πολιτική είναι η βέλτιστη για ένα σύνολο δυναμικών μοντέλων αποθεμάτων, με τυχαία περιοδική ζήτηση και συγκεκριμένο κόστος παραγγελίας. Σύμφωνα με την (r, S) πολιτική, αν το επίπεδο των αποθεμάτων στην αρχή μιας περιόδου είναι χαμηλότερο από το σημείο παραγγελίας r, τότε πρέπει να γίνει παραγγελία μιας επαρκούς ποσότητας για να πετύχουμε να ανεβάσουμε το επίπεδο του αποθέματος σε ένα επίπεδο S.

Θεωρούμε ότι:

- Η ζήτηση προϊόντων είναι τυχαία μεταβλητή με σταθερή μέση τιμή και διακύμανση
- Η ζήτηση ενός είδους προϊόντων είναι ανεξάρτητη της ζήτησης άλλων ειδών
- Ο χρόνος αναμονής είναι μια τυχαία μεταβλητή με σταθερή μέση τιμή και διακύμανση
- Οι χρόνοι αναμονής είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους

Έστω:

r : σημείο παραγγελίας (σε πλήθος προϊόντων)

S: το επίπεδο που φτάνει το απόθεμα αφού ληφθεί η νέα παραγγελία

D: μέση ζήτηση (πλήθος προϊόντων ανά μονάδα χρόνου

σ_D^2: διακύμανση ζήτησης ((πλήθος προϊόντων)^2 ανά μονάδα χρόνου)

L: μέσος χρόνος αναμονής (σε μονάδα χρόνου)

σ_L^2 : διακύμανση χρόνου αναμονής (σε (μονάδες χρόνου)^2)

k : παράγοντας επιπέδου υπηρεσιών

K: κόστος παραγγελίας (ευρώ ανά παραγγελία)

K_c: κόστος αποθήκευσης μιας μονάδας προϊόντων (ευρώ ανά μονάδα προϊόντος και ανά μονάδα χρόνου)

Η τυπική απόκλιση της ζήτησης, σ_D^2, ορίζεται για μια ζήτηση ανά μονάδα χρόνου. Από τη στιγμή που η ζήτηση δεν έχει να κάνει με το είδος του προϊόντος, αλλά αρκεί να αναφερόμαστε σε ένα είδος, η διακύμανση της ζήτησης για συγκεκριμένο χρονικό διάστημα για t μονάδες από το ίδιο προϊόν είναι $\sigma_D^2 * t$

Το σημείο παραγγελίας r και το υψηλότερο επ΄πεδο S είναι στην ουσία η (r, S) πολιτική που δίνονται από τους τύπους:

$$r = D * L + k * \sqrt{L * \sigma_D^2 + D^2 * \sigma_L^2} \tag{10.9}$$

$$S = r + Q, \text{ όπου}$$

$$Q = \sqrt{\frac{2 * K * D}{K_c}} \tag{10.10}$$

Το σημείο παραγγελίας r είναι το επίπεδο του αποθέματος που απαιτείται για να καλυφθεί η ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής. Ο παραπάνω τύπος για το r βασίζεται στο ότι η ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής έχει μέση τιμή $D * L$ και σταθερή διακύμανση

$$\sqrt{L * \sigma_D^2 + D^2 * \sigma_L^2} \tag{10.11}$$

Ο παράγοντας επιπέδου υπηρεσιών, k, είναι μια αδιάστατη σταθερά που αντιπροσωπεύει τον αριθμό των τυπικών αποκλίσεων της ζήτησης πέρα από τη μέση τιμή $D * L$, που απαιτείται για να επιτευχθεί ένα συγκεκριμένο επίπεδο υπηρεσιών.

10.2 (r, S) Πολιτική: Καθορισμός Σημείου Παραγγελίας (r) και Ανώτατου Μεγέθους Παραγγελίας (S)

Μια από τις σημαντικότερες εξελίξεις της θεωρίας διαχείρησης αποθεμάτων, είναι η απόδειξη ότι η πολιτική (r, S) είναι η βέλτιστη για ένα σύνολο δυναμικών μοντέλων αποθεμάτων, με τυχαία περιοδική ζήτηση και συγκεκριμένο κόστος παραγγελίας. Σύμφωνα με την (r, S) πολιτική, αν το επίπεδο των αποθεμάτων στην αρχή μιας περιόδου είναι χαμηλότερο από το σημείο παραγγελίας r, τότε πρέπει να γίνει παραγγελία μιας επαρκούς ποσότητας για να πετύχουμε να ανεβάσουμε το επίπεδο του αποθέματος στην ανώτατη ποσότητα S.

Θεωρούμε ότι:

- Η ζήτηση προϊόντων είναι τ.μ. με σταθερή μέση τιμή και διακύμανση

- Η ζήτηση ενός είδους προϊόντων είναι ανεξάρτητη της ζήτησης άλλων ειδών

- Ο χρόνος αναμονής είναι μια τ.μ. με σταθερή μέση τιμή και διακύμανση

- Οι χρόνοι αναμονής είναι ανεξάρτητοι.

Έστω:
r: σημείο παραγγελίας (σε πλήθος προϊόντων)
S: το επίπεδο που φτάνει το απόθεμα αφού ληφθεί η νέα παραγγελία (σε πλήθος προϊόντων)
D: μέση ζήτηση (πλήθος προϊόντων ανά μονάδα χρόνου)
σ_D^2: διακύμανση ζήτησης ((πλήθος προϊόντων)^2 ανά μονάδα χρόνου)
L: μέσος χρόνος αναμονής (σε μονάδες χρόνου)
σ_L^2: διακύμανση χρόνου αναμονής (σε (μονάδες χρόνου)^2)
k: παράγοντας επιπέδου υπηρεσιών
K: κόστος παραγγελίας (ευρώ ανά παραγγελία)
K_c: κόστος αποθήκευσης μιας μονάδας προϊόντων (ευρώ ανά μονάδα προϊόντος και ανά μονάδα χρόνου)

Η τυπική απόκλιση της ζήτησης σ_D^2, ορίζεται για μια ζήτηση ανά μονάδα χρόνου. Από τη στιγμή που η ζήτηση δεν έχει να κάνει με το είδος του προϊόντος, αλλά αρκεί να αναφερόμαστε σε ένα είδος, η διακύμανση της ζήτησης για συγκεκριμένο χρονικό διάστημα για t μονάδες ενός είδους προϊόντος, είναι $\sigma_D^2 * t$.

