



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
**ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

**Η ΕΝΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΔΙΦΑΣΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ**  
**ΣΤΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΗΣ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ ΙΔΙΟΜΟΡΦΙΩΝ ΜΕ**  
**ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΚΑΙ ΡΩΓΜΕΣ ΣΕ ΔΙ-ΥΛΙΚΑ**

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

**ΓΕΩΡΓΙΟΥ Δ. ΜΑΥΡΟΓΙΑΝΝΗ**

Διπλωματούχου Αγρονόμου – Τοπογράφου Μηχανικού ΕΜΠ

Διπλωματούχου Πολιτικού Μηχανικού ΠΘ

**ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:**

ΜΑΡΙΝΟΣ Α. ΚΑΤΤΗΣ

Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΜΠ

**Αθήνα, Μάρτιος 2013**





**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
**ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

**Η ΕΝΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΔΙΦΑΣΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ**  
**ΣΤΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΗΣ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ ΙΔΙΟΜΟΡΦΙΩΝ ΜΕ**  
**ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΚΑΙ ΡΩΓΜΕΣ ΣΕ ΔΙ-ΥΛΙΚΑ**

**ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ**

**ΓΕΩΡΓΙΟΥ Δ. ΜΑΥΡΟΓΙΑΝΝΗ**

Διπλωματούχου Αγρονόμου – Τοπογράφου Μηχανικού ΕΜΠ

Διπλωματούχου Πολιτικού Μηχανικού ΠΘ

**ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΤΙΚΗ**

**ΕΠΙΤΡΟΠΗ:**

1. Μ. ΚΑΤΤΗΣ, Αν. Καθ. Ε.Μ.Π. (Επιβλέπων)
2. Μ. ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ, Καθ. Ε.Μ.Π.
3. Χ. ΓΙΟΥΝΗΣ, Επίκ. Καθ. Ε.Μ.Π.

**ΕΠΤΑΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ**

**ΕΠΙΤΡΟΠΗ:**

1. Μ. ΚΑΤΤΗΣ, Αν. Καθ. Ε.Μ.Π. (Επιβλέπων)
2. Μ. ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ, Καθ. Ε.Μ.Π.
3. Χ. ΓΙΟΥΝΗΣ, Επίκ. Καθ. Ε.Μ.Π.
4. Ε. ΘΕΟΤΟΚΟΓΛΟΥ, Καθ. Ε.Μ.Π.
5. Γ. ΛΑΜΠΕΑΣ, Αν. Καθ. Π. Πάτρας
6. Π. ΠΑΠΑΝΙΚΟΣ, Αν. Καθ. Π. Αιγαίου
7. Δ. ΕΥΤΑΞΙΟΠΟΥΛΟΣ, Επίκ. Καθ. Ε.Μ.Π.

**Αθήνα, Μάρτιος 2013**

*Η έγκριση της διδακτορικής διατριβής από την Ανώτατη Σχολή Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών του Ε.Μ. Πολυτεχνείου δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα (Ν. 5343/1932, Άρθρο 202).*

## **Πρόλογος**

Η παρούσα διδακτορική διατριβή εκπονήθηκε στο εργαστήριο Δομικής Μηχανικής και Στοιχείων Τεχνικών Έργων της Σχολής Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, υπό την επίβλεψη του κ. Μαρίνου Καττή, Αναπληρωτή Καθηγητή.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Μαρίνο Καττή, για την ευκαιρία που μου έδωσε να ασχοληθώ με την έρευνα και για την αδιάκοπη και γεμάτη υπομονή καθοδήγησή του σε όλη την διάρκεια της διατριβής.

Επίσης, ευχαριστίες θα ήθελα να εκφράσω στον Καθηγητή κ. Μιχαήλ Σακελλαρίου και στον Επίκουρο Καθηγητή κ. Χρήστο Γιούνη, για την πολύτιμη βοήθεια που μου παρείχαν ως μέλη της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής.



## Πίνακας Περιεχομένων

### Κεφάλαιο 1

<b>ΕΙΣΑΓΩΓΗ .....</b>	<b>1</b>
1.1 Η ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ .....	1
1.2 ΤΟ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ .....	5
1.3 Η ΔΟΜΗ ΤΗΣ ΔΙΑΤΡΙΒΗΣ .....	6

### Κεφάλαιο 2

<b>Η ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΗ ΑΝΙΣΟΤΡΟΠΗ ΚΑΙ ΙΣΟΤΡΟΠΗ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ.....</b>	<b>9</b>
2.1 ΓΕΝΙΚΑ .....	9
2.2 ΟΙ ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΗΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ.....	11
2.3 Η ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΗ ΑΝΙΣΟΤΡΟΠΗ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ .....	13
2.3.1 Οι διαφορικές εξισώσεις της διδιάστατης ελαστικότητας.....	13
2.3.2 Η γενική λύση της μητρικής διαφορικής εξίσωσης του διδιάστατου ελαστικού προβλήματος .....	14
2.3.3 Το διδιάστατο εντατικό πεδίο σε όρους του μιγαδικού δυναμικού.....	16
2.4 Η ΣΥΝΕΠΙΠΕΔΗ ΚΑΙ Η ΑΝΤΙΕΠΙΠΕΔΗ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ ΤΗΣ ΑΝΙΣΟΤΡΟΠΗΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΙΣΟΤΡΟΠΗΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ.....	20
2.4.1 Η συνεπίπεδη και η αντιεπίπεδη παραμόρφωση .....	20
2.4.2 Το ελαστικό πεδίο της συνεπίπεδης παραμόρφωσης .....	21
2.4.3 Το ελαστικό πεδίο της αντιεπίπεδης παραμόρφωσης .....	23
2.4.4 Οι εξισώσεις της ισότροπης ελαστικότητας .....	25
2.5 ΤΑ ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΑ ΕΛΑΣΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ ΙΔΙΟΜΟΡΦΙΩΝ ΣΕ ΟΜΟΓΕΝΕΣ ΥΛΙΚΟ .....	28
2.5.1 Η έννοια της ιδιομορφίας στη διδιάστατη ελαστικότητα.....	28

2.5.2	Τα ελαστικά πεδία για γραμμική δύναμη.....	29
2.5.2.1	Ανισότροπο ομογενές υλικό .....	29
2.5.2.2	Ισότροπο ομογενές υλικό.....	32
2.5.3	Τα ελαστικά πεδία για γραμμική εξάρμωση .....	34
2.5.3.1	Ανισότροπο ομογενές υλικό .....	35
2.5.3.2	Ισότροπο ομογενές υλικό.....	37

### Κεφάλαιο 3

<b>Η ΕΝΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΔΙΦΑΣΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ .....</b>	<b>39</b>
3.1 ΓΕΝΙΚΑ .....	39
3.2 Η ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΤΟΥ ΔΙΦΑΣΙΚΟΥ ΥΛΙΚΟΥ .....	40
3.3 ΟΙ ΓΕΝΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΩΝ ΔΙΦΑΣΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ .....	41
3.3.1 Ανισότροπο/ανισότροπο διυλικό.....	41
3.3.2 Ανισότροπο/ισότροπο διυλικό.....	44
3.3.3 Ισότροπο/ισότροπο διυλικό .....	46

### Κεφάλαιο 4

<b>ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΙΔΙΟΜΟΡΦΙΩΝ ΜΕ ΜΗ ΡΗΓΜΑΤΩΜΕΝΕΣ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ.....</b>	<b>49</b>
4.1 ΓΕΝΙΚΑ .....	49
4.2 ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΤΑΣΗ.....	50
4.2.1 Ανισότροπο/ανισότροπο διυλικό.....	51
4.2.2 Ισότροπο/ισότροπο διυλικό .....	54
4.2.3 Ισότροπο/ανισότροπο διυλικό .....	58
4.3 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΑΡΜΩΣΗ ΚΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ .....	60
4.3.1 Ανισότροπο/ανισότροπο διυλικό.....	60
4.3.2 Ισότροπο/ισότροπο διυλικό .....	63
4.3.3 Ανισότροπο/ισότροπο διυλικό.....	66



4.3.3.1 Η ιδιομορφία στο ισότροπο υλικό .....	67
4.3.3.2 Η ιδιομορφία στο ανισότροπο υλικό .....	69

## Κεφάλαιο 5

<b>ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΙΔΙΟΜΟΡΦΙΩΝ ΜΕ ΡΗΓΜΑΤΩΜΕΝΕΣ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ.....</b>	<b>71</b>
5.1 ΓΕΝΙΚΑ .....	71
5.2 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΗΣ ΡΩΓΜΗΣ.....	72
5.3 ΤΟ ΣΥΝΟΡΙΑΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΗΣ ΡΩΓΜΗΣ.....	74
5.3.1 Ανισότροπο/ανισότροπο διυλικό.....	74
5.3.2 Ανισότροπο/ισότροπο διυλικό.....	76
5.3.3 Ισότροπο/ισότροπο διυλικό .....	78
5.4 ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΣΥΝΟΡΙΑΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ.....	80
5.4.1 Αναγωγή του συνοριακού προβλήματος της ρωγμής σε πρόβλημα Hilbert.....	80
5.4.2 Επίλυση του προβλήματος Hilbert.....	83
5.4.2.1 Περίπτωση I: η $\mathbf{X}^d(z, z)$ δεν περιέχει λογαριθμικές ιδιομορφίες .....	83
5.4.2.2 Περίπτωση II: η $\mathbf{X}^d(z, z)$ περιέχει λογαριθμικές ιδιομορφίες .....	84
5.5 ΤΑ ΕΛΑΣΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ ΤΗΣ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΗΣ ΡΩΓΜΗΣ ΓΙΑ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΤΑΣΗ.....	85
5.5.1 Ανισότροπο/ανισότροπο διυλικό.....	86
5.5.2 Ισότροπο/ισότροπο διυλικό .....	87
5.5.3 Ανισότροπο/ισότροπο διυλικό.....	88
5.6 ΤΑ ΕΛΑΣΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ ΤΗΣ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΗΣ ΡΩΓΜΗΣ ΓΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΑΡΜΩΣΗ.....	89
5.6.1 Ανισότροπο/ανισότροπο διυλικό.....	89
5.6.2 Ισότροπο/ισότροπο διυλικό .....	90

5.6.3	Ανισότροπο/ισότροπο διυλικό.....	92
5.7	ΤΑ ΕΛΑΣΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ ΤΗΣ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΗΣ ΡΩΓΜΗΣ ΓΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ.....	94
5.7.1	Ανισότροπο/ανισότροπο διυλικό.....	94
5.7.2	Ισότροπο/ισότροπο διυλικό .....	95
5.7.3	Ανισότροπο/ισότροπο διυλικό.....	97

## Κεφάλαιο 6

<b>ΤΑ ΕΛΑΣΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ ΚΟΝΤΑ ΣΤΗΝ ΑΚΡΗ ΤΗΣ ΡΩΓΜΗΣ .....</b>		<b>99</b>
6.1	ΓΕΝΙΚΑ .....	99
6.2	ΤΟ ΜΗΤΡΩΟ ΕΝΤΑΣΗΣ ΤΩΝ ΤΑΣΕΩΝ .....	100
6.3	Ο ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΟΣ ΕΛΚΥΣΤΗΣ ΤΩΝ ΤΑΣΕΩΝ ΚΟΝΤΑ ΣΤΗΝ ΑΚΡΗ ΤΗΣ ΡΩΓΜΗΣ .....	102
6.4	ΤΟ ΑΝΟΙΓΜΑ ΤΗΣ ΡΩΓΜΗΣ ΚΟΝΤΑ ΣΤΟ ΑΚΡΟ ΤΗΣ .....	108
6.5	Ο ΡΥΘΜΟΣ ΑΠΕΛΕΥΘΕΡΩΣΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ.....	109
6.6	Η ΦΥΣΙΚΗ ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΕΝΤΑΣΗΣ ΤΩΝ ΤΑΣΕΩΝ .....	110
6.7	ΤΟ ΜΗΤΡΩΟ ΕΝΤΑΣΗΣ ΤΩΝ ΤΑΣΕΩΝ ΓΙΑ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΦΟΡΤΙΣΗ .	114
6.8	ΤΟ ΜΗΤΡΩΟ ΕΝΤΑΣΗΣ ΤΩΝ ΤΑΣΕΩΝ ΓΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΑΡΜΩΣΗ ..	115
6.9	ΤΟ ΜΗΤΡΩΟ ΕΝΤΑΣΗΣ ΤΩΝ ΤΑΣΕΩΝ ΓΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ.....	117
6.10	ΤΑ ΕΛΑΣΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ ΚΟΝΤΑ ΣΤΟ ΑΚΡΟ ΤΗΣ ΡΩΓΜΗΣ .....	118
6.10.1	Ανισότροπο/ανισότροπο διυλικό.....	118
6.10.2	Ισότροπο/ισότροπο διυλικό .....	120
6.10.3	Ισότροπο/ανισότροπο διυλικό .....	122

## Κεφάλαιο 7

<b>ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑ.....</b>		<b>125</b>
7.1	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ .....	125
7.2	ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΠΑΡΑΠΕΡΑ ΕΡΕΥΝΑ.....	128

<b>Βιβλιογραφία .....</b>	<b>129</b>
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι</b>	
ΟΙ ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΤΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ $\mathbf{H}\bar{\mathbf{H}}^{-1}$ .....	133
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ</b>	
ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ $\mathbf{I}(z)$ .....	135
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙΙ</b>	
ΜΙΑ ΓΕΝΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΗ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΟΛΟΜΟΡΦΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ .....	137
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙV</b>	
ΤΑ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΑ ΕΛΑΣΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΙΣΟΤΡΟΠΟ/ΙΣΟΤΡΟΠΟ ΔΙΥΛΙΚΟ.....	141
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ V</b>	
ΟΙ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΕΝΤΑΣΗΣ ΤΩΝ ΤΑΣΕΩΝ $K_I$ , $K_{II}$ ΚΑΙ $K_{III}$ ΓΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΑΡΜΩΣΗ ΚΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ .....	145
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ VI</b>	
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ .....	147
VI.1 Δεδομένα υλικών .....	147
VI.2 Το μητρώο $\mathbf{H}$ .....	149
VI.3 Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του μητρώου $\mathbf{H}\bar{\mathbf{H}}^{-1}$ .....	150
VI.4 Το μητρώο έντασης των τάσεων .....	151
<b>ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ</b>	



## Περίληψη

Η παρούσα διατριβή ασχολείται με την μελέτη της αλληλεπίδρασης ιδιομορφιών με ρηγματωμένες ή μη διεπιφάνειες διυλικών, για οποιοδήποτε συνδυασμό ελαστικής ανισοτροπίας των μερών που τα συνιστούν. Η μελέτη γίνεται στα πλαίσια της γραμμικής ελαστικότητας του ανισότροπου και ισότροπου υλικού, χρησιμοποιώντας το προσομοίωμα των δύο συνδεδεμένων ελαστικών ημιχώρων με μια επίπεδη διεπιφάνεια. Οι ιδιομορφίες που μελετώνται είναι η γραμμική εξάρμωση, η γραμμική δύναμη και μια ομοιόμορφη τάση, που εφαρμόζεται στα απομακρυσμένα σύνορα των ελαστικών ημιχώρων. Η ανάλυση των σχετικών ελαστικών προβλημάτων γίνεται με επέκταση της μεθόδου των διφασικών δυναμικών, που έχει αναπτυχθεί για ισότροπα και ανισότροπα διυλικά, σε διυλικά για οποιοδήποτε συνδυασμό ελαστικής ανισοτροπίας των επιμέρους υλικών τους. Η επέκταση της μεθόδου επιτυγχάνεται με την ανάπτυξη μιας νέας αντιπροσώπευσης της γενικής λύσης του διδιάστατου ελαστικού προβλήματος της ισότροπης ελαστικότητας. Η γενική αυτή λύση, προκειμένου να δημιουργηθεί φορμαλιστική αντιστοιχία με την αντίστοιχη γενική λύση του ανισότροπου προβλήματος, διατυπώνεται σε μητρική μορφή σε όρους μιας μητρικής συνάρτησης στήλης, που τα στοιχεία της είναι τρεις ολόμορφες μιγαδικές συναρτήσεις. Η γενική λύση που αποκτήθηκε οδηγεί σε εκείνη της συνεπίπεδης ελαστικότητας των Kolosov-Muskhelishvili, καθώς και στην λύση της αντιεπίπεδης ελαστικότητας, που έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια της μιγαδικής θεωρίας.

Με βάση την διατύπωση του Eshelby και των συνεργατών του για την ανισότροπη ελαστικότητα, και την διατύπωση που αναπτύχθηκε παραπάνω για την ισότροπη ελαστικότητα, αναπτύσσονται γενικές αντιπροσωπεύσεις της λύσης του διδιάστατου ελαστικού προβλήματος, για οποιοδήποτε συνδυασμό ελαστικής συμμετρίας των συνδεδεμένων ελαστικών μέσων του διφασικού συστήματος. Οι αντιπροσωπεύσεις αυτές της λύσης εκφράζονται σε όρους δύο μητρικών συναρτήσεων στήλης, των οποίων τα στοιχεία είναι τρεις ολόμορφες μιγαδικές συναρτήσεις. Οι μητρικές αυτές συναρτήσεις αποτελούν τα διφασικά δυναμικά του διφασικού συστήματος. Για όλους τους συνδυασμούς ανισοτροπίας του συστήματος, δηλαδή για ανισότροπο/ανισότροπο, ισότροπο/ισότροπο και ανισότροπο/ισότροπο σύστημα, δείχνεται ότι οι γενικές αντιπροσωπεύσεις της λύσης ανάγονται σε μια ενιαία μορφή, που εμπλέκει τα διφασικά δυναμικά του συστήματος και δύο διφασικά μητρώα συντελεστών.

---

Η ενοποιημένη μέθοδος των διφασικών δυναμικών, που αναπτύχθηκε, εφαρμόστηκε επιτυχώς για την επίλυση μιας σειράς ελαστικών προβλημάτων του διφασικού συστήματος για τις ιδιομορφίες που προαναφέρθηκαν. Συγκεκριμένα, από την επίλυση των σχετικών προβλημάτων, αποκτήθηκαν τα πλήρη ελαστικά πεδία στο σύστημα, για μια γραμμική εξάρμωση και μια γραμμική δύναμη, που εφαρμόζονται κοντά στην διεπιφάνειά του. Επίσης, η αναπτυχθείσα μέθοδος εφαρμόζεται στην επίλυση των σχετικών ελαστικών προβλημάτων του διφασικού συστήματος για ομοιόμορφες τάσεις, που εφαρμόζονται στα απομακρυσμένα σύνορα των συνδεδεμένων μέσων. Από την επίλυση των προβλημάτων αυτών προσδιορίστηκαν τα ελαστικά πεδία στο σύστημα, καθώς και οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν οι εφαρμοζόμενες ομοιόμορφες τάσεις, προκειμένου να υπάρχει συμβιβαστότητα στις διεπιφανειακές μετατοπίσεις και ισορροπία του συνολικού συστήματος.

Στη συνέχεια, τα προηγούμενα αποτελέσματα της διατριβής χρησιμοποιήθηκαν για την ελαστική ανάλυση του διφασικού συστήματος, όταν υπάρχει μια ρωγμή στην διεπιφάνειά του και το σύστημα καταπονείται από τις ιδιομορφίες που προαναφέρθηκαν. Η λύση των σχετικών ελαστικών προβλημάτων αποκτιέται σε όρους των διφασικών δυναμικών του συστήματος, ενώ λεπτομερή αποτελέσματα παρέχονται για την γραμμική εξάρμωση, την γραμμική δύναμη και την ομοιόμορφη φόρτιση στο άπειρο. Έτσι, αποκτήθηκαν οι γενικές λύσεις για τη γραμμική εξάρμωση και τη γραμμική δύναμη στην περίπτωση του ισότροπου/ανισότροπου διυλικού. Δείχθηκε ότι ο ορισμός των ελαστικών τοπικών πεδίων στην άκρη της ρωγμής μπορεί να γίνει μονοσήμαντα και με ενιαίο τρόπο για όλους τους συνδυασμούς ανισοτροπίας του συστήματος. Επίσης, ότι ο διεπιφανειακός ελκυστής, το άνοιγμα της ρωγμής κοντά στο άκρο της και ο λόγος του ρυθμού απελευθέρωσης ενέργειας έχουν κοινή δομή για όλους τους συνδυασμούς ανισοτροπίας του συστήματος και μπορούν να εκφραστούν με μοναδικό τρόπο για όλους τους συνδυασμούς ανισοτροπίας με κατάλληλο ορισμό των συντελεστών έντασης των τάσεων. Δείχθηκε ότι το άνοιγμα της ρωγμής συνδέεται γραμμικά με τον διεπιφανειακό ελκυστή των τάσεων. Η γραμμική σχέση αποκαλύπτει ότι για έναν οποιονδήποτε συνδυασμό ανισοτροπίας των δύο φάσεων, υπάρχουν τρεις κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις, όπου οι συνιστώσες του ελκυστή που αντιστοιχούν στις διευθύνσεις αυτές είναι ανάλογες των συνιστωσών του ανοίγματος της ρωγμής στις διευθύνσεις αυτές.

## **Abstract**

The main object of the present work is the study of the interaction of singularities with cracked and un-cracked interfaces of a composite body consisting of two dissimilar materials perfectly bonded along the interface, for any combination of elastic anisotropy of their parts. The study is a part of the linear elasticity of the isotropic and anisotropic material, using the model of two elastic half spaces associated with a linear interface. The singularities studied are the linear dislocation, the linear force and a uniform force applied to the remote border of the half-spaces. The analysis of the problems uses the extension of the two-phase potential method, developed for isotropic and anisotropic bi-materials, in any combination of elastic anisotropy of the individual materials. The extension of the method is achieved by developing a new representation of the two-dimensional elastic solution of isotropic elasticity. The general solution, in order to create formalistic line with the corresponding general solution of anisotropic problem, is formulated in matrix form in terms of a matrix column-function, whose elements are three holomorphic complex functions. The general solution obtained is that of in-plane elasticity developed by Kolosov-Muskhelishvili, and the solution of anti-plane elasticity, that has been developed using the complex theory.

Based on the formulation of Eshelby et al. for the anisotropic elasticity, and the formulation developed above for the isotropic elasticity, there has been developed representations of the general solution of the two-dimensional elastic problem, for any combination of elastic symmetry of the associated elastic materials of the bimaterial system. The representations of the solution are expressed in terms of two matrix column-functions, whose elements are three holomorphic complex functions. These matrix functions are the two-phase potentials of the two-phase system. For all combinations of anisotropy of the system, anisotropic / anisotropic, isotropic / isotropic and anisotropic / isotropic bimaterial, it is shown that the general representations of the solution are reduced to a single form, which involves the two-phase potentials of the system and the two two-phase matrices of the coefficients.

The integrated method of two-phase potentials, developed, applied successfully to solve a series of elastic problems of the two-phase system for the singularities mentioned above. Specifically, using the resolution of relative problems, there is obtained the full elastic

---

fields in the system, for a linear dislocation and a linear force applied near the interface. Also, the developed method is applied to solving the elastic problems of the two-phase system for a uniform stresses, applied to a remote border of the connected materials. By solving these problems there are determined the elastic fields in the system, and the conditions that must be met by uniform stresses applied to a remote border in order to ensure equilibrium in the direction of the  $x_2$ -axis and strain compatibility along the interface.

Then, the previous results of the dissertation, used for the analysis of the bimaterial, when a crack is present on the interface and the loading of the system is the singularities mentioned above. The solution of the elastic problem is obtained in terms of the two-phase potentials of the system, while detailed results are provided for the linear dislocation, linear force and uniform loading at infinity. Thus, there are obtained the general solutions for the case of linear dislocation and linear force in the case of isotropic / anisotropic bimaterial. It was shown that the definition of local elastic fields at the edge of the crack can be uniquely identified for all combinations of anisotropy of the system. Also, that the interfacial traction vector, the crack opening near the edge and the ratio of the energy release rate have a common structure for all the combinations of anisotropy of the system and can be expressed uniquely for all combinations of anisotropy with appropriate definition of the stress intensity factors. It was shown that the crack opening is linearly related to the interfacial traction vector. This linear relationship reveals that for any combination of anisotropy of the two phases, there are three orthogonal directions, where the components of traction corresponding to these directions are analogous to the components of the crack opening at these directions.



## Κεφάλαιο 1

### ΕΙΣΑΓΩΓΗ

#### 1.1 Η ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Η ανάπτυξη των προηγμένων σύνθετων υλικών και η ευρεία χρήση τους σε διάφορες τεχνολογικές εφαρμογές, τις τελευταίες δεκαετίες, έθεσε νέα θέματα προς έρευνα στην περιοχή της μηχανικής των υλικών, που σχετίζονται με την βελτίωση των ιδιοτήτων τους και την ασφαλή τους χρήση στην πράξη. Η συνολική μηχανική συμπεριφορά των υλικών αυτών εξαρτάται, κυρίως, από τις μηχανικές ιδιότητες και τον τρόπο σύνδεσης των συνιστώντων μερών τους, και από τις γεωμετρικές και υλικές ατέλειες, που ενυπάρχουν στη μάζα τους. Η παρουσία των ατελειών αυτών στη μάζα του υλικού, που είναι αναπόφευκτο γεγονός, διακόπτει τη συνέχεια της μάζας του, προκαλώντας έτσι τοπικές διαταραχές στις αναπτυσσόμενες τάσεις, όπως συμβαίνει, για παράδειγμα, γύρω από μια κοιλότητα ή κοντά στην περιοχή μιας ανομοιογένειας σε ένα σώμα. Το μέγεθος των προκαλούμενων τοπικών διαταραχών του τασικού πεδίου επηρεάζεται δραστικά από τον τρόπο σύνδεσης των συνιστώντων μερών του σύνθετου σώματος, και από τον συνδυασμό των ελαστικών τους ιδιοτήτων. Η επιστημονική γνώση, που έχει αναπτυχθεί τα τελευταία χρόνια στην περιοχή, έχει διαμορφώσει έναν ξεχωριστό κλάδο της εφαρμοσμένης μηχανικής, που είναι γνωστός ως μικρομηχανική. Η θραυστομηχανική κατέχει μια ιδιαίτερη θέση στον κλάδο αυτό. Ένα από τα βασικά αντικείμενα έρευνας στην περιοχή αυτή είναι η μελέτη της αλληλεπίδρασης των παραπάνω ατελειών των σύνθετων υλικών με τις διεπιφάνειες και τα σύνορά τους. Το μέγεθος των ατελειών αυτών καθόρισε την κλίμακα του νέου αυτού κλάδου της εφαρμοσμένης μηχανικής, που είναι της τάξης του  $10^{-6}\text{m}(=1\mu\text{m})$ . Η ανάλυση της μηχανικής συμπεριφοράς των σύνθετων υλικών στην κλίμακα αυτή γίνεται με απλοποιημένα μοντέλα, που προσομοιώνουν τοπικά τη γεωμετρία και τις ιδιότητες του υλικού και των ατελειών του. Για ένα διφασικό υλικό,

ένα τέτοιο μοντέλο, είναι αυτό των δύο ημιάπειρων ελαστικών μέσων, που συνδέονται με μια επίπεδη διεπιφάνεια. Τα ελαστικά μέσα προσομοιώνουν τις δύο διαφορετικές φάσεις του διαφασικού υλικού, και η επίπεδη διεπιφάνεια, τη γεωμετρία και τα χαρακτηριστικά της σύνδεσής τους. Στα μοντέλα αυτά η παρουσία μιας γεωμετρικής ή υλικής ατέλειας προσομοιώνεται είτε ως σημειακή δράση, είτε ως ανομοιογένεια απλοποιημένου σχήματος. Το μοντέλο αυτό έχει χρησιμοποιηθεί από πολλούς ερευνητές για τη διερεύνηση της αλληλεπίδρασης εξαρμώσεων με ρηγματωμένες και μη ρηγματωμένες διεπιφάνειες σε σύνθετα κρυσταλλικά υλικά, για την ανάλυση της συμπεριφοράς σε θραύση διαφασικών υλικών με ρηγματωμένες διεπιφάνειες και για τον θεωρητικό προσδιορισμό των ισοδύναμων μηχανικών ιδιοτήτων των σύνθετων υλικών (Dundurs and Sendeky, 1965; England, 1965, 1966; Erdogan, 1963; Gangadharan and Dundurs, 1973; Gotoh, 1967; Stroh, 1958). Όπως προαναφέρθηκε, το ιδιαίτερο ενδιαφέρον που έχει εκδηλωθεί στην ανάλυση της αλληλεπίδρασης των γεωμετρικών και υλικών ατελειών με διεπιφάνειες και ρωγμές, οφείλεται, κυρίως, στη σημαντική επίδραση που εξασκούν οι ατέλειες αυτές στη συνολική μηχανική συμπεριφορά και αντοχή των σύνθετων υλικών. Για παράδειγμα, η πλαστική συμπεριφορά των κρυσταλλικών υλικών μπορεί να ερμηνευθεί ως μια συνεχή διανομή εξαρμώσεων στην πλαστικοποιημένη περιοχή. Η θεωρία των Bilby, Cottrell και Swinden (Bilby et al., 1963) εισήγαγε την έννοια της συνεχούς διανομής εξαρμώσεων για να εκτιμηθεί το εύρος της πλαστικής ζώνης μπροστά από μια συνεπίπεδη διατμητική ρωγή (τύπου II). Η παρουσία μεμονωμένων εξαρμώσεων μπροστά από την άκρη μιας ρωγμής μπορεί να δρα ευνοϊκά έναντι της διάδοσής της με τη δημιουργία θλιπτικών τάσεων μπροστά από το μέτωπο της ρωγμής (Majumdar and Burns, 1981). Επίσης, η αύξηση της δισθραυστότητας των κεραμικών υλικών, όταν αυτά εμπλουτίζονται με μικροσωματίδια Ζιρκόνιας, οφείλεται στην αύξηση του όγκου των σωματιδίων μέσα στον όγκο του κεραμικού. Η αύξηση αυτή, που οφείλεται σε χημικές αντιδράσεις, δημιουργεί ένα θλιπτικό πεδίο γύρω από τα μικροσωματίδια της Ζιρκόνιας ( $ZrO_2$ ), που θωρακίζει τις προϋπάρχουσες ρωγμές στη μάζα του κεραμικού. Στις ελαστικές αναλύσεις για τη μελέτη του φαινομένου, οι διαστάσεις των μικροσωματιδίων της Ζιρκόνια, σε σχέση με αυτές του υλικού, επιτρέπουν την προσομοίωση του όγκου της Ζιρκόνιας ως σημειακής δράσης (Budiansky et al., 1983; Hutchinson, 1974). Έτσι, οι λύσεις των ελαστικών προβλημάτων σημειακών δράσεων δίπλα σε διεπιφάνεια έχει αποκτήσει ιδιαίτερο ενδιαφέρον στη μελέτη των σύνθετων υλικών.

Στη βιβλιογραφία, οι σημειακές δράσεις δηλώνονται ως ιδιομορφίες, και τα σχετικά ελαστικά πεδία ως συναρτήσεις Green των ιδιομορφιών. Οι συναρτήσεις Green μπορούν να χρησιμοποιηθούν, σε συνδυασμό με αριθμητικές μεθόδους, στην ανάλυση άλλων ελαστικών προβλημάτων με σύνθετη γεωμετρία και φόρτιση (Bilby and Eshelby, 1968; Rice, 1968; Hayashi and Nemat-Nasser, 1981a,b).

Όπως στα ομογενή υλικά, η ανάλυση της συμπεριφοράς σε θραύση των σύνθετων υλικών στηρίχθηκε στη μελέτη της ρωγμής Griffith, που βρίσκεται στη διεπιφάνεια του μικρομηχανικού μοντέλου των συνδεδεμένων ημιάπειρων ελαστικών μέσων. Τα τοπικά ασυμπτωτικά ελαστικά πεδία στα άκρα της ρωγμής αυτής, που προέκυψαν από τη λύση του σχετικού ελαστικού προβλήματος, χρησιμοποιήθηκαν για τον ορισμό των ελαστικών παραμέτρων θραύσης των σύνθετων υλικών επεκτείνοντας τις σχετικές έννοιες που είχαν ήδη αναπτυχθεί στα ομογενή υλικά (Erdogan, 1963; Sih and Rice, 1964; England, 1965; Shih and Assaro, 1988). Η επέκταση του ορισμού των ελαστικών παραμέτρων θραύσης των ομογενών υλικών στα σύνθετα υλικά δεν ήταν μια εύκολη υπόθεση. Η παρουσία μιας επιπρόσθετης λογαριθμικής ιδιομορφίας στο τασικό πεδίο στις άκρες της ρωγμής, που ανακαλύφθηκε από τον Williams (1959), έχει προκαλέσει σύγχυση στην περιοχή, αναφορικά με τον κατάλληλο ορισμό των συντελεστών έντασης των τάσεων, και ερωτηματικά σχετικά με τη ρεαλιστικότητα της ελαστικής λύσης της διεπιφανειακής ρωγμής (Comninou, 1977a,b; Comninou and Schmueser, 1979; Comninou and Dundurs, 1980). Το ζήτημα του κατάλληλου ορισμού του συντελεστή έντασης των τάσεων, κοντά στο άκρο της διεπιφανειακής ρωγμής, περιπλέκεται ακόμη περισσότερο στην περίπτωση των ανισότροπων διυλικών (Wu, 1990; Suo, 1990; Hwu, 1991; Wang et al., 1992). Σημειώνεται ότι, από τους ίδιους ερευνητές έχουν δοθεί, κατά καιρούς, διαφορετικοί ορισμοί για τους συντελεστές έντασης των τάσεων της διεπιφανειακής ρωγμής, καθώς και για τις άλλες παραμέτρους θραύσης που συνδέονται με τους συντελεστές αυτούς. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι, οι διαφορετικοί αυτοί ορισμοί οδηγούν στην ίδια τιμή του ρυθμού απελευθέρωσης ενέργειας (Rice, 1988; Shih and Assaro, 1988).

Από τη σχετική βιβλιογραφία γίνεται φανερό ότι, η έρευνα πάνω στα διυλικά έχει περιορισθεί στις περιπτώσεις, που οι δύο φάσεις του διυλικού είναι είτε ισότροπες ή ανισότροπες. Εξαίρεση αποτελεί το έργο του Clements (1971), στο οποίο μελετήθηκε το πρόβλημα της διεπιφανειακής ρωγμής σε ισότροπο/ανισότροπο διυλικό για εσωτερική φόρτιση των συνόρων της ρωγμής. Οι ελαστικές αναλύσεις τέτοιων προβλημάτων συναντούν δυσκολία, λόγω έλλειψης μιας ενιαίας βάσης στις θεωρίες που περιγράφουν

την ανισότροπη και ισότροπη ελαστικότητα. Είναι γνωστό ότι η γενική λύση της διδιάστατης ανισότροπης ελαστικότητας, που αναπτύχθηκε ξεχωριστά από τους Lekhnitskii (1963) και Eshelby et al. (1953), εκφυλίζεται στην περίπτωση που οι ελαστικές σταθερές του ανισότροπου υλικού εξειδικευθούν σε αυτές του ισότροπου. Αυτό σημαίνει, ότι η διδιάστατη θεωρία της ανισότροπης ελαστικότητας αστοχεί να δώσει λύση στην ειδική περίπτωση της ισότροπης ελαστικότητας. Στα ισότροπα ελαστικά υλικά, η διδιάστατη παραμόρφωση μπορεί να διαχωριστεί σε δύο ασύζευκτες ελαστικές παραμορφώσεις, που είναι γνωστές ως συνεπίπεδη και αντιεπίπεδη παραμόρφωση. Η αντιεπίπεδη ελαστική παραμόρφωση περιγράφεται από την αρμονική εξίσωση και οι σχετικές ελαστικές αναλύσεις χρησιμοποιούν τα γνωστά αποτελέσματα των αρμονικών πεδίων, που έχουν αναπτυχθεί σε άλλες επιστημονικές περιοχές. Η συνεπίπεδη παραμόρφωση του ισότροπου υλικού διέπεται από μια διαρμονική εξίσωση, της οποίας η γενική λύση έχει εκφραστεί σε όρους δύο ολόμορφων μιγαδικών συναρτήσεων, από τους Kolosov (1908) και Muskhelishvili (1957). Η περίφημη αυτή θεωρία έχει δώσει λύσεις σε πολλά και δύσκολα προβλήματα της ισότροπης ελαστικότητας, συμπεριλαμβανομένων και εκείνων των σύνθετων υλικών και ρωγμών. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι, η σχέση της γενικής λύσης των Kolosov-Muskhelishvili για την ισότροπη ελαστικότητα, και εκείνη του Eshelby και των συνεργατών του για την ανισότροπη ελαστικότητα, δεν έχει διερευνηθεί στη βιβλιογραφία μέχρι σήμερα. Η χρήση των δύο παραπάνω θεωριών, σε ελαστικά προβλήματα σύνθετων υλικών, καθίσταται ιδιαίτερα δύσκολη και περίπλοκη. Αυτό συμβαίνει, λόγω των πολλών ελαστικών παραμέτρων που εμπλέκονται στην ανάλυση και καθιστούν την επίλυση των σχετικών προβλημάτων ιδιαίτερα δυσχερή και κοπιώδη. Παρά τις δυσκολίες αυτές, οι δύο θεωρίες έχουν εφαρμοστεί, επιτυχώς, στην επίλυση αρκετών διδιάστατων διφασικών προβλημάτων της ισότροπης και ανισότροπης ελαστικότητας. Η παραπάνω δυσκολία εφαρμογής των δύο μεθόδων σε προβλήματα σύνθετων υλικών της ισότροπης ελαστικότητας ξεπεράστηκε σημαντικά με την εισαγωγή των διφασικών ελαστικών παραμέτρων του Dundurs (Dundurs, 1969). Ο Dundurs έδειξε ότι τα διδιάστατα τασικά πεδία σε ένα διφασικό υλικό εξαρτώνται από δύο αδιάστατες διφασικές ελαστικές παραμέτρους, αντί των τεσσάρων ελαστικών παραμέτρων των δύο επιμέρους υλικών. Ένα σχετικό αποτέλεσμα προέκυψε αργότερα αναφορικά με τον ελάχιστο αριθμό των συναρτήσεων, που μπορούν να περιγράψουν τα διδιάστατα ελαστικά πεδία σε ένα διφασικό ισότροπο υλικό (Kattis, 1994; Kattis and Meguid; 1995). Δείχθηκε ότι, σε ένα διφασικό ισότροπο υλικό, δύο μόνο ολόμορφες συναρτήσεις μπορούν να περιγράψουν πλήρως τα διδιάστατα ελαστικά πεδία του διυλικού, όπως

ακριβώς συμβαίνει στην ομογενή περίπτωση. Οι συναρτήσεις αυτές ονομάστηκαν διφασικά δυναμικά του διφασικού υλικού και η σχετική μέθοδος που αναπτύχθηκε μέθοδος των διφασικών δυναμικών. Οι γενικές σχέσεις της μεθόδου αυτής παρέχουν τα ελαστικά πεδία του διυλικού, σε όρους των διφασικών δυναμικών του διφασικού συστήματος και έχουν ενσωματώσει τις δύο διφασικές ελαστικές παραμέτρους του Dundurs. Αργότερα, τα αποτελέσματα αυτά επεκτάθηκαν σε διφασικά υλικά της διδιάστατης ανισότροπης ελαστικότητας με βάση την θεωρία του Eshelby και των συνεργατών του (Kattis, 1999; Kattis and Providas, 1997).

Η επέκταση της μεθόδου των διφασικών δυναμικών σε διυλικά με ισότροπη και ανισότροπη φάση θα αποτελούσε ένα αποτελεσματικό εργαλείο για την ανάλυση των σχετικών ελαστικών προβλημάτων. Όμως, η επέκταση αυτή συναντά δυσκολία, λόγω της έλλειψης κοινής βάσης των δύο εμπλεκόμενων γενικών λύσεων που έχουν αναπτυχθεί στα πλαίσια των δύο θεωριών που προαναφέρθηκαν. Η γενική λύση του Eshelby και των συνεργατών του έχει αναπτυχθεί με βάση τον γραμμικό συνδυασμό των γραμμικών ανεξάρτητων λύσεων της διαφορικής εξίσωσης που περιγράφει την ελαστική παραμόρφωση του διυλικού, ενώ η θεωρία των Kolosov-Muskhelishvili με βάση τις ιδιότητες των ολόμορφων μιγαδικών συναρτήσεων. Για να διαμορφωθεί μια κοινή βάση των γενικών λύσεων για την ανισότροπη και ισότροπη περίπτωση, θα πρέπει να αναπτυχθεί μια νέα γενική λύση για τη διδιάστατη ισότροπη ελαστικότητα, που θα στηρίζεται στον προσδιορισμό των ανεξάρτητων μερικών λύσεων της γενικής διαφορικής εξίσωσης του ανισότροπου υλικού, στην περίπτωση που οι γενικές ελαστικές σταθερές εξειδικεύονται σε αυτές του ισότροπου.

## 1.2 ΤΟ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Στόχος της παρούσας εργασίας είναι η ανάπτυξη μιας ενοποιημένης μεθόδου διφασικών δυναμικών για την επίλυση προβλημάτων διυλικών, για οποιονδήποτε συνδυασμό ανισοτροπίας των επιμέρους συστατικών τους. Για την επίτευξη αυτού του στόχου απαιτείται η τοποθέτηση σε ενιαία βάση των γενικών λύσεων, που έχουν αναπτυχθεί για τη διδιάστατη ισότροπη και ανισότροπη ελαστικότητα. Με βάση την ενοποιημένη μέθοδο που θα αναπτυχθεί, θα μελετηθούν οι αλληλεπιδράσεις ιδιομορφιών με διεπιφάνειες και διεπιφανειακές ρωγμές σε διφασικά υλικά, για οποιοδήποτε συνδυασμό ελαστικής ανισοτροπίας των μερών που τα συνιστούν. Η μελέτη θα γίνει στα πλαίσια της γραμμικής

ελαστικότητας προσομοιώνοντας το διυλικό με ένα διφασικό ελαστικό σύστημα, που θα αποτελείται από δυο ημιάπειρα ελαστικά μέσα συνδεδεμένα μεταξύ τους σε μια επίπεδη επιφάνεια. Οι ιδιομορφίες που θα εξεταστούν είναι η γραμμική εξάρμωση, η γραμμική δύναμη και η ομοιόμορφη τάση. Οι δύο πρώτες ιδιομορφίες θα εφαρμόζονται παράλληλα και κοντά στην διεπιφάνεια του συστήματος, ενώ η τρίτη, στα απομακρυσμένα σύνορα των δύο μέσων. Η μελέτη θα περιλαμβάνει τον προσδιορισμό των σχετικών ελαστικών πεδίων, που προξενούνται στο διφασικό σύστημα από τις ιδιομορφίες, και στην περίπτωση ρηγματωμένης επιφάνειας, τον προσδιορισμό των ελαστικών παραμέτρων, που περιγράφουν και ελέγχουν την θραύση του συστήματος.

### 1.3 Η ΔΟΜΗ ΤΗΣ ΔΙΑΤΡΙΒΗΣ

Η παρούσα διατριβή αποτελείται από επτά κεφάλαια και έξι παραρτήματα. Στο πρώτο κεφάλαιο, που αποτελεί την εισαγωγή, παρουσιάζεται το αντικείμενο της έρευνας της διδακτορικής διατριβής και συζητιέται η αναγκαιότητα και η επικαιρότητά του. Γίνεται μια εκτενής παρουσίαση της επιστημονικής γνώσης, που έχει αποκτηθεί τα τελευταία χρόνια στην περιοχή του αντικειμένου, με αναφορές σε άρθρα επιστημονικών περιοδικών και πρακτικών συνεδρίων, καθώς και σε τεχνικές εκθέσεις και βιβλία. Στο τέλος της εισαγωγής περιγράφεται η δομή της διατριβής.

Στο κεφάλαιο 2, παρουσιάζονται οι εξισώσεις της διδιάστατης ανισότροπης ελαστικότητας, έτσι όπως αυτές χρησιμοποιούνται στα επόμενα κεφάλαια. Συγκεκριμένα, παρουσιάζονται, συνοπτικά, οι μητρικές εξισώσεις, που αντιπροσωπεύουν την γενική λύση του διδιάστατου προβλήματος της ανισότροπης ελαστικότητας, έτσι όπως αυτές διατυπώθηκαν από τον Eshelby και του συνεργάτες του. Επίσης, στο κεφάλαιο αυτό, αναπτύσσεται μια νέα αντιπροσώπευση της γενικής λύσης του διδιάστατου προβλήματος της ισότροπης ελαστικότητας, που είναι συμβατή με την αντίστοιχη γενική λύση της ανισότροπης ελαστικότητας που διατυπώθηκε από τον Eshelby και τους συνεργάτες του. Στο κεφάλαιο 3, η μέθοδος των διφασικών δυναμικών, που έχει αναπτυχθεί, ξεχωριστά, για την διδιάστατη ισότροπη και ανισότροπη ελαστικότητα, επεκτείνεται στην περίπτωση διφασικού υλικού, με οποιοδήποτε συνδυασμό ανισοτροπίας των μερών που το συνιστούν. Οι γενικές σχέσεις της μεθόδου αναπτύσσονται σε σχέση με ένα διφασικό σύστημα δύο ελαστικών ημιχώρων, που προσομοιώνει το διυλικό, και διατυπώνονται για όλους τους συνδυασμούς ανισοτροπίας των δύο φάσεων του συστήματος, που

αντιπροσωπεύουν το ανισότροπο/ανισότροπο, το ισότροπο/ισότροπο και ανισότροπο/ισότροπο διυλικό. Για τους τρεις αυτούς συνδυασμούς ανισοτροπίας, οι γενικές αυτές σχέσεις, που παρέχουν τα ελαστικά πεδία, εκφράζονται σε όρους δύο μητρικών συναρτήσεων στήλης, των οποίων τα στοιχεία είναι τρεις ολόμορφες μιγαδικές συναρτήσεις. Οι δύο αυτές μητρικές συναρτήσεις αποτελούν τα διφασικά δυναμικά του συστήματος.

Στο κεφάλαιο 4, προσδιορίζονται τα πλήρη ελαστικά πεδία, που προξενούν οι ιδιομορφίες στο σύστημα, όταν η διεπιφάνεια του συστήματος δεν είναι ρηγματωμένη. Η επίλυση των σχετικών ελαστικών προβλημάτων γίνεται, για όλους τους συνδυασμούς ανισοτροπίας του συστήματος, με την μέθοδο των διφασικών δυναμικών, που αναπτύχθηκε στο κεφάλαιο 3.

Στο κεφάλαιο 5, εξάγονται τη πλήρη ελαστικά πεδία που προξενούν οι ιδιομορφίες στο σύστημα, όταν σε αυτό εμφανίζεται μια διεπιφανειακή ρωγμή. Τα ελαστικά αυτά πεδία προσδιορίζονται με επαλληλία των αντίστοιχων πεδίων, που περιγράφουν δύο διαφορετικές παραμορφωσιακές καταστάσεις του διφασικού συστήματος. Η πρώτη κατάσταση αντιστοιχεί στο μη ρηγματωμένο σύστημα, του οποίου η παραμόρφωση προέρχεται από την παρουσία των ιδιομορφιών στο σύστημα. Τα ελαστικά πεδία της κατάστασης αυτής έχουν εξαχθεί στο κεφάλαιο 4. Η δεύτερη κατάσταση αντιστοιχεί στην παρουσία της ρωγμής στην διεπιφάνεια του συστήματος και η παραμόρφωση προέρχεται από καταπόνηση των συνόρων της ρωγμής, με τάσεις ίσες και αντίθετες αυτών που αναπτύσσονται στην θέση που καταλαμβάνει η ρωγμή στην πρώτη κατάσταση. Για τον προσδιορισμό των ελαστικών πεδίων της δεύτερης κατάστασης, το σχετικό συνοριακό πρόβλημα ανάγεται σε ένα μη ομογενές σύστημα μητρικών εξισώσεων τύπου Hilbert, με άγνωστες ποσότητες τα διφασικά δυναμικά του συστήματος. Η λύση του συστήματος αυτού γίνεται ξεχωριστά για τις ιδιομορφίες που θεωρούνται και οι λύσεις αποκτώνται σε κλειστή μορφή.

Στο κεφάλαιο 6, εξάγεται η ασυμπτωτική συμπεριφορά των ελαστικών πεδίων στην γειτονιά του άκρου της ρωγμής, χρησιμοποιώντας τα πλήρη ελαστικά πεδία του ρηγματωμένου συστήματος. Για όλους τους συνδυασμούς ανισοτροπίας του συστήματος, τα ασυμπτωτικά ελαστικά πεδία εξάγονται σε απλές αλγεβρικές εκφράσεις, που ισχύουν για όλους τους τύπους φόρτισης και γεωμετρίας του συστήματος. Στα ασυμπτωτικά αυτά πεδία, ο τύπος της ιδιομορφίας και η γεωμετρία του συστήματος υπεισέρχονται με τους συντελεστές έντασης των τάσεων, που είναι τρεις πραγματικοί αριθμοί. Οι συντελεστές

αυτοί ορίζονται με την ίδια σχέση για όλους τους συνδυασμούς ανισοτροπίας του συστήματος. Επίσης, στο κεφάλαιο αυτό εξάγονται ο τοπικός διεπιφανειακός ελκυστής των τάσεων και το άνοιγμα της ρωγμής κοντά στο άκρο της. Οι δύο αυτές ποσότητες χρησιμοποιούνται για την εξαγωγή του λόγου απελευθέρωσης ενέργειας, που αντιπροσωπεύεται με την ίδια σχέση για όλους τους συνδυασμούς ανισοτροπίας.

Στο τελευταίο κεφάλαιο διατυπώνονται τα συμπεράσματα της διατριβής και γίνονται προτάσεις για παραπέρα έρευνα.



## Κεφάλαιο 2

# Η ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΗ ΑΝΙΣΟΤΡΟΠΗ ΚΑΙ ΙΣΟΤΡΟΠΗ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ

## 2.1 ΓΕΝΙΚΑ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται συνοπτικά οι βασικές εξισώσεις της διδιάστατης ελαστικότητας του ανισότροπου υλικού, έτσι όπως αυτές χρησιμοποιούνται στην ανάπτυξη των επόμενων κεφαλαίων. Οι εξισώσεις της διδιάστατης ανισότροπης ελαστικότητας προκύπτουν από τις γενικές εξισώσεις της τρισδιάστατης ελαστικότητας, υποθέτοντας ότι η ελαστική παραμόρφωση, που παράγεται σε ένα ανισότροπο ελαστικό σώμα, είναι ανεξάρτητη από τη μία συντεταγμένη ενός σταθερού καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων ως προς το οποίο περιγράφεται η ένταση και η παραμόρφωση του σώματος. Με την υπόθεση αυτή, η διδιάστατη ελαστική παραμόρφωση ενός γενικά ανισότροπου σώματος περιγράφεται με τρεις διαφορετικές εξισώσεις, στις οποίες οι τρεις συνιστώσες του διανύσματος της ελαστικής μετατόπισης είναι συζευγμένες μεταξύ τους. Στην περίπτωση μιας ειδικής συμμετρίας του ανισότροπου υλικού, η ελαστική παραμόρφωση του ανισότροπου υλικού μπορεί να διαχωριστεί σε δύο ανεξάρτητες παραμορφωσιακές καταστάσεις: σε μια παραμορφωσιακή κατάσταση, στην οποία οι δύο συνιστώσες της ελαστικής μετατόπισης είναι συζευγμένες μεταξύ τους, και σε μια παραμορφωσιακή κατάσταση στην οποία η τρίτη συνιστώσα της ελαστικής μετατόπισης είναι ανεξάρτητη από τις άλλες δύο. Η πρώτη παραμορφωσιακή κατάσταση είναι γνωστή ως συνεπίπεδη (ή επίπεδη) παραμόρφωση, η δε δεύτερη ως αντιεπίπεδη παραμόρφωση.

Επίσης, στο κεφάλαιο αυτό διατυπώνεται η γενική λύση του διδιάστατου ελαστικού προβλήματος της ανισότροπης ελαστικότητας για ένα ομογενές υλικό, έτσι όπως αυτή

αναπτύχθηκε από τους Eshelby et.al (1953) και δουλεύθηκε παραπέρα από άλλους ερευνητές (Stroh, 1958; Ting, 1986). Στην παρούσα εργασία, η ανάπτυξη της γενικής λύσης του Eshelby στηρίζεται σε μια εναλλακτική διαδικασία, που βασίζεται στη μητρική διατύπωση των βασικών εξισώσεων της διδιάστατης ελαστικότητας. Σύμφωνα με τη διατύπωση αυτή, η εντατική κατάσταση της διδιάστατης ελαστικότητας περιγράφεται πλήρως με δύο μητρώα στήλες τάσεων  $\sigma_1$  και  $\sigma_2$ , ενώ η παραμορφωσιακή κατάσταση με ένα μητρώο στήλη  $\mathbf{u}$ . Η κατάσταση ισορροπίας και η καταστατική συμπεριφορά του σώματος περιγράφονται πλήρως με τα παραπάνω τρία μητρώα, τα οποία προσδιορίζονται από την επίλυση μιας μητρικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης με άγνωστη συνάρτηση το μητρώο  $\mathbf{u}$ . Η μητρική αυτή εξίσωση εμπλέκει τρία μητρώα ελαστικών σταθερών του υλικού, που είναι τα μητρώα  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{T}$ , η δε επίλυσή της γίνεται με τον προσδιορισμό των γραμμικών ανεξάρτητων μερικών λύσεων της. Η γενική λύση της μητρικής διαφορικής εξίσωσης αναπτύσσεται σε όρους ενός μητρώου στήλης, που περιέχει ως στοιχεία τρεις ολόμορφες μιγαδικές συναρτήσεις. Για τη διευκόλυνση της ανάλυσης των διφασικών υλικών, που γίνεται στα επόμενα κεφάλαια, εισάγεται μια νέα μεταβλητή πεδίου, που περιγράφει πλήρως την εντατική κατάσταση του ανισότροπου σώματος. Η μεταβλητή αυτή εκφράζει τη συνισταμένη δύναμη που επενεργεί πάνω σε μια ανοιχτή κυλινδρική επιφάνεια του υλικού που δεν τέμνει τον εαυτό της. Όταν είναι γνωστή η ποσότητα αυτή, με απλή παραγωγή, παράγονται τα μητρώα τάσεων  $\sigma_1$  και  $\sigma_2$  σε κάθε σημείο του σώματος.

Επειδή ένας από τους βασικούς σκοπούς της παρούσας εργασίας είναι να φέρει “κοντά” την ισότροπη και την ανισότροπη διδιάστατη ελαστικότητα, η γενική λύση του διδιάστατου προβλήματος της ανισότροπης ελαστικότητας αναζητείται στην περίπτωση που η γενική αυτή λύση εκφυλίζεται. Ο εκφυλισμός της λύσης συμβαίνει, όταν κάποιες από τις έξι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης της μητρικής διαφορικής εξίσωσης των μετατοπίσεων γίνουν ίσες μεταξύ τους. Στην περίπτωση αυτή, οι ανεξάρτητες μερικές λύσεις της διαφορικής εξίσωσης, που επιλέχθηκαν για τη γενική λύση του διδιάστατου ανισότροπου προβλήματος, καθίστανται γραμμικά εξαρτημένες με συνέπεια η γενική λύση του ανισότροπου ελαστικού προβλήματος να εκφυλίζεται. Το ανάλογο συμβαίνει στην περίπτωση της διαφορικής εξίσωσης ενός μονοβάθμιου ταλαντωτή όταν οι δύο ρίζες της αντίστοιχης χαρακτηριστικής διαφορικής εξίσωσης γίνουν ίσες. Ακολουθώντας μια ανάλογη διαδικασία με αυτή που ακολουθήθηκε για την ανάπτυξη της λύσης της διαφορικής εξίσωσης του μονοβάθμιου ταλαντωτή στην περίπτωση των

ίσων ριζών, αναζητήθηκαν οι ανεξάρτητες μερικές λύσεις της μητρωικής διαφορικής εξίσωσης στην περίπτωση που οι τρεις ρίζες γίνουν ίσες με τη μιγαδική μονάδα που αντιστοιχεί στο ισότροπο υλικό. Από τον γραμμικό συνδυασμό αυτών των ανεξάρτητων λύσεων αναπτύσσεται η γενική λύση του διδιάστατου ισότροπου προβλήματος. Επίσης, στο κεφάλαιο αυτό, επανεξάγονται οι λύσεις του ομογενούς προβλήματος για τις ιδιομορφίες που εξετάζονται στην παρούσα διατριβή, προκειμένου να χρησιμοποιηθούν στα επόμενα κεφάλαια.

## 2.2 ΟΙ ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΗΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

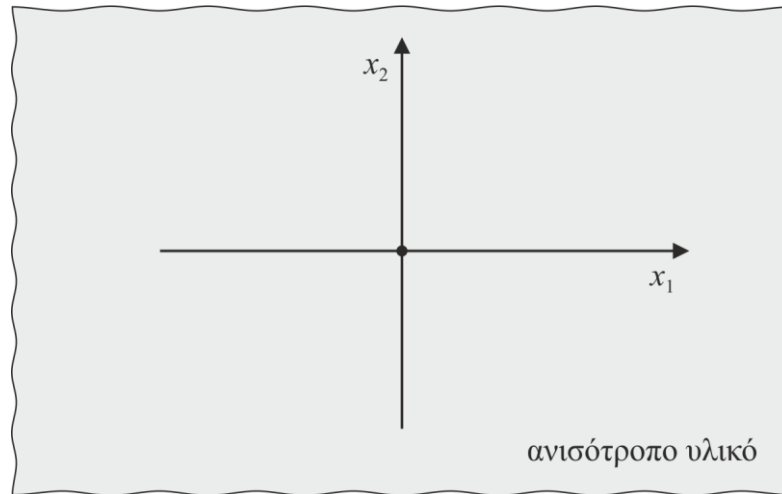
Έστω ένα στερεό σώμα που έχει παραμορφωθεί ελαστικά από ένα σύστημα εξωτερικών δυνάμεων, που βρίσκονται σε ισορροπία. Η γεωμετρία του σώματος και η παραμορφωσιακή του κατάσταση περιγράφεται σε σχέση με ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $x_i$ , που είναι σταθερά τοποθετημένο σε σχέση με το σώμα (Σχήμα 2-1). Η παραμορφωσιακή και εντατική κατάσταση του σώματος περιγράφεται με τις μετατοπίσεις  $u_i$ , τις παραμορφώσεις  $\varepsilon_{ij}$  και τις τάσεις  $\sigma_{ij}$ . Στα πλαίσια της γραμμικής θεωρίας της ανισότροπης ελαστικότητας, όταν οι μαζικές δυνάμεις είναι αμελητέες, ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \sigma_{ij,j} = 0, \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}. \quad (2.1)$$

Στις σχέσεις αυτές και στη συνέχεια, όπου εμφανίζεται λατινικός δείκτης θα παίρνει τις τιμές 1, 2 και 3. Επίσης, κάθε λατινικός δείκτης μετά από κόμμα θα δηλώνει παραγωγή ως προς την μεταβλητή που αντιστοιχεί ο δείκτης. Η επανάληψη λατινικού δείκτη στον όρο μιας σχέσης θα δηλώνει άθροιση. Η πρώτη από τις εξισώσεις (2.1) είναι μια γεωμετρική συνθήκη, που συνδέει τις αναπτυσσόμενες μετατοπίσεις  $u_i$  στο σώμα με τις παραμορφώσεις του  $\varepsilon_{ij}$ , και είναι γνωστή ως κινηματική συνθήκη. Η δεύτερη εξίσωση περιγράφει την ισορροπία ενός απειροστού στοιχείου του σώματος, ενώ η τρίτη τον καταστατικό νόμο του σώματος. Οι ποσότητες  $C_{ijkl}$  είναι οι ελαστικές σταθερές του ανισότροπου σώματος σε σχέση με το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $x_i$  και

αποτελούν τα στοιχεία ενός τανυστή τετάρτης τάξεως. Οι σταθερές αυτές ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij}. \quad (2.2)$$



**Σχήμα 2-1** Το ανισότροπο υλικό και το σύστημα συντεταγμένων

Ο παραπάνω καταστατικός νόμος, που είναι γνωστός ως νόμος του Hooke, στην αντίστροφη μορφή του γράφεται

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl}, \quad (2.3)$$

όπου  $S_{ijkl}$  είναι οι ελαστικές σταθερές του υλικού. Στην ειδική περίπτωση της ισότροπης ελαστικότητας, ο καταστατικός νόμος του υλικού παίρνει την παρακάτω απλοποιημένη μορφή

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{ij}, \quad (2.4)$$

όπου  $\lambda$  και  $\mu$  είναι οι σταθερές του Lamé,  $\nu$  ο λόγος του Poisson και  $E$  το μέτρο ελαστικότητας.

## 2.3 Η ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΗ ΑΝΙΣΟΤΡΟΠΗ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ

### 2.3.1 Οι διαφορικές εξισώσεις της διδιάστατης ελαστικότητας

Εάν οι δράσεις, που παραμορφώνουν το σώμα, παράγουν ελαστικές μετατοπίσεις, που δε μεταβάλλονται κατά μήκος ενός από τους άξονες του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων  $x_i$ , τότε η παραμορφωσιακή κατάσταση του σώματος χαρακτηρίζεται ως διδιάστατη ελαστική παραμόρφωση. Αν υποθεθεί ότι οι παραγόμενες μετατοπίσεις δε μεταβάλλονται κατά μήκος του άξονα  $x_3$ , τότε οι εξισώσεις ισορροπίας και οι καταστατικές εξισώσεις της σχέσης (2.1) παίρνουν τη μορφή

$$\sigma_{i\alpha,\alpha} = 0, \quad \sigma_{i\beta} = C_{i\beta k\alpha} u_{k,\alpha}, \quad (2.5)$$

όπου οι ελληνικοί δείκτες  $\alpha, \beta$  παίρνουν τις τιμές 1 και 2. Στις παραπάνω εξισώσεις, οι τάσεις και οι μετατοπίσεις είναι συναρτήσεις των μεταβλητών  $x_1$  και  $x_2$ , δηλαδή

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x_1, x_2), \quad u_i = u_i(x_1, x_2). \quad (2.6)$$

Ορίζοντας τα μητρώα

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = [\sigma_{11}, \sigma_{21}, \sigma_{31}]^T, \quad \boldsymbol{\sigma}_2 = [\sigma_{12}, \sigma_{22}, \sigma_{32}]^T, \quad \mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]^T, \quad (2.7)$$

οι εξισώσεις ισορροπίας και οι καταστατικές εξισώσεις της σχέσης (2.5), μπορούν να γραφτούν στην παρακάτω μητρική μορφή

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_2}{\partial x_2} = \mathbf{0}, \quad (2.8)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \mathbf{Q} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + \mathbf{R} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2}, \quad (2.9\alpha)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_2 = \mathbf{R}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + \mathbf{T} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2}, \quad (2.9\beta)$$

όπου τα μητρώα  $\mathbf{Q}, \mathbf{R}$  και  $\mathbf{T}$  ορίζονται με τις σχέσεις (Ting, 1986)

$$\mathbf{Q} = [Q_{ik}] = [C_{i1k1}], \quad \mathbf{R} = [R_{ik}] = [C_{i1k2}], \quad \mathbf{T} = [T_{ik}] = [C_{i2k2}]. \quad (2.10)$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (2.9) στην (2.8), προκύπτει η ακόλουθη μητρική διαφορική εξίσωση

$$\mathbf{Q} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_1^2} + (\mathbf{R} + \mathbf{R}^T) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_1 \partial x_2} + \mathbf{T} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_2^2} = \mathbf{0}. \quad (2.11)$$

Η μητρική αυτή εξίσωση αποτελεί τη διαφορική εξίσωση του διδιάστατου προβλήματος της ανισότροπης ελαστικότητας που έχει ως άγνωστη συνάρτηση το μητρώο των μετατοπίσεων  $\mathbf{u}$ . Η γενική λύση της παραπάνω μιγαδικής διαφορικής εξίσωσης θα αναπτυχθεί αμέσως παρακάτω.

