ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΣΤΗΝ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

ΤΗΣ ΦΟΙΤΗΤΡΙΑΣ ΓΚΑΛΙΤΣΚΑΓΙΑΣ ΒΙΚΤΩΡΙΑΣ

ΘΕΜΑ: ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ ΜΕ ΝΤΕΤΕΡΜΙΝΙΣΤΙΚΗ ΚΑΙ ΤΥΧΑΙΑ ΖΗΤΗΣΗ ABC ΑΝΑΛΥΣΗ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Κολέτσος Ιωάννης Επίκ. Καθ. ΕΜΠ

ΕΠΙΤΡΟΠΗ: **Κοκκίνης Βασίλειος Επίκ. Καθ. ΕΜΠ**

Κολέτσος Ιωάννης Επίκ. Καθ. ΕΜΠ

Τυχόπουλος Ευάγγελος Επίκ. Καθ. ΕΜΠ

ΑΘΗΝΑ 2013

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΟΡΟΛΟΓΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΠΑΡΑΓΓΕΛΙΑΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ ΣΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΠΑΡΑΓΓΕΛΙΑΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ

ABC ΑΝΑΛΥΣΗ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

1.1.1 Ορισμός

Η Επιχειρησιακή Έρευνα, (Operations Research) είναι ο επιστημονικός κλάδος που ασχολείται με την ανάπτυξη μαθηματικών μοντέλων για την περιγραφή συστημάτων και διαδικασιών με κύριο σκοπό την βελτιστοποίηση τους και τη λήψη αποφάσεων. Γενικά, η Επιχειρησιακή Έρευνα ασχολείται με τη μελέτη συστημάτων ως μαθηματικά μοντέλα. Ο όρος «Επιχείρηση» (Operation) έχει την έννοια της διαδικασίας, λειτουργίας και όχι της εταιρίας.

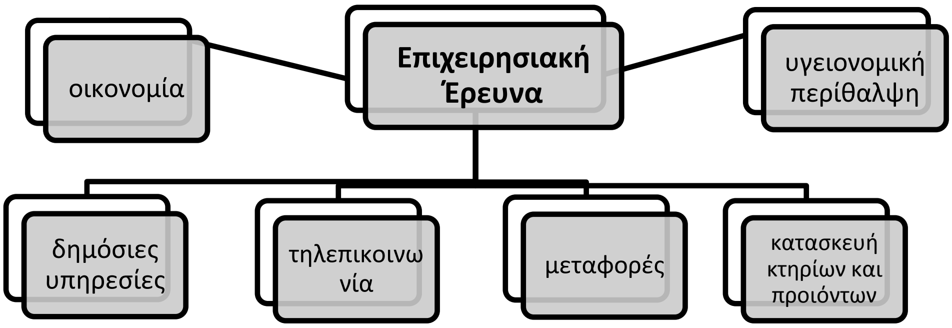
1.1.2 Ιστορική αναδρομή

Η επιχειρησιακή έρευνα έκανε την εμφάνιση της για πρώτη φορά στον Β΄ Παγκόσμιο πόλεμο, στον οποίο κλήθηκαν Βρετανοί και Αμερικανοί επιστήμονες να βοηθήσουν στην καλύτερη αξιοποίηση του πολεμικού υλικού.

1.1.3 Η Επιχειρησιακή Έρευνα σήμερα

Όταν τελείωσε ο πόλεμος η επιτυχία της επιχειρησιακής έρευνας κέντρισε το ενδιαφέρον πολλών.

Με την ανάπτυξη της τεχνολογίας και την εξέλιξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών, με τη βοήθεια των οποίων μπορούν να λυθούν πιο περίπλοκα προβλήματα, η επιχειρησιακή έρευνα βρήκε εφαρμογή και σε άλλους τομείς εκτός του στρατού. Κάποιοι από αυτούς αφορούσαν την κατασκευή κτηρίων και προϊόντων, τις μεταφορές, τις τηλεπικοινωνίες, τον οικονομικό σχεδιασμό, την υγειονομική περίθαλψη, τις δημόσιες υπηρεσίες και άλλα πολλά.



Το σχεδιάγραμμα αναπαριστά τις διάφορες εφαρμογές της Επιχειρησιακής Έρευνας

1.1.4 Στάδια της Επιχειρησιακής Έρευνας

Σύμφωνα λοιπόν με τη σύγχρονη θεωρία της Επιχειρησιακής Έρευνας η αντιμετώπιση ενός προβλήματος ακολουθεί τα εξής στάδια:

1. **Διατύπωση του προβλήματος** (είναι το πιο σημαντικό αλλά και δύσκολο στάδιο, πρέπει να έχουμε όλα τα δεδομένα).
2. **Μαθηματική διατύπωση.**
3. **Λύση** (είναι η λύση του προβλήματος).
4. **Πειραματικό στάδιο** (γίνεται εφαρμογή ώστε να ελεγχθεί η αξιοπιστία της λύσης).
5. **Τροποποίηση λύσης** (με βάση τα δεδομένα που συλλέχτηκαν από το πειραματικό στάδιο).
6. **Επαλήθευση του τελικού μοντέλου.**

Στην επιχειρησιακή Έρευνα υπάρχουν πολλαπλές λύσεις, εκ των οποίων επιλέγεται μόνο μία η οποία θεωρείται ως βέλτιστη. Την λύση αυτή την ονομάζουμε **βέλτιστη λύση**. Επιθυμούμε να επιλέξουμε με κάποια μέθοδο τη βέλτιστη αυτή λύση. Την τελική απόφαση την παίρνει η ομάδα της Επιχειρησιακής Έρευνας που θα εφαρμόσει την μέθοδο αυτή.

Η επιχειρησιακή έρευνα έχει διαφορετικές μεθόδους με των οποίων τη βοήθεια πολλές επιχειρήσεις έχουν εξοικονομήσει πόρους και έχουν γίνει πιο αποτελεσματικές.

1.1.5 Μέθοδοι της Επιχειρησιακής Έρευνας

Οι σημαντικότεροι μέθοδοι είναι οι παρακάτω:

- Γραμμικός προγραμματισμός
- Γραμμικός προγραμματισμός με την βοήθεια της μεθόδου Simplex
- Δυαδικό σύστημα
- Προβλήματα Μεταφοράς
- Μοντέλα βελτιστοποίησης Δικτύου
- Διαχείριση έργων με PERT/CPM
- Δυναμικός προγραμματισμός
- Ακέραιος προγραμματισμός
- Μη γραμμικός προγραμματισμός
- Θεωρία Παιγνίων
- Ανάλυση αποφάσεων
- Αλυσίδες Markov
- Ουρές αναμονής
- Έλεγχος Αποθεμάτων

1.2 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟΝ ΕΛΕΓΧΟ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ

1.2.1 Ορισμός

Ο όρος Έλεγχος Αποθεμάτων (Inventory Control), χρησιμοποιείται για να περιγράψει μία διαδικασία κατά την οποία πραγματοποιείται έλεγχος της ποσότητας των υλικών (αγαθών) που έχει στους αποθηκευτικούς της χώρους μια επιχείρηση. Σκοπός του ελέγχου αυτού είναι να λαμβάνονται σωστές αποφάσεις για το χρόνο και την ποσότητα των νέων παραγγελιών που θα πραγματοποιήσει η επιχείρηση.

Απόθεμα είναι η συσσώρευση ενός εμπορεύματος η οποία θα χρησιμοποιηθεί για να ικανοποιήσει μελλοντική ζήτηση.

1.2.2 ΧΑΜΗΛΑ Ή ΥΨΗΛΑ ΕΠΙΠΕΔΑ ΑΠΟΘΕΜΑΤΟΣ

Ένα από τα ερωτήματα που θα προσπαθήσει να λύσει ο Έλεγχος Αποθεμάτων είναι το αν κάποιος πρέπει να έχει υψηλά ή χαμηλά επίπεδα αποθέματος.

Ορισμένοι από τους λόγους που κάποιες εταιρίες θέλουν να έχουν υψηλό επίπεδο αποθεμάτων είναι:

- Δεν θέλουν να έχουν έλλειψη εμπορευμάτων , με αποτέλεσμα να χάσουν κάποιον πελάτη
- Μείωση κόστους παραγγελίας
- Μείωση κόστους μεταφοράς
- Πρόβλεψη εξέλιξης τιμής

Ενώ οι λόγοι για χαμηλά επίπεδα αποθήκευσης είναι:

- Μικρό κόστος αποθήκευσης
- Μικρό κόστος ασφάλισης
- Μικρό κόστος χρηματοδότησης

Μια τρίτη άποψη διαχείρισης αποθεμάτων είναι αυτή κατά την οποία κάθε κομμάτι παράγεται στο χρόνο και την ποσότητα που απαιτείται και είναι γνωστή ως ¨Just In Time¨ , δηλαδή δεν έχουμε καθόλου απόθεμα.

Διαπιστώνουμε λοιπόν πως η σωστή ποσότητα αποθέματος έχει ως αποτέλεσμα την ικανοποίηση των πελατών και τη μείωση του κόστους αποθήκευσης.

1.2.3 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ

Τα συστήματα διαχείρισης αποθεμάτων μπορούμε να τα διαφοροποιήσουμε με βάση την ποσότητα και την περίοδο που πραγματοποιείται η παραγγελία σε δύο μεγάλες κατηγορίες:

- ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΕΠΙΘΕΩΡΗΣΗΣ (σταθερή ποσότητα παραγγελίας)
- ΣΥΣΤΗΜΑ ΠΕΡΙΟΔΙΚΗΣ ΕΠΙΘΕΩΡΗΣΗΣ (σταθερής περιόδου παραγγελία

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΟΡΟΛΟΓΙΑ

2.1 ΒΑΣΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΙΡΙΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ

2.1.1 Ζήτηση

Η ζήτηση αντιπροσωπεύει τον όγκο των προϊόντων που ζητούνται σε μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο.

Τη ζήτηση ενός αγαθού ή προϊόντος μπορούμε να τη γνωρίζουμε εκ των προτέρων. Μπορούμε να γνωρίζουμε ότι μια συγκεκριμένη περίοδο η ζήτηση είτε είναι σταθερή, είτε γνωρίζουμε τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται. (π.χ. πλησιάζει καλοκαίρι και η ζήτηση για αντηλιακά γνωρίζουμε ότι θα αυξηθεί) Τη ζήτηση τη συμβολίζουμε ως **D**.

2.1.2 Αναπλήρωση ή εφοδιασμός

Με τον όρο αναπλήρωση (ή εφοδιασμό) εννοούμε την ποσότητα ενός προϊόντος που προστίθεται στα αποθέματα. Την ποσότητα αυτή τη συμβολίζουμε με Q. Το μέγεθος της μπορεί να είναι σταθερό ή να μεταβάλλεται.

2.1.3 Χρόνος αναμονής (LEAD TIME)

Ο χρόνος αναμονής (lead time) αντιπροσωπεύει το διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ της καταχώρισης μιας παραγγελίας, μέχρι την παραλαβή και τοποθέτηση της στην αποθήκη. Ο χρόνος αυτός μπορεί να είναι σταθερός ή μεταβλητός, το συμβολίζουμε με **L.**

2.1.4 Χρονική στιγμή εφοδιασμού –συχνότητα

Οι δύο παραπάνω μεταβλητές μας δείχνουν πότε και πόσο συχνά πρέπει να γίνεται η αναπλήρωση. Για να πάρουμε οποιαδήποτε απόφαση για τη διαχείριση θα πρέπει να λάβουμε υπόψη και τις δυο μεταβλητές ή μόνο μια.

2.1.5 Κύκλος παραγωγής ή παραγγελίας

Το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών παραγγελιών.

2.1.6 Πολιτική διαχείρισης αποθεμάτων

Με τον όρο πολιτική διαχείρισης αποθεμάτων εννοούμε μία σειρά κανόνων, που με τη βοήθεια τους αποφασίζεται η ποσότητα που θα παραγγείλουμε και το σημείο παραγγελίας (θα αναφερθεί πιο αναλυτικά σε επόμενη ενότητα).

2.2. ΚΟΣΤΗ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ

2.2.1 Κόστος παραγωγής ή παραγγελίας

Το κόστος παραγγελίας (Ordering Cost) αντιπροσωπεύει τις χρηματικές μονάδες που πρέπει να δώσει μια επιχείρηση ώστε να αναπληρώσει τα προϊόντα που χρειάζεται να διαθέτει στην αποθήκη της. Εκφράζεται σε χρηματικές μονάδες ανά παραγγελία και εξαρτάται από τον αριθμό των παραγγελιών.

Το κόστος παραγγελίας ή παραγωγής μπορεί να περιλαμβάνει τα εξής κόστη:

- Κόστος έκδοσης παραγγελίας
- Κόστος μεταφοράς
- Κόστος παράδοσης και παραλαβής
- Το κόστος καταγραφής των ελλείψεων μιας παραγγελίας
- Το κόστος αγοράς
- Αν η επιχείρηση κατασκευάζει μόνη της τα προϊόντα μπορεί να υπάρχει και κόστος για τυχόν τροποποιήσεις των μηχανημάτων.

ΕΤΗΣΙΟ ΚΟΣΤΟΣ ΠΑΡΑΓΓΕΛΙΑΣ

$$\mathbf{OC = K}\,\frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{Q}}$$

K : κόστος μιας παραγγελίας ή εκκίνησης της διαδικασίας για την παραγωγή μιας παραγγελίας

Q : μέγεθος παραγγελίας

Αν μια επιχείρηση παράγει μόνη της τα προϊόντα έχει και αυτή σταθερό κόστος το οποίο περιλαμβάνει το κόστος προετοιμασίας της παραγωγικής διαδικασίας (setup cost).

2.2.2 Κόστος αποθήκευσης

Το Κόστος αποθήκευσης (Carrying Cost) αντιπροσωπεύει όλες τις δαπάνες που θα πρέπει να λάβει υπ’ όψιν μια επιχείρηση όπως:

α) **<u>Το κόστος διατήρησης αποθέματος</u>** το οποίο περιλαμβάνει το κόστος αποθηκευτικού χώρου, το κόστος ασφάλισης αποθεμάτων, το κόστος απαρχαίωσης αποθέματος.

β) **<u>Το κόστος προμήθειας αποθέματος</u>** περιλαμβάνει σταθερά κόστη όπως, το κόστος αποστολής παραγγελίας στους προμηθευτές και το κόστος αγοράς τους. Το μεταβλητό κόστος αφορά το κόστος παραγωγής.

ΕΤΗΣΙΟ ΚΟΣΤΟΣ ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗΣ (Carrying Cost)

$$CC = h\ \frac{Q}{2}$$

h : Κόστος αποθήκευσης μιας μονάδας προϊόντος για ένα έτος.

Q : Ποσότητα κάθε παραγγελίας

2.2.3 Το κόστος Έλλειψης αποθεμάτων

Το κόστος έλλειψης προκύπτει όταν το απόθεμα που έχουμε δεν επαρκεί για την ικανοποίηση της ζήτησης.

Το κόστος έλλειψης μπορεί να αναλυθεί στις εξής δαπάνες:

a) Κόστος απώλειας πωλήσεων
b) Κόστος μη ικανοποίησης πελατών και απώλεια καλής θέλησης πελατών που μπορεί να έχει ως αποτέλεσμα την απώλεια πελατών, αλλά και κερδών.
c) Όταν η ζήτηση των προϊόντων είναι εσωτερική (ενδιάμεσο προϊόν), η έλλειψη μπορεί να προκαλέσει την διακοπή της παραγωγικής διαδικασίας, η οποία δημιουργεί κόστος διακοπής λειτουργίας μηχανών και κόστος απώλειας παραγωγής.

2.3 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ

Σύστημα Ελέγχου Αποθεμάτων είναι μια δομή με σκοπό να ελέγχει το επίπεδο του αποθέματος με τον περιορισμό της ποσότητας που παραγγέλλεται και του χρόνου που η ποσότητα αυτή παράγεται.

Τα Συστήματα Ελέγχου Αποθεμάτων είναι δύο ειδών:

a) Συνεχούς ανασκόπησης
b) Περιοδικής ανασκόπησης

2.3.1 Σύστημα συνεχούς ανασκόπησης

Σε ένα σύστημα συνεχούς ανασκόπησης, το απόθεμα μας παρακολουθείται συνεχώς. Όταν το απόθεμα που είναι διαθέσιμο μειωθεί και φτάσει σε ένα προκαθορισμένο αριθμό τεμαχίων, (το σημείο παραγγελίας) μια νέα παραγγελία τοποθετείται για την αναπλήρωση του αποθέματος.

2.3.2 Σύστημα περιοδικής ανασκόπησης

Περιοδικό Σύστημα Αποθέματος είναι το σύστημα κατά το οποίο, το επίπεδο αποθέματος ελέγχεται ανά ορισμένες περιόδους (π.χ. κάθε βδομάδα, κάθε μήνα). Με τον περιοδικό έλεγχο γνωρίζουμε τα επίπεδα αποθέματος και έτσι μπορούμε τοποθετήσουμε μια νέα παραγγελία όποτε αυτή χρειάζεται. Το μέγεθος της παραγγελίας δεν είναι απαραίτητα ίδιο κάθε φορά.

Το πλεονέκτημα αυτού του συστήματος είναι ότι δεν χρειάζεται συνεχή διαχείριση καταστάσεων για το επίπεδο του αποθέματος και συνεχή απασχόληση ανθρώπων.

Το μειονέκτημα είναι ότι δεν υπάρχει άμεση ενημέρωση για τυχόν έλλειψη αποθέματος όπως στο σύστημα συνεχούς ανασκόπησης. Για να αποφύγουμε λοιπόν τις ελλείψεις αυτές, κρατάμε μεγαλύτερο απόθεμα που έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση του κόστους αποθήκευσης.

2.4. ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΠΟΣΟΤΗΤΑ ΠΑΡΑΓΓΕΛΙΑΣ

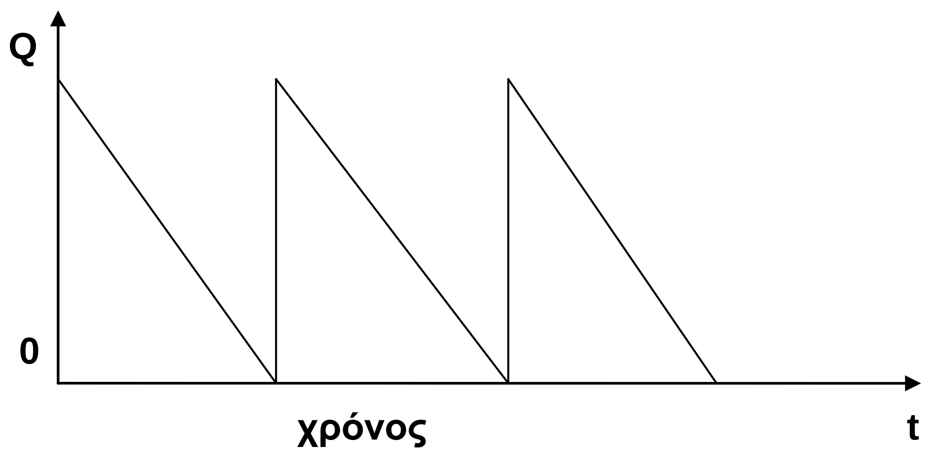
Στις εταιρίες ή στα εργοστάσια ή στα καταστήματα τα αποθέματα στις αποθήκες μετά από κάποια χρονική στιγμή εξαντλούνται ή είναι στο σημείο που πρέπει να γίνει μια νέα παραγγελία. Όμως ο όγκος της παραγγελίας δεν μπορεί να είναι τυχαίος.

Αν το μέγεθος παραγγελίας είναι μεγαλύτερο απ' ότι πρέπει τότε αυξάνεται πολύ το κόστος αποθήκευσης.

Αν από την άλλη το μέγεθος παραγγελίας είναι μικρότερο απ' ότι πρέπει, τότε θα πρέπει να γίνονται πιο συχνές παραγγελίες που αυτό έχει ως αποτέλεσμα να αυξηθεί το κόστος παραγγελίας κατά την διάρκεια του έτους.

Το μοντέλο που χρησιμοποιούμε για να υπολογίσουμε το μέγεθος παραγγελίας:

$$\mathbf{EOQ} = \sqrt{\frac{2DK}{h}}$$



Στο σχήμα μπορούμε να παρατηρήσουμε πως γίνονται οι παραγγελίες κατά την πάροδο του χρόνου. Για χρόνο ίσο με το μηδέν η ποσότητα που υπήρχε είναι Q μετά από κάποιο χρόνο η ποσότητα τον αποθεμάτων γίνεται ίση με το μηδέν. Υποθέτουμε λοιπόν ότι την ίδια στιγμή που μας τελειώνουν τα αποθέματα έρχεται πάλι η αρχική ποσότητα Q. Κάτι τέτοιο δεν είναι εφικτό όμως στην πραγματικότητα γι’ αυτό η παραγγελία θα πρέπει να γίνεται πριν τελειώσει οριστικά το απόθεμα.

