ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ GROTHENDIECK- ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ $P-$ΑΠΟΛΥΤΑ ΑΘΡΟΙΣΙΜΩΝ ΤΕΛΕΣΤΩΝ ΣΕ L_p-ΧΩΡΟΥΣ

Ευστράτιος Θήριος

Διπλωματική Εργασία για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος «Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες»

Επιβλέπων Καθηγητής: Ι. Σαραντόπουλος

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα εργασία αναπτύσσει ορισμένες εφαρμογές της αρμονικής ανάλυσης στη συναρτησιακή ανάλυση και, ειδικότερα, στη Θεωρία των χώρων **Banach**. Η χρησιμοποίηση των μεθόδων της αρμονικής ανάλυσης αποδείχθηκε ισχυρότατο όπλο τόσο για την απλοποίηση των αποδείξεων όσο και για την πληρότητα του τρόπου με τον οποίο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα.

Η εργασία χωρίζεται σε τρία κεφάλαια. Το πρώτο κεφάλαιο πραγματεύεται την ανισότητα **Grothendieck**, η οποία αποδεικνύεται με βάση μία ιδέα του S. Kaijser. Στο κεφάλαιο αυτό εμπεριέχεται εκτενής εισαγωγή ως προς τα βασικά εργαλεία που θα χρησιμοποιηθούν για τις μετέπειτα αποδείξεις. Η έκταση της εισαγωγής, όσο και αν φαίνεται υπερβολική, ήταν αναγκαία, προκειμένου ο αναγνώστης να κατανοήσει επαρκώς και σε βάθος την απόδειξη της ανισότητας **Grothendieck**.

Στο δεύτερο κεφάλαιο αποδεικνύεται, αρχικά, ότι η ανισότητα του **Grothendieck** είναι ισοδύναμη με το εξής Θεώρημα: ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής από τον ℓ_1^n σε ένα χώρο Hilbert είναι 1-απόλυτα αθροίσιμος. Στη συνέχεια, με τη χρήση της ανισότητας, αποδεικνύονται Θεωρήματα σχετικά με την απόλυτη αθροισιμότητα τελεστών, οι οποίοι έχουν την ιδιότητα να απεικονίζουν σειρές που συγκλίνουν χωρίς συνθήκη σε απόλυτα συγκλίνουσες σειρές. Τέλος, το Θεώρημα γενικεύεται και στην περίπτωση των $L_{1,\lambda}-$χώρων.

Στο τρίτο κεφάλαιο, με τη χρήση της ανισότητας **Grothendieck**, αποδεικνύονται εφαρμογές των απόλυτων αθροίσιμων τελεστών σε $L_{p,\lambda}-$χώρους.

Στο τέλος της εργασίας, επισυνάπτονται δύο παραρτήματα στα οποία μπορούν να βρεθούν αποδείξεις προτάσεων καθώς και ορισμοί που δεν συμπεριλήφθηκαν στο κυρίως κείμενο. Οι παραπομπές στο παράρτημα δίνονται με τα σύμβολα κ, π, ενώ στη βιβλιογραφία με το σύμβολο [.].

Πολλές ευχαριστίες οφείλονται στον κύριο Ι. Σαραντόπουλο, τακτικό Καθηγητή του ΕΜΠ, ο οποίος με καθοδήγησε καθ’ όλη τη διάρκεια εκπόνησης αυτής της εργασίας και με βοήθησε αποτελεσματικά με τις ουσιώδεις παρατηρήσεις του.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Πρόταση 1.1: Έστω ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\left(\mathrm{H},<\cdot,\cdot>\right)$ και έστω $\|x\|=<x,\mathrm{x}>^{1/2}$. Τότε ο $\left(\mathrm{H},<\cdot,\cdot>\right)$ είναι χώρος με νόρμα.

Πρόταση 1.2: Έστω ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\left(\mathrm{H},<\cdot,\cdot>\right)$ και έστω $x,y\in\mathrm{H}$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2$ (ιδιότητα του παραλληλογράμμου)
2. Αν ο Η είναι πραγματικός χώρος, τότε $<x,y>=\left\|\dfrac{x+y}{2}\right\|^2-\left\|\dfrac{x-y}{2}\right\|^2$
3. Αν ο Η είναι μιγαδικός, $<x,y>=\left\|\dfrac{x+y}{2}\right\|^2-\left\|\dfrac{x-y}{2}\right\|^2+i\left(\left\|\dfrac{x+iy}{2}\right\|^2-\left\|\dfrac{x-iy}{2}\right\|^2\right)$

Θεώρημα 1.1: (Jordan – Von Neumann): Έστω $\left(\mathrm{H},\|\ \|\right)$ χώρος με νόρμα. Αν για κάθε $x,y\in\mathrm{H}$ ισχύει η ιδιότητα του παραλληλογράμμου, τότε υπάρχει εσωτερικό γινόμενο $<\cdot,\cdot>$ στον Η τέτοιο, ώστε $\|x\|=<x,\mathrm{x}>^{1/2}$ για κάθε $x\in\mathrm{H}$.

Θεώρημα 1.2: Σε ένα χώρο Η με εσωτερικό γινόμενο $\left(\mathrm{H},<\cdot,\cdot>\right)$, οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

1. Ο Η είναι πλήρης.
2. Αν ο Μ είναι κλειστός υπόχωρος του Η, τότε $\mathrm{H}=\mathrm{M}\oplus\mathrm{M}^{\perp}$.
3. Αν ο Μ είναι κλειστός υπόχωρος του Η, τότε $\mathrm{M}=\mathrm{M}^{\perp\perp}$.
4. Αν ο Μ είναι κλειστός υπόχωρος του Η με $\mathrm{M}\neq\mathrm{H}$, τότε $\mathrm{M}^{\perp}\neq\{0\}$
5. Αν το $f:\mathrm{H}\to\mathbb{C}$ είναι συνεχές γραμμικό συναρτησιακό, τότε υπάρχει $y\in\mathrm{H}$ τέτοιο, ώστε $f\left(x\right)=<x,y>$, για κάθε $x\in\mathrm{H}$.

Λήμμα 1.1 (Zorn): Έστω $\left(\mathrm{E},\leq\right)$ ένας μερικά διατεταγμένος χώρος. Αν κάθε αλυσίδα του Ε έχει άνω φράγμα, τότε ο Ε έχει μεγιστικό στοιχείο.

Θεώρημα 1.3: Κάθε ορθοκανονικό σύνολο Α ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο $\left(\mathrm{H},<\cdot,\cdot>\right)$ περιέχεται σε ένα μεγιστικό ορθοκανονικό σύνολο του Η.

Απόδειξη: Θέτουμε Ε το σύνολο όλων των ορθοκανονικών συνόλων που περιέχουν το Α. Εφόσον το $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$, τότε $\mathrm{E} \neq \varnothing$. Ορίζουμε την ακόλουθη μερική διάταξη στον Ε, έστω $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2 \in \mathrm{E}$, τότε $\mathrm{B}_1 > \mathrm{B}_2$ αν $\mathrm{B}_1 \supset \mathrm{B}_2$.
Έστω C μία αλυσίδα στο Ε. Θέτουμε $\bigcup C$ την ένωση όλων των συνόλων που ανήκουν στη C.

(a) Το $\bigcup C$ είναι ορθοκανονικό σύνολο. Πράγματι, έστω $u_1, u_2 \in \bigcup C$. Τότε υπάρχουν $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2 \in C$ με $u_1 \in \mathrm{B}_1$ και $u_2 \in \mathrm{B}_2$. Εφόσον η C είναι αλυσίδα, τότε ισχύει ότι είτε $\mathrm{B}_1 > \mathrm{B}_2$ είτε $\mathrm{B}_1 < \mathrm{B}_2$. Υποθέτουμε ότι $\mathrm{B}_1 < \mathrm{B}_2$, τότε $u_1, u_2 \in \mathrm{B}_2$ και, άρα, $< u_1, u_2 >= 0$.

(b) Το $\bigcup C$ είναι άνω φράγμα. Πράγματι, αν $\mathrm{K} \in C$, τότε $\mathrm{K} \subset \bigcup C$.

(c) Το $\bigcup C$ περιέχει το Α.

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι το $\bigcup C \in \mathrm{E}$. Από το **Λήμμα του Zorn** το Ε έχει ένα μεγιστικό στοιχείο S.

Παρατήρηση: Έστω $(\mathrm{H}, < \cdot,\cdot >)$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αν $\mathrm{H} \neq \{0\}$, τότε υπάρχει $x \in \mathrm{H}$ με $\|x\| = 1$. Επομένως, το $A = \{x\}$ είναι ορθοκανονικό σύνολο του Η.
Άμεση συνέπεια του **Θεωρήματος 1.3** και της **Παρατήρησης** είναι το επόμενο **Πόρισμα**.

Πόρισμα 1.1: Κάθε χώρος με εσωτερικό γινόμενο $(\mathrm{H}, < \cdot,\cdot >)$, $\mathrm{H} \neq \{0\}$, περιέχει ένα μεγιστικό ορθοκανονικό σύνολο.

Πόρισμα 1.2: Έστω Ε είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο $(\mathrm{H}, < \cdot,\cdot >)$. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(a) Το Ε είναι ένα μεγιστικό ορθοκανονικό σύνολο.

(b) Αν $x \in \mathrm{H}$ είναι τέτοιο ώστε $x \perp \mathrm{E}$, τότε $x = 0$.

Απόδειξη:

$(a) \rightarrow (b)$ Έστω $x \in \mathrm{E}$, $x \neq 0$, με $x \perp \mathrm{E}$, τότε το $\mathrm{E} \cup \left\{ \frac{x}{\|x\|} \right\}$ είναι ορθοκανονικό σύνολο που περιέχει το Ε. Άτοπο, άρα $x = 0$.

$(b) \to (a)$ Έστω Ε δεν είναι μεγιστικό, τότε υπάρχει ορθοκανονικό σύνολο $F \subset H$, με $F \supset \mathrm{E}$. Έστω $x \in F \setminus \mathrm{E}$, τότε $\|x\| = 1$ και $x \perp \mathrm{E}$. Άτοπο.

Πρόταση 1.3: Έστω Η ένας διαχωρίσιμος χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $\mathrm{H} \neq \{0\}$. Αν D είναι αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του Η, τότε το Η περιέχει ένα μεγιστικό αριθμήσιμο ορθοκανονικό σύνολο, που το παίρνουμε από το D με τη μέθοδο Gram – Schmidt.

Απόδειξη: Έστω $D = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Για $n_1 = 1$ θέτουμε $y_1 = x_{n_1}$.
Έστω $y_1 = x_{n_1}, \ldots, y_\kappa = x_{n_\kappa}$, όπου το σύνολο $\{x_{n_1}, ..., x_{n_\kappa}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και η $(n_\kappa)_{\kappa \in \mathbb{N}}$ γνησίως αύξουσα.
Αν δεν υπάρχει $j > n_\kappa$ έτσι ώστε το $\{x_{n_1}, ..., x_{n_\kappa}, x_j\}$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητο, τότε έχουμε ένα πεπερασμένο γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο. Διαφορετικά, παίρνουμε το $n_{\kappa+1}$ να είναι το μικρότερο τέτοιο j με $y_{\kappa+1} = x_{n_{\kappa+1}}$.
Με αυτό τον τρόπο ορίζουμε ένα αριθμήσιμο γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο $\{y_1, ..., y_n, ...\} \subset D$.
Έστω S ο μικρότερος υπόχωρος του Η που περιέχει το $\{y_1, ..., y_n, ...\}$. Αν $x_j \in D$, τότε το x_j με $n_\kappa \leq j < n_{\kappa+1}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\{y_1, ..., y_\kappa\}$. Άρα, το $x_j \in S$ και, επειδή το $D \subset S$, τότε το S είναι πυκνό στον Η.
Εφόσον το $\{y_1, ..., y_n, ...\}$ είναι ένα αριθμήσιμο γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Gram-Schmidt, κατασκευάζουμε το ορθοκανονικό σύνολο $\{u_1, ..., u_n, ...\}$. Προφανώς $\{u_1, ..., u_n, ...\} \subset S$.
Έστω $x \in \mathrm{H}$ με $< x, u_n >= 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Δεδομένου ότι για κάθε $y \in S$ ισχύει ότι $y = a_1 u_1 + ... + a_n u_n$, συνεπάγεται ότι:

$$< x, y >= < x, \sum_{i=1}^{m} a_i u_i > = \sum_{i=1}^{m} \overline{a}_i < x, u_i >= 0$$

Επειδή ο υπόχωρος S είναι πυκνός στον Η, υπάρχει ακολουθία $(z_n)_{n \in / N}$ του S έτσι ώστε $\lim_{n \to \infty} \|x - z_n\| = 0$. Τότε,

$$\|x\|^2 =< x, x >=< x, x > - < x, z_n >=< x, x - z_n > \leq \|x\| \, \|x - z_n\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Άρα, $x = 0$. Από το **Πόρισμα 1.2** έχουμε το ζητούμενο.

Πρόταση 1.4: Έστω $\{u_a : a \in \mathrm{A}\}$ είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο $(\mathrm{H}, <\cdot,\cdot>)$ και $F = \{a_1, ..., a_n\}$ ένα υποσύνολο του Α. Θέτουμε $\mathrm{M}_F = \mathrm{span}\{u_{a_1}, ..., u_{a_n}\}$. Τότε, ισχύουν τα ακόλουθα:

(1) Αν $\varphi : \mathrm{A} \to \mathbb{C}$ είναι μία συνάρτηση, με $\varphi(a) = 0$ για κάθε $a \in \mathrm{A} \setminus F$, τότε υπάρχει $y \in \mathrm{M}_F$ έτσι, ώστε:

$$y = \sum_{\kappa=1}^{n} \varphi(a_\kappa) u_{a_\kappa} \text{ με } \hat{y}(a) =< y, u_a >= \varphi(a)$$

Άρα $\|y\| = \left(\sum_{\kappa=1}^{n} |\hat{y}(a)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

(2) Αν

$$f(\lambda_{a_1}, ..., \lambda_{a_n}) = \left\| x - \sum_{\kappa=1}^{n} \lambda_{a_\kappa} u_{a_\kappa} \right\|, \text{ όπου } x \in \mathrm{H},$$

τότε η f παίρνει την ελάχιστη τιμή της στο μοναδικό σημείο.

$$(\lambda_{a_1}, ..., \lambda_{a_n}) = (< x, u_{a_1} >, ..., < x, u_{a_n} >)$$

Επομένως, αν

$$S_F(x) = \sum_{\kappa=1}^{n} \hat{x}(a_\kappa) u_{a_\kappa},$$

τότε

$$\|x - S_F(x)\| \le \|x - S\|$$

για κάθε $S \in \mathrm{M}_F$.

(3) Αν $x \in \mathrm{H}$, τότε

$$\sum_{\kappa=1}^{n} |\hat{x}(a_\kappa)|^2 = \sum_{\kappa=1}^{n} |< x, u_{a_\kappa} >|^2 \le \|x\|^2$$

Απόδειξη: Η (1) είναι προφανής. Οι (2) και (3) αποδεικνύονται από την ακόλουθη σχέση:

$$\left\| x - \sum_{\kappa=1}^{n} \lambda_{a_\kappa} u_{a_\kappa} \right\|^2 = \|x\|^2 + \sum_{\kappa=1}^{n} |< x, u_{a_\kappa} > - \lambda_{\alpha_\kappa}|^2 - \sum_{\kappa=1}^{n} |< x, u_{a_\kappa} >|^2$$

Λήμμα 1.2: Έστω $\{u_a : a \in \mathrm{A}\}$ είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο του χώρου Hilbert $(\mathrm{H}, <\cdot,\cdot>)$ και έστω $P = span\{u_a : a \in \mathrm{A}\}$. Τότε, η συνάρτηση

$$f : \mathrm{P} \to \ell_2(\mathrm{A}) \qquad \text{με} \qquad f(x) = \hat{x}$$

είναι μία ισομετρία. Το $f(P)$ είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων των οποίων ο φορέας είναι κάποιο πεπερασμένο υποσύνολο του Α και είναι σύνολο πυκνό στον $\ell_2(\mathrm{A})$.

Απόδειξη: Από την **Πρόταση 1.4** η f είναι μία ισομετρία του P εντός του $\ell_2(\mathrm{A})$. Το $f(P)$ είναι το σύνολο των συναρτήσεων $\phi : \mathrm{A} \to \mathbb{C}$ των οποίων ο φορέας είναι πεπερασμένο υποσύνολο του A. Τότε το $f(P)$ είναι πυκνό σύνολο στον $\ell_2(\mathrm{A})$. Πράγματι, έστω $\varphi \in \ell_2(\mathrm{A})$, θα δείξουμε ότι υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του P τέτοια, ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} \|\hat{x}_n - \varphi\|_2 = 0$.

Αρχικά, παρατηρούμε ότι το σύνολο $\mathrm{A}_n = \left\{ a \in \mathrm{A} : |\varphi(a)| > \frac{1}{n} \right\}$ είναι πεπερασμένο. Πράγματι, έστω $\mathrm{A}_n = \left\{ a \in \mathrm{A} : |\varphi(a)| > \frac{1}{n} \right\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Επειδή

$$\sum_{\alpha\in \mathrm{A}_n} |n\varphi(a_n)|^2 = n^2 \sum_{\alpha\in \mathrm{A}_n} |\varphi(a_n)|^2 \le n^2 \sum_{\alpha\in \mathrm{A}} |\varphi(a_n)|^2 < \infty,$$

αναγκαστικά το A_n είναι πεπερασμένο. Επομένως, το $\mathrm{A} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n$ είναι αριθμήσιμο. Από τα προαναφερόμενα ισχύει ότι $\mathrm{A}_n \subset \mathrm{A}_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ και $\mathrm{A} = \{\alpha : \varphi(\alpha) \neq 0\}$.

Αν $x_n = \sum\limits_{\alpha\in \mathrm{A}_n} \varphi(\alpha) u_a$, τότε $x_n \in \mathrm{P}$. Εφόσον $\hat{x}_n = \varphi\chi_{\mathrm{A}_n}$, τότε $\varphi - \hat{x}_n = \varphi\chi_{\mathrm{A}\setminus\mathrm{A}_n}$ και, άρα, $|\varphi(\alpha) - \hat{x}_n(a)| \le |\varphi(a)|$. Τότε:

$$|\varphi(\alpha) - \hat{x}_n(a)|^2 \le |\varphi(a)|^2 + |\hat{x}_n(a)|^2 + 2|\varphi(a)||\hat{x}_n(a)| \le$$

$$2|\varphi(a)|^2 \mathrm{X}_{\mathrm{A}_n} + |\varphi(a)|^2 + |\varphi(a)|^2 \mathrm{X}_{\mathrm{A}_n} \le 4|\varphi(a)|^2$$

Δεδομένου ότι η $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα, ισχύει ότι $\lim_{n\to\infty}\left|\hat{x}_n(a)-\varphi(\alpha)\right|=0 \quad \forall \alpha \in \mathrm{A}$. Τότε $\lim_{n\to\infty}\left|\hat{x}_n(a)-\varphi(\alpha)\right|^2=0$. Εφόσον η $\left|\hat{x}_n-\varphi\right|^2 \in \ell_1(\mathrm{A})$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue έχουμε ότι:

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\hat{x}_n-\varphi\right\|_2=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{\alpha\in\mathrm{A}}\left|\varphi(a)-\hat{x}_n(a)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{\alpha\in\mathrm{A}}\left|\varphi(a)-\hat{x}_n(a)\right|^2=\lim_{n\to\infty}\left\|\left|\varphi-\hat{x}_n\right|^2\right\|_1=0$$

Παρατήρηση: Για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$**,** για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και $1\le p\le q<\infty$, ισχύει $\|x\|_q\le\|x\|_p$. Πράγματι, έστω $x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $i=1,...,n$ είναι $|x_i|\le\|x\|_p$, άρα $\|x\|_\infty\le\|x\|_p$.

Έχουμε ότι:

$$=\sum_{i=1}^{n}|x_i|^q=\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\,|x_i|^{q-p}\le\|x\|_\infty^{q-p}\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\le\|x\|_p^{q-p}\,\|x\|_p^p=\|x\|_p^q\leftrightarrow$$

$$\|x\|_q\le\|x\|_p$$

Θεώρημα 1.4: Έστω $\{u_\alpha:\alpha\in\mathrm{A}\}$ είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο του χώρου Hilbert H. Τότε, για κάθε $x\in\mathrm{H}$ είναι:

$$\sum_{\alpha\in\mathrm{A}}\left|\hat{x}(a)\right|^2\le\|x\|^2 \qquad \text{(ανισότητα Bessel)}$$

Η $f:\mathrm{H}\to\ell_2(\mathrm{A})$, με $f(x)=\hat{x}$, είναι μία συνεχής, γραμμική και επί συνάρτηση στον $\ell_2(\mathrm{A})$. Ο περιορισμός της f στο $\overline{\mathrm{P}}$ είναι μία ισομετρία του $\overline{\mathrm{P}}$ επί του $\ell_2(\mathrm{A})$, όπου $\mathrm{P}=span\{u_a:a\in\mathrm{A}\}$. Δηλαδή:

$$\|x\|^2=\sum_{a\in\mathrm{A}}\left|\hat{x}(a)\right|^2 \quad \text{για κάθε } x\in\overline{\mathrm{P}}$$

Απόδειξη: Από την **Πρόταση 1.4** γνωρίζουμε ότι, αν F είναι πεπερασμένο υποσύνολο του Α, τότε για κάθε $x\in\mathrm{H}$ ισχύει ότι:

$$\sum_{a\in F}\left|\hat{x}(a)\right|^2\le\|x\|^2$$

Από τον ορισμό του αθροίσματος $\sum_{\alpha\in\mathrm{A}}\left|\hat{x}(a)\right|^2$ άμεσα προκύπτει ότι:

$$\sum_{\alpha\in \mathrm{A}} \left|\hat{x}(a)\right|^2 = \sup\left\{\sum_{a\in F}\left|\hat{x}(a)\right|^2 : F \text{ πεπερασμένο υποσύνολο του } \mathrm{A}\right\} \le \|x\|^2$$

Άρα:

$$\sum_{a\in \mathrm{A}} \left|\hat{x}(a)\right|^2 \le \|x\|^2$$

Από την ανισότητα Bessel, έπεται ότι η f απεικονίζει τον χώρο H εντός του $\ell_2(\mathrm{A})$. Είναι προφανές ότι η f είναι γραμμική και από την ανισότητα Bessel έχουμε ότι είναι και συνεχής, εφόσον ισχύει:

$$\left\|f(y)-f(x)\right\|_2 \le \left\|\hat{y}-\hat{x}\right\|_2 \le \left\|y-x\right\|$$

Επίσης, από το **Λήμμα 1.2** η $f:\mathrm{P}\to \ell_2(\mathrm{A})$ είναι μία ισομετρία και το $f(P)$ είναι σύνολο πυκνό στον $\ell_2(\mathrm{A})$.
Θα δείξουμε ότι η $f:\overline{\mathrm{P}}\to \ell_2(\mathrm{A})$ είναι μία ισομετρία. Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{P}$. Έχουμε δείξει ότι η $(\hat{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία συγκλίνουσα ακολουθία στον $\ell_2(\mathrm{A})$. Δηλαδή υπάρχει $\varphi \in \ell_2(\mathrm{A})$ έτσι, ώστε $\lim_{n\to\infty}\left\|\hat{x}_n-\varphi\right\|_2 = 0$. Αν $n>m$, τότε το $\mathrm{A}_n \setminus \mathrm{A}_m$ είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του A και ισχύει:

$$x_n - x_m = \sum_{\alpha\in \mathrm{A}_n\setminus \mathrm{A}_m} \varphi(\alpha)u_\alpha$$

Από την **Πρόταση 1.4** και το **Λήμμα 1.2** γνωρίζουμε ότι:

$$\left\|\hat{x}_n-\hat{x}_m\right\|_2 = \left\|x_n-x_m\right\|$$

Άρα, η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy του H. Εφόσον ο H είναι πλήρης, υπάρχει $x\in \mathrm{H}$ έτσι, ώστε $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Οπότε, το $x\in\overline{\mathrm{P}}$. Συνεπώς, ισχύει ότι:

$$\hat{x}(a) = \langle x, u_a \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, u_a \rangle = \lim_{n\to\infty} \hat{x}_n(a) = \varphi(a) \qquad \forall a\in \mathrm{A}$$

Δηλαδή, $\varphi = \hat{x}$. Άρα, για κάθε $\varphi\in\ell_2(\mathrm{A})$ υπάρχει $x\in\overline{\mathrm{P}}$ τέτοιο, ώστε $\varphi=\hat{x}$. Συνεπάγεται ότι η f απεικονίζει τον $\overline{\mathrm{P}}$ επί του $\ell_2(\mathrm{A})$ και κατ' επέκταση τον H επί του $\ell_2(\mathrm{A})$.

Έστω $\varepsilon>0$ και $x\in\overline{\mathrm{P}}$. Τότε, υπάρχει $y=\sum_{\kappa=1}^{n} c_\kappa u_{a_\kappa} \in \mathrm{P}$ έτσι ώστε $\left\|x-y\right\|<\varepsilon$. Από την
Πρόταση 1.4 έχουμε ότι:

$$\left\| x - \sum_{\kappa=1}^{n} \hat{x}_{\alpha_\kappa} u_{a_\kappa} \right\| \le \left\| x - \sum_{\kappa=1}^{n} c_\kappa u_{a_\kappa} \right\| < \varepsilon$$

Επομένως, για κάθε $\varepsilon > 0$,

$$\left(\|x\| - \varepsilon \right)^2 < \left\| \sum_{\kappa=1}^{n} \hat{x}_{\alpha_\kappa} u_{a_\kappa} \right\|^2 = \sum_{\kappa=1}^{n} \left| \hat{x}_{\alpha_\kappa} \right|^2 \le \sum_{\alpha \in \mathrm{A}} \left| \hat{x}_{\alpha_\kappa} \right|^2 = \|x\|^2$$

Άρα,

$$\|x\|^2 = \sum_{\alpha \in \mathrm{A}} \left| \hat{x}_{\alpha_\kappa} \right|^2$$

Θεώρημα 1.5 (Riesz-Fischer): Έστω ότι ο $\left(\mathrm{H}, <\cdot,\cdot> \right)$ είναι χώρος Hilbert και $\{ u_a : a \in \mathrm{A} \}$ είναι ορθοκανονικό σύνολο. Αν $\{ c_\alpha : \alpha \in \mathrm{A} \} \subset \mathbb{C}$, τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(a) $\sum_{a \in \mathrm{A}} |c_a|^2 < \infty$

(b) υπάρχει κάποιο $x \in \mathrm{H}$ τέτοιο, ώστε $x = \sum_{a \in \mathrm{A}} c_a u_a$ με $c_a = < x, u_a > = \hat{x}(a)$.

Απόδειξη: $(a) \to (b)$ Έστω ότι $\sum_{a \in \mathrm{A}} |c_a|^2 < \infty$. Από προηγούμενη πρόταση μόνο αριθμήσιμο το πλήθος από τα c_α είναι διάφορο του μηδενός. Αν $\varphi \in \ell_2(\mathrm{A})$ με $\varphi(a) = c_a$ και $\mathrm{P} = span\{ u_a : \alpha \in \mathrm{A} \}$, τότε, από το **Θεώρημα 1.4**, υπάρχει $x \in \overline{\mathrm{P}}$ τέτοιο, ώστε $\hat{x} = \varphi$. Επομένως, ισχύει ότι:

$$\hat{x}(a) = \varphi(a) = c_a \quad \forall a \in \mathrm{A} \quad \text{και} \qquad \|x\| = \|\varphi\|_2 = \|\hat{x}\|_2 = \sum_{a \in \mathrm{A}} |c_a|^2$$

Έστω F πεπερασμένο υποσύνολο του A, τότε:

$$\left\| x - \sum_{a \in F} c_a u_a \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{a \in F} |c_a|^2$$

Εφόσον ισχύει ότι:

$$\|x\|^2 = \sum_{a \in \mathrm{A}} |c_a|^2$$

Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πεπερασμένο $F_o \subset \mathrm{A}$ τέτοιο, ώστε για κάθε πεπερασμένο $F \subset \mathrm{A}$, με $F_o \subset F$, να ισχύει ότι:

$$\left\| x - \sum_{a \in F} c_a u_a \right\|^2 < \varepsilon$$

Άρα, $x = \sum_{a \in \mathrm{A}} c_a u_a$.

$(b) \to (a)$ υποθέτουμε ότι $x = \sum_{a \in \mathrm{A}} c_a u_a$ για κάποιο $x \in \mathrm{H}$. Εφόσον το $\{a \in \mathrm{A} : c_a \neq 0\}$ είναι το πολύ αριθμήσιμο, ισχύει ότι:

$$< x, u_\beta > = < \sum_{a \in \mathrm{A}} c_a u_a, u_\beta > = \sum_{a \in \mathrm{A}} c_a < u_a, u_\beta > = c_\beta \quad \forall \beta \in \mathrm{A}$$

Επομένως, $x = \sum_{a \in \mathrm{A}} < x, u_a > u_a = \sum_{a \in \mathrm{A}} \hat{x}(a) u_a$ και από την ανισότητα Bessel έχουμε ότι:

$$\sum_{a \in \mathrm{A}} |c_a|^2 = \sum_{\alpha \in \mathrm{A}} |\hat{x}(a)|^2 \leq \|x\|^2 < \infty$$

Θεώρημα 1.6: Έστω το $\{u_a : a \in \mathrm{A}\}$ είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο του χώρου Hilbert $(\mathrm{H}, < \cdot, \cdot >)$. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(1) Το $\{u_a : a \in \mathrm{A}\}$ είναι μεγιστικό ορθοκανονικό σύνολο.

(2) Το $\{u_a : a \in \mathrm{A}\}$ είναι ορθοκανονική βάση του H. Δηλαδή, για κάθε $x \in \mathrm{H}$ είναι

$$x = \sum_{a \in \mathrm{A}} \hat{x}(a) u_a .$$

(3) Το $\mathrm{P} = span\{u_a : a \in \mathrm{A}\}$ είναι πυκνό στον H, δηλαδή $\overline{\mathrm{P}} = \mathrm{H}$.

(4) Για κάθε $x \in \mathrm{H}$ είναι

$$\|x\|^2 = \sum_{a \in \mathrm{A}} |\hat{x}(a)|^2 \leftrightarrow \|x\| = \|\hat{x}\|_2$$

(5) Για κάθε $x, y \in \mathrm{H}$ είναι

$$< x, y > = \sum_{a \in \mathrm{A}} \hat{x}(a) \overline{\hat{y}(a)} = < \hat{x}, \hat{y} > \qquad \text{όπου } \hat{x}, \hat{y} \in \ell_2(\mathrm{A}).$$

Απόδειξη: $(1)\to(2)$ Έστω $\{u_\alpha : \alpha \in \mathrm{A}\}$ είναι μεγιστικό ορθοκανονικό σύνολο του χώρου Η. Από το **Θεώρημα 1.4** έχουμε ότι για κάθε $x \in \mathrm{H}$ ισχύει η ανισότητα Bessel,

$$\sum_{\alpha\in \mathrm{A}} \left|\hat{x}(a)\right|^2 \le \|x\|^2$$

Από το **Θεώρημα Riesz-Fischer** έπεται ότι υπάρχει $y \in \mathrm{H}$ τέτοιο, ώστε

$$y = \sum_{a\in \mathrm{A}} \hat{x}(a) u_a$$

Επομένως,

$$\hat{x}(a) = \hat{y}(a) \leftrightarrow < x - y, u_a >= 0 \quad \forall a \in \mathrm{A}$$

Εφόσον το $\{u_\alpha : \alpha \in \mathrm{A}\}$ είναι μεγιστικό, από το **Πόρισμα 1.2** έχουμε ότι $x - y = 0 \leftrightarrow x = y$. Άρα:

$$x = \sum_{\alpha\in \mathrm{A}} \hat{x}(\alpha) u_\alpha$$

$(2)\to(3)$ Προκύπτει άμεσα.

$(3)\to(4)$ Προκύπτει από το **Θεώρημα 1.4**.

$(4)\to(5)$ Θεωρούμε για κάθε $x \in \mathrm{H}$ ότι ισχύει $\|x\| = \|\hat{x}\|_2$. Επίσης, από την **Πρόταση 1.2** έχουμε τις σχέσεις:

$$< x, y >= \frac{1}{4}\left\{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right\}$$

$$< \hat{x}, \hat{y} >= \frac{1}{4}\left\{\|\hat{x}+\hat{y}\|^2 - \|\hat{x}-\hat{y}\|^2 + i\|\hat{x}+i\hat{y}\|^2 - i\|\hat{x}-i\hat{y}\|^2\right\}$$

Συνεπώς, προκύπτει ότι $< x, y >=< \hat{x}, \hat{y} >$.

$(5)\to(1)$ Υποθέτουμε ότι για κάθε $x, y \in \mathrm{H}$ ισχύει

$$< x, y >= \sum_{a\in \mathrm{A}} \hat{x}(a)\overline{\hat{y}(a)} =< \hat{x}, \hat{y} > \text{ , όπου } \hat{x}, \hat{y} \in \ell_2(\mathrm{A})$$

Αν η (1) δεν ισχύει, από την **Πρόταση 1.2** θα υπάρχει $z \in \mathrm{H}$ με $\|z\| = 1$ τέτοιο, ώστε $< z, u_a >= 0 \ \ \forall a \in \mathrm{A}$. Τότε:

$$1 = < z, z > = \sum_{a \in A} \left| < z, u_a > \right|^2 = 0$$

Άτοπο.

Θεώρημα 1.7: Ένας χώρος $(H, < \cdot, \cdot >)$ είναι πλήρης, αν και μόνο αν κάθε μεγιστικό ορθοκανονικό σύνολο του Η είναι ορθοκανονική βάση.

Απόδειξη: Το ευθύ είναι άμεσο από το **Θεώρημα 1.6**. Πράγματι, αν ο Η είναι πλήρης, τότε κάθε μεγιστικό ορθοκανονικό σύνολό του είναι ορθοκανονική βάση.
Για το αντίστροφο πρόβλημα υποθέτουμε ότι ο χώρος Η δεν είναι πλήρης. Από το **Θεώρημα 1.2** υπάρχει Μ κλειστός υπόχωρος του Η, ώστε $M \neq H$ και $M^{\perp} = \{0\}$.
Από το **Λήμμα** του **Zorn** μπορούμε να επιλέξουμε ένα Β μεγιστικό ορθοκανονικό σύνολο του Μ. Πάλι από το **Λήμμα** του **Zorn**, μπορούμε να επεκτείνουμε το Β έτσι, ώστε το $B \bigcup B_1$ να είναι μεγιστικό ορθοκανονικό σύνολο του Η.
Εφόσον $M^{\perp} = \{0\}$, αν $x_j \in B_1$, τότε υπάρχει $y \in M$ τέτοιο, ώστε $< y, x_j > \neq 0$. Επειδή το $B \cup B_1$ είναι ορθοκανονική βάση του Η,

$$y = \sum_{i \in B} c_i y_i + \sum_{i \in B_1} d_i x_i \leftrightarrow z = \sum_{i \in B_1} d_i x_i = y - \sum_{i \in B} c_i y_i \in M$$

Εφόσον $x_i \perp B$ για κάθε $i \in B_1$, τότε $z \perp B$. Επομένως, $z = 0$, αφού το Β είναι μεγιστικό στο Μ. Συνεπώς:

$$d_j = < y, x_j > = < \sum_{i \in B} c_i y_i + \sum_{i \in B_1} d_i x_i, x_j > = \sum_{i \in B} c_i < y_i, x_j > = 0$$

το οποίο είναι άτοπο. Δηλαδή, το $B_1 = \varnothing$. Άρα, το Β είναι μεγιστικό ορθοκανονικό σύνολο του Η, το οποίο συνεπάγεται ότι $M = H$. Άτοπο, διότι υποθέσαμε $M \neq H$. Επομένως, $M^{\perp} \neq \{0\}$. Από το **Θεώρημα 1.2**, ο Η είναι πλήρης.

