



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

ΔΥΟ ΣΥΖΕΥΓΜΕΝΩΝ ΤΑΛΑΝΤΩΤΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ CSP

(COMPUTATIONAL SINGULAR PERTURBATION)

Συγγραφέας  
Κυριάκος Π. Πουλημενάκος

Επιβλέπων Καθηγητής  
Δημήτριος Α. Γκούσης

Παρίσι, 2013

.....

Κυριάκος Π. Πουλημενάκος  
Διπλωματούχος Ναυπηγός Μηχανολόγος Μηχανικός

Copyright Κυριάκος Πουλημενάκος, 2013  
Με επιφύλαξη παντός νόμιμου δικαιώματος. All rights reserved

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσης εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσεως, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται στο συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται στο έγγραφο αυτό εκφράζουν το συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου

## Ευχαριστίες

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους όσους συντέλεσαν στην πραγματοποίηση αυτής της διπλωματικής, τον υποψήφιο διδάκτορα Παναγιώτη Κουρδή, τους Σκλάβο Σπύρο, Βαλσαμά Μιχάλη, Ανδρέα Οργέτα και ιδιαίτερα τους επιβλέποντες καθηγητές μου Δημήτριο Α. Γκούση και Ιωάννη Τ. Γεωργίου για την εμπιστοσύνη που μου έδειξαν, για την πολύτιμη βοήθειά τους, την καθοδήγησή τους και τελικά την πραγματικά μεγάλη υπομονή τους.

## Περίληψη

Στη φύση υπάρχουν συστήματα τα οποία χαρακτηρίζονται από την ύπαρξη αργών και γρήγορων χρονοκλιμάκων. Όταν οι γρήγορες χρονοκλίμακες είναι αποσβετικές, οπότε εξαντλούνται πολύ σύντομα, τότε τα συστήματα αυτά ονομάζονται δύσκαμπτα (stiff). Η εξάντληση των γρήγορων χρονοκλιμάκων σηματοδοτεί την ανάπτυξη διάφορων εξισορροπήσεων μεταξύ των συνιστωσών του συστήματος και την δυνατότητα περιγραφής της εξέλιξης του φαινομένου από ένα απλοποιημένο αργό (non-stiff) σύστημα. Παραδοσιακά, η κατάστρωση του απλοποιημένου συστήματος γίνονταν με τη βοήθεια των ασυμπτωτικών μεθόδων, οι οποίες είναι χρήσιμες για σχετικά απλά συστήματα. Η χρήση των μεθόδων αυτών βοηθά στην απλοποίηση των συστημάτων και στη καλύτερη κατανόηση των φυσικών διεργασιών που μοντελοποιούνται.

Τελευταία, σε αντικατάσταση των παραδοσιακών ασυμπτωτικών μεθόδων, έχουν αρχίσει να χρησιμοποιούνται αλγοριθμικές ασυμπτωτικές μέθοδοι, οι οποίες προσεγγίζουν τον γρήγορο και αργό υποχώρο του εφαπτομενικού χώρου (tangent space) των φάσεων, στους οποίους δρουν οι γρήγορες και αργές, αντίστοιχα, χρονοκλίμακες. Όταν εξαντλούνται οι γρήγορες χρονοκλίμακες, η λύση εξελίσσεται στον αργό υποχώρο όπου κυριαρχούν οι αργές χρονοκλίμακες, σύμφωνα με το απλοποιημένο σύστημα (ΑΣ). Ο χώρος αυτός καλείται αργή αναλλοίωτη πολλαπλότητα (ΑΑΠ) (Slow Invariant Manifold / SIM).

Στη συγκεκριμένη εργασία θα χρησιμοποιηθεί η τροποποιημένη αλγοριθμική μέθοδος CSP (Computational Singular Perturbation), η οποία προσδιορίζει με μεγάλη ακρίβεια την ΑΑΠ και το ΑΣ, μέσω της διαδικασίας των επαναλήψεων (refinements) όπου επαναπροσδιορίζονται τα διανύσματα βάσης που παράγουν τους γρήγορους και αργούς υποχώρους, όπου δρουν αντίστοιχα οι γρήγορες και οι αργές χρονοκλίμακες.

Το πρόβλημα που θα μας απασχολήσει είναι ένα μη-γραμμικό δύσκαμπτο σύστημα δύο συζευγμένων ταλαντωτών. Ένα τέτοιο σύστημα μπορεί να μοντελοποιήσει διάφορα προβλήματα της μηχανικής, ταλαντωτικής φύσεως, με μη-γραμμική ταλαντωτική συμπεριφορά. Στη παρούσα εργασία θα προσδιοριστεί ο αργός και ο γρήγορος υπόχωρος με τη βοήθεια της τροποποιημένης μεθόδου CSP και θα κατασκευαστεί η ΑΑΠ. Η ακρίβεια της ΑΑΠ θα επιβεβαιωθεί με την παρακολούθηση της πορείας διαφόρων λύσεων του συστήματος.

## Abstract

In nature there are systems which are characterized by the existence of slow and fast time scales. When the fast time scales are of dissipative nature and consequently they are exhausted very soon, these systems are called stiff. The fact that the fast time scales are exhausted leads to the development of several equivalences among the various processes of the system and enables us to describe the evolution of the phenomenon by a simplified non stiff system. Traditionally the formulation of the simplified system was done with the asymptotic methods which are useful for relatively simple systems. The use of these methods helps in the simplification of the systems and in the better understanding of the natural processes which are modeled.

Nowadays in replacement of the traditional methods, algorithmic methods are used, which are defining the fast and slow subspace of the tangent space of faces in which the fast and slow timescales act. When the fast timescales are exhausted the solution evolves in the slow subspace, where the slow timescales are dominant, according to the simplified system (SM). This space is called Slow Invariant Manifold (SIM)

In this work the modified algorithmic method CSP (Computational Singular Perturbation) will be used, which can define the SIM and the SM with big accuracy through the procedure of refinements. This procedure redefines the base vectors which produce the fast and slow subspaces, where the fast and slow timescales evolve.

The problem that we are going to deal with is a non-linear stiff system of two coupled oscillators. Such a system can model various engineering problems of oscillatory nature with non-linear oscillating behaviour. In the present work the slow and the fast subspaces will be defined with the use of the modified method CSP and the SIM will be described. The accuracy of the SIM will be guaranteed by the follow up of the evolution of the solutions of the system.



# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Ο Αλγόριθμος CSP</b>	<b>17</b>
2.1	Περιγραφή του αλγορίθμου . . . . .	17
2.2	Βασικά σημεία της μεθόδου . . . . .	18
2.3	Τροποποιημένη μέθοδος CSP . . . . .	19
2.3.1	Περιγραφή της ΑΑΠ . . . . .	19
2.3.2	Ο Αλγόριθμος ΙΕ . . . . .	21
2.3.3	Κατασκευή της ΑΑΠ και του ΑΣ με χρήση του πίνακα $\mathbf{G}_s^r$ (Τροποποιημένη μέθοδος CSP) . . . . .	22
2.3.4	Ισοδυναμία των δύο μεθόδων (CSP και τροποποιημένη CSP) . . . . .	23
2.3.5	Υπολογισμός του πίνακα $\mathbf{G}_s^r$ . . . . .	24
2.3.6	Υπολογισμός του πίνακα $\mathbf{R}_r^s$ . . . . .	25
2.3.7	Χρήση του pointer για την εκλογή των γρήγορων μεταβλητών . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Σύστημα δύο Συζευγμένων Ταλαντωτών</b>	<b>27</b>
3.1	Περιγραφή του προβλήματος . . . . .	27
3.2	Προσδιορισμός Παραμέτρων . . . . .	27
3.2.1	Σταθερές ελατηρίων $k, k_1, k_2$ . . . . .	27
3.2.2	Μάζες $m_2, m_1$ . . . . .	28
3.2.3	Συχνότητες $\omega_1, \omega_2$ . . . . .	28
3.2.4	Αποσβεστήρες . . . . .	28
3.2.5	Γεωμετρία . . . . .	28
3.2.6	Εξωτερική Φόρτιση $F_1$ . . . . .	28
3.2.7	Τιμές παραμέτρων $p_i$ . . . . .	29
3.3	Σύνδεση των τιμών των παραμέτρων $m_1, m_2, k_1, k_2$ με τα συστήματα που μοντελοποιούνται . . . . .	29
3.4	Αρχικές συνθήκες . . . . .	30
3.5	Μαθηματική μοντελοποίηση του Προβλήματος . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Διερεύνηση</b>	<b>33</b>
4.1	Έλεγχος ιδιοτιμών Ιακωβιανής . . . . .	33
4.1.1	Γενικά . . . . .	33
4.1.2	Αρχικό πρόβλημα . . . . .	34
4.1.3	Περίπτωση 1 . . . . .	34
4.1.4	Περίπτωση 2 . . . . .	35
4.1.5	Περίπτωση 3 . . . . .	35
4.1.6	Περίπτωση 4 . . . . .	36
4.1.7	Συμπέρασμα . . . . .	37
4.2	Σύγκριση των Περιπτώσεων 1,2,3 . . . . .	42

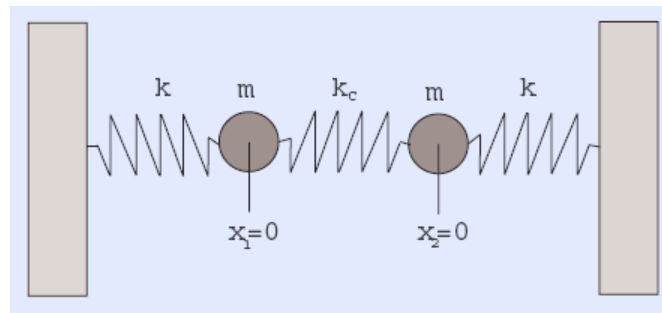
4.2.1	Γενικά . . . . .	42
4.2.2	Αρχικό πρόβλημα . . . . .	43
4.2.3	Περίπτωση 1 . . . . .	44
4.2.4	Περίπτωση 2 . . . . .	48
4.2.5	Περίπτωση 3 . . . . .	51
4.2.6	Εκλογή Περίπτωσης . . . . .	55
<b>5</b>	<b>Υπολογισμός της ΑΑΠ</b>	<b>59</b>
5.1	Γενικά . . . . .	59
5.2	Χώρος φάσεων: $(x_3, x_4, x_1)$ . . . . .	61
5.2.1	ΑΑΠ $\mathbf{F}^{r1} = 0$ και $\mathbf{F}^{r2} = 0$ (refinement) . . . . .	61
5.3	Χώρος φάσεων: $(x_3, x_4, x_2)$ . . . . .	66
5.3.1	ΑΑΠ $\mathbf{F}^{r1} = 0$ και $\mathbf{F}^{r2} = 0$ (refinement) . . . . .	66
5.4	Συμπέρασμα . . . . .	71
<b>6</b>	<b>ΑΑΠ και ακριβής λύση</b>	<b>73</b>
6.1	Γενικά . . . . .	73
6.2	Χώρος φάσεων: $(x_3, x_4, x_1)$ . . . . .	74
6.2.1	ΑΑΠ $\mathbf{F}^{r1} = 0, \mathbf{F}^{r2} = 0$ (refinement) και ακριβής λύση . . . . .	74
6.2.2	Σύγκριση ΑΑΠ $\mathbf{F}^{r1} = 0$ και ακριβούς λύσης . . . . .	76
6.2.3	Σύγκριση ΑΑΠ $\mathbf{F}^{r2} = 0$ (refinement) και ακριβούς λύσης . . . . .	77
6.3	Χώρος φάσεων: $(x_3, x_4, x_2)$ . . . . .	78
6.3.1	ΑΑΠ $\mathbf{F}^{r1} = 0, \mathbf{F}^{r2} = 0$ (refinement) και ακριβής λύση . . . . .	78
6.3.2	Σύγκριση ΑΑΠ $\mathbf{F}^{r1} = 0$ και ακριβούς λύσης . . . . .	80
6.3.3	Σύγκριση ΑΑΠ $\mathbf{F}^{r2} = 0$ (refinement) και ακριβούς λύσης . . . . .	81
6.4	Συμπέρασμα . . . . .	82
<b>7</b>	<b>Πρακτικές εφαρμογές</b>	<b>83</b>
7.1	Γενικά . . . . .	83
7.2	Σύνδεση συστημάτων με την Περίπτωση 3 . . . . .	83
<b>8</b>	<b>Επίλογος</b>	<b>85</b>
	<b>Α΄ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ</b>	<b>87</b>



# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με συστήματα συζευγμένων ταλαντωτών. Λέγοντας σύστημα συζευγμένων ταλαντωτών εννοούμε στην πιο απλή του μορφή δύο ταλαντωτές, όπου ο κάθε ένας έχει μάζα  $m$  και σταθερά ελατηρίου  $k$ , οι οποίοι συνδέονται μέσω ενός τρίτου ταλαντωτή με σταθερά ελατηρίου  $k_c$  όπως φαίνεται στο Σχ. 1.



Σχήμα 1. Σύστημα δύο συζευγμένων ταλαντωτών.

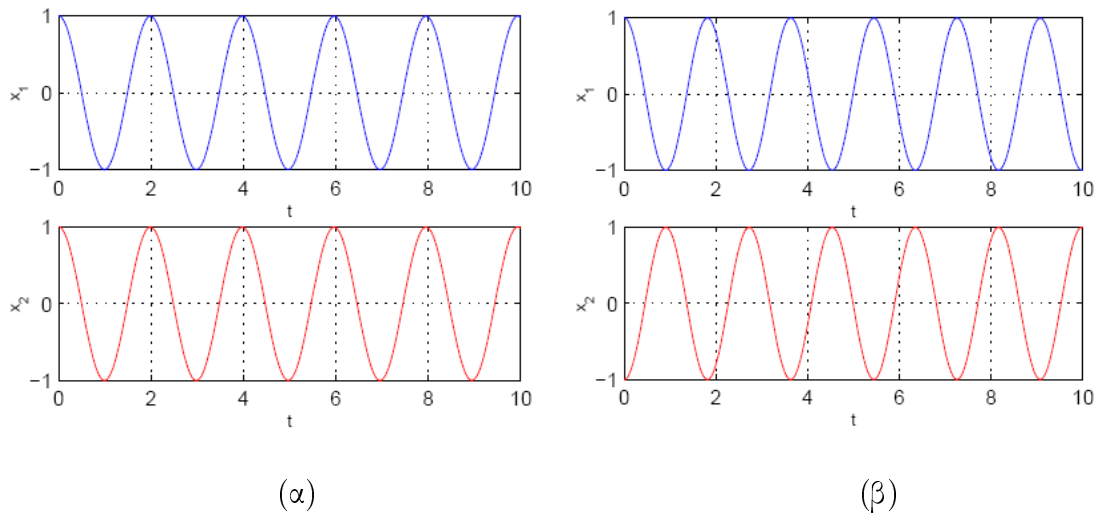
Στη φύση υπάρχουν πολλά φαινόμενα τα οποία μπορούν να μοντελοποιηθούν με ένα σύστημα δύο συζευγμένων ταλαντωτών [3], [4], [5], [15], όπως στο χώρο της ανθρωπολογίας το περπάτημα του ανθρώπου, στο χώρο της μηχανικής ένας κινητήρας που είναι εδρασμένος μέσω ελαστικού συνδέσμου σε ένα πλοίο ή σε ένα αυτοκίνητο, στο χώρο της ναυπηγικής το αξονικό σύστημα (άξονας - προπέλα) ενός πλοίου, ή η μεταλλική κατασκευή ενός πλοίου η οποία αποτελείται από ενισχυτικά τα οποία υποστηρίζονται από ενισχυμένους δοκούς.

Ο τρόπος με τον οποίο θα κινηθούν οι δύο συζευγμένοι ταλαντωτές εξαρτάται από τη σχετική τους θέση κατά την έναρξη του φαινομένου [6], [7].

Υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις:

1) Αν οι αρχικές μετατοπίσεις είναι ίδιες κατά μέτρο και φορά, οι δύο ταλαντωτές κινούνται συμμετρικά πετυχαίνοντας ταυτόχρονα τα μέγιστα πλάτη. Σχ. 2(α)

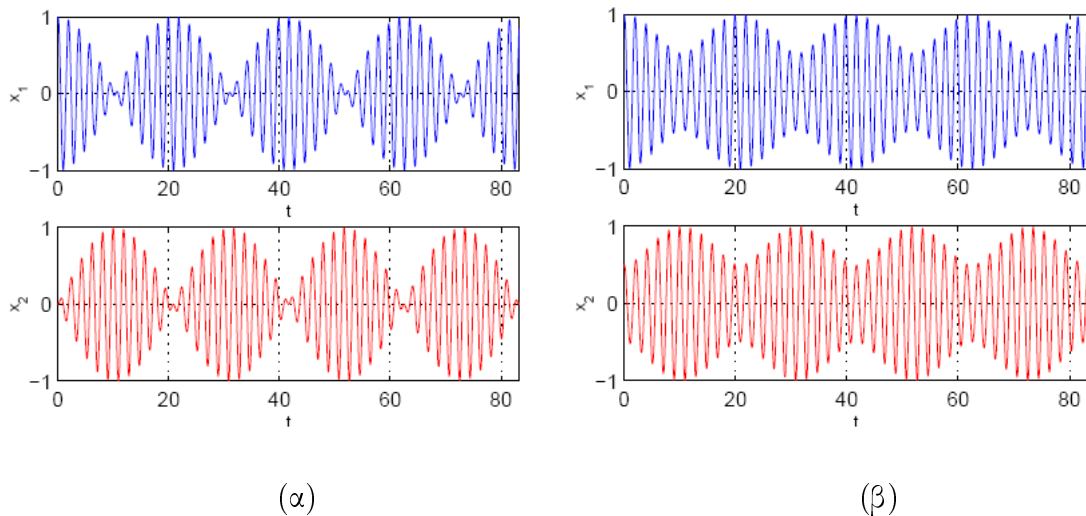
2) Αν οι αρχικές μετατοπίσεις είναι ίδιες κατά μέτρο αλλά αντίθετες κατά φορά, οι δύο ταλαντωτές κινούνται αντισυμμετρικά πετυχαίνοντας ταυτόχρονα μέγιστα αλλά αντίθετα πλάτη. Σχ. 2(β)



Σχήμα 2. Κίνηση δύο ταλαντωτών (α) με ίδιες και (β) αντίθετες αρχικές μετατοπίσεις.

3) Αν ο ένας ταλαντωτής ξεκινά με αρχική μετατόπιση ενώ ο άλλος βρίσκεται στη θέση ισορροπίας, τότε κατά την ταλάντωση όταν ο ένας πετυχαίνει το μέγιστο πλάτος ο άλλος βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του. Σχ. 3(α)

4) Αν τώρα ξεκινήσουν και οι δύο με κάποια αρχική αλλά διαφορετική μετατόπιση, τότε κατά την ταλάντωση εναλλάσσονται γύρω από αυτές τις μετατοπίσεις. Σχ. 3(β)



Σχήμα 3. Κίνηση δύο ταλαντωτών με (α) μηδενική για τον ένα και μη μηδενική για τον άλλο αρχική μετατόπιση και (β) διαφορετικές μη μηδενικές αρχικές μετατοπίσεις για κάθε ένα.

Εάν το πρόβλημα είναι γραμμικό μπορεί να βρεθεί η αναλυτική έκφραση της λύσης μέσω του καθορισμού των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων του συστήματος. Εάν το πρόβλημα είναι μη γραμμικό η λύση βρίσκεται μέσω αριθμητικής επίλυσης του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων.

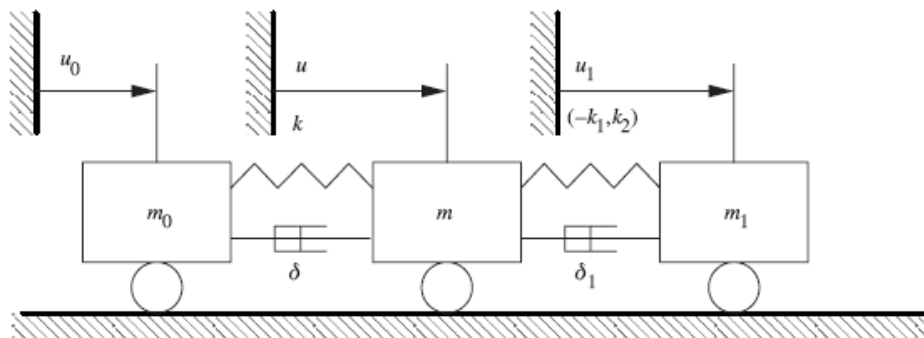
Συνήθως αυτά τα προβλήματα χαρακτηρίζονται από την ύπαρξη πολλαπλών χρονοκλιμάκων, κάποιες από τις οποίες είναι γρήγορες και κάποιες άλλες αργές. Εάν οι γρήγορες χρονοκλίμακες είναι αποσβετικές, τότε εξαντλούνται πολύ πιο γρήγορα από τις αργές και αναπτύσσεται ένας αριθμός εξισορροπήσεων μεταξύ των διάφορων διαδικασιών του προβλήματος ο αριθμός των οποίων είναι ίσος με τον αριθμό των γρήγορων χρονοκλιμάκων. Οι πιο γνωστοί τύποι αυτών των εξισορροπήσεων είναι η QSSA (Quasi-Steady State Approximation) η οποία σχετίζεται με τα στοιχεία

του διανύσματος που περιγράφει το πρόβλημα και η PEA (Partial Equilibration Approximation) η οποία σχετίζεται με τις φυσικές διαδικασίες που μοντελοποιούνται. Ένα τέτοιο πρόβλημα λέγεται δύσκαμπτο [1], [2], [12], [16] και η λύση του μπορεί να υπολογιστεί με τη βοήθεια της QSSA, της PEA, ή της ασυμπτωτικής ανάλυσης και ειδικά της μεθόδου των ιδιόμορφων διαταραχών.

Με τη βοήθεια των μεθόδων αυτών, εκμεταλλευόμενοι το γεγονός ότι οι γρήγορες αποσβετικές χρονοκλίμακες εξαντλούνται πολύ γρήγορα, μπορούμε να προσδιορίσουμε ένα χώρο λύσεων μικρότερης διάστασης ο οποίος ονομάζεται αργή αναλλοίωτη πολλαπλότητα (ΑΑΠ) (Slow Invariant Manifold / SIM), καθώς επίσης και το απλοποιημένο αργό σύστημα (ΑΣ) των εξισώσεων που προσδιορίζει την κίνηση της λύσης στο χώρο αυτό [1], [16]. Αυτός είναι ένας τρόπος με τον οποίο μπορούμε να προσπαθήσουμε να λύσουμε μεγάλα και σύνθετα συστήματα απλοποιώντας τα μέσω της ελάττωσης του αριθμού των μεταβλητών. Επίσης με τις μεθόδους αυτές μπορούμε να κατανοήσουμε καλύτερα τη φυσική του προβλήματος προσδιορίζοντας τις διαδικασίες που συμμετέχουν στο σχηματισμό της ΑΑΠ και του ΑΣ και τις μεταβλητές που συνδέονται με τις αργές και γρήγορες χρονοκλίμακες.

Προκειμένου να εφαρμόσουμε τις παραπάνω παραδοσιακές ασυμπτωτικές μεθόδους, το αρχικό σύστημα εξισώσεων πρέπει να γραφεί σε αδιάστατη μορφή, να προσδιοριστεί ο αριθμός των γρήγορων χρονοκλιμάκων, να διαχωριστούν οι αργές από τις γρήγορες μεταβλητές στο διάνυσμα που περιγράφει το πρόβλημα και να προσδιοριστεί η μικρή παράμετρος  $\varepsilon$  η οποία είναι ο λόγος της πιο αργής από τις γρήγορες προς την πιο γρήγορη από τις αργές χρονοκλίμακες και είναι ενδεικτική του κενού μεταξύ γρήγορων και αργών χρονοκλιμάκων του συστήματος. Κάτι τέτοιο όμως για μεγάλα και σύνθετα συστήματα, τα οποία κυρίως μας ενδιαφέρουν, είναι πρακτικώς αδύνατο.

Στην εργασία των Georgiou, Schwartz [16] αναλύεται η διάταξη των δύο ταλαντωτών που φαίνεται στο Σχ.4, η οποία μοντελοποιεί μια δύσκαμπτη κατασκευή που αποτελείται από ένα εύκαμπτο μη γραμμικό ταλαντωτή  $m_1$  και έναν άκαμπτο γραμμικό  $m$ . Παραδείγματα τέτοιων κατασκευών είναι το σύστημα ενός περιστρεφόμενου άξονα πάνω σε μια βισκοελαστική έδραση ή το σύστημα έλικα-άξονας ενός πλοίου. Όταν η κίνηση του συστήματος εξαρτάται από μια αργά μεταβαλλόμενη συνιστώσα και από μια γρήγορα μεταβαλλόμενη συνιστώσα η οποία εξαντλείται πολύ σύντομα ο υπολογισμός της λύσης αυτού του συστήματος γίνεται με τη βοήθεια της ασυμπτωτικής ανάλυσης και πιο συγκεκριμένα μέσω της ανάλυσης ιδιόμορφων διαταραχών.



**Σχήμα 4.** Μη γραμμικός ταλαντωτής μάζας  $m_1$  συνδεδεμένος με ένα γραμμικό ταλαντωτή μάζας  $m$ .

Με τη βοήθεια της ανάλυσης ιδιόμορφων διαταραχών προσδιορίζουμε ένα σύστημα εξισώσεων η λύση του οποίου καταλήγει σε μια ελκτική αμετάβλητη πολλαπλότητα, γνωστή ως ΑΑΠ. Αυτή

είναι ένας υποχώρος του χώρου των φάσεων που περιλαμβάνει τις αργές συνιστώσες του συστήματος.

Ένας άλλος τρόπος ασυμπτωτικής ανάλυσης του προβλήματος είναι με τη χρήση της αλγοριθμικής μεθόδου CSP (Computational Singular Perturbation) [1], [2], [8], [12], η οποία λόγω της αλγοριθμικής φύσης της μπορεί να προσδιορίσει την ΑΑΠ και το ΑΣ για μεγάλα και σύνθετα μαθηματικά μοντέλα, παρέχοντάς μας μεγαλύτερη ακρίβεια από τις κλασικές μεθόδους που αναφέρθηκαν πιο πάνω. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω του ορισμού των διανυσμάτων που προσεγγίζουν τον αργό και γρήγορο υποχώρο και τον επαναπροσδιορισμό (refinement) των διανυσμάτων αυτών. Η ακρίβεια της μεθόδου εξαρτάται από τον αριθμό των επαναλήψεων (refinement), καθώς επίσης και από το μέγεθος του κενού  $\epsilon$  που παρουσιάζεται μεταξύ των αργών και γρήγορων χρονοκλιμάκων, το οποίο ορίζεται ως η απόσταση μεταξύ της πιο αργής από τις γρήγορες χρονοκλίμακες και των αργών χρονοκλιμάκων οι οποίες ταυτίζονται.

Στην εργασία των Gousis, Valorani [12] αναπτύσσεται η τροποποιημένη μέθοδος CSP. Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται σε δύσκαμπτα συστήματα τα οποία χαρακτηρίζονται από την ύπαρξη αργών και γρήγορων αποσβετικών χρονοκλιμάκων οι οποίες εξαντλούνται γρήγορα, αφήνοντας τις αργές να προσδιορίσουν την εξέλιξη του φαινομένου. Τότε όπως μπορούμε να δούμε στις εργασίες των Kourdis, Steuer, Gousis, Valorani [2], [8], [12] η εξάντληση των γρήγορων χρονοκλιμάκων μας δίνει τη δυνατότητα να προσδιορίσουμε αλγοριθμικά με τη βοήθεια της μεθόδου CSP την ΑΑΠ, καθώς επίσης και το ΑΣ το οποίο περιγράφει την κίνηση της λύσης πάνω στην ΑΑΠ.

Έτσι απλοποιούμε το δύσκαμπτο σύστημα αφού έχουμε μικρότερο αριθμό αγνώστων και δουλεύουμε σε ένα χώρο χωρίς γρήγορες χρονοκλίμακες. Επίσης το ΑΣ μας δίνει τη δυνατότητα να προσδιορίσουμε τη λύση του αρχικού μοντέλου, πράγμα το οποίο δεν είναι πάντα δυνατό με την ασυμπτωτική ανάλυση, ιδίως όταν έχουμε μεγάλα και σύνθετα μοντέλα. Τέλος ο προσδιορισμός των φυσικών διαδικασιών, όπως είναι η φύση των εξισορροπήσεων οι οποίες μας περιγράφουν την ΑΑΠ, καθώς επίσης ο προσδιορισμός των κυρίαρχων εξισορροπήσεων που μας οδηγεί στη διαμόρφωση του ΑΣ, μας βοηθούν στην καλύτερη φυσική κατανόηση και ερμηνεία του προβλήματος.

Η τροποποιημένη μέθοδος CSP είναι πιο ακριβής σε σχέση με την μέθοδο CSP στον προσδιορισμό της ΑΑΠ και του ΑΣ ιδίως στις περιπτώσεις όπου η ΑΑΠ έχει πολύ μικρή διάσταση, δηλαδή όπου έχουμε σημαντική απλοποίηση του συστήματος. Η διαφορά σε σχέση με την αρχική μέθοδο CSP είναι ότι προκειμένου να ξεκινήσουμε πρέπει να προσδιορίσουμε τις γρήγορες μεταβλητές, πράγμα το οποίο μπορεί να γίνει με τη βοήθεια του CSP pointer.

Στήν εργασία του Ασβεστά [1] υπολογίζεται για το σύστημα των δύο ταλαντωτών που φαίνεται στο Σχ.4 η ακριβής λύση και η ΑΑΠ με τη βοήθεια της ασυμπτωτικής ανάλυσης και της μεθόδου CSP βάση του γεγονότος ότι το σύστημα χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη αργών και γρήγορων αποσβετικών χρονοκλιμάκων οι οποίες εξαντλούνται πολύ σύντομα. Παρατηρούμε πως η ΑΑΠ που προκύπτει από την ασυμπτωτική ανάλυση δεν ταυτίζεται απόλυτα με την ΑΑΠ που προσδιορίζεται με τη μέθοδο CSP. Κατόπιν συγκρίνονται οι τρεις λύσεις όπου φαίνεται πως η ακριβής λύση πέφτει επάνω στην ΑΑΠ που προσδιορίστηκε με τη μέθοδο CSP, πράγμα το οποίο σημαίνει πως η μέθοδος αυτή προσεγγίζει την ΑΑΠ με μεγαλύτερη ακρίβεια.

Αυτό οφείλεται στο ότι στη μέθοδο CSP γίνονται επαναλήψεις (refinements), όπου κάθε φορά υπολογίζονται με μεγαλύτερη ακρίβεια ο αργός και γρήγορος υποχώρος, σε αντίθεση με την ασυμπτωτική ανάλυση όπου η ακρίβεια στην προσέγγιση της ΑΑΠ εξαρτάται μόνο από την τάξη του αναπτύγματος της συνάρτησης που περιγράφει την ΑΑΠ. Ο δυναμικός αυτός επαναπροσδιορισμός των διανυσμάτων βάσης των δύο υποχώρων, όπου δρουν αντίστοιχα οι αργές και οι γρήγορες

χρονοκλίμακες κάνει τη μέθοδο CSP πιο ακριβή στον υπολογισμό της ΑΑΠ.

Στην παρούσα εργασία πρόκειται να ασχοληθούμε με ένα δύσκαμπτο σύστημα δύο συζευγμένων ταλαντωτών το οποίο φαίνεται στο Σχ. 5. Οι κατακόρυφοι ταλαντωτές χαρακτηρίζονται αντίστοιχα από τις σταθερές  $k_1, k_2$  του ελατηρίου από τις αποσβέσεις  $c_1, c_2$ , και από τις μάζες  $m_1, m_2$ , ενώ ο ταλαντωτής που συνδέει τους δύο κατακόρυφους ταλαντωτές είναι μη γραμμικός και χαρακτηρίζεται από τη σταθερά  $k$  του ελατηρίου. Για να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο CSP πρέπει να έχουμε ένα σύστημα που να χαρακτηρίζεται από έναν αριθμό ιδιοτιμών με πραγματικό μέρος αρνητικό και κατ' απόλυτη τιμή πολύ μεγαλύτερο από το φανταστικό, πράγμα το οποίο μας εξασφαλίζει την ύπαρξη αργών και γρήγορων αποσβετικών χρονοκλιμάκων οι οποίες εξαντλούνται πολύ πιο σύντομα από τις αργές. Προκειμένου να φέρουμε το σύστημά μας σε αυτή τη μορφή προσδιορίζουμε τις κατάλληλες τιμές των παραμέτρων  $k_1, k_2, c_1, c_2, m_1, m_2$ . Αυτό θα μας οδηγήσει στην περίπτωση ενός συστήματος όπου υπάρχει μεγάλη διαφορά στις παραμέτρους  $c_1, c_2$  ( $c_1 > c_2$ ) η οποία οδηγεί στην ανάπτυξη δύο γρήγορων αποσβετικών χρονοκλιμάκων οι οποίες εξαντλούνται πολύ σύντομα.

Η μελέτη του συστήματος θα γίνει με την τροποποιημένη μέθοδο CSP. Το σύστημα αυτό των δύο ταλαντωτών μπορεί να εκφράσει τη μαθηματική μοντελοποίηση των παρακάτω διατάξεων:

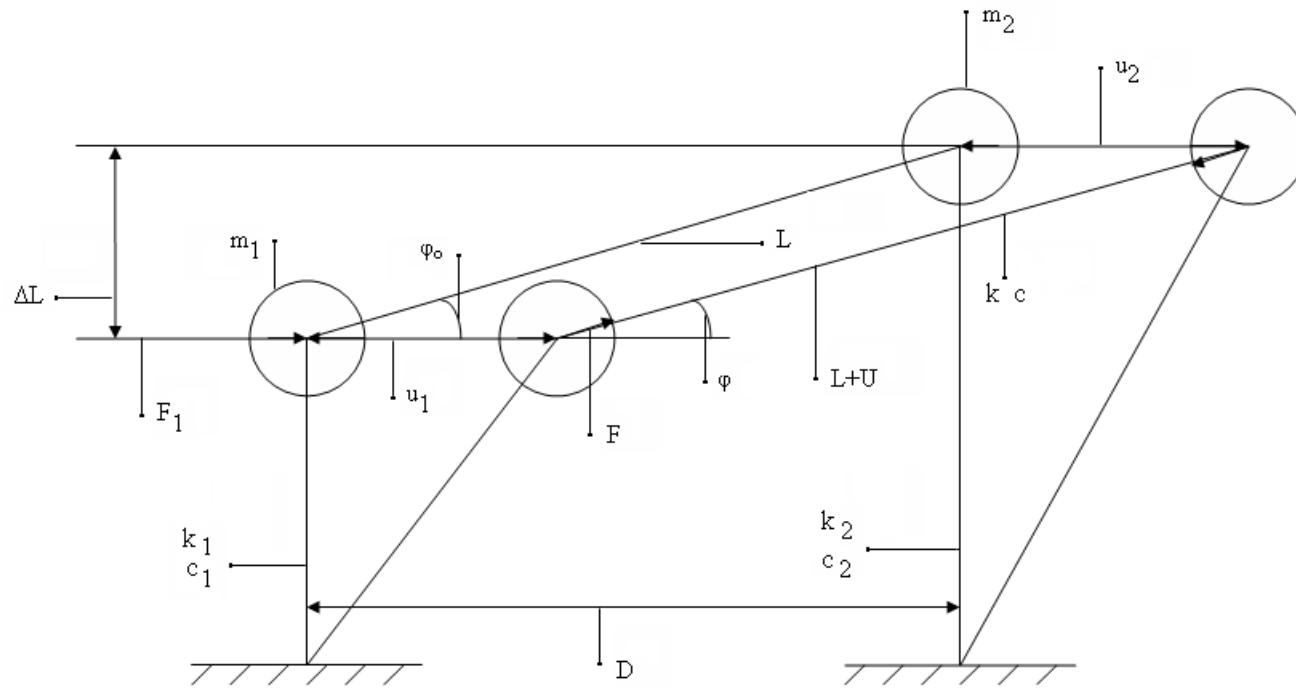
- 1) Ενός κινητήρα που είναι εδρασμένος μέσω ελαστικού συνδέσμου σε ένα πλοίο ή σε ένα αυτοκίνητο.
- 2) Του συστήματος ανάρτηση-αμάξωμα ενός αυτοκινήτου.
- 3) Του αξονικού συστήματος (άξονας - προπέλα) ενός πλοίου.
- 4) Του διπλού τοιχώματος ενός πλοίου.
- 5) Του συστήματος πλοίο-πλωτή εξέδρα αντλήσεως πετρελαίου όταν είναι συνδεδεμένα.
- 6) Του συστήματος πλοίο(μοντελοποιείται ως ελαστική δοκός)-θάλασσα.
- 7) Της μεταλλικής κατασκευής ενός πλοίου η οποία αποτελείται από ενισχυτικά τα οποία υποστηρίζονται από ενισχυμένους δοκούς.

Τα αποτελέσματα αυτής της μελέτης θα μας βοηθήσουν να προσδιορίσουμε την κίνηση κάθε αντικειμένου και κατ' επέκταση κραδασμούς (περιπτώσεις 1,2,3,5) παραμορφώσεις-τάσεις (περίπτωση 4,6,7).

Στο Κεφάλαιο 2 γίνεται μια περιγραφή της μεθόδου CSP και της τροποποιημένης μεθόδου CSP όπως αυτή έχει διατυπωθεί από τους Lam και Γκούση και αποδεικνύεται η ισοδυναμία των δύο μεθόδων. Στο Κεφάλαιο 3 περιγράφεται το σύστημα των συζευγμένων ταλαντωτών που θα μελετηθεί και γίνεται η μαθηματική μοντελοποίηση του προβλήματος ενώ στο κεφάλαιο 4 γίνεται η διερεύνηση των παραμέτρων προκειμένου να καταλήξουμε σε ένα σύστημα που να χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη αργών και γρήγορων αποσβετικών χρονοκλιμάκων οι οποίες εξαντλούνται πολύ γρήγορα. Ακολουθεί στο κεφάλαιο 5 ο υπολογισμός της ΑΑΠ με την τροποποιημένη μέθοδο CSP ενώ στο κεφάλαιο 6 γίνεται ο υπολογισμός της ακριβούς λύσης με τη βοήθεια του κώδικα LSODE και σύγκριση της λύσης αυτής με την ΑΑΠ όπου βλέπουμε πως η ακριβής λύση πέφτει πάνω στην ΑΑΠ.

Έτσι η παρούσα εργασία μας δίνει με τη βοήθεια της μεθόδου CSP την ΑΑΠ του συστήματος του Σχ. 5 το οποίο μοντελοποιεί τα φυσικά φαινόμενα ταλαντωτικής φύσεως που αναφέρθηκαν πιο πάνω. Η ΑΑΠ αυτή είναι ο αργός, μικρότερης διάστασης, υποχώρος του χώρου των φάσεων πράγμα το οποίο μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε ποιες μεταβλητές καθορίζουν την εξέλιξη του φαινομένου στο χρόνο και μας βοηθάει να απλοποιήσουμε τη μορφή της λύσης του συστήματος και να την εκφράσουμε βάση των αργών μεταβλητών. Επίσης μέσω του προσδιορισμού της φυσικής

σημασίας των εξισορροπήσεων και των φυσικών διαδικασιών οι οποίες οδηγούν στις συγκεκριμένες εξισορροπήσεις μπορούμε να κατανοήσουμε καλύτερα τη φύση του προβλήματος και να συνδέσουμε τις μεταβλητές με τις αργές και γρήγορες χρονοκλίμακες καθώς επίσης και με τις διάφορες φυσικές διαδικασίες.



Σχήμα 5: Μη γραμμικό σύστημα δύο συζευγμένων ταλαντωτών





# Κεφάλαιο 2

## Ο Αλγόριθμος CSP

### 2.1 Περιγραφή του αλγορίθμου

Με τη υπολογιστική μέθοδο CSP προσπαθούμε να προσεγγίσουμε τη λύση δύσκαμπτων προβλημάτων τα οποία προσομοιάζονται από μαθηματικά μοντέλα που χαρακτηρίζονται από την ύπαρξη αργών και γρήγορων χρονοκλίμακων. Τη λύση ενός δύσκαμπτου προβλήματος μπορούμε να την προσεγγίσουμε κατασκευάζοντας ένα μαθηματικό μοντέλο το οποίο θα είναι μικρότερης διάστασης και θα είναι απαλλαγμένο από τις γρήγορες χρονοκλίμακες του αρχικού μοντέλου. Ουσιαστικά αυτό που ζητείται είναι η κατασκευή ενός χώρου μικρότερης διάστασης, δηλαδή μιας πολλαπλότητας, η οποία ελκύει την τροχιά. Αυτή η πολλαπλότητα ονομάζεται Αργή Αναλλοίωτη Πολλαπλότητα (AAΠ) (Slow Invariant Manifold / SIM) του δύσκαμπτου προβλήματος.

Υπάρχουν δύο κατηγορίες μεθόδων οι οποίες μας βοηθούν να υπολογίσουμε την AAΠ. Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν αυτές που προσδιορίζουν την AAΠ ως γεωμετρικό τόπο σημείων, ενώ στη δεύτερη ανήκουν αυτές που προσδιορίζουν την AAΠ όπου δρουν οι αργές χρονοκλίμακες, αλλά και τους γρήγορους χώρους όπου δρουν οι γρήγορες χρονοκλίμακες πράγμα το οποίο μας δίνει τη δυνατότητα να προσδιορίσουμε και το αργό απλοποιημένο σύστημα  $\Lambda\Sigma$  που καθορίζει την κίνηση της λύσης πάνω στην AAΠ.