### 2.3.2 Η γενική λύση της μητρικής διαφορικής εξίσωσης του διδιάστατου ελαστικού προβλήματος

Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (2.11), που παρουσιάζεται συνοπτικά παρακάτω, έχει αναπτυχθεί από τους Eshelby et al. (1953) και έχει επεκταθεί παραπέρα από μεταγενέστερους ερευνητές (Stroh, 1958 ; Ting, 1986). Η γενική λύση της (2.11) θα κατασκευασθεί από τον γραμμικό συνδυασμό των ανεξάρτητων μερικών λύσεών της. Οι μερικές λύσεις της διαφορικής αυτής εξίσωσης θα αναζητηθούν στη μορφή

$$\mathbf{u} = \mathbf{a}f(x_1 + px_2), \quad (2.12)$$

όπου  $f$  είναι μια συνάρτηση της μεταβλητής  $x_1 + px_2$ . Το  $p$  είναι ένας μιγαδικός αριθμός και το  $\mathbf{a}$  ένα μητρώο στήλη με σταθερά στοιχεία. Αντικαθιστώντας την (2.12) στην (2.11) προκύπτει

$$\left[ \mathbf{Q} + (\mathbf{R} + \mathbf{R}^T)p + \mathbf{T}p^2 \right] \mathbf{a} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0. \quad (2.13)$$

Για να ικανοποιείται η παραπάνω εξίσωση για κάθε συνάρτηση  $\partial^2 f / \partial z^2$ , θα πρέπει να ισχύει

$$\left[ \mathbf{Q} + (\mathbf{R} + \mathbf{R}^T)p + \mathbf{T}p^2 \right] \mathbf{a} = 0. \quad (2.14)$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί ένα ομογενές γραμμικό σύστημα με άγνωστες ποσότητες τα στοιχεία του μητρώου  $\mathbf{a}$ . Μια προφανής λύση του ομογενούς αυτού συστήματος είναι η μηδενική. Για να έχει το σύστημα αυτό και μη μηδενική λύση θα πρέπει να ισχύει

$$\det[\mathbf{Q} + (\mathbf{R} + \mathbf{R}^T)p + \mathbf{T}p^2] = \mathbf{0}. \quad (2.15)$$

Η παραπάνω εξίσωση οδηγεί σε μια αλγεβρική εξίσωση πολωνυμικής μορφής έκτου βαθμού ως προς  $p$ . Έχειδειχθεί από τους Eshelby et al. (1953) ότι η παραπάνω εξίσωση έχει έξι ρίζες μιγαδικές. Έτσι, αν με  $p_1, p_2, p_3$  ορισθούν οι τρεις ρίζες της (2.15) που έχουν θετικό το φανταστικό τους μέρος, τότε οι υπόλοιπες τρεις ρίζες θα είναι οι  $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3$ . Για κάθε μία ρίζα  $p_k$ , προσδιορίζεται ένα μητρώο  $\mathbf{a}_k$  επιλύοντας το παρακάτω γραμμικό σύστημα

$$[\mathbf{Q} + (\mathbf{R} + \mathbf{R}^T)p_k + \mathbf{T}p_k^2]\mathbf{a}_k = \mathbf{0}. \quad (2.16)$$

Επειδή οι πίνακες  $\mathbf{Q}, \mathbf{R}$  και  $\mathbf{T}$  έχουν στοιχεία πραγματικούς αριθμούς, από τη σχέση (2.16) συνάγεται άμεσα ότι

$$[\mathbf{Q} + (\mathbf{R} + \mathbf{R}^T)\bar{p}_k + \mathbf{T}\bar{p}_k^2]\bar{\mathbf{a}}_k = \mathbf{0}. \quad (2.17)$$

Η σχέση αυτή δείχνει ότι στη ρίζα  $\bar{p}_k$  αντιστοιχεί η λύση  $\bar{\mathbf{a}}_k$ . Συνεπώς, αν υποθεθεί ότι οι  $p_1, p_2$  και  $p_3$  αποτελούν τρεις διακριτές λύσεις της (2.15), τότε οι  $\bar{p}_1, \bar{p}_2$  και  $\bar{p}_3$  αποτελούν τις υπόλοιπες ρίζες της εξίσωσης (2.17), που είναι και αυτές διακριτές μεταξύ τους. Έτσι, στις έξι διακριτές ρίζες  $p_k, \bar{p}_k$  της (2.11) αντιστοιχούν οι έξι λύσεις  $\mathbf{a}_k, \bar{\mathbf{a}}_k$  της (2.14). Συνεπώς, οι συναρτήσεις

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(1)} &= \mathbf{a}_1 f_1(x_1 + p_1 x_2), \mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{a}_2 f_2(x_1 + p_2 x_2), \mathbf{u}^{(3)} = \mathbf{a}_3 f_3(x_1 + p_3 x_2), \\ \mathbf{u}^{(4)} &= \bar{\mathbf{a}}_1 \bar{f}_1(x_1 + \bar{p}_1 x_2), \mathbf{u}^{(5)} = \bar{\mathbf{a}}_2 \bar{f}_2(x_1 + \bar{p}_2 x_2), \mathbf{u}^{(6)} = \bar{\mathbf{a}}_3 \bar{f}_3(x_1 + \bar{p}_3 x_2). \end{aligned} \quad (2.18)$$

αποτελούν έξι μερικές λύσεις της (2.11), που είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Εύκολα μπορεί ναδειχθεί ότι οι λύσεις αυτές είναι γραμμικά ανεξάρτητες μεταξύ τους. Συνεπώς, η γενική λύση της (2.11) μπορεί να προκύψει από τον γραμμικό συνδυασμό των μερικών αυτών λύσεων, δηλαδή

$$\mathbf{u} = c_1 \mathbf{u}^{(1)} + c_2 \mathbf{u}^{(2)} + c_3 \mathbf{u}^{(3)} + c_4 \mathbf{u}^{(4)} + c_5 \mathbf{u}^{(5)} + c_6 \mathbf{u}^{(6)}, \quad (2.19)$$

όπου οι  $c_1, c_2, \dots, c_6$  είναι μιγαδικές σταθερές. Η εξίσωση (2.19) μπορεί να γραφτεί στην ακόλουθη μητρική μορφή

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{f}(z) + \overline{\mathbf{A}\mathbf{f}(z)}, \quad (2.20)$$

όπου

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3], \quad (2.21)$$

$$\mathbf{f}(z) = [f_1(z_1), f_2(z_2), f_3(z_3)]^T. \quad (2.22)$$

Τα στοιχεία του μητρώου  $\mathbf{A}$  εξαρτώνται από τις ελαστικές σταθερές  $C_{ijkl}$  του ανισότροπου υλικού. Γράφοντας τη σχέση (2.20), οι σταθερές  $c_1, c_2, \dots, c_6$  έχουν ενσωματωθεί στα σταθερά στοιχεία των μητρώων  $\mathbf{a}_k$ , και για αυτό παραλείπονται. Έτσι, με τη σχέση (2.22) η γενική λύση του διδιάστατου ελαστικού προβλήματος εκφράζεται σε όρους της μητρικής συνάρτησης  $\mathbf{f}(z)$ , που είναι ένα μητρώο στήλη, που έχει ως στοιχεία τρεις ολόμορφες συναρτήσεις  $f_i(z_i)$ . Το μητρώο στήλη  $\mathbf{f}(z)$  που παρέχεται με τη σχέση (2.22), θα ορισθεί ως το μιγαδικό δυναμικό του ελαστικού προβλήματος.

### 2.3.3 Το διδιάστατο εντατικό πεδίο σε όρους του μιγαδικού δυναμικού

Με βάση την (2.20), οι μητρικές τάσεις  $\boldsymbol{\sigma}_1$  και  $\boldsymbol{\sigma}_2$ , που παρέχονται σε όρους του μητρώου των μετατοπίσεων με τις σχέσεις (2.9), μπορούν να εκφραστούν σε όρους του μιγαδικού δυναμικού  $\mathbf{f}(z)$  στη μορφή

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = -\mathbf{B}\mathbf{p}\mathbf{f}'(z) - \overline{\mathbf{B}\mathbf{p}\mathbf{f}'(z)}, \quad (2.23)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_2 = \mathbf{B}\mathbf{f}'(z) + \overline{\mathbf{B}\mathbf{f}'(z)}, \quad (2.24)$$

όπου

$$\mathbf{f}'(z) = [f'_1(z_1), f'_2(z_2), f'_3(z_3)]^T, \quad (2.25)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = [\sigma_{11}, \sigma_{21}, \sigma_{31}]^T, \quad \boldsymbol{\sigma}_2 = [\sigma_{12}, \sigma_{22}, \sigma_{32}]^T, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x_1, x_2), \quad (2.26)$$

και

$$\mathbf{B} = \mathbf{R}^T \mathbf{A} + \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{p}, \quad \mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3], \quad (2.27)$$

$$\mathbf{b} = (\mathbf{R}^T + p_i \mathbf{T})\mathbf{a}, \quad (2.28)$$

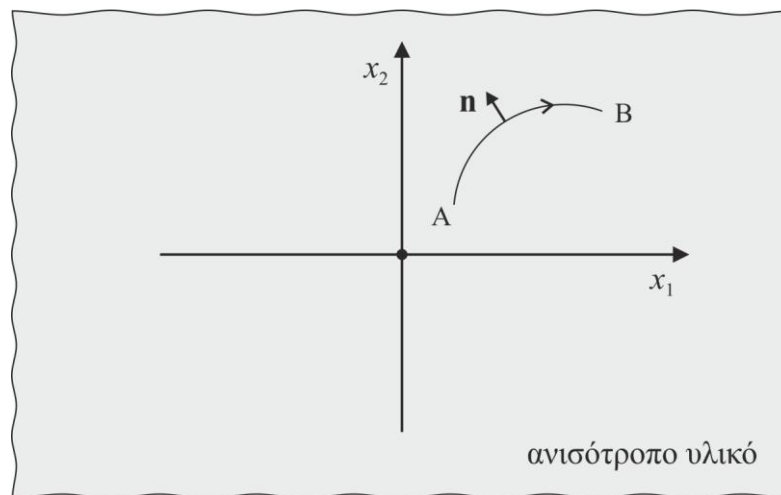
$$\mathbf{p} = \langle p_1, p_2, p_3 \rangle, \quad (2.29)$$



όπου το σύμβολο  $\langle \dots \rangle$  δηλώνει διαγώνιο πίνακα. Για την εξαγωγή των παραπάνω σχέσεων χρησιμοποιήθηκε η ταυτότητα

$$\mathbf{QA} + \mathbf{pRA} = -\mathbf{p}(\mathbf{R}^T \mathbf{A} - \mathbf{TAp}). \quad (2.30)$$

Στη συνέχεια, θα προσδιορισθεί η ανά μονάδα μήκους δύναμη  $\mathbf{X}$ , που επενεργεί πάνω σε μια ανοιχτή εσωτερική επιφάνεια του σώματος  $C$ , που σχηματίζεται από ίνες του σώματος, που είναι παράλληλες στον άξονα  $x_3$ . Η τομή της επιφάνειας αυτής με το μιγαδικό επίπεδο  $(x_1, x_2)$ , είναι μια ανοιχτή καμπύλη που έχει αρχή το σημείο  $A$  και πέρας το σημείο  $B$  (Σχήμα 2-2).



Σχήμα 2-2 Η τομή της επιφάνειας  $C$  με το επίπεδο  $(x_1, x_2)$

Η θετική κατεύθυνση της καμπύλης αυτής ορίζεται από το  $A$  στο  $B$ . Το μοναδιαίο διάνυσμα  $\mathbf{n} = [n_1, n_2]^T$ , σε κάθε σημείο της καμπύλης αυτής, θα κατευθύνεται προς τα αριστερά, όταν κάποιος μετακινείται πάνω στην καμπύλη κατά τη θετική της κατεύθυνση. Αν στο επίπεδο  $(x_1, x_2)$  η καμπύλη  $AB$  έχει παραμετρικές εξισώσεις  $x_1 = x_1(s)$  και  $x_2 = x_2(s)$ , τότε

$$n_1 = -dx_2/ds, \quad n_2 = dx_1/ds. \quad (2.31)$$

Η στοιχειώδης δύναμη, που επενεργεί σε ένα στοιχειώδες τμήμα  $ds \cdot 1$  της κυλινδρικής επιφάνειας, είναι  $d\mathbf{X} = (\boldsymbol{\sigma}_1 n_1 + \boldsymbol{\sigma}_2 n_2) ds$ , όπου  $\boldsymbol{\sigma}_1 = \boldsymbol{\sigma}_1(s)$  και  $\boldsymbol{\sigma}_2 = \boldsymbol{\sigma}_2(s)$  οι τάσεις που

επενεργούν πάνω στο τμήμα αυτό. Συνεπώς, η συνολική δύναμη που επενεργεί σε μια μοναδιαία λωρίδα της επιφάνειας, που αντιστοιχεί στο τόξο AB, θα είναι

$$\mathbf{X} = \int_A^B (\boldsymbol{\sigma}_1 n_1 + \boldsymbol{\sigma}_2 n_2) ds. \quad (2.32)$$

Χρησιμοποιώντας τις (2.31), η εξίσωση (2.32) γράφεται

$$\mathbf{X} = \int_A^B (-\boldsymbol{\sigma}_1 dx_2 + \boldsymbol{\sigma}_2 dx_1). \quad (2.33)$$

Θα υποθεθεί ότι η παραπάνω κυλινδρική επιφάνεια του σώματος, που αντιστοιχεί στο τόξο AB, δεν διέρχεται από σημεία στα οποία οι τάσεις επιδεικνύουν ιδιόμορφη συμπεριφορά. Στην περίπτωση αυτή, η προς ολοκλήρωση ποσότητα της (2.33) είναι παντού ορισμένη στα σημεία της καμπύλης AB, και επομένως το ολοκλήρωμα αυτό έχει έννοια. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.23) και (2.24), η προς ολοκλήρωση ποσότητα της (2.33) γράφεται

$$-\boldsymbol{\sigma}_1 dx_2 + \boldsymbol{\sigma}_2 dx_1 = \mathbf{B}d\mathbf{f}(z) + \overline{\mathbf{B}d\mathbf{f}(z)}, \quad (2.34)$$

όπου το μητρώο  $d\mathbf{f}(z)$  έχει ορισθεί ως

$$d\mathbf{f}(z) = [f_1'(z_1)dz_1, f_2'(z_2)dz_2, f_3'(z_3)dz_3]^T, \quad (2.35)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (2.34) στην (2.33) και ολοκληρώνοντας, προκύπτει

$$\mathbf{X} = \mathbf{B}\mathbf{f}(z^B) + \overline{\mathbf{B}\mathbf{f}(z^B)} - \mathbf{B}\mathbf{f}(z^A) - \overline{\mathbf{B}\mathbf{f}(z^A)}. \quad (2.36)$$

όπου

$$\mathbf{f}(z^A) = [f_1(z_1^A), f_2(z_2^A), f_3(z_3^A)]^T, \quad \mathbf{f}(z^B) = [f_1(z_1^B), f_2(z_2^B), f_3(z_3^B)]^T. \quad (2.37)$$

Αν θεωρηθεί ότι το A αποτελεί ένα σταθερό σημείο ( $z_k^A = z_k^0$ ) του μιγαδικού επιπέδου και το σημείο B ένα μεταβλητό σημείο ( $z_k^A = z_k$ ), τότε η (2.36) γράφεται

$$\mathbf{X} = \mathbf{B}\mathbf{f}(z) + \overline{\mathbf{B}\mathbf{f}(z)} - \mathbf{B}\mathbf{f}(z^0) - \overline{\mathbf{B}\mathbf{f}(z^0)}, \quad (2.38)$$

όπου το μητρώο  $\mathbf{f}(z)$  παρέχεται από την (2.22) και το  $\mathbf{f}(z^0)$  από την σχέση

$$\mathbf{f}(z^0) = [f_1(z_1^0), f_2(z_2^0), f_3(z_3^0)]. \quad (2.39)$$

Με τη σχέση (2.38) εισάγεται μια νέα μεταβλητή πεδίου  $\mathbf{X}$ , από την οποία μπορούν να παραχθούν οι τάσεις  $\boldsymbol{\sigma}_1$  και  $\boldsymbol{\sigma}_2$ . Πράγματι, από τις (2.38), (2.23) και (2.24) προκύπτει

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = -\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x_2}, \quad \boldsymbol{\sigma}_2 = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x_1}. \quad (2.40)$$

Επειδή ο σταθερός όρος στη δεξιά πλευρά της (2.38) δεν επηρεάζει το τασικό πεδίο, η νέα μεταβλητή πεδίου  $\mathbf{X}$  μπορεί να ορισθεί στην ακόλουθη απλοποιημένη μορφή

$$\mathbf{X} = \mathbf{B}\mathbf{f}(z) + \overline{\mathbf{B}\mathbf{f}(z)}. \quad (2.41)$$

Έτσι, οι σχέσεις (2.41) και (2.20), περιγράφουν πλήρως το τασικό και παραμορφωσιακό πεδίο του σώματος. Στη συνέχεια, αντί των τάσεων  $\boldsymbol{\sigma}_1$  και  $\boldsymbol{\sigma}_2$ , θα χρησιμοποιείται η νέα μεταβλητή πεδίου  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(z, \bar{z})$ , επειδή διευκολύνει την ανάπτυξη γενικών λύσεων σε διαφορικά προβλήματα. Αυτό συμβαίνει, επειδή οι δύο αυτές ποσότητες εμπλέκουν μόνο εκφράσεις της  $\mathbf{f}(z)$  και όχι των παραγώγων της. Έτσι, οι εξισώσεις που περιγράφουν πλήρως το διδιάστατο ελαστικό πεδίο σε ένα ανισότροπο υλικό είναι

$$\mathbf{u}(z, \bar{z}) = \mathbf{A}\mathbf{f}(z) + \overline{\mathbf{A}\mathbf{f}(z)}, \quad (2.42)$$

$$\mathbf{X}(z, \bar{z}) = \mathbf{B}\mathbf{f}(z) + \overline{\mathbf{B}\mathbf{f}(z)}. \quad (2.43)$$

Στη συνέχεια, το μητρώο αυτό θα θεωρείται ως μια μητρική συνάρτηση με ενιαία μεταβλητή  $z = x_1 + px_2$  ( $\text{Im } p > 0$ ) για όλες τις συναρτήσεις  $f_k$ , δηλαδή

$$\mathbf{f}(z) = [f_1(z), f_2(z), f_3(z)]^T. \quad (2.44)$$

Έτσι, όταν σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα προσδιορισθεί το μιγαδικό δυναμικό  $\mathbf{f}(z)$ , το ελαστικό πεδίο προσδιορίζεται αντικαθιστώντας στην  $\mathbf{f}(z)$  τη μεταβλητή  $z$  με τα  $z_1$ ,  $z_2$  και  $z_3$ , στις αντίστοιχες γραμμές.

## 2.4 Η ΣΥΝΕΠΙΠΕΔΗ ΚΑΙ Η ΑΝΤΙΕΠΙΠΕΔΗ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ ΤΗΣ ΑΝΙΣΟΤΡΟΠΗΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΙΣΟΤΡΟΠΗΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

### 2.4.1 Η συνεπίπεδη και η αντιεπίπεδη παραμόρφωση

Εάν οι ελαστικές ιδιότητες του ανισότροπου υλικού είναι συμμετρικές ως προς το επίπεδο  $(x_1, x_2)$ , τότε προκύπτει

$$C_{1123} = C_{1113} = C_{2223} = C_{2213} = C_{3323} = C_{3313} = C_{2312} = C_{1312} = 0. \quad (2.45)$$

Στην περίπτωση αυτή η διαφορική εξίσωση (2.11), διασπάται στις παρακάτω δύο ανεξάρτητες διαφορικές εξισώσεις

$$\hat{\mathbf{Q}} \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{u}}}{\partial x_1^2} + (\hat{\mathbf{R}} + \hat{\mathbf{R}}^T) \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{u}}}{\partial x_1 \partial x_2} + \hat{\mathbf{T}} \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{u}}}{\partial x_2^2} = \mathbf{0}, \quad (2.46)$$

$$C_{1313} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + 2C_{1323} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} + C_{2323} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} = 0, \quad (2.47)$$

όπου

$$\hat{\mathbf{u}} = [u_1, u_2]^T, \quad (2.48)$$

$$\hat{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1112} \\ C_{1112} & C_{1212} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} C_{1112} & C_{1212} \\ C_{1122} & C_{2212} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} C_{1212} & C_{2212} \\ C_{2212} & C_{2222} \end{bmatrix}. \quad (2.49)$$

Στις παραπάνω σχέσεις, το σύμβολο “^” εισάγεται για να δηλώσει ποσότητες που συνδέονται με τη διαφορική μητρική εξίσωση (2.46). Με τους συμβολισμούς αυτούς και λαμβάνοντας υπόψη την (2.45), οι σχέσεις (2.9) παρέχουν

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1 = \hat{\mathbf{Q}} \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial x_1} + \hat{\mathbf{R}} \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial x_2}, \quad (2.50\alpha)$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_2 = \hat{\mathbf{R}}^T \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial x_1} + \hat{\mathbf{T}} \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial x_2}, \quad (2.50\beta)$$

όπου

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1 = [\sigma_{11}, \sigma_{12}]^T, \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}}_2 = [\sigma_{21}, \sigma_{22}]^T, \quad (2.51)$$

και

$$\sigma_{13} = C_{1313} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + C_{1323} \frac{\partial u_3}{\partial x_2}, \quad (2.52)$$

$$\sigma_{23} = C_{2313} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + C_{2323} \frac{\partial u_3}{\partial x_2}. \quad (2.53)$$

Οι παραπάνω σχέσεις δείχνουν ότι, στην περίπτωση της συμμετρίας του υλικού, που ορίζεται με τις σχέσεις (2.45), η διδιάστατη παραμορφωσιακή ελαστική κατάσταση του ανισότροπου υλικού διασπάται σε δύο ασύζευκτες παραμορφωσιακές καταστάσεις: την συνεπίπεδη παραμόρφωση, που περιγράφεται με τη μητρική διαφορική εξίσωση (2.46) και τις καταστατικές σχέσεις (2.50), (2.51), και την αντιεπίπεδη παραμόρφωση, που περιγράφεται με την (2.47) και τις καταστατικές σχέσεις (2.52), (2.53). Παρακάτω θα εξαχθούν ξεχωριστά οι εξισώσεις που περιγράφουν τις δύο αυτές καταστάσεις.

## 2.4.2 Το ελαστικό πεδίο της συνεπίπεδης παραμόρφωσης

Ακολουθώντας την ίδια με παραπάνω διαδικασία, η γενική λύση της μητρικής εξίσωσης της συνεπίπεδης ελαστικότητας, που παρέχεται με τη σχέση

$$\hat{\mathbf{Q}} \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{u}}}{\partial x_1^2} + (\hat{\mathbf{R}} + \hat{\mathbf{R}}^T) \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{u}}}{\partial x_1 \partial x_2} + \hat{\mathbf{T}} \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{u}}}{\partial x_2^2} = \mathbf{0}, \quad (2.54)$$

έχει τη μορφή

$$\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{f}}(z) + \overline{\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{f}}(z)}, \quad (2.55)$$

όπου

$$\hat{\mathbf{A}} = [\hat{\mathbf{a}}_1, \hat{\mathbf{a}}_2], \quad \hat{\mathbf{f}}(z) = [f_1(z_1), f_2(z_2)]^T, \quad z_1 = x_1 + p_1 x_2, \quad z_2 = x_1 + p_2 x_2. \quad (2.56)$$

Στις παραπάνω σχέσεις, οι  $p_1, p_2$  είναι οι δύο, από τις τέσσερις, μιγαδικές ρίζες της εξίσωσης

$$\det \left[ \hat{\mathbf{Q}} + (\hat{\mathbf{R}} + \hat{\mathbf{R}}^T)p + \hat{\mathbf{T}}p^2 \right] = 0, \quad (2.57)$$

που έχουν θετικά τα φανταστικά τους μέρη. Τα μητρώα  $\hat{\mathbf{a}}_\alpha$ , που αντιστοιχούν στις δύο αυτές ρίζες, προκύπτουν από τη λύση του συστήματος

$$\left[ \hat{\mathbf{Q}} + (\hat{\mathbf{R}} + \hat{\mathbf{R}}^T)p_\alpha + \hat{\mathbf{T}}p_\alpha^2 \right] \hat{\mathbf{a}}_\alpha = \mathbf{0}. \quad (2.58)$$

Οι άλλες δύο μιγαδικές ρίζες της (2.57) είναι οι  $\bar{p}_\alpha$ , που αντιστοιχούν στα μητρώα στήλες  $\bar{\hat{\mathbf{a}}}_\alpha$ . Όπως προαναφέρθηκε, στις παραπάνω σχέσεις οι ελληνικοί δείκτες διατρέχουν τις τιμές 1 και 2.

Η λύση που παρέχεται με την (2.20) αντιστοιχεί στην περίπτωση στην οποία οι ρίζες  $p_1$  και  $p_2$  είναι διακριτές, δηλαδή, όταν  $p_1 \neq p_2$ . Στη συνέχεια, θα κατασκευασθεί η λύση της (2.54), για την περίπτωση που  $p_1 = p_2$ . Όταν  $p_1 = p_2 = p$ , τότε, σύμφωνα με τα παραπάνω, δύο μερικές λύσεις της εξίσωσης (2.54) είναι οι

$$\hat{\mathbf{u}}^{(2)} = \hat{\mathbf{a}}f_2(x_1 + px_2), \quad \hat{\mathbf{u}}^{(4)} = \bar{\hat{\mathbf{a}}}f_2(x_1 + \bar{p}x_2). \quad (2.59)$$

Στη συνέχεια, θα αναζητηθεί μια τρίτη μερική λύση της (2.54), στη μορφή

$$\hat{\mathbf{u}}^{(1)} = \hat{\mathbf{a}}^* f_1(x_1 + px_2) + (x_1 + \bar{p}x_2)\hat{\mathbf{a}}f_1'(x_1 + px_2), \quad (2.60)$$

όπου το  $\hat{\mathbf{a}}$  είναι το μητρώο, που υπεισέρχεται στις μερικές λύσεις (2.59), και το  $\hat{\mathbf{a}}^*$  είναι ένα σταθερό μητρώο, που θα προσδιορισθεί. Για να είναι η (2.60) μερική λύση της (2.54), θα πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση αυτή, δηλαδή θα πρέπει

$$\begin{aligned} & \left[ \hat{\mathbf{Q}} + (\hat{\mathbf{R}} + \hat{\mathbf{R}}^T)p + \hat{\mathbf{T}}p^2 \right] \hat{\mathbf{a}}^* \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \left[ 2\hat{\mathbf{Q}} + (\hat{\mathbf{R}} + \hat{\mathbf{R}}^T)(p + \bar{p}) + 2p\bar{p}\hat{\mathbf{T}} \right] \hat{\mathbf{a}} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \\ & \left[ \hat{\mathbf{Q}} + (\hat{\mathbf{R}} + \hat{\mathbf{R}}^T)p + \hat{\mathbf{T}}p^2 \right] \hat{\mathbf{a}}(x_1 + \bar{p}x_2) \frac{\partial^3 f}{\partial z^3} = 0. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Από τη σχέση αυτή, παίρνοντας υπόψη την (2.30), προκύπτει

$$\left\{ \left[ \hat{\mathbf{Q}} + (\hat{\mathbf{R}} + \hat{\mathbf{R}}^T)p + \hat{\mathbf{T}}p^2 \right] \hat{\mathbf{a}}^* + \left[ (\bar{p} - p)(\hat{\mathbf{R}} + \hat{\mathbf{R}}^T) + 2p(\bar{p} - p)\hat{\mathbf{T}} \right] \hat{\mathbf{a}} \right\} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0. \quad (2.62)$$

Για να ισχύει η παραπάνω σχέση για οποιαδήποτε συνάρτηση  $f$  θα πρέπει

$$\left[ \hat{\mathbf{Q}} + (\hat{\mathbf{R}} + \hat{\mathbf{R}}^T)p + \hat{\mathbf{T}}p^2 \right] \hat{\mathbf{a}}^* + \left[ (\bar{p} - p)(\hat{\mathbf{R}} + \hat{\mathbf{R}}^T) + 2p(\bar{p} - p)\hat{\mathbf{T}} \right] \hat{\mathbf{a}} = 0,$$

από όπου

$$\left[ \hat{\mathbf{Q}} + (\hat{\mathbf{R}} + \hat{\mathbf{R}}^T)p + \hat{\mathbf{T}}p^2 \right] \hat{\mathbf{a}}^* = (p - \bar{p})[(\hat{\mathbf{R}} + \hat{\mathbf{R}}^T) + 2\hat{\mathbf{T}}p]\hat{\mathbf{a}}. \quad (2.63)$$

Από τη σχέση αυτή προσδιορίζεται το μητρώο  $\hat{\mathbf{a}}^*$ , που υπεισέρχεται στη μερική λύση (2.60). Η λύση της παραπάνω μητρωικής εξίσωσης υπάρχει, αν και μόνο αν, ο πίνακας  $\hat{\mathbf{a}}$  ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\hat{\mathbf{a}}^T [(\mathbf{R} + \mathbf{R}^T) + 2\mathbf{T}p]\hat{\mathbf{a}} = 0. \quad (2.64)$$

Στην περίπτωση που η (2.60) είναι μερική λύση της (2.54), είναι προφανές ότι

$$\hat{\mathbf{u}}^{(3)} = \overline{\hat{\mathbf{a}}^* f_1(x_1 + \bar{p}x_2)} + (x_1 + px_2) \overline{\hat{\mathbf{a}} f_1'(x_1 + \bar{p}x_2)} \quad (2.65)$$

είναι, επίσης, μια μερική λύση. Εύκολα δείχνεται ότι το σύνολο των συναρτήσεων  $\{\hat{\mathbf{u}}^{(1)}, \hat{\mathbf{u}}^{(2)}, \hat{\mathbf{u}}^{(3)}, \hat{\mathbf{u}}^{(4)}\}$  αποτελεί ένα σύνολο τεσσάρων γραμμικών ανεξάρτητων μερικών λύσεων της (2.54). Επομένως, ο γραμμικός συνδυασμός των λύσεων αυτών

$$\hat{\mathbf{u}} = \hat{c}_1 \hat{\mathbf{u}}^{(1)} + \hat{c}_2 \hat{\mathbf{u}}^{(2)} + \hat{c}_3 \hat{\mathbf{u}}^{(3)} + \hat{c}_4 \hat{\mathbf{u}}^{(4)}, \quad (2.66)$$

αποτελεί τη γενική λύση της (2.54). Εισάγοντας τις (2.59), (2.60) και (2.65) στην (2.66) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}} = & \hat{c}_1 [\hat{\mathbf{a}}^* f_1(x_1 + px_2) + (x_1 + \bar{p}x_2) \hat{\mathbf{a}} f_1'(x_1 + px_2)] + \hat{c}_2 \hat{\mathbf{a}} f_2(x_1 + px_2) + \\ & \hat{c}_3 [\overline{\hat{\mathbf{a}}^* f_1(x_1 + \bar{p}x_2)} + (x_1 + px_2) \overline{\hat{\mathbf{a}} f_1'(x_1 + \bar{p}x_2)}] + \hat{c}_4 \overline{\hat{\mathbf{a}} f_2(x_1 + \bar{p}x_2)}, \end{aligned} \quad (2.67)$$

από όπου

$$\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{f}}(z) + \overline{\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{f}}(z)} - \bar{z}\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{f}}'(z) - z\overline{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{f}}'(z)}, \quad z = x_1 + px_2. \quad (2.68)$$

Στη σχέση αυτή έχουν εισαχθεί τα μητρώα  $\hat{\mathbf{A}}$  και  $\hat{\mathbf{a}}$ , που ορίζονται με τις σχέσεις

$$\hat{\mathbf{A}} = [\hat{\mathbf{a}}^*, \hat{\mathbf{a}}], \quad \hat{\mathbf{a}} = [-\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{0}]. \quad (2.69)$$

Στην (2.68) οι σταθερές  $\hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3, \hat{c}_4$  της (2.66) δεν εμφανίζονται, επειδή έχουν ενσωματωθεί στα μητρώα  $\hat{\mathbf{a}}^*$  και  $\hat{\mathbf{a}}$ .

### 2.4.3 Το ελαστικό πεδίο της αντιεπίπεδης παραμόρφωσης

Θα αναζητηθεί τώρα η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης της αντιεπίπεδης παραμόρφωσης, που δίνεται από τη σχέση

$$C_{1313} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + 2C_{2312} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} + C_{2323} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} = 0. \quad (2.70)$$

Η γενική λύση θα αναζητηθεί στη μορφή

$$u_3 = a_3 f_3(x_1 + p_3 x_2), \quad (2.71)$$

όπου η  $f_3$  είναι μια αναλυτική συνάρτηση της μεταβλητής  $x_1 + p_3 x_2$  και  $a_3, p_3$  είναι μιγαδικές σταθερές. Αντικαθιστώντας την (2.71) στην (2.70) προκύπτει

$$(C_{1313} + 2C_{2312} p_3 + C_{2323} p_3^2) a_3 \frac{\partial^2 f_3}{\partial z^2} = 0, \quad (2.72)$$

από όπου

$$(C_{1313} + 2C_{2312} p_3 + C_{2323} p_3^2) a_3 = 0. \quad (2.73)$$

Η παραπάνω σχέση έχει ως προφανή λύση τη μηδενική. Για να έχει και μη μηδενική λύση θα πρέπει

$$C_{1313} + 2C_{2312} p_3 + C_{2323} p_3^2 = 0. \quad (2.74)$$

Η δευτεροβάθμια εξίσωση (2.74) έχει πάντα μιγαδικές ρίζες, καθόσον εύκολα δείχνεται ότι ισχύει  $C_{2312}^2 - C_{1313} C_{2323} < 0$ . Συνεπώς, εάν η  $p_3$  ορισθεί ως η ρίζα της (2.74) με το θετικό φανταστικό μέρος, δηλαδή

$$p_3 = -\frac{C_{2312}}{C_{2323}} + i \sqrt{\frac{C_{1313}}{C_{2323}} - \frac{C_{2312}^2}{C_{2323}^2}}, \quad (2.75)$$

τότε η δεύτερη ρίζα της (2.74), η οποία είναι δευτέρου βαθμού, θα είναι η  $\bar{p}_3$ . Επειδή οι ποσότητες  $C_{1313}, C_{2312}, C_{2323}$  είναι πραγματικοί αριθμοί, συνάγεται ότι

$$(C_{1313} + 2C_{2312} \bar{p}_3 + C_{2323} \bar{p}_3^2) \bar{a}_3 = 0. \quad (2.76)$$

Άρα, μια δεύτερη μερική λύση της (2.70) είναι η  $\bar{a}_3 \bar{f}_3(x_1 + \bar{p}_3 x_2)$ . Έτσι, η διαφορική εξίσωση (2.70) έχει δύο μερικές λύσεις, τις  $a_3 f_3(z_3), \bar{a}_3 \bar{f}_3(\bar{z}_3)$ , που είναι γραμμικά ανεξάρτητες μεταξύ τους. Συνεπώς, η γενική της λύση θα είναι ο γραμμικός συνδυασμός τους, δηλαδή

$$u_3 = a_3 f_3(z_3) + \overline{a_3 f_3(z_3)}, \quad z_3 = x_1 + p_3 x_2. \quad (2.77)$$



### 2.4.4 Οι εξισώσεις της ισότροπης ελαστικότητας

Στην ενότητα αυτή θα εξαχθούν οι εξισώσεις του διδιάστατου προβλήματος της ισότροπης ελαστικότητας ακολουθώντας την προσέγγιση, που εισήγαγαν οι Eshelby et al. (1953) για τη μελέτη του ανισότροπου διδιάστατου προβλήματος. Στην περίπτωση που το σώμα έχει τρία επίπεδα ελαστικής συμμετρίας, που ταυτίζονται με τα επίπεδα  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$  και  $x_3 = 0$ , τότε το υλικό είναι ισότροπο και οι μη μηδενικές ελαστικές σταθερές μπορούν να γραφούν σε όρους δύο σταθερών  $\lambda$  και  $\mu$ , που είναι γνωστές ως σταθερές του Lamé ως εξής:

$$\begin{aligned} C_{1111} &= C_{2222} = C_{3333} = \lambda + 2\mu, \\ C_{1122} &= C_{1133} = C_{2233} = \lambda, \\ C_{2323} &= C_{3131} = C_{1212} = \mu. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Στην περίπτωση αυτή οι πίνακες της (2.54) παίρνουν τη μορφή

$$\hat{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ \mu & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda + 2\mu \end{bmatrix}. \quad (2.79)$$

Εισάγοντας τους πίνακες αυτούς στην (2.57), προκύπτει η αλγεβρική εξίσωση

$$\mu(\lambda + 2\mu)[p^4 + 2p^2 + 1] = 0, \quad (2.80)$$

της οποίας οι ρίζες είναι

$$p_1 = p_2 = p = i, \quad \bar{p}_1 = \bar{p}_2 = \bar{p} = -i. \quad (2.81)$$

Ο πίνακας  $\hat{\mathbf{a}}$ , που αντιστοιχεί στο  $p = i$ , προσδιορίζεται από την (2.58), στη μορφή

$$\hat{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} -p(\lambda + \mu)k \\ (\lambda + 2\mu + p^2\mu)k \end{bmatrix}, \quad (2.82)$$

όπου  $k$  είναι μια μιγαδική παράμετρος. Για  $p = i$  και  $k = 1/(4\mu(\lambda + \mu)i)$ , το παραπάνω μητρώο γίνεται

$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{1}{4\mu} \begin{bmatrix} -1 \\ -i \end{bmatrix}. \quad (2.83)$$

Ο πίνακας αυτός ικανοποιεί την (2.64) και συνεπώς, μπορεί να προσδιορισθεί ο πίνακας  $\hat{\mathbf{a}}^* = [a_1^*, a_2^*]^T$  από την (2.63), στη μορφή

$$\hat{\mathbf{a}}^* = \frac{\kappa}{2\mu} \begin{bmatrix} t \\ (t-1)i \end{bmatrix}, \quad (2.84)$$

όπου το  $t$  είναι μια μιγαδική παράμετρος. Στην (2.84) η σταθερά  $\kappa$  έχει ορισθεί με τη σχέση

$$\kappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} = 3 - 4\nu, \quad (2.85)$$

όπου  $\nu$  είναι ο λόγος του Poisson. Για  $t = 1/2$ , το μητρώο  $\hat{\mathbf{a}}^*$  γίνεται

$$\hat{\mathbf{a}}^* = \frac{1}{4\mu} \begin{bmatrix} \kappa \\ -i\kappa \end{bmatrix}. \quad (2.86)$$

Με βάση τις (2.83) και (2.86), τα μητρώα  $\hat{\mathbf{A}}$  και  $\hat{\mathbf{a}}$  γράφονται

$$\hat{\mathbf{A}} = [\hat{\mathbf{a}}^*, \hat{\mathbf{a}}] = \frac{1}{4\mu} \begin{bmatrix} \kappa & -1 \\ -i\kappa & -i \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{a}} = [-\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{0}] = \frac{1}{4\mu} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.87)$$

Επομένως, η γενική λύση της (2.54) έχει τη μορφή

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{2\mu} \operatorname{Re} \left\{ \begin{bmatrix} \kappa & -1 \\ -i\kappa & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \end{bmatrix} - \bar{z} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1'(z) \\ f_2'(z) \end{bmatrix} \right\}. \quad (2.88)$$

Χρησιμοποιώντας τις (2.88) στις (2.50) και (2.51), προκύπτει

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1 + i\hat{\boldsymbol{\sigma}}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i & 0 \end{bmatrix} \mathbf{f}'(z) + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ i & i \end{bmatrix} \overline{\mathbf{f}'(z)} - \bar{z} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -i & 0 \end{bmatrix} \overline{\mathbf{f}''(z)}. \quad (2.89)$$

Οι εξισώσεις (2.88) και (2.89) παρέχουν τις ελαστικές μετατοπίσεις και τάσεις σε όρους του μιγαδικού δυναμικού  $\mathbf{f}(z)$  που περιέχει ως στοιχεία δύο ολόμορφες μιγαδικές συναρτήσεις. Θέτοντας  $f_1(z) = \phi(z)$  και  $f_2(z) = \psi(z)$ , οι (2.88) και (2.89) οδηγούν στις γνωστές εξισώσεις, που έχουν εξαχθεί από τους Kolosov-Muskhelishvili (1953) με μια διαφορετική προσέγγιση.

Ολοκληρώνοντας κατάλληλα την (2.89) προκύπτει

$$\hat{\mathbf{X}} = \hat{\mathbf{B}}\mathbf{f}(z) + \overline{\hat{\mathbf{B}}\mathbf{f}(z)} + \bar{z}\hat{\mathbf{b}}\mathbf{f}'(z) + z\hat{\mathbf{b}}\overline{\mathbf{f}'(z)}, \quad (2.90)$$

όπου

$$\hat{\mathbf{B}} = \frac{i}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ i & i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \frac{i}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.91)$$

Στη συνέχεια, θα αναπτυχθεί η λύση της διαφορικής εξίσωσης (2.47), που περιγράφει το αντιεπίπεδο ελαστικό πρόβλημα, για την περίπτωση του ισότροπου υλικού. Από την (2.75), παίρνοντας υπόψη τις (2.45) προκύπτει

$$p_3 = i.$$

Επιλέγοντας  $a_3 = -1/2\mu$ , η γενική λύση (2.77) απλοποιείται στη μορφή

$$u_3 = -\frac{1}{\mu} \operatorname{Re}\{f_3(z)\}, \quad z = x_1 + ix_2. \quad (2.92)$$

Για το ισότροπο υλικό, οι τάσεις (2.52) και (2.53) παίρνουν τη μορφή

$$\sigma_{13} = \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \quad \sigma_{23} = \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_2}. \quad (2.93)$$

Από τις σχέσεις αυτές, μέσω της (2.92), βρίσκεται ότι

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_3 = \begin{bmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} f_3'(z) - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \overline{f_3'(z)}. \quad (2.94)$$

Εύκολα δείχνεται ότι η δύναμη  $X_3$  που επενεργεί σε ένα τόξο έχει τη μορφή

$$X_3 = \frac{i}{2} [f_3(z) - \overline{f_3(z)}]. \quad (2.95)$$

Οι (2.88) και (2.92) αποτελούν τις εξισώσεις του προβλήματος της διδιάστατης ισότροπης ελαστικότητας και μπορούν να γραφούν σε μια ενιαία μορφή με τη σχέση

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{f}(z) + \overline{\mathbf{A}\mathbf{f}(z)} - \bar{z}\mathbf{a}\mathbf{f}'(z) - z\mathbf{a}\overline{\mathbf{f}'(z)}, \quad (2.96)$$

όπου

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\mu} \begin{bmatrix} \kappa & -1 & 0 \\ -i\kappa & -i & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \frac{1}{4\mu} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.97)$$

Όμοια, οι σχέσεις (2.90) και (2.95) σε ενιαία μορφή γράφονται

$$\mathbf{X} = \mathbf{B}\mathbf{f}(z) + \overline{\mathbf{B}\mathbf{f}(z)} + \bar{z}\mathbf{b}\mathbf{f}'(z) + z\overline{\mathbf{b}\mathbf{f}'(z)}, \quad (2.98)$$

όπου

$$\mathbf{B} = \frac{i}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ i & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \frac{i}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.99)$$

και

$$\mathbf{f}(z) = [f_1(z), f_2(z), f_3(z)]^T. \quad (2.100)$$

## 2.5 ΤΑ ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΑ ΕΛΑΣΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ ΙΔΙΟΜΟΡΦΙΩΝ ΣΕ ΟΜΟΓΕΝΕΣ ΥΛΙΚΟ

### 2.5.1 Η έννοια της ιδιομορφίας στη διδιάστατη ελαστικότητα

Ένα από τα βασικά αντικείμενα της παρούσας εργασίας είναι ο προσδιορισμός των ελαστικών πεδίων που αναπτύσσονται σε ένα διφασικό ελαστικό σώμα από ορισμένες σημειακές δράσεις, που προκαλούν μεταβολή στη γεωμετρία του σώματος. Τέτοιες σημειακές δράσεις είναι η συγκεντρωμένη δύναμη, η εξάρμωση, η συγκεντρωμένη ροπή κλπ. Τα αναπτυσσόμενα τασικά πεδία στο σώμα επιδεικνύουν μια ιδιόμορφη συμπεριφορά, που χαρακτηρίζεται από τον απειρισμό των τάσεων στα σημεία εφαρμογής των δράσεων αυτών. Από τη σκοπιά της μηχανικής του συνεχούς μέσου, η συμπεριφορά αυτή θα μπορούσε να αποδοθεί στην αντίφαση που υπάρχει μεταξύ του σημειακού χαρακτήρα της δράσης και του επιφανειακού χαρακτήρα της τάσης, με την οποία η δράση διαχέεται στο συνεχές μέσο. Οι σημειακές αυτές δράσεις αποκαλούνται ιδιομορφίες και η εξαγωγή των σχετικών ελαστικών πεδίων, που παράγουν σε ένα απείρως εκτεινόμενο σώμα, ενδιαφέρει την έρευνα για δύο βασικούς λόγους. Ο πρώτος λόγος είναι ότι τα ελαστικά πεδία των ιδιομορφιών αυτών μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση αντίστοιχων ελαστικών προβλημάτων με πεπερασμένη γεωμετρία και σύνθετη φόρτιση. Ο δεύτερος λόγος είναι ότι, τα ελαστικά πεδία ορισμένων ιδιομορφιών, μπορούν να περιγράψουν τη μακροσκοπική συμπεριφορά ορισμένων υλικών, όπως για παράδειγμα την ολκιμότητα των κρυσταλλικών υλικών. Οι ελαστικές λύσεις των

ιδιομορφιών που επενεργούν σε ένα άπειρο ελαστικό μέσο είναι γνωστές στη βιβλιογραφία ως συναρτήσεις Green.

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την μιγαδική μητρική διατύπωση της διδιάστατης ελαστικότητας, που αναπτύχθηκε προηγουμένα, θα εξαχθούν τα διδιάστατα ελαστικά πεδία για μια γραμμική δύναμη και μια γραμμική εξάρμωση, που επενεργούν σε ένα άπειρο ομογενές ελαστικό μέσο με ανισότροπη και ισότροπη συμπεριφορά. Στην παρούσα εργασία, μια πολυωνυμική κατανομή των τάσεων στο σύνορο ενός απείρου εκτεινόμενου ελαστικού σώματος, θα θεωρηθεί ως ιδιομορφία που εφαρμόζεται στο σημείο του απείρου.

## 2.5.2 Τα ελαστικά πεδία για γραμμική δύναμη

Έστω ένα ομογενές ελαστικό υλικό, που καταλαμβάνει τον ευκλείδειο χώρο, του οποίου τα υλικά σωματίδια αναφέρονται στο σταθερό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $(x_1, x_2, x_3)$ . Το υλικό αυτό παραμορφώνεται από μια δύναμη, που είναι ομοιόμορφα διανεμημένη κατά μήκος της γραμμής  $(x_1^0, x_2^0, x_3)$ . Η ελαστική παραμόρφωση του υλικού, που παράγεται από τη δύναμη αυτή, είναι διδιάστατη και θα περιγράφεται με τη μεταβλητή  $z$  ενός μιγαδικού επιπέδου  $z$ , που είναι κάθετο στον άξονα  $x_3$  ( $z = x_1 + ix_2$ ). Η γραμμική δύναμη θα δηλώνεται με  $\mathbf{p} = [p_1, p_2, p_3]^T$ , όπου  $p_k$  είναι οι συνιστώσες της γραμμικής δύναμης αναφορικά με τον άξονα  $x_k$ . Η γραμμή εφαρμογής της διανεμημένης δύναμης  $\mathbf{p}$  πάνω στο επίπεδο  $z$  αντιστοιχεί στο σημείο  $z_0 = x_1^0 + ix_2^0$ . Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν προηγουμένα, το μιγαδικό επίπεδο  $z (= x_1 + ix_2)$  αποτελεί το φυσικό επίπεδο του προβλήματος, σε αντίθεση με τα τρία μιγαδικά επίπεδα  $z_k (= x_1 + p_k x_2)$ , που θα αποτελούν τα μετασχηματισμένα επίπεδα.

### 2.5.2.1 Ανισότροπο ομογενές υλικό

Στην περίπτωση που το ομογενές υλικό είναι ανισότροπο, τα ελαστικά του πεδία περιγράφονται με το μιγαδικό δυναμικό  $\mathbf{f}(z)$ , που υπεισέρχεται στις σχέσεις (2.42) και (2.43). Το άγνωστο αυτό μιγαδικό δυναμικό θα αναζητηθεί στη μορφή

$$\mathbf{f}(z) = \langle \log(z - z_0) \rangle \mathbf{q}, \quad (2.101)$$

όπου

$$\langle \log(z - z_0) \rangle = \langle \log(z - z_{01}), \log(z - z_{02}), \log(z - z_{03}) \rangle. \quad (2.102)$$

Στις σχέσεις αυτές  $z_k^0 = x_1^0 + p_k x_2^0$ , και  $\mathbf{q}$  είναι ένα σταθερό μητρώο στήλη που θα προσδιορισθεί παρακάτω. Όπως προαναφέρθηκε, η μεταβλητή πεδίου  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(z, \bar{z})$  εκφράζει την συνισταμένη δύναμη, που επενεργεί πάνω σε μια κυλινδρική επιφάνεια, η οποία δεν τέμνει τον εαυτό της και έχει γενέτειρες παράλληλες στον άξονα  $x_3$ . Έστω, τώρα, μια κλειστή κυλινδρική επιφάνεια, που περικλείει την γραμμή εφαρμογής της δύναμης  $\mathbf{p}$ . Η κυλινδρική αυτή επιφάνεια, στο επίπεδο  $z (= x_1 + ix_2)$  αντιπροσωπεύεται με την κλειστή καμπύλη  $C$ , που η αρχή της αντιστοιχεί στο σημείο  $A$  και το πέρας της στο σημείο  $B$ . Η συνισταμένη δύναμη που επενεργεί πάνω στην κυλινδρική επιφάνεια θα είναι ίση με  $\mathbf{X}_B - \mathbf{X}_A$ , όπου η θετική φορά περιστροφής της καμπύλης από το  $A$  στο  $B$  λαμβάνεται να είναι η αντιωρολογιακή. Αν από το σώμα αποκοπεί το τμήμα εκείνο που περικλείεται από την κυλινδρική επιφάνεια, η συνθήκη ισορροπίας του τμήματος αυτού απαιτεί

$$\mathbf{X}_B - \mathbf{X}_A + \mathbf{p} = \mathbf{0}. \quad (2.103)$$

Τα  $\mathbf{X}_A$  και  $\mathbf{X}_B$  αποτελούν τις τιμές της ποσότητας  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(z, \bar{z})$  στα σημεία  $A$  και  $B$ , αντίστοιχα, του μιγαδικού επιπέδου  $z_k$ . Οι τιμές αυτές παρέχονται με τις σχέσεις

$$\mathbf{X}_A = \mathbf{B} \langle \log(z^A - z_0) \rangle \mathbf{q} + \bar{\mathbf{B}} \langle \log(\bar{z}^A - \bar{z}_0) \rangle \bar{\mathbf{q}}, \quad (2.104)$$

$$\mathbf{X}_B = \mathbf{B} \langle \log(z^B - z_0) \rangle \mathbf{q} + \bar{\mathbf{B}} \langle \log(\bar{z}^B - \bar{z}_0) \rangle \bar{\mathbf{q}}. \quad (2.105)$$

Η τιμή  $\mathbf{X}_A$  αντιστοιχεί στο σημείο  $A$  της καμπύλης  $C$  του φυσικού επιπέδου  $z$ . Στα μετασχηματισμένα μιγαδικά επίπεδα  $z_k$ , το σημείο  $A$  αντιστοιχεί στους μιγαδικούς αριθμούς  $z_k^A$ , που ορίζονται με τις σχέσεις  $z_k^A = z_{0,k} + R_k e^{i\theta_0}$ , όπου  $R_k = |z_k^A - z_{0,k}|$  και  $\theta_0 = \arg(z_k^A - z_{0,k})$ . Η τιμή  $\mathbf{X}_B$  αντιστοιχεί στο σημείο  $B$  της καμπύλης  $C$ , το οποίο στα μετασχηματισμένα μιγαδικά επίπεδα  $z_k$ , αντιστοιχεί στους μιγαδικούς αριθμούς

$z_k^B = z_{0,k} + R_k e^{i(\theta_0 + 2\pi)}$ , όπου  $R_k = |z_k^B - z_{0,k}| (= |z_k^A - z_{0,k}|)$  και  $\theta_0 + 2\pi = \arg(z_k^B - z_{0,k})$ . Με αυτά τα δεδομένα, από τις (2.104) και (2.105) συνάγεται ότι

$$\mathbf{X}_B - \mathbf{X}_A = 2\pi i (\mathbf{Bq} - \overline{\mathbf{Bq}}), \quad (2.106)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση αυτή στην (2.103) προκύπτει

$$\mathbf{Bq} - \overline{\mathbf{Bq}} = -\frac{\mathbf{p}}{2\pi i}. \quad (2.107)$$

Για το αποκομμένο τμήμα του σώματος, που περικλείεται από την κυλινδρική επιφάνεια, εκτός από την παραπάνω συνθήκη ισορροπίας, θα πρέπει να εξασφαλίζεται η μονοτιμία των μετατοπίσεων, για όλα τα σημεία της κυλινδρικής επιφάνειας. Στο σημείο A της επιφάνειας, η μετατόπιση  $\mathbf{u}_A$  θα πρέπει να είναι ίση με τη μετατόπιση  $\mathbf{u}_B$  του σημείου B, δηλαδή θα πρέπει να ισχύει

$$\mathbf{u}_A = \mathbf{u}_B. \quad (2.108)$$

Από τη σχέση αυτή, χρησιμοποιώντας τις (2.42) και (2.101), προκύπτει

$$\mathbf{Aq} - \overline{\mathbf{Aq}} = \mathbf{0}. \quad (2.109)$$

Επιλύοντας το σύστημα των μητρικών εξισώσεων (2.107) και (2.109), βρίσκεται το μητρώο  $\mathbf{q}$  στη μορφή

$$\mathbf{q} = \frac{1}{2\pi} \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{M} + \overline{\mathbf{M}})^{-1} \mathbf{p}. \quad (2.110)$$

Η παραπάνω σχέση έχει εξαχθεί για πρώτη φορά από τον Stroh (1958). Στις αναλύσεις που θα γίνουν στα επόμενα κεφάλαια, τα διδιάστατα ελαστικά πεδία που αναπτύσσονται σε ένα διυλικό με επίπεδη διεπιφάνεια λόγω μιας γραμμικής δύναμης, θα εκφραστούν σε όρους του μιγαδικού δυναμικού, που αντιστοιχεί στο αντίστοιχο πρόβλημα του ομογενούς υλικού. Για το σκοπό αυτό, τα μιγαδικά δυναμικά της ιδιομορφίας για το άπειρο ομογενές σώμα θα συμβολίζονται με  $\mathbf{f}_\infty(z; z_0)$ . Έτσι, για το συγκεκριμένο πρόβλημα, το μιγαδικό δυναμικό  $\mathbf{f}(z)$  της σχέσης (2.101) θα γραφτεί στη μορφή

$$\mathbf{f}_\infty(z; z_0) = \frac{1}{2\pi} \langle \log(z - z_0) \rangle \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{M} + \overline{\mathbf{M}})^{-1} \mathbf{p}. \quad (2.111)$$

## 2.5.2.2 Ισότροπο ομογενές υλικό

Για το ισότροπο υλικό, το αντίστοιχο πρόβλημα της συγκεντρωμένης δύναμης θα αναλυθεί πρώτα, για την περίπτωση που η δύναμη εφαρμόζεται κατά μήκος της ευθείας γραμμής  $(x_1^0 = 0, x_2^0 = 0, x_3)$ . Το ίχνος της γραμμής αυτής στο μιγαδικό επίπεδο  $z (= x_1 + ix_2)$  είναι το σημείο  $z_0 = 0$ . Για τη θέση αυτή της δύναμης, θα προσδιορισθεί το μιγαδικό δυναμικό  $\mathbf{f}^0(z)$ . Όταν η δύναμη εφαρμόζεται κατά μήκος της γραμμής  $(x_1^0, x_2^0, x_3)$ , που αντιστοιχεί στο σημείο  $z_0 = x_1^0 + ix_2^0$  του φυσικού επιπέδου  $z$ , το μιγαδικό δυναμικό  $\mathbf{f}(z)$  θα υπολογισθεί από τη σχέση (Muskhelishvili, 1953)

$$\mathbf{f}(z) = \mathbf{f}^0(z - z_0) + \mathbf{T}\bar{z}_0 \mathbf{f}'^0(z - z_0), \quad (2.112)$$

όπου

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.113)$$

Το μιγαδικό δυναμικό  $\mathbf{f}^0(z)$  θα αναζητηθεί στη μορφή

$$\mathbf{f}^0(z) = \mathbf{c} \log z, \quad (2.114)$$

όπου  $\mathbf{c}$  είναι ένα σταθερό μητρώο στήλη. Όπως στη περίπτωση του ανισότροπου υλικού, έτσι και εδώ, θα θεωρηθεί μια κυλινδρική κλειστή επιφάνεια, της οποίας οι γεννήτρες είναι παράλληλες στον άξονα  $x_3$ . Το ίχνος της επιφάνειας αυτής πάνω στο μιγαδικό επίπεδο  $z$  είναι η κλειστή καμπύλη  $C$ . Η καμπύλη  $C$  έχει ως αρχή το σημείο  $A$  του μιγαδικού επιπέδου  $z$  και πέρας το σημείο  $B$ , που συμπίπτει με το  $A$ . Και εδώ, η θετική φορά περιστροφής της καμπύλης λαμβάνεται να είναι η αντιωρολογιακή. Για την περίπτωση του ισότροπου υλικού, η συνισταμένη δύναμη των τάσεων, που επενεργούν πάνω στην κυλινδρική επιφάνεια, παρέχεται από τη σχέση (2.98). Αν από το υλικό αποκοπεί το τμήμα, που περικλείεται από την κυλινδρική επιφάνεια, η συνθήκη ισορροπίας του τμήματος αυτού παρέχεται από τη σχέση (2.103). Η τιμή  $\mathbf{X}_A$  αντιστοιχεί στο αρχικό σημείο  $A$  της καμπύλης  $C$ , του οποίου η θέση από το ιδιόμορφο σημείο  $z_0$ , ορίζεται με το μιγαδικό αριθμό  $z^A = z_0 + Re^{i\theta_0}$ , όπου  $R = |z^A - z_0|$  και  $\theta_0 = \arg(z^A - z_0)$ . Η τιμή  $\mathbf{X}_B$  αντιστοιχεί στο τελικό σημείο  $B$  της καμπύλης  $C$ , του οποίου η θέση σε



σχέση με το ιδιόμορφο σημείο  $z_0$  ορίζεται με το μιγαδικό αριθμό  $z^B = z_0 + Re^{i(\theta_0+2\pi)}$ , όπου  $R = |z^B - z_0| (= |z^A - z_0|)$  και  $\theta_0 + 2\pi = \arg(z^B - z_0)$ . Με τα δεδομένα αυτά, λαμβάνοντας υπόψη τις (2.114) και (2.98) συνάγεται ότι

$$\mathbf{Bc} - \overline{\mathbf{Bc}} = -\frac{\mathbf{p}}{2\pi i}. \quad (2.115)$$

Όπως στη περίπτωση του ανισότροπου σώματος, έτσι και εδώ, θα πρέπει να εξασφαλίζεται η μονοτιμία των μετατοπίσεων της κυλινδρικής επιφάνειας του αποκομμένου τμήματος. Επειδή τα σημεία A και B επιλέχθηκαν αυθαίρετα, η συνθήκη μονοτιμίας των μετατοπίσεων της κυλινδρικής επιφάνειας περιγράφεται με τη σχέση (2.108). Από τη σχέση αυτή συνάγεται ότι

$$\mathbf{Ac} - \overline{\mathbf{Ac}} = \mathbf{0}. \quad (2.116)$$

Από το σύστημα των μητρωικών εξισώσεων (2.115) και (2.116), προκύπτει

$$\mathbf{c} = \frac{1}{2\pi} \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{M} + \overline{\mathbf{M}})^{-1} \mathbf{p}. \quad (2.117)$$

Έτσι, το μιγαδικό δυναμικό  $\mathbf{f}^0(z)$  παίρνει τη μορφή

$$\mathbf{f}^0(z) = \frac{1}{2\pi} \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{M} + \overline{\mathbf{M}})^{-1} \mathbf{p} \frac{1}{z}. \quad (2.118)$$

Έχοντας προσδιορίσει το μιγαδικό δυναμικό  $\mathbf{f}^0(z)$ , που αντιστοιχεί στο σημείο εφαρμογής  $z_0 = 0$ , το μιγαδικό δυναμικό  $\mathbf{f}(z)$ , για το σημείο εφαρμογής  $z_0 = x_1^0 + ix_2^0$ , θα προσδιορισθεί από τη σχέση (2.112). Παίρνοντας υπόψη την (2.118), η (2.112) παρέχει

$$\mathbf{f}_\infty(z; z_0) = \mathbf{K}_F \log(z - z_0) \mathbf{p} - \mathbf{L}_F \frac{\overline{z_0}}{z - z_0} \mathbf{p}, \quad (2.119)$$

όπου

$$\mathbf{K}_F = \frac{1}{2\pi(1+\kappa)} \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ -\kappa & i\kappa & 0 \\ 0 & 0 & -(1+\kappa) \end{bmatrix}, \quad (2.120)$$

$$\mathbf{L}_F = \frac{1}{2\pi(1+\kappa)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.121)$$

Από τη σχέση (2.119) προκύπτει

$$f_1(z) = \frac{p_1 + ip_2}{2\pi(1+\kappa)} \log(z - z_0), \quad (2.122)$$

$$f_2(z) = -\frac{\kappa(p_1 - ip_2)}{2\pi(1+\kappa)} \log(z - z_0) - \frac{(p_1 + ip_2)\bar{z}_0}{2\pi(1+\kappa)} \frac{1}{z - z_0}, \quad (2.123)$$

$$f_3(z) = -\frac{P_3}{2\pi} \log(z - z_0). \quad (2.124)$$

Οι εξισώσεις αυτές συμπίπτουν με αυτές που υπάρχουν στη βιβλιογραφία (Suo, 1989; Kattis, 1994).

### 2.5.3 Τα ελαστικά πεδία για γραμμική εξάρμωση

Η εξάρμωση αποτελεί μια δομική ατέλεια στο πλέγμα των κρυσταλλικών υλικών και αποτελεί την βασική πηγή εσωτερικών τάσεων στα υλικά αυτά. Περιγράφοντας τις ατέλειες των υλικών αυτών με τη μηχανική των συνεχών μέσων, στην περίπτωση της διδιάστατης ελαστικότητας, η εξάρμωση μπορεί να θεωρηθεί ότι εισάγεται σε ένα στερεό σώμα, που προσομοιώνεται με ένα συνεχές ελαστικό μέσο, με τις παρακάτω πλασματικές διαδικασίες. Στο σώμα, που θεωρείται ότι καταλαμβάνει τον πλήρη ευκλείδειο χώρο, που περιγράφεται με το σταθερό σύστημα συντεταγμένων  $(x_1, x_2, x_3)$ , γίνεται μια επίπεδη τομή, που ξεκινάει από την ευθεία  $(x_1^0, x_2^0, x_3)$  και σχηματίζει γωνία  $\theta_0$  με το επίπεδο  $(x_1, x_3)$ . Οι δύο επίπεδες επιφάνειες του σώματος που δημιουργούνται με την τομή, δηλώνονται με (+) και (-), όπου με (-) δηλώνεται η επίπεδη επιφάνεια που συναντάται πρώτη, όταν ακολουθείται μια κλειστή διαδρομή αντιωρολογιακής κατεύθυνσης, που ξεκινάει από ένα τυχαίο σημείο του σώματος που δεν βρίσκεται σε καμία από τις δύο επιφάνειες. Στο μιγαδικό επίπεδο  $z$ , η τομή που έγινε ορίζει μια γραμμή, που ξεκινάει από το σημείο  $z_0 (= x_1^0 + ix_2^0)$  και έχει μια κλίση  $\theta_0$  ως προς τον άξονα  $x_1$ . Η κλίση της επιφάνειας (+) είναι η  $\theta_0$ , ενώ της επιφάνειας (-) η  $\theta_0 + 2\pi$ . Στη συνέχεια, οι δύο επιφάνειες που σχηματίστηκαν με την τομή μετατοπίζονται κατά  $\mathbf{u}^+$  και  $\mathbf{u}^-$ , έτσι ώστε

$$\mathbf{u}^- - \mathbf{u}^+ = \mathbf{b}, \quad (2.125)$$

όπου  $\mathbf{b}$  είναι ένα σταθερό μητρώο στήλη, γνωστό στη βιβλιογραφία ως διάνυσμα Burger. Στη συνέχεια, οι δύο μετατοπισμένες επιφάνειες συγκολλούνται. Μετά την συγκόλληση, στο σώμα παράγεται μια παραμορφωσιακή ελαστική κατάσταση, της οποίας οι τάσεις είναι γνωστές ως εσωτερικές τάσεις. Η διδιάστατη ελαστική παραμορφωσιακή κατάσταση που παράγεται από τις παραπάνω διαδικασίες, προσδιορίζεται ξεχωριστά παρακάτω για το ανισότροπο και το ισότροπο υλικό.

### 2.5.3.1 Ανισότροπο ομογενές υλικό

Σε ένα ομογενές ανισότροπο ελαστικό σώμα, που καταλαμβάνει τον ευκλείδειο χώρο, έχει εισαχθεί μια εξάρμωση με διάνυσμα Burger  $\mathbf{b}$ , της οποίας το μέτωπο (πυρήνας) βρίσκεται κατά μήκος της γραμμής  $(x_1^0, x_2^0, x_3)$ . Στην απαραμόρφωτη κατάσταση του σώματος, δηλαδή πριν εισαχθεί η εξάρμωση, έστω μια κλειστή κυλινδρική επιφάνεια γύρω από τη γραμμή  $(x_1^0, x_2^0, x_3)$ , που δεν τέμνει τον εαυτό της και έχει γεννέτηρες παράλληλες στον άξονα  $x_3$ . Μετά την εισαγωγή της εξάρμωσης, τα σημεία της κλειστής επιφάνειας που συναντούν την τομή, έχουν υποστεί μια μετατόπιση  $\mathbf{b}$ . Αν το ίχνος της κυλινδρικής επιφάνειας πάνω στο μιγαδικό επίπεδο  $z(=x_1+ix_2)$  δηλωθεί με  $C$  και τα σημεία, που η καμπύλη αυτή συναντά τις επιφάνειες (+) και (-) με A και B, αντίστοιχα, τότε θα ισχύει

$$\mathbf{u}_B^- - \mathbf{u}_A^+ = \mathbf{b}, \quad (2.126)$$

όπου τα  $\mathbf{u}_A^+$  και  $\mathbf{u}_B^-$  αποτελούν τιμές της μετατόπισης  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(z, \bar{z})$  στις θέσεις A και B. Το  $\mathbf{u}_A^+$  αντιστοιχεί στο αρχικό σημείο A της καμπύλης  $C$ , του οποίου η θέση από το ιδιόμορφο σημείο  $z_{0,k}$  ορίζεται με το μιγαδικό αριθμό  $z_k^A - z_{0,k} = R_k e^{i\theta_0}$ . Το  $\mathbf{u}_B^-$  αντιστοιχεί στο τελικό σημείο B της καμπύλης  $C$ , του οποίου η θέση ορίζεται με το μιγαδικό αριθμό  $z_k^B - z_{0,k} = R_k e^{i(\theta_0+2\pi)}$ .

Το άγνωστο μιγαδικό δυναμικό θα αναζητηθεί στη μορφή

$$\mathbf{f}(z) = \langle \log(\mathbf{z} - \mathbf{z}_0) \rangle \mathbf{q}, \quad (2.127)$$

όπου  $\mathbf{q}$  είναι ένα σταθερό μητρώο στήλη, που θα προσδιορισθεί. Οι τιμές των  $\mathbf{u}_A^+$  και  $\mathbf{u}_B^-$ , παρέχονται με τις σχέσεις

$$\mathbf{u}_A^+ = \mathbf{A} \langle \log(z^A - z_0) \rangle \mathbf{q} + \bar{\mathbf{A}} \langle \log(\bar{z}^A - \bar{z}_0) \rangle \bar{\mathbf{q}}, \quad (2.128)$$

$$\mathbf{u}_B^- = \mathbf{A} \langle \log(z^B - z_0) \rangle \mathbf{q} + \bar{\mathbf{A}} \langle \log(\bar{z}^B - \bar{z}_0) \rangle \bar{\mathbf{q}}. \quad (2.129)$$

Από τις (2.128) και (2.129) συνάγεται ότι

$$\mathbf{u}_B^- - \mathbf{u}_A^+ = 2\pi i(\mathbf{A}\mathbf{q} - \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{q}}). \quad (2.130)$$

Από τη σχέση αυτή και την (2.126), προκύπτει

$$\mathbf{A}\mathbf{q} - \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{q}} = \frac{\mathbf{b}}{2\pi i}. \quad (2.131)$$

Αυτή είναι η πρώτη εξίσωση για τον προσδιορισμό του άγνωστου μιγαδικού σταθερού μητρώου  $\mathbf{q}$ . Η δεύτερη εξίσωση θα προκύψει από την συνθήκη ισορροπίας του τμήματος του σώματος, που περικλείεται από την κυλινδρική επιφάνεια. Η συνθήκη ισορροπίας του σώματος απαιτεί

$$\mathbf{X}_B - \mathbf{X}_A = \mathbf{0}, \quad (2.132)$$

όπου  $\mathbf{X}_A$  και  $\mathbf{X}_B$  είναι οι τιμές της συναρτησιακής ποσότητας στις θέσεις A και B της κυλινδρικής επιφάνειας. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.41), (2.132) προκύπτει η σχέση

$$\mathbf{B}\mathbf{q} - \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{0}. \quad (2.133)$$

Από τις (2.131) και (2.133), βρίσκεται το μητρώο  $\mathbf{q}$  στη μορφή

$$\mathbf{q} = \frac{1}{2\pi} \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{M}^{-1} + \bar{\mathbf{M}}^{-1})^{-1} \mathbf{b}. \quad (2.134)$$

Έτσι, το μιγαδικό δυναμικό  $\mathbf{f}(z)$ , που δίνεται με τη σχέση (2.127) παίρνει τη μορφή

$$\mathbf{f}_\infty(z; z_0) = \frac{1}{2\pi} \langle \log(z - z_0) \rangle \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{M}^{-1} + \bar{\mathbf{M}}^{-1})^{-1} \mathbf{b}, \quad (2.135)$$

όπου στη σχέση αυτή, όπως στην περίπτωση της δύναμης, έχει χρησιμοποιηθεί ο ενιαίος συμβολισμός  $\mathbf{f}_\infty(z; z_0)$  αντί του  $\mathbf{f}(z)$ .