Πρόταση 1.5: Ο χώρος Hilbert Η είναι διαχωρίσιμος, αν και μόνο αν ο Η έχει μία αριθμήσιμη ορθοκανονική βάση.

Απόδειξη: Αν ο Η είναι διαχωρίσιμος, τότε από την **Πρόταση 1.3** μπορεί να κατασκευαστεί μία ορθοκανονική βάση με τη μέθοδο Gram-Schmidt.
Αντίστροφα, αν υπάρχει αριθμήσιμη ορθοκανονική βάση $\{x_1, ..., x_n, ...\}$ στο Η, τότε οι γραμμικοί συνδυασμοί των στοιχείων της βάσης με συντελεστές ρητούς αριθμούς αποτελούν ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του Η.

Ορισμός: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε την n-οστή συνάρτηση **Rademacher**, $r_n : [0,1] \to \{-1,0,1\}$ ως εξής:

$$r_n(t) = \begin{cases} 1 & \left(\dfrac{\kappa-1}{2^n}\right) \le t < \dfrac{\kappa}{2^n} \quad \kappa = \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma,\ 1 \le \kappa < 2^n \\ -1 & \left(\dfrac{\kappa-1}{2^n}\right) \le t < \dfrac{\kappa}{2^n} \quad \kappa = \acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma,\ 1 < \kappa \le 2^n \\ 0 & t = 1 \end{cases}$$

Συνοψίζοντας,

$$r_n(t) = \sum_{\kappa=0}^{2^n-1} (-1)^{\kappa+1} \mathrm{X}_{\left[\frac{\kappa}{2^n}, \frac{\kappa+1}{2^n}\right)} + \mathrm{X}_{\{1\}}, \quad 0 \le t \le 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Μία άλλη ισοδύναμη έκφραση των συναρτήσεων **Rademacher** είναι η ακόλουθη:

$$r_n(t) = \begin{cases} 1 & \alpha\nu \left[2^n.t\right] \acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma \\ -1 & \alpha\nu \left[2^n.t\right] \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma \end{cases},$$

η οποία γράφεται συνοπτικά στη μορφή:

$$r_n(t) = sign\left(\sin\left(2^n \pi t\right)\right) \text{ όπου } 0 \le t \le 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Λήμμα 1.3: Αν οι φυσικοί αριθμοί $\{\kappa_1, ..., \kappa_n\}$ είναι διάφοροι μεταξύ τους και $\kappa_1 < ... < \kappa_n$, τότε ισχύει ότι:

$$\int_0^1 r_{\kappa_1}(t) ... r_{\kappa_n}(t)\, dt = 0$$

Απόδειξη: Έστω ότι $\kappa_n = \max\{\kappa_1, ..., \kappa_n\}$. Από τον ορισμό της r_{κ_n} άμεσα προκύπτει ότι σε κάθε διάστημα όπου η συνάρτηση $r_{\kappa_1} \cdot r_{\kappa_2} \cdots r_{\kappa_{n-1}}$ είναι σταθερή η r_{κ_n} παίρνει τις τιμές 1 και -1 καθεμιά με πιθανότητα $\dfrac{1}{2}$. Επομένως το ολοκλήρωμα είναι μηδέν σε κάθε τέτοιο διάστημα. Συνεπώς, το ολοκλήρωμα πάνω στο $[0,1]$ είναι μηδέν.

Παρατήρηση: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το $\int_0^1 \left(r_n(t)\right)^2 dt = 1$ και για κάθε $n,m \in \mathbb{N}$ το $\int_0^1 r_n(t) \cdot r_m(t)\, dt = 0$. Από την παρατήρηση προκύπτει η **Πρόταση 1.6**.

Πρόταση 1.6: Οι συναρτήσεις **Rademacher** $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο του $L_2[0,1]$.

Πρόταση 1.7: Οι συναρτήσεις **Rademacher** $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν αποτελούν ορθοκανονική βάση στον $L_2[0,1]$.

Απόδειξη: Πράγματι, έστω $r_o(t) = 1$ για κάθε $t \in [0,1]$, τότε $\int_0^1 r_o(t)^2\, dt = 1$. Συνεπώς, το $r_o \in L_2[0,1]$ και, επίσης, έχουμε ότι $< r_o, r_n > = \int_0^1 r_o(t) \cdot r_n(t)\, dt = \int_0^1 r_n(t)\, dt = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ωστόσο, ούτε και το σύνολο $(r_n)_{n=0}^{\infty}$ είναι μεγιστικό ορθοκανονικό σύνολο του $L_2[0,1]$. Πράγματι, εφόσον η $f(t) = \cos(2\pi t) \in L_2[0,1]$ με $\|f\|_2 = 1$, το εσωτερικό γινόμενο $< f, r_n > = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, $< r_1 \cdot r_2, r_n > = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\|r_1 \cdot r_2\|_2 = 1$.

Παρατήρηση: Έστω R το σύνολο των δυαδικών ρητών αριθμών του διαστήματος $[0,1]$, δηλαδή αριθμών της μορφής $\frac{m}{2^n}$ με $m = 0,1,...,2^n$ και $n = 1,2,...$.
Το R είναι αριθμήσιμο σύνολο και, επομένως, έχει μέτρο **Lebesgue** μηδέν. Πράγματι, έστω $R = \{a_1,...,a_n,...\}$ και $\varepsilon > 0$. Τότε ισχύει ότι $R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(a_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, a_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right)$. Επομένως,

$$\lambda^*(R) \le \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*\left(a_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, a_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

Εφόσον το ε είναι τυχαίο, το $\lambda^*(R) = 0$.

Κάθε $t \in (0,1] \setminus R$ έχει μοναδικό δυαδικό ανάπτυγμα της μορφής $t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n}$, όπου $b_n = 0$ ή $b_n = 1$. Από τον ορισμό των συναρτήσεων Rademacher έχουμε ότι $r_n(t) = 1$ αν $b_n = 0$, ενώ $r_n(t) = 0$ αν $b_n = 1$.

Εάν το $t = 1$, προκύπτει άμεσα ότι $b_n = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και εξ' ορισμού η $r_n(1) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Για την περίπτωση που $t \in (0,1) \setminus R$ θα χρησιμοποιηθεί η ισοδύναμη έκφραση των συναρτήσεων Rademacher. Είναι προφανές ότι:

$$2^n \cdot t = 2^n . \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{b_\kappa}{2^\kappa} = b_n + 2^n \cdot \sum_{\kappa=1}^{n-1} \frac{b_\kappa}{2^\kappa} + 2^n \cdot \sum_{\kappa=n+1}^{\infty} \frac{b_\kappa}{2^\kappa} = b_n + a$$

Για τον δεύτερο όρο του a ισχύει ότι $2^n \cdot \sum_{\kappa=n+1}^{\infty} \frac{b_\kappa}{2^\kappa} = 2^n \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{2^{n+i}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{2^i} < 1$. Επίσης, εφόσον $\kappa < n$ και $2^n \cdot \sum_{\kappa=1}^{n-1} \frac{b_\kappa}{2^\kappa} = \sum_{\kappa=1}^{n-1} b_\kappa \cdot 2^{n-\kappa} = 2 \cdot \sum_{\kappa=1}^{n-1} b_\kappa \cdot 2^{n-\kappa-1}$, ο πρώτος όρος του a είναι άρτιος αριθμός.

Επομένως, αν $b_n = 0$ έχουμε ότι $\left[2^n \cdot t\right] = \left[b_n + 2^n \cdot a\right] = \left[2^n \cdot a\right]$ είναι άρτιος και, άρα, εξ' ορισμού ο $r_n(t) = 1$. Αν $b_n = 1$, ισχύει ότι ο $\left[2^n \cdot t\right] = \left[b_n + 2^n \cdot a\right] = \left[1 + 2^n \cdot a\right]$ είναι περιττός και, άρα, πάλι εξ' ορισμού, ο $r_n(t) = -1$.

Επομένως, το $t \in (0,1] \setminus R$ ορίζει μία ακολουθία προσήμων $\left(r_1(t), r_2(t), r_3(t), \ldots\right)$. Διαφορετικά t ορίζουν διαφορετικές ακολουθίες προσήμων. Εφόσον το $t \notin R$, η ακολουθία των συναρτήσεων **Rademacher** δεν είναι τελικά σταθερή, δηλαδή περιέχει τα $+1$, -1 άπειρες φορές. Τέλος, κάθε ακολουθία προσήμων που δεν είναι τελικά σταθερή αντιστοιχεί σε ένα μοναδικό $t \in (0,1] \setminus R$.

Θεώρημα 1.8: Έστω $f \in L_1\left(\mathbb{R}^m\right)$, τότε σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}^m$ συνεπάγεται ότι:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|c_n|} \int_{\bar{C}_n} f(t)\,dt = f(x)$$

για κάθε ακολουθία κύβων C_n με $x \in C_n$ και $\delta(C_n) \to 0$. Είναι

$$\delta(C_n) = \sup_{x,y \in C_n} \{\|x-y\|\} \text{ και } |C_n| \text{ το μέτρο Lebesgue του } C_n$$

Θεώρημα 1.9 (Rademacher): Αν $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία μιγαδικών αριθμών, με $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot r_n(t)$ συγκλίνει σχεδόν παντού στο $[0,1]$.

Απόδειξη: Εφόσον $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$ και ο $L_2([0,1])$ είναι πλήρης χώρος με εσωτερικό γινόμενο, από το **Θεώρημα 1.5** του **Riesz-Fischer** υπάρχει $\varphi \in L_2([0,1])$ τέτοιο, ώστε:

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi - S_n\|_2 = \lim_{n\to\infty} \left(\int_0^1 |\varphi(t) - S_n(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = 0 \quad \text{όπου } S_n(t) = \sum_{\kappa=1}^{n} a_\kappa r_\kappa(t)$$

Εφόσον το $\lambda([0,1]) = 1 < \infty$, έχουμε ότι για $1 \le r \le s \le \infty$ και $\varphi \in L_s$:

$$\|\varphi\|_r \le \begin{cases} \|\varphi\|_s \, \lambda([0,1])^{\left(\frac{1}{r}\right)-\left(\frac{1}{s}\right)} = \|\varphi\|_s, & s < \infty \\ \|\varphi\|_s \, \lambda([0,1])^{\left(\frac{1}{r}\right)} = \|\varphi\|_s, & s = \infty \end{cases}$$

Συνεπώς, το $\varphi \in L_1([0,1])$ και ισχύει ότι:

$$\left| \int_0^1 \varphi(t)\,dt - \int_0^1 S_n(t)\,dt \right| \le \int_0^1 |\varphi(t) - S_n(t)|\,dt \le \left(\int_0^1 |\varphi(t) - S_n(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

Δηλαδή, $\lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(t)\,dt = \int_a^b \varphi(t)\,dt$ για κάθε $a,b \in [0,1]$ με $0 \le a < b \le 1$.

Έστω $t_o \in [0,1] \setminus R$. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$, υπάρχει μοναδικό διάστημα $\left(\frac{j}{2^m}, \frac{j+1}{2^m} \right)$ έτσι, ώστε $t_o \in \left(\frac{j}{2^m}, \frac{j+1}{2^m} \right)$. Η $r_\kappa(t)$ είναι σταθερή για $\kappa \le m$ και για $m < \kappa$ εμφανίζει τις τιμές ± 1 με την ίδια πιθανότητα $\frac{1}{2}$. Επομένως, για $n > m$ προκύπτει ότι:

$$\int_{\frac{j}{2^m}}^{\frac{j+1}{2^m}} \left(S_n(t) - S_m(t) \right) dt = \int_{\frac{j}{2^m}}^{\frac{j+1}{2^m}} \sum_{\kappa=m+1}^{n} a_\kappa r_\kappa(t)\,dt = \sum_{\kappa=m+1}^{n} a_\kappa \int_{\frac{j}{2^m}}^{\frac{j+1}{2^m}} r_\kappa(t)\,dt = 0$$

Συνεπώς. $\lim_{n\to\infty} \int_{\frac{j}{2^m}}^{\frac{j+1}{2^m}} \left(S_n(t) - S_m(t)\right) dt = 0$. Από τα προαναφερόμενα προκύπτει άμεσα ότι:

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{j}{2^m}}^{\frac{j+1}{2^m}} \left(S_n(t) - \varphi(t) - S_m(t) + \varphi(t)\right) dt$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\| S_n(t) - \varphi(t) \right\|_1 + \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{j}{2^m}}^{\frac{j+1}{2^m}} \left(\varphi(t) - S_m(t)\right) dt$$

$$= \int_{\frac{j}{2^m}}^{\frac{j+1}{2^m}} \left(\varphi(t) - S_m(t)\right) dt$$

Δεδομένου ότι το $S_m(t)$ είναι σταθερό στο διάστημα $\left(\frac{j}{2^m}, \frac{j+1}{2^m}\right)$, ισχύει ότι:

$$\int_{\frac{j}{2^m}}^{\frac{j+1}{2^m}} S_m(t)\, dt = \int_{\frac{j}{2^m}}^{\frac{j+1}{2^m}} \varphi(t)\, dt = S_m(t_o)\left(\frac{j+1}{2^m} - \frac{j}{2^m}\right) \leftrightarrow S_m(t_o) = \frac{1}{\left(\frac{j+1}{2^m} - \frac{j}{2^m}\right)} \int_{\frac{j}{2^m}}^{\frac{j+1}{2^m}} \varphi(t)\, dt$$

Από το **Θεώρημα 1.8** ισχύει ότι:

$$\lim_{m\to\infty} S_m(t_o) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{j+1}{2^m} - \frac{j}{2^m}\right)} \int_{\frac{j}{2^m}}^{\frac{j+1}{2^m}} \varphi(t)\, dt = \varphi(t_o)$$

Άρα, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n r_n(t)$ συγκλίνει σχεδόν παντού στο $[0,1]$.

Πόρισμα 1.3: Έστω $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ορθοκανονικό σύνολο του $L_2([a,b])$. Αν

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty,$$

τότε, σχεδόν για κάθε ακολουθία προσήμων $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, όπου $\varepsilon_n = \pm 1$, η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \cdot a_n \cdot \psi_n(t) < \infty$$

συγκλίνει σχεδόν παντού στο $[a,b]$.

Απόδειξη: Θέτουμε $S_n(t) = \sum_{\kappa=1}^{n} |\alpha_\kappa \psi_\kappa(t)|^2$. Εφόσον η ψ_n είναι μετρήσιμη συνάρτηση για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε και η $S_n = \sum_{\kappa=1}^{n} |\alpha_\kappa \psi_\kappa|^2$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Επίσης, η $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα, δηλαδή για κάθε $t \in [a,b]$ ισχύει ότι:

$$S_1(t) \le S_2(t) \le \ldots \le S_n(t) \le \ldots$$

Τέλος, η $S_n \in L_1[a,b]$, εφόσον η $\alpha_n \psi_n \in L_2([a,b])$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή η S_n είναι μετρήσιμη για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε η συνάρτηση $S:[a,b] \to [0,\infty]$:

$$S(t) = \lim_{n\to\infty} S_n(t) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} |\alpha_\kappa \psi_\kappa(t)|^2 \quad \text{για κάθε } t \in [a,b]$$

είναι μετρήσιμη. Από το **Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης** ισχύει ότι:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(t)\,dt = \int_a^b S(t)\,dt$$

Άμεσα προκύπτει ότι:

$$\int_a^b S_n(t)\,dt = \sum_{\kappa=1}^{n} |\alpha_\kappa|^2 \int_a^b |\psi_\kappa(t)|^2\,dt = \sum_{\kappa=1}^{n} |\alpha_\kappa|^2 < \sum_{\kappa=1}^{\infty} |\alpha_\kappa|^2 < \infty$$

Δηλαδή, η θετική ακολουθία $\left(\int_a^b S_n(t)\,dt \right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα και φραγμένη. Συνεπώς, $\lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(t)\,dt = \int_a^b S(t)\,dt = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_a^b S_n(t)\,dt < \infty$, με αποτέλεσμα το $S < \infty$ σχεδόν παντού. Τότε $S(t) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} |\alpha_\kappa \psi_\kappa(t)|^2 < \infty$ σχεδόν για κάθε $t \in [a,b]$. Από το **Θεώρημα 1.9**, σχεδόν για κάθε $t \in [a,b]$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \psi_n(t) r_n(x)$ συγκλίνει σχεδόν για όλα τα $x \in [0,1]$.

Θέτουμε C το σύνολο των σημείων $(x,t) \in [0,1] \times [a,b]$, όπου η $S(t)$ συγκλίνει. Η X_C είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση στο C με $\mathrm{X}_C(x,t) = 1$ σχεδόν για κάθε

$t \in [a,b]$ για σχεδόν όλα τα $x \in [0,1]$. Παρατηρούμε ότι οι χώροι $([0,1], Borel, \lambda)$ $([a,b], Borel, \lambda)$ είναι σ-πεπερασμένοι. Από το **Θεώρημα** του **Fubini** υπάρχει μοναδικό μέτρο γινομένου ρ στον $([a,b]\times[0,1], Borel \otimes Borel)$, ώστε:

$$b-a=\lambda([a,b])\cdot\lambda([0,1])=\rho([a,b]\times[0,1])=\int_a^b\int_0^1 \chi_C(x,t)\,dxdt=\int_0^1\int_a^b \chi_C(x,t)\,dtdx$$

Αν το **Πόρισμα 1.3** δεν ίσχυε, τότε θα είχαμε ότι $b-a>\int_0^1\int_a^b \chi_C(x,t)\,dtdx$. Άτοπο.

Ορισμός: Έστω $\{f_n : \mathrm{X}\to\mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f:\mathrm{X}\to\mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Η $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στην f σχεδόν ομοιόμορφα, αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $C\in A$ (A: σ-άλγεβρα) με $\mu(C)<\varepsilon$ ώστε $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f$ ομοιόμορφα στο $\mathrm{X}\setminus \mathrm{C}$.

Θεώρημα 1.10 (Egorov): Έστω $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων με $f_n:\mathrm{X}\to\mathbb{R}$. Η απεικόνιση $f:\mathrm{X}\to\mathbb{R}$ είναι μία μετρήσιμη συνάρτηση, ώστε $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f$ μ-σχεδόν παντού. Αν το μ είναι πεπερασμένο, τότε $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f$ σχεδόν ομοιόμορφα.

Απόδειξη: Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και $\delta>0$ ορίζουμε το σύνολο $\mathrm{A}_n^\delta=\left[|f_n-f|\geq\delta\right]$. Εφόσον $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f$ μ-σχεδόν παντού, τότε $\mu\left(\limsup_{n\to\infty}\mathrm{A}_n^\delta\right)=0$. Πράγματι, θέτουμε

$$\mathrm{A}=\left\{x\in\mathrm{X}:\ \lim_{n\to\infty} f_n(x)\neq f(x)\right\}$$

$$=\left\{x\in\mathrm{X}:\ \exists\ \varepsilon>0\ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ |f_n(x)-f(x)|\geq\varepsilon\ \gamma\iota\alpha\ \acute{\alpha}\pi\varepsilon\iota\rho\alpha\ n\right\}$$

$$=\bigcup_{\varepsilon>0}\left\{x\in\mathrm{X}: |f_n(x)-f(x)|\geq\varepsilon\ \gamma\iota\alpha\ \acute{\alpha}\pi\varepsilon\iota\rho\alpha\ n\right\}$$

$$=\bigcup_{\varepsilon>0}\limsup_{n\to\infty}\left[|f_n-f|\geq\varepsilon\right]$$

$$=\bigcup_{\kappa\in\mathbb{N}}\limsup_{n\to\infty}\left[|f_n-f|\geq\frac{1}{\kappa}\right]=\bigcup_{\kappa=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}\left[|f_m-f|\geq\frac{1}{\kappa}\right]$$

Δηλαδή, το Α είναι μετρήσιμο. Συνεπώς ισχύει ότι:

$$0 \le \mu\left(\limsup_{n\to\infty}\left[\left|f_n - f\right| \ge \frac{1}{\kappa}\right]\right) \le \mu\left(\bigcup_{\kappa\in\mathbb{N}}\limsup_{n\to\infty}\left[\left|f_n - f\right| \ge \frac{1}{\kappa}\right]\right) = \mu(\mathrm{A}) = 0 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \mu\left(\limsup_{n\to\infty}\mathrm{A}_n^{1/\kappa}\right) = 0 \quad \forall \kappa \in \mathbb{N}$$

Εφόσον το μ είναι πεπερασμένο, άμεσα προκύπτει ότι:

$$\mu\left(\limsup_{n\to\infty}\mathrm{A}_n^{1/\kappa}\right) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}\mathrm{A}_m^{1/\kappa}\right) = \lim_{n\to\infty}\mu\left(\bigcup_{m=n}^{\infty}\mathrm{A}_m^{1/\kappa}\right) = 0 \qquad \forall \kappa \in \mathbb{N}$$

Από τον ορισμό του ορίου έχουμε ότι, αν $\varepsilon > 0$, τότε για κάθε $\kappa \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n_\kappa \in \mathbb{N}$ έτσι, ώστε $\mu\left(\bigcup_{m=n_\kappa}^{\infty}\mathrm{A}_m^{1/\kappa}\right) < \frac{\varepsilon}{2^\kappa}$. Θέτουμε $C = \bigcup_{\kappa=1}^{\infty}\bigcup_{m=n_\kappa}^{\infty}\mathrm{A}_m^{1/\kappa}$. Τότε:

$$\mu(C) \le \sum_{\kappa=1}^{\infty}\mu\left(\bigcup_{m=n_\kappa}^{\infty}\mathrm{A}_m^{1/\kappa}\right) < \sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^\kappa} = \varepsilon$$

και το $\mathrm{X}\setminus\mathrm{C} \subset \mathrm{X}\setminus\bigcup_{m=n_\kappa}^{\infty}\mathrm{A}_m^{1/\kappa} \quad \forall \kappa \in \mathbb{N}$. Επομένως, αν $x \in \mathrm{X}\setminus\mathrm{C}$, τότε $x \notin \bigcup_{m=n_\kappa}^{\infty}\mathrm{A}_m^{1/\kappa}$ $\forall \kappa \in \mathbb{N}$. Δηλαδή, αν $\kappa \in \mathbb{N}$ η $\left|f_n(x) - f(x)\right| < \frac{1}{\kappa}$ για κάθε $n \ge n_\kappa$ και για κάθε $x \in \mathrm{X}\setminus\mathrm{C}$. Άρα $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f$ ομοιόμορφα στο $\mathrm{X}\setminus\mathrm{C}$.

Θεώρημα 1.11 (Kinchine-Kolmogorov): Αν $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2=\infty$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n r_n(t)$ αποκλίνει σχεδόν παντού.

Απόδειξη: Η απόδειξη θα γίνει δια της εις άτοπον επαγωγής. Θεωρούμε $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{C}$ με $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2=\infty$. Έστω ότι υπάρχει ένα σύνολο E πεπερασμένου θετικού μέτρου **Lebesgue** έτσι, ώστε η $\sum_{n=1}^{\infty}a_n r_n(t)$ να συγκλίνει σχεδόν παντού σε αυτό. Από το **Θεώρημα 1.10** του **Egorov** η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο E.

Θέτουμε $S_n(t)=\sum_{\kappa=1}^{n}a_\kappa r_\kappa(t)$. Η ακολουθία $\left(S_n(t)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι **Cauchy** σχεδόν για κάθε $t\in\mathrm{E}$. Έστω $\varepsilon>0$, τότε υπάρχει $n_o(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ έτσι, ώστε για κάθε $n>m\geq n_o(\varepsilon)$ να ισχύει ότι:

$$\left|S_n(t)-S_m(t)\right|=\left|\sum_{\kappa=m+1}^{n}a_\kappa r_\kappa(t)\right|<\varepsilon$$

Συνεπώς,

$$\varepsilon^2\lambda(\mathrm{E})=\int_{\mathrm{E}}\varepsilon^2 dt\ \geq\ \int_{\mathrm{E}}\left|\sum_{\kappa=m+1}^{n}a_\kappa r_\kappa(t)\right|^2 dt$$

$$=\sum_{\kappa=m+1}^{n}\int_{\mathrm{E}}\left|a_\kappa r_\kappa(t)\right|^2 dt+2\,\mathrm{Re}\left[\sum_{\substack{j,\kappa=m+1\\ j<\kappa}}^{n}a_\kappa\overline{a}_j\int_{\mathrm{E}}r_j(t)r_\kappa(t)dt\right]$$

$$=\lambda(\mathrm{E})\sum_{\kappa=m+1}^{n}|a_\kappa|^2+2\,\mathrm{Re}\left[\sum_{\substack{j,\kappa=m+1\\ j<\kappa}}^{n}a_\kappa\overline{a}_j\int_{\mathrm{E}}r_j(t)r_\kappa(t)dt\right]$$

Όπως ήδη έχει αναφερθεί σε προηγούμενο Θεώρημα, η $\left(r_i r_j\right)_{i,j\in\mathbb{N}}^{i\neq j}$ αποτελεί ορθοκανονικό σύνολο στον $L_2\left([0,1]\right)$. Θέτουμε:

$$\hat{\mathrm{X}}_{\mathrm{E}}(j,\kappa)=<\mathrm{X}_{\mathrm{E}}(t),r_j(t)r_\kappa(t)>=\int_{[0,1]}\mathrm{X}_{\mathrm{E}}(t)r_j(t)r_\kappa(t)dt=\int_{\mathrm{E}}r_j(t)r_\kappa(t)dt$$

Από την ανισότητα **Bessel** προκύπτει ότι:

$$\sum_{\substack{j,\kappa=m+1\\ j<\kappa}}^{\infty}\left|\hat{\mathrm{X}}_{\mathrm{E}}(j,\kappa)\right|^2 \le \|\mathrm{X}_{\mathrm{E}}\|_2^2 = \int_{[0,1]}\left|\mathrm{X}_{\mathrm{E}}(t)\right|^2 dt = \lambda(\mathrm{E}) < \infty$$

Εφόσον για $m \to \infty$ η ακολουθία $\left\{\sum\limits_{\substack{j,\kappa=m+1\\ j<\kappa}}^{\infty}\left|\hat{\mathrm{X}}_{\mathrm{E}}(j,\kappa)\right|^2\right\}_{m\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο μηδέν, τότε για κατάλληλα μεγάλο m ισχύει ότι:

$$\sum_{\substack{j,\kappa=m+1\\ j<\kappa}}^{\infty}\left|\int_{[0,1]}\mathrm{X}_{\mathrm{E}}(t)\,r_j(t)\,r_\kappa(t)\,dt\right|^2 < \left(\frac{\lambda(\mathrm{E})}{4}\right)^2$$

Από την ανισότητα **Cauchy-Schwartz** συνεπάγεται ότι:

$$\mathrm{Re}\left\{\sum_{\substack{j,\kappa=m+1\\ j<\kappa}}^{n} a_\kappa \bar{a}_j \int_{\mathrm{E}} r_j(t)\,r_\kappa(t)\,dt\right\} \le \left|\sum_{\substack{j,\kappa=m+1\\ j<\kappa}}^{n} a_\kappa \bar{a}_j \int_{\mathrm{E}} r_j(t)\,r_\kappa(t)\,dt\right|$$

$$\le \left\{\sum_{\substack{j,\kappa=m+1\\ j<\kappa}}^{n} |a_\kappa|^2 |a_j|^2\right\}^{1/2} \left\{\sum_{\substack{j,\kappa=m+1\\ j<\kappa}}^{n} \left|\int_{\mathrm{E}} r_j(t)\,r_\kappa(t)\,dt\right|^2\right\}^{1/2}$$

$$\le \left\{\sum_{\substack{j,\kappa=m+1\\ j<\kappa}}^{n} |a_\kappa|^2 \cdot |a_j|^2\right\}^{1/2} \frac{\lambda(\mathrm{E})}{4} \le \frac{\lambda(\mathrm{E})}{4}\sum_{\kappa=m+1}^{n}|a_\kappa|^2$$

Συνεπώς, από τα προαναφερόμενα προκύπτει ότι:

$$\varepsilon^2\lambda(\mathrm{E}) \ge \lambda(\mathrm{E})\sum_{\kappa=m+1}^{n}|a_\kappa|^2 - \frac{\lambda(\mathrm{E})}{2}\sum_{\kappa=m+1}^{n}|a_\kappa|^2 = \frac{\lambda(\mathrm{E})}{2}\sum_{\kappa=m+1}^{n}|a_\kappa|^2$$

Επομένως, για κάθε $n > m$ τα μερικά αθροίσματα $\sum\limits_{\kappa=m+1}^{n}|a_\kappa|^2 \le 2\varepsilon^2 < \infty$ είναι φραγμένα από το $2\varepsilon^2$. Δηλαδή, η σειρά $\sum\limits_{\kappa=m+1}^{\infty}|a_\kappa|^2 < 2\varepsilon^2$ είναι πεπερασμένη. Τότε, ισχύει ότι $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 < \infty$, το οποίο εξ' υποθέσεως είναι άτοπο.

Πρόταση 1.8: Έστω $(f_i)_{i\in\mathrm{I}}$ ανεξάρτητη οικογένεια τυχαίων μεταβλητών και $\{\varphi_i : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\}_{i\in\mathrm{I}}$ **Borel** μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε η οικογένεια $(\varphi_i \circ f_i)_{i\in\mathrm{I}}$ είναι ανεξάρτητη.

Απόδειξη: Είναι προφανές ότι για κάθε $i \in \mathrm{I}$ η $\varphi_i \circ f_i$ είναι τυχαία μεταβλητή. Είναι άμεσο ότι $\sigma(\varphi_i \circ f_i) \subset \sigma(f_i)$. Πράγματι,

$$\sigma(\varphi_i \circ f_i) = (\varphi_i \circ f_i)^{-1}\left(B(\mathbb{C})\right) = f_i^{-1}\left(\varphi_i^{-1}\left(B(\mathbb{C})\right)\right) \subset f_i^{-1}\left(B(\mathbb{C})\right) = \sigma(f_i)$$

Συνεπώς, η οικογένεια $(\varphi_i \circ f_i)_{i\in\mathrm{I}}$ είναι ανεξάρτητη.

Πρόταση 1.9: Έστω (X, A, μ) ένας χώρος μέτρου πιθανότητας. Θέτουμε $\Delta_i \subset A$ για κάθε $i \in \mathrm{I}$, ώστε κάθε Δ_i να είναι κλειστό ως προς τις πεπερασμένες τομές και η οικογένεια $(\Delta_i)_{i\in\mathrm{I}}$ να είναι ανεξάρτητη. Τότε, η οικογένεια $(\sigma(\Delta_i))_{i\in\mathrm{I}}$ είναι, επίσης, ανεξάρτητη.

Πρόταση 1.10: Έστω (X, A, μ) ένας χώρος μέτρου πιθανότητας, $(f_i)_{i\in\mathrm{I}}$ ανεξάρτητη οικογένεια τυχαίων μεταβλητών και $\{\mathrm{I}_j : j \in J\}$ μια διαμέριση του Ι. Τότε, η οικογένεια $\left(\sigma\left((f_i)_{i\in\mathrm{I}_j}\right)\right)_{j\in J} = \left(\sigma\left(\bigcup_{i\in\mathrm{I}_j}\sigma(f_i)\right)\right)_{j\in J}$ είναι ανεξάρτητη.

Πρόταση 1.11: Έστω (X, A, μ) ένας χώρος μέτρου πιθανότητας και $(f_i)_{i=1}^n$ ανεξάρτητη οικογένεια τυχαίων μεταβλητών. Αν $f_i \in L_1(\lambda)$ για κάθε $i = 1,\ldots,n$, τότε ισχύει ότι:

1. $f_1 \cdot f_2 \cdots f_n \in L_1(\lambda)$
2. $\mathrm{E}(f_1 \cdot f_2 \cdots f_n) = \mathrm{E}(f_1)\cdot \mathrm{E}(f_2)\cdots \mathrm{E}(f_n)$

Απόδειξη: Εφόσον η $(f_i)_{i=1}^n$ είναι οικογένεια τυχαίων μεταβλητών, τότε ισχύει ότι $\sigma(f_1 \cdot f_2 \cdots f_n) \subset \sigma(f_1, f_2, \ldots, f_n)$. Επειδή η $(f_i)_{i=1}^n$ είναι ανεξάρτητη, τότε από την **Πρόταση 1.10** προκύπτει ότι για κάθε $i = 1,2,\ldots,n-1$ η οικογένεια $(f_1 \cdot f_2 \cdots f_i, f_{i+1})$ είναι ανεξάρτητη.

Η απόδειξη θα γίνει σε τέσσερα βήματα για $n=2$. Για τυχαίο n αποδεικνύεται επαγωγικά.