Το σημείο παραγγελίας r και το υψηλότερο επίπεδο S είναι στην ουσία η (r,S) πολιτική και δίνονται από τους τύπους:

$$r = D * L + k * \sqrt{L * \sigma_D^2 + D^2 * \sigma_L^2} \tag{10.12}$$
$$S = r + Q$$

όπου

$$Q + \sqrt{\frac{2 * K * D}{K_c}} \tag{10.13}$$

Το σημείο παραγγελίας r είναι το επίπεδο του αποθέματος που απαιτείται για να καλυφθεί η ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής. Ο παραπάνω τύπος για το r βασίζεται στο ότι η ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής έχει μέση τιμή $D * L$ και σταθερή διακύμανση

$$\sqrt{L * \sigma_D^2 + D^2 * \sigma_L^2} \tag{10.14}$$

.

10.3 (T, S) Πολιτική: Καθορίζει το Διάστημα Ελέγχου Αποθεμάτων (T) και το Ανώτατο Επίπεδο Αποθεμάτων (S)

Ένας διαφορετικός τρόπος διαχείρησης του στοχαστικού συστήματος αποθεμάτων είναι η πολιτική της περιοδικής αναθεώρησης στην οποία το επίπεδο των αποθεμάτων παρατηρείται σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές, ανάμεσα στις οποίες μεσολαβεί ένα σταθερό χρονικό διάστημα μήκους T. Αν το επίπεδο αποθέματος έχει κατέβει σε ένα σημείο y , παραγγέλνουμε ποσότητα $S-y$ ώστε να επαναφέρουμε το επίπεδο στο σημείο S. Το S λέγεται επίπεδο παραγγελίας. Αφού περάσει το χρονικό διάστημα της αναμονής της παραγγελίας L, τα καινούργια προϊόντα τοποθετούνται στα αποθέματα.

Η ανάλυση αυτής της πολιτικής μοιάζει πολύ με την (r, S) πολιτική. Στην (r, S) πολιτική, το σημείο παραγγελίας r υπάρχει για να προστατευθεί η επιχείρηση από την πιθανότητα ελλείμματος κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής, L. Για την (T, L) πολιτική, το υψηλότερο όριο S έχει καθοριστεί για να αποφευχθεί το έλλειμμα κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος $T + L$. Στην περίπτωση μιας συγκεκριμένης παραγγελίας τη χρονική στιγμή t, η χαμηλότερη ποσότητα αποθέματος που επηρρεάζεται από αυτή την παραγγελία συμβαίνει τη χρονική στιγμή $t + T + L$. Η ποσότητα S πρέπει να είναι ακρετά μεγάλη για να διατηρήσει την πιθανότητα ελλείμματος σε αυτό το χρονικ΄ διάστημα χαμηλή. Η (T, S) πολιτική επηρρεάζεται από τη μεταβλητότητα περισσότερο σε σχέση με την (r, S) πολιτική, λόγω του μεγαλύτερου χρονικού διαστήματος. Το πλεονέκτημα αυτής της πολιτικής είναι ότι δεν απαιτεί συνεχή αναθεώρηση.

Θεωρούμε ότι:

- Η ζήτηση των προϊόντων είναι μια τυχαία μεταβλητή με σταθερή μέση τιμή και διακύμανση

- Η ζήτηση ενός είδους προϊόντων είναι ανεξάρτητη από τη ζήτηση άλλων ειδών προϊόντων

- Ο χρόνος αναμονής είναι τυχαία μεταβλητή με σταθερή μέση τιμή και διακύμανση

- Οι χρόνοι αναμονής είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους

- Η περίοδος αναθεώρησης (δηλαδή το χρονικό διάστημα μεταξύ δυο αναθεωρήσεων) είναι σταθερά

'Εστω

T: περίοδος αναθεώρησης (σε μονάδες χρόνου)

S: το αν·ωτατο επίπεδο αποθεμάτων (σε πλήθος προϊόντων)

D: μέση ζήτηση (πλήθος προϊόντων ανά μονάδα χρόνου)

σ_D^2: διακύμανση ζήτησης (πλήθος^2 ανά μονάδα χρόνου)

L: μέσος χρόνος αναμονής (σε μονάδες χρόνου)

σ_L^2 : διακύμανση χρόνου αναμονής (σε μονάδες χρόνου^2)

k: παράγοντας επιπέδου υπηρεσιών

K: κόστος παραγγελίας (σε ευρώ ανά παραγγελία)

K_c: κόστος αποθήκευσης ανά προϊόν (σε ευρώ ανά προϊόν ανά μονάδα χρόνου)

Το κόστος παραγγελίας K σάυτή την περίπτωση περιλαμβάνει το κόστος, εάν υπάρχει, από την αναθεώρηση των αποθεμάτων σε κάθε περίοδο T. Η διακύμανση της ζήτησης , σ_D^2, ορίζεται ορίζεται για μια ζήτηση σε μια μονάδα χρόνου. Αφού η ζήτηση ενός είδους προϊόντων είναι ανεξάρτητη από τη ζήτηση των άλλων ειδών για κάθε χρονική μονάδα, η διακύμανση της ζήτησης σε συγκεκριμένες t χρονικές μονάδες, είναι $\sigma_D^2 * t$.

Η περίοδος αναθεώρησης T και το μέγιστο επίπεδο αποθεμάτων S στην (T, S) πολιτική δίνονται επ΄ ακριβώς από τους παρακάτω τύπους:

$$T = \sqrt{\frac{2 * K}{D * K_c}} \tag{10.15}$$

και

$$S = D * (L + T) + k * \sqrt{(L + T) * \sigma_D^2 + D^2 * \sigma_L^2} \tag{10.16}$$

Στην ειδική περίπτωση που οι χρόνοι αναμονής είναι καθορισμένοι, δηλαδή

$$\sigma_L^2 = 0$$

, ο τύπος του S γίνεται:

$$S = D * (L + T) + k * \sigma_D * \sqrt{L + T} \tag{10.17}$$

Η περίοδος αναθεώρησης T καθορίζεται από το EOQ. Για δοσμένο EOQ, έστω Q, ο βέλτιστος χρόνος μεταξύ δυο διαδοχικών αναπληρώσεων είναι $\frac{Q}{D}$. Αυτός ο τύπος μας δίνει μια εκτίμηση του T. Πρακτικά, η περίοδος αναθεώρησης T μπορεί να στρογγυλοποιηθεί σε ακέραιο αριθμό ημερών ή εβδομάδων ή καθορίζεται σε κάποιο άλλο βολικό χρονικό διάστημα.

