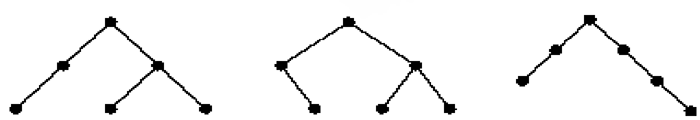
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

<u>ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ</u>

ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ



ΝΤΟΥΛΗ Α. ΑΙΚΑΤΕΡΙΝΗ

<u>Τριμελής Επιτροπή :</u>
Χρήστος Κουκουβίνος, Καθηγητής ΕΜΠ
Αλέξανδρος Παπαϊωάννου, Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΜΠ (Επιβλέπων Καθηγητής)
Πέτρος Στεφανέας, Λέκτωρ ΕΜΠ

ΑΘΗΝΑ 2013

ΠΕΡΙΟΧΟΜΕΝΑ

Abstract:

The present work, which is my Diploma Thesis, surveys an important theorem of enumerative combinatorics namely Pólya's theorem.

The first chapter contains four problems that can be solved by the Catalan numbers namely :

- The triangulations T_n of a n-gon
- The number a_n of inserting parentheses on a product of n terms
- 2n sequences of +1's and -1's with the property of $\sum_{k=1}^{2n} a_k \geq 0$
- the number of rooted trees on n leaves with direction

The second chapter examines the concept of the cyclic index of a group. It contains examples of the cyclic index of the Platonic polyhedrae.

The third chapter contains the proof of Burnside's lemma and some applications of the lemma.

The fourth chapter examines the equivalent number of functions from set D to set R, the weight of an element in R, the inventory of the set R.

Finally, the fifth chapter gives a proof of Pólya's theorem and some applications based on the theorem, as well as, on Burnside's lemma.

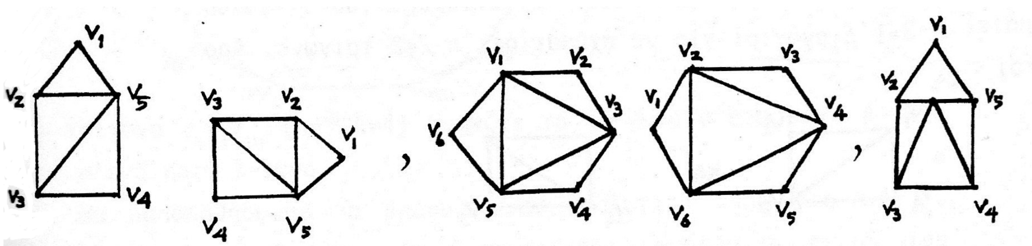
ΚΕΦΑΛΑΙΟ I

ΑΡΙΘΜΟΙ CATALAN

Η ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗ ΤΩΝ ΔΕΝΤΡΩΝ ΜΕ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟ ΚΑΙ ΡΙΖΑ

Ένας τριγωνισμός ενός κυρτού n-γώνου είναι μία διαμέριση του εσωτερικού του n-γώνου σε τρίγωνα με ευθείες που είναι μη τεμνόμενες διαγώνιες του n-γώνου.

Από τον ορισμό βλέπουμε ότι η διαδικασία του τριγωνισμού δεν αυξάνει το πλήθος των κορυφών του n-γώνου. Αν θεωρήσουμε τις κορυφές του n-γώνου να έχουν ονόματα (η κορυφή 1, η κορυφή 2, .. η κορυφή n) τότε δυο τριγωνισμοί είναι ισοδύναμοι αν περιέχουν ακριβώς τις ίδιες διαγώνιες.



Με τον ορισμό αυτό οι δύο πρώτοι τριγωνισμοί του πενταγώνου είναι ισοδύναμοι, ενώ οι δύο τριγωνισμοί του εξαγώνου είναι διαφορετικοί.

Τέλος η διαμέριση του πενταγώνου στο τελευταίο σχήμα δεν είναι τριγωνισμός διότι χρησιμοποιεί μία νέα εσωτερική κορυφή.

Συμβολίζούμε με T_n το πλήθος των διαφορετικών τριγωνισμών ενός n-γωνου με ονομασία. O Euler υπολόγισε πρώτος την τιμή του T_n.

Παρατηρούμε ότι αν ενώσουμε κάποια κορυφή του n-γώνου (έστω την v_1) με όλες τις άλλες κορυφές κατασκευάζουμε έναν τριγωνισμό με n-2 τρίγωνα το άθροισμα των γωνιών αυτών των n-2 τριγώνων είναι

(n-2)π, το οποίο προφανώς θα ισούται και με το άθροισμα των γωνιών

n-γωνου. Κάθε άλλος τριγωνισμός θα έχει το ίδιο άθροισμα γωνιών αφού οι γωνίες του τυχόντος τριγωνισμού αναφέρονται σε κάποια διαμέριση των γωνιών του n-γώνου. Άρα οποιοσδήποτε τριγωνισμός θα αποτελείται πάλι από n-2 τρίγωνα.

Έστω x το πλήθος των εσωτερικών διαγωνίων ενός τριγωνισμού. Τα n-2 τρίγωνα του τυχόντος τριγωνισμού έχουν 3(n-2)=3n-6 πλευρές. Καθεμία από τις x εσωτερικές διαγώνιους μετράται δύο φορές διότι είναι πλευρά σε δύο τρίγωνα. Κάθε μία από τις η πλευρές του n-γωνου μετράται ακριβώς μία φορά σαν πλευρά ενός από τα n-2 τρίγωνα. Άρα ο συνολικός αριθμός των πλευρών των n-2 τριγώνων μετράται αλλιώς σαν 2x+n.

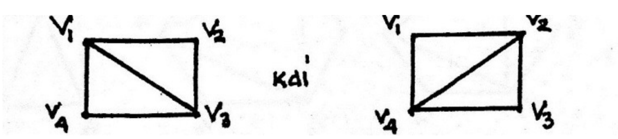
Άρα

$$\mathbf{2x + n= 3n\text{-}6 \Rightarrow x= n\text{-}3}$$

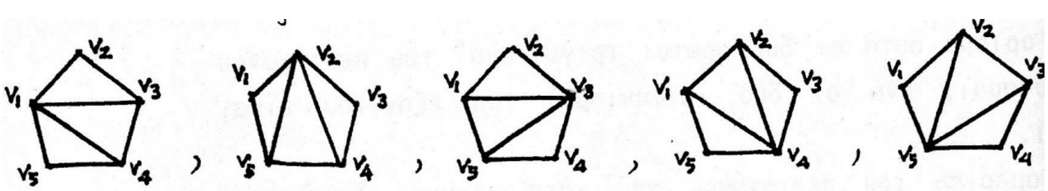
Άρα κάθε τριγωνισμός ενός n-γώνου χρησιμοποιεί ακριβώς n-3 διαγωνίους.

Ορίζουμε αυθαίρετα T_1=0, T_2=1. Το T_3 δηλαδή το πλήθος των διαφορετικών τριγωνισμών ενός τριγώνου, που χρησιμοποιεί n-3=0 διαγώνιους, θα ισούται με 1. Κάθε τριγωνισμός του 4-γώνου

χρησιμοποιεί , n-3=1 διαγώνιοι για να σχηματίσει n-2=2 τρίγωνα. Άρα T_4=2 , δηλαδή



Για n=5 έχουμε T_5 =5 όπως φαίνεται και στο σχήμα

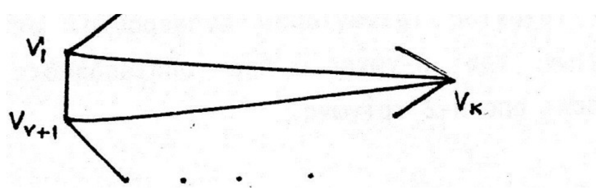


το παρακάτω θεώρημα δίνει μία μη γραμμική αναδρομική σχέση που επαληθεύουν οι αριθμοί αυτοί οφείλεται στον von Segner (1704-1777).

Θεώρημα 1:

$$T_{n+1} = T_2T_n+T_3T_{n-1} +...+T_nT_2 .$$

Απόδειξη. Έστω το n+1-γωνο $v_1,v_2, ...,v_{n+1}$. Τότε η πλευρά $v_{n+1}v_1$ ανήκει σε ένα μόνο τρίγωνο σε κάθε τριγωνισμό. Η τρίτη κορυφή του τρίγωνου που χρησιμοποιεί την πλευρά $v_{n+1}v_1$ θα είναι η κορυφή v_k , k=2,3,...,n. Ας μετρήσουμε το πλήθος των τρόπων εκλογής της τρίτης κορυφής v_k.



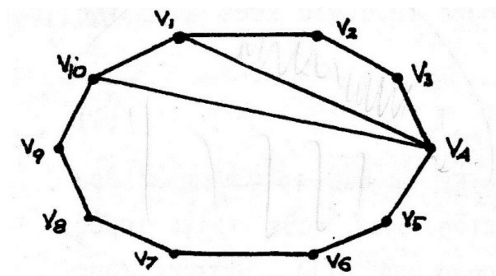
Το τρίγωνο $v_kv_1v_{n+1}$ χωρίζει το n+1-γωνο σε δύο μικρότερα πολύγωνα. Πάνω σ' ένα κ-γωνο με κορυφές $v_1 ,v_2 ...v_k$, και κάτω σ' ένα (n-k+2) -γωνο με κορυφές v_k, $v_{k+1},\ldots\ldots v_{n+1}$.

Το πάνω k-γωνο τριγωνοποιείται με T_k τρόπους ενώ το κάτω (n-k+2) -γωνο με T_{n-k+2} τρόπους. Άρα από τον κανόνα του γινομένου το πλήθος των τριγωνισμών στους οποίους εμφανίζεται το τρίγωνο $v_1v_kv_{n+1}$ είναι $T_k \cdot T_{n-k+2}$. Άρα το συνολικό πλήθος των τριγωνισμών του (n-1)-γώνου θα είναι

$$\sum T_k T_{n-k+2} = T_2T_n+T_3T_{n-1} +...+T_2T_2$$

Παράδειγμα 1.

$T_6= T_2T_5+T_3T_4+T_4T_3+T_5T_2= 1\cdot5+1\cdot2+2\cdot1+5\cdot1=14$



Το τρίγωνο $v_1v_4v_{10}$ (n=9, κ=4) χωρίζει το 10-γωνο σ' ένα πάνω 4-γωνο και σ' ένα κάτω 7-γωνο.

Θα προσπαθήσουμε να βρούμε έναν αναλυτικό τύπο για το T_n, δηλαδή θα προσπαθήσουμε να λύσουμε την αναδρομική σχέση του θεωρήματος 1. Ένα ενδιάμεσο βήμα προς την κατεύθυνση αυτή είναι το παρακάτω θεώρημα:

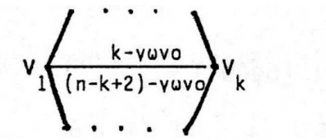
Θεώρημα 2:

$$(n-3)T_n= \frac{n}{2}(T_3\, T_{n-1}+T_4T_{n-2}+\ldots\ldots+T_{n-1}T_3)$$

Απόδειξη:

Έστω πάλι το n-γωνο v_1 ,v_2 , ...,v_n και η διαγώνιος v_1v_k η οποία χωρίζει το n-γωνο:

πάνω σ' ένα(k-γωνο) με κορυφές v_1, v_2 , ...,v_k και κάτω σ' ένα (n-k+2)-γωνο με v_k ,v_{k+1} , ...,v_n ,v_1 .



Όπως και στο θεώρημα 1 το πλήθος των τριγωνισμών που περιέχουν τη διαγώνιο v_1 v_k, θα είναι:

$$T_k.T_{n-k+2}$$

Από την κορυφή v_1 έχω συνολικά n-3 διαγωνίους, τις v_1v_3,v_1v_4,· · ·, v_1v_{n-1} Έχω λοιπόν:

στη διαγώνιο v_1 v_3 (k=3) αντιστοιχεί: το T_3 T_{n-1}

στη διαγώνιο v_1 v_4 (k=4) αντιστοιχεί: το T_4 T_{n-2}

στη διαγώνιο v_1 v_{n-1} (k=n-1 αντιστοιχεί: το T_{n-1} T_3

Άρα στην κορυφή v_1 αντιστοιχεί το άθροισμα:

$$T_3T_{n-1} + T_4T_{n-2} + \ldots + T_{n-1}\, T_3$$

Από την συμμετρία του n-γώνου το άθροισμα είναι ένα ίδιο για οποιαδήποτε από τις n κορυφές του n-γώνου, αρά η παράσταση

$$n(T_3T_{n-1} + T_4T_{n-2} + ... + T_{n-1}\, T_3,)$$

μέτρα για κάθε δυνατή διαγώνιο τον ολικό αριθμό τριγωνισμών που χρησιμοποιούν τη διαγώνιο αυτή δύο φορές (μία για κάθε άκρο της διαγωνίου) οπότε και η παράσταση

$$\frac{n}{2}(T_3T_{n-1}+T_4T_{n-2}+\ldots.T_{n-1}T_3) \qquad (1)$$

μετρά για κάθε δυνατή διαγώνιο τον ολικό αριθμό τριγωνισμών που χρησιμοποιούν την διαγώνιο αυτή. Επειδή όμως κάθε τριγωνισμός χρησιμοποιεί n-3 διαγώνιους η παράσταση (1) μετρά τους τριγωνισμούς του n-γώνου ακριβώς (n-3) φορές δηλαδή

$$(n\text{-}3)T_n = \frac{n}{2}(T_3T_{n-1}+T_4T_{n-2}+\ldots.T_{n-1}T_3)$$

Παράδειγμα 2. i) για n=6 έχω:

$$(6\text{-}3)T_6= \frac{6}{2}(T_3T_5+T_4T_4+T_5T_3) \Rightarrow 3T_6=3(1\cdot5+2\cdot2+5\cdot1) \Rightarrow T_6=14$$

ii)για n=7 έχω:

$$(7\text{-}3)T_6=\frac{7}{2}(T_3T_6+T_4T_5+T_5T_4+T_6T_3) \Rightarrow 4T_7=\frac{7}{2}(1\cdot14+2\cdot5+5\cdot2+14\cdot1)$$

$\Rightarrow T_7=42$

Θεώρημα 3:

$$T_n=\frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2}$$

Απόδειξη.

Η σχέση του θεωρήματος 1 γράφεται (αφού $T_2=1$)

και $T_{n+1} - 2T_n = T_3T_{n-1}+T_4T_{n-2}+\ldots.T_{n-1}T_3$ ή

$$\frac{n}{2}(T_{n+1} - 2T_n) = \frac{n}{2}(T_3T_{n-1}+T_4T_{n-2}+\ldots.T_{n-1}T_3)$$

και εφαρμόζοντας στο δεξί μέλος το θεώρημα 2 έχουμε:

$$\frac{n}{2}\,(\ T_{n+1}\ -2T_n\ )\ =(n-3)T_n \quad ή$$

$$\frac{n}{2}\ T_{n+1}\ -nT_n=(n-3)\ T_n \qquad ή$$

$$nT_{n+1}\ =(4n-6)\ T_n$$

Ας αντικαταστήσουμε το T_n με το E_n που ορίζεται από την σχέση:

$$nT_{n+1}\ =E_{n+1}$$

Παρατηρούμε ότι για n=1 έχουμε $1\cdot T_2=E_2 \Rightarrow E_2=1$.

Η σχέση (2) γίνεται λοιπόν

$$E_{n+1}=(4n-6)\frac{En}{n-1} \quad ή \quad \frac{En+1}{En}=\frac{4n-6}{n-1}=\frac{2(2n-3)}{n-1}=$$

$$\frac{2(n-1)(2n-3)}{(n-1)(n-1)}=\frac{(2n-2)(2n-3)}{(n-1)(n-1)} \qquad (3)$$

Αλλά ισχύει προφανώς

$$E_{n+1}=\frac{En+1}{En}\ .\ \frac{En}{En-1}\ .\ \frac{En-1}{En-2}\ \ldots..\ \frac{E3}{E2}=\text{από την (3)}=$$

$$=\left[\frac{(2n-2)(2n-3)}{(n-1)(n-1)}\right].\left[\frac{(2n-4)(2n-5)}{(n-2)(n-2)}\right].\left[\frac{(2n-6)(2n-7)}{(n-3)(n-3)}\right]..\left[\frac{2.1}{(1)(1)}\right]=$$

$$= \frac{(2n-2)!}{(n-1)!((n-1)!} = \binom{2n-2}{n-1}$$

Αν επιστρέψουμε στα T_n και T_{n+1} έχουμε

n Tn+1 $= \binom{2n-2}{n-1}$ και θέτοντας όπου n+1 το n έχουμε

$(n-1)T_n = \binom{2n-4}{n-2}$ που αποδεικνύει το θεώρημα μας.

Η ακολουθία $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ δηλαδή η ακολουθία που οι τιμές της φαίνονται στον πίνακα:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 ...
C	1	1	2	5	14	42	132	429	1.430	4.862	16.796...

απαντάται σε πολλά προβλήματα απαρίθμησης και ονομάζεται ακολουθία αριθμών Catalan προς τιμήν του Eugene Catalan (1814-1894) που την ανακάλυψε το 1838 λύνοντας το πρόβλημα της τοποθέτησης παρενθέσεων σ' ένα γινόμενο.