2.5. ΣΥΝΟΛΙΚΟ ΚΟΣΤΟΣ

Το συνολικό κόστος (total cost) περιλαμβάνει το κόστος αποθήκευσης, το κόστος παραγγελίας ή παραγωγής και το κόστος αγοράς.

$$\mathbf{TC = CC + OC + cD}$$

$$\mathbf{TC = h\frac{Q}{2} + \boldsymbol{K}\ \frac{D}{Q} + cD}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΧΕΙΡΗΣΗΣ ΠΑΡΑΓΓΕΛΙΑΣ

3.1 Βέλτιστα επίπεδα παραγγελίας

3.1.1 ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ

Για να υπολογίσουμε το EOQ κάνουμε κάποιες υποθέσεις. Κάποιες από αυτές είναι ρεαλιστικές, ενώ κάποιες άλλες όχι τόσο.

1) Ο ρυθμός ζήτησης είναι σταθερός και γνωστός εκ των προτέρων.
2) Ο χρόνος που μεσολαβεί από την τοποθέτηση της παραγγελίας μέχρι να παράδοση της θεωρείται μηδενικός
3) Δεν επιτρέπονται οι ελλείψεις.

Η δεύτερη υπόθεση δεν είναι ρεαλιστική, γιατί δεν μπορεί μια παραγγελία να παραδοθεί τόσο άμεσα. Το σημείο στο οποίο θα πρέπει να τοποθετηθεί η νέα παραγγελία ονομάζεται σημείο παραγγελίας (reorder point). Μπορεί να υπολογιστεί από:

$$\mathbf{R = d \cdot L}$$

d: ο ρυθμός με τον οποίο γίνονται οι πωλήσεις

L: χρόνος αναμονής

3.2 Τύποι αποθέματος

3.2.1 ΒΑΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ EOQ

Το συνολικό κόστος υπολογίζετε

$$\mathrm{TC} = \mathrm{h}\frac{\mathrm{Q}}{2} + K\ \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{Q}} + \mathrm{PD}$$

Θα δείξουμε πως προκύπτει το EOQ από το συνολικό κόστος:

$$\frac{\mathrm{dTC}}{\mathrm{dQ}} = \mathrm{h}\frac{1}{2} - \mathrm{K}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{Q}^2} = 0$$

$$\frac{\mathrm{h}}{2} = \frac{\mathrm{KD}}{\mathrm{Q}^2}$$

$$\mathrm{Q}^2 = \frac{2\mathrm{KD}}{\mathrm{h}}$$

οπότε $\mathrm{Q} = \sqrt{\frac{2\mathrm{KD}}{\mathrm{h}}}$

Έστω ότι t είναι ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών παραγγελιών, ο οποίο μπορεί να υπολογιστεί εύκολα από:

$$\mathrm{t} = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{p}}$$

ρ: ο ρυθμός παραλαβής παραγγελίας

Το Q που θα βρούμε θα είναι η ποσότητα της παραγγελίας που θα ελαχιστοποιήσει το συνολικό κόστος, δηλαδή το EOQ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Ένα κατάστημα αθλητικών ειδών πουλάει μπάλες καλαθοσφαίρισης με ρυθμό 8.000 μονάδες ετησίως. Το κόστος αποθήκευσης είναι 0,30€/$_{\text{τεμάχιο,έτος}}$ ενώ το κόστος παραγγελίας 120€. Να υπολογίσετε:

a) τη βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας
b) το πλήθος των παραγγελιών που πρέπει να γίνουν στη διάρκεια του χρόνου.
c) Κάθε πότε πρέπει να τοποθετείτε η παραγγελία με δεδομένο ότι έχουμε 311 εργάσιμες μέρες
d) Το συνολικό κόστος

ΛΥΣΗ

a) $\mathrm{EOQ} = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 120 \cdot 8000}{0.3}}$

$= 2529$ $^{\text{κομμάτια}}/_{\text{παραγγελία}}$

b) $t = \frac{Q}{p} = \frac{8000}{2529}$ =3.16έτη.

c) $\frac{311}{3,16} =$ 98,4 ημέρες

d) TC = h $\frac{\mathrm{Q}}{2} + K\ \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{Q}} +$ PD

TC = 0.3 $\frac{2529}{2} + 120\ \frac{8000}{2529}$ =759

3.2.2 EOQ ΜΕ ΣΤΑΔΙΑΚΗ ΠΑΡΑΔΟΣΗ ΠΑΡΑΓΓΕΛΙΑΣ

Ορισμένα προϊόντα δεν μπορούν να παραδίδονται άμεσα, είτε γιατί καταλαμβάνουν μεγάλο όγκο και δεν μπορεί να παραδοθεί ταυτόχρονα ολόκληρη η παραγγελία, είτε γιατί είναι εισαγόμενα κ.α.

Γι’ αυτό τον λόγο το βασικό μοντέλο διαφοροποιείται λίγο ώστε να μπορέσει και πάλι να μας εξασφαλίσει το μέγιστο κέρδος. Αν γνωρίζουμε το ρυθμό παραλαβής της παραγγελίας και το ρυθμό των πωλήσεων αντικαθιστώντας στον τύπο:

$$\mathrm{EOQ} = \sqrt{\frac{2\mathrm{KD}}{\mathrm{h}(1-\frac{\mathrm{d}}{\rho})}}$$

ρ: ρυθμός παραλαβής παραγγελίας

d: ρυθμός των πωλήσεων

Το χρονικό διάστημα που διαρκεί μια παραλαβή υπολογίζεται από

$$\frac{\mathrm{Q}}{\rho}$$

Ενώ ταυτόχρονα πραγματοποιούνται πωλήσεις με ρυθμό d, άρα το σύνολο των πωλήσεων σε χρόνο $\frac{\mathrm{Q}}{\rho}$ θα είναι $\frac{\mathrm{Q}}{\rho}\mathrm{d}$.

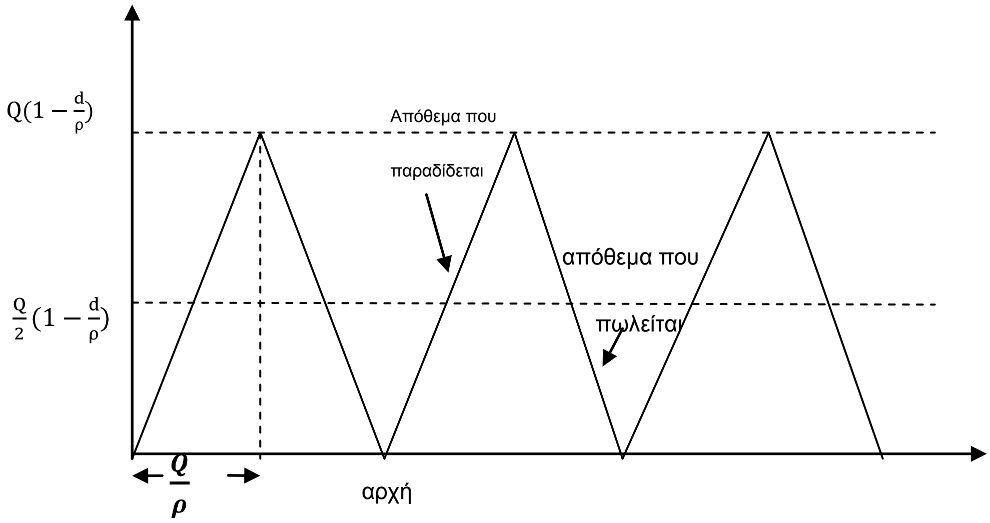
Οπότε η βέλτιστη ποσότητα αποθέματος είναι

$$\mathrm{Q} - \frac{\mathrm{Q}}{\rho}\mathrm{d} = \mathrm{Q}(1-\frac{\mathrm{d}}{\rho})$$

Το συνολικό κόστος υπολογίζετε

$$\mathrm{TC = OC+CC}$$

$$\mathrm{TC} = \mathrm{h}\frac{\mathrm{Q}}{2}(1-\frac{\mathrm{d}}{\rho}) + K\ \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{Q}} + \mathrm{PD}$$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Το ίδιο κατάστημα αθλητικών ειδών πουλάει αθλητικά υποδήματα με ρυθμό 10.000 μονάδες ετησίως. Τα οποία είναι εισαγόμενα από την Ιταλία και τα φέρνει με ρυθμό 450 μονάδες ημερησίως. Το κόστος αποθήκευσης είναι 0,30€/$_{\text{τεμάχιο,έτος}}$ ενώ το κόστος παραγγελίας 120€ και έχουμε 311 ημέρες εργάσιμες. Να υπολογίσετε:

a) Τον ημερήσιο ρυθμό πωλήσεων των υποδημάτων
b) Τη βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας
c) Το συνολικό κόστος
d) Το χρονικό διάστημα για να ολοκληρωθεί μια παραλαβή
e) Το μέγιστο απόθεμα που μπορεί να υπάρχει στην αποθήκη

ΛΥΣΗ

a) $d=\frac{D}{311}=\frac{10000}{311}=32.2\ ^{\text{ζευγάρια}}/_{\text{ημέρα}}$

b) $EOQ=\sqrt{\frac{2KD}{h(1-\frac{d}{\rho})}}=\sqrt{\frac{2\cdot 120\cdot 10000}{0{,}3(1-\frac{32{,}2}{450})}}=2928^{\text{ζευγάρια}}/_{\text{παραγγελία}}$

Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχουν αιχμές στη ζήτηση, δηλαδή η ζήτηση εξελίσσετε ομοιόμορφα μέσα στο χρόνο.

c) TC = h $\frac{Q}{2}(1-\frac{d}{\rho}) + K\ \frac{D}{Q} +$ PD

TC = 0,3 $\frac{10000}{2}(1-\frac{32,2}{450}) + 120\ \frac{10000}{2928}$=1805€/έτος

d) $\frac{EOQ}{\rho}$= $\frac{2928}{450} = 6,51$ ημέρες

e) $Q(1-\frac{d}{\rho})$= 2928(1- $\frac{32,2}{450}$) =2723ζευγάρια

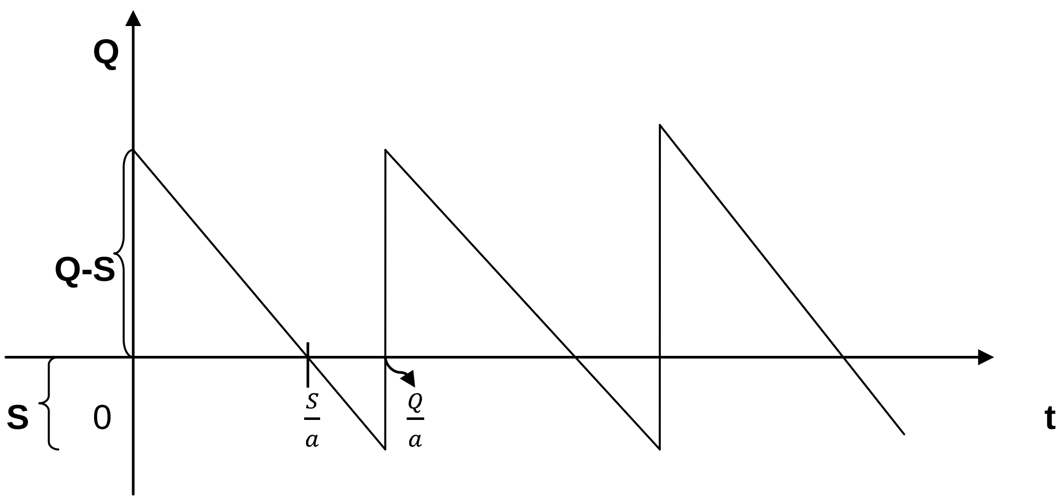
3.2.3 EOQ ΜΕ ΕΛΛΕΙΨΕΙΣ

Το σύστημα αποθεμάτων λειτουργεί με τον ίδιο τρόπο όπως και πριν απλά δεν υπάρχει πλέον η υπόθεση ότι δεν επιτρέπονται οι ελλείψεις.

Η ζήτηση που δεν ικανοποιείται, επειδή υπάρχουν τυχόν ελλείψεις μεγέθους (S), μπορεί ύστερα από συνεννόηση να παραδοθεί στον πελάτη αργότερα, όταν έρθει η παραγγελία (Q) του αποθέματος. Κάτι τέτοιο μπορεί να σημαίνει ότι κάποια ποσότητα έχει πωληθεί πριν φτάσει στην αποθήκη, αλλά οι διαδικασία αυτή δε είναι και τόσο απλή. Η εταιρία θα πρέπει να καταγράφει όλες αυτές τις παραγγελίες και να υπάρχει αρχειοθέτηση. Ακόμα, μόλις έρθει η καινούργια μας παραγγελία το απόθεμα μας θα είναι πλέον Q – S και όχι Q όπως είχε προγραμματιστεί αρχικά. Επομένως, είτε θα γίνει μια παραγγελία επιπλέον που δεν είχε προγραμματιστεί, είτε θα γίνει νωρίτερα η επόμενη παραγγελία.

Αν το κόστος αποθήκευσης είναι υψηλότερο σε σχέση με τις δαπάνες αυτής της έλλειψης, τότε η μείωση του μέσου επιπέδου αποθεμάτων, επιτρέπει την σύντομη έλλειψη.

Ο τρόπος με τον οποίο γίνεται η διατήρηση του αποθέματος μπορεί να παρασταθεί από το παρακάτω διάγραμμα



Όπου:

P = κόστος έλλειψης αποθέματος

S = επίπεδο αποθέματος μετά από την παραλαβή παραγγελίας ποσότητας Q

Q –S = το έλλειμμα που υπάρχει στην αποθήκη

Το κόστος παραγγελίας ή το κόστος παραγωγής ανά κύκλο παραγωγής είναι

$$OC=\frac{D}{Q}K$$

Ενώ το κόστος αποθήκευσης δίνεται από

$$CC=h\frac{S^2}{2Q}$$

Εισάγουμε και ένα νέο κόστος, το κόστος έλλειψης (Shortage cost)

$$SC=\frac{p(Q-S)^2}{2Q}$$

Οπότε το συνολικό κόστος μπορεί να υπολογιστεί εύκολα από τον εξής τύπο:

$$TC= OC+ CC+ SC$$

$$TC=\frac{D}{Q}K + h\frac{S^2}{2Q}+\frac{p(Q-S)^2}{2Q}$$

Για να βρεθεί η βέλτιστη παραγγελία Q_{opt}, παραγωγίζουμε την παραπάνω παράσταση ως προς Q και S. Το αποτέλεσμα της παραγώγισης είναι οι σχέσεις

$$Q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}}\sqrt{\frac{h+p}{h}}$$

και

$$S^*=\sqrt{\frac{2KD}{h}}\sqrt{\frac{h}{h+p}}$$

Ο χρόνος μεταξύ δυο διαδοχικών παραγγελιών δίνεται αντίστοιχα από:

$$t = \frac{Q*}{D} = \sqrt{\frac{2K}{Dh}}\sqrt{\frac{h+p}{h}}$$

Η μέγιστη έλλειψη υπολογίζεται από:

$$Q^{*} - S^{*} = \sqrt{\frac{2KD}{h}}\sqrt{\frac{h}{h+p}}$$

Παρατηρώντας το σχήμα διαπιστώνουμε ότι υπάρχει ένα χρονικό διάστημα κατά το οποίο δεν έχουμε ελλείψεις. Αυτό το χρόνο μπορούμε πολύ εύκολα να τον υπολογίσουμε

$$\frac{\frac{S*}{D}}{\frac{Q*}{D}} = \frac{p}{p+h}$$

η οποία είναι ανεξάρτητη το Κ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Έστω ότι εξετάζουμε το κατάστημα που πουλάει αθλητικά είδη. Το μοντέλο αποθέματος που ακολουθούν είναι EOQ με ελλείψεις:

Τα δεδομένα είναι:

K =150€

h =0,75€ ανά τεμάχειο

p =2€ για κάθε μέρα που έχουμε έλλειψη

D =10.000 μπάλες

Να υπολογίσετε:

α) το βέλτιστο σημείο παραγγελίας και το έλλειμμα

β) το συνολικό κόστος

γ) πόσες παραγγελίες θα πρέπει να γίνουν κατά την διάρκεια του χρόνου και το μέγιστο έλλειμμα που μπορεί να υπάρξει

δ) πόσος είναι ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ δύο παραγγελιών

<u>ΛΥΣΗ</u>

α) $Q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}}\sqrt{\frac{h+p}{h}} = \sqrt{\frac{2\cdot150\cdot10.000}{0,75}}\sqrt{\frac{0,75+2}{2}} =$2.345,2 μπάλες

$S^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}}\sqrt{\frac{h}{h+p}} = \sqrt{\frac{2\cdot150\cdot10.000}{0,75}}\sqrt{\frac{0,75}{0,75+2}} =$639,6 μπάλες

β) $TC_{min} = \frac{D}{Q}K + h\frac{S^2}{2Q} + \frac{p(Q-S)^2}{2Q} = \frac{10.000}{2.345,2}150 + 0,75\frac{639,6^2}{2\cdot2.345,2} +$

$+\frac{2(2.345,2-639,6)^2}{2\cdot2.345,2} =$ 1.279,2€

γ) $t^* = \frac{D}{Q} = \frac{10.000}{2.345,2} =$ 4,26 παραγγελίες το χρόνο

$Q^* - S^* =$ 2.345,2- 639,6 μπάλες

δ) $t = \frac{\text{ημέρες του χρόνου}}{\text{αριθμός παραγγελιών}} = \frac{308}{4,26} =$ 72,3

3.2.4 EOQ ΜΕ ΕΚΠΤΩΣΕΙΣ

Εκτός από το βασικό μοντέλο EOQ ή το EOQ με ελλείψεις υπάρχει και το EOQ με εκπτώσεις.

Στις προηγούμενες περιπτώσει γνωρίζαμε ότι το EOQ δεν επηρεάζεται τόσο από το κόστος μιας μονάδας προϊόντος όσο και από το μέγεθος παραγγελίας. Το EOQ με εκπτώσεις σε αντίθεση με τις προηγούμενες περιπτώσεις επηρεάζεται. Αν αλλάξουμε την ποσότητα παραγγελίας ενός προϊόντος αναλόγως διαμορφώνεται και η τιμή του. Στην ουσία υπάρχουν εκπτώσεις στο κόστος μιας μονάδας αν αυξήσουμε την ποσότητα παραγγελίας.

Οι υπόλοιπες υποθέσεις παραμένουν ίδιες.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4</u>

Στο κατάστημα αθλητικών ειδών που μελετήσαμε νωρίτερα, έγινε μία προσφορά στα αθλητικά υποδήματα. Αν παραγγείλει μεγαλύτερη ποσότητα θα του γίνει έκπτωση.

Έτσι,

- αν παραγγείλει ποσότητα μικρότερη από 40.000 τεμάχια θα πληρώσει 11€ το ζευγάρι .
- αν παραγγείλει ποσότητα μεταξύ 40.000 και 50.000 θα πληρώσει 10€ τον ζευγάρι.
- Αν παραγγείλει ποσότητα μεγαλύτερη από 50.000 τεμάχια θα πληρώσει 9€ τον ζευγάρι.

Να υπολογιστεί η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας;

ΛΥΣΗ

ΠΟΣΟΤΗΤΑ	ΤΙΜΗ	
1-44.999	0,5€	h= 0,3
45.000- 59.999	0,46€	D=24.000
60.000-	0,44€	K=12.000

$$\mathrm{EOQ} = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2\cdot 12000\cdot 24000}{0.3}} = 43.817^{\text{κομμάτια}}/_{\text{παραγγελία}}$$

$TC(Q=43.817)=OC+ CC+ Dc_j$

$= \frac{24.000\cdot 12.000}{43.817} + \frac{0,3\cdot 43.817}{2} + 24.000\cdot 0,5 = 25145,35$ €

Αν αυξήσουμε κατά πολύ την ποσότητα παραγγελίας σε σχέση με το EOQ θα αυξηθεί και το συνολικό κόστος.

