Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Τιμολόγηση Παραγώγων με μέτρα **Martingale**

Επιμέλεια:

Ιωάννης Βόλλας

Επιβλέπων καθηγητής:

Μιχάλης Λουλάκης

10 Ιουνίου 2013

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Στόχος της παρούσας διπλωματικής είναι η μελέτη του προβλήματος της τιμολόγησης παραγώγων και η ανάπτυξη κατάλληλων μαθηματικών εργαλείων. Η προσέγγιση του προβλήματος αυτού γίνεται βηματικά έτσι ώστε να γίνουν περισσότερο κατανοητές οι απαραίτητες έννοιες.

Στο πρώτο κεφάλαιο πραγματοποιείται μια γενική περιγραφή των χρηματιστηριακών αγορών καθώς και των χρηματοοικονομικών προϊόντων, όπως τα παράγωγα Ευρωπαϊκού και Αμερικάνικου τύπου. Στο πλαίσιο αυτό, αναπτύσσονται περιληπτικά και κάποια θέματα που αφορούν επενδυτές σε πρακτικό επίπεδο (π.χ. στρατηγικές αγοραπωλησιών μετοχών και δικαιωμάτων προαίρεσης). Το κύριο πρόβλημα που τίθεται φυσιολογικά στην συνέχεια σχετίζεται με την τιμή των παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων σε μια χρηματιστηριακή αγορά (option pricing). Τα προϊόντα αυτά μπορούν να διαπραγματεύονται σε οποιαδήποτε τιμή; Το ερώτημα αυτό αποδεικνύεται εξαιρετικά γόνιμο και για την αντιμετώπισή του οδηγούμαστε στην εισαγωγή εννοιών όπως το βέβαιο κέρδος χωρίς κίνδυνο (arbitrage), τα αυτοχρηματοδοτούμενα χαρτοφυλάκια (self-financing portfolios), την αντισταθμιστική στρατηγική (hedging), τον κόσμο ¨ουδέτερου κινδύνου ' (risk-neutral world) κ.α. Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι η μελέτη ενός τόσο πρακτικού προβλήματος αποδεικνύεται ότι απαιτεί τη χρήση αρκετά "προχωρημένων" μαθηματικών τεχνικών που βασίζονται στην μαθηματική ανάλυση και στη θεωρία στοχαστικών ανελίξεων.

Αρχικά το πρόβλημα της τιμολόγησης μελετάται σε ένα υπεραπλουστευμένο μοντέλο αγοράς, το διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου, όπου όμως γεννάται σε ακατέργαστη μορφή η διαδικασία που θα μας οδηγήσει στην αντιμετώπιση του προβλήματος σε πιο ρεαλιστικά μοντέλα. Στο μοντέλο αυτό η αγορά εξετάζεται σε δύο μόνο χρονικά σημεία. Μέχρις εδώ δεν χρειάζονται ιδιαίτερες και εξειδικευμένες μαθηματικές τεχνικές, παρά μόνο η στοιχειώδης γνώση της θεωρίας πιθανοτήτων.

Στη συνέχεια, το διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου γενικεύεται στο διωνυμικό μοντέλο πολλών περιόδων. Αν και η γενίκευση από ένα μοντέλο αγοράς που εξετάζεται σε δύο μόνο χρονικά σημεία, σε ένα μοντέλο αγοράς που εξετάζεται σε n χρονικά σημεία είναι απόλυτα φυσιολογική, η μελέτη τώρα απαιτεί πιο εξειδικευμένα μαθηματικά εργαλεία. Για το λόγο αυτό, αρχικά πραγματοποιείται μια σύντομη επισκόπηση των βασικών εννοιών της θεωρίας των martingales και στη συνέχεια αναπτύσσουμε την θεωρία τιμολόγησης με martingale μέτρα για παράγωγα Ευρωπαϊκού τύπου.

Στο επόμενο κεφάλαιο αναπτύσσουμε την αντίστοιχη θεωρία για τα παράγωγα Αμερικάνικου τύπου. Τα παράγωγα Αμερικάνικου τύπου έχουν μια θεμελιώδη διαφορά σε σχέση με τα παράγωγα Ευρωπαϊκού τύπου, σε αυτά ο αγοραστής μπορεί να εξασκήσει το παράγωγο οποιαδήποτε στιγμή θελήσει, μέχρι και τη στιγμή της λήξης του. Το γεγονός αυτό περιπλέκει την τιμολόγησή του και οδηγεί στην εισαγωγή νέων εννοιων όπως ο χρόνος διακοπής και ο βέλτιστος χρόνος διακοπής.

Το διωνυμικό μοντέλο n περιόδων, ως μοντέλο διακριτού χρόνου εξακολουθεί να είναι απλουστευτικό αλλά πλησιάζει πολύ την πραγματικότητα αν κανείς θεωρήσει το n πολύ μεγάλο (θεωρητικά $n \to +\infty$). Τότε θα πάρει μια σαφή εικόνα για το πώς θα πρέπει να αντιμετωπίσει το πρόβλημα σε περισσότερο ρεαλιστικά μοντέλα όπως είναι τα μοντέλα συνεχούς χρόνου. Στο τελευταίο κεφάλαιο εισάγουμε το λογαριθμοκανονικό μοντέλο για τις τιμές του πρωτογενούς προϊόντος και συζητάμε τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να προσεγγιστεί από το διωνυμικό μοντέλο. Στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε αυτό το μοντέλο για να τιμολογήσουμε παράγωγα με τον τύπο Black-Scholes για $n \to +\infty$ και τέλος θα δώσουμε μια εφαρμογή αυτού του τύπου στα δικαιώματα αγοράς και πώλησης.

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή Μιχάλη Λουλάκη για την πολύτιμη βοήθεια που είχα στην επιλυση διαφόρων προβλημάτων που παρουσιάστηκαν καθώς και για το θετικό κλίμα συνεργασίας που φρόντισε να δημιουργήσει από την πρώτη στιγμή.

Κεφάλαιο 1

Διωνυμικό υπόδειγμα πολλών περιόδων

1.1 Βασικές έννοιες

1.1.1 Χρηματαγορά και παράγωγα

Μία οικονομία μπορεί να αποτελείται από μία σειρά αγορών οι οποίες είναι αλληλοσυνδεόμενες. Από όλες τις πιθανές αγορές που μπορεί να εμφανίζονται σε ένα οικονομικό σύστημα οι χρηματαγορές εμφανίζουν ίσως το μεγαλύτερο ενδιαφέρον. Αυτό γιατί συνδέονται με οποιαδήποτε άλλη αγορά αλλά και με το κάθε άτομο. Οι χρηματαγορές αποτελούν το μέσο που χρησιμοποιούν οι επιχειρήσεις για να μαζέψουν τα απαραίτητα κεφάλαια για να εξασφαλίσουν την λειτουργία τους, το μέσο που χρησιμοποιούν οι μεμονωμένοι επενδυτές για να αυξήσουν την ευημερία τους και το μέσο που χρησιμοποιούμε για να αποθηκεύσουμε τον πλεονάζοντα πλούτο. Η χρηματαγορά είναι ο "τόπος " στον οποίο γίνονται οι συναλλαγές σε χρηματοοικονομικά περιουσιακά στοιχεία.

Ένα χρηματοοικονομικό περιουσιακό στοιχείο ή τίτλος (financial asset) είναι μια αξίωση σε κάποιο μελλοντικό εισόδημα(απολαβή). Οι απολαβές δεν είναι γνωστές εκ των προτέρων. Το συμβόλαιο αυτό πωλείται ή αγοράζεται σήμερα (δηλαδή πριν γίνει γνωστό το ποιές θα είναι οι απολαβές από αυτό) και χρησιμοποιείται για την μεταφορά πλούτου σε μελλοντικές χρονικές στιγμές και σε διαφορετικές καταστάσεις του κόσμου. Παραδείγματα τέτοιων τίτλων είναι τα ομόλογα, οι μετοχές και τα παράγωγα, όπου με τα τελευταία θα ασχοληθούμε παρακάτω.

Τα **παράγωγα προϊόντα** (derivative assets) είναι συμβόλαια που καθορίζουν μια συμφωνία που πρόκειται να υλοποιηθεί στο μέλλον και η αξία των οποίων εξαρτάται από την αξία ενός ή περισσότερων άλλων τίτλων ή εμπορευμάτων(πρωτογενή προιόντα). Για αυτό το λόγο ονομάζονται και εξαρτώμενες απαιτήσεις (contingent claims). Το πρωτογενές προϊόν, από το οποίο εξαρτάται η αξία του παραγώγου, μπορεί να είναι μια μετοχή, ένα ξένο συνάλλαγμα, ένα αγαθό(π.χ πετρέλαιο), ένας χρηματιστηριακός δείκτης, ένα ομόλογο ακόμα και ένα άλλο παράγωγο. Παραδείγματα τέτοιων παραγώγων είναι τα δικαιώματα προαίρεσης αγοράς και πώλησης μετοχών ή μονάδων του δείκτη (call and put options), τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (futures), είτε πάνω σε μετοχές είτε επάνω σε εμπορεύματα, τα συμβόλαια ανταλλαγής (swaps) κ.α.
Παρακάτω θα ασχολειθούμε κυρίως με τα δικαιώματα προαίρεσης και την τιμολογησή τους, οπότε για αυτό το λόγο θα αναφέρουμε λίγα λόγια παραπάνω.

Δικαίωμα προαίρεσης (option) καλείται μία συμφωνία ή ένα συμβόλαιο μεταξύ δύο αντισυμβαλλομένων, τον αγοραστή και τον πωλητή του δικαιώματος, με τη μεσολάβηση του Χρηματιστηρίου Παραγώγων. Η συμφωνία αυτή δίνει στον αγοραστή το δικαίωμα και όχι την υποχρέωση να αγοράσει ή να πωλήσει (ανάλογα με το είδος του δικαιώματος) από τον πωλητή του δικαιώματος ένα συγκεκριμένο αγαθό A σε μία προκαθορισμένη τιμή K, κατά τη διάρκεια μίας χρονικής περιόδου [0, T] ή σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή T στο μέλλον. Το υποκείμενο αγαθό A μπορεί π.χ. να είναι μετοχή, χρηματιστηριακός δείκτης, συνάλλαγμα, αλλά μπορεί σε ορισμένες αγορές να είναι και κάποιο εμπόρευμα. Ο αγοραστής του δικαιώματος (holder) δεν είναι υποχρεωμένος να εξασκήσει το δικαίωμά του (να αγοράσει ή να πωλήσει) παρά μόνο εάν τον συμφέρει. Αντίθετα ο πωλητής (writer) του δικαιώματος είναι υποχρεωμένος να πράξει ό,τι τελικά αποφασίσει ο αγοραστής του δικαιώματος. Το γεγονός αυτό θέτει σε πλεονεκτική θέση τον αγοραστή και για αυτό ο αγοραστής θα πρέπει να καταβάλει ένα αντίτιμο C (ασφάλιστρο ή τιμή δικαιώματος - Option price, option premium) στον πωλητή, ο οποίος ουσιαστικά αναλαμβάνει ρίσκο, για να αποκτήσει το δικαίωμα. Σύμφωνα με τα παραπάνω, ένα δικαίωμα προαίρεσης χαρακτηρίζεται από τα εξής:

1. Το είδος του δικαιώματος (δικαίωμα αγοράς – call option ή δικαίωμα πώλησης – put option). Στην αγορά μπορεί κανείς να αγοράσει ένα call option (long call) ή να πουλήσει ένα call option (short call) ή να αγοράσει ένα put option (long put) ή να πουλήσει ένα put option (short put).