Η υπολογιστική μέθοδος CSP η οποία αναπτύχθηκε από τους Lam και Γκούση ανήκει στην δεύτερη κατηγορία. Δεδομένου ενός  $N$ -διάστατου προβλήματος, η CSP προσδιορίζει τα σύνολα των γρήγορων και αργών διανυσμάτων βάσης,  $\mathbf{a}_r$  και  $\mathbf{a}_s$  καθώς και τα αντίστοιχα σύνολα των δυικών τους,  $\mathbf{b}^r$  και  $\mathbf{b}^s$ . Τα  $\mathbf{a}_r$  περιγράφουν το γρήγορο  $M$ -διάστατο υποχώρο, ενώ από τα  $\mathbf{a}_s$  περιγράφουν τον αργό  $(N - M)$ -διάστατο υποχώρο AAΠ ( $M < N$ ) ο οποίος είναι τοπικά ορθογώνιος ως προς τον γρήγορο υποχώρο.

Η μέθοδος CSP περιλαμβάνει μια επαναληπτική διαδικασία, η οποία προσδιορίζει τα διανύσματα βάσης που παράγουν τον γρήγορο και αργό υποχώρο, στους οποίους δρουν οι γρήγορες και αργές χρονοκλίμακες αντίστοιχα. Η διαδικασία ξεκινάει με μια τυχαία αρχική εκτίμηση των γρήγορων διανυσμάτων βάσης  $\mathbf{a}_r$  καθώς και των δυικών τους  $\mathbf{b}^r$ . Μετά από κάθε επανάληψη λαμβάνονται καλύτερες προσεγγίσεις των γρήγορων και των συμπληρωματικών τους αργών υποχώρων. Η  $\mathbf{b}^r$  refinement και η  $\mathbf{a}_r$  refinement είναι δύο ειδών ανεξάρτητες επαναλήψεις όπου η πρώτη βελτιώνει την ακρίβεια της περιγραφής της AAΠ και της λύσης του  $\Lambda\Sigma$  με το να προσεγγίζει καλύτερα τον αργό υποχώρο ενώ η δεύτερη εξαλείφει την ακαμψία του απλοποιημένου αργού συστήματος προσεγγίζοντας καλύτερα τον γρήγορο υποχώρο.

Μετά από κάθε επανάληψη refinement τα γρήγορα πλάτη γίνονται  $O(\epsilon)$  μικρότερα όπου  $\epsilon$  είναι μια ποσότητα που ισούται με το λόγο της πιο αργής από της γρήγορες χρονοκλίμακες προς την

χαρακτηριστική χρονοκλίμακα (πιο γρήγορη από τις αργές). Ακολούθως η ακρίβεια προσέγγισης της λύσης από το ΑΣ βελτιώνεται κατά την ίδια τιμή.

## 2.2 Βασικά σημεία της μεθόδου

Έστω ένα φυσικό φαινόμενο το οποίο περιγράφεται από το σύστημα των  $N$  συνήθων διαφορικών εξισώσεων της μορφής

$$\frac{dy}{dt} = \mathbf{g}(\mathbf{y}) \quad (2.2.1)$$

όπου  $\mathbf{y}$  είναι το  $N$ -διάστατο διάνυσμα των εξαρτημένων μεταβλητών και  $\mathbf{g}$  μια αλγεβρική εξίσωση του  $\mathbf{y}$ . Υποθέτουμε ότι η εξίσωση (2.2.1) είναι δύσκαμπτη, δηλαδή κάποιες από τις χρονοκλίμακες του φαινομένου είναι πολύ πιο γρήγορες από τις χρονοκλίμακες που μας ενδιαφέρουν. Υπάρχουν δύο υποχώροι του χώρου των φάσεων. Ο  $M$ -διάστατος γρήγορος όπου δρουν οι γρήγορες χρονοκλίμακες και ο  $(N-M)$ -διάστατος αργός όπου δρουν οι αργές χρονοκλίμακες. Σε κάθε σημείο του χώρου των φάσεων το διάνυσμα  $\mathbf{g}$  αναλύεται σε δύο συνισταμένες οι οποίες είναι οι προβολές του αντίστοιχα στον  $M$ -διάστατο γρήγορο και στον  $(N-M)$ -διάστατο αργό υποχώρο. Οι υποχώροι αυτοί παράγονται αντίστοιχα από τα  $M$  διανύσματα στήλη  $N$  διαστάσεων στον  $N \times M$  πίνακα  $\mathbf{a}_r$  και από τα  $(N-M)$  διανύσματα στήλη  $N$  διαστάσεων στον  $N \times (N-M)$  πίνακα  $\mathbf{a}_s$ .

$$\mathbf{a}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_r^r \\ \mathbf{a}_r^s \end{bmatrix}, \mathbf{a}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_s^r \\ \mathbf{a}_s^s \end{bmatrix} \quad (2.2.2)$$

Θεωρούμε τώρα ένα δεύτερο σύνολο διανυσμάτων γραμμής τα οποία είναι δυικά των παραπάνω και περιλαμβάνονται στους πίνακες  $\mathbf{b}^r$  διαστάσεως  $M \times N$  και  $\mathbf{b}^s$  διαστάσεως  $(N-M) \times N$

$$\mathbf{b}^r = [ \mathbf{b}_r^r, \mathbf{b}_r^s ], \mathbf{b}^s = [ \mathbf{b}_s^r, \mathbf{b}_s^s ] \quad (2.2.3)$$

όπου τα  $\mathbf{a}_r^r, \mathbf{b}_r^r$  είναι διαστάσεως  $M \times M$ , τα  $\mathbf{a}_r^s, \mathbf{b}_r^s$  είναι διαστάσεως  $(N-M) \times M$ , τα  $\mathbf{a}_s^r, \mathbf{b}_s^r$  είναι διαστάσεως  $M \times (N-M)$  τα  $\mathbf{a}_s^s, \mathbf{b}_s^s$  είναι διαστάσεως  $(N-M) \times (N-M)$

Αν προβάλλουμε το  $\mathbf{g}$  στον αργό και γρήγορο υποχώρο έχουμε από την εξίσωση (2.2.1)

$$\frac{dy}{dt} = \mathbf{a}_r(\mathbf{b}^r \mathbf{g}) + \mathbf{a}_s(\mathbf{b}^s \mathbf{g}) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_r^r \\ \mathbf{a}_r^s \end{bmatrix} \mathbf{f}^r + \begin{bmatrix} \mathbf{a}_s^r \\ \mathbf{a}_s^s \end{bmatrix} \mathbf{f}^s \quad (2.2.4)$$

όπου

$$\mathbf{f}^r = \mathbf{b}^r \mathbf{g} = [ \mathbf{b}_r^r, \mathbf{b}_r^s ] \begin{bmatrix} \mathbf{g}^r \\ \mathbf{g}^s \end{bmatrix} = \mathbf{b}_r^r \mathbf{g}^r + \mathbf{b}_r^s \mathbf{g}^s \quad (2.2.5)$$

$$\mathbf{f}^s = \mathbf{b}^s \mathbf{g} = [ \mathbf{b}_s^r, \mathbf{b}_s^s ] \begin{bmatrix} \mathbf{g}^r \\ \mathbf{g}^s \end{bmatrix} = \mathbf{b}_s^r \mathbf{g}^r + \mathbf{b}_s^s \mathbf{g}^s \quad (2.2.6)$$

Οπότε η ΑΑΠ περιγράφεται από την εξίσωση:

$$\mathbf{b}_r^r \mathbf{g}^r + \mathbf{b}_s^r \mathbf{g}^s = \mathbf{0} \quad (2.2.7)$$

και το ΑΣ από την εξίσωση:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_s^r \\ \mathbf{a}_s^s \end{bmatrix} (\mathbf{b}_r^s \mathbf{g}^r + \mathbf{b}_s^s \mathbf{g}^s) \quad (2.2.8)$$

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, υπάρχουν δύο είδη CSP refinement. Το πρώτο μεταβάλλει το  $\mathbf{b}^r$  και  $\mathbf{a}_s$  ( $\mathbf{b}^r$  refinement) αφήνοντας τα  $\mathbf{b}^s$  και  $\mathbf{a}_r$  ανεπηρέαστα και βελτιώνει την ακρίβεια στην περιγραφή της ΑΑΠ και της λύσης του ΑΣ. Το δεύτερο μεταβάλλει το  $\mathbf{a}_r$  και  $\mathbf{b}^s$  ( $\mathbf{a}_r$  refinement) αφήνοντας τα  $\mathbf{b}^r$  και  $\mathbf{a}_s$  ανεπηρέαστα και εγγυάται την μη-δυσκαμψία του απλοποιημένου προβλήματος.

Οι δύο αυτές επαναληπτικές διαδικασίες λειτουργούν ανεξάρτητα, συνεπώς οποιοσδήποτε αριθμός από αυτά μπορεί να εφαρμοστεί. Οι σχέσεις που δίνουν τον αλγόριθμο των δύο refinement είναι:

$$\mathbf{b}^r \text{ refinement} \quad (2.2.9)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^r(k_1 + 1, m_1) &= \mathbf{T}_r^r(k_1, m_1) \left( \frac{d\mathbf{b}^r(k_1, m_1)}{dt} + \mathbf{b}^r(k_1, m_1) \mathbf{J} \right), \\ \mathbf{a}_r(k_1 + 1, m_1) &= \mathbf{a}_r(k_1, m_1), \\ \mathbf{b}^s(k_1 + 1, m_1) &= \mathbf{b}^s(k_1, m_1), \\ \mathbf{a}_s(k_1 + 1, m_1) &= [\mathbf{I} - \mathbf{a}_r(k_1 + 1, m_1) \mathbf{b}^r(k_1 + 1, m_1)] \mathbf{a}_s(k_1, m_1), \end{aligned}$$

$$\mathbf{a}^r \text{ refinement} \quad (2.2.10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^r(k_2, m_2 + 1) &= \mathbf{b}^r(k_2, m_2), \\ \mathbf{a}_r(k_2, m_2 + 1) &= \left( -\frac{d\mathbf{a}^r(k_2, m_2)}{dt} + \mathbf{J} \mathbf{a}_r(k_2, m_2) \right) \mathbf{T}_r^r(k_2, m_2), \\ \mathbf{b}^s(k_2, m_2 + 1) &= \mathbf{b}^s(k_2, m_2) [\mathbf{I} - \mathbf{a}_r(k_2, m_2 + 1) \mathbf{b}^r(k_2, m_2 + 1)], \\ \mathbf{a}_s(k_2, m_2 + 1) &= \mathbf{a}_s(k_2, m_2), \end{aligned}$$

όπου

$$\mathbf{T}_r^r(k_i, m_i) = \left[ \left( \frac{d\mathbf{b}^r(k_i, m_i)}{dt} + \mathbf{b}^r(k_i, m_i) \mathbf{J} \right) \mathbf{a}_r(k_i, m_i) \right]^{-1} \quad (2.2.11)$$

## 2.3 Τροποποιημένη μέθοδος CSP

### 2.3.1 Περιγραφή της ΑΑΠ

Έστω ότι έχουμε μια ΑΑΠ διαστάσεως  $(N - M)$  στο  $N$ -διάστατο χώρο των φάσεων και  $\mathbf{y}$  είναι το  $N$ -διάστατο διάνυσμα των εξαρτημένων μεταβλητών.

Έστω ότι η ΑΑΠ παραμετροποιείται από  $\mathbf{s}^j = (j = 1, \dots, N - M)$  ομαλές συναρτήσεις του  $\mathbf{y}$ , τέτοιες ώστε:

$$\mathbf{s}^j = \mathbf{s}^j(\mathbf{y}) = \mathbf{s}^j(y^1, \dots, y^N), j = 1, N - M \quad (2.3.1.1)$$

Το διάνυσμα θέσεως πάνω στην ΑΑΠ μπορεί να υπολογιστεί από:

$$\mathbf{y}^i = \mathbf{y}^i(\mathbf{s}) = \mathbf{y}^i(s^1, \dots, s^{N-M}), i = 1, N, \quad (2.3.1.2)$$

όπου  $\mathbf{s} = (s^1, \dots, s^{N-M})^T$ .

Η διανυσματική συνάρτηση  $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{y})$  είναι μια απεικόνιση του διανύσματος θέσεως από τον  $N$ -διάστατο φάσεων στη  $(N - M)$ -διάστατη ΑΑΠ. Παραγωγίζοντας την (2.3.1.2) ως προς τον χρόνο έχουμε:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{Y}_s \frac{d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{g}(\mathbf{y}) \quad (2.3.1.3)$$

όπου

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{S}_y \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{S}_y \mathbf{g}(\mathbf{y}) \quad (2.3.1.4)$$

και

$$\mathbf{Y}_s = \begin{bmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial s^1} & \dots & \frac{\partial y^1}{\partial s^{N-M}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y^N}{\partial s^1} & \dots & \frac{\partial y^N}{\partial s^{N-M}} \end{bmatrix}, \mathbf{S}_y = \begin{bmatrix} \frac{\partial s^1}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial s^1}{\partial y^N} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial s^{N-M}}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial s^{N-M}}{\partial y^N} \end{bmatrix} \quad (2.3.1.5)$$

Οι  $\mathbf{Y}_s, \mathbf{S}_y$  είναι  $N \times (N - M)$  και  $(N - M) \times N$  πίνακες αντίστοιχα που ικανοποιούν τη σχέση:

$$\mathbf{S}_y \mathbf{Y}_s = \mathbf{I}_s^s \quad (2.3.1.6)$$

$\mathbf{I}_s^s$  είναι ο  $(N - M) \times (N - M)$  μοναδιαίος πίνακας.

Από τις (2.3.1.3) και (2.3.1.4) έχουμε το  $N$ -διάστατο σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων:

$$[\mathbf{I}_N^N - \mathbf{Y}_s \mathbf{S}_y] \mathbf{g}(\mathbf{y}) = \mathbf{0} \quad (2.3.1.7)$$

όπου μόνο  $M$  συνιστώσες είναι γραμμικά ανεξάρτητες και μπορούν να περιγράψουν την ΑΑΠ.

Η λύση πάνω στην ΑΑΠ θα δίνεται από το  $N$ -διάστατο σύστημα:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{Y}_s \mathbf{S}_y \mathbf{g}(\mathbf{y}) \quad (2.3.1.8)$$

Όπου μόνο  $(N - M)$  συνιστώσες είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

### 2.3.2 Ο Αλγόριθμος ΙΕ

Θα αναφέρουμε εδώ τα βασικά στοιχεία μιας άλλης υπολογιστικής μεθόδου της ΑΑΠ, της ΙΕ, προκειμένου στη συνέχεια να παραθέσουμε την τροποποιημένη μέθοδο CSP.

Έστω ότι οι ομαλές συναρτήσεις  $\mathbf{s}^j$  είναι οι  $N - M$  τελευταίες συνιστώσες του  $\mathbf{y}$ .

$$\mathbf{s} = (y^{M+1}, \dots, y^N)^T \quad (2.3.2.1)$$

Ορίζουμε το  $M$ -διάστατο διάνυσμα  $\mathbf{z}$  ως εξής:

$$\mathbf{z} = (y^1(\mathbf{s}), \dots, y^M(\mathbf{s}))^T = \mathbf{z}(\mathbf{s}) \quad (2.3.2.2)$$

Τότε η σχέση (2.3.1.7) γράφεται ως:

$$\mathbf{g}^r(\mathbf{z}, \mathbf{s}) - \mathbf{G}_s^r(\mathbf{z}, \mathbf{s})\mathbf{g}^s(\mathbf{z}, \mathbf{s}) = \mathbf{0} \quad (2.3.2.3)$$

Τα  $\mathbf{g}^r = (g^1, \dots, g^M)^T$  και  $\mathbf{g}^s = (g^{M+1}, \dots, g^N)^T$  είναι τα  $M$ -διάστατα και  $(N - M)$ -διάστατα διανύσματα που αποτελούνται αντιστοίχως από τα πρώτα  $M$  και τα τελευταία  $(N - M)$  στοιχεία, του διανυσματικού πεδίου  $\mathbf{g}$ . Ο  $M \times (N - M)$  πίνακας  $\mathbf{G}_s^r$  περιλαμβάνει τις μερικές παραγώγους των  $M$  συνιστωσών του  $\mathbf{y}$  στο  $\mathbf{z}$  ως προς τις υπόλοιπες  $(N - M)$  συνιστώσες του  $\mathbf{y}$  στο  $\mathbf{s}$

$$\mathbf{G}_s^r(\mathbf{z}, \mathbf{s}) = \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z^1}{\partial s^1} \cdots \frac{\partial z^1}{\partial s^{N-M}} \\ \vdots \\ \frac{\partial z^M}{\partial s^1} \cdots \frac{\partial z^M}{\partial s^{N-M}} \end{bmatrix} \quad (2.3.2.4)$$

Η σχέση (2.3.2.3) ονομάζεται αναλλοίωτη εξίσωση και αποτελείται από  $M$  εξισώσεις με  $M$  αγνώστους. Σύμφωνα με τον αλγόριθμο ΙΕ η  $(n + 1)$  επανάληψη  $\mathbf{z}_{n+1}$  υπολογίζεται για δοσμένο  $\mathbf{s}$  και αρχική εκτίμηση  $\mathbf{z}_0$  από την πεπλεγμένη συνάρτηση

$$\mathbf{g}^r(\mathbf{z}_{n+1}, \mathbf{s}) - \mathbf{G}_s^r(\mathbf{z}_n, \mathbf{s})\mathbf{g}^s(\mathbf{z}_{n+1}, \mathbf{s}) = \mathbf{0} \quad (2.3.2.5)$$

ή από μια αναλυτική συνάρτηση της μορφής

$$\mathbf{z}_{n+1} = \mathbf{H}(\mathbf{z}_n, \mathbf{s}) \quad (2.3.2.6)$$

Ωστόσο, έως αυτό το σημείο, ο αλγόριθμος ΙΕ δεν προσφέρει κανένα κανόνα ως προς τον διαχωρισμό του διανύσματος θέσεως  $\mathbf{y}$  σε  $\mathbf{s}$  και  $\mathbf{z}$ , δηλαδή σε αργές και γρήγορες συνιστώσες, αντίστοιχα, ούτε προτείνει την κατάλληλη μορφή της συνάρτησης  $\mathbf{H}(\mathbf{z}_n, \mathbf{s})$  ούτως ώστε να επιτυγχάνεται σύγκλιση.

### 2.3.3 Κατασκευή της ΑΑΠ και του ΑΣ με χρήση του πίνακα $\mathbf{G}_s^r$ (Τροποποιημένη μέθοδος CSP)

Η αδιάστατη εξίσωση (2.3.2.3) γράφεται ως:

$$[\mathbf{I}_r^r - \mathbf{G}_s^r] \begin{bmatrix} \mathbf{g}^r(z, s) \\ \mathbf{g}^s(z, s) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.3.3.1)$$

Συνεπώς ορίζονται οι πίνακες:

$$\mathbf{A}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r^r - \mathbf{G}_s^r \mathbf{R}_r^s \\ -\mathbf{R}_r^s \end{bmatrix}, \mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_s^r \\ \mathbf{I}_s^s \end{bmatrix}, \quad (2.3.3.2)$$

$$\mathbf{B}^r = [\mathbf{I}_r^r, -\mathbf{G}_s^r], \mathbf{B}^s = [\mathbf{R}_r^s, \mathbf{I}_s^s - \mathbf{R}_r^s \mathbf{G}_s^r], \quad (2.3.3.3)$$

όπου ο  $\mathbf{G}_s^r$  ορίζεται από την (2.3.2.4) και ο  $\mathbf{R}_r^s$  θα οριστεί αργότερα όταν θα τεθούν οι συνθήκες για την μη ακαμψία του απλοποιημένου συστήματος.

Οι διαστάσεις των πινάκων  $\mathbf{A}_r, \mathbf{A}_s, \mathbf{B}^r, \mathbf{B}^s$  είναι αντιστοίχως  $N \times M, N \times (N - M), M \times N, (N - M) \times N$  και ικανοποιούν τις σχέσεις ορθογωνιότητας

$$[\mathbf{A}_r \mathbf{A}_s] \begin{bmatrix} \mathbf{B}^r \\ \mathbf{B}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^r \\ \mathbf{B}^s \end{bmatrix} [\mathbf{A}_r \mathbf{A}_s] = \mathbf{I}_N^N \quad (2.3.3.4)$$

Από τις σχέσεις (2.3.3.2) και (2.3.3.3) βλέπουμε πως το αρχικό πρόβλημα (2.2.1) μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$\frac{dy}{dt} = \mathbf{A}_r \mathbf{F}^r + \mathbf{A}_s \mathbf{F}^s = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r^r - \mathbf{G}_s^r \mathbf{R}_r^s \\ -\mathbf{R}_r^s \end{bmatrix} \mathbf{F}^r + \begin{bmatrix} \mathbf{G}_s^r \\ \mathbf{I}_s^s \end{bmatrix} \mathbf{F}^s \quad (2.3.3.5)$$

όπου

$$\mathbf{F}^r = \mathbf{B}^r \mathbf{g} = [\mathbf{I}_r^r, -\mathbf{G}_s^r] \begin{bmatrix} \mathbf{g}^r \\ \mathbf{g}^s \end{bmatrix} = \mathbf{g}^r - \mathbf{G}_s^r \mathbf{g}^s \quad (2.3.3.6)$$

$$\mathbf{F}^s = \mathbf{B}^s \mathbf{g} = [\mathbf{R}_r^s, \mathbf{I}_s^s - \mathbf{R}_r^s \mathbf{G}_s^r] \begin{bmatrix} \mathbf{g}^r \\ \mathbf{g}^s \end{bmatrix} = \mathbf{R}_r^s \mathbf{g}^r + (\mathbf{I}_s^s - \mathbf{R}_r^s \mathbf{G}_s^r) \mathbf{g}^s \quad (2.3.3.7)$$

Όταν η λύση βρίσκεται πάνω στην ΑΑΠ ικανοποιείται η εξίσωση (2.3.2.3). Δηλαδή έχουμε από (2.3.3.6)

$$\mathbf{F}^r = \mathbf{g}^r - \mathbf{G}_s^r \mathbf{g}^s = \mathbf{0} \quad (2.3.3.8)$$

Συνεπώς μόνο ο αργός όρος διατηρείται στην εξίσωση (2.3.3.5) και μπορούμε να γράψουμε:

$$\frac{dy}{dt} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_s^r \\ \mathbf{I}_s^s \end{bmatrix} (\mathbf{R}_r^s \mathbf{g}^r + (\mathbf{I}_s^s - \mathbf{R}_r^s \mathbf{G}_s^r) \mathbf{g}^s) \quad (2.3.3.9)$$

Οι εξισώσεις (2.3.3.8) και (2.3.3.9) περιγράφουν αντίστοιχα την ΑΑΠ και το ΑΣ.

### 2.3.4 Ισοδυναμία των δύο μεθόδων (CSP και τροποποιημένη CSP)

Προκειμένου να αποδείξουμε την ισοδυναμία των δύο μεθόδων είναι απαραίτητο να δείξουμε πως οι δύο μορφές (2.2.4) και (2.3.3.5) της αρχικής εξίσωσης ταυτίζονται όταν:

$$\mathbf{G}_s^r = \mathbf{a}_s^r (\mathbf{a}_s^s)^{-1} = -(\mathbf{b}_r^r)^{-1} \mathbf{b}_s^r \quad (2.3.4.1)$$

$$\mathbf{R}_r^s = \mathbf{a}_s^s \mathbf{b}_r^s = -\mathbf{a}_r^s \mathbf{b}_r^r \quad (2.3.4.2)$$

δεδομένου ότι τα  $(\mathbf{b}_r^r)^{-1}$ ,  $(\mathbf{a}_s^s)^{-1}$  υπάρχουν.

Από τις παραπάνω σχέσεις μπορούμε να δείξουμε ότι οι εξισώσεις που περιγράφουν την ΑΑΠ και το ΑΣ στη μέθοδο CSP (2.3.3.6), (2.3.3.9) και στην τροποποιημένη μέθοδο CSP (2.2.7), (2.2.8) επίσης ταυτίζονται.

$$\mathbf{F}^r = \mathbf{g}^r - \mathbf{G}_s^r \mathbf{g}^s = \mathbf{0} \quad (2.3.4.3)$$

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_s^r \\ \mathbf{I}_s^s \end{bmatrix} (\mathbf{R}_r^s \mathbf{g}^r + (\mathbf{I}_s^s - \mathbf{R}_r^s \mathbf{G}_s^r) \mathbf{g}^s) \quad (2.3.4.4)$$

$$\mathbf{b}_r^r \mathbf{g}^r + \mathbf{b}_s^r \mathbf{g}^s = \mathbf{0} \quad (2.3.4.5)$$

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_s^r \\ \mathbf{a}_s^s \end{bmatrix} (\mathbf{b}_r^s \mathbf{g}^r + \mathbf{b}_s^s \mathbf{g}^s) \quad (2.3.4.6)$$

Από την εξίσωση (2.3.4.1) έχουμε για τα διανύσματα βάσης των δύο μεθόδων:

$$\mathbf{B}^r = (\mathbf{b}_r^r)^{-1} \mathbf{b}^r, \quad \mathbf{A}_r = \mathbf{a}_r \mathbf{b}_r^r + \mathbf{a}_s \mathbf{N}_r^s \quad (2.3.4.7)$$

$$\mathbf{B}^s = \mathbf{M}_r^s \mathbf{b}^r + \mathbf{a}_s^s \mathbf{b}^s, \quad \mathbf{A}_s = \mathbf{a}_s (\mathbf{a}_s^s)^{-1} \quad (2.3.4.8)$$

όπου

$$\mathbf{N}_r^s = -(\mathbf{a}_s^s)^{-1} [\mathbf{R}_r^s + \mathbf{a}_r^s \mathbf{b}_r^r], \quad \mathbf{M}_r^s = [\mathbf{R}_r^s + \mathbf{a}_r^s \mathbf{b}_r^r] (\mathbf{b}_r^r)^{-1} \quad (2.3.4.9)$$

Βλέπουμε πως τα διανύσματα  $\mathbf{B}^r, \mathbf{A}_s$  παράγουν τον ίδιο υποχώρο με τα διανύσματα  $\mathbf{b}^r, \mathbf{a}_s$ , όπως αυτός προκύπτει μετά από το CSP  $\mathbf{b}^r$  refinement (2.2.9). Αντίθετα τα διανύσματα  $\mathbf{B}^s, \mathbf{A}_r$  δεν παράγουν τον ίδιο υποχώρο με τα διανύσματα  $\mathbf{b}^s, \mathbf{a}_r$  όπως αυτός προκύπτει μετά από το CSP  $\mathbf{a}_r$  refinement (2.2.10)

Αντικαθιστώντας τον πίνακα  $\mathbf{R}_r^s$  όπως προσδιορίστηκε από την εξίσωση (2.3.4.2) στις εξισώσεις (2.3.3.2) και (2.3.3.3) έχουμε:

$$\mathbf{B}^r = [\mathbf{I}_r^r, -\mathbf{G}_s^r], \quad \mathbf{A}_r = \mathbf{a}_r \mathbf{b}_r^r + \begin{bmatrix} (\mathbf{a}_s^r - \mathbf{G}_s^r \mathbf{a}_s^s) \mathbf{b}_r^s \\ \mathbf{0}_r^s \end{bmatrix} \quad (2.3.4.10)$$

$$\mathbf{B}^s = [\mathbf{0}_r^s, \mathbf{a}_r^s (\mathbf{b}_r^r \mathbf{G}_s^r + \mathbf{b}_s^r)] + \mathbf{a}_s^s \mathbf{b}^s, \quad \mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_s^r \\ \mathbf{I}_s^s \end{bmatrix} \quad (2.3.4.11)$$

Βλέπουμε πως τα διανύσματα  $\mathbf{B}^r, \mathbf{A}_s, \mathbf{B}^s, \mathbf{A}_r$  δεν παράγουν τον ίδιο υποχώρο με τα διανύσματα  $\mathbf{b}^r, \mathbf{a}_s, \mathbf{b}^s, \mathbf{a}_r$

Η εξίσωση (2.3.4.3) μπορεί με τη χρήση της εξισώσεως μετατροπής (2.3.4.1) να μας δώσει έναν ακριβή προσδιορισμό της ΑΑΠ όπως και το CSP  $\mathbf{b}^r$  refinement, όχι όμως και του ΑΣ όπως αυτό προσδιορίζεται από την CSP. Αυτό μπορεί να γίνει όταν και οι δύο εξισώσεις μετατροπής (2.3.4.1) και (2.3.4.2) χρησιμοποιούνται, οπότε τα διανύσματα των δύο μεθόδων συνδέονται με τις σχέσεις:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}^r \\ \mathbf{B}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{b}_r^r)^{-1} & \mathbf{0}_s^r \\ \mathbf{0}_r^s & \mathbf{a}_s^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}^r \\ \mathbf{b}^s \end{bmatrix} \quad (2.3.4.12)$$

$$[\mathbf{A}_r \mathbf{A}_s] = [\mathbf{a}_r \mathbf{a}_s] \begin{bmatrix} \mathbf{b}_r^r & \mathbf{0}_s^r \\ \mathbf{0}_r^s & (\mathbf{a}_s^s)^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.3.4.13)$$

Βλέπουμε πως τα διανύσματα  $\mathbf{A}_r, \mathbf{A}_s, \mathbf{B}^r, \mathbf{B}^s$  είναι ίδια με τα CSP διανύσματα βάσης  $\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_s, \mathbf{b}^r, \mathbf{b}^s$ . Τα καινούργια αυτά διανύσματα ορίζουν την τροποποιημένη μέθοδο CSP η οποία μπορεί να εφαρμοστεί μόνο όταν το διάνυσμα θέσεως  $\mathbf{y}$  διαμεριστεί κατάλληλα στις  $\mathbf{s}$  και  $\mathbf{z}$  συνιστώσες.

Για τον προσδιορισμό της ΑΑΠ και του ΑΣ είναι απαραίτητος ο υπολογισμός των πινάκων  $\mathbf{G}_s^r$  και  $\mathbf{R}_r^s$ .

### 2.3.5 Υπολογισμός του πίνακα $\mathbf{G}_s^r$

Ο πίνακας  $\mathbf{G}_s^r$  μπορεί να υπολογιστεί από την παραγωγή της αδιάστατης εξίσωσης  $\mathbf{B}^r \mathbf{g} = \mathbf{0}$  ως προς το χρόνο

$$\mathbf{L}_r^r \mathbf{F}^r + \mathbf{L}_s^r \mathbf{F}^s = \mathbf{0} \quad (2.3.5.1)$$

όπου

$$\mathbf{L}_r^r = \left( \frac{d\mathbf{B}^r}{dt} + \mathbf{B}^r \mathbf{J} \right) \mathbf{A}_r \quad (2.3.5.2)$$

$$\mathbf{L}_s^r = \left( \frac{d\mathbf{B}^r}{dt} + \mathbf{B}^r \mathbf{J} \right) \mathbf{A}_s \quad (2.3.5.3)$$

από τα οποία έχουμε:

$$\frac{d\mathbf{B}^r}{dt} + \mathbf{B}^r \mathbf{J} = \mathbf{L}_r^r \mathbf{B}^r + \mathbf{L}_s^r \mathbf{B}^s \quad (2.3.5.4)$$

Πάνω στην ΑΑΠ έχουμε  $\mathbf{F}^r = \mathbf{B}^r \mathbf{g} = \mathbf{0}$ . Δεδομένου ότι  $\mathbf{F}^s \neq \mathbf{0}$  η εξίσωση (2.3.5.1) μας δίνει  $\mathbf{L}_s^r = \mathbf{0}_s^r$ . Οπότε η εξίσωση (2.3.5.4) γίνεται:

$$\frac{d\mathbf{B}^r}{dt} + \mathbf{B}^r \mathbf{J} = \mathbf{L}_r^r \mathbf{B}^r \quad (2.3.5.5)$$

Θέτουμε:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_r^r & \mathbf{J}_s^r \\ \mathbf{J}_r^s & \mathbf{J}_s^s \end{bmatrix} \quad (2.3.5.6)$$

Οπότε από την εξίσωση (2.3.5.5) και την (2.3.3.3) έχουμε:

$$\left[ \mathbf{0}_r^r - \frac{d\mathbf{G}_s^r}{dt} \right] + [\mathbf{J}_r^r - \mathbf{G}_s^r \mathbf{J}_r^s, \mathbf{J}_r^r - \mathbf{G}_s^r \mathbf{J}_s^s] = \mathbf{L}_r^r [\mathbf{I}_r^r, -\mathbf{G}_s^r] \quad (2.3.5.7)$$

η παραπάνω εξίσωση μας δίνει:



$$\mathbf{J}_r^r - \mathbf{G}_s^r \mathbf{J}_r^s = \mathbf{L}_r^r \quad (2.3.5.8)$$

$$\frac{d\mathbf{G}_s^r}{dt} + \mathbf{G}_s^r \mathbf{J}_s^s - \mathbf{J}_s^r = \mathbf{L}_r^r \mathbf{G}_s^r \quad (2.3.5.9)$$

Οπότε μπορούμε να πάρουμε τον πίνακα  $\mathbf{G}_s^r$  από την παρακάτω εξίσωση:

$$\frac{d\mathbf{G}_s^r}{dt} + \mathbf{G}_s^r \mathbf{J}_s^s - \mathbf{J}_s^r = [\mathbf{J}_r^r - \mathbf{G}_s^r \mathbf{J}_r^s] \mathbf{G}_s^r \quad (2.3.5.10)$$

η οποία μπορεί να λυθεί επαναληπτικά ως εξής:

$$\mathbf{G}_s^r(n+1) = (\mathbf{J}_r^r - \mathbf{G}_s^r(n) \mathbf{J}_r^s)^{-1} \left[ \mathbf{G}_s^r(n) \mathbf{J}_s^s - \mathbf{J}_s^r + \frac{d\mathbf{G}_s^r(n)}{dt} \right] \quad (2.3.5.11)$$

### 2.3.6 Υπολογισμός του πίνακα $\mathbf{R}_r^s$

Η εξέλιξη των αργών πλατών  $\mathbf{F}^s$  στο χρόνο δίδεται από την εξίσωση:

$$\frac{d\mathbf{F}^s}{dt} = \mathbf{L}_r^s \mathbf{F}^r + \mathbf{L}_s^s \mathbf{F}^s \quad (2.3.6.1)$$

όπου

$$\mathbf{L}_r^s = \left( \frac{d\mathbf{B}^s}{dt} + \mathbf{B}^s \mathbf{J} \right) \mathbf{A}_r \quad (2.3.6.2)$$

$$\mathbf{L}_s^s = \left( \frac{d\mathbf{B}^s}{dt} + \mathbf{B}^s \mathbf{J} \right) \mathbf{A}_s \quad (2.3.6.3)$$

Εφόσον οι γρήγορες χρονοκλίμακες δεν επιδρούν στην εξέλιξη των αργών πλατών  $\mathbf{F}^s$  θα έχουμε  $\mathbf{L}_r^s = \mathbf{0}_r^s$ . Οπότε ανάλογα με την εξίσωση (2.3.5.5) προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση για το  $\mathbf{A}_r$ :

$$-\frac{d\mathbf{A}_r}{dt} + \mathbf{J} \mathbf{A}_r = \mathbf{A}_r^r \mathbf{L}_r^r \quad (2.3.6.4)$$

Οπότε από (2.3.6.4) και (2.3.3.2) μπορούμε να πάρουμε για τον πίνακα  $\mathbf{R}_r^s$  την παρακάτω εξίσωση:

$$\frac{d\mathbf{R}_r^s}{dt} + \mathbf{J}_r^s (\mathbf{I}_r^r - \mathbf{G}_s^r \mathbf{R}_r^s) - \mathbf{J}_s^s \mathbf{R}_r^s = -\mathbf{R}_r^s \mathbf{L}_r^r \quad (2.3.6.5)$$

η οποία μπορεί να λυθεί επαναληπτικά ως εξής:

$$\mathbf{R}_r^s(j+1) = [\mathbf{J}_s^s \mathbf{R}_r^s(j) - \mathbf{J}_r^s (\mathbf{I}_r^r - \mathbf{G}_s^r(n) \mathbf{R}_r^s(j)) - \frac{d\mathbf{R}_r^s(j)}{dt}] (\mathbf{L}_r^r(n))^{-1} \quad (2.3.6.6)$$

όπου

$$\mathbf{L}_r^r(n) = \mathbf{J}_r^r - \mathbf{G}_s^r(n) \mathbf{J}_r^s \quad (2.3.6.7)$$

### 2.3.7 Χρήση του pointer για την εκλογή των γρήγορων μεταβλητών

Ο pointer μας δείχνει ποιό από τους αρχικούς άξονες των μεταβλητών πέφτουν στον γρήγορο υποχώρο. Οι  $M$  γρήγορες μεταβλητές επισημαίνονται από τις μεγαλύτερες τιμές του pointer ο οποίος προσδιορίζεται από την ακόλουθη εξίσωση για τη μέθοδο CSP:

$$\mathbf{q}^r = \text{diag}\left[\frac{\mathbf{a}_r \mathbf{b}_r^r}{M}\right] = \frac{1}{M} \begin{bmatrix} \text{diag}(\mathbf{a}_r^r \mathbf{b}_r^r) \\ \text{diag}(\mathbf{a}_r^s \mathbf{b}_s^r) \end{bmatrix} \quad (2.3.7.1)$$

Για την τροποποιημένη μέθοδο CSP έχουμε:

$$\mathbf{Q}^r = \text{diag}\left[\frac{\mathbf{A}_r \mathbf{B}^r}{M}\right] = \frac{1}{M} \begin{bmatrix} \text{diag}(\mathbf{I}_r^r - \mathbf{G}_s^r \mathbf{R}_r^s) \\ \text{diag}(\mathbf{R}_r^s \mathbf{G}_s^r) \end{bmatrix} \quad (2.3.7.2)$$

Λόγω των σχέσεων ορθογωνιότητας (2.3.3.4) θα έχουμε:

$$\frac{1}{M} \left[ \sum (\mathbf{a}_r^r \mathbf{b}_r^r)_i^i + \sum (\mathbf{a}_r^s \mathbf{b}_s^r)_j^j \right] = 1 \quad (2.3.7.3)$$

όπου  $1 < i < M$  και  $1 < j < N - M$

Τιμές του  $\mathbf{a}_k^i \mathbf{b}_i^k$  που είναι κοντά στη μονάδα προσδιορίζουν τη  $i$  γρήγορη μεταβλητή που συνδέεται με την  $k$  χρονοκλίμακα.

# Κεφάλαιο 3

## Σύστημα δύο Συζευγμένων Ταλαντωτών

### 3.1 Περιγραφή του προβλήματος

Η διάταξη του προβλήματος που θα μας απασχολήσει φαίνεται στο Σχ. 5 Σελ. 14. Περιλαμβάνει δύο κατακόρυφους ταλαντωτές (1) και (2) οι οποίοι συνδέονται με ένα τρίτο κεκλιμένο ταλαντωτή ο οποίος βρίσκεται υπό γωνία, πράγμα το οποίο κάνει το σύστημα μη γραμμικό.

Ο κατακόρυφος ταλαντωτής (1) έχει μάζα  $m_1$ , σταθερά ελατηρίου  $k_1$ , συντελεστή απόσβεσης  $c_1$  και συχνότητα  $\omega_1$ . Η μετατόπισή του και η ταχύτητά του είναι αντίστοιχα  $u_1$  και  $\dot{u}_1$ .

Ο κατακόρυφος ταλαντωτής (2) έχει μάζα  $m_2$ , σταθερά ελατηρίου  $k_2$ , συντελεστή απόσβεσης  $c_2$  και συχνότητα  $\omega_2$ . Η μετατόπισή του και η ταχύτητά του είναι αντίστοιχα  $u_2$  και  $\dot{u}_2$ .

Ο κεκλιμένος ταλαντωτής έχει σταθερά ελατηρίου  $k$ , συντελεστή απόσβεσης  $c$ , μήκος  $L$  και βρίσκεται υπό γωνία  $\phi_0$ , η οποία γίνεται  $\phi$  κατά την κίνηση του συστήματος.

Η οριζόντια απόσταση μεταξύ των δύο ταλαντωτών είναι  $D$  και η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των δύο μαζών είναι  $\Delta L$ .

Θεωρούμε ότι η εξωτερική δύναμη του συστήματος είναι  $F_1$ , ενώ  $F$  είναι η δύναμη που αναπτύσσεται στον κεκλιμένο ταλαντωτή.

### 3.2 Προσδιορισμός Παραμέτρων

#### 3.2.1 Σταθερές ελατηρίων $k, k_1, k_2$

Θέλουμε  $k < k_1, k_2$  και  $k_1 > k_2$  προκειμένου να μοντελοποιήσουμε συστήματα όπως αυτά που αναφέρονται στον πρόλογο και να έχουμε εναλλαγή στην κίνηση των δύο ταλαντωτών, δηλαδή στάση του ενός ταλαντωτή όταν ο άλλος ταλαντώνεται με το μέγιστο πλάτος.

Θεωρούμε τις τιμές  $k = 1, k_1 = 10, k_2 = 5$

### 3.2.2 Μάζες $m_2, m_1$

Θέλουμε  $m_2 > m_1$  προκειμένου να μοντελοποιήσουμε συστήματα όπως αυτά που αναφέρονται στον πρόλογο και να έχουμε εναλλαγή στην κίνηση των δύο ταλαντωτών, δηλαδή στάση του ενός ταλαντωτή όταν ο άλλος ταλαντώνεται με το μέγιστο πλάτος.