$TC(Q=45.000)<TC(Q=59.999)$

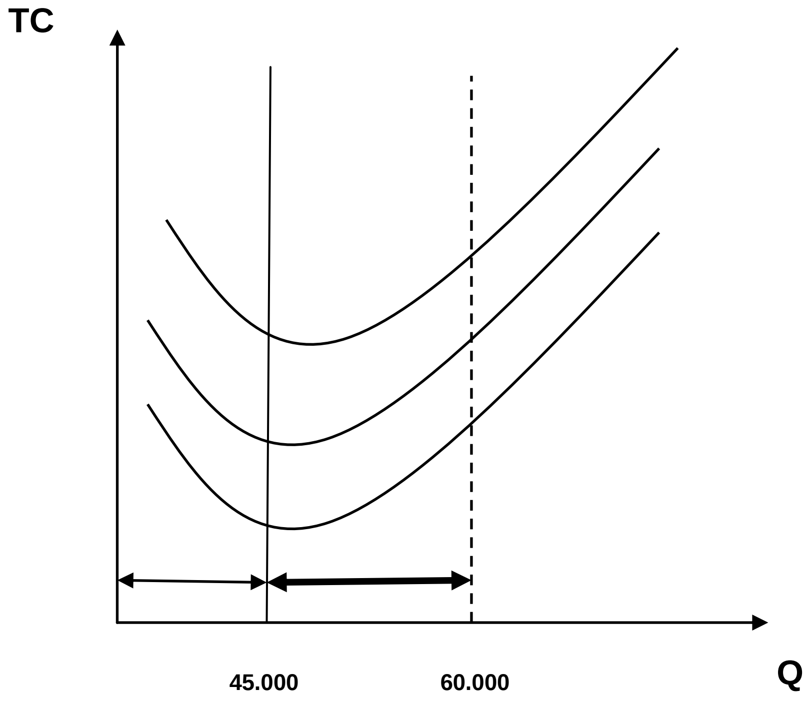
$TC(Q=45.000)= \frac{24.000\cdot 12.000}{45.000} + \frac{0,3\cdot 45.000}{2} + 24.000 \cdot 0,46=24.190$€

Παρατηρούμε πως $TC(Q=45.000) < TC(Q=43.817)$

$TC(Q=60.000)= \frac{24.000\cdot 12.000}{60.000} + \frac{0,3\cdot 60.000}{2} + 24.000 \cdot 0,44=24.360$€

Επιλέγουμε Q є (45.000 -59.000) και για Q= 45.000 έχουμε το ελάχιστο κόστος.

Στο παράδειγμα μας, η τιμή p δεν παραμένει σταθερή αλλά μειώνεται όταν αυξάνουμε την ποσότητα παραγγελίας.



Η διαδικασία που ακολουθήσαμε δεν ισχύει μόνο για το συγκεκριμένο παράδειγμα, αλλά για οποιοδήποτε παρόμοιο πρόβλημα.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

1. Υπολογίζουμε το EOQ όπως γνωρίζουμε για τις διάφορες τιμές ανά μονάδα προϊόντος που μας δίνεται.
2. Για κάθε c_j όπου Q_j εφικτό (που βρίσκετε στο αντίστοιχο διάστημα που αναλογεί στη τιμή αυτή).Υπολογίζουμε το συνολικό κόστος για τις διάφορες τιμές του προϊόντος από τον εξής τύπο:

$$\mathbf{TC_j} = \frac{D}{Q}K + \frac{Q}{2}h + Dc_j$$

c_j *: Τιμή μιας μονάδας προϊόντος*

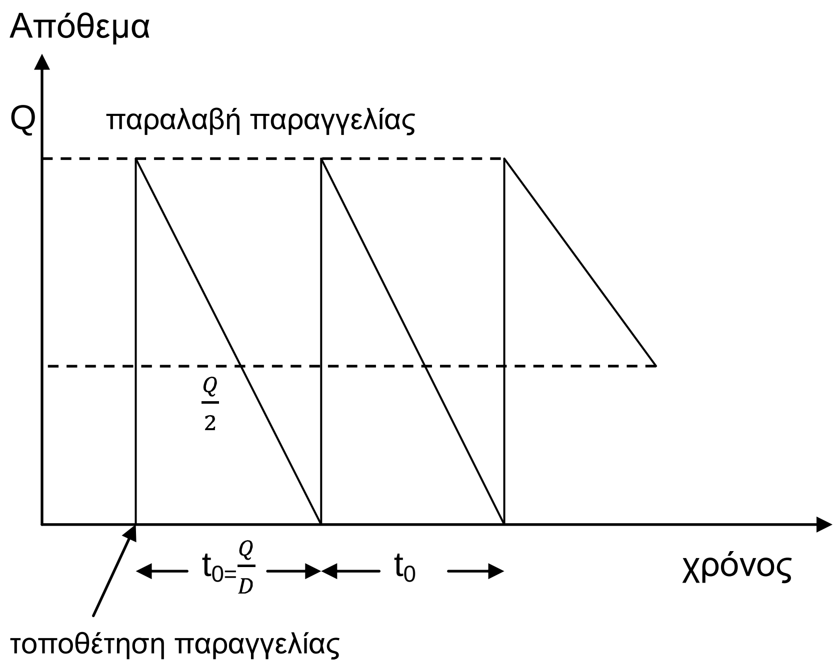
3. Επιλέγω την ποσότητα και τιμή με το μικρότερο κόστος.

3.2.5 Εύρεση βέλτιστου μεγέθους παραγγελίας με διαβάθμιση στη τιμή

Το μοντέλο αυτό έχει τις ίδιες προϋποθέσεις με το κλασικό μοντέλο EOQ με τη μόνη διαφορά ότι αλλάζει η τιμή της μίας μονάδας του προϊόντος με βάση το μέγεθος της παραγγελίας.

Δηλαδή

$$C = \begin{cases} c_1, & \text{αν } Q \leq q \\ c_2, & \text{αν } Q > q \end{cases} \qquad c_1 > c_2$$



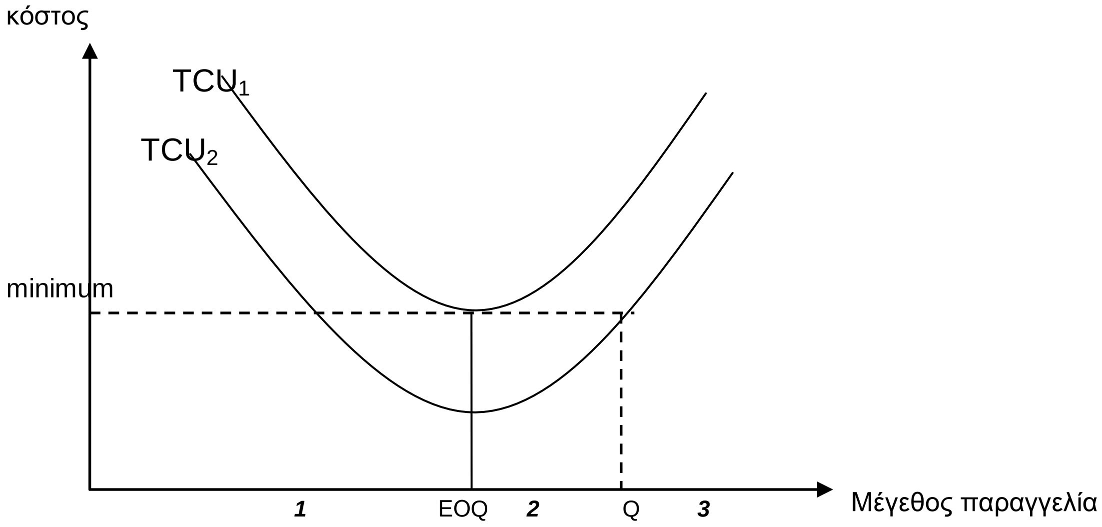
Το κόστος αγοράς ανά t_0 (t_0 σταθερό γιατί και η ζήτηση έχει σταθερό ρυθμό)

$$PC=\begin{cases} \dfrac{P_1 Q}{t_0} = \dfrac{P_1 Q}{\frac{Q}{D}} = P_1 D, & \text{αν } Q \leq q \\[2ex] \dfrac{P_2 Q}{t_0} = \dfrac{P_2 Q}{\frac{Q}{D}} = P_2 D, & \text{αν } Q > q \end{cases}$$

Οπότε έχουμε ότι

$$TCU(Q)=\begin{cases} TCU_1(Q)=P_1 D+\frac{D}{Q}K+\frac{Q}{2}h, & \text{αν } Q \leq q \\ TCU_2(Q)=P_2 D+\frac{D}{Q}K+\frac{Q}{2}h, & \text{αν } Q > q \end{cases}$$

Η Βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας δίνεται από το γνωστό μας τύπο: $Q=\sqrt{\dfrac{2KD}{h}}$



Θέτουμε τις τιμές Q των περιοχών 1,2 και 3 ως (0,EOQ), (EOQ,Q), (Q,+∞) αντίστοιχα.

Όπου Q>EOQ έχουμε ότι:

$TCU_2(Q)=TCU_1(EOQ)$

$P_2D+\frac{D}{Q}K+\frac{Q}{2}h= TCU_1(EOQ)$

Ύστερα από πράξεις προκύπτει η εξής σχέση:

$$Q^2+\frac{2(P_2D-TCU_1(EOQ)}{h}Q+\frac{2KD}{h}=0$$

Ορίζουμε ως το βέλτιστο EOQ το EOQ^*

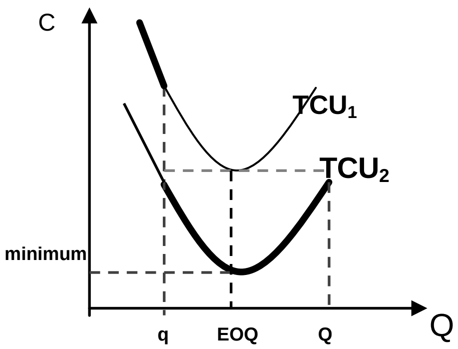
$$EOQ^*=\begin{cases} EOQ, & \text{αν } q\epsilon(\text{περιοχή 1 ή 3}) \\ q, & \text{αν } q\epsilon(\text{περιοχή 2}) \end{cases}$$

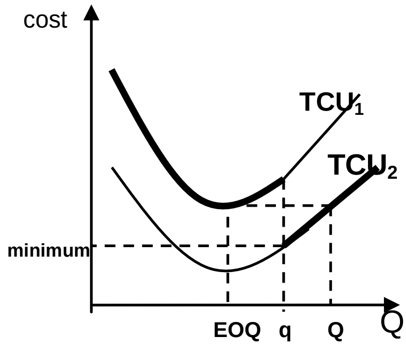
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

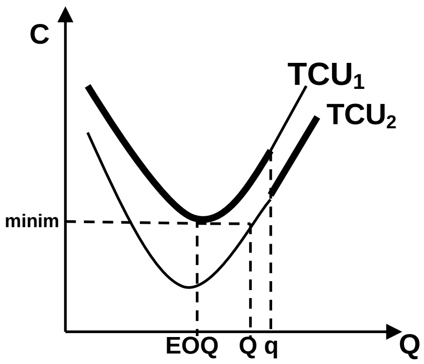
1. Υπολογίζουμε $EOQ=\sqrt{\frac{2KD}{h}}$
   - αν q ε(περιοχή 1) **ΤΕΛΟΣ**
   - αν όχι συνεχίζουμε το επόμενο βήμα

2. Έστω Q>EOQ. Υπολογίζουμε την ποσότητα αυτή από τον τύπο
$$Q^2+\frac{2(P_2D-TCU_1(EOQ)}{h}Q+\frac{2KD}{h}=0$$

3. Τέλος προσδιορίζουμε τις περιοχές 2 και 3 αν q ε(περιοχή 2) τότε $EOQ^*=q$ με ελάχιστο κόστος το $TCU_2(q)$







<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5</u>

Ένα κατάστημα σκαφών επιθυμεί να παραγγείλει προϊόντα. Η εταιρία επειδή θέλει να προωθήσει ένα νέο της προϊόν κάνει την εξής προσφορά.

Αν παραγγείλει το κατάστημα περισσότερα από 80 τεμάχια τότε θα του κοστίσει 1.100€ το ένα, αν παραγγείλει λιγότερα τότε θα έχουν 1.400€ το ένα. Το ετήσιο κόστος αποθήκευσης είναι 190€ ανά προϊόν, το κόστος παραγγελίας είναι 2.500€ και η ετήσια ζήτηση 200 τεμάχια. Το κατάστημα θέλει να προσδιορίσει αν πρέπει να αγοράσει περισσότερα από 80 τεμάχια ή όχι.

ΛΥΣΗ

Για Q >80 δίνεται η τιμή 1.100€, ενώ για Q <80 πουλιούνται 1.400€

K=2500€

h= 190€

D=200

$\mathrm{EOQ} = \sqrt{\frac{2\mathrm{KD}}{\mathrm{h}}} = \sqrt{\frac{2\cdot 2.500\cdot 200}{190}}$ =72,5

Q >72,5 άρα πηγαίνω στο βήμα 2.

$TCU_1(72{,}5)=1.400\cdot 200+ \frac{200}{72{,}5}2.500 + \frac{72{,}5}{2}190$

$TCU_1(72{,}5)=$ 293.784,

$Q^2+\frac{2(P_2D-TCU_1(EOQ))}{h}Q+\frac{2KD}{h}=0$

$Q^2+\frac{2(1.100\cdot 200-293.784)}{190}Q+\frac{2\cdot 2500\cdot 200}{190}=0$

Q^2- 388,34 Q+ 5263,16=0

Q =374,28> EOQ

Οπότε η περιοχή 2 περιέχει τις τιμές του διαστήματος (72.5,374.28)

η περιοχή 3 περιέχει τις τιμές του διαστήματος (374.28,∞)

Η ποσότητα που μας πρότεινε η εταιρία για να κάνει καλύτερη τιμή είναι 80 τεμάχια. Η ποσότητα αυτή ανήκει στο δεύτερο διάστημα. Οπότε το βέλτιστο επίπεδο παραγγελίας είναι 80 τεμάχια

Με συνολικό κόστος

$$TCU_2\,(Q)= P_2D+ \frac{D}{Q}K + \frac{Q}{2}h$$

$$TCU_2\,(80)= 1.100 \cdot 200+ \frac{200}{80}2.500 + \frac{80}{2}190$$

$$TCU_2\,(80)=233850€$$

Παρατηρώντας τα συνολικά κόστη για τις δυο τιμές διαπιστώνουμε ότι, πράγματι συμφέρει το κατάστημα να αγοράσει 80 ιστιοπλοϊκά.

3.2.6 Μοντέλο EOQ για πολλά προϊόντα με περιορισμένο χώρο αποθήκευσης

Το μοντέλο αυτό είναι ίδιο με το κλασικό μοντέλο EOQ με την διαφορά ότι εξετάζουμε περισσότερα από ένα προϊόντα και ότι έχουμε περιορισμένο χώρο στην αποθήκη (δεν επιτρέπονται ελλείψεις).

Ορίζουμε ως

D_i, με i= 1,2,…,n τη ζητούμενη ποσότητα του i προϊόντος

K_i, με i= 1,2,…,n το κόστος παραγγελίας του i προϊόντος

h_i, με i= 1,2,…,n το κόστος αποθήκευσης του i προϊόντος

Q_i, με i= 1,2,…,n το μέγεθος παραγγελίας του i προϊόντος

a_i, με i= 1,2,…,n απαιτούμενος χώρος αποθήκευσης 1μονάδας του i προϊόντος

A, ο μέγιστος συνολικός χώρος αποθήκευσης για όλο το απόθεμα

Με την προϋπόθεση ότι δεν επιτρέπονται ελλείψεις, το μαθηματικό μοντέλο που αντιπροσωπεύει το μοντέλο μας είναι:

$$\text{Min TCU}(Q_1,Q_2,\ldots,Q_n)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{KDi}}{\mathrm{Qi}}+\frac{\mathrm{hiDi}}{2}\right)$$

Με περιορισμούς $\sum_{i=1}^{n}(a_iQ_i) \le A$

$$Q_i > 0 \text{ με } i=1,2,\ldots,n$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

1. Υπολογίζουμε

$$EOQ = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$$

2. Εξετάζω τις ποσότητες EOQ_i, i=1,2,…,n
    - Αν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις τότε EOQ*=EOQ και η εφαρμογή ολοκληρώθηκε
    - Αν δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις πάμε στο επόμενο βήμα.
3. Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο Lagrange

$L(\lambda,Q_1,Q_2,\ldots,Q_n)= TC(Q_1,Q_2,\ldots,Q_n)- \lambda \sum_{i=1}^{n}(a_iQ_i -A)$

$L(\lambda,Q_1,Q_2,\ldots,Q_n)= \lambda \sum_{i=1}^{n}(\frac{KiDi}{Qi} + \frac{\mathrm{Qihi}}{2}) - \lambda \sum_{i=1}^{n}(a_iQ_i -A)$ με λ<0, λ πολλαπλασιαστής Lagrange.

Η L είναι κυρτή και έχει βέλτιστη τιμή στα σημεία Q_i, λ που καθορίζονται από τις αναγκαίες συνθήκες.

$\frac{\theta L}{\theta \mathrm{Qi}}=- \frac{\mathrm{KiDi}}{\mathrm{Qi\^{}2}} + \frac{\mathrm{hi}}{2} -\lambda\alpha_i$, με i=1,2,…,n

Θέτω $\frac{\theta L}{\theta Qi}=0$, με i=1,2,…,n

$-\frac{\mathrm{KiDi}}{Qi\^{}2}+\frac{hi}{2} -\lambda\alpha_i=0$

$Q_i^*=\sqrt{\frac{2KD}{h-2\lambda opt\alpha}}$ Q_i^* η τιμή που μηδενίζει το Q_i

- Αν $\lambda_{opt}=0$, τότε $Q_i^* =EOQ_i$
- Αν $\lambda_{opt} <0$, τότε

$\frac{\theta L}{\theta Qi}=0 \Rightarrow -\sum_{i=1}^{n}(a_iQ_i +A)=0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Έστω ένα κατάστημα που πουλάει τρία είδη

ΕΙΔΗ(i)	K_i(€)	D_i(ημερήσια)	h_i(€)	$α_i$(τ.μ)
1	10	2	0.3	1
2	5	4	0.1	1
3	15	4	0.2	1

Μέγιστος χώρος αποθήκευσης Α= 25τ.μ.

ΛΥΣΗ

$EOQ_1=\sqrt{\frac{2KiDi}{hi}}=\sqrt{\frac{2\cdot 10\cdot 2}{0.3}}=11,55$

$EOQ_2=\sqrt{\frac{2KiDi}{hi}}=\sqrt{\frac{2\cdot 54}{0.1}}=20$

$EOQ_3=\sqrt{\frac{2KiDi}{hi}}=\sqrt{\frac{2\cdot 15\cdot 4}{0.2}}=24,49$

$\sum_{i=1}^{n}(a_i\, Q_i)=56,04 > 25$τ.μ.

Διαπιστώνουμε ότι παραβιάζει τον περιορισμό

Ύστερα από πράξεις καταλήγουμε στις εξής βέλτιστες τιμές

$EOQ_1^*=6,34$τεμάχια $EOQ_2^*=7,09$τεμάχια $EOQ_3^*=11,57$τεμάχια

Με συνολικό κόστος 13,62€

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

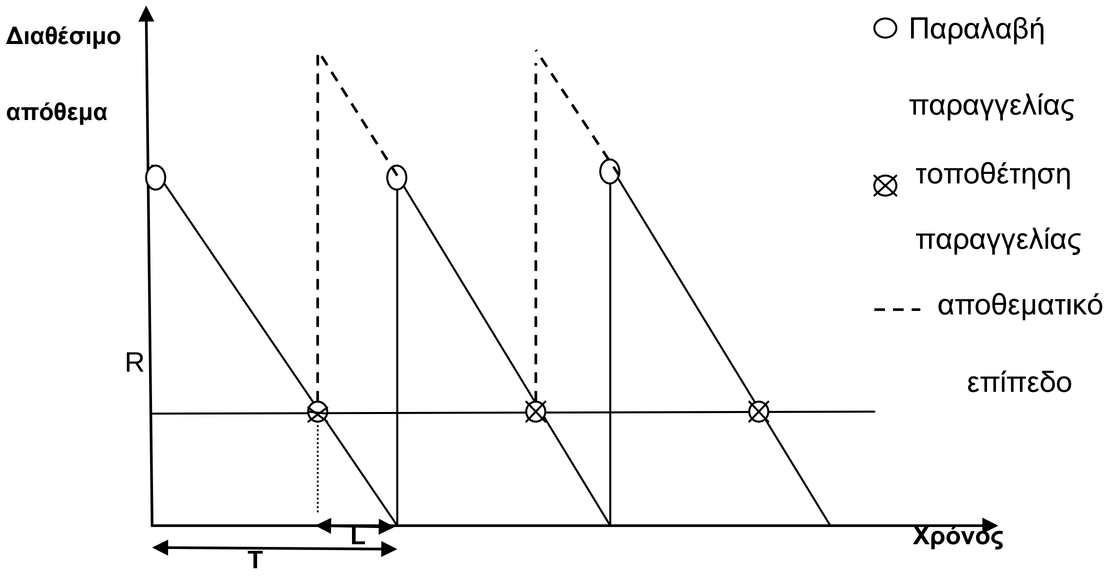
ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ ΣΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΠΑΡΑΓΓΕΛΙΑΣ

Τα μοντέλα διαχείρισης αποθεμάτων που έχουμε μελετήσει μέχρι τώρα βασίζονται στην υπόθεση ότι η ζήτηση και ο χρόνος που μεσολαβεί από την τοποθέτηση της παραγγελίας μέχρι την παράδοση της είναι σταθερά. Όμως οι υποθέσεις αυτές σπάνια συναντιόνται στην πραγματικότητα. Γι' αυτό η επιχείρηση θα πρέπει να έχει ένα απόθεμα ασφαλείας(stockout) ώστε να καλύπτει τις ανάγκες της ζήτησης.