2. Ο υποκείμενος τίτλος (π.χ. δείκτης FTSE/ASE-20 , μετοχή ΟΤΕ κ.λπ.)

3. Το μέγεθος του συμβολαίου (π.χ. ένα συμβόλαιο με υποκείμενο τίτλο τη μετοχή του ΟΤΕ, μπορεί να αντιστοιχεί σε 100 μετοχές του ΟΤΕ)

4. Η ημερομηνία λήξης (exercise date, maturity). Ανάλογα με το χρόνο εξάσκησης T υπάρχουν δύο κύριες κατηγορίες δικαιωμάτων προαίρεσης: (α) Αμερικανικού τύπου (American option) όταν το δικαίωμα προαίρεσης μπορεί να εξασκηθεί οποιαδήποτε στιγμή μέχρι την ημερομηνία λήξης. (β) Ευρωπαϊκού τύπου (European option) όταν το δικαίωμα προαίρεσης μπορεί να εξασκηθεί μόνο κατά την ημερομηνία λήξης.

5. Η τιμή εξάσκησης K (strike price ή exercise price) είναι η προκαθορισμένη τιμή στην οποία ο αγοραστής του δικαιώματος αγοράς/πώλησης θα αγοράσει/πωλήσει (εάν επιλέξει να εξασκήσει το δικαίωμα) το συγκεκριμένο αγαθό (π.χ. μετοχή) στο οποίο αναφέρεται το δικαίωμα.

6. Το αντίτιμο C (ασφάλιστρο ή τιμή δικαιώματος - Option price, option premium) το οποίο καταβάλει ο αγοραστής στον πωλητή του δικαιώματος.

Παράδειγμα 1 *Ένας επενδυτής πιστεύει ότι η αξία της μετοχής μιας εταιρείας X πρόκειται να ανέβει σημαντικά μέσα στον επόμενο μήνα και θέλει να επενδύσει στη μετοχή αυτή. Η τιμή της μετοχής σήμερα είναι 10ευρώ, ενώ στην αγορά επίσης διατίθεται προς 2ευρώ ένα αμερικάνικο δικαίωμα αγοράς της μετοχής της εταιρείας X με ωρίμανση σε ένα μήνα και τιμή εξάσκησης 10ευρώ. Ο επενδυτής αποφασίζει να διαθέσει 1.000ευρώ και εξετάζει δύο εναλλακτικές επενδυτικές στρατηγικές: είτε να αγοράσει 100 μετοχές της εταιρείας, είτε να αγοράσει ένα δικαίωμα αγοράς 500 μετοχών. Ας δούμε τώρα τι θα συμβεί στις δύο περιπτώσεις ανάλογα με το αν η πεποίθηση του επενδυτή επαληθευτεί ή όχι. Αν η τιμή της μετοχής παραμένει διαρκώς κάτω από τα 10ευρώ τότε στην πρώτη περίπτωση θα διατηρήσει την αξία των μετοχών του ενώ στη δεύτερη θα χάσει όλη του την επένδυση αφού δεν θα μπορέσει να ασκήσει το δικαίωμα που έχει αγοράσει. Αυτή ακριβώς η μεγαλύτερη έκθεση στον κίνδυνο είναι και ο λόγος που κοστίζει πάντα λιγότερο να αγοράσει κανείς ένα δικαίωμα αγοράς της μετοχής από ότι την ίδια την μετοχή.*

Στο παράδειγμα μας ο επενδυτής μπορεί να αγοράσει 100 μετοχές ή το δικαίωμα αγοράς 500 μετοχών. Αν όμως η αξία της μετοχής ανέβει τότε κάθε επιπλέον ευρώ ανόδου στην αξία της μετοχής θα αποφέρει στον επενδυτή 100ευρώ επιπλεόν αν έχει επενδύσει στην μετοχή αλλά 500ευρώ επιπλέον αν έχει επενδύσει στο παράγωγό της. Έτσι αν για παράδειγμα η τιμή της μετοχής ανέβει στα 15ευρώ τότε στην δεύτερη περίπτωση η αξία των μετοχών του επενδυτή είναι 1500ευρώ, αποφέροντας του κέρδος 50 τις εκατό. Στη δεύτερη περίπτωση μπορέι, χρησιμοποιώντας το δικαίωμα, να αγοράσει 500 μετοχές της εταιρίας προς 10ευρώ και να τις πουλήσει άμεσα στην αγοραία τιμή τους (15ευρώ). Αυτό θα αποφέρει 5ευρώ ανά μετοχή, άρα 2500ευρώ και κέρδος 150 τις εκατό επί της αρχικής του επένδυσης!

Η επένδυση στο δικαίωμα αγοράς ενέχει μεν μεγαλύτερο κίνδυνο αφήνει όμως και μεγαλύτερο περιθώριο κέρδους αν η πεποίθηση του επενδυτή επαληθευτεί. Αυτό είναι ένα παράδειγμα χρήσης παραγώγων για κερδοσκοπία. Θα πρέπει όμως κανείς να έχει κατά νου ότι τα παράγωγα είναι όπως τα παίγνια μηδενικού αθροίσματος. Το κέρδος του συμβαλλόμενου είναι η ζημία του *άλλου. Και συνήθως οι άλλοι είναι μεγάλοι οργανισμοί που μπορούν με τις κινήσεις τους να επηρεάσουν την αγορά.*

Παράδειγμα 2 *Μια ελληνική εταιρεία υπογράφει ένα συμβόλαιο για την αγορά ενός μηχανήματος από μια αμερικάνικη κατασκευάστρια. Η τελευταία αναλαμβάνει να παραδώσει το μηχάνημα σε ένα χρόνο έναντι* 100.000 *δολλάρια. Η τρέχουσα ισοτιμία δολλαρίου/ευρώ είναι 1δολλάριο= 0.78923 ευρώ. Η ελληνική εταιρεία βρίσκει την τιμή συμφέρουσα αλλά ανησυχεί για την ισοτιμία δολλαρίου-ευρώ σε ένα χρόνο. Θέλοντας να καταρτίσει τον προϋπολογισμό της θα ήθελε να σιγουρέψει ότι δεν θα πληρώσει πάνω από* 80.000 *ευρώ για το μηχάνημα. Ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς* 100.000 *δολλαρίων με ωρίμανση σε ένα χρόνο και τιμή εξάσκησης* 80.000 *ευρώ θα μπορούσε να φανεί πολύ χρήσιμο. Αν σε ένα χρόνο η ισοτιμία δολλαρίου/ευρώ υπερβεί τα 0.80 ευρώ/δολλάριο η εταιρεία θα μπορεί να εξασκήσει το δικαίωμα αγοράς και να λάβει* 100.000 *δολλάρια έναντι* 80.000 *ευρώ. Αν πάλι η ισοτιμία έχει μείνει κάτω από 0.80ευρώ/δολλάριο τότε η εταιρεία μπορεί να ανταλλάξει ευρώ προς αμερικάνικα δολλάρια στην τρέχουσα ισοτιμία. Αυτό είναι ένα παράδειγμα χρήσης των παραγώγων για την αντιστάθμιση του κινδύνου από τις μεταβολές της αξίας του πρωτογενούς προϊόντος.*

1.1.2 Αρχή της μη επιτηδειότητας -Βασική προσέγγιση

Για την ανάλυση των παραγώγων θα χρησιμοποιήσουμε ένα βασικό εργαλείο την **Αρχή της μη επιτηδειότητας** (principle of no arbitrage). Σε αυτό το σημείο θα δώσουμε μια διαισθητική ερμηνεία αυτής της αρχής την οποία αργότερα θα ορίσουμε μαθηματικά πότε ισχύει σε μια αγορά και πότε όχι.

Σε μια χρηματιστηριακή αγορά οι συναλλασσόμενοι μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε τρεις κατηγορίες: τους hedgers, speculators και τους arbitrageurs. Οι **hedgers** προσπαθούν να προστατεύσουν μία θέση τους στην αγορά χρησιμοποιώντας μία κατάλληλη θέση στην αγορά των παραγώγων (Hedging: αντιστάθμιση κινδύνου). Με άλλα λόγια, έχουν ως σκοπό την μείωση του κινδύνου που ενδεχομένως αντιμετωπίζουν. Ενώ οι hedgers προσπαθούν να μειώσουν τον κίνδυνο που διαχειρίζονται (π.χ. με το να μειώσουν την μέγιστη ζημιά που μπορούν να έχουν), οι **speculators** (κερδοσκόποι) αναλαμβάνουν ρίσκα τα οποία ευελπιστούν ότι θα τους οδηγήσουν σε κέρδη (π.χ. κάνουν κινήσεις που αυξάνουν τη διασπορά του τυχαίου κέρδους τους). Από την άλλη οι **arbitrageurs** δεν προσδοκούν κέρδος αναλαμβάνοντας ρίσκο όπως οι κερδοσκόποι, αλλά προσπαθούν να εντοπίσουν πρόσκαιρες ανισορροπίες της αγοράς και να τις εκμεταλλευτούν αποκομίζοντας σίγουρο κέρδος, χωρίς ρίσκο (ο όρος arbitrage μεταφράζεται και ως εξισορροποιητική κερδοσκοπία). Ένας arbitrageur μπορεί, εκμεταλλευόμενος κάποιες συγκυρίες και ακολουθώντας μια συγκεκριμένη στρατηγική αγοράς μετοχών, ομολόγων και παραγώγων να έχει σίγουρο κέρδος. Ένα απλό παράδειγμα είναι το εξής: η μετοχή ΑΑΑ διατίθεται ταυτόχρονα σε δύο αγορές, στο χρηματιστήριο της Νέας Υόρκης και στο χρηματιστήριο του Λονδίνου με τιμή 168 δολάρια και 100 λίρες Αγγλίας αντίστοιχα, ενώ η τρέχουσα ισοτιμία Δολαρίου - Λίρας είναι 1 λίρα $=$ 1.7 δολ. (πώληση λίρας). Ένας arbitrageur μπορεί να αγοράσει 1000 μετοχές της ΑΑΑ από την Νέα Υόρκη και να τις πωλήσει άμεσα στο Λονδίνο. Το κέρδος που θα έχει θα είναι $(-168 + 100 \times 1.7) \times 1000 = 2000$ δολάρια χωρίς να συνυπολογίζονται τα έξοδα συναλλαγών. Επομένως θα έχει σίγουρο κέρδος (χωρίς ρίσκο). Η ευκαιρία αυτή σύντομα θα εκλείψει διότι, αντιλαμβανόμενοι το γεγονός, θα σπεύσουν πολλοί να αγοράσουν από την Νέα Υόρκη και να πωλήσουν στο Λονδίνο, αυξάνοντας την αξία της ΑΑΑ στο μεν και μειώνοντάς τη στο δε. Το αποτέλεσμα θα είναι να φτάσει η τιμή της ΑΑΑ σε ένα σημείο ισορροπίας που δεν θα επιτρέπει σίγουρο κέρδος. Επομένως οι ευκαιρίες για arbitrageur που τυχόν εμφανίζονται στην αγορά, πολύ γρήγορα εξαφανίζονται.

Επομένως αυτό που αξιώνει η αρχή της μη επιτηδειότητας είναι ότι δεν είναι δυνατόν να υπάρξει δυνατότητα κέρδους χωρίς την ανάληψη ρίσκου. Η αποδοχή της αρχής μη επιτηδειότητας έχει σαφή μαθηματική περιγραφή με την χρήση ιδιοτήτων των martingale και κατάλληλα προεξοφλημένες τιμές των περιουσιακών στοιχείων. Τα θεμελιώδη θεωρήματα σχετικά με την αποτίμηση περιουσιακών στοιχείων σχετίζονται με την απουσία επιτηδειότητας, σαν παράδειγμα μπορούμε να φέρουμε το τύπο των Black-Scholes για την αποτίμηση παραγώγων συμβολαίων.