2.5.3.2 *Ισότροπο ομογενές υλικό*

Όπως στην περίπτωση της γραμμικής δύναμης, θα προσδιορισθεί πρώτα το μιγαδικό δυναμικό  $\mathbf{f}^0(z)$ , για την περίπτωση που το μέτωπο της εξάρμωσης βρίσκεται στη γραμμή  $(0, 0, x_3)$ . Το μιγαδικό δυναμικό  $\mathbf{f}^0(z)$  θα αναζητηθεί στη μορφή

$$\mathbf{f}^0(z) = \mathbf{c} \log z, \quad (2.136)$$

όπου  $\mathbf{c}$  είναι ένα σταθερό μητρώο στήλη που θα προσδιορισθεί. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.96), (2.126) και την (2.136) προκύπτει

$$\mathbf{A}\mathbf{c} - \overline{\mathbf{A}\mathbf{c}} = -\frac{\mathbf{b}}{2\pi i}. \quad (2.137)$$

Η ισορροπία του τμήματος του υλικού, που αποκόπτεται από μια κυλινδρική επιφάνεια, που περικλείει το μέτωπο της εξάρμωσης  $(0, 0, x_3)$  και έχει γεννέτηρες παράλληλες στον άξονα  $x_3$ , απαιτεί  $\mathbf{X}_B - \mathbf{X}_A = \mathbf{0}$ . Από τη συνθήκη αυτή, παίρνοντας υπόψη την (2.98) και την (2.136) προκύπτει

$$\mathbf{B}\mathbf{c} - \overline{\mathbf{B}\mathbf{c}} = \mathbf{0}. \quad (2.138)$$

Από την επίλυση του συστήματος των μητρωικών εξισώσεων (2.137) και (2.138), βρίσκεται ότι

$$\mathbf{c} = \frac{1}{2\pi} \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{M}^{-1} + \overline{\mathbf{M}}^{-1})^{-1} \mathbf{b}. \quad (2.139)$$

Έτσι, το μιγαδικό δυναμικό, που παρέχεται με τη σχέση (2.136), παίρνει τη μορφή

$$\mathbf{f}^0(z) = \frac{1}{2\pi} \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{M}^{-1} + \overline{\mathbf{M}}^{-1})^{-1} \mathbf{b} \log z. \quad (2.140)$$

Όταν το μέτωπο της εξάρμωσης βρίσκεται στο σημείο  $z_0$  του μιγαδικού επιπέδου  $z$ , το μιγαδικό δυναμικό  $\mathbf{f}(z)$  προσδιορίζεται από τη σχέση (2.112). Βρίσκεται ότι

$$\mathbf{f}_\infty(z; z_0) = \mathbf{K}_S \log(z - z_0) \mathbf{b} - \mathbf{L}_S \frac{\overline{z_0}}{z - z_0} \mathbf{b}, \quad (2.141)$$

με

$$\mathbf{K}_S = \frac{i\mu}{\pi(1+\kappa)} \begin{bmatrix} -1 & -i & 0 \\ 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & (1+\kappa)/2 \end{bmatrix}, \quad (2.142)$$

$$\mathbf{L}_S = \frac{i\mu}{\pi(1+\kappa)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.143)$$

Από τη σχέση (2.141) προκύπτουν

$$f_1(z) = \frac{\mu(b_1 + ib_2)}{i\pi(1+\kappa)} \log(z - z_0), \quad (2.144)$$

$$f_2(z) = -\frac{\mu(b_1 - ib_2)}{i\pi(1+\kappa)} \log(z - z_0) + \frac{\mu(b_1 + ib_2)\bar{z}_0}{i\pi(1+\kappa)} \frac{1}{z - z_0}, \quad (2.145)$$

$$f_3(z) = -\frac{\mu b_3}{2i\pi} \log(z - z_0). \quad (2.146)$$

Οι εξισώσεις αυτές συμπίπτουν με αυτές που υπάρχουν στη βιβλιογραφία (Dundurs, 1965; Suo, 1989; Kattis, 1994).

## Κεφάλαιο 3

# Η ΕΝΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΔΙΦΑΣΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ

### 3.1 ΓΕΝΙΚΑ

Στο κεφάλαιο αυτό, στα πλαίσια της διδιάστατης ελαστικότητας, αναπτύσσεται μια ενοποιημένη μεθοδολογία για την ανάλυση της αλληλεπίδρασης ιδιομορφιών με διεπιφάνειες σε διφασικά σύνθετα υλικά. Οι ιδιομορφίες, που μελετώνται στην παρούσα εργασία, είναι:

- η γραμμική δύναμη,
- η εξάρμωση, και
- η ομοιόμορφη τάση.

Το σύνθετο διφασικό υλικό προσομοιώνεται με δύο ελαστικά ανόμοια μέσα που καλύπτουν τον ευκλείδειο χώρο και διαχωρίζονται μεταξύ τους με μια επίπεδη και απείρως εκτεινόμενη διεπιφάνεια. Στη διεπιφάνεια επικρατούν συνθήκες τέλει σύνδεσης, που περιγράφονται με τη συνέχεια των μετατοπίσεων και των τάσεων των δύο φάσεων του συστήματος. Κατά την ανάπτυξη της μεθοδολογίας, θα θεωρηθούν όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί ανισοτροπίας των δύο φάσεων του διυλικού: το ανισότροπο/ανισότροπο, το ανισότροπο/ισότροπο και το ισότροπο/ισότροπο διυλικό.

Η μεθοδολογία που αναπτύσσεται, αποτελεί την γενίκευση της προσέγγισης των διφασικών δυναμικών, που έχει αναπτυχθεί ξεχωριστά για τη διδιάστατη ανισότροπη και ισότροπη ελαστικότητα (Kattis, 1994; Kattis and Meguid, 1995; Kattis and Providas, 1997). Με τη γενίκευση αυτή, τα ελαστικά πεδία στο διυλικό θα εκφραστούν μέσω γενικών σχέσεων, σε όρους δύο μητρωικών μιγαδικών συναρτήσεων (διφασικά

δυναμικά), των οποίων τα στοιχεία είναι ολόμορφες συναρτήσεις. Οι γενικές αυτές σχέσεις αναπτύσσονται, ώστε να ικανοποιούνται οι απαιτούμενες συνθήκες συνέχειας των τάσεων και των μετατοπίσεων στα συνδεδεμένα τμήματα της διεπιφάνειας. Στη συνέχεια, η μεθοδολογία που αναπτύσσεται, εφαρμόζεται για τον προσδιορισμό των ελαστικών πεδίων σε ένα σύνθετο υλικό με τέλεια σύνδεση στη διεπιφάνεια, για τις ιδιομορφίες που προαναφέρθηκαν. Για μια συγκεκριμένη ιδιομορφία, τα δυναμικά του συστήματος προσδιορίζονται απαιτώντας τα τασικά πεδία που παράγονται από αυτή, να επιδεικνύουν την προκαθορισμένη συμπεριφορά που χαρακτηρίζει την ιδιομορφία.

### 3.2 Η ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΤΟΥ ΔΙΦΑΣΙΚΟΥ ΥΛΙΚΟΥ

Το σύνθετο υλικό που μελετάται, αποτελείται από δύο επιμέρους υλικά, που έχουν διαφορετικές ελαστικές ιδιότητες και συνδέονται μεταξύ τους με μια επίπεδη διεπιφάνεια. Για την ανάπτυξη της μεθόδου των δυναμικών, εισάγεται το μικρομηχανικό μοντέλο των δύο ελαστικών μέσων, που καταλαμβάνουν τον ευκλείδειο χώρο και διαχωρίζονται μεταξύ τους με μια απείρως εκτεινόμενη επίπεδη διεπιφάνεια. Ο ευκλείδειος χώρος περιγράφεται με το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $(x_1, x_2, x_3)$ , του οποίου το επίπεδο  $x_3 = 0$  έχει τοποθετηθεί πάνω στην επίπεδη διεπιφάνεια που διαχωρίζει τις δύο φάσεις. Τα δύο μέσα είναι τέλεια συνδεδεμένα κατά μήκος της διεπιφάνειας, εκτός ίσως από ορισμένα τμήματά της, που είναι ασύνδετα. Η φάση του υλικού, που καταλαμβάνει τον ημιχώρο  $x_2 > 0$ , θα δηλώνεται με  $I$ , ενώ η φάση που καταλαμβάνει τον ημιχώρο  $x_2 < 0$  με  $II$ . Στη συνέχεια, οι ποσότητες που συνδέονται με τις δύο αυτές φάσεις, θα εφοδιάζονται ανάλογα με τους πάνω ή κάτω δείκτες  $I$  και  $II$  (Σχήμα 3-1). Κατά μήκος του διεπιφανειακού τμήματος, όπου επικρατούν συνθήκες τέλει σύνδεσης, θα πρέπει να μη διακόπτεται η συνέχεια της μετατόπισης και του ελκυστή των τάσεων. Αυτό εξασφαλίζεται όταν

$$u_i^I(x_1, x_2 = 0) = u_i^{II}(x_1, x_2 = 0), \quad (3.1\alpha)$$

$$\sigma_{2i}^I(x_1, x_2 = 0) = \sigma_{2i}^{II}(x_1, x_2 = 0). \quad (3.1\beta)$$

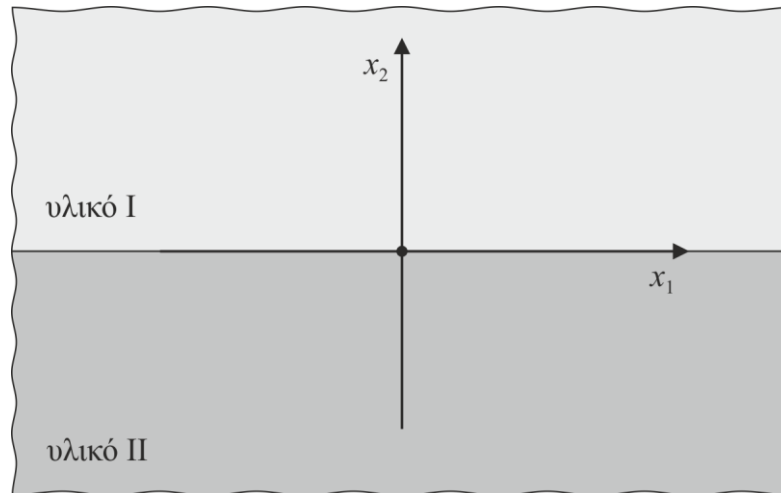
Λαμβάνοντας υπόψη τις (2.7) και (2.31), οι παραπάνω συνθήκες μπορούν να γραφτούν στην παρακάτω μητρική μορφή



$$\mathbf{u}_I = \mathbf{u}_{II}, \quad (3.2\alpha)$$

$$\mathbf{X}_I = \mathbf{X}_{II}. \quad (3.2\beta)$$

Η σχέση (3.2β) αποτελεί την ολοκληρωμένη ισοδύναμη μορφή της διεπιφανειακής



**Σχήμα 3-1** Η γεωμετρία του διυλικού

συνθήκης των τάσεων (3.1β).

### 3.3 ΟΙ ΓΕΝΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΩΝ ΔΙΦΑΣΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ

#### 3.3.1 Ανισότροπο/ανισότροπο διυλικό

Στην ενότητα αυτή θα εξαχθούν τα διαφασικά δυναμικά για την περίπτωση, όπου οι δύο φάσεις του διυλικού είναι ανισότροπες και κατά μήκος όλης της διεπιφάνειας επικρατούν συνθήκες τέλει σύνδεσης. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (2.42) και (2.43) οι διεπιφανειακές συνθήκες (3.2) παρέχονται

$$\mathbf{A}_I \mathbf{f}_I(x_1) + \overline{\mathbf{A}_I \mathbf{f}_I}(x_1) = \mathbf{A}_{II} \mathbf{f}_{II}(x_1) + \overline{\mathbf{A}_{II} \mathbf{f}_{II}}(x_1), \text{ στη διεπιφάνεια,} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{B}_I \mathbf{f}_I(x_1) + \overline{\mathbf{B}_I \mathbf{f}_I}(x_1) = \mathbf{B}_{II} \mathbf{f}_{II}(x_1) + \overline{\mathbf{B}_{II} \mathbf{f}_{II}}(x_1), \text{ στη διεπιφάνεια.} \quad (3.4)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις γράφονται στη μορφή

$$\mathbf{A}_I \mathbf{f}_I(x_1) - \overline{\mathbf{A}_I \mathbf{f}_I(x_1)} = \mathbf{A}_{II} \mathbf{f}_{II}(x_1) - \overline{\mathbf{A}_I \mathbf{f}_I(x_1)}, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{B}_I \mathbf{f}_I(x_1) - \overline{\mathbf{B}_I \mathbf{f}_I(x_1)} = \mathbf{B}_{II} \mathbf{f}_{II}(x_1) - \overline{\mathbf{B}_I \mathbf{f}_I(x_1)}. \quad (3.6)$$

Στη συνέχεια, στο πλήρες επίπεδο  $z$ , ορίζεται μια ολόμορφη συνάρτηση  $\mathbf{f}_0(z)$  ως εξής:

$$\mathbf{f}_0(z) = i\mathbf{A}_I \mathbf{f}_I(z) - i\overline{\mathbf{A}_{II} \mathbf{f}_{II}(z)}, \quad \text{όταν το } z \in I, \quad (3.7)$$

$$\mathbf{f}_0(z) = i\mathbf{A}_{II} \mathbf{f}_{II}(z) - i\overline{\mathbf{A}_I \mathbf{f}_I(z)}, \quad \text{όταν το } z \in II. \quad (3.8)$$

Το όρισμα της συνάρτησης  $\mathbf{f}_0(z)$  θεωρείται ότι έχει τη γενική μορφή  $z = x_1 + px_2$ , όπου το  $p$  είναι ένας μιγαδικός αριθμός με  $\text{Im } p > 0$ . Με τον ίδιο τρόπο, ορίζεται μια δεύτερη ολόμορφη συνάρτηση  $\mathbf{q}_0(z)$ , σε όλο το επίπεδο  $z$ , ως εξής

$$\mathbf{q}_0(z) = \mathbf{B}_I \mathbf{f}_I(z) - \overline{\mathbf{B}_{II} \mathbf{f}_{II}(z)}, \quad \text{όταν } z \in I, \quad (3.9)$$

$$\mathbf{q}_0(z) = \mathbf{B}_{II} \mathbf{f}_{II}(z) - \overline{\mathbf{B}_I \mathbf{f}_I(z)}, \quad \text{όταν } z \in II. \quad (3.10)$$

Έχοντας ορίσει τις συναρτήσεις  $\mathbf{f}_0(z)$  και  $\mathbf{q}_0(z)$  με τον τρόπο αυτό, ικανοποιείται αυτόματα η συνέχεια των μετατοπίσεων κατά μήκος της διεπιφάνειας. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.7)-(3.10), βρίσκεται ότι

$$\mathbf{B}_I \mathbf{f}_I(z) = \mathbf{H}^{-1} \left[ \mathbf{f}_0(z) + \overline{\mathbf{M}_{II}^{-1} \mathbf{q}_0(z)} \right], \quad (z \in I) \quad (3.11)$$

$$\overline{\mathbf{B}_I \mathbf{f}_I(\bar{z})} = \overline{\mathbf{H}^{-1} \left[ \mathbf{f}_0(\bar{z}) - \mathbf{M}_{II}^{-1} \mathbf{q}_0(\bar{z}) \right]}, \quad (z \in I) \quad (3.12)$$

για τη φάση  $I$ , και

$$\mathbf{B}_{II} \mathbf{f}_{II}(z) = \overline{\mathbf{H}^{-1} \left[ \mathbf{f}_0(z) + \overline{\mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{q}_0(z)} \right]}, \quad (z \in II) \quad (3.13)$$

$$\overline{\mathbf{B}_{II} \mathbf{f}_{II}(\bar{z})} = \overline{\mathbf{H}^{-1} \left[ \mathbf{f}_0(\bar{z}) - \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{q}_0(\bar{z}) \right]}, \quad (z \in II) \quad (3.14)$$

για τη φάση  $II$ . Στις σχέσεις αυτές, έχουν εισαχθεί τα μητρώα  $\mathbf{M}_I$  και  $\mathbf{M}_{II}$  που ορίζονται με τις σχέσεις (Lothe and Barnett, 1974)

$$\mathbf{M}_I = -i\mathbf{B}_I \mathbf{A}_I^{-1}, \quad \mathbf{M}_{II} = -i\mathbf{B}_{II} \mathbf{A}_{II}^{-1}. \quad (3.15)$$

Το μητρώο  $\mathbf{H}$ , που υπεισέρχεται στις παραπάνω σχέσεις, είναι ένας θετικά ορισμένος ερμιτιανός πίνακας (Ting, 1986), που ορίζεται σε όρους των μητρώων  $\mathbf{M}_I$  και  $\mathbf{M}_{II}$  με τη σχέση

$$\mathbf{H} = \mathbf{M}_I^{-1} + \bar{\mathbf{M}}_H^{-1}. \quad (3.16)$$

Με τις εξισώσεις (3.11)-(3.14), τα διδιάστατα ελαστικά πεδία που αναπτύσσονται σε ένα ανισότροπο/ανισότροπο δυλικό, με τέλεια διεπιφανειακή σύνδεση, μπορούν να εκφραστούν σε όρους δύο μητρικών συναρτήσεων στηλών  $\mathbf{f}_0(z)$  και  $\mathbf{q}_0(z)$ , των οποίων τα στοιχεία είναι ολόμορφες συναρτήσεις της μιγαδικής μεταβλητής  $z = x_1 + px_2$  ( $\text{Im } p > 0$ ). Οι μητρικές αυτές συναρτήσεις αποτελούν τα *διφασικά δυναμικά* του δυλικού. Σημειώνεται, ότι με τη βοήθεια των παραπάνω σχέσεων, η λύση του προβλήματος του ανισότροπου/ανισότροπου δυλικού περιορίζεται στον προσδιορισμό των διφασικών δυναμικών  $\mathbf{f}_0(z)$  και  $\mathbf{q}_0(z)$ , που ορίστηκαν προηγούμενα. Για ένα συγκεκριμένο πρόβλημα, τα διφασικά δυναμικά προσδιορίζονται έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες και οι ιδιόμορφες συνθήκες του προβλήματος.

Με βάση τις σχέσεις (2.42) και (2.43) και τις (3.11)-(3.14), οι τάσεις και οι μετατοπίσεις δίνονται από τις

$$\mathbf{X}_I(z, \bar{z}) = \mathbf{H}^{-1} [\mathbf{f}_0(z) + \bar{\mathbf{M}}_H^{-1} \mathbf{q}_0(z)] + \bar{\mathbf{H}}^{-1} [\mathbf{f}_0(\bar{z}) - \mathbf{M}_H^{-1} \mathbf{q}_0(\bar{z})], \quad (3.17)$$

$$i\mathbf{u}_I(z, \bar{z}) = (\mathbf{I} + \bar{\mathbf{M}}_H^{-1} \mathbf{M}_I)^{-1} [\mathbf{f}_0(z) + \bar{\mathbf{M}}_H^{-1} \mathbf{q}_0(z)] - (\mathbf{I} + \mathbf{M}_H^{-1} \bar{\mathbf{M}}_I)^{-1} [\mathbf{f}_0(\bar{z}) - \mathbf{M}_H^{-1} \mathbf{q}_0(\bar{z})], \quad (3.18)$$

για τη φάση  $I$ , και

$$\mathbf{X}_H(z, \bar{z}) = \bar{\mathbf{H}}^{-1} [\mathbf{f}_0(z) + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{q}_0(z)] + \mathbf{H}^{-1} [\mathbf{f}_0(\bar{z}) - \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{q}_0(\bar{z})], \quad (3.19)$$

$$i\mathbf{u}_H(z, \bar{z}) = (\mathbf{I} + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{M}_H)^{-1} [\mathbf{f}_0(z) + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{q}_0(z)] - (\mathbf{I} + \mathbf{M}_I^{-1} \bar{\mathbf{M}}_H)^{-1} [\mathbf{f}_0(\bar{z}) - \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{q}_0(\bar{z})], \quad (3.20)$$

για τη φάση  $II$ .

Οι μητρικές συναρτήσεις  $\mathbf{X}_I(z, \bar{z})$  και  $\mathbf{X}_H(z, \bar{z})$ , όταν είναι γνωστές, παράγουν τα ελαστικά τασικά πεδία των δύο φάσεων με τις σχέσεις

$$\boldsymbol{\sigma}_1 + \bar{\mathbf{P}}_I \boldsymbol{\sigma}_2 = -(\mathbf{P}_I - \bar{\mathbf{P}}_I) \frac{\partial \mathbf{X}_I}{\partial z}, \quad \boldsymbol{\sigma}_1 + \bar{\mathbf{P}}_H \boldsymbol{\sigma}_2 = -(\mathbf{P}_H - \bar{\mathbf{P}}_H) \frac{\partial \mathbf{X}_H}{\partial z}. \quad (3.21)$$

όπου

$$\mathbf{P}_I = \mathbf{B}_I \mathbf{p}_I \mathbf{B}_I^{-1}, \quad \mathbf{P}_H = \mathbf{B}_H \mathbf{p}_H \mathbf{B}_H^{-1}. \quad (3.22)$$

Αντικαθιστώντας στις σχέσεις αυτές τις (3.17) και (3.19), εξάγονται τα τασικά πεδία των δύο φάσεων του διυλικού σε όρους των διφασικών δυναμικών  $\mathbf{f}_0(z)$  και  $\mathbf{q}_0(z)$ , στη μορφή

$$\boldsymbol{\sigma}_I + \bar{\mathbf{P}}_I \boldsymbol{\sigma}_2 = -(\mathbf{P}_I - \bar{\mathbf{P}}_I) \mathbf{H}^{-1} [\mathbf{f}'_0(z) + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{q}'_0(z)], \quad (3.23)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_I + \bar{\mathbf{P}}_{II} \boldsymbol{\sigma}_2 = -(\mathbf{P}_{II} - \bar{\mathbf{P}}_{II}) \bar{\mathbf{H}}^{-1} [\mathbf{f}'_0(z) + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{q}'_0(z)]. \quad (3.24)$$

### 3.3.2 Ανισότροπο/ισότροπο διυλικό

Στην περίπτωση αυτή, η φάση  $I$  του διυλικού θεωρείται ότι είναι ισότροπη και η φάση  $II$  ανισότροπη. Τα ελαστικά πεδία της ισότροπης φάσης  $I$  περιγράφονται με τις μητρικές εξισώσεις (2.96) και (2.98), ενώ τα ελαστικά πεδία της ανισότροπης φάσης  $II$ , με τις μητρικές συναρτήσεις (2.42) και (2.43). Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις αυτές, οι διεπιφανειακές συνθήκες (3.2) παίρνουν τη μορφή

$$\mathbf{A}_I \mathbf{f}_I(x_1) + \bar{\mathbf{A}}_I \bar{\mathbf{f}}_I(x_1) - x_1 \bar{\mathbf{a}}_I \bar{\mathbf{f}}'_I(x_1) - x_1 \mathbf{a}_I \mathbf{f}'_I(x_1) = \mathbf{A}_{II} \mathbf{f}_{II}(x_1) + \bar{\mathbf{A}}_{II} \bar{\mathbf{f}}_{II}(x_1), \quad (3.25)$$

$$\mathbf{B}_I \mathbf{f}_I(x_1) + \bar{\mathbf{B}}_I \bar{\mathbf{f}}_I(x_1) + x_1 \bar{\mathbf{b}}_I \bar{\mathbf{f}}'_I(x_1) + x_1 \mathbf{b}_I \mathbf{f}'_I(x_1) = \mathbf{B}_{II} \mathbf{f}_{II}(x_1) + \bar{\mathbf{B}}_{II} \bar{\mathbf{f}}_{II}(x_1), \quad (3.26)$$

πάνω στη διεπιφάνεια. Εισάγοντας τη συνάρτηση  $\mathbf{f}_I^*(x_1)$  με τη σχέση

$$\mathbf{f}_I^*(x_1) = \mathbf{f}_I(x_1) - \mathbf{T} x_1 \mathbf{f}'_I(x_1), \quad (3.27)$$

όπου

$$\mathbf{T} = \mathbf{A}_I^{-1} \mathbf{a}_I = -\mathbf{B}_I^{-1} \mathbf{b}_I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.28)$$

οι σχέσεις (3.25), (3.26) γίνονται

$$\mathbf{A}_I \mathbf{f}_I^*(x_1) + \bar{\mathbf{A}}_I \bar{\mathbf{f}}_I^*(x_1) = \mathbf{A}_{II} \mathbf{f}_{II}(x_1) + \bar{\mathbf{A}}_{II} \bar{\mathbf{f}}_{II}(x_1), \text{ στη διεπιφάνεια,} \quad (3.29)$$

$$\mathbf{B}_I \mathbf{f}_I^*(x_1) + \bar{\mathbf{B}}_I \bar{\mathbf{f}}_I^*(x_1) = \mathbf{B}_{II} \mathbf{f}_{II}(x_1) + \bar{\mathbf{B}}_{II} \bar{\mathbf{f}}_{II}(x_1), \text{ στη διεπιφάνεια.} \quad (3.30)$$

Με την εισαγωγή της συνάρτησης  $\mathbf{f}_I^*(x_1)$ , οι (3.21) και (3.22) ανάγονται στην ίδια μορφή με τις (3.3) και (3.4), εάν η  $\mathbf{f}_I(x_1)$  αντικατασταθεί με την  $\mathbf{f}_I^*(x_1)$ . Συνεπώς, με την ίδια

διαδικασία που ακολουθήθηκε προηγούμενα, από τις (3.29) και (3.30) προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις των μιγαδικών δυναμικών

$$\mathbf{B}_I \mathbf{f}_I^*(z) = \mathbf{H}^{-1} [\mathbf{f}_0(z) + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{q}_0(z)], \quad (z \in I) \quad (3.31)$$

$$\overline{\mathbf{B}}_I \overline{\mathbf{f}}_I^*(\bar{z}) = \bar{\mathbf{H}}^{-1} [\mathbf{f}_0(\bar{z}) - \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{q}_0(\bar{z})], \quad (z \in I) \quad (3.32)$$

για τη φάση I, και

$$\mathbf{B}_{II} \mathbf{f}_{II}(z) = \bar{\mathbf{H}}^{-1} [\mathbf{f}_0(z) + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{q}_0(z)], \quad (z \in II) \quad (3.33)$$

$$\overline{\mathbf{B}}_{II} \overline{\mathbf{f}}_{II}(\bar{z}) = \mathbf{H}^{-1} [\mathbf{f}_0(\bar{z}) - \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{q}_0(\bar{z})], \quad (z \in II) \quad (3.34)$$

για τη φάση II. Στις σχέσεις (3.31) και (3.32), ο ορισμός της συνάρτησης  $\mathbf{f}_I^*(x_1)$ , που εισάγεται με την (3.19), έχει επεκταθεί σε όλο το επίπεδο  $z$ , με τη σχέση

$$\mathbf{f}_I^*(z) = \mathbf{f}_I(z) - \mathbf{T}_z \frac{d\mathbf{f}_I(z)}{dz}. \quad (3.35)$$

Είναι εύκολο να δειχθεί ότι, αν η  $\mathbf{f}_I^*(z)$  είναι γνωστή, τότε η  $\mathbf{f}_I(z)$  προσδιορίζεται από τη σχέση

$$\mathbf{f}_I(z) = \mathbf{f}_I^*(z) + \mathbf{T}_z \frac{d\mathbf{f}_I^*(z)}{dz}. \quad (3.36)$$

Όπως στην προηγούμενη περίπτωση, έτσι και εδώ, τα ελαστικά πεδία του ισότροπου/ανισότροπου δυλικού εκφράζονται με τις σχέσεις (3.31)-(3.34) σε όρους δύο ολόμορφων μητρωικών συναρτήσεων  $\mathbf{f}_0(z)$  και  $\mathbf{q}_0(z)$ . Οι συναρτήσεις αυτές αποτελούν τα διφασικά δυναμικά του δυλικού. Έτσι, με βάση τις σχέσεις (2.42) και (2.43), για το ανισότροπο υλικό, και τις (2.96) και (2.98), για το ισότροπο υλικό, οι τάσεις και οι μετατοπίσεις μπορούν να εκφραστούν σε όρους των διφασικών δυναμικών  $\mathbf{f}_0(z)$  και  $\mathbf{q}_0(z)$  με τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_I(z, \bar{z}) &= \mathbf{H}^{-1} [\mathbf{f}_0(z) + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{q}_0(z)] + \bar{\mathbf{H}}^{-1} [\mathbf{f}_0(\bar{z}) - \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{q}_0(\bar{z})] \\ &+ (\bar{z} - z) \left\{ \mathbf{C}_I \mathbf{H}^{-1} [\mathbf{f}'_0(z) + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{q}'_0(z)] - \bar{\mathbf{C}}_I \bar{\mathbf{H}}^{-1} [\mathbf{f}'_0(\bar{z}) - \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{q}'_0(\bar{z})] \right\}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} i\mathbf{u}_I(z, \bar{z}) &= [\mathbf{I} + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{M}_I]^{-1} [\mathbf{f}_0(z) + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{q}_0(z)] - [\mathbf{I} + \mathbf{M}_I^{-1} \bar{\mathbf{M}}_I]^{-1} [\mathbf{f}_0(\bar{z}) - \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{q}_0(\bar{z})] \\ &+ (z - \bar{z}) \left\{ \mathbf{D}_I \mathbf{H}^{-1} [\mathbf{f}'_0(z) + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{q}'_0(z)] + \bar{\mathbf{D}}_I \bar{\mathbf{H}}^{-1} [\mathbf{f}'_0(\bar{z}) - \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{q}'_0(\bar{z})] \right\}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

για τη φάση  $I$ , και

$$\mathbf{X}_I(z, \bar{z}) = \bar{\mathbf{H}}^{-1} [\mathbf{f}_0(z) + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{q}_0(z)] + \mathbf{H}^{-1} [\mathbf{f}_0(\bar{z}) - \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{q}_0(\bar{z})], \quad (3.39)$$

$$i\mathbf{u}_I(z, \bar{z}) = (\mathbf{I} + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{M}_I)^{-1} [\mathbf{f}_0(z) + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{q}_0(z)] - (\mathbf{I} + \mathbf{M}_I^{-1} \bar{\mathbf{M}}_I)^{-1} [\mathbf{f}_0(\bar{z}) - \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{q}_0(\bar{z})], \quad (3.40)$$

για τη φάση  $II$ . Στις σχέσεις αυτές έχουν εισαχθεί τα μητρώα

$$\mathbf{C}_I = \mathbf{b}_I \mathbf{B}_I^{-1}, \quad \mathbf{D}_I = i\mathbf{a}_I \mathbf{B}_I^{-1}. \quad (3.41)$$

Μεταξύ των μητρώων αυτών ισχύει η σχέση

$$\mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{C}_I = -\mathbf{D}_I. \quad (3.42)$$

Η σχέση αυτή εξάγεται εδώ, για να χρησιμοποιηθεί αργότερα.

### 3.3.3 Ισότροπο/ισότροπο διυλικό

Στην περίπτωση αυτή, οι φάσεις  $I$  και  $II$  του διυλικού είναι ισότροπες. Χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις (2.96) και (2.98) της ισότροπης ελαστικότητας, οι διεπιφανειακές συνθήκες (3.2) μπορούν να εκφραστούν σε όρους των μιγαδικών δυναμικών των δύο φάσεων με τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_I \mathbf{f}_I(x_1) + \bar{\mathbf{A}}_I \bar{\mathbf{f}}_I(x_1) - x_1 \bar{\mathbf{a}}_I \bar{\mathbf{f}}_I'(x_1) - x_1 \mathbf{a}_I \mathbf{f}_I'(x_1) = \\ \mathbf{A}_{II} \mathbf{f}_{II}(x_1) + \bar{\mathbf{A}}_{II} \bar{\mathbf{f}}_{II}(x_1) - x_1 \bar{\mathbf{a}}_{II} \bar{\mathbf{f}}_{II}'(x_1) - x_1 \mathbf{a}_{II} \mathbf{f}_{II}'(x_1), \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_I \mathbf{f}_I(x_1) + \bar{\mathbf{B}}_I \bar{\mathbf{f}}_I(x_1) + x_1 \bar{\mathbf{b}}_I \bar{\mathbf{f}}_I'(x_1) + x_1 \mathbf{b}_I \mathbf{f}_I'(x_1) = \\ \mathbf{B}_{II} \mathbf{f}_{II}(x_1) + \bar{\mathbf{B}}_{II} \bar{\mathbf{f}}_{II}(x_1) + x_1 \bar{\mathbf{b}}_{II} \bar{\mathbf{f}}_{II}'(x_1) + x_1 \mathbf{b}_{II} \mathbf{f}_{II}'(x_1). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Στη συνέχεια, ορίζονται οι συναρτήσεις  $\mathbf{f}_I^*$  και  $\mathbf{f}_{II}^*$  πάνω στη διεπιφάνεια, με τις σχέσεις

$$\mathbf{f}_I^*(x_1) = \mathbf{f}_I(x_1) - \mathbf{T} x_1 \mathbf{f}_I'(x_1), \quad (3.45)$$

$$\mathbf{f}_{II}^*(x_1) = \mathbf{f}_{II}(x_1) - \mathbf{T} x_1 \mathbf{f}_{II}'(x_1). \quad (3.46)$$

Με βάση τις σχέσεις αυτές, οι εξισώσεις (3.43) και (3.44) γίνονται

$$\mathbf{A}_I \mathbf{f}_I^*(x_1) + \bar{\mathbf{A}}_I \bar{\mathbf{f}}_I^*(x_1) = \mathbf{A}_{II} \mathbf{f}_{II}^*(x_1) + \bar{\mathbf{A}}_{II} \bar{\mathbf{f}}_{II}^*(x_1), \quad (3.47)$$

$$\mathbf{B}_I \mathbf{f}_I^*(x_1) + \bar{\mathbf{B}}_I \bar{\mathbf{f}}_I^*(x_1) = \mathbf{B}_{II} \mathbf{f}_{II}^*(x_1) + \bar{\mathbf{B}}_{II} \bar{\mathbf{f}}_{II}^*(x_1). \quad (3.48)$$

Οι σχέσεις αυτές, εκφράζουν τις διεπιφανειακές συνθήκες συνέχειας των μετατοπίσεων και τάσεων σε όρους των συναρτήσεων  $\mathbf{f}_I^*(x_1)$  και  $\mathbf{f}_{II}^*(x_1)$ . Οι σχέσεις αυτές ταυτίζονται στη μορφή με τις σχέσεις (3.5) και (3.6), αν οι συναρτήσεις  $\mathbf{f}_I^*(x_1)$  και  $\mathbf{f}_{II}^*(x_1)$  αντικατασταθούν με τις  $\mathbf{f}_I(x_1)$  και  $\mathbf{f}_{II}(x_1)$ , αντίστοιχα. Συνεπώς, οι συναρτήσεις αυτές μπορούν να θεωρηθούν ως τα “συνεπτυγμένα” δυναμικά των δύο φάσεων του διυλικού. Τα συνεπτυγμένα αυτά δυναμικά, με τη διαδικασία που ακολουθήθηκε προηγούμενα, μπορούν να εκφραστούν σε όρους των διφασικών δυναμικών  $\mathbf{f}_0(z)$  και  $\mathbf{q}_0(z)$  με τις σχέσεις

$$\mathbf{B}_I \mathbf{f}_I^*(z) = \mathbf{H}^{-1} [\mathbf{f}_0(z) + \bar{\mathbf{M}}_{II}^{-1} \mathbf{q}_0(z)], \quad (3.49)$$

$$\overline{\mathbf{B}_I \mathbf{f}_I^*(\bar{z})} = \bar{\mathbf{H}}^{-1} [\mathbf{f}_0(\bar{z}) - \mathbf{M}_{II}^{-1} \mathbf{q}_0(\bar{z})], \quad (z \in I) \quad (3.50)$$

για τη φάση I, και

$$\mathbf{B}_{II} \mathbf{f}_{II}^*(z) = \bar{\mathbf{H}}^{-1} [\mathbf{f}_0(z) + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{q}_0(z)], \quad (3.51)$$

$$\overline{\mathbf{B}_{II} \mathbf{f}_{II}^*(\bar{z})} = \mathbf{H}^{-1} [\mathbf{f}_0(\bar{z}) - \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{q}_0(\bar{z})], \quad (z \in II) \quad (3.52)$$

για τη φάση II. Κατά τη διαδικασία ανάπτυξης των παραπάνω σχέσεων, ο ορισμός των συναρτήσεων  $\mathbf{f}_I^*$  και  $\mathbf{f}_{II}^*$ , επεκτάθηκε σε όλο το επίπεδο  $z$  με τις σχέσεις

$$\mathbf{B}_I \mathbf{f}_I^*(z) = \mathbf{B}_I \mathbf{f}_I(z) + \mathbf{b}_I z \mathbf{f}'_I(z), \quad (3.53)$$

$$\mathbf{B}_{II} \mathbf{f}_{II}^*(z) = \mathbf{B}_{II} \mathbf{f}_{II}(z) + \mathbf{b}_{II} z \mathbf{f}'_{II}(z). \quad (3.54)$$

Είναι εύκολο να δειχθεί ότι, σε ένα πρόβλημα που έχουν προσδιορισθεί τα συνεπτυγμένα μιγαδικά δυναμικά  $\mathbf{f}_I^*$  και  $\mathbf{f}_{II}^*$ , τα μιγαδικά δυναμικά των δύο φάσεων προσδιορίζονται από τις σχέσεις

$$\mathbf{f}_I(z) = \mathbf{f}_I^*(z) + \mathbf{T} z \frac{d\mathbf{f}_I^*(z)}{dz}, \quad (3.55)$$

$$\mathbf{f}_{II}(z) = \mathbf{f}_{II}^*(z) + \mathbf{T} z \frac{d\mathbf{f}_{II}^*(z)}{dz}. \quad (3.56)$$

Στη συνέχεια, οι δύο βασικές μεταβλητές πεδίου, που παρέχουν τις τάσεις και τις μετατοπίσεις σε κάθε σημείο του διυλικού και ορίζονται με τις σχέσεις (2.98) και (2.96), θα εκφραστούν για τις δύο φάσεις του διυλικού σε όρους των διφασικών δυναμικών

$\mathbf{f}_0(z)$  και  $\mathbf{q}_0(z)$ . Με βάση τις σχέσεις (2.98), (2.96) και (3.49)-(3.52), και λαμβάνοντας υπόψη τις (3.55) και (3.56), προκύπτουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_I(z, \bar{z}) &= \mathbf{H}^{-1} \left[ \mathbf{f}_0(z) + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{q}_0(z) \right] + \bar{\mathbf{H}}^{-1} \left[ \mathbf{f}_0(\bar{z}) - \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{q}_0(\bar{z}) \right] \\ &+ (\bar{z} - z) \left\{ \mathbf{C}_I \mathbf{H}^{-1} \left[ \mathbf{f}'_0(z) + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{q}'_0(z) \right] - \bar{\mathbf{C}}_I \bar{\mathbf{H}}^{-1} \left[ \mathbf{f}'_0(\bar{z}) - \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{q}'_0(\bar{z}) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} i\mathbf{u}_I(z, \bar{z}) &= [\mathbf{I} + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{M}_I]^{-1} \left[ \mathbf{f}_0(z) + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{q}_0(z) \right] - [\mathbf{I} + \mathbf{M}_I^{-1} \bar{\mathbf{M}}_I]^{-1} \left[ \mathbf{f}_0(\bar{z}) - \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{q}_0(\bar{z}) \right] \\ &+ (z - \bar{z}) \left\{ \mathbf{D}_I \mathbf{H}^{-1} \left[ \mathbf{f}'_0(z) + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{q}'_0(z) \right] + \bar{\mathbf{D}}_I \bar{\mathbf{H}}^{-1} \left[ \mathbf{f}'_0(\bar{z}) - \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{q}'_0(\bar{z}) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.58)$$

για τη φάση  $I$ , και

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_H(z, \bar{z}) &= \bar{\mathbf{H}}^{-1} \left[ \mathbf{f}_0(z) + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{q}_0(z) \right] + \mathbf{H}^{-1} \left[ \mathbf{f}_0(\bar{z}) - \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{q}_0(\bar{z}) \right] \\ &+ (\bar{z} - z) \left\{ \mathbf{C}_H \bar{\mathbf{H}}^{-1} \left[ \mathbf{f}'_0(z) + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{q}'_0(z) \right] - \bar{\mathbf{C}}_H \mathbf{H}^{-1} \left[ \mathbf{f}'_0(\bar{z}) - \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{q}'_0(\bar{z}) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} i\mathbf{u}_H(z, \bar{z}) &= [\mathbf{I} + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{M}_H]^{-1} \left[ \mathbf{f}_0(z) + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{q}_0(z) \right] - [\mathbf{I} + \mathbf{M}_I^{-1} \bar{\mathbf{M}}_H]^{-1} \left[ \mathbf{f}_0(\bar{z}) - \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{q}_0(\bar{z}) \right] \\ &+ (z - \bar{z}) \left\{ \mathbf{D}_H \bar{\mathbf{H}}^{-1} \left[ \mathbf{f}'_0(z) + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{q}'_0(z) \right] + \bar{\mathbf{D}}_H \mathbf{H}^{-1} \left[ \mathbf{f}'_0(\bar{z}) - \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{q}'_0(\bar{z}) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.60)$$

για τη φάση  $II$ . Στις σχέσεις αυτές έχουν εισαχθεί τα μητρώα  $\mathbf{C}_H$  και  $\mathbf{D}_H$ , που είναι τα αντίστοιχα των μητρώων  $\mathbf{C}_I$  και  $\mathbf{D}_I$ , που ορίζονται με τις σχέσεις

$$\mathbf{C}_H = \mathbf{b}_H \mathbf{B}_H^{-1}, \quad \mathbf{D}_H = i\mathbf{a}_H \mathbf{B}_H^{-1}. \quad (3.61)$$

Εύκολα δείχνεται ότι τα μητρώα αυτά συνδέονται με τη σχέση

$$\mathbf{M}_H^{-1} \mathbf{C}_H = -\mathbf{D}_H. \quad (3.62)$$



## Κεφάλαιο 4

# ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΙΔΙΟΜΟΡΦΙΩΝ ΜΕ ΜΗ ΡΗΓΜΑΤΩΜΕΝΕΣ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ

### 4.1 ΓΕΝΙΚΑ

Στο κεφάλαιο αυτό, η γενικευμένη μέθοδος των διφασικών δυναμικών, που αναπτύχθηκε προηγουμένα, θα εφαρμοσθεί για τον προσδιορισμό των ελαστικών πεδίων, που αναπτύσσονται σε ένα διυλικό με επίπεδη διεπιφάνεια, όταν σε αυτό επενεργεί μια ιδιομορφία. Το υλικό θα προσομοιωθεί με το μικρομηχανικό μοντέλο των δύο ανόμοιων ελαστικών μέσων, που συνδέονται μεταξύ τους με μια επίπεδη και μη ρηγματωμένη διεπιφάνεια. Οι λύσεις που θα παραχθούν αποτελούν τις συναρτήσεις Green της ιδιομορφίας, και μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε πολλά πεδία της υπολογιστικής μηχανικής, όπως, για παράδειγμα, στη μηχανική των θραύσεων και στη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων (Bilby and Eshelby, 1968; Rice, 1968; Hayashi and Nemat-Nasser, 1981a,b). Η λύση της γραμμικής εξάρμωσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανάπτυξη της λύσης μιας πεπερασμένης ρωγμής, που βρίσκεται σε ένα από τα δύο μέσα. Η ανάπτυξη της λύσης γίνεται με μία τεχνική, που είναι γνωστή στη βιβλιογραφία ως συνεχής διανομή εξαρμώσεων (Budiansky et al., 1983; Hutchinson, 1974). Επίσης, η λύση της γραμμικής δύναμης, μπορεί να εφαρμοσθεί στη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων, για την ανάπτυξη λύσεων διυλικών με πεπερασμένα σύνορα.

Όπως έχει προαναφερθεί, στις σημειακές ιδιομορφίες συμπεριλαμβάνεται και η φόρτιση με ομοιόμορφες τάσεις στο άπειρο σύνορο του συστήματος των δύο ελαστικών μέσων. Αυτό γίνεται, επειδή από μαθηματική σκοπιά, το άπειρο σύνορο μπορεί να θεωρηθεί ως σημείο, που είναι το αντίστροφο του μηδενός. Η επίλυση του ελαστικού προβλήματος του διφασικού ελαστικού συστήματος για ομοιόμορφες τάσεις στο άπειρο, αποτελεί τη

βάση ανάπτυξης λύσεων προβλημάτων ρωγμών, που ενδιαφέρουν τη μηχανική των σύνθετων υλικών. Όταν σε ένα τέτοιο διαφασικό σύστημα πρόκειται να εφαρμοσθούν ομοιόμορφες τάσεις στα άπειρα σύνορα των δύο φάσεων, θα πρέπει να διερευνηθεί η σχέση που πρέπει να υπάρχει μεταξύ των ομοιόμορφων τάσεων που θα εφαρμοσθούν στην κάθε φάση, ώστε να εξασφαλίζεται η ισορροπία του συστήματος και ταυτόχρονα η συμβιβαστότητα των παραμορφώσεων. Η διερεύνηση αυτή γίνεται στη συνέχεια για όλους τους δυνατούς συνδυασμούς ανισοτροπίας των δύο φάσεων, εφαρμόζοντας την ενοποιημένη μέθοδο των διαφασικών δυναμικών που αναπτύχθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

## 4.2 ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΤΑΣΗ

Όταν στο άπειρο σύνορο της μιας φάσης του διυλικού, εφαρμόζεται μια διανομή ομοιόμορφων τάσεων, η συμβιβαστότητα των παραμορφώσεων κατά μήκος της διεπιφάνειας και η ισορροπία του συστήματος απαιτούν να επιβληθεί μια συγκεκριμένη διανομή ομοιόμορφων τάσεων στο άπειρο σύνορο της άλλης φάσης. Στην ανάλυση που γίνεται παρακάτω, θεωρείται μια δεδομένη τασική κατάσταση ομοιόμορφων τάσεων στο άπειρο σύνορο της φάσης  $I$ , και στη συνέχεια, προσδιορίζεται η απαιτούμενη διανομή ομοιόμορφων τάσεων στο άπειρο σύνορο της φάσης  $II$ , για όλους τους συνδυασμούς ανισοτροπίας των δύο φάσεων του διυλικού.

Στο άπειρο σύνορο της φάσης  $I$  του διυλικού, που καταλαμβάνει τον ημιχώρο  $x_2 > 0$ , εφαρμόζεται μια διανομή ομοιόμορφων τάσεων, που περιγράφεται με τα παρακάτω μητρώα

$$\boldsymbol{\sigma}_1^\infty = [\sigma_{11}^\infty, \sigma_{21}^\infty, \sigma_{31}^\infty]^T, \quad \boldsymbol{\sigma}_2^\infty = [\sigma_{12}^\infty, \sigma_{22}^\infty, \sigma_{32}^\infty]^T. \quad (4.1)$$

Στη συνέχεια, θα προσδιοριστεί η φόρτιση που απαιτείται να επιβληθεί στο άπειρο σύνορο της φάσης  $II$ , προκειμένου το σύστημα, αφενός να βρίσκεται σε ισορροπία, και αφετέρου, να διατηρείται η συνέχεια των διεπιφανειακών τάσεων και μετατοπίσεων. Για το σκοπό αυτό, θα υποτεθεί ότι οι τάσεις, που πρέπει να επιβληθούν στη φάση  $II$ , είναι ομοιόμορφες και ότι περιγράφονται με τα μητρώα

$$\boldsymbol{\sigma}_1^{*\infty} = [\sigma_{11}^{*\infty}, \sigma_{21}^{*\infty}, \sigma_{31}^{*\infty}]^T, \quad \boldsymbol{\sigma}_2^{*\infty} = [\sigma_{12}^{*\infty}, \sigma_{22}^{*\infty}, \sigma_{32}^{*\infty}]^T. \quad (4.2)$$

Για τις τρεις περιπτώσεις ανισοτροπίας, που προαναφέρθηκαν, οι τάσεις (4.2) που πρέπει να εφαρμοσθούν στη φάση  $II$ , θα εκφραστούν σε όρους των τάσεων που επενεργούν στη φάση  $I$ , χρησιμοποιώντας τις γενικευμένες σχέσεις των διφασικών δυναμικών, που αναπτύχθηκαν στην ενότητα 3.3.

#### 4.2.1 Ανισότροπο/ανισότροπο διυλικό

Για την ομοιόμορφη φόρτιση, που εφαρμόζεται στο άπειρο σύνορο της φάσης  $I$  του υλικού, θα αναζητηθεί το μιγαδικό δυναμικό  $\mathbf{f}_I(\mathbf{z})$  στη μορφή

$$\mathbf{f}_I(\mathbf{z}) = \mathbf{q}_I z, \quad (4.3)$$

όπου το  $\mathbf{q}_I$  είναι ένα άγνωστο σταθερό μητρώο στήλη που θα προσδιορισθεί. Για το μιγαδικό δυναμικό  $\mathbf{f}_I(\mathbf{z})$ , η δύναμη  $\mathbf{X}_I(z, \bar{z})$  της φάσης  $I$  του διυλικού, που παρέχεται από τη σχέση (2.43), γίνεται

$$\mathbf{X}_I(z, \bar{z}) = \mathbf{B}_I \mathbf{q}_I z + \bar{\mathbf{B}}_I \bar{\mathbf{q}}_I \bar{z}. \quad (4.4)$$

Επομένως, οι τάσεις που αναπτύσσονται στη φάση  $I$  του διυλικού, θα βρεθούν από τη σχέση (3.21)<sub>1</sub>. Αντικαθιστώντας την (4.3) στην (3.21)<sub>1</sub>, προκύπτει

$$\boldsymbol{\sigma}_1 + \bar{\mathbf{P}}_I \boldsymbol{\sigma}_2 = -(\mathbf{P}_I - \bar{\mathbf{P}}_I) \mathbf{B}_I \mathbf{q}_I. \quad (4.5)$$

Επειδή στη φάση  $I$  ισχύει

$$\boldsymbol{\sigma}_1 + \bar{\mathbf{P}}_I \boldsymbol{\sigma}_2 = \boldsymbol{\sigma}_1^\infty + \bar{\mathbf{P}}_I \boldsymbol{\sigma}_2^\infty, \quad (4.6)$$

από την (4.5), προκύπτει

$$\mathbf{q}_I = -\mathbf{B}_I^{-1} (\mathbf{P}_I - \bar{\mathbf{P}}_I)^{-1} (\boldsymbol{\sigma}_1^\infty + \bar{\mathbf{P}}_I \boldsymbol{\sigma}_2^\infty). \quad (4.7)$$

Έτσι, το μιγαδικό δυναμικό της φάσης  $I$  παρέχεται με τη σχέση

$$\mathbf{f}_I(\mathbf{z}) = -\mathbf{B}_I^{-1} (\mathbf{P}_I - \bar{\mathbf{P}}_I)^{-1} (\boldsymbol{\sigma}_1^\infty + \bar{\mathbf{P}}_I \boldsymbol{\sigma}_2^\infty) z. \quad (4.8)$$

Στη συνέχεια, υποθέτοντας ότι οι τάσεις της φάσης  $II$  παρέχονται από τις σχέσεις (4.2), ακολουθώντας μια ανάλογη διαδικασία προσδιορίζεται το μιγαδικό δυναμικό της φάσης  $II$  στη μορφή

$$\mathbf{f}_{II}(\mathbf{z}) = -\mathbf{B}_{II}^{-1} (\mathbf{P}_{II} - \bar{\mathbf{P}}_{II})^{-1} (\boldsymbol{\sigma}_1^{*\infty} + \bar{\mathbf{P}}_{II} \boldsymbol{\sigma}_2^{*\infty}) z. \quad (4.9)$$

Ο προσδιορισμός της απαιτούμενης σχέσης μεταξύ των τάσεων, που εφαρμόζονται στο άπειρο σύνορο των δύο φάσεων του διυλικού, θα γίνει με βάση τη μέθοδο των διαφοσικών δυναμικών, που αναπτύχθηκε στο κεφάλαιο 3. Γνωρίζοντας τα μιγαδικά δυναμικά  $\mathbf{f}_l(z)$  και  $\mathbf{f}_r(z)$  των δύο φάσεων, που παρέχονται με τις σχέσεις (4.8) και (4.9), θα προσδιορισθούν τα διαφοσικά δυναμικά  $\mathbf{f}_0(z)$  και  $\mathbf{q}_0(z)$ , που παράγουν τα μιγαδικά δυναμικά. Θα υποθεθεί ότι τα ζητούμενα διαφοσικά δυναμικά έχουν τη μορφή

$$\mathbf{f}_0(z) = \hat{\mathbf{f}}_0 z, \quad \mathbf{q}_0(z) = \hat{\mathbf{q}}_0 z, \quad (4.10)$$

όπου τα  $\hat{\mathbf{f}}_0$  και  $\hat{\mathbf{q}}_0$  είναι μητρώα που θα προσδιορισθούν. Από την παραγωγή των (3.11) και (3.12), προκύπτει

$$\mathbf{B}_l \mathbf{f}'_l(z) = \mathbf{H}^{-1} \left[ \mathbf{f}'_0(z) + \bar{\mathbf{M}}_r^{-1} \mathbf{q}'_0(z) \right], \quad (4.11)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_l \overline{\mathbf{f}'_l(z)} = \bar{\mathbf{H}}^{-1} \left[ \mathbf{f}'_0(\bar{z}) - \mathbf{M}_r^{-1} \mathbf{q}'_0(\bar{z}) \right]. \quad (4.12)$$

Αντικαθιστώντας στις σχέσεις αυτές τις (4.8) και (4.9), για τον προσδιορισμό των αγνώστων μητρώων  $\hat{\mathbf{f}}_0$  και  $\hat{\mathbf{q}}_0$ , προκύπτει το παρακάτω μητρικό σύστημα εξισώσεων

$$\mathbf{H}^{-1} \left[ \hat{\mathbf{f}}_0 + \bar{\mathbf{M}}_r^{-1} \hat{\mathbf{q}}_0 \right] = -(\mathbf{P}_l - \bar{\mathbf{P}}_l)^{-1} \boldsymbol{\sigma}^\infty, \quad (4.13)$$

$$\bar{\mathbf{H}}^{-1} \left[ \hat{\mathbf{f}}_0 + \mathbf{M}_r^{-1} \hat{\mathbf{q}}_0 \right] = -(\bar{\mathbf{P}}_l - \mathbf{P}_l)^{-1} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^\infty, \quad (4.14)$$

όπου έχει τεθεί

$$\boldsymbol{\sigma}^\infty = \boldsymbol{\sigma}_1^\infty + \bar{\mathbf{P}}_l \boldsymbol{\sigma}_2^\infty. \quad (4.15)$$

Από την επίλυση του μητρικού συστήματος προκύπτουν τα μητρώα  $\hat{\mathbf{f}}_0$  και  $\hat{\mathbf{q}}_0$ , που υπεισέρχονται ως άγνωστες ποσότητες στις εξισώσεις (4.13) και (4.14). Βρίσκεται ότι

$$\hat{\mathbf{f}}_0 = \mathbf{M}_r^{-1} \mathbf{J}_r \boldsymbol{\sigma}^\infty + \bar{\mathbf{M}}_r^{-1} \bar{\mathbf{J}}_r \bar{\boldsymbol{\sigma}}^\infty, \quad (4.16)$$

$$\hat{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{J}_r \boldsymbol{\sigma}^\infty - \bar{\mathbf{J}}_r \bar{\boldsymbol{\sigma}}^\infty, \quad (4.17)$$

όπου

$$\mathbf{J}_r = (\mathbf{M}_r^{-1} + \bar{\mathbf{M}}_r^{-1})^{-1} \mathbf{H} (\mathbf{P}_l - \bar{\mathbf{P}}_l)^{-1}. \quad (4.18)$$

Η διαδικασία που εφαρμόστηκε παραπάνω στη φάση  $I$  του διυλικού, για τον προσδιορισμό των  $\hat{\mathbf{f}}_0$  και  $\hat{\mathbf{q}}_0$ , θα επαναληφθεί και για τη φάση  $II$ . Έτσι, από την παραγωγή των (3.13) και (3.14), προκύπτει

$$\mathbf{B}_H \mathbf{f}'_H(z) = \bar{\mathbf{H}}^{-1} \left[ \mathbf{f}'_0(z) + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{q}'_0(z) \right], \quad (4.19)$$

$$\overline{\mathbf{B}}_H \overline{\mathbf{f}}'_H(\bar{z}) = \mathbf{H}^{-1} \left[ \mathbf{f}'_0(\bar{z}) - \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{q}'_0(\bar{z}) \right]. \quad (4.20)$$

Αντικαθιστώντας στις σχέσεις αυτές τις (4.9) και (4.10), προκύπτει το μητρικό σύστημα

$$\bar{\mathbf{H}}^{-1} \left[ \hat{\mathbf{f}}_0 + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \hat{\mathbf{q}}_0 \right] = -(\mathbf{P}_H - \bar{\mathbf{P}}_H)^{-1} \boldsymbol{\sigma}^{*\infty}, \quad (4.21)$$

$$\mathbf{H}^{-1} \left[ \hat{\mathbf{f}}_0 + \mathbf{M}_I^{-1} \hat{\mathbf{q}}_0 \right] = -(\bar{\mathbf{P}}_H - \mathbf{P}_H)^{-1} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{*\infty}. \quad (4.22)$$

όπου έχει τεθεί

$$\boldsymbol{\sigma}^{*\infty} = \boldsymbol{\sigma}_1^{*\infty} + \bar{\mathbf{P}}_H \boldsymbol{\sigma}_2^{*\infty}. \quad (4.23)$$

Η λύση του μητρικού αυτού συστήματος παρέχει

$$\hat{\mathbf{f}}_0 = \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{J}_I \boldsymbol{\sigma}^{*\infty} + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \bar{\mathbf{J}}_I \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{*\infty}, \quad (4.24)$$

$$\hat{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{J}_I \boldsymbol{\sigma}^{*\infty} - \bar{\mathbf{J}}_I \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{*\infty}, \quad (4.25)$$

όπου

$$\mathbf{J}_I = -(\mathbf{M}_I^{-1} + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1})^{-1} \bar{\mathbf{H}} (\mathbf{P}_H - \bar{\mathbf{P}}_H)^{-1}. \quad (4.26)$$

Τα μητρώα  $\hat{\mathbf{f}}_0$ ,  $\hat{\mathbf{q}}_0$ , που εξάγονται για τις δύο φάσεις του διυλικού και παρέχονται από τις σχέσεις (4.16) και (4.24), καθώς και από τις (4.17) και (4.25), αντίστοιχα, θα πρέπει να ταυτίζονται. Έτσι από τη σύγκριση των (4.16) και (4.24) για το  $\hat{\mathbf{f}}_0$ , καθώς και των (4.17) και (4.25) για το  $\hat{\mathbf{q}}_0$ , προκύπτουν οι σχέσεις

$$\mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{J}_I \boldsymbol{\sigma}^{*\infty} + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \bar{\mathbf{J}}_I \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{*\infty} = \mathbf{M}_H^{-1} \mathbf{J}_H \boldsymbol{\sigma}^\infty + \bar{\mathbf{M}}_H^{-1} \bar{\mathbf{J}}_H \bar{\boldsymbol{\sigma}}^\infty, \quad (4.27)$$

$$\mathbf{J}_I \boldsymbol{\sigma}^{*\infty} - \bar{\mathbf{J}}_I \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{*\infty} = \mathbf{J}_H \boldsymbol{\sigma}^\infty - \bar{\mathbf{J}}_H \bar{\boldsymbol{\sigma}}^\infty. \quad (4.28)$$

Οι σχέσεις αυτές, μετά από εκτενή άλγεβρα, ανάγονται στην παρακάτω ισοδύναμη μορφή

$$\boldsymbol{\sigma}_2^{*\infty} = \boldsymbol{\sigma}_2^\infty, \quad (4.29)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_1^{*\infty} = \mathbf{S}_1 \boldsymbol{\sigma}_1^\infty + \mathbf{S}_2 \boldsymbol{\sigma}_2^\infty, \quad (4.30)$$

όπου έχει τεθεί

$$\mathbf{S}_1 = (\mathbf{P}_I - \bar{\mathbf{P}}_I) [\mathbf{J}_I - \bar{\mathbf{J}}_I - (\mathbf{P}_I - \bar{\mathbf{P}}_I)^{-1}], \quad (4.31)$$

$$\mathbf{S}_2 = (\mathbf{P}_I - \bar{\mathbf{P}}_I) (\mathbf{J}_I \bar{\mathbf{P}}_I - \bar{\mathbf{J}}_I \mathbf{P}_I) - (\mathbf{P}_I - \bar{\mathbf{P}}_I) (\mathbf{P}_I - \bar{\mathbf{P}}_I)^{-1} \bar{\mathbf{P}}_I - \mathbf{P}_I. \quad (4.32)$$

Οι σχέσεις (4.29) και (4.30) περιγράφουν τις συνθήκες που πρέπει να ισχύουν μεταξύ των ομοιόμορφων τάσεων που εφαρμόζονται στις δύο φάσεις του διυλικού. Η πρώτη σχέση περιγράφει την ισορροπία του διυλικού κατά τη διεύθυνση του άξονα  $x_2$ , ενώ η δεύτερη συνθήκη εξασφαλίζει τη συμβατότητα των αναπτυσσόμενων παραμορφώσεων κατά μήκος της διεπιφάνειας.

#### 4.2.2 Ισότροπο/ισότροπο διυλικό

Για τις ομοιόμορφες τάσεις  $\boldsymbol{\sigma}_1^\infty$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_2^\infty$ , που εφαρμόζονται στο άπειρο σύνορο της φάσης  $I$  του διυλικού, θα αναζητηθεί το μιγαδικό δυναμικό  $\mathbf{f}_I(\mathbf{z})$  στη μορφή

$$\mathbf{f}_I(\mathbf{z}) = \mathbf{q}_I z. \quad (4.33)$$

όπου  $\mathbf{q}_I$  είναι ένα σταθερό μητρώο στήλη που θα προσδιορισθεί. Για το μιγαδικό δυναμικό  $\mathbf{f}_I(\mathbf{z})$ , η δύναμη  $\mathbf{X}_I(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$  της φάσης  $I$  του διυλικού, που παρέχεται από τη σχέση (2.98), γίνεται

$$\mathbf{X}_I(z, \bar{z}) = \mathbf{B}_I \mathbf{q}_I z + \bar{\mathbf{B}}_I \bar{\mathbf{q}}_I \bar{z} + \bar{z} \mathbf{b} \mathbf{q}_I + z \bar{\mathbf{b}} \bar{z}. \quad (4.34)$$

Από τη σχέση αυτή, χρησιμοποιώντας την εξίσωση

$$\boldsymbol{\sigma}_1 + i \boldsymbol{\sigma}_2 = -2i \frac{\partial \mathbf{X}_I}{\partial \bar{z}}, \quad (4.35)$$

προκύπτουν οι τάσεις  $\boldsymbol{\sigma}_1$  και  $\boldsymbol{\sigma}_2$  σε κάθε σημείο της φάσης  $I$  στη μορφή

$$\boldsymbol{\sigma}_1 + i \boldsymbol{\sigma}_2 = -2i (\bar{\mathbf{B}}_I \bar{\mathbf{q}}_I + \mathbf{b} \mathbf{q}_I). \quad (4.36)$$

Η σχέση αυτή δείχνει ότι οι τάσεις είναι σταθερές στη φάση  $I$ , και επομένως σε κάθε σημείο της ισχύει

$$\boldsymbol{\sigma}_1 + i\boldsymbol{\sigma}_2 = \boldsymbol{\sigma}_1^\infty + i\boldsymbol{\sigma}_2^\infty. \quad (4.37)$$

Από τις σχέσεις (4.36) και (4.37) προκύπτει

$$\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{q}}_I + \mathbf{b}\mathbf{q}_I = \frac{i}{2}(\boldsymbol{\sigma}_1^\infty + i\boldsymbol{\sigma}_2^\infty), \quad (4.38)$$

Έχει υποτεθεί ότι τα στοιχεία  $q_i$  του μητρώου  $\mathbf{q}_I$  είναι μιγαδικοί αριθμοί, κι έχουν τη μορφή  $q_k = a_k + ib_k$ . Αντικαθιστώντας τα στοιχεία αυτά στην (4.38) και επιλύοντας το μιγαδικό σύστημα που προκύπτει, βρίσκεται

$$\mathbf{q}_I = \boldsymbol{\Sigma}^\infty, \quad (4.39)$$

και επομένως

$$\mathbf{f}_I(z) = \boldsymbol{\Sigma}^\infty z, \quad (4.40)$$

όπου

$$\boldsymbol{\Sigma}^\infty = \boldsymbol{\Sigma}_1^\infty + i\boldsymbol{\Sigma}_2^\infty, \quad (4.41)$$

με

$$\boldsymbol{\Sigma}_1^\infty = \left[ \frac{\sigma_{11}^\infty + \sigma_{22}^\infty}{4}, \frac{\sigma_{22}^\infty - \sigma_{11}^\infty}{2}, -\sigma_{31}^\infty \right]^T, \quad (4.42)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_2^\infty = \left[ c, \sigma_{12}^\infty, \sigma_{32}^\infty \right]^T, \quad (4.43\alpha)$$

όπου  $c$  είναι μια πραγματική σταθερά. Αν η στροφή στο άπειρο σύνορο της φάσης  $I$  είναι ίση με  $\omega_{12}^\infty$ , τότε η σταθερά αυτή παίρνει την τιμή  $-2\mu_I\omega_{12}^\infty/1+\kappa_I$ . Έτσι, η (4.43α) γράφεται

$$\boldsymbol{\Sigma}_2^\infty = \left[ -\frac{2\mu_I\omega_{12}^\infty}{1+\kappa_I}, \sigma_{12}^\infty, \sigma_{32}^\infty \right]^T, \quad (4.43\beta)$$

Στη συνέχεια, θα αναζητηθεί το μιγαδικό δυναμικό της φάσης  $II$  στη μορφή

$$\mathbf{f}_{II}(\mathbf{z}) = \mathbf{q}_{II}z, \quad (4.44)$$

όπου το  $\mathbf{q}_{II}$  είναι ένα σταθερό μητρώο στήλη. Ακολουθώντας μια ανάλογη διαδικασία, η συνάρτηση αυτή προσδιορίζεται στη μορφή

$$\mathbf{f}_H(z) = \mathbf{\Sigma}^{*\infty} z, \quad (4.45)$$

όπου

$$\mathbf{\Sigma}^{*\infty} = \mathbf{\Sigma}_1^{*\infty} + i\mathbf{\Sigma}_2^{*\infty}, \quad (4.46)$$

με

$$\mathbf{\Sigma}_1^{*\infty} = \left[ \frac{\sigma_{11}^{*\infty} + \sigma_{22}^{*\infty}}{4}, \frac{\sigma_{22}^{*\infty} - \sigma_{11}^{*\infty}}{2}, -\sigma_{13}^{*\infty} \right]^T, \quad (4.47)$$

$$\mathbf{\Sigma}_2^{*\infty} = \left[ -\frac{2\mu_H \omega_{12}^{*\infty}}{1 + \kappa_H}, \sigma_{12}^{*\infty}, \sigma_{32}^{*\infty} \right]^T. \quad (4.48)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις συμπεραίνεται, ότι εκτός από τα τασικά πεδία, τα οποία περιγράφονται με τις (4.1) και (4.2), θα πρέπει να οριστούν και οι στροφές  $\omega_{12}^{\infty}$  και  $\omega_{12}^{*\infty}$  στα άπειρα σύνορα των φάσεων  $I$  και  $II$ , αντίστοιχα, του διυλικού.