Απόθεμα ασφαλείας ορίζεται η επιπλέον ποσότητα αποθέματος που διατηρείται μαζί ώστε να καλύψει την αναμενόμενη ζήτηση.

Παρόλο που το απόθεμα ασφαλείας είναι ένα επιπλέον κόστος για μια επιχείρηση, μπορεί να καλύψει οποιαδήποτε έλλειψη σε περίπτωση μη αναμενόμενης ζήτησης ή καθυστέρησης παράδοσης παραγγελίας.

4.1.1 Έλεγχος αποθεμάτων με επαναληπτικές παραγγελίες με γνωστή και σταθερή ζήτηση και χρόνο αναμονής

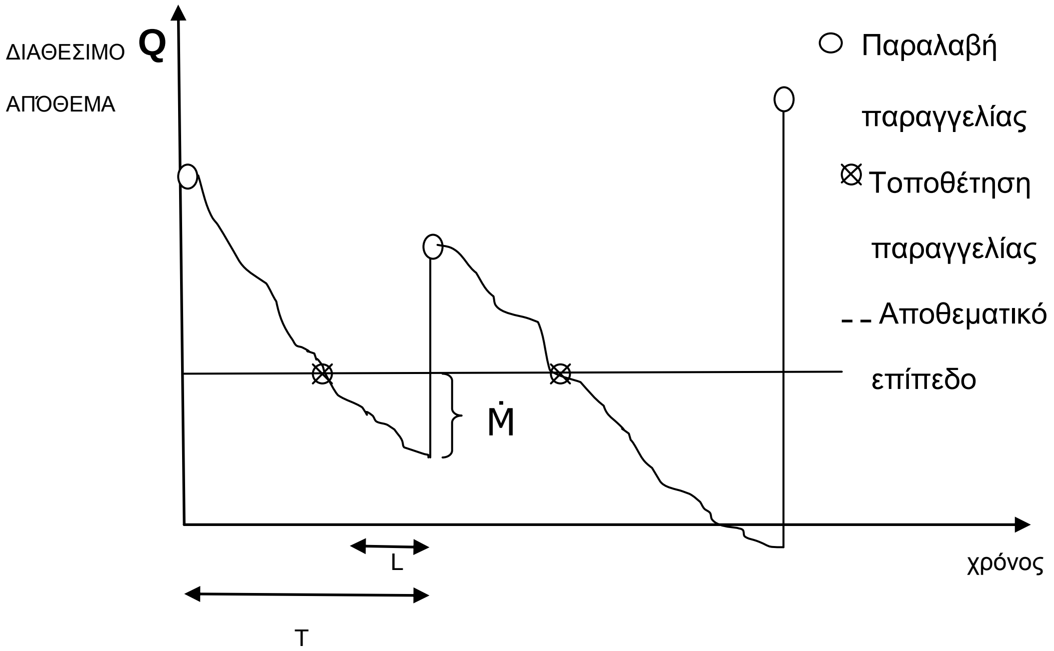


Στο σχήμα μπορούμε να διακρίνουμε πως λειτουργεί το σύστημα όταν η ζήτηση και ο χρόνος αναμονής είναι σταθερά. Η φθίνουσα ευθεία περιγράφει τον τρόπο συμπεριφοράς του αποθέματος με το χρόνο δηλαδή μειώνεται με σταθερό ρυθμό. Στο σημείο R τοποθετείται μια παραγγελία παρόλο που το υπόλοιπο απόθεμα ακολουθεί την καθοδική πορεία μέχρι το πέρας του χρόνου αναμονής L όπου παραλαμβάνεται η νέα παραγγελία. Ο χρόνος μεταξύ τον παραλαβών είναι σταθερός και ίσος με T. Το αποθεματικό επίπεδο αντιστοιχεί στο διαθέσιμο απόθεμα στο χρόνο ακριβώς πριν την έναρξη του χρόνου αναμονής και υπερβαίνει το διαθέσιμο απόθεμα στο διάστημα του χρόνου αναμονής. Με το πέρας του χρόνου αναμονής το αποθεματικό επίπεδο γίνεται ίσο με το διαθέσιμο απόθεμα.

Για να αποφασίσουμε το αν πρέπει να παραγγείλουμε ή όχι, θα συγκρίνουμε το αποθεματικό επίπεδο με το R. Αλλά δεν αγνοούμε τις προγραμματισμένες παραλαβές παραγγελιών.

4.1.2. Έλεγχος αποθέματος με επαναληπτικές παραγγελίες και άγνωστη ζήτηση (τυχαία μεταβλητή)

Στην πραγματικότητα η ζήτηση και ο χρόνος αναμονής δεν είναι πάντοτε γνωστά.



Από το γράφημα μπορούμε να παρατηρήσουμε τη συμπεριφορά του Q όταν η ζήτηση αποτελεί τυχαία μεταβλητή. Αν υποθέσουμε ότι η μεταβολή του ολικού χρόνου είναι αμελητέα, δηλαδή σταθερή. Η φθίνουσα κυματική γραμμή δηλώνει ότι η ζήτηση μεταβάλετε. Η κλίση είναι πιο απότομη στο πρώτο κύκλο, δηλαδή ο ρυθμός ζήτησης είναι υψηλότερος κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου.

Μοντέλο με έλλειμμα

Στο μοντέλο μας θα εισάγουμε και το κόστος έλλειψης. Οπότε τα κόστη μας είναι:

Κ: κόστος παραγγελίας

h: κόστος αποθήκευσης

K_u: κόστος έλλειψης μιας μονάδας

Το βέλτιστο μέγεθος παραγγελίας και το βέλτιστο σημείο τοποθέτησης της παραγγελίας εξαρτώνται από τα προαναφερόμενα κόστη, από το μέσο όρο ζήτησης στο χρόνο αναμονής και τη μεταβολή της ζήτησης στο χρόνο αναμονής.

Υποθέσεις

1) Ο χρόνος αναμονής είναι γνωστός και σταθερός
2) Το κόστος έλλειψης είναι ένα υποθετικό κόστος ανά μονάδα προϊόντος ανεξάρτητο από τη διάρκεια που η επιχείρηση βρίσκεται με μηδενικό απόθεμα.
3) Η ζήτηση M κατά τη διάρκεια αναμονής ακολουθεί κανονική κατανομή $M \sim N(\dot{M}, \sigma_M^2)$
4) Βέλτιστο σημείο παραγγελίας R είναι μεγαλύτερο από τη μέση ζήτηση M. Έτσι ώστε το αντίστοιχο απόθεμα ασφαλείας να είναι θετικό $R - \dot{M} > 0$
5) Το απόθεμα ασφαλείας πρέπει πάντοτε να αποτελεί μέρος του ολικού αποθέματος.

Οπότε

R : το σημείο παραγγελίας

Q: μέγεθος παραγγελίας

D: μέση ζήτηση σε ένα έτος

K: κόστος παραγγελίας

h: κόστος αποθήκευσης

$K_{u:}$ κόστος από το έλλειμμα μιας μονάδας

M: αριθμός μονάδων ζήτησης στο χρόνο αναμονής

$\dot{M}$: ο μέσος αριθμός μονάδων ζήτησης κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής

σ_M: τυπική απόκλιση της ζήτησης στο χρόνο αναμονής

Η βέλτιστη ποσότητα υπολογίζετε από το γνωστό μας τύπο:

$$\mathrm{EOQ} = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$$

Για να βρούμε το βέλτιστο σημείο παραγγελίας αρχικά θέτουμε $\dot{M}$=R.

Αλλά πρέπει να εξετάσουμε πρώτα αν αξίζει να αυξήσουμε κατά μια μονάδα το R. Το ετήσιο αναμενόμενο κόστος πρόσθεσης μίας μονάδας στο R είναι ίσο με το h. Αφού μια μονάδα προστίθεται στο απόθεμα ασφαλείας, R - $\dot{M}$ και παραμένει στο απόθεμα σχεδόν όλο το χρόνο, εκτός αν συμβεί έλλειμμα, που πραγματοποιείται όμως για μικρό χρονικό διάστημα.

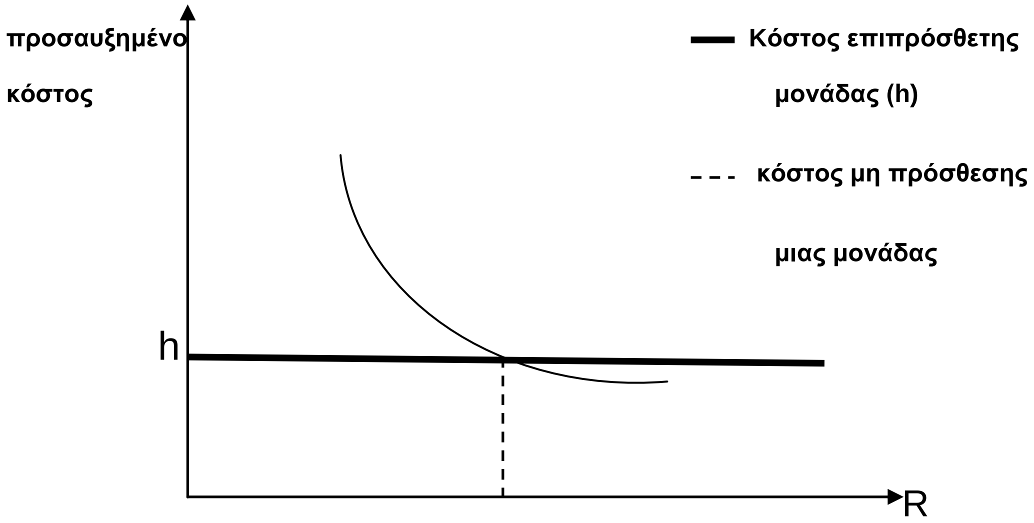
Το ετήσιο αναμενόμενο κόστος όταν δεν έχουμε προσθέσει μια μονάδα στο R θα είναι ίσο με την πιθανότητα να ζητηθούν μία ή περισσότερες μονάδες κατά τη διάρκεια του χρόνου αναμονής, πολλαπλασιασμένο με το μοναδιαίο κόστος ελλείμματος K_u και τον αριθμό των περιόδων ανά χρόνο $\frac{D}{EOQ}$ δηλαδή

$$K_{nau} = P[M>R]\, K_u \frac{D}{EOQ}$$

Όπου K_{nau} το κόστος της μη πρόσθετης επιπλέον μονάδας και P[.] την πιθανότητα

Γνωρίζουμε ότι P[M>R] =1- F(R)

Όπου F(R) = P[M≤R] η συνάρτηση κανονικής πιθανότητας της ζήτησης, M και εκφράζει την πιθανότητα της μη ζήτησης επιπλέον μονάδας.



Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνει το R, η πιθανότητα να ζητηθεί μια μονάδα μειώνεται και τελικά η τομή της ευθείας h και της καμπύλης K_{nau} μας δίνουν το βέλτιστο R, το σημείο δηλαδή στο οποίο σταματάμε να προσθέτουμε μονάδες στο R. Σε αυτό το σημείο τα δύο κόστη είναι ίδια οπότε:

$$h= P[M>R]\ K_u \frac{D}{EOQ} \Rightarrow 1- F(R)= \frac{h \cdot EOQ}{Ku\ D}$$

$$F(R)= 1- \frac{h \cdot EOQ}{K_u\ D} = \alpha \quad (2)$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

1) Υπολογίζουμε το Q από τον τύπο EOQ.
2) Υπολογίζουμε την F(R) από τον τύπο (2)
3) Βρίσκουμε την τιμή του R από τους πίνακες της κανονικής κατανομής που αντιστοιχεί στην πιθανότητα που βρήκαμε στο προηγούμενο βήμα.

Πρέπει να ξέρουμε ότι οι πίνακες της τυποποιημένης κανονικής κατανομής αντιστοιχούν στη τυχαία μεταβλητή Z η οποία ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση 1, δηλαδή Z~N(0,1). Στη περίπτωση μας ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $\dot{M}$ και τυπική απόκλιση σ_M, δηλαδή $M \sim N(\dot{M}, \sigma_M)$.

Ακόμα γνωρίζουμε ότι

$$P[M \leq R] = \alpha$$

$$P\left[\frac{M-}{\sigma_M} \leq \frac{R-}{\sigma_M}\right]$$

$$P\left[Z \leq \frac{R-}{\sigma_M}\right]$$

$$\Phi\left[\frac{R-}{\sigma_M}\right] = \alpha$$

Όπου Φ[.] η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας της τυποποιημένης κανονικής κατανομής.

Ένας εναλλακτικός τρόπος είναι να το υπολογίσουμε με ολοκληρώματα.

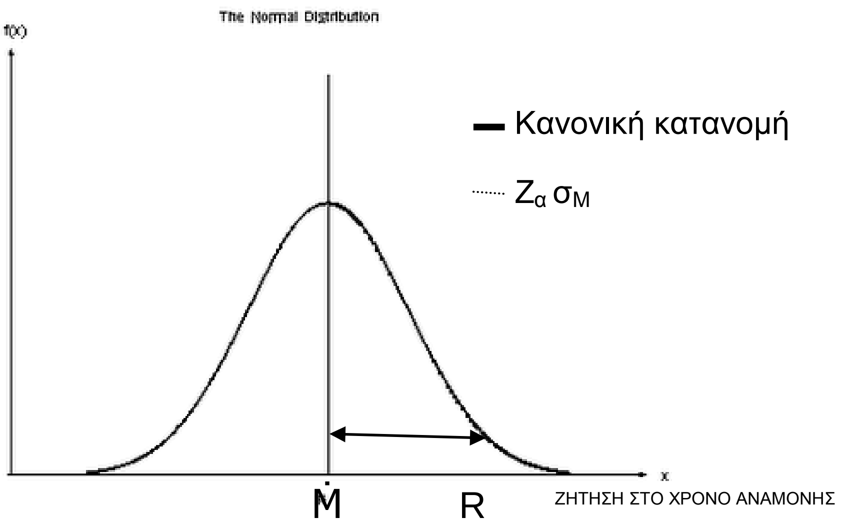
$$F(R) = P[M \leq R] = \int_{-\infty}^{R} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_M} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_M^2}(x-\ )^2\right] dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{R-}{\sigma_M}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{z^2}{2}\right] dz$$

$$= \Phi\left[\frac{R-}{\sigma_M}\right]$$

Άρα

$$\boxed{R = \dot{M} + \sigma_M Z_\alpha}$$



Το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της καμπύλης και του άξονα της ζήτησης μέχρι το σημείο R είναι ίσο με F(R).

Το R είναι ίσο με τη μέση ζήτηση προσθέτοντας και το απόθεμα ασφαλείας που είναι ίσο με $Z_α σ_{M.}$

Υπολογισμός της τυπικής απόκλισης του χρόνου αναμονής

Ο χρόνος αναμονής συνήθως είναι διαφορετικός από τις συνηθισμένες τυπικές χρονικές περιόδους (μήνας, εβδομάδα).

Θα πρέπει να βρούμε ένα τρόπο για να υπολογίσουμε το $σ_M$ από το $σ_1$, όπου $σ_1$ η τυπική απόκλιση της συνηθισμένης περιόδου.

Γενικά για τ, ο αριθμός βδομάδων ή μηνών ανάλογα με το χρόνο αναμονής που μας δίνεται έχουμε

$$σ_M = \sqrt{\tau}σ_1$$

Συνολικό κόστος

Το συνολικό κόστος δίνεται από το ακόλουθο τύπο

$$TC\ (Q, R) = OC + CC + CU$$

$$TC\ (Q, R) = K\frac{D}{Q} + (\frac{Q}{2} + (R -))h + K_u\frac{D}{Q}\int_R^{\infty}(M - R)f(M)\ dM$$

$$TC\ (Q, R) = K\frac{D}{Q} + (\frac{Q}{2} + (R -))h + K_u\,\sigma_M\,N\ (Z)\,\frac{D}{Q}$$

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7</u>

Μια εταιρία φαρμάκων πουλάει το φάρμακο ΖΕΚ στη τιμή των 5€. Η ετήσια ζήτηση του φαρμάκου αυτού είναι 10000 μονάδες. Το κόστος αποθήκευσης αποτελεί το 20% της αξίας του ανά έτος. Ενώ το κόστος παραγγελίας είναι 50€. Να υπολογιστεί:

1) Η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας
2) Το βέλτιστο σημείο παραγγελίας, αν γνωρίζουμε ότι ο χρόνος αναμονής της παραγγελίας είναι 4 εβδομάδες, η μέση εβδομαδιαία ζήτηση είναι 200μονάδες τη βδομάδα και η τυπική απόκλιση 41μονάδες ανά βδομάδα. Ακολουθεί δηλαδή την κανονική κατανομή Μ~ ($\dot{M}$, σ_M) με κόστος ελλείμματος K_u= 3€.
3) Το συνολικό κόστος

<u>Λύση</u>

1) $EOQ = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2\cdot 50\cdot 10000}{1}}$ =1000κομμάτια

2) =200·2=400 μονάδες

$\sigma_M = \sqrt{\tau}\sigma_1 = \sqrt{4}\cdot 41 = 81$ μονάδες

$F(R) = 1- \frac{h\cdot EOQ}{K_u\ D} = 1- \frac{1000}{3\cdot 10000} = 0{,}96667$

Από τον πίνακα κανονικής κατανομής βλέπουμε ότι αντιστοιχεί στη τιμή Z=1,84

Άρα R= $\dot{M}$+ Z σ_M = 400+1,84·81= 549 μονάδες

Απόθεμα ασφαλείας R-$\dot{M}$= 549-400 =149 μονάδες

TC (Q, R) = OC +CC+CU

$$TC\,(Q, R) = K\frac{D}{Q} + \left(\frac{Q}{2} + (R -)h + K_u\,\sigma_M\,N\,(Z)\,\frac{D}{Q}\right.$$

$$TC\,(1000, 549) = 50\,\frac{10000}{1000} + \left(\frac{1000}{2} + (549 - 400)1+\right.$$

$$+\,3\,\frac{10000}{1000}\,82\cdot 0{,}013 = 500 + (500+149) + 31{,}98$$

$$TC\,(1000, 549) = 1181€$$

4.1.3 Ντετερμινιστικό μοντέλο περιοδικής ανασκόπησης

Σε αυτό το μοντέλο EOQ σχεδιάζουμε τι πρέπει να γίνει τις επόμενες ν-περιόδους όσον αφορά, τις ποσότητες που πρέπει να παραχθούν ή να μπουν στο στάδιο παραγγελίας (όπου αυτό χρειάζεται) ώστε να έχουμε το επιθυμητό απόθεμα στην αρχή κάθε περιόδου. Δεν μας ενδιαφέρει αν οι μονάδες αυτές θα παραχθούν ή θα αγοραστούν, το συνηθέστερο όμως σε αυτά τα μοντέλα είναι το πρώτο. Γι' αυτό, θα χρησιμοποιούμε κυρίως τον όρο *παραγωγή* των μονάδων.

Οι απαιτήσεις που θα υπάρχουν στην κάθε περίοδο θα είναι γνωστές, αλλά όχι απαραίτητα ίδιες.

ΟΡΟΛΟΓΙΑ

r_i: ζήτηση την περίοδο i, όπου i=1,2,….,ν

Οι απαιτήσεις αυτές πρέπει να καλυφθούν στην ώρα τους. Δεν υπάρχει αρχικά εύκαιρο απόθεμα, αλλά θα μπορεί να γίνεται η παράδοση στην αρχή τις πρώτης περιόδου.

Οι υπόλοιπες μεταβλητές είναι παρόμοιες με το κλασσικό μοντέλο EOQ.