Θεωρούμε για τις μάζες τις τιμές  $m_1 = 0.2, m_2 = 3$

### 3.2.3 Συχνότητες $\omega_1, \omega_2$

Από τις παραπάνω τιμές των  $m_2, m_1$ , και  $k_1, k_2$  προκύπτουν οι μη συζευγμένες συχνότητες:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = \sqrt{50} = 7.07$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = \sqrt{\frac{5}{3}} = 1.29$$

Εφόσον  $\omega_2 \ll \omega_1$ , έχουμε ένα εύκαμπτο-άκαμπτο σύστημα.

### 3.2.4 Αποσβεστήρες

Θεωρούμε για τους παράγοντες απόσβεσης τις τιμές  $\zeta_1, \zeta_2 = 0.01$  και υπολογίζουμε τους συντελεστές απόσβεσης  $c_1, c_2$  από τις εξισώσεις:

$$c_1 = 2\omega_1\zeta_1m_1 = 0.03$$

$$c_2 = 2\omega_2\zeta_2m_2 = 0.08$$

### 3.2.5 Γεωμετρία

Σχετικά με τη γεωμετρία όπως αυτή φαίνεται στο Σχ. 5 θεωρούμε τα ακόλουθα:

$$D = \frac{1}{5}, \Delta L = \frac{1}{10}$$

### 3.2.6 Εξωτερική Φόρτιση $F_1$

Η εξωτερική φόρτιση έχει ημιτονοειδή μορφή και δίδεται από εξίσωση:

$$F_1 = A \sin(\Omega t)$$

Στην περίπτωση μας θεωρούμε πως δεν έχουμε εξωτερική φόρτιση.

### 3.2.7 Τιμές παραμέτρων $p_i$

Σύμφωνα με όσα έχουν αναφερθεί στις παραγράφους 3.2.1 έως 3.2.6 αποδίδονται στις παραμέτρους  $p_i$  οι τιμές που φαίνονται στους Πίνακες 1 και 2.

Τιμές παραμέτρων				
$p_1 = k$	$p_2 = k_1$	$p_3 = k_2$	$p_4 = m_1$	$p_5 = m_2$
1.00	10.00	5.00	0.20	3.00

**Πίνακας 1.** Τιμές των παραμέτρων  $p_1 - p_5$  του προβλήματος

Τιμές παραμέτρων				
$p_6 = \zeta_1$	$p_7 = \zeta_2$	$p_8 = D$	$p_9 = \Delta L$	$p_{10} = A$
0.01	0.01	0.20	0.10	1.00

**Πίνακας 2.** Τιμές των παραμέτρων  $p_6 - p_{10}$  του προβλήματος

Από τις τιμές των Πινάκων 1 και 2 προκύπτουν ακολούθως οι τιμές των παραμέτρων  $p_i$  ( $i = 11-15$ ) οι οποίες είναι συνδυασμός των παραμέτρων  $p_i$  ( $i = 1-10$ ). Οι τιμές αυτές των παραμέτρων  $p_i$  ( $i = 1-15$ ) θα χρησιμοποιηθούν στη μαθηματική μοντελοποίηση.

$$p_{11} = \sqrt{\frac{p_2}{p_4}} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = \omega_1 = \sqrt{50} = 7.07$$

$$p_{12} = \sqrt{\frac{p_3}{p_5}} = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = \omega_2 = \sqrt{\frac{5}{3}} = 1.29$$

$$p_{13} = 2p_{11}p_6p_4 = 2\omega_1\zeta_1m_1 = c_1 = 0.03$$

$$p_{14} = 2p_{12}p_7p_5 = 2\omega_2\zeta_2m_2 = c_2 = 0.08$$

$$p_{15} = \sqrt{p_8^2 + p_9^2} = \sqrt{D^2 + DL^2} = L = 0.22$$

## 3.3 Σύνδεση των τιμών των παραμέτρων $m_1, m_2, k_1, k_2$ με τα συστήματα που μοντελοποιούνται

Οι παράμετροι  $m_1, m_2, k_1, k_2$  όπως προσδιορίστηκαν στις προηγούμενες παραγράφους σχετίζονται με τις διατάξεις που αναφέρονται στον πρόλογο και μπορούν να μοντελοποιηθούν από το σύστημα των δύο συζευγμένων ταλαντωτών ως ακολούθως:

1) Κινητήρας που είναι εδρασμένος μέσω ελαστικού συνδέσμου σε ένα πλοίο ή σε ένα αυτοκίνητο.

Οι  $m_1, k_1$  μπορούν να είναι η μάζα και η σταθερά ελατηρίου του κινητήρα, ενώ οι  $m_2, k_2$  η μάζα και η σταθερά ελατηρίου του πλοίου ή του αυτοκινήτου.

2) Σύστημα ανάρτηση-αμάξωμα ενός αυτοκινήτου.

Οι  $m_1, k_1$  μπορούν να είναι η μάζα και η σταθερά ελατηρίου της ανάρτησης, ενώ οι  $m_2, k_2$  η μάζα και η σταθερά ελατηρίου του αυτοκινήτου.

3) Αξονικό σύστημα (άξονας - προπέλα) ενός πλοίου.

Οι  $m_1, k_1$  μπορούν να είναι η μάζα και η σταθερά ελατηρίου του αξονικού συστήματος, ενώ οι  $m_2, k_2$  η μάζα και η σταθερά ελατηρίου της προπέλας.

4) Σύστημα πλοίο-πλωτή εξέδρα αντλήσεως πετρελαίου όταν είναι συνδεδεμένα.

Οι  $m_1, k_1$  μπορούν να είναι η μάζα και η σταθερά ελατηρίου του πλοίου, ενώ οι  $m_2, k_2$  η μάζα και η σταθερά ελατηρίου της πλωτής εξέδρας.

5) Σύστημα πλοίο(μοντελοποιείται ως ελαστική δοκός)-θάλασσα.

Οι  $m_1, k_1$  μπορούν να είναι η μάζα και η σταθερά ελατηρίου του πλοίου ως ελαστική δοκός, ενώ οι  $m_2, k_2$  η μάζα και η σταθερά ελατηρίου της θάλασσας.

6) Μεταλλική κατασκευή ενός πλοίου η οποία αποτελείται από ενισχυτικά τα οποία υποστηρίζονται από ενισχυμένους δοκούς.

Οι  $m_1, k_1$  μπορούν να είναι η μάζα και η σταθερά ελατηρίου της ενισχυμένης δοκού, ενώ οι  $m_2, k_2$  η μάζα και η σταθερά ελατηρίου των ενισχυτικών.

### 3.4 Αρχικές συνθήκες

Θέτουμε σε κίνηση το σύστημα των δύο ταλαντωτών μετατοπίζοντας τη μάζα  $m_1$  από τη θέση ισορροπίας της σε μια καινούργια θέση και αφήνοντάς τη να κινηθεί με μηδενική αρχική ταχύτητα. Οι τιμές των μεταβλητών φαίνονται στον Πίνακα 3 όπου θεωρούμε ότι η μάζα  $m_1$  έχει αρχική μετατόπιση 1.

Τιμές μεταβλητών			
$x_1 = u_1$	$x_2 = \dot{u}_1$	$x_3 = u_2$	$x_4 = \dot{u}_2$
1.00	0.00	0.00	0.00

Πίνακας 3. Τιμές μεταβλητών του προβλήματος

### 3.5 Μαθηματική μοντελοποίηση του Προβλήματος

Οι δύο μάζες συνδέονται με γραμμικό ελατήριο υπό γωνία  $\phi$ . Η κλίση αυτή δημιουργεί τη μη γραμμικότητα. Η μαθηματική μοντελοποίηση του συστήματος των δύο συζευγμένων ταλαντωτών έχει ως ακολούθως:

Εξίσωση κίνησης του ταλαντωτή 1:

$$m_1 \ddot{u}_1 + k_1 u_1 + c_1 \dot{u}_1 = F(u, \dot{u}) \cos \phi + F_1 \quad (3.5.1)$$

Εξίσωση κίνησης του ταλαντωτή 2:

$$m_2 \ddot{u}_2 + k_2 u_2 + c_2 \dot{u}_2 = -F(u, \dot{u}) \cos \phi \quad (3.5.2)$$

Αν  $\phi$  είναι η κλίση του οριζόντιου ταλαντωτή έχουμε:

$$\cos \phi = (D + u_2 - u_1)/(L + u) \quad (3.5.3)$$

Αν  $L$  είναι αρχικά το μήκος του κεκλιμένου ταλαντωτή έχουμε:

$$L^2 = D^2 + (\Delta L)^2 \quad (3.5.4)$$

Αν  $L + u$  είναι το μήκος του κεκλιμένου ταλαντωτή μετά την εκκίνηση της ταλάντωσης έχουμε:

$$(L + u)^2 = (\Delta L)^2 + (D + u_2 - u_1)^2 \quad (3.5.5)$$

Οπότε από (3.5.3) και (3.5.5) έχουμε:

$$\cos \phi = \frac{D + u_2 - u_1}{\sqrt{(D + u_2 - u_1)^2 + (\Delta L)^2}} \quad (3.5.6)$$

Από (3.5.5) έχουμε:

$$\begin{aligned} L + u &= \sqrt{(D + u_2 - u_1)^2 + (\Delta L)^2} \Rightarrow \\ u &= \sqrt{(D + u_2 - u_1)^2 + (\Delta L)^2} - L \end{aligned} \quad (3.5.7)$$

Θεωρούμε ότι η απόσβεση  $c$  του κεκλιμένου ταλαντωτή και η εξωτερική δύναμη  $F_1$  είναι 0. Οπότε η δύναμη  $F$  που αναπτύσσεται στον κεκλιμένο ταλαντωτή θα είναι:

$$F(u, \dot{u}) = ku + c\dot{u} = ku \quad (3.5.8)$$

Από (3.5.6), (3.5.7), (3.5.8), έχουμε:

$$\begin{aligned} F(u, \dot{u}) \cos \phi &= (k\sqrt{(D + u_2 - u_1)^2 + (\Delta L)^2} - kL) \frac{D + (u_2 - u_1)}{\sqrt{(D + u_2 - u_1)^2 + (\Delta L)^2}} \Rightarrow \\ F(u, \dot{u}) \cos \phi &= k(D + u_2 - u_1) - \frac{kL(D + u_2 - u_1)}{\sqrt{(D + u_2 - u_1)^2 + (\Delta L)^2}} \Rightarrow \\ F(u, \dot{u}) \cos \phi &= k(D + u_2 - u_1) \left(1 - \frac{L}{\sqrt{(D + u_2 - u_1)^2 + (\Delta L)^2}}\right) \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

Ορίζουμε τις μεταβλητές  $x_1, x_2, x_3, x_4$  του προβλήματος ως ακολούθως:

Μετατόπιση του ταλαντωτή 1:  $x_1 = u_1$

Ταχύτητα του ταλαντωτή 1:  $x_2 = \dot{u}_1$

Μετατόπιση του ταλαντωτή 2:  $x_3 = u_2$

Ταχύτητα του ταλαντωτή 2:  $x_4 = \dot{u}_2$

Οπότε έχουμε:

$$\dot{x}_1 = \dot{u}_1 = x_2 \quad (3.5.10)$$

Από (3.5.1), (3.5.9) έχουμε:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = \ddot{u}_1 &= \frac{F(u, \dot{u}) \cos \phi + F_1 - k_1 u_1 - c_1 \dot{u}_1}{m_1} = \frac{F(u, \dot{u}) \cos \phi + F_1 - k_1 x_1 - c_1 x_2}{m_1} \Rightarrow \\ \dot{x}_2 &= \frac{k}{m_1} (D + x_3 - x_1) \left(1 - \frac{L}{\sqrt{(D + x_3 - x_1)^2 + (\Delta L)^2}}\right) + \frac{F_1}{m_1} - \frac{k_1}{m_1} x_1 - \frac{c_1}{m_1} x_2 \end{aligned} \quad (3.5.11)$$

$$\dot{x}_3 = \dot{u}_2 = x_4 \quad (3.5.12)$$

Από (3.5.2), (3.5.9) έχουμε:

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 = \ddot{u}_2 &= \frac{-F(u, \dot{u}) \cos \phi - k_2 u_2 - c_2 \dot{u}_2}{m_2} = \frac{-F(u, \dot{u}) \cos \phi - k_2 x_3 - c_2 x_4}{m_2} \Rightarrow \\ \dot{x}_4 &= \frac{-k}{m_2} (D + x_3 - x_1) \left(1 - \frac{L}{\sqrt{(D + x_3 - x_1)^2 + (\Delta L)^2}}\right) - \frac{k_2}{m_2} x_3 - \frac{c_2}{m_2} x_4 \end{aligned} \quad (3.5.13)$$

Θέτουμε:

$$\begin{aligned} z_0 &= (p_8 + x_3 - x_1)^2 + p_9^2 \\ z_1 &= 1 - \frac{p_{15}}{\sqrt{z_0}} \\ z_2 &= p_8 + x_3 - x_1 \end{aligned}$$

Οπότε για τις τιμές των παραμέτρων  $p_1 - p_{15}$  και για τα  $z_0, z_1, z_2$  έχουμε:

$$q_1 = \dot{x}_1 = \dot{u}_1 = x_2 \quad (3.5.14)$$

$$q_2 = \dot{x}_2 = \ddot{u}_1 = \left(\frac{p_1}{p_4}\right) z_2 z_1 - \left(\frac{p_2}{p_4}\right) x_1 - \left(\frac{p_{13}}{p_4}\right) x_2 \quad (3.5.15)$$

$$q_3 = \dot{x}_3 = \dot{u}_2 = x_4 \quad (3.5.16)$$

$$q_4 = \dot{x}_4 = \ddot{u}_2 = -\left(\frac{p_1}{p_5}\right) z_2 z_1 - \left(\frac{p_3}{p_5}\right) x_3 - \left(\frac{p_{14}}{p_5}\right) x_4 \quad (3.5.17)$$

Έστω  $\mathbf{y}$  το  $N$ -διάστατο διάνυσμα των εξαρτημένων μεταβλητών.

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (3.5.18)$$

Αν  $\mathbf{g}$  είναι μια αλγεβρική εξίσωση του  $\mathbf{y}$  τότε από (3.5.14), (3.5.15), (3.5.16), (3.5.17), (3.5.18) έχουμε:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{g}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (3.5.19)$$

Αυτό είναι το σύστημα των τεσσάρων διαφορικών εξισώσεων το οποίο περιγράφει την εξέλιξη του φαινομένου.



# Κεφάλαιο 4

## Διερεύνηση

### 4.1 Έλεγχος ιδιοτιμών Ιακωβιανής

#### 4.1.1 Γενικά

Με τον κώδικα LSODE και για τις τιμές των παραμέτρων  $p_1 - p_{10}$  όπως αυτές ορίστηκαν στην παράγραφο 3.2.7 υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές  $\lambda_k = \lambda_{kr} \pm i\lambda_{ki}$  της Ιακωβιανής ( $\mathbf{J} = \text{grad}(\mathbf{g})$ ) του συστήματος, όπου η  $\mathbf{g}$  ορίστηκε στην παράγραφο 3.5.

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial x_1} & \frac{\partial q_1}{\partial x_2} & \frac{\partial q_1}{\partial x_3} & \frac{\partial q_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial q_2}{\partial x_1} & \frac{\partial q_2}{\partial x_2} & \frac{\partial q_2}{\partial x_3} & \frac{\partial q_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial q_3}{\partial x_1} & \frac{\partial q_3}{\partial x_2} & \frac{\partial q_3}{\partial x_3} & \frac{\partial q_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial q_4}{\partial x_1} & \frac{\partial q_4}{\partial x_2} & \frac{\partial q_4}{\partial x_3} & \frac{\partial q_4}{\partial x_4} \end{bmatrix}$$

Οι γρήγορες χρονοκλίμακες ενός δύσκαμπτου προβλήματος, οι οποίες είναι υπεύθυνες για τις εξισορροπήσεις που αναπτύσσονται μεταξύ των διάφορων διαδικασιών του προβλήματος, σχετίζονται με τις ιδιοτιμές της Ιακωβιανής του συστήματος το πραγματικό μέρος των οποίων είναι αρνητικό και κατ' απόλυτη τιμή πολύ μεγαλύτερο από το φανταστικό.

Στο πρόβλημά μας θα προσπαθήσουμε να επαναπροσδιορίσουμε τιμές των παραμέτρων  $p_1 - p_{10}$  έτσι ώστε να πετύχουμε ιδιοτιμές της Ιακωβιανής της μορφής που περιγράψαμε παραπάνω προκειμένου να έχουμε ένα δύσκαμπτο πρόβλημα το οποίο να χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη αργών και γρήγορων αποσβετικών χρονοκλιμάκων οι οποίες να τείνουν γρήγορα στο μηδέν. Κατόπιν θα εφαρμόσουμε την τροποποιημένη μέθοδο CSP η οποία εκμεταλλευόμενη την εξάντληση των γρήγορων χρονοκλιμάκων θα μας οδηγήσει στον προσδιορισμό της ΑΑΠ και κατά συνέπεια στη λύση ενός προβλήματος μικρότερης διάστασης.

### 4.1.2 Αρχικό πρόβλημα

Στο αρχικό πρόβλημα οι τιμές των παραμέτρων  $p_1 - p_{10}$  είναι αυτές που αναφέρονται στην παράγραφο 3.2.7 και οι ιδιοτιμές που παίρνουμε φαίνονται στην πρώτη σειρά του Πίνακα 20. Βλέπουμε πως οι ιδιοτιμές που παίρνουμε δεν είναι της μορφής που θέλουμε, όπως αυτή προσδιορίστηκε στην παράγραφο 4.1.1. Προκειμένου να πάρουμε ιδιοτιμές της ζητούμενης μορφής θα προχωρήσουμε σε μεταβολές των παραμέτρων  $p_1 - p_{10}$  (Περίπτώσεις 1-4)

Στους Πίνακες 4, 5, 6 παρουσιάζονται οι τιμές των παραμέτρων  $p_1 - p_{15}$

Τιμές παραμέτρων (Αρχικό πρόβλημα)				
$p_1 = k$	$p_2 = k_1$	$p_3 = k_2$	$p_4 = m_1$	$p_5 = m_2$
1.00	10.00	5.00	0.20	3.00

**Πίνακας 4.** Τιμές των παραμέτρων  $p_1 - p_5$  του αρχικού προβλήματος

Τιμές παραμέτρων (Αρχικό πρόβλημα)				
$p_6 = \zeta_1$	$p_7 = \zeta_2$	$p_8 = D$	$p_9 = \Delta L$	$p_{10} = A$
0.01	0.01	0.20	0.10	1.00

**Πίνακας 5.** Τιμές των παραμέτρων  $p_5 - p_{10}$  του αρχικού προβλήματος

Τιμές παραμέτρων (Αρχικό πρόβλημα)				
$p_{11} = \omega_1$	$p_{12} = \omega_2$	$p_{13} = c_1$	$p_{14} = c_2$	$p_{15} = L$
7.07	1.29	0.03	0.08	0.22

**Πίνακας 6.** Τιμές των παραμέτρων  $p_{10} - p_{15}$  του αρχικού προβλήματος

### 4.1.3 Περίπτωση 1

Αρχικά αυξάνουμε και ελαττώνουμε κάθε παράμετρο κατά τρεις (3) τάξεις μεγέθους ( $\times 10^3$ ) και ( $\times 10^{-3}$ ) και παίρνουμε τις ιδιοτιμές που φαίνονται στον Πίνακα 20. Βλέπουμε πως μόνο η αύξηση των  $p_6 = \zeta_1, p_7 = \zeta_2$  μας δίνει ιδιοτιμές της μορφής που θέλουμε.

Εκλέγουμε για την  $p_6 = \zeta_1$  την τιμή 3.00 από 0.01 και κρατάμε ίδιες τις άλλες παραμέτρους πράγμα το οποίο μας δίνει για την απόσβεση  $c_1$  την τιμή  $p_{13} = c_1 = 8.48$ . Στον Πίνακα 21 βλέπουμε ότι οι ιδιοτιμές έχουν τη μορφή που θέλουμε, με το πραγματικό μέρος των δύο πρώτων να είναι αρνητικό και κατ' απόλυτη τιμή πολύ μεγαλύτερο από το φανταστικό, ενώ οι επόμενες δύο ιδιοτιμές σχηματίζουν ένα μιγαδικό ζευγάρι.

Στους Πίνακες 7, 8, 9 παρουσιάζονται οι τιμές των παραμέτρων  $p_1 - p_{15}$

Τιμές παραμέτρων (Περίπτωση 1)				
$p_1 = k$	$p_2 = k_1$	$p_3 = k_2$	$p_4 = m_1$	$p_5 = m_2$
1.00	10.00	5.00	0.20	3.00

**Πίνακας 7.** Τιμές των παραμέτρων  $p_1 - p_5$  της Περίπτωσης 1

Τιμές παραμέτρων (Περίπτωση 1)				
$p_6 = \zeta_1$	$p_7 = \zeta_2$	$p_8 = D$	$p_9 = \Delta L$	$p_{10} = A$
3.00	0.01	0.20	0.10	1.00

**Πίνακας 8.** Τιμές των παραμέτρων  $p_5 - p_{10}$  της Περίπτωσης 1

Τιμές παραμέτρων (Περίπτωση 1)				
$p_{11} = \omega_1$	$p_{12} = \omega_2$	$p_{13} = c_1$	$p_{14} = c_2$	$p_{15} = L$
7.07	1.29	8.48	0.08	0.22

**Πίνακας 9.** Τιμές των παραμέτρων  $p_{10} - p_{15}$  της Περίπτωσης 1

#### 4.1.4 Περίπτωση 2

Για την τιμή της παραμέτρου  $p_6 = \zeta_1$  αυξάνουμε και ελαττώνουμε τις άλλες παραμέτρους κατά δύο (2) τάξεις μεγέθους ( $\times 10^2$ ) και ( $\times 10^{-2}$ ) και παίρνουμε τις ιδιοτιμές που φαίνονται στον Πίνακα 22. Βλέπουμε πως κυρίως η αύξηση της  $p_2 = k_1$  ή η ελάττωση της  $p_4 = m_1$  μας δίνει ιδιοτιμές της μορφής που θέλουμε.

Κρατάμε για την  $p_6 = \zeta_1$  την τιμή 3.00, εκλέγουμε για την  $p_2 = k_1$  την τιμή 100.00 από 10.00 ενώ κρατάμε ίδιες τις άλλες παραμέτρους. Αυτό μας δίνει για την απόσβεση  $c_1$  και για τη συχνότητα  $\omega_1$  τις τιμές  $p_{13} = c_1 = 26.83$  και  $p_{11} = \omega_1 = 22.36$ . Οι ιδιοτιμές που παίρνουμε φαίνονται στον Πίνακα 23 όπου το πραγματικό μέρος των δύο πρώτων ιδιοτιμών είναι αρνητικό και κατ' απόλυτη τιμή πολύ μεγαλύτερο από το φανταστικό, ενώ οι επόμενες δύο ιδιοτιμές σχηματίζουν ένα μιγαδικό ζευγάρι. Σε σύγκριση με την Περίπτωση 1 η διαφορά μεταξύ πραγματικού και φανταστικού μέρους είναι σαφώς μεγαλύτερη για κάθε ιδιοτιμή, καθώς επίσης μεγαλύτερη είναι και η διαφορά μεταξύ των πραγματικών μερών των αντίστοιχων ιδιοτιμών.

Στους Πίνακες 10, 11, 12 παρουσιάζονται οι τιμές των παραμέτρων  $p_1 - p_{15}$

Τιμές παραμέτρων (Περίπτωση 2)				
$p_1 = k$	$p_2 = k_1$	$p_3 = k_2$	$p_4 = m_1$	$p_5 = m_2$
1.00	100.00	5.00	0.20	3.00

**Πίνακας 10.** Τιμές των παραμέτρων  $p_1 - p_5$  της Περίπτωσης 2

Τιμές παραμέτρων (Περίπτωση 2)				
$p_6 = \zeta_1$	$p_7 = \zeta_2$	$p_8 = D$	$p_9 = \Delta L$	$p_{10} = A$
3.00	0.01	0.20	0.10	1.00

**Πίνακας 11.** Τιμές των παραμέτρων  $p_5 - p_{10}$  της Περίπτωσης 2

Τιμές παραμέτρων (Περίπτωση 2)				
$p_{11} = \omega_1$	$p_{12} = \omega_2$	$p_{13} = c_1$	$p_{14} = c_2$	$p_{15} = L$
22.36	1.29	26.83	0.08	0.22

**Πίνακας 12.** Τιμές των παραμέτρων  $p_{10} - p_{15}$  της Περίπτωσης 2

#### 4.1.5 Περίπτωση 3

Για τις τιμές των παραμέτρων  $p_2 = k_1$  και  $p_6 = \zeta_1$  αυξάνουμε και ελαττώνουμε τις άλλες παραμέτρους κατά δύο (2) τάξεις μεγέθους ( $\times 10^2$ ) και ( $\times 10^{-2}$ ) και παίρνουμε τις ιδιοτιμές που φαίνονται στον Πίνακα 24. Βλέπουμε πως κυρίως η ελάττωση της  $p_4 = m_1$  μας δίνει ιδιοτιμές της μορφής που θέλουμε.

Κρατάμε για την  $p_6 = \zeta_1$  την τιμή 3.00, για την  $p_2 = k_1$  την τιμή 100.00 και εκλέγουμε για την  $p_4 = m_1$  την τιμή 0.02 από 0.20 ενώ κρατάμε ίδιες τις άλλες παραμέτρους. Αυτό μας δίνει για την απόσβεση  $c_1$  και για τη συχνότητα  $\omega_1$  τις τιμές  $p_{13} = c_1 = 8.48$  και  $p_{11} = \omega_1 = 70.71$ .

Οι ιδιοτιμές που παίρνουμε φαίνονται στον Πίνακα 25 όπου το πραγματικό μέρος των δύο πρώτων ιδιοτιμών είναι αρνητικό και κατ' απόλυτη τιμή πολύ μεγαλύτερο από το φανταστικό, ενώ οι επόμενες δύο ιδιοτιμές σχηματίζουν ένα μιγαδικό ζευγάρι. Σε σύγκριση με την Περίπτωση 2 η διαφορά μεταξύ πραγματικού και φανταστικού μέρους είναι σαφώς μεγαλύτερη για κάθε ιδιοτιμή, καθώς επίσης μεγαλύτερη είναι και η διαφορά μεταξύ των πραγματικών μερών των αντίστοιχων ιδιοτιμών. Πιο συγκεκριμένα οι διαφορές είναι μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες διαφορές μεταξύ των Περιπτώσεων 1 και 2.

Στους Πίνακες 13, 14, 15 παρουσιάζονται οι τιμές των παραμέτρων  $p_1 - p_{15}$

Τιμές παραμέτρων (Περίπτωση 3)				
$p_1 = k$	$p_2 = k_1$	$p_3 = k_2$	$p_4 = m_1$	$p_5 = m_2$
1.00	100.00	5.00	0.02	3.00

**Πίνακας 13.** Τιμές των παραμέτρων  $p_1 - p_5$  της Περίπτωσης 3

Τιμές παραμέτρων (Περίπτωση 3)				
$p_6 = \zeta_1$	$p_7 = \zeta_2$	$p_8 = D$	$p_9 = \Delta L$	$p_{10} = A$
3.00	0.01	0.20	0.10	1.00

**Πίνακας 14.** Τιμές των παραμέτρων  $p_5 - p_{10}$  της Περίπτωσης 3

Τιμές παραμέτρων (Περίπτωση 3)				
$p_{11} = \omega_1$	$p_{12} = \omega_2$	$p_{13} = c_1$	$p_{14} = c_2$	$p_{15} = L$
70.71	1.29	8.48	0.08	0.22

**Πίνακας 15.** Τιμές των παραμέτρων  $p_{10} - p_{15}$  της Περίπτωσης 3

#### 4.1.6 Περίπτωση 4

Εξετάζουμε την περίπτωση όπου διατηρούμε την αρχική τιμή του παράγοντα απόσβεσης  $p_6 = \zeta_1$  και αλλάζουμε τις τιμές των  $p_2 = k_1$  και  $p_4 = m_1$ . Διατηρούμε δηλαδή την αρχική τιμή της απόσβεσης  $p_{11} = c_1 = 0.03$  και αυξάνουμε την τιμή της συχνότητας  $p_{11} = \omega_1 = 70.71$ . Στον Πίνακα 26 βλέπουμε πως δεν παίρνουμε τιμές των ιδιοτιμών της μορφής που θέλουμε. Άρα η αύξηση της απόσβεσης είναι απαραίτητη προκειμένου να έχουμε ένα πρόβλημα της μορφής που περιγράφεται στην παράγραφο 4.1.1

Στους πίνακες 16, 17, 18 παρουσιάζονται οι τιμές των παραμέτρων  $p_1 - p_{15}$

Τιμές παραμέτρων (Περίπτωση 4)				
$p_1 = k$	$p_2 = k_1$	$p_3 = k_2$	$p_4 = m_1$	$p_5 = m_2$
1.00	100.00	5.00	0.02	3.00

**Πίνακας 16.** Τιμές των παραμέτρων  $p_1 - p_5$  της Περίπτωσης 4

Τιμές παραμέτρων (Περίπτωση 4)				
$p_6 = \zeta_1$	$p_7 = \zeta_2$	$p_8 = D$	$p_9 = \Delta L$	$p_{10} = A$
0.01	0.01	0.20	0.10	1.00

**Πίνακας 17.** Τιμές των παραμέτρων  $p_5 - p_{10}$  της Περίπτωσης 4

Τιμές παραμέτρων (Περίπτωση 4)				
$p_{11} = \omega_1$	$p_{12} = \omega_2$	$p_{13} = c_1$	$p_{14} = c_2$	$p_{15} = L$
70.71	1.29	0.03	0.08	0.22

**Πίνακας 18.** Τιμές των παραμέτρων  $p_{10} - p_{15}$  της Περίπτωσης 4

#### 4.1.7 Συμπέρασμα

Γενικά όπως μπορούμε να δούμε στον Πίνακα 19 η αύξηση του παράγοντα απόσβεσης  $\zeta_1$  η οποία οδηγεί σε αύξηση του συντελεστή απόσβεσης  $c_1$ , η αύξηση της σταθεράς ελατηρίου  $k_1$  και η ελάττωση της μάζας  $m_1$  που οδηγούν σε αύξηση της συχνότητας  $\omega_1$ , είναι προς την κατεύθυνση των συστημάτων που αναφέρθηκαν στον πρόλογο και συμφωνούν με την ανάλυση της παραγράφου 4.1.1 σχετικά με τη ζητούμενη μορφή των ιδιοτιμών. Πιο συγκεκριμένα όπως μπορούμε να δούμε στις Περιπτώσεις 1-4 και στον Πίνακα 19 η αύξηση της απόσβεσης  $c_1$  μπορεί από μόνη της να μας δώσει σύστημα της μορφής που θέλουμε, κάτι το οποίο δεν ισχύει για την αύξηση της συχνότητας  $\omega_1$ .

Στον Πίνακα 19 παρουσιάζονται οι μεταβολές των παραμέτρων για όλες τις Περιπτώσεις.

Περιπτώσεις	Τιμές παραμέτρων						
	$p_6 = \zeta_1$	$p_2 = k_1$	$p_4 = m_1$	$p_{13} = c_1$	$p_{11} = \omega_1$	$c_1/c_2$	$\omega_1/\omega_2$
Αρχική περίπτωση	0.01	10.00	0.20	0.03	7.07	0.37	5.48
Περίπτωση 1	3.00	10.00	0.20	8.48	7.07	106.00	5.48
Περίπτωση 2	3.00	100.00	0.20	26.83	22.36	335.37	17.33
Περίπτωση 3	3.00	100.00	0.02	8.48	70.71	106.00	54.81
Περίπτωση 4	0.01	100.00	0.02	0.03	70.71	0.37	54.81

**Πίνακας 19.** Μεταβολές των παραμέτρων για όλες τις Περιπτώσεις

Τιμές παραμέτρων	ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΙΑΚΩΒΙΑΝΗΣ							
	$\lambda_{1r}$	$\lambda_{1i}$	$\lambda_{2r}$	$\lambda_{2i}$	$\lambda_{3r}$	$\lambda_{3i}$	$\lambda_{4r}$	$\lambda_{4i}$
Αρχικό πρόβλημα	-7.07E-02	7.42E+00	-7.07E-02	-7.42E+00	-1.29E-02	1.40E+00	-1.29E-02	-1.40E+00
$p_1 = k(x10^3)$	-6.72E-02	7.32E+01	-6.72E-02	-7.32E+01	-1.65E-02	2.16E+00	-1.65E-02	-2.16E+00
$p_1 = k(x10^{-3})$	-7.07E-02	7.07E+00	-7.07E-02	-7.07E+00	-1.29E-02	1.29E+00	-1.29E-02	-1.29E+00
$p_2 = k_1(x10^3)$	-2.24E+00	2.24E+02	-2.24E+00	-2.24E+02	-1.29E-02	1.41E+00	-1.29E-02	-1.41E+00
$p_2 = k_1(x10^{-3})$	-1.16E-02	1.24E+00	-1.16E-02	-1.24E+00	-3.50E-03	2.35E+00	-3.50E-03	-2.35E+00
$p_3 = k_2(x10^3)$	-4.08E-01	4.08E+01	-4.08E-01	-4.08E+01	-7.07E-02	7.41E+00	-7.07E-02	-7.41E+00
$p_3 = k_2(x10^{-3})$	-7.07E-02	7.42E+00	-7.07E-02	-7.42E+00	-4.47E-04	5.51E-01	-4.47E-04	-5.51E-01
$p_4 = m_1(x10^3)$	-1.29E-02	1.41E+00	-1.29E-02	-1.41E+00	-2.24E-03	2.33E-01	-2.24E-03	-2.33E-01
$p_4 = m_1(x10^{-3})$	-2.24E+00	2.34E+02	-2.24E+00	-2.34E+02	-1.29E-02	1.40E+00	-1.29E-02	-1.40E+00
$p_5 = m_2(x10^3)$	-7.07E-02	7.41E+00	-7.07E-02	-7.41E+00	-4.08E-04	4.44E-02	-4.08E-04	-4.44E-02
$p_5 = m_2(x10^{-3})$	-4.08E-01	4.47E+01	-4.08E-01	-4.47E+01	-7.09E-02	7.36E+00	-7.09E-02	-7.36E+00
$p_6 = \zeta_1(x10^3)$	-1.41E+02	0.00E+00	-3.84E-01	0.00E+00	-1.57E-02	1.41E+00	-1.57E-02	-1.41E+00
$p_6 = \zeta_1(x10^{-3})$	-1.29E-02	1.40E+00	-1.29E-02	-1.40E+00	-7.83E-05	7.42E+00	-7.83E-05	-7.42E+00
$p_7 = \zeta_2(x10^3)$	-2.57E+01	0.00E+00	-7.65E-02	0.00E+00	-7.13E-02	7.41E+00	-7.13E-02	-7.41E+00
$p_7 = \zeta_2(x10^{-3})$	-7.07E-02	7.42E+00	-7.07E-02	-7.42E+00	-5.45E-05	1.40E+00	-5.45E-05	-1.40E+00
$p_8 = D(x10^3)$	-7.07E-02	7.42E+00	-7.07E-02	-7.42E+00	-1.29E-02	1.40E+00	-1.29E-02	-1.40E+00
$p_8 = D(x10^{-3})$	-7.07E-02	7.07E+00	-7.07E-02	-7.07E+00	-1.29E-02	1.29E+00	-1.29E-02	-1.29E+00
$p_9 = \Delta L(x10^3)$	-7.07E-02	7.42E+00	-7.07E-02	-7.42E+00	-1.29E-02	1.40E+00	-1.29E-02	-1.40E+00
$p_9 = \Delta L(x10^{-3})$	-7.07E-02	7.42E+00	-7.07E-02	-7.42E+00	-1.29E-02	1.40E+00	-1.29E-02	-1.40E+00
$p_{10} = A(x10^3)$	-7.07E-02	7.42E+00	-7.07E-02	-7.42E+00	-1.29E-02	1.40E+00	-1.29E-02	-1.40E+00
$p_{10} = A(x10^{-3})$	-7.07E-02	7.42E+00	-7.07E-02	-7.42E+00	-1.29E-02	1.40E+00	-1.29E-02	-1.40E+00

**Πίνακας 20.** Ιδιοτιμές Ιακωβιανής για μεταβολή των παραμέτρων  $p_1 - p_{10}$  κατά τρεις (3) τάξεις μεγέθους. ( $\times 10^{\pm 3}$ )

Τιμές παραμέτρων	ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΙΑΚΩΒΙΑΝΗΣ (Περίπτωση 1)							
	$\lambda_{1r}$	$\lambda_{1i}$	$\lambda_{2r}$	$\lambda_{2i}$	$\lambda_{3r}$	$\lambda_{3i}$	$\lambda_{4r}$	$\lambda_{4i}$
$p_6 = \zeta_1 = 3$	-4.11E+01	0.00E+00	-1.33E+00	0.00E+00	-1.85E-02	1.41E+00	-1.85E-02	-1.41E+00

**Πίνακας 21.** Ιδιοτιμές Ιακωβιανής για την Περίπτωση 1 ( $p_6 = \zeta_1 = 3.00$ )

Τιμές παραμέτρων	ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΙΑΚΩΒΙΑΝΗΣ							
	$\lambda_{1r}$	$\lambda_{1i}$	$\lambda_{2r}$	$\lambda_{2i}$	$\lambda_{3r}$	$\lambda_{3i}$	$\lambda_{4r}$	$\lambda_{4i}$
$p_6 = \zeta_1 = 3$	-4.11E+01	0.00E+00	-1.33E+00	0.00E+00	-1.85E-02	1.41E+00	-1.85E-02	-1.41E+00
$p_1 = k(x10^2)$	-1.99E+01	8.70E+00	-1.99E+01	-8.70E+00	-1.36E+00	1.91E+00	-1.36E+00	-1.91E+00
$p_1 = k(x10^{-2})$	-4.12E+01	0.00E+00	-1.21E+00	0.00E+00	-1.29E-02	1.29E+00	-1.29E-02	-1.29E+00
$p_2 = k_1(x10^2)$	-4.12E+02	0.00E+00	-1.21E+01	0.00E+00	-1.29E-02	1.41E+00	-1.29E-02	-1.41E+00
$p_2 = k_1(x10^{-2})$	-2.04E+00	8.78E-01	-2.04E+00	-8.78E-01	-9.43E-02	1.37E+00	-9.43E-02	-1.37E+00
$p_3 = k_2(x10^2)$	-4.11E+01	0.00E+00	-1.34E+00	0.00E+00	-1.29E-01	1.29E+01	-1.29E-01	-1.29E+01
$p_3 = k_2(x10^{-2})$	-4.11E+01	0.00E+00	-1.32E+00	0.00E+00	-1.13E-02	5.69E-01	-1.13E-02	-5.69E-01
$p_4 = m_1(x10^2)$	-4.11E+00	0.00E+00	-1.32E-01	0.00E+00	-1.38E-02	1.41E+00	-1.38E-02	-1.41E+00
$p_4 = m_1(x10^{-2})$	-4.11E+02	0.00E+00	-1.34E+01	0.00E+00	-1.41E-02	1.40E+00	-1.41E-02	-1.40E+00
$p_5 = m_2(x10^2)$	-4.11E+01	0.00E+00	-1.34E+00	0.00E+00	-1.41E-03	1.40E-01	-1.41E-03	-1.40E-01
$p_5 = m_2(x10^{-2})$	-4.11E+01	0.00E+00	-1.32E+00	0.00E+00	-1.38E-01	1.41E+01	-1.38E-01	-1.41E+01
$p_7 = \zeta_2(x10^2)$	-4.11E+01	0.00E+00	-2.57E+01	0.00E+00	-1.34E+00	0.00E+00	-7.64E-02	0.00E+00
$p_7 = \zeta_2(x10^{-2})$	-4.11E+01	0.00E+00	-1.33E+00	0.00E+00	-5.64E-03	1.41E+00	-5.64E-03	-1.41E+00
$p_8 = D(x10^2)$	-4.11E+01	0.00E+00	-1.33E+00	0.00E+00	-1.85E-02	1.41E+00	-1.85E-02	-1.41E+00
$p_8 = D(x10^{-2})$	-4.11E+01	0.00E+00	-1.33E+00	0.00E+00	-1.85E-02	1.41E+00	-1.85E-02	-1.41E+00
$p_9 = \Delta L(x10^2)$	-4.12E+01	0.00E+00	-1.21E+00	0.00E+00	-1.29E-02	1.29E+00	-1.29E-02	-1.29E+00
$p_9 = \Delta L(x10^{-2})$	-4.11E+01	0.00E+00	-1.33E+00	0.00E+00	-1.85E-02	1.41E+00	-1.85E-02	-1.41E+00
$p_{10} = A(x10^2)$	-4.11E+01	0.00E+00	-1.33E+00	0.00E+00	-1.85E-02	1.41E+00	-1.85E-02	-1.41E+00
$p_{10} = A(x10^{-2})$	-4.11E+01	0.00E+00	-1.33E+00	0.00E+00	-1.85E-02	1.41E+00	-1.85E-02	-1.41E+00

**Πίνακας 22.** Ιδιοτιμές Ιακωβιανής για μεταβολή των παραμέτρων εκτός της  $p_6$  κατά δύο (2) τάξεις μεγέθους. ( $\times 10^{\pm 2}$ )