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις, τα συνεπτυγμένα δυναμικά των δύο φάσεων  $\mathbf{f}_I^*(z)$  και  $\mathbf{f}_{II}^*(z)$ , που ορίζονται με τις σχέσεις (3.53) και (3.54), γράφονται

$$\mathbf{B}_I \mathbf{f}_I^*(z) = \mathbf{D} \mathbf{\Sigma}^{\infty} z, \quad \mathbf{B}_{II} \mathbf{f}_{II}^*(z) = \mathbf{D} \mathbf{\Sigma}^{*\infty} z, \quad (4.49)$$

όπου

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & i/2 & 0 \\ -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & i/2 \end{bmatrix}. \quad (4.50)$$

Οι σχέσεις αυτές δείχνουν ότι τα συνεπτυγμένα δυναμικά είναι σταθερά παντού στις δύο φάσεις του διυλικού. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τις γενικές σχέσεις (3.49)-(3.52), και με δεδομένα τα συνεπτυγμένα δυναμικά  $\mathbf{f}_I^*(z)$  και  $\mathbf{f}_{II}^*(z)$ , θα προσδιορισθούν τα διαφορικά δυναμικά  $\mathbf{f}_0(\mathbf{z})$  και  $\mathbf{q}_0(\mathbf{z})$  του διαφορικού συστήματος. Υποθέτοντας ότι  $\mathbf{f}_0(z) = \hat{\mathbf{f}}_0 z$  και  $\mathbf{q}_0(z) = \hat{\mathbf{q}}_0 z$ , από τις (3.49) και (3.50) προκύπτει το σύστημα των μητρικών εξισώσεων

$$\hat{\mathbf{f}}_0 + \bar{\mathbf{M}}_H^{-1} \hat{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{H} \mathbf{D} \mathbf{\Sigma}^{\infty}, \quad (4.51)$$

$$\hat{\mathbf{f}}_0 - \mathbf{M}_H^{-1} \hat{\mathbf{q}}_0 = \overline{\mathbf{H} \mathbf{D} \mathbf{\Sigma}^{\infty}}, \quad (4.52)$$



με άγνωστα τα μητρώα  $\hat{\mathbf{f}}_0$  και  $\hat{\mathbf{q}}_0$ . Επιλύοντας το σύστημα αυτό προκύπτουν οι σχέσεις

$$\hat{\mathbf{f}}_0 = \mathbf{M}_H^{-1} \mathbf{G}_H \Sigma^\infty + \bar{\mathbf{M}}_H^{-1} \bar{\mathbf{G}}_H \bar{\Sigma}^\infty, \quad (4.53)$$

$$\hat{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{G}_H \Sigma^\infty - \bar{\mathbf{G}}_H \bar{\Sigma}^\infty, \quad (4.54)$$

όπου έχει τεθεί

$$\mathbf{G}_H = (\mathbf{M}_H^{-1} + \bar{\mathbf{M}}_H^{-1})^{-1} \bar{\mathbf{H}} \mathbf{D}. \quad (4.55)$$

Χρησιμοποιώντας το συνεπτυγμένο δυναμικό  $\mathbf{f}_H^*(z)$  και υποθέτοντας, ξανά, ότι τα μιγαδικά δυναμικά είναι της μορφής  $\mathbf{f}_0(z) = \hat{\mathbf{f}}_0 z$  και  $\mathbf{q}_0(z) = \hat{\mathbf{q}}_0 z$ , προκύπτει το μητρικό σύστημα

$$\hat{\mathbf{f}}_0 + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \hat{\mathbf{q}}_0 = \bar{\mathbf{H}} \mathbf{D} \Sigma^{*\infty}, \quad (4.56)$$

$$\hat{\mathbf{f}}_0 - \mathbf{M}_I^{-1} \hat{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{H} \bar{\mathbf{D}} \bar{\Sigma}^{*\infty}. \quad (4.57)$$

Από το μητρικό αυτό σύστημα προκύπτει ότι

$$\hat{\mathbf{f}}_0 = \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{G}_I \Sigma^{*\infty} + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \bar{\mathbf{G}}_I \bar{\Sigma}^{*\infty}, \quad (4.58)$$

$$\hat{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{G}_I \Sigma^{*\infty} - \bar{\mathbf{G}}_I \bar{\Sigma}^{*\infty}, \quad (4.59)$$

όπου

$$\mathbf{G}_I = (\mathbf{M}_I^{-1} + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1})^{-1} \bar{\mathbf{H}} \mathbf{D}. \quad (4.60)$$

Τα μητρώα  $\hat{\mathbf{f}}_0$ ,  $\hat{\mathbf{q}}_0$ , που παρέχονται με τις σχέσεις (4.53), (4.58) και (4.54), (4.59), αντίστοιχα, πρέπει να ταυτίζονται. Αυτό συμβαίνει όταν

$$\mathbf{M}_H^{-1} \mathbf{G}_H \Sigma^\infty + \bar{\mathbf{M}}_H^{-1} \bar{\mathbf{G}}_H \bar{\Sigma}^\infty = \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{G}_I \Sigma^{*\infty} + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \bar{\mathbf{G}}_I \bar{\Sigma}^{*\infty}, \quad (4.61)$$

$$\mathbf{G}_H \Sigma^\infty - \bar{\mathbf{G}}_H \bar{\Sigma}^\infty = \mathbf{G}_I \Sigma^{*\infty} - \bar{\mathbf{G}}_I \bar{\Sigma}^{*\infty}. \quad (4.62)$$

Μετά από εκτενή άλγεβρα, οι παραπάνω σχέσεις παρέχουν

$$\sigma_2^* = \sigma_2, \quad (4.63)$$

$$\sigma_{11}^{*\infty} = \left( \frac{3 - \kappa_H}{1 + \kappa_H} - \frac{3 - \kappa_I}{1 + \kappa_I} \frac{\mu_H}{\mu_I} \right) \sigma_{22}^\infty + \frac{\mu_H (1 + \kappa_I)}{\mu_I (1 + \kappa_H)} \sigma_{11}^\infty, \quad (4.64)$$

$$\omega_{12}^* - \omega_{12} = \frac{\mu_{II} - \mu_I}{2\mu_I\mu_{II}} \sigma_{12}^\infty, \quad (4.65)$$

$$\frac{\sigma_{31}^{*\infty}}{\mu_{II}} = \frac{\sigma_{31}^\infty}{\mu_I}. \quad (4.66)$$

Οι σχέσεις (4.63)-(4.66) εκφράζουν τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται από τις τάσεις και τις στροφές, που εφαρμόζονται στις δύο φάσεις του διυλικού, έτσι ώστε να είναι αποδεκτά ως ελαστικά πεδία των δύο φάσεων. Η πρώτη σχέση εξασφαλίζει την ισορροπία του διυλικού κατά τον άξονα  $x_2$ . Οι υπόλοιπες σχέσεις εξασφαλίζουν την συμβιβαστότητα των παραμορφώσεων κατά μήκος της διεπιφάνειας. Οι παραπάνω σχέσεις ταυτίζονται με αυτές που εξήχθησαν από τους Rice και Sih (1965).

### 4.2.3 Ισότροπο/ανισότροπο διυλικό

Στη συνέχεια, θα μελετηθεί η περίπτωση όπου η φάση  $I$  του διυλικού είναι ισότροπη, ενώ η φάση  $II$  ανισότροπη. Στην περίπτωση αυτή, τα μιγαδικά δυναμικά των δύο φάσεων του διυλικού δίνονται από τις σχέσεις

$$\mathbf{f}_I(z) = \Sigma^\infty z, \quad (4.67)$$

$$\mathbf{f}_{II}(z) = -\mathbf{B}_{II}^{-1}(\mathbf{P}_{II} - \bar{\mathbf{P}}_{II})^{-1} \sigma^{*\infty} z, \quad (4.68)$$

όπου τα  $\Sigma^\infty$ ,  $\sigma^{*\infty}$  δίνονται από τις (4.41) και (4.23), αντίστοιχα. Όπως στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις, τα διφασικά δυναμικά  $\mathbf{f}_0(z)$ ,  $\mathbf{q}_0(z)$  θα αναζητηθούν στη μορφή  $\mathbf{f}_0(z) = \hat{\mathbf{f}}_0 z$  και  $\mathbf{q}_0(z) = \hat{\mathbf{q}}_0 z$ . Εργαζόμενοι όπως στην περίπτωση του ισότροπου/ισότροπου διυλικού, για τη φάση  $I$  του διυλικού, τα μητρώα  $\hat{\mathbf{f}}_0$ ,  $\hat{\mathbf{q}}_0$  προκύπτουν στη μορφή

$$\hat{\mathbf{f}}_0 = \mathbf{M}_{II}^{-1} \mathbf{G}_{II} \Sigma^\infty + \bar{\mathbf{M}}_{II}^{-1} \bar{\mathbf{G}}_{II} \bar{\Sigma}^\infty, \quad (4.69)$$

$$\hat{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{G}_{II} \Sigma^\infty - \bar{\mathbf{G}}_{II} \bar{\Sigma}^\infty. \quad (4.70)$$

Θα πρέπει να επισημανθεί ότι, σε αντίθεση με ότι συμβαίνει στην περίπτωση του ισότροπου/ισότροπου διυλικού, το μητρώο  $\mathbf{M}_{II}$ , που υπεισέρχεται στις παραπάνω

σχέσεις, αναφέρεται στο ανισότροπο υλικό της φάσης  $II$  και ορίζεται με τη σχέση (3.15)<sub>2</sub>, ενώ το μητρώο  $\mathbf{G}_{II}$  παρέχεται από την (4.55).

Όμοια, για τη φάση  $II$ , εργαζόμενοι όπως στη περίπτωση του ανισότροπου/ανισότροπου διυλικού, προκύπτουν τα μητρώα  $\hat{\mathbf{f}}_0$ ,  $\hat{\mathbf{q}}_0$  στη μορφή

$$\hat{\mathbf{f}}_0 = \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{J}_I \boldsymbol{\sigma}^{*\infty} + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \bar{\mathbf{J}}_I \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{*\infty}, \quad (4.71)$$

$$\hat{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{J}_I \boldsymbol{\sigma}^{*\infty} - \bar{\mathbf{J}}_I \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{*\infty}. \quad (4.72)$$

Το μητρώο  $\mathbf{J}_I$ , που υπεισέρχεται στις σχέσεις αυτές, δίνεται από την (4.26). Στο μητρώο αυτό εμπλέκονται οι ελαστικές σταθερές και των δύο φάσεων του υλικού, διαμέσου των μητρώων  $\mathbf{M}_I$  και  $\mathbf{H}$ , που ορίζονται με τις σχέσεις (3.15)<sub>1</sub> και (3.16), αντίστοιχα. Από τα ζεύγη των εξισώσεων (4.69), (4.71), και (4.70), (4.72) προκύπτουν οι σχέσεις

$$\mathbf{M}_{II}^{-1} \mathbf{G}_{II} \boldsymbol{\Sigma}^\infty + \bar{\mathbf{M}}_{II}^{-1} \bar{\mathbf{G}}_{II} \bar{\boldsymbol{\Sigma}}^\infty = \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{J}_I \boldsymbol{\sigma}^{*\infty} + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \bar{\mathbf{J}}_I \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{*\infty}, \quad (4.73)$$

$$\mathbf{G}_{II} \boldsymbol{\Sigma}^\infty - \bar{\mathbf{G}}_{II} \bar{\boldsymbol{\Sigma}}^\infty = \mathbf{J}_I \boldsymbol{\sigma}^{*\infty} - \bar{\mathbf{J}}_I \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{*\infty}. \quad (4.74)$$

Το σύστημα των εξισώσεων αυτών μπορεί να μετασχηματισθεί ισοδύναμα στις παρακάτω σχέσεις

$$\boldsymbol{\sigma}_2^{*\infty} = \boldsymbol{\sigma}_2^\infty, \quad (4.75)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_1^{*\infty} = \mathbf{J}_1 \boldsymbol{\sigma}_1^\infty + \mathbf{J}_2 \boldsymbol{\sigma}_2^\infty + \mathbf{J}_3 \omega_{12}, \quad (4.76)$$

όπου έχει τεθεί

$$\mathbf{J}_1 = \mathbf{w} \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{J}_2 = \mathbf{w} (\mathbf{v}_2 + \bar{\mathbf{H}}) - \mathbf{P}_{II}, \quad \mathbf{J}_3 = \mathbf{w} \mathbf{v}_3, \quad (4.77)$$

$$\mathbf{w} = \frac{1 + \kappa_I}{8\mu_I} (\mathbf{P}_{II} - \bar{\mathbf{P}}_{II}) (\mathbf{M}_{II}^{-1} + \bar{\mathbf{M}}_{II}^{-1})^{-1}, \quad (4.78)$$

και

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \frac{8}{1 + \kappa_I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 & -i & 0 \\ 2i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{1 + \kappa_I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{8\mu_I i}{1 + \kappa_I} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.79)$$

Οι σχέσεις (4.75) και (4.76) παρέχουν τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν οι ομοιόμορφες τάσεις που επιβάλλονται στις δύο φάσεις του διυλικού, ώστε να αποτελούν λύσεις του αντίστοιχου ελαστικού προβλήματος.

### 4.3 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΑΡΜΩΣΗ ΚΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ

Στην ενότητα αυτή θα προσδιορισθούν τα διδιάστατα ελαστικά πεδία, που προξενούνται σε ένα διυλικό από μια γραμμική εξάρμωση και μια γραμμική δύναμη, που επενεργούν κοντά στη διεπιφάνειά του. Αν και για ορισμένους συνδυασμούς ανισοτροπίας του διυλικού, τα ελαστικά πεδία είναι γνωστά στη βιβλιογραφία, επανεξάγονται εδώ σε όρους των διαφοσικών δυναμικών. Τα μιγαδικά δυναμικά της κάθε φάσης του διυλικού εκφράζονται σε όρους του διαφοσικού δυναμικού  $\mathbf{f}_\infty(z; z_0)$  του αντίστοιχου ομογενούς προβλήματος του διυλικού. Το διαφοσικό αυτό δυναμικό αντιστοιχεί στην περίπτωση που το διυλικό είναι ομογενές με τις ελαστικές ιδιότητες της φάσης που βρίσκεται η ιδιομορφία. Για τις δύο ιδιομορφίες που εξετάζονται, οι εκφράσεις των μιγαδικών συναρτήσεων  $\mathbf{f}_\infty(z; z_0)$  παρέχονται με τις σχέσεις (2.111) και (2.135), αντίστοιχα. Η ανάλυση που γίνεται παρακάτω αντιμετωπίζει ενιαία τις δύο ιδιομορφίες, υποθέτοντας ότι εφαρμόζονται στο ίδιο σημείο του φυσικού μιγαδικού επιπέδου.

#### 4.3.1 Ανισότροπο/ανισότροπο διυλικό

Στη συνέχεια, θα προσδιορισθούν τα διαφοσικά δυναμικά του διυλικού, για την περίπτωση του ανισότροπου/ανισότροπου συνδυασμού, όταν η ιδιομορφία εφαρμόζεται στη φάση II.

Τα διαφοσικά δυναμικά  $\mathbf{f}_0(z)$  και  $\mathbf{q}_0(z)$  του διυλικού θα αναζητηθούν στη μορφή

$$\mathbf{f}_0(z) = \mathbf{c}_1 \mathbf{f}_\infty(z; z_0) + \mathbf{c}_2 \bar{\mathbf{f}}_\infty(z; \bar{z}_0), \quad (4.80)$$

$$\mathbf{q}_0(z) = \mathbf{d}_1 \mathbf{f}_\infty(z; z_0) + \mathbf{d}_2 \bar{\mathbf{f}}_\infty(z; \bar{z}_0), \quad (4.81)$$

όπου  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$  και  $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$  είναι μιγαδικές σταθερές που θα προσδιορισθούν παρακάτω.

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στην (3.11) προκύπτει

$$\mathbf{B}_I \mathbf{f}_I(z) = \mathbf{H}^{-1} \left[ (\mathbf{c}_1 + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{d}_1) \mathbf{f}_\infty(z; z_0) + (\mathbf{c}_2 + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{d}_2) \bar{\mathbf{f}}_\infty(z; \bar{z}_0) \right]. \quad (4.82)$$

Επειδή το σημείο  $z_0$  βρίσκεται στη φάση  $II$  του διυλικού, το  $\bar{z}_0$  θα βρίσκεται στη φάση  $I$ . Στο πεδίο του μιγαδικού επιπέδου, που αντιστοιχεί στη φάση αυτή, η συνάρτηση θα πρέπει να ορίζεται παντού, συμπεριλαμβανομένου και του σημείου  $\bar{z}_0$ , προκειμένου οι τάσεις στο σημείο αυτό να είναι πεπερασμένες. Αυτό εξασφαλίζεται όταν

$$\mathbf{c}_2 + \bar{\mathbf{M}}_H^{-1} \mathbf{d}_2 = \mathbf{0}. \quad (4.83)$$

Επίσης, με αντικατάσταση των (4.80), (4.81) στην (3.12) προκύπτει

$$\bar{\mathbf{B}}_I \bar{\mathbf{f}}_I(\bar{z}) = \bar{\mathbf{H}}^{-1} \left[ (\mathbf{c}_1 - \mathbf{M}_H^{-1} \mathbf{d}_1) \mathbf{f}_\infty(\bar{z}; z_0) + (\mathbf{c}_2 - \mathbf{M}_H^{-1} \mathbf{d}_2) \bar{\mathbf{f}}_\infty(\bar{z}; \bar{z}_0) \right]. \quad (4.84)$$

Η συνάρτηση αυτή θα πρέπει να παρέχει πεπερασμένες τιμές για κάθε  $z$ , που αντιστοιχεί στη φάση  $I$  του διυλικού. Αν  $z \in I$ , τότε  $\bar{z} \in II$  και, σύμφωνα με την (4.84), οι τάσεις απειρίζονται όταν  $\bar{z} \rightarrow z_0$ . Αυτό μπορεί να αποφευχθεί, αν ισχύει

$$\mathbf{c}_1 - \mathbf{M}_H^{-1} \mathbf{d}_1 = \mathbf{0}. \quad (4.85)$$

Για τον προσδιορισμό των άγνωστων σταθερών μητρώων, που υπεισέρχονται στις (4.80) και (4.81), έχουν εξαχθεί οι γραμμικές ομογενείς εξισώσεις (4.83) και (4.85). Οι άλλες δύο γραμμικές μητρωικές εξισώσεις, που απαιτούνται για τον προσδιορισμό των σταθερών αυτών, θα εξαχθούν από την προσαρμογή της συμπεριφοράς του μιγαδικού δυναμικού  $\mathbf{f}_H(z)$  στην ιδιόμορφη συμπεριφορά, που εισάγει η ιδιομορφία στην περιοχή του σημείου  $z_0$ . Η συμπεριφορά αυτή περιγράφεται από τη συμπεριφορά της μιγαδικής συνάρτησης  $\mathbf{f}_\infty(z; z_0)$  στο σημείο αυτό. Με αντικατάσταση των (4.80), (4.81) στις (3.13) και (3.14) προκύπτει

$$\mathbf{B}_H \mathbf{f}_H(z) = \bar{\mathbf{H}}^{-1} \left[ (\mathbf{c}_1 + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{d}_1) \mathbf{f}_\infty(z; z_0) + (\mathbf{c}_2 + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{d}_2) \bar{\mathbf{f}}_\infty(z; \bar{z}_0) \right], \quad (4.86)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_H \bar{\mathbf{f}}_H(\bar{z}) = \mathbf{H}^{-1} \left[ (\mathbf{c}_1 - \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{d}_1) \mathbf{f}_\infty(\bar{z}; z_0) + (\mathbf{c}_2 - \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{d}_2) \bar{\mathbf{f}}_\infty(\bar{z}; \bar{z}_0) \right]. \quad (4.87)$$

Η συμπεριφορά του μιγαδικού δυναμικού  $\mathbf{f}_H(z)$  θα συμπίπτει με την ιδιόμορφη συμπεριφορά της  $\mathbf{f}_\infty(z; z_0)$  στο σημείο  $z_0$ , αν τεθεί

$$\bar{\mathbf{H}}^{-1} (\mathbf{c}_1 + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{d}_1) = \mathbf{B}_H, \quad (4.88)$$

$$\mathbf{H}^{-1} (\mathbf{c}_2 - \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{d}_2) = \bar{\mathbf{B}}_H. \quad (4.89)$$

Οι εξισώσεις (4.83), (4.85) και (4.88), (4.89) απαρτίζουν ένα σύστημα τεσσάρων μητρικών εξισώσεων με άγνωστα τα μητρώα στήλες  $\mathbf{c}_1$ ,  $\mathbf{c}_2$  και  $\mathbf{d}_1$ ,  $\mathbf{d}_2$ . Η επίλυση του συστήματος αυτού παρέχει

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{M}_{II}^{-1} \mathbf{B}_{II}, \quad \mathbf{d}_1 = \mathbf{B}_{II}, \quad (4.90)$$

$$\mathbf{c}_2 = \bar{\mathbf{M}}_{II}^{-1} \bar{\mathbf{B}}_{II}, \quad \mathbf{d}_2 = -\bar{\mathbf{B}}_{II}. \quad (4.91)$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας τις (4.90) και (4.91) τα μιγαδικά δυναμικά  $\mathbf{f}_0(z)$  και  $\mathbf{q}_0(z)$  γράφονται

$$\mathbf{f}_0(z) = \mathbf{M}_{II}^{-1} \mathbf{B}_{II} \mathbf{f}_\infty(z; z_0) + \bar{\mathbf{M}}_{II}^{-1} \bar{\mathbf{B}}_{II} \bar{\mathbf{f}}_\infty(z; \bar{z}_0), \quad (4.92)$$

$$\mathbf{q}_0(z) = \mathbf{B}_{II} \mathbf{f}_\infty(z; z_0) - \bar{\mathbf{B}}_{II} \bar{\mathbf{f}}_\infty(z; \bar{z}_0). \quad (4.93)$$

Οι σχέσεις αυτές παρέχουν τα διαφορικά δυναμικά του διυλικού σε όρους της συνάρτησης  $\mathbf{f}_\infty(z; z_0)$ , που αντιστοιχεί στο μιγαδικό δυναμικό του αντίστοιχου ομογενούς προβλήματος του διυλικού. Από τις (4.82), (4.86) και τις (4.92), (4.93) προκύπτουν τα μιγαδικά δυναμικά των δύο φάσεων

$$\mathbf{f}_I(z) = \mathbf{B}_I^{-1} \mathbf{H}^{-1} (\mathbf{M}_{II}^{-1} + \bar{\mathbf{M}}_{II}^{-1}) \mathbf{B}_{II} \mathbf{f}_\infty(z; z_0), \quad (4.94)$$

$$\mathbf{f}_{II}(z) = \mathbf{f}_\infty(z; z_0) + \mathbf{B}_{II}^{-1} \bar{\mathbf{H}}^{-1} (\bar{\mathbf{M}}_{II}^{-1} - \bar{\mathbf{M}}_I^{-1}) \bar{\mathbf{B}}_{II} \bar{\mathbf{f}}_\infty(z; \bar{z}_0). \quad (4.95)$$

Οι σχέσεις αυτές ταυτίζονται με αυτές που έχουν εξαχθεί από τον Suo (1990) για την περίπτωση της δύναμης και της εξάρμωσης. Στην περίπτωση που το σημείο εφαρμογής της ιδιομορφίας βρίσκεται στο σώμα  $I$ , με την ίδια διαδικασία, προκύπτουν τα μιγαδικά των δύο φάσεων του προβλήματος

$$\mathbf{f}_I(z) = \mathbf{f}_\infty(z; z_0) + \mathbf{B}_I^{-1} \mathbf{H}^{-1} (\bar{\mathbf{M}}_I^{-1} - \bar{\mathbf{M}}_{II}^{-1}) \bar{\mathbf{B}}_I \bar{\mathbf{f}}_\infty(z; \bar{z}_0), \quad (4.96)$$

$$\mathbf{f}_{II}(z) = \mathbf{B}_{II}^{-1} \bar{\mathbf{H}}^{-1} (\mathbf{M}_I^{-1} + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1}) \mathbf{B}_I \mathbf{f}_\infty(z; z_0). \quad (4.97)$$

### 4.3.2 Ισότροπο/ισότροπο διυλικό

Στην ενότητα αυτή θα προσδιορισθούν τα διαφοσικά δυναμικά του διυλικού, όταν οι δύο φάσεις του διυλικού είναι ισότροπες, και η ιδιομορφία επενεργεί στο σημείο  $z_0$  της φάσης  $II$ . Τα διαφοσικά δυναμικά  $\mathbf{f}_0(z)$  και  $\mathbf{q}_0(z)$  θα αναζητηθούν στη μορφή

$$\mathbf{f}_0(z) = \mathbf{c}_1 \mathbf{f}_\infty(z; z_0) + \mathbf{c}_2 z \mathbf{f}'_\infty(z; z_0) + \mathbf{c}_3 \bar{\mathbf{f}}_\infty(z; \bar{z}_0) + \mathbf{c}_4 z \bar{\mathbf{f}}'_\infty(z; \bar{z}_0), \quad (4.98)$$

$$\mathbf{q}_0(z) = \mathbf{d}_1 \mathbf{f}_\infty(z; z_0) + \mathbf{d}_2 z \mathbf{f}'_\infty(z; z_0) + \mathbf{d}_3 \bar{\mathbf{f}}_\infty(z; \bar{z}_0) + \mathbf{d}_4 z \bar{\mathbf{f}}'_\infty(z; \bar{z}_0), \quad (4.99)$$

όπου  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4$  και  $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3, \mathbf{d}_4$  είναι σταθερά μητρώα που θα προσδιορισθούν. Με αντικατάσταση των (4.98), (4.99) στις (3.49) και (3.50) προκύπτουν οι παρακάτω εκφράσεις των συννεπτυγμένων μιγαδικών δυναμικών της φάσης  $I$  του διυλικού

$$\mathbf{B}_I \mathbf{f}_I^*(z) = \mathbf{H}^{-1} [(\mathbf{c}_1 + \bar{\mathbf{M}}_H^{-1} \mathbf{d}_1) \mathbf{f}_\infty(z; z_0) + (\mathbf{c}_2 + \bar{\mathbf{M}}_H^{-1} \mathbf{d}_2) z \mathbf{f}'_\infty(z; z_0) + (\mathbf{c}_3 + \bar{\mathbf{M}}_H^{-1} \mathbf{d}_3) \bar{\mathbf{f}}_\infty(z; \bar{z}_0) + (\mathbf{c}_4 + \bar{\mathbf{M}}_H^{-1} \mathbf{d}_4) z \bar{\mathbf{f}}'_\infty(z; \bar{z}_0)], \quad (4.100)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_I \bar{\mathbf{f}}_I^*(\bar{z}) = \bar{\mathbf{H}}^{-1} [(\mathbf{c}_1 - \mathbf{M}_H^{-1} \mathbf{d}_1) \mathbf{f}_\infty(\bar{z}; z_0) + (\mathbf{c}_2 - \mathbf{M}_H^{-1} \mathbf{d}_2) \bar{z} \mathbf{f}'_\infty(\bar{z}; z_0) + (\mathbf{c}_3 - \mathbf{M}_H^{-1} \mathbf{d}_3) \bar{\mathbf{f}}_\infty(\bar{z}; \bar{z}_0) + (\mathbf{c}_4 - \mathbf{M}_H^{-1} \mathbf{d}_4) \bar{z} \bar{\mathbf{f}}'_\infty(\bar{z}; \bar{z}_0)], \quad (4.101)$$

όπου

$$\mathbf{B}_I \mathbf{f}_I^*(z) = \mathbf{B}_I \mathbf{f}_I(z) + \mathbf{b}_I z \mathbf{f}'_I(z).$$

Για να είναι οι τάσεις πεπερασμένες στη φάση  $I$ , η  $\mathbf{B}_I \mathbf{f}_I^*(z)$  θα πρέπει να είναι παντού ολόμορφη και να ορίζεται σε κάθε σημείο της. Επειδή το σημείο  $z_0$  είναι ένα σημείο της φάσης  $II$  του διυλικού, το  $\bar{z}_0$  είναι ένα σημείο της φάσης  $I$ . Για να εξασφαλισθούν πεπερασμένες τάσεις στο σημείο αυτό θα πρέπει

$$\mathbf{c}_3 + \bar{\mathbf{M}}_H^{-1} \mathbf{d}_3 = \mathbf{0}, \quad (4.102)$$

$$\mathbf{c}_4 + \bar{\mathbf{M}}_H^{-1} \mathbf{d}_4 = \mathbf{0}. \quad (4.103)$$

Επίσης, όταν το  $z$  ανήκει στη φάση  $I$  του διυλικού, το  $\bar{z}$  ανήκει στη φάση  $II$ , όπου βρίσκεται το σημείο εφαρμογής της ιδιομορφίας  $z_0$ . Για να μην υπάρχει απειρισμός των τάσεων, όταν  $\bar{z} \rightarrow z_0$ , θα πρέπει

$$\mathbf{c}_1 - \mathbf{M}_H^{-1} \mathbf{d}_1 = \mathbf{0}, \quad (4.104)$$

$$\mathbf{c}_2 - \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{d}_2 = \mathbf{0}. \quad (4.105)$$

Για τη φάση  $II$  του διυλικού, οι εκφράσεις του μιγαδικού δυναμικού  $\mathbf{f}_I^*(z)$  προκύπτουν με αντικατάσταση των (4.98) και (4.99) στις (3.51) και (3.52). Βρίσκεται ότι

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_I \mathbf{f}_I^*(z) = & \bar{\mathbf{H}}^{-1}[(\mathbf{c}_1 + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{d}_1) \mathbf{f}_\infty(z; z_0) + (\mathbf{c}_2 + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{d}_2) z \mathbf{f}'_\infty(z; z_0) \\ & + (\mathbf{c}_3 + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{d}_3) \bar{\mathbf{f}}_\infty(z; \bar{z}_0) + (\mathbf{c}_4 + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{d}_4) z \bar{\mathbf{f}}'_\infty(z; \bar{z}_0)], \end{aligned} \quad (4.106)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{B}}_I \bar{\mathbf{f}}_I^*(\bar{z}) = & \mathbf{H}^{-1}[(\mathbf{c}_1 - \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{d}_1) \mathbf{f}_\infty(\bar{z}; z_0) + (\mathbf{c}_2 - \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{d}_2) \bar{z} \mathbf{f}'_\infty(\bar{z}; z_0) \\ & + (\mathbf{c}_3 - \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{d}_3) \bar{\mathbf{f}}_\infty(\bar{z}; \bar{z}_0) + (\mathbf{c}_4 - \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{d}_4) \bar{z} \bar{\mathbf{f}}'_\infty(\bar{z}; \bar{z}_0)], \end{aligned} \quad (4.107)$$

όπου

$$\mathbf{B}_I \mathbf{f}_I^*(z) = \mathbf{B}_I \mathbf{f}_I(z) + \mathbf{b}_I z \mathbf{f}'_I(z).$$

Στη φάση  $II$  του διυλικού, όπου εφαρμόζεται η ιδιομορφία, οι τάσεις στη γειτονιά του σημείου εφαρμογής θα πρέπει να επιδεικνύουν μια συγκεκριμένη συμπεριφορά, που περιγράφεται με τη συνάρτηση  $\mathbf{f}_\infty(z; z_0)$ . Προκειμένου τα μιγαδικά δυναμικά  $\mathbf{f}_I^*(z)$ ,  $\bar{\mathbf{f}}_I^*(\bar{z})$  να επιδεικνύουν την ίδια συμπεριφορά με αυτήν των  $\mathbf{f}_\infty(z; z_0)$  και  $\bar{\mathbf{f}}_\infty(\bar{z}; \bar{z}_0)$  στο σημείο εφαρμογής της ιδιομορφίας, θα πρέπει

$$\bar{\mathbf{H}}^{-1}(\mathbf{c}_1 + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{d}_1) = \mathbf{B}_I, \quad (4.108)$$

$$\bar{\mathbf{H}}^{-1}(\mathbf{c}_2 + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{d}_2) = \mathbf{b}_I, \quad (4.109)$$

και

$$\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{c}_3 - \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{d}_3) = \bar{\mathbf{B}}_I, \quad (4.110)$$

$$\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{c}_4 - \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{d}_4) = \bar{\mathbf{b}}_I. \quad (4.111)$$

Με τις παραπάνω εξισώσεις συμπληρώνεται ο απαιτούμενος αριθμός των αλγεβρικών εξισώσεων για τον υπολογισμό των οκτώ άγνωστων σταθερών μητρώων που υπεισέρχονται στις εκφράσεις των διφασικών δυναμικών (4.98), (4.99). Από την επίλυση του συστήματος των μητρωικών εξισώσεων (4.102)-(4.105) και (4.108)-(4.111), βρίσκεται ότι

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{B}_I, \quad \mathbf{d}_1 = \mathbf{B}_I, \quad (4.112)$$

$$\mathbf{c}_2 = \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{b}_I, \quad \mathbf{d}_2 = \mathbf{b}_I, \quad (4.113)$$



και

$$\mathbf{c}_3 = \bar{\mathbf{M}}_H^{-1} \bar{\mathbf{B}}_H, \quad \mathbf{d}_3 = -\bar{\mathbf{B}}_H, \quad (4.114)$$

$$\mathbf{c}_4 = \bar{\mathbf{M}}_H^{-1} \bar{\mathbf{b}}_H, \quad \mathbf{d}_4 = -\bar{\mathbf{b}}_H. \quad (4.115)$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις, τα διαφορικά μιγαδικά δυναμικά (4.98) και (4.99) παίρνουν τη μορφή

$$\mathbf{f}_0(z) = \mathbf{M}_H^{-1} \mathbf{B}_H \mathbf{f}_\infty(z; z_0) + \mathbf{M}_H^{-1} \mathbf{b}_H z \mathbf{f}'_\infty(z; z_0) + \bar{\mathbf{M}}_H^{-1} \bar{\mathbf{B}}_H \bar{\mathbf{f}}_\infty(z; \bar{z}_0) + \bar{\mathbf{M}}_H^{-1} \bar{\mathbf{b}}_H z \bar{\mathbf{f}}'_\infty(z; \bar{z}_0), \quad (4.116)$$

$$\mathbf{q}_0(z) = \mathbf{B}_H \mathbf{f}_\infty(z; z_0) + z \mathbf{b}_H \mathbf{f}'_\infty(z; z_0) - \bar{\mathbf{B}}_H \bar{\mathbf{f}}_\infty(z; \bar{z}_0) - z \bar{\mathbf{b}}_H \bar{\mathbf{f}}'_\infty(z; \bar{z}_0). \quad (4.117)$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκφράσεις των μιγαδικών δυναμικών στις (4.100), (4.106) προκύπτει

$$\mathbf{f}_I^*(z) = \mathbf{B}_I^{-1} \mathbf{H}^{-1} (\mathbf{M}_H^{-1} + \bar{\mathbf{M}}_H^{-1}) [\mathbf{B}_H \mathbf{f}_\infty(z; z_0) + z \mathbf{b}_H \mathbf{f}'_\infty(z; z_0)], \quad (4.118)$$

$$\mathbf{f}_H^*(z) = \mathbf{f}_\infty(z; z_0) - z \mathbf{T} \mathbf{f}'_\infty(z; z_0) + \mathbf{B}_H^{-1} \bar{\mathbf{H}}^{-1} (\bar{\mathbf{M}}_H^{-1} - \bar{\mathbf{M}}_I^{-1}) [\bar{\mathbf{B}}_H \bar{\mathbf{f}}_\infty(z; \bar{z}_0) + z \bar{\mathbf{b}}_H \bar{\mathbf{f}}'_\infty(z; \bar{z}_0)], \quad (4.119)$$

όπου

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Όταν η ιδιομορφία εφαρμόζεται στη φάση  $I$  του διυλικού, με την ίδια διαδικασία, υπολογίζονται τα συνεπτυγμένα δυναμικά των δύο φάσεων στη μορφή

$$\mathbf{f}_I^*(z) = \mathbf{f}_\infty(z; z_0) - z \mathbf{T} \mathbf{f}'_\infty(z; z_0) + \mathbf{B}_I^{-1} \mathbf{H}^{-1} (\bar{\mathbf{M}}_I^{-1} - \bar{\mathbf{M}}_H^{-1}) [\bar{\mathbf{B}}_I \bar{\mathbf{f}}_\infty(z; \bar{z}_0) + \bar{\mathbf{b}}_I z \bar{\mathbf{f}}'_\infty(z; \bar{z}_0)], \quad (4.120)$$

$$\mathbf{f}_H^*(z) = \mathbf{B}_H^{-1} \bar{\mathbf{H}}^{-1} (\mathbf{M}_I^{-1} + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1}) [\mathbf{B}_I \mathbf{f}_\infty(z; z_0) + \mathbf{b}_I z \mathbf{f}'_\infty(z; z_0)]. \quad (4.121)$$

Στη συνέχεια, θα δειχθεί ότι οι παραπάνω εκφράσεις οδηγούν στις λύσεις για το συνεπίπεδο και αντεπίπεδο πρόβλημα, που έχουν αναπτυχθεί από άλλους ερευνητές. Χρησιμοποιώντας τις αδιάστατες παραμέτρους  $\Lambda$ ,  $\Pi$  και  $\Omega$ , που δίνονται από τις σχέσεις

$$\Lambda = \frac{\mu_H \kappa_I - \mu_I \kappa_H}{\mu_H + \mu_I \kappa_H}, \quad \Pi = \frac{\mu_H - \mu_I}{\mu_I + \mu_H \kappa_I}, \quad \Omega = -\frac{\mu_H - \mu_I}{\mu_H + \mu_I \kappa_H}, \quad (4.122)$$

από τις (4.120), (4.121) και την (3.27) προκύπτει

$$\hat{\mathbf{f}}_{II}(z) = \begin{bmatrix} 1+\Lambda & 0 \\ 0 & 1+\Pi \end{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_{\infty}(z) - z \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \Lambda-\Pi & 0 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}'_{\infty}(z), \quad (4.123)$$

για τη φάση  $II$  του διυλικού, όπου

$$\hat{\mathbf{f}}_{II}(z) = \begin{bmatrix} f_{II,1}(z) \\ f_{II,2}(z) \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{f}}_{\infty}(z) = \begin{bmatrix} f_{\infty,1}(z) \\ f_{\infty,2}(z) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}'_{\infty}(z) = \begin{bmatrix} f'_{\infty,1}(z) \\ f'_{\infty,2}(z) \end{bmatrix}, \quad (4.124)$$

και

$$f_{II,3}(z) = \frac{2\mu_{II}}{\mu_I + \mu_{II}} f_{\infty,3}(z). \quad (4.125)$$

Για τη φάση  $I$  του διυλικού, προκύπτει

$$\hat{\mathbf{f}}_I(z) = \mathbf{I}\hat{\mathbf{f}}_{\infty}(z) + \begin{bmatrix} 0 & \Pi \\ \Lambda & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{f}}_{\infty}(z) - z\Pi \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{f}}'_{\infty}(z) - z^2\Pi \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{f}}''_{\infty}(z), \quad (4.126)$$

με

$$\hat{\mathbf{f}}_I(z) = \begin{bmatrix} f_{I,1}(z) \\ f_{I,2}(z) \end{bmatrix}, \quad (4.127)$$

$$f_{I,3}(z) = f_{\infty,3}(z) + \frac{\mu_I - \mu_{II}}{\mu_I + \mu_{II}} \bar{f}_{\infty,3}(z), \quad (4.128)$$

όπου το σύμβολο “ $\bar{\phantom{x}}$ ” δηλώνει ποσότητες του συνεπίπεδου προβλήματος. Οι παραπάνω σχέσεις είναι συμβατές με αυτές που έχουν αποκτηθεί στη βιβλιογραφία (Dundurs and Sendeky, 1965; Suo, 1990; Kattis, 1994)

### 4.3.3 Ανισότροπο/ισότροπο διυλικό

Στην περίπτωση του συνδυασμού αυτού, χωρίς να βλαφθεί η γενικότητα, θα θεωρηθεί ότι η φάση  $I$  του διυλικού είναι ισότροπη και η φάση  $II$  ανισότροπη. Για το διυλικό αυτό, ο προσδιορισμός των διφασικών δυναμικών θα γίνει θεωρώντας δύο περιπτώσεις για τη θέση της ιδιομορφίας. Στην πρώτη περίπτωση, η ιδιομορφία θα εφαρμόζεται στην ισότροπη φάση  $I$ , ενώ στη δεύτερη περίπτωση εφαρμόζεται στην ανισότροπη φάση  $II$ .

### 4.3.3.1 Η ιδιομορφία στο ισότροπο υλικό

Στην περίπτωση αυτή, τα διαφορικά δυναμικά  $\mathbf{f}_0(z)$  και  $\mathbf{q}_0(z)$  του διυλικού θα αναζητηθούν στη μορφή

$$\mathbf{f}_0(z) = \mathbf{c}_1 \mathbf{f}_\infty(z; z_0) + \mathbf{c}_2 \mathbf{z} \mathbf{f}'_\infty(z; z_0) + \mathbf{c}_3 \bar{\mathbf{f}}_\infty(z; \bar{z}_0) + \mathbf{c}_4 \mathbf{z} \bar{\mathbf{f}}'_\infty(z; \bar{z}_0), \quad (4.129)$$

$$\mathbf{q}_0(z) = \mathbf{d}_1 \mathbf{f}_\infty(z; z_0) + \mathbf{d}_2 \mathbf{z} \mathbf{f}'_\infty(z; z_0) + \mathbf{d}_3 \bar{\mathbf{f}}_\infty(z; \bar{z}_0) + \mathbf{d}_4 \mathbf{z} \bar{\mathbf{f}}'_\infty(z; \bar{z}_0), \quad (4.130)$$

όπου  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4$  και  $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3, \mathbf{d}_4$  είναι μιγαδικές σταθερές που θα προσδιορισθούν.

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις αυτές στις (3.31) και (3.32), προκύπτει ότι

$$\mathbf{B}_I \mathbf{f}_I^*(z) = \mathbf{H}^{-1}[(\mathbf{c}_1 + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{d}_1) \mathbf{f}_\infty(z; z_0) + (\mathbf{c}_2 + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{d}_2) \mathbf{z} \mathbf{f}'_\infty(z; z_0) + (\mathbf{c}_3 + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{d}_3) \bar{\mathbf{f}}_\infty(z; \bar{z}_0) + (\mathbf{c}_4 + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{d}_4) \mathbf{z} \bar{\mathbf{f}}'_\infty(z; \bar{z}_0)], \quad (4.131)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_I \bar{\mathbf{f}}_I^*(\bar{z}) = \bar{\mathbf{H}}^{-1}[(\mathbf{c}_1 - \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{d}_1) \mathbf{f}_\infty(\bar{z}; z_0) + (\mathbf{c}_2 - \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{d}_2) \bar{\mathbf{z}} \mathbf{f}'_\infty(\bar{z}; z_0) + (\mathbf{c}_3 - \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{d}_3) \bar{\mathbf{f}}_\infty(\bar{z}; \bar{z}_0) + (\mathbf{c}_4 - \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{d}_4) \bar{\mathbf{z}} \bar{\mathbf{f}}'_\infty(\bar{z}; \bar{z}_0)]. \quad (4.132)$$

Από την προσαρμογή της συμπεριφοράς του μιγαδικού δυναμικού  $\mathbf{f}_I(z)$  στην ιδιόμορφη συμπεριφορά της  $\mathbf{f}_\infty(z; z_0)$  στο σημείο  $z_0$ , προκύπτει το παρακάτω σύστημα μητρικών εξισώσεων:

$$\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{c}_1 + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{d}_1) = \mathbf{B}_I, \quad (4.133)$$

$$\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{c}_2 + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{d}_2) = \mathbf{b}_I, \quad (4.134)$$

και

$$\bar{\mathbf{H}}^{-1}(\mathbf{c}_3 - \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{d}_3) = \bar{\mathbf{B}}_I, \quad (4.135)$$

$$\bar{\mathbf{H}}^{-1}(\mathbf{c}_4 - \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{d}_4) = \bar{\mathbf{b}}_I. \quad (4.136)$$

Οι εκφράσεις που παρέχουν το διαφορικό δυναμικό της ανισότροπης φάσης  $II$  του διυλικού, βρίσκονται αντικαθιστώντας τις (4.129), (4.130) στις (3.33) και (3.34).

Βρίσκεται ότι

$$\mathbf{B}_{II} \mathbf{f}_{II}(z) = \bar{\mathbf{H}}^{-1}[(\mathbf{c}_1 + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{d}_1) \mathbf{f}_\infty(z; z_0) + (\mathbf{c}_2 + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{d}_2) \mathbf{z} \mathbf{f}'_\infty(z; z_0) + (\mathbf{c}_3 + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{d}_3) \bar{\mathbf{f}}_\infty(z; \bar{z}_0) + (\mathbf{c}_4 + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{d}_4) \mathbf{z} \bar{\mathbf{f}}'_\infty(z; \bar{z}_0)], \quad (4.137)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_{II} \bar{\mathbf{f}}_{II}(\bar{z}) = \mathbf{H}^{-1}[(\mathbf{c}_1 - \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{d}_1) \mathbf{f}_\infty(\bar{z}; z_0) + (\mathbf{c}_2 - \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{d}_2) \bar{\mathbf{z}} \mathbf{f}'_\infty(\bar{z}; z_0) + (\mathbf{c}_3 - \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{d}_3) \bar{\mathbf{f}}_\infty(\bar{z}; \bar{z}_0) + (\mathbf{c}_4 - \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{d}_4) \bar{\mathbf{z}} \bar{\mathbf{f}}'_\infty(\bar{z}; \bar{z}_0)]. \quad (4.138)$$

Επειδή το σημείο ιδιομορφίας  $z_0$  βρίσκεται στην ισότροπη φάση  $I$ , το  $\bar{z}_0$  θα βρίσκεται στην ανισότροπη φάση  $II$ . Απαιτώντας οι τάσεις στο σημείο  $\bar{z}_0$  να είναι πεπερασμένες, από την (4.137) συνάγεται ότι

$$\mathbf{c}_3 + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{d}_3 = \mathbf{0}, \quad (4.139)$$

$$\mathbf{c}_4 + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{d}_4 = \mathbf{0}. \quad (4.140)$$

Όταν το  $z$  βρίσκεται στην ανισότροπη φάση  $II$ , το  $\bar{z}$  βρίσκεται στην ισότροπη φάση  $I$ . Για να παρέχει η συνάρτηση  $\bar{\mathbf{B}}_{II} \bar{\mathbf{f}}_{II}(\bar{z})$ , που παρέχεται από την (4.138), πεπερασμένες τάσεις στο σημείο  $z_0$ , θα πρέπει

$$\mathbf{c}_1 - \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{d}_1 = \mathbf{0}, \quad (4.141)$$

$$\mathbf{c}_2 - \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{d}_2 = \mathbf{0}. \quad (4.142)$$

Από την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων (4.133)-(4.136) και (4.139)-(4.142), προκύπτουν τα άγνωστα μητρώα των διαφοσικών δυναμικών (4.129) και (4.130). Βρίσκεται ότι

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{B}_I, \quad \mathbf{d}_1 = \mathbf{B}_I, \quad (4.143)$$

$$\mathbf{c}_2 = \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{b}_I, \quad \mathbf{d}_2 = \mathbf{b}_I, \quad (4.144)$$

και

$$\mathbf{c}_3 = \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \bar{\mathbf{B}}_I, \quad \mathbf{d}_3 = -\bar{\mathbf{B}}_I, \quad (4.145)$$

$$\mathbf{c}_4 = \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \bar{\mathbf{b}}_I, \quad \mathbf{d}_4 = -\bar{\mathbf{b}}_I. \quad (4.146)$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σταθερές στις (4.129) και (4.130), προκύπτουν τα διαφοσικά δυναμικά των δύο φάσεων

$$\mathbf{f}_0(z) = \mathbf{M}_I^{-1} [\mathbf{B}_I \mathbf{f}_\infty(z; z_0) + \mathbf{b}_I \mathbf{z} \mathbf{f}'_\infty(z; z_0)] + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} [\bar{\mathbf{B}}_I \bar{\mathbf{f}}_\infty(z; \bar{z}_0) + \bar{\mathbf{b}}_I \mathbf{z} \bar{\mathbf{f}}'_\infty(z; \bar{z}_0)], \quad (4.147)$$

$$\mathbf{q}_0(z) = \mathbf{B}_I \mathbf{f}_\infty(z; z_0) + \mathbf{b}_I \mathbf{z} \mathbf{f}'_\infty(z; z_0) - \bar{\mathbf{B}}_I \bar{\mathbf{f}}_\infty(z; \bar{z}_0) - \bar{\mathbf{b}}_I \mathbf{z} \bar{\mathbf{f}}'_\infty(z; \bar{z}_0). \quad (4.148)$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκφράσεις των διαφοσικών δυναμικών στις (4.131), (4.132) και (4.137), (4.138), προκύπτουν τα μιγαδικά δυναμικά της ισότροπης φάσης

$$\mathbf{f}_I^*(z) = \mathbf{f}_\infty(z; z_0) - z \mathbf{T} \mathbf{f}'_\infty(z; z_0) + \mathbf{B}_I^{-1} \mathbf{H}^{-1} (\bar{\mathbf{M}}_I^{-1} - \bar{\mathbf{M}}_{II}^{-1}) [\bar{\mathbf{B}}_I \bar{\mathbf{f}}_\infty(z; \bar{z}_0) + \bar{\mathbf{b}}_I \mathbf{z} \bar{\mathbf{f}}'_\infty(z; \bar{z}_0)], \quad (4.149)$$

$$\bar{\mathbf{f}}_I^*(\bar{z}) = \bar{\mathbf{f}}_\infty(\bar{z}; \bar{z}_0) - \bar{z} \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{f}}'_\infty(\bar{z}; \bar{z}_0) + \bar{\mathbf{B}}_I^{-1} \bar{\mathbf{H}}^{-1} (\mathbf{M}_I^{-1} - \mathbf{M}_{II}^{-1}) [\mathbf{B}_I \mathbf{f}_\infty(\bar{z}; z_0) + \mathbf{b}_I \bar{z} \bar{\mathbf{f}}'_\infty(\bar{z}; z_0)], \quad (4.150)$$

και τα μιγαδικά δυναμικά της ανισότροπης φάσης

$$\mathbf{f}_{II}(z) = \mathbf{B}_{II}^{-1} \bar{\mathbf{H}}^{-1} (\mathbf{M}_I^{-1} + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1}) [\mathbf{B}_I \mathbf{f}_\infty(z; z_0) + \mathbf{b}_I z \bar{\mathbf{f}}'_\infty(z; z_0)], \quad (4.151)$$

$$\bar{\mathbf{f}}_{II}(\bar{z}) = \bar{\mathbf{B}}_{II}^{-1} \bar{\mathbf{H}}^{-1} (\mathbf{M}_I^{-1} + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1}) [\bar{\mathbf{B}}_I \bar{\mathbf{f}}_\infty(\bar{z}; \bar{z}_0) + \bar{\mathbf{b}}_I \bar{z} \bar{\mathbf{f}}'_\infty(\bar{z}; \bar{z}_0)]. \quad (4.152)$$

#### 4.3.3.2 Η ιδιομορφία στο ανισότροπο υλικό

Όταν η ιδιομορφία βρίσκεται στην ανισότροπη φάση  $II$  του διυλικού, τα διαφορικά δυναμικά  $\mathbf{f}_0(z)$  και  $\mathbf{q}_0(z)$  θα αναζητηθούν στη μορφή

$$\mathbf{f}_0(z) = \mathbf{c}_1 \mathbf{f}_\infty(z; z_0) + \mathbf{c}_2 \bar{\mathbf{f}}_\infty(z; \bar{z}_0), \quad (4.153)$$

$$\mathbf{q}_0(z) = \mathbf{d}_1 \mathbf{f}_\infty(z; z_0) + \mathbf{d}_2 \bar{\mathbf{f}}_\infty(z; \bar{z}_0), \quad (4.154)$$

όπου  $\mathbf{c}_1$ ,  $\mathbf{c}_2$  και  $\mathbf{d}_1$ ,  $\mathbf{d}_2$  είναι μιγαδικές σταθερές που πρέπει να προσδιορισθούν.

Εισάγοντας τις σχέσεις αυτές στις (3.31) και (3.32), προκύπτει ότι

$$\mathbf{B}_I \mathbf{f}_I^*(z) = \mathbf{H}^{-1} [(\mathbf{c}_1 + \bar{\mathbf{M}}_{II}^{-1} \mathbf{d}_1) \mathbf{f}_\infty(z; z_0) + (\mathbf{c}_2 + \bar{\mathbf{M}}_{II}^{-1} \mathbf{d}_2) \bar{\mathbf{f}}_\infty(z; \bar{z}_0)], \quad (4.155)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_I \bar{\mathbf{f}}_I^*(\bar{z}) = \bar{\mathbf{H}}^{-1} [(\mathbf{c}_1 - \mathbf{M}_{II}^{-1} \mathbf{d}_1) \mathbf{f}_\infty(\bar{z}; z_0) + (\mathbf{c}_2 - \mathbf{M}_{II}^{-1} \mathbf{d}_2) \bar{\mathbf{f}}_\infty(\bar{z}; \bar{z}_0)]. \quad (4.156)$$

Όπως προηγούμενα, η απαίτηση πεπερασμένων τάσεων σε κάθε σημείο της ισότροπης φάσης  $I$ , ικανοποιείται αν

$$\mathbf{c}_2 + \bar{\mathbf{M}}_{II}^{-1} \mathbf{d}_2 = \mathbf{0}, \quad (4.157)$$

$$\mathbf{c}_1 - \mathbf{M}_{II}^{-1} \mathbf{d}_1 = \mathbf{0}. \quad (4.158)$$

Οι εκφράσεις των μιγαδικών δυναμικών, που παρέχουν τα ελαστικά πεδία της ανισότροπης φάσης  $II$ , προκύπτουν με αντικατάσταση των (4.153). (4.154) στις (3.33) και (3.34). Βρίσκεται ότι

$$\mathbf{B}_{II} \mathbf{f}_{II}(z) = \bar{\mathbf{H}}^{-1} [(\mathbf{c}_1 + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{d}_1) \mathbf{f}_\infty(z; z_0) + (\mathbf{c}_2 + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{d}_2) \bar{\mathbf{f}}_\infty(z; \bar{z}_0)], \quad (4.159)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_{II} \bar{\mathbf{f}}_{II}(\bar{z}) = \mathbf{H}^{-1} [(\mathbf{c}_1 - \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{d}_1) \mathbf{f}_\infty(\bar{z}; z_0) + (\mathbf{c}_2 - \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{d}_2) \bar{\mathbf{f}}_\infty(\bar{z}; \bar{z}_0)]. \quad (4.160)$$

Η προσαρμογή της ιδιόμορφης συμπεριφοράς του μιγαδικού δυναμικού  $\mathbf{f}_H(z)$  στη συμπεριφορά της  $\mathbf{f}_\infty(z; z_0)$ , στο σημείο  $z_0$  οδηγεί στις σχέσεις

$$\bar{\mathbf{H}}^{-1}(\mathbf{c}_1 + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1}\mathbf{d}_1) = \mathbf{B}_H, \quad (4.161)$$

$$\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{c}_2 - \mathbf{M}_I^{-1}\mathbf{d}_2) = \bar{\mathbf{B}}_H. \quad (4.162)$$

Από την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων (4.157), (4.158), (4.161), (4.162), προκύπτουν οι παρακάτω τιμές των άγνωστων σταθερών μητρώων, που υπεισέρχονται στις εκφράσεις των διαφοσικών δυναμικών (4.153) και (4.154):

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{M}_H^{-1}\mathbf{B}_H, \quad \mathbf{d}_1 = \mathbf{B}_H, \quad (4.163)$$

$$\mathbf{c}_2 = \bar{\mathbf{M}}_H^{-1}\bar{\mathbf{B}}_H, \quad \mathbf{d}_2 = -\bar{\mathbf{B}}_H. \quad (4.164)$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των σταθερών αυτών στις εκφράσεις των διαφοσικών δυναμικών προκύπτουν οι σχέσεις

$$\mathbf{f}_0(z) = \mathbf{M}_H^{-1}\mathbf{B}_H\mathbf{f}_\infty(z; z_0) + \bar{\mathbf{M}}_H^{-1}\bar{\mathbf{B}}_H\bar{\mathbf{f}}_\infty(z; \bar{z}_0), \quad (4.165)$$

$$\mathbf{q}_0(z) = \mathbf{B}_H\mathbf{f}_\infty(z; z_0) - \bar{\mathbf{B}}_H\bar{\mathbf{f}}_\infty(z; \bar{z}_0). \quad (4.166)$$

Με βάση τις σχέσεις αυτές, οι εκφράσεις των μιγαδικών δυναμικών των δύο φάσεων του διυλικού παίρνουν τη μορφή

$$\mathbf{f}_I^*(z) = \mathbf{B}_I^{-1}\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{M}_H^{-1} + \bar{\mathbf{M}}_H^{-1})\mathbf{B}_H\mathbf{f}_\infty(z; z_0), \quad (4.167)$$

$$\bar{\mathbf{f}}_I^*(\bar{z}) = \bar{\mathbf{B}}_I^{-1}\bar{\mathbf{H}}^{-1}(\mathbf{M}_H^{-1} + \bar{\mathbf{M}}_H^{-1})\bar{\mathbf{B}}_H\bar{\mathbf{f}}_\infty(\bar{z}; \bar{z}_0), \quad (4.168)$$

για την ισότροπη φάση  $I$  του διυλικού, και

$$\mathbf{f}_H(z) = \mathbf{f}_\infty(z; z_0) + \mathbf{B}_H^{-1}\bar{\mathbf{H}}^{-1}(\bar{\mathbf{M}}_H^{-1} - \bar{\mathbf{M}}_I^{-1})\bar{\mathbf{B}}_H\bar{\mathbf{f}}_\infty(z; \bar{z}_0), \quad (4.169)$$

$$\bar{\mathbf{f}}_H(\bar{z}) = \bar{\mathbf{f}}_\infty(\bar{z}; \bar{z}_0) + \bar{\mathbf{B}}_H^{-1}\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{M}_H^{-1} - \mathbf{M}_I^{-1})\mathbf{B}_H\mathbf{f}_\infty(\bar{z}; z_0), \quad (4.170)$$

για την ανισότροπη φάση  $II$ .

## Κεφάλαιο 5

# ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΙΔΙΟΜΟΡΦΙΩΝ ΜΕ ΡΗΓΜΑΤΩΜΕΝΕΣ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ

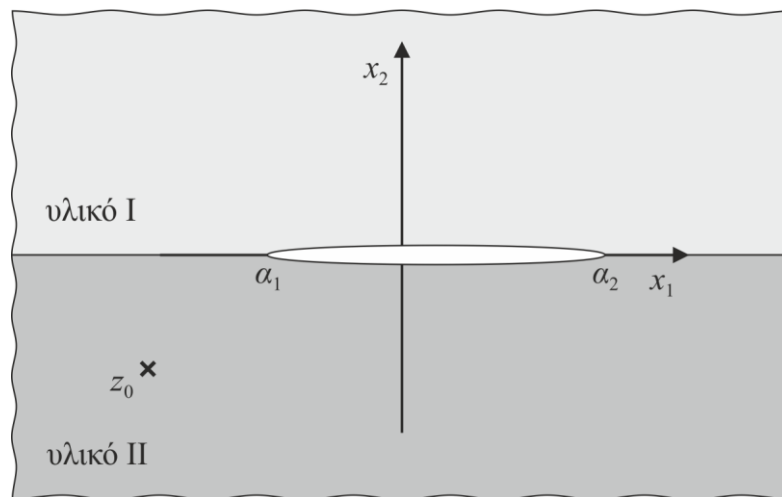
### 5.1 ΓΕΝΙΚΑ

Στο κεφάλαιο αυτό, αποκτώνται τα πλήρη ελαστικά πεδία που αναπτύσσονται στο διυλικό, λόγω σημειακών ιδιομορφιών, όταν στη διεπιφάνεια του διυλικού έχει εμφανισθεί μια ρωγμή. Η ανάλυση γίνεται για όλους τους συνδυασμούς ανισοτροπίας του υλικού, τα δε ελαστικά πεδία προσδιορίζονται για οποιαδήποτε μορφή της σημειακής ιδιομορφίας. Λεπτομερή αποτελέσματα παρέχονται για την περίπτωση της ομοιόμορφης φόρτισης, της γραμμικής εξάρμωσης και της γραμμικής δύναμης.

Η λύση του σχετικού ελαστικού προβλήματος βασίζεται στα αποτελέσματα που αποκτήθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο για μη ρηγματωμένη διεπιφάνεια του διυλικού. Με βάση τα αποτελέσματα αυτά και ένα σχήμα υπέρθεσης, το ελαστικό πρόβλημα της διεπιφανειακής ρωγμής ανάγεται σε ένα μητρωικό συνοριακό πρόβλημα Hilbert, με άγνωστες συναρτήσεις τα διαφασικά δυναμικά του διυλικού. Η επίλυση του προβλήματος Hilbert επιτυγχάνεται αναλυτικά χρησιμοποιώντας γνωστά θεωρήματα των ολόμορφων μιγαδικών συναρτήσεων και εισάγοντας μια νέα πρόταση της μιγαδικής ανάλυσης, που διατυπώνεται για πρώτη φορά στην παρούσα εργασία. Παρόλο που στη βιβλιογραφία έχει εμφανισθεί ένα τεράστιο ερευνητικό έργο πάνω στη διεπιφανειακή ρωγμή σε ισότροπα/ισότροπα και ανισότροπα/ανισότροπα διυλικά, οι ελαστικές λύσεις που έχουν προκύψει, περιορίζονται μόνο σε έναν ελάχιστο αριθμό φορτίσεων (England, 1966; Erdogan, 1963, 1965; Gotoh, 1967; Clements, 1971; Willis, 1971; Ting, 1986; Shih and Assaro, 1988; Qu and Bassani, 1989; Suo, 1990; Hwu, 1991).

## 5.2 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΗΣ ΡΩΓΜΗΣ

Σε σχέση με το μοντέλο των συνδεδεμένων ημίαιρων ελαστικών μέσων, που έχει εισαχθεί για την προσομοίωση του διυλικού, η διεπιφανειακή ρωγή ορίζεται ως ένα ασύνδετο διεπιφανειακό τμήμα, που περιορίζεται μεταξύ των γραμμών  $(a_1, 0, x_3)$  και  $(a_2, 0, x_3)$ , όπου  $a_1, a_2$  είναι πραγματικοί αριθμοί. Η ελαστική ανάλυση θα γίνει για μια ομοιόμορφη τάση στο άπειρο σύνορο του διυλικού και για μια γραμμική ιδιομορφία, της οποίας το μέτωπο βρίσκεται κατά μήκος της γραμμής  $(x_1^0, x_2^0, x_3)$ , που αντιστοιχεί στο σημείο  $z_0 = x_1^0 + ix_2^0$  του μιγαδικού επιπέδου  $z = (x_1 + ix_2)$ . Στην ανάλυση που θα γίνει, θα χρησιμοποιηθεί το μιγαδικό δυναμικό του αντίστοιχου ομογενούς προβλήματος, που παρέχεται από τις συναρτήσεις  $f_\infty(z; z_0)$  που έχουν προσδιορισθεί στο κεφάλαιο 2.



**Σχήμα 5-1:** Η διεπιφανειακή ρωγή στο επίπεδο  $z(= x_1 + ix_2)$

Υπενθυμίζεται ότι το αντίστοιχο ομογενές πρόβλημα αντιστοιχεί στην περίπτωση που το διυλικό παραμορφώνεται από την ίδια ιδιομορφία, είναι ομογενές και μη ρηγματωμένο, και έχει τις ελαστικές ιδιότητες της φάσης εκείνης που βρίσκεται η ιδιομορφία. Για την περίπτωση της ομοιόμορφης φόρτισης, θα υποθεθεί ότι μεταξύ των ελαστικών πεδίων, που εφαρμόζονται στα άπειρα σύνορα των δύο φάσεων, ισχύουν οι σχέσεις που έχουν εξαχθεί στην ενότητα 3.2. Οι σχέσεις αυτές εξασφαλίζουν την ισορροπία του διυλικού



και την απαιτούμενη συμβιβαστότητα των αναπτυσσόμενων παραμορφώσεων κατά μήκος της διεπιφάνειας του διυλικού.

Κατά μήκος του συνδεδεμένου διεπιφανειακού τμήματος, θα υποτεθεί ότι επικρατούν συνθήκες τέλει σύνδεσης, που περιγράφονται με τη συνέχεια των αναπτυσσόμενων ελαστικών μετατοπίσεων και τη συνέχεια του ελκυστή των τάσεων. Έτσι, για το τμήμα αυτό θα ισχύουν οι σχέσεις

$$u_i^I(x_1, x_2 = 0) = u_i^{II}(x_1, x_2 = 0), \sigma_{2i}^I(x_1, x_2 = 0) = \sigma_{2i}^{II}(x_1, x_2 = 0), (x_1 > a_2 \text{ και } x_1 < a_1). \quad (5.1)$$

Αν υποτεθεί ότι στα δύο σύνορα της ρωγμής δεν εφαρμόζεται εξωτερική φόρτιση, θα πρέπει να ισχύει

$$\sigma_{2i}^I(x_1, x_2 = 0) = \sigma_{2i}^{II}(x_1, x_2 = 0) = 0, (a_1 < x_1 < a_2). \quad (5.2)$$

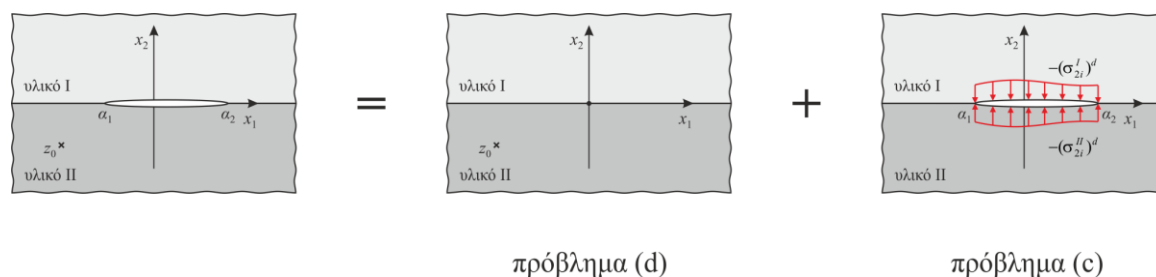
Λαμβάνοντας υπόψη τις (2.7) και (2.31), οι παραπάνω σχέσεις, μπορούν να γραφτούν στην παρακάτω ισοδύναμη μητρική μορφή

$$\mathbf{u}_I(x_1, x_2 = 0) = \mathbf{u}_{II}(x_1, x_2 = 0), \mathbf{X}_I(x_1, x_2 = 0) = \mathbf{X}_{II}(x_1, x_2 = 0), x_1 > a_2 \text{ και } x_1 < a_1, \quad (5.3)$$

και

$$\mathbf{X}_I(x_1, x_2 = 0) = \mathbf{X}_{II}(x_1, x_2 = 0) = \mathbf{0}, a_1 < x_1 < a_2. \quad (5.4)$$

Στη συνέχεια, η επίλυση του παραπάνω προβλήματος θα προκύψει από την επαλληλία των λύσεων δύο υπο-προβλημάτων: του υπο-προβλήματος (d) και του υπο-προβλήματος (c). Το υπο-πρόβλημα (d) αντιστοιχεί στην περίπτωση του διυλικού με τέλεια διεπιφανειακή σύνδεση, όταν αυτό φορτίζεται με την ιδιομορφία που θεωρείται. Το υπο-πρόβλημα (c) αντιστοιχεί στην περίπτωση του ρηγματωμένου διυλικού, όταν τα δύο σύνορα της ρωγμής φορτίζονται με τις τάσεις  $(-\sigma_{2i}^I)^d$  και  $(-\sigma_{2i}^{II})^d$ , που αναπτύσσονται στο διεπιφανειακό τμήμα  $(a_1, a_2)$ , του υπο-προβλήματος (d). Η επαλληλία αυτή δείχνεται στο Σχήμα 5-2.