K: κόστος παραγωγής μιας μονάδας την περίοδο i

h: κόστος αποθήκευσης

c:το κόστος παραγωγής ή αγοράς μιας μονάδας

Στο κόστος αποθήκευσης h συνυπολογίζεται μόνο το απόθεμα που μένει στο τέλος κάθε περιόδου. Το κόστος αποθήκευσης επηρεάζεται και από το απόθεμα που μένει για κάποιο χρονικό διάστημα στις αποθήκες μέχρι να αποσυρθεί για να ικανοποιήσει τη ζήτηση.

Για να επιλέξουμε την πολιτική που θα ακολουθήσουμε στο μοντέλο μας δεν επηρεαζόμαστε από τα σταθερά κόστη αλλά από τα μεταβλητά. Ένα μεταβλητό κόστος θα μπορούσε να είναι το επιπλέον απόθεμα που μας έχει μείνει από την προηγούμενη περίοδο.

Με την ίδια λογική το κόστος παραγωγής ή αγοράς μιας μονάδας c δεν επηρεάζει το σταθερό κόστος , γιατί κατά την διάρκεια των περιόδων δεν αλλάζει μόνο η ποσότητα, αλλά και το κόστος που απαιτείται για να παραχθεί.

Ο στόχος μας είναι να ελαχιστοποιήσουμε το συνολικό κόστος για τις ν-περιόδους. Αυτό επιτυγχάνεται μόνο αν αμελήσουμε τα σταθερά κόστη και επικεντρωθούμε στα μεταβλητά.

4.1.4 Μια στοχαστική συνεχής ανασκόπηση αποθεμάτων

Τα στοχαστικά μοντέλα που εξετάζουμε στην ενότητα αυτή έχουν σχεδιαστεί για να αναλύουν το σύστημα διαχείρισης αποθεμάτων, στο οποίο δεν γνωρίζουμε τις μελλοντικές απαιτήσεις.

Στο συγκεκριμένο σύστημα διαχείρισης αποθεμάτων έχουμε συνεχή παρακολούθηση του επιπέδου αποθεμάτων, ώστε να πραγματοποιηθεί μια νέα παραγγελία όταν το απόθεμα φτάσει σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο (reorder point).

Όταν εφαρμόστηκε για πρώτη φορά το σύστημα συνεχούς ανασκόπησης αποθεμάτων, έπρεπε κάποιος να έχει στη διάθεση του δύο διαφορετικούς χώρους στου οποίους θα βρισκόταν το απόθεμα. Όταν άδειαζε ένας από τους δύο αυτούς χώρους έπρεπε να γίνει μια νέα παραγγελία. Όμως μέχρι να παραλάβουν αυτή τη νέα παραγγελία χρησιμοποιούσαν το απόθεμα της δεύτερης.

Με την πρόοδο όμως της τεχνολογίας και την ένταξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών στη ζωή, όλη αυτή η διαδικασία έγινε πιο απλή. Δεν χρειάζονται πλέον οι διαφορετικοί αυτοί χώροι, το μόνο που απαιτείται είναι να καταχωρηθεί άμεσα στον υπολογιστή η οποιαδήποτε αλλαγή που πραγματοποιείτε στο απόθεμα (πώληση, νέες παραλαβές, απόσυρση κ.α). Το σύστημα αυτό το συναντάμε στην καθημερινότητα μας π.χ. super market στο οποίο σε κάθε προϊόν υπάρχει ένας συγκεκριμένος κωδικός, ο οποίος μόλις περάσει από το ταμείο ενημερώνεται απευθείας το σύστημα ότι έχει πουληθεί. Το σύστημα αυτό αποδείχθηκε πολύ αποτελεσματικό και έτσι πολλές επιχειρήσεις το υιοθέτησαν.

Οι δυο μεταβλητές που θα χρησιμοποιηθούν κυρίως είναι:

R – σημείο παραγγελίας

Q – μέγεθος παραγγελίας

Πολιτική αποθεμάτων: Όταν το επίπεδο αποθεμάτων φτάνει στο προκαθορισμένο σημείο R, κάνουμε μία νέα παραγγελία μεγέθους Q. Η πολιτική αυτή συνήθως καλείται reorder- point, order-quantity ή (R,Q).

Υποθέσεις

1. Κάθε εφαρμογή αφορά μόνο ένα προϊόν.
2. Το επίπεδο αποθέματος είναι πάντοτε γνωστό, γιατί είναι σε συνεχή παρακολούθηση.
3. Για να χρησιμοποιήσουμε τη πολιτική (R,Q), οι μόνες αποφάσεις που πρέπει να ληφθούν είναι η επιλογή των R, Q.
4. Ο χρόνος που μεσολαβεί από την τοποθέτηση της παραγγελίας μέχρι την παραλαβή της είναι πάντοτε σταθερός ή μεταβλητός.
5. Αν κατά το χρόνο αναμονής αποσυρθούν από το απόθεμα κάποιες μονάδες λόγω πώλησης ή κάποιο άλλο λόγω, η ζήτηση γίνεται αβέβαιη. Παρόλα αυτά, η πιθανότητα της ζήτησης είναι γνωστή (ή τουλάχιστον υπολογίσιμη).
6. Αν υπάρξει έλλειψη πριν παραληφθεί η παραγγελία, η παραπανίσια ζήτηση ετεροχρονίζεται (backlogged), έτσι ώστε να καταχωρηθεί μόλις καταφτάσει η παραγγελία μας.
7. Κάθε φορά που τοποθετείται μία νέα παραγγελία υπάρχει ένα σταθερό κόστος **το κόστος παραγγελίας(K).**
8. Το κόστος παραγγελίας είναι ανάλογο της ποσότητας παραγγελίας Q.
9. Το κόστος αποθήκευσης (h) υπολογίζεται για κάθε μονάδα στο απόθεμα ανά χρονική περίοδο.
10. Αν υπάρξει έλλειψη στο απόθεμα τότε έχουμε ένα ακόμα κόστος, το κόστος έλλειψης (p). Αυτό πραγματοποιείται για κάθε μονάδα που ετεροχρονίζεται ανά χρονική περίοδο ως ότου η ετεροχρονισμένη παραγγελία πραγματοποιηθεί.

Το μοντέλο αυτό είναι παρόμοιο με το μοντέλο που συναντήσαμε στη ενότητα 2.1.2. Όλες οι υποθέσεις είναι ίδιες εκτός από την 5. Δηλαδή, για να μην έχουμε αβέβαιη ζήτηση σε αυτό το μοντέλο υποθέτουμε ότι έχουμε ζήτηση με σταθερό ρυθμό.

Τα αποτελέσματα αυτών των δυο μοντέλων είναι παρόμοια, η μόνη διαφορά προκύπτει λόγω της αβέβαιης ζήτησης του νέου μοντέλου. Για να καθορίσουμε το σημείο παραγγελίας θα πρέπει να προσθέσουμε σε αυτό το απόθεμα ασφαλείας. Αυτό γίνεται για να έχουμε μερική ασφάλεια και το απόθεμα μας να είναι περισσότερο από το μέσο όρο ζήτησης κατά τη διάρκεια του Lead time. Παρόλα αυτά τα κόστη στα δύο μοντέλα υπολογίζονται με τον ίδιο τρόπο, όπως και το βέλτιστο επίπεδο παραγγελίας.

Επιλέγοντας το Q

Για να υπολογιστεί η ποσότητα Q θα χρησιμοποιήσουμε το τύπο της ενότητας 2.1.2 EOQ με προγραμματισμένες ελλείψεις.

Αυτός ο τύπος είναι:

$$Q=\sqrt{\frac{2AK}{h}}\sqrt{\frac{p+h}{p}}$$

A : η μέση ζήτηση ανά μονάδα χρόνου

K : κόστος παραγγελίας

h : κόστος αποθήκευσης

p : κόστος έλλειψης

Το Q που θα υπολογίσουμε δεν θα είναι η ακριβής τιμή βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας, αλλά μια πολύ καλή προσέγγιση της.

Επιλέγοντας το R (σημείο παραγγελίας)

Η επιλογή του **R** βασίζεται κυρίως στο επιθυμητό επίπεδο εξυπηρέτησης πελατών. Οπότε το πρώτο πράγμα που πρέπει να γίνει είναι να αποκτήσουμε ένα επίπεδο διαχείρισης πάνω στην εξυπηρέτηση πελατών.

Το επίπεδο εξυπηρέτησης μπορεί να οριστεί με διάφορους τρόπους, όπως θα δούμε και παρακάτω.

Επίπεδο εξυπηρέτησης είναι η πιθανότητα το διαθέσιμο απόθεμα να είναι αρκετό για να ικανοποιήσει την αναμενόμενη ζήτηση κατά τη διάρκεια του ανεφοδιασμού (δηλαδή η πιθανότητα ότι δε θα υπάρξει έλλειψη αποθέματος).

Εναλλακτικά μέτρα επιπέδου εξυπηρέτησης

1) Η πιθανότητα ότι δεν θα έχουμε έλλειψη αποθέματος από την στιγμή που θα τοποθετηθεί η παραγγελία μέχρι την παράδοση της.
2) Ο μέσος όρος του stockout ανά έτος
3) Η μέση ετήσια ζήτηση που μπορεί να ικανοποιηθεί άμεσα (δεν έχουμε έλλειψη αποθέματος).
4) Ο μέσος χρόνος καθυστέρησης μέχρι να αναπληρωθεί η παραγγελία.
5) Η μέση καθυστέρηση στο να εκπληρωθούν οι παραγγελίες (που έχουν καθυστερήσει) όταν συμβαίνει έλλειψη αποθέματος.

Για να παρθεί μια απόφαση διαχείρισης πρέπει να υιοθετηθεί τουλάχιστον ένα από τα μέτρα του επιπέδου εξυπηρέτησης.

Αφού επικεντρωθούμε σε ένα από αυτά τα μέτρα θα ήταν χρήσιμο να αναζητήσουμε τις επιπτώσεις των διαφόρων εναλλακτικών τιμών αυτών των μέτρων πάνω σε άλλα μέτρα πριν αποφασίσουμε την καλύτερη εναλλακτική.

Το μέτρο 1 είναι το πιο βολικό για να χρησιμοποιηθεί σαν κύριο μέτρο, γι' αυτό θα εστιάσουμε εκεί. Ορίζουμε το επιθυμητό επίπεδο εξυπηρέτησης με L.

L= η επιθυμητή πιθανότητα διαχείρισης, ότι δεν θα συμβεί έλλειψη αποθέματος από την τοποθέτηση της παραγγελίας μέχρι την παραλαβή της.

Αν επιλέξουν το μέτρο 1 αυτό προϋποθέτει να δουλέψουμε με την πιθανότητα κατανομής της τυχαίας μεταβλητής.

D= Η ζήτηση κατά τη διάρκεια το χρόνου αναμονής (L) μέχρι την ολοκλήρωση της

ΕΦΑΡΜΟΓΗ: Αν έχουμε μία ομοιόμορφη κατανομή η επιλογή του R είναι απλή.

Αν η κατανομή πιθανοτήτων των D είναι μία ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα από το α έως β, τότε

$$R=a+ L(b-a)$$

Επομένως $P(D \le R)=L$

Δεδομένου ότι ο μέσος όρος της κατανομής μας είναι

$$E(D)=\frac{a+b}{2}$$

Η ποσότητα του αποθέματος ασφαλείας (το αναμενόμενο επίπεδο αποθέματος πριν παραληφθεί η παραγγελία) υπολογίζεται με τη βοήθεια του R.

$$\text{Safety stock}=R-E(D)$$
$$=a+L(b-a)-\frac{a+b}{2}$$
$$=\left(L-\frac{1}{2}\right)(b-a)$$

Όταν η κατανομή της ζήτησης δεν είναι ομοιόμορφη κατανομή, τότε η διαδικασία επιλογής του R είναι παρόμοια.

Διαδικασία επιλογή του R με βάση το επίπεδο εξυπηρέτησης του μέτρου 1.

1) Επιλέξτε L
2) Υπολογίστε το **R** έτσι ώστε

$$P\ (D \leq R) = L$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ: Έστω ότι η ζήτηση μας είναι τυχαία μεταβλητή με Κατανομή Πιθανότητας την Κανονική Κατανομή με μέσο μ και διακύμανση σ^2 όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί. Δίνεται η παράμετρος L με την βοήθεια της μπορούμε να υπολογίσουμε και το σημείο R. Στην πραγματικότητα χρειαζόμαστε την παράμετρο K_{1-L} της οποίας την τιμή μπορούμε πολύ απλά να βρούμε από το πίνακα κανονικής κατανομής, και στη συνέχεια να την αντικαταστήσουμε στη παρακάτω σχέση.

$$R = \mu + K_{1-L}\,\sigma$$

Προκύπτει ότι το απόθεμα ασφαλείας είναι:

$$\text{Safety stock} = R - \mu = K_{1-L}\,\sigma$$

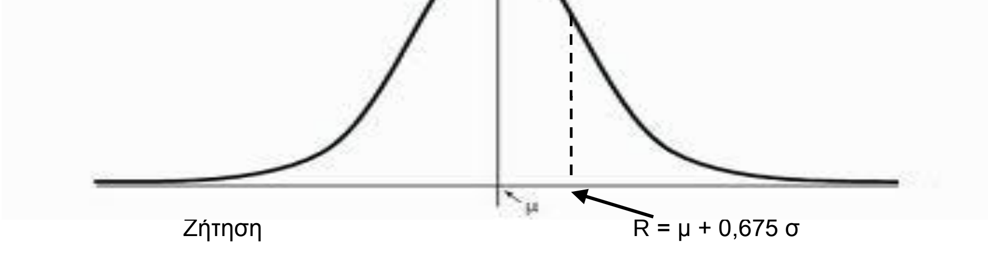
Αν δίνεται ότι L= 0,75 τότε από τον πίνακα κανονικής κατανομής διαπιστώνουμε ότι K_{1-L} =0,675
Οπότε τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε το απόθεμα ασφαλείας.

$$R = \mu + 0{,}675\,\sigma$$

Όπως φαίνεται και στο σχήμα

Safety stock= 0,675

P (D≤R) = 0,75



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Η εταιρία BIOTEXT παράγει χαρτί περιτυλίγματος , μήκους 10μ. το κάθε ρολό.

Η εκτιμώμενη ετήσια ζήτηση είναι 10.000 ρολά, 10μ. Το κόστος τοποθέτησης της παραγγελίας στην εταιρεία είναι 100€, ενώ το κόστος διατήρησης ενός ρολού το χρόνο είναι 0,50€. Ο χρόνος αναμονής μιας παραγγελίας είναι 1 μήνα και η έλλειψη μιας ποσότητας αποθέματος επιβαρύνει την εταιρεία κατά 1€.

Η ζήτηση του χαρτιού διαφοροποιείται από μήνα σε μήνα, η μέση τιμή είναι μ= 10000 και σ^2 =2000. Το επίπεδο εξυπηρέτησης είναι 95% κατά τη διάρκεια του χρόνου ανεφοδιασμού.

a) Να υπολογίσετε τη βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας.
b) Να υπολογίσετε το απόθεμα ασφαλείας.

ΛΥΣΗ:

α) $Q = Q=\sqrt{\frac{2AK}{h}}\sqrt{\frac{p+h}{p}} = Q=\sqrt{\frac{2\cdot 10000\cdot 100}{0,5}}\sqrt{\frac{1+0,5}{1}} =2449.5$

β) L = 0.95 οπότε K_{1-L} =1,645

$R = \mu + K_{1-L}\,\sigma$

$R = 10000 + 1,645\cdot 2000$

$R = 13290$

Safety stock= R – μ

Safety stock= 13290 -10000

Safety stock= 3290

4.1.5 Στοχαστικό μοντέλο μιας περιόδου για αναλλοίωτα προϊόντα

Τα μοντέλα διαχείρισης αποθεμάτων που έχουμε συναντήσει μέχρι στιγμής παρέμεναν αναλλοίωτα με την πάροδο του χρόνο. Στην ενότητα αυτή παύει να ισχύει αυτή η υπόθεση, τα προϊόντα μας είναι ευπαθή και μπορούν να παραμείνουν στο απόθεμα για συγκεκριμένο χρονικό διάστημα πριν μπορέσουν να πωληθούν.

Ένα τέτοιο προϊόν π.χ. είναι οι καθημερινές εφημερίδες. Μια τέτοια εφημερίδα δεν μπορεί να μείνει στο απόθεμα περισσότερο από μια ημέρα, διότι πρέπει να αντικατασταθεί με την εφημερίδα της επόμενης μέρας. Η ζήτηση της εφημερίδας είναι μια τυχαία μεταβλητή (όπως στο παράδειγμα), έτσι ο εφημεριδοπώλης θα πρέπει να παραγγέλνει τόσες εφημερίδες ώστε να καλύψει τη ζήτηση αυτή. Αν παραγγείλει περισσότερες εφημερίδες απ' ότι θα πουλήσει τότε θα ελαχιστοποιήσει το κέρδος του ή μπορεί να μην έχει και καθόλου (overordering),ενώ αν παραγγείλει λιγότερες θα χάσει πιθανό κέρδος (underordering).

Έτσι στην ενότητα αυτή θα αναπτύξουμε ένα νέο μοντέλο το οποίο θα μας επιτρέπει να υπολογίζουμε την καθημερινή βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας, η οποία θα μεγιστοποιεί τα κέρδη μας. Το μοντέλο αυτό ονομάζεται "**newsboy problem**". Μπορεί το παράδειγμα μας να αντιπροσωπεύει πολύ το μοντέλο αυτό, αλλά βρίσκει εφαρμογή και σε άλλα προϊόντα. Θα δούμε ορισμένα από αυτά παρακάτω.

Προϊόντα στα οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί το μοντέλο "newsboy problem"

Όπως αναφέραμε και πιο πριν υπάρχουν και άλλα προϊόντα που δεν μπορούν να μένουν στο απόθεμα για μεγάλο χρονικό διάστημα. Η μόνη διαφορά στη διαχείριση τους είναι το χρονικό αυτό διάστημα δηλαδή, κάποια μπορούν να παραμείνουν μία ημέρα, κάποια άλλα μια βδομάδα κ.ο.κ.

1. Περιοδικά και εφημερίδες
2. Τα λουλούδια που πουλάει ένας ανθοπώλης
3. Τα τρόφιμα που χρειάζεται ένα εστιατόριο
4. Τα φρούτα και λαχανικά ενός μανάβικου
5. Τα διάφορα εποχιακά είδη, όπως τα μαγιό ή τα παλτό, τα οποία στο τέλος της σεζόν πουλιούνται σε χαμηλές τιμές.
6. Χριστουγεννιάτικα δέντρα
7. Διάφορες κάρτες(Χριστουγεννιάτικες, Πασχαλινές)
8. Είδη ρουχισμού που δεν είναι πλέον στη μόδα.
9. Προϊόντα που θα είναι σε λίγο ξεπερασμένα (λόγω εξέλιξης της τεχνολογίας)

10. Κρατήσεις που παρέχονται από μια αεροπορική εταιρία για μια συγκεκριμένη πτήση. Οι κρατήσεις που παρέχονται σε υπερκράτηση σε σχέση με των αριθμό των θέσεων που υπάρχουν, μπορεί να θεωρηθεί ως απόθεμα ενός αναλλοίωτου προϊόντος (εισιτήρια που δεν μπορούν να πωληθούν μετά την πραγματοποίηση της πτήσης). Όπου η ζήτηση είναι ο αριθμός των επιβατών που δεν εμφανίστηκαν. Με αυτή την έννοια το κόστος υποκράτησης (λιγότερη υπερκράτηση) θα ήταν το χαμένο κέρδος από τις άδειες θέσεις. Έτσι το κόστος της υπερπαραγγελίας (πολλές υπερκρατήσεις) θα είναι το κόστος αποζημίωσης των πελατών

Το μοντέλο αυτό έχει βοηθήσει πολλές αεροπορικές εταιρίες και τους έχει μεγιστοποιήσει τα κέρδη. Γι' αυτό καταβάλλονται μεγάλες προσπάθειες για την βελτίωση αυτού του μοντέλου.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ: Μία εταιρία που κατασκευάζει ποδήλατα αποφασίζει να διακόψει την παραγωγή των μικρών κοριτσίστικων ποδηλάτων μίας ταχύτητας. Για να αδειάσει τις αποθήκες του αποφασίζει να κάνει στον αγοραστή του μία προσφορά και να του τα πουλήσει 20€ το τεμάχιο. Ο καταστηματάρχης σκέφτεται να επωφεληθεί από την προσφορά και να πουλήσει τα ποδήλατα στη τιμή των 45€ ώστε να έχει κέρδος 20€. Το κέρδος από θα το έχει μέχρι τη περίοδο των Χριστουγέννων, διότι μετά θα βγει στην αγορά το νέο μοντέλο. Αυτό σημαίνει ότι μπορεί να συνεχίσει να πουλάει το ποδήλατο, αλλά πλέον στην τιμή τον 10€ το τεμάχιο, με αποτέλεσμα να ανακτά το μισό του κόστος αγοράς τους. Λαμβάνοντας υπόψη αυτή την απώλεια, αν παραγγείλει δηλαδή, περισσότερα ποδήλατα απ' ότι θα πουλήσει ή αν παραγγείλει λιγότερα από την ζήτηση, ο καταστηματάρχης πρέπει να αποφασίσει την ποσότητα που θα παραγγείλει. Σε περίπτωση που δεν πουλήσει τα ποδήλατα μέχρι την περίοδο τον Χριστουγέννων επιβαρύνεται με ένα επιπλέον κόστος, το κόστος αποθήκευσης το οποίο εκτιμά ότι θα είναι 1€ το τεμάχιο. Έτσι αν πουλάει τα ποδήλατα μετά τα Χριστούγεννα θα έχει τελικά έσοδο 9€ το τεμάχιο, αφού 10€ το τεμάχιο μείον το κόστος αποθήκευσης που είναι 1€.