Τιμές παραμέτρων	ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΙΑΚΩΒΙΑΝΗΣ (Περίπτωση 2)							
	$\lambda_{1r}$	$\lambda_{1i}$	$\lambda_{2r}$	$\lambda_{2i}$	$\lambda_{3r}$	$\lambda_{3i}$	$\lambda_{4r}$	$\lambda_{4i}$
$p_2 = k_1 = 100$ $p_6 = \zeta_1 = 3$	-1.30E+02	0.00E+00	-3.88E+00	0.00E+00	-1.33E-02	1.41E+00	-1.33E-02	-1.41E+00

**Πίνακας 23.** Ιδιοτιμές Ιακωβιανής για την Περίπτωση 2 ( $p_6 = \zeta_1 = 3.00, p_2 = k_1 = 100.00$ )

Τιμές παραμέτρων	ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΙΑΚΩΒΙΑΝΗΣ							
	$\lambda_{1r}$	$\lambda_{1i}$	$\lambda_{2r}$	$\lambda_{2i}$	$\lambda_{3r}$	$\lambda_{3i}$	$\lambda_{4r}$	$\lambda_{4i}$
$p_2 = k_1 = 100$	-1.30E+02	0.00E+00	-3.88E+00	0.00E+00	-1.33E-02	1.41E+00	-1.33E-02	-1.41E+00
$p_6 = \zeta_1 = 3$	-1.26E+02	0.00E+00	-5.94E+00	0.00E+00	-9.90E-01	4.83E+00	-9.90E-01	-4.83E+00
$p_1 = k(x10^2)$	-1.30E+02	0.00E+00	-3.84E+00	0.00E+00	-1.29E-02	1.29E+00	-1.29E-02	-1.29E+00
$p_3 = k_2(x10^2)$	-1.30E+02	0.00E+00	-3.88E+00	0.00E+00	-1.29E-01	1.29E+01	-1.29E-01	-1.29E+01
$p_3 = k_2(x10^{-2})$	-1.30E+02	0.00E+00	-3.88E+00	0.00E+00	-1.72E-03	5.88E-01	-1.72E-03	-5.88E-01
$p_4 = m_1(x10^2)$	-1.30E+01	0.00E+00	-3.87E-01	0.00E+00	-1.32E-02	1.41E+00	-1.32E-02	-1.41E+00
$p_4 = m_1(x10^{-2})$	-1.30E+03	0.00E+00	-3.88E+01	0.00E+00	-1.30E-02	1.41E+00	-1.30E-02	-1.41E+00
$p_5 = m_2(x10^2)$	-1.30E+02	0.00E+00	-3.88E+00	0.00E+00	-1.30E-03	1.41E-01	-1.30E-03	-1.41E-01
$p_5 = m_2(x10^{-2})$	-1.30E+02	0.00E+00	-3.87E+00	0.00E+00	-1.32E-01	1.41E+01	-1.32E-01	-1.41E+01
$p_7 = \zeta_2(x10^2)$	-1.30E+02	0.00E+00	-3.87E+00	0.00E+00	-1.29E+00	5.72E-01	-1.29E+00	-5.72E-01
$p_7 = \zeta_2(x10^{-2})$	-1.30E+02	0.00E+00	-3.88E+00	0.00E+00	-5.13E-04	1.41E+00	-5.13E-04	-1.41E+00
$p_8 = D(x10^2)$	-1.30E+02	0.00E+00	-3.88E+00	0.00E+00	-1.33E-02	1.41E+00	-1.33E-02	-1.41E+00
$p_8 = D(x10^{-2})$	-1.30E+02	0.00E+00	-3.88E+00	0.00E+00	-1.33E-02	1.41E+00	-1.33E-02	-1.41E+00
$p_9 = \Delta L(x10^2)$	-1.30E+02	0.00E+00	-3.84E+00	0.00E+00	-1.29E-02	1.29E+00	-1.29E-02	-1.29E+00
$p_9 = \Delta L(x10^{-2})$	-1.30E+02	0.00E+00	-3.88E+00	0.00E+00	-1.33E-02	1.41E+00	-1.33E-02	-1.41E+00
$p_{10} = A(x10^2)$	-1.30E+02	0.00E+00	-3.88E+00	0.00E+00	-1.33E-02	1.41E+00	-1.33E-02	-1.41E+00
$p_{10} = A(x10^{-2})$	-1.30E+02	0.00E+00	-3.88E+00	0.00E+00	-1.33E-02	1.41E+00	-1.33E-02	-1.41E+00

**Πίνακας 24.** Ιδιιοτιμές Ιακωβιανής για μεταβολή των παραμέτρων εκτός των  $p_6, p_2$  κατά δύο (2) τάξεις μεγέθους. ( $\times 10^{\pm 2}$ )

Τιμές παραμέτρων	ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΙΑΚΩΒΙΑΝΗΣ (Περίπτωση 3)							
	$\lambda_{1r}$	$\lambda_{1i}$	$\lambda_{2r}$	$\lambda_{2i}$	$\lambda_{3r}$	$\lambda_{3i}$	$\lambda_{4r}$	$\lambda_{4i}$
$p_6 = \zeta_1 = 3,$ $p_2 = k_1 = 100$ $p_4 = m_1 = 0.02$	-4.12E+02	0.00E+00	-1.23E+01	0.00E+00	-1.30E-02	1.41E+00	-1.30E-02	-1.41E+00

**Πίνακας 25.** Ιδιιοτιμές Ιακωβιανής για την Περίπτωση 3 ( $p_6 = \zeta_1 = 3.00, p_2 = k_1 = 100.00, p_4 = m_1 = 0.02$ )



Τιμές παραμέτρων	ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΙΑΚΩΒΙΑΝΗΣ (Περίπτωση 4)							
	$\lambda_{1r}$	$\lambda_{1i}$	$\lambda_{2r}$	$\lambda_{2i}$	$\lambda_{3r}$	$\lambda_{3i}$	$\lambda_{4r}$	$\lambda_{4i}$
$p_2 = k_1 = 100$ $p_4 = m_1 = 0.02$	-7.07E-01	7.11E+01	-7.07E-01	-7.11E+01	-1.29E-02	1.41E+00	-1.29E-02	-1.41E+00

**Πίνακας 26.** Ιδιοτιμές Ιακωβιανής για την Περίπτωση 4 ( $p_2 = k_1 = 100.00, p_4 = m_1 = 0.02$ )

## 4.2 Σύγκριση των Περιπτώσεων 1,2,3

### 4.2.1 Γενικά

Με τη βοήθεια του κώδικα LSODE , για τις αρχικές συνθήκες που δίδονται στην παράγραφο 3.4 και για τις Περιπτώσεις (1,2,3) που ορίστηκαν στην παράγραφο 4.1 θα προσδιορίσουμε τις μετατοπίσεις  $u_1, u_2$  των μαζών  $m_1, m_2$ , τις ιδιοτιμές  $\lambda_k$  της Ιακωβιανής, τις χρονοκλίμακες  $\tau_k$  και τα γρήγορα πλάτη  $f^{kr}$  που αντιστοιχούν σε κάθε μεταβλητή.

Κατόπιν για κάθε περίπτωση θα δώσουμε αρχικά τις γραφικές παραστάσεις των μετατοπίσεων  $u_1, u_2$  και κατόπιν, συναρτήσει του χρόνου, τις γραφικές παραστάσεις των πραγματικών μερών των ιδιοτιμών  $\lambda_{kr}$  όπου φαίνονται οι μεταξύ τους διαφορές. Ακολουθούν, πάντα συναρτήσει του χρόνου, οι γραφικές παραστάσεις των χρονοκλιμάκων  $\tau_k$  όπου βλέπουμε τις τιμές που παίρνουν κατά την εξέλιξη του φαινομένου και ορίζεται η χαρακτηριστική χρονοκλίμακα  $\tau_{char}$  η οποία είναι η πιο γρήγορη από τις αργές χρονοκλίμακες. Ορίζεται επίσης το  $\epsilon$  το οποίο είναι ο λόγος της πιο αργής από τις γρήγορες χρονοκλίμακες προς την πιο γρήγορη από τις αργές  $\tau_{char}$  και αποτελεί ένα μέτρο του κενού μεταξύ γρήγορων και αργών χρονοκλιμάκων. Όσο μεγαλύτερο είναι αυτό το κενό τόσο καλύτερη είναι η ακρίβεια προσδιορισμού της ΑΑΠ και του ΑΣ. Δίδονται επίσης οι γραφικές παραστάσεις των πλατών  $f^{kr}$  όπου βλέπουμε ποια από αυτά τείνουν στο μηδέν και με ποιά ταχύτητα.

Από τα παραπάνω μπορούμε να συμπεράνουμε αν έχουμε ένα δύσκαμπτο πρόβλημα όπου υπάρχουν αργές και γρήγορες αποσβετικές χρονοκλίμακες οι οποίες εξαντλούνται σύντομα.

Τέλος οι μη αμελητέες τιμές του CSP pointer μας επισημαίνουν τις γρήγορες μεταβλητές τις οποίες οφείλουμε να γνωρίζουμε προκειμένου να χρησιμοποιήσουμε την τροποποιημένη μέθοδο CSP.

Οι χρονοκλίμακες ορίζονται ως:

$$\tau_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{kr}^2 + \lambda_{ki}^2}},$$

όπου  $\lambda_{kr}$  και  $\lambda_{ki}$  είναι αντίστοιχα το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της ιδιοτιμής  $\lambda_k = \lambda_{kr} + i\lambda_{ki}$ .

Οι ιδιοτιμές  $\lambda_k = \lambda_{kr} + i\lambda_{ki}$  είναι οι ιδιοτιμές της Ιακωβιανής

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial x_1} & \frac{\partial q_1}{\partial x_2} & \frac{\partial q_1}{\partial x_3} & \frac{\partial q_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial q_2}{\partial x_1} & \frac{\partial q_2}{\partial x_2} & \frac{\partial q_2}{\partial x_3} & \frac{\partial q_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial q_3}{\partial x_1} & \frac{\partial q_3}{\partial x_2} & \frac{\partial q_3}{\partial x_3} & \frac{\partial q_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial q_4}{\partial x_1} & \frac{\partial q_4}{\partial x_2} & \frac{\partial q_4}{\partial x_3} & \frac{\partial q_4}{\partial x_4} \end{bmatrix}$$

Τα πλάτη έχουν οριστεί στην παράγραφο 2.2 ως:

$$\mathbf{f}^r = \mathbf{b}^r \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_r^r & \mathbf{b}_s^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{g}^r \\ \mathbf{g}^s \end{bmatrix} = \mathbf{b}_r^r \mathbf{g}^r + \mathbf{b}_s^r \mathbf{g}^s$$

$$\mathbf{f}^s = \mathbf{b}^s \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_r^s & \mathbf{b}_s^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{g}^r \\ \mathbf{g}^s \end{bmatrix} = \mathbf{b}_r^s \mathbf{g}^r + \mathbf{b}_s^s \mathbf{g}^s$$

Οι μεταβλητές του προβλήματος ορίστηκαν στην παράγραφο 3.5 ως ακολούθως:

Μετατόπιση του ταλαντωτή 1:  $x_1 = u_1$

Ταχύτητα του ταλαντωτή 1:  $x_2 = \dot{u}_1$

Μετατόπιση του ταλαντωτή 2:  $x_3 = u_2$

Ταχύτητα του ταλαντωτή 2:  $x_4 = \dot{u}_2$

Γενικά στα γραφήματα όπου χρησιμοποιούνται χρώματα ισχύουν τα ακόλουθα:

1 = Μαύρο, 2 = Κόκκινο, 3 = Πράσινο, 4 = Μπλε.

### 4.2.2 Αρχικό πρόβλημα

Οι τιμές των παραμέτρων και οι ιδιοτιμές της Ιακωβιανής για τις αρχικές συνθήκες που δίδονται στην παράγραφο 3.4 είναι αυτές που προσδιορίστηκαν στην παράγραφο 4.1.2 (Αρχικό πρόβλημα) και φαίνονται στους Πίνακες 27, 28, 29 και 30, 31 αντίστοιχα.

Τιμές παραμέτρων (Αρχικό πρόβλημα)				
$p_1 = k$	$p_2 = k_1$	$p_3 = k_2$	$p_4 = m_1$	$p_5 = m_2$
1.00	10.00	5.00	0.20	3.00

**Πίνακας 27.** Τιμές των παραμέτρων  $p_1 - p_5$  του αρχικού προβλήματος

Τιμές παραμέτρων (Αρχικό πρόβλημα)				
$p_6 = \zeta_1$	$p_7 = \zeta_2$	$p_8 = D$	$p_9 = \Delta L$	$p_{10} = A$
0.01	0.01	0.20	0.10	1.00

**Πίνακας 28.** Τιμές των παραμέτρων  $p_6 - p_{10}$  του αρχικού προβλήματος

Τιμές παραμέτρων (Αρχικό πρόβλημα)				
$p_{11} = \omega_1$	$p_{12} = \omega_2$	$p_{13} = c_1$	$p_{14} = c_2$	$p_{15} = L$
7.07	1.29	0.03	0.08	0.22

**Πίνακας 29.** Τιμές των παραμέτρων  $p_{10} - p_{15}$  του προβλήματος

ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΙΑΚΩΒΙΑΝΗΣ (Αρχικό πρόβλημα)			
$\lambda_{1r}$	$\lambda_{1i}$	$\lambda_{2r}$	$\lambda_{2i}$
-7.07E-02	7.42E+00	-7.07E-02	-7.42E+00

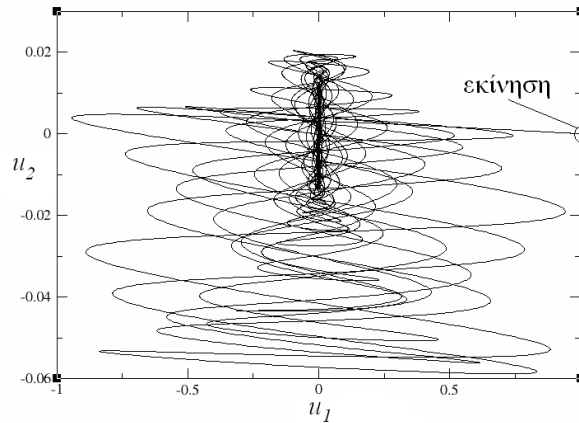
**Πίνακας 30.** Ιδιοτιμές Ιακωβιανής  $\lambda_1, \lambda_2$  αρχικού προβλήματος

ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΙΑΚΩΒΙΑΝΗΣ (Αρχικό πρόβλημα)			
$\lambda_{3r}$	$\lambda_{3i}$	$\lambda_{4r}$	$\lambda_{4i}$
-1.29E-02	1.40E+00	-1.29E-02	-1.40E+00

**Πίνακας 31.** Ιδιοτιμές Ιακωβιανής  $\lambda_3, \lambda_4$  αρχικού προβλήματος

Παρατηρούμε πως το πραγματικό μέρος των δύο πρώτων ιδιοτιμών είναι αρνητικό αλλά κατ' απόλυτη τιμή μικρότερο από το φανταστικό. Δεν έχουμε δηλαδή ένα δύσκαμπτο πρόβλημα στο οποίο υπάρχουν αργές και γρήγορες χρονοκλίμακες.

Στο Σχ. 5 παρουσιάζονται οι μετατοπίσεις  $u_1, u_2$  των μαζών  $m_1, m_2$ . Βλέπουμε πως καθώς η μάζα  $m_1$  τείνει στη θέση ισορροπίας η μάζα  $m_2$  αρχίζει την ταλάντωσή της.



Σχήμα 5. Εξέλιξη στο χρόνο των μετατοπίσεων  $u_1 - u_2$  των μαζών  $m_1, m_2$

### 4.2.3 Περίπτωση 1

Οι τιμές των παραμέτρων και οι ιδιοτιμές της Ιακωβιανής για τις αρχικές συνθήκες που δίδονται στην παράγραφο 3.4 είναι αυτές που προσδιορίστηκαν στην παράγραφο 4.1.3 (Περίπτωση 1) και φαίνονται στους Πίνακες 32, 33, 34 και 35, 36 αντίστοιχα.

Τιμές παραμέτρων (Περίπτωση 1)				
$p_1 = k$	$p_2 = k_1$	$p_3 = k_2$	$p_4 = m_1$	$p_5 = m_2$
1.00	10.00	5.00	0.20	3.00

Πίνακας 32. Τιμές των παραμέτρων  $p_1 - p_5$  για την Περίπτωση 1

Τιμές παραμέτρων (Περίπτωση 1)				
$p_6 = \zeta_1$	$p_7 = \zeta_2$	$p_8 = D$	$p_9 = \Delta L$	$p_{10} = A$
3.00	0.01	0.20	0.10	1.00

Πίνακας 33. Τιμές των παραμέτρων  $p_6 - p_{10}$  για την Περίπτωση 1

Τιμές παραμέτρων (Περίπτωση 1)				
$p_{11} = \omega_1$	$p_{12} = \omega_2$	$p_{13} = c_1$	$p_{14} = c_2$	$p_{15} = L$
7.07	1.29	8.48	0.08	0.22

Πίνακας 34. Τιμές των παραμέτρων  $p_{10} - p_{15}$  για την Περίπτωση 1

Σε σχέση με το αρχικό πρόβλημα υπάρχει η εξής αλλαγή:

$$p_6 = \zeta_1: 0.01 \rightarrow 3.00$$

ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΙΑΚΩΒΙΑΝΗΣ (Περίπτωση 1)			
$\lambda_{1r}$	$\lambda_{1i}$	$\lambda_{2r}$	$\lambda_{2i}$
-4.11E+01	0.00E+00	-1.33E+00	0.00E+00

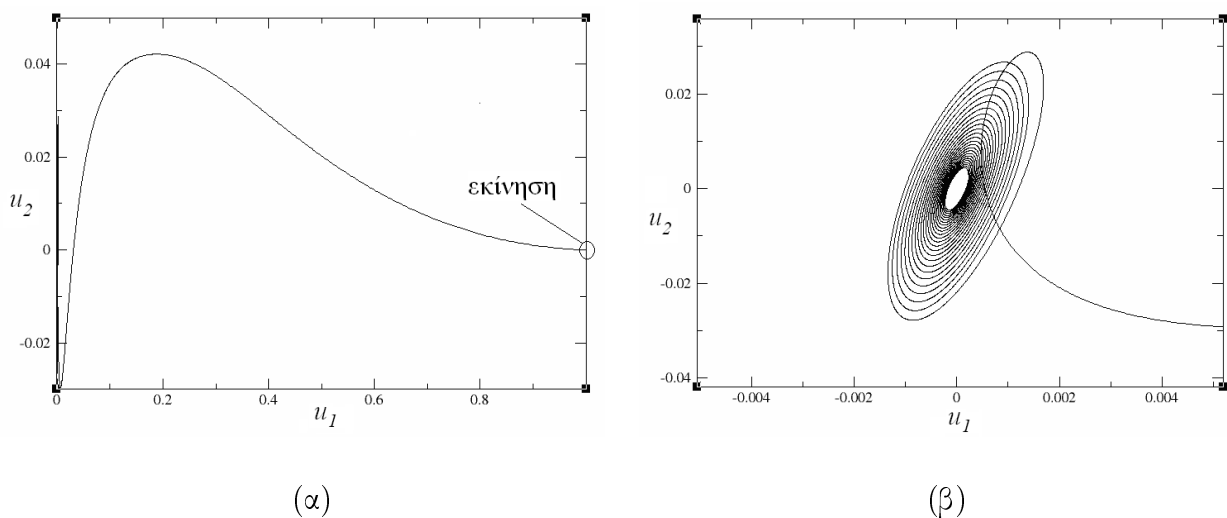
**Πίνακας 35.** Ιδιοτιμές Ιακωβιανής  $\lambda_1, \lambda_2$  για την Περίπτωση 1

ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΙΑΚΩΒΙΑΝΗΣ (Περίπτωση 1)			
$\lambda_{3r}$	$\lambda_{3i}$	$\lambda_{4r}$	$\lambda_{4i}$
-1.85E-02	1.41E+00	-1.85E-02	-1.41E+00

**Πίνακας 36.** Ιδιοτιμές Ιακωβιανής  $\lambda_3, \lambda_4$  για την Περίπτωση 1

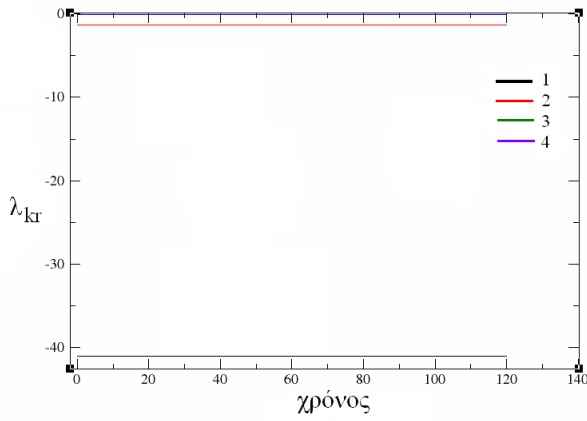
Παρατηρούμε πως το πραγματικό μέρος των δύο πρώτων ιδιοτιμών είναι αρνητικό και κατ' απόλυτη τιμή μεγαλύτερο από το φανταστικό, ενώ οι επόμενες δύο ιδιοτιμές σχηματίζουν ένα μιγαδικό ζευγάρι της μορφής  $\lambda_{3r} + i\lambda_{3i}, \lambda_{4r} - i\lambda_{4i}$  όπου το φανταστικό μέρος είναι πολύ μεγαλύτερο από το πραγματικό. Έχουμε δηλαδή ένα δύσκαμπτο πρόβλημα στο οποίο υπάρχουν αργές και γρήγορες χρονοκλίμακες.

Στο Σχ. 6 παρουσιάζονται οι μετατοπίσεις  $u_1, u_2$  των μαζών  $m_1, m_2$ . Ξεκινάμε με τον ταλαντωτή (1) να ταλαντώνεται και τον (2) να είναι ακίνητος ( $u_1 = 1, u_2 = 0$ ) Σχ. 6(α) και καταλήγουμε να ταλαντώνεται ο (2) σε πλάτη πολύ μεγαλύτερα από αυτά που ταλαντώνεται ο (1) ( $u_1 = \pm 0.002, u_2 = \pm 0.03$ ) Σχ. 6(β).

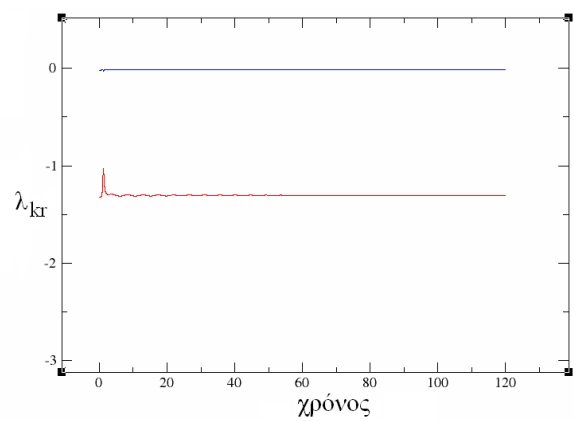


**Σχήμα 6.** (α) Εξέλιξη στο χρόνο των μετατοπίσεων  $u_1 - u_2$  των μαζών  $m_1, m_2$  και (β) μεγέθυνση γύρω από το 0.

Στο Σχ. 7 παρουσιάζονται τα πραγματικά μέρη των ιδιοτιμών της Ιακωβιανής συναρτήσεως του χρόνου. Παρατηρούμε πως υπάρχει κενό μεταξύ των  $\lambda_{1r}$  (μαύρο) και  $\lambda_{2r}$  (κόκκινο) τα οποία παίρνουν αρνητικές τιμές πολύ μικρότερες από αυτές των  $\lambda_{3r}$  (πράσινο) και  $\lambda_{4r}$  (μπλε), τα οποία συμπίπτουν και βρίσκονται πολύ κοντά στο 0. Πιο συγκεκριμένα το  $\lambda_{1r}$  παίρνει τιμές πολύ μικρότερες από το  $\lambda_{2r}$ , το οποίο βρίσκεται κοντά στα  $\lambda_{3r}$  και  $\lambda_{4r}$ .



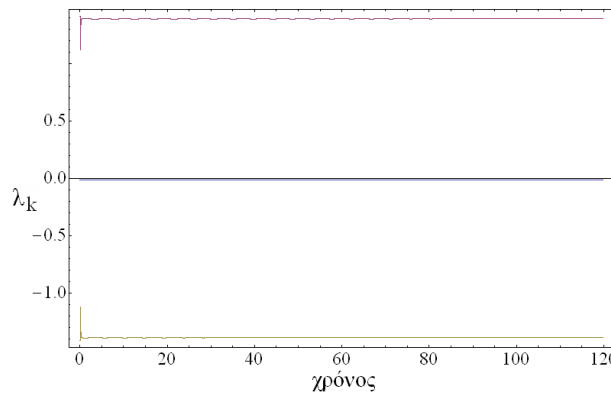
(α)



(β)

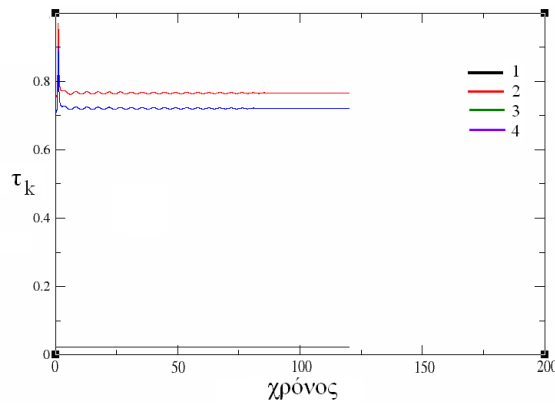
**Σχήμα 7.** (α) Εξέλιξη στο χρόνο των πραγματικών μερών  $\lambda_{kr}$  των τεσσάρων Ιδιοτιμών  $\lambda_k$  της Ιακωβιανής και (β) μεγέθυνση γύρω από το 0.

Στο Σχ. 8 παρουσιάζονται το πραγματικό και τα φανταστικά μέρη των δύο ιδιοτιμών  $\lambda_3$  και  $\lambda_4$  συναρτήσει του χρόνου, οι οποίες σχηματίζουν ένα μιγαδικό ζευγάρι της μορφής  $\lambda_{3r} + i\lambda_{3i}$ ,  $\lambda_{4r} - i\lambda_{4i}$ . Βλέπουμε πως το φανταστικό μέρος ( $\lambda_{3i} = \lambda_{4i} \simeq 1.4$ ) είναι πολύ μεγαλύτερο από το πραγματικό ( $\lambda_{3r} = \lambda_{4r} \simeq 0$ ) και περίπου ίσο με τη συχνότητα της ταλάντωσης ( $\omega = \omega_2 = 1.29$ ). Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε πως πρέπει να υπάρχουν δύο γρήγορες χρονοκλίμακες οι οποίες θα εξαντλούνται πολύ πιο σύντομα από τις αργές.



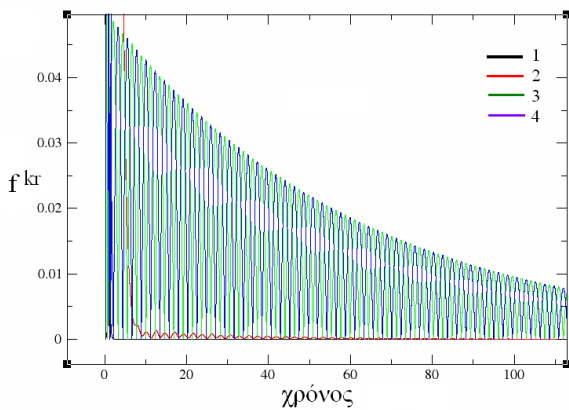
**Σχήμα 8.** Εξέλιξη στο χρόνο του πραγματικού  $\lambda_{3r} = \lambda_{4r}$  και των φανταστικών μερών  $\lambda_{3i}$  και  $\lambda_{4i}$  του μιγαδικού ζεύγους των ιδιοτιμών.

Στο Σχ. 9 παρουσιάζονται οι χρονοκλίμακες, που αντιστοιχούν στις μεταβλητές του προβλήματος, συναρτήσει του χρόνου. Παρατηρούμε πως υπάρχει κενό μεταξύ της χρονοκλίμακας  $\tau_1$  (μαύρο) η οποία σχετίζεται με την ιδιοτιμή  $\lambda_1$  και των  $\tau_2$  (κόκκινο),  $\tau_3$  (πράσινο) και  $\tau_4$  (μπλε) οι οποίες σχετίζονται με τις ιδιοτιμές  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  και  $\lambda_4$ . Η χρονοκλίμακα  $\tau_1$  παίρνει τιμές πολύ μικρότερες από αυτές της  $\tau_2$  η οποία παίρνει τιμές λίγο μεγαλύτερες από τις  $\tau_3, \tau_4$  οι οποίες ταυτίζονται. Υπάρχει δηλαδή μία μόνο γρήγορη χρονοκλίμακα.

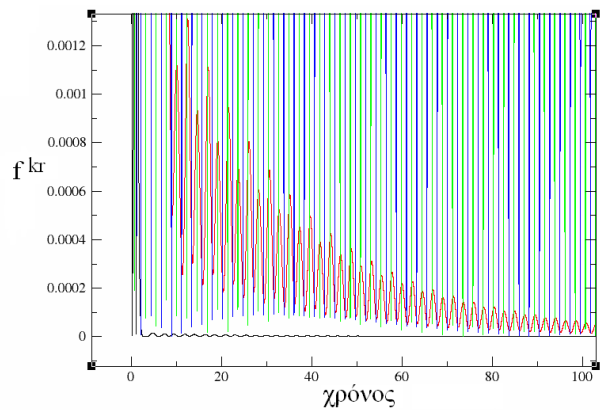


Σχήμα 9. Εξέλιξη στο χρόνο των τεσσάρων Χρονοκλιμάκων  $\tau_k$

Στα Σχ. 10 και Σχ. 11 παρουσιάζονται τα γρήγορα πλάτη  $f^{kr}$ , που αντιστοιχούν στις μεταβλητές του προβλήματος, συναρτήσει του χρόνου. Παρατηρούμε πως από τα τέσσερα πλάτη, τα πλάτη  $f^{1r}$  (μαύρο) και  $f^{2r}$  (κόκκινο) τα οποία σχετίζονται με τις χρονοκλίμακες  $\tau_1$  και  $\tau_2$  τείνουν στο μηδέν. Πιο συγκεκριμένα βλέπουμε πως το πλάτος  $f^{1r}$  τείνει γρήγορα στο μηδέν ενώ το  $f^{2r}$  ακολουθεί, αλλά σαφώς πιο αργά.

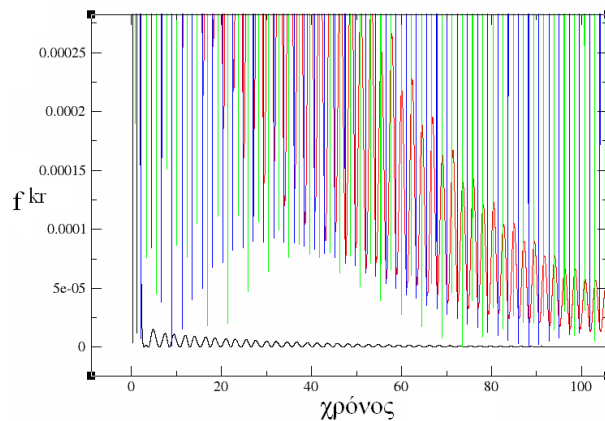


(α)



(β)

Σχήμα 10. (α) Εξέλιξη στο χρόνο των τεσσάρων γρήγορων πλατών  $f^{kr}$  και (β) μεγέθυνση γύρω από το 0.



Σχήμα 11. Εξέλιξη στο χρόνο των δύο πιο γρήγορων πλατών  $f^{1r}$  και  $f^{2r}$

Ο pointer έχει μη μηδενικές τιμές για τις μεταβλητές  $x_1, x_2$ .

#### 4.2.4 Περίπτωση 2

Οι τιμές των παραμέτρων και οι ιδιοτιμές της Ιακωβιανής για τις αρχικές συνθήκες που δίδονται στην παράγραφο 3.4 είναι αυτές που προσδιορίστηκαν στην παράγραφο 4.1.4 (Περίπτωση 2) και φαίνονται στους Πίνακες 37, 38, 39 και 40, 41 αντίστοιχα.

Τιμές παραμέτρων (Περίπτωση 2)				
$p_1 = k$	$p_2 = k_1$	$p_3 = k_2$	$p_4 = m_1$	$p_5 = m_2$
1.00	100.00	5.00	0.20	3.00

**Πίνακας 37.** Τιμές των παραμέτρων  $p_1 - p_5$  για την Περίπτωση 2

Τιμές παραμέτρων (Περίπτωση 2)				
$p_6 = \zeta_1$	$p_7 = \zeta_2$	$p_8 = D$	$p_9 = \Delta L$	$p_{10} = A$
3.00	0.01	0.20	0.10	1.00

**Πίνακας 38.** Τιμές των παραμέτρων  $p_6 - p_{10}$  για την Περίπτωση 2

Τιμές παραμέτρων (Περίπτωση 2)				
$p_{11} = \omega_1$	$p_{12} = \omega_2$	$p_{13} = c_1$	$p_{14} = c_2$	$p_{15} = L$
22.36	1.29	26.83	0.08	0.22

**Πίνακας 39.** Τιμές των παραμέτρων  $p_{10} - p_{15}$  για την Περίπτωση 2

Σε σχέση με το αρχικό πρόβλημα υπάρχουν οι εξής αλλαγές:

$$p_6 = \zeta_1: 0.01 \rightarrow 3.00, p_2 = k_1: 10.00 \rightarrow 100.00$$

ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΙΑΚΩΒΙΑΝΗΣ (Περίπτωση 2)			
$\lambda_{1r}$	$\lambda_{1i}$	$\lambda_{2r}$	$\lambda_{2i}$
-1.30E+02	0.00E+00	-3.88E+00	0.00E+00

**Πίνακας 40.** Ιδιοτιμές Ιακωβιανής  $\lambda_1, \lambda_2$  για την περίπτωση 2

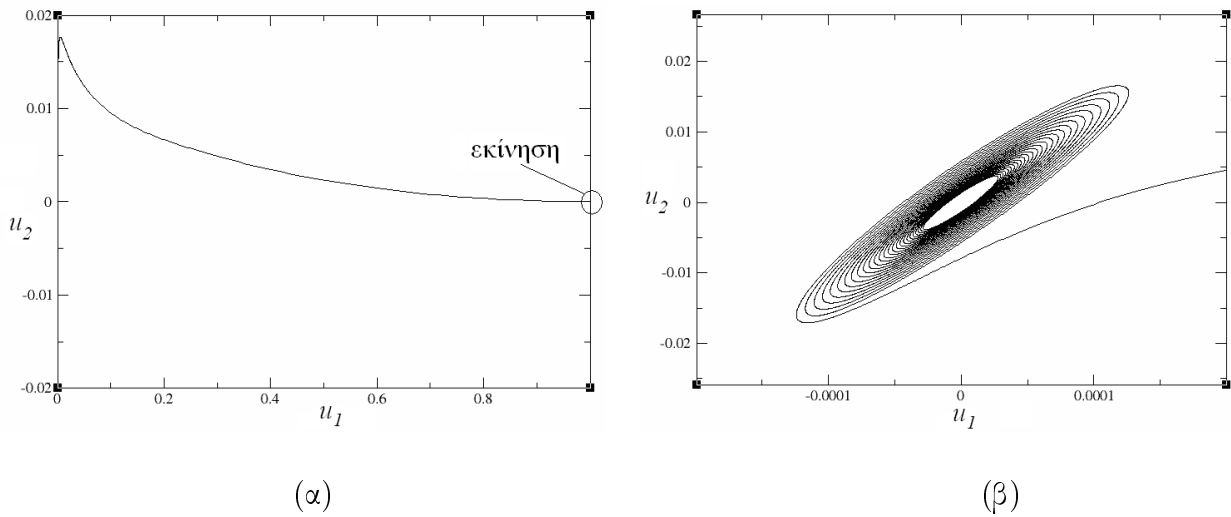
ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΙΑΚΩΒΙΑΝΗΣ (Περίπτωση 2)			
$\lambda_{3r}$	$\lambda_{3i}$	$\lambda_{4r}$	$\lambda_{4i}$
-1.33E-02	1.41E+00	-1.33E-02	-1.41E+00

**Πίνακας 41.** Ιδιοτιμές Ιακωβιανής  $\lambda_3, \lambda_4$  για την περίπτωση 2

Παρατηρούμε πως το πραγματικό μέρος των δύο πρώτων ιδιοτιμών είναι αρνητικό και κατ' ελάχιστον πολύ μεγαλύτερο από το φανταστικό, ενώ οι επόμενες δύο ιδιοτιμές σχηματίζουν ένα μιγαδικό ζευγάρι της μορφής  $\lambda_{3r} + i\lambda_{3i}, \lambda_{4r} - i\lambda_{4i}$  όπου το φανταστικό μέρος είναι πολύ μεγαλύτερο από το πραγματικό. Έχουμε δηλαδή ένα δύσκαμπτο πρόβλημα στο οποίο υπάρχουν αργές και γρήγορες χρονοκλίμακες.

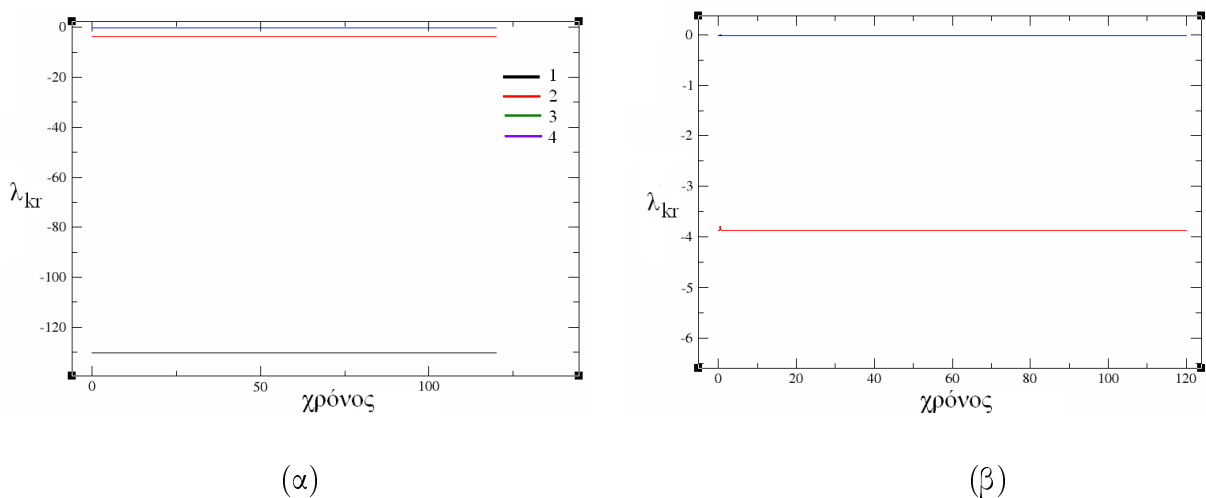
Στο Σχ. 12 παρουσιάζονται οι μετατοπίσεις  $u_1, u_2$  των μαζών  $m_1, m_2$ . Ξεκινάμε με τον ταλαντωτή (1) να ταλαντώνεται και τον (2) να είναι ακίνητος ( $u_1 = 1, u_2 = 0$ ) Σχ.12(α) και κατ' ελάχιστον να ταλαντώνεται ο (2) σε πλάτη πολύ μεγαλύτερα από αυτά που ταλαντώνεται ο (1) ( $u_1 \pm 0.0001, u_2 = \pm 0.02$ ) Σχ.12(β).





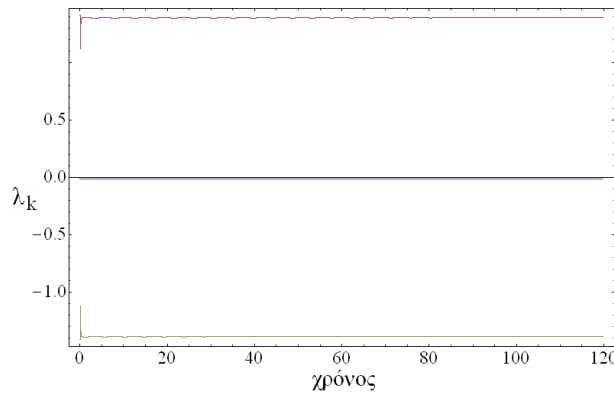
**Σχήμα 12.** (α) Εξέλιξη στο χρόνο των μετατοπίσεων  $u_1 - u_2$  των μαζών  $m_1, m_2$  και (β) μεγέθυνση γύρω από το 0.

Στο Σχ. 13 παρουσιάζονται τα πραγματικά μέρη των ιδιοτιμών της Ιακωβιανής συναρτήσεως του χρόνου. Παρατηρούμε πως υπάρχει κενό μεταξύ των  $\lambda_{1r}$  (μαύρο) και  $\lambda_{2r}$  (κόκκινο) τα οποία παίρνουν αρνητικές τιμές πολύ μικρότερες από αυτές των  $\lambda_{3r}$  (πράσινο) και  $\lambda_{4r}$  (μπλε), τα οποία συμπίπτουν και βρίσκονται πολύ κοντά στο 0. Επίσης παρατηρούμε πως το φαινόμενο αυτό είναι σαφώς πιο έντονο από την Περίπτωση 1. Πιο συγκεκριμένα το κενό μεταξύ των  $\lambda_{1r}$  και  $\lambda_{2r}$  είναι μεγαλύτερο, ενώ και τα δύο βρίσκονται πιο μακριά από τα  $\lambda_{3r}$  και  $\lambda_{4r}$ .