Το ανώτατο επίπεδο αποθεμάτων S, είναι τα αποθέματα που απαιτούνται για να βεβαιώσουμε ένα δοσμένο επίπεδο υπηρεσιών (δηλαδή μια δοσμένη πιθανότητα που αφορά τη ζήτηση που θα ικανοποιείται). Ο πρώτος όρος, $D*(L+T)$, είναι το απόθεμα που χρειάζεται για να ικανοποιηθεί η ζήτηση κατά μέσο όρο. Ο δεύτερος όρος, $k * \sqrt{(L + T) * \sigma_D^2 + D^2 * \sigma_L^2}$, είναι το επιπλέον απόθεμα (δηλαδή το απόθεμα ασφαλείας) που απαιτείται για να αποφευχθεί ο κίνδυνος ελλείμματος λόγω της τυχαίας μεταβλητότητας της ζήτησης και του χρόνου αναμονής.

Οι παραγγελίες για ανεφοδιασμό στην (T, S) πολιτική γίνονται κάθε T χρονικές μονάδες. Αφού γίνει η παραγγελία, χρειάζονται l χρονικές μονάδες μέχρι να φτάσει ο ανεφοδιασμός, όπου l είναι μια τυχαία μεταβλητή (χρόνος αναμονής). Έτσι, ο χρόνος από τη στιγμή που γίνεται η παραγγελία μέχρι και τη στιγμή που καταφτάνει είναι $l + T$. Προς αποφυγήν της έλλειψης, ως εκ τούτου, το απόθεμα στην (T, S) πολιτική πρέπει να επαρκεί για να ικανοποιήσει τη ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονήσσυν τη χρονική περίοδο μέχρι τον επόμενο έλεγχο (δηλαδή όχι μόνο κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής, όπως στην (r, Q) πολιτική). Η ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής μαζί με το χρονικό διάστημα έως την αναθεώρηση έχει μέση τιμή $D * (L + T)$ και τυπική απόκλιση $k * \sqrt{(L + T) * \sigma_D^2 + D^2 * \sigma_L^2}$

Ο παράγοντας επιπέδου υπηρεσιών k είναι όπως και στις ροηγούμενες δυο πολιτικές μια αδιάστατη σταθερά που αντιπροσωπεύει τον αριθμό των τυπικών αποκλίσεων πέραν της μέσης τιμής που απαιτούνται για να εξασφαλιστεί ένα ορισμένο επίπεδο εξυπηρέτησης.

10.4 (T, r, S) Πολιτική: Καθορίζει την Περίοδο Αναθεώρησης (Τ), το Σημείο Παραγγελίας (r) και το Ανώτατο Όριο Αποθεμάτων (S)

Το (T, r, S) μοντέλο αποθεμάτων έχει μελετηθεί διεξοδικά κατά τη διάρκεια των τελευταίων δεκαετιών. Υπό το καθεστώς αυτής της πολιτικής, για κάθε Τ χρονικές μονάδες ελέγχεται το μέγεθος των αποθεμάτων προκειμένου να ληφθεί μια απόφαση αναπλήρωσης. Όταν το απόθεμα είναι κάτω των r μονάδων, γίνεται η παραγγελία τόσων μονάδων ώστε το απόθεμα να φτάσει τις S μονάδες. Αυτή η πολιτική είναι και γνωστή ως (r, S) *Πολιτική.*

Θεωρούμε ότι:

- Η ζήτηση των προϊόντων είναι τ.μ. με σταθερή μέση τιμή και διακύμανση.
- Η ζήτηση ενός είδους προϊόντων είναι ανεξάρτητη της ζήτησης άλλων διαφορετικών ειδών προϊόντων.
- Ο χρόνος αναμονής (δηλαδή το χρονικό διάστημα από τη στιγμή που γίνεται η παραγγελία έως τη στιγμή που καταφτάνει) είναι τ.μ.
- Το χρονικό διάστημα Τ μεταξύ δύο αναθεωρήσεων είναι σταθερό.

Έστω:

Τ: περίοδος αναθεώρησης (σε χρονικές μονάδες)

r: σημείο παραγγελίας (σε πλήθος προϊόντων)

S: το σταθερό μέγεθος που φτάνει το απόθεμα μετά την έλευση της παραγγελίας

D: μέση ζήτηση (σε πλήθος προϊόντων ανά μονάδα χρόνου)

σ_D^2: διακύμανση ζήτησης (σε μονάδες προϊόντων^2 / μονάδα χρόνου)

L: μέσος χρόνος αναμονής (σε μονάδες χρόνου)

σ_L^2: διακύμανση χρόνου αναμονής (σε μονάδες χρόνου^2)

k: παράγοντας επιπέδου υπηρεσιών

Κ: κόστος παραγγελίας (σε ευρώ ανά παραγγελία)

K_c: κόστος αποθήκευσης για μια μονάδα προϊόντος (σε ευρώ ανά μονάδα προϊόντος / μονάδα χρόνου).

Το κόστος παραγγελίας Κ σε αυτή την πολιτική περιλαμβάνει το κόστος, αν υπάρχει, του ελέγχου του επιπέδου των αποθεμάτων σε κάθε περίοδο αναθεώρησης. Η διακύμανση ζήτησης, σ_D^2, ορίζεται για μια ζήτηση σε μια χρονική μονάδα. Αφού η ζήτηση ενός είδους προϊόντων είναι ανεξάρτητη της ζήτησης των υπόλοιπων ειδών, η διακύμανσή της για συγκεκριμένες t χρονικές μονάδες είναι: $\sigma_D^2 * t$.

Το χρονικό διάστημα αναθεώρησης Τ, το σημείο παραγγελίας r και το ανώτατο επίπεδο S των αποθεμάτων αποτελούν την (T, r, S) πολιτική και δίνονται επακριβώς από τους παρακάτω τύπους:

$$T = \sqrt{\frac{2 * K}{D * K_c}} \tag{10.17}$$

$$r = D * (L + T) + k * \sqrt{(L + T) * \sigma_D^2 + D^2 * \sigma_L^2} \tag{10.17}$$

$$S = r + Q \tag{10.17}$$

,

όπου

$$Q = \sqrt{\frac{2 * K * D}{K_c}} \tag{10.17}$$

Στις ειδικές περιπτώσεις όπου ο χρόνος αναμονής είναι σταθερός, δηλαδή $\sigma_L^2 = 0$, ο τύπος του r συρρικνώνεται ως εξής:

$$r = D * (L + T) + k * \sigma_D * \sqrt{L + T} \tag{10.17}$$

.