Στην εφαρμογή υπάρχουν κυρίως δύο κόστη, το κόστος έλλειψης και το κόστος αν πουλήσει τα ποδήλατα μετά την Χριστουγεννιάτικη περίοδο. Αν η ζήτηση υπερβεί την προσφορά και οι καταναλωτές δεν μπορούν να καλύψουν τις ανάγκες τους τότε προκύπτει ένα επιπλέον κόστος λόγω της δυσαρέσκειας τους. Αυτό το κόστος αντιπροσωπεύει ανικανοποίητη ζήτηση οποτεδήποτε πραγματοποιείται μια έλλειψη. Το κόστος αυτό είναι αμελητέο.

Αν υιοθετήσουμε το κριτήριο μεγιστοποίησης του κέρδους, πρέπει να συμπεριλάβουμε σε αυτό και το έσοδο που προκύπτει και μετά την λήξη τις περιόδου. Το συνολικό κόστος περιλαμβάνει τα έσοδα μείον τα έξοδα (κόστος παραγγελίας, κόστος αποθήκευσης, κόστος έλλειψης).

Αν δεν έχουμε αρχικό απόθεμα, το κέρδος αυτό ισούται με:

ΚΕΡΔΟΣ = 45€ * πλήθος ποδηλάτων που πουλήθηκαν

- 20€ * πλήθος που αγοράστηκαν

\+ 9€ * πλήθος απούλητων στην αποθήκη

Έστω y ο αριθμός ποδηλάτων που αγόρασε ο καταστηματάρχης και D η ζήτηση των ποδηλάτων στο κατάστημα (είναι τυχαία μεταβλητή) τέτοια ώστε

Min {D , y} = αριθμός ποδηλάτων που πωλήθηκαν

Max {0 , y- D} = αριθμός ποδηλάτων που τελικά δεν πωλήθηκαν

Τότε προκύπτει,

ΚΕΡΔΟΣ =45 Min {D , y} - 20y + 9 Max {0 , y- D}

Ο όρος 45 Min {D , y} μπορεί να γραφτεί και ως εξής

45 Min {D , y} = 45 D - 45 Max {0 , D - y}

Ο όρος 45 Max {0 , D - y} αντιπροσωπεύει την απώλεια εσόδων από την ανικανοποίητη ζήτηση. Αυτή η απώλεια μαζί με την δυσαρέσκεια των πελατών (είναι αμελητέα σε αυτό το παράδειγμα) θα θεωρηθούν ως κόστη έλλειψης σε όλη αυτή την ενότητα.

Το 45 D είναι ανεξάρτητο της πολιτικής αποθέματος (η τιμή του y έχει επιλεγεί), έτσι μπορεί να διαγραφεί από την αντικειμενική συνάρτηση. Που σημαίνει:

ΣΧΕΤΙΚΟ ΚΕΡΔΟΣ = - 45 Max {0 , D - y} - 20y + 9 Max {0 , y- D}

για να μεγιστοποιηθεί. Όλοι οι όροι στο δεξί μέρος της ισότητας είναι αρνητικά κόστη, δηλαδή το κόστος έλλειψης, το κόστος παραγγελίας και το κόστος αποθήκευσης (το οποίο έχει αρνητική τιμή εδώ), αντίστοιχα. Έτσι, αντί να μεγιστοποιήσουμε την αρνητική τιμή του συνολικού κόστους, θα κάνουμε το ισοδύναμο του, δηλαδή θα το ελαχιστοποιήσουμε.

ΣΥΝΟΛΙΚΟ ΚΟΣΤΟΣ = 45 Max {0 , D - y} + 20y - 9 Max {0 , y- D}

Αφού το συνολικό κόστος είναι τυχαία μεταβλητή (επειδή η ζήτηση είναι τυχαία μεταβλητή) ο στόχος του μοντέλου είναι να ελαχιστοποιήσουμε το συνολικό κόστος. Στον υπολογισμό του συνολικού κόστος δεν λαμβάνουμε υπόψη την ανικανοποίητη ζήτηση. Αν μπορούσαμε να καλύψουμε τις ανάγκες των καταναλωτών με μία παραγγελία που θα δίναμε προτεραιότητα, τότε τα έσοδα του καταστηματάρχη θα υπολογίζονταν από τη τιμή πώλησης ενός ποδηλάτου επί τη ζήτηση μείον το κόστος μιας μονάδας της διανομής κατά προτεραιότητα επί την ανικανοποίητη ζήτηση όταν συμβαίνει μια έλλειψη. Αν ο καταστηματάρχης μπορούσε να καλύψει την ανικανοποίητη ζήτηση αγοράζοντας από τον κατασκευαστή προς 35€ το τεμάχιο και επιβαρυνόταν με ένα επιπλέον κόστος των 2€ το τεμάχιο για την γρήγορη παραλαβή, τότε το κόστος έλλειψης θα γινόταν 37€ το ποδήλατο (αν υπήρχε κόστος που σχετίζεται με τη καλή θέληση θα συμπεριλαμβανόταν και αυτό στο κόστος).

Ο καταστηματάρχης δεν ξέρει ποια θα είναι η ζήτηση για αυτά τα ποδήλατα, η ζήτηση είναι τυχαία μεταβλητή. Παρόλα αυτά μια Βέλτιστη Πολιτική Αποθέματος μπορεί να επιτευχθεί εάν έχουμε πληροφορίες για πιθανότητα κατανομής της ζήτησης. Έχουμε

$$P_D(d) = P\{D = d\}$$

Έστω ότι $P_D(d)$ γνωστό για τις διάφορες τιμές του d.

Υποθέσεις

1) Κάθε εφαρμογή ασχολείται μόνο με ένα αναλλοίωτο προϊόν.
2) Η ανάλυση μπορεί να εφαρμοστεί για μία μόνο περίοδο, αφού το προϊόν δεν μπορεί να πωληθεί μετά.
3) Επιτρέπεται να διαθέσουμε τα προϊόντα που έχουν μείνει στο απόθεμα στο τέλος της περιόδου, ώστε να έχουμε κάποιο μικρό έσοδο.
4) Δεν έχουμε αρχικό απόθεμα.
5) Τη μόνη απόφαση που πρέπει να πάρουμε είναι τιμή του y, δηλαδή την ποσότητα που πρέπει να παραγγείλουμε ή να παράγουμε στην αρχή κάθε περιόδου.
6) Η ζήτηση, για να πάρουμε μονάδες από το απόθεμα ώστε να τις πουλήσουμε (ή για οποιοδήποτε άλλο σκοπό) κατά τη διάρκεια της περιόδου είναι τυχαία μεταβλητή. Παρόλα αυτά, η πιθανότητα κατανομής της ζήτησης είναι γνωστή (ή μπορούμε να την υπολογίσουμε).
7) Μετά τη διαγραφή των εσόδων, εάν η ζήτηση είχε ικανοποιηθεί (αφού αυτή είναι ανεξάρτητη από την απόφαση y), ο στόχος είναι να ελαχιστοποιήσουμε το αναμενόμενο συνολικό κόστος, όπου η συνιστώσες του κόστους είναι:

c = το κόστος παραγωγής ή παραγγελίας μιας μονάδας
h = κόστος αποθήκευσης μιας μονάδας στο τέλος κάθε περιόδου
p = κόστος έλλειψης μίας μονάδας ανικανοποίητης ζήτησης (περιλαμβάνει την απώλεια κέρδους αν τα πουλήσει μετά την περίοδο)

Ανάλυση του μοντέλου

Η απόφαση για την τιμή του y, την ποσότητα του αποθέματος που θα αποκτήσουμε, εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την πιθανότητα κατανομής της ζήτησης D. Περισσότερη από την αναμενόμενη ζήτηση μπορεί να είναι επιθυμητή, αλλά πιθανώς λιγότερη από τη μέγιστη δυνατή ζήτηση. Χρειάζεται μια αντιστάθμιση μεταξύ (1) του ρίσκου να έχεις έλλειμμα και επομένως να προκληθεί κόστος έλλειψης (2) του ρίσκου να έχεις πλεόνασμα και να προκληθεί άσκοπο κόστος της παραγγελίας και αποθήκευσης επιπλέον μονάδων. Αυτό επιτυγχάνεται με την ελαχιστοποίηση της αναμενόμενης τιμής (με τη στατιστική έννοια) του συνόλου των δαπανών αυτών.
Η ποσότητα που πουλήθηκε δίνεται από:

$$\operatorname{Min}\{D , y\} = \begin{cases} D & ,\text{αν } D < y \\ y & ,\text{αν } D \geq y \end{cases}$$

Επομένως αν η ζήτηση είναι D και

$$C (y) = E[C (D , y)] =$$

$$= \sum_{d=0}^{\infty} (cy + p \max\{0, d - y\} + h \max\{0, y - D\}$$

Επειδή η ζήτηση είναι μια τυχαία μεταβλητή (με κατανομή πιθανότητας P_D (d), το κόστος αυτό είναι επίσης μια τυχαία μεταβλητή. Το αναμενόμενο κόστος δίνεται από το C (y), όπου

$$C (y) = E[C (D , y)] =$$

$$= \sum_{d=0}^{\infty}(cy + p\max\{0, d-y\} + h\max\{0, y-D\}\, P_D(d)$$

$$= cy + \sum_{d=y}^{\infty} p(d-y)\, P_D(d) + \sum_{d=0}^{\infty} h(y-d) P_D(d)$$

Η συνάρτηση C (y) εξαρτάται από την κατανομή πιθανότητας της ζήτησης. Συχνά, μια αναπαράσταση αυτής της κατανομής πιθανοτήτων είναι δύσκολο να βρεθεί, ιδίως όταν η ζήτηση κυμαίνεται πάνω από ένα μεγάλο αριθμό πιθανών τιμών. Επομένως, αυτή η διακριτή τυχαία μεταβλητή συχνά προσεγγίζεται από μια συνεχή τυχαία μεταβλητή. Επιπλέον όταν η ζήτηση κυμαίνεται πάνω από ένα μεγάλο αριθμό πιθανών τιμών, αυτή η προσέγγιση θα αποδώσει μια σχεδόν ακριβή τιμή του βέλτιστου επίπεδου αποθέματος που θα πρέπει να έχουμε. Επομένως, εκτός και αν οριστεί διαφορετικά, θεωρούμε ότι η ζήτηση είναι συνεχής σε όλη την υπόλοιπη ενότητα.

Για αυτή τη συνεχή τυχαία μεταβλητή D, έχουμε

$\varphi_D(\xi)$ = συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) του D

και

Φ(α) = αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.) ή συνάρτηση κατανομής (σ.κ.) του D.

Έτσι,

$$\Phi(\alpha) = \int_0^{\alpha} 1\, \varphi_D(\xi) d\xi \quad (1)$$

Όταν επιλέγουμε μια ποσότητα παραγγελίας y, η συνάρτηση κατανομής $\Phi(y)$ γίνεται η πιθανότητα ότι μια έλλειψη δεν θα συμβεί πριν το τέλος της περιόδου. Όπως και στην προηγούμενη ενότητα, η πιθανότητα αυτή αναφέρεται ως το επίπεδο εξυπηρέτησης που παρέχετε από την ποσότητα παραγγελίας. Το αντίστοιχο αναμενόμενο κόστος C (y) εκφράζεται ως

$$C(y) = E[C(D, y)] = \int_0^{\infty} C(\xi, y)\, \varphi_D(\xi) d\xi$$

$$= \int_0^{\infty}(cy + p\max\{0, \xi-y\} + h\max\{0, y-\xi\})\, \varphi_D(\xi) d\xi$$

$$= cy + \int_y^{\infty} p(\xi-y)\, \varphi_D(\xi) d\xi + \int_0^{y} h(y-\xi)\, \varphi_D(\xi) d\xi$$

$$= cy + L(y)$$

Όπου L(y) αποκαλούμε την αναμενόμενη έλλειψη μαζί με το κόστος αποθήκευσης. Στη συνέχεια καθίσταται απαραίτητο να βρεθεί η τιμή του y, την ονομάζουμε y^0, η οποία ελαχιστοποιεί το C (y). Η Βέλτιστη Ποσότητα Παραγγελίας y^0 είναι η τιμή που ικανοποιεί τη σχέση:

$$\Phi(y^0) = \frac{p-c}{p+h}$$

Επομένως, $\Phi(y^0)$ είναι το βέλτιστο επίπεδο εξυπηρέτησης και η αντίστοιχη ποσότητα επιπέδου παραγγελίας y^0 μπορούν να βρεθούν είτε λύνοντας την αλγεβρική τους εξίσωση είτε σχεδιάζοντας τη συνάρτηση κατανομής και υπολογίζοντας το y^0 από τη γραφική παράσταση. Για να ερμηνεύσουμε τη δεξιά πλευρά της εξίσωσης αυτής, μπορεί να θεωρηθεί ο αριθμητής ως:

p – c = κόστος μιας μονάδας υποπαραγγελίας
=μείωση των κερδών που προκύπτει επειδή δεν παραγγείλαμε μια μονάδα προϊόντος που θα μπορούσε να είχε πωληθεί κατά τη διάρκεια της περιόδου

Ομοίως,

c + h= κόστος μιας μονάδας υπερπαραγγελίας
=μείωση στο κέρδος που προκύπτει από την παραγγελία μιας μονάδας που δεν μπόρεσε να πωληθεί κατά τη διάρκεια της περιόδου

Αν ορίσουμε τα παραπάνω κόστη ως C_{under} και C_{over} αντίστοιχα, τότε η εξίσωση μας μπορεί να γραφτεί και ως:

$$\text{Βέλτιστο Επίπεδο Εξυπηρέτησης} = \frac{\text{Cunder}}{\text{Cover}+\text{Cunder}}.$$

Έστω ότι η ζήτηση είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή, που έχει συνάρτηση κατανομής

$$F_D(b) = \sum_{d=0}^{b} P_D(d),$$

προκύπτει ένα παρόμοιο αποτέλεσμα για την βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας. Συγκεκριμένα, η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας y^0 είναι ο μικρότερος ακέραιος για τον οποίο ισχύει :

$$F_D\,(y^0) \geq \frac{p-c}{p+h}$$

Όλα τα παραπάνω μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην επίλυση διαφόρων προβλημάτων. Ας δούμε λοιπόν ποιο είναι το βέλτιστο επίπεδο παραγγελίας στη εφαρμογή με τον καταστηματάρχη και τα ποδήλατα.

Λύση του παραδείγματος με τη βοήθεια της μεθοδολογίας

Όπως προαναφέραμε ο καταστηματάρχης θέλει να εκμεταλλευτεί την προσφορά και να αγοράσει τα ποδήλατα. Αν υποθέσουμε ότι η ζήτηση είναι μια εκθετική κατανομή με μέση τιμή 10.000, και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνεται από:

$$\varphi_D(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{10.000}\, e^{-\frac{\xi}{10.000}} & ,\text{αν } \xi \geq 0 \\ 0 & ,\text{αλλιώς} \end{cases}$$

και η συνάρτηση κατανομής

$$\Phi(\alpha) = \int_0^{\alpha} 1\, \frac{1}{10.000}\, e^{-\frac{\xi}{10.000}}\, d\xi = 1 - e^{-\frac{a}{10.000}}.$$

Και γνωρίζουμε ότι:

$$C = 20, \qquad p = 45, \qquad h = -9$$

Οπότε, η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας y^0 είναι η τιμή που ικανοποιεί τη σχέση:

$$1 - e^{-\frac{y^0}{10.000}} = \frac{45-20}{45-9} = 0,69444$$

$$e^{-\frac{y^0}{10.000}} = 1 - 0,69444$$

$$e^{-\frac{y^0}{10.000}} = 0{,}30556$$

$$\ln e^{-\frac{y^0}{10.000}} = \ln 0{,}30556$$

$$-\frac{y^0}{10.000} = -1{,}1856$$

$$y^0 = 11.856$$

Άρα ο καταστηματάρχης θα πρέπει να αγοράσει συνολικά 11.856 ποδήλατα. Να σημειωθεί ότι η τιμή αυτή είναι μεγαλύτερη από τη μέση ζήτηση. Όταν η ζήτηση είναι εκθετική με προσδοκία, τότε το y^0 μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση:

$$y^0 = -\lambda \ln \frac{c+h}{p+h}\ .$$

Το μοντέλο με αρχικό επίπεδο αποθέματος

Στην εφαρμογή μας ο καταστηματάρχης δεν είχε αρχικό απόθεμα. Αν αλλάξουμε την προϋπόθεση αυτή και πούμε ότι ο καταστηματάρχης μας είχε αρχικά 500 ποδήλατα στις αποθήκες.

Αν το αρχικό επίπεδο αποθέματος δίνεται από το x και η απόφαση που πρέπει να παρθεί είναι η τιμή του y, το επίπεδο αποθέματος μετά την αναπλήρωση της παραγγελίας (ή παραγωγής) πρόσθετων μονάδων. Έτσι y- x είναι η ποσότητα που πρέπει να παραγγείλουμε έτσι ώστε,

Διαθέσιμο ποσό (y)=

αρχικό απόθεμα(x) + ποσό που παραγγείλαμε (y- x)

Η εξίσωση του κόστους που ορίσαμε προηγουμένως παραμένει ίδια εκτός από τον όρο c·y. Ο όρος αυτός γίνεται c (y – x), ώστε να ελαχιστοποιείται το αναμενόμενο κόστος, οπότε

$$\min_{y\geq x}\left[c\,(y-x) + \int_y^{\infty} p(\xi - y)\varphi_D\,(\xi)d\xi + \int_0^{y} h(y-\xi)\ \varphi_D\,(\xi)d\xi\right]$$

Το $y \geq x$ επειδή το επίπεδο αποθέματος y δεν μπορεί να είναι λιγότερο από την αρχική ποσότητα x.

Η πολιτική Βέλτιστης Ποσότητας Αποθέματος είναι η εξής:

Αν $x = \begin{cases} < y^0 & \text{,για } y^0 - x \text{ θέτω το επίπεδο αποθέματος μεγαλύτερο του } y^0 \\ \geq y^0 & \text{,δεν παραγγέλνουμε} \end{cases}$

Όπου το y^0 ικανοποιεί τη

$$\Phi(y^0) = \frac{p-c}{p+h}.$$

Έτσι, αν στην εφαρμογή μας αν είχαμε αρχικά 500 ποδήλατα, η Βέλτιστη πολιτική που θα πρέπει ακολουθηθεί είναι να έχουμε στο απόθεμα 11.856 ποδήλατα (που σημαίνει ότι πρέπει να παραγγείλουμε ακόμα 11.356 ποδήλατα). Αν όμως είχαμε αρχικά ήδη 12.000 ποδήλατα, η βέλτιστη πολιτική θα είναι να μην παραγγείλουμε άλλα.

Υπολογισμός της Βέλτιστης Πολιτικής

Ξεκινάμε με την παραδοχή ότι το αρχικό επίπεδο αποθέματος είναι μηδενικό.