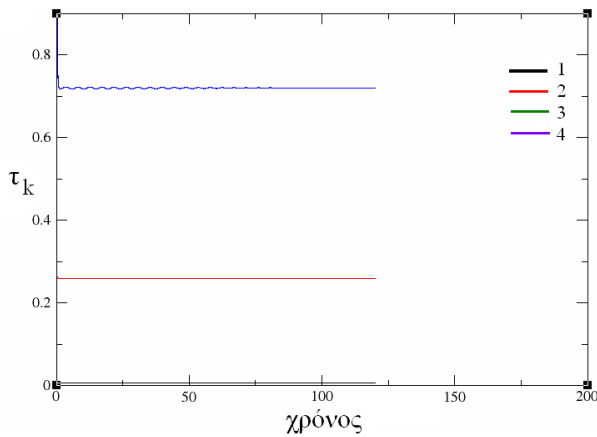
**Σχήμα 13.** (α) Εξέλιξη στο χρόνο των πραγματικών μερών  $\lambda_{kr}$  των τεσσάρων Ιδιοτιμών  $\lambda_k$  της Ιακωβιανής και (β) μεγέθυνση γύρω από το 0.

Στο Σχ. 14 παρουσιάζονται το πραγματικό και τα φανταστικά μέρη των δύο ιδιοτιμών  $\lambda_3$  και  $\lambda_4$  συναρτήσεως του χρόνου, οι οποίες σχηματίζουν ένα μιγαδικό ζευγάρι της μορφής  $\lambda_{3r} + i\lambda_{3i}, \lambda_{4r} - i\lambda_{4i}$ . Βλέπουμε πως το φανταστικό μέρος ( $\lambda_{3i} = \lambda_{4i} \simeq 1.4$ ) είναι πολύ μεγαλύτερο από το πραγματικό και περίπου ίσο με τη συχνότητα της ταλάντωσης ( $\omega = \omega_2 \simeq 1.29$ ). Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε πως υπάρχουν δύο γρήγορες χρονοκλίμακες οι οποίες θα εξαντλούνται πολύ πιο σύντομα από τις αργές.

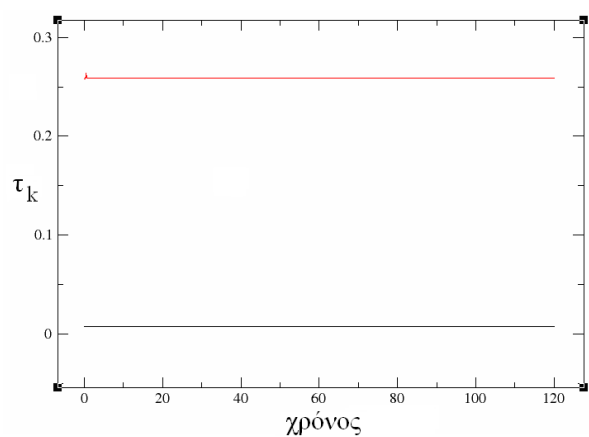


**Σχήμα 14.** Εξέλιξη στο χρόνο του πραγματικού  $\lambda_{3r} = \lambda_{4r}$  και των φανταστικών μερών  $\lambda_{3i}, \lambda_{4i}$  του μιγαδικού ζεύγους των ιδιοτιμών.

Στο Σχ. 15 παρουσιάζονται οι χρονοκλίμακες  $\tau_k$ , που αντιστοιχούν στις μεταβλητές του προβλήματος, συναρτήσει του χρόνου. Παρατηρούμε πως υπάρχει κενό μεταξύ των χρονοκλιμάκων  $\tau_1$  (μαύρο) και  $\tau_2$  (κόκκινο) οι οποίες σχετίζονται με τις ιδιοτιμές  $\lambda_1$  και  $\lambda_2$ , ενώ οι χρονοκλίμακες  $\tau_3$  (πράσινο) και  $\tau_4$  (μπλε) οι οποίες σχετίζονται με τις ιδιοτιμές  $\lambda_3$  και  $\lambda_4$  συμπίπτουν. Η χρονοκλίμακα  $\tau_1$  παίρνει τιμές μικρότερες από αυτές της  $\tau_2$ , αλλά και οι δύο βρίσκονται μακριά από τις  $\tau_3$  και  $\tau_4$ . Γενικά και οι δύο χρονοκλίμακες  $\tau_1$  και  $\tau_2$  παίρνουν τιμές κοντά στο μηδέν και μακριά από την χαρακτηριστική χρονοκλίμακα  $\eta$  οποία ορίζεται ως  $\tau_{char} = \tau_3 = \tau_4$ . Στη συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε  $\epsilon = \tau_2/\tau_{char} = 0.36$ .



(α)

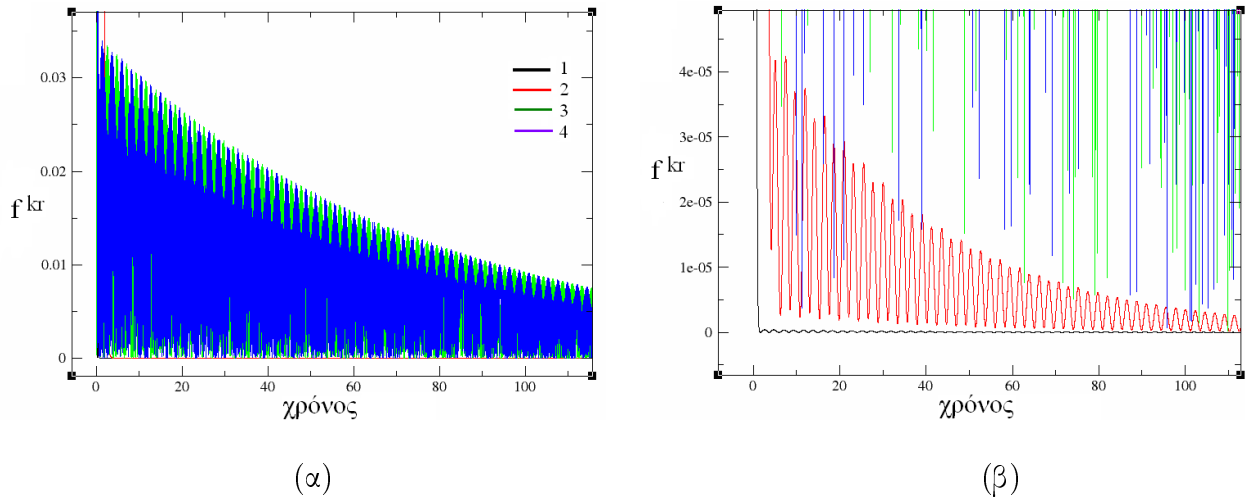


(β)

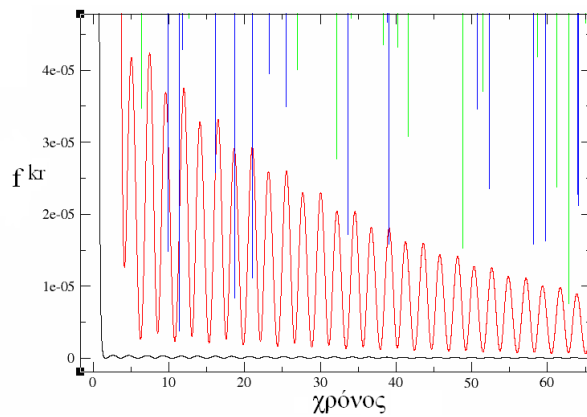
**Σχήμα 15.** (α) Εξέλιξη στο χρόνο των τεσσάρων χρονοκλιμάκων  $\tau_k$  και (β) εξέλιξη στο χρόνο των δύο πιο γρήγορων χρονοκλιμάκων  $\tau_1, \tau_2$ .

Στα Σχ. 16 και Σχ. 17 παρουσιάζονται τα γρήγορα πλάτη  $f^{kr}$ , που αντιστοιχούν στις μεταβλητές του προβλήματος, συναρτήσει του χρόνου. Παρατηρούμε πως από τα τέσσερα πλάτη, τα πλάτη  $f^{1r}$  (μαύρο) και  $f^{2r}$  (κόκκινο) τα οποία σχετίζονται με τις χρονοκλίμακες  $\tau_1$  και  $\tau_2$  τείνουν στο μηδέν. Πιο συγκεκριμένα βλέπουμε πως το πλάτος  $f^{1r}$  τείνει γρήγορα στο μηδέν ενώ το  $f^{2r}$  ακολουθεί πιο αργά αλλά σαφώς και τα δύο τείνουν στο μηδέν πιο γρήγορα από την Περίπτωση 1.

Ο pointer έχει μη μηδενικές τιμές για τις μεταβλητές  $x_1, x_2$  πράγμα το οποίο μας δείχνει πως αυτές είναι οι γρήγορες μεταβλητές του προβλήματος.



Σχήμα 16. (α) Εξέλιξη στο χρόνο των τεσσάρων γρήγορων πλατών  $f^{kr}$  και (β) μεγέθυση γύρω από το 0.



Σχήμα 17. Εξέλιξη στο χρόνο των δύο πιο γρήγορων πλατών  $f^{1r}$  και  $f^{2r}$ .

### 4.2.5 Περίπτωση 3

Οι τιμές των παραμέτρων και οι ιδιοτιμές της Ιακωβιανής για τις αρχικές συνθήκες που δίδονται στην παράγραφο 3.4 είναι αυτές που προσδιορίστηκαν στην παράγραφο 4.1.5 (Περίπτωση 3) και φαίνονται στους Πίνακες 42, 43, 44 και 45, 46 αντίστοιχα.

Τιμές παραμέτρων (Περίπτωση 3)				
$p_1 = k$	$p_2 = k_1$	$p_3 = k_2$	$p_4 = m_1$	$p_5 = m_2$
1.00	100.00	5.00	0.02	3.00

Πίνακας 42. Τιμές των παραμέτρων  $p_1 - p_5$  για την Περίπτωση 3

Τιμές παραμέτρων (Περίπτωση 3)				
$p_6 = \zeta_1$	$p_7 = \zeta_2$	$p_8 = D$	$p_9 = \Delta L$	$p_{10} = A$
3.00	0.01	0.20	0.10	1.00

Πίνακας 43. Τιμές των παραμέτρων  $p_6 - p_{10}$  για την Περίπτωση 3

Τιμές παραμέτρων (Περίπτωση 3)				
$p_{11} = \omega_1$	$p_{12} = \omega_2$	$p_{13} = c_1$	$p_{14} = c_2$	$p_{15} = L$
70.71	1.29	8.48	0.08	0.22

Πίνακας 44. Τιμές των παραμέτρων  $p_{10} - p_{15}$  για την Περίπτωση 3

Σε σχέση με το αρχικό πρόβλημα υπάρχουν οι εξής αλλαγές:

$$p_6 = \zeta_1: 0.01 \rightarrow 3.00, p_2 = 1: 10.00 \rightarrow 100.00, p_4 = m_1: 0.20 \rightarrow 0.02$$

ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΙΑΚΩΒΙΑΝΗΣ (Περίπτωση 3)			
$\lambda_{1r}$	$\lambda_{1i}$	$\lambda_{2r}$	$\lambda_{2i}$
-4.12E+02	0.00E+00	-1.23E+01	0.00E+00

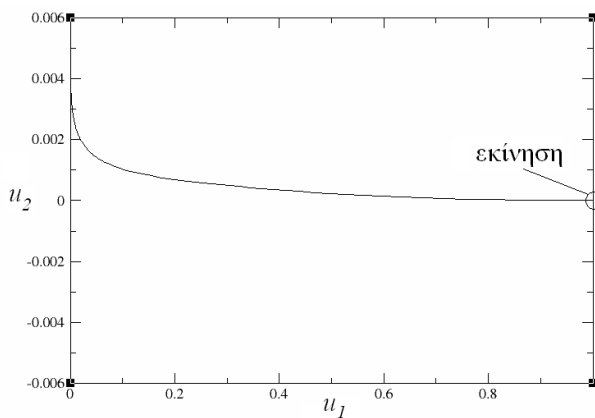
**Πίνακας 45.** Ιδιοτιμές Ιακωβιανής  $\lambda_1, \lambda_2$  για την Περίπτωση 3

ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΙΑΚΩΒΙΑΝΗΣ (Περίπτωση 3)			
$\lambda_{3r}$	$\lambda_{3i}$	$\lambda_{4r}$	$\lambda_{4i}$
-1.30E-02	1.41E+00	-1.30E-02	-1.41E+00

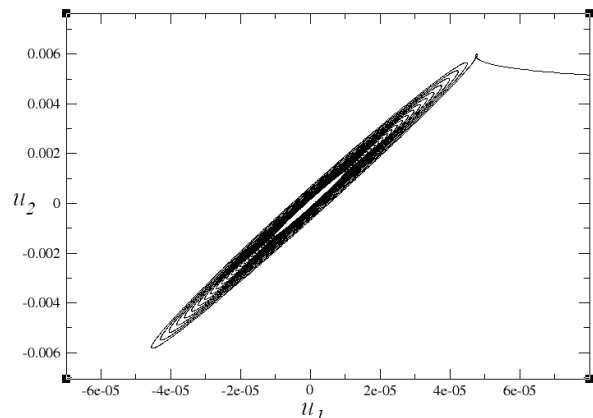
**Πίνακας 46.** Ιδιοτιμές Ιακωβιανής  $\lambda_3, \lambda_4$  για την Περίπτωση 3

Παρατηρούμε πως το πραγματικό μέρος των δύο πρώτων ιδιοτιμών είναι αρνητικό και κατ' α-πόλυτη τιμή πολύ μεγαλύτερο από το φανταστικό, ενώ οι επόμενες δύο ιδιοτιμές σχηματίζουν ένα μιγαδικό ζευγάρι της μορφής  $\lambda_{3r} + i\lambda_{3i}, \lambda_{4r} - i\lambda_{4i}$  όπου το φανταστικό μέρος είναι πολύ μεγαλύτερο από το πραγματικό. Έχουμε δηλαδή ένα δύσκαμπτο πρόβλημα στο οποίο υπάρχουν αργές και γρήγορες χρονοκλίμακες.

Στο Σχ. 18 παρουσιάζονται οι μετατοπίσεις  $u_1, u_2$  των μαζών  $m_1, m_2$ . Ξεκινάμε με τον ταλαντωτή (1) να ταλαντώνεται και τον (2) να είναι ακίνητος ( $u_1 = 1, u_2 = 0$ ) Σχ.18(α) και κα-ταλήγουμε να ταλαντώνεται ο (2) σε πλάτη πολύ μεγαλύτερα από αυτά που ταλαντώνεται ο (1) ( $u_1 = \pm 4E - 05, u_2 = \pm 0.006$ ) Σχ.18(β).



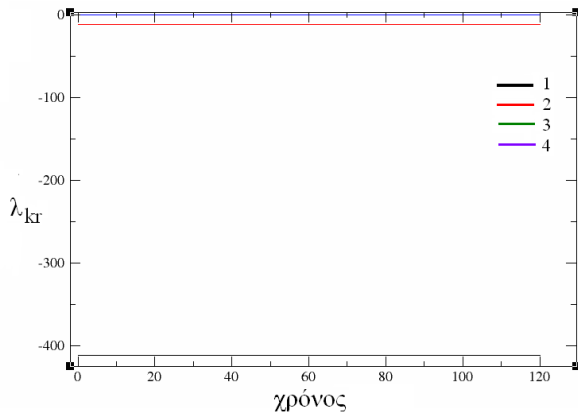
(α)



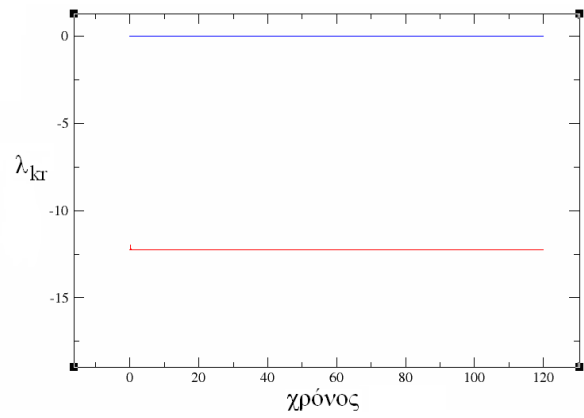
(β)

**Σχήμα 18.** (α) Εξέλιξη στο χρόνο των μετατοπίσεων  $u_1 - u_2$  των μαζών  $m_1, m_2$  και (β) μεγέ-θυνση γύρω από το 0.

Στο Σχ. 19 παρουσιάζονται τα πραγματικά μέρη των ιδιοτιμών  $\lambda_k$  της Ιακωβιανής συναρτήσε-ι του χρόνου. Παρατηρούμε πως υπάρχει κενό μεταξύ των  $\lambda_{1r}$  (μαύρο) και  $\lambda_{2r}$  (κόκκινο) τα οποία παίρνουν αρνητικές τιμές πολύ μικρότερες από αυτές των  $\lambda_{3r}$  (πράσινο) και  $\lambda_{4r}$  (μπλε), τα οποία συμπίπτουν και παίρνουν τιμές πολύ κοντά στο μηδέν. Επίσης παρατηρούμε πως το φαινόμενο αυτό είναι σαφώς πιο έντονο από τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις. Πιο συγκεκριμένα το κενό μεταξύ των  $\lambda_{1r}$  και  $\lambda_{2r}$  είναι μεγαλύτερο, ενώ και τα δύο βρίσκονται πιο μακριά από τα  $\lambda_{3r}$  και  $\lambda_{4r}$ .



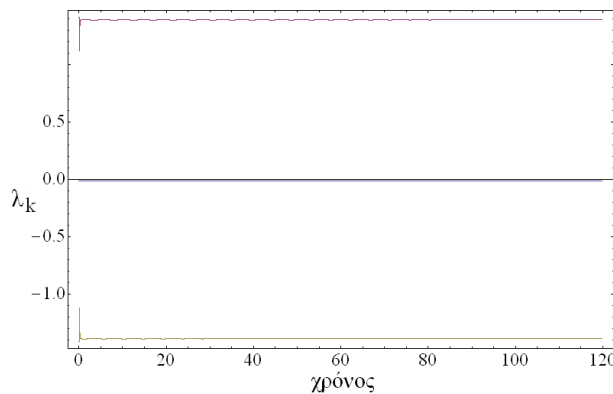
(α)



(β)

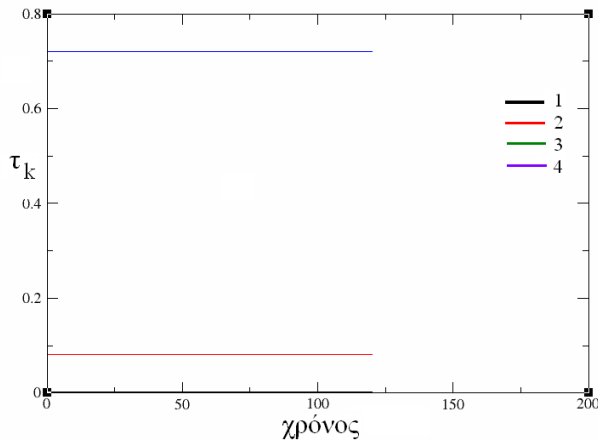
**Σχήμα 19.** (α) Εξέλιξη στο χρόνο των πραγματικών μερών  $\lambda_{kr}$  των τεσσάρων Ιδιοτιμών  $\lambda_k$  της Ιακωβιανής και (β) μεγέθυνση γύρω από το 0.

Στο Σχ. 20 παρουσιάζονται το πραγματικό και τα φανταστικά μέρη των δύο επόμενων ιδιοτιμών  $\lambda_k$  συναρτήσει του χρόνου, οι οποίες σχηματίζουν ένα μιγαδικό ζευγάρι της μορφής  $\lambda_{3r} + i\lambda_{3i}, \lambda_{4r} - i\lambda_{4i}$ . Βλέπουμε πως το φανταστικό μέρος ( $\lambda_{3i} = \lambda_{4i} \simeq 1.4$ ) είναι πολύ μεγαλύτερο από το πραγματικό και περίπου ίσο με τη συχνότητα της ταλάντωσης ( $\omega = \omega_2 = 1.29$ ). Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε πως υπάρχουν δύο γρήγορες χρονοκλίμακες οι οποίες θα εξαντλούνται πολύ πιο γρήγορα από τις αργές.

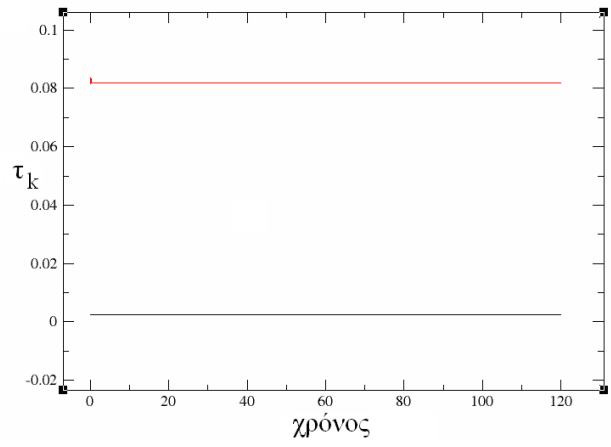


**Σχήμα 20.** Εξέλιξη στο χρόνο του πραγματικού  $\lambda_{3r} = \lambda_{4r}$  και των φανταστικών μερών  $\lambda_{3i}, \lambda_{4i}$  του μιγαδικού ζεύγους των ιδιοτιμών.

Στο Σχ. 21 παρουσιάζονται οι χρονοκλίμακες  $\tau_k$ , που αντιστοιχούν στις μεταβλητές του προβλήματος, συναρτήσει του χρόνου. Παρατηρούμε πως υπάρχει κενό μεταξύ των χρονοκλιμάκων  $\tau_1$  (μαύρο) και  $\tau_2$  (κόκκινο) οι οποίες σχετίζονται με τις ιδιοτιμές  $\lambda_1$  και  $\lambda_2$ , ενώ οι χρονοκλίμακες  $\tau_3$  (πράσινο) και  $\tau_4$  (μπλε) οι οποίες σχετίζονται με τις ιδιοτιμές  $\lambda_3$  και  $\lambda_4$  συμπίπτουν. Η χρονοκλίμακα  $\tau_1$  παίρνει τιμές μικρότερες από αυτές της  $\tau_2$ , ενώ και οι δύο βρίσκονται μακριά από τις  $\tau_3$  και  $\tau_4$  αλλά με σαφώς πιο έντονο τρόπο από την Περίπτωση 2. Γενικά και οι δύο χρονοκλίμακες  $\tau_1$  και  $\tau_2$  παίρνουν τιμές κοντά στο μηδέν και μακριά από την χαρακτηριστική χρονοκλίμακα η οποία ορίζεται ως  $\tau_{char} = \tau_3 = \tau_4$ . Στην συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε  $\epsilon = \tau_2/\tau_{char} = 0.11$  το οποίο είναι μικρότερο από το  $\epsilon = 0.36$  της Περίπτωσης 2 πράγμα το οποίο σημαίνει πως το κενό μεταξύ της πιο αργής  $\tau_2$  από τις γρήγορες χρονοκλίμακες και της χαρακτηριστικής  $\tau_{char}$  είναι μεγαλύτερο και συνεπώς η ακρίβεια προσδιορισμού της ΑΑΠ και του ΑΣ είναι καλύτερη από αυτή της Περίπτωσης 2.



(α)

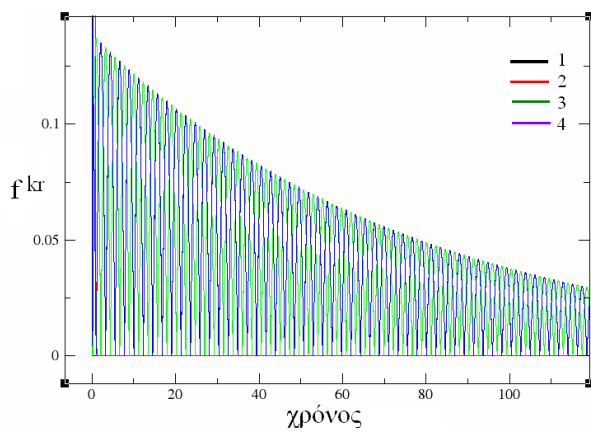


(β)

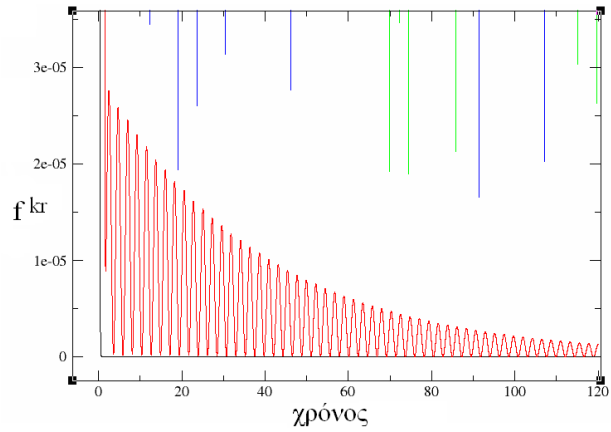
**Σχήμα 21.** (α) Εξέλιξη στο χρόνο των χρονοκλιμάκων  $\tau_k$  και (β) εξέλιξη στο χρόνο των δύο πιο γρήγορων χρονοκλιμάκων  $\tau_1, \tau_2$ .

Στα Σχ. 22 και Σχ. 23 παρουσιάζονται τα γρήγορα πλάτη  $f^{kr}$ , που αντιστοιχούν στις μεταβλητές του προβλήματος, συναρτήσει του χρόνου. Παρατηρούμε πως από τα τέσσερα πλάτη, τα πλάτη  $f^{1r}$  (μαύρο) και  $f^{2r}$  (κόκκινο) τα οποία σχετίζονται με τις χρονοκλίμακες  $\tau_1$  και  $\tau_2$  τείνουν στο μηδέν. Πιο συγκεκριμένα βλέπουμε πως το πλάτος  $f^{1r}$  τείνει γρήγορα στο μηδέν ενώ το  $f^{2r}$  ακολουθεί πιο αργά αλλά και τα δύο τείνουν στο μηδέν σαφώς πιο γρήγορα από τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις.

Ο pointer έχει μη μηδενικές τιμές για τις μεταβλητές  $x_1, x_2$  πράγμα το οποίο μας δείχνει πως αυτές είναι οι γρήγορες μεταβλητές του προβλήματος.

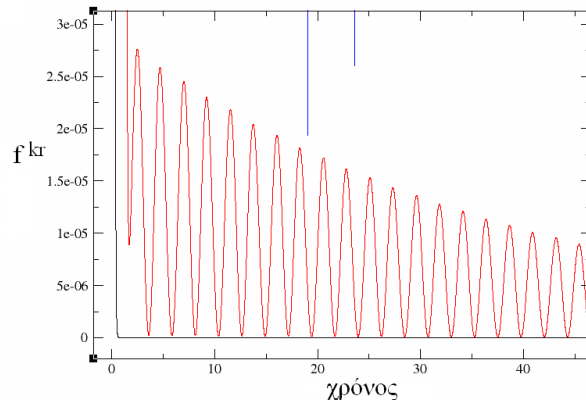


(α)



(β)

**Σχήμα 22.** (α) Εξέλιξη στο χρόνο των τεσσάρων γρήγορων πλατών  $f^{kr}$  και (β) μεγέθυνση γύρω από το 0.



Σχήμα 23. Εξέλιξη στο χρόνο των δύο γρήγορων πλατών  $f^{1r}$ ,  $f^{2r}$ .

### 4.2.6 Εκλογή Περίπτωσης

Στους Πίνακες που ακολουθούν παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της διερεύνησης βάσει των οποίων θα εκλεγεί η Περίπτωση για την οποία θα υπολογίσουμε την ΑΑΠ. Πιο συγκεκριμένα στους Πίνακες 47, 48, 49 παρουσιάζονται οι τιμές των παραμέτρων του αρχικού προβλήματος, ενώ στον Πίνακα 50 παρουσιάζονται οι αλλαγές των παραμέτρων για κάθε περίπτωση. Στη συνέχεια στους Πίνακες 51, 52 παρουσιάζονται οι ιδιοτιμές της Ιακωβιανής (πραγματικά και φανταστικά μέρη αντίστοιχα) ενώ στους Πίνακες 54, 55 παρουσιάζονται οι χρονοκλίμακες, το  $\epsilon$  και τα πλάτη για όλες τις περιπτώσεις.

Τιμές παραμέτρων				
$p_1 = k$	$p_2 = k_1$	$p_3 = k_2$	$p_4 = m_1$	$p_5 = m_2$
1.00	10.00	5.00	0.20	3.00

Πίνακας 47. Τιμές των παραμέτρων  $p_1 - p_5$  του προβλήματος

Τιμές παραμέτρων				
$p_6 = \zeta_1$	$p_7 = \zeta_2$	$p_8 = D$	$p_9 = \Delta L$	$p_{10} = A$
0.01	0.01	0.20	0.10	1.00

Πίνακας 48. Τιμές των παραμέτρων  $p_6 - p_{10}$  του προβλήματος

Τιμές παραμέτρων				
$p_{11} = \omega_1$	$p_{12} = \omega_2$	$p_{13} = c_1$	$p_{14} = c_2$	$p_{15} = L$
7.07	1.29	0.03	0.08	0.22

Πίνακας 49. Τιμές των παραμέτρων  $p_{11} - p_{15}$  του προβλήματος

Περιπτώσεις	Τιμές παραμέτρων						
	$p_6 = \zeta_1$	$p_2 = k_1$	$p_4 = m_1$	$p_{13} = c_1$	$p_{11} = \omega_1$	$c_1/c_2$	$\omega_1/\omega_2$
Αρχική περίπτωση	0.01	10.00	0.20	0.03	7.07	0.37	5.48
Περίπτωση 1	3.00	10.00	0.20	8.48	7.07	106.00	5.48
Περίπτωση 2	3.00	100.00	0.20	26.83	22.36	335.37	17.33
Περίπτωση 3	3.00	100.00	0.02	8.48	70.71	106.00	54.81
Περίπτωση 4	0.01	100.00	0.02	0.03	70.71	0.37	54.81

Πίνακας 50. Μεταβολές των παραμέτρων για όλες τις Περιπτώσεις

Περιπτώσεις	Μετατοπίσεις	
	1	2
Περίπτωση 1	2.00 E-03	3.00 E-02
Περίπτωση 2	1.00 E-04	2.00 E-02
Περίπτωση 3	4.00 E-05	6.00 E-03

**Πίνακας 51.** Μετατοπίσεις όλων των Περιπτώσεων

Περιπτώσεις	Ιδιοτιμές (πραγματικό μέρος)			
	1	2	3	4
Αρχική Περίπτωση	-7.07 E-02	-7.07 E-02	-1.29 E-02	-1.29 E-02
Περίπτωση 1	-4.11 E+01	-1.33 E+00	-1.85 E-02	-1.85 E-02
Περίπτωση 2	-1.30 E+02	-3.88 E+00	-1.33 E-02	-1.33 E-02
Περίπτωση 3	-4.12 E+02	-1.23 E+01	-1.30 E-02	-1.30 E-02
Περίπτωση 4	-7.07 E-01	-7.07 E-01	-1.29 E-02	-1.29 E-02

**Πίνακας 52.** Πραγματικά μέρη Ιδιοτιμών όλων των Περιπτώσεων

Περιπτώσεις	Ιδιοτιμές (φανταστικό μέρος)			
	1	2	3	4
Αρχική Περίπτωση	7.42 E+00	-7.42 E+00	1.40 E+00	-1.40 E+00
Περίπτωση 1	0.00	0.00	1.41 E+00	-1.41 E+00
Περίπτωση 2	0.00	0.00	1.41 E+00	-1.41 E+00
Περίπτωση 3	0.00	0.00	1.41 E+00	-1.41 E+00
Περίπτωση 4	7.11 E+01	-7.11 E+01	1.41 E+00	-1.41 E+00

**Πίνακας 53.** Φανταστικά μέρη Ιδιοτιμών όλων των Περιπτώσεων

Περιπτώσεις	Χρονοκλίμακες				$\epsilon$
	1	2	3	4	
Περίπτωση 1	2.43 E-02	7.54 E-01	7.10 E-01	7.10 E-01	
Περίπτωση 2	7.68 E-03	2.58 E-01	7.08 E-01	7.08 E-01	0.36
Περίπτωση 3	2.43 E-03	8.16 E-02	7.08 E-01	7.08 E-01	0.11

**Πίνακας 54.** Χρονοκλίμακες όλων των Περιπτώσεων

Περιπτώσεις	Πλάτη (μέσες τιμές για $t = 10sec$ )			
	1	2	3	4
Περίπτωση 1	1.00 E-05	8.00 E-04	2.00 E-02	2.00 E-02
Περίπτωση 2	0.00	2.00 E-05	1.50 E-02	1.50 E-02
Περίπτωση 3	0.00	1.00 E-05	6.50 E-02	6.50 E-02

**Πίνακας 55.** Πλάτη όλων των Περιπτώσεων

Στο πρόβλημα το οποίο μας απασχολεί σε κάθε χρονική στιγμή και σε κάθε περίπτωση (1,2,3) υπάρχουν δύο ιδιοτιμές με πραγματικό μέρος αρνητικό και κατ' απόλυτη τιμή πολύ μεγαλύτερο από το φανταστικό, με το φαινόμενο αυτό να παρουσιάζεται πιο έντονο στην περίπτωση 3 όπως μπορεί να φανεί στα σχετικά σχήματα και στους Πίνακες 52, 53. Οι δύο επόμενες ιδιοτιμές σχηματίζουν ένα μιγαδικό ζευγάρι της μορφής  $\lambda_{3r} + i\lambda_{3i}$ ,  $\lambda_{4r} - i\lambda_{4i}$  όπου σε κάθε περίπτωση (1,2,3) το φανταστικό μέρος ( $\lambda_{3i} = \lambda_{4i} \simeq 1.4$ ) είναι πολύ μεγαλύτερο από το πραγματικό και περίπου ίσο με τη συχνότητα της ταλάντωσης ( $\omega = \omega_2 \simeq 1.29$ ). Δεδομένου ότι η χρονοκλίμακα που



αντιστοιχεί σε αυτή την ιδιοτιμή μπορεί να θεωρηθεί ως η χαρακτηριστική  $\tau_{char}$  του συστήματος καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο μέγιστος αριθμός των εξισορροπήσεων και κατ' επέκταση οι γρήγορες χρονοκλίμακες οι οποίες συνδέονται με αυτές είναι δύο.

Παρατηρούμε επίσης (Πίνακας 54) πως στην πρώτη περίπτωση έχουμε μόνο μια γρήγορη χρονοκλίμακα ενώ στη δεύτερη περίπτωση έχουμε δύο γρήγορες χρονοκλίμακες με την απόσταση μεταξύ πρώτης και δεύτερης χρονοκλίμακας είναι σαφώς μεγαλύτερη από την απόσταση μεταξύ της δεύτερης και της χαρακτηριστικής χρονοκλίμακας. Στην τρίτη περίπτωση η διαφορά μεταξύ πρώτης και δεύτερης είναι μικρότερη ενώ η διαφορά μεταξύ δεύτερης και χαρακτηριστικής χρονοκλίμακας είναι σαφώς πιο έντονη. Και στις τρεις Περιπτώσεις ο pointer έχει μη μηδενικές τιμές για τις μεταβλητές  $x_1, x_2$  πράγμα το οποίο μας δείχνει πως αυτές είναι οι γρήγορες μεταβλητές του συστήματος.

Από τους παραπάνω πίνακες και την ανάλυση που προηγήθηκε βλέπουμε πως στην Περίπτωση 3 παρουσιάζεται πιο έντονο το φαινόμενο των αργών και γρήγορων αποσβετικών χρονοκλιμάκων οι οποίες εξαντλούνται σύντομα, πράγμα το οποίο μας βοηθά να προσδιορίσουμε την ΑΑΠ. Επίσης το μεγαλύτερο κενό μεταξύ της πιο αργής από τις γρήγορες χρονοκλίμακες και της χαρακτηριστικής, δείχνει ότι η ακρίβεια προσδιορισμού της ΑΑΠ και του ΑΣ είναι καλύτερη σε αυτή την περίπτωση.

Έτσι θα χρησιμοποιήσουμε την Περίπτωση 3, για την οποία ισχύουν οι τιμές των παραμέτρων που φαίνονται στους Πίνακες 42-44, προκειμένου να υπολογίσουμε την ΑΑΠ με τη βοήθεια της τροποποιημένης μεθόδου CSP εκλέγοντας ως γρήγορες μεταβλητές τις  $x_1, x_2$ .