Το χρονικό διάστημα αναθεώρησης T είναι το ίδιο όπως στην (T, S) πολιτική (δηλαδή δίνεται από τον τύπο $T = Q/D$). Στην πραγματικότητα, το χρονικό διάστημα T μπορεί να είναι μέρες ή εβδομάδες ή κάποιο άλλο χρονικό διάστημα. Η ποσότητα Q είναι το γνωστό μας EOQ.

Το σημείο παραγγελίας r είναι το επίπεδο των αποθεμάτων που απαιτείται για να καλύψει τη ζήτηση κα΄τα τη διάρκεια του χρόνου αναμονής συν την περίοδο αναθεώρησης. Αυτή η έκφραση για το r βασίζεται στο αποτέλεσμα ότι η ζήτηση κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής έχει μέση τιμή $D*(L+T)$ και σταθερή διακύμανση $\sqrt{(L+T) * \sigma_D^2 + D^2 * \sigma_L^2}$.

Το ανώτατο επίπεδο αποθεμάτων S είναι το σημείο παραγγελίας r συν τη βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας (EOQ) όπως στην (r, S) πολιτική για συνεχή συστήματα αναθεώρησης.

Ο παράγοντας του επιπέδου υπηρεσιών k, είναι μια αδιάστατη σταθερά που αντιπροσωπεύει τον αριθμό των διακυμάνσεων της ζήτησης κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής πέραν της μέσης τιμής που απαιτείται για να πετύχουμε ένα συγκεκριμένο επίπεδο υπηρεσιών (όπως στην (r, Q) πολιτική).

Βιβλιογραφία

[en.wikipedia.org/wikiiEconomic_order _quantity#Example]

[29667869-Methods-and-Models-of-Operations-Research] Arnold Kaufmann, Brofesseur a 1'Institut Polytechnique de Grenoble , Conseilleur Scientifique a la Compagnie des Machines Bull

[Operations Research. An Introduction (Prentice Hall 2007.8.ed)] Hamdy A. Taha

[Operations-Research-Applications-and-Algorithms] Wayne-L-Winston

[Notes in inventory management] Author: Dr. Dimitrios Blaxos

[Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα] Κολέτσος Ιωάννης, Στογιάννης Δημήτριος, Αθήνα 2012, Εκδόσεις Συμεών

Κεφάλαιο 11

Στοχαστικά Πολυπεριοδικά Μοντέλα

11.1 Πολυ-περιοδικό Μοντέλο χωρίς Κόστος Εγκατάστασης

Μια επιλογή με ένα στοχαστικό σύστημα αποθεμάτων περιοδικής αναθεώρησης είναι να προγραμματίσουμε μόνο την επόμενη μελλοντική χρονική περίοδο, χρησιμοποιώντας τα στοχαστικά μοντέλα μιας περιόδου, όπως είδαμε στα παραπάνω κεφάλαια, για να αποφασίσουμε κάθε φορά τη βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας. Όμως αυτή είναι μια απλή προσέγγιση. Εάν η κατανομή πιθανότητας της ζήτησης σε κάθε περίοδο μπορεί να προβλεφθεί για πολλές μελλοντικές χρονικές περιόδους, θα μπορούσαμε να λάβουμε πολύ καλύτερες αποφάσεις για το συντονισμό των σχεδίων για όλες αυτές τις περιόδους, απ΄ ότι αν προγραμματίζαμε για μια μόνο χρονική περίοδο. Αυτό μπορεί να είναι αρκετά δύσκολο για πολλές περιόδους, αλλά ο βαθμός δυσκολίας μειώνεται σημαντικά αν εξετάζουμε κάθε φορά μόνο τις δύο επερχόμενες χρονικές περιόδους.

Ακόμα και για έναν σχεδιασμό αποφάσεων δυο περιόδων, η χρήση της βέλτιστης λύσης δυο φορές δεν είναι η καλύτερη πολιτική σε ένα πρόβλημα δυο περιόδων. Μπορούν να επιτευχθούν μικρότερες δαπάνες αν κοιτάξουμε ταυτόχρονα τις δυο περιόδους, παρά αν πάρουμε την καθεμία ξεχωριστά.

Υποθέσεις: Αν εξαιρέσουμε το γεγονός ότι έχουμε δυο περιόδους, οι υποθέσεις για αυτό το μοντέλο είναι ίδιες με τις υποθέσεις του μοντέλου της μιας περιόδου, όπως συνοίζονται παρακάτω:

1. Κάθε εφαρμογή περιλαμβάνει ένα μοναδικό σταθερό προϊόν.
2. Ο σχεδιασμός γίνεται για δυο περιόδους, όπου η ανικανοποίητη ζήτηση

στην περίοδο 1 μεταφέρεται στην περίοδο 2, όμως δεν υπάρχει μεταφορά της ανικανοποίητης ζήτησης της 2ης περιόδου.
3. Οι ανάγκες D_1 και D_2 για τις περιόδους 1 και 2 αντίστοιχα, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές. Η κοινή κατανομή τους έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας τη συνάρτηση $f(d)$ και αθροιστική συνάρτηση κατανομής την $F(d)$.
4. Το αρχικό επίπεδο αποθεμάτων (πριν την αναπλήρωση) στην αρχή της περιόδου 1 είναι Q_1.
5. Οι αποφάσεις που πρέπει να ληφθούν είναι Q_1 και Q_2 για να φτάσουν τα αποθέματα σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο (εάν χρειάζεται) με την αναπλήρωση κατά την έναρξη των περιόδων 1 και 2 αντίστοιχα.
6. Ο στόχος είναι να ελαχιστοποιηθεί το αναμενόμενο συνολικό κόστος για τις δυο περιόδους, όπου το κόστος κάθε περιόδου αποτελείται από:

c : μοναδιαίο κόστος για την αγορά ή την παραγωγή κάθε μονάδας

h : κόστος αποθήκευσης ανά μονάδα που απομένει στο τέλος της κάθε περιόδου

p : κόστος έλλειψης ανά μονάδα ανικανοποίητης ζήτησης στο τέλος της κάθε περιόδου.

Για απλοποίηση, υποθέτουμε ότι οι κατανομές της ζήτησης των δύο περιόδων είναι στην ουσία η ίδια και οι τιμές που παίρνουν τα παραπάνω κόστη είναι οι ίδιες και για τις δυο περιόδους.