1.1.3 Αξία του χρήματος στο χρόνο

Η τελευταία έννοια που θα συζητήσουμε σε αυτή την εισαγωγική παράγραφο είναι η έννοια του χρήματος μέσα στο χρόνο. Έστω ότι έχουμε ένα επενδυμένο κεφάλαιο P που αποδίδει τόκο με ονομαστικό ετήσιο επιτόκιο r, με συνεχή ανατοκισμό, αν έχουμε $k \to \infty$ περιόδους ανατοκισμού. Στο τέλος του έτους θα πρέπει να αποδοθεί ποσό ίσο με

$$\lim_{k\to\infty} P(1+\frac{r}{k})^k = Pe^r$$

Γενικά, μετά από t έτη, $t \in (0,1)$, το αρχικό κεφάλαιο P αποδίδει το ποσό Pe^{rt}.
Θα υποθέσουμε ότι στην αγορά μπορεί κανείς πάντοτε να δανείσει ή να δανεισθεί με ονομαστικό ετήσιο επιτόκιο r (συνεχούς ανατοκισμού) χωρίς να υπάρχει ρίσκο, δηλαδή ο δανειζόμενος θα επιστρέψει πάντοτε το ποσό συν τον τόκο που αντιστοιχεί. Το επιτόκιο αυτό στην πράξη δεν είναι σταθερό, αλλά στο εξής θα μελετάμε την αγορά σε έναν χρονικό ορίζοντα μέσα στον οποίο μπορούμε για απλότητα να θεωρήσουμε ότι το r παραμένει σταθερό.

Επομένως ένα χρηματικό ποσό που σήμερα έχει παρούσα ή προεξοφλημένη αξία P, μετά από χρόνο t (μετρούμενο σε έτη) θα έχει μελλοντική αξία Pe^{rt} δηλαδή αν επένδυε κανείς σήμερα το ποσό P σε ομόλογα με επιτόκιο r, μετά από χρόνο t θα ελάμβανε το ποσό Pe^{rt}. Αντίθετα ένα ποσό που μετά από χρόνο t έχει μελλοντική αξία P, σήμερα θα έχει παρούσα αξία Pe^{-rt}, δηλαδή αν επένδυε κανείς σήμερα το ποσό Pe^{-rt} σε ομόλογα με επιτόκιο r, μετά από χρόνο t θα ελάμβανε το ποσό $Pe^{-rt}e^{rt} = P$.
Από το σημείο αυτό και πέρα θα υποθέσουμε ότι στην αγορά μας υπάρχει ένα προϊόν με αξία 1 ευρώ τη στιγμή T και στο οποίο μπορούμε να πάρουμε θετική ή αρνητική θέση. Επειδή η απόδοση αυτού του προϊόντος δεν εξαρτάται από την εξέλιξη της αγοράς μέχρι το χρόνο T, το προϊόν αυτό ονομάζεται *άνευ κινδύνου προϊόν*. Τη σημερινή αξία αυτού του προϊόντος (σε ευρώ) την συμβολίζουμε με $B(0,T)$. Θα υποθέσουμε ότι το άνευ κινδύνου προϊόν είναι ένας καταθετικός λογαριασμός ή ένα ομόλογο οπότε θα έχουμε $B(0,T) = e^{-rT}$ σύμφωνα με τα παραπάνω.

1.2 Διωνυμικό Μοντέλο Μιας Περιόδου-Τιμολόγηση Παραγώγων

Στη παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε το πρόβλημα εύρεσης της αξίας C (option price ή option premium) που θα πρέπει να έχει ένα συμβόλαιο προαίρεσης (αγοράς ή πώλησης) Ευρωπαϊκού τύπου επί μιας μετοχής. Το κλειδί εδώ είναι να υποθέσουμε ότι η αγορά βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας και επομένως η τιμή C θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε να μην προσφέρει στρατηγική επιτηδειότητας.

Κάθε ρεαλιστικό μοντέλο θα πρέπει να περιέχει μια τυχαιότητα ως προς την χρονική εξέλιξη της αξίας του πρωτογενούς προϊόντος και να λαμβάνει υπ΄ όψιν την μεταβολή της αξίας του χρήματος με το χρόνο. Το διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου έχει αυτά τα χαρακτηριστικά στην απλούστερη δυνατή μορφή. Προφανώς, δεν έχει σχέση με την πραγματικότητα αλλά θα μας βοηθήσει να κάνουμε ένα πρώτο βήμα και να εικάσουμε τι μπορεί να γίνεται σε πιο σύνθετες περιπτώσεις. Σε αυτό το απλό μοντέλο θα δούμε ότι μπορούμε με σχετικά απλό τρόπο να βρούμε την τιμή C ενός δικαιώματος προαίρεσης, δηλαδή το ποσό που θα πρέπει να καταβάλλει ο αγοραστής (holder) στον πωλητή (writer) του συμβολαίου.

Η αγορά μας θα αποτελείται μόνο από το πρωτογενές προϊόν και ένα ομόλογο. Η τρέχουσα τιμή του προϊόντος θα είναι S_0 και μας ενδιαφέρει μόνο μια μεταγενέστερη χρονική στιγμή T. Η S_T θα είναι μια τυχαία μεταβλητή που μπορεί να λάβει μόνο δύο τιμές : την τιμή S_0u με πιθανότητα p $(0 < p < 1)$ ή την τιμή S_0d με πιθανότητα $1-p$, όπου $0 < d < u$.
Η αρχή της μη επιτηδειότητας επιβάλλει την σχέση

$$0 < d < e^{rT} < u \Leftrightarrow 0 < dS_0 < S_0e^{rT} < uS_0$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι θα πρέπει να ισχύει αυτή η συνθήκη, διότι διαφορετικά αν $d < u < e^{rT}$ τότε η επένδυση σε ομόλογα με επιτόκιο r, θα έχει πάντοτε καλύτερη απόδοση από την επένδυση στη μετοχή και επομένως μπορεί κανείς να έχει σίγουρο κέρδος (επιτηδειότητα) αν πωλήσει μετοχές και επενδύσει σε ομόλογα. Όμοια, υπάρχει επιτηδειότητα και όταν $e^{rT} < d < u$.

Η αρχική αξία του ομολόγου θα είναι e^{-rT} ενώ η αξία του στο χρόνο T θα είναι 1.

Η απόδοση $X = X(S_T)$ ενός ευρωπαϊκού παραγώγου επί αυτού του προϊόντος με χρόνο ωρίμανσης T θα είναι κι αυτή μια τυχαία μεταβλητή που μπορεί να πάρει δύο μόνο τιμές : X_u με πιθανότητα p και X_d με πιθανότητα $1-p$. Για παράδειγμα, ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς με τιμή εξάσκησης $K \in (0,\infty)$ και ημερομηνία εξάσκησης T αναπαριστάται με $X = (S_T - K)^+ \equiv \max\{0, S_T - K\}$. Το νόημα της X σε αυτή την περίπτωση είναι ως εξής: Αν $S_T > K$, ο αγοραστής του Ευρωπαϊκού δικαιώματος θα το εξασκήσει στο χρόνο T και μετά πουλώντας ένα μερίδιο των μετοχών που μόλις αγόρασε στην τιμή K, θα έχει κέρδος $S_T - K$. Έτσι, σε αυτή την περίπτωση, η αξία του δικαιώματος στο χρόνο T είναι $S_T - K$. Από την άλλη, αν $S_T \leq K$, ο αγοραστής του δικαιώματος δεν θα το εξασκήσει και η αξία του θα είναι 0 στο χρόνο T.

Για να τιμολογήσουμε ένα παράγωγο με απόδοση X θα κατασκευάσουμε ένα χαρτοφυλάκιο αποτελούμενο από α μέρη του πρωτογενούς προϊόντος και β ομόλογα έτσι ώστε η αξία του χαρτοφυλακίου στο χρόνο T να ταυτίζεται με την αξία του παραγώγου, ανεξάρτητα με το ποιά θα είναι η τιμή της τυχαίας μεταβλητής S_T. Δηλαδή, $\alpha S_T + \beta = X(S_T)$. Στο διωνυμικό υπόδειγμα που μελετάμε, αυτό ισοδυναμεί με το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{cases} \alpha S_0 u + \beta = X_u \\ \alpha S_0 d + \beta = X_d \end{cases} \tag{1.2.1}$$

Το σύστημα αυτό μπορεί πάντα (για κάθε (X_u, X_d)) να λυθεί και η λύση του δίνεται από τις :

$$\alpha = \frac{X_u - X_d}{(u-d)S_0}, \quad \beta = \frac{uX_d - dX_u}{u-d}$$

Εφόσον το χαρτοφυλάκιο έχει την ίδια αξία με το παράγωγο στο χρόνο T, από την αρχή της μη επιτηδειότητας θα πρέπει να έχουν και την ίδια αρχική αξία. Επομένως, η θεωρητικά δίκαιη τιμή του παραγώγου είναι

$$C = \alpha S_0 + \beta e^{-rT}$$

Αντικαθιστώντας τα α, β που βρήκαμε έχουμε

$$C = e^{-rT}(qX_u + (1-q)X_d) = e^{-rT}E^q[X],$$

όπου $q = \frac{e^{rT}-d}{u-d}$.

Παρατηρούμε ότι λόγω της μη επιτηδειότητας το $q \in (0,1)$ και ακριβώς όπως το p, οι πιθανότητες που ορίζει να συμβεί το uS_0 και το dS_0 είναι $q > 0$ και $1-q > 0$ αντίστοιχα. Είναι σημαντικό επίσης να σημειώσουμε ότι το q δεν εξαρτάται από την πιθανότητα p του μοντέλου. Τέλος, αν το ίδιο το πρωτογενές προϊόν εκληφθεί ως παράγωγο με συνάρτηση απόδοσης $X(S_T) = S_T$, τότε

$$C = S_0 = e^{-rT}E^q[S_T]$$

Δηλαδή, υπό το μέτρο q, η επένδυση στην μετοχή έχει αναμενόμενη απόδοση $E^q[S_T]$ και θα είναι ίση με την απόδοση του ομολόγου $e^{rT}S_0$. Προφανώς, στον πραγματικό κόσμο δεν ισχύει η παραπάνω ισότητα διότι τότε δεν θα υπήρχε κανένα κίνητρο να επενδύσει κανείς σε μετοχές αφού προσφέρουν την ίδια μέση απόδοση με τα ομόλογα τα οποία, αντίθετα από τις μετοχές, δεν έχουν κανένα επενδυτικό κίνδυνο (δηλαδή στην πραγματικότητα θα πρέπει $(E^q[S_T]) > e^{rT}S_0$). Ισότητα θα ίσχυε μόνο αν οι επενδυτές δεν ενδιαφέρονταν για τον κίνδυνο που αναλαμβάνουν, δηλαδή ήταν «ουδέτεροι» απέναντι στον κίνδυνο (δεν καταβάλλουν κάποιο ποσό για να απαλλαγούν από κάποιο κίνδυνο και δεν απαιτούν κάποιο ποσό για να αναλάβουν κίνδυνο). Για αυτό και το μέτρο p αναφέρεται και ως μέτρο πιθανότητας στον «πραγματικό κόσμο» ενώ το q αναφέρεται ως μέτρο πιθανότητας σε ένα «κόσμο ουδέτερου ρίσκου» (risk neutral probability measure). Τα μέτρα που ικανοποιούν αυτή τη σχέση θα ονομάζονται μέτρα *αδιάφορα κινδύνου.*

1.3 Διωνυμικό μοντέλο πολλών περιόδων

1.3.1 Το Διωνυμικό μοντέλο πολλών περιόδων

Θεωρούμε ένα χρονικό ορίζοντα $T < \infty$ και διαμερίζουμε το διάστημα $[0,T]$ σε N μικρότερα διαστήματα $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = T$ ίσου εύρους $h = T/N$, δηλαδή $t_k = kh,\ k = 0,1,\ldots,N$. Σε κάθε τέτοια χρονική στιγμή μπορεί να παρατηρηθεί η αξία δύο προϊόντων. Το ένα από τα οποία είναι χωρίς κίνδυνο π.χ. ένα ομόλογο (bond), ενώ το άλλο είναι με κίνδυνο π.χ. μια μετοχή(stock). Επειδή θα τιμολογήσουμε και αντισταθμίσουμε παράγωγα του προϊόντος με κίνδυνο θα αναφερόμαστε σε αυτό ως "πρωτογενές προϊόν ".