1. Έστω $f_1 = \mathrm{X}_{\mathrm{A}_1}$ και $f_2 = \mathrm{X}_{\mathrm{A}_2}$, όπου $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2 \in A$. Εφόσον η οικογένεια $\left(f_i\right)_{i=1}^2$ είναι ανεξάρτητη, τότε και η οικογένεια $\left\{\mathrm{A}_i\right\}_{i=1}^2$ είναι ανεξάρτητη. Πράγματι, εφόσον η $\sigma\left(\mathrm{X}_{\mathrm{A}_i}\right) = \left\{\mathrm{A}_i, \mathrm{X} \setminus \mathrm{A}_i, \varnothing, \mathrm{X}\right\}$ για $i=1,2$ και, εξ' υποθέσεως, η οικογένεια $\left\{\sigma\left(\mathrm{X}_{\mathrm{A}_i}\right)\right\}_{i=1}^2$ είναι ανεξάρτητη, συνεπάγεται ότι και η οικογένεια $\left\{\mathrm{A}_i\right\}_{i=1}^2$ είναι ανεξάρτητη. Επομένως ισχύει ότι:

$$\mathrm{E}\left(f_1 \cdot f_2\right) = \mathrm{E}\left(\mathrm{X}_{\mathrm{A}_1} \cdot \mathrm{X}_{\mathrm{A}_2}\right) = \mathrm{E}\left(\mathrm{X}_{\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2}\right)$$

$$= \lambda\left(\mathrm{A}_1 \bigcap \mathrm{A}_2\right) = \lambda\left(\mathrm{A}_1\right) \cdot \lambda\left(\mathrm{A}_2\right) = \mathrm{E}\left(f_1\right) \cdot \mathrm{E}\left(f_2\right)$$

2. Έστω f_1, f_2 απλές θετικές συναρτήσεις, με κανονικές μορφές $f_1 = \sum_{i=1}^n a_i \mathrm{X}_{\mathrm{A}_i}$ $f_2 = \sum_{j=1}^m b_j \mathrm{X}_{\mathrm{B}_j}$. Άμεσα προκύπτει ότι $\left\{\mathrm{A}_i\right\}_{i=1}^n \subset \sigma\left(f_1\right)$ και $\left\{\mathrm{B}_j\right\}_{j=1}^m \subset \sigma\left(f_2\right)$. Εφόσον η οικογένεια $\left(f_i\right)_{i=1}^2$ είναι ανεξάρτητη, τότε και η οικογένεια $\left\{\left\{\mathrm{A}_i\right\}_{i=1}^n, \left\{\mathrm{B}_i\right\}_{i=1}^n\right\}$, είναι ανεξάρτητη. Συνεπώς ισχύει ότι:

$$\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^n a_i \mathrm{X}_{\mathrm{A}_i} \cdot \sum_{j=1}^m b_j \mathrm{X}_{\mathrm{B}_j}\right) = \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j \mathrm{X}_{\mathrm{A}_i} \mathrm{X}_{\mathrm{B}_j}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j \mathrm{E}\left(\mathrm{X}_{\mathrm{A}_i} \mathrm{X}_{\mathrm{B}_j}\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j \mathrm{E}\left(\mathrm{X}_{\mathrm{A}_i}\right) \mathrm{E}\left(\mathrm{X}_{\mathrm{B}_j}\right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n a_i \mathrm{E}\left(\mathrm{X}_{\mathrm{A}_i}\right)\right)\left(\sum_{j=1}^m b_j \mathrm{E}\left(\mathrm{X}_{\mathrm{B}_j}\right)\right) = \mathrm{E}\left(f_1\right)\mathrm{E}\left(f_2\right)$$

3. Έστω $f_1, f_2 \in L_1(\lambda)$ με $f_1, f_2 \geq 0$. Τότε υπάρχουν $\left(s_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(\tau_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ αύξουσες ακολουθίες απλών συναρτήσεων, ώστε $\lim_{n\to\infty} s_n = f_1$ και $\lim_{n\to\infty} \tau_n = f_2$. Συνεπώς, η $\left(s_n \tau_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα ακολουθία απλών θετικών συναρτήσεων και $\lim_{n\to\infty} s_n \tau_n = f_1 f_2$. Άμεση συνέπεια της κατασκευής των $\left(s_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ και $\left(\tau_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$

είναι ότι $\sigma(s_n)\subset\sigma(f_1)$ και $\sigma(\tau_n)\subset\sigma(f_2)$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Συνεπώς, εφόσον η οικογένεια $(f_i)_{i=1}^{2}$ είναι ανεξάρτητη, συνεπάγεται ότι και η οικογένεια $\{s_n,\tau_n\}$ είναι ανεξάρτητη για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Επομένως, $\mathrm{E}(s_n\cdot\tau_n)=\mathrm{E}(s_n)\cdot\mathrm{E}(\tau_n)$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και από το **Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης** προκύπτει ότι:

$$\mathrm{E}(f_1\cdot f_2)=\mathrm{E}\left(\lim_{n\to\infty}s_n\cdot\lim_{n\to\infty}\tau_n\right)=\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}(s_n\cdot\tau_n)=\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}(s_n)\cdot\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}(\tau_n)$$

$$=\mathrm{E}\left(\lim_{n\to\infty}s_n\right)\cdot\mathrm{E}\left(\lim_{n\to\infty}\tau_n\right)=\mathrm{E}(f_1)\cdot\mathrm{E}(f_2)$$

4. Έστω $f_1,f_2\in L_1(\lambda)$. Τότε $f_1=f_1^+-f_1^-$ και $f_2=f_2^+-f_2^-$, όπου f_1^+,f_1^-,f_2^+, $f_2^-\in L_1(\lambda)$ και είναι θετικές μετρήσιμες. Επίσης, ισχύει ότι $\sigma(f_1^+),\sigma(f_1^-)\subset\sigma(f_1)$ και $\sigma(f_2^+),\sigma(f_2^-)\subset\sigma(f_2)$. Εφόσον η οικογένεια $(f_i)_{i=1}^{n}$ είναι ανεξάρτητη, τότε έπεται η ανεξαρτησία των ζευγών (f_1^+,f_2^+), (f_1^+,f_2^-), (f_1^-,f_2^+), (f_1^-,f_2^-).

   Επίσης, ισχύει ότι $f_1\cdot f_2=f_1^+f_2^+-f_1^+f_2^--f_1^-f_2^+-f_2^-f_1^-$. Επομένως, $f_1\cdot f_2\in L_1(\lambda)$. Από τα προαναφερόμενα προκύπτει ότι:

$$\mathrm{E}(f_1\cdot f_2)=$$

$$=\mathrm{E}(f_1^+)\cdot\mathrm{E}(f_2^+)-\mathrm{E}(f_1^+)\cdot\mathrm{E}(f_2^-)-\mathrm{E}(f_1^-)\cdot\mathrm{E}(f_2^+)-\mathrm{E}(f_1^-)\cdot\mathrm{E}(f_2^-)$$

$$=\mathrm{E}(f_1)\cdot\mathrm{E}(f_2)$$

Πρόταση 1.12: Η ακολουθία των συναρτήσεων **Rademacher** $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητη, όπου $r_n : \left([0,1], B([0,1]), \lambda\right) \to \left(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda\right)$.

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι η οικογένεια $\left(\left\{[r_n \le b] : b \in \mathbb{R}\right\}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητη.

Πράγματι, έστω $C \subset \mathbb{R}$, τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι $r_n^{-1}\left(\sigma(C)\right) = \sigma\left(r_n^{-1}(C)\right)$. Εφόσον το $B(\mathbb{R}) = \sigma\left(\left\{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\right\}\right)$, συνεπάγεται ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$:

$$\sigma(r_n) = r_n^{-1}\left(\sigma\left(\left\{(-\infty,b] : b \in \mathbb{R}\right\}\right)\right) =$$

$$= \sigma\left(r_n^{-1}\left(\left\{(-\infty,b] : b \in \mathbb{R}\right\}\right)\right) = \sigma\left(\left\{[r_n \le b] : b \in \mathbb{R}\right\}\right)$$

Το σύνολο $\left\{[r_n \le b] : b \in \mathbb{R}\right\}$ είναι κλειστό ως προς τις πεπερασμένες τομές για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από την **Πρόταση 1.9** , αν η οικογένεια $\left(\left\{[r_n \le b] : b \in \mathbb{R}\right\}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητη, τότε και η οικογένεια $\left(\sigma\left(\left\{[r_n \le \beta] : \beta \in \mathbb{R}\right\}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητη. Συνεπώς, και η ακολουθία $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ θα είναι ανεξάρτητη. Άμεσα προκύπτει ότι:

$$[r_n \le b] = \begin{cases} \varnothing & b < -1 \\ [r_n = -1] & -1 \le b < 1 \\ [0,1] & 1 \le b \end{cases}$$

Αρκεί να δειχθεί ότι η ακολουθία $\left\{[r_n = -1]\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητη. Έστω η οικογένεια $\left(r_{n_i}\right)_{i=1}^{\kappa}$ με $n_1 < n_2 < \ldots < n_\kappa$. Από τον ορισμό των συναρτήσεων **Rademacher** συνεπάγεται ότι:

$$\left[r_{n_1} = -1\right] = \bigcup_{j=0}^{2^{n_1-1}-1} \left[\frac{2j}{2^{n_1}}, \frac{2j+1}{2^{n_1}}\right)$$

Δηλαδή το $\left[r_{n_1} = -1\right]$ είναι ένωση ξένων ανά δύο διαστημάτων $\mathrm{I}_j = \left[\frac{2j}{2^{n_1}}, \frac{2j+1}{2^{n_1}}\right)$ του $[0,1]$, το καθένα μήκους $1/2^{n_1}$. Η r_{n_2} παίρνει τιμές $\{-1,1\}$ εναλλάξ στα $2^{n_2-n_1}$ υποδιαστήματα του I_j το καθένα μήκους $1/2^{n_2}$. Επομένως:

$$\lambda\left(\mathrm{I}_j \cap \left[r_{n_2} = -1\right]\right) = \frac{1}{2}\lambda\left(\mathrm{I}_j\right)$$

Συνεπώς, ισχύει ότι:

$$\lambda\left(\left[r_{n_1}=-1\right]\cap\left[r_{n_2}=-1\right]\right)=\lambda\left(\bigcup_{j=0}^{2^{n_1-1}-1}\mathrm{I}_j\cap\left[r_{n_2}=-1\right]\right)=\lambda\left(\bigcup_{j=0}^{2^{n_1-1}-1}\left(\mathrm{I}_j\cap\left[r_{n_2}=-1\right]\right)\right)$$

$$=\sum_{j=0}^{2^{n_1-1}}\lambda\left(\mathrm{I}_j\cap\left[r_{n_2}=-1\right]\right)=\sum_{j=0}^{2^{n_1-1}}\frac{1}{2}\lambda\left(\mathrm{I}_j\right)=\frac{1}{2}\lambda\left(\bigcup_{j=0}^{2^{n_1-1}-1}\mathrm{I}_j\right)=\frac{1}{2}\lambda\left(\left[r_{n_1}=-1\right]\right)=\frac{1}{2^2}$$

Συνεχίζοντας επαγωγικά, έπεται ότι $\lambda\left(\bigcap_{i=1}^{\kappa}\left[r_{n_i}=-1\right]\right)=\frac{1}{2^\kappa}$.

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα που θα χρησιμοποιηθεί για την απόδειξη της ανισότητας **Grothendieck** και είναι σχετικό με τις συναρτήσεις **Rademacher** είναι η ανισότητα **Khinchine**.

Θεώρημα 1.12: Έστω $\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell_2$ πραγματική ακολουθία. Συνεπώς, ισχύει ότι $\sum_{n=1}^{\infty}\left|b_n\right|^2<\infty$. Τότε, για κάθε $0<p<\infty$ υπάρχουν σταθερές $\mathrm{A}_p,\mathrm{B}_p$ τέτοιες, ώστε:

$$\mathrm{A}_p\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|b_n\right|^2\right)^{1/2}\leq\left(\int_0^1\left|\sum_{n=1}^{\infty}b_nr_n\left(t\right)\right|^p dt\right)^{1/p}\leq\mathrm{B}_p\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|b_n\right|^2\right)^{1/2}$$

Δηλαδή, αν $\varphi(t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nr_n\left(t\right)$, τότε το $\varphi\in L_p\left(\left[0,1\right]\right)$.

Απόδειξη: Θεωρούμε ότι $2\leq p<\infty$. Αρχικά, υποθέτουμε ότι το $p=\kappa\in\mathbb{N}$ και ότι $f\left(t\right)=\sum_{n=1}^{m}b_nr_n\left(t\right)$. Στη συνέχεια, ορίζουμε:

$$g\left(t\right)=\frac{f\left(t\right)}{\left\|\left(b_n\right)\right\|_2}=\sum_{n=1}^{m}\frac{b_n}{\left\|\left(b_n\right)\right\|_2}r_n\left(t\right),\ \text{συνεπώς}\ \left\|g\left(t\right)\right\|_{L_2}=\left\|\frac{f\left(t\right)}{\left\|\left(b_n\right)\right\|_2}\right\|_{L_2}=\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{b_n^2}{\left\|\left(b_n\right)\right\|_2^2}\right)^{1/2}=1$$

Από το ανάπτυγμα Taylor της e^x άμεσα προκύπτει η σχέση:

$$\left|y\right|^\kappa<\kappa!\left(1+\frac{\left|y\right|^\kappa}{\kappa!}\right)\leq\kappa!\,e^{\left|y\right|}\ \text{για κάθε}\ y\in\mathbb{R}$$

Πράγματι, για τη δεύτερη ανισότητα ισχύει ότι: $|y|^{\kappa} \leq \kappa! + |y|^{\kappa} \leq \kappa!\left(1+\frac{|y|^{\kappa}}{\kappa!}\right) \leq \kappa!\, e^{|y|}$.

Επομένως,

$$\int_0^1 |g(t)|^{\kappa}\, dt < \kappa! \int_0^1 e^{|g(t)|} dt$$

$$\leq \kappa! \int_0^1 \left(e^{g(t)} + e^{-g(t)}\right) dt$$

$$= \kappa! \int_0^1 \prod_{n=1}^{m} e^{a_n r_n(t)} dt + \kappa! \int_0^1 \prod_{n=1}^{m} e^{-a_n r_n(t)} dt,$$

εφόσον $e^{|g(t)|} \leq \max\left\{e^{g(t)}, e^{-g(t)}\right\} \leq e^{g(t)} + e^{-g(t)}$ και $a_n = \frac{b_n}{\|(b_n)\|_2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ισχυρισμός 1: $\int_0^1 \prod_{n=1}^{m} e^{a_n r_n(t)} dt = \prod_{n=1}^{m} \cosh a_n$

$$\int_0^1 \prod_{n=1}^{m} e^{a_n r_n(t)} dt = \prod_{n=1}^{m} \int_0^1 e^{a_n r_n(t)} dt$$

$$= \prod_{n=1}^{m} \left(\int_{[r_n=1]} e^{a_n} d\lambda + \int_{[r_n=-1]} e^{-a_n} d\lambda \right)$$

$$= \prod_{n=1}^{m} \left(\frac{e^{a_n}}{2} + \frac{e^{-a_n}}{2} \right)$$

$$= \prod_{n=1}^{m} \cosh a_n$$

Επίσης, $\prod_{n=1}^{m} \int_0^1 e^{-a_n r_n(t)} dt =$

$$= \prod_{n=1}^{m} \left(\int_{[r_n=1]} e^{-a_n} d\lambda + \int_{[r_n=-1]} e^{a_n} d\lambda \right)$$

$$= \prod_{n=1}^{m} \left(\frac{e^{-a_n}}{2} + \frac{e^{a_n}}{2} \right) = \prod_{n=1}^{m} \cosh a_n$$

Το γινόμενο βγαίνει έξω από το ολοκλήρωμα, εφόσον οι $\left\{e^{a_n r_n(t)}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές στον $L_1([0,1], \lambda)$. Από την **Πρόταση 1.8**, οι

$\left\{e^{a_n r_n(t)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές ως σύνθεση της **Borel**-μετρήσιμης συνάρτησης (e^x συνεχής) και των $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συναρτήσεων.

Ισχυρισμός 2: Ισχύει ότι $\cosh x \le e^{\frac{x^2}{2}}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Πράγματι,
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n!}$$
$$\le \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!\cdot(n+1)\cdots 2n}$$
$$\le \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2\cdots 2\cdot n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^n n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}{n!} = e^{\frac{x^2}{2}}$$

Από τους **Ισχυρισμούς 1** και **2** και επειδή η $\|g(t)\|_{L_2} = 1$, ισχύει ότι:

$$\int_0^1 \prod_{n=1}^{m} e^{a_n r_n(t)}dt \le \prod_{n=1}^{m}\cosh a_n \le \prod_{n=1}^{m} e^{\frac{a_n^2}{2}} = e^{\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m}a_n^2} = e^{\frac{1}{2}}$$

$$\int_0^1 \prod_{n=1}^{m} e^{-a_n r_n(t)}dt \le \prod_{n=1}^{m}\cosh a_n \le \prod_{n=1}^{m} e^{\frac{a_n^2}{2}} = e^{\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m}a_n^2} = e^{\frac{1}{2}}$$

Συνεπώς, $\int_0^1 |g(t)|^{\kappa}\, dt < 2\kappa!e^{\frac{1}{2}} = 2p!e^{\frac{1}{2}}$.

Στη συνέχεια, θέτουμε $p \ge 2$ και κ ο μικρότερος φυσικός αριθμός, που είναι μεγαλύτερος ή ίσος του p. Εφόσον $\kappa \ge p$, συνεπάγεται ότι:

$$\|g\|_p \le \|g\|_\kappa \leftrightarrow \left(\int_0^1\left|\sum_{n=1}^{m}a_n r_n(t)\right|^p dt\right)^{1/p} \le \left(\int_0^1 |g(t)|^{\kappa}\, dt\right)^{1/\kappa} \le \left(2\kappa!e^{1/2}\right)^{1/\kappa}$$

$$\leftrightarrow \left(\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{m} b_n r_n(t) \right|^p dt \right)^{1/p} \le \left(2\kappa! e^{1/2} \right)^{1/\kappa} \left(\sum_{n=1}^{m} |b_n|^2 \right)^{1/2}$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Εφόσον $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 < \infty$ από το **Θεώρημα 1.9** του **Rademacher**, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n r_n(t)$ συγκλίνει σχεδόν παντού στο $[0,1]$. Κάνοντας χρήση του **λήμματος Fatou** και της τελευταίας ανισότητας, προκύπτει το δεξιό μέλος της **ανισότητας Khinchine**:

$$\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} b_n r_n(t) \right|^p dt = \int_0^1 \liminf_{m} \left| \sum_{n=1}^{m} b_n r_n(t) \right|^p dt \le \liminf_{m\to\infty} \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{m} b_n r_n(t) \right|^p dt$$

$$\le \liminf_{m\to\infty} \left(2\kappa! e^{1/2} \right)^{p/\kappa} \left(\sum_{n=1}^{m} b_n^2 \right)^{p/2} = \left(2\kappa! e^{1/2} \right)^{p/\kappa} \left(\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} b_n^2 \right)^{p/2}$$

$$= \left(2\kappa! e^{1/2} \right)^{p/\kappa} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \right)^{p/2}$$

$$\leftrightarrow \left(\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} b_n r_n(t) \right|^p dt \right)^{1/p} \le \left(2\kappa! e^{1/2} \right)^{1/\kappa} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \right)^{1/2} \qquad (1)$$

Η ανισότητα στο αριστερό μέλος της ανισότητας **Khinchine** προκύπτει άμεσα από τη μονοτονία των $L_p -$χώρων:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \right)^{1/2} = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} b_n r_n(t) \right\|_2 \le \left\| \sum_{n=1}^{\infty} b_n r_n(t) \right\|_p = \left(\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} b_n r_n(t) \right|^p dt \right)^{1/p} \qquad (2)$$

Συνοψίζοντας, από τις (1) και (2) δείξαμε ότι:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \right)^{1/2} \le \left(\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} b_n r_n(t) \right|^p dt \right)^{1/p} \le \left(2\kappa! e^{1/2} \right)^{1/\kappa} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \right)^{1/2}$$

Τέλος, θα αποδείξουμε την ανισότητα **Khinchine** για την περίπτωση που $0 < p < 2$. Θέτουμε $\theta = \left(2 - \frac{p}{2} \right)^{-1}$ ισοδύναμα $p\theta + 4(1-\theta) = 2$. Τότε, $0 < \theta < 1$.

Έστω $\varphi \in L_2([0,1])$. Από τη σχέση $\frac{1}{\theta^{-1}} + \frac{1}{(1-\theta)^{-1}} = 1$ και την ανισότητα **Holder**, συνεπάγεται ότι:

$$\int_0^1 |\varphi(t)|^2 \, dt = \int_0^1 |\varphi(t)|^{p\theta} \, |\varphi(t)|^{4(1-\theta)} \, dt \le \left(\int_0^1 |\varphi(t)|^p \, dt \right)^{\theta} \left(\int_0^1 |\varphi(t)|^4 \, dt \right)^{1-\theta}$$

Επομένως,

$$\|\varphi\|_2^2 \le \|\varphi\|_p^{p\theta} \, \|\varphi\|_4^{4(1-\theta)}$$

Για $p = 4$ έχουμε δείξει ότι υπάρχει B_4 έτσι, ώστε $\|\varphi\|_4 \le \mathrm{B}_4 \|\varphi\|_2$. Συνεπώς, προκύπτει ότι:

$$\|\varphi\|_2^2 \le \|\varphi\|_p^{p\theta} \, \mathrm{B}_4^{4(1-\theta)} \, \|\varphi\|_2^{4(1-\theta)} = \mathrm{B}_4^{4(1-\theta)} \, \|\varphi\|_p^{p\theta} \, \|\varphi\|_2^{2-p\theta}$$

$$\leftrightarrow \|\varphi\|_2^{p\theta} \, \mathrm{B}_4^{4(\theta-1)} \le \|\varphi\|_p^{p\theta} \leftrightarrow \|\varphi\|_2 \, \mathrm{B}_4^{\frac{4(\theta-1)}{p\theta}} \le \|\varphi\|_p$$

Εφόσον,

$$\frac{4(\theta-1)}{p\theta} = \frac{4}{p} - \frac{4}{p\theta} > 2 - \frac{4}{p\theta} > 2 - \frac{4}{p}$$

συνεπάγεται ότι:

$$\|\varphi\|_2 \, \mathrm{B}_4^{2-\frac{4}{p}} \le \|\varphi\|_2 \, \mathrm{B}_4^{\frac{4(\theta-1)}{p\theta}} \le \|\varphi\|_p$$

Επίσης, για κάθε $p < 2$ ισχύει ότι $\|\varphi\|_p \le \|\varphi\|_2$. Από τις δύο τελευταίες ανισότητες προκύπτει το ζητούμενο:

$$\mathrm{B}_4^{2-\frac{4}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \right)^{1/2} \le \left(\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} b_n r_n(t) \right|^p dt \right)^{1/p} \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \right)^{1/2}.$$

Παρατηρήσεις

1. Από την ανισότητα του **Kinchine** προκύπτει ότι στο χώρο $span\{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ όλες οι L_p-μετρικές είναι ισοδύναμες.

2. Οι βέλτιστες σταθερές A_p και B_p είναι ίδιες στην πραγματική και στη μιγαδική περίπτωση. Οι ακριβείς τιμές των A_p και B_p είναι:

$$A_p = \begin{cases} 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} & ,0 < p \le p_o \\ 2^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\dfrac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \right]^{1/p} & ,p_o < p < 2 \\ 1 & ,2 \le p < \infty \end{cases}, \quad B_p = \begin{cases} 1 & 0 < p \le 2 \\ 2^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\dfrac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \right]^{1/p} & 2 < p < \infty \end{cases}$$

p_o είναι η λύση της εξίσωσης $\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ στο διάστημα $(1,2)$

Στη συνέχεια, συμβολίζουμε την κλειστότητα του υπόχωρου που παράγουν οι συναρτήσεις **Rademacher** με $Rad_p = \overline{span\{r_n : n \in \mathbb{N}\}}^{L_p}$.

Πόρισμα 1.4: Για $0 < p < \infty$ ο χώρος Rad_p είναι ισομορφικός του ℓ_2.

Απόδειξη: Αποδεικνύεται άμεσα από την ανισότητα **Khinchine** ότι η $f : \ell_2 \to Rad_p$ με $f\left((a_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t)$ είναι ισομορφισμός.

Παρατήρηση: Θα αποδειχθεί η ανισότητα **Khinchine** για την περίπτωση που $p = 4$, προκειμένου να δοθεί μία καλύτερη εκτίμηση για τους συντελεστές $\{A_4, B_4\}$, η οποία και θα χρησιμοποιηθεί στην απόδειξη της ανισότητας **Gronthendieck**. Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2$. Τότε, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι:

$$\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{m} a_n r_n(t) \right|^4 dt = \int_0^1 \left(a_1 r_1(t) + a_2 r_2(t) + \ldots + a_m r_m(t) \right)^4 dt$$

$$= \sum_{i,j,\kappa,\ell}^{m} a_i a_j a_\kappa a_\ell \int_0^1 r_i(t) r_j(t) r_\kappa(t) r_\ell(t) dt$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_i^4 \int_0^1 r_i^4(t)\,dt + 6\sum_{\substack{i=1\\ j>i}}^{m} a_i^2 a_j^2 \int_0^1 r_i^2(t) r_j^2(t)\,dt = \sum_{i=1}^{m} a_i^4 + 6\sum_{\substack{i=1\\ j>i}}^{m} a_i^2 a_j^2$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_i^4 + 3\sum_{i,j=1}^{m} a_i^2 a_j^2 - 3\sum_{i=1}^{m} a_i^4 = 3\sum_{i,j=1}^{m} a_i^2 a_j^2 - 2\sum_{i=1}^{m} a_i^4 \leftrightarrow$$

$$\int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{m} a_n r_n(t)\right|^4 dt \le 3\sum_{i,j=1}^{m} a_i^2 a_j^2 = 3\left(\sum_{i=1}^{m} a_i^2\right)^2 \leftrightarrow \left\|\sum_{n=1}^{m} a_n r_n(t)\right\|_4 \le 3^{1/4}\left(\sum_{i=1}^{m} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \le 3^{1/4}\|a\|_2$$

Κάνοντας χρήση του λήμματος **Fatou**, συνεπάγονται τα ακόλουθα:

$$\int_0^1 \liminf \left|\sum_{n=1}^{m} a_n r_n(t)\right|^4 dt \le \liminf \int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{m} a_n r_n(t)\right|^4 dt \leftrightarrow$$

$$\int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t)\right|^4 dt \le \liminf 3\|a\|_2^4 \leftrightarrow \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t)\right\|_4 \le 3^{1/4}\|a\|_2$$

Από τη μονοτονία των $L_p -$χώρων και από την τελευταία ανισότητα, προκύπτει το ζητούμενο:

$$\|a\|_2 = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t)\right\|_2 \le \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t)\right\|_4 \le 3^{1/4}\|a\|_2$$

Επομένως, το $A_4 \ge 1$ και το $B_4 \le 3^{1/4}$.

Θεώρημα 1.13 (Ανίσοτητα Grothendieck)[10]: Για κάθε χώρο **Hilbert** $(\mathrm{H},<\cdot,\cdot>)$, για κάθε $n\times n$ πίνακα $\mathrm{A}=(a_{ij})$ με $n\in\mathbb{N}$ και κάθε $x_1,\ldots,x_n, y_1,\ldots,y_n\in \mathrm{B_H}$ (όπου $\mathrm{B_H}$ η μοναδιαία σφαίρα του H), υπάρχει θετική σταθερά K τέτοια, ώστε να ισχύει:

$$\left|\sum_{ij}^{n} a_{ij} < x_i, y_j >\right| \le \mathrm{K}\max\left\{\left|\sum_{ij}^{n} a_{ij}s_it_j\right| : |s_i|\le 1,\ |t_j|\le 1\right\}$$

Απόδειξη: Αρχικά, θα αποδείξουμε την ανισότητα για την περίπτωση που ο χώρος **Hilbert** $(\mathrm{H},<\cdot,\cdot>)$ είναι διαχωρίσιμος. Η γενική περίπτωση είναι άμεση συνέπεια. Επίσης, θα θεωρήσουμε πως τα στοιχεία του πίνακα A καθώς και το σώμα του χώρου $(\mathrm{H},<\cdot,\cdot>)$ είναι οι πραγματικοί.

Έστω $(\mathrm{H},<\cdot,\cdot>)$ διαχωρίσιμος χώρος **Hilbert** και $\mathrm{A}=(a_{ij})$ ένας τυχαίος πίνακας. Για κάθε $x_1,\ldots,x_n,\ y_1,\ldots,y_n\in\mathrm{B_H}$ και $s_1,\ldots,s_n,t_1,\ldots,t_n\in\mathbb{R}$ θέτουμε:

$$\|a\| = \sup\left\{\left|\sum_{ij}^{n} a_{ij}s_it_j\right| : |s_i|\le 1, |t_j|\le 1\right\}$$

$$|||a||| = \sup\left\{\left|\sum_{ij}^{n} a_{ij} < x_i, y_j >\right|\right\}$$

Εξ' ορισμού προκύπτει ότι $\|a\|<\infty$ και $|||a|||<\infty$. Εφόσον ο H είναι διαχωρίσιμος, από την **Πρόταση 1.5** περιέχει ένα μεγιστικό αριθμήσιμο ορθοκανονικό σύνολο $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Από το **Θεώρημα 1.6** το $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ορθοκανονική βάση του H. Συνεπώς, για κάθε $x\in\mathrm{H}$ το $x=\sum_{n=1}^{\infty} < x, e_n >_{\mathbb{R}} e_n$ και η $\|x\|_{\mathrm{H}}^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left|< x, e_n >_{\mathbb{R}}\right|^2 < \infty$.

Εμφυτεύουμε τον χώρο H στον υπόχωρο $Rad_2([0,1]) = \overline{span}^{L_2}\{r_n : n\in\mathbb{N}\}$ του χώρου **Hilbert** $L_2([0,1])$. Για το σκοπό αυτό, ορίζουμε τον τελεστή $\mathrm{T}:\mathrm{H}\to Rad_2([0,1])$, όπου θέτουμε $\mathrm{T}(x)=\mathrm{X}(t)=\sum_{n=1}^{\infty} < x, e_n >_{\mathbb{R}} r_n(t)$ για κάθε $t\in[0,1]$. Οι $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι οι συναρτήσεις **Rademacher**.

Η T είναι καλά ορισμένη. Πράγματι, εφόσον το $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ένα μεγιστικό ορθοκανονικό σύνολο στον διαχωρίσιμο χώρο **Hilbert** $Rad_2([0,1])$, από το **Θεώρημα 1.6** ισχύει η ισομετρία $\|\mathrm{X}\|_{L_2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left|< x, e_n >_{\mathbb{R}}\right|^2 = \|x\|_{\mathrm{H}}^2$. Από το **Θεώρημα 1.9** προκύπτει ότι για κάθε $x,y\in\mathrm{H}$ το $< x, y >_{\mathbb{R}} = \sum_{n=1}^{\infty} < x, e_n >_{\mathbb{R}} < y, e_n >_{\mathbb{R}}$. Επίσης, ισχύει ότι, αν $\mathrm{X},\mathrm{Y}\in Rad_2\left(\left[0,1\right]\right)$, το $<\mathrm{X},\mathrm{Y}>_{\mathbb{R}}=\int_0^1\mathrm{X}(t)\,\mathrm{Y}(t)\,dt$. Συνεπώς, άμεσα προκύπτει ότι $<\mathrm{X},\mathrm{Y}>_{\mathbb{R}}=\int_0^1\mathrm{X}(t)\,\mathrm{Y}(t)\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}<x,e_n>_{\mathbb{R}}<y,e_n>_{\mathbb{R}}$.

Στην περίπτωση που το $\mathrm{T}\left(\mathrm{B_H}\right)$ ήταν $\|\;\|_\infty-$φραγμένο, είναι άμεσο ότι θα ίσχυε η ανισότητα του **Grothendieck**. Πράγματι, αν κάνουμε αυτή την υπόθεση, υπάρχει $\mathrm{M}>0$ και $\left\{\mathrm{X}_i\right\}_{i=1}^n,\left\{\mathrm{Y}_j\right\}_{j=1}^n\subset\mathrm{T}\left(\mathrm{B_H}\right)$ έτσι, ώστε $\left|\mathrm{X}_i(t)\right|\le\mathrm{M}$ και $\left|\mathrm{Y}_i(t)\right|\le\mathrm{M}$ για κάθε $t\in\left[0,1\right]$. Συνεπώς:

$$\left\|\left\|a\right\|\right\|=\sup\left\{\left|\sum_{ij}^n a_{ij}<x_i,y_j>_{\mathbb{R}}\right|\right\}=\sup\left\{\left|\int_0^1\sum_{ij}^n a_{ij}\mathrm{X}_i(t)\,\mathrm{Y}_j(t)\,dt\right|\right\}$$

$$=\mathrm{M}^2\sup\int_0^1\left|\sum_{ij}^n a_{ij}\frac{\mathrm{X}_i(t)}{\mathrm{M}}\frac{\mathrm{Y}_j(t)}{\mathrm{M}}\right|dt\leftrightarrow\left\|\left\|\frac{a}{\mathrm{M}^2}\right\|\right\|=\sup\int_0^1\left|\sum_{ij}^n a_{ij}\frac{\mathrm{X}_i(t)}{\mathrm{M}}\frac{\mathrm{Y}_j(t)}{\mathrm{M}}\right|dt$$

Από τον ορισμό του supremum για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\int_0^1\left|\sum_{ij}^n a_{ij}\frac{\mathrm{X}_i^\varepsilon(t)}{\mathrm{M}}\frac{\mathrm{Y}_j^\varepsilon(t)}{\mathrm{M}}\right|dt$ ώστε:

$$\left\|\left\|\frac{a}{\mathrm{M}^2}\right\|\right\|\le\int_0^1\left|\sum_{ij}^n a_{ij}\frac{\mathrm{X}_i^\varepsilon(t)}{\mathrm{M}}\frac{\mathrm{Y}_j^\varepsilon(t)}{\mathrm{M}}\right|dt+\varepsilon\le\int_0^1\left\|\alpha\right\|dt+\varepsilon\le\left\|\alpha\right\|+\varepsilon$$

Επομένως, $\left\|\left\|a\right\|\right\|\le\mathrm{M}^2\left\|a\right\|$.

Αποδεικνύεται ότι τέτοιο φράγμα M δεν υπάρχει. Συνεπώς, θα χρειαστεί να φράξουμε τα στοιχεία του $\mathrm{T}\left(\mathrm{B_H}\right)$ με κάποιο άλλο τρόπο. Η ιδέα είναι να γραφεί κάθε $\mathrm{X}\in\mathrm{T}\left(\mathrm{B_H}\right)$ ως άθροισμα:

$$\mathrm{X}=\mathrm{X}^L+\mathrm{X}^U,$$

όπου $\mathrm{X}^L\in L_\infty$, $\mathrm{X}^U\in L_2$, με κάθε X^L να είναι φραγμένο από την ίδια σταθερά M. Η σταθερά M θα υπολογιστεί αργότερα. Για κάθε $\mathrm{X}\in\mathrm{T}\left(\mathrm{B_H}\right)$ ορίζουμε τα ακόλουθα:

$$\mathrm{X}^L(t)=\begin{cases}\mathrm{X}(t) & ,\left|\mathrm{X}(t)\right|\le\mathrm{M}\\ \mathrm{M}\cdot sign\mathrm{X}(t) & ,\left|\mathrm{X}(t)\right|>\mathrm{M}\end{cases}$$

και

$$\mathrm{X}^U(t)=\mathrm{X}(t)-\mathrm{X}^L(t)=\begin{cases}0 & ,\left|\mathrm{X}(t)\right|\le\mathrm{M}\\ \mathrm{X}(t)-\mathrm{M}\cdot sign\mathrm{X}(t) & ,\left|\mathrm{X}(t)\right|>\mathrm{M}\end{cases}$$

Είναι προφανές ότι $\mathrm{X} = \mathrm{X}^L + \mathrm{X}^U$ και ότι οι $\mathrm{X}^L, \mathrm{X}^U$ πληρούν τις ζητούμενες προϋποθέσεις, δηλαδή το $\left|\mathrm{X}^L(t)\right| \le \mathrm{M}$ για κάθε $t \in [0,1]$ και $\mathrm{X}^U \in L_2$. Πράγματι, εφόσον η $\mathrm{X}^L \in L_\infty$, τότε η $\mathrm{X}^L \in L_2$. Επειδή η $\mathrm{X} \in L_2$ και ο L_2 είναι διανυσματικός χώρος, συνεπάγεται ότι $\mathrm{X}^U = \mathrm{X} - \mathrm{X}^L \in L_2$.
Είναι, επίσης, άμεσο ότι $\left\|\mathrm{X}^L\right\|_2 \le 1$. Πράγματι, για κάθε $t \in [0,1]$ ισχύει ότι $\left|\mathrm{X}^L(t)\right| \le \left|\mathrm{X}(t)\right|$. Επομένως, $\left\|\mathrm{X}^L\right\|_2 \le \left\|\mathrm{X}\right\|_2 = \left\|x\right\|_{\mathrm{H}} \le 1$, εφόσον $x \in \mathrm{B}_{\mathrm{H}}$ και $\mathrm{T}(x) = \mathrm{X}$.