# Κεφάλαιο 5

## Υπολογισμός της ΑΑΠ

### 5.1 Γενικά

Στο κεφάλαιο αυτό θα υπολογίσουμε την ΑΑΠ για την **Περίπτωση 3**, για τους λόγους που αναφέρθηκαν στην παράγραφο 4.2.6, χρησιμοποιώντας την τροποποιημένη μέθοδο CSP όπως αυτή περιγράφεται στο Κεφάλαιο 2

Από την παράγραφο 3.5 έχουμε για το διάνυσμα των εξαρτημένων μεταβλητών  $\mathbf{y}$ :

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Αν  $\mathbf{g}$  είναι μια αλγεβρική εξίσωση του  $\mathbf{y}$  τότε έχουμε για το σύστημα των τεσσάρων διαφορικών εξισώσεων που περιγράφει την εξέλιξη του φαινομένου:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{g}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

όπου:

$$q_1 = \dot{x}_1 = \dot{u}_1 = x_2 \quad (5.3)$$

$$q_2 = \dot{x}_2 = \ddot{u}_1 = \left(\frac{p_1}{p_4}\right) z_2 z_1 - \left(\frac{p_2}{p_4}\right) x_1 - \left(\frac{p_{13}}{p_4}\right) x_2 \quad (5.4)$$

$$q_3 = \dot{x}_3 = \dot{u}_2 = x_4 \quad (5.5)$$

$$q_4 = \dot{x}_4 = \ddot{u}_2 = -\left(\frac{p_1}{p_5}\right) z_2 z_1 - \left(\frac{p_3}{p_5}\right) x_3 - \left(\frac{p_{14}}{p_5}\right) x_4 \quad (5.6)$$

με  $p_i$  να είναι οι παράμετροι του προβλήματος όπως ορίζονται στην παράγραφο 3.4 και

$$z_0 = (p_8 + x_3 - x_1)^2 + p_9^2 \quad (5.7)$$

$$z_1 = 1 - \frac{p_{15}}{\sqrt{z_0}} \quad (5.8)$$

$$z_2 = p_8 + x_3 - x_1 \quad (5.9)$$

Η Ιακωβιανή του συστήματος είναι:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial x_1} & \frac{\partial q_1}{\partial x_2} & \frac{\partial q_1}{\partial x_3} & \frac{\partial q_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial q_2}{\partial x_1} & \frac{\partial q_2}{\partial x_2} & \frac{\partial q_2}{\partial x_3} & \frac{\partial q_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial q_3}{\partial x_1} & \frac{\partial q_3}{\partial x_2} & \frac{\partial q_3}{\partial x_3} & \frac{\partial q_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial q_4}{\partial x_1} & \frac{\partial q_4}{\partial x_2} & \frac{\partial q_4}{\partial x_3} & \frac{\partial q_4}{\partial x_4} \end{bmatrix}$$

Οι δύο χρονοκλίμακες που εξαντλούνται είναι αυτές που αντιστοιχούν στις μεταβλητές  $x_1, x_2$  όπως προκύπτει από την ανάλυση στο κεφάλαιο 4 ενώ τα πλάτη που συνδέονται με αυτές τις χρονοκλίμακες περιγράφονται σύμφωνα με την παράγραφο 2.3.3 από τις εξισώσεις:

$$\mathbf{F}^r = \mathbf{B}^r \mathbf{g} \quad (5.11)$$

όπου:

$$\mathbf{B}^r = [\mathbf{I}_r - \mathbf{G}_s^r], \quad (5.12)$$

και

$$\mathbf{G}_s^r(n+1) = (\mathbf{J}_r^r - \mathbf{G}_s^r(n) \mathbf{J}_r^s)^{-1} \left[ \mathbf{G}_s^r(n) \mathbf{J}_s^s - \mathbf{J}_s^r + \frac{d\mathbf{G}_s^r(n)}{dt} \right] \quad (5.13)$$

Η εξίσωση  $\mathbf{F}^r = 0$  περιγράφει τη μορφή της ΑΑΠ. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα θα πραγματοποιήσουμε ένα refinement. Οπότε οι εξισώσεις που θα περιγράφουν την ΑΑΠ πριν και μετά το refinement θα είναι αντιστοίχως:

$$\mathbf{F}^{r1} = \mathbf{B}^{r1} \mathbf{g} = 0 \quad (5.14)$$

και

$$\mathbf{F}^{r2} = \mathbf{B}^{r2} \mathbf{g} = 0 \quad (5.15)$$

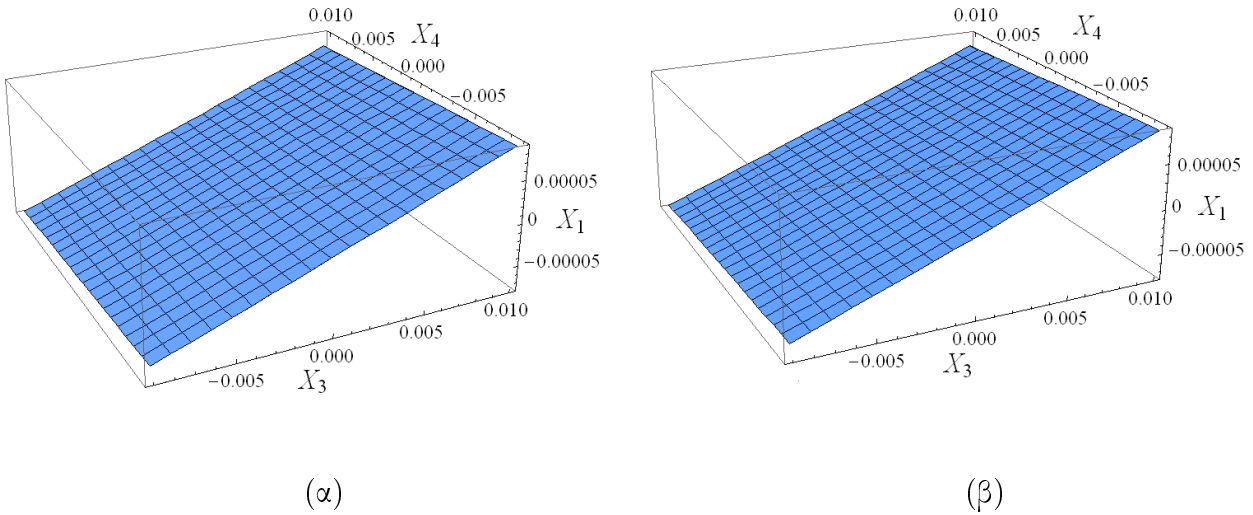
Ακολουθεί παρουσίαση στους χώρους των φάσεων με συντεταγμένες  $x_3, x_4, x_1$  και  $x_3, x_4, x_2$  της ΑΑΠ που περιγράφεται από την εξίσωση  $\mathbf{F}^{r1} = 0$  ή  $\mathbf{F}^{r2} = 0$  στις παρακάτω περιοχές:

- 1)  $x_3, x_4 \in (-0.01, 0.01)$
- 2)  $x_3, x_4 \in (-0.1, 0.1)$
- 3)  $x_3, x_4 \in (-1, 1)$
- 4)  $x_3, x_4 \in (-10, 10)$

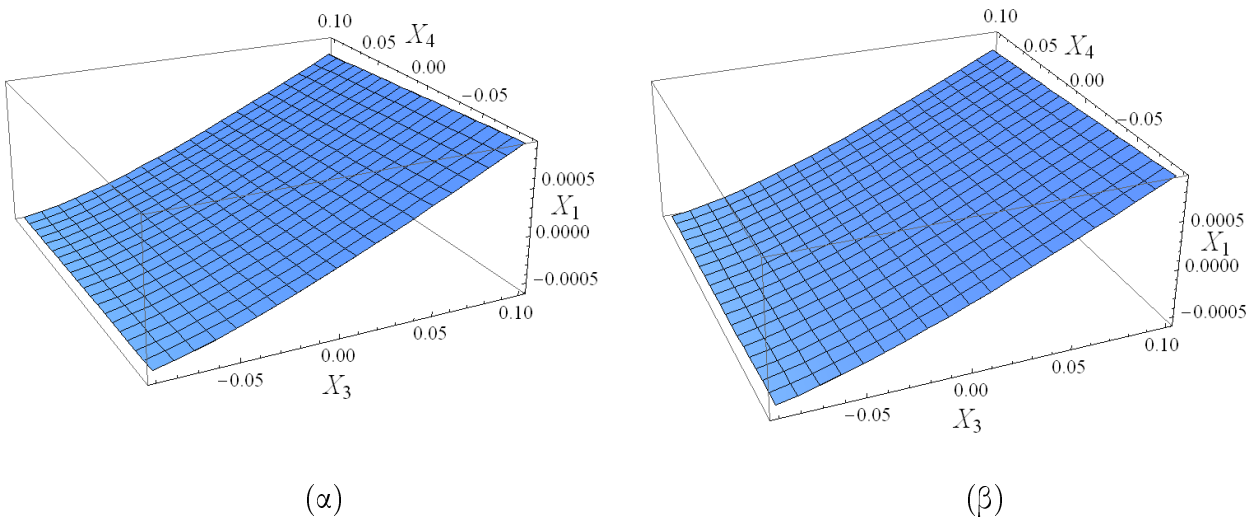
## 5.2 Χώρος φάσεων: $(x_3, x_4, x_1)$

### 5.2.1 ΑΑΠ $\mathbf{F}^{r1} = 0$ και $\mathbf{F}^{r2} = 0$ (refinement)

Στα Σχ. 24, 25 παρουσιάζονται στον χώρο των φάσεων  $x_3, x_4, x_1$  η ΑΑΠ που περιγράφεται από την εξίσωση  $\mathbf{F}^{r1} = 0$  και η ΑΑΠ που προκύπτει μετά το πρώτο refinement και περιγράφεται από την εξίσωση  $\mathbf{F}^{r2} = 0$  σε μια περιοχή γύρω από το  $(0,0)$  με  $x_3, x_4 \in (-0.01, 0.01)$  και  $x_3, x_4 \in (-0.1, 0.1)$

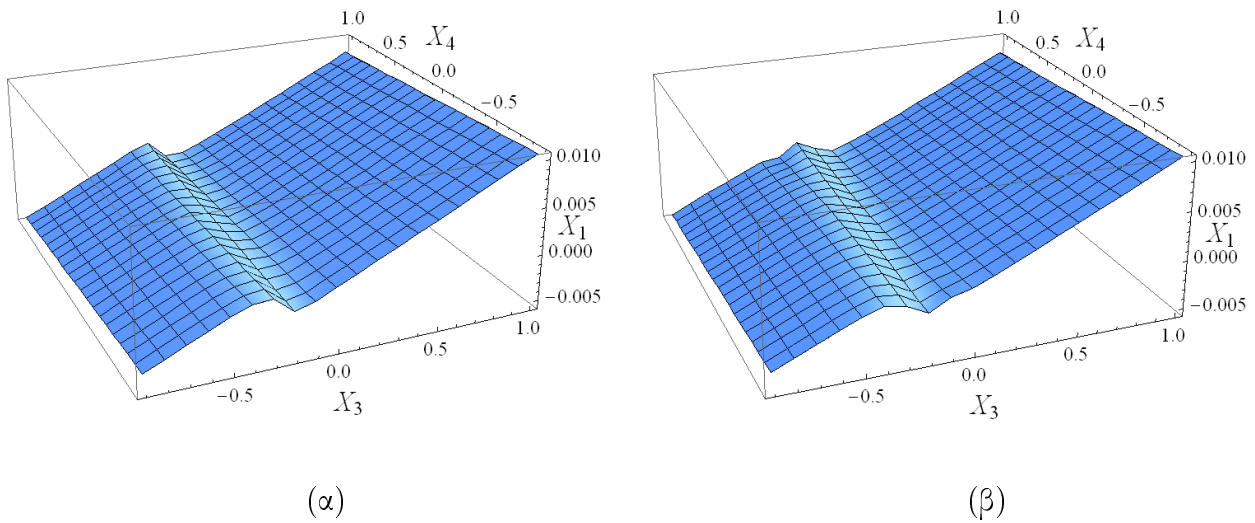


**Σχήμα 24.** Χώρος φάσεων  $x_3, x_4, x_1$  με  $x_3, x_4 \in (-0.01, 0.01)$   
Γραφική αναπαράσταση των ΑΑΠ (α)  $\mathbf{F}^{r1} = 0$  και (β)  $\mathbf{F}^{r2} = 0$ (refinement)

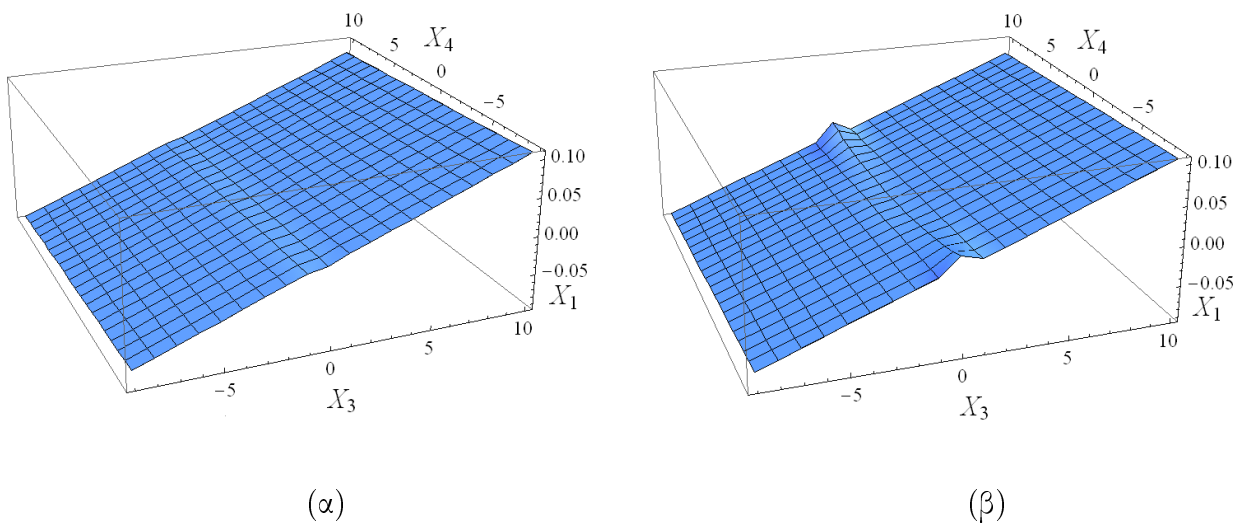


**Σχήμα 25.** Χώρος φάσεων  $x_3, x_4, x_1$  με  $x_3, x_4 \in (-0.1, 0.1)$   
Γραφική αναπαράσταση των ΑΑΠ (α)  $\mathbf{F}^{r1} = 0$  και (β)  $\mathbf{F}^{r2} = 0$ (refinement)

Στα Σχ. 26, 27 παρουσιάζονται στον χώρο των φάσεων  $x_3, x_4, x_1$  η ΑΑΠ που περιγράφεται από την εξίσωση  $\mathbf{F}^{r1} = 0$  και η ΑΑΠ που προκύπτει μετά το πρώτο refinement και περιγράφεται από την εξίσωση  $\mathbf{F}^{r2} = 0$  σε μια περιοχή γύρω από το  $(0,0)$  με  $x_3, x_4 \in (-1, 1)$  και  $x_3, x_4 \in (-10, 10)$ .

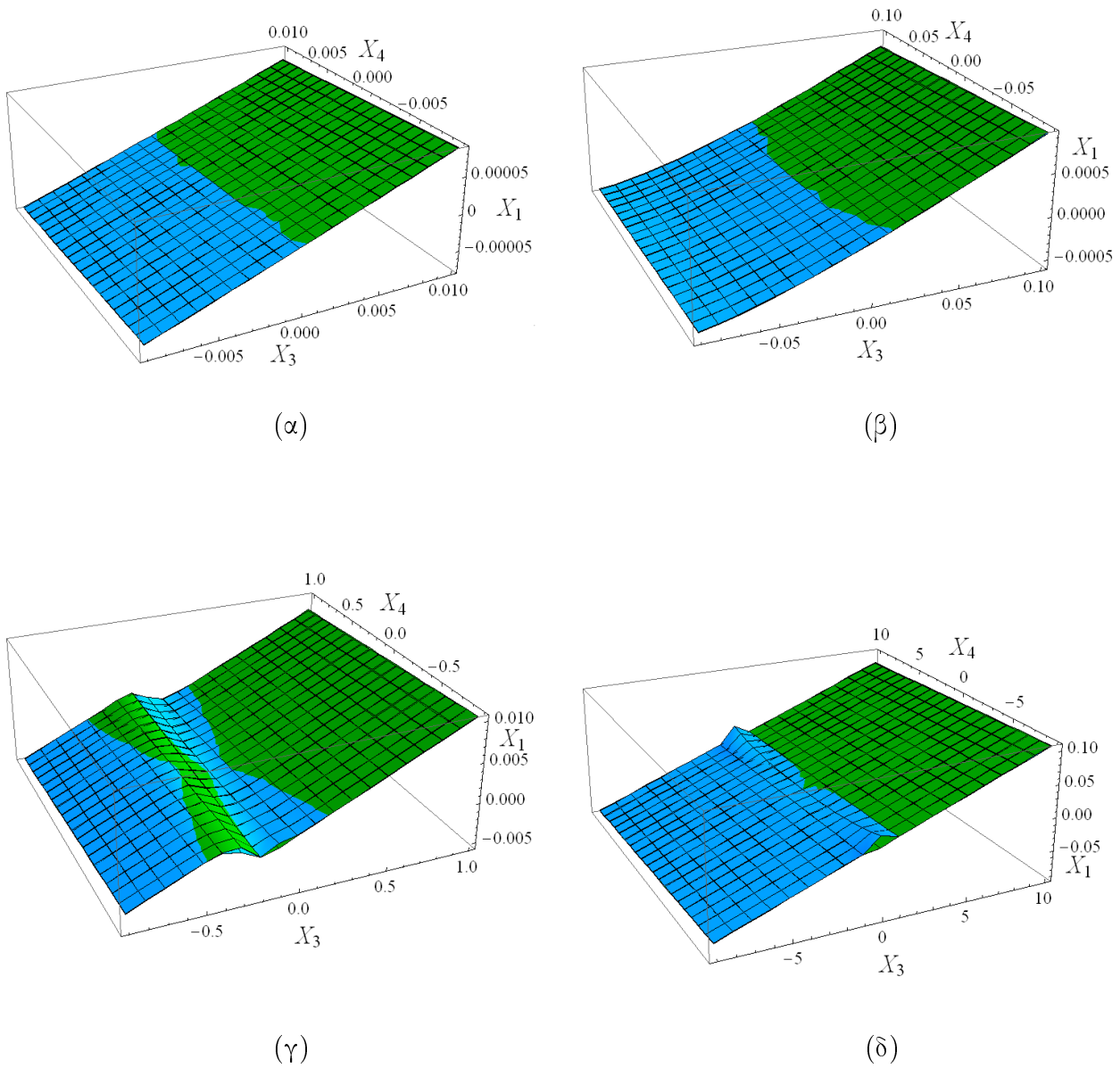


**Σχήμα 26.** Χώρος φάσεων  $x_3, x_4, x_1$  με  $x_3, x_4 \in (-1, 1)$   
 Γραφική αναπαράσταση των ΑΑΠ (α)  $\mathbf{F}^{r1} = 0$  και (β)  $\mathbf{F}^{r2} = 0$ (refinement)



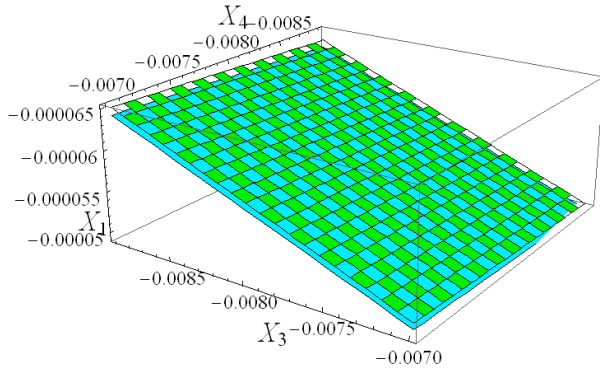
**Σχήμα 27.** Χώρος φάσεων  $x_3, x_4, x_1$  με  $x_3, x_4 \in (-10, 10)$   
 Γραφική αναπαράσταση των ΑΑΠ (α)  $\mathbf{F}^{r1} = 0$  και (β)  $\mathbf{F}^{r2} = 0$ (refinement)

Στο Σχ. 28 παρουσιάζονται ανά ζεύγη στον χώρο των φάσεων  $x_3, x_4, x_1$  η ΑΑΠ που περιγράφεται από την εξίσωση  $\mathbf{F}^{r1} = 0$  (πράσινο χρώμα) και η ΑΑΠ που προκύπτει μετά το πρώτο refinement και περιγράφεται από την εξίσωση  $\mathbf{F}^{r2} = 0$  (μπλε χρώμα) σε μια περιοχή γύρω από το  $(0,0)$  με  $x_3, x_4 \in (-0.01, 0.01)$ ,  $x_3, x_4 \in (-0.1, 0.1)$ ,  $x_3, x_4 \in (-1, -1)$  και  $x_3, x_4 \in (-10, 10)$ .

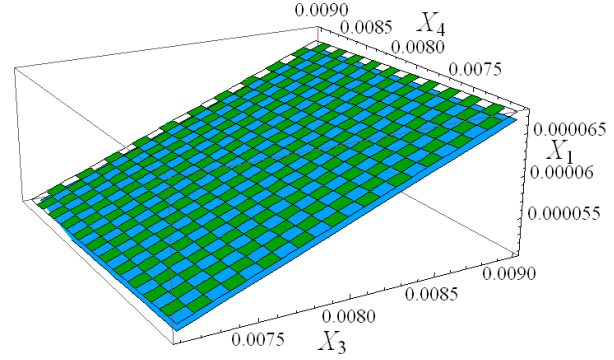


**Σχήμα 28.** Χώρος φάσεων  $x_3, x_4, x_1$   
 Γραφική αναπαράσταση ανά ζεύγη των ΑΑΠ  $\mathbf{F}^{r1} = 0$  και  $\mathbf{F}^{r2} = 0$ (refinement) στις περιοχές:  
 (α)  $x_3, x_4 \in (-0.01, 0.01)$ , (β)  $x_3, x_4 \in (-0.1, 0.1)$ , (γ)  $x_3, x_4 \in (-1, -1)$  και (δ)  $x_3, x_4 \in (-10, 10)$ .

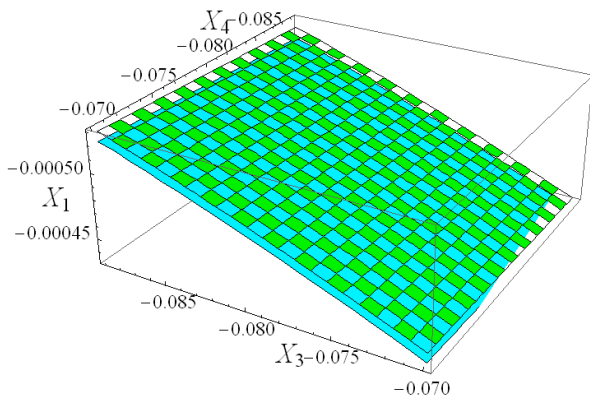
Στο Σχ. 29 παρουσιάζονται ανά ζεύγη στον χώρο των φάσεων  $x_3, x_4, x_1$  η ΑΑΠ που περιγράφεται από την εξίσωση  $\mathbf{F}^{r1} = 0$  (πράσινο χρώμα) και η ΑΑΠ που προκύπτει μετά το πρώτο refinement και περιγράφεται από την εξίσωση  $\mathbf{F}^{r2} = 0$  (μπλε χρώμα) σε περιοχές μακριά από το  $(0,0)$  με  $x_3, x_4 \in (-0.009, -0.007)$ ,  $x_3, x_4 \in (0.007, 0.009)$ ,  $x_3, x_4 \in (-0.09, -0.07)$  και  $x_3, x_4 \in (0.07, 0.09)$ .



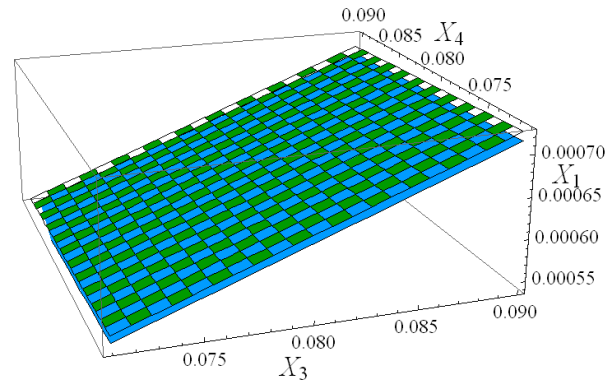
(α)



(β)



(γ)



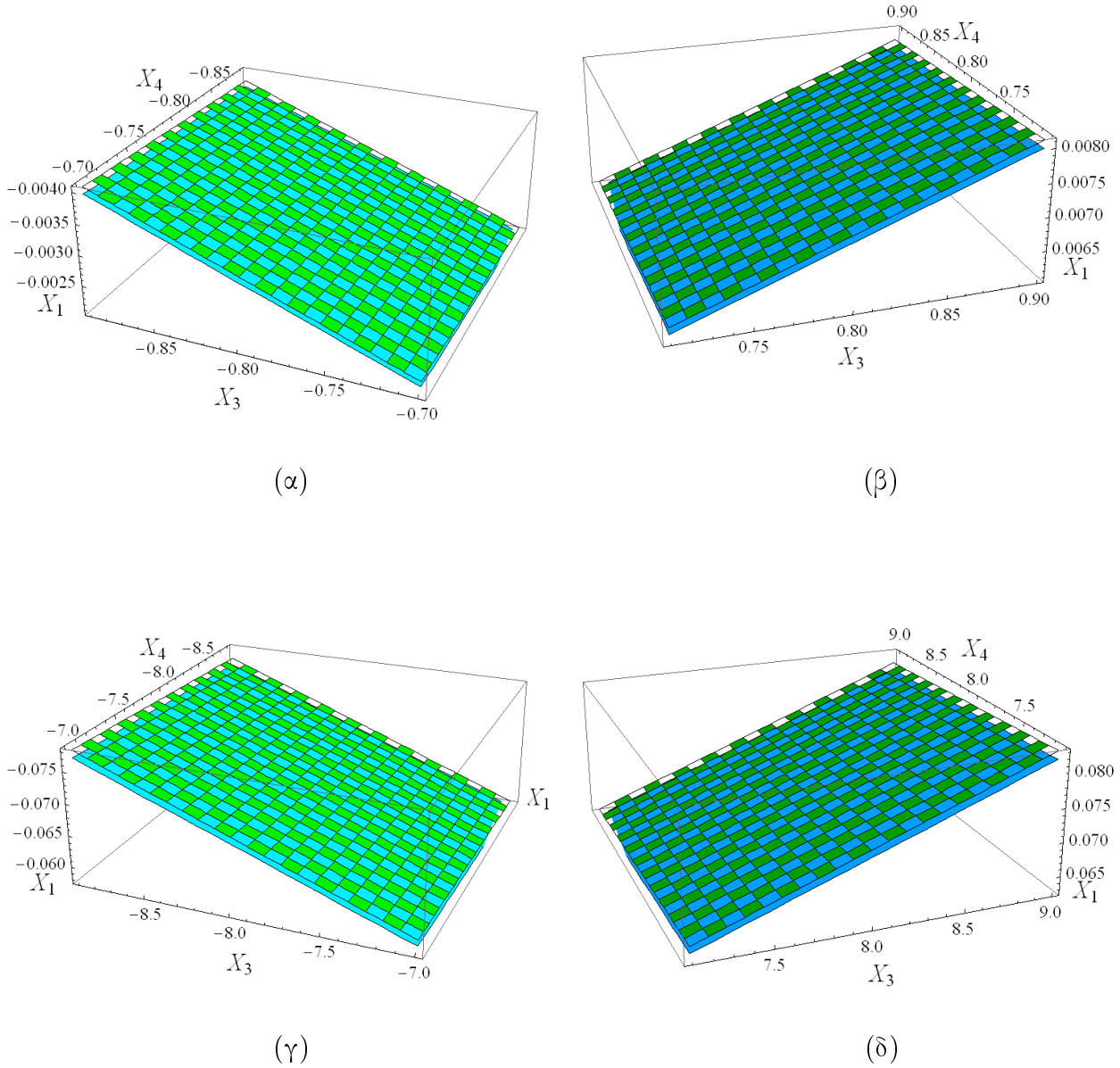
(δ)

**Σχήμα 29.** Χώρος φάσεων  $x_3, x_4, x_1$

Γραφική αναπαράσταση ανά ζεύγη των ΑΑΠ  $\mathbf{F}^{r1} = 0$  και  $\mathbf{F}^{r2} = 0$ (refinement) στις περιοχές: (α)  $x_3, x_4 \in (-0.009, -0.007)$ , (β)  $x_3, x_4 \in (0.007, 0.009)$ , (γ)  $x_3, x_4 \in (-0.09, -0.07)$  και (δ)  $x_3, x_4 \in (0.07, 0.09)$ .



Στο Σχ. 30 παρουσιάζονται ανά ζεύγη στον χώρο των φάσεων  $x_3, x_4, x_1$  η ΑΑΠ που περιγράφεται από την εξίσωση  $\mathbf{F}^{r1} = 0$  (πράσινο χρώμα) και η ΑΑΠ που προκύπτει μετά το πρώτο refinement και περιγράφεται από την εξίσωση  $\mathbf{F}^{r2} = 0$  (μπλε χρώμα) σε περιοχές μακριά από το  $(0,0)$  με  $x_3, x_4 \in (-0.9, -0.7)$ ,  $x_3, x_4 \in (0.7, 0.9)$ ,  $x_3, x_4 \in (-9, -7)$  και  $x_3, x_4 \in (7, 9)$ .

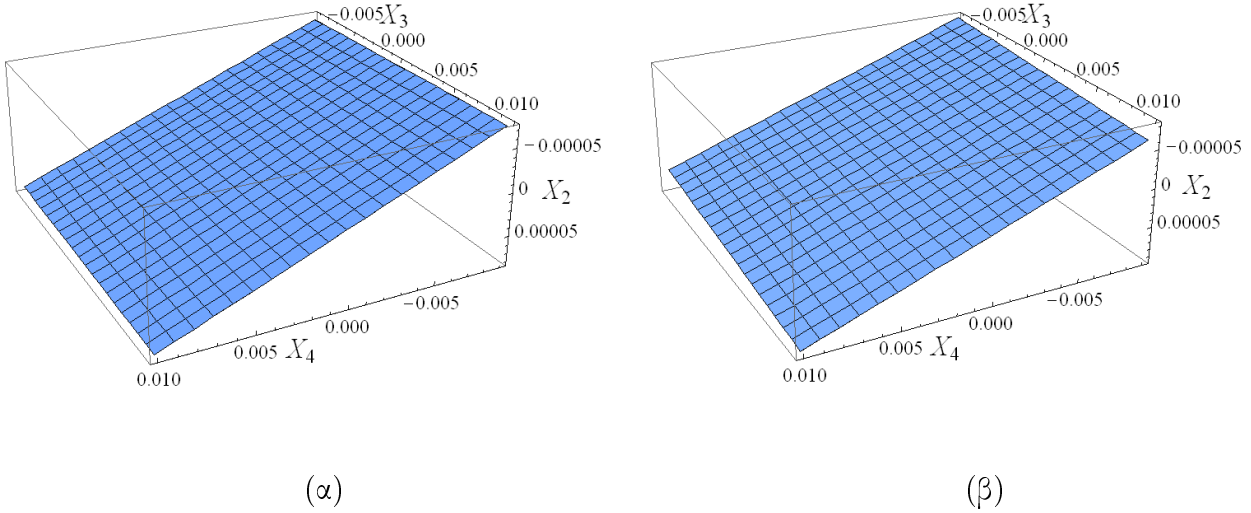


**Σχήμα 30.** Χώρος φάσεων  $x_3, x_4, x_1$   
 Γραφική αναπαράσταση ανά ζεύγη των ΑΑΠ  $\mathbf{F}^{r1} = 0$  και  $\mathbf{F}^{r2} = 0$ (refinement) στις περιοχές:  
 (α)  $x_3, x_4 \in (-0.9, -0.7)$ , (β)  $x_3, x_4 \in (0.7, 0.9)$ , (γ)  $x_3, x_4 \in (-9, -7)$  και (δ)  $x_3, x_4 \in (7, 9)$ .

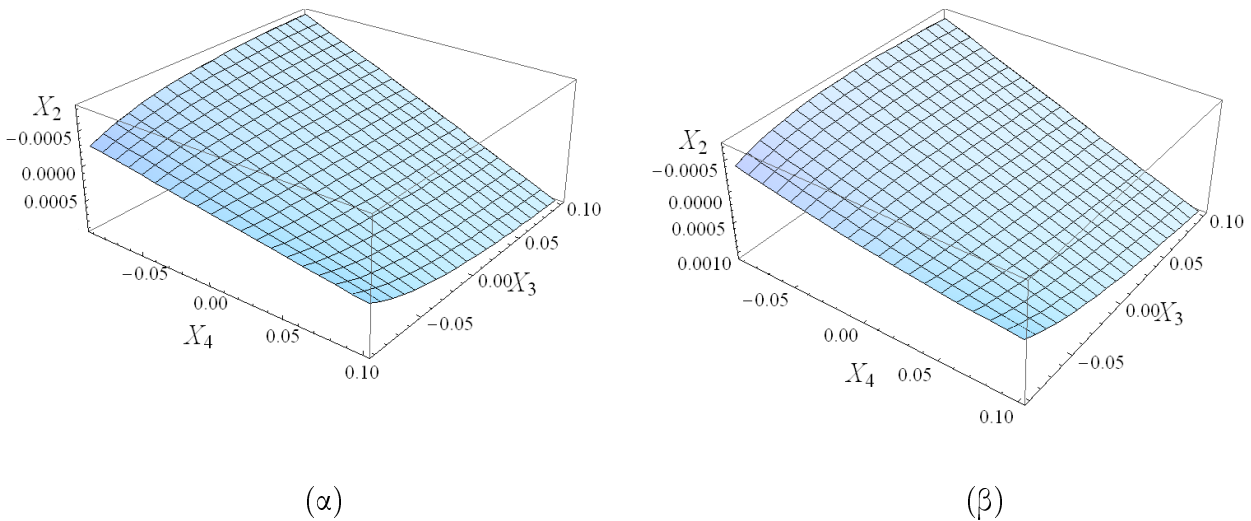
### 5.3 Χώρος φάσεων: $(x_3, x_4, x_2)$

#### 5.3.1 ΑΑΠ $\mathbf{F}^{r1} = 0$ και $\mathbf{F}^{r2} = 0$ (refinement)

Στα Σχ. 31, 32 παρουσιάζονται στον χώρο των φάσεων  $x_3, x_4, x_2$  η ΑΑΠ που περιγράφεται από την εξίσωση  $\mathbf{F}^{r1} = 0$  και η ΑΑΠ που προκύπτει μετά το πρώτο refinement και περιγράφεται από την εξίσωση  $\mathbf{F}^{r2} = 0$  σε μια περιοχή γύρω από το  $(0,0)$  με  $x_3, x_4 \in (-0.01, 0.01)$  και  $x_2 \in (-0.1, 0.1)$ .

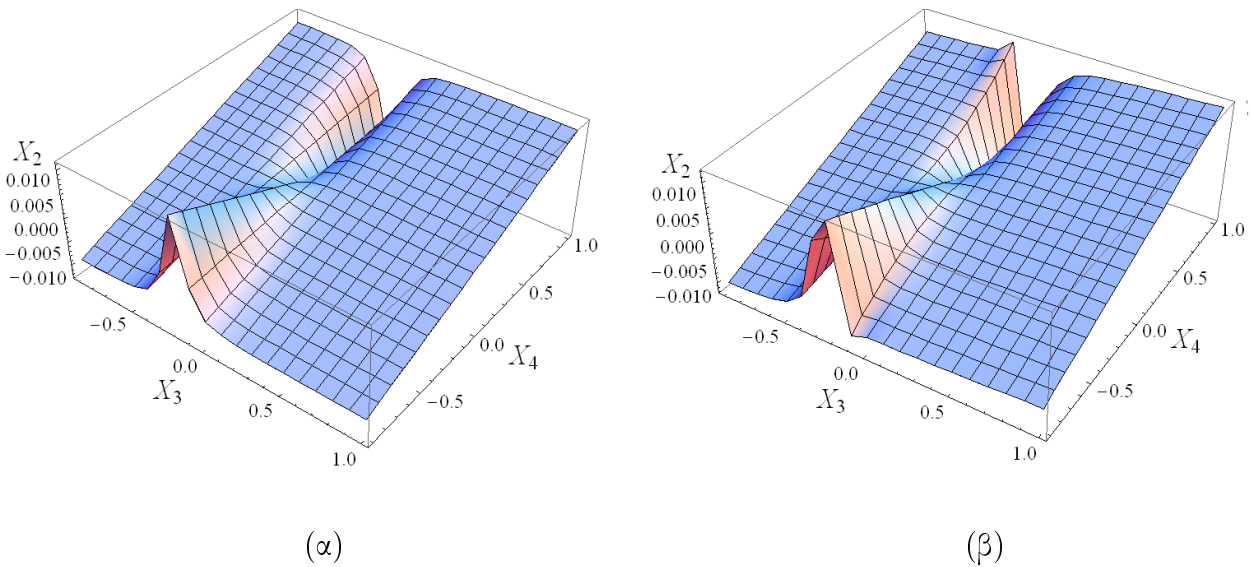


**Σχήμα 31.** Χώρος φάσεων  $x_3, x_4, x_2$  με  $x_3, x_4 \in (-0.01, 0.01)$   
 Γραφική αναπαράσταση των ΑΑΠ (α)  $\mathbf{F}^{r1} = 0$  και (β)  $\mathbf{F}^{r2} = 0$ (refinement)

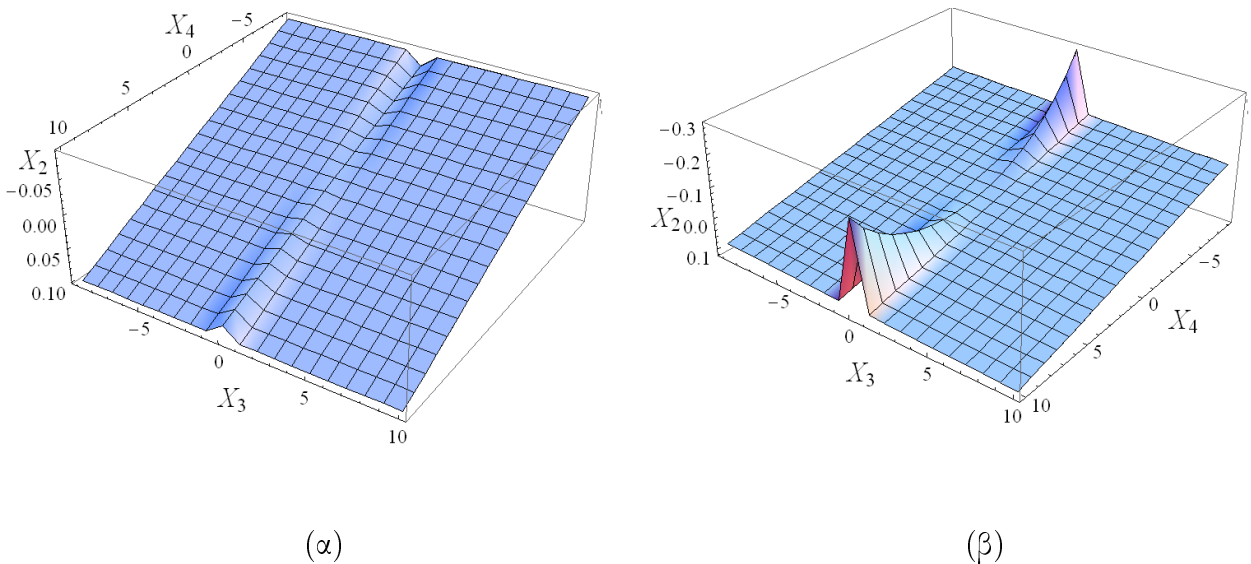


**Σχήμα 32.** Χώρος φάσεων  $x_3, x_4, x_2$  με  $x_3, x_4 \in (-0.1, 0.1)$   
 Γραφική αναπαράσταση των ΑΑΠ (α)  $\mathbf{F}^{r1} = 0$  και (β)  $\mathbf{F}^{r2} = 0$ (refinement)

Στα Σχ. 33, 34 παρουσιάζονται στον χώρο των φάσεων  $x_3, x_4, x_2$  η ΑΑΠ που περιγράφεται από την εξίσωση  $\mathbf{F}^{r1} = 0$  και η ΑΑΠ που προκύπτει μετά το πρώτο refinement και περιγράφεται από την εξίσωση  $\mathbf{F}^{r2} = 0$  σε μια περιοχή γύρω από το  $(0,0)$  με  $x_3, x_4 \in (-1, 1)$  και  $x_3, x_4 \in (-10, 10)$ .