Θα υποθέσουμε ότι η σημερινή αξία του άνευ κινδύνου προϊόντος είναι $B_0 = 1$ ενώ μεταβάλλεται στο χρόνο με ένα σταθερό ρυθμό, δηλαδή $B_{t_{k+1}}/B_{t_k} = e^{rh}$, όπου έχουμε υποθέσει ότι το προϊόν χωρίς κίνδυνο είναι ένας λογαριασμός με σταθερό επιτοκιο r συνεχούς ανατοκισμού. Επομένως, η τιμή του άνευ κινδύνου προϊόντος δίνεται από την σχέση

$$B_{t_{k+1}} = B_{t_k} e^{rh},\ k = 0, 1, \dots, N-1$$

Η σημερινή αξία του πρωτογενούς προϊόντος είναι $S_0 > 0$ ενώ η εξέλιξη της στο χρόνο είναι στοχαστική: Αν τη χρονική στιγμή t_k είναι S_{t_k}, τότε

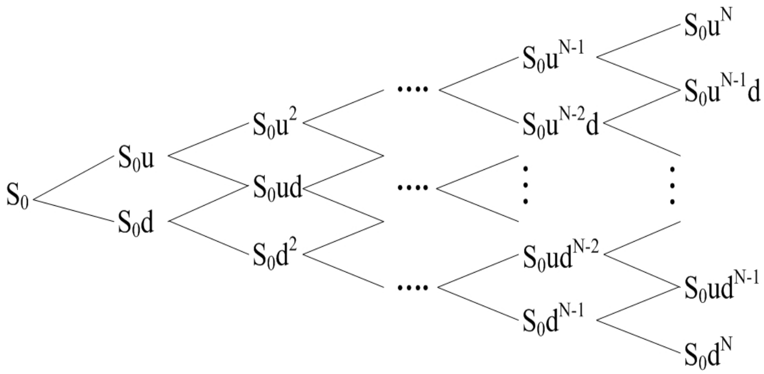
$$S_{t_{k+1}} = S_{t_k} \xi_{k+1}$$

όπου η $\{\xi_k\}_{k=1}^N$ είναι μια ακολουθία από ανεξάρτητες ισόνομες τυχαίες μεταβλητές. Η κατανομή των ξ_k είναι η ακόλουθη:

$$\xi_k = \begin{cases} u, & \text{με πιθανότητα } p, \\ d, & \text{με πιθανότητα } 1-p \end{cases} \tag{1.3.1}$$

Για παράδειγμα αν αυτό το προϊόν είναι μια μετοχή τότε η μοντελοποίηση αυτή αντιστοιχεί στην άνοδο και την πτώση της μετοχής με πιθανότητα p και $1-p$ αντίστοιχα.

Όπως είδαμε και στο μοντέλο μιας περιόδου προκειμένου να μην υπάρχουν ευκαιρίες επιτηδειότητας θα πρέπει τα u, d να ικανοποιούν τον περιορισμό $d < e^{rh} < u$ και επιπλεόν θα απαιτήσουμε $d > 0$ ώστε η τιμή του πρωτογενούς προϊόντος να είναι πάντα αυστηρά θετική. Η δυναμική του πρωτογενούς προϊόντος στο διωνυμικό μοντέλο πολλών περιόδων μπορεί να παρασταθεί διαγραμματικά με το ακόλουθο δέντρο:



Παρατηρούμε ότι

$$S_{t_k} = S_0 \prod_{i=1}^{k} \xi_i, \ k = 0, 1, \ldots, N.$$

(Εδώ υποθέτουμε ότι ένα κενό γινόμενο είναι ορισμένο να παίρνει την τιμή 1).

Υποθέτουμε τώρα ότι ο χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ στον οποίο ορίζονται οι τυχαίες μεταβλητές είναι τέτοιος ώστε το Ω είναι το πεπερασμένο σύνολο των 2^N πιθανών σεναρίων εξέλιξης της αγοράς (ένα μονοπάτι N βημάτων που ξεκινά από την S_0 και καταλήγει σε μια από τις $N+1$ δυνατές τιμές της S_T.), η σ-αλγεβρα $\mathcal{F}$ περιέχει όλα τα δυνατά υποσύνολα του Ω και το P είναι ένα μέτρο πιθανότητας στον $(\Omega, \mathcal{F})$ που σχετίζεται με την πιθανότητα p. Για παράδειγμα, $P((S_0, S_{t_1}, \ldots, S_T) = (S_0, S_0 u, S_0 u^2, \ldots, S_0 u^T)) = p^T$. Κάθε ένα από τα δυνατά αποτελέσματα 2^N έχει αυστηρά θετική πιθανότητα υπό το μέτρο P.

Για να περιγράψουμε την διαθέσιμη πληροφορία που έχει ο επενδυτής στο χρόνο t, εισάγουμε την σ-άλγεβρα που παράγεται από τις τιμές του πρωτογενούς προϊόντος μέχρι και την χρονική στιγμή t, δηλαδή

$$\mathcal{F}_k = \sigma(\{S_0, S_{t_1}, \ldots, S_{t_k}\})$$

Ειδικότερα, με τον συγκεκριμένο χώρο πιθανότητας, $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. Η οικογένεια $\{\mathcal{F}_k, \ k = 0, 1, \ldots, N\}$ καλείται διήθηση ή φιλτράρισμα (filtration). Συχνά θα την γράφουμε $\{\mathcal{F}_k\}$.

Μια επενδυτική στρατηγική (trading strategy) είναι μια συλλογή ζευγών από τυχαίες μεταβλητές

$$\phi = \{(\alpha_k, \beta_k), \ k = 1, \ldots, N\}$$

όπου η τυχαία μεταβλητή α_k αναπαριστά τα μέρη του πρωτογενούς προϊόντος που κατέχονται στο χρονικό διάστημα $(t_{k-1}, t_k]$ και η τυχαία μεταβλητή β_k αναπαριστά τις μονάδες από το άνευ κινδύνου προϊόν που κατέχονται στο χρονικό διάστημα $(t_{k-1}, t_k]$. Για απλότητα επιτρέπουμε τα α_k, β_k να παίρνουν τιμές σε όλο το $\mathbb{R}$. Ειδικότερα, με αυτή την υπόθεση όταν $\alpha_k < 0$ εννοούμε ότι πουλάμε μερίδιο από το πρωτογενές προϊόν ενώ όταν $\beta_k < 0$ εννοούμε ότι δανειζόμαστε. Θεωρούμε ότι οι επενδύσεις πραγματοποιούνται στο χρόνο t_{k-1} και καθορίζουν το χαρτοφυλάκιο (α_k, β_k) μέχρι την επόμενη χρονική στιγμή t_k. Για να αποφύγουμε στρατηγικές που θα στηρίζονται σε μελλοντική πληροφορία, υποθέτουμε ότι α_k, β_k είναι $\mathcal{F}_{t_{k-1}}-$μετρήσιμες για $k = 1, 2, \ldots, N$. Στο διακριτό μοντέλο αυτό σημαίνει ότι η α_k και η β_k μπορούν να εκφραστούν ως πραγματικές συναρτήσεις του $(S_0, S_{t_1}, \ldots, S_{t_{k-1}})$. Έτσι, η σύνθεση των ζευγών για το διάστημα $(t_{k-1}, t_k]$ εξαρτάται μόνο από τις τιμές του πρωτογενούς προϊόντος μέχρι την στιγμή t_{k-1}.

Θα περιοριστούμε τώρα σε αυτοχρηματοδοτούμενες (self-financing) επενδυτικές στρατηγικές δηλαδή επενδυτικές στρατηγικές ϕ τέτοιες ώστε

$$\alpha_k S_{t_k} + \beta_k B_{t_k} = \alpha_{k+1} S_{t_k} + \beta_{k+1} B_{t_k}, \;\; k = 1, 2, \ldots, N-1,$$

και ο αρχικός πλούτος του επενδυτή είναι ίσος με

$$\alpha_1 S_0 + \beta_1 B_0.$$

Θα λέμε ότι μια επενδυτική στρατηγική ϕ αναπαριστά ένα χαρτοφυλάκιο του οποίου η αξία δίνεται από την $V_{t_k}(\phi)$, με

$$V_0(\phi) = \alpha_1 S_0 + \beta_1 B_0, \;\; V_{t_k}(\phi) = \alpha_k S_{t_k} + \beta_k B_{t_k}, \;\; k = 1, 2, \ldots, N.$$

Ορισμός 1 *Μια αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική ϕ ονομάζεται arbitrage (στρατηγική επιτηδειότητας) αν η αξία $V(\phi)$ που αντιστοιχεί σε αυτή ικανοποιεί την συνθήκη $V_0(\phi) = 0, V_T(\phi) \geq 0$ και $E[V_T(\phi)] > 0$. Ή ισοδύναμα αντί για $E[V_T(\phi)] > 0$ μπορούμε να έχουμε $P(V_T(\phi) > 0) > 0$.*

Ο αρχικός πλούτος που χρειάζεται για μια τέτοια στρατηγική είναι μηδέν και η αξία που θα έχει στον τελικό χρόνο είναι θετική, το οποίο ουσιαστικά σημαίνει ότι η στρατηγική αυτή παράγει κέρδος χωρίς κίνδυνο από το τίποτα.

1.3.2 Επενδυτική στρατηγική ίσης τελικής αξίας με Ευρωπαϊκό Παράγωγο

Ένα Ευρωπαϊκό παράγωγο αναπαριστάται από μια $\mathcal{F}_T$- μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή X. Αυτή η τυχαία μεταβλητή αναπαριστά την αξία του παραγώγου στο χρόνο λήξης T. Δηλαδή σε κάθε πιθανό σενάριο της αγοράς $\omega \in \Omega$, η $X(\omega)$ αντιστοιχεί στην απόδοση του παραγώγου σε αυτό το σενάριο.

Για να τιμολογήσουμε το παράγωγο θα δείξουμε πρώτα ότι υπάρχει επενδυτική στρατηγική $\phi = \{(\alpha_k, \beta_k),\ k = 1, \ldots, N\}$ για ένα Ευρωπαϊκό παράγωγο X που έχει ίδια απόδοση στον τελικό χρόνο, δηλαδή $V_T(\phi) \equiv \alpha_T S_T + \beta_T B_T = X$. Αυτή την στρατηγική θα την κατασκευάσουμε εργαζόμενοι προς τα πίσω στο διωνυμικό δέντρο.