**Σχήμα 5-2:** Τα υποπροβλήματα (d) και (c) και η υπέρθεσή τους

Το πρόβλημα (d) έχει επιλυθεί στο κεφάλαιο 4 για όλους τους δυνατούς συνδυασμούς ανισοτροπίας και για τις συγκεκριμένες ιδιομορφίες που θεωρούνται στην παρούσα εργασία. Στη συνέχεια, θα επιλυθεί το πρόβλημα (c), που είναι ένα συνοριακό πρόβλημα ρωγμής. Για το πρόβλημα αυτό ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες στα σύνορα της ρωγμής

$$(\sigma_{2i}^I)^c = -(\sigma_{2i}^I)^d, (\sigma_{2i}^{II})^c = -(\sigma_{2i}^{II})^d, a_1 \leq x_1 \leq a_2. \quad (5.5)$$

Οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να γραφούν ισοδύναμα στην παρακάτω μητρική μορφή

$$\mathbf{X}_I^c(x_1, x_2 = 0) = -\mathbf{X}_I^d(x_1, x_2 = 0), \mathbf{X}_{II}^c(x_1, x_2 = 0) = -\mathbf{X}_{II}^d(x_1, x_2 = 0), a_1 \leq x_1 \leq a_2. \quad (5.6)$$

Στο συνδεδεμένο διεπιφανειακό τμήμα του διυλικού επικρατούν συνθήκες τέλει σύνδεσης. Οι συνθήκες αυτές περιγράφονται με τις σχέσεις

$$\mathbf{X}_I^c(x_1, x_2 = 0) = \mathbf{X}_{II}^c(x_1, x_2 = 0), x_1 \leq a_1 \text{ και } x_1 \geq a_2. \quad (5.7)$$

Στη συνέχεια, θα επιλυθεί το συνοριακό πρόβλημα (c), για τις αντίστοιχες περιπτώσεις που έχουν θεωρηθεί στο πρόβλημα (d).

### 5.3 ΤΟ ΣΥΝΟΡΙΑΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΗΣ ΡΩΓΜΗΣ

#### 5.3.1 Ανισότροπο/ανισότροπο διυλικό

Θα εξετασθεί πρώτα η περίπτωση του ανισότροπου/ανισότροπου διυλικού, όταν η ιδιομορφία βρίσκεται στη φάση II. Η επίλυση του προβλήματος (d), που αντιστοιχεί στην περίπτωση αυτή, έχει αναπτυχθεί στην ενότητα 4.3. Από την επίλυση αυτή, οι συναρτησιακές ποσότητες  $\mathbf{X}_I^d(z, \bar{z})$  και  $\mathbf{X}_{II}^d(z, \bar{z})$ , που υπεισέρχονται στις συνοριακές συνθήκες (5.6) του προβλήματος (c), έχουν βρεθεί στη μορφή

$$\mathbf{X}_I^d(z, \bar{z}) = \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{M}_{II}^{-1} + \bar{\mathbf{M}}_{II}^{-1})\mathbf{B}_{II}\mathbf{f}_{\infty}(z; z_0) + \bar{\mathbf{H}}^{-1}(\mathbf{M}_{II}^{-1} + \bar{\mathbf{M}}_{II}^{-1})\bar{\mathbf{B}}_{II}\bar{\mathbf{f}}_{\infty}(\bar{z}; \bar{z}_0), \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{II}^d(z, \bar{z}) = & \mathbf{B}_{II}\mathbf{f}_{\infty}(z; z_0) + \bar{\mathbf{H}}^{-1}(\bar{\mathbf{M}}_{II}^{-1} - \bar{\mathbf{M}}_I^{-1})\bar{\mathbf{B}}_{II}\bar{\mathbf{f}}_{\infty}(z; \bar{z}_0) \\ & + \bar{\mathbf{B}}_{II}\bar{\mathbf{f}}_{\infty}(\bar{z}; \bar{z}_0) + \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{M}_{II}^{-1} - \mathbf{M}_I^{-1})\mathbf{B}_{II}\mathbf{f}_{\infty}(\bar{z}; z_0). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Στη συνέχεια, οι άνω δείκτες “d” και “c”, όπου αυτοί εμφανίζονται θα δηλώνουν ποσότητες που συνδέονται με τα υπο-προβλήματα (d) και (c), αντίστοιχα. Για το πρόβλημα (c), οι ποσότητες  $\mathbf{X}_I^c(z, \bar{z})$  και  $\mathbf{X}_H^c(z, \bar{z})$ , σε όρους των μιγαδικών δυναμικών  $\mathbf{f}_I^c(z)$  και  $\mathbf{f}_H^c(z)$  των δύο φάσεων του διυλικού, παρέχονται από τις σχέσεις

$$\mathbf{X}_I^c(z, \bar{z}) = \mathbf{B}_I \mathbf{f}_I^c(z) + \bar{\mathbf{B}}_I \bar{\mathbf{f}}_I^c(\bar{z}), \quad (5.10)$$

$$\mathbf{X}_H^c(z, \bar{z}) = \mathbf{B}_H \mathbf{f}_H^c(z) + \bar{\mathbf{B}}_H \bar{\mathbf{f}}_H^c(\bar{z}). \quad (5.11)$$

Για την περίπτωση του ανισότροπου/ανισότροπου συνδυασμού, τα μιγαδικά δυναμικά  $\mathbf{f}_I^c(z)$  και  $\mathbf{f}_H^c(z)$  μπορούν να γραφούν σε όρους των διφασικών δυναμικών  $\mathbf{f}_0^c(z)$  και  $\mathbf{q}_0^c(z)$  του διυλικού στη μορφή

$$\mathbf{f}_I^c(z) = \mathbf{B}_I^{-1} \mathbf{H}^{-1} \left[ \mathbf{f}_0^c(z) + \bar{\mathbf{M}}_H^{-1} \mathbf{q}_0^c(z) \right], \quad (5.12)$$

$$\mathbf{f}_H^c(z) = \mathbf{B}_H^{-1} \bar{\mathbf{H}}^{-1} \left[ \mathbf{f}_0^c(z) + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{q}_0^c(z) \right]. \quad (5.13)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (5.12) και (5.13) στις (5.10) και (5.11), οι ποσότητες  $\mathbf{X}_I^c(z, \bar{z})$  και  $\mathbf{X}_H^c(z, \bar{z})$  σε όρους των διφασικών δυναμικών γράφονται:

$$\mathbf{X}_I^c(z, \bar{z}) = \mathbf{H}^{-1} \left[ \mathbf{f}_0^c(z) + \bar{\mathbf{M}}_H^{-1} \mathbf{q}_0^c(z) \right] + \bar{\mathbf{H}}^{-1} \left[ \mathbf{f}_0^c(\bar{z}) - \mathbf{M}_H^{-1} \mathbf{q}_0^c(\bar{z}) \right], \quad (5.14)$$

$$\mathbf{X}_H^c(z, \bar{z}) = \bar{\mathbf{H}}^{-1} \left[ \mathbf{f}_0^c(z) + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{q}_0^c(z) \right] + \mathbf{H}^{-1} \left[ \mathbf{f}_0^c(\bar{z}) - \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{q}_0^c(\bar{z}) \right]. \quad (5.15)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις αυτές στις συνοριακές συνθήκες (5.6), προκύπτει ότι

$$\mathbf{H}^{-1} \left[ \mathbf{f}_0^c(x_1) + \bar{\mathbf{M}}_H^{-1} \mathbf{q}_0^c(x_1) \right]^+ + \bar{\mathbf{H}}^{-1} \left[ \mathbf{f}_0^c(x_1) - \mathbf{M}_H^{-1} \mathbf{q}_0^c(x_1) \right]^- = -\mathbf{X}^d(x_1, x_1), \quad (5.16)$$

$$\bar{\mathbf{H}}^{-1} \left[ \mathbf{f}_0^c(x_1) + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{q}_0^c(x_1) \right]^- + \mathbf{H}^{-1} \left[ \mathbf{f}_0^c(x_1) - \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{q}_0^c(x_1) \right]^+ = -\mathbf{X}^d(x_1, x_1), \quad x_1 \in (a_1, a_2). \quad (5.17)$$

όπου έχει τεθεί  $\mathbf{X}^d(x_1, x_1) = \mathbf{X}_I^d(x_1, x_1) = \mathbf{X}_H^d(x_1, x_1)$ , και επομένως

$$\mathbf{X}^d(x_1, x_1) = \mathbf{H}^{-1} \left( \mathbf{M}_H^{-1} + \bar{\mathbf{M}}_H^{-1} \right) \mathbf{B}_H \mathbf{f}_\infty(x_1; z_0) + \bar{\mathbf{H}}^{-1} \left( \mathbf{M}_H^{-1} + \bar{\mathbf{M}}_H^{-1} \right) \bar{\mathbf{B}}_H \bar{\mathbf{f}}_\infty(x_1; \bar{z}_0). \quad (5.18)$$

Στις παραπάνω σχέσεις, τα σύμβολα  $[\dots]^+$  και  $[\dots]^-$  έχουν εισαχθεί για να δηλώσουν τις τιμές που παίρνουν οι ποσότητες, που βρίσκονται στις αγκύλες, όταν το  $z$  προσεγγίζει τη διεπιφανειακή ρωγμή από τις φάσεις  $I$  και  $II$  του διυλικού, αντίστοιχα. Με

πρόσθεση και αφαίρεση των εξισώσεων (5.16) και (5.17), προκύπτει το παρακάτω ισοδύναμο σύστημα μητρικών εξισώσεων

$$\left[ \mathbf{q}_0^c(x_1) \right]^+ = \left[ \mathbf{q}_0^c(x_1) \right]^-, \quad x_1 \in (a_1, a_2), \quad (5.19)$$

$$\mathbf{H}^{-1} \left[ \mathbf{f}_0^c(x_1) \right]^+ + \bar{\mathbf{H}}^{-1} \left[ \mathbf{f}_0^c(x_1) \right]^- = \mathbf{g}_0^c(x_1), \quad x_1 \in (a_1, a_2), \quad (5.20)$$

όπου έχει τεθεί

$$\mathbf{g}_0^c(x_1) = -\mathbf{X}^d(x_1, x_1) + (\bar{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{M}_H^{-1} - \mathbf{H}^{-1} \bar{\mathbf{M}}_H^{-1}) \mathbf{q}_0^c(x_1). \quad (5.21)$$

Η εξίσωση (5.19) δείχνει ότι το διαφοσικό δυναμικό  $\mathbf{q}_0^c(z)$  είναι μια ολόμορφη συνάρτηση, που είναι παντού συνεχής στο μιγαδικό επίπεδο  $z$ . Επομένως, μπορεί να γραφεί ότι

$$\mathbf{q}_0^c(x_1) = \left[ \mathbf{q}_0^c(x_1) \right]^+ = \left[ \mathbf{q}_0^c(x_1) \right]^-, \quad x_1 \in (-\infty, \infty). \quad (5.22)$$

### 5.3.2 Ανισότροπο/ισότροπο διωλικό

Στην περίπτωση που η φάση  $I$  του διωλικού είναι ισότροπη, η φάση  $II$  ανισότροπη και η φόρτιση επενεργεί στην ισότροπη φάση  $I$ , οι συναρτησιακές ποσότητες  $\mathbf{X}_I^d(z, \bar{z})$  και  $\mathbf{X}_{II}^d(z, \bar{z})$  έχουν προσδιορισθεί στην ενότητα 4.3 στη μορφή

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_I^d(z, \bar{z}) = & \mathbf{B}_I \mathbf{f}_\infty^*(z; z_0) + \bar{\mathbf{H}}^{-1} (\bar{\mathbf{M}}_I^{-1} - \bar{\mathbf{M}}_{II}^{-1}) \bar{\mathbf{B}}_I \bar{\mathbf{f}}_\infty^*(z; \bar{z}_0) \\ & + \bar{\mathbf{B}}_I \bar{\mathbf{f}}_\infty^*(\bar{z}; \bar{z}_0) + \mathbf{H}^{-1} (\mathbf{M}_I^{-1} - \mathbf{M}_{II}^{-1}) \mathbf{B}_I \mathbf{f}_\infty^*(\bar{z}; z_0), \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\mathbf{X}_{II}^d(z, \bar{z}) = \bar{\mathbf{H}}^{-1} (\mathbf{M}_I^{-1} + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1}) \mathbf{B}_I \mathbf{f}_\infty^*(z; z_0) + \mathbf{H}^{-1} (\mathbf{M}_I^{-1} + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1}) \bar{\mathbf{B}}_I \bar{\mathbf{f}}_\infty^*(\bar{z}; \bar{z}_0), \quad (5.24)$$

όπου

$$\mathbf{f}_\infty^*(z; z_0) = \mathbf{f}_\infty(z; z_0) - z \mathbf{T} \mathbf{f}'_\infty(z; z_0), \quad (5.25)$$

και

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Στις παραπάνω σχέσεις, η ολόμορφη συνάρτηση  $\mathbf{f}_\infty(z; z_0)$  έχει προσδιορισθεί στην ενότητα 2.5 για όλες τις ιδιομορφίες που εξετάζονται. Για το πρόβλημα (c), οι αντίστοιχες ποσότητες σε όρους των μιγαδικών δυναμικών  $\mathbf{f}_I^{*c}(z)$  και  $\mathbf{f}_H^c(z)$  των δύο φάσεων του διυλικού παρέχονται από τις σχέσεις

$$\mathbf{X}_I^c(z, \bar{z}) = \mathbf{B}_I \mathbf{f}_I^{*c}(z) + \bar{\mathbf{B}}_I \bar{\mathbf{f}}_I^{*c}(\bar{z}), \quad (5.26)$$

$$\mathbf{X}_H^c(z, \bar{z}) = \mathbf{B}_H \mathbf{f}_H^c(z) + \bar{\mathbf{B}}_H \bar{\mathbf{f}}_H^c(\bar{z}). \quad (5.27)$$

Για την περίπτωση του ανισότροπου/ισότροπου διυλικού, οι εκφράσεις των μιγαδικών δυναμικών, που υπεισέρχονται στις παραπάνω σχέσεις, έχουν τη μορφή

$$\mathbf{f}_I^{*c}(z) = \mathbf{f}_I^c(z) - z \mathbf{T} \mathbf{f}_I^c(z) = \mathbf{B}_I^{-1} \mathbf{H}^{-1} [\mathbf{f}_0^c(z) + \mathbf{M}_H^{-1} \mathbf{q}_0^c(z)], \quad (5.28)$$

$$\mathbf{f}_H^c(z) = \mathbf{B}_H^{-1} \bar{\mathbf{H}}^{-1} [\mathbf{f}_0^c(z) + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{q}_0^c(z)]. \quad (5.29)$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στις (5.26) και (5.27), προκύπτουν οι εκφράσεις των συναρτησιακών ποσοτήτων  $\mathbf{X}_I^c(z, \bar{z})$  και  $\mathbf{X}_H^c(z, \bar{z})$  σε όρους των διφασικών δυναμικών

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_I^c(z, \bar{z}) = & \mathbf{H}^{-1} [\mathbf{f}_0^c(z) + \bar{\mathbf{M}}_H^{-1} \mathbf{q}_0^c(z)] + \bar{\mathbf{H}}^{-1} [\mathbf{f}_0^c(\bar{z}) - \mathbf{M}_H^{-1} \mathbf{q}_0^c(\bar{z})] \\ & + (\bar{z} - z) \left\{ \mathbf{C}_I \mathbf{H}^{-1} [\mathbf{f}_0^c(z) + \bar{\mathbf{M}}_H^{-1} \mathbf{q}_0^c(z)] - \bar{\mathbf{C}}_I \bar{\mathbf{H}}^{-1} [\mathbf{f}_0^c(\bar{z}) - \mathbf{M}_H^{-1} \mathbf{q}_0^c(\bar{z})] \right\}, \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\mathbf{X}_H^c(z, \bar{z}) = \bar{\mathbf{H}}^{-1} [\mathbf{f}_0^c(z) + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{q}_0^c(z)] + \mathbf{H}^{-1} [\mathbf{f}_0^c(\bar{z}) - \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{q}_0^c(\bar{z})]. \quad (5.31)$$

Αντικαθιστώντας τις (5.30) και (5.31) στις συνοριακές συνθήκες (5.6), προκύπτει το παρακάτω σύστημα εξισώσεων

$$\mathbf{H}^{-1} [\mathbf{f}_0^c(x_1) + \bar{\mathbf{M}}_H^{-1} \mathbf{q}_0^c(x_1)]^+ + \bar{\mathbf{H}}^{-1} [\mathbf{f}_0^c(x_1) - \mathbf{M}_H^{-1} \mathbf{q}_0^c(x_1)]^- = -\mathbf{X}^d(x_1, x_1), \quad (5.32)$$

$$\bar{\mathbf{H}}^{-1} [\mathbf{f}_0^c(x_1) + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{q}_0^c(x_1)]^- + \mathbf{H}^{-1} [\mathbf{f}_0^c(x_1) - \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{q}_0^c(x_1)]^+ = -\mathbf{X}^d(x_1, x_1), \quad (5.33)$$

Στις σχέσεις αυτές έχει τεθεί  $\mathbf{X}^d(x_1, x_1) = \mathbf{X}_I^d(x_1, x_1) = \mathbf{X}_H^d(x_1, x_1)$ , όπου

$$\mathbf{X}^d(x_1, x_1) = \bar{\mathbf{H}}^{-1} (\mathbf{M}_I^{-1} + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1}) \mathbf{B}_I \mathbf{f}_\infty^*(x_1; z_0) + \mathbf{H}^{-1} (\mathbf{M}_I^{-1} + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1}) \bar{\mathbf{B}}_I \bar{\mathbf{f}}_\infty^*(x_1; \bar{z}_0). \quad (5.34)$$

Οι σχέσεις αυτές ταυτίζονται με τις σχέσεις που έχουν προκύψει για την περίπτωση του ανισότροπου/ανισότροπου διυλικού. Έτσι, το παραπάνω μητρικό σύστημα ανάγεται στο

σύστημα των εξισώσεων (5.16) και (5.17), του οποίου η γενική λύση θα εξαχθεί παρακάτω.

Τα παραπάνω αναφέρονται στην περίπτωση που η ιδιομορφία βρίσκεται στην ισότροπη φάση *I*. Στην περίπτωση που η ιδιομορφία επενεργεί στην ανισότροπη φάση *II*, οι ποσότητες  $\mathbf{X}_I^d(z, \bar{z})$  και  $\mathbf{X}_{II}^d(z, \bar{z})$  έχουν βρεθεί στη μορφή

$$\mathbf{X}_I^d(z, \bar{z}) = \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{M}_{II}^{-1} + \bar{\mathbf{M}}_{II}^{-1})\mathbf{B}_{II}\mathbf{f}_{\infty}(z; z_0) + \bar{\mathbf{H}}^{-1}(\mathbf{M}_{II}^{-1} + \bar{\mathbf{M}}_{II}^{-1})\bar{\mathbf{B}}_{II}\bar{\mathbf{f}}_{\infty}(\bar{z}; \bar{z}_0), \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{II}^d(z, \bar{z}) &= \mathbf{B}_{II}\mathbf{f}_{\infty}(z; z_0) + \bar{\mathbf{H}}^{-1}(\bar{\mathbf{M}}_{II}^{-1} - \bar{\mathbf{M}}_I^{-1})\bar{\mathbf{B}}_{II}\bar{\mathbf{f}}_{\infty}(z; \bar{z}_0) \\ &+ \bar{\mathbf{B}}_{II}\bar{\mathbf{f}}_{\infty}(\bar{z}; \bar{z}_0) + \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{M}_{II}^{-1} - \mathbf{M}_I^{-1})\mathbf{B}_{II}\mathbf{f}_{\infty}(\bar{z}; z_0). \end{aligned} \quad (5.36)$$

Για το πρόβλημα (c), οι αντίστοιχες ποσότητες σε όρους των μιγαδικών δυναμικών  $\mathbf{f}_I^{*c}(z)$  και  $\mathbf{f}_{II}^c(z)$  των δύο φάσεων παρέχονται από τις σχέσεις (5.28) και (5.29). Από τις σχέσεις αυτές, παίρνοντας υπόψη τις (5.30), (5.31), προκύπτει το μητρικό σύστημα

$$\mathbf{H}^{-1}[\mathbf{f}_0^c(x_1) + \bar{\mathbf{M}}_{II}^{-1}\mathbf{q}_0^c(x_1)]^+ + \bar{\mathbf{H}}^{-1}[\mathbf{f}_0^c(x_1) - \mathbf{M}_{II}^{-1}\mathbf{q}_0^c(x_1)]^- = -\mathbf{X}^d(x_1, x_1), \quad (5.37)$$

$$\bar{\mathbf{H}}^{-1}[\mathbf{f}_0^c(x_1) + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1}\mathbf{q}_0^c(x_1)]^- + \mathbf{H}^{-1}[\mathbf{f}_0^c(x_1) - \mathbf{M}_I^{-1}\mathbf{q}_0^c(x_1)]^+ = -\mathbf{X}^d(x_1, x_1), \quad (5.38)$$

όπου έχει τεθεί  $\mathbf{X}_I^d(x_1, x_1) = \mathbf{X}_{II}^d(x_1, x_1) = \mathbf{X}^d(x_1, x_1)$ . Από τις (5.37) και (5.38) βρίσκεται

$$\mathbf{X}^d(x_1, x_1) = \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{M}_{II}^{-1} + \bar{\mathbf{M}}_{II}^{-1})\mathbf{B}_{II}\mathbf{f}_{\infty}(x_1; z_0) + \bar{\mathbf{H}}^{-1}(\mathbf{M}_{II}^{-1} + \bar{\mathbf{M}}_{II}^{-1})\bar{\mathbf{B}}_{II}\bar{\mathbf{f}}_{\infty}(x_1; \bar{z}_0). \quad (5.39)$$

Όπως στην προηγούμενη περίπτωση, οι παραπάνω σχέσεις οδηγούν στο μητρικό σύστημα (5.19) και (5.20), του οποίου η λύση αντιμετωπίζεται παρακάτω.

### 5.3.3 Ισότροπο/ισότροπο διωλικό

Όταν και οι δύο φάσεις του διωλικού είναι ισότροπες, και η ιδιομορφία βρίσκεται στη φάση *II* του διωλικού, οι συναρτησιακές ποσότητες  $\mathbf{X}_I^d(z, \bar{z})$  και  $\mathbf{X}_{II}^d(z, \bar{z})$  έχουν προσδιορισθεί στη μορφή

$$\mathbf{X}_I^d(z, \bar{z}) = \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{M}_{II}^{-1} + \bar{\mathbf{M}}_{II}^{-1})\mathbf{B}_{II}\mathbf{f}_{\infty}^*(z; z_0) + \bar{\mathbf{H}}^{-1}(\mathbf{M}_{II}^{-1} + \bar{\mathbf{M}}_{II}^{-1})\bar{\mathbf{B}}_{II}\bar{\mathbf{f}}_{\infty}^*(\bar{z}; \bar{z}_0), \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_H^d(z, \bar{z}) &= \mathbf{B}_H \mathbf{f}_\infty^*(z; z_0) + \bar{\mathbf{H}}^{-1} (\bar{\mathbf{M}}_H^{-1} - \bar{\mathbf{M}}_I^{-1}) \bar{\mathbf{B}}_H \bar{\mathbf{f}}_\infty^*(z; \bar{z}_0) \\ &+ \bar{\mathbf{B}}_H \bar{\mathbf{f}}_\infty^*(\bar{z}; \bar{z}_0) + \mathbf{H}^{-1} (\mathbf{M}_H^{-1} - \mathbf{M}_I^{-1}) \mathbf{B}_H \mathbf{f}_\infty^*(z; z_0), \end{aligned} \quad (5.41)$$

όπου η συνάρτηση  $\mathbf{f}_\infty^*(z; z_0)$  ορίζεται με τη σχέση (5.25). Για το πρόβλημα (c), οι εκφράσεις των ποσοτήτων  $\mathbf{X}_I^c(z, \bar{z})$ ,  $\mathbf{X}_H^c(z, \bar{z})$  σε όρους των μιγαδικών δυναμικών  $\mathbf{f}_I^{*c}(z)$  και  $\mathbf{f}_H^{*c}(z)$  έχουν τη μορφή

$$\mathbf{X}_I^c(z, \bar{z}) = \mathbf{B}_I \mathbf{f}_I^{*c}(z) + \bar{\mathbf{B}}_I \bar{\mathbf{f}}_I^{*c}(\bar{z}), \quad (5.42)$$

$$\mathbf{X}_H^c(z, \bar{z}) = \mathbf{B}_H \mathbf{f}_H^{*c}(z) + \bar{\mathbf{B}}_H \bar{\mathbf{f}}_H^{*c}(\bar{z}). \quad (5.43)$$

Για την περίπτωση του ισότροπου/ισότροπου διυλικού, τα μιγαδικά δυναμικά δύο φάσεων σε όρους των διαφοσικών δυναμικών παρέχονται με τις σχέσεις

$$\mathbf{f}_I^{*c}(z) = \mathbf{f}_I^c(z) - z \mathbf{T} \mathbf{f}_I'^c(z) = \mathbf{B}_I^{-1} \mathbf{H}^{-1} [\mathbf{f}_0^c(z) + \mathbf{M}_H^{-1} \mathbf{q}_0^c(z)], \quad (5.44)$$

$$\mathbf{f}_H^{*c}(z) = \mathbf{f}_H^c(z) - z \mathbf{T} \mathbf{f}_H'^c(z) = \mathbf{B}_H^{-1} \bar{\mathbf{H}}^{-1} [\mathbf{f}_0^c(z) + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{q}_0^c(z)]. \quad (5.45)$$

Χρησιμοποιώντας τις (5.42)-(5.45), οι συνοριακές συνθήκες (5.6) οδηγούν στο παρακάτω συνοριακό πρόβλημα

$$\mathbf{H}^{-1} [\mathbf{f}_0^c(x_1) + \bar{\mathbf{M}}_H^{-1} \mathbf{q}_0^c(x_1)]^+ + \bar{\mathbf{H}}^{-1} [\mathbf{f}_0^c(x_1) - \mathbf{M}_H^{-1} \mathbf{q}_0^c(x_1)]^- = -\mathbf{X}^d(x_1, x_1), \quad (5.46)$$

$$\bar{\mathbf{H}}^{-1} [\mathbf{f}_0^c(x_1) + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \mathbf{q}_0^c(x_1)]^- + \mathbf{H}^{-1} [\mathbf{f}_0^c(x_1) - \mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{q}_0^c(x_1)]^+ = -\mathbf{X}^d(x_1, x_1), \quad (5.47)$$

όπου έχει τεθεί  $\mathbf{X}^d(x_1, x_1) = \mathbf{X}_I^d(x_1, x_1) = \mathbf{X}_H^d(x_1, x_1)$ . Η ποσότητα  $\mathbf{X}^d(x_1, x_1)$  παρέχεται με τη σχέση

$$\mathbf{X}^d(x_1, x_1) = \mathbf{H}^{-1} (\mathbf{M}_H^{-1} + \bar{\mathbf{M}}_H^{-1}) \mathbf{B}_H \mathbf{f}_\infty^*(x_1; z_0) + \bar{\mathbf{H}}^{-1} (\mathbf{M}_H^{-1} + \bar{\mathbf{M}}_H^{-1}) \bar{\mathbf{B}}_H \bar{\mathbf{f}}_\infty^*(x_1; \bar{z}_0). \quad (5.48)$$

Το παραπάνω συνοριακό πρόβλημα ταυτίζεται με αυτά που έχουν προκύψει προηγούμενα για τους άλλους δύο συνδυασμούς φάσεων του διυλικού.

## 5.4 ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΣΥΝΟΡΙΑΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

### 5.4.1 Αναγωγή του συνοριακού προβλήματος της ρωγμής σε πρόβλημα Hilbert

Οι άγνωστες συναρτήσεις του προβλήματος (c) είναι τα διαφοσικά δυναμικά  $\mathbf{f}_0^c(z)$  και  $\mathbf{q}_0^c(z)$ , που είναι ολόμορφες συναρτήσεις. Δείχθηκε προηγούμενα, ότι οι συναρτήσεις αυτές, για όλους τους συνδυασμούς ανισοτροπίας, θα πρέπει να ικανοποιούν τις συνθήκες (5.19) και (5.20) πάνω στα σύνορα της ρωγμής. Επίσης, λόγω απουσίας τάσεων στο άπειρο, οι συναρτήσεις αυτές, πρέπει να συγκλίνουν στο μηδέν στην περιοχή του απείρου. Η συνθήκη (5.19) δείχνει ότι η άγνωστη ολόμορφη συνάρτηση  $\mathbf{q}_0^c(z)$ , είναι παντού ολόμορφη στο μιγαδικό επίπεδο  $z$ , και επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Liouville θα πρέπει να είναι μια σταθερή συνάρτηση (Milne-Thomson, 1968). Επιπλέον, επειδή η συνάρτηση αυτή μηδενίζεται στο άπειρο, θα πρέπει να είναι η μηδενική συνάρτηση, συνεπώς

$$\mathbf{q}_0^c(z) = \mathbf{0}. \quad (5.49)$$

Απομένει τώρα ο προσδιορισμός της ολόμορφης συνάρτησης  $\mathbf{f}_0^c(z)$ . Η συνάρτηση αυτή είναι παντού ολόμορφη στο μιγαδικό επίπεδο  $z$ , μηδενίζεται στο άπειρο και, σύμφωνα με την (5.20), είναι τμηματικά συνεχής πάνω στον άξονα  $x_1$ . Η ασυνέχεια της συνάρτησης αυτής περιορίζεται στο τμήμα  $(a_1, a_2)$  του άξονα  $x_1$ , που βρίσκεται η διεπιφανειακή ρωγμή. Η ασυνέχεια αυτή περιγράφεται με τη σχέση (5.20), η οποία, παίρνοντας υπόψη τις (5.49) και (5.21), μπορεί να τεθεί στη μορφή

$$\left[ \mathbf{f}_0^c(x_1) \right]^+ + \mathbf{H}\bar{\mathbf{H}}^{-1} \left[ \mathbf{f}_0^c(x_1) \right]^- = -\mathbf{H}\mathbf{X}^d(x_1, x_1). \quad (5.50)$$

Η σχέση (5.50) ορίζει ένα πρόβλημα Hilbert σε μητρική μορφή, με άγνωστη συνάρτηση την  $\mathbf{f}_0^c(z)$ . Το μητρώο  $\mathbf{H}\bar{\mathbf{H}}^{-1}$  μπορεί να γραφεί στην παρακάτω διαγωνοποιημένη μορφή

$$\mathbf{H}\bar{\mathbf{H}}^{-1} = \mathbf{R}\mathbf{L}\mathbf{R}^{-1}, \quad (5.51)$$

όπου

$$\mathbf{L} = \langle \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \rangle, \quad \mathbf{R} = [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3]. \quad (5.52)$$



Τα στοιχεία  $\lambda_k$  του μητρώου  $\mathbf{L}$  έχουν προσδιορισθεί από τον Ting (1986), στη μορφή

$$\lambda_1 = \frac{1-\beta}{1+\beta}, \lambda_2 = \frac{1+\beta}{1-\beta}, \lambda_3 = 1, \quad (5.53)$$

όπου

$$\beta = \left[ -\frac{1}{2} \text{trac}(\mathbf{W}\mathbf{D}^{-1})^2 \right]^{1/2}, \quad (5.54)$$

με

$$\mathbf{H} = \mathbf{D} - i\mathbf{W}. \quad (5.55)$$

Τα στοιχεία του μητρώου  $\mathbf{R}$ , που είναι μητρώα στήλες, προσδιορίζονται από τις παρακάτω σχέσεις

$$\mathbf{H}\bar{\mathbf{H}}^{-1}\mathbf{r}_1 = \lambda_1\mathbf{r}_1, \mathbf{H}\bar{\mathbf{H}}^{-1}\mathbf{r}_2 = \lambda_2\mathbf{r}_2, \mathbf{H}\bar{\mathbf{H}}^{-1}\mathbf{r}_3 = \lambda_3\mathbf{r}_3. \quad (5.56)$$

Η παραπάνω σχέση ορίζει ένα πρόβλημα ιδιοτιμών με ιδιοδιανύσματα τα  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$  και ιδιοτιμές τα  $\lambda_1, \lambda_2$  και  $\lambda_3$ . Έχει αποδειχθεί από τον Ting (1986), ότι  $\lambda_1$  και  $\lambda_2$  είναι πραγματικοί αριθμοί και ότι  $\lambda_3 = 1$ . Από την (5.53), άμεσα προκύπτει ότι τα  $\lambda_1, \lambda_2$  συνδέονται με τη σχέση

$$\lambda_1 = \frac{1}{\lambda_2}. \quad (5.57)$$

Από τη σχέση αυτή και την (5.56) συνάγεται ότι τα μητρώα (ιδιοδιανύσματα)  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  και  $\mathbf{r}_3$  που αντιστοιχούν στις τιμές (ιδιοτιμές)  $\lambda_1, \lambda_2$  και  $\lambda_3$ , ικανοποιούν τις συνθήκες

$$\mathbf{r}_1 = \bar{\mathbf{r}}_2, \mathbf{r}_3 = \bar{\mathbf{r}}_3. \quad (5.58)$$

Η δεύτερη συνθήκη δείχνει ότι τα στοιχεία του μητρώου  $\mathbf{r}_3$  είναι πραγματικά. Θέτοντας  $\mathbf{r}_1 = \bar{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{r}$  και  $\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_0$ , εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

$$\mathbf{r}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{r} = \mathbf{0}, \mathbf{r}^T \bar{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{r} = \mathbf{0}, \mathbf{r}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{r}_0 = \mathbf{0}, \bar{\mathbf{r}}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{r}_0 = \mathbf{0}. \quad (5.59)$$

Στη συνέχεια, θα επιλυθεί το πρόβλημα Hilbert (5.50), με αναγωγή του στην παρακάτω ισοδύναμη μορφή

$$\left[ \mathbf{R}^{-1} \mathbf{f}_0^c(x_1) \right]^+ + \mathbf{L} \left[ \mathbf{R}^{-1} \mathbf{f}_0^c(x_1) \right]^- = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{X}^d(x_1, x_1), \quad x_1 \in (a_1, a_2). \quad (5.60)$$

Η μορφή αυτή προκύπτει αντικαθιστώντας την (5.51) στην (5.50). Το παραπάνω πρόβλημα έχει αναχθεί σε ένα πρόβλημα Hilbert μητρικής μορφής με άγνωστη μητρική συνάρτηση την  $\mathbf{R}^{-1}\mathbf{f}_0^c(z)$  (Muskhelishvili, 1953). Για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος, θα ορισθεί η μητρική συνάρτηση  $\mathcal{X}(z)$ , σε σχέση με το ευθύγραμμο τμήμα  $\Gamma = (a_1, a_2)$  του άξονα  $x_2$ , με τη σχέση

$$\mathcal{X}(z) = \langle \mathcal{X}_1(z_1), \mathcal{X}_2(z_2), \mathcal{X}_3(z_3) \rangle, \quad (5.61)$$

όπου

$$\mathcal{X}_k(z_k) = \sqrt{(z_k - a_1)(z_k - a_2)} \left( \frac{z_k - a_2}{z_k - a_1} \right)^{i\varepsilon_k}, \quad (5.62)$$

είναι συναρτήσεις τύπου Plemelj, που ορίζονται αναφορικά με το τμήμα  $\Gamma = (a_1, a_2)$  (Muskhelishvili, 1953). Στις συναρτήσεις αυτές, τα  $\varepsilon_k$  είναι πραγματικοί αριθμοί. Για τις ολόμορφες συναρτήσεις  $\mathcal{X}_k(z_k)$  εύκολα δείχνεται ότι

$$\mathcal{X}_k^+(x_1) = -e^{-2\pi\varepsilon_k} \mathcal{X}_k^-(x_1), \quad x_1 \in \Gamma = (a_1, a_2). \quad (5.63)$$

Ορίζοντας το  $\varepsilon_k$  των συναρτήσεων αυτών με τη σχέση

$$e^{-2\pi\varepsilon_k} = \lambda_k, \quad (5.64)$$

όπου τα  $\lambda_k$  παρέχονται από τις σχέσεις (5.53), προκύπτει

$$\varepsilon_k = -\frac{1}{2\pi} \ln \lambda_k. \quad (5.65)$$

Έτσι, η σχέση (5.63) γίνεται

$$\mathcal{X}_k^+(x_1) = -\lambda_k \mathcal{X}_k^-(x_1), \quad x_1 \in \Gamma = (a_1, a_2), \quad (5.66)$$

που σε μητρική μορφή γράφεται

$$\mathbf{L} = -[\mathcal{X}^+(x_1)][\mathcal{X}^-(x_1)]^{-1}, \quad x_1 \in \Gamma = (a_1, a_2). \quad (5.67)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (5.67) στην (5.60), προκύπτει η παρακάτω μορφή του προβλήματος Hilbert

$$\{[\mathbf{R}\mathcal{X}(x_1)]^{-1}\mathbf{f}_0^c(x_1)\}^+ - \{[\mathbf{R}\mathcal{X}(x_1)]^{-1}\mathbf{f}_0^c(x_1)\}^- = -[\mathbf{R}\mathcal{X}^+(x_1)]^{-1}\mathbf{H}\mathbf{X}^d(x_1, x_1), \quad x_1 \in (a_1, a_2). \quad (5.68)$$

Στην επίλυση του συνοριακού προβλήματος Hilbert, που ορίζεται με τη συναρτησιακή σχέση (5.68), υπεισέρχεται η συνάρτηση  $\mathbf{X}^d(x_1, x_1)$ , που αντιπροσωπεύει τις συνοριακές τιμές των μη ολόμορφων συναρτήσεων  $\mathbf{X}_I^d(z, \bar{z})$  και  $\mathbf{X}_{II}^d(z, \bar{z})$  των δύο φάσεων. Από τη συνοριακή τιμή της συνάρτησης  $\mathbf{X}_I^d(x_1, x_1)$  πάνω στο διεπιφανειακό τμήμα  $(a_1, a_2)$ , ορίζεται η ολόμορφη συνάρτηση  $\mathbf{X}_I^d(z, z)$ , που αποτελεί τον ολομορφικό μετασχηματισμό της μη ολόμορφης συνάρτησης  $\mathbf{X}_I^d(z, \bar{z})$  (Kattis and Manroyannis, 2011). Με το μετασχηματισμό αυτό, ανοίγεται ο δρόμος για την επίλυση του συνοριακού προβλήματος Hilbert, στο οποίο πρέπει να υπεισέρχονται μόνο ολόμορφες μιγαδικές συναρτήσεις. Παρακάτω, το πρόβλημα Hilbert, που ορίζεται με τη σχέση (5.68), επιλύεται αναλυτικά για δύο διακριτές περιπτώσεις της ολόμορφης συνάρτησης  $\mathbf{X}^d(z, z)$ .

## 5.4.2 Επίλυση του προβλήματος Hilbert

### 5.4.2.1 Περίπτωση I: η $\mathbf{X}^d(z, z)$ δεν περιέχει λογαριθμικές ιδιομορφίες

Το διφασικό δυναμικό  $\mathbf{f}_0^c(z)$ , λόγω απουσίας τάσεων στην περιοχή του απείρου, συγκλίνει σε μια σταθερή τιμή στην περιοχή αυτή. Επίσης, η συνάρτηση  $[\mathbf{RX}(z)]^{-1}$  συγκλίνει στο μηδενικό μητρώο, καθώς το  $z_k$  τείνει στο άπειρο. Με βάση τα παραπάνω συνάγεται ότι η μητρική συνάρτηση  $[\mathbf{RX}(z)]^{-1}\mathbf{f}_0^c(z)$  συγκλίνει στο μηδενικό μητρώο, καθώς το  $z_k$  τείνει στο άπειρο. Επειδή η συνάρτηση  $[\mathbf{RX}(z)]^{-1}\mathbf{f}_0^c(z)$  ικανοποιεί τη σχέση (5.68) και μηδενίζεται στο άπειρο, σύμφωνα με γνωστό θεώρημα της μιγαδικής ανάλυσης (Milne-Thomson, 1968), θα είναι

$$[\mathbf{RX}(z)]^{-1}\mathbf{f}_0^c(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \langle (x_1 - z)^{-1} \rangle \mathbf{G}(x_1) dx_1, \quad (5.69)$$

όπου έχει εισαχθεί η ολόμορφη συνάρτηση  $\mathbf{G}(z)$  με τη σχέση

$$\mathbf{G}(z) = -[\mathbf{RX}^+(z)]^{-1}\mathbf{HX}^d(z, z). \quad (5.70)$$

Συνεπώς, το μιγαδικό δυναμικό  $\mathbf{f}_0^c(z)$  θα είναι

$$\mathbf{f}_0^c(z) = \mathbf{R}\mathcal{X}(z) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \langle (x_1 - z)^{-1} \rangle \mathbf{G}(x_1) dx_1. \quad (5.71)$$

Αν η ολόμορφη συνάρτηση  $\mathbf{G}(z)$  περιέχει μόνο κλασματικές ιδιομορφίες στα σημεία  $z_0$  και  $\bar{z}_0$ , το ολοκλήρωμα υπολογίζεται στο Παράρτημα II (σχέση II.5). Αντικαθιστώντας το ολοκλήρωμα αυτό στην (5.71) προκύπτει

$$\mathbf{f}_0^c(z) = \mathbf{R}\mathcal{X}(z)(\mathbf{I} + \mathbf{L})^{-1} [\mathbf{G}(z) - \mathbf{G}_{z_0}(z) - \mathbf{G}_{\bar{z}_0}(z)], \quad (5.72)$$

όπου  $\mathbf{G}_{z_0}(z)$  και  $\mathbf{G}_{\bar{z}_0}(z)$  είναι τα πρωτεύοντα μέρη της  $\mathbf{G}(z)$  στα σημεία ιδιομορφίας  $z_0$  και  $\bar{z}_0$ . Η παραπάνω σχέση παρέχει το διαφοσικό δυναμικό  $\mathbf{f}_0^c(z)$  του προβλήματος (c), για την περίπτωση που η  $\mathbf{G}(z)$  δεν περιέχει λογαριθμικές ιδιομορφίες.

Αν η φόρτιση του συστήματος είναι μια πολυωνυμική διανομή τάσεων  $n$  τάξης στο άπειρο, τότε η  $\mathbf{G}(z)$  έχει στο σημείο του απείρου έναν πόλο  $n$  τάξης. Στην περίπτωση αυτή, λαμβάνοντας υπόψη την (II.6), η (5.69) παρέχει

$$\mathbf{f}_0^c(z) = \mathbf{R}\mathcal{X}(z)(\mathbf{I} + \mathbf{L})^{-1} [\mathbf{G}(z) - \mathbf{G}_{\infty}(z)]. \quad (5.73)$$

Στη σχέση αυτή, η  $\mathbf{G}_{\infty}(z)$  είναι το πρωτεύον μέρος της  $\mathbf{G}(z)$  στο  $z \cong \infty$ .

#### 5.4.2.2 Περίπτωση II: η $\mathbf{X}^d(z, z)$ περιέχει λογαριθμικές ιδιομορφίες

Στην περίπτωση που η  $\mathbf{X}^d(z, z)$  περιέχει ως όρους λογαριθμικές ιδιομορφίες, όπως συμβαίνει στην περίπτωση της γραμμικής εξάρμωσης και της γραμμικής δύναμης, η παραπάνω διαδικασία υπολογισμού του διαφοσικού δυναμικού  $\mathbf{f}_0^c(z)$  δε μπορεί να εφαρμοσθεί. Στην περίπτωση αυτή, μπορεί να προσδιορισθεί η παράγωγος του διαφοσικού δυναμικού  $[\mathbf{f}_0^c(z)]'$ , χρησιμοποιώντας μια νέα πρόταση της μιγαδικής ανάλυσης που διατυπώνεται στο Παράρτημα III. Με βάση τις (5.69) και (5.70), το διαφοσικό δυναμικό  $\mathbf{f}_0^c(z)$  παίρνει τη μορφή

$$\mathbf{f}_0^c(z) = \mathbf{R}\mathcal{X}(z) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \langle (x_1 - z)^{-1} \rangle [\mathcal{X}^+(x_1)]^{-1} \mathbf{g}(x_1) dx_1, \quad (5.74)$$

όπου έχει εισαχθεί η ολόμορφη συνάρτηση  $\mathbf{g}(z)$  με τη σχέση

$$\mathbf{g}(z) = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{X}^d(z, z). \quad (5.75)$$

Χρησιμοποιώντας την πρόταση του Παραρτήματος III, η παραπάνω σχέση παρέχει

$$[\mathbf{f}_0^c(z)]' = \mathbf{R}\mathcal{X}_0(z) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \langle (x_1 - z)^{-1} \rangle [\mathcal{X}_0^+(x_1)]^{-1} \mathbf{g}'(x_1) dx_1, \quad (5.76)$$

όπου η συνάρτηση  $\mathcal{X}_0(z)$  παρέχεται από την (III.2). Έτσι, αν η  $\mathbf{g}(z)$  περιέχει ως όρους λογαριθμικές ιδιομορφίες, τότε στην  $\mathbf{g}'(z)$  οι ιδιομορφίες αυτές μετατρέπονται σε κλασματικές. Συνεπώς, στην περίπτωση αυτή, ο υπολογισμός του ολοκληρώματος που υπεισέρχεται στην (5.76), μπορεί να γίνει με την ίδια διαδικασία που εφαρμόστηκε παραπάνω. Στην περίπτωση αυτή, αν η  $\mathbf{g}'(z)$  είναι ιδιόμορφη στα σημεία  $z_0$ ,  $\bar{z}_0$  και συγκλίνει στο άπειρο, τότε

$$[\mathbf{f}_0^c(z)]' = \mathbf{R}\mathcal{X}_0(z)(\mathbf{I} + \mathbf{L})^{-1} [\mathcal{H}(z) - \mathcal{H}_{z_0}(z) - \mathcal{H}_{\bar{z}_0}(z) - \mathcal{H}_{\infty}(z)], \quad (5.77)$$

όπου

$$\mathcal{H}(z) = \mathcal{X}_0^{-1}(z) \mathbf{g}'(z) = -[\mathbf{R}\mathcal{X}_0(z)]^{-1} \mathbf{H} \frac{d}{dz} [\mathbf{X}^d(z, z)], \quad (5.78)$$

και οι  $\mathcal{H}_{z_0}(z)$ ,  $\mathcal{H}_{\bar{z}_0}(z)$ ,  $\mathcal{H}_{\infty}(z)$  είναι τα πρωτεύοντα μέρη της  $\mathcal{H}(z)$  στα ιδιόμορφα σημεία  $z_0$ ,  $\bar{z}_0$  και  $\infty$ , αντίστοιχα.

## 5.5 ΤΑ ΕΛΑΣΤΙΚΑ ΠΕΛΙΑ ΤΗΣ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΗΣ ΡΩΓΜΗΣ ΓΙΑ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΤΑΣΗ

Στη συνέχεια, τα παραπάνω γενικά αποτελέσματα θα εξειδικευτούν στην περίπτωση που το διυλικό φορτίζεται με μια ομοιόμορφη τάση στα απομακρυσμένα σύνορα του διυλικού. Στο απομακρυσμένο σύνορο της φάσης  $I$ , έστω ότι επενεργούν οι μητρικές τάσεις  $\boldsymbol{\sigma}_1^\infty = [\sigma_{11}^\infty, \sigma_{21}^\infty, \sigma_{31}^\infty]^T$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_2^\infty = [\sigma_{12}^\infty, \sigma_{22}^\infty, \sigma_{32}^\infty]^T$ , και στο απομακρυσμένο σύνορο της φάσης  $II$ , οι  $\boldsymbol{\sigma}_1^{*\infty} = [\sigma_{11}^{*\infty}, \sigma_{21}^{*\infty}, \sigma_{31}^{*\infty}]^T$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_2^{*\infty} = [\sigma_{12}^{*\infty}, \sigma_{22}^{*\infty}, \sigma_{32}^{*\infty}]^T$ . Οι μητρικές αυτές τάσεις θα πρέπει να ικανοποιούν τις συνθήκες που αναπτύχθηκαν στην ενότητα 4.2, προκειμένου το διυλικό να βρίσκεται σε ισορροπία και να υπάρχει συμβιβαστικότητα των παραμορφώσεων κατά μήκος της διεπιφάνειάς του. Για την ομοιόμορφη αυτή φόρτιση, η λύση του προβλήματος (c) έχει αναχθεί στον προσδιορισμό του μιγαδικού δυναμικού  $\mathbf{f}_0^c(z)$ , που, στη γενική του μορφή, δίνεται από τη σχέση (5.73). Σύμφωνα με τη σχέση

αυτή, το μιγαδικό δυναμικό είναι πλήρως προσδιορισμένο, αν υπολογισθεί η συνάρτηση  $\mathbf{G}_\infty(z)$ , που αποτελεί το πρωτεύον μέρος της συνάρτησης  $\mathbf{G}(z)$  στο σημείο του απείρου. Παρακάτω, θα προσδιορισθεί το μιγαδικό δυναμικά  $\mathbf{f}_0^c(z)$ , για όλους τους συνδυασμούς ανισοτροπίας του υλικού. Υπενθυμίζεται ότι, για όλους τους συνδυασμούς ανισοτροπίας, έχει προκύψει ότι  $\mathbf{q}_0^c(z) = \mathbf{0}$ .

### 5.5.1 Ανισότροπο/ανισότροπο δωλικό

Για τον συνδυασμό ανισότροπο/ανισότροπο δωλικό, η ποσότητα  $\mathbf{X}^d(x_1, x_1)$ , με αντικατάσταση της σχέσης (4.8) στην (2.43), παίρνει τη μορφή

$$\mathbf{X}^d(x_1, x_1) = [(\mathbf{P}_I - \bar{\mathbf{P}}_I)^{-1}(\boldsymbol{\sigma}_1^\infty + \bar{\mathbf{P}}_I \boldsymbol{\sigma}_2^\infty) + (\bar{\mathbf{P}}_I - \mathbf{P}_I)^{-1}(\boldsymbol{\sigma}_1^\infty + \mathbf{P}_I \boldsymbol{\sigma}_2^\infty)] x_1. \quad (5.79)$$

Επομένως, η συνάρτηση  $\mathbf{X}^d(z, z)$  ορίζεται με τη σχέση

$$\mathbf{X}^d(z, z) = [(\mathbf{P}_I - \bar{\mathbf{P}}_I)^{-1}(\boldsymbol{\sigma}_1^\infty + \bar{\mathbf{P}}_I \boldsymbol{\sigma}_2^\infty) + (\bar{\mathbf{P}}_I - \mathbf{P}_I)^{-1}(\boldsymbol{\sigma}_1^\infty + \mathbf{P}_I \boldsymbol{\sigma}_2^\infty)] z, \quad (5.80)$$

από όπου

$$\mathbf{X}^d(z, z) = -\boldsymbol{\sigma}_2^\infty z. \quad (5.81)$$

Αντικαθιστώντας την (5.81) στην (5.73), προκύπτει ότι

$$\mathbf{G}(z) = [\mathbf{R}\boldsymbol{\chi}(z)]^{-1} \mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}_2^\infty z, \quad (5.82)$$

όπου η  $\boldsymbol{\chi}(z)$  παρέχεται από την (5.61). Στη σχέση αυτή, το  $\mathbf{R}$  είναι το μητρώο ιδιοδιανυσμάτων και παρέχεται από την (5.52)<sub>2</sub>. Η συνάρτηση  $\mathbf{G}(z)$  έχει ένα πόλο μηδενικής τάξης στο άπειρο, που σημαίνει ότι η συνάρτηση αυτή συγκλίνει σε ένα σταθερό μητρώο στην περιοχή αυτή. Για τον προσδιορισμό της  $\mathbf{G}_\infty(z)$ , απαιτείται ο υπολογισμός του αναπτύγματος της συνάρτησης  $[\boldsymbol{\chi}(z)]^{-1}$  στο σημείο του απείρου. Το ανάπτυγμα αυτό εύκολα βρίσκεται στη μορφή

$$[\boldsymbol{\chi}(z)]^{-1} = \mathbf{I} \frac{1}{z} + \mathbf{D} \frac{1}{z^2} + \dots, \quad z \cong \infty, \quad (5.83)$$

όπου  $\mathbf{I}$  είναι ο μοναδιαίος πίνακας και

$$\mathbf{D} = \langle \bar{\tau}_k a_1 + \tau_k a_2 \rangle, \quad \tau_k = 1/2 + i\varepsilon_k. \quad (5.84)$$

Υπενθυμίζεται ότι τα  $a_1$  και  $a_2$  στη σχέση αυτή είναι πραγματικοί αριθμοί, που ορίζουν τις θέσεις των άκρων της ρωγμής στον άξονα  $x_1$ . Από τις (5.82) και (5.83), συνάγεται ότι

$$\mathbf{G}(z) = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \boldsymbol{\sigma}_2^\infty + \frac{\mathbf{D} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \boldsymbol{\sigma}_2^\infty}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots, \quad z \cong \infty. \quad (5.85)$$

Από το ανάπτυγμα αυτό προκύπτει ότι το πρωτεύον μέρος της  $\mathbf{G}(z)$  στο σημείο του απείρου είναι

$$\mathbf{G}_\infty(z) = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \boldsymbol{\sigma}_2^\infty. \quad (5.86)$$

Έτσι, αντικαθιστώντας τις σχέσεις (5.82) και (5.86) στη σχέση (5.73), προκύπτει το διαφορικό δυναμικό στη μορφή

$$\mathbf{f}_0^c(z) = \mathbf{R}(\mathbf{I} + \mathbf{L})^{-1} [z - \boldsymbol{\chi}(z)] \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \boldsymbol{\sigma}_2^\infty. \quad (5.87)$$

### 5.5.2 Ισότροπο/ισότροπο διωλικό

Στην περίπτωση του ισότροπου/ισότροπου διωλικού, η ποσότητα  $\mathbf{X}^d(x_1, x_1)$  έχει προσδιορισθεί στη μορφή

$$\mathbf{X}^d(x_1, x_1) = \mathbf{D}(\boldsymbol{\Sigma}_1^\infty + i\boldsymbol{\Sigma}_2^\infty)x_1 + \bar{\mathbf{D}}(\boldsymbol{\Sigma}_1^\infty - i\boldsymbol{\Sigma}_2^\infty)x_1, \quad (5.88)$$

από όπου

$$\mathbf{X}^d(x_1, x_1) = -\boldsymbol{\sigma}_2^\infty x_1. \quad (5.89)$$

Με βάση τη σχέση αυτή, η συναρτησιακή ποσότητα  $\mathbf{X}^d(z, z)$  ορίζεται με τη σχέση

$$\mathbf{X}^d(z, z) = -\boldsymbol{\sigma}_2^\infty z. \quad (5.90)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση αυτή στην (5.73), προκύπτει ότι

$$\mathbf{G}(z) = [\mathbf{R}\boldsymbol{\chi}(z)]^{-1} \mathbf{H} \boldsymbol{\sigma}_2^\infty z. \quad (5.91)$$

Το ανάπτυγμα της συνάρτησης  $[\mathbf{X}(z)]^{-1}$  στο σημείο του απείρου δίνεται από τη σχέση (5.83). Με βάση το ανάπτυγμα αυτό προσδιορίζεται το ανάπτυγμα της  $\mathbf{G}(z)$  στο άπειρο, από όπου προκύπτει το πρωτεύον μέρος της συνάρτησης αυτής στο άπειρο στη μορφή

$$\mathbf{G}_\infty(z) = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \boldsymbol{\sigma}_2^\infty. \quad (5.92)$$

Αντικαθιστώντας τις (5.91), (5.92) στην (5.73), προσδιορίζεται το διαφορικό δυναμικό  $\mathbf{f}_0^c(z)$  στη μορφή

$$\mathbf{f}_0^c(z) = \mathbf{R}(\mathbf{I} + \mathbf{L})^{-1} [z - \mathbf{X}(z)] \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \boldsymbol{\sigma}_2^\infty. \quad (5.93)$$

Σημειώνεται ότι το παραπάνω διαφορικό δυναμικό ταυτίζεται στη μορφή με αυτό του ανισότροπου/ανισότροπου διυλικού.

### 5.5.3 Ανισότροπο/ισότροπο διυλικό

Αν η φάση *I* του διυλικού είναι ισότροπη και η φάση *II* ανισότροπη, η ποσότητα  $\mathbf{X}^d(x_1, x_1)$  έχει προσδιορισθεί στη μορφή

$$\mathbf{X}^d(x_1, x_1) = -\boldsymbol{\sigma}_2^\infty x_1. \quad (5.94)$$

Από τη σχέση αυτή ορίζεται η  $\mathbf{X}^d(z, z)$  με τη σχέση

$$\mathbf{X}^d(z, z) = -\boldsymbol{\sigma}_2^\infty z. \quad (5.95)$$

Αντικαθιστώντας την (5.95) στην (5.70), προκύπτει ότι

$$\mathbf{G}(z) = [\mathbf{R} \mathbf{X}(z)]^{-1} \mathbf{H} \boldsymbol{\sigma}_2^\infty z. \quad (5.96)$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με παραπάνω, το πρωτεύον μέρος της συνάρτησης αυτής στο σημείο του απείρου εξάγεται στη μορφή

$$\mathbf{G}_\infty(z) = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \boldsymbol{\sigma}_2^\infty. \quad (5.97)$$

Αντικαθιστώντας τις (5.96) και (5.97) στην (5.73), βρίσκεται ότι

$$\mathbf{f}_0^c(z) = \mathbf{R}(\mathbf{I} + \mathbf{L})^{-1} [z - \mathbf{X}(z)] \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \boldsymbol{\sigma}_2^\infty. \quad (5.98)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η μορφή του διαφορικού δυναμικού  $\mathbf{f}_0^c(z)$  που προέκυψε και για τους τρεις συνδυασμούς ανισοτροπίας είναι ταυτόσημη. Σε κάθε συνδυασμό του διυλικού



τα μητρώα  $\mathbf{H}$  και  $\mathbf{R}$  υπολογίζονται από τις ελαστικές σταθερές των δύο αντίστοιχων φάσεων.

## 5.6 ΤΑ ΕΛΑΣΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ ΤΗΣ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΗΣ ΡΩΓΜΗΣ ΓΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΑΡΜΩΣΗ

Στη συνέχεια το υπο-πρόβλημα (d) της διεπιφανειακής ρωγμής επιλύεται για την περίπτωση της γραμμικής εξάρμωσης. Στην περίπτωση αυτή, η συνάρτηση  $\mathbf{X}^d(z, z)$  περιέχει λογαριθμικές ιδιομορφίες στα σημεία  $z_0$  και  $\bar{z}_0$  του μιγαδικού επιπέδου, και συνεπώς, για τον προσδιορισμό του διαφοσικού δυναμικού  $\mathbf{f}_0^c(z)$  θα εφαρμοσθεί η γενική λύση (5.77). Υπενθυμίζεται ότι, και για την περίπτωση αυτή, έχει βρεθεί  $\mathbf{q}_0^c(z) = \mathbf{0}$ .