Θα εξετάσουμε το πρόβλημα αυτό αρχικά μ' ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 3.

i) Στο γινόμενο $x_1x_2x_3$, μπορεί να τοποθετηθούν παρενθέσεις κατά

δύο διαφορετικούς τρόπους:

$((x_1x_2)\,x_3)$ και $(x_1\,(x_2x_3))$

ii) Στο γινόμενο $x_1x_2x_3x_4$ έχουμε πέντε διαφορετικούς τρόπους τοποθέτησης παρενθέσεων:

$((x_1x_2)(x_3x_4))$

$(((x_1x_2)x_3)x_4)$

$((x_1(x_2x_3))x_4)$

$(x_1((x_2x_3)x_4))$

$(x_1(x_2(x_3x_4)))$

Παρατηρούμε ότι το πρόβλημα εξετάζει το πλήθος των διαφορετικών τρόπων τοποθετήσεως παρενθέσεων σ' ένα γινόμενο όπου δεν αλλάζει η σειρά των όρων και όπου κάθε υπογινόμενο να είναι γινόμενο δύο ακριβώς παραγόντων.

Θεώρημα 4:

Έστω a_n το πλήθος των διαφορετικών τρόπων τοποθέτησης παρενθέσεων σ' ένα γινόμενο με n παράγοντες.

Τότε $\mathbf{a_n} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} = \mathbf{C_{n-1}}$

Απόδειξη. Το εξωτερικό ζεύγος παρενθέσεων πολλαπλασιάζει δύο παράγοντες. Ο πρώτος είναι ένα γινόμενο r παραγόντων με $1 \le r < n$ δηλαδή της μορφής $x_1 x_2 \ldots x_n$ και ο δεύτερος ένα γινόμενο n-r παραγόντων δηλαδή της μορφής $x_{r+1} \ldots x_n$. Στον πρώτο παράγοντα μπορούν να τοποθετηθούν παρενθέσεις κατά a_r τρόπους και στον δεύτερο κατά a_{n-r} τρόπους. Άρα το πλήθος των τρόπων κατά τους οποίους το εξωτερικό ζεύγος παρενθέσεων πολλαπλασιάζει τα r το πλήθος $x_1 \ldots x_r$ με τα n-r το πλήθος $x_{r+1} \ldots x_n$ είναι: a_r g a_{n-r}

Αθροίζοντας για r=1,2,...n-1 έχουμε

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}+\ldots+a_{n-1}a_1$$

ή θέτοντας $a_n=T_{n+1}$ επαληθεύουν την αναδρομική σχέση του θεωρήματος 1.

Αλλά επιπλέον οι δύο ακολουθίες a_n και T_{n+1} έχουν και τις ίδιες αρχικές τιμές:

$a_1=T_2=1$ για (x_1)

$a_2=T_3=1$ για ($x_1\ x_2$)

$a_3=T_4=2$ όπως στο παράδειγμα 3

$a_4=T_5=5$ όπως στο παράδειγμα 3

Άρα οι δύο ακολουθίες συμπίπτουν και από το θεώρημα 3 έχουμε $\mathbf{a_n}=\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}=$ $\mathbf{C_{n-1}}$

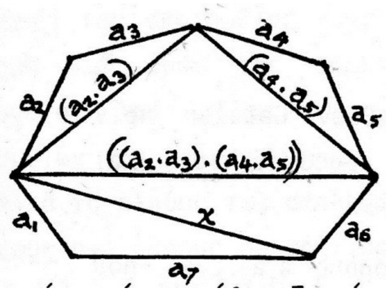
Δείξαμε λοιπόν ότι το πλήθος $\mathbf{a_n}$ της τοποθέτησης παρενθέσεων σ' ένα γινόμενο n παραγόντων ισούται με τον αριθμό Catalan n-1 τάξης $\mathbf{C_{n-1}}$.

Το θεώρημα 3 περιγράφει ότι το πλήθος $\mathbf{T_n}$ των τριγωνισμών ενός n-γώνου ισούται με τον αριθμό Catalan n-2 τάξης $\mathbf{C_{n-2}}$. Το παρακάτω παράδειγμα κάνει σαφέστερη την αντιστοιχία.

Παράδειγμα 4.

i) Έστω το γινόμενο με n=6 όρους $\{\ a_1\ [\ ((a_2a_3)\ (a_4a_5))a_6\ ]\ \}$

Σ' αυτό θα αντιστοιχήσουμε έναν τριγωνισμό του κανονικού επταγώνου με πλευρές a_1, a_2 , a_3, a_4, a_5, a_6 και a_7=$\{\ a_1\ [\ ((a_2a_3)\ (a_4a_5))a_6\ ]\ \}$



$$x = [((a_2 \cdot a_3).(a_4 \cdot a_5)).a_6]$$

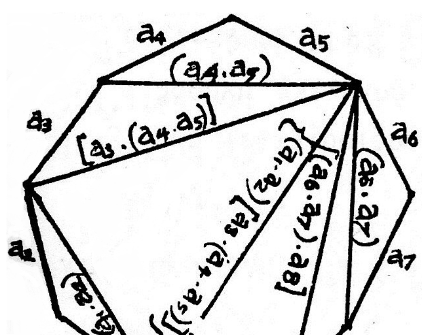
$$a_7 = \left\{ a_1 \left[\left[(a_2 a_3) \cdot (a_4 a_5) \right] \cdot a_6 \right] \right\}$$

Παρατηρούμε ότι κάθε διαγώνιος αντιστοιχεί σ' έναν από τους πολλαπλασιασμούς εκτός από του τελευταίου που αντιστοιχεί στη βάση του επταγώνου.

ii) Έστω το γινόμενο με n=8 όρους:

$$[\ \{\ (a_1\ a_2)\ [\ a_3\ (a_4 a_5)]\ \}\ [(a_6\ a_7)\ a_8\ ]\ ] = a_9$$

Σ' αυτό θα αντιστοιχήσουμε τον παρακάτω τριγωνισμό του κανονικού εννεαγώνου με πλευρές a_1 ,..., a_8 , a_9



$$a_9 = \left[\left\{ (a_1 \cdot a_2) \cdot [a_3 \cdot (a_4 a_5)] \right\} \cdot [(a_6 a_7) \cdot a_8] \right]$$

Τονίζουμε ότι στο πρόβλημα της τοποθέτησης παρενθέσεων θεωρήσαμε ότι οι αριθμοί x_1, x_2,.,. x_n έχουν μία ορισμένη διάταξη.

Αν θεωρήσαμε το διαφορετικό πρόβλημα της τοποθέτησης παρενθέσεων σ' ένα γινόμενο n αριθμών όπου οι αριθμοί δεν έχουν καμία διάταξη τότε το πλήθος των διαφορετικών τρόπων τοποθέτησης παρενθέσεων β_n θα είναι πολύ μεγαλύτερο από το a_n και συγκεκριμένα θα έχουμε:

$\beta_n = n!\, a_n$ αφού $a_n = C_{n-1}$ θα έχουμε

$$\beta_n = n!\, C_{n-1} = \frac{n!}{n}\binom{2n-2}{n-1} = (n-1)!\binom{2n-2}{n-1}$$

Παράδειγμα 5

Για n=3 θα έχουμε $\beta_n = 2!\binom{4}{2} = 12$ τρόπους και συγκεκριμένα οι:

$[(a_1 a_2) a_3]$, $[a_2 (a_1 a_3)]$, $[a_3 (a_1 a_2)]$, $[(a_2 a_3) a_1)]$, $[(a_1 a_3) a_2)]$,

$[a_1 (a_3 a_2)]$, $[a_1 (a_2 a_3)]$, $[a_2 (a_3 a_1)]$, $[a_3 (a_2 a_1)]$, $[(a_3 a_2) a_1)]$,

$[(a_3 a_1) a_2)]$, $[(a_2 a_1) a_3)]$

ενώ $a_n = 2$ ο πρώτος και ο έβδομος τρόπος.

Θα εξετάσουμε μερικές εφαρμογές των αριθμών Catalan πριν προχωρήσουμε στην απαρίθμηση των δέντρων με προσανατολισμό και ρίζα που γίνεται με την βοήθεια των αριθμών αυτών.

Θεώρημα 5:

Το πλήθος των ακολουθιών με 2n όρους $a_1\, a_2 \ldots a_{2n}$ που σχηματί-ζονται από n το πλήθος +1 και η το πλήθος -1 αλλά των οποίων τα μερικά αθροίσματα: $a_1 + a_2 + \ldots + a_k \geq 0$,k=1,2,...,2n ισούται με τον n-τάξης αριθμό Catalan $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ $n \geq 0$

Απόδειξη

Ας ονομάσουμε μία ακολουθία με n το πλήθος +1 και η το πλήθος -1 παραδεκτή αν ικανοποιεί την συνθήκη $a_1 + a_2 + \ldots + a_k \geq 0$,k=1,2,...,2n και απαράδεκτη αν δεν την ικανοποιεί.

Έστω A_n το πλήθος των παραδεκτών ακολουθιών με n το πλήθος +1 (άρα με n το πλήθος -1) και U_n το πλήθος των απαράδεκτων ακολουθιών. Το συνολικό πλήθος των ακολουθιών με n άσσους και n το πλήθος -1 προσδιορίζεται από τους n άσσους και ισούται με : $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$

Άρα $A_n + U_n = \binom{2n}{n}$ και $A_n = \binom{2n}{n} - U_n$

θα υπολογίσουμε τον αριθμό U_n .

Έστω μία απαράδεκτη ακολουθία με n το πλήθος 1 και n το πλήθος -1 . Αφού είναι απαράδεκτη θα υπάρχει κάποιος μικρότερος δείκτης k τέτοιος ώστε το μερικό άθροισμα να μην ικανοποιεί την συνθήκη άρα $a_1 + a_2 + \ldots + a_k < 0$. Αφού ο k είναι ο μικρότερος τέτοιος δείκτης θα υπάρχει ένα ίσο πλήθος από +1 και -1 πριν από τον όρο a_k και θα έχουμε

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} = 0 \quad \text{και} \quad a_k = -1$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι ο ακέραιος k είναι περιττός.

Ας αντικαταστήσουμε τους αριθμούς $a_1, a_2, \ldots a_k$ με τους

$-a_1, -a_2, \ldots -a_k$ δηλαδή ας αντικαταστήσουμε τον a_i με τον $-a_i$ για i= 1,2,…., k και ας αφήσουμε αμετάβλητους τους αριθμούς $a_{k+1}, \ldots. a_{2n}$. Η προκύπτουσα ακολουθία a_1', $a_2', \ldots, a_{2n}'$ είναι πάλι μία ακολουθία από +1 και -1 αλλά έχει n+1 το πλήθος +1 και n-1 το πλήθος -1.

Αλλά η διαδικασία αυτή αντιστρέφεται. Αν μας δοθεί μία ακολουθία n+1 το πλήθος +1 και n-1 το πλήθος -1 κάποτε το πλήθος των +1 θα ξεπεράσει το πλήθος των -1 (αφού έχουμε περισσότερα +1). Αν από την αρχή της ακολουθίας μέχρι τον δείκτη αυτόν αντιστρέψουμε τα πρόσημα των όρων της ακολουθίας θα προκύψει μία απαράδεκτη ακολουθία. Άρα έχουμε μία 1-1 αντιστοιχία μεταξύ απαράδεκτων ακολουθιών και ακολουθιών με n+1 το πλήθος +1 και n-1 το πλήθος -1. Αλλά το πλήθος των ακολουθιών αυτών με 2n όρους προσδιορίζεται από τους n+1 άσσους δηλαδή ισούται με:

$$\binom{2n}{n+1} = \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}$$

Άρα $U_n = \dfrac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}$ οπότε

$$A_n = \binom{2n}{n} - U_n = \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = \frac{(2n)!}{n!(n-1)!}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$\frac{(2n)!}{n!(n-1)!n(n+1)} = \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = C_n$$

Παράδειγμα 6

i) Για n=3 έχουμε $C_3 = \frac{1}{4}\binom{6}{3}$ = 5 ακολουθίες με 6 όρους τις :

1 , 1 , 1 , -1 , -1 , -1

1 , 1 , -1 , 1 , -1 , -1

1 , 1 , -1 , -1 , 1 , -1

1 , -1 , 1 , 1 , -1 , -1

1 , -1 , 1 , -1 , 1 , -1

ii) Για n=4 έχουμε $C_4 = \frac{1}{5}\binom{8}{4}$ = 14 ακολουθίες με 8 όρους τις:

1 , 1 , 1 , 1 , -1 , -1 , -1 , -1

1 , 1 , 1 , -1 , 1 , -1 , -1 , -1

1 , 1 , 1 , -1 , -1 , 1 , -1 , -1

1 , 1 , 1 , -1 , -1 , -1 , 1 , -1

1 , 1 , -1 , 1 , 1 , -1 , -1 , -1

1 , 1 , -1 , 1 , -1 , 1 , -1 , -1

1 , 1 , -1 , 1 , -1 , -1 , 1 , -1

1 , -1 , 1 , 1 , 1 , -1 , -1 , -1

1 , -1 , 1 , 1 , -1 , 1 , 1 , -1

1 , -1 , 1 , 1 , -1 , -1 , 1 , -1

1 , -1 , 1 , -1 , 1 , 1 , -1 , -1

1 , -1 , 1 , -1 , 1 , -1 , 1 , -1

1 , 1 , -1 , -1 , 1 , 1 , -1 , -1

1 , 1 , -1 , -1 , 1 , -1 , 1 , -1 Όπου τα μερικά αθροίσματα είναι πάντα ≥ 0

Παράδειγμα 7

2n άνθρωποι θέλουν να πάνε σε κάποιον κινηματογράφο που έχει είσοδο 50€. Οι μισοί από τους 2n ανθρώπους έχουν ένα χαρτονόμισμα των 50€ και οι άλλοι μισοί ένα των 100€. Το ταμείο του κινηματογράφου όταν ανοίγει είναι άδειο και κάθε άνθρωπος μπορεί να αγοράσει ένα μόνο εισιτήριο. Κατά πόσους τρόπους μπορούν οι άνθρωποι αυτοί να τοποθετηθούν σε σειρά έτσι ώστε όποτε ένας με εκατοστάευρω φθάνει στο ταμείο να έχει ο ταμίας ένα πενηντάευρω για να του δώσει ρέστα.

Αν θεωρήσουμε ότι οι 2n άνθρωποι είναι μη διακεκριμένοι και ταυτίσουμε όσους έχουν πενηντάευρω με τον αριθμό +1 και όσους έχουν εκατοστάευρω με το -1 τότε ζητάμε το πλήθος των παραδεκτών ακολουθιών με 2n όρους και n το πλήθος +1 και n το πλήθος -1. Από το θεώρημα 5 το πλήθος αυτό είναι $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

Αν οι άνθρωποι θεωρηθούν διακεκριμένοι ο ένας από τον άλλον η παραπάνω απάντηση θα πρέπει να πολλαπλασιαστεί επί το πλήθος των μεταθέσεων των n ανθρώπων που έχουν πενηντάευρω (που είναι n!) και επί το πλήθος των μεταθέσεων των n ανθρώπων που έχουν εκατοστάευρω (που είναι πάλι n!) άρα θα έχουμε:

$$n!\, n!\, C_n = n!\, n!\, \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(2n)!}{n+1}$$

π.χ. για n=2 έχουμε τις δύο ακολουθίες: 1,1,-1,-1 και 1,-1,1,-1 που αναλύονται στις εξής 8 αν ονομάσω Α,Β τους δύο με πενηντάευρω και α,β τους δύο με εκατοστάευρω:

ΑΒαβ , ΑΒβα , ΒΑαβ , ΒΑβα,

ΑαΒβ , ΒαΑβ , ΑβΒα , ΒβΑα.

Παράδειγμα 8

Ένας άνθρωπος εργάζεται σ' ένα γραφείο n τετράγωνα βόρεια και n τετράγωνα ανατολικά από το σπίτι του. Κάθε πρωί περπατά 2n

τετράγωνα από το σπίτι στο γραφείο του όπως φαίνεται στον χάρτη για n=4. Πόσους διαφορετικούς δρόμους μπορεί να χρησιμοποιήσει αν επιτρέπεται να περπατήσει μόνο προς τα βόρεια και τα ανατολικά και επίσης δεν επιτρέπεται να διασχίσει τη διαγώνιο ΣΓ;(Αν και μπορεί να την συναντήσει κατά την διαδρομή του)

Με παχύτερη γραμμή έχουν σημειωθεί δύο δυνατές διαδρομές, η μία πάνω από τη διαγώνιο και η άλλη κάτω από την διαγώνιο.

Προφανώς κάθε παραδεκτή διαδρομή ή θα είναι πάνω ή κάτω από τη διαγώνιο. Το σύνολο λοιπόν θα ισούται με το διπλάσιο των παραδεκτών διαδρομών πάνω από τη διαγώνιο. Κάθε παραδεκτή διαδρομή είναι μία ακολουθία n βορείων και n ανατολικών τετραγώνων. Ας αντιστοιχήσουμε τον αριθμό +1 στην προς τη βόρεια κίνηση και τον -1 στην ανατολική. Κάθε διαδρομή αντιστοιχεί σε μία ακολουθία a_1 a_2 …. a_{2n} με n το πλήθος +1 και n το πλήθος -1 και η παραδοχή ότι δε διασχίζεται η διαγώνιος αντιστοιχεί στο ότι τα αθροίσματα $\sum_{i=1}^{k} a_i \geq 0$ (k=1,2, ...,2n).