Αυτό που απομένει είναι να φράξουμε τη X^U στον L_2. Εξ' ορισμού, για $\left|\mathrm{X}(t)\right| \le \mathrm{M}$ ισχύει ότι $\mathrm{X}^U(t) = 0$. Για να δείξουμε ότι το X^U είναι φραγμένο και στην περίπτωση που $\mathrm{X}^U(t) \ne 0$, θα χρησιμοποιήσουμε τον παρακάτω ισχυρισμό.

Ισχυρισμός: $\left|\mathrm{X}^U(t)\right| = \left|\mathrm{X}(t)\right| - \mathrm{M}$.
Εφόσον $\mathrm{X}^U(t) \ne 0$, τότε $\left|\mathrm{X}(t)\right| > \mathrm{M}$. Αν $\mathrm{X}(t) > \mathrm{M}$, τότε το $\mathrm{X}^L(t) = \mathrm{M}$, με συνέπεια $\mathrm{X}^U(t) = \mathrm{X}(t) - \mathrm{M} > 0$. Αν $\mathrm{X}(t) < -\mathrm{M}$, τότε το $\mathrm{X}^L(t) = -\mathrm{M}$. Επομένως, ισχύει ότι $\mathrm{X}^U(t) = \mathrm{X}(t) + \mathrm{M} < 0 \leftrightarrow -\mathrm{X}^U(t) = -\mathrm{X}(t) - \mathrm{M}$. Συνοψίζοντας τις δύο σχέσεις, προκύπτει ότι $\left|\mathrm{X}^U(t)\right| = \left|\mathrm{X}(t)\right| - \mathrm{M}$.

Είναι άμεσο ότι ισχύει η ακόλουθη ισοδυναμία $(a-2b)^2 \ge 0 \leftrightarrow \ a - b \le \dfrac{a^2}{4b}$. Αν θέσουμε όπου $a = \left|\mathrm{X}(t)\right|$ και $b = \mathrm{M}$, τότε για κάθε $t \in [0,1]$ με $\left|\mathrm{X}(t)\right| > \mathrm{M}$ ισχύει ότι:

$$\left|\mathrm{X}^U(t)\right| = \left|\mathrm{X}(t)\right| - \mathrm{M} \le \frac{\left|\mathrm{X}(t)\right|^2}{4\mathrm{M}}$$

Δεδομένου ότι η $\mathrm{X} \in Rad_2([0,1])$, τότε ισχύει η ανισότητα **Khinchin** για $p = 4$ και $\mathrm{B}_4 \le 3^{1/4}$. Συνεπώς, εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα της ισοδυναμίας και την ανισότητα, ισχύει ότι:

$$\left\|\mathrm{X}^U\right\|_2^2 \le \frac{\left\|\mathrm{X}\right\|_4^4}{16\mathrm{M}^2} \le \frac{\left(3^{1/4}\left\|\mathrm{X}\right\|_2\right)^4}{16\mathrm{M}^2} \le \frac{3\left\|\mathrm{X}\right\|_2^4}{16\mathrm{M}^2} = \frac{3\left\|x\right\|_{\mathrm{H}}}{16\mathrm{M}^2} \le \frac{3}{16\mathrm{M}^2} \leftrightarrow \left\|\mathrm{X}^U\right\|_2 \le \frac{\sqrt{3}}{4\mathrm{M}},$$

εφόσον $x \in \mathrm{B}_{\mathrm{H}}$.
Έχουμε, πλέον, τα απαραίτητα εργαλεία, για να αποδείξουμε την ανισότητα **Grothendieck**. Επομένως:

$$\left|\sum_{ij}^{n} a_{ij} < x_i, y_j >_{\mathbb{R}}\right| = \left|\sum_{ij}^{n} a_{ij} < \mathrm{X}_i, \mathrm{Y}_j >_{\mathbb{R}}\right| = \left|\int_0^1 \sum_{ij}^{n} a_{ij} \mathrm{X}_i(t) \mathrm{Y}_j(t)\, dt\right|$$

$$=\left|\int_0^1\sum_{ij}^{n}a_{ij}\mathrm{X}_i^L(t)\mathrm{Y}_j^L(t)dt+\int_0^1\sum_{ij}^{n}a_{ij}\mathrm{X}_i^U(t)\mathrm{Y}_j^L(t)dt+\int_0^1\sum_{ij}^{n}a_{ij}\mathrm{X}_i(t)\mathrm{Y}_j^U(t)dt\right|$$

$$\leq\left|\int_0^1\sum_{ij}^{n}a_{ij}\mathrm{X}_i^L(t)\mathrm{Y}_j^L(t)dt\right|+\left|\int_0^1\sum_{ij}^{n}a_{ij}\mathrm{X}_i^U(t)\mathrm{Y}_j^L(t)dt\right|+\left|\int_0^1\sum_{ij}^{n}a_{ij}\mathrm{X}_i(t)\mathrm{Y}_j^U(t)dt\right|$$

$$=\mathrm{M}^2\left|\int_0^1\sum_{ij}^{n}a_{ij}\frac{\mathrm{X}_i^L(t)}{\mathrm{M}}\frac{\mathrm{Y}_j^L(t)}{\mathrm{M}}dt\right|+\left|\int_0^1\sum_{ij}^{n}a_{ij}\left\|\mathrm{X}_i^U\right\|_2\frac{\mathrm{X}_i^U(t)}{\left\|\mathrm{X}_i^U\right\|_2}\mathrm{Y}_j^L(t)dt\right|$$

$$+\left|\int_0^1\sum_{ij}^{n}a_{ij}\mathrm{X}_i(t)\left\|\mathrm{Y}_j^U\right\|_2\frac{\mathrm{Y}_j^U(t)}{\left\|\mathrm{Y}_j^U\right\|_2}dt\right|$$

$$\leq\mathrm{M}^2\left|\int_0^1\sum_{ij}^{n}a_{ij}\frac{\mathrm{X}_i^L(t)}{\mathrm{M}}\frac{\mathrm{Y}_j^L(t)}{\mathrm{M}}dt\right|+\frac{\sqrt{3}}{4\mathrm{M}}\left|\int_0^1\sum_{ij}^{n}a_{ij}\frac{\mathrm{X}_i^U(t)}{\left\|\mathrm{X}_i^U\right\|_2}\mathrm{Y}_j^L(t)dt\right|+\frac{\sqrt{3}}{4\mathrm{M}}\left|\int_0^1\sum_{ij}^{n}a_{ij}\mathrm{X}_i(t)\frac{\mathrm{Y}_j^U(t)}{\left\|\mathrm{Y}_j^U\right\|_2}dt\right|$$

$$=\mathrm{M}^2\left|\int_0^1\sum_{ij}^{n}a_{ij}\frac{\mathrm{X}_i^L(t)}{\mathrm{M}}\frac{\mathrm{Y}_j^L(t)}{\mathrm{M}}dt\right|+\frac{\sqrt{3}}{4\mathrm{M}}\left|\sum_{ij}^{n}a_{ij}<\frac{\mathrm{X}_i^U(t)}{\left\|\mathrm{X}_i^U\right\|_2},\mathrm{Y}_j^L(t)>_{\mathbb{R}}\right|+\frac{\sqrt{3}}{4\mathrm{M}}\left|\sum_{ij}^{n}a_{ij}<\mathrm{X}_i(t),\frac{\mathrm{Y}_j^U(t)}{\left\|\mathrm{Y}_j^U\right\|_2}>_{\mathbb{R}}\right|$$

$$\leq\mathrm{M}^2\|a\|+\frac{\sqrt{3}}{4\mathrm{M}}|||a|||+\frac{\sqrt{3}}{4\mathrm{M}}|||a|||=\mathrm{M}^2\|a\|+\frac{\sqrt{3}}{2\mathrm{M}}|||a|||.$$

Η τελευταία ανισότητα οφείλεται στην ισομετρική εμφύτευση $\mathrm{T}:\mathrm{H}\mapsto Rad_2([0,1])$, στο ότι τα $\mathrm{X}_i(t)$, $\frac{\Upsilon_j^U(t)}{\left\|\Upsilon_j^U\right\|_2}$, $\Upsilon_j^L(t)$ και $\frac{\mathrm{X}_i^U(t)}{\left\|\mathrm{X}_i^U\right\|_2}$ ανήκουν στη B_{L_2} και στον ορισμό της $\|a\|$. Συνεπώς:

$$|||a|||=\sup\left|\sum_{ij}^{n}a_{ij}<x_i,y_j>_{\mathbb{R}}\right|\leq\mathrm{M}^2\|a\|+\frac{\sqrt{3}}{2\mathrm{M}}|||a|||\leftrightarrow|||a|||\leq\mathrm{M}^2\|a\|+\frac{\sqrt{3}}{2\mathrm{M}}|||a|||$$

$$\leftrightarrow|||a|||\leq\frac{2\mathrm{M}^3}{2\mathrm{M}-\sqrt{3}}\|a\|,\ \text{όπου } \mathrm{K}=\frac{2\mathrm{M}^3}{2\mathrm{M}-\sqrt{3}}.$$

Τότε, για κάθε πεπερασμένο σύνολο $\{x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n\}\subseteq\mathrm{B}_{\mathrm{H}}$ και για κάθε πεπερασμένο σύνολο $\{s_1,\ldots,s_n,t_1,\ldots,t_n\}\subseteq\mathrm{B}_{\mathbb{R}}$ ισχύει η ανισότητα:

$$\sup\left\{\left|\sum_{ij}^{n}a_{ij}<x_i,y_j>_{\mathbb{R}}\right|\right\}\leq\mathrm{K}\sup\left\{\left|\sum_{ij}^{n}a_{ij}s_it_j\right|:|s_i|\leq1,\ |t_j|\leq1\right\}$$

$$= \mathrm{K}\max\left\{\left|\sum_{ij}^{n} a_{ij}s_i t_j\right| : |s_i| \leq 1,\ |t_j| \leq 1\right\}$$

Η τελευταία ισότητα οφείλεται στο ότι η συνάρτηση $f\left(s_1,\ldots,s_n,t_1,\ldots,t_n\right) = \left|\sum_{ij}^{n} a_{ij}s_i t_j\right|$ είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $|\ | : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ και $+ : \underbrace{\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}}_{2n-\varphi o\rho \acute{\varepsilon}\varsigma} \to \mathbb{R}$ και στο ότι το πεδίο ορισμού της

$$\left\{\left(s_1,\ldots,s_n,t_1,\ldots,t_n\right) : |s_i| \leq 1,\ |t_j| \leq 1 \ \text{για}\ i,j = 1,\ldots,n\right\} = \underbrace{[0,1]\times\ldots\times[0,1]}_{2n-\varphi o\rho \acute{\varepsilon}\varsigma}$$

είναι συμπαγές σύνολο. Επομένως, και το αντίστοιχο πεδίο τιμών της είναι συμπαγές σύνολο, με συνέπεια να περιέχει τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.
Η μιγαδική περίπτωση προκύπτει άμεσα. Πράγματι, η απόδειξη είναι ίδια και στην περίπτωση που τα στοιχεία του πίνακα $\mathrm{A} = \left(a_{ij}\right)$, όπως και τα $\left\{s_i\right\}_{i=1}^{n}, \left\{t_j\right\}_{j=1}^{n}$ με $|s_i| \leq 1,\ |t_j| \leq 1$, ανήκουν στο $\mathbb{C}$. Επομένως, αν το σώμα του χώρου $\left(\mathrm{H}, <\cdot,\cdot>_{\mathbb{C}}\right)$ είναι οι μιγαδικοί, τότε το εσωτερικό γινόμενο $<\cdot,\cdot>_{\mathbb{C}} : \mathrm{H}\times\mathrm{H} \to \mathbb{C}$ απεικονίζεται στο μιγαδικό επίπεδο. Συνεπώς, από την **Πρόταση 1.2** ισχύει ότι $< x, y >_{\mathbb{C}} = < x, y >_{\mathbb{R}} + i < x, iy >_{\mathbb{R}}$. Άρα:

$$\sup\left\{\left|\sum_{ij}^{n} a_{ij} < x_i, y_j >_{\mathbb{C}}\right|\right\} = \sup\left\{\left|\sum_{ij}^{n} a_{ij}\left(< x_i, y_j >_{\mathbb{R}} + i < x_i, iy_j >_{\mathbb{R}}\right)\right|\right\} \leq$$

$$\leq \sup\left\{\left|\sum_{ij}^{n} a_{ij} < x_i, y_j >_{\mathbb{R}}\right|\right\} + \sup\left\{\left|\sum_{ij}^{n} a_{ij} < x_i, iy_j >_{\mathbb{R}}\right|\right\}$$

$$\leq \mathrm{K}_{\mathrm{A}}\max\left\{\left|\sum_{ij}^{n} a_{ij}s_i t_j\right| : |s_i| \leq 1,\ |t_j| \leq 1\right\} + \mathrm{K}_{\mathrm{B}}\max\left\{\left|\sum_{ij}^{n} a_{ij}s_i t_j\right| : |s_i| \leq 1,\ |t_j| \leq 1\right\}$$

$$= \left(\mathrm{K}_{\mathrm{A}} + \mathrm{K}_{\mathrm{B}}\right)\max\left\{\left|\sum_{ij}^{n} a_{ij}s_i t_j\right| : |s_i| \leq 1,\ |t_j| \leq 1\right\}$$

Από τη διαδικασία της απόδειξης, παρατηρείται ότι το M μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή στο διάστημα $(0,\infty)$ και οι $\|a\|$, $|||a|||$ είναι εξαρτημένες από το M.

Στην περίπτωση που η $\|a\|=0$, το M μας είναι αδιάφορο. Αν $\|a\|\neq 0$ και $|||a|||\neq 0$, ισχύει ότι $|||a|||\leq \frac{2\mathrm{M}^3}{2\mathrm{M}-\sqrt{3}}\|a\|$.

Θα βρούμε την ελάχιστη τιμή του M που να ικανοποιεί αυτή την ανισότητα. Η συνάρτηση $\phi(\mathrm{M})=\frac{2\mathrm{M}^3}{2\mathrm{M}-\sqrt{3}}$ ελαχιστοποιείται στο σημείο $\mathrm{M}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$. Πράγματι,

$$\frac{d\phi(\mathrm{M})}{d\mathrm{M}}=\frac{2\mathrm{M}^2\left(4\mathrm{M}-3\sqrt{3}\right)}{\left(2\mathrm{M}-\sqrt{3}\right)^2}=0\leftrightarrow 4\mathrm{M}-3\sqrt{3}=0\leftrightarrow \mathrm{M}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

και

$$\frac{d^2\phi(\mathrm{M})}{d\mathrm{M}^2}=\frac{16\mathrm{M}^3+\left(36-24\sqrt{3}\right)\mathrm{M}^2}{\left(2\mathrm{M}-\sqrt{3}\right)^3}>0 \qquad \text{για } \mathrm{M}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Εφόσον $\phi\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{81}{16}$, συνεπάγεται ότι $|||a|||\leq\frac{81}{16}\|a\|$. Δηλαδή, $\mathrm{K}=\frac{81}{16}$.

Αποδείξαμε, λοιπόν, την ανισότητα **Grothendieck** για την περίπτωση που ο χώρος **Hilbert** $\left(\mathrm{H},<\cdot,\cdot>\right)$ είναι διαχωρίσιμος. Αν ο χώρος **Hilbert** $\left(\mathrm{H},<\cdot,\cdot>\right)$ είναι τυχαίος και θεωρήσουμε $x_1,\ldots,x_n,\ y_1,\ldots,y_n\in \mathrm{B}_\mathrm{H}$, τότε ο περιορισμός του στον πεπερασμένο χώρο

$$\overline{span}^{\mathrm{H}}\left\{x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n\right\}=$$
$$\overline{\left\{\sum_{i=1}^{k}q_iz_i:\left\{z_i\right\}_{i=1}^{k}\subseteq\left\{z_1,\ldots,z_k\right\}\ \textit{και}\ \left\{q_i\right\}_{i=1}^{k}\subseteq\mathbb{Q}\ \textit{με}\ k\leq 2n\right\}}^{\mathrm{H}}$$

είναι διαχωρίσιμος χώρος **Hilbert** με ορθοκανονική βάση $\left\{z_1,\ldots,z_k\right\}$, η οποία έχει προκύψει με τη μέθοδο **Gram-Schmidt** από ένα μεγιστικό γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του $\left\{x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n\right\}$. Σύμφωνα με το Θεώρημα **Grothendieck**, ισχύει:

$$\left|\sum_{ij}^{n}a_{ij}<x_i,y_j>_{\mathbb{R}}\right|\leq \mathrm{K}\sup\left\{\left|\sum_{ij}^{n}a_{ij}s_it_j\right|:\left|s_i\right|\leq 1,\ \left|t_j\right|\leq 1\right\}$$

Ο $n\times n$ πίνακας $\mathrm{A}=\left(a_{ij}\right)$ και το σύνολο $\left\{x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n\right\}$ επιλέχθηκαν τυχαία. Επομένως, η ανισότητα ισχύει για κάθε σύνολο $\left\{x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n\right\}\subseteq \mathrm{B}_\mathrm{H}$ και $n\times n$ πίνακα $\mathrm{A}=\left(a_{ij}\right)$ για τυχαίο $n\in\mathbb{N}$.

Παρατήρηση: Θα δείξουμε ότι η σταθερά $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}$ της ανισότητας **Grothendieck** βρίσκεται στο κλειστό διάστημα $\left[\mathrm{K}, 2\mathrm{K}\right]$, για την περίπτωση που τα στοιχεία του πίνακα A καθώς και το σώμα του χώρου **Hilbert** $\left(\mathrm{H}, <\cdot,\cdot>_{\mathbb{C}}\right)$ ανήκουν στο μιγαδικό επίπεδο.

Θέτουμε $a_{ij} = b_{ij} + ic_{ij} \quad \forall i, j = 1,\ldots,n$. Εφόσον το άθροισμα $\sum_{ij}^{n} a_{ij} < x_i, y_j >_{\mathbb{C}} = re^{i\theta}$ είναι μιγαδικός αριθμός, υπάρχει $z \in \mathbb{C}$ έτσι ώστε $z = e^{-i\theta}$. Τότε:

$$\left|\sum_{ij}^{n} a_{ij} < x_i, y_j >_{\mathbb{C}}\right| = \left|re^{i\theta}\right| = r = re^{i\theta}e^{-i\theta} = z\sum_{ij}^{n} a_{ij} < x_i, y_j >_{\mathbb{C}} = \sum_{ij}^{n} a_{ij} < zx_i, y_j >_{\mathbb{C}}$$

$$= \sum_{ij}^{n} b_{ij} \operatorname{Re}\left\{< zx_i, y_j >_{\mathbb{C}}\right\} - \sum_{ij}^{n} c_{ij} \operatorname{Im}\left\{< zx_i, y_j >_{\mathbb{C}}\right\}$$

$$+i\left(\sum_{ij}^{n} b_{ij} \mathrm{I}m\left\{< zx_i, y_j >_{\mathbb{C}}\right\} + \sum_{ij}^{n} c_{ij} \operatorname{Re}\left\{< zx_i, y_j >_{\mathbb{C}}\right\}\right)$$

$$= \sum_{ij}^{n} b_{ij} \operatorname{Re}\left\{< zx_i, y_j >_{\mathbb{C}}\right\} - \sum_{ij}^{n} c_{ij} \operatorname{Im}\left\{< zx_i, y_j >_{\mathbb{C}}\right\}$$

$$\leq \left|\sum_{ij}^{n} b_{ij} \operatorname{Re}\left\{< zx_i, y_j >_{\mathbb{C}}\right\}\right| + \left|\sum_{ij}^{n} c_{ij} \operatorname{Im}\left\{< zx_i, y_j >_{\mathbb{C}}\right\}\right|$$

$$= \left|\sum_{ij}^{n} b_{ij} < zx_i, y_j >_{\mathbb{R}}\right| + \left|\sum_{ij}^{n} c_{ij} < zx_i, iy_j >_{\mathbb{R}}\right|$$

$$\leq \mathrm{K} \max\left\{\left|\sum_{ij}^{n} b_{ij} s_i t_j\right| : \left|s_i\right| \leq 1, \left|t_j\right| \leq 1 \;\mu\varepsilon\; s_i, t_j \in \mathbb{R}\right\}$$

$$+\mathrm{K} \max\left\{\left|\sum_{ij}^{n} c_{ij} s_i t_j\right| : \left|s_i\right| \leq 1, \left|t_j\right| \leq 1 \;\mu\varepsilon\; s_i, t_j \in \mathbb{R}\right\}$$

$$\leq 2\mathrm{K} \max\left\{\left|\sum_{ij}^{n} \left(b_{ij} + ic_{ij}\right) s_i t_j\right| : \left|s_i\right| \leq 1, \left|t_j\right| \leq 1 \;\mu\varepsilon\; s_i, t_j \in \mathbb{R}\right\}$$

$$\leq 2\mathrm{K} \max\left\{\left|\sum_{ij}^{n} \left(b_{ij} + ic_{ij}\right) s_i t_j\right| : \left|s_i\right| \leq 1, \left|t_j\right| \leq 1 \;\mu\varepsilon\; s_i, t_j \in \mathbb{C}\right\}$$

δηλαδή $\mathrm{K}_{\mathbb{C}} \leq 2\mathrm{K}$.

Έστω $\left(\mathrm{H}, <\cdot,\cdot>_{\mathbb{R}}\right)$ πραγματικός χώρος Hilbert. Τότε μπορούμε να ορίσουμε ένα μιγαδικό χώρο Hilbert $\left(\mathrm{H}_{\mathbb{C}}, <\cdot,\cdot>_{\mathbb{C}}\right)$, ώστε αν $z \in \mathrm{H}_{\mathbb{C}}$, τότε $z = x + iy$ με $x, y \in \mathrm{H}$ και νόρμα $< x+iy, x+iy >_{\mathbb{C}}^{1/2} = \|x+iy\|_{\mathbb{C}} = \left(\|x\|_{\mathbb{R}}^2 + \|y\|_{\mathbb{R}}^2\right)^{1/2}$. Άμεσα αποδεικνύεται ότι ισχύει η ιδιότητα του παραλληλογράμμου για τη νόρμα $\| \ \|_{\mathbb{C}}$. Η ύπαρξη του εσωτερικού γινομένου οφείλεται στο **Θεώρημα 1.1**. Στη συνέχεια θεωρούμε ότι τα $a_{ij} \in \mathbb{R}$ για κάθε $i, j = 1, \ldots, n$. Δείξαμε προηγουμένως ότι:

$$\left|\sum_{ij}^{n} a_{ij} < x_i, y_j >_{\mathbb{C}}\right| \leq \mathrm{K}_{\mathbb{C}} \max\left\{\left|\sum_{ij}^{n} a_{ij} s_i t_j\right| : |s_i| \leq 1, \ |t_j| \leq 1 \ \mu\varepsilon \ s_i, t_j \in \mathbb{C}\right\}$$

για κάθε $x_i, y_j \in \mathrm{H}_{\mathbb{C}}$ με $\|x_i\|_{\mathbb{C}} \leq 1$, $\|y_j\|_{\mathbb{C}} \leq 1$. Εφόσον $\mathrm{B}_{\mathrm{H}_{\mathbb{C}}} \supseteq \mathrm{B}_{\mathrm{H}}$ τότε ισχύει ότι

$$\left|\sum_{ij}^{n} a_{ij} < x_i, y_j >_{\mathbb{R}}\right| \leq \mathrm{K}_{\mathbb{C}} \max\left\{\left|\sum_{ij}^{n} a_{ij} s_i t_j\right| : |s_i| \leq 1, \ |t_j| \leq 1 \ \mu\varepsilon \ s_i, t_j \in \mathbb{C}\right\}$$

για κάθε $x_i, y_j \in \mathrm{B}_{\mathrm{H}}$. Επομένως θα ισχύει ότι $\mathrm{K} \leq \mathrm{K}_{\mathbb{C}}$. Δηλαδή έχουμε ότι $\mathrm{K} \leq \mathrm{K}_{\mathbb{C}} \leq 2\mathrm{K}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Απόλυτα Αθροίσιμοι Τελεστές

Ορισμός: Έστω Χ,Υ χώροι **Banach** και έστω $p \geq 1$. Ένας τελεστής $\mathrm{T} \in L(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ λέγεται $p-$απόλυτα αθροίσιμος, αν υπάρχει σταθερά K τέτοια, ώστε για κάθε επιλογή ενός φυσικού αριθμού n και για κάθε επιλογή διανυσμάτων $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ να ισχύει ότι:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left\|\mathrm{T}(x_i)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq K \sup\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x^*(x_i)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} : x^* \in \mathrm{B}_{\mathrm{X}^*}\right\}$$

Ισοδύναμα, για κάθε $p \geq 1$, ο $\mathrm{T} \in L(\mathrm{X}, \Upsilon)$ λέγεται $p-$απόλυτα αθροίσιμος, αν $\pi_p(\mathrm{T}) < \infty$, όπου

$$\pi_p(\mathrm{T}) = \inf\left\{K \geq 0 : \left(\sum_{i=1}^{n}\left\|\mathrm{T}(x_i)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq K \sup_{x^* \in \mathrm{B}_{\mathrm{X}^*}}\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x^*(x_i)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\}, \{x_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathrm{X}\right\}$$

Από την τελευταία σχέση άμεσα προκύπτει ότι:

$$\pi_p(\mathrm{T}) = \sup\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}\left\|\mathrm{T}(x_i)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} / \sup_{x^* \in \mathrm{B}_{\mathrm{X}^*}}\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x^*(x_i)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\} : \{x_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathrm{X}\right\}$$

Τέλος, αν θέσουμε $\left\|(x_i)_{i=1}^{n}\right\|_p^{weak} = \sup\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x^*(x_i)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} : x^* \in \mathrm{B}_{\mathrm{X}^*}\right\}$, τότε ισχύει ότι:

$$\pi_p(\mathrm{T}) = \inf\left\{K \geq 0 : \left(\sum_{i=1}^{n}\left\|\mathrm{T}(x_i)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq K : \left\|(x_i)_{i=1}^{n}\right\|_p^{weak} = 1\right\}$$

Πράγματι, είναι προφανές $\pi_p(\mathrm{T}) \le \inf\left\{ K \ge 0 : \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| \mathrm{T}(x_i) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \le K : \left\| (x_i)_{i=1}^{n} \right\|_p^{weak} = 1 \right\}$.

Αν $\pi_p(\mathrm{T}) < \inf\left\{ K \ge 0 : \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| \mathrm{T}(x_i) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \le K : \left\| (x_i)_{i=1}^{n} \right\|_p^{weak} = 1 \right\} = s$, τότε υπάρχει $K_o > 0$ με $\pi_p(\mathrm{T}) \le K_o < s$ έτσι ώστε για κάθε $(x_i)_{i=1}^{n} \subset \mathrm{X}$,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \left\| \mathrm{T}(x_i) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \le K_o \cdot \left\| (x_i)_{i=1}^{n} \right\|_p^{weak} \leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| \mathrm{T}\left(\frac{x_i}{\left\| (x_i)_{i=1}^{n} \right\|_p^{weak}} \right) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \le K_o$$

Άρα, για κάθε $(x_i)_{i=1}^{n} \subset \mathrm{X}$ με $\left\| (x_i)_{i=1}^{n} \right\|_p^{weak} = 1$, ισχύει ότι $\left(\sum_{i=1}^{n} \left\| \mathrm{T}(x_i) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \le K_o$, άτοπο.

Ο χώρος των $p-$απόλυτα αθροίσιμων τελεστών συμβολίζεται με $\Pi_p(\mathrm{X},\mathrm{Y})$. Είναι προφανές ότι, για κάθε $p \ge 1$, ο $\Pi_p(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ είναι υπόχωρος του $L(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ και ότι η $\pi_p(\mathrm{T})$ ορίζει μία νόρμα σε αυτόν. Αν $\mathrm{T} \notin \Pi_p(\mathrm{X},\mathrm{Y})$, τότε θέτουμε $\pi_p(\mathrm{T}) = \infty$.

Ιδιότητες $p-$απόλυτων αθροίσιμων τελεστών

1. Άμεσα προκύπτει, από τον ορισμό του $p-$απόλυτα αθροίσιμου τελεστή και από τον ορισμό της νόρμας $\|x\| = \sup\left\{ \left| x^*(x) \right| : x^* \in B_{\mathrm{X}^*} \right\}$, ότι $\|\mathrm{T}\| \le \pi_p(\mathrm{T})$ για κάθε $p \ge 1$.

2. Αν $\mathrm{T} \in L(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ και $S \in L(\mathrm{Y},Z)$, τότε ισχύει ότι $\pi_p(S \circ \mathrm{T}) \le \|S\| \cdot \pi_p(\mathrm{T})$ και $\pi_p(S \circ \mathrm{T}) \le \|\mathrm{T}\| \cdot \pi_p(S)$. Πράγματι, από τον ισοδύναμο ορισμό του $p-$απόλυτα αθροίσιμου τελεστή έχουμε ότι:

$$\pi_p(S \circ \mathrm{T}) = \sup\left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| S \circ \mathrm{T}\left(x_i \big/ \mu(x_1,\ldots,x_n) \right) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} : \{x_1,\ldots,x_n\} \subset \mathrm{X} \right\}$$

$$\le \|S\| \cdot \sup\left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| \mathrm{T}\left(x_i \big/ \mu(x_1,\ldots,x_n) \right) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} : \{x_1,\ldots,x_n\} \subset \mathrm{X} \right\} = \|S\| \cdot \pi_p(\mathrm{T})$$

όπου $\mu(x_1,\dots,x_n)=\sup\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x^*(x_i)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} : x^*\in \mathrm{B}_{\mathrm{X}^*}\right\}$.

Επίσης, $\pi_p(S\circ \mathrm{T})=\frac{\|\mathrm{T}\|}{\|\mathrm{T}\|}\sup\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}\left\|S\circ \mathrm{T}\left(x_i\big/\mu(x_1,\dots,x_n)\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} : \{x_1,\dots,x_n\}\subset \mathrm{X}\right\}$

$=\|\mathrm{T}\|\cdot\sup\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}\left\|S\circ\frac{\mathrm{T}}{\|\mathrm{T}\|}\left(x_i\big/\mu(x_1,\dots,x_n)\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} : \{x_1,\dots,x_n\}\subset \mathrm{X}\right\}\le\|\mathrm{T}\|\cdot\pi_p(S)$.

Πρόταση 2.1: Αν $p<q$, τότε $\pi_p(\mathrm{T})\ge\pi_q(\mathrm{T})$ για κάθε $\mathrm{T}\in L(\mathrm{X},\mathrm{Y})$. Δηλαδή, κάθε $p-$απόλυτα αθροίσιμος τελεστής είναι επίσης $q-$απόλυτα αθροίσιμος τελεστής.

Απόδειξη: Αρχικά, θα δείξουμε ότι, αν T είναι $1-$απόλυτα αθροίσιμος τελεστής, τότε είναι $2-$απόλυτα αθροίσιμος τελεστής και $\pi_2(\mathrm{T})\le\pi_1(\mathrm{T})$.
Έστω $\mu_2(x_1,\dots,x_n)\le 1$, $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}^+\setminus\{0\}$ και τυχαίο $x^*\in \mathrm{B}_{\mathrm{X}^*}$, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\left|x^*(x_i)\right|\le\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x^*(x_i)\right|^2\right)^{1/2}\le\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{1/2},$$

εφόσον εξ' ορισμού $\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x^*(x_i)\right|^2\right)^{1/2}\le 1$. Άρα, $\mu_1(a_1x_1,\dots,a_nx_n)\le\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{1/2}$. Αυτό έχει ως συνέπεια:

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\left\|\mathrm{T}(x_i)\right\|\le\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{1/2}\cdot\pi_1(\mathrm{T})$$

Το συμπέρασμα προκύπτει θέτοντας $a_i=\left\|\mathrm{T}(x_i)\right\|$. Πράγματι,

$$\sum_{i=1}^{n}\left\|\mathrm{T}(x_i)\right\|^2\le\left(\sum_{i=1}^{n}\left\|\mathrm{T}(x_i)\right\|^2\right)^{1/2}\cdot\pi_1(\mathrm{T})\leftrightarrow\left(\sum_{i=1}^{n}\left\|\mathrm{T}(x_i)\right\|^2\right)^{1/2}\le\pi_1(\mathrm{T})$$

και, άρα, $\pi_2(\mathrm{T})\le\pi_1(\mathrm{T})$.

Για τη γενική περίπτωση, θεωρούμε $p<q$ και $\mathrm{T}\in L(\mathrm{X},\mathrm{Y})$. Έστω $\mu_q(x_1,\ldots,x_n)\le 1$, $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}^+\setminus\{0\}$ και τυχαίο $x^*\in \mathrm{B}_{\mathrm{X}^*}$, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^{\,p}\left|x^*(x_i)\right|^p\right)^{1/p}\le\left(\left(\sum_{i=1}^n a_i^{\,p\cdot\frac{q}{q-p}}\right)^{q-p/q}\cdot\left(\sum_{i=1}^n\left|x^*(x_i)\right|^{p\cdot\frac{q}{p}}\right)^{p/q}\right)^{1/p}\le\left(\sum_{i=1}^n a_i^{\frac{pq}{q-p}}\right)^{q-p/qp}$$

Άρα, $\mu_p(a_1x_1,\ldots,a_nx_n)\le\left(\sum_{i=1}^n a_i^{\frac{pq}{q-p}}\right)^{q-p/qp}$. Αυτό έχει ως συνέπεια:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^{\,p}\left\|\mathrm{T}(x_i)\right\|^p\right)^{1/p}\le\pi_p(\mathrm{T})\cdot\left(\sum_{i=1}^n a_i^{\frac{pq}{q-p}}\right)^{q-p/qp}$$

Το συμπέρασμα προκύπτει θέτοντας $a_i=\left\|\mathrm{T}(x_i)\right\|^{\frac{q-p}{p}}$. Πράγματι,

$$\left(\sum_{i=1}^n\left\|\mathrm{T}(x_i)\right\|^q\right)^{1/p}\le\pi_p(\mathrm{T})\cdot\left(\sum_{i=1}^n\left\|\mathrm{T}(x_i)\right\|^q\right)^{q-p/qp}\leftrightarrow$$

$$\left(\sum_{i=1}^n\left\|\mathrm{T}(x_i)\right\|^q\right)^{\frac{1}{p}-\frac{q-p}{qp}}=\left(\sum_{i=1}^n\left\|\mathrm{T}(x_i)\right\|^q\right)^{1/q}\le\pi_p(\mathrm{T})\leftrightarrow\left(\sum_{i=1}^n\left\|\mathrm{T}(x_i)\right\|^q\right)^{1/q}\le\pi_p(\mathrm{T})$$

και, άρα, $\pi_q(\mathrm{T})\le\pi_p(\mathrm{T})$.