Ανάλυση: Για να ξεκινήσουμε την ανάλυση, έστω:

Q_i^* : η βέλτιστη τιμή του $Q_i, i = 1, 2$

$C_1(q_1)$: αναμενόμενο συνολικό κόστος και από τις δυο περι'οδους όταν ακολουθούμε μια βέλτιστη πολιτική δοσμένου ότι το q_1 είναι το αρχικό επίπεδο αποθεμάτων (πριν την αναπλήρωση) στο ξεκίνημα της περιόδου 1.

$C_2(q_2)$: αναμενόμενο συνολικό κόστος μόνο για την περίοδο 2 όταν ακολουθούμε μια βέλτιστη πολιτική, δοσμένου ότι q_2 είναι το επίπεδο των αποθεμάτων (πριν την αναπλήρωση) στο ξεκίνημα της περιόδου 2.

Ξεκινάμε λύνοντας για το $C_2(q_2)$ και Q_2^*, όπου υπάρχει μόνο μια περίοδος για να συνεχίσουμε. Μετά, θα χρησιμοποιήσουμε αυτά τα αποτελέσματα για να βρούμε το $C_1(q_1)$ και το Q_1^* .

Από τα αποτελέσματα του μοντέλου μιας περιόδου, το Q_2^* βρίσκεται από την εξίσωση:

$$F(Q_2^*) = \frac{p-c}{p+h} \tag{11.0}$$

Δοσμένου του q_2, η βέλτιστη πολιτική στην οποία καταλήγουμε είναι η εξής:

$$\text{Αν } q_2 \begin{cases} < Q_2^*, \text{ παραγγέλνουμε } \; Q_2^* - q_2 \; \text{ για να φτάσει το απόθεμα στην ποσότητα } \; Q_2^* \\ \geq Q_2^*, \text{δεν παραγγέλνουμε} \end{cases}$$

Το κόστος αυτής της βέλτιστης πολιτικής μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$C_2(q_2) = \begin{cases} L(q_2), \quad \text{αν} \quad q_2 \geq Q_2^* \\ c * (Q_2^* - q_2) + L(Q_2^*, \quad \text{αν} \quad q_2 < Q_2^* \end{cases}$$

όπου $L(z)$ είναι η αναμενόμενη έλλειψη συν το κόστος αποθήκευσης για μια μόνο περίοδο, όταν το επίπεδο των αποθεμάτων (μετά την αναπλήρωση) είναι z. Τώρα, το $L(z)$ μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$L(z) = \int_z^{+\infty} p * (y - z) * f(y) dy + \int_0^z h * (z - y) * f(y) dy$$

Όταν εξετάζονται δυο περίοδοι 1 και 2, τα κόστη αποτελούνται από το κόστος παραγγελίας $c * (Q_1 - q_1)$, την αναμενόμενη έλλειψη μαζί με το κόστος αποθήκευσης $L(Q_1)$, και τα κόστη που σχετίζονται με μια βέλτιστη πολιτική κατά τη διάρκεια της 2ης περιόδου. Έτσι, το αναμενόμενο κόστος που προέρχεται από τη βέλτιστη πολιτική δυο περιόδων, δίνεται από τον τύπο:

$$C_1(q_1) = min_{q_1 \geq x_1} c * (q_1 - x_1) + L(q_1) + E[C_2(x_2)] \tag{11.0}$$

όπου το $E[C_2(x_2)]$ ορίζεται ως εξής:

$$x_2 = q_1 - D_1 \tag{11.0}$$

έτσι, η x_2 είναι τυχαία μεταβλητή όταν ξεκινάει η περίοδος 1. Έτσι,

$$C_2(x_2) = C_2(q_1 - D_1) = \begin{cases} L * (Q_{1D1}), & \text{αν} \;\; q_1 - D_1 \geq Q_2^* \\ C * (Q_2^* - Q_1 + D_1) + L(Q_2^*), & \text{αν} \;\; q_1 - D_1 < Q_2^* \end{cases} \tag{11.0}$$

Έτσι, το $C_2(x_2)$ είναι τυχαία μεταβλητή και η αναμενόμενη τιμή δίνεται από τον τύπο:

$$E[C_2(x_2) = \int_0^{+\infty} C_2 * (Q_1 - \xi) * f_D(\xi) d\xi = \int_0^{Q_1 - Q_2^*} L(Q_1 - \xi) * f_D(\xi) d\xi + \int_{Q_1 - Q_2^*}^{+\infty} [c * (Q_2^* - Q_1 + \xi) + L \tag{11.0}$$

Έτσι,

$$C_1(q_1) = min_{Q_1 \geq Q_2^*} \{c * (Q_1 - x_1) + L(Q_1) + \int_0^{Q_1 - Q_2^*} L(Q_1 - \xi) * f_D(\xi) d\xi + \int_{Q_1 - Q_2^*}^{+\infty} [(Q_2^* - Q_1 + \xi) + L(Q \tag{11.0}$$

Μπορεί να δειχτεί ότι η $C_1(x_1)$ έχει μοναδικό ελάχιστο και ότι η βέλτιστη τιμή του Q_1, που ορίζεται ως Q_1^*, ικανοποιεί την ισότητα:

$$-p + (p+h) * F(Q_1^*) + (c-p) * F(Q_1^* - Q_2^*) + (p+h) * \int_0^{Q_1^* - Q_2^*} F(Q_1^* - \xi) * f_D(\xi) d\xi = 0 \tag{11.0}$$

Η τελική βέλτιστη πολιτική για την περίοδο 1 είναι η ακόλουθη:

$$\text{Αν } q_1 = \begin{cases} < Q_1^*, & \text{παραγγέλνουμε} \;\; Q_1^* - q_1 \;\; \text{για να φέρουμε το απόθεμα πάνω από την ποσότητα} \\ \geq Q_1^*, & \text{δεν παραγγέλνουμε} \end{cases}$$

Η διαδικασία εύρεσης του Q_1^* μειώνεται σε ένα απλούστερο αποτέλεσμα για συγκεκριμένες κατανομές ζήτησης.