Από το θεώρημα 5 το πλήθος των παραδεκτών διαδρομών θα είναι

$$\mathbf{2C_n} = \frac{2}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Παράδειγμα 9

Θεωρούμε ένα κανονικό 2n-γωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο θα δείξουμε ότι το πλήθος των τρόπων για να ενώσουμε τα 2n σημεία με n μη τεμνόμενες διαγωνίους ισούται με τον αριθμό Catalan C_n .

Απόδειξη

Έστω a_n ο ζητούμενος αριθμός. Έστω P ένα από τα 2n σημεία και ας το ενώσουμε με μία διαγώνιο με το Q. Προφανώς η διαγώνια PQ, πρέπει να έχει άρτιο πλήθος σημείων του κύκλου και από τις δύο πλευρές της. (π.χ η διαγώνιος 15 δεν μπορεί να υπάρχει διότι αφήνει 3 σημεία από τη μία μεριά και 2n-5 από την άλλη που είναι περιττοί αριθμοί). Το επιχείρημα αυτό μας οδηγεί στην αναδρομική σχέση

$$a_n=a_0a_{n-1}+a_1a_{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1}a_0 \quad \text{με } a_0=1$$

Αν θέσουμε $\beta_n= a_{n-1}$, $n \geq 1$ η αναδρομική σχέση γίνεται

$\beta_{n+1} = \beta_1 \beta_n + \beta_2 \beta_{n-1} + \ldots\ldots + \beta_n \beta_1$ με $\beta_1 =1$ δηλαδή η αναδρομική σχέση του θεωρήματος 1.

Άρα ο β_{n+1} είναι ο αριθμός Catalan n-τάξης και επομένως

$$a_n= \beta_{n+1} = C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Τελειώνοντας παρατηρούμε ότι οι αριθμοί Catalan ικανοποιούν την αναδρομική σχέση:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \ , \ \mathbf{C_{n-1}} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

και διαιρώντας κατά μελή

$$\frac{C_n}{\mathbf{C_{n-1}}} = \frac{n}{n+1}\ \frac{(2n)!(n-1)!(n-1)!}{n!n!(2n-2)!} = \frac{n\cdot 2n\cdot(2n-1)}{(n+1)\cdot n\cdot n} = \frac{4(n-2)}{n-1}$$

Δηλαδή $\qquad C_n = \frac{4(n-2)}{n+1}\, \mathbf{C_{n-1}} \quad , \ n \geq 1 \quad , \ C_1=1$

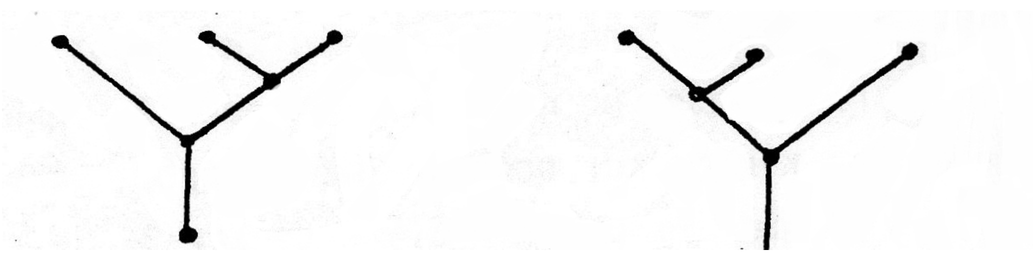
η οποία λύνεται όπως είδαμε στο θεώρημα 3.

Θα δούμε τώρα πως με την βοήθεια των αριθμών Catalan μπορούμε να απαριθμήσουμε μία κατηγορία δέντρων και συγκεκριμένα τα δέντρα με προσανατολισμό και ρίζα που έχουν κορυφές βαθμού 1 ή 3.

Η ρίζα ενός δέντρου είναι κάποια κορυφή που διακρίναμε από τις άλλες. Συνήθως σαν ρίζα εκλέγεται κάποια κορυφή βαθμού 1 και στην σχεδίαση του δέντρου η ρίζα συμπίπτει με την χαμηλότερη κορυφή του διαγράμματος.

Οι υπόλοιπες κορυφές βαθμού 1 λέγονται **φύλλα** του δέντρου και στη σχεδίαση του δέντρου τα φύλλα τοποθετούνται όλα στο πάνω μέρος του διαγράμματος.

Υποθέτουμε επίσης ότι τα δέντρα με ρίζα και βαθμούς 1 και 3 έχουν επίσης προσανατολισμό. Δηλαδή τα δύο παρακάτω δέντρα, αν και συμμετρικά, θεωρούνται διαφορετικά.



Θεώρημα 6:

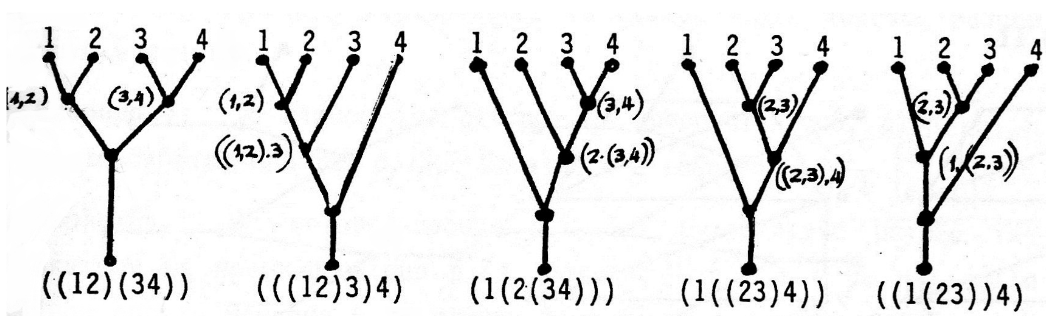
Το πλήθος των δέντρων με προσανατολισμό και ρίζα, με βαθμούς κορυφών 1 ή 3 και με n φύλλα ισούται με τον αριθμό Catalan (n-1) τάξης $\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} = C_{n-1}$

Απόδειξη 1.

Δείξαμε ότι οι αριθμοί Catalan μετρούν το πλήθος των τρόπων τοποθέτησης παρενθέσεων σ' ένα γινόμενο. Θα κατασκευάσουμε μία 1-1 αντιστοιχία μεταξύ τοποθέτησης παρενθέσεων σε γινόμενα n παραγόντων και δέντρων με ρίζα και προσανατολισμό, βαθμούς κορυφών 1 ή 3 και n το πλήθος φύλλα. Έστω ένα τέτοιο δέντρο.

Αριθμούμε τα φύλλα του με τους αριθμούς a_1, a_2 , ...,a_n . Τώρα αν οι κορυφές a_k και a_{k+1} συνδέονται με την ίδια κορυφή βαθμού 3 ονομάζω αυτήν με το ζεύγος (a_k , a_{k+1}) .Συνεχίζουμε την διαδικασία αυτή κατευθυνόμενοι προς την ρίζα. Αν η κορυφή (x) και η κορυφή (y) συνδέονται με την ίδια κορυφή βαθμού 3 η νέα αυτή κορυφή και πλησιέστερα προς την ρίζα θα πάρει το όνομα ((x) (y)). Όταν φθάσουμε στην ρίζα θα έχουμε ένα πλήρως παρενθετοποιημένο γινόμενο $a_1 \dots a_n$. Η κατασκευή αυτή μας δίνει την 1-1 αντιστοιχία.

Παράδειγμα 10. Τα δέντρα με προσανατολισμό και ρίζα που έχουν κορυφές βαθμού 1 και 3 και 4 φύλλα είναι $\frac{1}{4}\binom{6}{3}$



Παρατηρούμε ότι οι ονομασίες των 5 ριζών είναι οι 5 παρενθετοποιήσεις του γινομένου 1234 που είδαμε στο παράδειγμα 3.

Απόδειξη 2. Γνωρίζουμε ότι οι αριθμοί Catalan μετρούν το πλήθος των διαφορετικών τριγωνισμών ενός n-γώνου. Θα κατασκευάσουμε λοιπόν μία 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των τριγωνισμών αυτών και των δέντρων με ρίζα και προσανατολισμό, με κορυφές βαθμού 1 ή 3 και με n-1 φύλλα.

Πράγματι έστω ένας τριγωνισμός (με μη τεμνόμενες διαγώνιους) ενός n-γώνου. Τότε:

i) Προσθέτουμε μία κορυφή μέσα σε κάθε τρίγωνο και μία κορυφή έξω από κάθε πλευρά του n-γώνου.

ii) Συνδέουμε δύο κορυφές αν υπάρχει μεταξύ τους πλευρά τριγώνου. Η κατασκευή αυτή δίνει: κάθε νέα κορυφή εσωτερική σε τρίγωνο θα έχει βαθμό ακριβώς 3 στο γράφημα που θα προκύψει κάθε νέα κορυφή έξω από κάποια πλευρά του n-γωνου θα έχει βαθμό 1 στο γράφημα που θα προκύψει.

Το γράφημα θα είναι συνεκτικό και χωρίς κύκλους (διότι αν υπήρχαν κύκλοι το αρχικό n-γωνο δεν θα ήταν κυρτό όπως υποθέσαμε γι' όλα τα n-γωνα του κεφαλαίου αυτού) και επομένως είναι δέντρο.

Αν επιλέξουμε στο δέντρο αυτό μία κορυφή βαθμού 1 σαν ρίζα θα

έχουμε ότι κάθε τριγωνισμός οδηγεί σε κατάλληλο δέντρο.

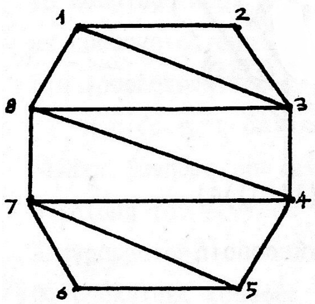
Θα περιγράψουμε τώρα την αντίστροφη κατασκευή: Πως οποιοδήποτε δέντρο με προσανατολισμό και ρίζα, με κορυφές βαθμού 1 ή 3 και με n-1 φύλλα οδηγεί σε κάποιον τριγωνισμό του n-γώνου.

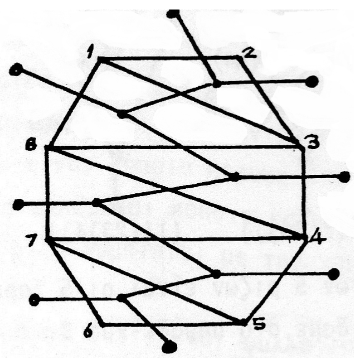
i) Εισάγουμε n νέες κορυφές μία μεταξύ δύο διαδοχικών φύλλων του δοσμένου δέντρου.

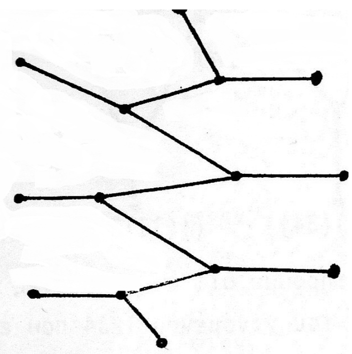
ii) Ενώνουμε τις n αυτές κορυφές με πλευρές έτσι ώστε να τέμνουν τις αντίστοιχες πλευρές του δέντρου.

Η κατασκευή αυτή δίνει έναν τριγωνισμό του n-γώνου και εξασφαλίζει την 1-1 αντιστοιχία.

Παράδειγμα 11.





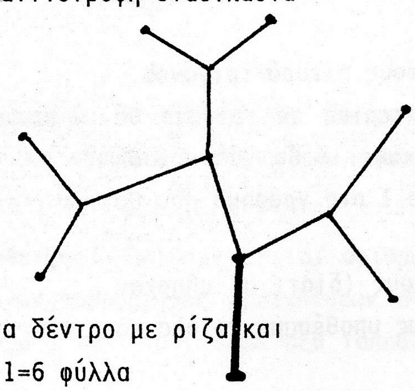


Ένας τριγωνισμός του 8-γώνου.

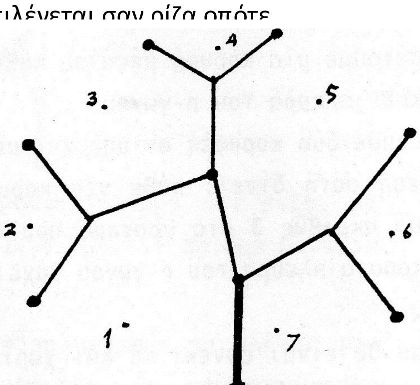
Τριγωνισμός και δέντρο

Το αντίστοιχο δέντρο με 14 κορυφές και 13 πλευρές. Μία από τις 8 κορυφές βάθρου 1 επιλέγεται σαν ρίζα οπότε

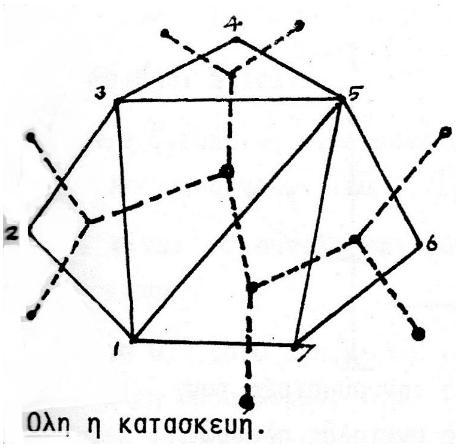
Η αντίστροφη διαδικασία



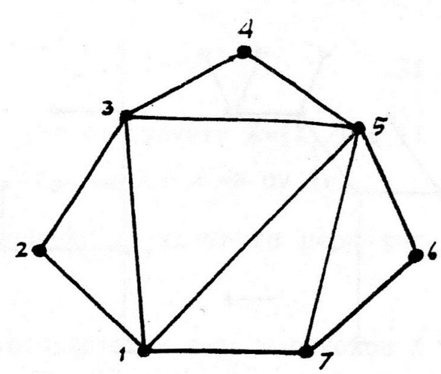
Ενα δέντρο με ρίζα και n-1=6 φύλλα



Το δέντρο και οι n=7 επιπλέον κορυφές.



Ολη η κατασκευή.



Ο τριγωνισμός του

επταγώνου

Το δέντρο σχεδιάστηκε διακεκομμένα

Μπορούμε τώρα να εξετάσουμε το γενικότερο πρόβλημα του να μετρήσουμε τα δέντρα με ρίζα, προσανατολισμό και n φύλλα. Δεν ισχύει πια δηλαδή ο περιορισμός: το δέντρο να έχει κορυφές βαθμού μόνο ένα ή τρία.

Θεώρημα 7: Το πλήθος των δέντρων με προσανατολισμό, ρίζα και n φύλλα δίνεται από τον αριθμό Catalan n-2 τάξης

$$\mathbf{C_{n-2}} = \frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2}$$

Απόδειξη. Θα κατασκευάσουμε μία 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των δέντρων με προσανατολισμό ρίζα, βαθμούς 1 ή 3 και με n-1 φύλλα (που από το θεώρημα 6 το πλήθος τους είναι ο αριθμός Catalan n-2 τάξης) και των δέντρων με προσανατολισμό ρίζα και n φύλλα. Η αντιστοιχία κατασκευάζεται ως εξής:

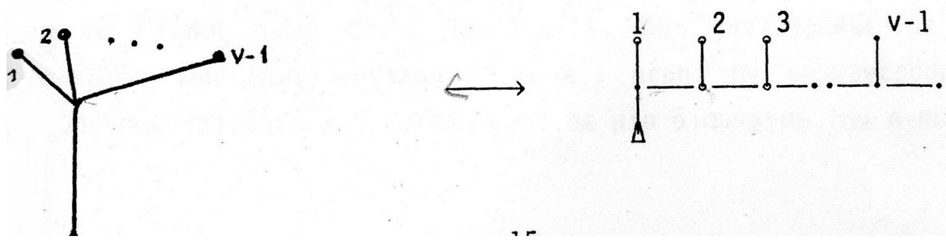
Έστω ένα δέντρο με προσανατολισμό, ρίζα, n-1 φύλλα και με βαθμούς 1 ή 3. Το σχεδιάζουμε, αρχίζοντας από την ρίζα, έτσι ώστε σε κάθε κορυφή βαθμού 3, οι 3 πλευρές που διέρχονται από αυτήν να έχουν διεύθυνση προς βορρά ή προς ανατολή.

Ακολούθως συμπτύσσουμε όλες τις πλευρές με διεύθυνση προς ανατολή αφήνοντας μόνο πλευρές σε διεύθυνση προς βορρά. Συμπτύσσοντας, τα δύο άκρα μίας πλευράς ταυτίζονται και η πλευρά εξαφανίζεται.

Έτσι όλες οι εσωτερικές κορυφές βαθμού 3 εξαφανίζονται και μένουν μόνο τα n-1 φύλλα σαν **κορυφές** στο νέο δέντρο .