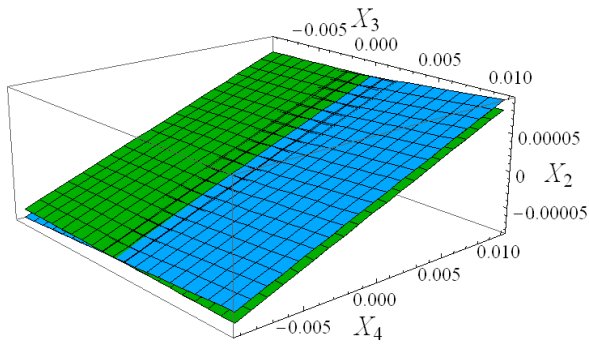


**Σχήμα 33.** Χώρος φάσεων  $x_3, x_4, x_2$  με  $x_3, x_4 \in (-1, 1)$   
 Γραφική αναπαράσταση των ΑΑΠ (α)  $\mathbf{F}^{r1} = 0$  και (β)  $\mathbf{F}^{r2} = 0$ (refinement)

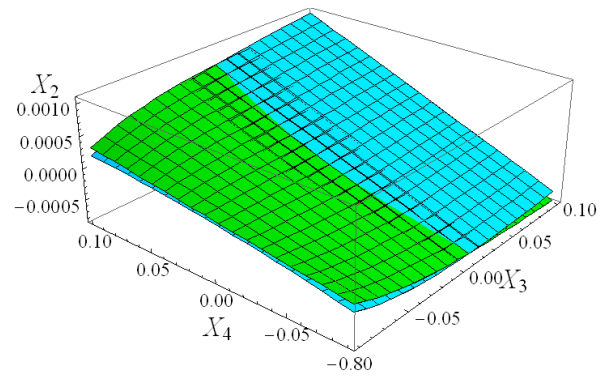


**Σχήμα 34.** Χώρος φάσεων  $x_3, x_4, x_2$  με  $x_3, x_4 \in (-10, 10)$   
 Γραφική αναπαράσταση των ΑΑΠ (α)  $\mathbf{F}^{r1} = 0$  και (β)  $\mathbf{F}^{r2} = 0$ (refinement)

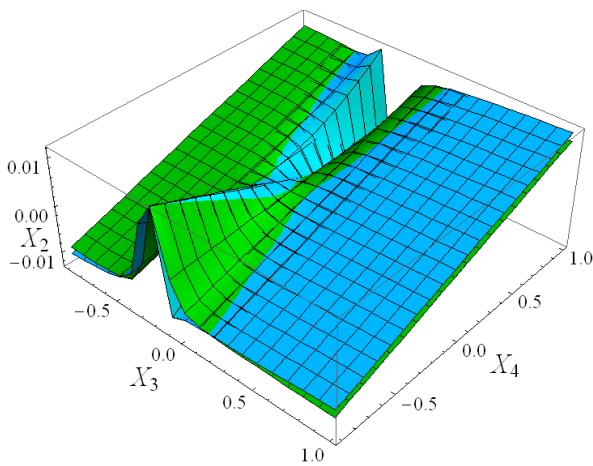
Στο Σχ. 35 παρουσιάζονται ανά ζεύγη στον χώρο των φάσεων  $x_3, x_4, x_2$  η ΑΑΠ που περιγράφεται από την εξίσωση  $\mathbf{F}^{r1} = 0$  (πράσινο χρώμα) και η ΑΑΠ που προκύπτει μετά το πρώτο refinement και περιγράφεται από την εξίσωση  $\mathbf{F}^{r2} = 0$  (μπλε χρώμα) σε μια περιοχή γύρω από το  $(0,0)$  με  $x_3, x_4 \in (-0.01, 0.01)$ ,  $x_3, x_4 \in (-0.1, 0.1)$ ,  $x_3, x_4 \in (-1, 1)$  και  $x_3, x_4 \in (-10, 10)$



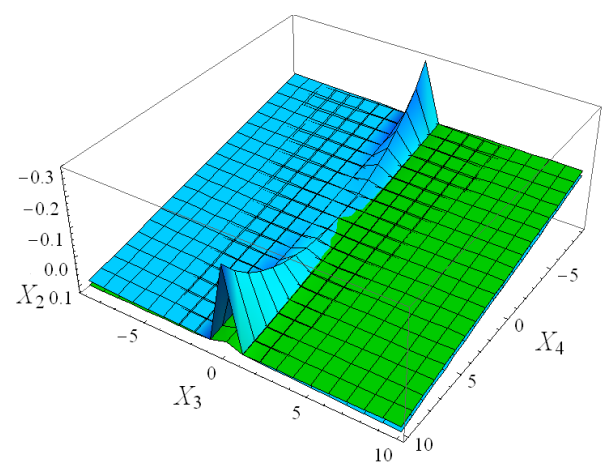
(α)



(β)



(γ)

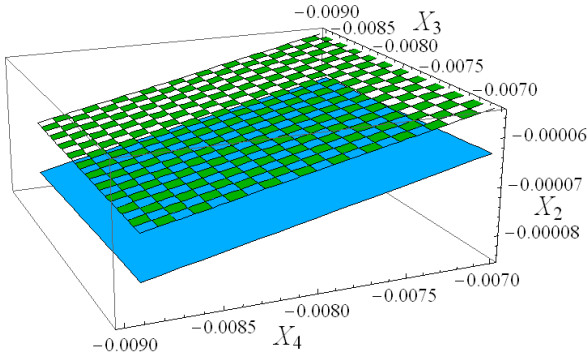


(δ)

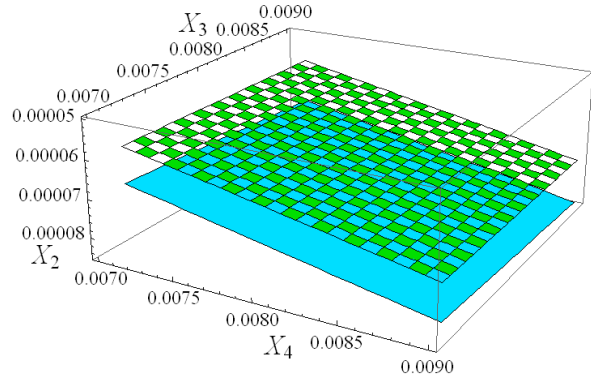
**Σχήμα 35.** Χώρος φάσεων  $x_3, x_4, x_2$

Γραφική αναπαράσταση ανά ζεύγη των ΑΑΠ  $\mathbf{F}^{r1} = 0$  και  $\mathbf{F}^{r2} = 0$ (refinement) στις περιοχές: (α)  $x_3, x_4 \in (-0.01, 0.01)$ , (β)  $x_3, x_4 \in (-0.1, 0.1)$ , (γ)  $x_3, x_4 \in (-1, 1)$  και (δ)  $x_3, x_4 \in (-10, 10)$

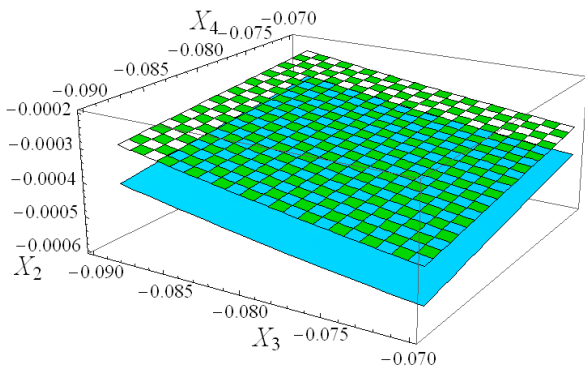
Στο Σχ. 36 παρουσιάζονται ανά ζεύγη στον χώρο των φάσεων  $x_3, x_4, x_2$  η ΑΑΠ που περιγράφεται από την εξίσωση  $\mathbf{F}^{r1} = 0$  (πράσινο χρώμα) και η ΑΑΠ που προκύπτει μετά το πρώτο refinement και περιγράφεται από την εξίσωση  $\mathbf{F}^{r2} = 0$  (μπλε χρώμα) σε μια περιοχή μακριά από το  $(0,0)$  με  $x_3, x_4 \in (-0.009, -0.007)$ ,  $x_3, x_4 \in (0.007, 0.009)$ ,  $x_3, x_4 \in (-0.09, -0.07)$  και  $x_3, x_4 \in (0.07, 0.09)$



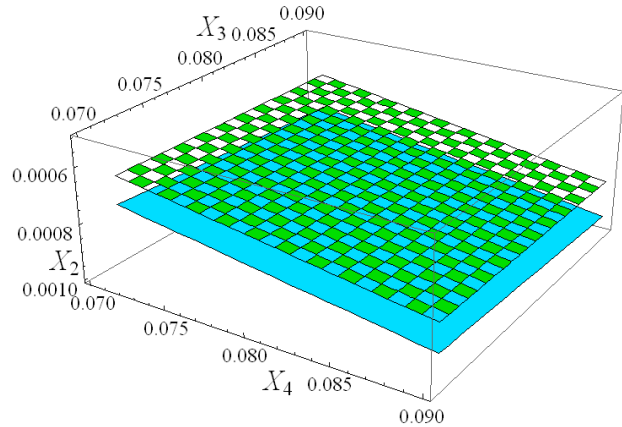
(α)



(β)



(γ)



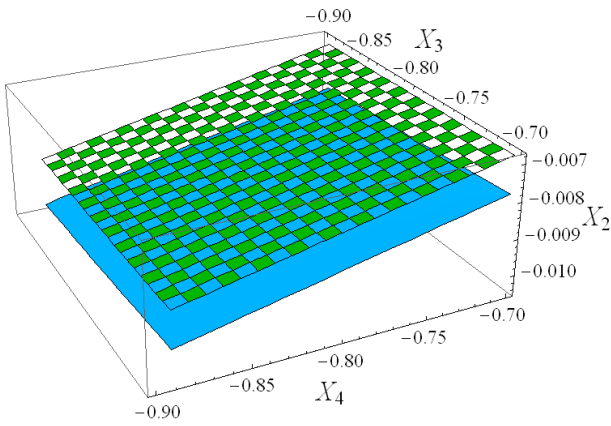
(δ)

**Σχήμα 36.** Χώρος φάσεων  $x_3, x_4, x_2$

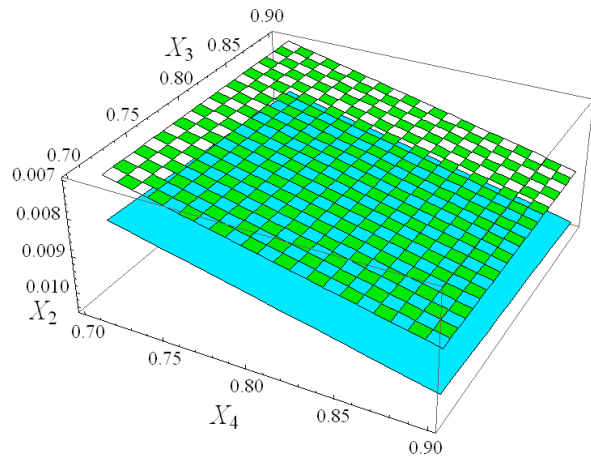
Γραφική αναπαράσταση ανά ζεύγη των ΑΑΠ  $\mathbf{F}^{r1} = 0$  και  $\mathbf{F}^{r2} = 0$ (refinement) στις περιοχές:

(α)  $x_3, x_4 \in (-0.009, -0.007)$ , (β)  $x_3, x_4 \in (0.007, 0.009)$ , (γ)  $x_3, x_4 \in (-0.09, -0.07)$  και (δ)  $x_3, x_4 \in (0.07, 0.09)$

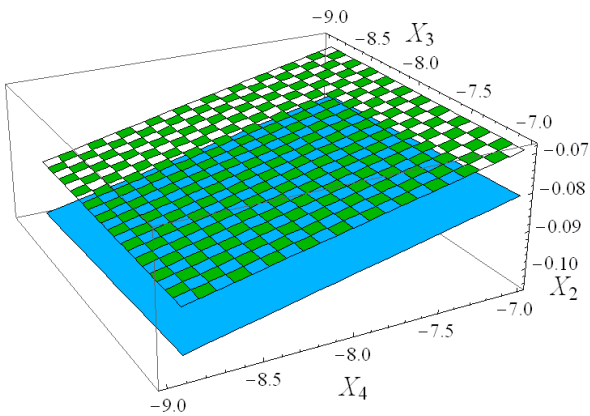
Στο Σχ. 37 παρουσιάζονται ανά ζεύγη στον χώρο των φάσεων  $x_3, x_4, x_2$  η ΑΑΠ που περιγράφεται από την εξίσωση  $\mathbf{F}^{r1} = 0$  (πράσινο χρώμα) και η ΑΑΠ που προκύπτει μετά το πρώτο refinement και περιγράφεται από την εξίσωση  $\mathbf{F}^{r2} = 0$  (μπλε χρώμα) σε μια περιοχή μακριά από το  $(0,0)$  με  $x_3, x_4 \in (-0.9, -0.7)$ ,  $x_3, x_4 \in (0.7, 0.9)$ ,  $x_3, x_4 \in (-9, -7)$  και  $x_3, x_4 \in (7, 9)$



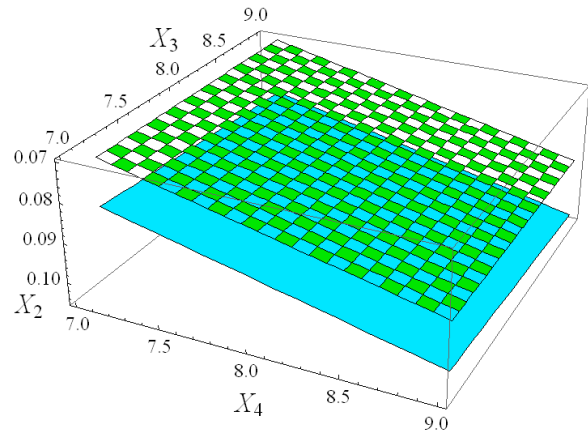
(α)



(β)



(γ)



(δ)

**Σχήμα 37.** Χώρος φάσεων  $x_3, x_4, x_2$

Γραφική αναπαράσταση ανά ζεύγη των ΑΑΠ  $\mathbf{F}^{r1} = 0$  και  $\mathbf{F}^{r2} = 0$ (refinement) στις περιοχές: (α)  $x_3, x_4 \in (-0.9, -0.7)$ , (β)  $x_3, x_4 \in (0.7, 0.9)$ , (γ)  $x_3, x_4 \in (-9, -7)$  και (δ)  $x_3, x_4 \in (7, 9)$

## 5.4 Συμπέρασμα

Βλέπουμε πως η επίδραση του refinement στην περιγραφή της ΑΑΠ είναι μικρότερη στην περίπτωση της αναπαράστασης της ΑΑΠ στο χώρο των φάσεων  $x_3, x_4, x_1$  σε σύγκριση με τον χώρο των φάσεων  $x_3, x_4, x_2$ .

Η αρχική εκτίμησή της ΑΑΠ στο χώρο των φάσεων  $x_3, x_4, x_1$  είναι καλύτερη σε σχέση με την αρχική της εκτίμηση στο χώρο των φάσεων  $x_3, x_4, x_2$  αφού το πλάτος  $f^{1r}$  της μεταβλητής  $x_1$  παίρνει πιο γρήγορα τιμές πιο κοντά στο μηδέν σε σχέση με το πλάτος  $f^{2r}$  της μεταβλητής  $x_2$ .

Γενικά βλέπουμε πως κοντά στο  $x_3, x_4 = (0,0)$  οι δύο ΑΑΠ (πριν και μετά το refinement) ταυτίζονται ενώ καθώς απομακρυνόμαστε από το  $x_3, x_4 = (0,0)$  οι δύο ΑΑΠ αρχίζουν να αποκλίνουν. Αυτό παρουσιάζεται λιγότερο έντονο στο χώρο των φάσεων  $x_3, x_4, x_1$  γιατί εκεί η αρχική εκτίμηση της ΑΑΠ είναι καλύτερη.





# Κεφάλαιο 6

## ΑΑΠ και ακριβής λύση

### 6.1 Γενικά

Στο Κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστούν η ΑΑΠ που περιγράφεται από την εξίσωση  $\mathbf{F}^{r1} = 0$  ή  $\mathbf{F}^{r2} = 0$  και η ακριβής λύση, όπως αυτή υπολογίζεται από το υπολογιστικό πακέτο LSODE για τις αρχικές συνθήκες που αναφέρονται στην παράγραφο 3.4, βάσει των οποίων έγινε ο υπολογισμός της ΑΑΠ.

Θα δοθούν γραφικές παραστάσεις της ΑΑΠ μαζί με την ακριβή λύση και θα υπολογιστεί η απόκλιση  $d$  μεταξύ τους η οποία ορίζεται ως εξής:

$$d = \left| \frac{x_{iA} - x_{iCSP}}{x_{iA}} \right|$$

όπου:

$x_{iA}$ : ακριβής λύση από το πακέτο LSODE, όπου  $x_{1A}$  είναι η ακριβής λύση στο χώρο  $x_3, x_4, x_1$  ενώ  $x_{2A}$  είναι η ακριβής λύση στο χώρο  $x_3, x_4, x_2$

$x_{iCSP}$ : λύση με τη μέθοδο CSP, όπου  $x_{1CSP}$  είναι η λύση στο χώρο  $x_3, x_4, x_1$  ενώ  $x_{2CSP}$  είναι η λύση στο χώρο  $x_3, x_4, x_2$

Ακολουθεί παρουσίαση στους χώρους των φάσεων  $x_3, x_4, x_1$  και  $x_3, x_4, x_2$  της ΑΑΠ που περιγράφεται από την εξίσωση  $\mathbf{F}^{r1} = 0$  ή  $\mathbf{F}^{r2} = 0$  και της ακριβούς λύσης στις παρακάτω περιοχές:

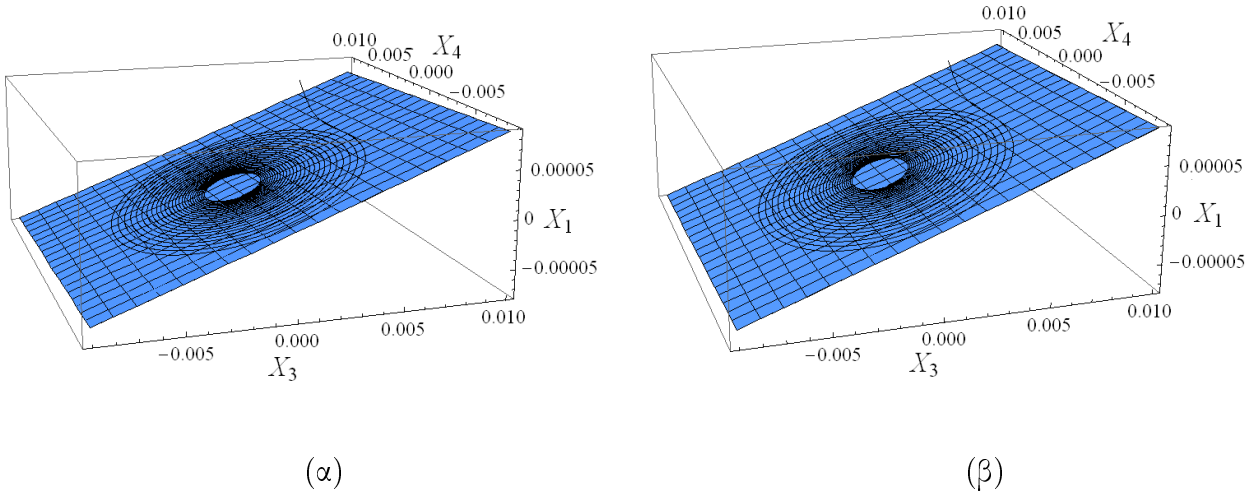
- 1)  $x_3, x_4 \in (-0.01, 0.01)$
- 2)  $x_3, x_4 \in (-0.1, 0.1)$
- 3)  $x_3, x_4 \in (-1, 1)$
- 4)  $x_3, x_4 \in (-10, 10)$

Για κάθε έναν από τους χώρους των φάσεων με συντεταγμένες  $x_3, x_4, x_1$  και  $x_3, x_4, x_2$  παρουσιάζεται η απόκλιση  $d$  μεταξύ ΑΑΠ (για  $\mathbf{F}^{r1} = 0$  και  $\mathbf{F}^{r2} = 0$ (refinement)) και ακριβούς λύσης

## 6.2 Χώρος φάσεων: $(x_3, x_4, x_1)$

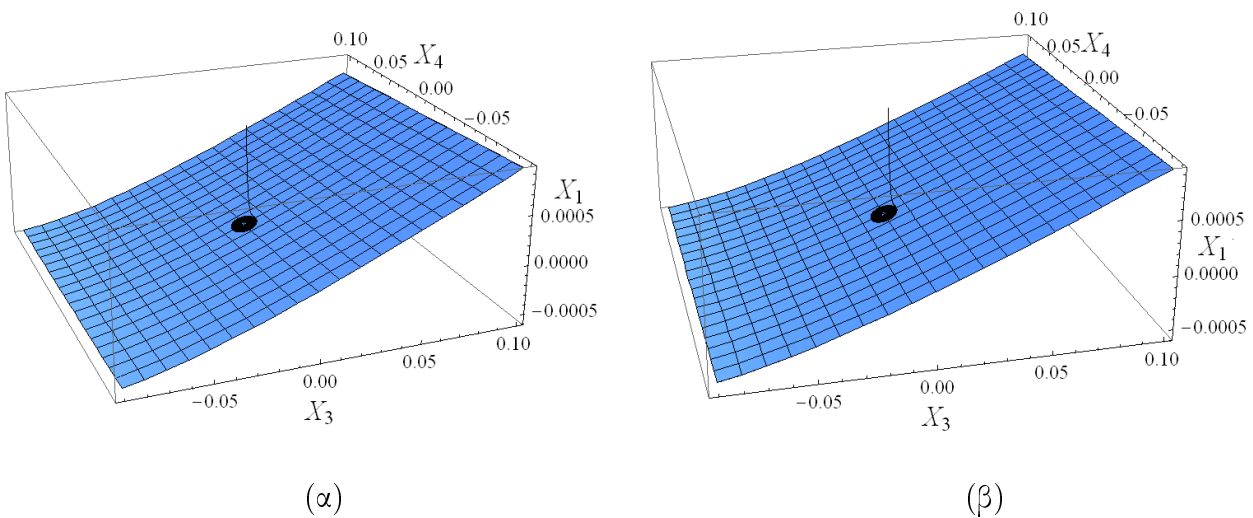
### 6.2.1 ΑΑΠ $\mathbf{F}^{r1} = 0, \mathbf{F}^{r2} = 0$ (refinement) και ακριβής λύση

Στα Σχ. 38 και 39 παρουσιάζονται στον χώρο των φάσεων  $x_3, x_4, x_1$ , η ακριβής λύση για  $0 < t < 120$  sec όπως υπολογίστηκε από το υπολογιστικό πακέτο LSODE και οι ΑΑΠ που περιγράφονται από τις εξισώσεις  $\mathbf{F}^{r1} = 0$  και  $\mathbf{F}^{r2} = 0$ (refinement) σε μια περιοχή γύρω από το  $(0,0)$  με  $x_3, x_4 \in (-0.01, 0.01)$ ,  $x_3, x_4 \in (-0.1, 0.1)$ . Παρατηρούμε ότι η λύση έλκεται από την ΑΑΠ.



**Σχήμα 38** Χώρος φάσεων  $x_3, x_4, x_1$  με  $x_3, x_4 \in (-0.01, 0.01)$

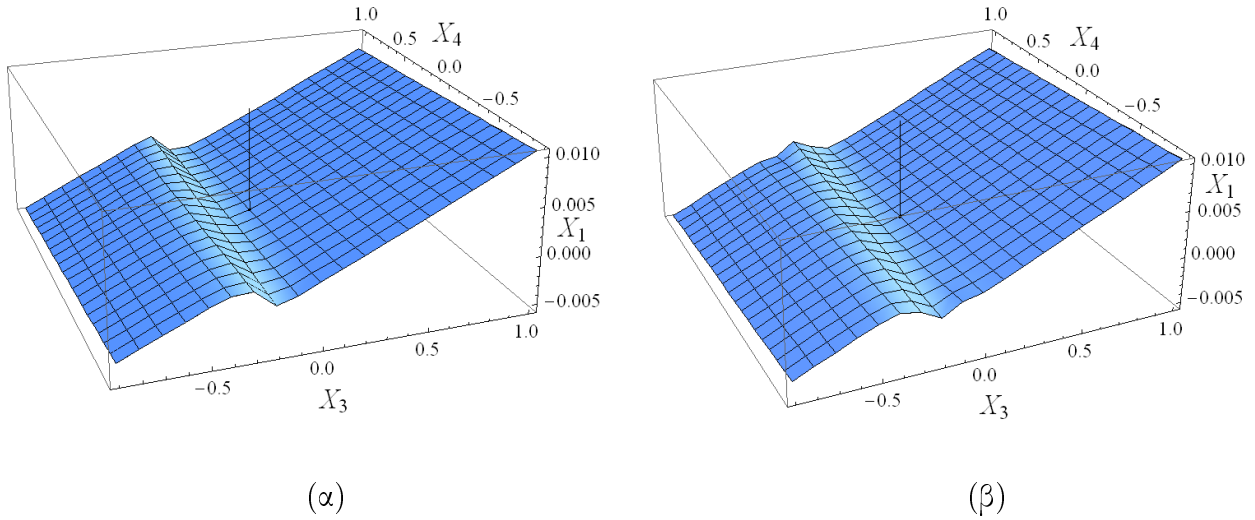
Γραφική αναπαράσταση για  $0 < t < 120$  (α) της ΑΑΠ  $\mathbf{F}^{r1} = 0$  και της ακριβούς λύσης (β) της ΑΑΠ  $\mathbf{F}^{r2} = 0$ (refinement) και της ακριβούς λύσης



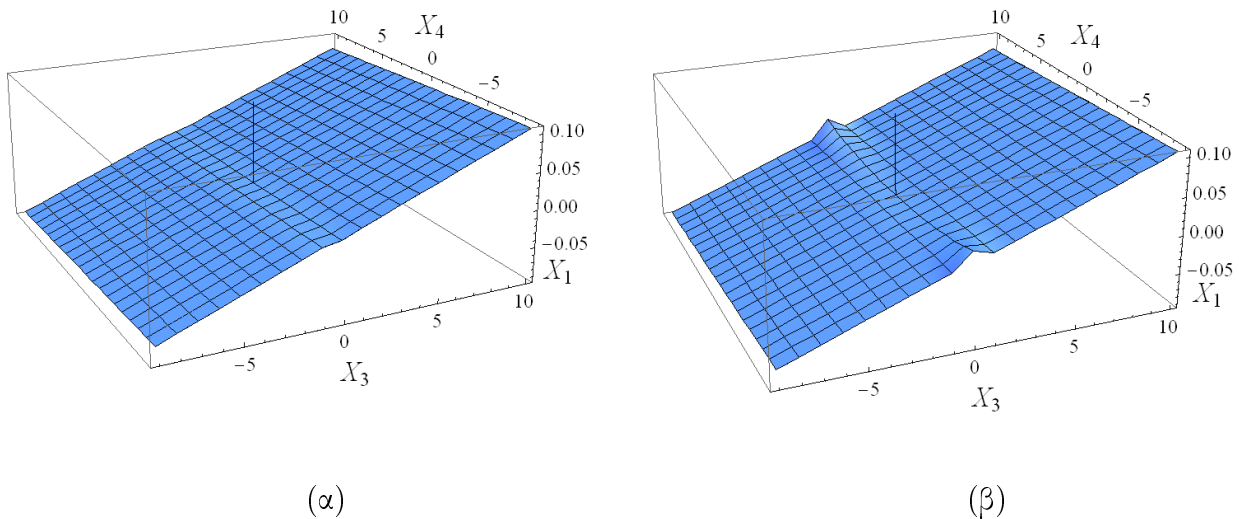
**Σχήμα 39** Χώρος φάσεων  $x_3, x_4, x_1$  με  $x_3, x_4 \in (-0.1, 0.1)$

Γραφική αναπαράσταση για  $0 < t < 120$  (α) της ΑΑΠ  $\mathbf{F}^{r1} = 0$  και της ακριβούς λύσης (β) της ΑΑΠ  $\mathbf{F}^{r2} = 0$ (refinement) και της ακριβούς λύσης.

Στα Σχ. 40 και Σχ. 41 παρουσιάζονται στον χώρο των φάσεων  $x_3, x_4, x_1$ , η ακριβής λύση για  $0 < t < 120$  sec όπως υπολογίστηκε από το υπολογιστικό πακέτο LSODE και οι ΑΑΠ που περιγράφονται από τις εξισώσεις  $\mathbf{F}^{r1} = 0$  και  $\mathbf{F}^{r2} = 0$  (refinement) σε μια περιοχή γύρω από το  $(0,0)$  με  $x_3, x_4 \in (-1, 1)$ ,  $x_3, x_4 \in (-10, 10)$ . Παρατηρούμε ότι η λύση έλκεται από την ΑΑΠ.



**Σχήμα 40** Χώρος φάσεων  $x_3, x_4, x_1$  με  $x_3, x_4 \in (-1, 1)$   
 Γραφική αναπαράσταση για  $0 < t < 120$  (α) της ΑΑΠ  $\mathbf{F}^{r1} = 0$  και της ακριβούς λύσης (β) της ΑΑΠ  $\mathbf{F}^{r2} = 0$  (refinement) και της ακριβούς λύσης

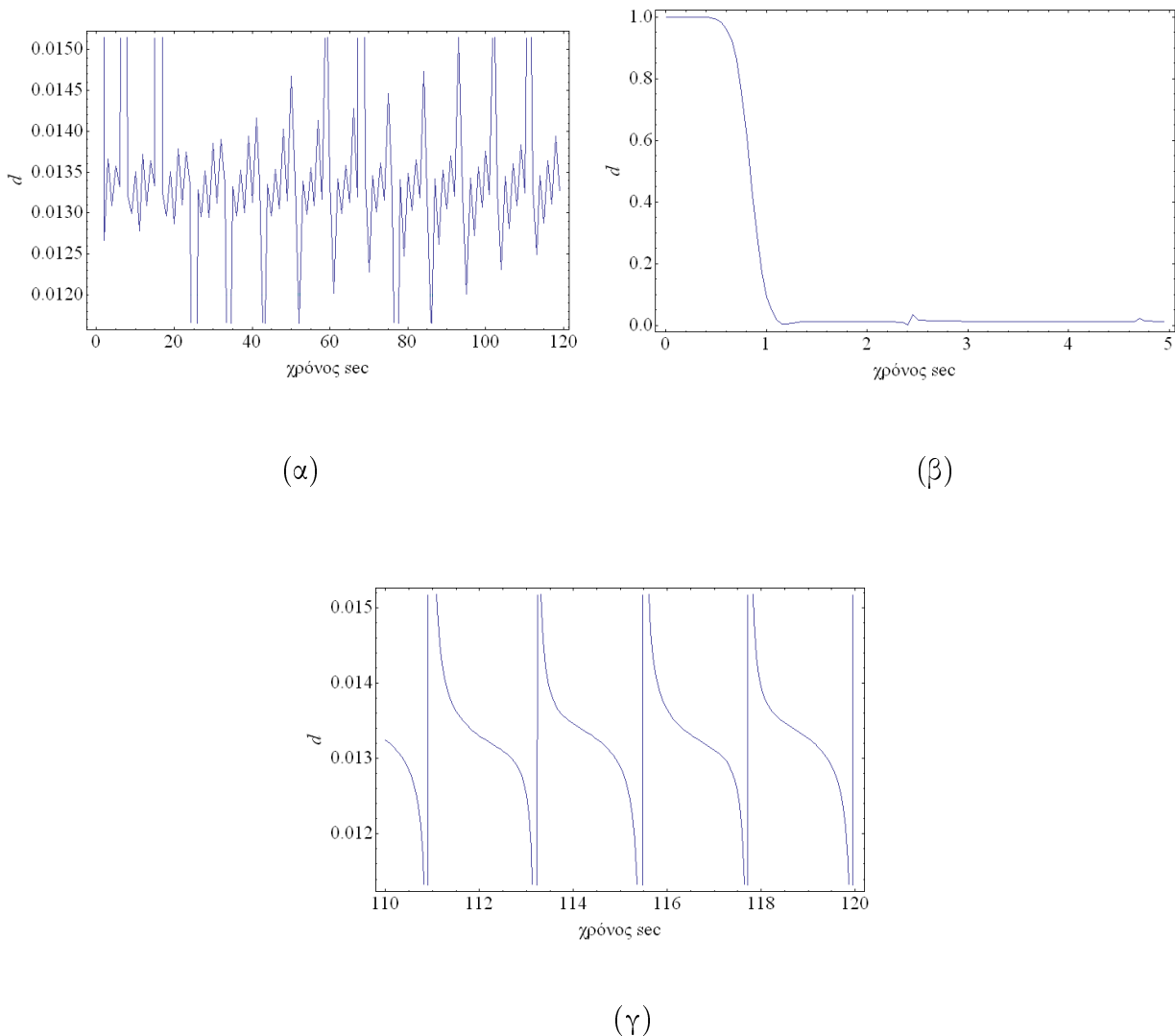


**Σχήμα 41** Χώρος φάσεων  $x_3, x_4, x_1$  με  $x_3, x_4 \in (-10, 10)$   
 Γραφική αναπαράσταση για  $0 < t < 120$  (α) της ΑΑΠ  $\mathbf{F}^{r1} = 0$  και της ακριβούς λύσης (β) της ΑΑΠ  $\mathbf{F}^{r2} = 0$  (refinement) και της ακριβούς λύσης

### 6.2.2 Σύγκριση ΑΑΠ $F^{r1} = 0$ και ακριβούς λύσης

Εξετάζουμε εάν η ακριβής λύση όπως αυτή προκύπτει από το πακέτο LSODE πέφτει επάνω στην ΑΑΠ  $F^{r1} = 0$  όπως αυτή παρουσιάζεται στο χώρο των φάσεων  $x_3, x_4, x_1$ .

Στο Σχ. 42 έχουμε στον οριζόντιο άξονα το χρόνο και στον κατακόρυφο άξονα την απόκλιση  $d$ , όπως αυτή ορίστηκε στην παράγραφο 6.1, μεταξύ ΑΑΠ και ακριβούς λύσης. Η σύγκριση γίνεται αρχικά για ολόκληρο το χρονικό διάστημα εξέλιξης του φαινομένου (0-120 sec). Κατόπιν βλέπουμε πως εξελίσσεται αρχικά η σύγκλιση (0-5 sec) οπότε η ακριβής λύση αρχίζει να πέφτει πάνω στην ΑΑΠ και κατόπιν στο τέλος (110-120 sec) οπότε πλέον η ακριβής λύση κινείται σταθερά πάνω στην ΑΑΠ.



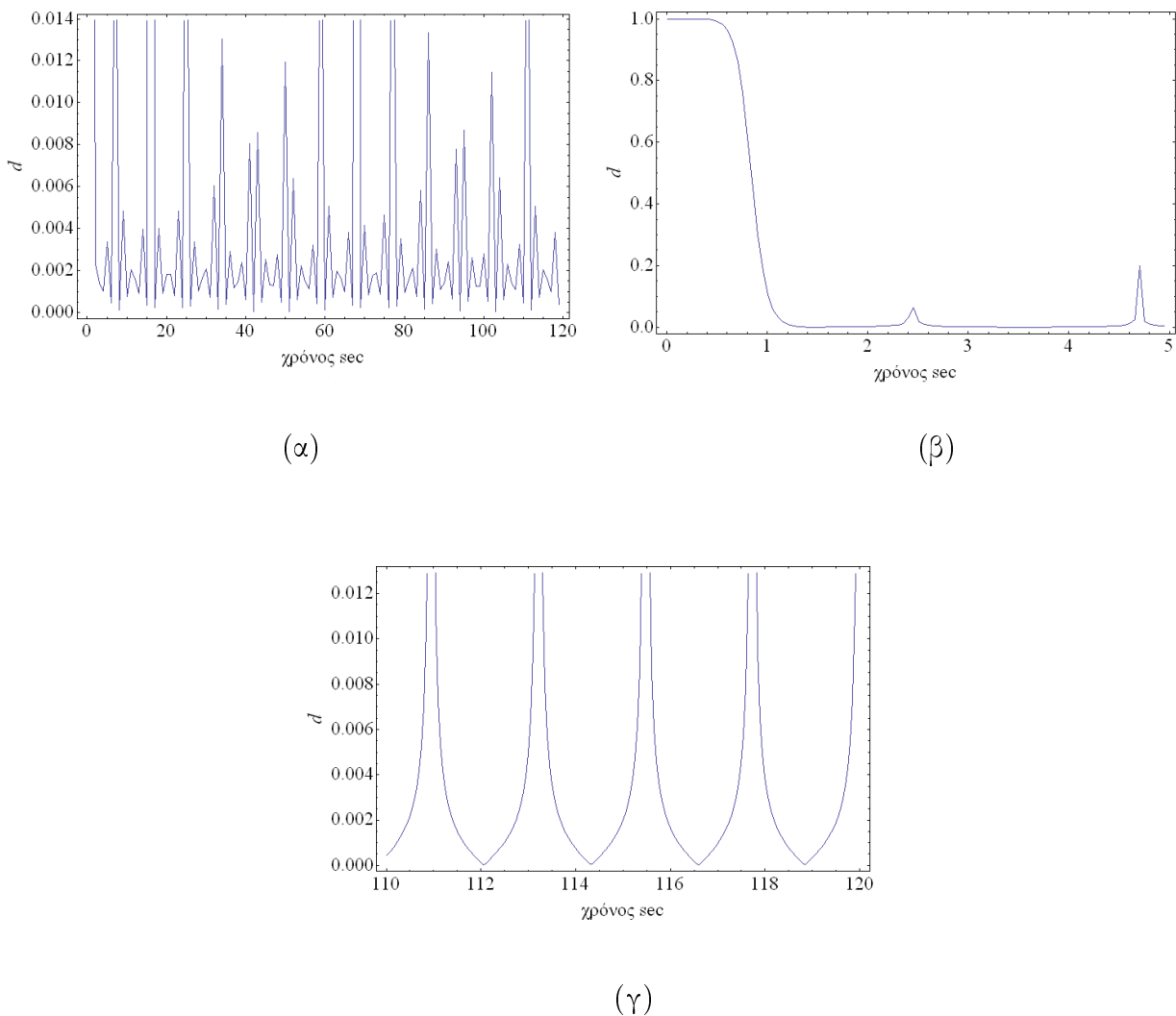
**Σχήμα 42.** ΑΑΠ  $F^{r1} = 0$  και ακριβής λύση στο χώρο των φάσεων  $x_3, x_4, x_1$ . Γραφική αναπαράσταση για (α) 0-120 sec (β) 0-5 sec και (γ) 110-120 sec

Βλέπουμε πως στό χώρο των φάσεων  $x_3, x_4, x_1$  η ακριβής λύση όπως αυτή προκύπτει από το πακέτο LSODE πέφτει επάνω στην ΑΑΠ  $F^{r1} = 0$  με τη διαφορά τους να βρίσκεται στο 0.013.

### 6.2.3 Σύγκριση ΑΑΠ $F^{r2} = 0$ (refinement) και ακριβούς λύσης

Εξετάζουμε εάν η ακριβής λύση όπως αυτή προκύπτει από το πακέτο LSODE πέφτει επάνω στην ΑΑΠ  $F^{r2} = 0$ (refinement) όπως αυτή παρουσιάζεται στο χώρο των φάσεων  $x_3, x_4, x_1$ .

Στο Σχ. 43 έχουμε στον οριζόντιο άξονα το χρόνο και στον κατακόρυφο άξονα την απόκλιση  $d$ , όπως αυτή ορίστηκε στην παράγραφο 6.1, μεταξύ ΑΑΠ και ακριβούς λύσης. Η σύγκριση γίνεται αρχικά για ολόκληρο το χρονικό διάστημα εξέλιξης του φαινομένου (0-120 sec). Κατόπιν βλέπουμε πως εξελίσσεται αρχικά η σύγκλιση (0-5 sec) οπότε η ακριβής λύση αρχίζει να πέφτει πάνω στην ΑΑΠ και κατόπιν στο τέλος (110-120 sec) οπότε πλέον η ακριβής λύση κινείται σταθερά πάνω στην ΑΑΠ.



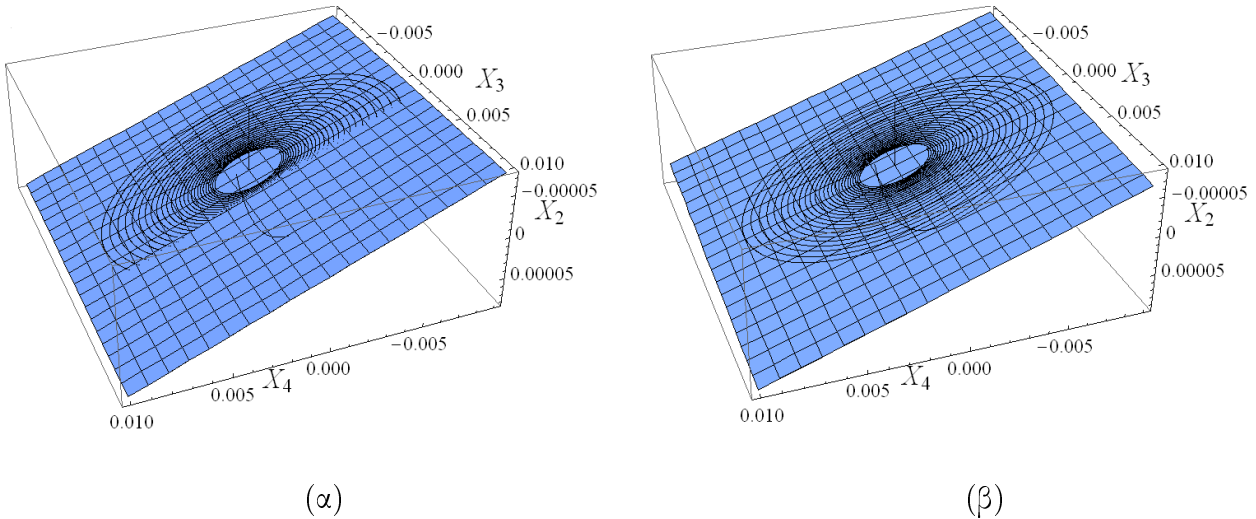
**Σχήμα 43.** ΑΑΠ  $F^{r2} = 0$ (refinement) και ακριβής λύση στο χώρο των φάσεων  $x_3, x_4, x_1$ . Γραφική αναπαράσταση για (α) 0-120 sec (β) 0-5 sec και (γ) 110-120 sec

Βλέπουμε πως στο χώρο των φάσεων  $x_3, x_4, x_1$  η ακριβής λύση όπως αυτή προκύπτει από το πακέτο LSODE πέφτει επάνω στην ΑΑΠ  $F^{r2} = 0$ (refinement) με τη διαφορά τους να βρίσκεται στο 0.0015. Παρατηρούμε πως σε σύγκριση με την ΑΑΠ που προσδιορίστηκε χωρίς refinement, η ακρίβεια με την οποία η ΑΑΠ προσεγγίζει τη λύση είναι μεγαλύτερη περίπου κατά μια τάξη μεγέθους.

### 6.3 Χώρος φάσεων: $(x_3, x_4, x_2)$

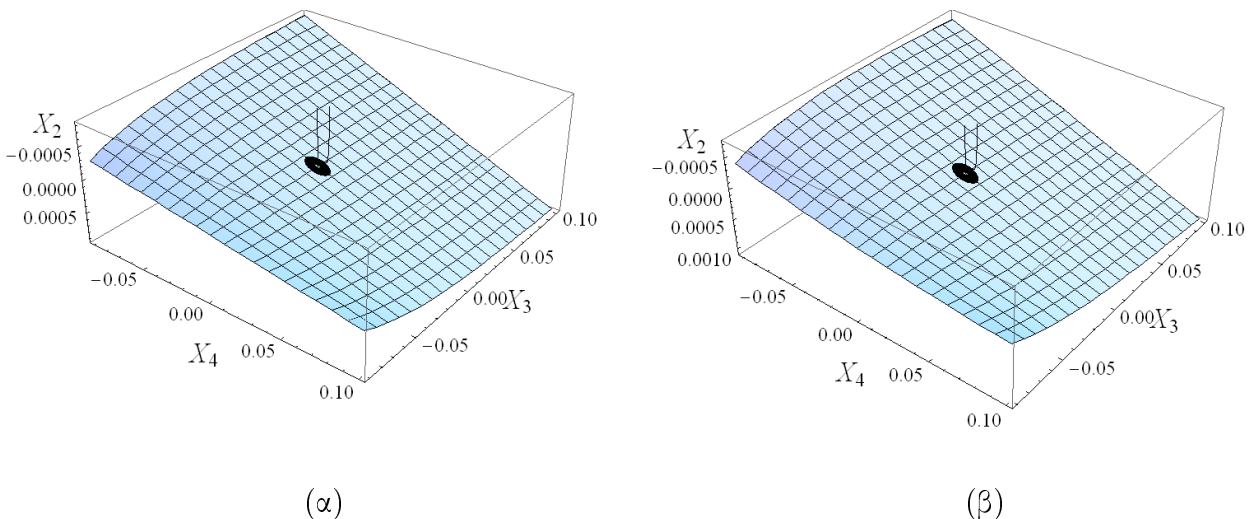
#### 6.3.1 ΑΑΠ $\mathbf{F}^{r1} = 0, \mathbf{F}^{r2} = 0$ (refinement) και ακριβής λύση

Στα Σχ. 44 και Σχ. 45 παρουσιάζονται στον χώρο των φάσεων  $x_3, x_4, x_2$ , η ακριβής λύση για  $0 < t < 120$  sec όπως υπολογίστηκε από το υπολογιστικό πακέτο LSODE και οι ΑΑΠ που περιγράφονται από τις εξισώσεις  $\mathbf{F}^{r1} = 0$  και  $\mathbf{F}^{r2} = 0$ (refinement) σε μια περιοχή γύρω από το  $(0,0)$  με  $x_3, x_4 \in (-0.01, 0.01)$ ,  $x_3, x_4 \in (-0.1, 0.1)$ . Παρατηρούμε ότι η λύση έλκεται από την ΑΑΠ.