Για οποιαδήποτε c_1 και c_2 θετικά, καθορίζουμε g(ξ,y)

$$g(\xi,y) = \begin{cases} c_1(y-\xi) & \text{,αν } y > \xi \\ c_2(\xi - y) & \text{,αν } y \leq \xi \end{cases}$$

και

$$G(y) = \int_0^\infty g(\xi, y)\, \varphi_D(\xi)\, d\xi + cy$$

Όπου c>0. Το G(y) ελαχιστοποιείται όταν $y = y^0$, όπου y^0 είναι η λύση του

$$\Phi\,(y^0) = \frac{c_2 - c}{c_2 + c_1}$$

Γιατί όμως το y^0 ελαχιστοποιεί το G(y);

Εξ' ορισμού

$$G(y) = c_1 \int_0^{y} (y - \xi)\varphi_D(\xi)\, d\xi + c_2 \int_y^{\infty} (\xi - y)\varphi_D(\xi)\, d\xi + cy$$

Αν παραγωγίσουμε την συνάρτηση ως προς y και την πάρουμε ίση με το μηδέν, προκύπτει:

$$\frac{dG(y)}{dy} = c_1 \int_0^{y} \varphi_D(\xi)\, d\xi + c_2 \int_y^{\infty} \varphi_D(\xi)\, d\xi + c = 0$$

Από την (1) έχουμε ότι:

$$\Phi(\alpha) = \int_0^{\alpha} \varphi_D(\xi) d\xi$$

και

$$\int_0^{\infty} \varphi_D(\xi)\, d\xi = 1$$

Οπότε

$$c_1\, \Phi(y^0) - c_2\, [1 - \Phi(y^0)] + c = 0$$

$$c_1\, \Phi(y^0) - c_2 + c_2\, \Phi(y^0) + c = 0$$

$$\Phi(y^0)(c_1 + c_2) = - c + c_2$$

$$\Phi(y^0) = \frac{c_2 - c}{c_1 + c_2}$$

Αν θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε το G(y) θα πρέπει να υπολογίσουμε και τη δεύτερη παράγωγο.

Οπότε $\frac{d}{dy}\frac{dG(y)}{dy} = (c_1 + c_2)\, \varphi_D(y) \geq 0$,για κάθε y

Να εφαρμόσουμε αυτό το αποτέλεσμα. Αρκεί να δείξουμε ότι:

$C(y) = \int_o^y h(y-\xi)\varphi_D(\xi)\,d\xi + c_2\int_y^\infty p(\xi-y)\varphi_D(\xi)\,d\xi + cy$

Έχει τη μορφή της G(y), αν αντικαταστήσουμε c_2=p, c_1=h και c = c έτσι ώστε η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας y^0 να είναι η τιμή που ικανοποιεί

$$\Phi(y^0) = \frac{p-c}{p+h}$$

Αν θελήσουμε να βρούμε τη βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας, όταν έχουμε αρχικό απόθεμα x >0 θα πρέπει να λύσουμε τη σχέση:

$\min_{y\geq x}\{-cx + [\int_y^\infty p(\xi-y)\varphi_D(\xi)d\xi + \int_0^y h(y-\xi)\varphi_D(\xi)d\xi + cy]\}$

Παρατηρούμε ότι μέσα στην παρένθεση βρίσκεται το G(y), με c_2=p, c_1=h και c = c. Οπότε μπορεί να γραφτεί

$$\min_{y\geq x}\{-cx + G(y)\}$$

Επειδή – c x είναι μια σταθερά, είναι αναγκαίο να προσδιορίσουμε την τιμή του y που ελαχιστοποιεί την έκφραση:

$$\min_{y\geq x} G(y)$$

Επομένως, η τιμή y^0 που ελαχιστοποιεί το G(y) ικανοποιεί:

$$\Phi(y^0) = \frac{p-c}{p+h}$$

Η G(y) πρέπει να είναι μια κυρτή συνάρτηση, γιατί

$$\frac{d}{dy}\frac{dG(y)}{dy} \geq 0$$

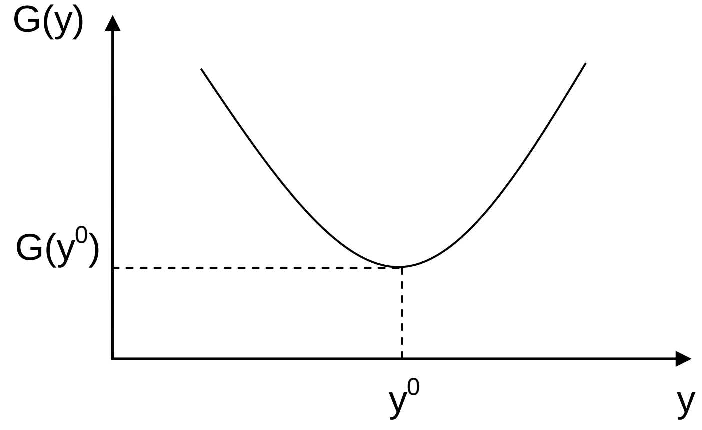
Επίσης,

$$\lim_{y\to 0}\frac{dG(y)}{dy} = c - p$$

Το οποίο έχει αρνητική τιμή, και

$$\lim_{y\to\infty} \frac{\mathrm{dG(y)}}{\mathrm{dy}} = \mathrm{c} + \mathrm{h}$$

Το οποίο είναι θετικό. Όμως είπαμε ότι η G(y) πρέπει να είναι μια κυρτή συνάρτηση όπως στο ακόλουθο σχήμα.



Γραφική παράσταση της G(y) στοχαστικού μοντέλου μιας περιόδου

Έτσι, η βέλτιστη πολιτική δίνεται από:

Αν $x<y^0$, παραγγέλνοντας y^0- x το επίπεδο αποθέματος θα φτάσει στο επίπεδο y^0, επειδή y^0 μπορεί να επιτευχθεί μόνο αν ταυτόχρονα ελαχιστοποιήσουμε τη τιμή $G(y^0)$.

Αν $x \geq y^0$, μη παραγγείλετε για κάθε G(y) με y> x πρέπει να υπερβαίνει το G(x).

Ένα παρόμοιο επιχείρημα μπορεί να κατασκευαστεί για να αποκτήσουμε τη βέλτιστη πολιτική στο παρακάτω μοντέλο, αν το κόστος είναι μη γραμμικό.

Μοντέλο με μη- γραμμικό κόστος

Παρόμοια αποτελέσματα γι' αυτά τα μοντέλα, μπορούν να εξαχθούν για τα μη- γραμμικά κόστη αποθήκευσης και έλλειψης.

Έστω ότι το κόστος αποθήκευσης

h [y-D] ,αν y ≥ D

0 ,αν y < D

Όπου h [·] είναι μια μαθηματική συνάρτηση, όχι απαραίτητα γραμμική.

Παρόμοια μπορούμε να θεωρήσουμε το κόστος έλλειψης ως:

p [D-y] ,αν D ≥ y

0 ,αν D < y

Όπου p [·] επίσης μαθηματική συνάρτηση όχι απαραίτητα γραμμική.

Επομένως το συνολικό αναμενόμενο κόστος δίνεται από:

$$c\,(y-x) + \int_y^{\infty} p(\xi - y)\varphi_D(\xi)d\xi + \int_0^y h[\,y - \xi]\ \varphi_D\,(\xi)d\xi$$

όπου x είναι αρχικό απόθεμα.

Εάν L(y) οριστεί ως το αναμενόμενο κόστος αποθήκευσης και έλλειψης, δηλαδή

$$L(y) = \int_y^{\infty} p\ [\xi - y]\varphi_D\ (\xi)d\xi + \int_0^y h\ [y - \xi]\varphi_D\ (\xi)d\xi$$

Τότε το συνολικό αναμενόμενο κόστος μπορεί να γραφτεί ως

$$c\ (y - x) + L(y)$$

Η βέλτιστη πολιτική επιτυγχάνεται με το να ελαχιστοποιήσουμε αυτή τη συνάρτηση, η οποία υπόκειται στο περιορισμό ότι y ≥ x, έτσι,

$$\min_{y \geq x}\{\,c(y - x) + L(y)\}$$

Αν L(y) είναι κυρτή (μη ικανοποιητική κατάσταση που σημαίνει ότι το κόστος αποθήκευσης και το κόστος έλλειψης είναι το καθένα κυρτό και $\varphi_D\,(\xi)>0$) τότε η βέλτιστη πολιτική είναι:

Αν $x = \begin{cases} < y^0, & \text{παρήγγειλλε } y^0 - x \text{ για να φέρεις το επίπεδο αποθέματος πάνω από το } y \\ \geq y^0, & \text{μη παραγγείλετε} \end{cases}$

Όπου y^0 η τιμή του y που ικανοποιεί τη συνάρτηση

$$\frac{dG(y)}{dy} + c = 0.$$

Μοντέλο απλής- περιόδου με κόστος παραγγελίας

Στην εφαρμογή με τα ποδήλατα υποθέσαμε ότι δεν υπήρχε κόστος παραγγελίας κατά την παραγγελία των ποδηλάτων για τα Χριστούγεννα. Αν αλλάξουμε την υπόθεση αυτή και υποβάλουμε κόστος παραγγελίας 800€ , τότε αυτό το κόστος θα πρέπει να περιλαμβάνεται στην ανάλυση του μοντέλου. Όμως το να συμπεριλάβουμε το κόστος παραγγελίας προκαλεί σημαντικές αλλαγές στο αποτέλεσμα.

Το κόστος παραγγελίας συμβολίζεται με K, το κόστος αυτό μαζί με το κόστος έλλειψης τα θεωρούμε γραμμικά. Το αποτέλεσμα που προκύπτει στη συνέχεια δίνεται από το L (y), όπου

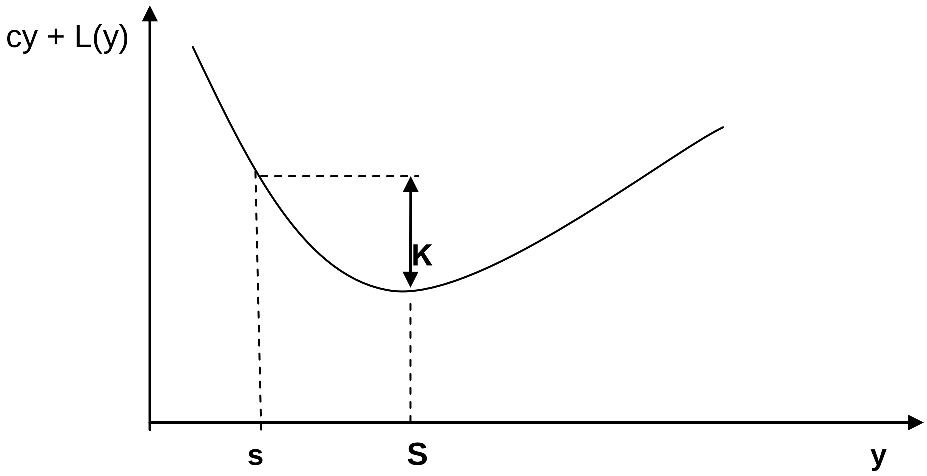
$$L(y) = p \int_y^{\infty} (\xi - y)\, \varphi_D(\xi)\, d\xi + h\int_0^{y} (y - \xi)\, \varphi_D(\xi)\, d\xi$$

Επομένως, το συνολικό αναμενόμενο κόστος που επιβλήθηκε, με το να ανεβάσουμε το επίπεδο αποθέματος στο y δίνεται από:

$K + c(y - x) + L(y)$, αν $y > x$

$L(x)$, αν $y = x$

Το $cy + L(y)$ είναι το ίδιο αναμενόμενο κόστος που υπολογίστηκε νωρίτερα όταν το κόστος παραγγελίας είχε παραλειφθεί. Αν το $cy + L(y)$ σχεδιαστεί σε συνάρτηση του y θα φαίνεται όπως στο παρακάτω σχήμα



Γραφική παράσταση της συνάρτησης cy + L(y) μοντέλο μονής περιόδου με κόστος παραγγελίας

Ορίζουμε ως S τη τιμή του y που ελαχιστοποιεί τη cy + L(y), και ως s ορίζουμε τη μικρότερη τιμή του y για κάθε

$$c\,s + L\,(S) = K + c\,S + L\,(S)$$

Από τη γραφική παράσταση μπορούμε να δούμε ότι

Αν $x > S$, τότε $K + cy + L\,(y) > c\,x + L\,(x)$, για όλα τα $y>x$

Έτσι

$$K + c\,(y-x) + L\,(y) > L\,(x)$$

Το αριστερό μέλος της τελευταίας ανισότητας αντιπροσωπεύει το συνολικό αναμενόμενο κόστος του να παραγγείλουμε το y-x για να ανεβάσουμε το επίπεδο αποθέματος στο y. Ενώ η δεξιά πλευρά της ανισότητας αντιπροσωπεύει το συνολικό αναμενόμενο κόστος αν δεν συμβεί η παραγγελία. Επομένως, η βέλτιστη πολιτική υποδεικνύει ότι αν $x > S$, να μην παραγγείλουμε.

Αν $s \le x \le S$, μπορεί να φανεί και από το γράφημα ότι τότε

$K + cy + L\,(y) \ge c\,x + L\,(x)$, για όλα τα $y>x$,

έτσι ώστε

$$K + c\,(y-x) + L\,(y) \ge L\,(x)$$

Η μη παραγγελία είναι λιγότερο ακριβή από τη παραγγελία.

Τελικά, αν x < s, συμπεραίνουμε από το γράφημα ότι

$$\min_{y\geq x}\{\mathrm{K}+\mathrm{cy}+\mathrm{L(y)}\}=\mathrm{K}+\mathrm{c}S+\mathrm{L}(S)<cx+L(x)$$

ή

$$\min_{y\geq x}\{\mathrm{K}+\mathrm{c(y-x)}+\mathrm{L(y)}\}\ =\mathrm{K}+\mathrm{c}(S-\mathrm{x})+\mathrm{L}(S)<L(x)$$

Αποδίδει να παραγγείλεις. Έχουμε το ελάχιστο κόστος όταν το απόθεμα φτάσει στο επίπεδο S.

Η βέλτιστη πολιτική αποθέματος είναι η ακόλουθη:

Αν x $\begin{cases} <s & \text{, παραγγέλνουμε S-x για να φτάσει το απόθεμα στο επίπεδο S} \\ \geq s & \text{, δεν παραγγέλνουμε} \end{cases}$

Η τιμή S δίνεται από

$$\Phi(s)=\frac{\mathrm{p-c}}{\mathrm{p+h}}$$

και το s είναι η μικρότερη τιμή που ικανοποιεί την εξίσωση

$$\mathrm{cs}+\mathrm{L}(S)=\mathrm{K}+\mathrm{c}S+\mathrm{L}(S)$$

Αυτή η πολιτική αναφέρεται ως (s,S) και έχει μεγάλη εφαρμογή στη Βιομηχανία.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ: Θα αναφερθούμε και πάλι στην εφαρμογή με τα ποδήλατα. Υπολογίσαμε νωρίτερα ότι

$$y^0 = S = 11.856$$

Αν γνωρίζουμε ότι K=800, c=20, p=45, και h=-9

Τότε

$$20s+45\int_s^{\infty}(\xi-s)\frac{1}{10000}\,e^{-\xi/10000}d\xi$$

$$-9\int_0^{x}(s-\xi)\,\frac{1}{10000}\,e^{-\xi/10000}=$$

$$=800+20(11.856)+45\int_{11.856}^{\infty}(\xi-11.856)\frac{1}{10000}e^{-\xi/10000}d\xi$$

$$-9\int_0^{11.856}(11.856-\xi)\frac{1}{10000}e^{-\xi/10000}d\xi$$

Άρα s=10.674

Επομένως, η Βέλτιστη πολιτική υποδεικνύει να ανεβάσουμε το επίπεδο αποθέματος στο S= 11.856 ποδήλατα εάν το αρχικό απόθεμα είναι λιγότερο από s=10.674, διαφορετικά δεν γίνεται παραγγελία.

Λύση όταν η κατανομή της ζήτησης είναι εκθετική

Αν η κατανομή της ζήτησης μας είναι εκθετική, δηλαδή,

$$\varphi_D(\xi)=ae^{-\alpha\xi}\,,\quad \text{για } \xi\geq 0$$

το αποτέλεσμα που είχε προκύψει όταν δεν είχαμε κόστος παραγγελίας είναι,

$$S=\frac{1}{a}\ln\frac{h+p}{p+c}$$

Για κάθε y,

$$cy+L(y)=cy+h\int_0^{y}(y-\xi)\alpha\,e^{-\alpha\xi}d\xi+p\int_y^{\infty}(\xi-y)\,\alpha e^{-\alpha\xi}\,d\xi$$

$$=(c+h)y+\frac{1}{a}(h+p)\,e^{-\alpha y}-\frac{h}{a}$$

Ας δούμε τι κάνει η cy+ L (y) στα σημεία y =s και y =S

$$(c + h)\, s + \frac{1}{a}(h + p)\, e^{-\alpha s} - \frac{h}{a} = K + (c + h)\, S + \frac{1}{a}(h + p)\, e^{-\alpha S} - \frac{h}{a},$$

ή

$$(c + h)\, s + \frac{1}{a}(h + p)\, e^{-\alpha S} = K + (c + h)\, S + \frac{1}{a}(h + c)$$

Παρόλο που η τελευταία εξίσωση δεν έχει κλειστή - μορφή λύσης, αυτό μπορεί να λυθεί αριθμητικά πολύ εύκολα. Μια κατά προσέγγιση αναλυτική λύση μπορεί να ληφθεί ως εξής. Θέτοντας

$$\Delta = S - s$$

Η τελευταία εξίσωση μας δίνει:

$$e^{\alpha\Delta} = \frac{\alpha K}{c + h} + \alpha\Delta + 1,$$

Αν α·Δ είναι κοντά στο μηδέν, η $e^{\alpha\Delta}$ μπορεί να επεκταθεί σε μια σειρά Taylor γύρω από το μηδέν. Εάν παραλείψουμε τους όρους πέρα από τον τετραγωνικό όρο, το αποτέλεσμα γίνεται

$$1 + \alpha\Delta + \frac{\alpha^2\Delta^2}{2} \cong \frac{\alpha K}{c + h} + \alpha\Delta + 1$$

Οπότε

$$\Delta = \sqrt{\frac{2K}{\alpha(c + h)}}$$

Χρησιμοποιώντας αυτή την προσέγγιση στην εφαρμογή με τα ποδήλατα προκύπτει ότι

$$\Delta = \sqrt{\frac{2 \cdot 10.000 \cdot 800}{20 - 9}} = 1206$$

Παρατηρούμε ότι η λύση αυτή είναι πολύ κοντά στην βέλτιστη λύση Δ = 1182.

Μοντέλο με μη- γραμμικά κόστη

Τα αποτελέσματα αυτά μπορούν να επεκταθούν σε περίπτωση που η αναμενόμενη έλλειψη μαζί με το κόστος αποθήκευσης L(y) είναι μια συνάρτηση αυστηρά κυρτή. Η επέκταση αυτή έχει ως αποτέλεσμα μια αυστηρά κυρτή cy+ L(y) (όπως στη γραφική παράσταση που παρουσιάσαμε νωρίτερα.

Για αυτό το μοντέλο, η βέλτιστη πολιτική αποθέματος έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\text{Αν} \quad x \begin{cases} < s & \text{, παραγγέλνουμε S-x για να φτάσει το απόθεμα} \\ & \text{στο επίπεδο S} \\ \geq s & \text{, δεν παραγγέλνουμε} \end{cases}$$

όπου S είναι η τιμή του y που ικανοποιεί

$$\frac{dL(y)}{dy} + c = 0$$

και s είναι η μικρότερη τιμή που ικανοποιεί την έκφραση

$$cs + L\ (s) = K + cS + L\ (S)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5:
ABC ΑΝΑΛΥΣΗ

5.1 Τι είναι η ABC ΑΝΑΛΥΣΗ;

5.1.1 Εισαγωγή

Η ανάλυση ABC ή αρχή του Pareto, πήρε το όνομα της από τον ιταλό Vilfredo Pareto, ο οποίος παρατήρησε ότι το 20% του πληθυσμού κατέχει το 80% του ιταλικού πλούτου, γι' αυτό ορισμένες φορές καλείται και ως κανόνας 80/20. Γενικότερα ο Pareto παρατήρησε ότι ένας μικρός αριθμός καταστάσεων σε ένα πληθυσμό, πολύ συχνά, κυριαρχεί στα τελικά αποτελέσματα που έχουν επιτευχθεί. Ο Κανόνας 80-20 μπορεί να εφαρμοστεί σε οτιδήποτε, από την επιστήμη του μάνατζμεντ μέχρι το φυσικό κόσμο.

Η παρατήρηση του Pareto δεν βρήκε άμεση εφαρμογή παρά μόνο την δεκαετία του '50 που χρησιμοποιήθηκε στην αρχή διαχείρισης αποθεμάτων. Οι ομοιότητες μεταξύ της διανομής του πλούτου και της αξίας των στοιχείων του αποθέματος ήταν εντυπωσιακές. Ελέγχοντας επομένως λίγα αλλά σημαντικά, είναι εφικτό να έχουμε ένα αρκετά ικανοποιητικό αποτέλεσμα για την γενική κατάσταση.