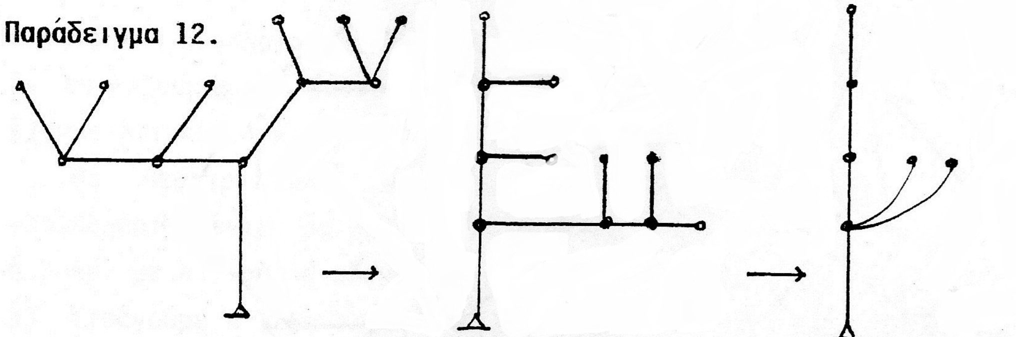
Η αντίστροφη κατασκευή:

Κάθε κορυφή βαθμού ν θα σπάσει σε ν φύλλα και σε ν-1 κορυφές βαθμού 3 όπως φαίνεται και στο σχήμα.



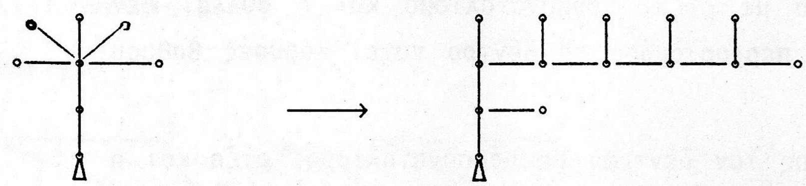
■

Παράδειγμα 12.



το δέντρο με 6 φύλλα | το ίδιο δέντρο με πλευρές προς βορράν+ανατολάς | Μετά την σύμπτυξη των προς ανατολάς πλευρών

Η αντίστροφη διαδικασία



■

Μπορούμε να γενικεύσουμε και άλλο το πρόβλημά μας, έτσι ώστε η ρίζα να έχει οποιονδήποτε βαθμό (και όχι υποχρεωτικά 1) και να καταργηθεί ο προσανατολισμός (οπότε δεν ξεχωρίζουμε πλέον δύο συμμετρικά δέντρα). Τότε, αν συμβολίσουμε με r_n το πλήθος των δέντρων με ρίζα που έχουν n **κορυφές**, η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας αυτής έχει την μορφή:

$$R(x) = x+x^2+2x^3+4x^4+9x^5+20x^6+48x^7+\ldots.$$

ενώ αν συμβολίσουμε με t_n, το πλήθος των δέντρων με n κορυφές η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας t_n έχει την μορφή:

$$T(x)=x+x^2+x^3+2x^4+3x^5+6x^6+11x^7+23x^8+....$$

Για να αποδείξουμε τις δύο αυτές σχέσεις χρειαζόμαστε για μεν την πρώτη το θεώρημα του Pólya, ενώ η δεύτερη προκύπτει όπως απέδειξαν οι Pólya και Richard Otter από την πρώτη αν χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση:

$$T(x) = R(x) - \frac{1}{2}R(x)^2 + \frac{1}{2} R(x^2)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

ΚΥΚΛΙΚΟΣ ΔΕΙΚΤΗΣ ΟΜΑΔΑΣ

Ορισμός:

Έστω η μετάθεση π που ενεργεί πάνω σ' ένα σύνολο S με n στοιχεία. Αν η μετάθεση π μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο k_1 κύκλων μήκους **1,** k_2 κύκλων μήκους **2,...,** $k_Γ$ κύκλων μήκους **r...** (όπου οι κύκλοι δεν έχουν ανά δύο κοινό στοιχείο) τότε η μετάθεση π λέμε ότι είναι **τύπου {**k_1**,** k_2 ,..,$k_Γ$ **...} .**

Προφανώς ισχύει $k_1+2k_2+\ldots+r\ k_r=n$ διότι το άθροισμα των μηκών των κύκλων θα ισούται με το πλήθος των στοιχείων του συνόλου S.

Παράδειγμα 2

Οι μεταθέσεις $\boldsymbol{\pi_1=}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&2&3&4&5&6&7&8\end{pmatrix}=(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)$

$$\pi_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&4&6&8&1&3&5&7\end{pmatrix}=(124875)(36)$$

$$\pi_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&1&4&3&6&5\end{pmatrix}=(12)(34)(56)$$

$$\pi_4=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&3&4&5&6&1\end{pmatrix}=(123456)$$

είναι αντίστοιχα τύπου: η π_1 (8,0,0,0,0,0,0,0), η π_2(0,1,0,0,0,1), η π_3(0,3,0,0,0,0) και η π_4 (0,0,0,0,0,1).

Παρατηρούμε για την π_1: $8\cdot 1=8$, για την π_2: $1\cdot2+1\cdot6=8$, για την π_3: $3\cdot2=6$ και για την π_4: $1\cdot6=6$.

Θα δώσουμε τώρα τον ορισμό του κυκλικού δείκτη μιας ομάδας μεταθέσεων G.

Ορισμός :

Έστω μία ομάδα G τα στοιχεία της οποίας είναι οι μεταθέσεις ενός συνόλου S με n στοιχεία.

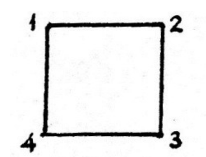
Αν η μετάθεση $g \in G$ είναι τύπου { k_1, k_2, ….., k_r,….} σχηματίζουμε το γινόμενο x_1^{k1} $x_2^{k2} x_n^{kn}$ όπου τα x_1, x_2, …, x_n είναι n το πλήθος μεταβλητές. Αν αθροίσουμε τα γινόμενα αυτά ένα για κάθε μετάθεση $g \in G$ και διαιρέσουμε με το πλήθος των στοιχείων της ομάδας G έχουμε το πολυώνυμο

$$P_G(x_1, x_{2, \ldots\ldots,} x_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} x_1^{k1(g)} x_2^{k2(g)} \ldots . x_n^{kn(g)}$$

το οποίο ονομάζεται κυκλικός δείκτης (cycle index) της ομάδας G.

Παράδειγμα 3

Ας θεωρήσω την ομάδα συμμετριών G ενός τετραγώνου G του οποίου οι κορυφές έχουν ονομασθεί 1,2,3,4 όπως φαίνεται στο σχήμα



Οι συμμετρίες του τετραγώνου, δηλαδή οι κινήσεις του τετραγώνου που διατηρούν το σχήμα αναλλοίωτο είναι οι εξής:

α) Περιστροφές περί το κέντρο βάρους του τετραγώνου

i)περιστροφή με φορά τη φορά των δεικτών του ρολογιού κατά 0°

ii)περιστροφή με την ίδια φορά κατά 90°

iii)περιστροφή με την ίδια φορά κατά 180°

iv)περιστροφή με την ίδια φορά κατά 270°.

β) Κατοπτρισμοί με άξονες

i) τη διαγώνιο 13

ii) τη διαγώνιο 24

iii) τη μεσοκάθετο της 12

iv) τη μεσοκάθετο της 14.

Κάθε μία από τις 8 αυτές συμμετρίες παράγει μία μετάθεση του συνόλου {1, 2, 3, 4} όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Συμμετρία	**Μετάθεση**
Περιστροφή κατά 0°	(1)(2)(3)(4)
Περιστροφή κατά 90°	(1234).
Περιστροφή κατά 180°	(13)(24)
Περιστροφή κατά 270°	(1432)
Κατοπτρισμός κατά την 13	(24)(1)(3)
Κατοπτρισμός κατά την 24	(13)(2)(4)
Κατοπτρισμός κατά τη μεσοκάθετο 12	(12)(34)
Κατοπτρισμός κατά τη μεσοκάθετο 14	(14)(23) .

Είναι εύκολο να αποδείξουμε είτε εξετάζοντας τα αξιώματα της ομάδας, κάνοντας τις συνθέσεις των 8 αυτών κινήσεων ότι οι 8 αυτές μεταθέσεις αποτελούν μία ομάδα G η οποία μάλιστα είναι υποομάδα της S_4.

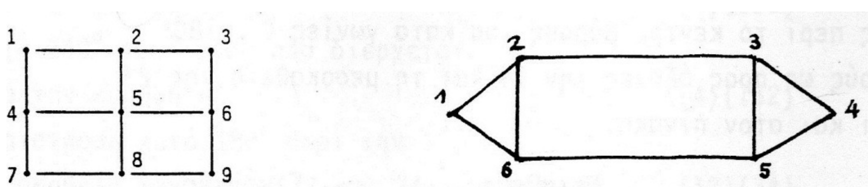
Ο παρακάτω πίνακας μας δίνει τους τύπους των 8 αυτών μεταθέσεων:

Μετάθεση	k_1	k_2	k_3	k_4	**Αντίστοιχο γινόμενο**
(1)(2)(3)(4)	4	0	0	0	x_1^4
(1234)	0	0	0	1	x_4
(13) (24)	0	2	0	0	x_2^2
(1432)	0	0	0	1	x_4
(1)(3)(24)	0	0	0	1	$x_1^2 x_2$
(2)(4)(13)	2	1	0	0	$x_1^2 x_2$
(12) (34)	0	2	0	0	x_2^2
(14) (23)	0	2	0	0	x_2^2

Ο κυκλικός δείκτης της ομάδας συμμετρίας G του τετραγώνου θα είναι λοιπόν το άθροισμα των γινομένων αυτών αφού διαιρεθεί με το πλήθος των στοιχείων της ομάδας :

$$\mathbf{P_G(x_1\,,\,x_2,\,x_3,x_4) = \frac{1}{8}\;(\,x_1^{\,4} + 2x_1^{\,2}x_2 + 3x_2^{\,2} + 2x_4\,)}$$

Παράδειγμα 4
Θεωρούμε τα γραφήματα



Να βρεθούν οι κυκλικοί δείκτες των ομάδων συμμετριών των δύο αυτών γραφημάτων.

Λύση.

Στην περίπτωση των γραφημάτων οι συμμετρίες είναι οι μεταθέσεις των κορυφών που απεικονίζουν πλευρές σε πλευρές και μη πλευρές σε μη πλευρές. Τέτοιες μεταθέσεις ονομάζονται **αυτομορφισμοί** και το σύνολο όλων των αυτομορφισμών ενός γραφήματος αποτελεί μία ομάδα που ονομάζεται **ομάδα αυτομορφισμών** του γραφήματος.

Στο δεύτερο γράφημα η μετάθεση (26)-(35) είναι ένας **αυτ**ομορφισμός ενώ η μετάθεση (123456) δεν είναι διότι η πλευρά 35 έχει σαν εικόνα την 46 η οποία δεν είναι πλευρά του G.

α)Το γράφημα έχει 8 αυτομορφισμούς, δηλαδή 4 περιστροφές κατά γωνίες 0°, 90°, 180°, 270° και κέντρο περιστροφής την κορυφή 5 και 4 κατοπτρισμούς με άξονες τους 456, 258, 159, 357. Οι **αυτ**ομορφισμοί, οι αντίστοιχες μεταθέσεις και τα γινόμενα περιγράφονται στον παρακάτω πίνακα:

Αυτομορφισμός	**Μετάθεση**	**Γινόμενο**
Περιστροφή κατά 0°	(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)	x_1^9
Περιστροφή κατά 90°	(1397)(2684)(5)	$x_1x_4^2$
Περιστροφή κατά 180°	(19)(28)(37)(46)(5)	$x_1x_2^4$

Περιστροφή κατά 270°	(1793)(2486)(5)	$x_1 x_4^2$
Κατοπτρισμός με άξονα 456	(17)(28)(39)(4)(5)(6)	$x_1^3 x_2^3$
Κατοπτρισμός με άξονα 258	(13)(46)(79)(2)(5)(8)	$x_1^3 x_2^3$
Κατοπτρισμός με άξονα 159	(24)(68)(37)(1)(5)(9)	$x_1^3 x_2^3$
Κατοπτρισμός με άξονα 258	(26)(48)(19)(3)(5)(7)	$x_1^3 x_2^3$

Ο κυκλικός δείκτης της ομάδας αυτομορφισμών G του γραφήματος αυτού θα είναι λοιπόν

$$\mathbf{P_G(x_1\,,\,x_2,\ldots x_9) = \frac{1}{8}\,(\,x_1^9 + 2x_1x_4^2 + 4x_1^3x_2^3 + x_1\,x_2^4\,)}$$

β)Το γράφημα έχει 4 αυτομορφισμούς:

2 περιστροφές περί το κέντρο βάρους του κατά γωνίες 0°,180°

2 κατοπτρισμούς ως προς άξονες την 14 και τη μεσοκάθετο της 23 όπως φαίνεται και στον πίνακα:

Αυτομορφισμός	**Μετάθεση**	**Γινόμενο**
περιστροφή κατά 0°	(1)(2)(3)(4)(5)(6)	x_1^6
περιστροφή κατά 180°	14)(23)(56)	x_2^3
κατοπτρισμός με άξονα τη μεσοκάθετο της 23	(14)(23)(56)	x_2^3
κατοπτρισμός με άξονα την 14	(1)(4)(26)(35)	$x_1^2 x_2^2$

Ο κυκλικός δείκτης της ομάδας αυτομορφισμών G του γραφήματος αυτού είναι:

$$\mathbf{P_G(x_1 , x_2, \dots x_6) = \frac{1}{4}\ (x_1^6 +2x_2^3+ x_1^2\, x_2^2)}$$

Παράδειγμα 5.

Να βρεθούν οι κυκλικοί δείκτες των περιστροφικών ομάδων συμμετριών G των Πλατωνικών στερεών.

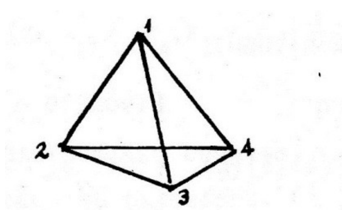
Λύση:

α) Το τετράεδρο

Οι περιστροφικές συμμετρίες του τετραέδρου είναι 12 και φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Συμμετρία	Μετάθεση	Γινόμενο
Περιστροφή κατά 0^o περί το ύψος του τετραέδρου που διέρχεται από την κορυφή 1	(1) (2) (3) (4)	x_1^4
Περιστροφή κατά 120^o περί το ύψος που διέρχεται από την κορυφή 1	(1) (234)	x_1x_3
Περιστροφή κατά 240^o περί το ύψος που διέρχεται από την κορυφή 1	(1) (243)	x_1x_3
Περιστροφή κατά 120^o περί το ύψος που διέρχεται από την κορυφή 2	(2) (134)	x_1x_3
Περιστροφή κατά 240^o περί το ύψος που διέρχεται από την κορυφή 2	(2) (143)	x_1x_3
Περιστροφή κατά 120^o περί το ύψος που διέρχεται από την κορυφή 3	(3) (124)	x_1x_3

Περιστροφή κατά 240^o περί το ύψος που διέρχεται από την κορυφή 3	(3) (142)	x_1x_3
Περιστροφή κατά 120^o περί το ύψος που διέρχεται από την κορυφή 4	(4) (123)	x_1x_3
Περιστροφή κατά 240^o περί το ύψος που διέρχεται από την κορυφή 4	(4) (132)	x_1x_3
Περιστροφή κατά 180^o		
περί τη μεσοκάθετο των άκρων 12 και 34	(12) (34)	x_2^2
περί τη μεσοκάθετο των άκρων 13 και 24	(13) (24)	x_2^2
περί τη μεσοκάθετο των άκρων 14 και 23	(14) (23)	x_2^2

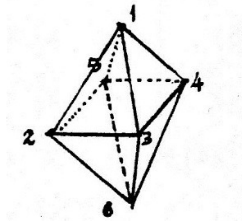


Άρα ο κυκλικός δείκτης της περιστροφικής ομάδας συμμετριών G του τετραέδρου είναι:

$$\mathbf{P_G(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{12}\ (x_1^4 + 3x_2^2 + 8x_1\, x_3)}$$

β) Το οκτάεδρο

Οι περιστροφικές συμμετρίες του οκταέδρου είναι 24 οι εξής



i) Περιστροφές κατά 0°, 90°, 180°, 270° περί άξονες που διέρχονται από δύο απέναντι κορυφές του οκταγώνου.

Εφόσον υπάρχουν 3 ζεύγη απέναντι κορυφών θα υπάρχουν 3 τέτοιοι άξονες περιστροφής και συγκεκριμένα οι 16, 24, 35.

ii) Περιστροφές κατά 180° περί άξονες που είναι μεσοκάθετοι σε δύο απέναντι ακμές.