Κατασκευή:

Έστω $V_T = X$. Εφόσον η X είναι μια $\mathcal{F}_T$- μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή θα είναι μια συνάρτηση των τιμών που μπορεί να πάρει το $(T+1)$-διαστατο διάνυσμα $(S_0, S_{t_1}, \ldots, S_T)$, άρα

$$V_T = f(S_0, S_{t_1}, \ldots, S_T)$$

για κάποια πραγματική συνάρτηση f με $(T+1)$ μεταβλητές. Αρχικά, υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε τις τιμές των $S_0, S_{t_1}, \ldots, S_{t_{N-1}}$. Τότε το κόστος και η κατασκευή της αντίστοιχης στρατηγικής στο χρονικό διάστημα $(t_{N-1}, T]$ μπορεί να υπολογιστεί με ανάλογο τρόπο όπως αυτόν του απλού διωνυμικού μοντέλου. Δοθέντων των $S_0, S_{t_1}, \ldots, S_{t_{N-1}}$, υπάρχουν δύο δυνατές τιμές για το V_T στο χρόνο T, αναλογα με το αν $S_T = S_{t_{N-1}}u$ ή $S_T = S_{t_{N-1}}d$. Θα συμβολίζουμε αυτές τις δύο τιμές με V_T^u και V_T^d. Στην πραγματικότητα, $V_T^u = f(S_0, S_{t_1}, \ldots, S_{t_{N-1}}u)$ και $V_T^d = f(S_0, S_{t_1}, \ldots, S_{t_{N-1}}d)$ που σημαίνει ότι είναι $\mathcal{F}_{N-1}$- μετρήσιμες τυχαίες μεταβλητές.

Τώρα, για κάθε Ευρωπαϊκό παράγωγο X, με όμοια ανάλυση με αυτή της μιας περιόδου, δεδομένου ότι $V_T(\phi) = X$ έχουμε

$$\alpha_T = \frac{V_T^u - V_T^d}{(u-d)S_{t_{N-1}}}, \quad \beta_T = \frac{uV_T^d - dV_T^u}{B_T(u-d)}$$

και το κεφάλαιο που απαιτείται στο χρόνο t_{N-1} για την χρηματοδότηση της αυτοχρηματοδοτούμενης στρατηγικής είναι $V_{t_{N-1}}$, δηλαδή

$$V_{t_{N-1}} = \alpha_{N-1} S_{t_{N-1}} + \beta_{N-1} B_{t_{N-1}} = \alpha_T S_{t_{N-1}} + \beta_T B_{t_{N-1}} = e^{-rh}(qV_T^u + (1-q)V_T^d),$$

όπου $q = \frac{e^{rh}-d}{u-d}$.

Μπορούμε τώρα να επαναλάβουμε τα παραπάνω βήματα οπισθοδρομώντας μέχρι το χρόνο 0. Συγκεκριμένα, επιλέγουμε $k \in \{1, \ldots, N-1\}$ και υποθέτουμε ότι έχουμε προσδιορίσει τις τιμές των $(\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}), \ldots, (\alpha_T, \beta_T)$ για τις χρονικές περιόδους $(t_k, t_{k+1}], \ldots, (t_{N-1}, T]$ με αξίες $V_{t_k}, \ldots, V_{t_{N-1}}$, για τους χρόνους $t_k, t_{k+1}, \ldots, t_{N-1}$, και για τον χρόνο T η αξία του (α_T, β_T) είναι $V_T = X$. Δοθέντων των $S_0, S_{t_1}, \ldots, S_{t_{k-1}}$ τα α_k και β_k για το διάστημα $(t_{k-1}, t_k]$ επιλέγονται έτσι ώστε να μας δίνουν τις τιμές της τυχαίας μεταβλητής V_{t_k} δηλαδή

$$\begin{cases} \alpha_k S_{t_{k-1}} u + \beta_k B_{t_k} = V_{t_k}^u \\ \alpha_k S_{t_{k-1}} d + \beta_k B_{t_k} = V_{t_k}^d \end{cases} \tag{1.3.2}$$

Το σύστημα αυτό μπορεί πάντα (για κάθε $(V_{t_k}^u, V_{t_k}^d)$) να λυθεί και η λύση του δίνεται από τις :

$$\alpha_k = \frac{V_{t_k}^u - V_{t_k}^d}{(u-d)S_{t_{k-1}}}, \quad \beta_k = \frac{uV_{t_k}^d - dV_{t_k}^u}{B_{t_k}(u-d)}$$

και το κεφάλαιο που απαιτείται στο χρόνο t_{k-1} για την χρηματοδότηση της αυτοχρηματοδοτούμενης στρατηγικής είναι $V_{t_{k-1}}$, δηλαδή

$$V_{t_{k-1}} = \alpha_{k-1} S_{t_{k-1}} + \beta_{k-1} B_{t_{N-1}} = \alpha_k S_{t_{k-1}} + \beta_k B_{t_{k-1}} = e^{-rh}(qV_{t_k}^u + (1-q)V_{t_k}^d), \tag{1.3.3}$$

όπου $q = \frac{e^{rh}-d}{u-d}$. Αυτό ολοκληρώνει την επαγωγή. Άρα έχουμε κατασκευάσει μια επενδυτική στρατηγική που στο τέλος του χρονικού ορίζοντα έχει την ίδια απόδοση με το Ευρωπαϊκό παράγωγο. Η αρχή της μη επιτηδειότητας επιβάλλει σε αυτή την περίπτωση την αρχική αξία του παραγώγου να είναι ίση με την αξία της στρατηγικής που κατασκευάσαμε, δηλαδή $V_0 = \alpha_1 S_0 + \beta_1 B_0 = \alpha_1 S_0 + \beta_1$.

Κεφάλαιο 2

Τιμολόγηση Ευρωπαϊκών Παραγώγων

2.1 Martingales

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ένας χώρος πιθανότητας. Μια ακολουθία σ-αλγεβρών $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$ με την ιδιότητα $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots \subset \mathcal{F}$ καλείται μελλοντική ιστορία ή φιλτράρισμα (filtration). Μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \dots$ θα λέγεται προσαρμοσμένη σε ένα φιλτράρισμα $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$ με την ιδιότητα $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots \subset \mathcal{F}$ αν X_i είναι $\mathcal{F}_i-$μετρήσιμη, δηλαδή $\sigma(X_i) \subset \mathcal{F}_i$.
Συνήθως, η $\mathcal{F}_i$ θεωρείται ότι εκφράζει την πληροφορία που θα έχουμε σε κάποιο χρόνο t_i στο μέλλον με $t_1 < t_2 < \dots$ και επομένως $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots \subset \mathcal{F}$, διότι αν κάποιο ενδεχόμενο ανήκει στην $\mathcal{F}_{i-1}$ θα ανήκει και στην $\mathcal{F}_i$ (Αν γνωρίζουμε ότι ένα A έχει πραγματοποιηθεί ή όχι στο χρόνο $i-1$ θα γνωρίζουμε και στο χρόνο i). Διαισθητικά, η X_i είναι $\mathcal{F}_i-$μετρήσιμη αν η τιμή της X_i είναι γνωστή δεδομένης της πληροφορίας $\mathcal{F}_i$, δηλαδή αν η τιμή της είναι γνωστή στο χρόνο t_i. Αυτό συμβαίνει διότι η πληροφορία $\mathcal{F}_i$ που έχουμε είναι ποιά από τα ενδεχόμενα της $\mathcal{F}_i$ πραγματοποιήθηκαν και ποιά όχι. Επειδή τα ενδεχόμενα $X_i^{-1}(B),\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ανήκουν στην $\mathcal{F}_i$, εφόσον $\sigma(X_i) \subset \mathcal{F}_i$, επομένως θα γνωρίζουμε ποιά από αυτά πραγματοποιήθηκαν, δηλαδή θα γνωρίζουμε επακριβώς την τιμή της X_i.

Παράδειγμα 3 *Έστω $X_0, X_1, X_2, \dots$ η τιμή ενός αγαθού στους χρόνους $0, 1, 2, \dots$ και Ω*

είναι ο χώρος των δυνατών καταστάσεων που μπορεί να βρεθεί η αγορά από σήμερα μέχρι ένα χρονικό σημείο στο μέλλον. Κάθε $\omega \in \Omega$ μπορεί να καθορίζει διαφορετική ιστορία από σήμερα και μετά. Συμβολίζουμε με $\mathcal{F}$ όλα τα δυνατά ενδεχόμενα του Ω. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι στο χρόνο n θα είναι γνωστό για κάποια ενδεχόμενα του $\mathcal{F}$ αν έχουν συμβεί ή όχι, και έστω $\mathcal{F}_n$ η σ-άλγεβρα αυτών των ενδεχομένων. Η $\mathcal{F}_n$ μπορεί να θεωρηθεί ότι εκφράζει όλη την πληροφορία σχετικά με την κατάσταση που επικρατεί στην αγορά μέχρι και το χρόνο n. Είναι προφανές ότι $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}$. Η τιμή του αγαθού X_n προφανώς είναι $\mathcal{F}_n-$μετρήσιμη διότι στο χρόνο n θα είναι γνωστή η τιμή X_n. Επομένως, η ακολουθία των τιμών $X_1, X_2, \ldots$ είναι προσαρμοσμένη στο φιλτράρισμα $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \ldots$

Η αναμενόμενη τιμή του αγαθού στο χρόνο $n+1$ όταν θα βρισκόμαστε στο χρόνο n, είναι ίση με $E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]$. Σε πολλές περιπτώσεις, αυτή η αναμενόμενη τιμή είναι ίση με την τιμή X_n του αγαθού στον χρόνο n (η X_n θα είναι γνωστή στο χρόνο n). Αν π.χ. η ακολουθία $X_1, X_2, \ldots$ γενικότερα εκφράζει το κέρδος από την συμμετοχή μας σε ένα τυχερό παιχνίδι, τότε η $E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]$ είναι το αναμενόμενο κέρδος που θα έχουμε στο χρόνο $n+1$ όταν θα βρισκόμαστε στο χρόνο n. Αν το $E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]$ είναι ίσο με X_n τότε λέγεται ότι συμμετέχουμε σε ένα "δίκαιο" τυχερό παιχνίδι, με την έννοια ότι το αναμενόμενο κέρδος που θα έχουμε από τον χρόνο n στο χρόνο $n+1$ θα είναι

$$E[X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n] = E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] - E[X_n|\mathcal{F}_n] = E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] - X_n = 0.$$

Η ιδιότητα αυτή είναι πολύ σημαντική και για αυτό θα δώσουμε τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 2 *Μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \ldots$ από τον $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ η οποία είναι προσαρμοσμένη στο φιλτράρισμα $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots,$ με $E[|X_i|] < \infty,\ i = 1, 2, \ldots$ θα καλείται*

(α΄) martingale ως προς το φιλτράρισμα $\{\mathcal{F}_t\}$ αν

$$E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n,\ n = 1, 2, \ldots$$

σ.β στο Ω.

(β′) *supermartingale ως προς το φιλτράρισμα* $\{\mathcal{F}_t\}$ *αν*

$$E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leq X_n,\ n = 1, 2, \dots$$

σ.β στο Ω.

(γ′) *submartingale ως προς το φιλτράρισμα* $\{\mathcal{F}_t\}$ *αν*

$$E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geq X_n,\ n = 1, 2, \dots$$

σ.β στο Ω.