### 5.6.1 Ανισότροπο/ανισότροπο διωλικό

Στην περίπτωση του ανισότροπου/ανισότροπου διωλικού, η συνάρτηση  $\mathbf{X}^d(x_1, x_1)$  έχει εξαχθεί στη μορφή

$$\mathbf{X}^d(x_1, x_1) = \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{M}_{II}^{-1} + \bar{\mathbf{M}}_{II}^{-1})\mathbf{B}_{II}\mathbf{f}_\infty(x_1; z_0) + \bar{\mathbf{H}}^{-1}(\mathbf{M}_{II}^{-1} + \bar{\mathbf{M}}_{II}^{-1})\bar{\mathbf{B}}_{II}\bar{\mathbf{f}}_\infty(x_1; \bar{z}_0), \quad (5.99)$$

όπου η  $\mathbf{f}_\infty(x_1; z_0)$  δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{f}_\infty(x_1; z_0) = \frac{1}{2\pi} \langle \log(x_1 - z_0) \rangle \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{M}^{-1} + \bar{\mathbf{M}}^{-1})^{-1} \mathbf{b}. \quad (5.100)$$

Από την (5.99) ορίζεται η ολόμορφη συνάρτηση  $\mathbf{X}^d(z, z)$  με τη σχέση

$$\mathbf{X}^d(z, z) = \frac{1}{2\pi} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{b} \log(z - z_0) + \frac{1}{2\pi} \bar{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{b} \log(z - \bar{z}_0). \quad (5.101)$$

Αντικαθιστώντας την (5.99) στην (5.78), προκύπτει

$$\mathcal{H}(z) = -\frac{1}{2\pi} [\mathbf{R}\mathcal{X}_0(z)]^{-1} \left( \frac{1}{z - z_0} + \mathbf{H}\bar{\mathbf{H}}^{-1} \frac{1}{z - \bar{z}_0} \right) \mathbf{b}. \quad (5.102)$$

Η ολόμορφη αυτή συνάρτηση παρουσιάζει ιδιομορφίες στα σημεία  $z_0, \bar{z}_0$  και  $\infty$ . Από τον προσδιορισμό των σχετικών αναπτυγμάτων της  $\mathcal{H}(z)$  στα ιδιόμορφα σημεία, υπολογίζονται τα παρακάτω πρωτεύοντα μέρη της παραπάνω συνάρτησης στα σημεία αυτά

$$\mathcal{H}_{z_0}(z) = -\frac{1}{2\pi} \mathcal{X}_0^{-1}(z_0) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{b} \frac{1}{z - z_0}, \quad (5.103)$$

$$\mathcal{H}_{\bar{z}_0}(z) = -\frac{1}{2\pi} \mathcal{X}_0^{-1}(\bar{z}_0) \mathbf{L} \mathbf{R}^{-1} \bar{\mathbf{b}} \frac{1}{z - \bar{z}_0}, \quad (5.104)$$

$$\mathcal{H}_{\infty}(z) = -\frac{1}{2\pi} (\mathbf{I} + \mathbf{L}) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{b}. \quad (5.105)$$

Χρησιμοποιώντας την (5.77), το διφασικό δυναμικό προκύπτει στη μορφή

$$\begin{aligned} [\mathbf{f}_0^c(z)]' = & -\frac{1}{2\pi} \mathbf{R}(\mathbf{I} + \mathbf{L})^{-1} \left( \frac{1}{z - z_0} + \mathbf{L} \frac{1}{z - \bar{z}_0} \right) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{b} \\ & + \frac{1}{2\pi} \mathbf{R} \mathcal{X}_0(z) (\mathbf{I} + \mathbf{L})^{-1} \left[ \mathcal{X}_0^{-1}(z_0) \frac{1}{z - z_0} + \mathcal{X}_0^{-1}(\bar{z}_0) \mathbf{L} \frac{1}{z - \bar{z}_0} + \mathbf{I} + \mathbf{L} \right] \mathbf{R}^{-1} \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (5.106)$$

### 5.6.2 Ισότροπο/ισότροπο διυλικό

Για τον συνδυασμό ισότροπο/ισότροπο διυλικό, στην περίπτωση της γραμμικής εξάρμωσης, η συνάρτηση  $\mathbf{X}^d(x_1, x_1)$  έχει προσδιορισθεί στη μορφή

$$\mathbf{X}^d(x_1, x_1) = \mathbf{H}^{-1} (\mathbf{M}_H^{-1} + \bar{\mathbf{M}}_H^{-1}) \mathbf{B}_H \mathbf{f}_\infty^*(x_1; z_0) + \bar{\mathbf{H}}^{-1} (\mathbf{M}_H^{-1} + \bar{\mathbf{M}}_H^{-1}) \bar{\mathbf{B}}_H \bar{\mathbf{f}}_\infty^*(x_1; \bar{z}_0), \quad (5.107)$$

όπου

$$\mathbf{f}_\infty^*(x_1; z_0) = \mathbf{K}_S \mathbf{b} \log(x_1 - z_0) - \mathbf{L}_S \mathbf{b} \frac{\bar{z}_0}{x_1 - z_0} - x_1 \mathbf{T} \mathbf{K}_S \mathbf{b} \frac{1}{x_1 - z_0} - x_1 \mathbf{T} \mathbf{L}_S \mathbf{b} \frac{\bar{z}_0}{(x_1 - z_0)^2}. \quad (5.108)$$

Τα μητρώα που υπεισέρχονται στην παραπάνω σχέση ορίζονται με τις σχέσεις

$$\mathbf{K}_S = \frac{i\mu_H}{\pi(1+\kappa_H)} \begin{bmatrix} -1 & -i & 0 \\ 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & (1+\kappa_H)/2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_S = \frac{i\mu_H}{\pi(1+\kappa_H)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

όπου  $\kappa_{II}$ ,  $\mu_{II}$  είναι οι ελαστικές σταθερές της ισότροπης φάσης  $II$ . Συνεπώς, η συνάρτηση  $\mathbf{X}^d(z, z)$  ορίζεται με τη σχέση

$$\mathbf{X}^d(z, z) = \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{M}_{II}^{-1} + \bar{\mathbf{M}}_{II}^{-1})\mathbf{B}_{II}\mathbf{f}_{\infty}^*(z; z_0) + \bar{\mathbf{H}}^{-1}(\mathbf{M}_{II}^{-1} + \bar{\mathbf{M}}_{II}^{-1})\bar{\mathbf{B}}_{II}\bar{\mathbf{f}}_{\infty}^*(z; \bar{z}_0), \quad (5.109)$$

όπου

$$\mathbf{f}_{\infty}^*(z; z_0) = \mathbf{K}_S\mathbf{b} \log(z - z_0) - \mathbf{L}_S\mathbf{b} \frac{\bar{z}_0}{z - z_0} - z\mathbf{TK}_S\mathbf{b} \frac{1}{z - z_0} - z\mathbf{TL}_S\mathbf{b} \frac{\bar{z}_0}{(z - z_0)^2}. \quad (5.110)$$

Αντικαθιστώντας την (5.109) στην (5.78) προκύπτει

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(z) = & -\frac{1}{2\pi} \mathcal{X}_0^{-1}(z) \left[ \mathbf{R}^{-1} \frac{1}{z - z_0} + \mathbf{R}^{-1}\mathbf{W} \frac{z_0 - \bar{z}_0}{(z - z_0)^2} \right. \\ & \left. + \mathbf{LR}^{-1} \frac{1}{z - \bar{z}_0} + \mathbf{LR}^{-1}\bar{\mathbf{W}} \frac{\bar{z}_0 - z_0}{(z - \bar{z}_0)^2} \right] \mathbf{b}, \end{aligned} \quad (5.111)$$

όπου

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.112)$$

Είναι προφανές ότι η ολόμορφη συνάρτηση  $\mathcal{H}(z)$  παρουσιάζει ιδιομορφίες στα σημεία  $z_0, \bar{z}_0$  και  $\infty$ . Από τα σχετικά αναπτύγματα της  $\mathcal{H}(z)$ , υπολογίζονται τα παρακάτω πρωτεύοντα μέρη της στα σημεία αυτά

$$\mathcal{H}_{z_0}(z) = -\frac{1}{2\pi} \mathcal{X}_0^{-1}(z_0)\mathbf{R}^{-1} \left[ \frac{1}{z - z_0} + \mathbf{W} \frac{z_0 - \bar{z}_0}{(z - z_0)^2} + \mathbf{W}\boldsymbol{\tau}(z_0) \frac{z_0 - \bar{z}_0}{z - z_0} \right] \mathbf{b}, \quad (5.113)$$

$$\mathcal{H}_{\bar{z}_0}(z) = -\frac{1}{2\pi} \mathcal{X}_0^{-1}(\bar{z}_0)\mathbf{LR}^{-1} \left[ \frac{1}{z - \bar{z}_0} + \bar{\mathbf{W}} \frac{\bar{z}_0 - z_0}{(z - \bar{z}_0)^2} + \bar{\mathbf{W}}\boldsymbol{\tau}(\bar{z}_0) \frac{\bar{z}_0 - z_0}{z - \bar{z}_0} \right] \bar{\mathbf{b}}, \quad (5.114)$$

$$\mathcal{H}_{\infty}(z) = -\frac{1}{2\pi} (\mathbf{I} + \mathbf{L})\mathbf{R}^{-1}\mathbf{b}, \quad (5.115)$$

όπου

$$\boldsymbol{\tau}(z) = \left\langle \frac{\tau}{z - a_1} + \frac{\bar{\tau}}{z - a_2} \right\rangle. \quad (5.116)$$

Αντικαθιστώντας τις (5.111) και (5.113)-(5.115) στην (5.77) προκύπτει το διφασικό δυναμικό στη μορφή

$$\begin{aligned} [\mathbf{f}_0^c(z)]' = & -\frac{1}{2\pi} \mathbf{R}(\mathbf{I} + \mathbf{L})^{-1} \left[ \mathbf{R}^{-1} \mathcal{L}_S(z; z_0) + \mathbf{L} \mathbf{R}^{-1} \bar{\mathcal{L}}_S(z; \bar{z}_0) \right] \mathbf{b} + \\ & + \frac{1}{2\pi} \mathbf{R} \mathcal{X}_0(z) (\mathbf{I} + \mathbf{L})^{-1} \left[ \mathcal{X}_0^{-1}(z_0) \mathbf{R}^{-1} \mathcal{K}_S(z; z_0) + \mathcal{X}_0^{-1}(\bar{z}_0) \mathbf{L} \mathbf{R}^{-1} \bar{\mathcal{K}}_S(z; \bar{z}_0) \right] \mathbf{b} \quad (5.117) \\ & + \frac{1}{2\pi} \mathbf{R} \mathcal{X}_0(z) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{b}, \end{aligned}$$

όπου

$$\mathcal{L}_S(z; z_0) = \mathbf{I} \frac{1}{z - z_0} + \mathbf{W} \frac{z_0 - \bar{z}_0}{(z - z_0)^2}, \quad (5.118)$$

$$\mathcal{K}_S(z; z_0) = \mathbf{I} \frac{1}{z - z_0} + \mathbf{W} \frac{z_0 - \bar{z}_0}{(z - z_0)^2} + \mathbf{W} \boldsymbol{\tau}(z_0) \frac{z_0 - \bar{z}_0}{z - z_0}. \quad (5.119)$$

### 5.6.3 Ανισότροπο/ισότροπο διυλικό

Στην περίπτωση του ανισότροπου/ισότροπου διυλικού, η συναρτησιακή ποσότητα  $\mathbf{X}^d(z, z)$ , που υπεισέρχεται στη συνάρτηση  $\mathcal{H}(z)$ , εξαρτάται από τη φάση του διυλικού όπου επενεργεί η εξάρμωση. Έτσι, αν η φάση  $I$  του διυλικού είναι ισότροπη, η φάση  $II$  ανισότροπη και η εξάρμωση επενεργεί στην ισότροπη φάση  $I$ , η  $\mathbf{X}^d(z, z)$  έχει υπολογισθεί στη μορφή

$$\mathbf{X}^d(z, z) = \bar{\mathbf{H}}^{-1} (\mathbf{M}_I^{-1} + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1}) \mathbf{B}_I \mathbf{f}_\infty^*(z; z_0) + \mathbf{H}^{-1} (\mathbf{M}_I^{-1} + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1}) \bar{\mathbf{B}}_I \bar{\mathbf{f}}_\infty^*(z; \bar{z}_0), \quad (5.120)$$

όπου η σχέση  $\mathbf{f}_\infty^*(z; z_0)$  δίνεται από την (5.110). Η παραπάνω σχέση ταυτίζεται στη μορφή με την ποσότητα  $\mathbf{X}^d(z, z)$  της σχέσης (5.48), που βρέθηκε προηγούμενα για την περίπτωση του ισότροπου/ισότροπου διυλικού. Όμως, θα πρέπει να διευκρινιστεί ότι τα μητρώα της (5.117) εμπλέκουν τις ελαστικές σταθερές της ισότροπης και της ανισότροπης φάσης του διυλικού. Αντικαθιστώντας την (5.120) στην (5.78) προκύπτει

$$\mathcal{H}(z) = -\frac{1}{2\pi} \mathcal{X}_0^{-1}(z) \left[ \mathbf{L}\mathbf{R}^{-1} \frac{1}{z-z_0} + \mathbf{L}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{W} \frac{z_0-\bar{z}_0}{(z-z_0)^2} + \mathbf{R}^{-1} \frac{1}{z-\bar{z}_0} + \mathbf{R}^{-1}\bar{\mathbf{W}} \frac{\bar{z}_0-z_0}{(z-\bar{z}_0)^2} \right] \mathbf{b}. \quad (5.121)$$

Από τα σχετικά αναπτύγματα της  $\mathcal{H}(z)$ , υπολογίζονται τα πρωτεύοντα μέρη της συνάρτησης αυτής στα ιδιόμορφα σημεία  $z_0, \bar{z}_0$  και  $\infty$ . Βρίσκεται ότι

$$\mathcal{H}_{z_0}(z) = -\frac{1}{2\pi} \mathcal{X}_0^{-1}(z_0) \mathbf{L}\mathbf{R}^{-1} \left[ \frac{1}{z-z_0} + \mathbf{W} \frac{z_0-\bar{z}_0}{(z-z_0)^2} + \mathbf{W}\boldsymbol{\tau}(z_0) \frac{z_0-\bar{z}_0}{z-z_0} \right] \mathbf{b}, \quad (5.122)$$

$$\mathcal{H}_{\bar{z}_0}(z) = -\frac{1}{2\pi} \mathcal{X}_0^{-1}(\bar{z}_0) \mathbf{R}^{-1} \left[ \frac{1}{z-\bar{z}_0} + \bar{\mathbf{W}} \frac{\bar{z}_0-z_0}{(z-\bar{z}_0)^2} + \bar{\mathbf{W}}\boldsymbol{\tau}(\bar{z}_0) \frac{\bar{z}_0-z_0}{z-\bar{z}_0} \right] \mathbf{b}, \quad (5.123)$$

$$\mathcal{H}_{\infty}(z) = -\frac{1}{2\pi} (\mathbf{I}+\mathbf{L})\mathbf{R}^{-1}\mathbf{b}. \quad (5.124)$$

Αντικαθιστώντας τις (5.121) και (5.122)-(5.124) στην (5.77) προκύπτει το διαφορικό δυναμικό

$$\begin{aligned} [\mathbf{f}_0^c(z)]' &= -\frac{1}{2\pi} \mathbf{R}(\mathbf{I}+\mathbf{L})^{-1} \left[ \mathbf{L}\mathbf{R}^{-1} \mathcal{L}_S(z; z_0) + \mathbf{R}^{-1} \bar{\mathcal{L}}_S(z; \bar{z}_0) \right] \mathbf{b} + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \mathbf{R}\mathcal{X}_0(z)(\mathbf{I}+\mathbf{L})^{-1} \left[ \mathcal{X}_0^{-1}(z_0) \mathbf{L}\mathbf{R}^{-1} \mathcal{K}_S(z; z_0) + \mathcal{X}_0^{-1}(\bar{z}_0) \mathbf{R}^{-1} \bar{\mathcal{K}}_S(z; \bar{z}_0) \right] \\ &+ \frac{1}{2\pi} \mathbf{R}\mathcal{X}_0(z) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{b}, \end{aligned} \quad (5.125)$$

όπου οι μητρωικές συναρτήσεις  $\mathcal{L}_S(z; z_0)$  και  $\mathcal{K}_S(z; z_0)$  δίνονται από τις σχέσεις (5.118) και (5.119).

Στην περίπτωση που η εξάρμωση επενεργεί στην ανισότροπη φάση  $II$ , η  $\mathbf{X}^d(z, z)$  έχει τη μορφή

$$\mathbf{X}^d(z, z) = \mathbf{H}^{-1} (\mathbf{M}_{II}^{-1} + \bar{\mathbf{M}}_{II}^{-1}) \mathbf{B}_{II} \mathbf{f}_{\infty}(z; z_0) + \bar{\mathbf{H}}^{-1} (\mathbf{M}_{II}^{-1} + \bar{\mathbf{M}}_{II}^{-1}) \bar{\mathbf{B}}_{II} \bar{\mathbf{f}}_{\infty}(z; \bar{z}_0), \quad (5.126)$$

όπου η  $\mathbf{f}_{\infty}(z; z_0)$  παρέχεται από την (2.135). Η παραπάνω ποσότητα ταυτίζεται στη μορφή με την αντίστοιχη ποσότητα  $\mathbf{X}^d(z, z)$  του ανισότροπου/ανισότροπου διυλικού, που παρέχεται από την (5.18). Διευκρινίζεται και εδώ ότι τα υπεισερχόμενα μητρώα στην (5.125) εμπλέκουν τις σταθερές της ισότροπης και ανισότροπης φάσης του διυλικού. Αντικαθιστώντας την (5.126) στην (5.18) προκύπτει

$$\mathcal{H}(z) = -\frac{1}{2\pi} [\mathbf{R}\mathcal{X}_0(z)]^{-1} \left( \mathbf{I} \frac{1}{z-z_0} + \mathbf{H}\bar{\mathbf{H}}^{-1} \frac{1}{z-\bar{z}_0} \right) \mathbf{b}. \quad (5.127)$$

Η παραπάνω συνάρτηση ταυτίζεται στη μορφή με τις αντίστοιχες σχέσεις του ανισότροπου/ανισότροπου διυλικού, όταν η γραμμική εξάρμωση επενεργεί στη φάση *II*. Τα πρωτεύοντα μέρη της  $\mathcal{H}(z)$  στα σημεία ιδιομορφίας δίνονται από τις σχέσεις (5.104)-(5.106). Έτσι, για την περίπτωση που η εξάρμωση επενεργεί στην ανισότροπη φάση *II* του διυλικού, βρίσκεται ότι

$$\begin{aligned} [\mathbf{f}_0^c(z)]' = & -\frac{1}{2\pi} \mathbf{R}(\mathbf{I} + \mathbf{L})^{-1} \left( \mathbf{I} \frac{1}{z-z_0} + \mathbf{L} \frac{1}{z-\bar{z}_0} \right) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{b} \\ & + \frac{1}{2\pi} \mathbf{R}\mathcal{X}_0(z)(\mathbf{I} + \mathbf{L})^{-1} \left( \mathcal{X}_0^{-1}(z_0) \frac{1}{z-z_0} + \mathcal{X}_0^{-1}(\bar{z}_0) \mathbf{L} \frac{1}{z-\bar{z}_0} + \mathbf{I} + \mathbf{L} \right) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (5.128)$$

Διευκρινίζεται και εδώ ότι τα μητρώα που υπεισέρχονται στην (5.128), προσδιορίζονται από τις ελαστικές σταθερές της ισότροπης φάσης *I* και τις ανισότροπης φάσης *II* του διυλικού.

## 5.7 ΤΑ ΕΛΑΣΤΙΚΑ ΠΕΛΙΑ ΤΗΣ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΗΣ ΡΩΓΜΗΣ ΓΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ

### 5.7.1 Ανισότροπο/ανισότροπο διυλικό

Στην περίπτωση του ανισότροπου/ανισότροπου διυλικού, η συνάρτηση  $\mathbf{X}^d(x_1, x_1)$  παίρνει τη μορφή

$$\mathbf{X}^d(x_1, x_1) = \mathbf{H}^{-1} (\mathbf{M}_H^{-1} + \bar{\mathbf{M}}_H^{-1}) \mathbf{B}_H \mathbf{f}_\infty(x_1; z_0) + \bar{\mathbf{H}}^{-1} (\mathbf{M}_H^{-1} + \bar{\mathbf{M}}_H^{-1}) \bar{\mathbf{B}}_H \bar{\mathbf{f}}_\infty(x_1; \bar{z}_0), \quad (5.129)$$

όπου το  $\mathbf{f}_\infty(x_1; z_0)$  παρέχεται από τη σχέση

$$\mathbf{f}_\infty(x_1; z_0) = \frac{1}{2\pi} \langle \log(x_1 - z_0) \rangle \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{M} + \bar{\mathbf{M}})^{-1} \mathbf{p}. \quad (5.130)$$

Από τη σχέση αυτή, ορίζεται η ολόμορφη συνάρτηση  $\mathbf{X}^d(z, z)$  στη μορφή

$$\mathbf{X}^d(z, z) = \frac{i}{2\pi} \mathbf{H}^{-1} \bar{\mathbf{M}}_H^{-1} \mathbf{p} \log(z - z_0) - \frac{i}{2\pi} \bar{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{M}_H^{-1} \mathbf{p} \log(z - \bar{z}_0). \quad (5.131)$$

Αντικαθιστώντας την (5.131) στην (5.78) βρίσκεται ότι

$$\mathcal{H}(z) = -\frac{i}{2\pi} [\mathbf{R}\mathcal{X}_0(z)]^{-1} \left( \bar{\mathbf{M}}_{II}^{-1} \frac{1}{z-z_0} - \mathbf{H}\bar{\mathbf{H}}^{-1}\mathbf{M}_{II}^{-1} \frac{1}{z-\bar{z}_0} \right) \mathbf{p}. \quad (5.132)$$

Τα πρωτεύοντα μέρη της συνάρτησης αυτής στα ιδιόμορφα σημεία της, βρίσκονται στη μορφή

$$\mathcal{H}_{z_0}(z) = -\frac{i}{2\pi} \mathcal{X}_0^{-1}(z_0) \mathbf{R}^{-1} \bar{\mathbf{M}}_{II}^{-1} \mathbf{p} \frac{1}{z-z_0}, \quad (5.133)$$

$$\mathcal{H}_{\bar{z}_0}(z) = \frac{i}{2\pi} \mathcal{X}_0^{-1}(\bar{z}_0) \mathbf{L} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{M}_{II}^{-1} \mathbf{p} \frac{1}{z-\bar{z}_0}, \quad (5.134)$$

$$\mathcal{H}_{\infty}(z) = \frac{i}{2\pi} (\mathbf{R}^{-1} \bar{\mathbf{M}}_{II}^{-1} - \mathbf{L} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{M}_{II}^{-1}) \mathbf{p}. \quad (5.135)$$

Έτσι, από την (5.77), παίρνοντας υπόψη τις παραπάνω σχέσεις, προκύπτει

$$\begin{aligned} [\mathbf{f}_0^c(z)]' &= -\frac{i}{2\pi} \mathbf{R}(\mathbf{I} + \mathbf{L})^{-1} \left( \mathbf{R}^{-1} \bar{\mathbf{M}}_{II}^{-1} \frac{1}{z-z_0} - \mathbf{L} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{M}_{II}^{-1} \frac{1}{z-\bar{z}_0} \right) \mathbf{p} \\ &\quad - \frac{i}{2\pi} \mathbf{R}\mathcal{X}_0(z)(\mathbf{I} + \mathbf{L})^{-1} \left[ \mathcal{X}_0^{-1}(z_0) \mathbf{R}^{-1} \bar{\mathbf{M}}_{II}^{-1} \frac{1}{z-z_0} + \mathcal{X}_0^{-1}(\bar{z}_0) \mathbf{L} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{M}_{II}^{-1} \frac{1}{z-\bar{z}_0} \right] \mathbf{p} \\ &\quad - \frac{i}{2\pi} \mathbf{R}\mathcal{X}_0(z)(\mathbf{I} + \mathbf{L})^{-1} (\mathbf{R}^{-1} \bar{\mathbf{M}}_{II}^{-1} - \mathbf{L} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{M}_{II}^{-1}) \mathbf{p}. \end{aligned} \quad (5.136)$$

## 5.7.2 Ισότροπο/ισότροπο διωλικό

Για τον συνδυασμό ισότροπο/ισότροπο διωλικό, στην περίπτωση της γραμμικής δύναμης, η συνάρτηση  $\mathbf{X}^d(x_1, x_1)$  έχει τη μορφή

$$\mathbf{X}^d(x_1, x_1) = \mathbf{H}^{-1} (\mathbf{M}_{II}^{-1} + \bar{\mathbf{M}}_{II}^{-1}) \mathbf{B}_{II} \mathbf{f}_{\infty}^*(x_1; z_0) + \bar{\mathbf{H}}^{-1} (\mathbf{M}_{II}^{-1} + \bar{\mathbf{M}}_{II}^{-1}) \bar{\mathbf{B}}_{II} \bar{\mathbf{f}}_{\infty}^*(x_1; \bar{z}_0), \quad (5.137)$$

όπου

$$\mathbf{f}_{\infty}^*(x_1; z_0) = \mathbf{K}_F \mathbf{p} \log(x_1 - z_0) - \mathbf{L}_F \mathbf{p} \frac{\bar{z}_0}{x_1 - z_0} - x_1 \mathbf{T} \mathbf{K}_F \mathbf{p} \frac{1}{x_1 - z_0} - x_1 \mathbf{T} \mathbf{L}_F \mathbf{p} \frac{\bar{z}_0}{(x_1 - z_0)^2}. \quad (5.138)$$

Τα μητρώα που υπεισέρχονται στην παραπάνω σχέση έχουν τη μορφή

$$\mathbf{K}_F = \frac{1}{2\pi(1+\kappa_H)} \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ -\kappa_H & i\kappa_H & 0 \\ 0 & 0 & -(1+\kappa_H) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_S = \frac{1}{2\pi(1+\kappa_H)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Αντικαθιστώντας την (5.137) στην (5.78), προκύπτει

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(z) = & -\frac{1}{2\pi} \mathcal{X}_0^{-1}(z) \left[ -i\mathbf{R}^{-1}\bar{\mathbf{M}}_H^{-1} \frac{1}{z-z_0} + \frac{i}{2\mu_H} \mathbf{R}^{-1}\mathbf{W} \frac{z_0-\bar{z}_0}{(z-z_0)^2} \right. \\ & \left. + i\mathbf{L}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{M}_H^{-1} \frac{1}{z-\bar{z}_0} - \frac{i}{2\mu_H} \mathbf{L}\mathbf{R}^{-1}\bar{\mathbf{W}} \frac{\bar{z}_0-z_0}{(z-\bar{z}_0)^2} \right] \mathbf{p}, \end{aligned} \quad (5.139)$$

όπου το μητρώο  $\mathbf{W}$  δίνεται από την (5.113). Τα παρακάτω πρωτεύοντα μέρη της  $\mathcal{H}(z)$  στα σημεία ιδιομορφίας της υπολογίζονται στη μορφή

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{z_0}(z) = & -\frac{1}{2\pi} \mathcal{X}_0^{-1}(z_0) \mathbf{R}^{-1} \left[ -i\bar{\mathbf{M}}_H^{-1} \frac{1}{z-z_0} + \frac{i}{2\mu_H} \mathbf{W} \frac{z_0-\bar{z}_0}{(z-z_0)^2} \right. \\ & \left. + \frac{i}{2\mu_H} \mathbf{W}\boldsymbol{\tau}(z_0) \frac{z_0-\bar{z}_0}{z-z_0} \right] \mathbf{p}, \end{aligned} \quad (5.140)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\bar{z}_0}(z) = & -\frac{1}{2\pi} \mathcal{X}_0^{-1}(\bar{z}_0) \mathbf{L}\mathbf{R}^{-1} \left[ i\mathbf{M}_H^{-1} \frac{1}{z-\bar{z}_0} - \frac{i}{2\mu_H} \bar{\mathbf{W}} \frac{\bar{z}_0-z_0}{(z-\bar{z}_0)^2} \right. \\ & \left. - \frac{i}{2\mu_H} \bar{\mathbf{W}}\boldsymbol{\tau}(\bar{z}_0) \frac{\bar{z}_0-z_0}{z-\bar{z}_0} \right] \mathbf{p}, \end{aligned} \quad (5.141)$$

$$\mathcal{H}_\infty(z) = \frac{i}{2\pi} (\mathbf{R}^{-1}\bar{\mathbf{M}}_H^{-1} - \mathbf{L}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{M}_H^{-1}) \mathbf{p}, \quad (5.142)$$

όπου

$$\boldsymbol{\tau}(z) = \left\langle \frac{\tau}{z-a_1} + \frac{\bar{\tau}}{z-a_2} \right\rangle. \quad (5.143)$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στην (5.77) προκύπτει

$$\begin{aligned} [\mathbf{f}_0^c(z)]' = & -\frac{1}{2\pi} \mathbf{R}(\mathbf{I}+\mathbf{L})^{-1} \left[ \mathbf{R}^{-1}\mathcal{L}_F(z; z_0) + \mathbf{L}\mathbf{R}^{-1}\bar{\mathcal{L}}_F(z; \bar{z}_0) \right] \mathbf{p} + \\ & + \frac{1}{2\pi} \mathbf{R}\mathcal{X}_0(z)(\mathbf{I}+\mathbf{L})^{-1} \left[ \mathcal{X}_0^{-1}(z_0)\mathbf{R}^{-1}\mathcal{K}_F(z; z_0) + \mathcal{X}_0^{-1}(\bar{z}_0)\mathbf{L}\mathbf{R}^{-1}\bar{\mathcal{K}}_F(z; \bar{z}_0) \right] \mathbf{p} \\ & - \frac{1}{2\pi} \mathbf{R}\mathcal{X}_0(z)(\mathbf{I}+\mathbf{L})^{-1} i(\mathbf{R}^{-1}\bar{\mathbf{M}}_H^{-1} - \mathbf{L}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{M}_H^{-1}) \mathbf{p}, \end{aligned} \quad (5.144)$$

όπου



$$\mathcal{L}_F(z; z_0) = -i\bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \frac{1}{z - z_0} + \frac{i}{2\mu_{II}} \mathbf{W} \frac{z_0 - \bar{z}_0}{(z - z_0)^2}, \quad (5.145)$$

$$\mathcal{K}_F(z; z_0) = -i\bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \frac{1}{z - z_0} + \frac{i}{2\mu_{II}} \mathbf{W} \frac{z_0 - \bar{z}_0}{(z - z_0)^2} + \frac{i}{2\mu_{II}} \mathbf{W}\boldsymbol{\tau}(z_0) \frac{z_0 - \bar{z}_0}{z - z_0}. \quad (5.146)$$

### 5.7.3 Ανισότροπο/ισότροπο διωλικό

Στην περίπτωση του ανισότροπου/ισότροπου διωλικού, η συνάρτηση  $\mathbf{X}^d(z, z)$ , εξαρτάται από τη φάση του διωλικού όπου επενεργεί η δύναμη. Έτσι, αν η φάση  $I$  του διωλικού είναι ισότροπη, η φάση  $II$  ανισότροπη και η δύναμη επενεργεί στην ισότροπη φάση  $I$ , η  $\mathbf{X}^d(z, z)$  έχει τη μορφή

$$\mathbf{X}^d(z, z) = \bar{\mathbf{H}}^{-1} (\mathbf{M}_I^{-1} + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1}) \mathbf{B}_I \mathbf{f}_\infty^*(z; z_0) + \mathbf{H}^{-1} (\mathbf{M}_I^{-1} + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1}) \bar{\mathbf{B}}_I \bar{\mathbf{f}}_\infty^*(z; \bar{z}_0), \quad (5.147)$$

όπου η  $\mathbf{f}_\infty^*(z; z_0)$  δίνεται με τη σχέση (5.25). Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση  $\mathcal{H}(z)$  έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(z) = -\frac{1}{2\pi} \boldsymbol{\chi}_0^{-1}(z) \left[ -i\mathbf{L}\mathbf{R}^{-1}\bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \frac{1}{z - z_0} + \frac{i}{2\mu_I} \mathbf{L}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{W} \frac{z_0 - \bar{z}_0}{(z - z_0)^2} \right. \\ \left. + i\mathbf{R}^{-1}\mathbf{M}_I^{-1} \frac{1}{z - \bar{z}_0} - \frac{i}{2\mu_I} \mathbf{R}^{-1}\bar{\mathbf{W}} \frac{\bar{z}_0 - z_0}{(z - \bar{z}_0)^2} \right] \mathbf{p}, \end{aligned} \quad (5.148)$$

Τα πρωτεύοντα μέρη της  $\mathcal{H}(z)$  στα ιδιόμορφα σημεία της, είναι

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{z_0}(z) = -\frac{1}{2\pi} \boldsymbol{\chi}_0^{-1}(z_0) \mathbf{L}\mathbf{R}^{-1} \left[ -i\bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \frac{1}{z - z_0} + \frac{i}{2\mu_I} \mathbf{W} \frac{z_0 - \bar{z}_0}{(z - z_0)^2} \right. \\ \left. + \frac{i}{2\mu_I} \mathbf{W}\boldsymbol{\tau}(z_0) \frac{z_0 - \bar{z}_0}{z - z_0} \right] \mathbf{p}, \end{aligned} \quad (5.149)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\bar{z}_0}(z) = -\frac{1}{2\pi} \boldsymbol{\chi}_0^{-1}(\bar{z}_0) \mathbf{R}^{-1} \left[ i\mathbf{M}_I^{-1} \frac{1}{z - \bar{z}_0} - \frac{i}{2\mu_I} \bar{\mathbf{W}} \frac{\bar{z}_0 - z_0}{(z - \bar{z}_0)^2} \right. \\ \left. - \frac{i}{2\mu_I} \bar{\mathbf{W}}\boldsymbol{\tau}(\bar{z}_0) \frac{\bar{z}_0 - z_0}{z - \bar{z}_0} \right] \mathbf{p}, \end{aligned} \quad (5.150)$$

$$\mathcal{H}_\infty(z) = -\frac{i}{2\pi} (\mathbf{R}^{-1}\bar{\mathbf{M}}_I^{-1} - \mathbf{L}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{M}_I^{-1}) \mathbf{p}. \quad (5.151)$$

Έτσι από την (5.77) προκύπτει

$$\begin{aligned} [\mathbf{f}_0^c(z)]' = & -\frac{1}{2\pi} \mathbf{R}(\mathbf{I} + \mathbf{L})^{-1} \left[ \mathbf{L}\mathbf{R}^{-1} \mathcal{L}_F(z; z_0) + \mathbf{R}^{-1} \bar{\mathcal{L}}_F(z; \bar{z}_0) \right] \mathbf{p} + \\ & + \frac{1}{2\pi} \mathbf{R}\mathcal{X}_0(z)(\mathbf{I} + \mathbf{L})^{-1} \left[ \mathcal{X}_0^{-1}(z_0) \mathbf{L}\mathbf{R}^{-1} \mathcal{K}_F(z; z_0) + \mathcal{X}_0^{-1}(\bar{z}_0) \mathbf{R}^{-1} \bar{\mathcal{K}}_F(z; \bar{z}_0) \right] \mathbf{p} \quad (5.152) \\ & + \frac{i}{2\pi} \mathbf{R}\mathcal{X}_0(z)(\mathbf{I} + \mathbf{L})^{-1} (\mathbf{R}^{-1} \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} - \mathbf{L}\mathbf{R}^{-1} \mathbf{M}_I^{-1}) \mathbf{p}, \end{aligned}$$

όπου

$$\mathcal{L}_F(z; z_0) = -i \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \frac{1}{z - z_0} + \frac{i}{2\mu_I} \mathbf{W} \frac{z_0 - \bar{z}_0}{(z - z_0)^2}, \quad (5.153)$$

$$\mathcal{K}_F(z; z_0) = -i \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \frac{1}{z - z_0} + \frac{i}{2\mu_I} \mathbf{W} \frac{z_0 - \bar{z}_0}{(z - z_0)^2} + \frac{i}{2\mu_I} \mathbf{W} \boldsymbol{\tau}(z_0) \frac{z_0 - \bar{z}_0}{z - z_0}. \quad (5.154)$$

Στην περίπτωση που η γραμμική δύναμη επενεργεί στην ανισότροπη φάση  $II$ , οι συναρτήσεις  $\mathbf{X}^d(z, z)$  και  $\mathcal{H}(z)$  είναι

$$\mathbf{X}^d(z, z) = \mathbf{H}^{-1} (\mathbf{M}_{II}^{-1} + \bar{\mathbf{M}}_{II}^{-1}) \mathbf{B}_{II} \mathbf{f}_\infty(z; z_0) + \bar{\mathbf{H}}^{-1} (\mathbf{M}_{II}^{-1} + \bar{\mathbf{M}}_{II}^{-1}) \bar{\mathbf{B}}_{II} \bar{\mathbf{f}}_\infty(z; \bar{z}_0), \quad (5.155)$$

$$\mathcal{H}(z) = -\frac{i}{2\pi} [\mathbf{R}\mathcal{X}_0(z)]^{-1} \left( \bar{\mathbf{M}}_{II}^{-1} \frac{1}{z - z_0} - \mathbf{H} \bar{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{M}_{II}^{-1} \frac{1}{z - \bar{z}_0} \right) \mathbf{p}. \quad (5.156)$$

Τα πρωτεύοντα μέρη της  $\mathcal{H}(z)$  στα σημεία ιδιομορφίας δίνονται από τις σχέσεις (5.133)-(5.135). Από τις παραπάνω σχέσεις και την (5.77) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} [\mathbf{f}_0^c(z)]' = & -\frac{i}{2\pi} \mathbf{R}(\mathbf{I} + \mathbf{L})^{-1} \left( \mathbf{R}^{-1} \bar{\mathbf{M}}_{II}^{-1} \frac{1}{z - z_0} - \mathbf{L}\mathbf{R}^{-1} \mathbf{M}_{II}^{-1} \frac{1}{z - \bar{z}_0} \right) \mathbf{p} \\ & - \frac{i}{2\pi} \mathbf{R}\mathcal{X}_0(z)(\mathbf{I} + \mathbf{L})^{-1} \left[ \mathcal{X}_0^{-1}(z_0) \mathbf{R}^{-1} \bar{\mathbf{M}}_{II}^{-1} \frac{1}{z - z_0} + \mathcal{X}_0^{-1}(\bar{z}_0) \mathbf{L}\mathbf{R}^{-1} \mathbf{M}_{II}^{-1} \frac{1}{z - \bar{z}_0} \right] \mathbf{p} \quad (5.157) \\ & - \frac{i}{2\pi} \mathbf{R}\mathcal{X}_0(z)(\mathbf{I} + \mathbf{L})^{-1} (\mathbf{R}^{-1} \bar{\mathbf{M}}_{II}^{-1} - \mathbf{L}\mathbf{R}^{-1} \mathbf{M}_{II}^{-1}) \mathbf{p}. \end{aligned}$$

Τα μητρώα που υπεισέρχονται στην παραπάνω σχέση εμπλέκουν τις ελαστικές σταθερές της ισότροπης φάσης  $I$  και τις ανισότροπης φάσης  $II$  του διυλικού.

## Κεφάλαιο 6

# ΤΑ ΕΛΑΣΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ ΚΟΝΤΑ ΣΤΗΝ ΑΚΡΗ ΤΗΣ ΡΩΓΜΗΣ

## 6.1 ΓΕΝΙΚΑ

Στο κεφάλαιο αυτό, με βάση την ενοποιημένη θεωρία των διαφασικών δυναμικών που αναπτύχθηκε και χρησιμοποιήθηκε για τη λύση των σχετικών ελαστικών προβλημάτων, οι ελαστικές παράμετροι θραύσης μιας διεπιφανειακής ρωγμής τοποθετούνται σε ενιαία βάση, για όλους τους συνδυασμούς ανισοτροπίας του διυλικού. Τα ασυμπτωτικά ελαστικά πεδία στην άκρη της διεπιφανειακής ρωγμής αποκτώνται με απλές αλγεβρικές εκφράσεις σε όρους των στοιχείων ενός μητρώου, που αποτελεί το μητρώο έντασης των τάσεων του άκρου της ρωγμής. Από τα πεδία αυτά, προσδιορίζονται οι παράμετροι θραύσης του διυλικού σε όρους των στοιχείων του μητρώου έντασης των τάσεων. Οι παράμετροι θραύσης που εξάγονται είναι ο διεπιφανειακός ελκυστής των τάσεων μπροστά από το μέτωπο της ρωγμής, το άνοιγμα της ρωγμής και ο ρυθμός απελευθέρωσης ενέργειας. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον δείχνεται στην διερεύνηση της φύσης του μητρώου έντασης των τάσεων, που αποτελεί τη μητρική έκφραση των γνωστών συντελεστών έντασης των τάσεων. Στόχος της διερεύνησης αυτής είναι να βρεθεί η κοινή βάση των εναλλακτικών ορισμών του συντελεστή έντασης των τάσεων, που έχουν εμφανισθεί στη βιβλιογραφία για τη διεπιφανειακή ρωγμή. Στα τέλη της δεκαετίας του '80 και στις αρχές του '90, η διερεύνηση των ελαστικών παραμέτρων θραύσης της διεπιφανειακής ρωγμής αποτέλεσε ένα ιδιαίτερο αντικείμενο έρευνας από πολλές ερευνητικές ομάδες, και το σχετικό έργο που παρήχθει διαμόρφωσε ένα ιδιαίτερο κλάδο στην θραυστομηχανική, που είναι γνωστός ως διεπιφανειακή θραυστομηχανική. Σημαντική συμβολή στην ανάπτυξη του κλάδου αυτού υπήρξε το έργο των ερευνητικών

ομάδων των πανεπιστημίων Harvard και Brown (Rice, 1988; Suo, 1989, 1990; Shih, 1988; Ting, 1990; Gao et al., 1992).

## 6.2 ΤΟ ΜΗΤΡΩΟ ΕΝΤΑΣΗΣ ΤΩΝ ΤΑΣΕΩΝ

Από την ανάλυση που έγινε στο κεφάλαιο 5 προέκυψε ότι στην άκρη της διεπιφανειακής ρωγμής οι τάσεις επιδεικνύουν μια ιδιόμορφη συμπεριφορά. Η συμπεριφορά αυτή εισάγεται με το διφασικό δυναμικό  $\mathbf{f}_0^e(z)$ , που, στη γενική του μορφή, παρέχεται από τις σχέσεις (5.72) και (5.73). Προκειμένου να μελετηθεί η συμπεριφορά αυτή, θα εισαχθεί ένα νέο τοπικό σύστημα συντεταγμένων  $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$  κεντραρισμένο στην άκρη της ρωγμής  $(0, a_2)$ , του οποίου οι άξονες  $\hat{x}_1, \hat{x}_2$  είναι παράλληλοι στους  $x_1$  και  $x_2$ , αντίστοιχα (Σχήμα 6-1). Έστω  $M$  ένα σημείο στη γειτονιά του άκρου της ρωγμής  $a_2$ , που αντιπροσωπεύεται με τους μιγαδικούς αριθμούς  $z_k = x_1 + p_k x_2$  στα τρία μιγαδικά επίπεδα  $z_k$ . Το σύστημα συντεταγμένων  $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ , που ορίστηκε προηγούμενα, εισάγει με τη σχέση  $\zeta_k = \hat{x}_1 + p_k \hat{x}_2$  ένα μιγαδικό επίπεδο  $\zeta_k$ , που έχει μια μονοσήμαντη αντιστοιχία με το επίπεδο  $z_k$ . Η μονοσήμαντη αυτή αντιστοιχία προκύπτει από την παραλληλία μεταξύ των αξόνων των δύο συστημάτων που παρέχει  $x_1 - \hat{x}_1 = a_2$ ,  $x_2 = \hat{x}_2$ . Έτσι, για τις δύο μεταβλητές  $z_k$  και  $\zeta_k$  ισχύει η σχέση

$$z_k = a_2 + \zeta_k. \quad (6.1)$$

Στη συνέχεια, η συνάρτηση του  $\mathcal{X}_k(z_k)$  που ορίζεται με τη σχέση (5.62) θα αναπτυχθεί σε σειρά στην περιοχή του άκρου της ρωγμής  $a_2$  στο επίπεδο  $\zeta_k$ . Θεωρώντας ότι  $|\zeta_k| \ll l$ , όπου  $l (= a_2 - a_1)$  είναι το μήκος της ρωγμής, η  $\mathcal{X}_k(z_k)$  μπορεί να αναπτυχθεί στην παρακάτω σειρά

$$\mathcal{X}_k(a_2 + \zeta_k) = \sqrt{\zeta_k} \sqrt{l} \left( \frac{\zeta_k}{l} \right)^{i\epsilon_k} + b_1 \zeta_k^{\frac{3}{2}} \left( \frac{\zeta_k}{l} \right)^{i\epsilon_k} + b_2 \zeta_k^{\frac{5}{2}} \left( \frac{\zeta_k}{l} \right)^{i\epsilon_k} + \dots, \quad |\zeta_k| \ll l, \quad (6.2)$$

όπου  $b_1, b_2, \dots$  είναι μιγαδικές σταθερές. Στην απειροσειρά (6.2), επειδή  $|\zeta_k| \ll l$ , οι όροι του  $\zeta$  με εκθέτη μεγαλύτερο του  $1/2$  γίνονται αμελητέοι συγκρινόμενοι με τον πρώτο όρο της σειράς. Συνεπώς, από τη σχέση αυτή προσεγγιστικά μπορεί να γραφτεί

$$\mathcal{X}_k(a_2 + \zeta_k) \cong \sqrt{l} \sqrt{\zeta_k} \left( \frac{\zeta_k}{l} \right)^{i\epsilon_k}, \quad |\zeta_k| \ll l. \quad (6.3)$$

Αυτή είναι η ασυμπτωτική έκφραση της  $\mathcal{X}_k(a_2 + \zeta_k)$  κοντά στο άκρο  $a_2$  της ρωγμής. Με βάση τη σχέση αυτή, μπορεί να προσδιορισθεί η ασυμπτωτική έκφραση της μητρικής συνάρτησης  $\mathcal{X}(z)$  κοντά στην άκρη της ρωγμής. Βρίσκεται ότι

$$\mathcal{X}(z) = \mathcal{X}(a_2 + \zeta) \cong \sqrt{l} \left\langle \sqrt{\zeta} \left( \frac{\zeta}{l} \right)^{i\epsilon} \right\rangle, \quad |\zeta_k| \ll l. \quad (6.4)$$

Ο προσδιορισμός της ασυμπτωτικής έκφρασης του ελαστικού πεδίου κοντά στην άκρη της ρωγμής θα προσδιορισθεί από την λύση που έχει εξαχθεί για την ομοιόμορφη φόρτιση του διυλικού στο άπειρο σύνορό του. Για την περίπτωση αυτή, το διαφοσικό δυναμικό παρέχεται από τη σχέση (5.87). Αντικαθιστώντας τη σχέση (6.4) στο μιγαδικό δυναμικό  $\mathbf{f}_0^c(z)$  προκύπτει

$$\mathbf{f}_0^c(a_2 + \zeta) \cong -\mathbf{R} \sqrt{l} \left\langle \sqrt{\zeta} \left( \frac{\zeta}{l} \right)^{i\epsilon} \right\rangle (\mathbf{I} + \mathbf{L})^{-1} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \boldsymbol{\sigma}_2^\infty. \quad (6.5)$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί την ασυμπτωτική έκφραση του διαφοσικού δυναμικού κοντά στην άκρη της ρωγμής. Εισάγεται τώρα, ένα μητρώο στήλης  $\mathbf{K}$  με τη σχέση

$$\mathbf{K} = [K_1, K_2, K_3]^T = -(\mathbf{I} + \mathbf{L})^{-1} \sqrt{l} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \boldsymbol{\sigma}_2^\infty, \quad (6.6)$$

όπου  $K_1, K_2$  και  $K_3$  είναι μιγαδικοί αριθμοί. Το μητρώο αυτό θα ορισθεί ως *μητρώο έντασης των τάσεων* κοντά στο άκρο της ρωγμής  $a_2$ . Με βάση τη σχέση αυτή, το διαφοσικό δυναμικό  $\mathbf{f}_0^c(z)$ , που παρέχεται με την (6.5), γράφεται

$$\mathbf{f}_0^c(z) = \mathbf{f}_0^c(a_2 + \zeta) \cong \mathbf{R} \left\langle \sqrt{\zeta} \left( \frac{\zeta}{l} \right)^{i\epsilon} \right\rangle \mathbf{K}, \quad \text{όταν } |\zeta_k| \ll l. \quad (6.7)$$

Ο παραπάνω ορισμός του μητρώου έντασης των τάσεων, στηρίχθηκε στη λύση της διεπιφανειακής ρωγμής, για την ομοιόμορφη φόρτιση του διυλικού. Από τη γενική λύση της διεπιφανειακής ρωγμής, που προέκυψε στο κεφάλαιο 5, το διαφοσικό δυναμικό  $\mathbf{f}_0^c(z)$  κοντά στην άκρη της ρωγμής μπορεί πάντα να γραφτεί στην ασυμπτωτική μορφή της (6.7), αν το μητρώο του συντελεστή έντασης των τάσεων  $\mathbf{K} = [K_1, K_2, K_3]^T$  ορισθεί με τη σχέση

$$\mathbf{K} = \lim_{\zeta_k \rightarrow 0} \left\langle \frac{l^{i\varepsilon}}{\zeta^\tau} \right\rangle \mathbf{R}^{-1} \mathbf{f}_0^c(a_2 + \zeta). \quad (6.8)$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα σε όρους των μεταβλητών  $z_k$  με τη σχέση

$$\mathbf{K} = \lim_{z_k \rightarrow a_2} \left\langle \frac{l^{i\varepsilon}}{(z - a_2)^\tau} \right\rangle \mathbf{R}^{-1} \mathbf{f}_0^c(z). \quad (6.9)$$

Αν από την επίλυση του σχετικού ελαστικού προβλήματος, το διαφορικό δυναμικό έχει προκύψει στην παραγωγισμένη του μορφή  $\mathbf{f}_0^c(z)$ , όπως συμβαίνει στην περίπτωση της γραμμικής δύναμης και εξάρμωσης, ο παραπάνω ορισμός μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα στη μορφή

$$\mathbf{K} = \lim_{\zeta_k \rightarrow 0} \left\langle \sqrt{\zeta} \left( \frac{l}{\zeta} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle \mathbf{R}^{-1} \mathbf{f}_0^{c'}(a_2 + \zeta), \quad (6.10)$$

σε όρους της μεταβλητής  $\zeta_k$ , ή

$$\mathbf{K} = \lim_{z_k \rightarrow a_2} \left\langle \sqrt{z - a_2} \left( \frac{l}{z - a_2} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle \mathbf{R}^{-1} \mathbf{f}_0^c(z), \quad (6.11)$$

σε όρους της μεταβλητής  $z_k$ .

Στη συνέχεια, με βάση τον παραπάνω ορισμό του μητρώου έντασης των τάσεων που δόθηκε, θα εξαχθούν ορισμένα γενικά αποτελέσματα, που αφορούν ορισμένες παραμέτρους της μηχανικής των θραύσεων. Για το σκοπό αυτό, θα προσδιορισθούν πρώτα τα ασυμπτωτικά ελαστικά πεδία κοντά στην άκρη της ρωγμής, σε όρους του μητρώου έντασης των τάσεων.

### 6.3 Ο ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΟΣ ΕΛΚΥΣΤΗΣ ΤΩΝ ΤΑΣΕΩΝ ΚΟΝΤΑ ΣΤΗΝ ΑΚΡΗ ΤΗΣ ΡΩΓΜΗΣ

Στη συνέχεια, με βάση την ασυμπτωτική μορφή του διαφορικού δυναμικού  $\mathbf{f}_0^c(z)$  στην άκρη της ρωγμής, που παρέχεται με τη σχέση (6.7), και τις γενικές σχέσεις των διαφορικών δυναμικών, που έχουν εξαχθεί στο κεφάλαιο 3, θα προσδιορισθεί ο

διεπιφανειακός ελκυστής των τάσεων μπροστά από το άκρο  $a_2$  της διεπιφανειακής ρωγμής. Για την περίπτωση του ανισότροπου/ανισότροπου διυλικού, οι συναρτησιακές ποσότητες  $\mathbf{X}_I(z, \bar{z})$  και  $\mathbf{X}_{II}(z, \bar{z})$ , σε όρους του διαφοσικού δυναμικού  $\mathbf{f}_0^c(z)$ , παρέχονται από τις σχέσεις (3.17) και (3.19). Η ασυμπτωτική έκφραση των ποσοτήτων αυτών προκύπτει αντικαθιστώντας την (6.7) στις σχέσεις αυτές. Βρίσκεται ότι κοντά στην άκρη  $a_2$  της ρωγμής

$$\mathbf{X}_I^c(z, \bar{z}) = \mathbf{X}_I^c(a_2 + \zeta, a_2 + \bar{\zeta}) \cong \left[ \mathbf{H}^{-1} \mathbf{R} \left\langle \sqrt{\zeta} \left( \frac{\zeta}{l} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle + \bar{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{R} \left\langle \sqrt{\bar{\zeta}} \left( \frac{\bar{\zeta}}{l} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle \right] \mathbf{K}, \quad (6.12)$$

$$\mathbf{X}_{II}^c(z, \bar{z}) = \mathbf{X}_{II}^c(a_2 + \zeta, a_2 + \bar{\zeta}) \cong \left[ \bar{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{R} \left\langle \sqrt{\zeta} \left( \frac{\zeta}{l} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle + \mathbf{H}^{-1} \mathbf{R} \left\langle \sqrt{\bar{\zeta}} \left( \frac{\bar{\zeta}}{l} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle \right] \mathbf{K}. \quad (6.13)$$

Με βάση τις παραπάνω σχέσεις, θα προσδιορισθούν οι ασυμπτωτικές εκφράσεις των μητρικών τάσεων  $\sigma_1$  και  $\sigma_2$ , κοντά στην άκρη  $a_2$  της διεπιφανειακής ρωγμής. Αντικαθιστώντας τις (6.12), (6.13) στις (2.40), προκύπτουν οι παρακάτω ασυμπτωτικές μορφές των τάσεων κοντά στην άκρη της ρωγμής για τη φάση  $I$  του διυλικού

$$\sigma_2^I = \frac{\partial \mathbf{X}_I}{\partial x_1} \cong \left[ \mathbf{H}^{-1} \mathbf{R} \left\langle \frac{1}{2} + i\varepsilon \right\rangle \left\langle \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \left( \frac{\zeta}{l} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle + \bar{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{R} \left\langle \frac{1}{2} + i\varepsilon \right\rangle \left\langle \frac{1}{\sqrt{\bar{\zeta}}} \left( \frac{\bar{\zeta}}{l} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle \right] \mathbf{K}, \quad (6.14)$$

$$\sigma_1^I = -\frac{\partial \mathbf{X}_I}{\partial x_2} \cong - \left[ \mathbf{H}^{-1} \mathbf{R} \left\langle \frac{1}{2} + i\varepsilon \right\rangle \left\langle \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \left( \frac{\zeta}{l} \right)^{i\varepsilon} p \right\rangle + \bar{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{R} \left\langle \frac{1}{2} + i\varepsilon \right\rangle \left\langle \frac{1}{\sqrt{\bar{\zeta}}} \left( \frac{\bar{\zeta}}{l} \right)^{i\varepsilon} \bar{p} \right\rangle \right] \mathbf{K}. \quad (6.15)$$

Με όμοιο τρόπο προσδιορίζονται οι αντίστοιχες ασυμπτωτικές εκφράσεις των τάσεων για τη φάση  $II$  του διυλικού στη μορφή

$$\sigma_2^{II} \cong \left[ \bar{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{R} \left\langle \frac{1}{2} + i\varepsilon \right\rangle \left\langle \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \left( \frac{\zeta}{l} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle + \mathbf{H}^{-1} \mathbf{R} \left\langle \frac{1}{2} + i\varepsilon \right\rangle \left\langle \frac{1}{\sqrt{\bar{\zeta}}} \left( \frac{\bar{\zeta}}{l} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle \right] \mathbf{K}, \quad (6.16)$$

$$\sigma_1^{II} \cong - \left[ \bar{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{R} \left\langle \frac{1}{2} + i\varepsilon \right\rangle \left\langle \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \left( \frac{\zeta}{l} \right)^{i\varepsilon} p \right\rangle + \mathbf{H}^{-1} \mathbf{R} \left\langle \frac{1}{2} + i\varepsilon \right\rangle \left\langle \frac{1}{\sqrt{\bar{\zeta}}} \left( \frac{\bar{\zeta}}{l} \right)^{i\varepsilon} \bar{p} \right\rangle \right] \mathbf{K}. \quad (6.17)$$

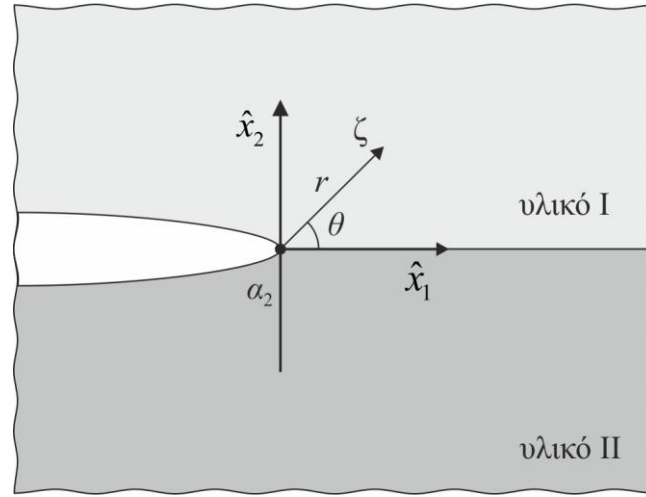
Πάνω στη διεπιφάνεια του διυλικού και μπροστά από την άκρη  $a_2$  της ρωγμής, το μητρώο του ελκυστή των τάσεων είναι  $\mathbf{t}^I(r, \theta=0) = \sigma_2^I(r, \theta=0)$ , για τη φάση  $I$ , και

$\mathbf{t}^H(r, \theta = 0) = \boldsymbol{\sigma}_2^H(r, \theta = 0)$ , για τη φάση II. Έτσι, πάνω στη διεπιφάνεια και μπροστά από το άκρο  $a_2$  της ρωγμής, από τις (6.14)-(6.17) βρίσκεται ότι

$$\mathbf{t}^I(r, \theta = 0) = \mathbf{t}^H(r, \theta = 0) = (\mathbf{H}^{-1} + \bar{\mathbf{H}}^{-1}) \mathbf{R} \left\langle \frac{1}{2} + i\varepsilon \right\rangle \left\langle \frac{1}{\sqrt{r}} \left( \frac{r}{l} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle \mathbf{K}, \quad (6.18)$$

όπου έχει τεθεί  $r = x_1 (> 0)$ . Επειδή  $\mathbf{R} = [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3]$  και  $\mathbf{K} = [K_1, K_2, K_3]^T$ , η σχέση (6.18) γράφεται

$$\mathbf{t}^I(r, \theta = 0) = \mathbf{t}^H(r, \theta = 0) = [\mathbf{H}^{-1} + \bar{\mathbf{H}}^{-1}] [\mathbf{r}_1 \tau_1 \left( \frac{r}{l} \right)^{i\varepsilon} K_1 + \mathbf{r}_2 \tau_2 \left( \frac{r}{l} \right)^{-i\varepsilon} K_2 + \mathbf{r}_3 \tau_3 K_3] \frac{1}{\sqrt{r}}. \quad (6.19)$$



**Σχήμα 6-1:** Το τοπικό σύστημα συντεταγμένων στην άκρη της ρωγμής

Αν τεθούν

$$\mathbf{t}(r) = \mathbf{t}^I(r, \theta = 0) = \mathbf{t}^H(r, \theta = 0),$$

$$\tau = \tau_1 = \bar{\tau}_2 = \frac{1}{2} + i\varepsilon, \quad \tau_0 = \tau_3 = \frac{1}{2},$$

και

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 = \bar{\mathbf{r}}_2, \quad \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_3 = \bar{\mathbf{r}}_3,$$

η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφτεί στην παρακάτω απλοποιημένη μορφή



$$\mathbf{t}(r) = [\mathbf{H}^{-1} + \bar{\mathbf{H}}^{-1}] \left[ \mathbf{r} \tau \left( \frac{r}{l} \right)^{i\varepsilon} K_1 + \bar{\mathbf{r}} \bar{\tau} \left( \frac{r}{l} \right)^{-i\varepsilon} K_2 + \frac{1}{2} \mathbf{r}_0 K_3 \right] \frac{1}{\sqrt{r}}. \quad (6.20)$$

Το παραπάνω μητρώο  $\mathbf{t}(r)$  αντιπροσωπεύει τον διεπιφανειακό ελκυστή των τάσεων για το ανισότροπο/ανισότροπο δυνικό. Στη συνέχεια, θα δειχθεί ότι η σχέση (6.20) αντιπροσωπεύει τον διεπιφανειακό ελκυστή των τάσεων και για την περίπτωση των άλλων δύο συνδυασμών του δυνικού.

Για την περίπτωση του ισότροπου/ισότροπου δυνικού οι αντίστοιχες εκφράσεις των (6.12) και (6.13) προκύπτουν από τις σχέσεις (3.57) και (3.59) στη μορφή

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_I^c(z, \bar{z}) = \mathbf{X}_I^c(a_2 + \zeta, a_2 + \bar{\zeta}) &= \left[ \mathbf{H}^{-1} \mathbf{R} \left\langle \sqrt{\zeta} \left( \frac{\zeta}{l} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle + \bar{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{R} \left\langle \sqrt{\bar{\zeta}} \left( \frac{\bar{\zeta}}{l} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle \right] \mathbf{K} \\ &+ (\bar{\zeta} - \zeta) \left[ \mathbf{C}_I \mathbf{H}^{-1} \mathbf{R} \left\langle \frac{1}{2} + i\varepsilon \right\rangle \left\langle \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \left( \frac{\zeta}{l} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle - \bar{\mathbf{C}}_I \bar{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{R} \left\langle \frac{1}{2} + i\varepsilon \right\rangle \left\langle \frac{1}{\sqrt{\bar{\zeta}}} \left( \frac{\bar{\zeta}}{l} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle \right] \mathbf{K}, \end{aligned} \quad (6.21)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{II}^c(z, \bar{z}) = \mathbf{X}_{II}^c(a_2 + \zeta, a_2 + \bar{\zeta}) &= \left[ \bar{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{R} \left\langle \sqrt{\zeta} \left( \frac{\zeta}{l} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle + \mathbf{H}^{-1} \mathbf{R} \left\langle \sqrt{\bar{\zeta}} \left( \frac{\bar{\zeta}}{l} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle \right] \mathbf{K} \\ &+ (\bar{\zeta} - \zeta) \left[ \mathbf{C}_{II} \bar{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{R} \left\langle \frac{1}{2} + i\varepsilon \right\rangle \left\langle \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \left( \frac{\zeta}{l} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle - \bar{\mathbf{C}}_{II} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{R} \left\langle \frac{1}{2} + i\varepsilon \right\rangle \left\langle \frac{1}{\sqrt{\bar{\zeta}}} \left( \frac{\bar{\zeta}}{l} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle \right] \mathbf{K}, \end{aligned} \quad (6.22)$$

όπου οι  $\mathbf{C}_I$  και  $\mathbf{C}_{II}$  δίνονται από τις σχέσεις (3.41)<sub>1</sub> και (3.61)<sub>1</sub>, αντίστοιχα. Οι ασυμπτωτικές εκφράσεις των τάσεων προκύπτουν από τις σχέσεις (2.40) στην παρακάτω μορφή

$$\begin{aligned} \sigma_2^I &= \left[ \mathbf{H}^{-1} \mathbf{R} \left\langle \frac{1}{2} + i\varepsilon \right\rangle \left\langle \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \left( \frac{\zeta}{l} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle + \bar{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{R} \left\langle \frac{1}{2} + i\varepsilon \right\rangle \left\langle \frac{1}{\sqrt{\bar{\zeta}}} \left( \frac{\bar{\zeta}}{l} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle \right] \mathbf{K} \\ &- (\bar{\zeta} - \zeta) \left[ \mathbf{C}_I \mathbf{H}^{-1} \mathbf{R} \left( \frac{1}{4} + \varepsilon^2 \right) \left\langle \frac{1}{\sqrt{\zeta^3}} \left( \frac{\zeta}{l} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle - \bar{\mathbf{C}}_I \bar{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{R} \left( \frac{1}{4} + \varepsilon^2 \right) \left\langle \frac{1}{\sqrt{\bar{\zeta}^3}} \left( \frac{\bar{\zeta}}{l} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle \right] \mathbf{K}, \end{aligned} \quad (6.23)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_1^I &= i \left[ \mathbf{H}^{-1} \mathbf{R} \left\langle \frac{1}{2} + i\varepsilon \right\rangle \left\langle \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \left( \frac{\zeta}{l} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle - \bar{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{R} \left\langle \frac{1}{2} + i\varepsilon \right\rangle \left\langle \frac{1}{\sqrt{\bar{\zeta}}} \left( \frac{\bar{\zeta}}{l} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle \right] \mathbf{K} \\
&- 2i \left[ \mathbf{C}_I \mathbf{H}^{-1} \mathbf{R} \left\langle \frac{1}{2} + i\varepsilon \right\rangle \left\langle \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \left( \frac{\zeta}{l} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle - \bar{\mathbf{C}}_I \bar{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{R} \left\langle \frac{1}{2} + i\varepsilon \right\rangle \left\langle \frac{1}{\sqrt{\bar{\zeta}}} \left( \frac{\bar{\zeta}}{l} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle \right] \mathbf{K} \\
&- (\bar{\zeta} - \zeta) i \left[ \mathbf{C}_I \mathbf{H}^{-1} \mathbf{R} \left( \frac{1}{4} + \varepsilon^2 \right) \left\langle \frac{1}{\sqrt{\zeta^3}} \left( \frac{\zeta}{l} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle + \bar{\mathbf{C}}_I \bar{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{R} \left( \frac{1}{4} + \varepsilon^2 \right) \left\langle \frac{1}{\sqrt{\bar{\zeta}^3}} \left( \frac{\bar{\zeta}}{l} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle \right] \mathbf{K},
\end{aligned} \tag{6.24}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_2^II &= \left[ \bar{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{R} \left\langle \frac{1}{2} + i\varepsilon \right\rangle \left\langle \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \left( \frac{\zeta}{l} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle + \mathbf{H}^{-1} \mathbf{R} \left\langle \frac{1}{2} + i\varepsilon \right\rangle \left\langle \frac{1}{\sqrt{\bar{\zeta}}} \left( \frac{\bar{\zeta}}{l} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle \right] \mathbf{K} \\
&- (\bar{\zeta} - \zeta) \left[ \mathbf{C}_{II} \bar{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{R} \left( \frac{1}{4} + \varepsilon^2 \right) \left\langle \frac{1}{\sqrt{\zeta^3}} \left( \frac{\zeta}{l} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle - \bar{\mathbf{C}}_{II} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{R} \left( \frac{1}{4} + \varepsilon^2 \right) \left\langle \frac{1}{\sqrt{\bar{\zeta}^3}} \left( \frac{\bar{\zeta}}{l} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle \right] \mathbf{K},
\end{aligned} \tag{6.25}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_1^{II} &= i \left[ \bar{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{R} \left\langle \frac{1}{2} + i\varepsilon \right\rangle \left\langle \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \left( \frac{\zeta}{l} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle - \mathbf{H}^{-1} \mathbf{R} \left\langle \frac{1}{2} + i\varepsilon \right\rangle \left\langle \frac{1}{\sqrt{\bar{\zeta}}} \left( \frac{\bar{\zeta}}{l} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle \right] \mathbf{K} \\
&- 2i \left[ \mathbf{C}_{II} \bar{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{R} \left\langle \frac{1}{2} + i\varepsilon \right\rangle \left\langle \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \left( \frac{\zeta}{l} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle - \bar{\mathbf{C}}_{II} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{R} \left\langle \frac{1}{2} + i\varepsilon \right\rangle \left\langle \frac{1}{\sqrt{\bar{\zeta}}} \left( \frac{\bar{\zeta}}{l} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle \right] \mathbf{K} \\
&- (\bar{\zeta} - \zeta) i \left[ \mathbf{C}_{II} \bar{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{R} \left( \frac{1}{4} + \varepsilon^2 \right) \left\langle \frac{1}{\sqrt{\zeta^3}} \left( \frac{\zeta}{l} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle + \bar{\mathbf{C}}_{II} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{R} \left( \frac{1}{4} + \varepsilon^2 \right) \left\langle \frac{1}{\sqrt{\bar{\zeta}^3}} \left( \frac{\bar{\zeta}}{l} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle \right] \mathbf{K}.
\end{aligned} \tag{6.26}$$

Από τις σχέσεις αυτές, ο διεπιφανειακός ελκυστής των τάσεων  $\mathbf{t}(r)$  μπροστά από το μέτωπο της ρωγμής προκύπτει πάλι στη μορφή της (6.20). Όμως, θα πρέπει να διευκρινισθεί ότι στην περίπτωση του ισότροπου/ισότροπου συνδυασμού, τα μητρώα  $\mathbf{H}$  και  $\mathbf{r}$  αντιστοιχούν στις ελαστικές σταθερές των ισότροπων φάσεων του διυλικού. Επίσης, είναι φανερό ότι η σχέση (6.20) αντιπροσωπεύει τον διεπιφανειακό ελκυστή των τάσεων μπροστά από το μέτωπο της ρωγμής και για την περίπτωση του ανισότροπου/ισότροπου διυλικού. Στην περίπτωση αυτή το μητρώο  $\mathbf{H}$  θα προσδιορισθεί από τις ελαστικές σταθερές της ισότροπης και ανισότροπης φάσης του διυλικού. Συνεπώς, και για τους τρεις συνδυασμούς ανισοτροπίας του διυλικού, ο διεπιφανειακός ελκυστής των τάσεων μπροστά από το μέτωπο της ρωγμής παρέχεται από τη σχέση (6.20). Το γεγονός αυτό επιτρέπει την ενιαία διαπραγμάτευση του μητρώου έντασης των τάσεων στην άκρη της ρωγμής για όλους τους συνδυασμούς ανισοτροπίας των δύο φάσεων.

Στη συνέχεια θα εξαχθεί μια σημαντική ιδιότητα για τα στοιχεία του μητρώου συντελεστή έντασης των τάσεων, που θα δώσει τη δυνατότητα να συνδεθεί το μητρώο αυτό με τους κλασσικούς ορισμούς των συντελεστών έντασης των τάσεων. Επειδή τα στοιχεία του ελκυστή των τάσεων είναι πραγματικοί αριθμοί, θα πρέπει να ισχύει

$$\mathbf{t}(r, \theta = 0) = \bar{\mathbf{t}}(r, \theta = 0). \quad (6.27)$$

Από τη σχέση αυτή και την (6.20) προκύπτει

$$\begin{aligned} [\mathbf{H}^{-1} + \bar{\mathbf{H}}^{-1}] & \left[ \mathbf{r} \left( \frac{1}{2} + i\varepsilon \right) \left( \frac{r}{l} \right)^{i\varepsilon} (K_1 - \bar{K}_2) + \bar{\mathbf{r}} \left( \frac{1}{2} - i\varepsilon \right) \left( \frac{r}{l} \right)^{-i\varepsilon} (K_2 - \bar{K}_1) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \mathbf{r}_0 (K_3 - \bar{K}_3) \right] \frac{1}{\sqrt{r}} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Η σχέση αυτή θα πρέπει να ισχύει για κάθε τιμή του  $r$  πάνω στη διεπιφάνεια και πολύ κοντά στην άκρη της ρωγμής. Αυτό θα συμβαίνει μόνο όταν ισχύει

$$K_1 - \bar{K}_2 = 0, \quad K_2 - \bar{K}_1 = 0, \quad K_3 - \bar{K}_3 = 0, \quad (6.29)$$

από όπου

$$K_1 = \bar{K}_2, \quad K_3 = \bar{K}_3. \quad (6.30)$$

Η σχέση αυτή δείχνει ότι τα στοιχεία του μητρώου  $\mathbf{K}$  μπορούν να εκφραστούν σε όρους τριών ανεξάρτητων πραγματικών σταθερών. Με βάση την παρατήρηση αυτή, τίθενται

$$K_1 = \bar{K}_2 = K_I + iK_{II}, \quad K_3 = K_{III}, \quad (6.31)$$

όπου  $K_I, K_{II}$  και  $K_{III}$  είναι τρεις πραγματικοί αριθμοί. Έτσι, η ασυμπτωτική μορφή του διεπιφανειακού ελκυστή μπροστά στο άκρο της ρωγμής, για όλους τους συνδυασμούς ανισοτροπίας του διυλικού παίρνει τη μορφή

$$\mathbf{t}(r) = [\mathbf{H}^{-1} + \bar{\mathbf{H}}^{-1}] \left[ \mathbf{r} \tau \left( \frac{r}{l} \right)^{i\varepsilon} K + \bar{\mathbf{r}} \bar{\tau} \left( \frac{r}{l} \right)^{-i\varepsilon} \bar{K} + \mathbf{r}_0 \tau_0 K_{III} \right] \frac{1}{\sqrt{r}}. \quad (6.32)$$

Θα δειχθεί παρακάτω ότι οι πραγματικοί αριθμοί  $K_I, K_{II}$  και  $K_{III}$  του μητρώου  $\mathbf{K}$  αντιπροσωπεύουν τους γνωστούς συντελεστές έντασης που έχουν οριστεί στη βιβλιογραφία.