Θεώρημα 2.1: Έστω X χώρος **Banach** πεπερασμένης διάστασης n. Τότε υπάρχει βάση $\{x_1,\ldots,x_n\}$ του X και βάση $\{x_1^*,\ldots,x_n^*\}$ του X^* έτσι ώστε $x_i^*(e_j)=\delta_{ij}$ και $\|e_i\|=\|x_i^*\|=1$, για κάθε $1\le i,j\le n$.

Απόδειξη: Έστω $\{e_1,\ldots,e_n\}$ βάση του X και $x_1,\ldots,x_n$ στοιχεία της X, όπου $x_j=\sum_{i=1}^n a_{ij}e_i$. Ορίζουμε ως $\det(\{a_{ij}\})$ την ορίζουσα του πίνακα του οποίου η $j-$οστή στήλη αποτελείται από τους συντελεστές του x_j στη βάση $\{e_1,\ldots,e_n\}$. Η συνάρτηση $\det$ είναι συνεχής στον $\mathbb{R}^n\times\ldots\times\mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^n\times\ldots\times\mathbb{C}^n)$.

Επίσης, εφόσον ο $\left(\mathrm{X},\|\ \|_{\mathrm{X}}\right)$ έχει $\dim \mathrm{X}=n<\infty$, τότε υπάρχει γραμμικός ισομορφισμός $g:\left(\mathrm{X},\|\ \|_{\mathrm{X}}\right)\to\left(\mathbb{R}^n,\|\ \|_2\right)$ με $g\left(\sum_{i=1}^{n} c_i e_i\right)=\left(c_1,\ldots,c_n\right)$. Εφόσον η απεικόνιση $D=\det\circ\left(g,\ldots,g\right)$ είναι φραγμένη γραμμική ως προς την τοπολογία γινόμενο και το $S_{\mathbb{R}^n}\times\ldots\times S_{\mathbb{R}^n}$ $\left(S_{\mathbb{C}^n}\times\ldots\times S_{\mathbb{C}^n}\right)$ είναι συμπαγές, τότε θα παίρνει τη μέγιστη απόλυτη τιμή της σε αυτό $\left(S_{\mathbb{R}^n}=\left\{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|_2=1\right\}\right)$.

Έστω $\left\{y_1,\ldots,y_n\right\}$ το σημείο που παίρνει τη μέγιστη απόλυτη τιμή της. Ισχύει ότι $D\left(y_1,\ldots,y_n\right)\neq 0$, δεδομένου ότι τα $\left\{y_1,\ldots,y_n\right\}$ είναι μη μηδενικά και διάφορα ανά δύο, που σημαίνει ότι το ίδιο ισχύει και για τις αντίστοιχες στήλες που αποτελούνται από τους συντελεστές τους.

Από γνωστή Πρόταση ισχύει ότι οι στήλες μίας ορίζουσας είναι γραμμικά ανεξάρτητες, αν και μόνο αν η $\det\left(\left\{a_{ij}\right\}\right)\neq 0$. Δηλαδή, τα $\left\{y_1,\ldots,y_n\right\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και, άρα, βάση στον X.

Στη συνέχεια, ορίζουμε την απεικόνιση $f_i\left(x\right)=\dfrac{1}{D\left(y_1,\ldots,y_n\right)}\cdot D\left(y_1,\ldots,x,\ldots,y_n\right)$, όπου αντικαθιστούμε το y_i με το x. Είναι προφανές ότι η f_i είναι φραγμένη γραμμική, $f_i\left(y_j\right)=\delta_{ij}$ και $\left|f_i\left(x\right)\right|\leq 1$ για κάθε $x\in S_{\mathbb{R}^n}$. Επομένως, $\|f_i\|=1$. Είναι προφανές ότι τα $\left\{f_i\right\}_{i=1}^{n}$ αποτελούν δυϊκή βάση του X^*.

Πρόταση 2.2: Έστω X χώρος **Banach** και $\dim \mathrm{X}=n$, τότε $\pi_1\left(\mathrm{I}_{\mathrm{X}}\right)\leq n$.

Απόδειξη: Από το **Θεώρημα 2.1** υπάρχει βάση $\left\{e_1,\ldots,e_n\right\}$ του X και βάση $\left\{x_1^*,\ldots,x_n^*\right\}$ του X^* έτσι ώστε $x_i^*\left(e_j\right)=\delta_{ij}$ και $\|e_i\|=\|x_i^*\|=1$, για κάθε $1\leq i,j\leq n$.

Έστω $x=a_1e_1+\ldots+a_ne_n$. Τότε, ισχύει ότι $\|x\|\leq\sum_{j=1}^{n}\left|a_j\right|=\sum_{j=1}^{n}\left|x_j^*\left(x\right)\right|$. Επιλέγουμε $\left\{x_1,\ldots,x_\kappa\right\}\subset\mathrm{X}$ έτσι ώστε $\mu_1\left(x_1,\ldots,x_\kappa\right)\leq 1$.

Εφόσον $\mu_1\left(x_1,\ldots,x_\kappa\right)=\sup_{x^*\in B_{\mathrm{X}^*}}\left\{\sum_{i=1}^{\kappa}\left|x^*\left(x_i\right)\right|\right\}\leq 1$, τότε $\sum_{i=1}^{\kappa}\left|x_j^*\left(x_i\right)\right|\leq 1$ για κάθε $j\leq n$.

Από τα προαναφερόμενα έχουμε ότι:

$$\sum_{i=1}^{\kappa}\left\|\mathrm{I}_{\mathrm{X}}\left(x_i\right)\right\|=\sum_{i=1}^{\kappa}\|x_i\|\leq\sum_{i=1}^{\kappa}\sum_{j=1}^{n}\left|x_j^*\left(x_i\right)\right|=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{\kappa}\left|x_j^*\left(x_i\right)\right|\leq n$$

Δηλαδή, $\pi_1\left(\mathrm{I}_{\mathrm{X}}\right)\leq n$.

Παρατήρηση: Θέτουμε $\mathrm{X} = \ell_\infty^n$ και $\{e_1, \dots, e_n\}$ η κανονική βάση του. Τότε,

$$\mu_1(e_1, \dots, e_n) = \sup_{x^* \in B_{\mathrm{X}^*}} \left\{ \sum_{i=1}^n \left| x^*(e_i) \right| \right\} = \sup_{x^* \in B_{\mathrm{X}^*}} \left\{ \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \cdot x^*(e_i) \right\}$$

$$= \sup_{x^* \in B_{\mathrm{X}^*}} \left\{ x^* \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \cdot e_i \right) \right\} = \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \cdot e_i \right\|_\infty = 1$$

και $\sum_{i=1}^n \|e_i\|_\infty = n$. Από την **Πρόταση 2.2** προκύπτει ότι $\pi_1\left(\mathrm{I}_{\ell_\infty^n}\right) = n$.

Στη συνέχεια, γίνεται αναφορά σε Ορισμούς, Προτάσεις και Θεωρήματα, τα οποία θα χρειαστούν για την απόδειξη του **Θεωρήματος Grothendieck**.

Ορισμός: Μια σειρά $\sum_{\kappa=1}^\infty x_\kappa$ σε ένα χώρο με νόρμα λέγεται ότι συγκλίνει χωρίς συνθήκη, αν η σειρά $\sum_{\kappa=1}^\infty x_{\sigma(\kappa)}$ συγκλίνει για οποιαδήποτε μετάθεση σ των φυσικών αριθμών.

Σε ένα χώρο **Banach**, αν η σειρά $\sum_{\kappa=1}^\infty x_\kappa$ συγκλίνει χωρίς συνθήκη, τότε το άθροισμα κάθε σειράς $\sum_{\kappa=1}^\infty x_{\sigma(\kappa)}$ είναι το ίδιο.

Πρόταση 2.3: Έστω $\sum_{\kappa=1}^\infty x_\kappa$ σειρά σε ένα χώρο **Banach**. Τότε, οι παρακάτω συνθήκες είναι ισοδύναμες:

1. Η σειρά $\sum_{\kappa=1}^\infty x_\kappa$ συγκλίνει χωρίς συνθήκη.
2. Η σειρά $\sum_{\kappa=1}^\infty a_\kappa x_\kappa$ συγκλίνει για κάθε $(a_\kappa)_{\kappa=1}^\infty \in \ell_\infty$ με $a_\kappa \in \mathbb{C}$ για κάθε $\kappa \in \mathbb{N}$.
3. Η σειρά $\sum_{\kappa=1}^\infty \varepsilon_\kappa x_\kappa$ συγκλίνει για όλες τις επιλογές προσήμων.

Λήμμα 2.1: Έστω $x_1, \dots, x_n \in \mathrm{X}$ και $\left(\mathrm{X}, \|\ \|_{\mathrm{X}}\right)$. Αν

$$\mu_1(x_1, \dots, x_n) = \sup\left\{ \sum_{i=1}^n \left| f(x_i) \right| : f \in B_{\mathrm{X}^*} \right\}$$

$$\mathrm{A} = \sup\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| : |a_i| = 1, 1 \leq i \leq n\right\}$$

$$B = \sup\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right\| : |\lambda_i| \leq 1,\ 1 \leq i \leq n\right\}$$

τότε ισχύει ότι $\mu_1(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{A} = \mathrm{B}$.

Απόδειξη: Έστω $|\lambda_i| \leq 1$, με $i = 1, \ldots, n$ και $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$. Τότε, υπάρχει $f \in \mathrm{X}^*$ με $\|f\|_{\mathrm{X}^*} = 1$ και $\left|f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right)\right| = \left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right\|_{\mathrm{X}}$. Άρα, συνεπάγεται ότι:

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right\|_{\mathrm{X}} = \left|f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right)\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)| \leq \mu_1(x_1, \ldots, x_n).$$

Δηλαδή, $B \leq \mu_1(x_1, \ldots, x_n)$. Έστω $f \in B_{\mathrm{X}^*}$ και επιλέγουμε a_i με $|a_i| = 1$ με $1 \leq i \leq n$, ώστε $a_i f(x_i) = |f(x_i)|$, τότε

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i)| = \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i) = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leq \mathrm{A}.$$

Επομένως, ισχύει ότι $\mu(x_1, \ldots, x_n) \leq \mathrm{A}$. Τέλος, είναι προφανές ότι $\mathrm{A} \leq \mathrm{B}$. Από τα προαναφερόμενα προκύπτει άμεσα ότι $\mathrm{A} = \mathrm{B} = \mu(x_1, \ldots, x_n)$.

Παρατήρηση: Αν το σώμα στο X είναι πραγματικός χώρος, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\mu_1(x_1, \ldots, x_n) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i : \varepsilon_i = \pm 1, i = 1, \ldots, n\right\}$$

Αυτό έχει ως συνέπεια:

$$\sup_{x^* \in B_{\mathrm{X}^*}}\left\{\sum_{i=1}^{\kappa} |x^*(x_i)|\right\} = \sup\left\{\sum_{i=1}^{\kappa} \varepsilon_i \cdot x_i : \varepsilon_i = \pm 1,\ i = 1, \ldots, n\right\}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

$$\pi_1(\mathrm{X}) = \sup\left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|}{\sup_{|a_i|=1}\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\|\right\}} : x_i \in \mathrm{X},\ 1 \le i \le n \right\} = \sup\left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|}{\sup_{\varepsilon_i=\pm 1}\left\{\left\|\sum_{\substack{i=1\\|a_i|=1}}^{n} \varepsilon_i x_i\right\|\right\}} : x_i \in \mathrm{X},\ 1 \le i \le n \right\}$$

Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι X,Y είναι χώροι **Banach** με σώμα το $\mathbb{R}$. Από το **Λήμμα 2.1**, ο $\mathrm{T} \in L(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ είναι απόλυτα αθροίσιμος τελεστής, αν και μόνο αν υπάρχει σταθερά K τέτοια ώστε για κάθε επιλογή $\{x_1,\ldots,x_n\}$ και $n \in \mathbb{N}$ να ισχύει ότι:

$$\sum_{i=1}^{n} \left\|\mathrm{T}(x_i)\right\| \le \mathrm{K} \sup_{\varepsilon_i=\pm 1}\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i\right\|\right\}.$$

Δηλαδή, ο T είναι απόλυτα αθροίσιμος τελεστής, αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $\{x_\kappa\}_{\kappa=1}^{\infty}$ του X, έτσι ώστε η $\sum_{\kappa=1}^{\infty} x_\kappa$ να συγκλίνει χωρίς συνθήκη, η σειρά $\sum_{\kappa=1}^{\infty} \mathrm{T}(x_\kappa)$ να συγκλίνει απόλυτα.

Στην περίπτωση που το σώμα των X,Y είναι το $\mathbb{C}$ και ο $\mathrm{T} \in L(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ είναι απόλυτα αθροίσιμος τελεστής, τότε από την **Πρόταση 2.3** έχουμε ότι:

$$\sum_{i=1}^{n} \left\|\mathrm{T}(x_i)\right\| \le \mathrm{K} \sup_{|a_i|=1}\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\|\right\}$$

Είναι άμεσο ότι ο απόλυτα αθροίσιμος τελεστής απεικονίζει σειρές που συγκλίνουν χωρίς συνθήκη σε απόλυτα συγκλίνουσες σειρές. Με τα παραπάνω σχόλια, εξηγείται πλήρως η έννοια του απόλυτα αθροίσιμου τελεστή.

Παρατήρηση: Μια ισοδύναμη διατύπωση της ανισότητας του **Grothendieck** είναι η εξής:

Υπάρχει σταθερά κ_G, ανεξάρτητη των m,n, έτσι ώστε, αν τα $a_{ij} \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ είναι τέτοια ώστε

$$\left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} s_i t_j\right| \le 1, \text{ για } |s_i| \le 1, |t_j| \le 1 \qquad (1),$$

τότε, είναι άμεσο ότι:

$$\left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} < x_i, y_j >\right| \le \kappa_G \text{ όπου } x_i, y_j \in \mathrm{B_H}$$

Θεώρημα 2.2 (Grothendieck): Έστω Η είναι ένας χώρος Hilbert και $\mathrm{T} \in L\left(\ell_1^n, \mathrm{H}\right)$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Τότε, ο Τ είναι 1-απόλυτα αθροίσιμος τελεστής και $\pi_1\left(\mathrm{T}\right) \leq \kappa_G \|\mathrm{T}\|$. Επιπλέον, το Θεώρημα αυτό είναι ισοδύναμο με την ανισότητα του **Grothendieck**.

Απόδειξη: Έστω $a_1, \ldots, a_m \in \ell_1^n$, όπου $a_i = \left(a_{i1}, \ldots, a_{in}\right) \in \ell_1^n$, με $1 \leq i \leq m$. Αν $|s_i| \leq 1$, $1 \leq i \leq n$, τότε:

$$\left\|\sum_{i=1}^m s_i a_i\right\| = \sum_{j=1}^n \left|\sum_{i=1}^m s_i a_{ij}\right| = \sum_{j=1}^n t_j \sum_{i=1}^m s_i a_{ij}$$

Για κατάλληλα $t_j \in \mathrm{K}$ με $|t_j| = 1$, $j = 1, \ldots, n$. Επομένως,

$$\left\|\sum_{i=1}^m s_i a_i\right\| = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} s_i t_j$$

Από το **Λήμμα 2.1**, η συνθήκη (1) της τελευταίας **Παρατήρησης** είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη:

$$\mu_1\left(a_1, \ldots, a_n\right) \leq 1$$

Έστω $\mathrm{T} \in L\left(\ell_1^n, \mathrm{H}\right)$, όπου $\mathrm{T}\left(e_j\right) = y_j$ με $1 \leq j \leq n$ και $\{e_1, \ldots, e_n\}$ είναι η κανονική βάση του ℓ_1^n. Τότε, για κάθε $j \leq n$ ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\left\|\mathrm{T}\left(e_j\right)\right\| = \|y_j\| \leq \|\mathrm{T}\| \cdot \|e_j\| = \|\mathrm{T}\| \to \max_{j \leq n}\left\{\|y_j\|\right\} \leq \|\mathrm{T}\|$$

Έστω $x = b_1 e_1 + \ldots + b_n e_n \in \ell_1^n$. Τότε:

$$\left\|\mathrm{T}(x)\right\| \leq \sum_{j=1}^n |b_j| \cdot \left\|\mathrm{T}\left(e_j\right)\right\| \leq \max_{j \leq n}\|y_j\| \cdot \sum_{j=1}^n |b_j| = \max_{j \leq n}\|y_j\| . \|x\|_1$$

Δηλαδή, $\|\mathrm{T}\| \leq \max_{j \leq n}\|y_j\|$. Από τα προαναφερόμενα, προκύπτει ότι $\|\mathrm{T}\| = \max_{j \leq n}\|y_j\|$. Αν $x_i \in \mathrm{H}$, $\|x_i\| \leq 1$, $1 \leq i \leq m$, τότε:

$$\left|\sum_{i=1}^m < x_i, \mathrm{T}\left(a_i\right) >\right| \leq \sum_{i=1}^m \left|< x_i, \mathrm{T}\left(a_i\right) >\right| \leq \sum_{i=1}^m \left\|\mathrm{T}\left(a_i\right)\right\| \cdot \|x_i\| = \sum_{i=1}^m \left\|\mathrm{T}\left(a_i\right)\right\|$$

Η παραπάνω σχέση προκύπτει είτε από την Cauchy-Schwartz είτε από το γεγονός ότι η απεικόνιση $f_{\mathrm{T}(a_i)}(x_i) = < x_i, \mathrm{T}(a_i) >$ είναι φραγμένη γραμμική με $\left\| f_{\mathrm{T}(a_i)} \right\| = \left\| \mathrm{T}(a_i) \right\|$.

Η ισότητα ισχύει για $x_i = \dfrac{\mathrm{T}(a_i)}{\left\| \mathrm{T}(a_i) \right\|}$, όπου $\|x_i\| = 1$.

Εφόσον ισχύει ότι $\mathrm{T}(a_i) = \mathrm{T}(a_{i1}e_1 + \ldots + a_{in}e_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j$, τότε:

$$\sum_{i=1}^{m} < x_i, \mathrm{T}(a_i) > = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} < x_i, y_j >$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι:

$$\|\mathrm{T}\| \cdot \left| \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} < x_i, \frac{y_j}{\|\mathrm{T}\|} > \right| \le \sum_{i=1}^{m} \left\| \mathrm{T}(a_i) \right\| \quad (*)$$

Για την περίπτωση που $x_i = \dfrac{\mathrm{T}(a_i)}{\left\| \mathrm{T}(a_i) \right\|}$, έχουμε:

$$\|\mathrm{T}\| \cdot \left| \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} < x_i, \frac{y_j}{\|\mathrm{T}\|} > \right| = \sum_{i=1}^{m} \left\| \mathrm{T}(a_i) \right\|$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα **Grothendieck**, προκύπτει ότι:

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| \mathrm{T}(a_i) \right\| \le \kappa_G \|\mathrm{T}\|$$

Δηλαδή ο T είναι 1-απόλυτα αθροίσιμος με $\pi_1(\mathrm{T}) \le \kappa_G \|\mathrm{T}\|$. Εφόσον το $\mathrm{T} \in L\left(\ell_1^n, \mathrm{H}\right)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι τυχαίο, τότε από την $(*)$ προκύπτει η ανισότητα **Grothendieck**.

Στο υπόλοιπο μέρος του κεφαλαίου 2, θα γενικεύσουμε το **Θεώρημα 2.2** του **Grothendieck** για την περίπτωση των $L_{1,\lambda}-$χώρων, αποδεικνύοντας ότι ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής $\mathrm{T}: L_{1,\lambda} \to \mathrm{H}$, όπου H ένας χώρος **Hilbert**, είναι απόλυτα αθροίσιμος. Τέλος, θα εφαρμόσουμε το **Θεώρημα Grothendieck** για την απόδειξη Θεωρημάτων σχετιζόμενων με τους απόλυτα αθροίσιμους τελεστές.

Ορισμός: Έστω $1 \le p \le \infty$ και $\lambda > 1$. Ένας χώρος **Banach** X είναι $L_{p,\lambda}$, εάν κάθε υπόχωρος A του X πεπερασμένης διάστασης περιέχεται σε έναν επίσης πεπερασμένης διάστασης υπόχωρο B του X, ο οποίος είναι ισόμορφος του $\ell_p^{\dim B}$ ($T : B \to \ell_p^{\dim B}$) με $\|T\| \cdot \|T^{-1}\| < \lambda$.

Θεώρημα 2.3: Αν ο X είναι ένας $L_{1,\lambda}-$χώρος και ο H είναι ένας χώρος **Hilbert**, τότε κάθε φραγμένος γραμμικός τελεστής $T : X \to H$ είναι 1-απόλυτα αθροίσιμος με $\pi_1(T) \le \kappa_G \cdot \lambda \cdot \|T\|$.

Απόδειξη: Έστω $x_1, \dots, x_m \in X$ και $B = span\{x_1, \dots, x_m\}$. Εφόσον ο X είναι $L_{1,\lambda}-$χώρος, τότε υπάρχει υπόχωρος C του H, με $B \subset C$, και $v : \ell_1^n \to C$ επί ισομορφισμός με $\|v\| \cdot \|v^{-1}\| < \lambda$ και $\dim C = n$. Άμεσα προκύπτει ότι και η $u = \frac{v}{\|v\|} : \ell_1^n \to C$ είναι επί ισομορφισμός με $u^{-1} = \|v\| \cdot v^{-1}$ και $\|u\| = 1$. Επίσης ισχύει ότι:

$$\|v\| \cdot \|v^{-1}\| < \lambda \leftrightarrow \left\|\frac{v}{\|v\|}\right\| \cdot \left\|\|v\| \cdot v^{-1}\right\| < \lambda \leftrightarrow \|u^{-1}\| < \lambda$$

Έστω ότι $u(a_i) = x_i$ για κάθε $i = 1, \dots, n$, όπου $a_i \in \ell_1^n$. Στη συνέχεια, επιλέγουμε $\{s_i\}_{i=1}^n$, ώστε $|s_i| \le 1$ για κάθε $i = 1, \dots, n$. Τότε, ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\left\|\sum_{i=1}^m s_i a_i\right\| = \left\|\sum_{i=1}^m s_i u^{-1}(x_i)\right\| = \left\|u^{-1}\left(\sum_{i=1}^m s_i x_i\right)\right\| \le \|u^{-1}\| \cdot \left\|\sum_{i=1}^m s_i x_i\right\| \le \lambda \cdot \left\|\sum_{i=1}^m s_i x_i\right\|$$

Από το **Λήμμα 2.1** προκύπτει ότι:

$$\mu_1(a_1, \dots, a_m) \le \lambda \cdot \mu_1(x_1, \dots, x_m)$$

Έστω $T \in L(X, H)$, τότε είναι άμεσο ότι $T \circ u \in L(\ell_1^n, H)$. Από το **Θεώρημα 2.2** του **Grothendieck** συνεπάγονται τα ακόλουθα:

$$\sum_{i=1}^m \|T(x_i)\| = \sum_{i=1}^m \|T \circ u(a_i)\| \le \|T \circ u\| \cdot \kappa_G \cdot \mu_1(a_1, \dots, a_m)$$

$$\le \|T\| \cdot \|u\| \cdot \kappa_G \cdot \lambda \cdot \mu_1(x_1, \dots, x_m) = \|T\| \cdot \kappa_G \cdot \lambda \cdot \mu_1(x_1, \dots, x_m)$$

Δηλαδή, $\pi_1(T) \le \kappa_G \cdot \lambda \cdot \|T\|$.

Συνέπεια του **Θεωρήματος 2.3** και κατ' επέκταση του **Θεωρήματος** του **Grothendieck**, είναι το επόμενο Θεώρημα:

Θεώρημα 2.4: Έστω Η είναι ένας χώρος **Hilbert**. Τότε, κάθε φραγμένος γραμμικός τελεστής $\mathrm{T}: L_1(\mu) \to \mathrm{H}$ είναι 1-απόλυτα αθροίσιμος με $\pi_1(\mathrm{T}) \le \kappa_G \cdot \|\mathrm{T}\|$.

Απόδειξη: Από το **Θεώρημα 3.2** έχει αποδειχθεί ότι για κάθε $1 \le p < \infty$ και οποιοδήποτε μέτρο μ, ο $L_p(\mu)$ είναι ένας $L_{p,\lambda}$ −χώρος για κάθε $\lambda > 1$. Συνεπώς, ο $L_1(\mu)$ −χώρος είναι $L_{1,\lambda}$ −χώρος.
Από το **Θεώρημα 2.3** άμεσα προκύπτει ότι ο $\mathrm{T}: L_1(\mu) \to \mathrm{H}$ είναι 1-απόλυτα αθροίσιμος τελεστής με $\pi_1(\mathrm{T}) \le \kappa_G \cdot \lambda \cdot \|\mathrm{T}\|$.
Είναι προφανές ότι, εφόσον η ανισότητα ισχύει για κάθε $\lambda > 1$, τότε $\pi_1(\mathrm{T}) \le \kappa_G \cdot \|\mathrm{T}\|$.

Κλείνοντας αυτό το κεφάλαιο, αποδεικνύουμε δύο Προτάσεις, οι οποίες μας δίνουν τη δυνατότητα να υπολογίσουμε ένα κάτω φράγμα για τη σταθερά του **Grothendieck**, κ_G.

Πρόταση 2.4: Έστω $\left(\mathrm{X}, \|\ \|_{\mathrm{X}}\right)$ χώρος με νόρμα. Αν $\dim \mathrm{X} = n$, τότε ισχύει ότι $\pi_1(\mathrm{I}_{\mathrm{X}}) \le \kappa_G \cdot d\left(\mathrm{X}, \ell_1^n\right) \cdot d\left(\mathrm{X}, \ell_2^n\right)$.

Απόδειξη: Εφόσον ο $\left(\mathrm{X}, \|\ \|_{\mathrm{X}}\right)$ είναι πεπερασμένης διάστασης n, τότε από το **π.11** είναι επί ισόμορφος με τον ℓ_p^n για κάθε $1 \le p \le \infty$.
Από την **π.12** υπάρχουν επί ισομορφισμοί $S': \ell_1^n \to \mathrm{X}$ και $\mathrm{T}': \mathrm{X} \to \ell_2^n$ έτσι ώστε $d\left(\mathrm{X}, \ell_1^n\right) = \| S' \| \cdot \|S'^{-1}\|$ και $d\left(\mathrm{X}, \ell_2^n\right) = \| \mathrm{T}' \| \cdot \|\mathrm{T}'^{-1}\|$. Από τους οποίους άμεσα προκύπτουν οι επί ισομορφισμοί $S: \ell_1^n \to \mathrm{X}$ και $\mathrm{T}: \mathrm{X} \to \ell_2^n$ με $\|S\| = \|\mathrm{T}\| = 1$ και $\|S^{-1}\| = d\left(\mathrm{X}, \ell_1^n\right)$, $\|\mathrm{T}^{-1}\| = d\left(\mathrm{X}, \ell_2^n\right)$.**[3]**
Δεδομένου ότι η απεικόνιση $\mathrm{T} \circ S: \ell_1^n \to \ell_2^n \in L\left(\ell_1^n, \ell_2^n\right)$ και ο ℓ_2^n είναι χώρος Hilbert, από το **Θεώρημα 2.2** του **Grothendieck** η $\mathrm{T} \circ S$ είναι 1-απόλυτα αθροιστικός τελεστής, όπου:

$$\pi_1(\mathrm{T} \circ S) \le \kappa_G \cdot \|\mathrm{T} \circ S\| \le \kappa_G \cdot \|\mathrm{T}\| \cdot \|S\| = \kappa_G$$

Από τα προαναφερόμενα έχουμε τα ακόλουθα:

$$\pi_1(\mathrm{I}_{\mathrm{X}}) = \pi_1\left(\mathrm{T}^{-1} \circ \mathrm{T} \circ S \circ S^{-1}\right) \le \|\mathrm{T}^{-1}\| \cdot \pi_1\left(\mathrm{T} \circ S \circ S^{-1}\right)$$

$$\le \|\mathrm{T}^{-1}\| \cdot \pi_1(\mathrm{T} \circ S) \cdot \|S^{-1}\| \le \kappa_G \cdot \|\mathrm{T}^{-1}\| \cdot \|S^{-1}\| = \kappa_G \cdot d\left(\mathrm{X}, \ell_1^n\right) \cdot d\left(\mathrm{X}, \ell_2^n\right).$$

Πρόταση 2.5: Αν ο n είναι φυσικός αριθμός και $1 \le p \le \infty$, τότε $d\left(\ell_p^n, \ell_2^n\right) = n^{\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|}$.

Απόδειξη: Η απόδειξη θα γίνει για $2 \le p < \infty$. Έστω $\mathrm{T}: \ell_p^n \to \ell_2^n$ επί ισομορφισμός με $\|\mathrm{T}\| = 1$. Αν $\{e_1, \ldots, e_n\}$ είναι η κανονική βάση του ℓ_p^n και $\varepsilon_i = \pm 1$, με $1 \le i \le n$, τότε:

$$n^{\frac{2}{p}} = \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \cdot e_i \right\|_p^2 = \sup\left\{ \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \cdot e_i \right\|_p^2 : \varepsilon_i = \pm 1 \right\} \ge \sup\left\{ \left\| \mathrm{T}\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \cdot e_i \right) \right\|_2^2 : \varepsilon_i = \pm 1 \right\} =$$

$$\sup\left\{ \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \cdot \mathrm{T}(e_i) \right\|_2^2 : \varepsilon_i = \pm 1 \right\} \ge \frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \cdot \mathrm{T}(e_i) \right\|_2^2 =$$

$$\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^{n} r_i(t) \cdot \mathrm{T}(e_i) \right\|_2^2 dt = \sum_{i=1}^{n} \left\| \mathrm{T}(e_i) \right\|_2^2 \ \ge \ n \cdot \min_{1 \le i \le n} \left\| \mathrm{T}(e_i) \right\|_2^2$$

Η τελευταία ισότητα οφείλεται στο ότι οι συναρτήσεις **Rademacher** $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ορθοκανονικό σύνολο του χώρου **Hilbert** ℓ_2^n. Δηλαδή,

$$\left\| \mathrm{T}(e_j) \right\|_2 = \inf_{1 \le i \le n} \left\{ \left\| \mathrm{T}(e_i) \right\|_2 \right\} \le n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$$

Επίσης, ισχύει ότι:

$$1 = \left\| e_j \right\|_p = \left\| \mathrm{T}^{-1}\left(\mathrm{T}(e_j) \right) \right\|_p \le \left\| \mathrm{T}^{-1} \right\| \cdot \left\| \mathrm{T}(e_j) \right\|_2 \le \left\| \mathrm{T}^{-1} \right\| \cdot n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$$

Άμεσα συνεπάγεται ότι $n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \le \left\| \mathrm{T} \right\| \cdot \left\| \mathrm{T}^{-1} \right\|$. Εφόσον ο Τ είναι τυχαίος, τότε ισχύει ότι:

$$d\left(\ell_p^n, \ell_2^n\right) \ge n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$$

Θεωρούμε, τώρα, την ταυτοτική απεικόνιση $\mathrm{I}: \ell_p^n \to \ell_2^n$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα του **Holder** έχουμε:

$$\left\| \mathrm{I}(x) \right\|_2 = \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2} \le \left(\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^{2 \cdot \frac{p}{2}} \right)^{2/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} 1 \right)^{1-\frac{2}{p}} \right)^{1/2} \le n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \cdot \|x\|_p$$

Είναι προφανές ότι η ισότητα επιτυγχάνεται για $x=(x_1,\dots,x_n)$ με $x=x_1=\dots=x_n$. Συνεπώς, $\|\mathrm{I}\|=n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$. Δεδομένου ότι $2\le p<\infty$, τότε $\|x\|_p\le\|x\|_2$ για κάθε $x\in\ell_2^n$. Δηλαδή, $\|\mathrm{I}^{-1}\|\le 1$. Αλλά, για $x=e_i$ με $1\le i\le n$, έχουμε ότι $\|e_i\|_2=\|e_i\|_p=1$. Άρα, $\|\mathrm{I}^{-1}\|=1$. Από τα προαναφερόμενα, προκύπτει ότι $\|\mathrm{I}\|\cdot\|\mathrm{I}^{-1}\|=n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$. Δηλαδή, $d\left(\ell_p^n,\ell_2^n\right)=n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$.

Από τα προηγούμενα αποτελέσματα είναι, πλέον, άμεσο ότι η **Πρόταση** ισχύει και για την περίπτωση που $1\le p<2$. Οι χώροι ℓ_p^n είναι ανακλαστικοί για κάθε $1\le p\le\infty$. Επίσης, ισχύει ότι $\left(\ell_p^n\right)^*=\ell_q^n$ για κάθε $1\le p\le\infty$, όπου q ο αντίστοιχος συζυγής του p. Εφόσον ισχύει ότι $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, άμεσα προκύπτει ότι, αν $1\le p<2$, τότε $2<q\le\infty$. Συνεπώς, για κάθε $1\le p<2$ ισχύουν οι ακόλουθες ισότητες:

$$d\left(\ell_p^n,\ell_2^n\right)=d\left(\left(\ell_p^n\right)^*,\left(\ell_2^n\right)^*\right)=d\left(\ell_q^n,\ell_2^n\right)=n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}=n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$$

Δηλαδή, $d\left(\ell_p^n,\ell_2^n\right)=n^{\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right|}$ για κάθε $1\le p\le\infty$.