Έστω ότι η ζήτηση σε κάθε περίοδο ακολουθεί *ομοιόμορφη κατανομή*, δηλαδή $D \sim U(0,1)$, οπότε:

$$f_D(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{t}, & \text{αν} \;\; 0 \leq d \leq t \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Τότε, το Q_1^* μπορούμε να το βρούμε μέσω του τύπου:

$$Q_1^* = \sqrt{(Q_2^*)^2 + \frac{2*t*(c-p)}{p+h} * Q_2^* + \frac{t^2 * [2*p*(p+h)+(h+c)^2]}{(p+h)^2}} - \frac{t*(h+c)}{p+h} \tag{11.0}$$

Έστω ότι η $D \sim Exp(a)$, δηλαδή $f(d) = a * e^{-a*d}, d \geq 0$. Τότε, το Q_1^* ικανοποιεί τη σχέση:

$$(h+c)*e^{-a*(Q_1^*-Q_2^*)} + (p+h)*e^{-a*Q_1^*} + a*(p+h)*(Q_1^*-Q_2^*)*e^{-a*Q_1^*} = 2*h+c \tag{11.0}$$

Ένας εναλλακτικός τρόπος εύρεσης του Q_1^* είναι να ορίσουμε $z^* = a*(Q_1^* - Q_2^*)$. Τότε, το z^* ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^{-z^*}*[(h+c)+(p+h)*e^{-a*Q_2^*}+z^**(p+h)*e - a*Q_2^*] = 2*h+c και Q_1^* = \frac{1}{a}*z^*+Q_2^* \tag{11.0}$$

<u>**Εφαρμογή:**</u> Έστω ένα πρόβλημα 2 περιόδων όπου:
$c = 10, h = 10, p = 15$
με c : κόστος αγοράς ανά μονάδα προϊόντος ή παραγωγής
και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της ζήτησης για κάθε περίοδο δίνεται από τον τύπο:

$$f_D(d) = \begin{cases} 1/10, & \text{αν} \;\; 0 \leq d \leq 10 \\ 0, \text{διαφορερικά} \end{cases}$$

Έτσι, η συνάρτηση κατανομής της ζήτησης είναι:

$$F(d) = \begin{cases} 0, & \text{αν} \;\; d < 0 \\ d/10, & an \;\; 0 \le d \le 10 \\ 1, & an \;\; d > 10 \end{cases}$$

Βρίσκουμε το Q_2^* από την ισότητα:

$$F(Q_2^*) = \frac{p-c}{p-h} = \frac{15-10}{15+10} = 1/5 \tag{11.0}$$

και επομένως $Q_2^* = 2$

Για να βρούμε το Q_1^* εφαρμόζουμε τον τ·υπο που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του Q_1^* στην περίπτωση της ομοιόμορφης κατανομής, και έτσι έχουμε:

$$Q_1^* = \sqrt{2^2 * \frac{2*10*(10-15)}{15+10} * 2 + 10^2 * \frac{2*15*(15+10)+(10+10)^2}{(15+10)^2}} - \frac{10*(10+10)}{15+10} = \sqrt{4} \tag{11.0}$$

Αντικαθιστώντας $Q_1^* = 5$ και $Q_1^* = 6$ στο $C_1(q_1)$ οδηγούμαστε στο μικρότερο κόστος με $Q_1^* = 5$. Έτσι, η βέλτιστη πολιτική μπορεί να περιγραφτεί ως εξής:

- Αν $q_1 < 5$, παραγγέλνουμε $5 - q$ μονάδες για να φέρουμε το απόθεμα σε ένα επίπεδο υψηλότερο από 5 μονάδες.
- Αν $q_1 \geq 5$, δεν παραγγέλνουμε την περίοδο 1
- Αν $q_2 < 2$, παραγγέλνουμε $2 - q_2$ μονάδες για να φέρουμε το απόθεμα σε υψηλότερο των 2 μονάδων επίπεδο
- Αν $q_2 \geq 2$, δεν παραγγέλνουμε την περίοδο 2.

11.2 Πολυ-Περιοδικά Στοχαστικά Μοντέλα

Τώρα, θα παρουσιάσουμε τα πολυ-περιοδικά Στοχαστικά Μοντέλα με την υπόθεση ότι δεν υπάρχει κόστος εγκατάστασης. Επιπλέον, το μοντέλο επιτρέπει την καθυστέρηση της ζήτησης και υποθέτει μηδενική καθυστέρηση της παράδοσης. Επιπλέον, υποθέτει ότι η ζήτηση D σε οποιαδήποτε περίοδο περιγράφεται από μια συγκεκριμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(D)$.

Το πολυπεριοδικό μοντέλο θεωρεί τη μειωμένη χρημετική αξία ενός προϊόντος. Εάν το $a < 1$ είναι ο συντελεστής της έκπτωσης, τότε ένα ποσό Α ευρώ που διατίθεται σε n χρονικές περιόδους από τώρα θα έχει αξία $a^n * A$ ευρώ.

Ας υποθέσουμε ότι η κατάσταση των αποθεμάτων περιλαμβάνει n περιόδους και οι φορές που η ζήτηση σε μια χρονική περίοδο δεν έχει ικανοποιηθεί, έχει μεταφερθεί στην ακριβώς επόμενη χρονική περίοδο. Ορίζουμε:

$F(q_i)$= Μέγιστο αναμενόμενο κέρδος για τις περιόδους $i, i+1, ..., n$ δοσμένου ότι q_i είναι η ποσότητα που έχουμε πριν γίνει η παραγγελία την περίοδο i

Θεωρούμε ότι:

Κ: κόστος εγκατάστασης ανά παραγγελία

K_c : κόστος αποθήκευσης ανά μονάδα κατά τη διάρκεια της περιόδου

p : κόστος έλλειψης ανά μονάδα έλλειψης κατά τη διάρκεια της περιόδου

D : τυχαία ζήτηση που αντιπροσωπεύει τη ζήτηση κατά τη διάρκεια της περιόδου

$f(D)$: συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της ζήτησης

Q : ποσότητα παραγγελίας

q: το απόθεμα που έχουμε πριν γίνει η παραγγελία

Χρησιμοποιώντας τους παραπάνω συμβολισμούς και υποθέτοντας ότι c και r είναι το κόστος και τα έσοδα ανά μονάδα, αντιστοίχως, η κατάσταση του επιπέδου αποθεμάτων μπορεί να τυποποιηθεί χρησιμοποιώντας και το α-κόλουθο δυναμικό προγραμματιστικό μοντέλο:

$$F_i(q_i) = max_{Q_i \geq q_i}\{-c*(Q_i - q_i) + \int_0^{Q_i} [r*D - K_c*(Q_i - D)*f(D)dD+ \tag{11.0}$$

$$\int_{Q_i}^{+\infty} [r*Q_i + a*r*(D-Q_i) - p*(D-Q_i)]*f(D)dD + a*\int_0^{+\infty} F_{i+1}*(Q_i - D)*f(D)dD\} \ , \tag{11.0}$$

$i = 1, 2, ..., n$ όπου $F_{n+1}(Q_n - D) = 0$. Η τιμή του q_i ίσως να είναι αρνητι-κή διότι η ανικανοποίητη ζήτηση μεταφέρεται στην ακριβώς επόμενη χρονική περίοδο. Η ποσότητα $a * r * (D - Q_i)$ του δεύτερου ολοκληρώματος περι-λαμβάνεται διότι $(D - Q_i)$ είναι η ανικανοποίητη ζήτηση της περιόδου i που πρέπει να ιον ικανοποιηθεί την περίοδο $i + 1$.