Εφόσον υπάρχουν 6 ζεύγη απέναντι ακμών θα υπάρχουν 6 τέτοιοι άξονες και συγκεκριμένα:

Μεσοκάθετος των 14 , 26

Μεσοκάθετος των 13 , 56

Μεσοκάθετος των 12 , 46

Μεσοκάθετος των 15 , 36

Μεσοκάθετος των 23 , 45
Μεσοκάθετος των 25 , 43

iii) Περιστροφές κατά 120^o και 240^o περί άξονες που διέρχονται κάθετα από τα κέντρα βάρους δύο απέναντι εδρών. Οι 8 έδρες δίνουν 4 ζεύγη απέναντι εδρών και συγκεκριμένα :

Άξονας κάθετος στις έδρες 134 - 256

Άξονας κάθετος στις έδρες 145 - 236

Άξονας κάθετος στις έδρες 125 - 346

Άξονας κάθετος στις έδρες 123 - 456

Οι 24 αυτές συμμετρίες φαίνονται στον παρακάτω πίνακα :

Συμμετρία	Μετάθεση	Γινόμενο
Περιστροφή κατά 0° περί άξονα 16	(1) (2) (3) (4) (5) (6)	x_1^6
Περιστροφή κατά 90° περί άξονα 16	(1) (2345) (6)	$x_1^2x_4$
Περιστροφή κατά 180° περί άξονα 16	(1) (24) (35) (6)	$x_1^2x_2^2$
Περιστροφή κατά 270° περί άξονα 16	(1) (2543) (6)	$x_1^2x_4$
Περιστροφή κατά 90° περί άξονα 24	(2) (4) (1563)	$x_1^2x_4$
Περιστροφή κατά 180° περί άξονα 24	(2) (4) (16) (35)	$x_1^2x_2^2$
Περιστροφή κατά 270° περί άξονα 24	(2) (4) (1365)	$x_1^2x_4$
Περιστροφή κατά 90° περί άξονα 35	(3) (5) (1264)	$x_1^2x_4$
Περιστροφή κατά 180° περί άξονα 35	(3) (5) (16) (24)	$x_1^2x_2^2$
Περιστροφή κατά 270° περί άξονα 35	(3) (5) (1462)	$x_1^2x_4$
Μεσοκάθετο 14 , 26	(14) (26) (35)	x_2^3
Μεσοκάθετο 13 , 56	(13) (56) (24)	x_2^3
Μεσοκάθετο 12 , 46	(12) (35) (46)	x_2^3
Μεσοκάθετο 15 , 36	(15) (24) (36)	x_2^3
Μεσοκάθετο 23 , 45	(16) (23) (45)	x_2^3
Μεσοκάθετο 25 , 43	(16) (25) (43)	x_2^3
Περιστροφή 120° περί άξονα 134-256	(134) (265)	x_3^2
Περιστροφή 240° περί άξονα 134-256	(143) (256)	x_3^2
Περιστροφή 120° περί άξονα 145-236	(236) (145)	x_3^2
Περιστροφή 240° περί άξονα 134-256	(263) (154)	x_3^2
Περιστροφή 120° περί άξονα 125-346	(346) (152)	x_3^2
Περιστροφή 240° περί άξονα 125-346	(125) (364)	x_3^2
Περιστροφή 120° περί άξονα 123-456	(123) (456)	x_3^2
Περιστροφή 240° περί άξονα	(132) (465)	x_3^2

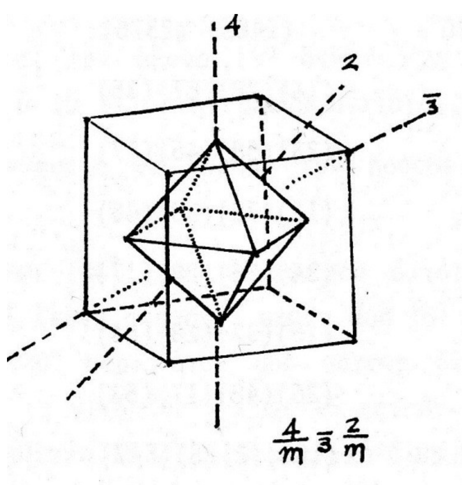
123-456		

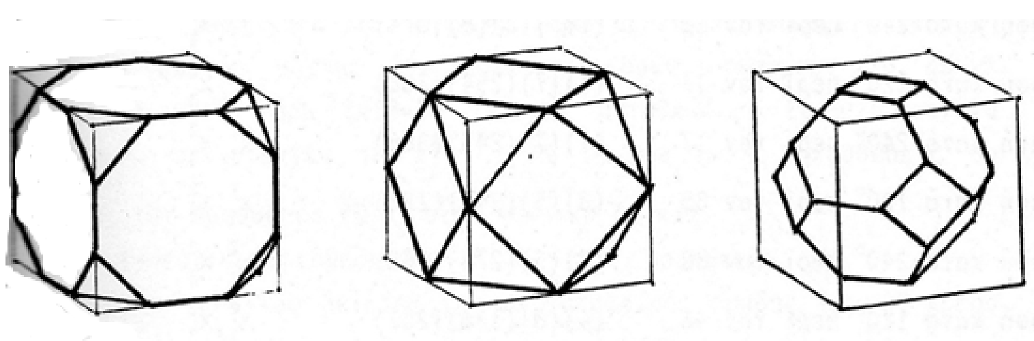
Άρα ο κυκλικός δείκτης της περιστροφικής ομάδας συμμετριών G του οκταέδρου είναι:

$$\mathbf{P_G(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{1}{24}\,(x_1^6 + 6x_1^2x_4 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_2^3 + 8x_3^2)}$$

γ) Ο Κύβος

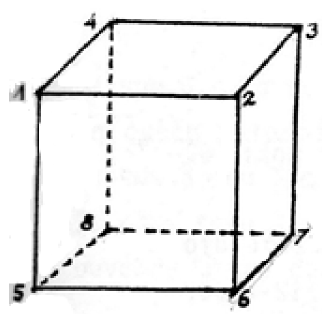
Οι περιστροφικές συμμετρίες του κύβου είναι πάλι 24 αντίστοιχες με αυτές του οκταέδρου. Οι 24 περιστροφικές συμμετρίες, οι 24 κατοπτρισμοί και η διαδικασία μετασχηματισμού του κύβου σε οκτάεδρο φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Οι 24 περιστροφές φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.





Συμμετρία	Μετάθεση	Γινόμενο
Άξονας από κ.β. εδρών 1234 και 5678		
περιστροφή περί άξονα κατά 0°	(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)	x_1^8
περιστροφή περί άξονα κατά 90°	(1234)(5678)	x_4^2
περιστροφή περί άξονα κατά 180°	(13)(24)(57)(68)	x_2^4
περιστροφή περί άξονα κατά 270°	(1432)(5876)	x_4^2
Άξονας από κ.β. εδρών 1256 και 3487		
περιστροφή περί άξονα κατά 90°	(1265)(4378)	x_4^2
περιστροφή περί άξονα κατά 180°	(16)(25)(47)(38)	x_2^4
περιστροφή περί άξονα κατά 270°	(1562)(4873)	x_4^2
Άξονας από κ.β. εδρών 1584 και 2673		
περιστροφή περί άξονα κατά 90°	(1584)(2673)	x_4^2
περιστροφή περί άξονα κατά 180°	(18)(54)(27)(63)	x_2^4
περιστροφή περί άξονα κατά 270°	(1485)(2376)	x_4^2
Μεσοκάθετος 14-67	(14)(28)(67)(35)	x_2^4
Μεσοκάθετος 23-58	(23)(58)(46)(17)	x_2^4
Μεσοκάθετος 12-78	(12)(78)(35)(46)	x_2^4
Μεσοκάθετος 34-56	(34)(56)(28)(17)	x_2^4
Μεσοκάθετος 15-37	(15)(37)(28)(64)	x_2^4

Μεσοκάθετος 26-48	(26)(48)(17)(53)	x_2^4
Περιστροφή κατά 120° περί τον 28	(136)(2)(8)(547)	$x_1^2x_3^2$
Περιστροφή κατά 240° περί τον 28	(163)(2)(8)(574)	$x_1^2x_3^2$
Περιστροφή κατά 120° περί τον 17	(1)(7)(254)(368)	$x_1^2x_3^2$
Περιστροφή κατά 240° περί τον 17	(1)(7)(245)(386)	$x_1^2x_3^2$
Περιστροφή κατά 120° περί τον 35	(3)(5)(247)(186)	$x_1^2x_3^2$
Περιστροφή κατά 240° περί τον 28	(3)(5)(274)(168)	$x_1^2x_3^2$
Περιστροφή κατά 120° περί τον 46	(4)(6)(138)(257)	$x_1^2x_3^2$
Περιστροφή κατά 120° περί τον 46	(4)(6)(183)(275)	$x_1^2x_3^2$



Άρα ο κυκλικός δείκτης της περιστροφικής ομάδας συμμετριών G του κύβου είναι:

$$\mathbf{P_G=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8) = \frac{1}{24}(x_1^8+8x_1^2\ x_3^2+9x_2^4+6x_4^2)}$$

Παράδειγμα 7.

Θα υπολογίσουμε αναλυτικά τον κυκλικό δείκτη της ομάδας C_{12} .

Αφού n=12 η ομάδα έχει 12 μεταθέσεις και μάλιστα τις:

e=(1)(2)…(12)	τύπος {12,0,0,…}	προσθετέος x_1^{12}
π= (l2 12)	{0,0,…,1}	x_1^{12}
π^2=(1357911)(24681012)	{0,0,0,0,0,2}	x^2
π^3=(14710)(25811)(36912)	{0,0,0,3}	x_4^3
π^4=(159)(2610)(3711)(4812)	{0,0,4}	x_3^4
π^5=(16,11,4927,12,5,10,38)	{0,0,...1}	x_{12}^1
π^6=(17)(28)(39)(410)(511)(612)	{0,6,0...}	x_2^6
π^7=(183,10,5,12,7294,11,6)	{0,0,...,1}	x_{12}
π^8=(195)(2106)(3117)(4128)	{0,0,4,0...}	x_3^4
π^9=(1,10,74)(2,11,85)(3,12,96)	{0,0,0,3}	x_4^3
π^{10}=(1,11,9753)(2,12,10864)	{0,0,0,0,0,2}	x_6^2
π^{11}=(1,12,11,10,98765432)	{0,0,0…,1}	x_{12}

όπου τοποθετήθηκαν κόμματα σε ορισμένους 12-κύκλους για να ξεχωρίσουν το στοιχείο 12 από το 1,2 κ.ο.κ.

Οι διαιρέτες του 12 είναι:

d=1, φ(1)=1$\Rightarrow$ $\exists$ 1 μετάθεση στο C_{12} $\frac{12}{1}$ =12 κύκλους μήκους 1 (n , e)

d=2, φ(2)=1$\Rightarrow$ $\exists$ 1 μετάθεση στο C_{12} $\frac{12}{2}$ = 6 κύκλους μήκους 2 (n , π^6)

d=3, φ(3)=2$\Rightarrow$ $\exists$ **2** μεταθέσεις στο C_{12} $\frac{12}{3}$=4 κύκλους μήκους 1 (οι π^4, π^8)

d=4, φ(4)=2$\Rightarrow$ $\exists$ **2** μεταθέσεις στο C_{12} $\frac{12}{4}$=3 κύκλους μήκους 4 (οι π^3,π^8)

d=6, φ(6)=2$\Rightarrow$ $\exists$ **2** μεταθέσεις στο C_{12} $\frac{12}{6}$=2 κύκλους μήκους 6(οι π^2, π^{10})

d=12 φ(12)=4$\Rightarrow$ $\exists$ 4 μεταθέσεις στο C_{12} $\frac{12}{12}$=1 κύκλος μήκους 12 (οι π^1,π^5, π^7, π^{11})

Άρα ο κυκλικός δείκτης της C_{12} είναι :

$$\frac{1}{12}\left(\varphi(1)x_1^{12} + \varphi(2)x_2^{6} + \varphi(3)x_3^{4} + \varphi(4)x_4^{3} + \varphi(6)x_6^{2} + \varphi(12)x_{12}^{1} \right) =$$

$$= \frac{1}{12} \left(x_1^{12} + x_2^{6} + 2x_3^{4} + 2x_4^{3} + 2x_6^{2} + 4x_{12} \right)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ

Το Λήμμα του BURNSIDE

Έστω η υποομάδα G της S_n ,της συμμετρικής ομάδας τάξης n. Το S_n έχει κατά τα γνωστά n! στοιχεία, όλες τις μεταθέσεις των ακεραίων 1,2,...,n. Ορίζουμε σαν **τροχιά** του αριθμού $k\in\{1,2,...,n\}$ το σύνολο των ακεραίων οι οποίοι αποτελούν εικόνες του k στις μεταθέσεις της ομάδας G. Συμβολίζουμε το σύνολο αυτό με 0_k.

Παράδειγμα 1.

i) Έστω η υποομάδα G= {I, (12), (34), (12)(34) } της S_4 .Τότε:

$0_1=\{1,2\}$
$0_2=\{1,2\}$
$0_3=\{3,4\}$
$0_4=\{3,4\}$.

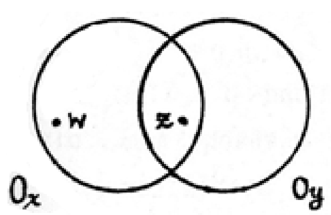
ii) Έστω η υποομάδα της A_4 η οποία αποτελείται από τις ζυγές μεταθέσεις της S_4 (alternating group).

Τα στοιχεία της είναι οι 12 μεταθέσεις
A_4={1,(123),(132),(124),(142),(134),(143),(234),(243),(12)(34),
(13)(24),(14)(23)}.
Οι τροχιές 0_1, 0_2, 0_3 και 0_4 ισούνται όλες με το σύνολο (1,2,3,4}.

Στα δύο αυτά παραδείγματα βλέπουμε ότι τα σύνολα 0_x και 0_y ή συμπίπτουν ή είναι ξένα μεταξύ τους. Αυτό ισχύει γενικά όπως θα αποδείξουμε παρακάτω. Έχουμε επίσης προφανώς ότι $x\in 0_x$ και αν $x\in 0_y$ τότε υπάρχουν $\pi\in G$ με $\pi(y)=x$ αλλά επειδή το G είναι ομάδα έπεται ότι $\pi^{-1}\in G$ άρα $y=\pi^{-1}(x)$ δηλαδή $y\in 0_x$.

Θεώρημα 1:
Έστω G υποομάδα της S_n και οι τροχιές 0_x και 0_y. Τότε ισχύει
ή $0_x=0_y$ ή $0_x\cap 0_y=\varnothing$.

Απόδειξη.
Ας υποθέσουμε ότι οι τροχιές 0_x και 0_y ούτε συμπίπτουν ούτε είναι ξένες μεταξύ τους και έστω $z\in 0_x\cap 0_y$ και $w\in 0_x$ αλλά $w\notin 0_y$ θα οδηγηθούμε σε αντίφαση.



Εφόσον $z\in 0_x$ υπάρχει $\pi\in G$ με $\pi(x)=z$ οπότε και η $\pi^{-1}\in G$ δίνει $\pi^{-1}(z)=x$.

Εφόσον $w \in 0_x$ υπάρχει $\pi' \in G$ με $\pi'(x)=w$. Αλλά τότε η $\pi' \pi^{-1} \in G$ δίνει
$\pi' \pi^{-1} (z) = \pi'(x)=w$
Εφόσον $z \in 0_y$ υπάρχει $\pi'' \in G$ με $\pi''(y)=z$. Πολλαπλασιάζοντας επί την προηγούμενη μετάθεση έχουμε:

$$\pi' \pi^{-1}\pi''(y)=\pi' \pi^{-1}(z)=w$$

όπου $\pi' \pi^{-1}\pi'' \in G$. Άρα βρήκαμε μία μετάθεση του G που μεταθέτει το y στο W άρα $w \in 0_y$ άτοπον.

Έστω πάλι η υποομάδα G της $\mathbf{S_\eta}$**.** O σταθεροποιητής (stabilizer) του αριθμού $k\in\{1,... ,n\}$ που συμβολίζεται με T_k είναι το σύνολο των μεταθέσεων του G που αφήνουν το στοιχείο k αμετάβλητο.
Προσοχή στο ότι το σύνολο T_k είναι ένα σύνολο μεταθέσεων του G και όχι ένα σύνολο αριθμών όπως το σύνολο O_k.

Παράδειγμα 2.
i) Έστω πάλι η ομάδα G= {I, (12), (34), (12)(34)}.
Τότε T_1={I, (34)}
T_2={I, (34)}
T_3={I, (12)}
T_4={I, (12)}

ii) Έστω πάλι η υποομάδα A_4 της S_4
Τότε T_1= {I, (234),(243)}
T_2= {I, (134),(143)}
T_3= {(124),(142)}
T_4= {I, (123),(132)}.

Θεώρημα 2:
Για κάθε υποομάδα G της S_n και κάθε ακέραιο $k\in\{1,...,n\}$ ισχύει:

$$|0_k|\cdot|T_k|=|G|\ .$$

Απόδειξη.
Θα αντικαταστήσουμε το αριθμοσύνολο 0_k με ένα σύνολο μεταθέσεων P με τον ίδιο πληθάριθμο.
Έστω 0_k= {a_1 ,a_2 ,a_3,...}. Επιλέγω ένα σύνολο μεταθέσεων P={p_1,p_2,p_3,…) από στοιχεία της G με:

Η μετάθεση p_1 απεικονίζει τον k στον a_1
Η μετάθεση p_2 απεικονίζει τον k στον a_2
Η μετάθεση p_3 απεικονίζει τον k στον a_3 κ.ο.κ.

Παρατηρούμε ότι |P| = $|O_k|$. Επίσης αφού το $a_k \in O_k$, υπάρχει πάντα μετάθεση $p\in G$

που να απεικονίζει το k στο a_k .

Θα δείξουμε τώρα ότι κάθε μετάθεση μπορεί να γραφεί μονοσήμαντα σαν γινόμενο δύο μεταθέσεων μίας από το P και μίας από το T_k.