Παρατήρηση 1 *Παατηρούμε ότι στον παραπάνω ορισμό θα μπορούσαμε να γράψουμε ισοδύναμα για το* (a): $E[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s,\ s \leq t$ *(ανάλογα για τα* $(b), (c)$*).*

Με απλά λόγια οι παραπάνω ορισμοί μας λένε ότι για ένα martingale έχοντας υπόψην μας την πληροφορία που περιέχεται στην $\mathcal{F}_s$ η καλύτερη πρόβλεψη που μπορούμε να κάνουμε είναι για την τιμή της X_t είναι η τιμή X_s. Αν η X_t είναι supermartingale η καλύτερη πρόβληψη που μπορούμε να κάνουμε για την τιμή της X_t έχοντας υπόψη την πληροφορία που περιέχεται στην $\mathcal{F}_s$ θα είναι μικρότερη από την τιμή X_t. Τέλος, αν η X_t είναι submartingale η καλύτερη πρόβλεψη που μπορούμε να κάνουμε για την τιμή της X_t έχοντας υπόψη την πληροφορία που περιέχεται στην $\mathcal{F}_s$ θα είναι μεγαλύτερη από την τιμή X_s.

Παρατήρηση 2 *Αν* $X_1, X_2, \dots$ *είναι martingale ως προς κάποιο φιλτράρισμα* $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$ *τότε είναι και martingale ως προς το φιλτράρισμα*

$$\mathcal{D}_1 = \sigma(X_1), \mathcal{D}_2 = \sigma(X_1, X_2), \mathcal{D}_3 = \sigma(X_1, X_2, X_3), \dots.$$

Πράγματι, η παραπάνω ακολουθία σ-αλγεβρών είναι φιλτράρισμα καθώς $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{F}$, *η ακολουθία* $X_1, X_2, \dots$ *είναι προσαρμοσμένη σε αυτή εφόσον* X_i *είναι προφανώς* $\mathcal{D}_i = \sigma(X_1, \dots, X_i)-$*μετρήσιμη και*

$$E[X_{n+1}|\mathcal{D}_n] = E[E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]|\mathcal{D}_n] = E[X_n|\mathcal{D}_n] = X_n$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την tower property καθώς $\mathcal{D}_n \subset \mathcal{F}_n$.
Το συγκεκριμένο φιλτράρισμα είναι το μικρότερο ως προς το οποίο η $X_1, X_2, \dots$ *είναι martingale.*

Παρατήρηση 3 *Από την σχέση* $E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n$ *συνεπάγεται ότι για μια martingale ακολουθία* $X_1, X_2, \dots$ *ισχύει* $E[E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]] = E[X_n]$ *άρα*

$$E[X_0] = E[E[X_1|\mathcal{F}_0]] = E[X_1] \textit{ και } E[E[X_2|\mathcal{F}_1]] = E[X_1] = E[X_0]$$

Επομένως, επαγωγικά

$$E[X_{n+1}] = E[X_n] = \cdots = E[X_0]$$

Δηλαδή όλες οι τ.μ. $X_1, X_2, \dots$ *μιας ακολουθίας martingale έχουνε την ίδια μέση τιμή. Επίσης,* $E[X_{n+2}|\mathcal{F}_n] = E[E[X_{n+2}|\mathcal{F}_{n+1}]|\mathcal{F}_n] = E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n$ *και άρα* $E[X_{n+k}|\mathcal{F}_n] = X_n, \; k = 1, 2, \dots$

Έστω τώρα ότι δύο στοχαστικές ανελίξεις $\{X_{t_k}\}_{k=0}^{N}$ και $\{Y_{t_k}\}_{k=0}^{N-1}$ τέτοιες ώστε οι X_{t_k}, Y_{t_k} να είναι $\mathcal{F}_k-$μετρήσιμες για κάθε $k = 0, 1, \dots, N-1$, και σχηματίζουμε μια καινούργια στοχαστική ανέλιξη, $\{(Y \cdot X)_{t_k}\}_{k=0}^{N}$ που ορίζεται ως εξής:

$$(Y \cdot X)_0 = 0 \text{ και } (Y \cdot X)_{t_k} := \sum_{j=0}^{k-1} Y_{t_j}(X_{t_{j+1}} - X_{t_j}), k = 1, 2, \dots, N.$$

Η ανέλιξη $(Y \cdot X)$ ονομάζεται μετασχηματισμός martingale της Y ως προς X. Εύκολα βλέπει κανείς ότι η $(Y \cdot X)$ είναι επίσης $\mathcal{F}_k-$μετρήσιμη.

Θεώρημα 1 *Αν η ανέλιξη* X *είναι martingale και οι* $\{Y_{t_k}\}_{k=0}^{N-1}$ *είναι* $\mathcal{F}_k-$*μετρήσιμες, τότε η* $(Y \cdot X)$ *είναι martingale.*

Απόδειξη. Έχουμε

$$(Y \cdot X)_{t_{k+1}} - (Y \cdot X)_{t_k} = Y_{t_k}(X_{t_{k+1}} - X_{t_k}).$$

Επομένως, από ιδιότητα των δεσμευμένων αναμενόμενων τιμών

$$\begin{aligned} E[(Y \cdot X)_{t_{k+1}} - (Y \cdot X)_{t_k}|\mathcal{F}_k] &= E[Y_{t_k}(X_{t_{k+1}} - X_{t_k})|\mathcal{F}_k] = Y_{t_k}(E[X_{t_{k+1}}|\mathcal{F}_k] - E[X_{t_k}|\mathcal{F}_k]) \\ &= Y_{t_k}(E[X_{t_{k+1}}|\mathcal{F}_k] - X_{t_k}) = 0, \end{aligned}$$

και άρα η $(Y \cdot X)$ είναι martingale. ■

2.2 Τιμολόγηση Ευρωπαϊκών Παραγώγων

Έστω ένα Ευρωπαϊκό παράγωγο που αναπαριστάται από μια $\mathcal{F}_T$- μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή X. Αυτή η τυχαία μεταβλητή αναπαριστά την αξία του δικαιώματος στο χρόνο λήξης T. Δηλαδή σε κάθε πιθανό σενάριο της αγοράς $\omega \in \Omega$, η $X(\omega)$ αντιστοιχεί στην απόδοση του παραγώγου σε αυτό το σενάριο.

Θα τιμολογήσουμε το παράγωγο με την χρήση Martingale. Όπως δείξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο για κάθε Ευρωπαϊκό παράγωγο X υπάρχει επενδυτική στρατηγική $\phi = \{(\alpha_k, \beta_k),\ k = 1, \ldots, N\}$ που έχει ίδια απόδοση στον τελικό χρόνο, δηλαδή $V_T(\phi) \equiv \alpha_T S_T + \beta_T B_T = X$. Όπου σύμφωνα με την σχέση (1.3.3) και αυτά που αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, στο χρόνο $t_k \in \{t_1, t_2, \ldots t_{N-1}\}$ θα έχουμε

$$V_{t_{k-1}} = \alpha_{k-1} S_{t_{k-1}} + \beta_{k-1} B_{t_{k-1}} = \alpha_k S_{t_{k-1}} + \beta_k B_{t_{k-1}} = e^{-rh}(q V^u_{t_k} + (1-q) V^d_{t_k}),$$

όπου $q = \frac{e^{rh}-d}{u-d}$. Αυτή την σχέση μπορούμε να την γράψουμε υπό την μορφή δεσμευμένων μέσων τιμών. Πράγματι, παρατηρούμε ότι

$$V_{t_{N-1}} = e^{-rh}(q V^u_T + (1-q) V^d_T) = e^{-rh} E^q[V_T | \mathcal{F}_{N-1}] = e^{-rh} E^q[X | \mathcal{F}_{N-1}],$$

όπου $E^q[\cdot | \mathcal{F}_{N-1}]$ συμβολίζει την δεσμευμένη μέση τιμή, δοθείσης της σ-άλγεβρας $\mathcal{F}_{N-1}$ υπό το μέτρο q. Με ανάλογη λογική έχουμε για οποιοδήποτε χρόνο $t_k \in \{0, t_1, t_2, \ldots t_{N-1}, T\}$,

$$\begin{aligned} V_{t_k} &= e^{-rh}(q V^u_{t_k} + (1-q) V^d_{t_k}) = e^{-rh} E^q[V_{t_{k+1}} | \mathcal{F}_k] \\ &= (e^{-rh})^{N-k} E^q[E^q[X | \mathcal{F}_{k+1}] | \mathcal{F}_k] = (e^{-r})^{T-t_k} E^q[X | \mathcal{F}_k], \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Συγκεκριμένα, $V_T = X$ και

$$V_0 = e^{-rT} E^q[X | \mathcal{F}_0] = e^{-rT} E^q[X]. \tag{2.2.2}$$

Για να αποδείξουμε ότι υπάρχει μια τιμή μη κερδοσκοπίας για το παραγώγου, θα χρειαστούμε τα παρακάτω λήμματα. Για το σκοπό αυτό θα θέσουμε $S^*_{t_k} = S_{t_k}/B_{t_k} = e^{-rt_k} S_{t_k},\ k = 0, 1, \ldots, N$. Η διαδικασία $S^* = \{S^*_{t_k},\ k = 0, 1, \ldots, N\}$ καλείται προεξοφλημένη αξία του πρωτογενούς προϊόντος.

Λήμμα 1 *Η διαδικασία $\{(S^*_{t_k}, \mathcal{F}_k), k = 0, 1, \ldots, N\}$ είναι martingale υπό το μετρο q.*

Απόδειξη. Προφανώς το $S^*_{t_k}$ είναι $\mathcal{F}_k-$μετρήσιμο, καθώς το $S^*_{t_k}$ εξαρτάται από την $\mathcal{F}_k-$μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή S_{t_k}. Επίσης, το $S^*_{t_k}$ έχει πεπερασμένη μέση τιμή για κάθε k, εφόσον λαμβάνει πεπερασμένο πλήθος τιμών. Θα επιβεβαιώσουμε τώρα την συνθήκη για την δεσμευμένη τιμή. Έστω, $k = 1, \ldots, N$, τότε χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $\mathcal{F}_{k-1}$ παράγεται από τα $S_0, S_{t_1}, \ldots, S_{t_{k-1}}$ και ότι η ξ_k είναι ανεξάρτητη από αυτή την σ-άλγεβρα, έχουμε

$$
\begin{aligned}
E^q[S^*_{t_k}|\mathcal{F}_{k-1}] &= e^{-rt_k} E^q[S_{t_{k-1}}\xi_k|\mathcal{F}_{k-1}] \;\; (\text{η } S_{t_{k-1}} \text{ είναι } \mathcal{F}_{k-1}- \text{ μετρήσιμη}) \\
&= e^{-rt_k} S_{t_{k-1}} E^q[\xi_k|\mathcal{F}_{k-1}] = e^{-rt_k} S_{t_{k-1}} E^q[\xi_k] \;\; (\text{η } \xi_k \text{ είναι ανεξάρτητη από την } \mathcal{F}_{k-1}) \\
&= e^{-rh} S^*_{t_{k-1}} (qu + (1-q)d) = S^*_{t_{k-1}} \;\; (\text{χρησιμοποιώντας τον ορισμό του } q).
\end{aligned}
\tag{2.2.3}
$$

■

Παρατήρηση 4 *Ένα μέτρο πιθανότητας στο χώρο των τροχιών του πρωτογενούς προϊόντος ως προς το οποίο η προεξοφλημένη αξία του πρωτογενούς προϊόντος $\{(S^*_{t_k}, \mathcal{F}_k), k = 0, 1, \ldots, N\}$ είναι martingale ονομάζεται μέτρο πιθανότητας αδιάφορο κινδύνου (όπως εξηγήσαμε στην παράγραφο (1.2)) ή αλλιώς μέτρο martingale (martingale measure).*