#### 6.4 ΤΟ ΑΝΟΙΓΜΑ ΤΗΣ ΡΩΓΜΗΣ ΚΟΝΤΑ ΣΤΟ ΑΚΡΟ ΤΗΣ

Στην ενότητα αυτή, θα προσδιορισθούν οι ασυμπτωτικές εκφράσεις των μετατοπίσεων μπροστά από την άκρη  $a_2$  της ρωγμής. Αντικαθιστώντας την (6.7) στις σχέσεις (3.18) και (3.20) βρίσκεται ότι

$$\mathbf{u}^I(a_2 + \zeta) \cong i \left[ -\mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{R} \left\langle \sqrt{\zeta} \left( \frac{\zeta}{l} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \bar{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{R} \left\langle \sqrt{\bar{\zeta}} \left( \frac{\bar{\zeta}}{l} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle \right] \mathbf{K}, \quad (6.33)$$

$$\mathbf{u}^{II}(a_2 + \zeta) \cong i \left[ -\mathbf{M}_{II}^{-1} \bar{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{R} \left\langle \sqrt{\zeta} \left( \frac{\zeta}{l} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle + \bar{\mathbf{M}}_{II}^{-1} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{R} \left\langle \sqrt{\bar{\zeta}} \left( \frac{\bar{\zeta}}{l} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle \right] \mathbf{K}. \quad (6.34)$$

Πίσω από την άκρη  $a_2$ , το άνοιγμα της ρωγμής ορίζεται με τη σχέση

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}^I(a_2 + r, \theta = \pi) - \mathbf{u}^{II}(a_2 + r, \theta = -\pi), \quad (6.35)$$

όπου

$$\Delta \mathbf{u} = [\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3]^T. \quad (6.36)$$

Από τις (6.33), (6.34) και (6.35) βρίσκεται ότι

$$\Delta \mathbf{u} = 2\mathbf{R} \left\langle \sqrt{r} \left( \frac{r}{l} \right)^{i\varepsilon} \cosh \pi\varepsilon \right\rangle \mathbf{K}. \quad (6.37)$$

Η σχέση αυτή, για  $\mathbf{R} = [\mathbf{r}, \bar{\mathbf{r}}, \mathbf{r}_0]$  και  $\mathbf{K} = [K, \bar{K}, K_{III}]^T$ , γράφεται

$$\Delta \mathbf{u} = 2\sqrt{r} \left[ \left( \mathbf{r}K \left( \frac{r}{l} \right)^{i\varepsilon} + \bar{\mathbf{r}}\bar{K} \left( \frac{r}{l} \right)^{-i\varepsilon} \right) \cosh \pi\varepsilon + \mathbf{r}_0 K_{III} \right]. \quad (6.38)$$

Οι αντίστοιχες σχέσεις των (6.33) και (6.34) για το ισότροπο/ισότροπο διυλικό προκύπτουν από τις (6.7), (3.58) και (3.60) στη μορφή

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^I(a_2 + \zeta) \cong i \left[ -\mathbf{M}_I^{-1} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{R} \left\langle \sqrt{\zeta} \left( \frac{\zeta}{l} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle + \bar{\mathbf{M}}_I^{-1} \bar{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{R} \left\langle \sqrt{\bar{\zeta}} \left( \frac{\bar{\zeta}}{l} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle \right] \mathbf{K} \\ + i(\bar{\zeta} - \zeta) \left[ \mathbf{D}_I \mathbf{H}^{-1} \mathbf{R} \left\langle \frac{1}{2} + i\varepsilon \right\rangle \left\langle \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \left( \frac{\zeta}{l} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle + \bar{\mathbf{D}}_I \bar{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{R} \left\langle \frac{1}{2} + i\varepsilon \right\rangle \left\langle \frac{1}{\sqrt{\bar{\zeta}}} \left( \frac{\bar{\zeta}}{l} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle \right] \mathbf{K}, \end{aligned} \quad (6.39)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}''(a_2 + \zeta) \cong & i \left[ -\mathbf{M}''^{-1} \bar{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{R} \left\langle \sqrt{\zeta} \left( \frac{\zeta}{l} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle + \bar{\mathbf{M}}''^{-1} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{R} \left\langle \sqrt{\bar{\zeta}} \left( \frac{\bar{\zeta}}{l} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle \right] \mathbf{K} \\ & + i(\bar{\zeta} - \zeta) \left[ \mathbf{D}'' \bar{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{R} \left\langle \frac{1}{2} + i\varepsilon \right\rangle \left\langle \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \left( \frac{\zeta}{l} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle + \bar{\mathbf{D}}'' \mathbf{H}^{-1} \mathbf{R} \left\langle \frac{1}{2} + i\varepsilon \right\rangle \left\langle \frac{1}{\sqrt{\bar{\zeta}}} \left( \frac{\bar{\zeta}}{l} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle \right] \mathbf{K}, \end{aligned} \quad (6.40)$$

όπου οι  $\mathbf{D}_I$  και  $\mathbf{D}_{II}$  δίνονται από τις σχέσεις (3.41)<sub>2</sub> και (3.61)<sub>2</sub>, αντίστοιχα. Εύκολα δείχνεται ότι οι παραπάνω σχέσεις οδηγούν στην έκφραση (6.37) του ανοίγματος της ρωγμής. Η ίδια έκφραση προκύπτει και για την περίπτωση του ανισότροπου/ισότροπου συνδυασμού. Συνεπώς, για τους τρεις συνδυασμούς ανισοτροπίας του διυλικού, το άνοιγμα της ρωγμής παρέχεται από τη σχέση (6.37).

## 6.5 Ο ΡΥΘΜΟΣ ΑΠΕΛΕΥΘΕΡΩΣΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Η έννοια του ρυθμού απελευθέρωσης ενέργειας έχει εισαχθεί στη θραυστομηχανική για να περιγράψει τη διάδοση μιας προϋπάρχουσας ρωγμής σε ένα σώμα που βρίσκεται υπό ένταση. Ο ορισμός της έννοιας αυτής προϋποθέτει ότι η διάδοση της ρωγμής γίνεται με ομοιόθετο τρόπο. Το υλικό, κατά τη φόρτισή του, αποθηκεύει ελαστική ενέργεια, η οποία διανέμεται με ένα συνεχή τρόπο στον όγκο που καταλαμβάνει το υλικό. Η πυκνότητα διανομής της ελαστικής ενέργειας γίνεται πολύ μεγαλύτερη στις περιοχές του υλικού που βρίσκονται κοντά στα δύο άκρα της ρωγμής. Το υλικό, για κάποια τιμή της έντασης, προκειμένου να ανακουφισθεί, απελευθερώνει ελαστική ενέργεια με το σχηματισμό νέων επιφανειών. Έτσι, αν η ρωγμή που έχει μήκος  $l$ , επεκταθεί ομοιόθετα κατά  $\delta l$ , θα σχηματισθούν δύο νέες επιφάνειες εμβαδού  $\delta S$ . Σε αυτή την επέκταση, η ενέργεια  $\delta E$  που απελευθερώνεται παρέχεται από τη σχέση

$$\delta E = \frac{1}{2} \int_0^{\delta l} \mathbf{t}^T(r) \Delta \mathbf{u} dr. \quad (6.41)$$

Ο ρυθμός απελευθέρωσης ενέργειας ορίζεται με τη σχέση

$$G = -\frac{\delta E}{\delta S} = \frac{1}{2\delta S} \int_0^{\delta l} \mathbf{t}^T \Delta \mathbf{u} dr. \quad (6.42)$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση τις (6.32) και (6.37) και ολοκληρώνοντας προκύπτει

$$G = \left( \frac{1}{4} + \varepsilon^2 \right) \pi |K|^2 \left\{ \mathbf{r}^T [\mathbf{H}^{-1} + \bar{\mathbf{H}}^{-1}] \bar{\mathbf{r}} + \bar{\mathbf{r}}^T [\mathbf{H}^{-1} + \bar{\mathbf{H}}^{-1}] \mathbf{r} \right\} + \frac{1}{4} \pi |K_0|^2 \mathbf{r}_0^T [\mathbf{H}^{-1} + \bar{\mathbf{H}}^{-1}] \mathbf{r}_0. \quad (6.43)$$

Κατά την ολοκλήρωση, έγινε χρήση της παρακάτω σχέσης

$$\int_0^1 \left( \frac{t}{1-t} \right)^q dt = \frac{q\pi}{\sin q\pi}, \quad (\operatorname{Re} |q| < 1), \quad (6.44)$$

καθώς επίσης και χρήση των συνθηκών ορθογωνιότητας που παρέχονται με τις σχέσεις (5.59).

## 6.6 Η ΦΥΣΙΚΗ ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΕΝΤΑΣΗΣ ΤΩΝ ΤΑΣΕΩΝ

Οι ποσότητες που περιγράφουν πλήρως την ένταση, την παραμόρφωση και την ενεργειακή κατάσταση στο μέτωπο της ρωγμής και πάνω στη διεπιφάνεια είναι ο διεπιφανειακός ελκυστής των τάσεων  $\mathbf{t}$  μπροστά από τη ρωγμή, το άνοιγμα της ρωγμής  $\Delta \mathbf{u}$  και ο ρυθμός απελευθέρωσης ενέργειας  $G$  κατά τη διάδοση της ρωγμής. Οι σχέσεις που παρέχουν τις ποσότητες αυτές έχουν προκύψει στη μορφή

$$\mathbf{t}(r) = [\mathbf{H}^{-1} + \bar{\mathbf{H}}^{-1}] \left[ \mathbf{r} \tau \left( \frac{r}{l} \right)^{i\varepsilon} K + \bar{\mathbf{r}} \bar{\tau} \left( \frac{r}{l} \right)^{-i\varepsilon} \bar{K} + \mathbf{r}_0 \tau_0 K_{III} \right] \frac{1}{\sqrt{r}},$$

$$\Delta \mathbf{u} = 2\sqrt{r} \left[ \left( \mathbf{r} K \left( \frac{r}{l} \right)^{i\varepsilon} + \bar{\mathbf{r}} \bar{K} \left( \frac{r}{l} \right)^{-i\varepsilon} \right) \cosh \pi\varepsilon + \mathbf{r}_0 K_{III} \right],$$

$$G = \left( \frac{1}{4} + \varepsilon^2 \right) \pi |K|^2 \left\{ \mathbf{r}^T [\mathbf{H}^{-1} + \bar{\mathbf{H}}^{-1}] \bar{\mathbf{r}} + \bar{\mathbf{r}}^T [\mathbf{H}^{-1} + \bar{\mathbf{H}}^{-1}] \mathbf{r} \right\} + \frac{1}{4} \pi |K_0|^2 \mathbf{r}_0^T [\mathbf{H}^{-1} + \bar{\mathbf{H}}^{-1}] \mathbf{r}_0.$$

Τα τρία μητρώα στήλες  $\mathbf{r}$ ,  $\bar{\mathbf{r}}$  και  $\mathbf{r}_0$  που υπεισέρχονται στις παραπάνω ποσότητες, θα θεωρηθεί ότι αποτελούν τρία διανύσματα ενός διανυσματικού χώρου  $\mathcal{D}$ , του οποίου τα στοιχεία είναι μητρώα στήλης, με στοιχεία μιγαδικούς αριθμούς. Ο διανυσματικός αυτός χώρος θα ονομαστεί διανυσματικός χώρος των μετατοπίσεων. Θέτοντας  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}_2 = \bar{\mathbf{r}}$  και  $\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_0$  είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι τα τρία διανύσματα  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  και  $\mathbf{r}_3$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα μεταξύ τους και επομένως μπορούν να αποτελέσουν μια βάση του παραπάνω διανυσματικού χώρου. Θεωρώντας ως βάση τα τρία αυτά διανύσματα, κάθε διάνυσμα του χώρου των μετατοπίσεων μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των τριών

αυτών διανυσμάτων. Ως προς τη βάση αυτή το διάνυσμα  $\Delta \mathbf{u}$ , που παρέχεται με τη σχέση (6.38), είναι

$$\Delta \mathbf{u} = \Delta u_{\mathbf{r}_1} \mathbf{r}_1 + \Delta u_{\mathbf{r}_2} \mathbf{r}_2 + \Delta u_{\mathbf{r}_3} \mathbf{r}_3, \quad (6.45)$$

όπου  $\Delta u_{\mathbf{r}_1}$ ,  $\Delta u_{\mathbf{r}_2}$  και  $\Delta u_{\mathbf{r}_3}$  είναι οι συνιστώσες του διανύσματος μετατόπισης  $\Delta \mathbf{u}$  στις διευθύνσεις των  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  και  $\mathbf{r}_3$ , αντίστοιχα. Οι συνιστώσες αυτές είναι

$$\Delta u_{\mathbf{r}_1} = 2\sqrt{r}K \left( \frac{r}{l} \right)^{i\varepsilon} \cosh \pi\varepsilon, \quad (6.46\alpha)$$

$$\Delta u_{\mathbf{r}_2} = 2\sqrt{r}\bar{K} \left( \frac{r}{l} \right)^{-i\varepsilon} \cosh \pi\varepsilon = \Delta \bar{u}_{\mathbf{r}_1}, \quad (6.46\beta)$$

$$\Delta u_{\mathbf{r}_2} = 2\sqrt{r}K_{III}. \quad (6.46\gamma)$$

Στη συνέχεια, θα ορισθεί ένας νέος διανυσματικός χώρος  $\mathcal{T}$ , που θα ονομασθεί διανυσματικός χώρος των τάσεων. Τα στοιχεία του χώρου αυτού  $\mathbf{r}^*$  θα προκύπτουν από τα στοιχεία του χώρου των μετατοπίσεων  $\mathbf{r}$ , με τον γραμμικό μετασχηματισμό

$$\mathbf{r}_i^* = [\mathbf{H}^{-1} + \bar{\mathbf{H}}^{-1}] \mathbf{r}_i. \quad (6.47)$$

Εύκολα προκύπτει ότι τα μητρώα  $\mathbf{r}_1^*, \mathbf{r}_2^*$  και  $\mathbf{r}_3^*$ , που προκύπτουν από την προηγούμενη βάση με τον παραπάνω γραμμικό μετασχηματισμό, αποτελούν μια βάση του διανυσματικού χώρου των τάσεων. Παίρνοντας υπόψη ότι  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}, \mathbf{r}_2 = \bar{\mathbf{r}}$  και  $\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_0$  η νέα βάση μπορεί να αντιπροσωπευθεί με τα διανύσματα  $\mathbf{r}^*, \bar{\mathbf{r}}^*$  και  $\mathbf{r}_0^*$ , όπου

$$\mathbf{r}^* = [\mathbf{H}^{-1} + \bar{\mathbf{H}}^{-1}] \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_0^* = [\mathbf{H}^{-1} + \bar{\mathbf{H}}^{-1}] \mathbf{r}_3. \quad (6.48)$$

Συνεπώς, οι σχέσεις (6.32) και (6.38) γράφονται ισοδύναμα

$$\mathbf{t} = \left[ \mathbf{r}^* \tau \left( \frac{r}{l} \right)^{i\varepsilon} K + \bar{\mathbf{r}}^* \bar{\tau} \left( \frac{r}{l} \right)^{-i\varepsilon} \bar{K} + \mathbf{r}_0^* \tau_0 K_{III} \right] \frac{1}{\sqrt{r}}, \quad (6.49)$$

$$\Delta \mathbf{u} = 2\sqrt{r}[\mathbf{H}^{-1} + \bar{\mathbf{H}}^{-1}]^{-1} \left[ \left( \mathbf{r}^* K \left( \frac{r}{l} \right)^{i\varepsilon} + \bar{\mathbf{r}}^* \bar{K} \left( \frac{r}{l} \right)^{-i\varepsilon} \right) \cosh \pi\varepsilon + \mathbf{r}_0^* K_{III} \right]. \quad (6.50)$$

Από τη σχέση (6.49) προκύπτει ότι, στο διανυσματικό χώρο των τάσεων, το διάνυσμα του ελκυστή των τάσεων  $\mathbf{t}$  μπορεί να γραφτεί ως το άθροισμα των τριών συνιστωσών των  $\mathbf{t}_{\mathbf{r}^*}, \mathbf{t}_{\bar{\mathbf{r}}^*}, \mathbf{t}_{\mathbf{r}_0^*}$  στις διευθύνσεις των τριών διανυσμάτων  $\mathbf{r}^*, \bar{\mathbf{r}}^*$  και  $\mathbf{r}_0^*$  ως εξής

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_{\mathbf{r}^*} + \mathbf{t}_{\bar{\mathbf{r}}^*} + \mathbf{t}_{\mathbf{r}_0^*} = t_{\mathbf{r}} \mathbf{r}^* + t_{\bar{\mathbf{r}}} \bar{\mathbf{r}}^* + t_{\mathbf{r}_0} \mathbf{r}_0^*, \quad (6.51)$$

όπου

$$t_{\mathbf{r}} = \tau \left( \frac{r}{l} \right)^{ie} K \frac{1}{\sqrt{r}} = \bar{t}_{\bar{\mathbf{r}}}, \quad (6.52\alpha)$$

$$t_{\mathbf{r}_0} = \tau_0 K_{III} \frac{1}{\sqrt{r}}. \quad (6.52\beta)$$

Από την επίλυση του σχετικού ομογενούς συστήματος, τα διανύσματα  $\mathbf{r}$  και  $\mathbf{r}_0$  προκύπτουν στη μορφή

$$\mathbf{r} = c \hat{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{r}_0 = c_3 \hat{\mathbf{r}}_0, \quad (6.53)$$

όπου τα  $\hat{\mathbf{r}}$  και  $\hat{\mathbf{r}}_0$  είναι σταθερά διανύσματα στήλης των οποίων τα στοιχεία έχουν αδιάστατη μορφή, το  $c$  είναι μια μιγαδική σταθερά και το  $c_3$  μια πραγματική σταθερά. Στη συνέχεια, οι αυθαίρετες σταθερές  $c$  και  $c_3$  θα επιλεγούν έτσι ώστε να ισχύει

$$\bar{\mathbf{r}}^T \mathbf{r}^* = -1, \quad \hat{\mathbf{r}}_0^T \mathbf{r}_0^* = -1. \quad (6.54)$$

Από την επιλογή αυτή, παίρνοντας υπόψη τις (6.53) προκύπτει ότι

$$c = -\frac{1}{\bar{\mathbf{r}}^T [\mathbf{H}^{-1} + \bar{\mathbf{H}}^{-1}] \hat{\mathbf{r}}}, \quad c_3 = -\frac{1}{\hat{\mathbf{r}}_0^T [\mathbf{H}^{-1} + \bar{\mathbf{H}}^{-1}] \hat{\mathbf{r}}_0}. \quad (6.55)$$

Με τον τρόπο αυτό οι ποσότητες  $1/c$  και  $1/c_3$  αποκτούν διαστάσεις τάσεων. Έτσι τα  $\mathbf{r}^*$  και  $\mathbf{r}_0^*$  που δίνονται από τις (6.48), χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (6.53) και (6.55) γράφονται

$$\mathbf{r}^* = -\frac{[\mathbf{H}^{-1} + \bar{\mathbf{H}}^{-1}] \hat{\mathbf{r}}}{\bar{\mathbf{r}}^T [\mathbf{H}^{-1} + \bar{\mathbf{H}}^{-1}]^{-1} \hat{\mathbf{r}}}, \quad \mathbf{r}_0^* = -\frac{[\mathbf{H}^{-1} + \bar{\mathbf{H}}^{-1}] \hat{\mathbf{r}}_0}{\hat{\mathbf{r}}_0^T [\mathbf{H}^{-1} + \bar{\mathbf{H}}^{-1}]^{-1} \hat{\mathbf{r}}_0}. \quad (6.56)$$

Θα αναζητηθεί τώρα η σχέση που συνδέει τον ελκυστή των τάσεων μπροστά από τη ρωγμή με το άνοιγμα της ρωγμής  $\Delta \mathbf{u}$ . Απαλείφοντας το μητρώο  $\mathbf{K}$  μεταξύ των σχέσεων (6.18) και (6.37) προκύπτει



$$2r\mathbf{t} = (\mathbf{H}^{-1} + \bar{\mathbf{H}}^{-1}) \mathbf{R} \left\langle \frac{\tau}{\cosh \pi \varepsilon} \right\rangle \mathbf{R}^{-1} \Delta \mathbf{u}. \quad (6.57)$$

Η σχέση αυτή για  $\varepsilon = 0$  παρέχει

$$4r\mathbf{t} = (\mathbf{H}^{-1} + \bar{\mathbf{H}}^{-1}) \Delta \mathbf{u}. \quad (6.58)$$

Οι σχέσεις (6.57) και (6.58) δείχνουν ότι, για μια συγκεκριμένη ακτίνα  $r$ , υπάρχει μια γραμμική σχέση μεταξύ των συνιστωσών του ελκυστή των τάσεων και των συνιστωσών του ανοίγματος της ρωγμής. Στη συνέχεια θα διερευνηθεί η περίπτωση που  $\varepsilon = 0$ . Στην περίπτωση αυτή, το μητρώο  $\mathbf{H}^{-1} + \bar{\mathbf{H}}^{-1}$  έχει πραγματικά στοιχεία και δεν είναι διαγώνιο. Το μητρώο αυτό μπορεί να διαγωνοποιηθεί εφαρμόζοντας τη γνωστή διαδικασία που αναφέρθηκε στην ενότητα 5.4.1, και να τεθεί στη μορφή

$$\mathbf{H}^{-1} + \bar{\mathbf{H}}^{-1} = \mathbf{R}^* \mathbf{L}^* \mathbf{R}^{*-1}, \quad (6.59)$$

όπου  $\mathbf{R}^*$  είναι το μητρώο ιδιοδιανυσμάτων του  $\mathbf{H}^{-1} + \bar{\mathbf{H}}^{-1}$  και  $\mathbf{L}^*$  είναι το διαγώνιο μητρώο των ιδιοτιμών. Εύκολα δείχνεται ότι τα στοιχεία των μητρώων  $\mathbf{R}^*$  και  $\mathbf{L}^*$  είναι πραγματικά. Αντικαθιστώντας τη σχέση (6.59) στην (6.58) βρίσκεται ότι

$$4r\mathbf{t}^* = \mathbf{L}^* \Delta \mathbf{u}^*, \quad (6.60)$$

όπου έχει τεθεί

$$\mathbf{t}^* = [\sigma_{21}^*, \sigma_{22}^*, \sigma_{23}^*] = \mathbf{R}^{*-1} \mathbf{t}, \quad \Delta \mathbf{u}^* = [\Delta u_1^*, \Delta u_2^*, \Delta u_3^*] = \mathbf{R}^{*-1} \Delta \mathbf{u}. \quad (6.61)$$

Το μητρώο  $\mathbf{R}^{*-1}$  μετασχηματίζει το σύστημα συντεταγμένων  $(x_1, x_2, x_3)$  σε ένα σύστημα  $(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ , για το οποίο  $x_3 = x_3^*$ . Ως προς το σύστημα αυτό από τη σχέση (6.60) προκύπτει

$$4r\sigma_{21}^* = \lambda_1^* \Delta u_1^*, \quad 4r\sigma_{22}^* = \lambda_2^* \Delta u_2^*, \quad 4r\sigma_{23}^* = \lambda_3^* \Delta u_3^*, \quad (6.62)$$

όπου τα  $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*$  είναι τα διαγώνια στοιχεία του μητρώου  $\mathbf{L}^*$ . Οι παραπάνω σχέσεις δείχνουν ότι για έναν οποιονδήποτε συνδυασμό υλικών, πάντα υπάρχει ένα σύστημα συντεταγμένων κεντραρισμένο στο άκρο της ρωγμής για το οποίο οι συνιστώσες του διεπιφανειακού ελκυστή των τάσεων είναι ανάλογες των αντίστοιχων συνιστωσών του διανύσματος του ανοίγματος της ρωγμής.

## 6.7 ΤΟ ΜΗΤΡΩΟ ΕΝΤΑΣΗΣ ΤΩΝ ΤΑΣΕΩΝ ΓΙΑ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΦΟΡΤΙΣΗ

Δείχθηκε προηγούμενα ότι, για όλους τους συνδυασμούς ανισοτροπίας του διυλικού, οι εκφράσεις των διαφασικών δυναμικών παρέχονται με τις σχέσεις (6.5), (6.7) που συμπίπτουν μεταξύ τους. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό που δόθηκε για το μητρώο έντασης των τάσεων, για όλους του συνδυασμούς ανισοτροπίας του διυλικού προκύπτει

$$\mathbf{K} = -(\mathbf{I} + \mathbf{L})^{-1} \sqrt{l} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \boldsymbol{\sigma}_2^\infty. \quad (6.63)$$

Το μητρώο  $\mathbf{R}$  παρέχεται από τη σχέση

$$\mathbf{R} = \hat{\mathbf{R}} \mathbf{c}. \quad (6.64)$$

όπου  $\hat{\mathbf{R}}$  είναι το μητρώο των αδιάστατων ιδιοδιανυσμάτων, δηλαδή

$$\hat{\mathbf{R}} = [\hat{\mathbf{r}}_1, \hat{\mathbf{r}}_2, \hat{\mathbf{r}}_3]. \quad (6.65)$$

Το μητρώο  $\mathbf{c}$  έχει προσδιορισθεί έτσι ώστε

$$\bar{\mathbf{R}}^T (\mathbf{H}^{-1} + \bar{\mathbf{H}}^{-1}) \hat{\mathbf{R}} \mathbf{c} = -\mathbf{I}. \quad (6.66)$$

Παίρνοντας υπόψη τις (6.64) και (6.65), το μητρώο έντασης των τάσεων που παρέχεται από τη σχέση (6.63) γράφεται

$$\mathbf{K} = (\mathbf{I} + \mathbf{L})^{-1} \left\langle \bar{\mathbf{r}}_1^T (\mathbf{H}^{-1} + \bar{\mathbf{H}}^{-1}) \hat{\mathbf{r}}_1, \bar{\mathbf{r}}_2^T (\mathbf{H}^{-1} + \bar{\mathbf{H}}^{-1}) \hat{\mathbf{r}}_2, \bar{\mathbf{r}}_3^T (\mathbf{H}^{-1} + \bar{\mathbf{H}}^{-1}) \hat{\mathbf{r}}_3 \right\rangle \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{H} \boldsymbol{\sigma}_2^\infty \sqrt{l}. \quad (6.67)$$

Η παραπάνω σχέση παρέχει το μητρώο έντασης των τάσεων για όλους τους συνδυασμούς ανισοτροπίας του διυλικού. Η σχέση (6.67) θα εξειδικευθεί στην περίπτωση του ισότροπου/ισότροπου διυλικού για το οποίο το μητρώο έντασης των τάσεων έχει εξαχθεί στη βιβλιογραφία στη μορφή των συντελεστών έντασης των τάσεων. Για την περίπτωση αυτή, τα αδιάστατα ιδιοδιανύσματα έχουν βρεθεί στη μορφή (Παράρτημα I)

$$\hat{\mathbf{r}}_1 = [-i, 1, 0], \quad \hat{\mathbf{r}}_2 = [i, 1, 0], \quad \hat{\mathbf{r}}_3 = [0, 0, 1]. \quad (6.68)$$

Από τη σχέση (I.1) του Παραρτήματος I, που παρέχει το μητρώο  $\mathbf{H}$  για την περίπτωση του ισότροπου/ισότροπου συνδυασμού, υπολογίζονται οι ποσότητες που υπεισέρχονται στην (6.67)

$$(\mathbf{I} + \mathbf{L})^{-1} = \frac{1}{2} \langle 1 + \beta, 1 - \beta, 1 \rangle, \quad (6.69)$$

$$\bar{\mathbf{r}}_1^T (\mathbf{H}^{-1} + \bar{\mathbf{H}}^{-1}) \hat{\mathbf{r}}_1 = \bar{\mathbf{r}}_2^T (\mathbf{H}^{-1} + \bar{\mathbf{H}}^{-1}) \hat{\mathbf{r}}_2 = \frac{8}{\left( \frac{1+\kappa_I}{2\mu_I} + \frac{1+\kappa_{II}}{2\mu_{II}} \right) (1-\beta^2)}, \quad (6.70)$$

$$\hat{\mathbf{r}}_3^T [\mathbf{H}^{-1} + \bar{\mathbf{H}}^{-1}]^{-1} \hat{\mathbf{r}}_3 = \frac{2\mu_I \mu_{II}}{(\mu_I + \mu_{II})}. \quad (6.71)$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στην (6.67) προκύπτει

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \sigma_{22} + i\sigma_{12} \\ \sigma_{22} - i\sigma_{12} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} \sqrt{l}. \quad (6.72)$$

Η σχέση αυτή συμπίπτει με την αντίστοιχη σχέση που έχει προκύψει για τη ρωγμή σε ομογενές υλικό.

## 6.8 ΤΟ ΜΗΤΡΩΟ ΕΝΤΑΣΗΣ ΤΩΝ ΤΑΣΕΩΝ ΓΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΑΡΜΩΣΗ

Για την ιδιομορφία αυτή το διαφασικό δυναμικό του ανισότροπου/ανισότροπου διυλικού είναι διαφορετικό από εκείνο του ισότροπου/ισότροπου διυλικού. Όμως, το διαφασικό δυναμικό του ανισότροπου/ανισότροπου διυλικού ταυτίζεται στη μορφή με αυτό του ανισότροπου/ισότροπου διυλικού, όταν η ιδιομορφία του τελευταίου επενεργεί στην ανισότροπη φάση. Επίσης, το διαφασικό δυναμικό του ισότροπου/ισότροπου διυλικού ταυτίζεται στη μορφή με αυτό του ισότροπου/ανισότροπου συνδυασμού, όταν η ιδιομορφία του τελευταίου βρίσκεται στην ισότροπη φάση.

Έτσι, για την περίπτωση του ανισότροπου/ανισότροπου διυλικού, το μητρώο έντασης των τάσεων θα προσδιορισθεί από το διαφασικό δυναμικό που παρέχεται από τη σχέση (5.106) χρησιμοποιώντας τον ορισμό της (6.10). Βρίσκεται ότι

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2\pi\sqrt{l}} (\mathbf{I} + \mathbf{L})^{-1} \left[ - \left\langle \sqrt{\frac{z_0 - a_1}{z_0 - a_2}} \left( \frac{z_0 - a_1}{z_0 - a_2} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle - \left\langle \sqrt{\frac{\bar{z}_0 - a_1}{\bar{z}_0 - a_2}} \left( \frac{\bar{z}_0 - a_1}{\bar{z}_0 - a_2} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle \mathbf{L} + \mathbf{I} + \mathbf{L} \right] \mathbf{R}^{-1} \mathbf{b}. \quad (6.73)$$

Η περίπτωση αυτή ισχύει και για την περίπτωση του ανισότροπου/ισότροπου συνδυασμού, όταν η ιδιομορφία βρίσκεται στην ανισότροπη φάση.

Για την περίπτωση του ισότροπου/ισότροπου συνδυασμού το διαφασικό δυναμικό  $\mathbf{f}_0^c(z)$  παρέχεται από την (5.117). Χρησιμοποιώντας τον ορισμό βρίσκεται

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2\pi\sqrt{l}}(\mathbf{I} + \mathbf{L})^{-1} \left[ \left\langle \sqrt{\frac{z_0 - a_1}{z_0 - a_2}} \left( \frac{z_0 - a_1}{z_0 - a_2} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle \mathbf{R}^{-1} \mathcal{K}_s(z; z_0) + \left\langle \sqrt{\frac{\bar{z}_0 - a_1}{\bar{z}_0 - a_2}} \left( \frac{\bar{z}_0 - a_1}{\bar{z}_0 - a_2} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle \mathbf{L} \mathbf{R}^{-1} \bar{\mathcal{K}}_s(z; \bar{z}_0) + (\mathbf{I} + \mathbf{L}) \mathbf{R}^{-1} \right] \mathbf{b}, \quad (6.74)$$

όπου το  $\mathcal{K}_s(z; z_0)$  δίνεται από τη σχέση (5.119). Η παραπάνω σχέση ισχύει και για την περίπτωση του ισότροπου/ανισότροπου διυλικού, όταν η ιδιομορφία βρίσκεται στην ισότροπη φάση. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (6.70), (6.71) και τα αποτελέσματα του Παραρτήματος I, τα στοιχεία  $K_1, K_2$  και  $K_3$  του μητρώου  $\mathbf{K}$  προκύπτουν στη μορφή

$$\begin{aligned} \pi\sqrt{l}K_1 = & \frac{i\mu_I\mu_{II}}{\mu_{II} + \kappa_{II}\mu_I} \sqrt{\frac{z_0 - a_1}{z_0 - a_2}} \left( \frac{z_0 - a_1}{z_0 - a_2} \right)^{i\varepsilon} \left\{ b_1 - ib_2 + (b_1 + ib_2) \frac{z_0 - \bar{z}_0}{a_2 - z_0} \right. \\ & \left. + (b_1 + ib_2) \left[ z_0 - \frac{a_1 + a_2}{2} - (a_2 - a_1)i\varepsilon \right] \frac{z_0 - \bar{z}_0}{(z_0 - a_1)(z_0 - a_2)} \right\} \\ & + \frac{i\mu_I\mu_{II}}{\mu_I + \kappa_I\mu_{II}} \sqrt{\frac{\bar{z}_0 - a_1}{\bar{z}_0 - a_2}} \left( \frac{\bar{z}_0 - a_1}{\bar{z}_0 - a_2} \right)^{i\varepsilon} (b_1 - ib_2) - \frac{4i}{\left( \frac{1 + \kappa_I}{2\mu_I} + \frac{1 + \kappa_{II}}{2\mu_{II}} \right) (1 - \beta^2)} (b_1 - ib_2), \end{aligned} \quad (6.75)$$

$$\begin{aligned} \pi\sqrt{l}K_2 = & -\frac{i\mu_I\mu_{II}}{\mu_{II} + \kappa_{II}\mu_I} \sqrt{\frac{\bar{z}_0 - a_1}{\bar{z}_0 - a_2}} \left( \frac{\bar{z}_0 - a_1}{\bar{z}_0 - a_2} \right)^{-i\varepsilon} \left\{ b_1 + ib_2 + (b_1 - ib_2) \frac{\bar{z}_0 - z_0}{a_2 - \bar{z}_0} \right. \\ & \left. + (b_1 - ib_2) \left[ \bar{z}_0 - \frac{a_1 + a_2}{2} + (a_2 - a_1)i\varepsilon \right] \frac{\bar{z}_0 - z_0}{(\bar{z}_0 - a_1)(\bar{z}_0 - a_2)} \right\} \\ & - \frac{i\mu_I\mu_{II}}{\mu_I + \kappa_I\mu_{II}} \sqrt{\frac{z_0 - a_1}{z_0 - a_2}} \left( \frac{z_0 - a_1}{z_0 - a_2} \right)^{-i\varepsilon} (b_1 + ib_2) + \frac{4i}{\left( \frac{1 + \kappa_I}{2\mu_I} + \frac{1 + \kappa_{II}}{2\mu_{II}} \right) (1 - \beta^2)} (b_1 + ib_2), \end{aligned} \quad (6.76)$$

$$\pi\sqrt{l}K_3 = \frac{\mu_I\mu_{II}}{\mu_I + \mu_{II}} \left\{ \sqrt{\frac{z_0 - a_1}{z_0 - a_2}} + \sqrt{\frac{\bar{z}_0 - a_1}{\bar{z}_0 - a_2}} - 1 \right\} b_3. \quad (6.77)$$

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτουν οι συντελεστές έντασης των τάσεων  $K_I, K_{II}, K_{III}$ , ( $K_I = \bar{K}_2 = K_I + iK_{II}$ ,  $K_3 = K_{III}$ ), που καταχωρούνται στο Παράρτημα V.

## 6.9 ΤΟ ΜΗΤΡΩΟ ΕΝΤΑΣΗΣ ΤΩΝ ΤΑΣΕΩΝ ΓΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ

Ακολουθώντας τη διαδικασία που ακολουθήθηκε για την γραμμική εξάρμωση, από τη σχέση (5.136), εξάγεται το μητρώο έντασης των τάσεων για τον ανισότροπο/ανισότροπο συνδυασμό στη μορφή

$$\mathbf{K} = -\frac{i}{2\pi\sqrt{l}} (\mathbf{I} + \mathbf{L})^{-1} \left\{ \left\langle \sqrt{\frac{z_0 - a_1}{z_0 - a_2}} \left( \frac{z_0 - a_1}{z_0 - a_2} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle \mathbf{R}^{-1} \bar{\mathbf{M}}_{II}^{-1} + \left\langle \sqrt{\frac{\bar{z}_0 - a_1}{\bar{z}_0 - a_2}} \left( \frac{\bar{z}_0 - a_1}{\bar{z}_0 - a_2} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle \mathbf{L} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{M}_{II}^{-1} + \left[ \mathbf{R}^{-1} \bar{\mathbf{M}}_{II}^{-1} - \mathbf{L} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{M}_{II}^{-1} \right] \right\} \mathbf{p}. \quad (6.78)$$

Η σχέση αυτή ισχύει και για την περίπτωση του ανισότροπου/ισότροπου συνδυασμού, όταν η ιδιομορφία επενεργεί στην ανισότροπη φάση.

Για την περίπτωση του ισότροπου/ισότροπου διυλικού, το μητρώο έντασης των τάσεων εξάγεται από τη σχέση (5.144) στη μορφή

$$\mathbf{K} = -\frac{i}{2\pi\sqrt{l}} (\mathbf{I} + \mathbf{L})^{-1} \left\{ \left\langle \sqrt{\frac{z_0 - a_1}{z_0 - a_2}} \left( \frac{z_0 - a_1}{z_0 - a_2} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle \mathbf{R}^{-1} \mathcal{K}_F(z; z_0) + \left\langle \sqrt{\frac{\bar{z}_0 - a_1}{\bar{z}_0 - a_2}} \left( \frac{\bar{z}_0 - a_1}{\bar{z}_0 - a_2} \right)^{i\varepsilon} \right\rangle \mathbf{L} \mathbf{R}^{-1} \bar{\mathcal{K}}_F(z; \bar{z}_0) + \left[ \mathbf{R}^{-1} \bar{\mathbf{M}}_{II}^{-1} - \mathbf{L} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{M}_{II}^{-1} \right] \right\} \mathbf{p}, \quad (6.79)$$

όπου το  $\mathcal{K}_F(z; z_0)$  δίνεται από τη σχέση (5.146). Η παραπάνω σχέση ισχύει και για την περίπτωση του ισότροπου/ανισότροπου διυλικού, όταν η ιδιομορφία βρίσκεται στην ισότροπη φάση. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (6.70), (6.71) και τα αποτελέσματα του Παραρτήματος I, τα στοιχεία  $K_1, K_2$  και  $K_3$  του μητρώου έντασης των τάσεων προκύπτουν στη μορφή

$$2\pi\sqrt{l}K_1 = \frac{\mu_I}{\mu_{II} + \kappa_{II}\mu_I} \sqrt{\frac{z_0 - a_1}{z_0 - a_2}} \left( \frac{z_0 - a_1}{z_0 - a_2} \right)^{i\varepsilon} \left\{ -\kappa_{II}(p_1 - ip_2) - (p_1 + ip_2) \frac{z_0 - \bar{z}_0}{a_2 - z_0} \right. \\ \left. - (p_1 + ip_2) \left[ z_0 - \frac{a_1 + a_2}{2} - (a_2 - a_1)i\varepsilon \right] \frac{z_0 - \bar{z}_0}{(z_0 - a_1)(z_0 - a_2)} \right\} + \quad (6.80)$$

$$\frac{\mu_I}{\mu_I + \kappa_I\mu_{II}} \sqrt{\frac{\bar{z}_0 - a_1}{\bar{z}_0 - a_2}} \left( \frac{\bar{z}_0 - a_1}{\bar{z}_0 - a_2} \right)^{i\varepsilon} (p_1 - ip_2) + \mu_I \left( \frac{\kappa_{II}}{\mu_{II} + \kappa_{II}\mu_I} - \frac{1}{\mu_I + \kappa_I\mu_{II}} \right) (p_1 - ip_2),$$

$$2\pi\sqrt{l}K_2 = \frac{\mu_I}{\mu_{II} + \kappa_{II}\mu_I} \sqrt{\frac{\bar{z}_0 - a_1}{\bar{z}_0 - a_2}} \left( \frac{\bar{z}_0 - a_1}{\bar{z}_0 - a_2} \right)^{-i\varepsilon} \left\{ -\kappa_{II}(p_1 + ip_2) + (p_1 - ip_2) \frac{z_0 - \bar{z}_0}{a_2 - \bar{z}_0} \right. \\ \left. + (p_1 - ip_2) \left[ \bar{z}_0 - \frac{a_1 + a_2}{2} + (a_2 - a_1)i\varepsilon \right] \frac{z_0 - \bar{z}_0}{(\bar{z}_0 - a_1)(\bar{z}_0 - a_2)} \right\} + \quad (6.81)$$

$$\frac{\mu_I}{\mu_I + \kappa_I\mu_{II}} \sqrt{\frac{z_0 - a_1}{z_0 - a_2}} \left( \frac{z_0 - a_1}{z_0 - a_2} \right)^{-i\varepsilon} (p_1 + ip_2) + \mu_I \left( \frac{\kappa_{II}}{\mu_{II} + \kappa_{II}\mu_I} - \frac{1}{\mu_I + \kappa_I\mu_{II}} \right) (p_1 + ip_2),$$

$$2\pi\sqrt{l}K_3 = \frac{i\mu_I}{2(\mu_I + \mu_{II})} \left\{ -\sqrt{\frac{z_0 - a_1}{z_0 - a_2}} + \sqrt{\frac{\bar{z}_0 - a_1}{\bar{z}_0 - a_2}} - 1 \right\} p_3. \quad (6.82)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτουν οι συντελεστές έντασης των τάσεων  $K_I, K_{II}$  και  $K_{III}$ , που καταχωρούνται στο Παράρτημα V.

## 6.10 ΤΑ ΕΛΑΣΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ ΚΟΝΤΑ ΣΤΟ ΑΚΡΟ ΤΗΣ ΡΩΓΜΗΣ

### 6.10.1 Ανισότροπο/ανισότροπο διυλικό

Για την περίπτωση του ανισότροπου/ανισότροπου διυλικού, τα μητρώα τάσεων  $\sigma_1$  και  $\sigma_2$ , για τις δύο φάσεις του διυλικού έχουν εκφρασθεί σε όρους του μητρώου έντασης των τάσεων με τις σχέσεις (6.14)-(6.17). Οι σχέσεις αυτές παρέχουν τις ασυμπτωτικές μορφές των τάσεων και των μετατοπίσεων στη γειτονιά του άκρου της ρωγμής. Στη συνέχεια, η ασυμπτωτική μορφή των παραπάνω τάσεων θα γραφτεί σε όρους των συντελεστών έντασης των τάσεων  $K_1, K_2$  και  $K_3$  σε απλή αλγεβρική μορφή, χρησιμοποιώντας τα κανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα  $\hat{\mathbf{R}}$  που εισάγονται με τη σχέση (6.64). Παίρνοντας υπόψη τις (6.64), (6.65), οι σχέσεις (6.14) και (6.15) γράφονται

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}'_2 = G'_{2,1}\left(\theta, \frac{r}{l}\right)\frac{K_1}{\sqrt{r}}\mathbf{e}_1 + G'_{2,2}\left(\theta, \frac{r}{l}\right)\frac{K_2}{\sqrt{r}}\mathbf{e}_2 + G'_{2,3}\left(\theta, \frac{r}{l}\right)\frac{K_3}{\sqrt{r}}\mathbf{e}_3, \quad (6.83)$$

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}'_1 = G'_{1,1}\left(\theta, \frac{r}{l}\right)\frac{K_1}{\sqrt{r}}\mathbf{e}_1 + G'_{1,2}\left(\theta, \frac{r}{l}\right)\frac{K_2}{\sqrt{r}}\mathbf{e}_2 + G'_{1,3}\left(\theta, \frac{r}{l}\right)\frac{K_3}{\sqrt{r}}\mathbf{e}_3, \quad (6.84)$$

όπου έχουν εισαχθεί τα αδιάστατα μητρώα στήλης  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  και  $\mathbf{e}_3$  σαν βάση του χώρου των μετατοπίσεων με τις σχέσεις

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\hat{\mathbf{r}}_1}{\hat{\mathbf{r}}_1^T [\mathbf{H}^{-1} + \bar{\mathbf{H}}^{-1}] \hat{\mathbf{r}}_1}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\hat{\mathbf{r}}_2}{\hat{\mathbf{r}}_2^T [\mathbf{H}^{-1} + \bar{\mathbf{H}}^{-1}] \hat{\mathbf{r}}_2}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\hat{\mathbf{r}}_3}{\hat{\mathbf{r}}_3^T [\mathbf{H}^{-1} + \bar{\mathbf{H}}^{-1}] \hat{\mathbf{r}}_3}. \quad (6.85)$$

Στις παραπάνω εκφράσεις των τάσεων οι υπεισερχόμενες αλγεβρικές συναρτήσεις  $G'_{1,k}(\theta, r/l)$  και  $G'_{2,k}(\theta, r/l)$  έχουν τη μορφή

$$G'_{2,k}\left(\theta, \frac{r}{l}\right) = \tau_k \left[ \frac{(\cos \theta + p'_k \sin \theta)^{i\varepsilon_k}}{\sqrt{\cos \theta + p'_k \sin \theta}} + e^{-2\pi\varepsilon_k} \frac{(\cos \theta + \bar{p}'_k \sin \theta)^{i\varepsilon_k}}{\sqrt{\cos \theta + \bar{p}'_k \sin \theta}} \right] \exp\left(i\varepsilon_k \ln \frac{r}{l}\right), \quad (6.86)$$

$$G'_{1,k}\left(\theta, \frac{r}{l}\right) = -\tau_k \left[ \frac{(\cos \theta + p'_k \sin \theta)^{i\varepsilon_k}}{\sqrt{\cos \theta + p'_k \sin \theta}} p'_k + e^{-2\pi\varepsilon_k} \frac{(\cos \theta + \bar{p}'_k \sin \theta)^{i\varepsilon_k}}{\sqrt{\cos \theta + \bar{p}'_k \sin \theta}} \bar{p}'_k \right] \exp\left(i\varepsilon_k \ln \frac{r}{l}\right), \quad (6.87)$$

όπου

$$\omega_k = i\varepsilon_k \ln \frac{r}{l}, \quad \tau_k = \frac{1}{2} + i\varepsilon_k. \quad (6.88)$$

Οι αντίστοιχες εκφράσεις για τη φάση II προκύπτουν από τις σχέσεις (6.16) και (6.17) στη μορφή

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}''_2 = G''_{2,1}\left(\theta, \frac{r}{l}\right)\frac{K_1}{\sqrt{r}}\mathbf{e}_1 + G''_{2,2}\left(\theta, \frac{r}{l}\right)\frac{K_2}{\sqrt{r}}\mathbf{e}_2 + G''_{2,3}\left(\theta, \frac{r}{l}\right)\frac{K_3}{\sqrt{r}}\mathbf{e}_3, \quad (6.89)$$

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}''_1 = G''_{1,1}\left(\theta, \frac{r}{l}\right)\frac{K_1}{\sqrt{r}}\mathbf{e}_1 + G''_{1,2}\left(\theta, \frac{r}{l}\right)\frac{K_2}{\sqrt{r}}\mathbf{e}_2 + G''_{1,3}\left(\theta, \frac{r}{l}\right)\frac{K_3}{\sqrt{r}}\mathbf{e}_3, \quad (6.90)$$

όπου

$$G''_{2,k}\left(\theta, \frac{r}{l}\right) = \tau_k \left[ e^{-2\pi\varepsilon_k} \frac{(\cos \theta + p''_k \sin \theta)^{i\varepsilon_k}}{\sqrt{\cos \theta + p''_k \sin \theta}} + \frac{(\cos \theta + \bar{p}''_k \sin \theta)^{i\varepsilon_k}}{\sqrt{\cos \theta + \bar{p}''_k \sin \theta}} \right] \exp\left(i\varepsilon_k \ln \frac{r}{l}\right), \quad (6.91)$$

$$G_{1,k}^{II} \left( \theta, \frac{r}{l} \right) = -\tau_k \left[ e^{-2\pi\varepsilon_k} \frac{(\cos \theta + p_k^{II} \sin \theta)^{i\varepsilon_k}}{\sqrt{\cos \theta + p_k^{II} \sin \theta}} p_k^{II} + \frac{(\cos \theta + \bar{p}_k^{II} \sin \theta)^{i\varepsilon_k}}{\sqrt{\cos \theta + \bar{p}_k^{II} \sin \theta}} \bar{p}_k^{II} \right] \exp \left( i\varepsilon_k \ln \frac{r}{l} \right). \quad (6.92)$$

Για την περίπτωση που  $\varepsilon_k = 0$  και  $\mathbf{H} = \bar{\mathbf{H}}$ , οι παραπάνω εκφράσεις και για τις δύο φάσεις παίρνουν τη μορφή

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}_2 = G_{1,2}(\theta) \frac{K_1}{2\sqrt{r}} \mathbf{e}_1 + G_{2,2}(\theta) \frac{K_2}{2\sqrt{r}} \mathbf{e}_2 + G_{3,2}(\theta) \frac{K_3}{2\sqrt{r}} \mathbf{e}_3, \quad (6.93)$$

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}_1 = G_{1,1}(\theta) \frac{K_1}{2\sqrt{r}} \mathbf{e}_1 + G_{2,1}(\theta) \frac{K_2}{2\sqrt{r}} \mathbf{e}_2 + G_{3,1}(\theta) \frac{K_3}{2\sqrt{r}} \mathbf{e}_3, \quad (6.94)$$

όπου έχει τεθεί

$$G_{2,k}(\theta) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + p_k \sin \theta}} + \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \bar{p}_k \sin \theta}} \right], \quad (6.95)$$

$$G_{1,k}(\theta) = -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + p_k \sin \theta}} p_k + \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \bar{p}_k \sin \theta}} \bar{p}_k \right], \quad (6.96)$$

και

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\hat{\mathbf{r}}_1}{\hat{\mathbf{r}}_1^T \mathbf{H}^{-1} \hat{\mathbf{r}}_1}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\hat{\mathbf{r}}_2}{\hat{\mathbf{r}}_2^T \mathbf{H}^{-1} \hat{\mathbf{r}}_2}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\hat{\mathbf{r}}_3}{\hat{\mathbf{r}}_3^T \mathbf{H}^{-1} \hat{\mathbf{r}}_3}. \quad (6.97)$$

Οι παραπάνω σχέσεις αντιστοιχούν στην περίπτωση του ομογενούς υλικού και είναι συμβατές με αυτές που έχουν αποκτηθεί από τους Sih et al. (1965).

### 6.10.2 Ισότροπο/ισότροπο διυλικό

Για την περίπτωση του ισότροπου/ισότροπου διυλικού, οι ασυμπτωτικές μορφές των τάσεων  $\boldsymbol{\sigma}_1$  και  $\boldsymbol{\sigma}_2$ , για τις δύο φάσεις του διυλικού έχουν εκφρασθεί σε όρους του μητρώου έντασης των τάσεων με τις σχέσεις (6.23)-(6.26). Στη συνέχεια, οι εκφράσεις αυτές των τάσεων θα γραφτούν σε όρους των συντελεστών έντασης των τάσεων  $K_1, K_2$  και  $K_3$  σε απλή αλγεβρική μορφή παίρνοντας υπόψη την (6.64). Βρίσκεται ότι



$$\begin{aligned} \mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}'_2 = & G'_{2,1}\left(\theta, \frac{r}{l}\right) \frac{K_1}{\sqrt{r}} \mathbf{e}_1 + G'_{2,2}\left(\theta, \frac{r}{l}\right) \frac{K_2}{\sqrt{r}} \mathbf{e}_2 + G'_{2,3}\left(\theta, \frac{r}{l}\right) \frac{K_3}{\sqrt{r}} \mathbf{e}_3 \\ & + g'_{2,1}\left(\theta, \frac{r}{l}\right) \frac{K_1}{\sqrt{r}} \mathbf{e}_2 + g'_{2,2}\left(\theta, \frac{r}{l}\right) \frac{K_2}{\sqrt{r}} \mathbf{e}_1, \end{aligned} \quad (6.98)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}'_1 = & G'_{1,1}\left(\theta, \frac{r}{l}\right) \frac{K_1}{\sqrt{r}} \mathbf{e}_1 + G'_{1,2}\left(\theta, \frac{r}{l}\right) \frac{K_2}{\sqrt{r}} \mathbf{e}_2 + G'_{1,3}\left(\theta, \frac{r}{l}\right) \frac{K_3}{\sqrt{r}} \mathbf{e}_3 \\ & - i\hat{g}'_{2,2}\left(\theta, \frac{r}{l}\right) \frac{K_2}{\sqrt{r}} \mathbf{e}_1 + i\hat{g}'_{2,1}\left(\theta, \frac{r}{l}\right) \frac{K_1}{\sqrt{r}} \mathbf{e}_2 \\ & - ig'_{2,1}\left(\theta, \frac{r}{l}\right) \frac{K_1}{\sqrt{r}} \mathbf{e}_2 + ig'_{2,2}\left(\theta, \frac{r}{l}\right) \frac{K_2}{\sqrt{r}} \mathbf{e}_1, \end{aligned} \quad (6.99)$$

όπου

$$G'_{2,k}\left(\theta, \frac{r}{l}\right) = \tau_k \left\{ e^{-\varepsilon_k \theta} \left( \cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \right) + e^{-2\pi\varepsilon_k} e^{\varepsilon_k \theta} \left( \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right) \exp\left(i\varepsilon_k \ln \frac{r}{l}\right) \right\}, \quad (6.100)$$

$$g'_{2,1}\left(\theta, \frac{r}{l}\right) = 4|\tau_k|^2 e^{\varepsilon\theta} \cos \theta \left( \cos \frac{3\theta}{2} + i \sin \frac{3\theta}{2} \right) \exp\left(i\varepsilon_1 \ln \frac{r}{l}\right), \quad (6.101)$$

$$g'_{2,2}\left(\theta, \frac{r}{l}\right) = 4 \frac{1-\beta}{1+\beta} |\tau_k|^2 e^{\varepsilon\theta} \cos \theta \left( \cos \frac{3\theta}{2} - i \sin \frac{3\theta}{2} \right) \exp\left(i\varepsilon_2 \ln \frac{r}{l}\right), \quad (6.102)$$

και

$$G'_{1,k}\left(\theta, \frac{r}{l}\right) = i\tau_k \left\{ e^{-\varepsilon_k \theta} \left( \cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \right) - e^{-2\pi\varepsilon_k} e^{\varepsilon_k \theta} \left( \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right) \exp\left(i\varepsilon_k \ln \frac{r}{l}\right) \right\}, \quad (6.103)$$

$$\hat{g}'_{2,2}\left(\theta, \frac{r}{l}\right) = 4 \frac{1-\beta}{1+\beta} \bar{\tau}_k e^{-\varepsilon\theta} \left( \cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \right) \exp\left(i\varepsilon_2 \ln \frac{r}{l}\right), \quad (6.104)$$

$$\hat{g}'_{2,1}\left(\theta, \frac{r}{l}\right) = 4\tau_k e^{\varepsilon\theta} \left( \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right) \exp\left(i\varepsilon_1 \ln \frac{r}{l}\right), \quad (6.105)$$

με

$$\omega_k = i\varepsilon_k \ln \frac{r}{l}, \quad \tau_k = \frac{1}{2} + i\varepsilon_k. \quad (6.106)$$

Για τη φάση  $H$  του διυλικού είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}_2^H &= G_{2,1}^H \left( \theta, \frac{r}{l} \right) \frac{K_1}{\sqrt{r}} \mathbf{e}_1 + G_{2,2}^H \left( \theta, \frac{r}{l} \right) \frac{K_2}{\sqrt{r}} \mathbf{e}_2 + G_{2,3}^H \left( \theta, \frac{r}{l} \right) \frac{K_3}{\sqrt{r}} \mathbf{e}_3 \\ &+ g_{2,1}^H \left( \theta, \frac{r}{l} \right) \frac{K_1}{\sqrt{r}} \mathbf{e}_2 + g_{2,2}^H \left( \theta, \frac{r}{l} \right) \frac{K_2}{\sqrt{r}} \mathbf{e}_1, \end{aligned} \quad (6.107)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}_1^H &= G_{1,1}^H \left( \theta, \frac{r}{l} \right) \frac{K_1}{\sqrt{r}} \mathbf{e}_1 + G_{1,2}^H \left( \theta, \frac{r}{l} \right) \frac{K_2}{\sqrt{r}} \mathbf{e}_2 + G_{1,3}^H \left( \theta, \frac{r}{l} \right) \frac{K_3}{\sqrt{r}} \mathbf{e}_3 \\ &- i\widehat{g}_{2,2}^H \left( \theta, \frac{r}{l} \right) \frac{K_2}{\sqrt{r}} \mathbf{e}_1 + i\widehat{g}_{2,1}^H \left( \theta, \frac{r}{l} \right) \frac{K_1}{\sqrt{r}} \mathbf{e}_2 \\ &- i\widehat{g}_{2,1}^H \left( \theta, \frac{r}{l} \right) \frac{K_1}{\sqrt{r}} \mathbf{e}_2 + i\widehat{g}_{2,2}^H \left( \theta, \frac{r}{l} \right) \frac{K_2}{\sqrt{r}} \mathbf{e}_1, \end{aligned} \quad (6.108)$$

όπου

$$G_{2,k}^H \left( \theta, \frac{r}{l} \right) = \tau_k \left\{ e^{-2\pi\epsilon_k} e^{-\epsilon_k\theta} \left( \cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \right) + e^{\epsilon_k\theta} \left( \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right) \exp \left( i\epsilon_k \ln \frac{r}{l} \right) \right\}, \quad (6.109)$$

$$g_{2,1}^H \left( \theta, \frac{r}{l} \right) = 4 \frac{1+\beta}{1-\beta} |\tau_k|^2 e^{\epsilon\theta} \cos \theta \left( \cos \frac{3\theta}{2} + i \sin \frac{3\theta}{2} \right) \exp \left( i\epsilon_1 \ln \frac{r}{l} \right), \quad (6.110)$$

$$g_{2,2}^H \left( \theta, \frac{r}{l} \right) = 4 |\tau_k|^2 e^{\epsilon\theta} \cos \theta \left( \cos \frac{3\theta}{2} - i \sin \frac{3\theta}{2} \right) \exp \left( i\epsilon_2 \ln \frac{r}{l} \right), \quad (6.111)$$

και

$$G_{1,k}^H \left( \theta, \frac{r}{l} \right) = i\tau_k \left\{ e^{-2\pi\epsilon_k} e^{-\epsilon_k\theta} \left( \cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \right) + e^{\epsilon_k\theta} \left( \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right) \exp \left( i\epsilon_k \ln \frac{r}{l} \right) \right\}, \quad (6.112)$$

$$\widehat{g}_{2,2}^H \left( \theta, \frac{r}{l} \right) = 4\bar{\tau}_k e^{-\epsilon\theta} \left( \cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \right) \exp \left( i\epsilon_2 \ln \frac{r}{l} \right), \quad (6.113)$$

$$\widehat{g}_{2,1}^H \left( \theta, \frac{r}{l} \right) = 4 \frac{1+\beta}{1-\beta} \tau_k e^{\epsilon\theta} \left( \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right) \exp \left( i\epsilon_1 \ln \frac{r}{l} \right). \quad (6.114)$$

### 6.10.3 Ισότροπο/ανισότροπο δυλικό

Για την περίπτωση που η φάση  $I$  του δυλικού είναι ισότροπη και η φάση  $II$  ανισότροπη, τα μητρώα των τάσεων  $\boldsymbol{\sigma}_I$  και  $\boldsymbol{\sigma}_2$  για την ισότροπη φάση του δυλικού θα εκφραστούν σε όρους του μητρώου έντασης των τάσεων με τις σχέσεις (6.27) και (6.28), ενώ για την

ανισότροπη φάση με τις σχέσεις (6.20) και (6.21). Οι εκφράσεις για την ισότροπη φάση  $I$  παρέχονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}'_2 &= G'_{2,1}\left(\theta, \frac{r}{l}\right)\frac{K_1}{\sqrt{r}}\mathbf{e}_1 + G'_{2,2}\left(\theta, \frac{r}{l}\right)\frac{K_2}{\sqrt{r}}\mathbf{e}_2 + G'_{2,3}\left(\theta, \frac{r}{l}\right)\frac{K_3}{\sqrt{r}}\mathbf{e}_3 \\ &+ \mathbf{HCH}^{-1}\left[\hat{h}'_{2,1}\left(\theta, \frac{r}{l}\right)\frac{K_1}{\sqrt{r}}\mathbf{e}_1 + \hat{h}'_{2,2}\left(\theta, \frac{r}{l}\right)\frac{K_2}{\sqrt{r}}\mathbf{e}_2 + \hat{h}'_{2,3}\left(\theta, \frac{r}{l}\right)\frac{K_3}{\sqrt{r}}\mathbf{e}_3\right] \\ &+ \mathbf{H}\bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{H}}^{-1}\left[\hat{j}'_{2,1}\left(\theta, \frac{r}{l}\right)\frac{K_1}{\sqrt{r}}\mathbf{e}_1 + \hat{j}'_{2,2}\left(\theta, \frac{r}{l}\right)\frac{K_2}{\sqrt{r}}\mathbf{e}_2 + \hat{j}'_{2,3}\left(\theta, \frac{r}{l}\right)\frac{K_3}{\sqrt{r}}\mathbf{e}_3\right], \end{aligned} \quad (6.115)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}'_1 &= G'_{1,1}\left(\theta, \frac{r}{l}\right)\frac{K_1}{\sqrt{r}}\mathbf{e}_1 + G'_{1,2}\left(\theta, \frac{r}{l}\right)\frac{K_2}{\sqrt{r}}\mathbf{e}_2 + G'_{1,3}\left(\theta, \frac{r}{l}\right)\frac{K_3}{\sqrt{r}}\mathbf{e}_3 \\ &- i\mathbf{HCH}^{-1}\left[g'_{1,1}\left(\theta, \frac{r}{l}\right)\frac{K_1}{\sqrt{r}}\mathbf{e}_1 + g'_{1,2}\left(\theta, \frac{r}{l}\right)\frac{K_2}{\sqrt{r}}\mathbf{e}_2 + g'_{1,3}\left(\theta, \frac{r}{l}\right)\frac{K_3}{\sqrt{r}}\mathbf{e}_3\right] \\ &+ i\mathbf{H}\bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{H}}^{-1}\left[\hat{g}'_{1,1}\left(\theta, \frac{r}{l}\right)\frac{K_1}{\sqrt{r}}\mathbf{e}_1 + \hat{g}'_{1,2}\left(\theta, \frac{r}{l}\right)\frac{K_2}{\sqrt{r}}\mathbf{e}_2 + \hat{g}'_{1,3}\left(\theta, \frac{r}{l}\right)\frac{K_3}{\sqrt{r}}\mathbf{e}_3\right] \\ &+ i\mathbf{HCH}^{-1}\left[\hat{h}'_{2,1}\left(\theta, \frac{r}{l}\right)\frac{K_1}{\sqrt{r}}\mathbf{e}_1 + \hat{h}'_{2,2}\left(\theta, \frac{r}{l}\right)\frac{K_2}{\sqrt{r}}\mathbf{e}_2 + \hat{h}'_{2,3}\left(\theta, \frac{r}{l}\right)\frac{K_3}{\sqrt{r}}\mathbf{e}_3\right] \\ &- i\mathbf{H}\bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{H}}^{-1}\left[\hat{j}'_{2,1}\left(\theta, \frac{r}{l}\right)\frac{K_1}{\sqrt{r}}\mathbf{e}_1 + \hat{j}'_{2,2}\left(\theta, \frac{r}{l}\right)\frac{K_2}{\sqrt{r}}\mathbf{e}_2 + \hat{j}'_{2,3}\left(\theta, \frac{r}{l}\right)\frac{K_3}{\sqrt{r}}\mathbf{e}_3\right], \end{aligned} \quad (6.116)$$

όπου έχει τεθεί

$$\hat{h}'_{2,k}\left(\theta, \frac{r}{l}\right) = 2|\tau_k|^2 e^{-\varepsilon_k\theta} \cos\theta \left(\cos\frac{3\theta}{2} - i\sin\frac{3\theta}{2}\right) \exp\left(i\varepsilon_k \ln\frac{r}{l}\right), \quad (6.117)$$

$$\hat{j}'_{2,k}\left(\theta, \frac{r}{l}\right) = 2|\tau_k|^2 e^{\varepsilon_k\theta} \cos\theta \left(\cos\frac{3\theta}{2} + i\sin\frac{3\theta}{2}\right) \exp\left(i\varepsilon_k \ln\frac{r}{l}\right), \quad (6.118)$$

με

$$g'_{1,k}\left(\theta, \frac{r}{l}\right) = 2\tau_k e^{-\varepsilon_k\theta} \left(\cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2}\right) \exp\left(i\varepsilon_k \ln\frac{r}{l}\right), \quad (6.119)$$

$$\hat{g}'_{1,k}\left(\theta, \frac{r}{l}\right) = 2\tau_k e^{\varepsilon_k\theta} \left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right) \exp\left(i\varepsilon_k \ln\frac{r}{l}\right), \quad (6.120)$$

και τα  $\omega_k, \tau_k$  δίνονται από τη σχέση (6.106).

Οι εκφράσεις για την ανισότροπη φάση  $II$  προκύπτουν από τις σχέσεις (6.20) και (6.21) στη μορφή

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}_2'' = G_{2,1}''\left(\theta, \frac{r}{l}\right)\frac{K_1}{\sqrt{r}}\mathbf{e}_1 + G_{2,2}''\left(\theta, \frac{r}{l}\right)\frac{K_2}{\sqrt{r}}\mathbf{e}_2 + G_{2,3}''\left(\theta, \frac{r}{l}\right)\frac{K_3}{\sqrt{r}}\mathbf{e}_3, \quad (6.121)$$

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}_1'' = G_{1,1}''\left(\theta, \frac{r}{l}\right)\frac{K_1}{\sqrt{r}}\mathbf{e}_1 + G_{1,2}''\left(\theta, \frac{r}{l}\right)\frac{K_2}{\sqrt{r}}\mathbf{e}_2 + G_{1,3}''\left(\theta, \frac{r}{l}\right)\frac{K_3}{\sqrt{r}}\mathbf{e}_3, \quad (6.122)$$

όπου οι συναρτήσεις  $G_{2,k}''(\theta, r/l)$  και  $G_{1,k}''(\theta, r/l)$  δίνονται από τις σχέσεις (6.86) και (6.87).

## Κεφάλαιο 7

# ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑ

## 7.1 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η παρούσα διατριβή ασχολείται με την μελέτη της αλληλεπίδρασης ιδιομορφιών με ρηγματωμένες ή μη διεπιφάνειες διυλικών, για οποιοδήποτε συνδυασμό ελαστικής ανισοτροπίας των μερών που τα συνιστούν. Η μελέτη γίνεται στα πλαίσια της γραμμικής ελαστικότητας του ανισότροπου και ισότροπου υλικού, χρησιμοποιώντας το προσομοίωμα των δύο συνδεδεμένων ελαστικών ημιχώρων με μια επίπεδη διεπιφάνεια. Οι ιδιομορφίες που μελετώνται είναι η γραμμική εξάρμωση, που ο πυρήνας της αντιπροσωπεύεται από μια γραμμή παράλληλη στην διεπιφάνεια του συστήματος, η γραμμική δύναμη, που εφαρμόζεται σε μια γραμμή που είναι παράλληλη στην διεπιφάνεια, και από μια ομοιόμορφη τάση, που εφαρμόζεται στα απομακρυσμένα σύνορα των ελαστικών ημιχώρων. Η ανάλυση των σχετικών ελαστικών προβλημάτων γίνεται με επέκταση της μεθόδου των διαφασικών δυναμικών, που έχει αναπτυχθεί για ισότροπα και ανισότροπα διυλικά, σε διυλικά για οποιοδήποτε συνδυασμό ελαστικής ανισοτροπίας των επιμέρους υλικών τους. Η επέκταση της μεθόδου επιτυγχάνεται με την ανάπτυξη μιας νέας αντιπροσώπευσης της γενικής λύσης του διδιάστατου ελαστικού προβλήματος της ισότροπης ελαστικότητας. Η γενική αυτή λύση αναπτύσσεται από τον γραμμικό συνδυασμό έξι γραμμικώς ανεξάρτητων μερικών λύσεων της διαφορικής εξίσωσης μετατοπίσεων του σχετικού ελαστικού προβλήματος. Η γενική αυτή λύση, προκειμένου να δημιουργηθεί φορμαλιστική αντιστοιχία με την αντίστοιχη γενική λύση του ανισότροπου προβλήματος, διατυπώνεται σε μητρική μορφή σε όρους μιας μητρικής συνάρτησης στήλης, που τα στοιχεία της είναι τρεις ολόμορφες μιγαδικές συναρτήσεις. Η γενική λύση που αποκτήθηκε οδηγεί σε εκείνη της συνεπίπεδης ελαστικότητας των Kolosov-Muskhelishvili, καθώς και στην λύση της αντιεπίπεδης

ελαστικότητας, που έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια της μιγαδικής θεωρίας. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι, η γενική αυτή αντιπροσώπευση της λύσης, που γίνεται για πρώτη φορά στην παρούσα διατριβή, τοποθετεί τις υπάρχουσες μεθόδους ανάλυσης ισοτρόπων και ανισοτρόπων διυλικών σε ενιαία βάση, δημιουργώντας έτσι τις προϋποθέσεις για την διαπραγμάτευση διυλικών με συνύπαρξη ισότροπης και ανισότροπης φάσης.