Πράγματι έστω $g \in G$.Η μετάθεση αυτή απεικονίζει τον k στον αριθμό a_m.Αλλά τότε η μετάθεση $P_m^{-1} g \in G$ απεικονίζει τον k στον k. Πράγματι

$$P_m^{-1}\, g(k)= P_m^{-1}\,(a_m)= k$$

Άρα η μετάθεση $P_m^{-1}\, g$ είναι κάποιο στοιχείο s του stabilizer T_k δηλαδή $P_m^{-1} g=s \Rightarrow g= P_m s$.

Κάθε λοιπόν στοιχείο γράφεται σαν γινόμενο μίας μετάθεσης $P_m \in P$ και μίας μετάθεσης $s \in T_k$. Θα δείξουμε ότι αυτό γίνεται κατά μοναδικό τρόπο.

Έστω ότι $g= P_m\, s_a = P_n\, s_b$

Το γινόμενο $P_m\, s_a$ δίνει $P_m\, s_a\,(k) = P_m(k)=a_m$ ενώ το γινόμενο $P_n\, s_b$ δίνει $P_n\, s_b\,(k)= P_n(k)=\mathbf{a_n}$. Εφόσον τα δύο γινόμενα είναι ίσα έχουμε $a_m=a_n$ και m=n. Απλοποιώντας έχω $s_a=s_b$ και έτσι αποδείχτηκε και η μοναδικότητα.

Άρα ο αριθμός των διαφόρων τρόπων επιλογής ενός στοιχείου από το T_k και ενός από το P ισούται με το πλήθος των στοιχείων του G δηλαδή από την αρχή του γινόμενου $|G| =|T_k|\cdot|P| = |T_k| \cdot |0_k|$

Παράδειγμα 3

i) Για το A_4 έχω: οι τροχιές έχουν και οι τέσσερεις από 4 στοιχεία. Οι τέσσερεις stabilizers έχουν από 3 στοιχεία ο καθένας. Άρα :
$|0_1|\cdot|T_1| = |0_2|\cdot|T_2| = |0_3|\cdot|T_3| = |0_4|\cdot|T_4| = 4\cdot3 = 12 = |A_4|$

ii) Αν $G=S_3=\{I,12,13,23,123,132\}$ έχουμε
$0_1=0_2=0_3=\{1,2,3\} \Rightarrow |0_1| = |0_2| = |0_3|= 3$
$T_1=\{I,23\} \Rightarrow |T_1| = |T_2| = |T_3| = 2$
$T_2=\{I,13\}$
$T_3=\{I,12\}$

Άρα $|0_1|\,|T_1|=|0_2|\,|T_2|=|0_3|\,|T_3|=3\cdot2=6=|S_3|$.

Το παρακάτω αποτέλεσμα είναι γνωστό σαν λήμμα του Burnside από τον William Burnside (1852-1927) αν και απαντάται και προγενέστερα.

Είναι ένα σημαντικό απαριθμητικό αποτέλεσμα διότι μας δίνει το πλήθος των ουσιαστικά διαφορετικών τροχιών που αντιστοιχούν σε μία ομάδα G αν ληφθούν υπ' όψιν και οι περιστροφικές συμμετρίες του γεωμετρικού σώματος στο οποίο αντιστοιχεί η ομάδα μεταθέσεων G. Η απαρίθμηση γίνεται μετρώντας τα στοιχεία που αφήνουν σταθερά οι μεταθέσεις της ομάδας G.

Ας συμβολίσουμε με $\lambda_1(g)$ το πλήθος των κύκλων μήκους 1 της μετάθεσης $g \in G$ δηλαδή το πλήθος των αριθμών που η μετάθεση $g \in G$ αφήνει αμετάβλητους.

Θεώρημα 4: (Λήμμα του Burnside).

Έστω G μία υποομάδα της S_n . Τότε το πλήθος των διαφορετικών τροχιών που αντιστοιχούν στην ομάδα G ισούται με $\frac{1}{|G|}\sum \lambda_1(g)$ όπου η άθροιση γίνεται πάνω σε όλες τις μεταθέσεις $g \in G$.

Απόδειξη.

Το άθροισμα $\lambda_1(g_1) + \lambda_1(g_2) + \lambda_1(g_3) + \ldots$ (1)

μετρά το πόσοι αριθμοί μένουν σταθεροί για όλες τις μεταθέσεις της ομάδας G. Αλλά ο αριθμός k μένει σταθερός μόνο για τις μεταθέσεις $g \in T_k$ άρα ο k προσφέρει $|T_k|$μονάδες στο άθροισμα (1). Το άθροισμα (1) λοιπόν ισούται με

$$|T_1| + |T_2| + \ldots + |T_k| + \ldots \qquad (2)$$

Αν διαιρέσουμε κάθε προσθετέο της σχέσης (2) με |G| θα έχουμε από το θεώρημα 2

$$\frac{1}{|G|}\sum \lambda_1(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{n}|Ti| = \frac{1}{|O_1|} + \frac{1}{|O_2|} + \ldots + \frac{1}{|O_k|} + \ldots \qquad (3)$$

Παρατηρούμε όμως ότι αν η τροχιά 0_{k1} έχει t στοιχεία, έστω τα $k_1, k_2, \ldots, k_t$ τότε από το θεώρημα 1 ισχύει:

$$\frac{1}{|O_{k1}|} + \frac{1}{|O_{k2}|} + \ldots + \frac{1}{|O_{kt}|} = \frac{1}{t} + \frac{1}{t} + \ldots + \frac{1}{t} = 1$$

διότι στο τελευταίο άθροισμα έχουμε t προσθετέους.

Άρα το άθροισμα (3) αναλύεται σ'ένα αριθμό μερικών αθροισμάτων το καθένα από τα οποία ισούται με τη μονάδα και το πλήθος των οποίων ισούται με το πλήθος των διαφορετικών τροχιών που αντιστοιχούν στην ομάδα G.

Άρα το πλήθος των διαφορετικών τροχιών της G ισούται με

$$\frac{1}{|G|}\sum \boldsymbol{\lambda_1(g)}.$$

Παράδειγμα 4.

i) Έστω πάλι η ομάδα G={I , (12) , (34) , (12)(34) }.

Η μετάθεση I = (1)(2)(3)(4)	έχει	4 κύκλους	μήκους	1
(12)= (12) (3)(4)	έχει	2 κύκλους	μήκους	1
(34)= (1)(2)(34)	έχει	2 κύκλους	μήκους	1
(12)(34)	έχει	0 κύκλους	μήκους	1

Άρα το πλήθος των διαφορετικών τροχιών ισούται με

$$\frac{1}{4}\ (4+2+2+0) = \frac{8}{4} = 2.$$

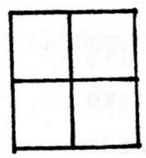
ii) Για το A_4 με τις 12 μεταθέσεις έχουμε

$I=(1)(2)(3)(4)$ με 4 στοιχεία σταθερά

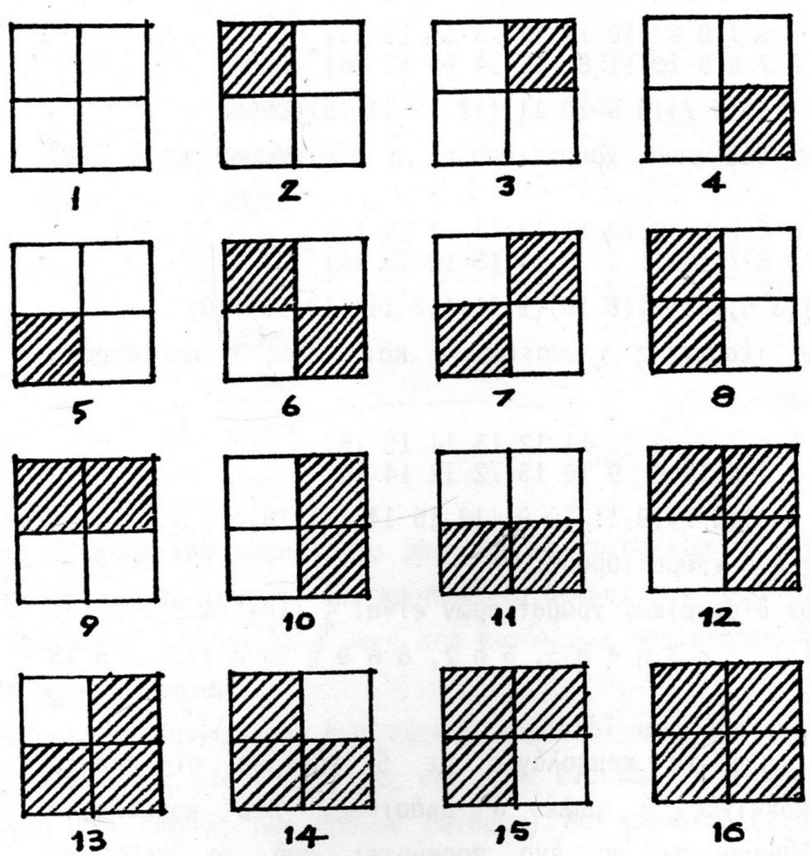
υπάρχουν 8 μεταθέσεις σαν την (123)(4) με ένα σταθερό στοιχείο η καθεμία, τέλος οι υπόλοιπες 3 μεταθέσεις δεν έχουν σταθερό στοιχείο. Άρα το πλήθος των διαφορετικών τροχιών είναι:

$$\frac{1}{12}\,(8+4)=1$$ όπως είδαμε η $\{1,2,3,4\}$.

iii) Έστω ότι θέλουμε να χρωματίσουμε τα 4 τετραγωνίδια του σχήματος με δύο χρώματα, έστω άσπρο και μαύρο.



Εφόσον έχουμε τέσσερα τετραγωνίδια καθένα από τα οποία χρωματίζεται με δύο χρώματα ανεξάρτητα από το χρώμα των άλλων τετραγωνιδίων θα έχουμε $2^4=16$ δυνατούς χρωματισμούς τους οποίους παραθέτουμε παρακάτω αριθμημένους



Αν όμως λάβουμε υπ' όψιν τις περιστροφικές συμμετρίες του σχήματος παρατηρούμε ότι ορισμένοι από τους χρωματισμούς αυτούς συμπίπτουν. π.χ. ο 3 προκύπτει από τον 2 αν το σχήμα περιστραφεί κατά 90° περί το κέντρο βάρους του (η περιστροφή ακολουθεί τους δείκτες ρολογιού). Υπάρχουν 4 διαφορετικές περιστροφές κατά γωνία 0°, 90°, 180° και 270°. Η κάθε μία από αυτές θεωρούμε ότι είναι μία μετάθεση των 16 χρωματισμών. Μία τροχιά μίας μετάθεσης είναι το σύνολο των χρωματισμών που είναι ισοδύναμοι από την αντίστοιχη περιστροφή.

Από το λήμμα του Burnside μπορούμε να μετρήσουμε τις ουσιαστικά διαφορετικές τροχιές δηλαδή τους ουσιαστικά διαφορετικούς χρωματισμούς μετρώντας τα σταθερά στοιχεία της κάθε μίας μετάθεσης (περιστροφής).

Έχουμε G=(g_0 , g_1 , g_2 , g_3) όπου η ταυτοτική μετάθεση

$g_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & .... & 16 \\ 1 & 2 & .... & 16 \end{pmatrix}$ = (1) (2) …. (16) αφήνει σταθερούς και τους 16 χρωματισμούς.

Η περιστροφή κατά 90° μετάθεση

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 & 7 & 6 & 9 & 10 & 11 & 8 & 13 & 14 & 15 & 12 & 16 \end{pmatrix} =$$

(1)(2 3 4 5)(6 7)(8 9 10 11)(12 13 14 15)(16) αφήνει σταθερούς δύο μόνο χρωματισμούς.

Η περιστροφή κατά 180° μετάθεση

$$g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 3 & 6 & 7 & 10 & 11 & 8 & 9 & 14 & 15 & 12 & 13 & 16 \end{pmatrix} =$$

(1)(2 4)(3 5)(6) (7)(8 10)(9 11)(12 14)(13 15)(16) αφήνει σταθερούς τέσσερεις χρωματισμούς .

Και τέλος η περιστροφή κατά 270° μετάθεση

$$g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 5 & 2 & 3 & 4 & 7 & 6 & 11 & 8 & 9 & 10 & 15 & 12 & 13 & 14 & 16 \end{pmatrix} =$$

(1)(2 5 4 3)(6 7)(8 11 10 9)(12 15 14 13)(16) αφήνει σταθερούς δύο χρωματισμούς.

Άρα το πλήθος των διαφορετικών χρωματισμών είναι

$\frac{1}{4}$(16+2+4+2)= 6 δηλαδή οι 6 χρωματισμοί 1, 2 ή 3 ή 4 ή 5 , 6 ή 7 , 8 ή 9 ή 10 ή 11 , 12 ή 13 ή 14 ή 15 , 16

iv) Θεωρούμε όλα τα κομπολόγια με 5 χάντρες οι οποίες χρωματίζονται κόκκινες ή μπλε ή πράσινες. Δύο κομπολόγια θεωρούνται ισοδύναμα αν το ένα προκύπτει από το άλλο με περιστροφή. Κατοπτρισμοί **δεν** επιτρέπονται. Πόσα διαφορετικά κομπολόγια υπάρχουν;

Λύση.

Υπάρχουν προφανώς 3^5=243 χρωματισμοί αλλά δεν είναι όλοι διαφορετικοί μεταξύ τους. Η ομάδα G είναι η C_5 κυκλική ομάδα τάξεως 5 δηλαδή

$$G=\{(1)(2)(3)(4)(5),(12345),(13524),(14253),(15432)\} \quad \text{με} \quad |G|=5.$$

Η ταυτοτική μετάθεση αφήνει αμετάβλητα και τα 243 κομπολόγια, ενώ οι άλλες 4 μεταθέσεις αφήνουν αμετάβλητα μόνο τα 3 μονοχρωματικά κομπολόγια: τα ΚΚΚΚΚ, ΜΜΜΜΜ, ΠΠΠΠΠ.

Άρα το πλήθος των διαφορετικών τροχιών του G είναι

$$\frac{1}{5}\ (243+3+3+3+3)=51.$$

Οι 51 αυτές τροχιές είναι οι εξής:

Κομπολόι	**Μορφή**	**Πλήθος**
Μονοχρωματικό	ΚΚΚΚΚ	3
Διχρωματικό	ΚΚΚΚΜ	6
Διχρωματικό	ΚΚΚΜΜ	6
Διχρωματικό	ΚΚΜΚΜ	6
Τριχρωματικό	ΚΚΚΜΠ	3
Τριχρωματικό	ΚΚΚΠΜ	3
Τριχρωματικό	ΚΚΜΚΠ	3
Τριχρωματικό	ΚΚΠΚΜ	3
Τριχρωματικό	ΚΚΜΜΠ	3
Τριχρωματικό	ΠΜΜΚΚ	3
Τριχρωματικό	ΚΚΜΠΜ	3
Τριχρωματικό	ΜΠΜΚΚ	3
Τριχρωματικό	ΚΠΜΚΜ	3
Τριχρωματικό	ΜΚΜΠΚ	3

Σύνολο 51 χρωματισμοί.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

ΙΣΟΔΥΝΑΜΕΣ ΚΛΑΣΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ- ΒΑΡΗ ΚΑΙ ΚΑΤΑΛΟΓΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε συναρτήσεις από ένα πεπερασμένο σύνολο D σ' ένα άλλο R. Συνήθως το σύνολο R είναι ένα σύνολο χρωμάτων με τα οποία χρωματίζονται τα στοιχεία του D οπότε στην ειδική αυτή περίπτωση η κάθε συνάρτηση από το D στο R (και υπάρχουν $|R|^{|D|}$ τέτοιες συναρτήσεις) αντιστοιχεί σε έναν χρωματισμό των στοιχείων του D με |R| το πλήθος χρώματα αλλά αυτό δεν είναι απαραίτητο. Επίσης κάθε συνάρτηση f αντιστοιχεί σε έναν τρόπο να τοποθετήσουμε |D| αντικείμενα σε |R| κάλπες.

Έστω λοιπόν D και R δύο σύνολα και G μία ομάδα μεταθέσεων των στοιχείων του συνόλου D. Λέμε ότι οι συναρτήσεις f_1 και f_2 είναι ισοδύναμες αν και μόνο αν υπάρχει $\pi \in G$ τέτοια ώστε $f_1(d)=f_2[\pi(d)]$,
$\forall\, d \in D$.

Θα δείξουμε ότι η διμελής αυτή σχέση είναι σχέση ισοδυναμίας.

i) Αν θεωρήσουμε το μοναδιαίο στοιχείο $e \in G$ τότε $f_1(d)=f_1[e(d)]$
$\forall\ d \in D$ οπότε ικανοποιείται η αυτοπαθής ιδιότητα.

ii) Αν $f_1 \sim f_2 \Rightarrow f_1(d)=f_2[\pi(d)]$ $\forall\ d \in D$ και $f_2(d)= [\pi^{-1}(d)]$ $\forall\ d \in D$ με
$\pi^{-1} \in G$ άρα ικανοποιείται και η συμμετρική ιδιότητα.

iii) $f_1(d)=f_2[\pi_1(d)]$ και $f_2(d)=f_3[\pi_2(d)]$ $\forall\ d \in D$. Αλλά τότε $f_1(d)=f_3[\pi_2\, \pi_1(d)]$ $\forall\, d \in D$. Επειδή $\pi_2\, \pi_1 \in G$ ικανοποιείται και η μεταβατική ιδιότητα. Πρόκειται λοιπόν για μία σχέση ισοδυναμίας.