Το πρόβλημα μπορεί να λυθεί αναδρομικά. Στην περίπτωση που το πλήθος των περιόδων είναι άπειρο, η αναδρομική εξίσωση περιορίζεται στην εξής:

$$F(q) = max_{Q \geq q}\{-c*(Q-q) + \int_0^{Q} [r*D - K_c*(Q-D)]*f(D)dD+ \tag{11.0}$$

$$\int_{Q}^{+\infty} [r*Q + a*r*(D-Q) - p*(D-Q)]*f(D)dD + a*\int_0^{+\infty} F(Q-D)*f(D)dD \tag{11.0}$$

$$\}$$

όπου q και Q είναι τα επίπεδα των αποθεμάτων για κάθε περίοδο πριν και μετά τη λήψη της παραγγελίας αντιστοίχως.

Η βέλτιστη τιμή του Q μπορεί να καθοριστεί από την ακόλουθη απαραί-τητη συνθήκη, που επίσης συμβαίνει να είναι επαρκής, επειδή η αναμενόμενη συνάρτηση $F(q)$ είναι κοίλη.

$$\frac{\theta(.)}{\theta(Q)} = -c - K_c*\int_0^{Q} f(D)dD + \int_Q^{+\infty} [(1-a)*r + p]*f(D)dD + a*\int_0^{+\infty} \frac{\theta F(Q-D)}{\theta Q}*f(D)dD = 0 \tag{11.0}$$

Η τιμή του

$$\frac{\theta F(Q-D)}{\theta Q} \tag{11.0}$$

καθορίζεται ως εξής. Εάν υπάρχουν β(΄0) παραπάνω μονάδες διαθέσιμες στην αρχή της επόμενης περιόδου, το κέρδος της επόμενης περιόδου θα αυξηθεί κατά $c{*}$β, διότι η ποσότητα που πρέπει να παραγγείλουμε θα είναι πολύ λιγότερη. Αυτό σημαίνει ότι:

$$\frac{\theta F(Q-D)}{\theta Q} = c \tag{11.0}$$

Η απαραίτητη συνθήκη έτσι γίνεται:

$$-c-K_c*\int_0^Q f(D)dD+[(1-a)*r+p]*(1-\int_0^Q f(D)dD)+a*c*\int_0^{+\infty} f(D)dD = 0 \tag{11.0}$$

Το βέλτιστο επίπεδο αποθεμάτων Q^* καθορίζεται από τον τύπο:

$$\int_0^{Q^*} f(D)dD = \frac{p+(1-a)(r-c)}{p+K_c+(1-a)*r} \tag{11.0}$$

Η βέλτιστη πολιτική για κάθε περίοδο, δοσμένου του επιπέδου αποθεμάτων q που προστίθεται με τη λήψη της παραγγελίας, δίνεται ως ακολούθως:

Αν $q < Q^*$, παραγγέλνουμε $Q^* - q$
Αν $q \geq Q^*$, δεν παραγγέλνουμε.

Βιβλιογραφία

[en.wikipedia.org/wikiiEconomic_order _quantity#Example]

[29667869-Methods-and-Models-of-Operations-Research] Arnold Kaufmann, Brofesseur a 1'Institut Polytechnique de Grenoble , Conseilleur Scientifique a la Compagnie des Machines Bull

[Operations Research. An Introduction (Prentice Hall 2007.8.ed)] Hamdy A. Taha

[Operations-Research-Applications-and-Algorithms] Wayne-L-Winston

[Notes in inventory management] Author: Dr. Dimitrios Blaxos

[Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα] Κολέτσος Ιωάννης, Στογιάννης Δημήτριος, Αθήνα 2012, Εκδόσεις Συμεών

Κεφάλαιο 12

ABC Ανάλυση

Η ABC Ανάλυση είναι επιχειρησιακός όρος που χρησιμεύει για να ορίσει μια τεχνική κατηγοριοποίησης αποθεμάτων που χρησιμοποιείται συχνά στη διαχείρηση υλικών. Είναι επίσης γνωστή και ως *Ειλεκτικός Έλεγχος Αποθεμάτων*. Σύμφωνα με την πολιτική της, τα προϊόντα χωρίζονται στις κατηγορίες Α,Β και C:

Προϊόντα Α κατηγορίας: πολύ αυστηρός έλεγχος και άριστες επιδόσεις

Προϊόντα Β κατηγορίας: λιγότερο αυστηρός έλεγχος και ικανοποιητικές επιδόσεις

Προϊόντα C κατηγορίας: η απλούστερη δυνατή διεξαγωγή ελέγχων με τις ελάχιστες επιδόσεις

Η ανάλυση ABC μας παρέχει έμα μηχανισμό για τον προσδιορισμό των προϊόντων που θα έχουν σημαντικές επιπτώσεις στο συνολικό κόστος αποθεμάτων, ενώ παρέχει επίσης έναν μηχανισμό για τον προσδιορισμό διαφορετικών κατηγοριών αποθεμάτων που θα απαιτούν διαφορετική διαχείρηση και ελέγχους.

Η ABC ανάλυση μας υποδηλώνει ότι τα αποθέματα ενός οργανισμού δεν είναι ίσης αξίας. Έτσι, τα αποθέματα ομαδοποιούνται σε3 κατηγορίες (A, B και C) κατά σειρά της εκτιμώμενης σημασίας τους.
-Τα προϊόντα της κατηγορίας Α είναι πολύ σημαντικά για έναν οργανισμό. Λόγω της υψηλής αξίας αυτών των Α προϊόντων, απαιτείται συχνή ανάλυση της αξίας τους. Εκτός αυτού, ένας οργανισμός χρειάζεται να διαλέξει το κατάλληλο σχέδιο παραγγελίας (π.χ. "Just-in-Time") για να αποφευχθεί η

πλεονάζουσα παραγωγική ικανότητα.
-Τα προϊόντα της κατηγορίας B είναι σημαντικά, αλλά φυσικά λιγότερο σημαντικά από τα στοιχεία της κατηγορίας A, και περισσότερο σημαντικά των στοιχείων της κατηγορίας C. Ως εκ τούτου, τα στοιχεία B λέγονται και διακομματικά στοιχεία.
-Τα προϊόντα της κατηγορίας C είναι οριακά σημαντικά.