Με βάση την διατύπωση του Eshelby και των συνεργατών του για την ανισότροπη ελαστικότητα, και την διατύπωση που αναπτύχθηκε παραπάνω για την ισότροπη ελαστικότητα, αναπτύσσονται γενικές αντιπροσωπεύσεις της λύσης του διδιάστατου ελαστικού προβλήματος, για οποιοδήποτε συνδυασμό ελαστικής συμμετρίας των συνδεδεμένων ελαστικών μέσων του διαφασικού συστήματος. Οι αντιπροσωπεύσεις αυτές της λύσης εκφράζονται σε όρους δύο μητρικών συναρτήσεων στήλης, των οποίων τα στοιχεία είναι τρεις ολόμορφες μιγαδικές συναρτήσεις. Οι μητρικές αυτές συναρτήσεις αποτελούν τα διαφασικά δυναμικά του διαφασικού συστήματος. Για όλους τους συνδυασμούς ανισοτροπίας του συστήματος, δηλαδή για ανισότροπο/ανισότροπο, ισότροπο/ισότροπο και ανισότροπο/ισότροπο σύστημα, δείχνεται ότι οι γενικές αντιπροσωπεύσεις της λύσης ανάγονται σε μια ενιαία μορφή, που εμπλέκει τα διαφασικά δυναμικά του συστήματος και δύο διαφασικά μητρώα συντελεστών. Τα στοιχεία των μητρώων αυτών έχουν ως στοιχεία συνδυασμούς των ελαστικών σταθερών των δύο φάσεων του συστήματος. Οι σχέσεις αυτές συνιστούν την ενοποιημένη μέθοδο των διαφασικών δυναμικών για διυλικά, με οποιοδήποτε συνδυασμό ανισοτροπίας των επιμέρους συστατικών τους.

Η ενοποιημένη μέθοδος των διαφασικών δυναμικών, που αναπτύχθηκε, εφαρμόστηκε επιτυχώς για την επίλυση μιας σειράς ελαστικών προβλημάτων του διαφασικού συστήματος για τις ιδιομορφίες που προαναφέρθηκαν. Συγκεκριμένα, από την επίλυση των σχετικών προβλημάτων, αποκτήθηκαν τα πλήρη ελαστικά πεδία στο σύστημα, για μια γραμμική εξάρμωση και μια γραμμική δύναμη, που εφαρμόζονται κοντά στην διεπιφάνειά του. Για τις ιδιομορφίες αυτές, τα νέα αποτελέσματα, που αποκτήθηκαν στην παρούσα διατριβή, είναι αυτά του συνδυασμού ανισότροπου/ισότροπου διυλικού. Τα αποτελέσματα, που παρήχθησαν για τους άλλους συνδυασμούς ανισοτροπίας του συστήματος, συμπίπτουν με αυτά που έχουν καταγραφεί στη διεθνή βιβλιογραφία, γεγονός που επιβεβαιώνει την ορθότητα της αναπτυχθείσας μεθόδου. Επίσης, η αναπτυχθείσα μέθοδος εφαρμόζεται στην επίλυση των σχετικών ελαστικών προβλημάτων του διαφασικού συστήματος για ομοιόμορφες τάσεις, που εφαρμόζονται στα

απομακρυσμένα σύνορα των συνδεδεμένων μέσων. Από την επίλυση των προβλημάτων αυτών προσδιορίστηκαν τα ελαστικά πεδία στο σύστημα, καθώς και οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν οι εφαρμοζόμενες ομοιόμορφες τάσεις, προκειμένου να υπάρχει συμβιβαστικότητα στις διεπιφανειακές μετατοπίσεις και ισορροπία του συνολικού συστήματος. Τα νέα αποτελέσματα που αποκτήθηκαν εδώ είναι αυτά του ανισότροπου/ανισότροπου και ισότροπου/ανισότροπου συνδυασμού ανισοτροπίας του συστήματος. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν για τον ισότροπο/ισότροπο συνδυασμό συμπίπτουν με αυτά της βιβλιογραφίας.

Στη συνέχεια, τα προηγούμενα αποτελέσματα της διατριβής χρησιμοποιήθηκαν για την ελαστική ανάλυση του διαφασικού συστήματος, όταν υπάρχει μια ρωγμή στην διεπιφάνειά του και το σύστημα καταπονείται από τις ιδιομορφίες που προαναφέρθηκαν. Η λύση των σχετικών ελαστικών προβλημάτων αποκτιέται σε όρους των διαφασικών δυναμικών του συστήματος, ενώ λεπτομερή αποτελέσματα παρέχονται για την γραμμική εξάρμωση, την γραμμική δύναμη και την ομοιόμορφη φόρτιση στο άπειρο. Εδώ, τα νέα αποτελέσματα είναι οι γενικές λύσεις για τη γραμμική εξάρμωση και τη γραμμική δύναμη στην περίπτωση του ισότροπου/ανισότροπου διυλικού. Επίσης, τα γενικά αποτελέσματα που αποκτήθηκαν για τις ελαστικές παραμέτρους θραύσης του ρηγματωμένου συστήματος, αποτελούν μια σημαντική συμβολή στην έρευνα που διεξάγεται στην περιοχή αυτή. Τα αποτελέσματα αυτά αφορούν την δομή των τοπικών ελαστικών πεδίων στην άκρη μιας διεπιφανειακής ρωγμής και τις ελαστικές παραμέτρους θραύσης που υπεισέρχονται στα πεδία αυτά. Δείχθηκε ότι ο ορισμός των ελαστικών τοπικών πεδίων στην άκρη της ρωγμής μπορεί να γίνει μονοσήμαντα και με ενιαίο τρόπο για όλους τους συνδυασμούς ανισοτροπίας του συστήματος. Επίσης, δείχθηκε ότι ο διεπιφανειακός ελκυστής, το άνοιγμα της ρωγμής κοντά στο άκρο της και ο λόγος του ρυθμού απελευθέρωσης ενέργειας έχουν κοινή δομή για όλους τους συνδυασμούς ανισοτροπίας του συστήματος και μπορούν να εκφραστούν με μοναδικό τρόπο για όλους τους συνδυασμούς ανισοτροπίας με κατάλληλο ορισμό των συντελεστών έντασης των τάσεων. Δείχθηκε ότι οι τάσεις και οι μετατοπίσεις υποφέρουν από την γνωστή λογαριθμική διακύμανση κοντά στο άκρο της ρωγμής που είναι παρούσα σε όλους τους συνδυασμούς ανισοτροπίας.

Δείχθηκε ότι το άνοιγμα της ρωγμής συνδέεται γραμμικά με τον διεπιφανειακό ελκυστή των τάσεων. Η γραμμική σχέση αποκαλύπτει ότι για έναν οποιονδήποτε συνδυασμό ανισοτροπίας των δύο φάσεων, υπάρχουν τρεις κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις, όπου οι συνιστώσες του ελκυστή που αντιστοιχούν στις διευθύνσεις αυτές είναι ανάλογες των

---

συνιστωσών του ανοίγματος της ρωγμής στις διευθύνσεις αυτές. Για το συνδυασμό ισότροπο/ισότροπο διυλικό οι δύο από τις διευθύνσεις αυτές αντιστοιχούν στη διεπιφάνεια και η τρίτη στην παράλληλη προς τα σύνορα της ρωγμής.

## 7.2 ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΠΑΡΑΠΕΡΑ ΕΡΕΥΝΑ

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν στην παρούσα εργασία ανοίγουν το δρόμο για την επέκταση της μεθόδου των διφασικών δυναμικών σε διδιάστατα προβλήματα με καμπυλόγραμμες διεπιφάνειες. Η επέκταση αυτή θα δώσει τη δυνατότητα να διερευνηθεί η μηχανική συμπεριφορά και η θραύση διφασικών κοκκωδών υλικών, για οποιονδήποτε συνδυασμό ανισοτροπίας των δύο φάσεων. Τα αποτελέσματα, που προέκυψαν στην παρούσα εργασία, μπορούν άμεσα να επεκταθούν στην περίπτωση των υλικών αυτών.

Τα ασυμπτωτικά ελαστικά πεδία που έχουν εξαχθεί στην άκρη της ρωγμής, με βάση τον ορισμό του μητρώου έντασης που δόθηκε, εξαρτώνται από το μήκος της ρωγμής  $l$ , μέσω του όρου της λογαριθμικής διακύμανσης  $\varepsilon = \ln(r/l)$ . Το γεγονός αυτό έρχεται σε αντίθεση με τη γενική μορφή των ελαστικών πεδίων της ρωγμής που βρίσκεται σε ομογενές μέσο, που είναι ανεξάρτητα από το μήκος της ρωγμής. Θα πρέπει να διερευνηθεί πως οι έννοιες της μηχανικής της θραύσης, που έχουν αναπτυχθεί στην ομογενή περίπτωση, θα μπορούσαν να γίνουν συμβιβαστές με τα αποτελέσματα αυτά.



---

## Βιβλιογραφία

- Atkinson, C.: On stress singularities and interfaces in linear elastic fracture mechanics, *Int. J. Fracture* **13**, 807-820 (1977).
- Atkinson, C.: The interface crack with a contact zone, *Int. J. Fracture* **18**, 161-177 (1982).
- Barnett, D.M., Lothe, J.: Synthesis of the sextic and the integral formalism for dislocations, Green functions and surface waves in anisotropic elastic solids. *Phys. Norv.* **7**, 13–19 (1973).
- Bassani, J.L., Qu, J.: Finite cracks on bimaterial and bicrystal interfaces. *J. Mech. Phys. Solids* **37**, 435–453 (1989).
- Bilby B.A., Eshelby J.D.: Dislocations and the theory of fracture. In *Fracture, an Advanced Treatise*, (Edited by Liebowitz. H.) Academic Press, New York, vol. A1, 99-182 (1968).
- Bilby B.A., Cottrell, A.H., Swinden, K.H.: The spread of plastic yield from a notch. *Proc. R. Soc. (Lond.) A* **272**, 304-314 (1963).
- Budiansky, B., Hutchinson, J.W., Lambropoulos, J.C.: Continuum theory of dilatant transformation toughening in ceramics. *Int. J. Solids Structures* **19**, 337-355 (1983).
- Clements, D.L.: A crack between dissimilar anisotropic media. *Int. J. Eng. Sci.* **9**, 257–265 (1971).
- Clements, D.L.: A crack between isotropic and anisotropic media. *Q. Appl. Math.* **29**, 303–310 (1971).
- Comninou, M.: The interface crack. *J. Appl. Mech.* **44**, 631-636 (1977a).
- Comninou, M.: Interface crack with friction in the contact zone. *J. Appl. Mech.* **44**, 631-636 (1977b).
- Comninou, M., Schmueser, D.: The interface crack in a combined tension-compression and shear field, *J. Appl. Mech.* **46**, 345-348 (1979).
- Comninou, M., Dundurs, J.: On the behavior of interface cracks, *Res Mechanica* **1**, 249-264 (1980).
- Dundurs, J., Sendeky, G.P.: Behavior of an edge dislocation near a bimetallic interface. *J. Appl. Phys.* **36**, 3353-3354 (1965).
- England, A.H.: A crack between dissimilar media. *J. Appl. Mech.* **32**, 400–402 (1965).
- England, A.H.: An arc crack around a circular elastic inclusion. *J. Appl. Mech.* **33**, 637–640 (1966).

- Erdogan, F.: Stress distribution in a nonhomogeneous elastic plane with cracks. *J. Appl. Mech.* **30**, 232–236 (1963).
- Erdogan, F.: Stress distribution in bonded dissimilar materials with cracks. *J. Appl. Mech.* **32**, 403–410 (1965).
- Eshelby, J.D., Read, W.D., Shockley, W.: Anisotropic elasticity with applications to dislocation theory. *Acta Metall.* **1**, 251–259 (1953).
- Gangadharan, A.C., Dundurs, J.: Edge dislocation near an interface crack in a two-phase material. *Indian J. Technol.* **11**, 410-414 (1973).
- Gao, H., Abbudi, M., Barnett, D.M.: Interfacial crack-tip field in anisotropic elastic solids. *J. Mech. Phys. Solids* **40**, 393-416 (1992).
- Gotoh, M.: Some problems of bonded anisotropic plates with cracks along the bond. *Int. J. Fract.* **3**, 253–260 (1967).
- Hayashi, K., Nemat-Nasser, S.: Energy release rate and crack kinking under combined loading. *J. Appl. Mech* **48**, 520-524 (1981a).
- Hayashi, K., Nemat-Nasser, S.: On branched, interface cracks. *J. Appl. Mech.* **48**, 529-533 (1981b).
- Hutchinson, J.W.: On steady quasi-static crack growth. Harvard Report DEAP S-8 (1974).
- Hwu, C.: Collinear cracks in anisotropic bodies. *Int. J. Fract.* **52**, 239-256 (1991).
- Hwu, C.: Explicit solutions for the collinear interface crack problems. *Int. J. Solids Structures* **30**, 301-312 (1993).
- Irwin, G.R.: Analysis of stresses and strains near the end of a crack transversing a plate. *J. Appl. Mech* **24**, 361-364 (1957).
- Kattis, M.A.: Two-phase potentials for isotropic bi-materials. *Int. J. Eng. Sci.* **32**, 1493–1499 (1994).
- Kattis, M.A., Meguid, S.A.: Two-phase potentials for the treatment of an elastic inclusion in plane elasticity. *J. Appl. Mech.* **62**, 7–12 (1995).
- Kattis, M.A., Providas, E.: Two-phase potentials in anisotropic elasticity: antiplane deformation. *Int. J. Eng. Sci.* **36**, 801–811 (1997).
- Kattis, M.A.: Nonplanar interfacial cracks in anisotropic bimaterials. *Int. J. Fract.* **98**, 313–327 (1999).
- Kattis, M.A., Mavroyannis, G.D.: A unified two-phase potential method for elastic bi-material: Planar interfaces. *J. Elasticity* **103**, 73-94 (2011).

- Kolosov, G.V.: On the application of the theory of functions of a complex variable to a plane problem in the mathematical theory of elasticity. Dissertation, Dorpat (Yuirieff) University (1908).
- Lekhnitskii, S.G.: The plane static problem of the theory of elasticity of an anisotropic body. *Prikl. Mat. Mekh New Ser.***1**(1), 72–87 (1937).
- Lekhnitskii, S.G. *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*, San Francisco: Holden-Day (1963).
- Lothe, J., Barnett, D.M.: On the existence of surface-wave solutions for anisotropic half-spaces with free surface. *J. Appl. Phys.* **47**, 428–433 (1974).
- Majumdar, B.S., Burns, S.J.: Crack tip shielding-an elastic theory of dislocations and dislocation arrays near a sharp crack. *Acta Metall.* **29**, 579–588 (1981).
- Malyshev, B.M., Salganik, R.L.: The strength of adhesive joints using the theory of fracture, *Int. J. Fracture Mech.* **1**, 114–128 (1965).
- Milne-Thomson, L.M.: *Plane Elastic Systems*. Springer-Verlag, Berlin (1968).
- Muskhelishvili, N.I.: *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*. Noordhoff, Groningen (1953) (translated by J.R.M. Radok).
- Qu, J., Bassani, J.L.: Cracks on bimaterial and bicrystal interfaces. *J. Mech. Phys. Solids* **37**, 417–433 (1989).
- Rice, J.R.: Mathematical analysis in the mechanics of fracture, in *Fracture, an Advanced Treatise*, (Edited by Liebowitz. H.) Academic Press, New York, vol. **2**, 191–311 (1968).
- Rice, J.R.: Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks. *J. Appl. Mech.* **55**, 98–103 (1988).
- Rice, J.R., Sih, G.: Plane problems of cracks in dissimilar media. *J. Appl. Mech.* **32**, 418–423 (1965).
- Savin, G.N.: The basic plane static problem of elasticity theory for an anisotropic medium (A simply connected infinite domain). *Vyd.-vo AN URSSR Int Budivel Noi Mekhaniki* **32**, 59–69 (1938) (in Ukrainian).
- Savin, G.N.: Some problems of the theory of elasticity of an anisotropic medium. *DAN SSSR***23**, 217–220 (1939).
- Shih, C.F., Asaro, R.J.: Elastic-plastic analysis of cracks on bimaterial interfaces. Part I: small scale yielding, *J. Appl. Mech.* **55**, 299–316 (1988).
- Sih, G., Rice, J.R.: The bending of plates of dissimilar materials with cracks. *J. Appl. Mech.* **31**, 477–482 (1964).
- Sih, G.C., Paris, P.C., Irwin, G.R.: On cracks in rectilinearly anisotropic bodies. *Int. J. Fracture Mech.* **1**, 189–203 (1965).
- Stevenson, A.C.: Some boundary problems of two-dimensional elasticity. *Philos. Mag.* **34**, 766–793 (1943).

- 
- Stroh, A.N.: Dislocations and cracks in anisotropic elasticity. *Philos. Mag.* **7**, 625–646 (1958).
- Suo, Z.: Singularities interacting with interfaces and cracks. *Int. J. Solids Structures* **25**(10), 1133–1142 (1989).
- Suo, Z.: Singularities, interfaces and cracks in dissimilar anisotropic media. *Proc. R. Soc. (Lond.) A* **427**, 331–358 (1990).
- Thomson, R.: Physics of fracture. In *Solid State Physics* (Edited by H. Ehrenreich and D. Turnbull), **39**, 1–129. Academic Press, New York (1986).
- Ting, T.C.T.: Explicit solution and invariance of the singularities at an interface crack in anisotropic composites. *Int. J. Solids Struct.* **22**, 965–983 (1986).
- Ting, T.C.T.: Interface cracks in anisotropic bimetals. *J. Mech. Phys. Solids* **38**, 505–512 (1990).
- Wang, T.C., Shih, C.F., Suo, Z.: Crack extension and kinking in laminates and bicrystals. *Int. J. Solids Struct.* **29**, 327–344 (1992).
- Williams, M.L. The stress around a fault or crack in dissimilar media. *Bulletin of the Seismological Society of America* **49**, 199–204 (1959).
- Willis, J.R.: Fracture mechanics of interface cracks. *J. Mech. Phys. Solids* **19**, 353–368 (1971).
- Wu, K.C. Stress intensity factor and energy release rate for interface cracks between dissimilar anisotropic materials. *J. Appl. Mech.* **57**, 894–900 (1990).

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι

### ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΤΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ

$$\mathbf{H}\bar{\mathbf{H}}^{-1}$$

Όταν οι δυο φάσεις του διυλικού είναι ισότροπες, με ελαστικές σταθερές  $\kappa_I, \mu_I$  και  $\kappa_{II}, \mu_{II}$ , το μητρώο  $\mathbf{H}$  παίρνει τη μορφή

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{2} \left( \frac{1+\kappa_I}{2\mu_I} + \frac{1+\kappa_{II}}{2\mu_{II}} \right) \begin{bmatrix} 1 & i\beta & 0 \\ -i\beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4(\mu_I + \mu_{II})}{\mu_{II}(1+\kappa_I) + \mu_I(1+\kappa_{II})} \end{bmatrix}, \quad (\text{I.1})$$

όπου

$$\beta = \frac{\mu_{II}(\kappa_I - 1) - \mu_I(\kappa_{II} - 1)}{\mu_{II}(1+\kappa_I) + \mu_I(1+\kappa_{II})}, \quad (\text{I.2})$$

είναι η διαφασική παράμετρος του Dundurs. Από το μητρώο αυτό προκύπτει

$$\mathbf{H}\bar{\mathbf{H}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} & \frac{2i\beta}{1-\beta^2} & 0 \\ -\frac{2i\beta}{1-\beta^2} & \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{I.3})$$

Η σχέση αυτή δείχνει ότι το μητρώο  $\mathbf{H}\bar{\mathbf{H}}^{-1}$  εξαρτάται αποκλειστικά και μόνο από την διαφασική παράμετρο  $\beta$  του διυλικού. Για ομογενές υλικό ( $\beta=0$ ), το μητρώο αυτό γίνεται το μοναδιαίο μητρώο. Στη συνέχεια θα διερευνηθεί το παρακάτω πρόβλημα ιδιοτιμών,

$$\mathbf{H}\bar{\mathbf{H}}^{-1} - \lambda \mathbf{I} = \mathbf{0}, \quad (\text{I.4})$$

υποθέτοντας ότι  $\mathbf{H}\bar{\mathbf{H}}^{-1} \neq \mathbf{I}$ . Για να έχει το σύστημα αυτό, εκτός από τη μηδενική, και μη μηδενική λύση θα πρέπει

$$\det \begin{bmatrix} \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} - \lambda & \frac{2i\beta}{1-\beta^2} & 0 \\ -\frac{2i\beta}{1-\beta^2} & \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0. \quad (\text{I.5})$$

Από τη σχέση αυτή εξάγεται η παρακάτω αλγεβρική εξίσωση

$$(1-\lambda) \left[ \left( \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} - \lambda \right)^2 - \frac{4\beta^2}{(1-\beta^2)^2} \right] = 0. \quad (\text{I.6})$$

Η εξίσωση αυτή έχει τις παρακάτω πραγματικές ρίζες

$$\lambda_1 = \frac{1-\beta}{1+\beta} = \lambda, \quad \lambda_2 = \frac{1+\beta}{1-\beta} = \frac{1}{\lambda}, \quad \lambda_3 = 1. \quad (\text{I.7})$$

Οι ρίζες αυτές αποτελούν τις τρεις ιδιοτιμές του ιδιοπροβλήματος (I.4). Στις τρεις αυτές ιδιοτιμές αντιστοιχούν τρία ιδιοδιανύσματα, που προκύπτουν από τη λύση του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος. Έτσι, τα τρία ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις τρεις αυτές ιδιοτιμές, βρίσκονται στη μορφή

$$\mathbf{r}_1 = [-ic_1, c_1, 0]^T, \quad \mathbf{r}_2 = [ic_2, c_2, 0]^T, \quad \mathbf{r}_3 = [0, 0, c_3]^T, \quad (\text{I.8})$$

ή

$$\mathbf{r}_1 = c_1 \hat{\mathbf{r}}_1, \quad \mathbf{r}_2 = c_2 \hat{\mathbf{r}}_2, \quad \mathbf{r}_3 = c_3 \hat{\mathbf{r}}_3, \quad (\text{I.8})$$

με

$$\hat{\mathbf{r}}_1 = [-i, 1, 0]^T, \quad \hat{\mathbf{r}}_2 = [i, 1, 0]^T, \quad \hat{\mathbf{r}}_3 = [0, 0, 1]^T.$$

Στα ιδιοδιανύσματα αυτά οι  $c_1, c_2$  είναι αυθαίρετες μιγαδικές σταθερές και η  $c_3$  είναι μια πραγματική σταθερά.

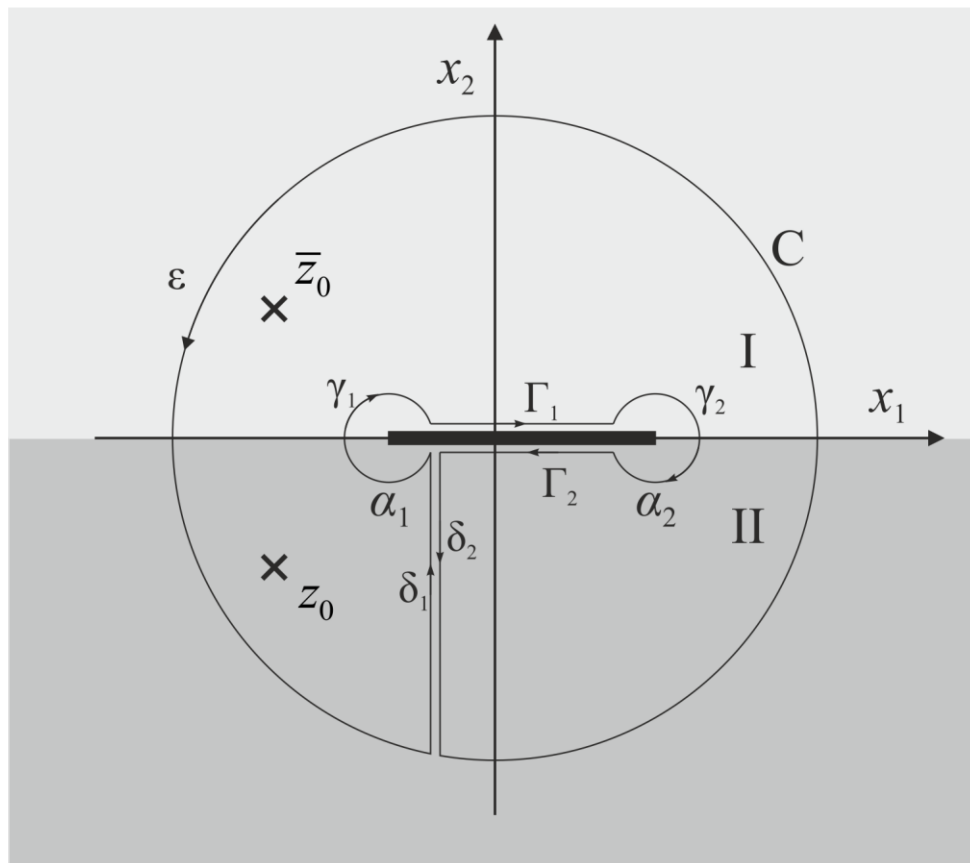
## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ II

### ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ $I(z)$

Στο Παράρτημα αυτό υπολογίζεται το ολοκλήρωμα που υπεισέρχεται στη σχέση (5.71). Για τον σκοπό αυτό θεωρείται το παρακάτω επικαμπύλιο ολοκλήρωμα:

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \langle (t-z)^{-1} \rangle \mathbf{G}(t) dt, \quad (\text{II.1})$$

όπου η  $C$  είναι μια κλειστή καμπύλη, που συντίθεται από τα επιμέρους τμήματα  $\gamma_1, \Gamma_1, \gamma_2, \Gamma_2, \delta_2, \varepsilon, \delta_1$ , όπως αυτά δείχνονται στο Σχήμα II-1.



Σχήμα II-1 Οι δρόμοι ολοκλήρωσης

Η συνάρτηση  $\mathbf{G}(z)$  που υπεισέρχεται στο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (II.1), ορίζεται με τη σχέση

$$\mathbf{G}(z) = -[\mathbf{R}\mathcal{X}(z)]^{-1}\mathbf{H}\mathbf{X}^d(z, z), \quad (\text{II.2})$$

όπου

$$\mathbf{X}^d(z, z) = \mathbf{H}^{-1}[\mathbf{M}_H^{-1} + \bar{\mathbf{M}}_H^{-1}]\mathbf{B}_H\mathbf{f}_\infty(z; z_0) + \bar{\mathbf{H}}^{-1}[\mathbf{M}_H^{-1} + \bar{\mathbf{M}}_H^{-1}]\bar{\mathbf{B}}_H\bar{\mathbf{f}}_\infty(z; \bar{z}_0). \quad (\text{II.3})$$

Η συνάρτηση  $\mathbf{G}(z)$  αποτελεί την επέκταση του ορισμού της  $\mathbf{G}(x_1)$ , που παρέχεται με τη σχέση (5.70), σε όλο το μιγαδικό επίπεδο  $z$ . Για την περίπτωση των σημειακών ιδιομορφιών, η  $\mathbf{G}(z)$  είναι μια ολόμορφη συνάρτηση σε όλο το μιγαδικό επίπεδο  $z$ , με εξαίρεση τα σημεία  $z_0$  και  $\bar{z}_0$ , στα οποία παρουσιάζει ιδιόμορφη συμπεριφορά. Η ιδιόμορφη αυτή συμπεριφορά εισάγεται από τις συναρτήσεις  $\mathbf{f}_\infty(z; z_0)$  και  $\bar{\mathbf{f}}_\infty(z; \bar{z}_0)$ .

Έστω ότι οι  $\mathbf{G}_{z_0}(z)$  και  $\mathbf{G}_{\bar{z}_0}(z)$  είναι τα πρωτεύοντα μέρη της  $\mathbf{G}(z)$  στα ιδιόμορφα σημεία  $z_0$  και  $\bar{z}_0$ , αντίστοιχα. Εάν ο επιμέρους δρόμος ολοκλήρωσης  $\varepsilon$  είναι περιφέρεια της οποίας η ακτίνα τείνει στο άπειρο, από γνωστό θεώρημα της μιγαδικής ανάλυσης, προκύπτει

$$\mathbf{I}(z) = \mathbf{G}(z) - \mathbf{G}_{z_0}(z) - \mathbf{G}_{\bar{z}_0}(z). \quad (\text{II.4})$$

Θα θεωρηθεί τώρα ότι οι ακτίνες των δρόμων  $\gamma_1, \gamma_2$  που δείχνονται στο Σχήμα II-1 τείνουν στο μηδέν. Τότε τα  $\Gamma_1, \Gamma_2$  τείνουν να συμπέσουν στο σύνορο της ρωγμής, οπότε  $\Gamma_1 = \Gamma$  και  $\Gamma_2 = -\Gamma$ . Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (5.67), το ολοκλήρωμα  $\mathbf{I}(z)$  ανάγεται στη μορφή

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \langle (x_1 - z)^{-1} \rangle \mathbf{G}(x_1) dx_1 = (\mathbf{I} + \mathbf{L})^{-1} [\mathbf{G}(z) - \mathbf{G}_{z_0}(z) - \mathbf{G}_{\bar{z}_0}(z)], \quad (\text{II.5})$$

που περιέχει το ολοκλήρωμα που υπεισέρχεται στο διαφορικό δυναμικό  $\mathbf{f}_0^c(z)$ , που παρέχεται με τη σχέση (5.71). Στην περίπτωση που η συνάρτηση  $\mathbf{G}(z)$  έχει έναν πόλο στο άπειρο τάξης  $n$ , δηλαδή αναπτύσσεται στο άπειρο σε μια απειροσειρά, που περιέχει ένα πολυώνυμο  $\mathbf{G}_\infty(z)$  βαθμού  $n$ , τότε η αντίστοιχη σχέση της (II.5) είναι η

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \langle (x_1 - z)^{-1} \rangle \mathbf{G}(x_1) dx_1 = (\mathbf{I} + \mathbf{L})^{-1} [\mathbf{G}(z) - \mathbf{G}_\infty(z)]. \quad (\text{II.6})$$



## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙΙ

### ΜΙΑ ΓΕΝΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΗ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΟΛΟΜΟΡΦΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Για τον προσδιορισμό του ολοκληρώματος που υπεισέρχεται στη σχέση (5.74), όταν η  $\mathbf{G}(z)$  περιέχει λογαριθμικές ιδιομορφίες, εισάγεται η παρακάτω πρόταση: Έστω το τόξο  $\Gamma = (a_1, a_2)$  του Σχήματος ΙΙΙ-1 ότι είναι τμήμα μιας λείας καμπύλης του μιγαδικού επιπέδου  $z$ , που δεν τέμνει τον εαυτό της και έχει θετική φορά περιγραφής από το  $a_1$  στο  $a_2$ . Σε σχέση με το τόξο αυτό, ορίζονται οι μιγαδικές συναρτήσεις του Plemelj με τις σχέσεις

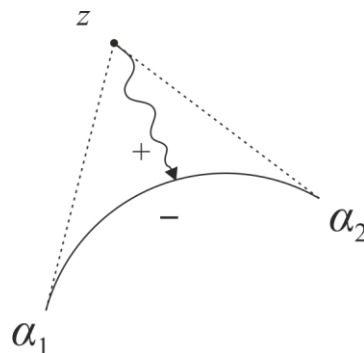
$$\mathcal{X}(z) = (z - a_1)^{\bar{\tau}} (z - a_2)^{\tau}, \quad (\text{ΙΙΙ.1})$$

$$\mathcal{X}_0(z) = (z - a_1)^{-\tau} (z - a_2)^{-\bar{\tau}}, \quad (\text{ΙΙΙ.2})$$

όπου

$$\tau = \frac{1}{2} + i\varepsilon, \quad (\text{ΙΙΙ.3})$$

και  $\varepsilon$  είναι ένας πραγματικός αριθμός.



Σχήμα ΙΙΙ-1 Η θετική και η αρνητική πλευρά του τόξου ασυνέχειας

Οι συναρτήσεις αυτές, είναι ασυνεχείς στο  $\Gamma = (a_1, a_2)$ , και ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες ασυνέχειας

$$\mathcal{X}^+(t) = e^{-2\pi\epsilon} \mathcal{X}^-(t), \quad \mathcal{X}_0^+(t) = e^{-2\pi\epsilon} \mathcal{X}_0^-(t), \quad (\text{III.4})$$

πάνω στο τόξο αυτό. Στις σχέσεις αυτές οι άνω δείκτες “+” και “-” δηλώνουν τις συνοριακές τιμές των αντίστοιχων συναρτήσεων πάνω στο τόξο  $\Gamma$ , καθώς το  $z$  προσεγγίζει το  $t$  από τη θετική και αρνητική πλευρά του τόξου, αντίστοιχα (η θετική περιοχή του τόξου  $\Gamma$  βρίσκεται στην αριστερή πλευρά καθώς κάποιος μετακινείται κατά τη θετική διεύθυνση).

Αν πάνω στο τόξο  $(a_1, a_2)$  ορισθεί η ολόμορφη συνάρτηση

$$\mathcal{F}(z) = \frac{\mathcal{X}(z)}{2\pi i} \int_{a_1}^{a_2} \frac{f(t)}{\mathcal{X}_0^+(t)(t-z)} dt. \quad (\text{III.5})$$

όπου  $f(z)$  είναι μια ολόμορφη συνάρτηση, που ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\lim_{x \rightarrow a_1} f(x) \mathcal{X}_0^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow a_2} f(x) \mathcal{X}_0^{-1}(x) = 0, \quad (\text{III.6})$$

τότε ισχύει

$$\frac{d\mathcal{F}}{dz} = \frac{\mathcal{X}_0(z)}{2\pi i} \int_{a_1}^{a_2} \frac{f'(t)}{\mathcal{X}_0^+(t)(t-z)} dt. \quad (\text{III.7})$$

### Απόδειξη

Παραγωγίζοντας τα δύο μέλη της (III.5) προκύπτει

$$\mathcal{F}'(z) = \frac{\mathcal{X}_0(z)}{2\pi i} \int_{a_1}^{a_2} \left[ z - a_1\tau - a_2\bar{\tau} + \frac{(z-a_1)(z-a_2)}{t-z} \right] \frac{\mathbf{f}(t)dt}{\mathcal{X}_0^+(t)(t-z)(t-a_1)(t-a_2)}. \quad (\text{III.8})$$

Για την αλγεβρική ποσότητα που βρίσκεται μέσα στις αγκύλες του παραπάνω ολοκληρώματος, εύκολα δείχνεται ότι ισχύει η ταυτότητα

$$z - a_1\tau - a_2\bar{\tau} + \frac{(z-a_1)(z-a_2)}{t-z} = \frac{(t-a_1)(t-a_2)}{t-z} + a_1\bar{\tau} + a_2\tau - t. \quad (\text{III.9})$$

Αντικαθιστώντας την (III.9) στην (III.8), προκύπτει

$$\mathcal{F}'(z) = \frac{\mathcal{X}_0(z)}{2\pi i} \int_{a_1}^{a_2} \frac{f(t)(a_1\bar{\tau} + a_2\tau - t)dt}{\mathcal{X}_0^+(t)(t-z)(t-a_1)(t-a_2)} + \frac{\mathcal{X}_0(z)}{2\pi i} \int_{a_1}^{a_2} \frac{f(t)dt}{\mathcal{X}_0^+(t)(t-z)^2}. \quad (\text{III.10})$$

Το ολοκλήρωμα του πρώτου όρου της δεξιάς πλευράς της παραπάνω σχέσης, με την ολοκλήρωση κατά παράγοντες παρέχει

$$\begin{aligned} \int_{a_1}^{a_2} \frac{f(t)}{\mathcal{X}_0^+(t)(t-z)^2} dt &= \left[ -\frac{f(t)}{\mathcal{X}_0^+(t)} \frac{1}{t-z} \right]_{a_1}^{a_2} + \int_{a_1}^{a_2} \frac{f'(t)dt}{\mathcal{X}_0^+(t)(t-z)} \\ &+ \int_{a_1}^{a_2} \frac{\mathbf{f}(t)(t-a_1\bar{\tau} - a_2\tau)dt}{\mathcal{X}_0^+(t)(t-z)(t-a_1)(t-a_2)}. \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

Λόγω της συνθήκης (III.7) ο πρώτος όρος της παραπάνω σχέσης μηδενίζεται. Στη συνέχεια αντικαθιστώντας την (III.11) στην (III.10), προκύπτει ότι

$$\frac{d\mathcal{F}(z)}{dz} = \frac{\mathcal{X}_0(z)}{2\pi i} \int_{a_1}^{a_2} \frac{f'(t)}{\mathcal{X}_0^+(t)(t-z)} dt. \quad (\text{III.12})$$

Η παραπάνω πρόταση μπορεί να γενικευτεί για τις μητρικές συναρτήσεις  $\mathcal{X}(z)$  και  $\mathcal{X}_0(z)$  που ορίζονται στο τόξο  $(a_1, a_2)$  του μιγαδικού επιπέδου  $z$  με τις σχέσεις

$$\mathcal{X}(z) = \langle \mathcal{X}_1(z_1), \mathcal{X}_2(z_2), \mathcal{X}_3(z_3) \rangle, \quad \mathcal{X}_0(z) = \langle \mathcal{X}_{01}(z_1), \mathcal{X}_{02}(z_2), \mathcal{X}_{03}(z_3) \rangle,$$

όπου

$$\mathcal{X}_k(z) = (z-a_1)^{\bar{\tau}_k} (z-a_2)^{\tau_k}, \quad \mathcal{X}_{0k}(z) = (z-a_1)^{-\tau_k} (z-a_2)^{-\bar{\tau}_k}, \quad \tau_k = \frac{1}{2} + i\varepsilon_k,$$

όπου  $k=1,2,3$ . Στην περίπτωση αυτή, οι συνθήκες (III.6) γράφονται

$$\lim_{x \rightarrow a_1} \mathbf{f}(t) \mathcal{X}_0^{-1}(t) = \mathbf{0}. \quad (\text{III.13})$$

Έτσι, αν η μητρική συνάρτηση  $\mathcal{F}(z) = [\mathcal{F}_1(z), \mathcal{F}_2(z), \mathcal{F}_3(z)]^T$  ορισθεί με τη σχέση

$$\mathcal{F}(z) = \frac{1}{2\pi i} \mathcal{X}_0(z) \int_{a_1}^{a_2} \langle (t-z)^{-1} \rangle [\mathcal{X}_0^+(t)]^{-1} \mathbf{f}(t) dt, \quad (\text{III.14})$$

όπου  $\mathbf{f}(z) = [f_1(z), f_2(z), f_3(z)]^T$  και  $f_k(z)$  είναι ολόμορφες συναρτήσεις, τότε ισχύει

$$\mathcal{F}'(z) = \frac{1}{2\pi i} \mathcal{X}_0(z) \int_{a_1}^{a_2} \langle (t-z)^{-1} \rangle [\mathcal{X}_0^+(t)]^{-1} \mathbf{f}'(t) dt. \quad (\text{III.15})$$



## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ IV

### ΤΑ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΑ ΕΛΑΣΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΙΣΟΤΡΟΠΟ/ΙΣΟΤΡΟΠΟ ΔΙΥΛΙΚΟ

Στο Παράρτημα αυτό καταχωρούνται οι απλοποιημένες αλγεβρικές εκφράσεις των τάσεων, που προκύπτουν από τις (6.98) και (6.99). Οι εκφράσεις αυτές διατυπώνονται σε όρους των συντελεστών έντασης των τάσεων  $K_I, K_{II}$  και  $K_{III}$  που εισάγονται με τη σχέση (6.31). Οι τάσεις για την (ισότροπη) φάση I είναι

$$\begin{aligned}
 (\sigma_{11})_I = & \frac{1 - \tanh \pi \varepsilon}{\sqrt{\rho}} e^{\varepsilon \theta} \left\{ \frac{1}{4} \left[ e^{2\varepsilon(\pi - \theta)} \cos\left(\frac{\theta}{2} - \varepsilon \ln \frac{\rho}{l}\right) - \cos\left(\frac{\theta}{2} + \varepsilon \ln \frac{\rho}{l}\right) \right] \right. \\
 & - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\theta}{2} + \varepsilon \ln \frac{\rho}{l}\right) \\
 & \left. - \frac{1/4 + \varepsilon^2}{2} \left\{ \left[ \cos\left(\frac{\theta}{2} + \varepsilon \ln \frac{\rho}{l}\right) - \cos\left(\frac{\theta}{2} - \varepsilon \ln \frac{\rho}{l}\right) \right] \cos \frac{3\theta}{2} \right\} \right\} K_I \\
 & - \left\{ \left[ \sin\left(\frac{\theta}{2} + \varepsilon \ln \frac{\rho}{l}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2} - \varepsilon \ln \frac{\rho}{l}\right) \right] \sin \frac{3\theta}{2} \right\} \\
 & + \frac{1 - \tanh \pi \varepsilon}{\sqrt{\rho}} e^{\varepsilon \theta} \left\{ \frac{1}{4} \left[ e^{2\varepsilon(\pi - \theta)} \sin\left(\frac{\theta}{2} - \varepsilon \ln \frac{\rho}{l}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2} + \varepsilon \ln \frac{\rho}{l}\right) \right] \right. \\
 & - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\theta}{2} + \varepsilon \ln \frac{\rho}{l}\right) \\
 & \left. - \frac{1/4 + \varepsilon^2}{2} \left\{ \left[ \cos\left(\frac{\theta}{2} + \varepsilon \ln \frac{\rho}{l}\right) - \cos\left(\frac{\theta}{2} - \varepsilon \ln \frac{\rho}{l}\right) \right] \sin \frac{3\theta}{2} \right\} \right\} K_{II}, \\
 & + \left\{ \left[ \sin\left(\frac{\theta}{2} + \varepsilon \ln \frac{\rho}{l}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2} - \varepsilon \ln \frac{\rho}{l}\right) \right] \cos \frac{3\theta}{2} \right\}
 \end{aligned} \tag{IV.1}$$

$$\begin{aligned}
 (\sigma_{22})_I &= \frac{1 - \tanh \pi \varepsilon}{\sqrt{\rho}} e^{\varepsilon \theta} \left\{ -\frac{1}{4} \left[ e^{2\varepsilon(\pi-\theta)} \cos\left(\frac{\theta}{2} - \varepsilon \ln \frac{\rho}{l}\right) + \cos\left(\frac{\theta}{2} + \varepsilon \ln \frac{\rho}{l}\right) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1/4 + \varepsilon^2}{2} \left\{ \begin{aligned} &\left[ \cos\left(\frac{\theta}{2} + \varepsilon \ln \frac{\rho}{l}\right) - \cos\left(\frac{\theta}{2} - \varepsilon \ln \frac{\rho}{l}\right) \right] \cos \frac{3\theta}{2} \\ &\left[ -\left[ \sin\left(\frac{\theta}{2} + \varepsilon \ln \frac{\rho}{l}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2} - \varepsilon \ln \frac{\rho}{l}\right) \right] \sin \frac{3\theta}{2} \right] \end{aligned} \right\} K_I \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1 - \tanh \pi \varepsilon}{\sqrt{\rho}} e^{\varepsilon \theta} \left\{ -\frac{1}{4} \left[ e^{2\varepsilon(\pi-\theta)} \sin\left(\frac{\theta}{2} - \varepsilon \ln \frac{\rho}{l}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2} + \varepsilon \ln \frac{\rho}{l}\right) \right] \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1/4 + \varepsilon^2}{2} \left\{ \begin{aligned} &\left[ \cos\left(\frac{\theta}{2} + \varepsilon \ln \frac{\rho}{l}\right) - \cos\left(\frac{\theta}{2} - \varepsilon \ln \frac{\rho}{l}\right) \right] \sin \frac{3\theta}{2} \\ &\left[ -\left[ \sin\left(\frac{\theta}{2} + \varepsilon \ln \frac{\rho}{l}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2} - \varepsilon \ln \frac{\rho}{l}\right) \right] \cos \frac{3\theta}{2} \right] \end{aligned} \right\} K_{II}, \right. \\
 &\quad \left. \right\} K_I, \tag{IV.2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\sigma_{12})_I &= \frac{1 - \tanh \pi \varepsilon}{\sqrt{\rho}} e^{\varepsilon \theta} \left\{ \frac{1}{4} \left[ e^{2\varepsilon(\pi-\theta)} \sin\left(\frac{\theta}{2} - \varepsilon \ln \frac{\rho}{l}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2} + \varepsilon \ln \frac{\rho}{l}\right) \right] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1/4 + \varepsilon^2}{2} \left\{ \begin{aligned} &\left[ \cos\left(\frac{\theta}{2} + \varepsilon \ln \frac{\rho}{l}\right) - \cos\left(\frac{\theta}{2} - \varepsilon \ln \frac{\rho}{l}\right) \right] \sin \frac{3\theta}{2} \\ &\left[ + \left[ \sin\left(\frac{\theta}{2} + \varepsilon \ln \frac{\rho}{l}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2} - \varepsilon \ln \frac{\rho}{l}\right) \right] \cos \frac{3\theta}{2} \right] \end{aligned} \right\} K_I \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1 - \tanh \pi \varepsilon}{\sqrt{\rho}} e^{\varepsilon \theta} \left\{ -\frac{1}{4} \left[ e^{2\varepsilon(\pi-\theta)} \cos\left(\frac{\theta}{2} - \varepsilon \ln \frac{\rho}{l}\right) + \cos\left(\frac{\theta}{2} + \varepsilon \ln \frac{\rho}{l}\right) \right] \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1/4 + \varepsilon^2}{2} \left\{ \begin{aligned} &\left[ \cos\left(\frac{\theta}{2} + \varepsilon \ln \frac{\rho}{l}\right) - \cos\left(\frac{\theta}{2} - \varepsilon \ln \frac{\rho}{l}\right) \right] \cos \frac{3\theta}{2} \\ &\left[ + \left[ \sin\left(\frac{\theta}{2} + \varepsilon \ln \frac{\rho}{l}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2} - \varepsilon \ln \frac{\rho}{l}\right) \right] \sin \frac{3\theta}{2} \right] \end{aligned} \right\} K_{II}. \right. \\
 &\quad \left. \right\} K_I, \tag{IV.3}
 \end{aligned}$$

Οι τάσεις για την (ισότροπη) φάση II προκύπτουν από τις προηγούμενες σχέσεις θέτοντας στη θέση του  $e^{\varepsilon\pi}$  το  $e^{-\varepsilon\pi}$  και στη θέση του  $e^{-\varepsilon\pi}$  το  $e^{\varepsilon\pi}$ . Οι παραπάνω σχέσεις, στην ειδική περίπτωση του ομογενούς υλικού παρέχουν:

$$\sigma_{11} = \frac{1}{2\sqrt{\rho}} K_I \left( \sin \frac{3\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} - 1 \right) \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\rho}} K_{II} \left( \cos \frac{3\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + 2 \right) \sin \frac{\theta}{2}, \tag{IV.4}$$

$$\sigma_{22} = -\frac{1}{2\sqrt{\rho}} K_I \cos \frac{\theta}{2} \left( \sin \frac{3\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} + 1 \right) \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2\sqrt{\rho}} K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}, \tag{IV.5}$$

$$\sigma_{12} = -\frac{1}{2\sqrt{\rho}} K_I \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} - \frac{1}{2\sqrt{\rho}} K_{II} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{3\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \right). \tag{IV.6}$$

Οι σχέσεις αυτές είναι οι γνωστές σχέσεις της μηχανικής των θραύσεων για μια ρωγή σε ομογενές υλικό (Irwin, 1957).





## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ V

### ΟΙ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΕΝΤΑΣΗΣ ΤΩΝ ΤΑΣΕΩΝ $K_I$ , $K_{II}$ ΚΑΙ $K_{III}$ ΓΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΑΡΜΩΣΗ ΚΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ

Οι συντελεστές έντασης των τάσεων για τη γραμμική εξάρμωση:

$$K_I = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\mu_I \mu_{II}}{\mu_{II} + \kappa_{II} \mu_I} [A_S(z_0) + \overline{A_S(z_0)}] + \frac{\mu_I \mu_{II}}{\mu_I + \kappa_I \mu_{II}} [B_S(z_0) + \overline{B_S(z_0)}] \right\} \frac{b_2}{\sqrt{l}} \\ + \frac{i}{2\pi} \left\{ \frac{\mu_I \mu_{II}}{\mu_{II} + \kappa_{II} \mu_I} [\Gamma_S(z_0) - \overline{\Gamma_S(z_0)}] - \frac{\mu_I \mu_{II}}{\mu_I + \kappa_I \mu_{II}} [B_S(z_0) - \overline{B_S(z_0)}] \right\} \frac{b_1}{\sqrt{l}} \quad (V.1) \\ - \frac{1}{\pi \left( \frac{1 + \kappa_I}{\mu_I} + \frac{1 + \kappa_{II}}{\mu_{II}} \right) (1 - \beta^2)} \frac{b_2}{\sqrt{l}},$$

$$K_{II} = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \frac{\mu_I \mu_{II}}{\mu_{II} + \kappa_{II} \mu_I} [A_S(z_0) - \overline{A_S(z_0)}] - \frac{\mu_I \mu_{II}}{\mu_I + \kappa_I \mu_{II}} [B_S(z_0) - \overline{B_S(z_0)}] \right\} \frac{b_2}{\sqrt{l}} \\ + \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\mu_I \mu_{II}}{\mu_{II} + \kappa_{II} \mu_I} [\Gamma_S(z_0) + \overline{\Gamma_S(z_0)}] + \frac{\mu_I \mu_{II}}{\mu_I + \kappa_I \mu_{II}} [B_S(z_0) + \overline{B_S(z_0)}] \right\} \frac{b_1}{\sqrt{l}} \quad (V.2) \\ - \frac{1}{\pi \left( \frac{1 + \kappa_I}{\mu_I} + \frac{1 + \kappa_{II}}{\mu_{II}} \right) (1 - \beta^2)} \frac{b_1}{\sqrt{l}},$$

$$K_{III} = \frac{\mu_I \mu_{II}}{\pi(\mu_I + \mu_{II})} \left\{ \sqrt{\frac{z_0 - a_1}{z_0 - a_2}} + \sqrt{\frac{\bar{z}_0 - a_1}{\bar{z}_0 - a_2}} - 1 \right\} \frac{b_3}{\sqrt{l}}, \quad (V.3)$$

όπου

$$A_S(z_0) = \sqrt{\frac{z_0 - a_1}{z_0 - a_2}} \left( \frac{z_0 - a_1}{z_0 - a_2} \right)^{i\varepsilon} \left\{ 1 - \frac{z_0 - \bar{z}_0}{a_2 - z_0} - \left[ z_0 - \frac{a_1 + a_2}{2} - (a_2 - a_1)i\varepsilon \right] \frac{z_0 - \bar{z}_0}{(z_0 - a_1)(z_0 - a_2)} \right\}, \quad (V.4)$$

$$B_S(z_0) = \sqrt{\frac{z_0 - a_1}{z_0 - a_2}} \left( \frac{z_0 - a_1}{z_0 - a_2} \right)^{-i\varepsilon}, \quad (V.5)$$

$$\Gamma_S(z_0) = \sqrt{\frac{z_0 - a_1}{z_0 - a_2}} \left( \frac{z_0 - a_1}{z_0 - a_2} \right)^{i\varepsilon} \left\{ 1 - \frac{z_0 - \bar{z}_0}{a_2 - z_0} + \left[ z_0 - \frac{a_1 + a_2}{2} - (a_2 - a_1)i\varepsilon \right] \frac{z_0 - \bar{z}_0}{(z_0 - a_1)(z_0 - a_2)} \right\}. \quad (\text{V.6})$$

Οι συντελεστές έντασης των τάσεων για τη γραμμική δύναμη:

$$K_I = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{i\mu_I}{\mu_{II} + \kappa_{II}\mu_I} [A_F(z_0) - \overline{A_F(z_0)}] + \frac{i\mu_I}{\mu_I + \kappa_I\mu_{II}} [B_F(z_0) - \overline{B_F(z_0)}] \right\} \frac{p_2}{\sqrt{l}} - \frac{i}{4\pi} \left\{ \frac{i\mu_I}{\mu_{II} + \kappa_{II}\mu_I} [\Gamma_F(z_0) + \overline{\Gamma_F(z_0)}] - \frac{i\mu_I}{\mu_I + \kappa_I\mu_{II}} [B_F(z_0) + \overline{B_F(z_0)}] \right\} \frac{p_1}{\sqrt{l}} - \frac{\mu_I}{2\pi} \left( \frac{\kappa_{II}}{\mu_{II} + \kappa_{II}\mu_I} - \frac{1}{\mu_I + \kappa_I\mu_{II}} \right) \frac{p_1}{\sqrt{l}}, \quad (\text{V.7})$$

$$K_{II} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\mu_I}{\mu_{II} + \kappa_{II}\mu_I} [A_F(z_0) + \overline{A_F(z_0)}] - \frac{\mu_I}{\mu_I + \kappa_I\mu_{II}} [B_F(z_0) + \overline{B_F(z_0)}] \right\} \frac{p_2}{\sqrt{l}} + \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{i\mu_I}{\mu_{II} + \kappa_{II}\mu_I} [\Gamma_F(z_0) - \overline{\Gamma_F(z_0)}] + \frac{i\mu_I}{\mu_I + \kappa_I\mu_{II}} [B_F(z_0) - \overline{B_F(z_0)}] \right\} \frac{p_1}{\sqrt{l}} - \frac{\mu_I}{2\pi} \left( \frac{\kappa_{II}}{\mu_{II} + \kappa_{II}\mu_I} - \frac{1}{\mu_I + \kappa_I\mu_{II}} \right) \frac{p_2}{\sqrt{l}}, \quad (\text{V.8})$$

$$K_3 = \frac{i\mu_I}{4\pi(\mu_I + \mu_{II})} \left\{ -\sqrt{\frac{z_0 - a_1}{z_0 - a_2}} + \sqrt{\frac{\bar{z}_0 - a_1}{\bar{z}_0 - a_2}} - 1 \right\} \frac{p_3}{\sqrt{l}}, \quad (\text{V.9})$$

όπου

$$A_F(z_0) = \sqrt{\frac{z_0 - a_1}{z_0 - a_2}} \left( \frac{z_0 - a_1}{z_0 - a_2} \right)^{i\varepsilon} \left\{ \kappa_{II} - \frac{z_0 - \bar{z}_0}{a_2 - z_0} + \left[ z_0 - \frac{a_1 + a_2}{2} - (a_2 - a_1)i\varepsilon \right] \frac{z_0 - \bar{z}_0}{(z_0 - a_1)(z_0 - a_2)} \right\}, \quad (\text{V.10})$$

$$B_F(z_0) = \sqrt{\frac{z_0 - a_1}{z_0 - a_2}} \left( \frac{z_0 - a_1}{z_0 - a_2} \right)^{-i\varepsilon}, \quad (\text{V.11})$$

$$\Gamma_F(z_0) = \sqrt{\frac{z_0 - a_1}{z_0 - a_2}} \left( \frac{z_0 - a_1}{z_0 - a_2} \right)^{i\varepsilon} \left\{ \kappa_{II} + \frac{z_0 - \bar{z}_0}{a_2 - z_0} + \left[ z_0 - \frac{a_1 + a_2}{2} - (a_2 - a_1)i\varepsilon \right] \frac{z_0 - \bar{z}_0}{(z_0 - a_1)(z_0 - a_2)} \right\}. \quad (\text{V.12})$$

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ VI

### ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

#### VI.1 Δεδομένα υλικών

Τα βασικά αποτελέσματα που έχουν προκύψει στην παρούσα διατριβή θα εφαρμοσθούν σε διφασικά συστήματα που θα εμπλέκουν τρία υλικά, των οποίων οι ελαστικές ιδιότητες παρουσιάζονται στον Πίνακα VI.1.

Πίνακας V.1

ελαστικές σταθερές $C_{ijkl}$	Ανισότροπα Υλικά		Ισότροπο Υλικό
	Υλικό 1 (μονοκλινής ανισοτροπία) [GPa]	Υλικό 2 (κυβική ανισοτροπία) [GPa]	Υλικό 3 (ισότροπο)
$C_{1111}$	223	70	$\mu = 76 \text{ GPa}$
$C_{1122}$	108	-30	$\nu = 0.3$
$C_{1133}$	98.5	-	
$C_{1113}$	8.4	-	
$C_{2222}$	150	-	
$C_{2233}$	102	-	
$C_{2213}$	33.3	-	
$C_{3333}$	251	-	
$C_{3313}$	-6.1	-	
$C_{2323}$	78.8	20	
$C_{2312}$	6.6	-	
$C_{1313}$	68.8	-	

Για τα ανισότροπα υλικά 1 και 2 θα προσδιορισθούν πρώτα τα μητρώα  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$  και  $\mathbf{T}$ , που υπεισέρχονται στο πρόβλημα ιδιοτιμών (2.16). Με βάση τις σχέσεις (2.10) και τις τιμές του Πίνακα VI.1, τα μητρώα των δύο υλικών βρίσκονται στη μορφή

Υλικό 1:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 223 & 0 & 8.4 \\ 0 & 78 & 0 \\ 8.4 & 0 & 68.8 \end{bmatrix} [\text{GPa}], \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 108 & 0 \\ 78 & 0 & 6.6 \\ 0 & 33.3 & 0 \end{bmatrix} [\text{GPa}],$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 78 & 0 & 6.6 \\ 0 & 150 & 0 \\ 6.6 & 0 & 78.8 \end{bmatrix} [\text{GPa}], \quad (\text{VI.1})$$

Υλικό 2:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 70 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} [\text{GPa}], \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & -30 & 0 \\ 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [\text{GPa}], \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 70 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} [\text{GPa}]. \quad (\text{VI.2})$$

Από την αριθμητική επίλυση του προβλήματος ιδιοτιμών (2.17) προκύπτουν οι παρακάτω τρεις μιγαδικές ρίζες της αλγεβρικής εξίσωσης (2.15), που έχουν θετικό φανταστικό μέρος

$$\text{Υλικό 1: } p_1 = -0.7319 + 0.7907i, \quad p_2 = 0.7319 + 0.7907i, \quad p_3 = 0.9825i, \quad (\text{VI.3})$$

$$\text{Υλικό 2: } p_1 = 1.8499i, \quad p_2 = 0.5406i, \quad p_3 = i. \quad (\text{VI.4})$$

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ρίζες αυτές είναι

Υλικό 1:

$$\mathbf{a}_1 = [0.861 - 1.401i, 1.572 - 1.096i, -0.561 - 0.211i]^T 10^{-6}, \quad (\text{VI.5})$$

$$\mathbf{a}_2 = [1.401 - 0.861i, -1.096 + 1.574i, 0.211 - 0.561i]^T 10^{-6}, \quad (\text{VI.6})$$

$$\mathbf{a}_3 = [-0.497 + 0.497i, -0.361 - 0.361i, 1.806 - 1.806i]^T 10^{-6}, \quad (\text{VI.7})$$

Υλικό 2:

$$\mathbf{a}_1 = [0.997, -0.084i, 0]^T, \quad (\text{VI.8})$$

$$\mathbf{a}_2 = [0.084i, 0.997, 0]^T, \quad (\text{VI.9})$$

$$\mathbf{a} = [0, 0, 1]^T. \quad (\text{VI.10})$$

Από τα παραπάνω ιδιοδιανύσματα, με βάση τις σχέσεις (2.21) και (2.27) προκύπτουν τα παρακάτω μητρώα  $\mathbf{A}$  και  $\mathbf{B}$  για τα δύο υλικά

Υλικό 1:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.861-1.401i & 1.572-1.096i & -0.561-0.211i \\ 1.401-0.861i & -1.096+1.574i & 0.211-0.561i \\ -0.497+0.497i & -0.361-0.361i & 1.806-1.806i \end{bmatrix} 10^{-6}, \quad (\text{VI.11})$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 16.80+5.439i & 5.439+16.80i & -5.851-5.851i \\ 6.889+14.87i & -14.87-6.889i & 5.955-5.955i \\ -0.564+5.112i & 5.112-0.564i & 13.42+13.42i \end{bmatrix} 10^4, \quad (\text{VI.12})$$

Υλικό 2:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.997 & 0.084i & 0 \\ -0.084i & 0.997 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 35.188i & 19.022 & 0 \\ -19.022 & 35.188i & 0 \\ 0 & 0 & 20i \end{bmatrix}. \quad (\text{VI.13})$$

Για το υλικό 3 που είναι ισότροπο, τα μητρώα  $\mathbf{A}$  και  $\mathbf{B}$  που υπεισέρχονται στην ανάλυση προσδιορίζονται άμεσα από τις σχέσεις (2.97) και (2.99)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.0022 & -0.0013 & 0 \\ -0.0022i & -0.0013i & 0 \\ 0 & 0 & -0.0025 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -0.5i & 0.5i & 0 \\ -0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}. \quad (\text{VI.14})$$

Στα μητρώα αυτά η ελαστική παράμετρος  $\kappa$  υπολογίστηκε από τη σχέση  $\kappa = 3 - 4\nu$ .

## VI.2 Το μητρώο $\mathbf{H}$

Για ένα διυλικό, του οποίου η φάση  $I$  αντιστοιχεί στο ανισότροπο υλικό 1 και η φάση  $II$  στο ανισότροπο υλικό 2 (διυλικό  $\alpha$ ), το μητρώο  $\mathbf{H}$  υπολογίζεται από τη σχέση (3.18).

Βρίσκεται ότι

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0.0418 & -0.025i & 0 \\ 0.025i & 0.0418 & 0 \\ 0 & 0 & 0.05 \end{bmatrix}. \quad (\text{VI.15})$$

Αντίστοιχα, για ένα διυλικό, που η φάση  $I$  είναι ανισότροπη και η φάση  $II$  ισότροπη (διυλικό  $\beta$ ), ο πίνακας  $\mathbf{H}$  έχει τη μορφή

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -0.0091 & 0.0025i & 0 \\ -0.0025i & -0.0091 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0132 \end{bmatrix}. \quad (\text{VI.16})$$

### VI.3 Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του μητρώου $\mathbf{H}\bar{\mathbf{H}}^{-1}$

Για το διυλικό  $\alpha$  το μητρώο  $\mathbf{H}\bar{\mathbf{H}}^{-1}$  είναι

$$\mathbf{H}\bar{\mathbf{H}}^{-1} = \begin{bmatrix} 2.1111 & -1.8592i & 0 \\ 1.8592i & 2.1111 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{VI.17})$$

Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του μητρώου αυτού είναι

$$\lambda_1 = 3.9704, \quad \mathbf{r}_1 = c_1 [-i, 1, 0]^T, \quad (\text{VI.18})$$

$$\lambda_2 = 0.2519, \quad \mathbf{r}_2 = c_2 [i, 1, 0]^T, \quad (\text{VI.19})$$

$$\lambda_3 = 1, \quad \mathbf{r}_3 = c_3 [0, 0, 1]^T. \quad (\text{VI.20})$$

Όμοια για το διυλικό  $\beta$ , τα αντίστοιχα μητρώα είναι

$$\mathbf{H}\bar{\mathbf{H}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.1641 & -0.5959i & 0 \\ 0.5959i & 1.1641 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{VI.21})$$

$$\lambda_1 = 1.76, \quad \mathbf{r}_1 = c_1 [-i, 1, 0]^T, \quad (\text{VI.22})$$

$$\lambda_2 = 0.5682, \quad \mathbf{r}_2 = c_2 [i, 1, 0]^T, \quad (\text{VI.23})$$

$$\lambda_3 = 1, \quad \mathbf{r}_3 = c_3 [0, 0, 1]^T. \quad (\text{VI.24})$$

#### VI.4 Το μητρώο έντασης των τάσεων

Για το διυλικό  $\alpha$ , το μητρώο έντασης των τάσεων για μια ομοιόμορφη τάση στο άπειρο θα προσδιορισθεί από τη σχέση (6.67), υπολογίζοντας πρώτα τα μητρώα που υπεισέρχονται στη σχέση αυτή

$$(\mathbf{I} + \mathbf{L})^{-1} = \begin{bmatrix} 0.2012 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7988 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad (\text{VI.25})$$

$$\bar{\mathbf{r}}_1^T (\mathbf{H}^{-1} + \bar{\mathbf{H}}^{-1}) \hat{\mathbf{r}}_1 = 148.74, \quad \bar{\mathbf{r}}_2^T (\mathbf{H}^{-1} + \bar{\mathbf{H}}^{-1}) \hat{\mathbf{r}}_2 = 148.74, \quad \bar{\mathbf{r}}_3^T (\mathbf{H}^{-1} + \bar{\mathbf{H}}^{-1}) \hat{\mathbf{r}}_3 = 40, \quad (\text{VI.26})$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις αυτές στην (6.67) προκύπτει το μητρώο έντασης των τάσεων στη μορφή

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} i & 1 & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} 10^3 \sigma_2^\infty \sqrt{l}. \quad (\text{VI.27})$$

Στη σχέση αυτή το  $\sigma_2^\infty$  είναι σε [MPa] και το μήκος  $l$  σε mm. Για το διυλικό  $\beta$ , είναι

$$(\mathbf{I} + \mathbf{L})^{-1} = \begin{bmatrix} 0.3623 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6377 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{r}}_1^T (\mathbf{H}^{-1} + \bar{\mathbf{H}}^{-1}) \hat{\mathbf{r}}_1 = -476.727, \quad \bar{\mathbf{r}}_2^T (\mathbf{H}^{-1} + \bar{\mathbf{H}}^{-1}) \hat{\mathbf{r}}_2 = -476.727,$$

$$\bar{\mathbf{r}}_3^T (\mathbf{H}^{-1} + \bar{\mathbf{H}}^{-1}) \hat{\mathbf{r}}_3 = -152, \quad (\text{VI.28})$$

και προκύπτει

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} i & 1 & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} 10^3 \sigma_2^\infty \sqrt{l}. \quad (\text{VI.29})$$





## **ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ**

Ο κ. Μαυρογιάννης Γεώργιος είναι Διπλωματούχος Αγρονόμος και Τοπογράφος Μηχανικός του ΕΜΠ και Διπλωματούχος Πολιτικός Μηχανικός του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας. Ως υποψήφιος διδάκτορας συμμετείχε επικουρικά στην διδασκαλία και στις εργαστηριακές ασκήσεις των μαθημάτων της Τεχνικής Μηχανικής, που διδάσκεται στη Σχολή Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών του ΕΜΠ. Έχει δημοσιεύσει δύο επιστημονικές εργασίες σε έγκριτα διεθνή περιοδικά (Acta Mechanica, Journal of Elasticity).