Άρα οι συναρτήσεις από το D στο R χωρίζονται σε κλάσεις ισοδυναμίας από την σχέση ισοδυναμίας που ορίσαμε.

Παράδειγμα 1.

Έστω D={a,b,c,d}   R={X,Y) και G={π_1,π_2,π_3,π_4} όπου

$$\pi_1=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{pmatrix},\ \pi_2=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix},\ \pi_3=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \end{pmatrix},\ \pi_4=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

Τότε οι 2^4 =16 συναρτήσεις απο το D στο R είναι

a/A	f(a)	f(b)	f(c)	f(d)
f_1	x	x	x	x
f_2	y	x	x	x
f_3	x	y	x	x
f_4	x	x	y	x
f_5	x	x	x	y
f_6	y	y	x	x
f_7	y	x	y	x
f_8	y	x	x	y
f_9	x	y	y	x
f_{10}	x	y	x	y
f_{11}	x	x	y	y
f_{12}	y	y	y	x
f_{13}	y	y	x	y
f_{14}	y	x	y	y
f_{15}	x	y	y	y
f_{16}	y	y	y	y

Βλέπουμε ότι $f_3[\pi_1(a)] = f_3(b) = y = f_2(a)$

$f_3[\pi_1(b)] = f_3(c) = x = f_2(b)$

$f_3[\pi_1(c)] = f_3(d) = x = f_2(c)$

$f_3[\pi_1(d)] = f_3(a) = x = f_2(d)$

Άρα οι συναρτήσεις f_3 και f_2 είναι ισοδύναμες.

Παρόμοια διαπιστώνουμε ότι οι 16 συναρτήσεις διαιρούνται σε 6 κλάσεις ισοδύναμων συναρτήσεων τις { f_1 },{ f_2, f_3, f_4, f_5 },{ f_6, f_8, f_9, f_{11} }, { f_7, f_{10} }, { f_{12}, f_{13}, f_{14}, f_{15} } και { f_{16} }

Αν θεωρήσουμε το σύνολο D σαν τα τέσσερα τετραγωνίδια της 2x2 σκακιέρας {a,b,c,d} και το σύνολο R σαν τους διχρωματισμούς τους με δύο χρώματα {x και y} και τις 4 μεταθέσεις της ομάδας G σαν π_1 περιστροφή κατά 90° , π_3 περιστροφή κατά 270° , π_2 περιστροφή κατά 180° , π_4 περιστροφή κατά 0° το παράδειγμά μας ανάγεται στο παράδειγμα που έχουμε ήδη δει (Burnside) του διχρωματισμού των 4 τετραγώνων της σκακιέρας, έτσι ώστε δύο σκακιέρες θεωρούνται ισοδύναμες, αν η μία προκύπτει από την άλλη κατά τις περιστροφές της ομάδας G. Οι 16 συναρτήσεις fi είναι οι 16 δυνατοί χρωματισμοί C_i και οι 6 διαφορετικές κλάσεις ισοδύναμων συναρτήσεων οι 6 ουσιαστικά διαφορετικοί χρωματισμοί.

Παράδειγμα 2.

Έστω ότι το σύνολο D είναι το σύνολο των 6 εδρών ενός κύβου το σύνολο R={A,M} $f{:}D \to R$ και G η ομάδα περιστροφικών συμμετριών του κύβου που δρα στις 6 έδρες του.

Θέλουμε να υπολογίσουμε τους διαφορετικούς χρωματισμούς των εδρών του κύβου με δύο χρώματα Α και Μ αν ληφθούν υπόψη οι περιστροφικές συμμετρίες του κύβου.

Προφανώς οι διχρωματισμοί του κύβου είναι 2^6=64 αλλά πολλοί από αυτούς είναι ισοδύναμοι.

α.α.	**Χρωματισμοί**	**τρόποι**
1)	6 έδρες χρώματος Α-0 έδρα Μ	1
2)	5 έδρες χρώματος Α-1 έδρα Μ	6
3)	4 έδρες χρώματος Α-2 απέναντι έδρες Μ	3
4)	4 έδρες χρώματος Α-2 διαδοχικές έδρες Μ	12
5)	3 έδρες χρώματος Α που σχηματίζουν τρίεδρη γωνία- 3 έδρες χρώματος Μ που σχηματίζουν τρίεδρη γωνία.	8
6)	3 έδρες χρώματος Α που σχηματίζουν 3 δίεδρες γωνίες- 3 έδρες χρώματος Μ που σχηματίζουν 3 δίεδρες γωνίες.	12
7)	2 έδρες χρώματος Α διαδοχικές -4 έδρες χρώματος Μ	12
8)	2 έδρεςχρώματος Α απέναντι -4 έδρες χρώματος Μ	3
9)	1 έδρα χρώματος Α-5 έδρες χρώματος Μ	6
10)	0 έδρες χρώματος Α-6 έδρες χρώματος Μ	1

Συνολικά 64 τρόποι

Άρα με την εξαντλητική μέθοδο υπολογίσαμε 10 διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίας.

Θέλουμε να φθάσουμε στο αποτέλεσμα αυτό με μία κομψότερη μέθοδο.

Θέλουμε να αντιστοιχήσουμε σε κάθε στοιχείο του συνόλου R έναν αριθμό ή ένα σύμβολο, κυρίως για να μπορούμε να ξεχωρίσουμε την δράση των στοιχείων του συνόλου R. Αν $r \in R$ το σύμβολο $w(r)$ παριστά το **βάρος** του στοιχείου r**.**

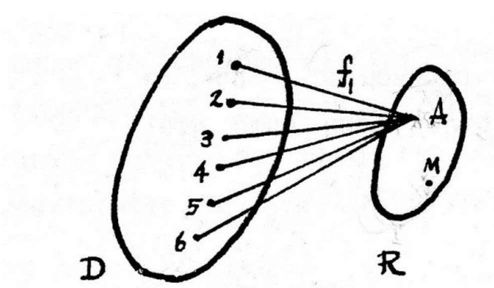
Ο κατάλογος του συνόλου R ορίζεται σαν το άθροισμα των βάρων όλων των στοιχείων του **R** δηλαδή το άθροισμα $\sum_{r \in R} w(r)$**.**

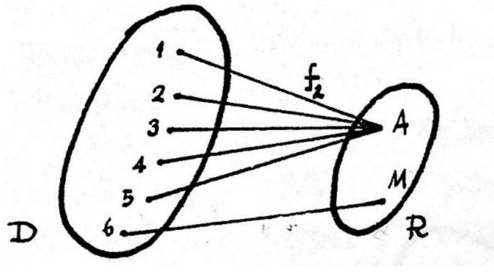
Το βάρος μίας συνάρτησης f: D $\to$ R ορίζεται από την σχέση $W(f)=\prod_{d \in D} w[f(d)]$ δηλαδή ισούται με το γινόμενο όλων των βαρών των εικόνων των στοιχείων του D κάτω από την συνάρτηση f.

Τέλος ο κατάλογος ενός συνόλου συναρτήσεων ισούται με το άθροισμα όλων των βαρών των συναρτήσεων f του συνόλου S δηλαδή $\sum_{f \in S} W(f)$.

Παράδειγμα (συνέχεια).

Αν στο προηγούμενο παράδειγμα θέσουμε w(M)=1,w(A)=2
Η συνάρτηση f_1 έχει βάρος 2^6 δηλ $W(f_1)=64$.





(Η συνάρτηση αυτή αντιστοιχεί στον χρωματισμό και των 6 εδρών με το χρώμα Α).

Η συνάρτηση *f*₂ που αντιστοιχεί στον χρωματισμό των 5 εδρών Α και μίας με χρώμα Μ έχει βάρος $W(f_2)=32$. κ.ο.κ.

Παρατηρούμε ότι για το βάρος συνάρτησης χρησιμοποιούμε το κεφάλαιο σύμβολο W ενώ για το βάρος στοιχείου το μικρό w.

Επίσης ο κατάλογος του συνόλου R είναι 2+1=3 μας πληροφορεί ότι ένα στοιχείο του D θα έχει την τιμή 1 ή την 2. Αν w(A)=a και w(M)=m τότε ο κατάλογος θα ήταν a+m πράγμα που κάνει την έννοια αυτή να συμπεριφέρεται ανάλογα με τις γεννήτριες συναρτήσεις.

Μία σημαντική παρατήρηση είναι η εξής:
Ορίσαμε ότι $f_1 \sim f_2$ αν $\forall\, d \in D$ $f_1[\pi(d)]=f_2(d)$. Αλλά τότε έχουμε αν θέσουμε $|D|=n$

$$W(f_1)= w[\, f_1(d_1)] \cdot w[\, f_1(d_2)] \cdot \ldots w[\, f_1(d_n)] = \prod_{d\in D} \cdot w\left[\, f_1(d)\right]$$

$$w[\, f_1(\pi(d_1))] \cdot w[\, f_1(\pi(d_2))] \cdot \ldots w[\, f_1(\pi(d_n))] = \prod_{d\in D} \cdot w\left[\, f_1(\pi(d\ ))\right]$$

αλλά εφόσον $\pi \in G \subseteq S_n$ τα δύο γινόμενα αυτά είναι ίσα διότι περιέχουν τους ίδιους όρους με διαφορετική σειρά .

Άρα $W(f_1)= \prod_{d\in D} \cdot\left[\, f_1(d\ )\right] = \prod_{d\in D} \cdot\left[\, f_1(\pi(d\ ))\right] = \prod_{d\in D} \cdot\left[\, f_2(d\ )\right] = W(f_2)$

Η προτελευταία ισότητα ισχύει από το γεγονός ότι $f_1 \sim f_2$ και η τελευταία από τον ορισμό του βάρους μίας συνάρτησης. Δείξαμε λοιπόν ότι αν $f_1 \sim f_2$ $\Rightarrow$ $W(f_1)= W(f_2)$.Προφανώς το αντίστροφο δεν ισχύει δηλαδή συναρτήσεις με το ίδιο βάρος μπορεί να ανήκουν σε διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίας.

Ορίζουμε λοιπόν το βάρος μίας κλάσης ισοδυναμίας F σαν το βάρος οποιοσδήποτε συνάρτησης που ανήκει στην κλάση αυτή
$W(F)= W(f)$ για οποιαδήποτε $f \in F$.

Παράδειγμα (συνέχεια).

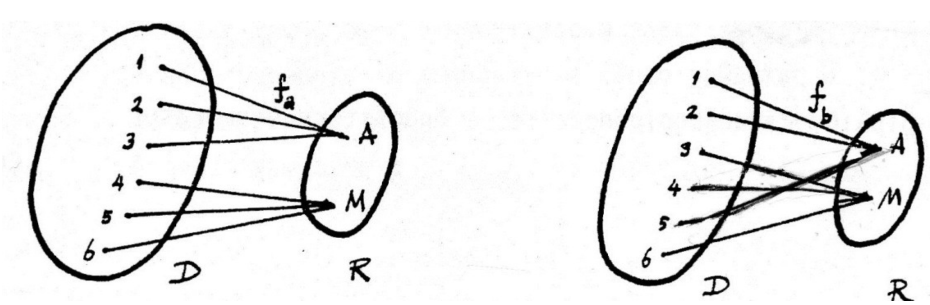
Θέτοντας πάλι w(A)=2, w(M)=1 έχουμε:

$$W(I) = W(f_1) = 2^6=64$$

όπου θέσαμε I την κλάση με αύξοντα αριθμό 1 κ.ο.κ.

$$W(II) = W(f_2)=2^5=32$$

Προσοχή όμως $W(V) = W(f_a)=2^3=8$, $W(VI) = W(f_b)=2^3=8$



αλλά οι δύο συναρτήσεις f_a και f_b δεν είναι ισοδύναμες.

Πράγματι η f_a χρωματίζει με το A 3 έδρες που αποτελούν τρίεδρη γωνία (και άλλες 3 με το Β που αποτελούν επίσης τρίεδρη γωνία) ενώ η f_b χρωματίζει με το Α 3 έδρες που αποτελούν 3 δίεδρες γωνίες (και άλλες τρείς με το Μ).

Ο κατάλογος του συνόλου R^D (που έχει 2^6=64 συναρτήσεις ή χρωματισμούς) είναι εξ ορισμού $\sum_{f\in R^D} W(f)$

Άρα: $1\cdot 2^6+6\cdot 2^5+3\cdot 2^4+12\cdot 2^4+8\cdot 2^3+12\cdot 2^3+12\cdot 2^2+3\cdot 2^2+6\cdot 2^1+1\cdot 2^0=$
$=1\cdot 2^6\cdot 1^0+6\cdot 2^5\cdot 1^1+15\cdot 2^4\cdot 1^2+20\cdot 2^3\cdot 1^3+15\cdot 2^2\cdot 1^4+6\cdot 2^1\cdot 1^5+1\cdot 2^0\cdot 1^6=(2+1)^6=3^6=729$

όπου στην τελευταία γραμμή χρησιμοποιήσαμε το διωνυμικό θεώρημα.

Η σχέση αυτή γενικεύεται και εν γένει ισχύει:

Θεώρημα :

$$\sum_{f\in R^D} W(f) = [\sum_{r\in R} W(r)]^{|D|}$$

Παράδειγμα 3.

Οι μη διατεταγμένες διαμερίσεις του ακεραίου 4 σε 3 το πολύ μέρη είναι

4=4+0+0, 0+4+0, 0+0+4
4=3+1+0 , 3+0+1, 1+3+0, 1+0+3, 0+1+3, 0+3+1
4=2+2+0 , 2+0+2, 0+2+2
4=2+1+1 , 1+2+1, 1+1+2

$$\begin{aligned}\text{Άρα : } (\alpha+\beta+\gamma)^4 &= \binom{4}{400}\alpha^4+\binom{4}{040}\beta^4+\binom{4}{004}\gamma^4+\binom{4}{310}\alpha^3\beta+\binom{4}{130}\alpha\beta^3+\\ &+\binom{4}{301}\alpha^3\gamma+\binom{4}{103}\alpha\gamma^3+\binom{4}{031}\beta^3\gamma+\binom{4}{013}\beta\gamma^3+\\ &+\binom{4}{220}\alpha^2\beta^2+\binom{4}{202}\alpha^2\gamma^2+\binom{4}{022}\beta^2\gamma^2+\binom{4}{211}\alpha^2\beta\gamma+\\ &+\binom{4}{121}\alpha\beta^2\gamma+\binom{4}{112}\alpha\beta\gamma^2=\end{aligned}$$

$=1\cdot\alpha^4+1\cdot\beta^4+1\cdot\gamma^4+4\alpha^3\beta+4\alpha\beta^3+4\alpha^3\gamma+4\alpha\gamma^3+4\beta^3\gamma+4\beta\gamma^3+6\alpha^2\beta^2+$
$+6\alpha^2\gamma^2+6\beta^2\gamma^2+12\alpha^2\beta\gamma+12\alpha\beta^2\gamma+12\alpha\beta\gamma^2$.

Η παραπάνω σχέση προκύπτει από το πολυωνυμικό θεώρημα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ POLYA

Θεωρούμε πάλι το σύνολο D το σύνολο R και μία ομάδα μεταθέσεων του D. Το πρόβλημα μας είναι να βρούμε το πλήθος και γενικότερα τον κατάλογο των κλάσεων ισοδυναμίας των συναρτήσεων από το D στο R. Ο κατάλογος αυτός όπως είδαμε προηγούμενα είναι μία αναπαράσταση όλων των διαφορετικών τρόπων τοποθέτησης |D| αντικειμένων σε |R| θέσεις.

Οι $|R|^{|D|}$ το πλήθος συναρτήσεις κατατάσσονται σύμφωνα με τα βάρη τους. Έστω ότι το σύνολο των συναρτήσεων F_i έχει βάρος W_i.

Τότε σε κάθε μετάθεση $\pi \in G$ αντιστοιχεί μία συνάρτηση $\pi^{(i)}$ του F_i στον εαυτό του που ορίζεται από:

$$\pi^{(i)} : f_1 \in F_i \rightarrow f_2 \in F_i \text{ αν } f_1(d)=f_2[\pi(d)] \ \forall \ d \in D.$$

Προφανώς οι συναρτήσεις f και έχουν το ίδιο βάρος.

Λήμμα 1.

Η συνάρτηση $\pi^{(i)}$ είναι μία μετάθεση του συνόλου συναρτήσεων F_i .

Λήμμα 2.

$$(\pi_1\pi_2)^{(i)} = \pi_1^{(i)}\pi_2^{(i)}$$

Συμβολίζω με $\lambda(g)$ τον αριθμό των κύκλων της μετάθεσης $g \in G$ όπου υπολογίζονται και οι κύκλοι μήκους ένα:

$g=(123)(45)(6)(7) \in S_7$ έχει $\lambda(g)=4$

$g=(1234) \in S_4$ έχει $\lambda(g)=1$

$g=(123)(4)(5) \in S_5$ έχει $\lambda(g)=3$ κ.ο.κ

Το θεώρημα του Pólya αντιμετωπίζει διάφορες περιπτώσεις όπου η χρήση του λήμματος του Burnside είναι δύσκολη ή και πρακτικά αδύνατη όπως όταν το σύνολο D είναι αρκετά μεγάλο οπότε ο προσδιορισμός των στοιχείων του D που μένουν αμετάβλητα από τις μεταθέσεις του G πολύπλοκος. Επίσης το θεώρημα δίνει περισσότερες πληροφορίες από απλά πόσες είναι οι διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίας. Συγκεκριμένα μας δίνει την γεννήτρια συνάρτησή τους. Η απόδειξη στηρίζεται στην εξής παρατήρηση.