Κατηγορίες της ABC ανάλυσης

Δεν υπάρχει καθορισμένο όριο για κάθε κατηγορία, διίτο μπορεί να εφαρμοστεί διαφορετική αναλογία βασισμένη στο αντικείμενο και στα κριτήρια. Η ABC Ανάλυση είναι παρόμοια με την αρχή *Pareto*, στο γεγονός ότι τα στοιχεία της κατηγορίας A τυπικά αντιπροσωπεύουν ένα μεγάλο ποσοστό της συνολικής αξίας αλλά ένα μικρό ποσοστό του πλήθους των ειδών.

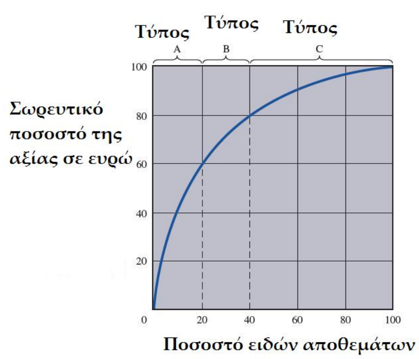
Ένα παράδειγμα της ABC κατανομής είναι:

"A" προϊόντα: το 20% όλων των ειδών και το 70% της ετήσιας καταναλωτικής αξίας των αντικειμένων

"B" προϊόντα: το 30% όλων των ειδών και το 25% της ετήσιας καταναλωτικής αξίας των αντικειμένων

"C" προϊόντα: το 50% όλων των ειδών και το 5% της ετήσιας αξίας κατανάλωσης των ειδών.

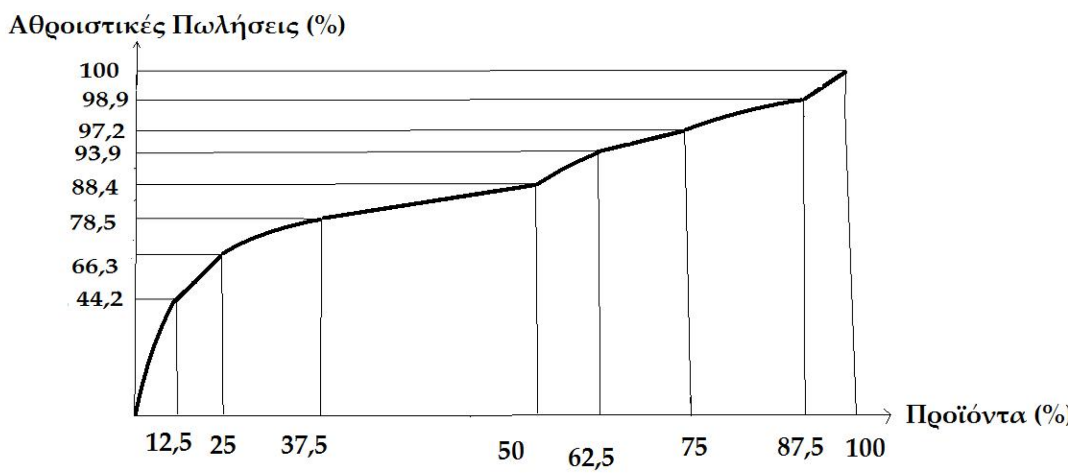
Ένα άλλο παράδειγμα ABC ανάλυσης:
¨A περίπου το 10% των ειδών ή το 66% της συνολικής αξίας
¨B' το 20% περίπου όλων των ειδών ή το 23,3% της συνολικής αξίας
'C' το 70% περίπου όλων των ειδών ή το 10,1% της συνολικής αξίας.



αναλψσις.πνγ

Εφαρμογή: Έστω ότι μια επειχείρηση πουλάει 8 είδη προϊόντων και βγάζει από κάθε είδος τα παρακάτω ποσά ανά εβδομάδα:
Α: 300 ευρώ ανά εβδομάδα
Β:1100 ευρώ ανά εβδομάδα
Γ: 100 ευρώ ανά εβδομάδα
Δ: 150 ευρώ ανά εβδομάδα
Ε: 4000 ευρώ ανά εβδομάδα
Ζ: 500 ευρώ ανά εβδομάδα
Η: 2000 ευρώ ανά εβδομάδα
Θ: 900 ευρώ ανά εβδομάδα
Φτιάχνουμε τον παρακάτω πίνακα κατατάσσοντας κατά φθίνουσα σειρά:

	Είδη	% των προϊόντων	Πωλήσεις	Αθροιστικές πωλήσεις	Αθροιστικές πωλήσεις %
1	Ε	1/8=12,5%	4000	4000	$4000/9050 \simeq 44,2\%$
2	Η	25%	2000	6000	66,3%
3	Β	37,5%	1100	7100	78,5%
4	Υ	50%	900	8000	88,4%
5	Ζ	62,5%	500	8500	93,9%
6	Α	75%	300	8800	97,2%
7	Δ	87,5%	150	8950	98,9%
8	Γ	100%	100	9050	100%



διαγραμ.πνγ

Βιβλιογραφία

[Introduction To Operations Research - 7Th Ed] Hillier, Lieberman

[29667869-Methods-and-Models-of-Operations-Research] Arnold Kaufmann, Brofesseur a 1'Institut Polytechnique de Grenoble , Conseilleur Scientifique a la Compagnie des Machines Bull

[Operations Research. An Introduction (Prentice Hall 2007.8.ed)] Hamdy A. Taha

[Operations-Research-Applications-and-Algorithms] Wayne-L-Winston

[OPERATIONS RESEARCH AND MANAGEMENT SCIENCE HANDBOOK] Farhad Azadivar and Atul Rangarajan

[Operations Research Calculations Handbook, Second Edition] Dennis Blumenfeld

[Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα] Κολέτσος Ιωάννης, Στογιάννης Δημήτριος, Αθήνα 2012, Εκδόσεις Συμεών