Παρατήρηση: Μέσω της **Πρότασης 2.4**, μπορούμε να υπολογίσουμε ένα κάτω φράγμα για τη σταθερά του **Grothendieck** κ_G. Θέτουμε $\mathrm{X}=\ell_1^2$ στην **Πρόταση 2.4**. Από την **Πρόταση 2.2** και από το ότι οι χώροι ℓ_1^2,ℓ_∞^2 είναι ισομετρικοί μέσω της απεικόνισης $\mathrm{T}:\ell_1^2\to\ell_\infty^2$ όπου $\mathrm{T}(x,y)=(x+y,x-y)$, προκύπτει άμεσα ότι $\pi_1\left(\mathrm{I}_{\ell_1^2}\right)=\pi_1\left(\mathrm{I}_{\ell_\infty^2}\right)=2$. Από την **Πρόταση 2.5** έχουμε ότι $d\left(\ell_1^2,\ell_2^2\right)=\sqrt{2}$. Τότε, ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\pi_1\left(\mathrm{I}_{\ell_1^2}\right)\le\kappa_G\cdot d\left(\ell_1^2,\ell_1^2\right)\cdot d\left(\ell_1^2,\ell_2^2\right)\leftrightarrow\frac{2}{\sqrt{2}}\le\kappa_G\cdot d\left(\ell_1^2,\ell_1^2\right)\leftrightarrow\sqrt{2}\le\kappa_G.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Στο παρόν κεφάλαιο, χρησιμοποιώντας την ανισότητα **Grothendieck**, αποδεικνύουμε εφαρμογές των απόλυτων αθροίσιμων τελεστών σε $L_{p,\lambda}-$χώρους. Για την καλύτερη κατανόηση των ακόλουθων Θεωρημάτων παραθέτουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός: Έστω X ένας χώρος **Banach**. Η $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{X}$ λέμε ότι είναι ασθενώς $p-$αθροίσιμη, εάν για κάθε $x^* \in \mathrm{X}^*$ η ακολουθία $\left(x^*\left(x_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p$. Συμβολίζουμε με $\ell_p^{weak}\left(\mathrm{X}\right)$ τον χώρο τέτοιων ακολουθιών του Χ.

Άμεσα αποδεικνύεται ότι ο $\ell_p^{weak}\left(\mathrm{X}\right)$ είναι διανυσματικός χώρος, καθώς και χώρος **Banach** ως προς τη νόρμα:

$$\left\|\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_p^{weak} = \sup\left\{\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|x^*\left(x_n\right)\right|^p\right)^{1/p} : x^* \in \mathrm{B}_{\mathrm{X}^*}\right\}$$

Θεώρημα 3.1: Εάν Χ είναι $L_{1,\lambda}$ χώρος και Υ είναι $L_{2,\lambda'}$ χώρος, τότε κάθε φραγμένος γραμμικός τελεστής $u:\mathrm{X}\to\mathrm{Y}$ είναι 1-απόλυτα αθροίσιμος με $\pi_1\left(u\right)\le\kappa_G\cdot\lambda\cdot\lambda'\cdot\left\|u\right\|$.

Απόδειξη: Έστω $x_1,\dots,x_m\in\mathrm{X}$. Εφόσον ο Χ είναι $L_{1,\lambda}$ χώρος, τότε υπάρχει Ε υπόχωρος του Χ πεπερασμένης διάστασης, ώστε $span\left\{x_1,\dots,x_m\right\}\subset\mathrm{E}$ και $g:\mathrm{E}\to\ell_1^n$, όπου $n=\dim E$ ένας γραμμικός ισομορφισμός με $\left\|g\right\|\cdot\left\|g^{-1}\right\|<\lambda$. Επίσης, εφόσον ο Υ είναι ένας $L_{2,\lambda'}$ χώρος και το $u\left(\mathrm{E}\right)$ υπόχωρος του Υ, τότε υπάρχει F υπόχωρος του Υ πεπερασμένης διάστασης, ώστε $u\left(\mathrm{E}\right)\subset F$ και $f:F\to\ell_2^N$, όπου $N=\dim F$, ένας γραμμικός ισομορφισμός με $\left\|f\right\|\cdot\left\|f^{-1}\right\|<\lambda'$.
Θέτουμε $u_o:E\to F$ τον περιορισμό της u στο Ε. Άρα, ο τελεστής $fu_og^{-1}:\ell_1^n\to\ell_2^N$ είναι φραγμένος γραμμικός. Τότε, ισχύουν τα ακόλουθα :

$$\sum_{k=1}^{m}\left\|u\left(x_k\right)\right\| = \sum_{k=1}^{m}\left\|f^{-1}\left(fu_og^{-1}\right)g\left(x_k\right)\right\| \le \left\|f^{-1}\right\|\cdot\sum_{k=1}^{m}\left\|\left(fu_og^{-1}\right)\left(g\left(x_k\right)\right)\right\|_{\ell_2^N} \le$$

$$\le \left\|f^{-1}\right\|\cdot\kappa_G\cdot\left\|fu_og^{-1}\right\|\cdot\sup_{\varepsilon_\kappa=\pm1}\left\|\sum_{\kappa=1}^{m}\varepsilon_\kappa\cdot g\left(x_k\right)\right\|_{\ell_1^n} \qquad (\pi.3)$$

$$= \left\|f^{-1}\right\|\cdot\kappa_G\cdot\left\|fu_og^{-1}\right\|\cdot\sup_{\varepsilon_\kappa=\pm1}\sup_{x^*\in\mathrm{X}^*}\left\{x^*\left(\sum_{\kappa=1}^{m}\varepsilon_\kappa\cdot g\left(x_k\right)\right)\right\}$$

$$\leq \left\|f^{-1}\right\| \cdot \kappa_G \cdot \|f\| \cdot \|u_o\| \cdot \left\|g^{-1}\right\| \cdot \sup_{\varepsilon_\kappa = \pm 1} \sup_{x^* \in X^*} \left\{ \sum_{\kappa=1}^{m} \varepsilon_\kappa \cdot x^*\left(g\left(x_k\right)\right) \right\}$$

$$\leq \left\|f^{-1}\right\| \cdot \kappa_G \cdot \|f\| \cdot \|u_o\| \cdot \left\|g^{-1}\right\| \cdot \sup_{x^* \in X^*} \left\{ \sum_{\kappa=1}^{m} \left|x^*\left(g\left(x_k\right)\right)\right| \right\}$$

$$= \left\|f^{-1}\right\| \cdot \kappa_G \cdot \|f\| \cdot \|u_o\| \cdot \left\|g^{-1}\right\| \cdot \left\|\left(g\left(x_\kappa\right)\right)_{\kappa=1}^{m}\right\|_1^{weak}$$

$$\leq \left\|f^{-1}\right\| \cdot \kappa_G \cdot \|f\| \cdot \|u_o\| \cdot \left\|g^{-1}\right\| \cdot \|g\| \cdot \left\|\left(x_\kappa\right)_{\kappa=1}^{m}\right\|_1^{weak} \leq \kappa_G \cdot \|u\| \cdot \lambda \cdot \lambda' \cdot \left\|\left(x_\kappa\right)_{\kappa=1}^{m}\right\|_1^{weak} \quad (\pi.1)$$

Άρα, $\pi_1(u) \leq \kappa_G \cdot \lambda \cdot \lambda' \cdot \|u\|$.

Λήμμα 3.1: Θέτουμε (Ω, Σ, μ) να είναι ένας χώρος μέτρου. Έστω ότι ο X είναι ένας $L_p(\mu)$ χώρος $(1 \leq p \leq \infty)$ ή ένας $C(K)$ χώρος με K να είναι συμπαγής χώρος **Hausdorff**. Υποθέτουμε ότι το M είναι ένα μη κενό συμπαγές υποσύνολο του X και έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει μία προβολή $P \in L(X, X)$ πεπερασμένου βαθμού έτσι, ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα:

- $\|P\| = 1$
- $\|Pf - f\| < \varepsilon$ για όλα $f \in M$
- ο $P(X)$ είναι ισομετρικός του ℓ_p^n , όπου $n = \dim P(X)$.

Απόδειξη: Αρχικά, υποθέτουμε ότι $X = L_p(\mu)$, με $(1 \leq p \leq \infty)$. Εφόσον το M είναι συμπαγές, τότε είναι και ολικά φραγμένο. Άρα, για $\varepsilon > 0$ υπάρχουν απλές συναρτήσεις $f_1, \ldots, f_k \in L_p(\mu)$ έτσι, ώστε $M \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B\left(f_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Μπορούμε να κατασκευάσουμε $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma$ με $A_i \cap A_j = \varnothing$ $\forall i, j \leq n$ με $i \neq j$ και $\mu(A_i) \geq 0$ $\forall i \leq n$ έτσι ώστε $\forall j \leq n$ το f_j να είναι σταθερό σε κάθε A_i και να μηδενίζεται στο $X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

Ορίζουμε $P: L_p(\mu) \to L_p(\mu)$ έτσι ώστε $Pf = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mu(A_i)} \cdot \int_{A_i} f \, d\mu \cdot X_{A_i}$. Είναι προφανές ότι η P είναι γραμμική. Εύκολα προκύπτει ότι η P είναι προβολή, εφόσον για κάθε $j \leq n$, $P\left(X_{A_j}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mu(A_i)} \cdot \int_{A_i} X_{A_j} \, d\mu \cdot X_{A_i} = \frac{1}{\mu\left(A_j\right)} \cdot \mu\left(A_j\right) \cdot X_{A_j} = X_{A_j}$.

Για $p = \infty$ ισχύει ότι $\|P\| = \sup\left\{\|Pf\|_\infty : \|f\|_\infty \leq 1\right\}$. Εξ' ορισμού:

$$\|Pf\|_\infty = \inf\left\{c>0: \left|Pf(x)\right| \le c \quad \forall x \in \Omega\right\}$$

Εφόσον

$$\left|Pf(x)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mu(\mathrm{A}_i)} \cdot \int_{\mathrm{A}_i} f(x)\, d\mu \cdot \mathrm{X}_{\mathrm{A}_i}(x)\right| \le \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mu(\mathrm{A}_i)} \cdot \mu(\mathrm{A}_i) \cdot \mathrm{X}_{\mathrm{A}_i}(x) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_{\mathrm{A}_i}(x) \le 1$$

για κάθε $x \in \Omega$ και για κάθε f με $\|f\|_\infty \le 1$, τότε $\|Pf\|_\infty \le 1$ για κάθε f με $\|f\|_\infty \le 1$. Άρα $\|P\| \le 1$. Στην περίπτωση που $1 \le p < \infty$, ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\|Pf\|_p^p = \int\limits_{\bigcup_{j=1}^{n} \mathrm{A}_j} \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mu(\mathrm{A}_i)} \cdot \int_{\mathrm{A}_i} f\, d\mu \cdot \mathrm{X}_{\mathrm{A}_i}\right|^p d\mu$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\mathrm{A}_i} \left|\frac{1}{\mu(\mathrm{A}_i)} \cdot \int_{\mathrm{A}_i} f\, d\mu \cdot \mathrm{X}_{\mathrm{A}_i}\right|^p d\mu = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mu(\mathrm{A}_i)^p} \cdot \left|\int_{\mathrm{A}_i} f\, d\mu\right|^p \cdot \int\limits_{\mathrm{A}_i} \mathrm{X}_{\mathrm{A}_i} d\mu$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left|\int_{\mathrm{A}_i} f\, d\mu\right|^p \cdot \mu(\mathrm{A}_i)^{1-p} \le \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathrm{A}_i} |f|^p\, d\mu \cdot \mu(\mathrm{A}_i)^{\frac{p}{q}} \cdot \mu(\mathrm{A}_i)^{1-p} = \int\limits_{\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i} |f|^p\, d\mu \le \|f\|_p^p$$

Άρα $\|P\| \le 1$. Εφόσον $P\left(\mathrm{X}_{\mathrm{A}_j}\right) = \mathrm{X}_{\mathrm{A}_j}$ για κάθε $1 \le p \le \infty$, τότε $\|P\| = 1$.

Έστω $f \in \mathrm{M}$, τότε $\|f - f_i\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ για κάποια $1 \le i \le k$ και, καθώς $Pf_i = f_i$, έχουμε ότι:

$$\|Pf - f\| \le \|Pf - Pf_i\| + \|Pf_i - f\| \le \|P\|\|f - f_i\| + \|f - f_i\| \le 2\|f - f_i\| \le \varepsilon$$

Τέλος, ο τελεστής $\mathrm{T}: \ell_p^n \to P(\mathrm{X})$, όπου $\mathrm{T}(e_i) = \mu(\mathrm{A}_i)^{-\frac{1}{p}} \cdot \mathrm{X}_{\mathrm{A}_i}$ για κάθε $i \le n$, είναι ισομετρικός.

Υποθέτουμε ότι $\mathrm{X} = C(K)$. Εφόσον το M είναι συμπαγές, τότε είναι και ολικά φραγμένο. Άρα, για $\varepsilon > 0$ υπάρχουν απλές συναρτήσεις $f_1, \dots, f_m \in C(K)$ έτσι ώστε $\mathrm{M} \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B\left(f_i, \frac{\varepsilon}{4}\right)$. Επίσης, εφόσον το $\mathrm{M} \subset \left(C(K), \rho_\infty\right)$ είναι συμπαγές, από το **Θεώρημα Arzela** προκύπτει ότι το M είναι κλειστό, φραγμένο και ισοσυνεχές.

Αν ο (K, ρ_∞) είναι συμπαγής μετρικός χώρος, τότε το M είναι ομοιόμορφα ισοσυνεχές. Άρα, για $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$, ώστε για κάθε $\omega, \omega' \in K$ με $\rho(\omega, \omega') < \delta$ να ισχύει $\left|f(\omega) - f(\omega')\right| < \varepsilon$ για κάθε $f \in \mathrm{M}$. Από τα προηγούμενα για την περίπτωση που ο K είναι συμπαγής σε ένα τυχαίο τοπολογικό χώρο S

υπάρχει πεπερασμένη ανοικτή κάλυψη $\{\Omega_1,\ldots,\Omega_n\}$, ώστε $K\subset\bigcup_{i=1}^{n}\Omega_i$ και $\left|f_j(\omega)-f_j(\omega')\right|\le\frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $1\le j\le m$ για κάθε $\omega,\omega'\in\Omega_i$. Πράγματι, αν $x\in K$ τότε υπάρχει ανοικτή περιοχή του, V_x , έτσι ώστε για κάθε $j\le m$ και για κάθε $y\in V_x$ να ισχύει $\left|f_j(y)-f_j(x)\right|\le\frac{\varepsilon}{4}$. Συνεπώς $K=\bigcup_{x\in \mathrm{X}}V_x$. Από τη συμπάγεια του K υπάρχουν $\left\{V_{x_i}=\Omega_i\right\}_{i=1}^{n}$ έτσι ώστε $K=\bigcup_{i=1}^{n}\Omega_i$. Έστω $y_1,y_2\in\Omega_i$. Σύμφωνα με τα προαναφερόμενα συνεπάγεται ότι για κάθε $j\le m$:

$$\left|f_j(y_1)-f_j(y_2)\right|\le\left|f_j(y_1)-f_j(x_i)\right|+\left|f_j(x_i)-f_j(y_2)\right|\le\frac{\varepsilon}{2}.$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι για κάθε $i\le n$ υπάρχει $\omega_i\in\Omega_i\setminus\bigcup_{i\ne j}\Omega_j\ne\varnothing$. Από το **Θεώρημα π.10** υπάρχουν $\varphi_1,\ldots,\varphi_n\in C(K)$, ώστε $\operatorname{supp}\varphi_i\subset\Omega_i$ και $\varphi_i:\Omega_i\to[0,1]$ για κάθε $i\le n$ και $\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(\omega)=1$ για κάθε $\omega\in K$. Άμεσα προκύπτει από τα προηγούμενα ότι $\varphi_i\left(\omega_j\right)=\delta_{ij}$.

Η προβολή $P\in L\big(C(K),C(K)\big)$ με $P(f)=\sum_{i=1}^{n}f(\omega_i)\cdot\varphi_i$ έχει πεδίο τιμών το $R=span\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}$, με $\dim R=n$, εφόσον το σύνολο $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Παρατηρούμε ότι:

$$\left\|P(f)\right\|_\infty=\left\|\sum_{i=1}^{n}f(\omega_i)\cdot\varphi_i\right\|_\infty=\sup_{\omega\in K}\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}f(\omega_i)\cdot\varphi_i(\omega)\right|\right\}\le\max_{i\le n}\left\{\left|f(\omega_i)\right|\right\}\cdot\sup_{\omega\in K}\left\{\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(\omega)\right\}$$

$=\max_{i\le n}\left\{\left|f(\omega_i)\right|\right\}\le\|f\|_\infty$ για κάθε $f\in C(K)$. Δηλαδή, $\|P\|\le 1$. Εφόσον $\varphi_i\in C(K)$, $\left\|P(\varphi_i)\right\|_\infty=\sup_{\omega\in K}\left\{\left|\sum_{j=1}^{n}\varphi_i\left(\omega_j\right)\cdot\varphi_i(\omega)\right|\right\}=\sup_{\omega\in K}\left\{\varphi_i(\omega)\right\}=1$ και $\|\varphi_i\|_\infty=1$ τότε $\|P\|=1$.

Έστω $f\in\mathrm{M}$ και $\omega\in K$. Τότε, υπάρχουν κάποια f_j με $1\le j\le m$ έτσι ώστε $\left\|f-f_j\right\|_\infty<\frac{\varepsilon}{4}$. Τότε,

$$\left|P\big(f(\omega)\big)-f(\omega)\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}f(\omega_i)\cdot\varphi_i(\omega)-\sum_{i=1}^{n}f(\omega)\cdot\varphi_i(\omega)\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}\big(f(\omega_i)-f(\omega)\big)\cdot\varphi_i(\omega)\right|$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}\Big(\left|f(\omega_i)-f_j(\omega_i)\right|+\left|f_j(\omega_i)-f_j(\omega)\right|+\left|f_j(\omega)-f(\omega)\right|\Big)\cdot\varphi_i(\omega)$$

$$< \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\varepsilon}{2}+\left|f_j(\omega_i)-f_j(\omega)\right|\right)\cdot\varphi_i(\omega) \le \left(\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\right)\cdot\varphi_{i_o}(\omega) \le \varepsilon .$$

Άρα, $\left\|P(f)-f\right\|_\infty < \varepsilon$. Τέλος, η $\mathrm{T}:\ell_\infty^n \to P(C(K))$ με $\mathrm{T}\left((a)_{i=1}^n\right)=\sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i$ είναι ισομετρία. Πράγματι,

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i\right\|_\infty = \sup_{\omega\in K}\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i(\omega)\right| \le \max_{i\le n}\{|a_i|\} = \left\|(a_i)_{i=1}^n\right\|_{\ell_\infty^n} = |a_{i_o}| = \left|\sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i(\omega_{i_o})\right| \le \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i\right\|_\infty$$

$$\leftrightarrow \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i\right\|_\infty = \left\|(a_i)_{i=1}^n\right\|_{\ell_\infty^n}$$

Θεώρημα 3.2

- Έστω (Ω,Σ,μ) ένας χώρος μέτρου και $1\le p\le\infty$, τότε ο $L_p(\mu)$ είναι ένας $L_{p,\lambda}$ χώρος για κάθε $\lambda>1$.
- Έστω K ένας συμπαγής χώρος **Hausdorff**, τότε ο $C(K)$ είναι ένας $L_{\infty,\lambda}$ χώρος για κάθε $\lambda>1$.

Απόδειξη: Έστω Ε ένας πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του Χ, όπου Χ είναι ένας $L_p(\mu)$ χώρος ή ο $C(K)$. Τότε, υπάρχει $Q\in L(\mathrm{X},\mathrm{X})$ προβολή στο Ε. Πράγματι, ορίζουμε $Q:\mathrm{X}\to\mathrm{X}$ έτσι ώστε $Q(f)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^*(e_i)}\cdot x_i^*(f)\cdot e_i$ με $\{e_1,\dots,e_n\}$ η βάση του Ε και $\{x_1^*,\dots,x_n^*\}$ η βάση του E^* , ώστε $x_i^*(e_j)=\delta_{ij}$. Τότε, για κάθε $x\in\mathrm{E}$ έχουμε τα ακόλουθα:

$$Q(x)=Q\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\cdot e_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^*(e_i)}\cdot x_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\cdot e_j\right)\cdot e_i=\sum_{i=1}^{n} a_i\cdot e_i$$

Επιλέγουμε $\delta>0$, ώστε $\delta\cdot\|Q\|<1$. Εφόσον το Ε έχει $\dim\mathrm{E}<\infty$, τότε το $\mathrm{B_E}$ είναι συμπαγές σύνολο και από το **Λήμμα 3.1** υπάρχει προβολή $P\in L(\mathrm{X},\mathrm{X})$ τέτοια, ώστε $\|P(x)-x\|\le\delta$ για κάθε $x\in\mathrm{B_E}$ και η $P(\mathrm{X})$ να είναι ισομετρική με τον ℓ_p^n, όπου $n=\dim P(\mathrm{X})$.

Θέτουμε $u=\mathrm{I}+PQ-Q$. Τότε, ισχύει ότι ο $u\in L(\mathrm{X},\mathrm{X})$. Παρατηρούμε ότι $\|u-\mathrm{I}\|=\|PQ-Q\|\le\|P-\mathrm{I}\|\cdot\|Q\|\le\delta\cdot\|Q\|<1$. Εφόσον ο Χ είναι χώρος **Banach** και $\|u-\mathrm{I}\|<1$, από την **Πρόταση π.2** ο u είναι επί γραμμικός ισομορφισμός. Δηλαδή, ο

$u^{-1} \in L(\mathrm{X},\mathrm{X})$ και, επίσης, από την **Πρόταση π.2** ισχύει ότι $u^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{I}-u)^n$. Από τα προαναφερόμενα ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\|u^{-1}\| = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{I}-u)^n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|\mathrm{I}-u\|^n = \frac{1}{1-\|\mathrm{I}-u\|} \leq \frac{1}{1-\delta\|Q\|}$$

$$\|u\| = \|\mathrm{I}+PQ-Q\| \leq \|\mathrm{I}\| + \|P-\mathrm{I}\| \cdot \|Q\| \leq 1+\delta\|Q\|$$

Εφόσον ο Χ είναι χώρος **Banach** και $\sum_{n=0}^{\infty} \|\mathrm{I}-u\|^n < \infty$, τότε η $\sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{I}-u)^n$ είναι συγκλίνουσα και, άρα, επιβεβαιώνεται ότι η u^{-1} είναι καλά ορισμένη.
Δεδομένου ότι η απεικόνιση $u^{-1}Pu \in L(\mathrm{X},\mathrm{X})$ είναι ισοδύναμη με την P, τότε η $\dim\{u^{-1}Pu(\mathrm{X})\} = \dim P(\mathrm{X})$. Αν F είναι το πεδίο τιμών της $u^{-1}Pu$, τότε το $E \subset F$. Πράγματι, έστω $x \in \mathrm{E}$, τότε:

$$u(x) = x + PQ(x) - Q(x) = P(x) = P(P(x)) = P(u(x)) \leftrightarrow x = u^{-1}Pu(x)$$

Τέλος, ο περιορισμός του u στην F δίνει $u(F) = u(u^{-1}Pu(\mathrm{X})) = Pu(\mathrm{X}) = P(X)$. Δηλαδή ο $u|_F : F \to P(\mathrm{X})$ είναι επί γραμμικός ισομορφισμός ως ο περιορισμός του επί γραμμικού ισομορφισμού u στην F. Εφόσον ο $P(\mathrm{X})$ είναι ισομετρικός με τον ℓ_p^n, τότε υπάρχει $u_o : F \to \ell_p^n$ που είναι επί γραμμικός ισομορφισμός και $\|u_o\| \cdot \|u_o^{-1}\| \leq \|u\| \cdot \|u^{-1}\| \leq (1+\delta\|Q\|) \cdot (1-\delta\|Q\|)^{-1}$ με $1 < (1+\delta\|Q\|) \cdot (1-\delta\|Q\|)^{-1}$. Εφόσον για $\delta \to 0$ ισχύει ότι $\frac{(1+\delta\|Q\|)}{(1-\delta\|Q\|)} \to 1$, τότε με κατάλληλη επιλογή του δ ο λόγος μπορεί να γίνει μικρότερος από οποιοδήποτε $\lambda > 1$, άρα το Θεώρημα αποδεικνύεται.

Από τα Θεωρήματα **3.1** και **3.2**, προκύπτει άμεσα το ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 3.3: Κάθε τελεστής $u : L_1(\mu) \to L_2(\nu)$ είναι 1-απόλυτα αθροιστικός με $\pi_1(u) \leq \kappa_G \cdot \|u\|$, ανεξαρτήτως των μέτρων μ και ν.

Απόδειξη: Από το **Θεώρημα 3.2** οι χώροι $L_1(\mu), L_2(\nu)$ είναι $L_{1,\lambda}, L_{2,\lambda'}$ χώροι για κάθε $\lambda, \lambda' > 1$, ανεξαρτήτως των μέτρων μ και ν. Από το **Θεώρημα 3.1** προκύπτει ότι $\pi_1(u) \leq \lambda \cdot \lambda' \cdot \kappa_G \cdot \|u\|$ για κάθε $\lambda, \lambda' > 1$. Αυτό συνεπάγεται ότι $\pi_1(u) \leq \kappa_G \cdot \|u\|$.

Η απόδειξη του **Θεωρήματος 3.5** είναι παρόμοια με αυτή του **Θεωρήματος 3.3**. Η απόδειξή του είναι άλλη μία εφαρμογή της **Ανισότητας Grothendieck**. Για την απόδειξή του χρειαζόμαστε το **Λήμμα 3.2**.

Λήμμα 3.2: Έστω $1 \le p \le 2$ και $n, N \in \mathbb{N}$. Τότε, για κάθε φραγμένο γραμμικό τελεστή $u : \ell_\infty^n \to \ell_p^N$ ισχύει ότι $\pi_2(u) \le \kappa_G \cdot \|u\|$.

Απόδειξη: Έστω $x_1, \ldots, x_m \in \ell_\infty^n$ ακολουθία. Θα δείξουμε ότι:

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \|u(x_k)\|_p^2 \right)^{1/2} \le \kappa_G \cdot \|u\| \cdot \sup_{x^* \in B_{\ell_1^n}} \left\{ \left(\sum_{\kappa=1}^{m} |x^*(x_k)|^2 \right)^{1/2} \right\}$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $m = n = N$ και $\left\| (x_k)_{k=1}^n \right\|_2^{weak} = 1$. Πράγματι, εάν $m < n$, προσθέτουμε $n - m$ μηδενικά στοιχεία στην πεπερασμένη ακολουθία. Έτσι προκύπτει η $(x_k)_{k=1}^n$. Εάν $m > n$, τότε μπορούμε να επιλέξουμε $u \in \ell_\infty^m$ έτσι ώστε $u(e_i) = 0$ για $n+1 \le i \le m$. Με παρόμοιο τρόπο, υποθέτουμε ότι $m = n = N$.

Ο $n \times n$ πίνακας (u_{ij}) είναι τέτοιος, ώστε $u(e_i) = \sum_{j=1}^{n} u_{ij} e_j$ για κάθε $1 \le i \le n$. Έστω $s = (s_i)_{i=1}^n$, $t = (t_j)_{j=1}^n \in B_{\ell_\infty^n}$ και $y = (y_j)_{j=1}^n \in B_{\ell_{p^*}^n}$, τότε είναι προφανές ότι $y_t = (t_j y_j)_{j=1}^n \in B_{\ell_{p^*}^n}$. Αυτό έχει ως συνέπεια:

$$\left| \sum_{i,j=1}^{n} s_i u_{ij} y_j t_j \right| = \left| < y_t, u(s) > \right| \le \|u(s)\|_p \le \|u\|$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα του **Grothendieck** στον πίνακα $(u_{ij} y_j)_{i,j=1}^n$, έχουμε την ακόλουθη σχέση:

$$\left| \sum_{i,j}^{n} u_{ij} y_j < w_i, z_j > \right| \le \kappa_G \cdot \max \left\{ \left| \sum_{i,j}^{n} u_{ij} y_j s_i t_j \right| : |s_i| \le 1, |t_j| \le 1 \right\} \le \kappa_G \cdot \|u\|,$$

όπου $\{w_i\}_{i=1}^n, \{z_j\}_{j=1}^n \subset B_{\ell_2^n}$. Στη συνέχεια, θα γίνει επιλογή των $\{w_i\}_{i=1}^n, \{z_j\}_{j=1}^n$. Για κάθε $1 \le \kappa \le n$, έχουμε ότι $x_\kappa = (x_{\kappa i})_{i=1}^n = \sum_{i=1}^{n} x_{\kappa i} e_i$ με $(x_\kappa)_{\kappa=1}^n \in \mathrm{B}_{\ell_2^{weak}}$. Τότε, ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\left(\sum_{\kappa=1}^{n}\left|x_{\kappa i}\right|^{2}\right)^{1/2}=\left(\sum_{\kappa=1}^{n}\left|<e_i,x_\kappa>\right|^{2}\right)^{1/2}\leq\left\|\left(x_\kappa\right)_{\kappa=1}^{n}\right\|_2^{weak}=1$$

Θα δείξουμε την τελευταία ανισότητα. Θέτουμε την απεικόνιση $u_o:\ell_2^n\to\mathbb{R}$ με $u_o\left(x\right)=<e_i,x>$. Είναι άμεσο ότι η u_o είναι φραγμένος τελεστής. Από το **Λήμμα π.1a** ο τελεστής $\hat{u}_o:\ell_2^{weak}\left(\ell_2^n\right)\to\ell_2^{weak}\left(\mathbb{R}\right)$ με $\hat{u}_o\left(\left(x_\kappa\right)_{\kappa=1}^{n}\right)=\left\{<e_i,x_\kappa>\right\}_{\kappa=1}^{n}$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής για κάθε με $\left\|u_o\right\|=\left\|\hat{u}_o\right\|$. Συνεπώς αν $\mathrm{I}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση, τότε:

$$\left(\sum_{\kappa=1}^{n}\left|<e_i,x_\kappa>\right|^{2}\right)^{1/2}=\left(\sum_{\kappa=1}^{n}\left|\mathrm{I}\left(<e_i,x_\kappa>\right)\right|^{2}\right)^{1/2}\leq\left\|\left\{<e_i,x_\kappa>\right\}_{\kappa=1}^{n}\right\|_2^{weak}$$

$$\leq\left\|\hat{u}_o\right\|\cdot\left\|\left\{x_\kappa\right\}_{\kappa=1}^{n}\right\|_2^{weak}=\left\|u_o\right\|\cdot\left\|\left\{x_\kappa\right\}_{\kappa=1}^{n}\right\|_2^{weak}\leq\left\|\left\{x_\kappa\right\}_{\kappa=1}^{n}\right\|_2^{weak}$$

εφόσον $\left\|u_o\right\|=\sup\left\{\left|<e_i,x>\right|:\left\|x\right\|_2^n\leq 1\right\}\leq\sup\left\{\left\|e_i\right\|_2^n\cdot\left\|x\right\|_2^n:\left\|x\right\|_2^n\leq 1\right\}\leq 1$ και $\left\|\mathrm{I}\right\|=1$.

Θέτουμε $w_i=\left(x_{\kappa i}\right)_{\kappa=1}^{n}$. Από τα προηγούμενα, προκύπτει άμεσα ότι $w_i\in B_{\ell_2^n}$ για κάθε $1\leq i\leq n$. Στην συνέχεια, επιλέγουμε $z_j\in B_{\ell_2^n}$, $1\leq j\leq n$, ώστε:

$$<\sum_{i=1}^{n}u_{ij}y_jw_i,z_j>=\left\|\sum_{i=1}^{n}u_{ij}y_jw_i\right\|_2$$

Πράγματι, εφόσον η νόρμα $\left\|\ \right\|_2$ στον ℓ_2^n ικανοποιεί την ιδιότητα του παραλληλογράμμου, από το **Θεώρημα Jordan-von Neumann** υπάρχει εσωτερικό γινόμενο στον ℓ_2^n τέτοιο, ώστε $<x,x>^{1/2}=\left\|x\right\|_2$, όπου $x\in\ell_2^n$. Άρα, αν θέσουμε $z_j=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}u_{ij}y_jw_i}{\left\|\sum_{i=1}^{n}u_{ij}y_jw_i\right\|_2}$ όπου $\left\|z_j\right\|_2=1$ για κάθε $1\leq j\leq n$, τότε ισχύει ότι:

$$<\sum_{i=1}^{n}u_{ij}y_jw_i,\frac{\sum_{i=1}^{n}u_{ij}y_jw_i}{\left\|\sum_{i=1}^{n}u_{ij}y_jw_i\right\|_2}>=\left\|\sum_{i=1}^{n}u_{ij}y_jw_i\right\|_2$$

Άρα, από τα προηγούμενα ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\sum_{ij}^{n}u_{ij}y_j<w_i,z_j>=\sum_{j=1}^{n}<\sum_{i=1}^{n}u_{ij}y_jw_i,z_j>=\sum_{j=1}^{n}\left\|\sum_{i=1}^{n}u_{ij}y_jw_i\right\|_2\leq\kappa_G\left\|u\right\|\leftrightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left|y_j\right|\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{n}u_{ij}x_{ki}\right|^2\right)^{1/2}\leq\kappa_G\left\|u\right\|\leftrightarrow\sup\left\{\sum_{j=1}^{n}\left(\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{n}u_{ij}x_{ki}\right|^2\right)^{1/2}\cdot\left|y_j\right|\right):y\in B_{\ell_{p^*}^n}\right\}\leq\kappa_G\left\|u\right\|$$

.

Άρα $\left(\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{n}u_{ij}x_{ki}\right|^2\right)^{1/2}\right)_{j=1}^{n}\in\ell_p^n$ και $\left\|\left(\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{n}u_{ij}x_{ki}\right|^2\right)^{1/2}\right)_{j=1}^{n}\right\|_{\ell_p^n}\leq\kappa_G\cdot\left\|u\right\|$. Δηλαδή,

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{n}u_{ij}x_{ki}\right|^2\right)^{p/2}\right)^{1/p}\leq\kappa_G\cdot\left\|u\right\|.$$

Συνοψίζοντας, ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\left\|u\left(x_k\right)\right\|_p\right)^2\right)^{1/2}=\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{n}u_{ij}x_{ki}\right|^p\right)^{2/p}\right)^{1/2}=\left(\left\|\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{n}u_{ij}x_{ki}\right|^p\right)_{k=1}^{n}\right\|_{2/p}\right)^{1/p}$$

$$\leq\left(\sum_{j=1}^{n}\left\|\left(\left|\sum_{i=1}^{n}u_{ij}x_{ki}\right|^p\right)_{k=1}^{n}\right\|_{2/p}\right)^{1/p}=\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{n}u_{ij}x_{ki}\right|^2\right)^{p/2}\right)^{1/p}\leq\kappa_G\cdot\left\|u\right\|$$

Θεώρημα 3.4: Έστω $1\leq p\leq 2$, έστω Χ είναι $L_{\infty,\lambda}$ χώρος και έστω Υ ένας $L_{p,\lambda'}$ χώρος. Τότε, κάθε φραγμένος γραμμικός τελεστής $u:\mathrm{X}\to\mathrm{Y}$ είναι 2-απόλυτα αθροίσιμος με $\pi_2\left(u\right)\leq\kappa_G\cdot\lambda\cdot\lambda'\cdot\left\|u\right\|$.