Ας χρησιμοποιήσουμε την χρωματική ορολογία δηλαδή ας θεωρήσουμε το σύνολο R σαν ένα σύνολο m χρωμάτων με τα οποία χρωματίζονται τα |D| στοιχεία του D. Έχουμε ότι η καθεμία από τις $|R|^{|D|}$ συναρτήσεις f είναι ένας χρωματισμός.

Θέλουμε λοιπόν η μετάθεση $g^{(i)}$ δηλαδή ο χρωματισμός $g^{(i)}$ να παραμένει σταθερός, αλλά για να συμβεί αυτό πρέπει η αντίστοιχη μετάθεση $g \in G$ να αναλύεται σε κύκλους και οι αριθμοί (στοιχεία του D) που βρίσκονται στον κάθε κύκλο να έχουν το ίδιο χρώμα. Αλλά το πλήθος των διαφορετικών τρόπων για να χρωματιστούν οι λ(g) κύκλοι της μετάθεσης $g \in G$ με m το πλήθος χρώματα έτσι ώστε τα στοιχεία κάθε κύκλου να έχουν το ίδιο χρώμα είναι προφανώς $m^{\lambda(g)}$.

Θεώρημα Pólya :

Η γεννήτρια συνάρτηση των κλάσεων ισοδυναμίας των συναρτήσεων από το **D** στο R ισούται με:

$$P_G\{\left(\sum_{r\in R} w(r)\right), \left(\sum_{r\in R} [w(r)]^2\right), \ldots , \left(\sum_{r\in R} [w(r)]^k\right)\}$$

δηλαδή προκύπτει αν γίνουν οι αντικαταστάσεις

$$\mathbf{x_1} \rightarrow w(r_1) + w(r_2) + \ldots + w(r_{|R|})$$

$$\mathbf{x_2} \rightarrow w^2(r_1) + w^2(r_2) + \ldots + w^2(r_{|R|})$$

$$\mathbf{x_k} \rightarrow w(r_1)^k + w(r_2)^k + \ldots + w(r_{|R|})^k$$

στον κυκλικό δείκτη της ομάδας μεταθέσεων G του D.

Παράδειγμα 1.

Αν εφαρμόσουμε το θεώρημα του Pólya στο παράδειγμα του κύβου θα έχουμε:

D={οι 6 έδρες του κύβου}

R={Χρώμα Α, χρώμα Μ}

G: η ομάδα που δημιουργούν οι περιστροφές του κύβου αλλά

$$\mathbf{P_G(x_1, x_2, x_3, x_4)=}\frac{1}{24}\mathbf{(x_1^6+ 6x_1^2x_4 + 3x_1^2x_2^2 +6x_2^3 +8x_3^2\ )}$$

Άρα

$$\mathbf{P_G(2, 2, 2, 2)=}\ \frac{1}{24}\mathbf{(2^6 +6 \cdot 2^2 \cdot 2\ +3 \cdot 2^2 \cdot 2^2 +6 \cdot 2^3+8 \cdot 2^2\ )=10}$$

Όπως εξαντλητικά είχαμε βρει προηγουμένως.

Πόρισμα.

Το πλήθος των κλάσεων ισοδυναμίας θα ισούται με $P_G(|R|\ , |R|,..,|R|)$.

Απόδειξη.

Αν $w(1)=w(2)=\ldots w(|R|)=1$, δηλαδή όλα τα στοιχεία του R έχουν βάρος 1 τότε το βάρος κάθε κλάσης ισοδυναμίας θα είναι 1.

Ο κατάλογος λοιπόν θα ισούται με το πλήθος των κλάσεων.

Παράδειγμα 2.

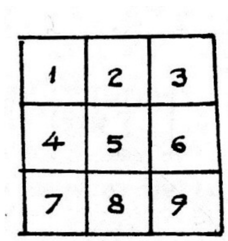
1) Χρωματίζουμε τα 9 τετράγωνα μίας 3x3 σκακιέρας με τα χρώματα R και B.

Να βρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση για τους μη ισοδύναμους χρωματισμούς και το ολικό πλήθος των διαφορετικών χρωματισμών αν

i) οι κατοπτρισμοί της σκακιέρας δεν επιτρέπονται
ii) επιτρέπονται και οι κατοπτρισμοί

Λύση.

i) Έστω η σκακιέρα



Η ομάδα συμμετριών της σκακιέρας αν οι κατοπτρισμοί δεν ληφθούν υπ' όψιν είναι

		Τύπος	**Συμβολή**
Περιστροφή κατά 0^o :	(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)	(9,0,0…)	x_1^9
90^o :	(1379)(5)(2684)	(1,0,0,2)	$x_1\,x_4^2$
180^o :	(19)(28)(37)(46)(5)	(1,4,0)	$x_1x_2^4$
270^o :	(1379)(5)(2684)	(1,0,0,2)	$x_1\,x_4^2$

Άρα $P_G(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \frac{1}{4}\,(x_1^9 + 2x_1x_4^2 + x_1x_2^4)$

Και $P_G(2,2,\ldots) = \frac{1}{4}(2^9+2\cdot2\cdot2^2+2\cdot2^4)=2^7+2^2+2^3=140$

ενώ η αντικατάσταση x_i—» $(R+B)^i$ δίνει

$B^9+3B^8R+10B^7R^2+22B^6R^3+34B^5R^4+34B^4R^5+22B^3R^6+10B^2R^7+3BR^8+R^9$
με άθροισμα συντελεστών 140

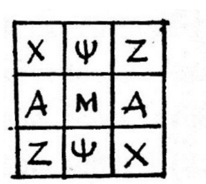
Με λήμμα Burnside: $C_4=\{1,\rho_4,\rho_4^2,\rho_4^3\}$

Όλοι οι δυνατοί χρωματισμοί $2^9=512$

Η ταυτοτική διατηρεί και τους 512 χρωματισμούς

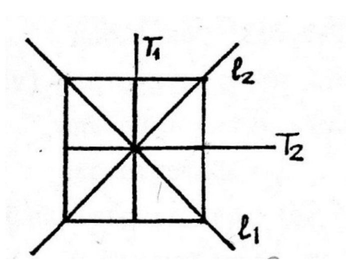
Η ρ_4 (και η ρ_4^3) διατηρεί 2 2 1 1 2 1 1 1 1 $=2^3$ χρωματισμούς

Η ρ_4^2 διατηρεί 2 2 2 2 2 1 1 1 1 $=2^5$ χρωματισμούς



Άρα έχω : $\dfrac{2^9+2\cdot 2^3+2^5}{4}=2^7+2^2+2^3=140$

ii) Επιτρέπονται και οι κατοπτρισμοί



Με λήμμα Burnside: l_1: $\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\\1\,4\,7\,2\,5\,8\,3\,6\,9\end{pmatrix}=(1)(5)(9)(24)(37)(68)$

Παρόμοια και η l_2

$$\tau_1 : \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9 \\ 3\,2\,1\,6\,5\,4\,9\,8\,7 \end{pmatrix} =(13)(46)(2)(5)(8)(79)$$

Παρόμοια και η τ_2

$G=\{1,\rho_4,\rho_4^2,\rho_4^3, \tau_1, \tau_2, l_1, l_2\}$

Η l_1 διατηρεί τους $2\ 2\ 2\ 1\ 2\ 2\ 1\ 1\ 2 = 2^6$

Η τ_1 διατηρεί τους $2\ 2\ 1\ 2\ 2\ 1\ 2\ 2\ 1 = 2^6$

Άρα $\frac{1}{8}\ [2^9+2\cdot 2^3+2^5+2\cdot 2^6+2\cdot 2^6]=102$

(οι 140 ελλατώθηκαν σε 102)

με Polya: Τύπος της l_1 (και της l_2) $x_1^3x_2^3$

τύπος της τ_1 (και της τ_2) $x_1^3x_2^3$

άρα ο κυκλικός δείκτης θα έχει ακόμα τον προσθετέο $4\ x_1^3x_2^3$.

Η γεννήτρια συνάρτηση θα έχει και τον προσθετέο $4(R+B)^3(R^2+B^2)^3$

Δηλαδή θα είναι

$B^9+3B^8R+8B^7R^2+16B^6R^3+23B^5R^4+23B^4R^5+16B^3R^5+8B^2R^7+3BR^8+R^9$.

με άθροισμα συντελεστών 102.

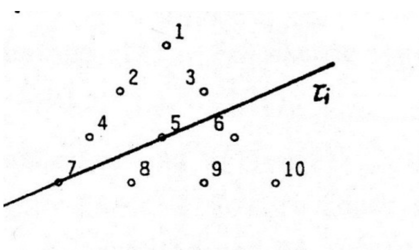
Παράδειγμα 3.

Σχηματίζουμε με 10 μπάλες ένα ισόπλευρο τρίγωνο με 1 μπάλα στην πρώτη γραμμή 2 στην δεύτερη 3 στην τρίτη και 4 στην τέταρτη.

Να βρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση για τους μη ισοδύναμους χρωματισμούς με τα χρώματα R, B αν i) δεν επιτρέπονται οι κατοπτρισμοί και ii) επιτρέπονται κατοπτρισμοί.

Λύση:

i)



$$\rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 6 & 9 & 3 & 5 & 8 & 1 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} = (1\,10\,7)(2\,6\,8)(3\,9\,4)(5)$$

παρόμοια η $\rho_3^{\,2}$

κυκλικός δείκτης $\frac{1}{3}(\,x_1^{10}+2x_1x_3^{\,3}\,)$

γεννήτρια συνάρτηση $R^{10}+4R^9B+15R^8B^2+41R^7B^3+72R^6B^4+$

$+84R^5B^5+72R^4B^6+41R^3B^7+15R^2B^8+4RB^9+B^{10}$

άθροισμα συντελεστών 352.

ii) θα υπάρχει και μεταθέσεις τ_1 , τ_2 , τ_3 όπου

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10 \\ 10\ 9\ 6\ 8\ 5\ 3\ 7\ 4\ 2\ 1 \end{pmatrix} = (1 10)\ (2 9)\ (3 6)\ (4 8)(5)\ (7)$$

τύπου (2,4,0,0...)

παρόμοια δρουν και οι τ_2 ,τ_3.

Ο κυκλικός δείκτης θα είναι $\frac{1}{6}(x_1^{10}+2x_1x_3^{3}+3x_1^{2}x_2^{4})$ που δίνει τη γεννήτρια συνάρτηση

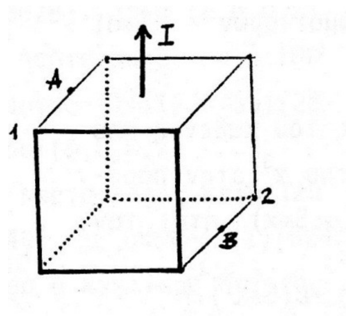
$R^{10}+3R^9B+10R^8B^2+25R^7B^3+41R^6B^4+48R^5B^5+41R^4B^6+25R^3B^7+$
$10R^2B^8+3RB^9+B^{10}$ με άθροισμα συντελεστών 208.

Παράδειγμα 4

Έστω D το σύνολο των 6 εδρών ενός κύβου, και έστω G η ομάδα G όλων των δυνατών περιστροφών του κύβου.

i) Ποιός ο κυκλικός δείκτης της G
ii) Αν οι 6 έδρες χρωματιστού με διαφορετικά χρώματα πόσοι διαφορετικοί χρωματισμοί υπάρχουν;
iii) Αν ένα από τα 6 χρώματα είναι το R πόσοι διαφορετικοί χρωματισμοί υπάρχουν με ακριβώς 3 έδρες χρώματος R;
iv) Αν έχουμε 4 Χρώματα A, B, C, D πόσοι χρωματισμοί υπάρχουν με 2 έδρες χρώματος A, 2B,1C, 1D;

Λύση



Οι περιστροφές του κύβου δρουν στο σύνολο των εδρών.

i) η ταυτοτική τύπου (6,0,0...)

ii) 3 περιστροφές κατά 180° περί τον άξονα Ι που διέρχεται από το κέντρο δύο απέναντι εδρών:

Δύο έδρες σταθερές, οι υπόλοιπες 4 αναλύονται σε δύο 2-κύκλους άρα τύπος: (2,2,0...)

iii) 6 περιστροφές (3 κατά 90° 3 κατά 270°) περί τον ίδιο άξονα:

Δύο έδρες σταθερές οι υπόλοιπες 4 σχηματίζουν έναν 4-κύκλο άρα τύπος (2,0,0,1)

iv) Περιστροφή κατά 180° περί άξονα που διέρχεται από τα μέσα δύο απέναντι ακμών. Υπάρχουν 6 ζεύγη απέναντι ακμών άρα 6 τέτοιες περιστροφές.

Η περιστροφή περί τον άξονα ΑΒ απεικονίζει κάθε έδρα στην απέναντι της άρα αναλύεται σε τρείς 2-κύκλους και ο τύπος της είναι (0,3,0...).

v) Περιστροφές κατά 120° και 240° περί άξονες που διέρχονται από δύο απέναντι κορυφές. Έχουμε 4 τέτοιους άξονες όπως ο 12 άρα 8 τέτοιες περιστροφές. Η περιστροφή κατά 120° περί τον άξονα 12 δημιουργεί δύο 3-κύκλους (ο ένας αποτελείται από τις 3 έδρες της τριέδρου με κορυφή 1 και ο άλλος από τις 3 έδρες της τριέδρου με κορυφή 2) και ο τύπος είναι (0,0,2...).

Ο κυκλικός δείκτης είναι λοιπόν

$$\mathbf{P_G = \frac{1}{24}\,(x_1^6 + 6x_1^2x_4 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_2^3 + 8x_3^2)}$$

ii)από το λήμμα του Burnside θα πρέπει να υπολογίσουμε πόσες από τις μεταθέσεις αυτές αφήνουν αμετάβλητους τους 6!=720 δυνατούς χρωματισμούς των εδρών του κύβου με 6 χρώματα.

Η ταυτοτική αφήνει και τους 720 χρωματισμούς αμετάβλητους. Όλες οι άλλες περιστροφές εφόσον κάθε έδρα έχει διαφορετικό χρώμα δεν αφήνουν αμετάβλητο κανένα χρωματισμό.

Άρα το πλήθος των διαφορετικών χρωματισμών είναι

$$\frac{1}{24}(720+0+\ldots+0)=30.$$

iii)Έστω x το βάρος του χρώματος R και I το βάρος του καθενός από τα 5 άλλα χρώματα. Θα βρούμε τον συντελεστή του x^3 στην παράσταση που προκύπτει από την αντικατάσταση $x_i \rightarrow (5+x)^i$ δηλαδή την

$$\frac{1}{24}[(5+x)^6+6(5+x)^2(5+x^4)+3(5+x)^2(5+x^2)^2+6(5+x^2)^3+8(5+x^3)^2]$$

ο συντελεστής του x^3 είναι λοιπόν

$$\frac{1}{24}[\binom{6}{3}\cdot 5^3+3\cdot 10\cdot 2\cdot 5+0+0+8\cdot 2\cdot 5]=120.$$

iv)Θέλουμε το συντελεστή του όρου $x^2y^2z\omega$ αν x,y,z,ω τα βάρη των χρωμάτων A,B,C,D αντίστοιχα.

η γεννήτρια συνάρτηση είναι αν θέσουμε $x_i \rightarrow (x+y+z+\omega)^i$

$$\frac{1}{24}[(x+y+z+\omega)^6+3(x+y+z+\omega)^2(x^2+y^2+z^2+\omega^2)^2+6(x+y+z+\omega)^2(x^4+y^4+z^4+\omega^4)$$

$$+6(x^2+y^2z^2+\omega^2)^3+8(x^3+y^3+z^3+\omega^3)^2]$$

ο συντελεστής του $x^2y^2z\omega$ είναι από τον *1ον* προσθετέο $\binom{6}{2211}$ από τον *2ο* προσθετέο $3(\ldots+2z\omega+\ldots)(\ldots+2x^2y^2+\ldots)=3\cdot 2\cdot 2$ από τους υπόλοιπους προσθετέους

Άρα ο συντελεστής του $x^2y^2z\omega$ είναι συνολικά

$$\frac{1}{24}(180+12+0)=8.$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Biggs N. "Discrete Mathematics" Clarendon Oxford (1985)
- Bollobas B. "Graph theory : An Introductory Course" Springer Verlag (1979)
- Cohen D. "Basic Techniques of Combinatorial theory" John Wiley and Sons (1978)
- Liu C.L. " Introduction to Combinatorial theory" Mac Graw-Hill (1968)
- Polya G. "Kombinatorische Anzahlbestimmungen fur Gruppen, Graphen und Chemische Verbindungen" Acta Math. (68) (1937)
- Polya G., Read R. "Combinatorial Enumeration of groups, graphs and Chemical Compounds" Springer Verlag (1987)
- Redfield J. H. "The theory of group – reduced distributions" Amer J. Math. 49 (1927)
- Balakrishnan V.K "Combinatorics Schaum's outline series" Mc Graw Hill (1997)
- Παπαϊωάννου Α. "Διακριτά Μαθηματικά" Αθήνα (1992)