Λήμμα 2 *Έστω ϕ μια επενδυτική στρατηγική με ανέλιξη τιμών $\{V_{t_k}(\phi) : k = 0, 1, \ldots, N\}$. Αν $\{V^*_{t_k}(\phi) = e^{-rt_k} V_{t_k}(\phi) : k = 0, 1, \ldots, N\}$ η ανέλιξη των προεξοφλημένων αξίων του χαρτοφυλακίου, τότε η $\{(V^*_{t_k}(\phi), \mathcal{F}_k : k = 0, 1, \ldots, N\}$ είναι martingale υπό το μέτρο q.*

Απόδειξη. Έστω $\phi = \{(\alpha_k, \beta_k) : k = 1, \ldots, N\}$. Υπενθυμίζουμε εδώ ότι $V^*_{t_k} = \alpha_k S^*_{t_k} + \beta_k$, $\alpha_k, \beta_k \in \mathcal{F}_{k-1}$ για $k = 1, \ldots, N$ και $V^*_0 = \alpha_1 S^*_0 + \beta_1$. Η $V^*_{t_k}$ είναι $\mathcal{F}_k$-μετρήσιμη εφόσον α_k, β_k και $S^*_{t_k}$ είναι $\mathcal{F}_k$-μετρήσιμα. Από το προηγούμενο Λήμμα έχουμε ότι η $\{(S^*_{t_k}, \mathcal{F}_k), k = 0, 1, \ldots, N\}$ είναι martingale υπό το μετρο q. Επομένως, για $k = 1, \ldots, N$

$$
\begin{aligned}
E^q[V^*_{t_k}|\mathcal{F}_{k-1}] &= \alpha_k E^q[S^*_{t_k}|\mathcal{F}_{k-1}] + \beta_k \\
&= \alpha_k S^*_{t_{k-1}} + \beta_k
\end{aligned}
\tag{2.2.4}
$$

Γράφοντας τώρα αναλυτικά την δεσμευμένη μέση τιμή και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της αυτοχρηματοδοτούμενης στρατηγικής ϕ, για $k = 2, \ldots, N$ έπεται ότι

$$\begin{aligned} E^q[V^*_{t_k}|\mathcal{F}_{k-1}] &= e^{-rt_{k-1}}\left(\alpha_k S_{t_{k-1}} + \beta_k B_{t_{k-1}}\right) \\ &= e^{-rt_{k-1}}\left(\alpha_{k-1} S_{t_{k-1}} + \beta_{k-1} B_{t_{k-1}}\right) \\ &= V^*_{t_{k-1}} \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Για $k = 1$,

$$\begin{aligned} E^q[V^*_{t_1}|\mathcal{F}_0] &= \alpha_1 S_0 + \beta_1 B_0 \\ &= V_0 = V^*_0 \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

εξ' ορισμού. Επομένως αποδείξαμε ότι ισχύει η ιδιότητα martingale. ■

Θα συμβολίσουμε με C_0 την τιμή για την απόκτηση ενός δικαιώματος προαίρεσης τη χρονική στιγμή μηδέν. Εφόσον θα προσδιορίσουμε τιμή για το παράγωγο μόνο τη χρονική στιγμή μηδέν, εμπορικές συναλλαγές ως προς το παράγωγο θα επιτρέπονται μόνο αρχικά, ενώ αλλαγές στις μονάδες του πρωτογενούς προϊόντος και του άνευ κινδύνου θα μπορούν να συμβούν σε κάθε χρονική στιγμή $0, t_1, \ldots, t_{N-1}$. Μια επενδυτική στρατηγική ως προς το πρωτογενές, το άνευ κινδύνου προϊόν και το παράγωγο είναι μια συλλογή $\psi = \{(\alpha_k, \beta_k) : k = 1, \ldots, N; \gamma_1\}$ όπου για $k = 1, 2, \ldots, N$, α_k, β_k είναι $\mathcal{F}_{t_{k-1}}-$μετρήσιμες τυχαίες μεταβλητές που αναπαριστούν,αντίστοιχα, τα μέρη του πρωτογενούς και του άνευ κινδύνου προϊόντος που κατέχονται το χρονικό διάστημα $(t_{k-1}, t_k]$ και η γ_1 είναι μια $\mathcal{F}_0-$μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή(στην πραγματικότητα είναι σταθερή) που αναπαριστά τις μονάδες από το παράγωγο οι οποίες κατέχονται στο διάστημα $(0, T]$. Η επενδυτική στρατηγική θα είναι αυτοχρηματοδοτούμενη, δηλαδή για τον αρχικό χρόνο έχουμε

$$V_0(\psi) = \alpha_1 S_0 + \beta_1 B_0 + \gamma_1 C_0,$$

και σε κάθε χρόνική στιγμή $t_1, \ldots, t_{N-1}$,

$$\alpha_k St_k + \beta_k Bt_k = \alpha_{k+1} St_k + \beta_{k+1} B_{t_k}$$

Η τελευταία εξίσωση δεν συμπεριλαμβάνει όρο για το παράγωγο διότι δεν μεταβάλλουμε τις μονάδες του μετά την χρονική στιγμή μηδέν.

Μια στρατηγική επιτηδειότητας (arbitrage opportunity) σε μια αγορά με ένα πρωτογενές προϊόν, ένα άνευ κινδύνου και ένα παράγωγο είναι μια επενδυτική στρατηγική ψ τέτοια ώστε $V_0(\psi) = 0,\ V_T(\psi) \geq 0$ και $E[V_T(\psi)] > 0$.

Θεώρημα 2 *Έστω $X^* = e^{-rT}X$. Τότε $V_0 = E^q[X^*]$ είναι η μοναδική τιμή μη επιτηδειότητας για το Ευρωπαϊκό παράγωγο X.*

Απόδειξη. Έστω $\phi^* = \{(\alpha_k^*, \beta_k^*), k = 1, \ldots, N\}$ η στρατηγική αντιστάθμισης του δικαιώματος προαίρεσης X που αποδείξαμε ότι υπάρχει στο προηγούμενο κεφάλαιο. Τότε η ανέλιξη αξιών $V = \{V_k(\phi^*), k = 0, 1, \ldots, N\}$ ως προς ϕ^* ικανοποιεί την (2.2.1) για $k = 0, 1, \ldots, N$. Σημειώνουμε ότι από την (2.2.2), V_0 είναι η αρχική τιμή αυτή της αντισταθμιστικής στρατηγικής. Θα χρησιμοποιήσουμε την ύπαρξη της αντισταθμιστικής στρατηγικής να δείξουμε ότι αν η αρχική τιμή του δικαιώματος προαίρεσης δεν είναι V_0, τότε υπάρχει στρατηγική επιτηδειότητας στην αγορά. Έστω $C_0 > V_0$. Τότε ένας επενδυτής μπορεί να πουλήσει ένα δικαίωμα αγοράς αρχικά, να χρησιμοποιήσει V_0 στην στρατηγική αντιστάθμισης ϕ^* του πρωτογενούς -άνευ κινδύνου προϊόντος και να αγοράσει $C_0 - V_0$ επιπλέον μονάδες από το άνευ κινδύνου προϊόν στο χρόνο μηδέν και να τα διατηρήσει αυτά ολόκληρη την περίοδο $(0, T]$. Έτσι, η επενδυτική στρατηγική είναι η $\psi = \{(\alpha_k^*, \beta_k^* + C_0 - V_0), k = 1, 2, \ldots, N; \gamma_1 = -1\}$. Αυτή έχει αρχική αξία $V_0(\psi) = \alpha_1^* S_0 + \beta_1^* + C_0 - V_0 - C_0 = 0$, εφόσον $B_0 = 1$ και $V_0 = V_0(\phi^*) = \alpha_1^* S_0 + \beta_1^*$ και η αξία του χαρτοφυλακίου στο χρόνο T είναι

$$\begin{aligned} V_T(\psi) &= \alpha_N^* S_T + \beta_N^* B_T + (C_0 - V_0) B_T - X \\ &= X + (C_0 - V_0) B_T - X = (C_0 - V_0) B_T > 0, \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\{(\alpha_k^*, \beta_k^*), k = 1, 2, \ldots, N\}$ είναι μια αντισταθμιστική στρατηγική για το παράγωγο X και επομένως έχει τιμή X στο χρόνο T. Έτσι η ψ είναι μια στρατηγική επιτηδειότητας. Ομοίως, αν $C_0 < V_0$, η στρατηγική $-\psi$ είναι μια στρατηγική επιτηδειότητας.

Υποθέτουμε τώρα $C_0 = V_0$. Θα δείξουμε τώρα ότι δεν υπάρχει στρατηγική επιτηδειότητας. Έστω $\psi = \{(\alpha_k, \beta_k),\ k = 1, 2, \ldots, N; \gamma_1\}$ μια στρατηγική για το πρωτογενές προϊόν, το άνευ κινδύνου και το παράγωγο με αρχική αξία μηδέν και τελική αξία $V_T(\psi)$ δηλαδή μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή. Τότε

$$0 = V_0(\psi) = \alpha_1 S_0 + \beta_1 B_0 + \gamma_1 C_0 \tag{2.2.8}$$

$$0 \leq V_T(\psi) = \alpha_N S_T + \beta_N B_T + \gamma_1 X \tag{2.2.9}$$

Παρατηρούμε ότι $\phi = \{(\alpha_k, \beta_k), k = 1, 2, \ldots, N\}$ είναι μια επενδυτική στρατηγική για το πρωτογενές προϊόν και το άνευ κινδύνου. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα martingale για το $\{(V^*_{t_k}(\phi), \mathcal{F}_k) : k = 0, 1, \ldots, N\}$ υπό το μέτρο q, θέτοντας $V^*_{t_k}(\psi) = V_{t_k}(\psi)e^{-rt_k}$, $k = 0, 1, \ldots, N$ έχουμε

$$\begin{aligned} e^{-rT}E^q[V_T(\psi)] &= E^q[V^*_T(\psi)] \\ &= E^q[V^*_T(\phi)] + E^q[\gamma_1 X^*] \\ &= E^q[V^*_0(\phi)] + \gamma_1 E^q[X^*] \\ &= \alpha_1 S^*_0 + \beta_1 B^*_0 + \gamma_1 C_0 \\ &= V_0(\psi) = 0 \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι γ_1 είναι $\mathcal{F}_0-$μετρήσιμη, $C_0 = E^q[X^*], S^*_0 = S_0, B^*_0 = B_0$, και $V_0(\psi) = 0$. Εφόσον έχουμε υποθέσει ότι $V_T(\psi) \geq 0$ και η πιθανότητα που σχετίζεται με το q δίνει θετική πιθανότητα σε όλες τις πιθανές τιμές της $V_T(\psi)$, έπεται ότι $V_T(\psi) = 0$ και έτσι $E[V_T(\psi)] = 0$. Επομένως, δεν μπορεί να υπάρξει στρατηγική επιτηδειότητας όταν $C_0 = V_0$. ■

Η χρησιμότητα αυτού του θεωρήματος είναι ότι εφόσον γνωρίζουμε το μέτρο martingale δεν είναι απαραίτητο να τρέξουμε τον αναδρομικό αλγόριθμο για να τιμολογήσουμε ένα παράγωγο. Η σημερινή αξία κάθε παραγώγου είναι η προεξοφλημένη αναμενόμενη ως προς το μέτρο q απόδοσή του στην ωρίμανση.

Σε αυτό το σημείο θα παρουσιάσουμε ένα άλλο τρόπο απόδειξης των παραπάνω αποτελεσμάτων.