Απόδειξη: Έστω $x_1,\ldots,x_m\in\mathrm{X}$. Εφόσον ο Χ είναι $L_{\infty,\lambda}$ χώρος, τότε υπάρχει Ε υπόχωρος του Χ πεπερασμένης διάστασης, ώστε $span\left\{x_1,\ldots,x_m\right\}\subset\mathrm{E}$ και $g:\mathrm{E}\to\ell_\infty^n$, όπου $n=\dim E$, ένας γραμμικός ισομορφισμός με $\left\|g\right\|\cdot\left\|g^{-1}\right\|<\lambda$. Επίσης, εφόσον ο Υ είναι ένας $L_{p,\lambda'}$ χώρος και το $u\left(\mathrm{E}\right)$ υπόχωρος του Υ, τότε υπάρχει F υπόχωρος του Υ πεπερασμένης διάστασης, ώστε $u\left(\mathrm{E}\right)\subset F$ και $f:F\to\ell_p^N$, όπου $N=\dim F$, ένας γραμμικός ισομορφισμός με $\left\|f\right\|\cdot\left\|f^{-1}\right\|<\lambda'$.
Θέτουμε $u_o:E\to F$ τον περιορισμό της u στο Ε. Άρα, ο τελεστής $fu_og^{-1}:\ell_\infty^n\to\ell_p^N$ είναι φραγμένος γραμμικός. Τότε, ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\left(\sum_{k=1}^{m}\left\|u\left(x_k\right)\right\|^2\right)^{1/2}=\left(\sum_{k=1}^{m}\left\|f^{-1}\left(fu_og^{-1}\right)g\left(x_k\right)\right\|^2\right)^{1/2}\leq\left\|f^{-1}\right\|\cdot\left(\sum_{k=1}^{m}\left\|\left(fu_og^{-1}\right)\left(g\left(x_k\right)\right)\right\|^2\right)^{1/2}\leq$$

$$\leq\left\|f^{-1}\right\|\cdot\kappa_G\cdot\left\|fu_og^{-1}\right\|\cdot\left(\sum_{k=1}^{m}\left\|\left(g\left(x_k\right)\right)\right\|^2\right)^{1/2}\leq\left\|f^{-1}\right\|\cdot\kappa_G\cdot\|f\|\cdot\|u_o\|\cdot\left\|g^{-1}\right\|\cdot\|g\|\left(\sum_{k=1}^{m}\|x_k\|^2\right)^{1/2}\leq$$

$$\leq\kappa_G\cdot\|u\|\cdot\lambda\cdot\lambda'\cdot\left(\sum_{k=1}^{m}\|x_k\|^2\right)^{1/2}=\kappa_G\cdot\|u\|\cdot\lambda\cdot\lambda'\cdot\left(\sum_{k=1}^{m}\sup_{x^*\in B_{X^*}}\left\{\left|x^*\left(x_k\right)\right|^2:\left\|x^*\right\|\leq 1\right\}\right)^{1/2}=$$

$$=\kappa_G\cdot\|u\|\cdot\lambda\cdot\lambda'\cdot\sup_{x^*\in B_{X^*}}\left\{\left(\sum_{k=1}^{m}\left|x^*\left(x_k\right)\right|^2\right)^{1/2}:\left\|x^*\right\|\leq 1\right\}=\kappa_G\cdot\|u\|\cdot\lambda\cdot\lambda'\cdot\left\|\left(x_k\right)_{k=1}^{m}\right\|_2^{weak}$$

Άρα, $\pi_2\left(u\right)\leq\kappa_G\cdot\lambda\cdot\lambda'\cdot\|u\|$.

Θεώρημα 3.5: Έστω K ένας συμπαγής χώρος **Hausdorff** και έστω μ ένα οποιοδήποτε μέτρο. Εάν $1\leq p\leq 2$, τότε κάθε φραγμένος γραμμικός τελεστής $u:C\left(K\right)\to L_p\left(\mu\right)$ είναι 2-απόλυτα αθροίσιμος με $\pi_2\left(u\right)\leq\kappa_G\cdot\|u\|$.

Απόδειξη: Από το **Θεώρημα 3.2**, οι χώροι $C\left(K\right),L_p\left(\mu\right)$ με $1\leq p\leq 2$ είναι $L_{\infty,\lambda},L_{p,\lambda'}$ χώροι, αντίστοιχα, για κάθε $\lambda,\lambda'>1$ ανεξαρτήτως του μέτρου μ. Από το **Θεώρημα 3.4** προκύπτει ότι $\pi_2\left(u\right)\leq\lambda\cdot\lambda'\cdot\kappa_G\cdot\|u\|$ για κάθε $\lambda,\lambda'>1$. Από αυτό συνεπάγεται ότι $\pi_2\left(u\right)\leq\kappa_G\cdot\|u\|$.

Τέλος, στο υπόλοιπο μέρος του Κεφαλαίου παρουσιάζονται δύο σημαντικά Θεωρήματα, η απόδειξή των οποίων βασίζεται στην **Ανισότητα Grothendieck** καθώς και στο **Θεώρημα 3.5**. Για την απόδειξή τους θα χρησιμοποιηθούν οι **Προτάσεις 3.1** και **3.2** καθώς και το **Composition Theorem.**

Πρόταση 3.1: Έστω K είναι ένας συμπαγής χώρος **Hausdorff** και $\left(\mathrm{Y},\|\ \|\right)$ χώρος νόρμα. Ένας τελεστής $u:C\left(K\right)\to\mathrm{Y}$ είναι p-απόλυτα αθροίσιμος, αν και μόνο αν υπάρχει κανονικό μέτρο πιθανότητας Borel στο K και απεικόνιση $\tilde{u}\in L\left(L_p\left(\mu\right),\mathrm{Y}\right)$ έτσι ώστε $\tilde{u}\circ j_p=u$. Η απεικόνιση $j_p:C\left(K\right)\to L_P\left(\mu\right)$ είναι p-απόλυτα αθροίσιμη με $\pi_p\left(j_p\right)=\mu\left(K\right)^{1/p}$.

Θεώρημα 3.6: Έστω ο X είναι χώρος **Banach**, ο οποίος είναι επί ισομορφικός με το πηλίκο $C(K)\setminus \mathrm{Y}$ ως προς τον κλειστό υπόχωρο Y του $C(K)$ καθώς και με τον υπόχωρο L του $L_1(\mu)$. Ο K είναι ένας συμπαγής χώρος Hausdorff. Τότε, ο X είναι επί ισομορφικός με έναν χώρο Hilbert.

Απόδειξη: Θέτουμε $\nu : C(K) \to C(K)\setminus \mathrm{Y}$ τον επί φραγμένο γραμμικό τελεστή πηλίκου, που ορίζεται ως εξής: $\nu(x) = x + \mathrm{Y}$. Ο χώρος $\left(C(K)\setminus \mathrm{Y}, \| \ \|\right)$ είναι χώρος Banach με $\|x+\mathrm{Y}\| = \inf\left\{\|x+y\| : y \in \mathrm{Y}\right\}$.

Θέτουμε $f : C(K)\setminus \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ τον ισομορφισμό από τον $C(K)\setminus \mathrm{Y}$ στον X και $g : \mathrm{X} \to L$ τον ισομορφισμό από τον X στον L. Τότε, ο τελεστής $g \circ f \circ \nu : C(K) \to L$ είναι επί φραγμένος γραμμικός και, άρα, από το **Θεώρημα 3.5** είναι 2-απόλυτα αθροίσιμος.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε επιλογή των διανυσμάτων $\{x_i\}_{i=1}^n$ του $C(K)$ με $\left\|(x_i)_{i=1}^n\right\|_2^{weak} = \sup\left\{\left(\sum_{i=1}^n \left|x^*(x_i)\right|^2\right)^{1/2} : x^* \in \mathrm{B}_{\mathrm{X}^*}\right\} \le 1$, έχουμε ότι:

$$\left(\sum_{i=1}^n \left\|f \circ \nu(x_i)\right\|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n \left\|g^{-1} \circ g \circ f \circ \nu(x_i)\right\|^2\right)^{1/2} \le \left(\sum_{i=1}^n \left\|g^{-1}\right\|^2 \cdot \left\|g \circ f \circ \nu(x_i)\right\|^2\right)^{1/2}$$

$$\left(\sum_{i=1}^n \left\|g^{-1}\right\|^2 \cdot \left\|g \circ f \circ \nu(x_i)\right\|^2\right)^{1/2} = \left\|g^{-1}\right\| \cdot \left(\sum_{i=1}^n \left\|g \circ f \circ \nu(x_i)\right\|^2\right)^{1/2} \le \left\|g^{-1}\right\| \cdot \kappa_G \cdot \left\|g \circ f \circ \nu\right\|.$$

Δηλαδή,

$$\pi_2(f \circ \nu) = \sup\left\{\left(\sum_{i=1}^n \left\|f \circ \nu(x_i)\right\|^2\right)^{1/2} : \left\|(x_i)_{i=1}^n\right\|_2^{weak} \le 1\right\} \le \left\|g^{-1}\right\| \cdot \kappa_G \cdot \left\|g \circ f \circ \nu\right\|$$

Άρα, ο τελεστής $f \circ \nu : C(K) \to \mathrm{X}$ είναι 2-απόλυτα αθροίσιμος. Από την **Πρόταση 3.1**, υπάρχει φραγμένος γραμμικός τελεστής $h : L_2(\mu) \to \mathrm{X}$ έτσι ώστε $h \circ j_2 = f \circ \nu$. Ο $L_2(\mu)$ είναι χώρος Hilbert και η απεικόνιση $f \circ \nu$ είναι επί.

Εφόσον η h είναι συνεχής, τότε ο $\ker h$ είναι κλειστός υπόχωρος του $L_2(\mu)$. Από το **Θεώρημα Προβολής** ισχύει η ακόλουθη ισότητα $L_2(\mu) = \ker h \oplus \ker h^{\perp}$. Δηλαδή $L_2(\mu) = \ker h + \ker h^{\perp}$ και $\ker h \cap \ker h^{\perp} = \left\{0_{L_2(\mu)}\right\}$.

Εφόσον ο $\ker h^{\perp}$ είναι κλειστός υπόχωρος του $L_2(\mu)$, είναι χώρος Hilbert. Θέτουμε $s = h|_{\ker h^{\perp}}$. Τότε, $\ker s = \left\{0_{L_2(\mu)}\right\}$. Από τα προαναφερόμενα, η $s : \ker h^{\perp} \to \mathrm{X}$ είναι φραγμένη γραμμική, $1-1$ και επί. Άρα, από το Θεώρημα Ανοικτής Απεικόνισης, το s είναι επί ισομορφισμός.

Πρόταση 3.2: Έστω $u \in L\left(\ell_p^*, \mathrm{X}\right)$ με $\left(\mathrm{X}, \| \ \|\right)$ χώρος **Banach**. Η απεικόνιση $\mathrm{H}: L\left(\ell_p^*, \mathrm{X}\right) \to \ell_p^{weak}(\mathrm{X})$ που ορίζεται με $\mathrm{H}(u) = \left(u\left(e_n\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$, για $1 < p < \infty$, είναι ισομετρία. Για $p = 1$, ο $L\left(c_o, \mathrm{X}\right)$ είναι ισομετρικός με τον $\ell_1^{weak}(\mathrm{X})$.

Θεώρημα 3.7 (Composition Theorem): Έστω $u \in \Pi_p(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ και $\upsilon \in \Pi_q(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ με $1 \le p, q < \infty$. Αν $1 \le r < \infty$ με $1/r = \min\left\{1, \left(1/p\right) + \left(1/q\right)\right\}$, τότε η $u \circ \upsilon$ είναι $r-$απόλυτη αθροίσιμη και $\pi_r(u \circ \upsilon) \le \pi_p(u) \cdot \pi_q(\upsilon)$.

Θεώρημα 3.8: Έστω X,Y χώροι Banach με X υπόχωρος του $L_{p,\lambda}$, όπου $1 \le p \le 2$. Τότε, κάθε $u: \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ φραγμένος γραμμικός τελεστής που είναι 2-απόλυτα αθροίσιμος είναι και 1-απόλυτα αθροίσιμος με $\pi_1(u) \le \kappa_G \cdot \lambda \cdot \pi_2(u)$.

Απόδειξη: Έστω $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathrm{X}$. Θέτουμε $\upsilon: \ell_\infty^n \to \mathrm{X}$ με $x_\kappa = \upsilon(e_\kappa)$ και $e_\kappa = \underbrace{\left(0, \ldots, 0, \frac{1}{n}, 0, \ldots, 0\right)}_{\kappa-o\sigma\tau\acute{\eta}}$ για κάθε $1 \le \kappa \le n$. Αν $x = \sum_{\kappa=1}^{n} \lambda_\kappa \cdot e_\kappa$, τότε η υ ορίζεται ως ακολούθως: $\upsilon(x) = \sum_{\kappa=1}^{n} \lambda_\kappa \cdot \upsilon(e_\kappa)$. Η υ είναι, προφανώς, γραμμική.

Οι $\left(\ell_\infty^n, \| \ \|_\infty\right), \left(\mathrm{X}, \| \ \|\right)$ είναι χώροι με νόρμα και ο ℓ_∞^n είναι χώρος πεπερασμένης διάστασης. Εφόσον η $\{e_1, \ldots, e_n\}$ είναι βάση του ℓ_∞^n, από το Λήμμα Εκτίμησης υπάρχει $\mathrm{M} > 0$ έτσι ώστε $\mathrm{M} \cdot \sum_{\kappa=1}^{n} |\lambda_i| \le \left\| \sum_{\kappa=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i \right\|$ για κάθε $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Άρα, αν $x = \sum_{\kappa=1}^{n} \lambda_\kappa \cdot e_\kappa$, τότε:

$$\|\upsilon(x)\|_{\mathrm{X}} = \left\| \sum_{\kappa=1}^{n} \lambda_\kappa \cdot \upsilon(e_\kappa) \right\|_{\mathrm{X}} \le \sum_{\kappa=1}^{n} |\lambda_\kappa| \cdot \|\upsilon(e_\kappa)\|_{\mathrm{X}} \le$$

$$\le \max_{1 \le \kappa \le n} \left\{ \|\upsilon(e_\kappa)\|_{\mathrm{X}} \right\} \cdot \sum_{\kappa=1}^{n} |\lambda_\kappa| \le \max_{1 \le \kappa \le n} \left\{ \|\upsilon(e_\kappa)\|_{\mathrm{X}} \right\} \cdot \frac{1}{\mathrm{M}} \cdot \left\| \sum_{\kappa=1}^{n} \lambda_\kappa \cdot e_\kappa \right\|_{\ell_\infty^n} = \max_{1 \le \kappa \le n} \left\{ \|\upsilon(e_\kappa)\|_{\mathrm{X}} \right\} \cdot \frac{1}{\mathrm{M}} \cdot \|x\|_{\ell_\infty^n}.$$

Δηλαδή, η υ είναι φραγμένη. Εφόσον ο X είναι χώρος Banach και υπόχωρος ενός $L_{p,\lambda}$ χώρου, τότε ο X είναι $L_{p,\lambda}$.

Ισχυρισμός: Ο ℓ_∞^n είναι $L_{\infty,\lambda'}$.

Πράγματι, έστω E υπόχωρος του ℓ_∞^n, τότε η $\dim E = m \le n$ και $E = \ell_\infty^m$. Συνεπώς, για κάθε $m \le \kappa \le n$, ο E είναι υπόχωρος του ℓ_∞^κ και η ταυτοτική απεικόνιση $\mathrm{I} : \left(\ell_\infty^\kappa, \| \ \|_\infty\right) \to \left(\ell_\infty^\kappa, \| \ \|_\infty\right)$ είναι ισομορφισμός με $\|\mathrm{I}\| \cdot \left\|\mathrm{I}^{-1}\right\| = 1 < \lambda'$.

Από το **Θεώρημα 3.4**, ο υ είναι 2-απόλυτα αθροίσιμος και $\pi_2(\upsilon) \le \kappa_G \cdot \lambda \cdot \lambda' \cdot \|\upsilon\|$ για κάθε $\lambda' > 1$. Δηλαδή, $\pi_2(\upsilon) \le \kappa_G \cdot \lambda \cdot \|\upsilon\|$.

Από την **Πρόταση 3.2** εφόσον $\upsilon \in L(c_o, \mathrm{X})$, άμεσα προκύπτει ότι $\|\upsilon\| = \left\|\left(x_\kappa\right)_{\kappa=1}^n\right\|_1^{weak}$.

Δηλαδή, $\pi_2(\upsilon) \le \kappa_G \cdot \lambda \cdot \left\|\left(x_\kappa\right)_{\kappa=1}^n\right\|_1^{weak}$.

Τέλος, εφόσον $\upsilon \in \Pi_2\left(\ell_\infty^n, \mathrm{X}\right)$ και $u \in \Pi_2(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$, τότε $1 = \min\left\{1, \left(1/2\right) + \left(1/2\right)\right\}$ και από το **Composition Theorem** η $u \circ \upsilon$ είναι $1-$απόλυτη αθροίσιμη με $\pi_1(u \circ \upsilon) \le \pi_2(u) \cdot \pi_2(\upsilon)$. Συνεπώς,

$$\sum_{\kappa=1}^{n} \left\|u\left(x_\kappa\right)\right\| = \sum_{\kappa=1}^{n} \left\|u \circ \upsilon\left(e_\kappa\right)\right\| \le \pi_1(u \circ \upsilon) \cdot \sup_{x^* \in B_{\mathrm{X}^*}} \left\{\sum_{\kappa=1}^{n} \left|x^*\left(e_\kappa\right)\right|\right\}$$

$$\le \pi_1(u \circ \upsilon) \cdot \sum_{\kappa=1}^{n} \left\|e_\kappa\right\|_{\ell_\infty^n} \le \pi_1(u \circ \upsilon) \le \kappa_G \cdot \lambda \cdot \pi_2(u) \cdot \left\|\left(x_\kappa\right)_{\kappa=1}^n\right\|_1^{weak}$$

Άρα, $\pi_1(u) \le \kappa_G \cdot \lambda \cdot \pi_2(u)$.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Λήμμα π.1: Έστω X,Y χώροι Banach και $u: \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Η απεικόνιση $\hat{u}: \ell_1^{weak}(\mathrm{X}) \to \ell_1^{weak}(\mathrm{Y})$ με $\hat{u}:(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \left(u(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής με $\|u\| = \|\hat{u}\|$.

Απόδειξη: Προφανώς, η $u: \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ είναι γραμμική. Η u είναι φραγμένη. Πράγματι,

$$\|\hat{u}\| = \sup\left\{\left\|\hat{u}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)\right\|_1^{weak(\mathrm{Y})} : \left\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_1^{weak(\mathrm{X})} \le 1\right\} = \sup\left\{\left\|\left(u(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_1^{weak(\mathrm{Y})} : \left\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_1^{weak(\mathrm{X})} \le 1\right\}$$

$$\left\|\hat{u}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)\right\|_1^{weak(\mathrm{Y})} = \sup_{x^*\in \mathrm{B}_{\mathrm{X}^*}}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} x^*\left(u(x_n)\right)\right\} = \sup_{x^*\in \mathrm{B}_{\mathrm{X}^*}}\sup_{m\ge n}\left\{\sum_{n=1}^{m} x^*\left(u(x_n)\right)\right\} = \sup_{x^*\in \mathrm{B}_{\mathrm{X}^*}}\sup_{m\ge n}\left\{x^*\left(u\left(\sum_{n=1}^{m} x_n\right)\right)\right\}$$

$$\le \sup_{x^*\in \mathrm{B}_{\mathrm{X}^*}}\sup_{m\ge n}\left\{\|x^*\|\cdot\|u\|\cdot\left\|\sum_{n=1}^{m} x_n\right\|\right\} = \|u\|\cdot\sup_{m\ge n}\left\{\left\|\sum_{n=1}^{m} x_n\right\|\right\} = \|u\|\cdot\sup_{m\ge n}\sup_{x^*\in \mathrm{B}_{\mathrm{X}^*}}\left\{x^*\left(\sum_{n=1}^{m} x_n\right)\right\}$$

$$= \|u\|\cdot\sup_{x^*\in \mathrm{B}_{\mathrm{X}^*}}\left\{x^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right)\right\} = \|u\|\cdot\sup_{x^*\in \mathrm{B}_{\mathrm{X}^*}}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} x^*(x_n)\right\} \le \|u\|\cdot\sup_{x^*\in \mathrm{B}_{\mathrm{X}^*}}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \left|x^*(x_n)\right|\right\} = \|u\|\cdot\left\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_1^{weak}$$

Δηλαδή $\|u\| \ge \|\hat{u}\|$. Άρα, η $u: \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής. Αντίστροφα:

$$\|u\| = \sup\left\{u(x) : \|x\|_{\mathrm{X}} \le 1\right\} \le \sup\left\{\left(u(x_n)\right)_{n=1}^{m} : \left\|(x_n)_{n=1}^{m}\right\|_1^{weak(\mathrm{X})} \le 1\right\}$$

$$\le \sup\left\{\left\|\left(u(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_1^{weak(\mathrm{Y})} : \left\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_1^{weak(\mathrm{X})} \le 1\right\}$$

$$= \sup\left\{\left\|\hat{u}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)\right\|_1^{weak(\mathrm{Y})} : \left\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_1^{weak(\mathrm{X})} \le 1\right\} = \|\hat{u}\|$$

Δηλαδή, $\|u\| \le \|\hat{u}\|$. Άρα $\|u\| = \|\hat{u}\|$.

Λήμμα π.1a: Έστω X,Y χώροι Banach και $u: \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Η απεικόνιση $\hat{u}: \ell_p^{weak}(\mathrm{X}) \to \ell_p^{weak}(\mathrm{Y})$ με $\hat{u}:(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \left(u(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής για κάθε $1 \le p \le \infty$ με $\|u\| = \|\hat{u}\|$.

Πρόταση π.2: Έστω X χώρος Banach, $\mathrm{T} \in L(\mathrm{X},\mathrm{X})$, ώστε $\|\mathrm{I} - \mathrm{T}\| < 1$. Τότε, ο T είναι επί γραμμικός ισομορφισμός.

Απόδειξη: Εφόσον $\mathrm{I}-\mathrm{T}\in L(\mathrm{X},\mathrm{X})$ για κάθε $x\in\mathrm{X}$ ισχύει ότι: $\|x-\mathrm{T}(x)\|\le\|\mathrm{I}-\mathrm{T}\|\cdot\|x\|$. Άρα,

$$(1-\|\mathrm{I}-\mathrm{T}\|)\cdot\|x\|\le\|x\|-\|x-\mathrm{T}(x)\|\le\|\mathrm{T}(x)\|\le\|x\|+\|x-\mathrm{T}(x)\|\le(1+\|\mathrm{I}-\mathrm{T}\|)\cdot\|x\|$$

Συνεπώς, ο T είναι ισομορφική εμφύτευση. Θα δείξουμε ότι ο T είναι επί. Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ θέτουμε $S_n=\mathrm{I}+(\mathrm{I}-\mathrm{T})+\ldots+(\mathrm{I}-\mathrm{T})^n$, όπου $(\mathrm{I}-\mathrm{T})^n=(\mathrm{I}-\mathrm{T})\circ\ldots\circ(\mathrm{I}-\mathrm{T})$ n-φορές. Προφανώς, έχουμε ότι $S_n\in L(\mathrm{X},\mathrm{X})$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.
Η $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία στον χώρο $(L(\mathrm{X},\mathrm{X}),\|\ \|)$. Πράγματι, για $n<m$, $\|S_m-S_n\|\le\sum\limits_{k=n+1}^{m}\|\mathrm{I}-\mathrm{T}\|^k=\dfrac{\|\mathrm{I}-\mathrm{T}\|^{n+1}-\|\mathrm{I}-\mathrm{T}\|^{m+1}}{1-\|\mathrm{I}-\mathrm{T}\|}<\infty$, εφόσον $\|\mathrm{I}-\mathrm{T}\|<1$. Επειδή ο χώρος $(L(\mathrm{X},\mathrm{X}),\|\ \|)$ είναι Banach, υπάρχει $S\in L(\mathrm{X},\mathrm{X})$, ώστε $\|S_n-S\|\to 0$.
Θα δείξουμε ότι $S\circ\mathrm{T}=\mathrm{T}\circ S=\mathrm{I}$. Αυτό είναι ισοδύναμο με το να δείξουμε ότι $\lim\limits_{n\to+\infty}(S_n\circ\mathrm{T})=\lim\limits_{n\to+\infty}(\mathrm{T}\circ S_n)=\mathrm{I}$. Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι $S_n\circ\mathrm{T}=\mathrm{I}-(\mathrm{I}-\mathrm{T})^{n+1}$.
Άρα,

$$\|S_n\circ\mathrm{T}-\mathrm{I}\|=\left\|(\mathrm{I}-\mathrm{T})^{n+1}\right\|\le\|(\mathrm{I}-\mathrm{T})\|^{n+1}$$

Επειδή $\|(\mathrm{I}-\mathrm{T})\|<1$, τότε $\lim\limits_{n\to+\infty}\|S_n\circ\mathrm{T}-\mathrm{I}\|=0$. Εφόσον για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ισχύει ότι $S_n\circ\mathrm{T}=\mathrm{T}\circ S_n$, ανάλογα αποδεικνύεται ότι $\lim\limits_{n\to+\infty}\|\mathrm{T}\circ S_n-\mathrm{I}\|=0$. Άρα, $S=\mathrm{T}^{-1}$. Δηλαδή, ο T είναι επί.

Πρόταση π.3: Έστω $n,N\in\mathbb{N}$ και έστω $u:\ell_1^n\to\ell_2^N$ ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής. Τότε, για οποιαδήποτε επιλογή $x_1,\ldots,x_m\in\ell_1^n$, ισχύει το ακόλουθο:

$$\sum_{i=1}^{m}\|u(x_i)\|_{\ell_2^N}\le\kappa_G\cdot\|u\|\cdot\sup_{\varepsilon_i=\pm1}\left\|\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i x_i\right\|_{\ell_1^n}$$

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι άμεση από εφαρμογή της **Ανισότητας Grothendieck.**

Ορισμός: Ένας τοπολογικός χώρος είναι παρασυμπαγής, αν για κάθε ανοικτό κάλυμμα του χώρου X υπάρχει τοπικά πεπερασμένη εκλέπτυνση. Δηλαδή, αν για κάθε ανοικτό κάλυμα $\{U_i\}_{i\in\mathrm{I}}$ του X υπάρχει ανοικτό κάλυμμα $\{V_j\}_{j\in J}$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Για κάθε $j\in J$ υπάρχει $i_j\in\mathrm{I}$ με $V_j\subset U_{i_j}$.

2. Για κάθε $x \in X$ υπάρχει W περιοχή του x, ώστε το σύνολο $\left\{ j \in J : W \cap V_j \neq \varnothing \right\}$ να είναι πεπερασμένο.

Πρόταση π.4: Έστω X φυσιολογικός τοπολογικός χώρος και $\left\{U_1,\ldots,U_n\right\}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του X. Τότε, για κάθε $F \subset X$ κλειστό και $G \subset X$ ανοικτό, ώστε $F \subset G$, υπάρχει $V \subset X$ ανοικτό, ώστε $F \subset V \subset \overline{V} \subset G$.

Απόδειξη: Έστω $F \subset X$ κλειστό και $G \subset X$ ανοικτό, ώστε $F \subset G$. Τα F, $X \setminus G$ είναι κλειστά και ξένα μεταξύ τους. Εφόσον ο X είναι φυσιολογικός, τότε υπάρχουν ανοικτά σύνολα G_1, G_2, ώστε $F \subset G_1$ και $X \setminus G \subset G_2$ και $G_1 \bigcap G_2 = \varnothing$. Θέτουμε $V = G_1$. Από τα προαναφερόμενα ισχύει ότι $F \subset V \subset \overline{V} \subset X \setminus G_2 \subset G$.

Πρόταση π.5: Έστω X φυσιολογικός τοπολογικός χώρος και $\left\{U_1,\ldots,U_n\right\}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του X. Τότε, υπάρχει ένα ανοικτό κάλυμμα $\left\{V_1,\ldots,V_n\right\}$ του X, ώστε $\overline{V}_\kappa \subset U_\kappa$ για κάθε $\kappa = 1,\ldots,n$.

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει ανοικτό σύνολο V_1 έτσι ώστε $\overline{V}_1 \subset U_1$ και $V_1 \bigcup U_2 \bigcup \ldots \bigcup U_n = X$. Η πλήρης απόδειξη έπεται με επαγωγή. Θέτουμε $F = X \setminus \left(U_2 \bigcup \ldots \bigcup U_n\right)$. Είναι προφανές ότι $F \subset U_1$ και F κλειστό. Εφόσον ο X είναι φυσιολογικός τοπολογικός χώρος, από την **Πρόταση π.4** υπάρχει ανοικτό σύνολο V_1 $F \subset V_1 \subset \overline{V}_1 \subset U_1$. Από τα προαναφερόμενα ισχύουν τα ακόλουθα:

$$X = F \bigcup U_2 \bigcup \ldots \bigcup U_n \subset V_1 \bigcup U_2 \bigcup \ldots \bigcup U_n \text{ και } \overline{V}_1 \subset U_1 .$$

Λήμμα π.6: Έστω X φυσιολογικός τοπολογικός χώρος και $\left\{U_i\right\}_{i \in I}$ ένα ανοικτό τοπικά πεπερασμένο κάλυμμα του X. Τότε, υπάρχει ένα ανοικτό κάλυμμα του $\left\{V_i\right\}_{i \in I}$ του X με $\overline{V}_i \subset U_i$ για κάθε $i \in I$.

Απόδειξη: Για την απόδειξη του Λήμματος, θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα του Zorn. Θέτουμε:

$$K = \left\{ \left\{V_j : j \in J\right\} : V_j \in S,\ \overline{V}_j \subset U_j\ \forall j \in J,\ \bigcup\left\{V_j : j \in J\right\} \cup \bigcup\left\{U_i : i \in I \setminus J\right\} = X,\ J \subset I \right\}$$

Ισχύει ότι $K \neq \varnothing$. Πράγματι, θέτουμε $W_1 = U_1$ και $W_2 = \bigcup\limits_{i \in I \setminus 1} U_i$. Εφόσον $W_1 \bigcup W_2 = X$, από την **Πρόταση π.5** υπάρχει $\left\{V_1, V_2\right\}$ ανοικτό κάλυμμα του X έτσι ώστε $\overline{V}_1 \subset W_1$ και $\overline{V}_2 \subset W_2$ με $V_1 \cup \bigcup\limits_{i \in I \setminus \{1\}} U_i = X$.

Είναι, επίσης, προφανές ότι το σύνολο K είναι μερικά διατεταγμένο, όταν είναι εφοδιασμένο με τη διάταξη: $\{V_j : j \in J\} \prec \{W_\kappa : \kappa \in \mathrm{K}\}$ αν και μόνο αν $J \subset \mathrm{K}$ και $V_j = W_j$ για κάθε $j \in J$.

Έστω $C = \left\{ \{V_j\}_{j \in J_a} : a \in \mathrm{A} \right\}$ μία αλυσίδα του K. Είναι προφανές ότι η $\bigcup C$ είναι άνω φράγμα του C. Θα δείξουμε ότι η $\bigcup C \in \mathrm{K}$. Συγκεκριμένα, θα δείξουμε ότι $\bigcup_{a \in \mathrm{A}} \bigcup_{j \in J_a} V_j \cup \bigcup_{a \in \mathrm{A}} \bigcup_{i \in I \setminus \bigcup_{a \in \mathrm{A}} J_a} U_i = \mathrm{X}$. Έστω $x \in \mathrm{X}$ και W ανοικτή περιοχή του x. Τότε, υπάρχουν $U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}$ έτσι ώστε $W \bigcap U_{i_\kappa} \neq \varnothing$ για κάθε $1 \le \kappa \le n$. Τότε, υπάρχει $\left\{ U_{i_{j1}}, \ldots, U_{i_{jk}} \right\} \subset \left\{ U_{i_1}, \ldots, U_{i_n} \right\}$, ώστε $x \in U_{i_{j\ell}}$ για κάθε $\ell = 1, \ldots, k$. Θέτουμε $b = \min\left\{ i_{j_\ell} : \ell = 1, \ldots, k \right\}$ και $c = \max\left\{ i_{j_\ell} : \ell = 1, \ldots, k \right\}$.

Στην περίπτωση που το $b \in I \setminus \bigcup_{a \in \mathrm{A}} J_a$, τότε το $x \in \bigcup_{a \in \mathrm{A}} \bigcup_{i \in I \setminus \bigcup_{a \in \mathrm{A}} J_a} U_i$. Αν το $c \notin I \setminus \bigcup_{a \in \mathrm{A}} J_a$, τότε υπάρχει $a_o \in \mathrm{A}$ ώστε το $c \in J_{a_o}$. Συνεπώς, το $x \in \bigcup_{j \in J_{\alpha_o}} V_j \cup \bigcup_{i \in I \setminus J_{\alpha_o}} U_i = \mathrm{X}$. Συγκεκριμένα, $x \in \bigcup_{j \in J_{\alpha_o}} V_j$. Άρα, η $\bigcup C \in \mathrm{K}$.

Από το λήμμα του Zorn, υπάρχει μεγιστική οικογένεια $\{V_j\}_{j \in J}$. Εάν $J \subset I$, τότε θα υπάρχουν $\left\{ U_{i_k} \right\}_{k=1}^{n}$ με $i_1, \ldots, i_n \in I \setminus J$ έτσι ώστε $\bigcup_{j \in J} V_j \cup \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k} \cup \bigcup_{i \in I \setminus J \cup \{i_1, \ldots, i_n\}} U_i = \mathrm{X}$.
Εφόσον ο X είναι φυσιολογικός χώρος, από την **Πρόταση π.5** υπάρχει ανοικτό κάλυμμα $\{W_1, \ldots, W_{n+2}\}$ του X έτσι ώστε $\overline{W}_k \subset U_{i_k}$ για κάθε $1 \le k \le n$, $\overline{W}_{i_{n+2}} \subset \bigcup_{i \in I \setminus J \cup \{i_1, \ldots, i_n\}} U_i$ και $\overline{W}_{i_{n+1}} \subset \bigcup_{j \in J} V_j$. Δηλαδή, $\bigcup_{j \in J} V_j \cup \bigcup_{k=1}^{n} W_{i_k} \in \mathrm{K}$ και $\bigcup_{j \in J} V_j \subset \bigcup_{j \in J} V_j \cup \bigcup_{k=1}^{n} W_{i_k}$. Άτοπο.

Λήμμα π.7: Έστω X τοπολογικός χώρος και F μία τοπικά πεπερασμένη οικογένεια υποσυνόλων του X. Τότε, ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Κάθε υποοικογένεια της F είναι τοπικά πεπερασμένη.
2. Η οικογένεια $\left\{ \overline{\mathrm{A}} : \mathrm{A} \in F \right\}$ είναι τοπικά πεπερασμένη.
3. $\overline{\bigcup\left\{ \mathrm{A} : \mathrm{A} \in F \right\}} = \bigcup\left\{ \overline{\mathrm{A}} : \mathrm{A} \in F \right\}$

Απόδειξη: Τα 1 και 2 είναι προφανή. Θα δείξουμε το 3. Έστω $x \in \overline{\bigcup\left\{ \mathrm{A} : \mathrm{A} \in F \right\}}$ και V ανοικτή περιοχή του x που τέμνει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων της F, $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_\kappa$. Τότε, $x \in \overline{\mathrm{A}}_1 \bigcup \ldots \bigcup \overline{\mathrm{A}}_\kappa$. Πράγματι, αν όχι, τότε το $V \setminus \left(\overline{\mathrm{A}}_1 \bigcup \ldots \bigcup \overline{\mathrm{A}}_\kappa \right)$

είναι μία ανοικτή περιοχή του x ξένη προς το σύνολο $\bigcup\{\mathrm{A} : \mathrm{A} \in F\}$. Άτοπο. Άρα, $\overline{\bigcup\{\mathrm{A} : \mathrm{A} \in F\}} \subset \bigcup\{\overline{\mathrm{A}} : \mathrm{A} \in F\}$.