**Σχήμα 44** Χώρος φάσεων  $x_3, x_4, x_2$  με  $x_3, x_4 \in (-0.01, 0.01)$

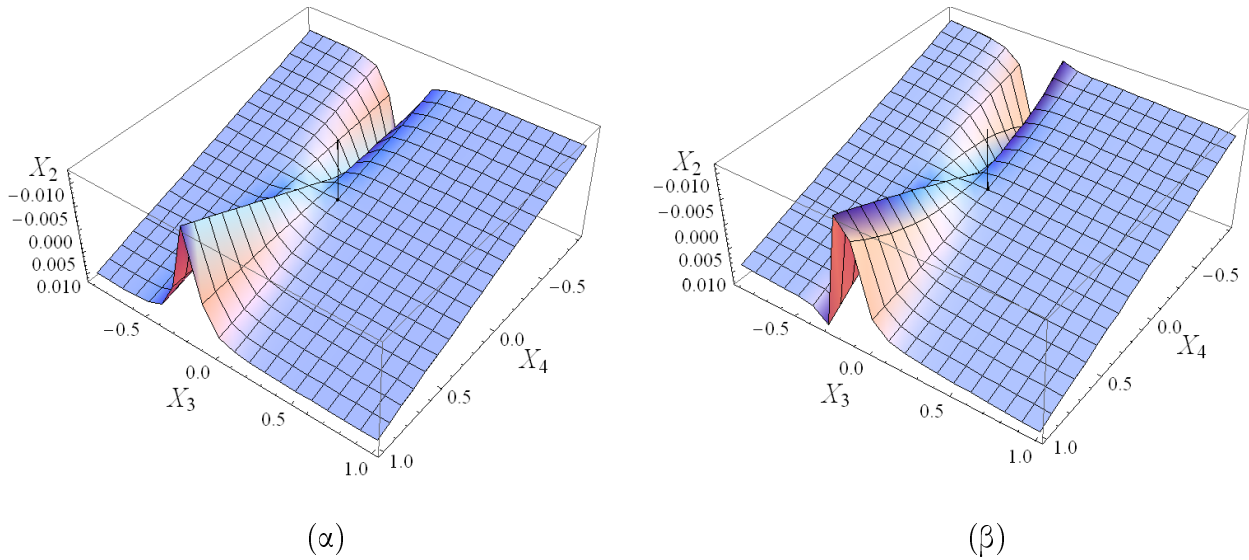
Γραφική αναπαράσταση για  $0 < t < 120$  (α) της ΑΑΠ  $\mathbf{F}^{r1} = 0$  και της ακριβούς λύσης (β) της ΑΑΠ  $\mathbf{F}^{r2} = 0$ (refinement) και της ακριβούς λύσης



**Σχήμα 45** Χώρος φάσεων  $x_3, x_4, x_2$  με  $x_3, x_4 \in (-0.1, 0.1)$

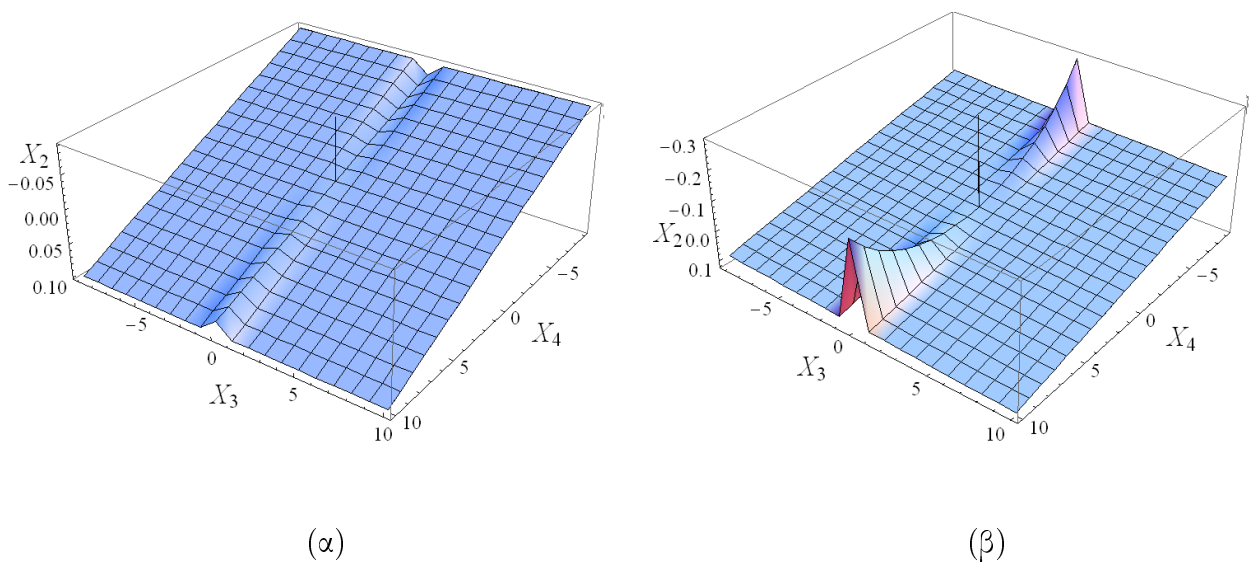
Γραφική αναπαράσταση για  $0 < t < 120$  (α) της ΑΑΠ  $\mathbf{F}^{r1} = 0$  και της ακριβούς λύσης (β) της ΑΑΠ  $\mathbf{F}^{r2} = 0$ (refinement) και της ακριβούς λύσης

Στα Σχ. 46 και Σχ. 47 παρουσιάζονται στον χώρο των φάσεων  $x_3, x_4, x_2$ , η ακριβής λύση για  $0 < t < 120$  sec όπως υπολογίστηκε από το υπολογιστικό πακέτο LSODE και οι ΑΑΠ που περιγράφονται από τις εξισώσεις  $\mathbf{F}^{r1} = 0$  και  $\mathbf{F}^{r2} = 0$  (refinement) σε μια περιοχή γύρω από το  $(0,0)$  με  $x_3, x_4 \in (-1, 1)$ ,  $x_3, x_4 \in (-10, 10)$ . Παρατηρούμε ότι η λύση έλκεται από την ΑΑΠ.



**Σχήμα 46** Χώρος φάσεων  $x_3, x_4, x_2$  με  $x_3, x_4 \in (-1, 1)$

Γραφική αναπαράσταση για  $0 < t < 120$  (α) της ΑΑΠ  $\mathbf{F}^{r1} = 0$  και της ακριβούς λύσης (β) της ΑΑΠ  $\mathbf{F}^{r2} = 0$  (refinement) και της ακριβούς λύσης



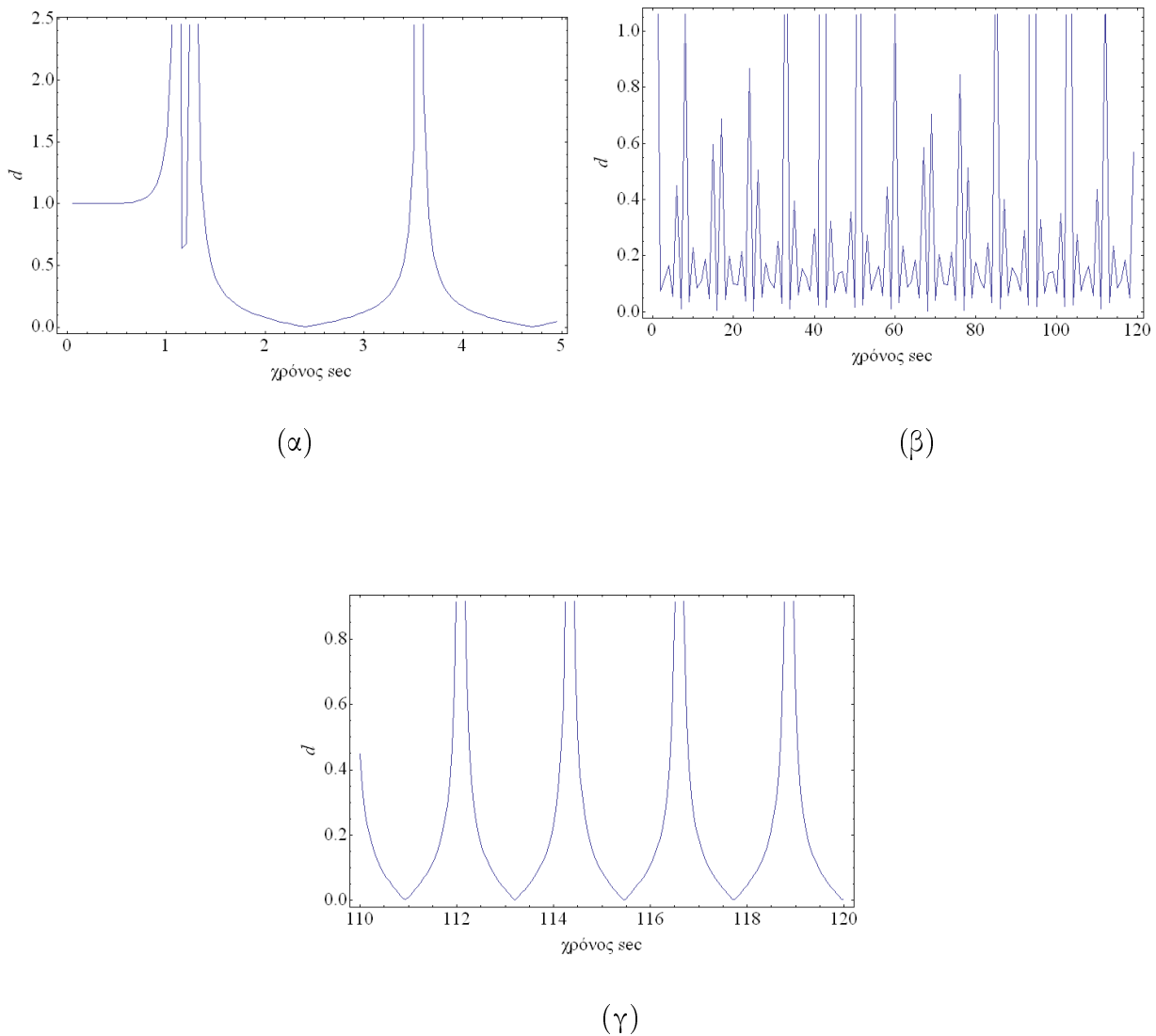
**Σχήμα 47** Χώρος φάσεων  $x_3, x_4, x_2$  με  $x_3, x_4 \in (-10, 10)$

Γραφική αναπαράσταση για  $0 < t < 120$  (α) της ΑΑΠ  $\mathbf{F}^{r1} = 0$  και της ακριβούς λύσης (β) της ΑΑΠ  $\mathbf{F}^{r2} = 0$  (refinement) και της ακριβούς λύσης

### 6.3.2 Σύγκριση ΑΑΠ $F^{r1} = 0$ και ακριβούς λύσης

Εξετάζουμε εάν η ακριβής λύση όπως αυτή προκύπτει από το πακέτο LSODE πέφτει επάνω στην ΑΑΠ  $F^{r1} = 0$  όπως αυτή παρουσιάζεται στο χώρο των φάσεων  $x_3, x_4, x_2$ .

Στο Σχ. 48 έχουμε στον οριζόντιο άξονα το χρόνο και στον κατακόρυφο άξονα την απόκλιση  $d$ , όπως αυτή ορίστηκε στην παράγραφο 6.1, μεταξύ ΑΑΠ και ακριβούς λύσης. Η σύγκριση γίνεται αρχικά για ολόκληρο το χρονικό διάστημα εξέλιξης του φαινομένου (0-120 sec). Κατόπιν βλέπουμε πως εξελίσσεται αρχικά η σύγκλιση (0-5 sec) οπότε η ακριβής λύση αρχίζει να πέφτει πάνω στην ΑΑΠ και κατόπιν στο τέλος (110-120 sec) οπότε πλέον η ακριβής λύση κινείται σταθερά πάνω στην ΑΑΠ.



**Σχήμα 48.** ΑΑΠ  $F^{r1} = 0$  και ακριβής λύση στο χώρο των φάσεων  $x_3, x_4, x_2$ . Γραφική αναπαράσταση για (α) 0-5 sec (β) 0-120 sec και (γ) 110-120 sec

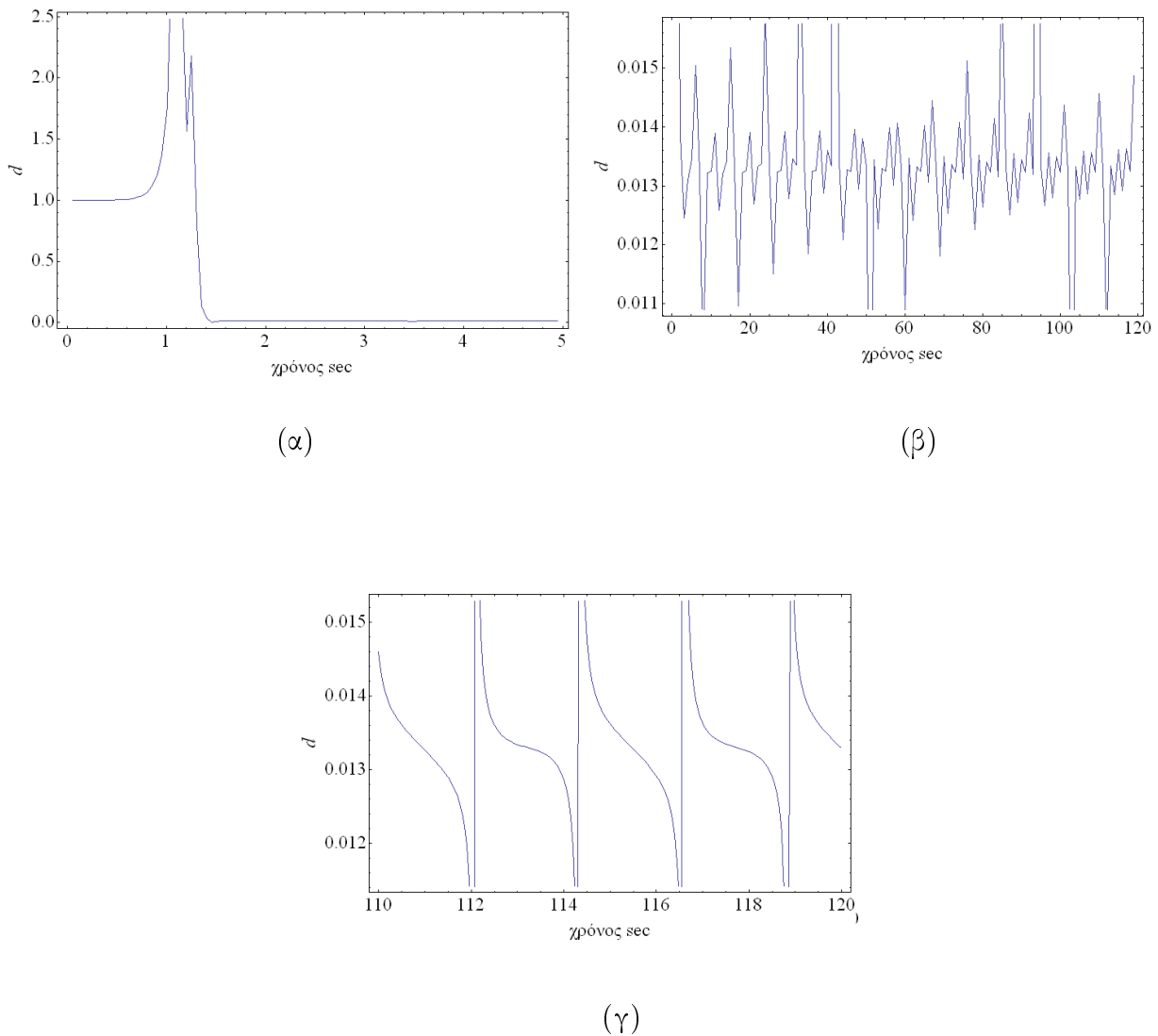
Βλέπουμε πως στο χώρο των φάσεων  $x_3, x_4, x_2$  η ακριβής λύση όπως αυτή προκύπτει από το πακέτο LSODE πέφτει επάνω στην ΑΑΠ  $F^{r1} = 0$  με τη διαφορά τους να βρίσκεται στο 0.13.



### 6.3.3 Σύγκριση ΑΑΠ $F^{r2} = 0$ (refinement) και ακριβούς λύσης

Εξετάζουμε εάν η ακριβής λύση όπως αυτή προκύπτει από το πακέτο LSODE πέφτει επάνω στην ΑΑΠ  $F^{r2} = 0$ (refinement) όπως αυτή παρουσιάζεται στο χώρο των φάσεων  $x_3, x_4, x_2$ .

Στο Σχ. 49 έχουμε στον οριζόντιο άξονα το χρόνο και στον κατακόρυφο άξονα την απόκλιση  $d$ , όπως αυτή ορίστηκε στην παράγραφο 6.1, μεταξύ ΑΑΠ και ακριβούς λύσης. Η σύγκριση γίνεται αρχικά για ολόκληρο το χρονικό διάστημα εξέλιξης του φαινομένου (0-120 sec). Κατόπιν βλέπουμε πως εξελίσσεται αρχικά η σύγκλιση (0-5 sec) οπότε η ακριβής λύση αρχίζει να πέφτει πάνω στην ΑΑΠ και κατόπιν στο τέλος (110-120 sec) οπότε πλέον η ακριβής λύση κινείται σταθερά πάνω στην ΑΑΠ.



**Σχήμα 49.** ΑΑΠ  $F^{r2} = 0$ (refinement) και ακριβής λύση στο χώρο των φάσεων  $x_3, x_4, x_2$ . Γραφική αναπαράσταση για (α) 0-5 sec (β) 0-120 sec και (γ) 110-120 sec

Βλέπουμε πως στο χώρο των φάσεων  $x_3, x_4, x_2$  η ακριβής λύση όπως αυτή προκύπτει από το πακέτο LSODE πέφτει επάνω στην ΑΑΠ  $F^{r2} = 0$  με τη διαφορά τους να βρίσκεται στο 0.013. Παρατηρούμε πως σε σύγκριση με την ΑΑΠ που προσδιορίστηκε χωρίς refinement, η ακρίβεια με την οποία η ΑΑΠ προσεγγίζει τη λύση είναι μεγαλύτερη περίπου κατά μια τάξη μεγέθους.

## 6.4 Συμπέρασμα

Η επίδραση του refinement κατά  $O(\varepsilon)$  στα πλάτη αντικατοπτρίζεται και στην ΑΑΠ όπου μετά από κάθε refinement η απόκλιση  $d$  μεταξύ της ΑΑΠ με της ακριβούς λύσης γίνεται μικρότερη κατά  $O(\varepsilon)$ .

Η αρχική εκτίμησή της ΑΑΠ στο χώρο των φάσεων  $x_3, x_4, x_1$  είναι καλύτερη σε σχέση με την αρχική της εκτίμηση στο χώρο των φάσεων  $x_3, x_4, x_2$  αφού το πλάτος  $f^{1r}$  της μεταβλητής  $x_1$  παίρνει πιο γρήγορα τιμές πιο κοντά στο μηδέν σε σχέση με το πλάτος  $f^{2r}$  της μεταβλητής  $x_2$ .

Έτσι στην περίπτωση του χώρου των φάσεων  $x_3, x_4, x_1$ , η απόκλιση  $d$  είναι μικρότερη κατά μια τάξη μεγέθους σε σύγκριση με τον χώρο των φάσεων  $x_3, x_4, x_2$ .

# Κεφάλαιο 7

## Πρακτικές εφαρμογές

### 7.1 Γενικά

Στο Κεφάλαιο αυτό θα δείξουμε πως το σύστημα των δύο συζευγμένων ταλαντωτών του Σχ 5, με τις παραμέτρους που προσδιορίστηκαν στο Κεφάλαιο 4 και φαίνονται στους Πίνακες 42-44, μπορεί να αποτελέσει τη μαθηματική μοντελοποίηση υπαρκτών διατάξεων στη ναυπηγική και στη μηχανολογία γενικότερα.

### 7.2 Σύνδεση συστημάτων με την Περίπτωση 3

Για την Περίπτωση 3 που εξετάσαμε έχουμε:

Μετατοπίσεις:  $u_1, u_2$

Ταχύτητες:  $\dot{u}_1, \dot{u}_2$

Μάζες:  $m_1 < m_2$

Σταθερές ελατηρίου:  $k_1 > k_2$

Αποσβέσεις:  $c_1 > c_2$

Για τα συστήματα τα οποία αναφέρθηκαν στον πρόλογο και μοντελοποιούνται με το σύστημα των δύο συζευγμένων ταλαντωτών που περιγράφεται στο Κεφάλαιο 3, με τις παραμέτρους που προσδιορίστηκαν στη Περίπτωση 3 (Πίνακες 42-44), υπάρχουν δύο γρήγορες αποσβετικές χρονοκλίμακες που σχετίζονται με τις μεταβλητές  $(u_1, \dot{u}_1)$  και δύο αργές χρονοκλίμακες που σχετίζονται με τις μεταβλητές  $(u_2, \dot{u}_2)$ . Ισχύουν τα ακόλουθα:

1) Κινητήρας εδρασμένος μέσω ελαστικού συνδέσμου σε ένα πλοίο ή σε ένα αυτοκίνητο. Ο κινητήρας  $(u_1, \dot{u}_1, m_1, k_1, c_1)$  εκτελεί ταλαντώσεις οι οποίες εξαντλούνται γρήγορα (γρήγορες χρονοκλίμακες) και στη συνέχεια μέσω της ελαστικής έδρασης το πλοίο ή το αυτοκίνητο  $(u_2, \dot{u}_2, m_2, k_2, c_2)$  αντιδρούν με μια ταλάντωση που εξελίσσεται σε βάθος χρόνου (αργές χρονοκλίμακες).

2) Σύστημα ανάρτηση-αμάξωμα ενός αυτοκινήτου. Η ανάρτηση  $(u_1, \dot{u}_1, m_1, k_1, c_1)$  μετά από κάποια εξωτερική φόρτιση τείνει να ακινητοποιηθεί γρήγορα (γρήγορες χρονοκλίμακες) και η κίνηση μεταφέρεται μέσω του ελαστικού συνδέσμου στο

αμάζωμα του αυτοκινήτου  $(u_2, \dot{u}_2, m_2, k_2, c_2)$  το οποίο συνεχίζει να ταλαντώνεται (αργές χρονοκλίμακες).

3) Αξονικό σύστημα (άξονας - προπέλα) ενός πλοίου.

Το αξονικό σύστημα  $(u_1, \dot{u}_1, m_1, k_1, c_1)$  εκτελεί ταλαντώσεις οι οποίες φθίνουν γρήγορα (γρήγορες χρονοκλίμακες), ενώ η προπέλα  $(u_2, \dot{u}_2, m_2, k_2, c_2)$  ως αντίδραση σε κάθε τέτοια φόρτιση ταλαντώνεται για πολύ μεγαλύτερο χρονικό διάστημα (αργές χρονοκλίμακες).

4) Σύστημα πλοίο-πλωτή εξέδρα αντλήσεως πετρελαίου όταν είναι συνδεδεμένα.

Το πλοίο  $(u_1, \dot{u}_1, m_1, k_1, c_1)$  θα εκτελέσει λόγω της επίδρασης της θάλασσας μια ταλάντωση που θα εξαντληθεί γρήγορα (γρήγορες χρονοκλίμακες) και κατόπιν η πλωτή εξέδρα  $(u_2, \dot{u}_2, m_2, k_2, c_2)$  μέσω της σύνδεσής της με το πλοίο θα αρχίσει να ταλαντώνεται για μεγάλο χρονικό διάστημα (αργές χρονοκλίμακες).

5) Σύστημα πλοίο (μοντελοποιείται ως ελαστική δοκός) - θάλασσα.

Το πλοίο  $(u_1, \dot{u}_1, m_1, k_1, c_1)$  θα εκτελέσει μια σύντομη ταλάντωση (γρήγορες χρονοκλίμακες) εξαιτίας της επίδρασης της θάλασσας (κύματος) και κατόπιν θα αρχίσει να ταλαντώνεται η θάλασσα  $(u_2, \dot{u}_2, m_2, k_2, c_2)$  (δημιουργία κυματισμού) για μεγάλο χρονικό διάστημα (αργές χρονοκλίμακες), ενώ συγχρόνως θα ακολουθήσουν και άλλα κύματα.

6) Μεταλλική κατασκευή ενός πλοίου η οποία αποτελείται από ενισχυτικά τα οποία υποστηρίζονται από ενισχυμένους δοκούς.

Η ενισχυμένη δοκός  $(u_1, \dot{u}_1, m_1, k_1, c_1)$  μετά από κάποια εξωτερική φόρτιση από κάποιο κύμα εκτελεί μια ταλάντωση που φθίνει γρήγορα (γρήγορες χρονοκλίμακες) και κατόπιν η ταλάντωση μεταφέρεται μέσω των συγκολλήσεων και των ελασμάτων στα ενισχυτικά  $(u_2, \dot{u}_2, m_2, k_2, c_2)$  τα οποία συνεχίζουν να ταλαντώνονται (αργές χρονοκλίμακες).

# Κεφάλαιο 8

## Επίλογος

Στην παρούσα εργασία ασχοληθήκαμε με μια κατηγορία συστημάτων ταλαντωτικής φύσεως τα οποία ονομάζονται δύσκαμπτα λόγω της ύπαρξης αργών και γρήγορων αποσβετικών χρονοκλιμάκων οι οποίες εξαντλούνται πολύ πιο σύντομα από τις αργές. Με τη βοήθεια της απλοποιημένης μεθόδου CSP (Computational Singular Perturbation) προσδιορίσαμε τον αργό και γρήγορο υποχώρο του εφαπτομενικού χώρου όπου δρουν αντίστοιχα οι αργές και οι γρήγορες χρονοκλίμακες, η εξάντληση των οποίων μας επέτρεψε να προσδιορίσουμε τη λύση του συστήματος η οποία είναι ένας υποχώρος μικρότερης διάστασης από το χώρο φάσεων του συστήματος και ονομάζεται Αργή Αναλλοίωτη Πολλαπλότητα (ΑΑΠ) (Slow Invariant Manifold /SIM).

Πιο συγκεκριμένα μελετήσαμε ένα μη γραμμικό σύστημα δύο συζευγμένων ταλαντωτών όπως αυτό που φαίνεται στο Σχ. 5. το οποίο μπορεί να εκφράσει τη μαθηματική μοντελοποίηση φαινομένων όπως το περπάτημα του ανθρώπου, ένας κινητήρας που είναι εδρασμένος μέσω ελαστικού συνδέσμου σε ένα πλοίο ή σε ένα αυτοκίνητο, το αξονικό σύστημα (άξονας - προπέλα) ενός πλοίου, η μεταλλική κατασκευή ενός πλοίου η οποία αποτελείται από ενισχυτικά τα οποία υποστηρίζονται από ενισχυμένους δοκούς. Ξεκινήσαμε από την αρχική παραδοχή  $k_1 > k_2$  και  $m_1 < m_2$  με αποτέλεσμα να έχουμε  $\omega_1 \gg \omega_2$ . Το σύστημα αυτό όμως δεν χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη χρονοκλιμάκων της μορφής που αναφέρθηκε στην προηγούμενη παράγραφο.

Κατόπιν διερευνήσεως καταλήξαμε στον προσδιορισμό των παραμέτρων  $k_1, m_1, c_1$  οι οποίες μας δίνουν ένα σύστημα για το οποίο ισχύει  $c_1 \gg c_2$ . Αυτή η διαφορά στις αποσβέσεις μας έδωσε ένα σύστημα όπου ο ταλαντωτής με τη μεγαλύτερη απόσβεση, ο οποίος ξεκινά πρώτος την κίνηση, κάνει ένα μικρό αριθμό ταλαντώσεων και σύντομα σταματά ενώ ο άλλος ταλαντωτής ξεκινά να ταλαντώνεται. Στο σύστημα αυτό υπάρχουν αργές και γρήγορες αποσβετικές χρονοκλίμακες οι οποίες εξαντλούνται πολύ πιο σύντομα από τις αργές πράγμα το οποίο κάνει το σύστημα δύσκαμπτο. Ακολούθως αναπτύσσεται ένας αριθμός εξισορροπήσεων μεταξύ των διάφορων διαδικασιών του μοντέλου, ο αριθμός των οποίων είναι ίσος με τον αριθμό των γρήγορων χρονοκλιμάκων,

Χρησιμοποιώντας την τροποποιημένη μέθοδο CSP μporέσαμε να προσδιορίσουμε την ΑΑΠ πάνω στην οποία κινείται η λύση του συστήματος. Η ΑΑΠ προσδιορίστηκε μέσω της εξάντλησης των γρήγορων χρονοκλιμάκων και η διάσταση της είναι μικρότερη από τη διάσταση του αρχικού χώρου κατά τη διάσταση του γρήγορου υποχώρου. Ο προσδιορισμός της με τη βοήθεια της τροποποιημένης μεθόδου CSP είναι σαφώς καλύτερης ακρίβειας από τον αντίστοιχο προσδιορισμό με τη χρήση της κλασικής ασυμπτωτικής ανάλυσης λόγω του ότι γίνεται επαναπροσδιορισμός (refinement) των διανυσμάτων βάσης τα οποία περιγράφουν τον αργό και γρήγορο υποχώρο στους οποίους δρουν αντίστοιχα οι αργές και οι γρήγορες χρονοκλίμακες.

Η ΑΑΠ εξαρτάται μόνο από τις μεταβλητές που σχετίζονται με τις αργές χρονοκλίμακες πράγ-

μα το οποίο απλοποιεί την επίλυση του προβλήματος, αφού τώρα το σύστημα εξισώσεων που το περιγράφει είναι μικρότερης διάστασης. Επίσης ο προσδιορισμός των μεταβλητών που σχετίζονται με τις γρήγορες ή αργές χρονοκλίμακες μας βοηθά να κατανοήσουμε καλύτερα τη φύση του προβλήματος και τις φυσικές διεργασίες που λαμβάνουν χώρα.

Κατόπιν με τον αλγόριθμο LSODE προσδιορίσαμε την εξέλιξη της ακριβούς λύσης στο χρόνο και είδαμε πως η ακριβής λύση καταλήγει πάνω στην ΑΑΠ μετά την εξάντληση των γρήγορων χρονοκλιμάκων, πράγμα το οποίο επαληθεύει την ορθότητα του υπολογισμού της ΑΑΠ με τη τροποποιημένη μέθοδο CSP.

Η εφαρμογή αυτής της μεθόδου σε φυσικά προβλήματα πολλών μεταβλητών και πολλαπλών κλιμάκων multi-scale όπως αυτά συναντώνται στη μηχανική, στη χημική κινητική, βιολογική μοντελοποίηση, ατμοσφαιρικές προβλέψεις κτλ. μπορεί να μας οδηγήσει σε απλοποιημένες λύσεις (συστήματα εξισώσεων μικρότερης διάστασης) ή να μας δώσει λύση εκεί που μέχρι σήμερα δεν υπάρχει.

# Παράρτημα Α'

## ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ

Υπάρχουν σύνολα σημείων που έχουν σημαντικές ιδιότητες σε σχέση με τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Τα σύνολα αυτά είναι σημαντικά για την μελέτη των δυναμικών συστημάτων. Τα απλούστερα τέτοια σύνολα είναι τα στάσιμα σημεία.

**Ορισμός 1.** Δεδομένης της εξίσωσης  $y' = h(y)$ , όπου  $y \in \mathbb{R}^k$ , στάσιμο σημείο καλείται κάθε σημείο  $y$  για το οποίο η συνάρτηση  $h$  εξαφανίζεται.

Τα στάσιμα σημεία αντιστοιχούν σε σημεία ισορροπίας του συστήματος που μοντελοποιείται. Ένα πιο γενικό σύνολο σημείων που μας ενδιαφέρει είναι αυτά τα οποία παραμένουν αναλλοίωτα σε σχέση με τις κυρίαρχες εξισώσεις.

**Ορισμός 2.** Ένα σύνολο  $V$  καλείται αναλλοίωτο ως προς την εξίσωση  $y' = h(y)$  εάν δεδομένου ότι  $y(t_0) \in V$  για κάποιο  $t_0 \in \mathbb{R}$  συνεπάγεται ότι  $y(t) \in V$  για κάθε  $t \in \mathbb{R}$ .

Απλά παραδείγματα αναλλοίωτων συνόλων αποτελούν τα στάσιμα σημεία και οι περιοδικές τροχιές. Ένας λιγότερο περιοριστικός ορισμός της αμεταβλητότητας είναι τα τοπικά αναλλοίωτα σύνολα.

**Ορισμός 3.** Δεδομένου ενός συστήματος  $y' = h(y)$  ένα ανοικτό σύνολο  $V$  καλείται τοπικά αναλλοίωτο ως προς ένα ανοικτό σύνολο  $W$  εάν το  $V$  είναι υποσύνολο του  $W$  και για κάθε τροχιά που εγκαταλείπει το  $V$  εγκαταλείπει ταυτόχρονα και το  $W$ .

Τα αναλλοίωτα (και τοπικά αναλλοίωτα) σύνολα που θα μελετήσουμε έχουν μια συγκεκριμένη ιδιότητα, για την ακρίβεια θα είναι πολλαπλότητες.

**Ορισμός 4.** Έστω  $\mathbb{R}^p$  ο  $p$ -διάστατος Ευκλείδειος χώρος. Ένα σύνολο σημείων στον  $\mathbb{R}^p$  θα καλείται ομαλή πολλαπλότητα διάστασης  $q$ , με  $q < p$ , εάν κάθε σημείο του συνόλου έχει περιοχή που είναι διαφορομορφική ως προς ένα ανοικτό σύνολο του  $\mathbb{R}^q$ .

**Ορισμός 5.** Δεδομένων δύο πολλαπλοτήτων  $M$  και  $N$ , μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση  $f$  καλείται διαφορομορφισμός αν τόσο η  $f : M \rightarrow N$  όσο και η αντίστροφη της  $f^{-1} : N \rightarrow M$  είναι διαφορίσιμες. Εάν οι συναρτήσεις είναι  $r$  φορές συνεχώς διαφορίσιμες τότε η  $f$  καλείται  $C^r$  διαφορομορφισμός.

Δύο πολλαπλότητες  $M$  και  $N$  είναι διαφορομορφικές, εάν υπάρχει ομαλή αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση  $f$  από το  $M$  στο  $N$  με ομαλή αντίστροφη απεικόνιση. Είναι  $C^r$  διαφορομορφικές εάν υπάρχει μια  $r$  φορές συνεχώς παραγωγίσιμη και αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση από το  $M$  στο  $N$  με

αντίστροφη απεικόνιση επίσης  $r$  φορές συνεχώς παραγωγίσιμη.

Τα πιο απλά παραδείγματα πολλαπλοτήτων, στον  $R^3$  για παράδειγμα, είναι τα σημεία (διάσταση 0), μη τετμημένες ομαλές καμπύλες (διάσταση 1) και μη τετμημένες ομαλές επιφάνειες (διάσταση 2), όπως επίπεδα και παραβολοειδή.

Όλες οι πολλαπλότητες που μελετάμε είναι συμπαγείς. Παραδείγματα συμπαγών πολλαπλοτήτων αποτελούν ο διπλός τόρος στον  $R^3$ , ο οποίος είναι ασύννορος, και ένα οποιοδήποτε κλειστό διάστημα στον  $R$ , το οποίο έχει σύνορο.



# Βιβλιογραφία

- [1] Κυριάκος Δ. Ασβεστάς, Δημήτριος Α. Γκούσης, *Ασυμπτωτική Ανάλυση Ταλαντωτικών Συστημάτων με χρήση του CSP*, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, Αθήνα 2011.
- [2] Panagiotis D. Kourdis, Ralf Steuer, Dimitris A Goussis, Physical understanding of complex multiscale biochemical models via algorithmic simplification: Glycolysis in *Saccharomyces cerevisiae*, *Physica D* 239 (2010) 1798-1817.
- [3] Steven H. Strogatz, Ian Stewart, *Coupled Oscillators and Biological Synchronization*, Scientific American, December 1993
- [4] Haym Benaroya, Rene D. Gabbai, Modelling vortex-induced fluid structure interactions, *Phil. Trans. R. Soc. A* (2008) 366, 1231-1274 doi:10.1098/rsta.2007.2130
- [5] O. M. Faltinsen, The effect of hydroelasticity on ship slamming, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* 1997 366, 575-591 doi:10.1098/rsta.1997.0026
- [6] Alez Gagen, Lean Larson, *Coupled Oscilators*, May 18 2000
- [7] C. Blair, R. Braddell, T Harris, *Coupled Pendulums*, 18 April 2008
- [8] D, A, Goussis, Quasi steady state and partial equilibrium approximations: their relation and their validity, *Combustion Theory and Modelling* 2012, 1-58
- [9] M, Valorani, H, N, Najm, D, A, Goussis, CSP analysis of a transient flame-vortex interaction: time scales and manifolds, *Comb, and Flame* 134 (2003) 35-53,
- [10] M. Hadjinicolaou, D, A, Goussis, Asymptotic solution of stiff PDEs with the CSP method: the reaction diffusion equation, *J, Sci, Comput.,* Vol. 20, No, 3, pp. 781-810,
- [11] M. Valorani, D. A. Goussis, F. Creta, H. N. Najm, High order corrections in the approximation of low-dimensional manifolds and the construction of simplified problems with the CSP method, *J. Comp. Phys.* 209 (2005) 754-786.
- [12] D. A. Goussis, M. Valorani, An efficient iterative algorithm for the approximation of the fast and slow dynamics of the stiff systems, *J. Comp. Phys.* 214 (2006) 316-346.
- [13] A. Massias, D. Diamantis, E. Mastorakos, D.A. Goussis, An algorithm for the construction of global reduced mechanisms with CSP data, *Combust. Flame* 117 (1999) 685-708.
- [14] I. T. Georgiou, I. B. Schwartz, Dynamics of large scale coupled structural/mechanical systems: a singular perturbation/proper orthogonal decomposition approach, *J. Appl. Math.,* Vol. 59, No. 4, pp. 1178-1207.
- [15] I. B. Schwartz, I. T. Georgiou, Instant chaos and hysteresis in coupled linear-nonlinear oscillators, *Phys. Letters A* 242 (1998) 307-312.

- [16] I. T. Georgiou, I. J. Corless, A. K. Bajaj, Dynamics of nonlinear structures with multiple equilibria: A singular perturbation-invariant manifold approach, *Z. angew. Math. Phys.* 50 (1999) 892-924.
- [17] I. T. Georgiou, Nonlinear dynamics and chaotic motions of a singularly perturbed nonlinear viscoelastic beam. Ph. D. Dissertation, Purdue University, 1993.
- [18] I. T. Georgiou, A. K. Bajaj and M. Corless, Invariant manifolds and chaotic vibrations in singularly perturbed nonlinear oscillators, *Int. J. Engng Sci.* 36(4) (1998), 431-458.
- [19] I. T. Georgiou, A. K. Bajaj and M. Corless, Slow and fast invariant manifolds, and normal modes in a two-degree-of-freedom structural dynamical system with multiple equilibrium states, *Int. J. of Non-Linear Mech.* 33(2) (1998), 275-300.
- [20] G. Haller, T. Sapsis, *Localized Instability and Attraction along Invariant Manifolds*, 2008.
- [21] N. Fenichel, Geometric Singular Perturbation Theory for Ordinary Differential Equations, *J. Diff. Equations* 31, p.53-98, 1979
- [22] T. J. Kaper, An Introduction to Geometric Methods and Dynamical Systems Theory for Singular Perturbation Problems, *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, Vol.51, 1999
- [23] S.J. Fraser, The steady state and equilibrium approximations: a geometrical picture, *J. Chem. Phys.* 88 (1988) 4732-4738.
- [24] P. Constantin, C. Foias, B. Nicolaenko, R. Temam, Integral manifolds and inertial manifolds for dissipative partial differential equations, *Appl. Math. Sci.* 70 (1989).
- [25] M.J. Davis, R.T. Skodje, Geometric investigation of low-dimensional manifolds in systems approaching equilibrium, *J. Chem. Phys.* 111 (1999) 859-874.
- [26] A. Zagaris, H.G. Kaper, T.J. Kaper, Fast and slow dynamics for the CSP method, *SIAM J. Multiscale Model.* 2 (2004) 613- 638.
- [27] W. Richardson, J. Volk, K.H. Lau, S.H. Lin, H. Eyring, Application of the singular perturbation method to reaction kinetics, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 70 (1973) 1588-1592.
- [28] A.N. Gorban, I.V. Karlin, A.Y. Zinovyev, Constructive methods of invariant manifolds for kinetic problems, *Phys. Rep.* 396 (2004) 197-403.
- [29] E. Pesheck, N. Boivin, P. Christophe, Nonlinear modal analysis of structural systems using multi mode invariant manifolds, *Nonlinear Dyn.* 25 (2001) 183-205.
- [30] I. Goldfarb, V. Goldshtein, U. Maas, Comparative analysis of two asymptotic approaches based on integral manifolds, *IMA J. Appl. Math.* 69 (2004) 353-374.
- [31] W. M. Boothby, *An Introduction to Differential Manifolds and Riemannian Geometry*. Second Edition, Academic Press, London 1985.
- [32] H. W. Knobloch and B. Aulbach, Singular perturbations and integral manifolds, *J. Math. Phys. Sci.* 18 (5) (1984), 415-423.
- [33] K. Nipp, Invariant manifolds of singularly perturbed ordinary differential equations, *J. Appl. Math. Phys. (ZAMP)* 36 (1985), 311-320.