Η ανάλυση ABC κατηγοριοποιεί και καθορίζει τη σημασία των αποθεμάτων και το επίπεδο ελέγχου τους. Η ανάλυση ταξινομεί το απόθεμα μιας επιχείρησης σε διαφορετικές κατηγορίας A, B και C. Όπου,

Κατηγορία A: πολύ αυστηρό έλεγχο και ακριβή αρχεία

Κατηγορία B: λιγότερο αυστηρός έλεγχος και καλά αρχεία

Κατηγορία C: απλούστερος έλεγχος και ελάχιστα αρχεία

Συνήθως η ταξινόμηση βασίζεται στην ετήσια χρήση των προϊόντων (σε ευρώ, σε δολάρια κ.α.). Μπορούν όμως να χρησιμοποιηθούν και άλλα κριτήρια όπως η συχνότητα χρήσης, μοναδικότητα κόστους, η δημοσιότητα κτλ.

5.1.2 Εφαρμογή της ανάλυση ABC στον έλεγχο αποθεμάτων

Οι επιχειρήσεις έχουν ένα μεγάλο όγκο πληροφοριών που είναι αναγκαίο να ομαδοποιήσουν ώστε να μπορέσουν να εκμεταλλευτούν σωστά, με στόχο την άρτια λειτουργία της ίδιας της επιχείρησης αλλά και την αύξηση του κέρδους της. Η διαχείριση των αποθεμάτων αποτελεί ένα σημαντικό μέρος στη προσπάθεια αύξησης του τζίρου μιας επιχείρησης αλλά κοστίζει σε χρόνο απασχόλησης του προσωπικού και κατά συνέπεια αποτελεί ένα επιπλέον κόστος για την επιχείρηση. Οι επιχειρήσεις πρέπει να επικεντρωθούν στη βέλτιστη χρησιμοποίηση των διαθέσιμων πόρων.

Όσον αφορά τη διαχείριση των αποθεμάτων στόχος μιας επιχείρησης είναι το πότε θα γίνει μια παραγγελία και σε τι ποσότητα με απώτερο σκοπό τη μείωση του κόστους παραγγελίας. Καθώς στις περισσότερες περιπτώσεις ελέγχου αποθεμάτων περιλαμβάνονται πολλά και διαφορετικά προϊόντα ή υπηρεσίες είναι δύσκολο για την επιχείρηση να κάνει διαφορετικό προγραμματισμό για τα αποθέματα κάθε είδους ξεχωριστά. Εδώ βρίσκει εφαρμογή η μέθοδος Pareto ή η ABC ανάλυση, η οποία μας επιτρέπει να ταξινομήσουμε τα προϊόντα μας με βάση τη «σημασία» τους στην επιχείρηση.

5.1.3 ΣΚΟΠΟΣ

Η ανάλυση AB ή κανόνας 80-20, μας υπενθυμίζει πως πρέπει να εστιάσουμε στο 20% των παρατηρήσεων που είναι οι πιο σημαντικές.

Ο σκοπός της λοιπόν είναι:

- να αναδείξει αυτό το 20% που δίνει το 50% των πωλήσεων
- να καθορίσει τον βαθμό ελέγχου, αλλά και παρακολούθησης των αποθεμάτων (τα προϊόντα που αυξάνουν το κέρδος

μιας επιχείρησης θα πρέπει να ελέγχονται πιο συχνά σε σχέση με τα υπόλοιπα).

5.2 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ABC

5.2.1 Μεθοδολογία

Προκειμένου να γίνει η ανάλυση θα πρέπει να υπάρχουν δεδομένα που αφορούν τις ετήσιες πωλήσεις και την τιμή κόστους κάθε μονάδας των ειδών προς ταξινόμηση. Με τις πληροφορίες αυτές μπορούμε να εξάγουμε τις απαραίτητες πληροφορίες εκτελώντας την ακόλουθη διαδικασία.

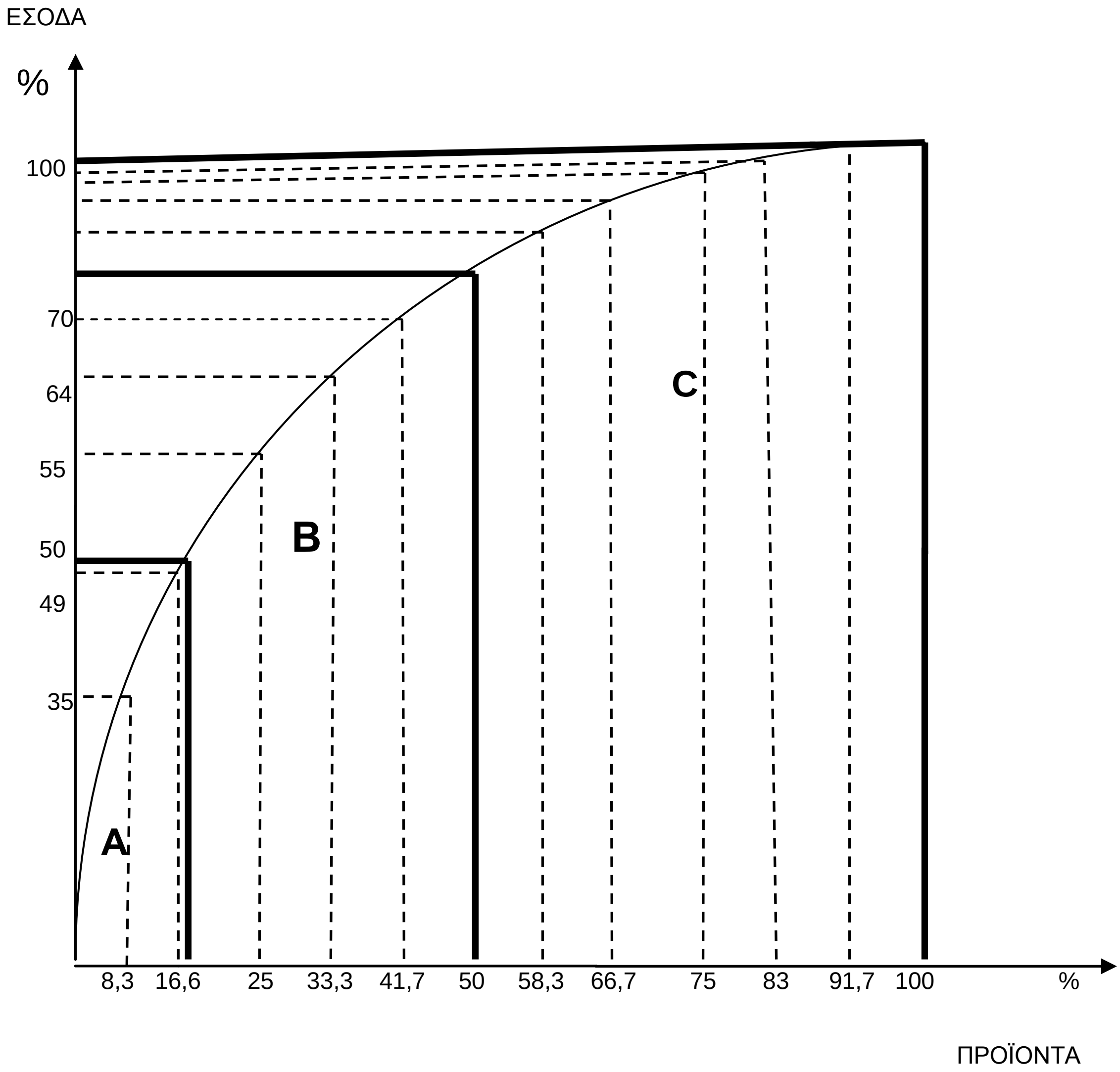
- Πολλαπλασιάζουμε το κόστος της μονάδας με τις ετήσιες πωλήσεις και βρίσκουμε το συνολικό ετήσιο κέρδος. Για κάθε προϊόν γίνεται μια ταξινόμηση με βάση αυτά τα σύνολα κατά φθίνουσα σειρά.
- Δεύτερο βήμα ήταν η άντληση της πληροφορίας που αφορά την ετήσια ζήτηση του κάθε είδους καθώς και την τιμή αγοράς του. Αυτό το βήμα αποδείχτηκε ιδιαιτέρως δύσκολο καθώς το μέχρι πρότινος πληροφορικό σύστημα που λειτουργούσε δεν υποστήριζε τη μαζική συλλογή πληροφοριών και έτσι έπρεπε να γίνει συλλογή για το κάθε είδος ξεχωριστά.
- Η εικόνα που είχε δημιουργηθεί με βάση την «κινητικότητα» των αποθεμάτων των προϊόντων δεν είναι αρκετή για να τα κατατάξει ως προϊόντα Α. Απαραίτητο στοιχείο είναι και η ετήσια ζήτηση, πόσο μάλλον πολλαπλασιαζόμενη με το κόστος της μονάδας.
- Η κατηγορία Α αντιστοιχεί σε ένα μικρό ποσοστό του αποθέματος των ειδών μεγάλης όμως αξίας, δηλαδή περίπου 15-20% του συνόλου των διάφορων αποθεμάτων.
- Η κατηγορία Β περιλαμβάνει είδη μικρότερης αξίας ή /και σημασίας, αντιστοιχούν περίπου στο 20-25% του κύκλου εργασιών.
- Τέλος, η κατηγορία C περιλαμβάνει τα υπόλοιπα μικρότερης σημασίας αγαθά, περίπου 10-15% της συνολικής αξίας του κύκλου εργασιών των αποθεμάτων, που αποτελούν και το μεγαλύτερο ποσοστό του συνολικού αποθέματος

Γι' αυτό η ABC ανάλυση κρίνεται ως αναγκαία πηγή πληροφόρησης για μία επιχείρηση. Η σωστή αξιολόγηση των ειδών της και η δημιουργία της σωστής και ολοκληρωμένης εικόνας της επιχείρησης μπορεί να την οδηγήσει σε ριζικές αλλαγές που αφορούν την οργάνωση και τη διαχείριση των αποθεμάτων της, γεγονός που μπορεί να την οδηγήσει στη μείωση του συνολικού κόστους.

5.2.2 Επίλυση εφαρμογής με ανάλυση ABC

Ένα κατάστημα ηλεκτρονικών συσκευών πουλάει διάφορες ηλεκτρικές της εταιρίας ‘’ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ Α.Ε’’ , για τις οποίες είναι γνωστή η ετήσια ζήτηση. Τα προϊόντα αυτά αλλά και άλλες πολλές πληροφορίες μπορούμε να δούμε τον ακόλουθο πίνακα.

Είδος σε απόθεμα	Κόστος ανά μονάδα	Ετήσια ζήτηση	Σύνολο €	Ποσο-στό % στο σύνολο	Ποσο-στό %του συνόλου εμπ/των	ομαδα
Κινητά τηλέφω-να	200	140000	21000000	8,3	35	A
Φούρνοι	250	35000	8500000	16,6	14,2	A
Η/Υ	300	20000	6000000	25	10	B
Πλυντή-ρια	200	27000	5400000	33,3	9	B
Κλιματι-στικά	360	10000	3600000	41,7	6	B
Laptop	330	10000	3300000	50	5,5	B
DVD-player	30	98000	2940000	58,3	4,9	C
Στεγνω-τήρια	240	10000	2400000	66,7	4	C
Σίδερα	21	100000	2100000	75	3,5	C
Τοστιέ-ρες	18	100000	1800000	83,3	3	C
Φρυγα-νιέρες	20	84000	1680000	91.7	2,8	C
Καφετιέ-ρες	20	64000	1280000	100	2,1	C



5.2.3 Αποτελέσματα Ανάλυσης

ΟΜΑΔΑ	Ποσοστό % επί του συνόλου	Ποσοστό % επί του συνόλου του εμπορεύματος
A	**49%**	**17%**
B	**30,4%**	**33%**
C	**20,3%**	**50%**

Στη ταξινόμηση που έγινε παρατηρούμε ότι:

- το 49% του ετήσιου συνολικού τζίρου αντιστοιχεί στο 17% του συνολικού αποθέματος.
- Στην κατηγορία B το 33% του εμπορεύματος είναι το 30,4% του συνολικού τζίρου μίας επιχείρησης.
- Η κατηγορία C αποτελεί το 50% των προϊόντων της εταιρίας ‘’ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ Α.Ε’’, αλλά αντιστοιχούν μόλις στο 20,3% του ετήσιου συνολικού τζίρου.

Μπορεί το δείγμα μας να μην ήταν αρκετά μεγάλο ώστε να μπορέσουμε με μεγαλύτερη ακρίβεια να δούμε τις αποκλίσεις μεταξύ των ομάδων, αλλά και μεταξύ του συνολικού τζίρου και του πλήθους των αποθεμάτων. Παρόλα αυτά, μπορούμε και πάλι να διακρίνουμε πόσο σημαντικά είναι τα είδη που ανήκουν στη κατηγορία Α, ενώ είναι πολύ λίγα σε αριθμό αποτελούν το 49% του συνολικού κόστους. Επομένως, κρίνουμε αναγκαία τη μελέτη της κατηγορίας Α και του τρόπου διαχείρισης των αποθεμάτων της.

5.3 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

5.3.1 Πλεονεκτήματα

Αν και ο πρωταρχικός ρόλος της ανάλυσης ABC είναι να παρέχει πληροφορίες που σχετίζονται με το κόστος παραγωγής, η ανάλυση αυτή προσφέρει και άλλες πολλές πληροφορίες.

Όπως,

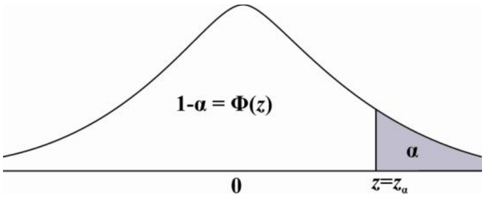
1. Αυτού του είδους η κατηγοριοποίηση του αποθέματος βοηθά κάποιον να διαχειριστεί όλων τον όγκο και να θέσει ως προτεραιότητα τη σωστή κατηγορία. Για παράδειγμα, η κατηγορία A περιέχει αντικείμενα υψηλής αξίας. Ως εκ τούτου, η κατηγορία αυτή πρέπει να παρακολουθείτε στενά για να διασφαλίσουμε ότι το επίπεδο αποθέματος διατηρείται στα επιθυμητά επίπεδα, γιατί οποιοδήποτε επιπλέον απόθεμα μπορεί να έχει αρνητικές επιπτώσεις στο συνολικό κόστος.
2. **Είδη A Κατηγορίας:** Βοηθά να αναγνωρίσει κανείς τα αποθέματα ως αντικείμενα υψηλής αξίας και να εξασφαλίσει τον αυστηρό έλεγχο όσον αφορά την διαδικασία ελέγχου, τη φυσική ασφάλεια (σε περίπτωση κλοπής), καθώς και τη συχνότητα των ελέγχων.
3. Βοηθά τους διαχειριστές και σχεδιαστές του αποθέματος να διατηρούν ακριβή αρχεία και να επικεντρώνουν την προσοχή τους στα θέματα που έχουν προκύψει και καθιστούν αναγκαία την άμεση λήψη αποφάσεων.
4. **Είδη B Κατηγορίας:** Σε αυτά μπορεί να δοθεί δευτερεύουσα προτεραιότητα, με μικρότερη συχνότητα επανεξέτασης και λιγότερο αυστηρούς ελέγχους με επαρκή τεκμηρίωση εγγράφων και ελέγχων.
5. **Είδη Γ Κατηγορίας:** Μπορούν να διαχειριστούν με βασικά και απλά αρχεία. Η ποσότητα αποθέματος μπορεί να είναι μεγαλύτερη με πολύ λίγες περιοδικές αναθεωρήσεις.
6. Προσδιορίζει με μεγαλύτερη ακρίβεια την κερδοφορία της εταιρίας.
7. Δείχνει αν ένα προϊόν ή υπηρεσία πρέπει να συνεχιστεί ή πρέπει να αντικατασταθεί, ώστε να αυξηθεί το συνολικό κόστος.

8. Εξάγει συμπεράσματα σχετικά με το αν κάποια προϊόντα και υπηρεσίες πρέπει να συνεχίσουν να παράγονται μέσα στην εταιρία ή είναι προτιμότερο να ανατεθούν σε κάποιο εξωτερικό συνεργάτη.
9. Μας δείχνει που πρέπει να τοποθετηθούν τα προϊόντα στην αποθήκη, πόσο συχνά πρέπει να παραγγέλνονται ή σε τι ποσότητες.

5.3.2 Μειονεκτήματα

1. Οι Β και Γ Κατηγορίες μπορεί συχνά να παραμελούνται και να συσσωρεύονται τεράστια αποθέματα ή είναι επιρρεπή σε απώλεια, κλοπή, τσαπατσουλιά στον έλεγχο των αρχείων κλπ.
2. Δεν συμπεριλαμβάνεται το περιθώριο κέρδους κατά την ταξινόμηση
3. Η ανάλυση ABC δεν παρέχει πληροφορίες σχετικά με τις αιτίες.
4. Ένα τελευταίο αρνητικό στοιχείο που φέρει η ABC ανάλυση είναι ότι είναι πιθανό τα συμπληρωματικά προϊόντα να διαχωρίζονται με αποτέλεσμα να ακολουθούνται διαφορετικά συστήματα διαχείρισης των αποθεμάτων τους με διαφορετική περίοδο επιθεώρησης, συνθήκες οι οποίες δεν επιτρέπουν τη σωστή συσχέτιση των πωλήσεων αυτών των προϊόντων.

Τιμές των πιθανοτήτων $\Phi(z) = P(Z \le z) = P(Z < z)$ της τυποποιημένης κανονικής κατανομής $N(0,1)$ για $z \ge 0$. Για $z < 0$ ισχύει $\Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$.



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84850	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92786	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99897	0.99900

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΚΟΛΕΤΣΟΣ Ι. - ΣΤΟΓΙΑΝΝΗΣ Δ. «Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα», έκδοση ΑΡΗΣ ΣΥΜΕΩΝ, Αθήνα 2012

ΚΙΟΧΟΣ Π. – ΘΑΝΟΣ Γ. –ΣΑΛΑΜΟΥΡΗΣ Δ. – ΚΙΟΧΟΣ Α. «Επιχειρησιακή Έρευνα», έκδοση ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΕΚΔΟΤΙΚΗ, Αθήνα 2002

ΦΡΑΓΚΟΣ Χ. «Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα», έκδοση ΑΘ.ΣΤΑΜΟΥΛΗΣ , Αθήνα 2006

ΑΣΗΜΑΚΟΠΟΥΛΟΣ Ν., «Επιχειρησιακή Έρευνα» ,Σταμούλης 1991

Υψηλάντης Π., «Επιχειρησιακή Έρευνα – Λήψη Επιχειρησιακών Αποφάσεων», 2η έκδοση, Έλλην, 1998

Χαραλάμπους Ε. Μπότσαρη, «Επιχειρησιακή Έρευνα μέθοδοι και προβλήματα», Αθήνα 1981

Σαπουντζής Ι., « Τεχνικές Επιχειρησιακής Έρευνας» 2η έκδοση, Τόμος 1 και 2, Σταμούλης, 1992

ΞΕΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Taha, H.A., «Operation Research – An Introduction», McLillan

Hillier F. and Lieberman G. «Introduction to Operations Research», 7Th Edition, New York, McGraw –Hill,

Buchan, J. and Koenigsberg, E. (1963). Scientific Inventory Management, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, New Jersy

Churchman, C.W., Ackoff, R.I. and Arnoff, E.L. (1957). Introduction to Operations Research, John Wiley and Sons, New Jersy.

Johnson, L.A. and Montgomery, D.C. (1974). Operations Research in Production Planning, Scheduling and Inventory Control, John Wiley and Sons, New York

Littlechild S., "Operational Research for Managers", Philip Allan, 1977

Wayne L. Winston "Operations Research Applications and Algorithms"

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΕΣ ΔΙΕΥΘΥΝΣΕΙΣ

1. http://www.lokad.com/abc-analysis-(inventory)-definition.ashx
2. http://smallbusiness.chron.com/advantages-disadvantages-abc-analysis-inventory-34202.html
3. http://library.tee.gr/digital/kma/kma_m1274.pdf
4. http://www.cententia.com/GR/Resources/ABC_White%20paper(gr).pdf
5. http://www.logistics.tuc.gr/Contents/Diatrives/Simantirakis.PDF
6. http://dspace.lib.uom.gr/bitstream/2159/14271/1/LiakopoulouNektariaMsc2011.pdf
7. http://managementstudyguide.com/inventory-classification.htm
8. http://invenio.lib.auth.gr/record/113336/files/ntagoloude.pdf?version=1
9. http://el.wikipedia.org