Αντίστροφα, έστω $x \in \bigcup\{\overline{\mathrm{A}} : \mathrm{A} \in F\}$. Αν υποθέσουμε ότι το $x \notin \overline{\bigcup\{\mathrm{A} : \mathrm{A} \in F\}}$, τότε υπάρχει ανοικτή περιοχή V του x έτσι ώστε $V \cap \bigcup\{\mathrm{A} : \mathrm{A} \in F\} = \varnothing$. Τότε, για κάθε $\mathrm{A} \in F$, έχουμε ότι $V \bigcap \mathrm{A} = \varnothing$. Δηλαδή, το $x \notin \overline{\mathrm{A}}$ για κάθε $\mathrm{A} \in F$, με συνέπεια το $x \notin \bigcup\{\overline{\mathrm{A}} : \mathrm{A} \in F\}$. Άτοπο.

Θεώρημα π.8: Κάθε παρασυμπαγής χώρος Hausdorff Χ είναι φυσιολογικός.

Απόδειξη: Έστω Χ παρασυμπαγής χώρος Hausdorff. Τότε ο Χ είναι κανονικός. Πράγματι, έστω B κλειστό υποσύνολο του Χ και $x \in \mathrm{X} \setminus B$. Εφόσον ο Χ είναι χώρος Hausdorff, για κάθε $b \in B$ υπάρχει U_b ανοικτό με $x \notin \overline{U}_b$.

Το σύνολο $\{U_b\}_{b \in B} \bigcup (\mathrm{X} \setminus B)$ είναι ανοικτό κάλυμμα του Χ. Τότε, υπάρχει μία τοπικά πεπερασμένη εκλέπτυνση $\{V_j\}_{j \in J} \bigcup (\mathrm{X} \setminus B)$. Το $W = \bigcup_{j \in J} V_j$ είναι ανοικτό και η οικογένεια $\{V_j\}_{j \in J}$ είναι τοπικά πεπερασμένη. Από το **Λήμμα π.7**, έχουμε ότι $\overline{W} = \bigcup_{j \in J} \overline{V}_j$. Αυτό συνεπάγεται ότι $B \subset \overline{W}$. Από την παρασυμπάγεια ισχύει ότι για κάθε $j \in J$ υπάρχει U_j με $j \in B$, ώστε $V_j \subset \overline{V}_j \subset U_j$. Τότε το $x \in \mathrm{X} \setminus \overline{W} \supset \mathrm{X} \setminus \mathrm{A}$.

Έστω $\mathrm{M}, \mathrm{N} \subset \mathrm{X}$ κλειστά και ξένα μεταξύ τους σύνολα. Για κάθε $y \in \mathrm{M}$ υπάρχουν $\mathrm{O}(y), \Omega(y)$ ανοικτά με $y \in \Omega(y)$, $\mathrm{N} \subset \mathrm{O}(y)$ και $\mathrm{O}(y) \bigcap \Omega(y) = \varnothing$. Άμεσα προκύπτει ότι $\mathrm{N} \bigcap \overline{\Omega}(y) = \varnothing$, δεδομένου ότι ισχύει $\mathrm{O}(y) \bigcap \overline{\Omega}(y) = \varnothing$. Αν όχι, τότε υπάρχει $z \in \mathrm{O}(y) \bigcap \overline{\Omega}(y)$, δηλαδή $z \in \overline{\Omega}(y)$ και $z \in \mathrm{O}(y)$. Αλλά, σε αυτή την περίπτωση, έχουμε ότι $\mathrm{O}(y) \bigcap \Omega(y) \neq \varnothing$. Άτοπο.

Η οικογένεια $\{\Omega(y)\}_{y \in \mathrm{M}} \cup \{\mathrm{X} \setminus \mathrm{M}\}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του Χ και, εφόσον ο Χ είναι παρασυμπαγής, υπάρχει τοπικά πεπερασμένη εκλέπτυνση $\{V_j\}_{j \in J} \cup \{\mathrm{X} \setminus \mathrm{M}\}$. Θέτουμε $V = \bigcup_{j \in J} V_j$. Άμεσα προκύπτει ότι $\mathrm{M} \subset V$ και $\mathrm{N} \subset \mathrm{X} \setminus \overline{V}$. Δηλαδή, ο Χ είναι φυσιολογικός.

Λήμμα π.9 (Uryshon): Έστω Χ φυσιολογικός χώρος και Α, Β κλειστά σύνολα με $\mathrm{A} \bigcap \mathrm{B} = \varnothing$. Τότε, υπάρχει μία συνεχής συνάρτηση $f : \mathrm{X} \to [0,1]$ με $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathrm{A}$ και $f(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathrm{B}$.

Ορισμός: Μία συνάρτηση τοπικά πεπερασμένης διαμέρισης μονάδας σε έναν χώρο X είναι μία οικογένεια συνεχών συναρτήσεων $\{f_a : \mathrm{X} \to [0,1] : a \in \mathrm{A}\}$,έτσι ώστε:

1. $\sum_a f_a(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathrm{X}$.
2. Τα σύνολα $\{x \in \mathrm{X} : f_a(x) > 0\}$ σχηματίζουν μια τοπικά πεπερασμένη εκλέπτυνση.

Θεώρημα π.10: Έστω X παρασυμπαγής. Τότε, για κάθε ανοικτό κάλυμμα V υπάρχει μία συνάρτηση τοπικά πεπερασμένης διαμέρισης μονάδας, υποταγμένη στο V.

Απόδειξη: Δεδομένου ότι ο X είναι παρασυμπαγής, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το F_1 είναι τοπικά πεπερασμένο ανοικτό κάλυμμα του X. Από το **Θεώρημα π.8** και το **Λήμμα π.6** για κάθε $x \in \mathrm{X}$ μπορούμε να επιλέξουμε ένα ανοικτό U_x, ώστε $\bar{U}_x \subset V$ με $V \in F_1$. Εφόσον το $\{U_x\}_{x\in\mathrm{X}}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X, τότε υπάρχει τοπικά πεπερασμένο ανοικτό κάλυμμα F_2 του X με $F_2 \subset \{U_x : x \in \mathrm{X}\}$.
Από τα προαναφερόμενα, μπορούμε να επιλέξουμε για κάθε $U \in F_2$ ένα $V_U \in F_1$ ώστε $\bar{U} \subset V_U$. Θέτουμε $W = \{w = V_U : U \in F_2\}$.
Εφόσον το $W \subset F_1$, συνεπάγεται ότι το W είναι τοπικά πεπερασμένο ανοικτό κάλυμμα του X. Στη συνέχεια, ορίζουμε για κάθε $w \in W$ το σύνολο $F_w = \bigcup\{\bar{U} : U \in F_2 \ \textit{και} \ w = V_U\}$. Δεδομένου ότι το W είναι τοπικά πεπερασμένο ανοικτό κάλυμμα του X, τότε και η οικογένεια $f_w = \{\bar{U} : U \in F_2 \ \textit{και} \ w = V_U\}$ είναι τοπικά πεπερασμένη. Από το **Λήμμα π.7** έχουμε ότι $\bigcup_{U\in f_w} \bar{U} = \overline{\bigcup_{U\in f_w} U}$. Δηλαδή το F_w είναι κλειστό.
Για κάθε $w \in W$, από το **Λήμμα π.9** του **Uryshon** μπορούμε να βρούμε συνεχή συνάρτηση $h_w : \mathrm{X} \to [0,1]$ έτσι ώστε $h_w(x) = 1$ για κάθε $x \in F_w$ και $h_w(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathrm{X} \setminus w$. Εφόσον τα W και F_2 είναι τοπικά πεπερασμένα ανοικτά καλύμματα του X, είναι άμεσο ότι η συνάρτηση $h = \sum_{w\in W} h_w$ είναι καλά ορισμένη, γνησίως μεγαλύτερη του μηδενός και συνεχής. Τότε, η οικογένεια $\left\{g_w = \frac{h_w}{h} : w \in W\right\}$ αποτελεί μία διαμέριση της μονάδας για τον X.

Θεώρημα π.10a: Κάθε X χώρος συμπαγής και Hausdorff είναι παρασυμπαγής.

Θεώρημα π.11: Έστω $\left(\mathrm{X}, \|\ \|_{\mathrm{X}}\right)$ χώρος με νόρμα πεπερασμένης διάστασης n. Τότε ο X είναι γραμμικά ισόμορφος με τον ℓ_p^n, με $1 \le p \le \infty$.

Απόδειξη: Έστω $\{x_1,\ldots,x_n\}$, $\{e_1,\ldots,e_n\}$ βάσεις των X, ℓ_p^n , αντίστοιχα, όπου $e_i=(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ με τον άσσο στην i-οστή θέση. Η απεικόνιση $T: X\to \ell_p^n$

$$T:\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i \mapsto \sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i$$

είναι καλά ορισμένη, γραμμική, 1-1 και επί. Δεδομένου ότι οι X, ℓ_p^n είναι διάστασης n, οι τελεστές T, T^{-1} είναι φραγμένοι.

Πρόταση π.12: Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $\dim X=\dim Y=n$. Τότε, υπάρχει $T_o: X\to Y$ επί ισομορφισμός, ώστε $d(X,Y)=\|T_o\|\cdot\|T_o^{-1}\|$.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Ορισμός: Έστω $\left(\mathrm{X},\|\ \|_{\mathrm{X}}\right),\left(\mathrm{Y},\|\ \|_{\mathrm{Y}}\right)$ και $\mathrm{T}:\mathrm{X}\rightarrow\mathrm{Y}$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Συζυγής τελεστής του T είναι ο τελεστής $\mathrm{T}^{*}:\mathrm{Y}^{*}\rightarrow\mathrm{X}^{*}$, με $\mathrm{T}^{*}\left(y^{*}\right)=y^{*}\circ\mathrm{T}$ για κάθε $y^{*}\in\mathrm{Y}^{*}$.

Πρόταση κ1: Έστω $\left(\mathrm{X},\|\ \|_{\mathrm{X}}\right)$ και Y υπόχωρος του X. Αν $y^{*}\in\mathrm{Y}^{*}$, τότε υπάρχει $x^{*}\in\mathrm{X}^{*}$, ώστε $x^{*}(x)=y^{*}(x)$ για κάθε $x\in\mathrm{Y}$ και $\|x^{*}\|=\|y^{*}\|$.

Απόδειξη: Θέτουμε $p(x)=\|y^{*}\|\cdot\|x\|$ για κάθε $x\in\mathrm{X}$. Η $p:\mathrm{X}\rightarrow\mathbb{R}$ είναι θετικό υπογραμμικό συναρτησοειδές. Επίσης, $y^{*}(x)\leq p(x)\quad\forall x\in\mathrm{Y}$. Από το Θεώρημα **Hahn-Banach**, υπάρχει $x^{*}:\mathrm{X}\rightarrow\mathbb{R}$ γραμμική με $x^{*}|_{\mathrm{Y}}=y^{*}$ και $x^{*}(x)\leq p(x)$ για κάθε $x\in\mathrm{X}$. Δηλαδή, $x^{*}(x)\leq\|y^{*}\|\|x\|$ για κάθε $x\in\mathrm{X}$.
Άρα, η x^{*} είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές και $\|x^{*}\|\leq\|y^{*}\|$. Όμως, $\|y^{*}\|=\sup\left\{x^{*}(x):\|x\|\leq 1,\ x\in\mathrm{Y}\right\}\leq\|x^{*}\|$. Άρα, προκύπτει ότι $\|x^{*}\|=\|y^{*}\|$.

Πρόταση κ2: Έστω $\left(\mathrm{X},\|\ \|\right)$. Για κάθε Y κλειστό υπόχωρο του X και $x_{o}\in\mathrm{X}\setminus\mathrm{Y}$ υπάρχει $\tilde{f}\in\mathrm{X}^{*}$, με $\|\tilde{f}\|=1$, ώστε $\tilde{f}(x)=0$, για κάθε $x\in\mathrm{Y}$ και $\tilde{f}(x_{o})=d(x_{o},\mathrm{Y})$, όπου d η μετρική που καθορίζεται από τη νόρμα του X.

Απόδειξη: Θέτουμε $Z=\left\langle\mathrm{Y}\bigcup\{x_{o}\}\right\rangle$. Αν $z\in\mathrm{Z}$, τότε υπάρχουν μοναδικά $y\in\mathrm{Y}$ και $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε $z=y+\lambda x_{o}$.
Ορίζουμε τη γραμμική απεικόνιση $f(\lambda x_{o}+y)=\lambda\cdot d(x_{o},\mathrm{Y})$. Άρα, για κάθε $y\in\mathrm{Y}$ το $f(y)=0$. Για $\lambda\neq 0$ και $y\in\mathrm{Y}$ ισχύει ότι:

$$\|y+\lambda x_{o}\|=|\lambda|\cdot\left\|\frac{y}{\lambda}+x_{o}\right\|\geq|\lambda|\cdot d(x_{o},\mathrm{Y})=\left|f(y+\lambda x_{o})\right|$$

Συνεπώς, για κάθε $z=y+\lambda x_{o}\in\mathrm{Z}$, $|f(z)|\leq\|z\|$. Επίσης, $f(x_{o})=d(x_{o},\mathrm{Y})$. Από το Θεώρημα **Hahn-Banach**, υπάρχει γραμμική επέκταση $\tilde{f}:\mathrm{X}\rightarrow\mathbb{R}$ της f, ώστε $|\tilde{f}(x)|\leq\|x\|$ για κάθε $x\in\mathrm{X}$. Δηλαδή, $\|\tilde{f}\|\leq 1$.
Από τον ορισμό της $d(x_{o},\mathrm{Y})$, υπάρχει $(y_{n})_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathrm{Y}$ και $\|y_{n}-x_{o}\|\rightarrow d(x_{o},\mathrm{Y})$. Επίσης, ισχύει ότι $\left|\tilde{f}(y_{n}-x_{o})\right|\leq\|\tilde{f}\|\|y_{n}-x_{o}\|$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Επομένως:

$\lim_{n\to\infty}\left|\tilde{f}\left(y_n - x_o\right)\right| \le \left\|\tilde{f}\right\| \cdot \lim_{n\to\infty}\left\|y_n - x_o\right\|$. Τότε $d\left(x_o, \mathrm{Y}\right) = \tilde{f}\left(x_o\right) \le \left\|\tilde{f}\right\| \cdot d\left(x_o, \mathrm{Y}\right) \leftrightarrow 1 \le \left\|\tilde{f}\right\|$. Δηλαδή $\left\|\tilde{f}\right\| = 1$.

Πρόταση κ3: Έστω $\left(\mathrm{X}, \|\ \|\right)$. Για κάθε $x_o \in \mathrm{X}$ με $x_o \neq 0$, υπάρχει $\tilde{f} \in \mathrm{X}^*$, με $\left\|\tilde{f}\right\| = 1$, ώστε $\tilde{f}\left(x_o\right) = \left\|x_o\right\| \neq 0$.

Απόδειξη: Αν $x_o = 0$, το αποτέλεσμα ισχύει για κάθε $f \in \mathrm{X}^*$. Έστω, λοιπόν, $x_o \neq 0$. Τότε, θέτουμε $\mathrm{Y} = \left\langle x_o \right\rangle$ και ορίζουμε $f : \mathrm{Y} \to \mathbb{R}$ με $f\left(\lambda x_o\right) = \lambda\left\|x_o\right\|$. Άρα, για κάθε $y \in \mathrm{Y}$, $\left|f\left(y\right)\right| \le \left\|y\right\|$.
Από το Θεώρημα **Hahn-Banach**, υπάρχει γραμμική επέκταση $\tilde{f} : \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ της f, ώστε $\left|\tilde{f}\left(x\right)\right| \le \left\|x\right\|$ για κάθε $x \in \mathrm{X}$. Δηλαδή, $\left\|\tilde{f}\right\| \le 1$. Επειδή $\tilde{f}\left(x_o\right) = f\left(x_o\right) = \left\|x_o\right\|$, συνεπάγεται ότι $\tilde{f}\left(\frac{x_o}{\left\|x_o\right\|}\right) = 1$. Τότε, $\left\|\tilde{f}\right\| = 1$.

Πρόταση κ4: Ένας υπόχωρος Y του X είναι πυκνό υποσύνολο του X, αν και μόνο αν για κάθε $x^* \in \mathrm{X}^*$, με $x^*\left(x\right) = 0$ για κάθε $x \in \mathrm{Y}$, ισχύει $x^* = 0$.

Απόδειξη: Το ευθύ είναι άμεσο από τη συνέχεια του x^* και από την ισότητα $\overline{\mathrm{Y}} = \mathrm{X}$. Αντίστροφα υποθέτουμε ότι $\overline{\mathrm{Y}} \subsetneq \mathrm{X}$. Από την **Πρόταση κ2** υπάρχει $x^* \in \mathrm{X}^*$, με $\left\|x^*\right\| = 1$, ώστε $x^*\left(x\right) = 0$, για κάθε $x \in \overline{\mathrm{Y}}$. Από την υπόθεση προκύπτει ότι το $x^* = 0$, το οποίο και είναι άτοπο. Συνεπώς, $\overline{\mathrm{Y}} = \mathrm{X}$.

Πρόταση κ5: Έστω $\left(\mathrm{X}, \|\ \|_{\mathrm{X}}\right), \left(\mathrm{Y}, \|\ \|_{\mathrm{Y}}\right)$ χώροι με νόρμα και $\mathrm{T} : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Τότε, ισχύουν τα εξής:

1. Ο συζυγής τελεστής του T είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής και $\left\|\mathrm{T}\right\| = \left\|\mathrm{T}^*\right\|$.
2. Ο συζυγής τελεστής T^* είναι 1-1, αν και μόνο αν το $\mathrm{T}\left(\mathrm{X}\right)$ είναι πυκνό υποσύνολο του Y.
3. Αν ο T είναι ισομορφική εμφύτευση, τότε ο συζυγής τελεστής T^* είναι επί.

Απόδειξη
1. Είναι προφανές ότι ο T^* είναι γραμμικός τελεστής. Από τον ορισμό του T^* προκύπτει ότι για κάθε $x \in \mathrm{X}$:

$$\left\|\mathrm{T}^*\left(y^*\right)\left(x\right)\right\| = \left\|y^* \circ \mathrm{T}\left(x\right)\right\| \le \left\|y^* \circ \mathrm{T}\right\| \cdot \left\|x\right\| = \left\|\mathrm{T}^*\left(y^*\right)\right\| \cdot \left\|x\right\| \le \left\|\mathrm{T}\right\| \cdot \left\|y^*\right\| \cdot \left\|x\right\| \leftrightarrow$$

$\leftrightarrow \left\|\mathrm{T}^*\left(y^*\right)\right\| \leq \|\mathrm{T}\| \cdot \left\|y^*\right\|$. Δηλαδή, $\left\|\mathrm{T}^*\right\| \leq \|\mathrm{T}\|$.

Αντίστροφα, αν $\varepsilon > 0$, τότε από τον ορισμό του supremum υπάρχει $x \in \mathrm{X}$ με $\|x\| = 1$ ώστε $\|\mathrm{T}(x)\| > \|\mathrm{T}\| - \varepsilon$. Εφόσον $x \neq 0$, τότε υπάρχει $y^* \in \mathrm{Y}^*$ με $\left\|y^*\right\| = 1$ έτσι, ώστε $y^*\left(\mathrm{T}(x)\right) = \|\mathrm{T}(x)\|$. Επομένως, η $\left\|\mathrm{T}^*\right\| \geq \left(\mathrm{T}^*\left(y^*\right)\right)(x) = y^*\left(\mathrm{T}(x)\right) = \|\mathrm{T}(x)\| > \|\mathrm{T}\| - \varepsilon$. Εφόσον το $\varepsilon > 0$ είναι τυχαίο, ισχύει ότι $\|\mathrm{T}\| \leq \left\|\mathrm{T}^*\right\|$. Συνεπώς, η $\|\mathrm{T}\| = \left\|\mathrm{T}^*\right\|$.

2. Υποθέτουμε ότι ο συζυγής τελεστής T^* είναι 1-1. Εφόσον η $\mathrm{T}:\mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ είναι γραμμική, ο $\mathrm{T}(\mathrm{X})$ είναι υπόχωρος του Y. Έστω $y^* \in \mathrm{Y}^*$, αν $y^*\left(\mathrm{T}(x)\right) = 0$ για κάθε $x \in \mathrm{X}$, τότε $\mathrm{T}^*\left(y^*\right) = y^* \circ \mathrm{T} = 0$ και εφόσον ο T^* είναι 1-1, τότε το $y^* = 0$. Από την **Πρόταση κ4**, συνεπάγεται ότι ο $\mathrm{T}(\mathrm{X})$ είναι πυκνός στον Y. Αντίστροφα, έστω $y^* \in \mathrm{Y}^*$, ώστε $\mathrm{T}^*\left(y^*\right) = 0$. Τότε, $\mathrm{T}^*\left(y^*\right)(x) = y^* \circ \mathrm{T}(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathrm{X}$. Εφόσον η $\overline{\mathrm{T}(\mathrm{X})} = \mathrm{Y}$ και y^* είναι συνεχής, προκύπτει ότι $y^* = 0$. Δηλαδή, $\ker \mathrm{T}^* = 0$. Άρα, ο T^* είναι 1-1.

3. Έστω $x^* \in \mathrm{X}^*$. Εφόσον ο T είναι ισομορφική εμφύτευση, η συνάρτηση $z^*:\mathrm{T}(\mathrm{X}) \to \mathbb{R}$, με $z^*\left(\mathrm{T}(x)\right) = x^*(x)$ είναι γραμμικό συναρτησοειδές. Πράγματι, για κάθε $x \in \mathrm{X}$ υπάρχει $y \in \mathrm{T}(\mathrm{X})$ έτσι, ώστε $y = \mathrm{T}(x) \leftrightarrow x = \mathrm{T}^{-1}(y)$. Συνεπώς για κάθε $y \in \mathrm{T}(\mathrm{X})$ ισχύει ότι $z^*\left(\mathrm{T}(x)\right) = z^*\left(\mathrm{T}\left(\mathrm{T}^{-1}(y)\right)\right) = x^*\left(\mathrm{T}^{-1}(y)\right) \leftrightarrow z^*(y) = x^*\left(\mathrm{T}^{-1}(y)\right)$. Δηλαδή, το $z^* = x^* \circ \mathrm{T}^{-1}$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές. Από την **Πρόταση κ1** υπάρχει $y^* \in \mathrm{Y}^*$, ώστε το $y^*\left(\mathrm{T}(x)\right) = z^*\left(\mathrm{T}(x)\right)$ για κάθε $x \in \mathrm{X}$ και $\left\|y^*\right\| = \left\|z^*\right\|$. Τότε, $\mathrm{T}^*\left(y^*\right)(x) = y^*\left(\mathrm{T}(x)\right) = z^*\left(\mathrm{T}(x)\right) = x^*(x)$ για κάθε $x \in \mathrm{X}$. Δηλαδή $\mathrm{T}^*\left(y^*\right) = x^*$.

Πρόταση κ6: Έστω $\left(\mathrm{X}, \|\ \|_{\mathrm{X}}\right), \left(\mathrm{Y}, \|\ \|_{\mathrm{Y}}\right)$ ισόμορφοι χώροι με νόρμα. Ορίζουμε :

$$d(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \inf\left\{\|\mathrm{T}\| \cdot \left\|\mathrm{T}^{-1}\right\| : \mathrm{T}:\mathrm{X} \to \mathrm{Y} \textit{ ισομορφισμός επί}\right\}.$$

Τότε, η $d(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \geq 1$ και $d(\mathrm{X},\mathrm{Z}) \leq d(\mathrm{X},\mathrm{Y})\, d(\mathrm{Y},\mathrm{Z})$, όπου $\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z}$ διανυσματικοί χώροι με νόρμα.

Απόδειξη: Προφανώς, η $d(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \geq 0$. Έστω $\mathrm{T}:\mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ γραμμικός ισομορφισμός επί. Επομένως, $\mathrm{I}_{\mathrm{Y}} = \mathrm{T} \circ \mathrm{T}^{-1} : \left(\Upsilon, \|\ \|_{\mathrm{Y}}\right) \to \left(\Upsilon, \|\ \|_{\mathrm{Y}}\right)$ και $1 = \left\|\mathrm{I}_{\mathrm{Y}}\right\| = \left\|\mathrm{T} \circ \mathrm{T}^{-1}\right\| \leq \|\mathrm{T}\| \cdot \left\|\mathrm{T}^{-1}\right\|$. Άρα, $d(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \geq 1$.

Θεωρούμε τους επί γραμμικούς ισομορφισμούς $\mathrm{T}:\mathrm{X}\to\mathrm{Y}$ και $S:\mathrm{Y}\to\mathrm{Z}$. Τότε ο $S\circ\mathrm{T}:\mathrm{X}\to\mathrm{Z}$ είναι επίσης επί γραμμικός ισομορφισμός και ισχύει ότι:

$$d(\mathrm{X},\mathrm{Z})\le\|S\circ\mathrm{T}\|\cdot\|(S\circ\mathrm{T})^{-1}\|=\|S\circ\mathrm{T}\|\cdot\|\mathrm{T}^{-1}\circ S^{-1}\|$$

$$\le\|S\|\cdot\|\mathrm{T}\|\cdot\|S^{-1}\|\cdot\|\mathrm{T}^{-1}\|=\|S\|\cdot\|S^{-1}\|\cdot\|\mathrm{T}\|\cdot\|\mathrm{T}^{-1}\|$$

Συνεπώς, το $d(\mathrm{X},\mathrm{Z})\le d(\mathrm{X},\Upsilon)d(\Upsilon,Z)$.

Πρόταση κ7: Έστω $(\mathrm{X},\|\ \|_{\mathrm{X}})$, $(\mathrm{Y},\|\ \|_{\mathrm{Y}})$ ισόμορφοι χώροι με νόρμα. Τότε, ισχύει ότι $d(\mathrm{X}^*,\mathrm{Y}^*)\le d(\mathrm{X},\mathrm{Y})$. Η ισότητα $d(\mathrm{X}^*,\mathrm{Y}^*)=d(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ ισχύει, αν οι X,Y είναι ανακλαστικοί.

Απόδειξη: Έστω $\mathrm{T}:\mathrm{X}\to\mathrm{Y}$ επί γραμμικός ισομορφισμός. Από την **Πρόταση κ5**, ο συζυγής τελεστής $\mathrm{T}^*:\mathrm{Y}^*\to\mathrm{X}^*$ είναι επί, 1-1, φραγμένος γραμμικός τελεστής και $\|\mathrm{T}^*\|=\|\mathrm{T}\|$. Επομένως, ορίζεται ο $(\mathrm{T}^*)^{-1}$ και είναι 1-1 και επί.

Ισχυρισμός: $(\mathrm{T}^{-1})^*=(\mathrm{T}^*)^{-1}$.

Εφόσον ο T είναι επί γραμμικός ισομορφισμός, ο $(\mathrm{T}^{-1})^*$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής. Έστω $x^*\in\mathrm{X}^*$. Τότε $(\mathrm{T}^{-1})^*(x^*)=x^*\circ\mathrm{T}^{-1}=y^*$. Συνεπώς, ισχύει ότι:

$$\mathrm{T}^*(y^*)=y^*\circ\mathrm{T}=x^*\circ\mathrm{T}^{-1}\circ\mathrm{T}=x^*\leftrightarrow(\mathrm{T}^*)^{-1}\circ\mathrm{T}^*(y^*)=(\mathrm{T}^*)^{-1}(x^*)$$

$$\leftrightarrow y^*=(\mathrm{T}^*)^{-1}(x^*)\leftrightarrow(\mathrm{T}^*)^{-1}(x^*)=y^*$$

Δηλαδή, για τυχαίο x^*, ισχύει η ισότητα $(\mathrm{T}^{-1})^*(x^*)=(\mathrm{T}^*)^{-1}(x^*)$. Επομένως, $(\mathrm{T}^{-1})^*=(\mathrm{T}^*)^{-1}$.

Εφόσον ο $\mathrm{T}^{-1}:\mathrm{Y}\to\mathrm{X}$ είναι επί γραμμικός ισομορφισμός, τότε και ο συζυγής τελεστής $(\mathrm{T}^{-1})^*:\mathrm{X}^*\to\mathrm{Y}^*$ είναι επί, 1-1, φραγμένος γραμμικός τελεστής με $\|(\mathrm{T}^{-1})^*\|=\|\mathrm{T}^{-1}\|$. Από τον ισχυρισμό, συνεπάγεται ότι $\|\mathrm{T}^{-1}\|=\|(\mathrm{T}^{-1})^*\|=\|(\mathrm{T}^*)^{-1}\|$. Δηλαδή, ο T^* είναι επί γραμμικός ισομορφισμός. Συνεπώς, αν $\mathrm{T}:\mathrm{X}\to\mathrm{Y}$ είναι επί γραμμικός ισομορφισμός, τότε ισχύει ότι:

$$d(X,Y) \leq \|T\| \cdot \|T^{-1}\| = \|T^*\| \cdot \|(T^{-1})^*\| = \|T^*\| \cdot \|(T^*)^{-1}\|$$

Δηλαδή, $d(X^*,Y^*) \leq d(X,Y)$ (1).

Αν $T^*: Y^* \to X^*$ είναι επί γραμμικός ισομορφισμός, τότε ισχύει ότι:

$$d(Y^*,X^*) \leq \|T^*\| \cdot \|(T^{-1})^*\|$$

Όπως δείξαμε προηγουμένως, ο συζυγής $T^{**}: X^{**} \to Y^{**}$ είναι επί γραμμικός ισομορφισμός και $\|(T^*)^{-1}\| = \|((T^*)^{-1})^*\| = \|(T^{**})^{-1}\|$. Επίσης, από την **Πρόταση κ5** ισχύει ότι $\|T^{**}\| = \|T^*\|$. Επομένως:

$$d(Y^*,X^*) \leq \|T^*\| \cdot \|(T^*)^{-1}\| = \|T^{**}\| \cdot \|((T^*)^{-1})^*\| = \|T^{**}\| \cdot \|(T^{**})^{-1}\|$$

Εφόσον ο $T^*: Y^* \to X^*$ είναι τυχαίος, τότε ισχύει ότι $d(Y^{**},X^{**}) \leq d(Y^*,X^*)$. Στην περίπτωση που οι X,Y είναι ανακλαστικοί, ο $\hat{X} = X^{**}$ και ο $\hat{Y} = Y^{**}$. Δηλαδή υπάρχουν $f: X \to \hat{X}$ και $g: Y \to \hat{Y}$, που είναι επί γραμμικοί ισομετρικοί. Επομένως,

$$T^{**}(\hat{x}) = \hat{y} \leftrightarrow T^{**}(f(x)) = g(y) \leftrightarrow g^{-1}(T^{**}(f(x))) = y$$

και

$$(T^{**})^{-1}(\hat{y}) = \hat{x} \leftrightarrow (T^{**})^{-1}(g(y)) = f(x) \leftrightarrow f^{-1}((T^{**})^{-1}(g(y))) = x.$$

Θέτουμε $T = g^{-1} \circ T^{**} \circ f$ και $T^{-1} = f^{-1} \circ (T^{**})^{-1} \circ g$. Είναι άμεσο ότι ο τελεστής T είναι επί γραμμικός ισομορφισμός ως σύνθεση τέτοιων. Συνεπώς:

$$\|T\| = \|g^{-1} \circ T^{**} \circ f\| \leq \|g^{-1}\| \cdot \|T^{**}\| \cdot \|f\| = \|T^{**}\|$$

εφόσον $\|g^{-1}\| = \|f\| = 1$ λόγω ισομετρίας. Επίσης:

$$\|T^{-1}\| = \|f^{-1} \circ (T^{**})^{-1} \circ g\| \leq \|f^{-1}\| \cdot \|(T^{**})^{-1}\| \cdot \|g\| = \|(T^{**})^{-1}\|$$

εφόσον $\|f^{-1}\| = \|g\| = 1$ πάλι λόγω ισομετρίας. Δηλαδή, αν ο $T^{**}: X^{**} \to Y^{**}$ είναι επί γραμμικός ισομορφισμός, τότε και ο $T: X \to Y$ είναι επί γραμμικός ισομορφισμός, ώστε $\|T\| \cdot \|T^{-1}\| \leq \|T^{**}\| \cdot \|(T^{**})^{-1}\|$. Επομένως, $d(X,Y) \leq d(X^{**},Y^{**})$ (2).

Εφόσον ο $\left(T^*\right)^{-1} : X^* \to Y^*$ είναι επί γραμμικός ισομορφισμός, από την (1) έχουμε ότι $d\left(X^{**}, Y^{**}\right) \le d\left(X^*, Y^*\right)$.

Δηλαδή ισχύει ότι $d(X, Y) \le d\left(X^{**}, Y^{**}\right) \le d\left(X^*, Y^*\right) \leftrightarrow d(X, Y) \le d\left(X^*, Y^*\right)$ (3).

Από τις σχέσεις (1) και (3) προκύπτει ότι, όταν οι χώροι X, Y είναι ανακλαστικοί, ισχύει $d(X, Y) = d\left(X^*, Y^*\right)$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge, Absolutely Summing Operators, Cambridge University Press, 1995.

[2] G.J.O. Jameson, Summing and Nuclear Norms in Banach Space Theory, Cambridge University Press, 1987.

[3] B. Bollobas, Linear Analysis, Cambridge University Press, 1990.

[4] Ι. Σαραντόπουλος, Σημειώσεις Αρμονικής Ανάλυσης, 2012.

[5] Σ. Αργυρός, Σημειώσεις Συναρτησιακής Ανάλυσης, 2004.

[6] Σ. Καρανάσιος, Θεωρία Τελεστών και Εφαρμογές, Αθήνα 2009.

[7] Γ. Κουμουλλής, Σ. Νεγρεπόντης, Θεωρία Μέτρου, Εκδόσεις Συμμετρία, 1991.

[8] Σ. Νεγρεπόντης, Θ. Ζαχαριάδης, Ν. Καλαμίδας και Β. Φαρμάκη, Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση, Εκδόσεις Συμμετρία, 1997.

[9] Ν. Σκούταρης, Συναρτησιακή Ανάλυση, Εκδόσεις Συμμετρία, 2011.

[10] Νικόλαος Τζιράκης, Εφαρμογές της Αρμονικής Ανάλυσης στη Θεωρία Χώρων Banach, Διπλωματική Εργασία.

[11] Yoav Benyamini, Joram Lindenstrauss,Geometric Nonlinear Analysis, American Mathematical Society, Colloquium Publications, Volume 48, 2000.