Ας θεωρήσουμε τώρα μια αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική $\phi = \{(\alpha_k, \beta_k), k = 1, \ldots, N\}$

όπου αναπαριστά ένα χαρτοφυλάκιο του οποίου η αξία δίνεται στους χρόνους t_k,

$$\begin{aligned} V_0 &= \alpha_1 S_0 + \beta_1 B_0 \\ V_{t_k} &= \alpha_k S_{t_k} + \beta_k B_{t_k} \quad k = 1, 2, \ldots, N \end{aligned}$$

ή εναλλακτικά η προεξοφλημένη αξία του χαρτοφυλακίου είναι

$$\begin{aligned} V_0^* &= \alpha_1 S_0^* + \beta_1 \\ V_{t_k}^* &= \alpha_k S_{t_k}^* + \beta_k \quad k = 1, 2, \ldots, N \end{aligned}$$

όπου $S_{t_k}^* = B_{t_k} e^{-rt_k}$ Έχουμε λοιπόν για $k \leq N-1$

$$\frac{V_{t_{k+1}}}{B_{t_{k+1}}} - \frac{V_{t_k}}{B_{t_k}} = \alpha_{k+1} \frac{S_{t_{k+1}}}{B_{t_{k+1}}} - \alpha_k \frac{S_{t_k}}{B_{t_k}} + \beta_{k+1} - \beta_k \tag{2.2.10}$$

Από την συνθήκη αυτοχρηματοδότησης έχουμε ότι

$$\alpha_k S_{t_k} + \beta_k B_{t_k} = \alpha_{t_{k+1}} S_{t_k} + \beta_{t_{k+1}} B_{t_k}$$

και άρα

$$\alpha_k \frac{S_{t_k}}{B_{t_k}} - \alpha_{k+1} \frac{S_{t_k}}{B_{t_k}} = \beta_{k+1} - \beta_k.$$

Μπορούμε λοιπόν να ξαναγράψουμε την σχέση (2.2.10) ως εξής:

$$\frac{V_{t_{k+1}}}{B_{t_{k+1}}} - \frac{V_{t_k}}{B_{t_k}} = \alpha_{k+1} \left(\frac{S_{t_{k+1}}}{B_{t_{k+1}}} - \frac{S_{t_k}}{B_{t_k}} \right).$$

Αν τώρα $n \in \{1, 2, \ldots, N\}$, αθροίζοντας τις παραπάνω σχέσεις για $k = 0, 1, \ldots, n-1$ προκύπτει ότι

$$\frac{V_{t_n}}{B_{t_n}} = V_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{k+1} \left(\frac{S_{t_{k+1}}}{B_{t_{k+1}}} - \frac{S_{t_k}}{B_{t_k}} \right) \tag{2.2.11}$$

Άρα η $e^{-rt_k} V_{t_k} - V_0$ είναι ένας μετασχηματισμός martingale.

Όπως έχουμε αναφέρει ένα μέτρο πιθανότητας στο χώρο των τροχιών του πρωτογενούς προϊόντος ως προς το οποίο η προεξοφλημένη αξία του πρωτογενούς προϊόντος $e^{rt} S_t$ είναι martingale ονομάζεται αδιάφορο κινδύνου μέτρο πιθανότητας ή μέτρο martingale.

Θεώρημα 3 *Έστω Q ένα μέτρο martingale στον Ω, τότε η προεξοφλημένη αξία κάθε αυτο-χρηματοδοτούμενου χαρτοφυλακίου $e^{-rt_k}V_{t_k}$ είναι ένα $(Q,\mathcal{F}_k)-$martingale.*

Απόδειξη. Από το θεώρημα 1 και την σχέση (2.2.11) προκύπτει άμεσα το συμπέρασμα. ■

Θεώρημα 4 *Έστω Q ένα μέτρο martingale στον Ω, τότε η σημερινή αξία ενός παραγώγου με απόδοση στην ορίμανση X δίνεται από την σχέση*

$$V_0 = E^Q[X^*]$$

Απόδειξη. Από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι η $e^{-rt_k}V_{t_k}$ είναι $(Q,\mathcal{F}_k)-$martingale και άρα έχουμε

$$V_0 = e^{-rt_0}V_0 = E^Q[e^{-rt_0}V_{t_0}] = E^Q[e^{-rt_N}V_{t_N}] = e^{-rT}E^Q[X] = E^Q[X^*]$$

■

Παρατηρούμε ότι με αυτό τον τρόπο απόδειξης έγινε ελάχιστη χρήση των ειδικών χαρακτηριστικών του μοντέλου μας. Για το θεώρημα 3 το μόνο που χρησιμοποιήσαμε είναι ότι στην αγορά υπάρχουν δύο προϊόντα και ότι μπορούμε να συναλλασόμαστε στους χρόνους t_k. Για το θεώρημα 4 χρησιμοποιήσαμε μόνο ότι μπορούμε να αναπαράγουμε την απόδοση του παραγώγου με μια αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική.

Τέλος, θα δείξουμε τώρα ότι το μέτρο q που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω είναι το μοναδικό μέτρο martingale στον Ω. Πράγματι, έστω Q ένα μέτρο πιθανότητας στον Ω, τότε

$$\begin{aligned}
E^Q[S_{t_{k+1}}|\mathcal{F}_k] &= S_{t_k}E^Q[\xi_{k+1}|\mathcal{F}_k] \\
&= S_{t_k}\left(uQ(\xi_{k+1}=u|\mathcal{F}_k) + dQ(\xi_{k+1}=d|\mathcal{F}_k)\right) \\
&= S_{t_k}\left(d + (u-d)Q(\xi_{k+1}=u|\mathcal{F}_k)\right)
\end{aligned}$$

και άρα για την προεξοφλημένη αξία του πρωτογενούς προϊόντος έχουμε

$$E^Q[e^{-rt_{k+1}}S_{t_{k+1}}|\mathcal{F}_k] = e^{-rt_k}S_{t_k} \times e^{-rh}(d + (u-d)Q(\xi_{k+1}=u|\mathcal{F}_k))$$

Από αυτή την σχέση εύκολα βλέπουμε ότι το Q είναι μέτρο martingale, δηλαδή $E^Q[e^{-rt_{k+1}}S_{t_{k+1}}|\mathcal{F}_k] = e^{-rt_k}S_{t_k}$, αν και μόνο αν

$$Q(\xi_{k+1} = u|\mathcal{F}_k) = \frac{e^{rh} - d}{u - d}, \text{ για κάθε } k = 0, 1, \ldots, N - 1.$$

Τέλος,η σχέση αυτή επιβάλλει την $Q-$πιθανότητα κάθε τροχιάς, άρα το μέτρο Q που κατασκευάσαμε είναι το μοναδικό μέτρο martingale. Παρατηρούμε επιπλέον ότι το μέτρο Q δεν εξαρτάται από την παράμετρο p του μοντέλου μας.

Κεφάλαιο 3

Τιμολόγηση Αμερικάνικων Παραγώγων

3.1 Χρόνοι διακοπής

Ορισμός 3 *Μια τυχαία μεταβλητή $\tau : \Omega \to \overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ καλείται χρόνος διακοπής αν*

$$\{\tau \leq t\} \equiv \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \quad \text{για κάθε } t \in \overline{\mathbb{N}}$$

Δηλαδή η αντίστροφη εικόνα μέσω της τ κάθε συνόλου $\{0, 1, \ldots, t\}$ να είναι στοιχείο της σ-άλγεβρας $\mathcal{F}_t$.

Ο χρόνος διακοπής μπορεί να θεωρηθεί ως ο χρόνος στον οποίο ένα τυχαίο γεγονός συμβαίνει με την σύμβαση ότι παίρνει την τιμή $+\infty$ αν το γεγονός δεν πραγματοποιηθεί ποτέ.

Θεώρημα 5 *Έστω τ ένας χρόνος διακοπής φραγμένος από μια σταθερά c και έστω $\{X_n\}_{n\geq 0}$ ένα martingale. Τότε $E[X_T] = E[X_0]$.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι $X_\tau(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(\omega) 1_{\{\tau(\omega)=n\}}$. Επομένως, χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι c είναι ακέραιος, τότε

$$\begin{aligned} E[X_\tau] &= E[\sum_{n=0}^{\infty} X_n 1_{\{\tau=n\}}] \\ &= E[\sum_{n=0}^{c} X_n 1_{\{\tau=n\}}] \\ &= \sum_{n=0}^{c} E[X_n 1_{\{\tau=n\}}] \end{aligned}$$

Επειδή όμως $\{\tau = n\} = \{\tau \leq n\} \setminus \{\tau \leq n-1\}$ έχουμε ότι $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$, άρα η $1_{\{\tau=n\}}$ είναι $\mathcal{F}_n-$μετρήσιμη και επειδή η $\{X_n\}_{n\geq 0}$ είναι martingale έχουμε

$$\begin{aligned} E[X_\tau] &= \sum_{n=0}^{c} E[E[X_c|\mathcal{F}_n] 1_{\{\tau=n\}}] \\ &= \sum_{n=0}^{c} E[X_c 1_{\{\tau=n\}}] \\ &= E[X_c \sum_{n=0}^{c} 1_{\{\tau=n\}}] \\ &= E[X_c] = E[X_0] \ \ (\text{καθώς } \{X_n\} \text{ είναι martingale}) \end{aligned}$$

■

Η σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_n$ θεωρούμε ότι αναπαριστά την παρατηρούμενη πληροφορία μέχρι και τον χρόνο n. Θα θελαμε τώρα να ορίσουμε μια ανάλογη σ-άλγεβρα που να εκφράζει τα γεγονότα μέχρι και τον χρόνο διακοπής τ.

Ορισμός 4 *Έστω τ ένας χρόνος διακοπής. Η σ-άλγεβρα του χρόνου διακοπής $\mathcal{F}_\tau$ ορίζεται να είναι*

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n, \quad \text{για κάθε } n\}.$$

Θεώρημα 6 *Αν τ είναι χρόνος διακοπής, τότε $\mathcal{F}_\tau$ είναι σ-άλγεβρα.*

Απόδειξη. Προφανώς, $\emptyset$ και Ω ανήκουν στην $\mathcal{F}_\tau$. Αν $A \in \mathcal{F}_\tau$, τότε

$$A^c \cap \{\tau \leq n\} = \{\tau \leq n\} \setminus (A \cap \{\tau \leq n\}),$$

και άρα $A^c \in \mathcal{F}_\tau$. Επίσης, αν $\{A_i\}_{i\geq 1} \subset \mathcal{F}_\tau$, τότε

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cap \{\tau \leq n\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap \{\tau \leq n\}) \in \mathcal{F}_\tau,$$

Επομένως, είναι σ-άλγεβρα. ■

Θεώρημα 7 *Έστω σ, τ χρόνοι διακοπής, με $\sigma \leq \tau$. Τότε $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau$.*

Απόδειξη. Εφόσον $\sigma \leq \tau$ έχουμε $\{\tau \leq n\} \subset \{\sigma \leq n\}$. Επομένως, αν $A \in \mathcal{F}_\sigma$, τότε

$$A \cap \{\tau \leq n\} = A \cap \{\sigma \leq n\} \cap \{\tau \leq n\}$$

αλλά $A \cap \{\sigma \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ και $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$, άρα $A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$. Συνεπώς, $A \in \mathcal{F}_\tau$. ■

Παρατήρηση 5 *Αν σ και τ είναι χρόνοι διακοπής, τότε και οι $\sigma + \tau$, $\sigma \vee \tau, \sigma \wedge \tau$ είναι χρόνοι διακοπής. Το ίδιο ισχύει και για τον $t \wedge \tau$*

Υποθέτουμε τώρα ότι έχουμε μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_n\}_{n\geq 0}$ με X_n να είναι $\mathcal{F}_n$ μετρήσιμη για κάθε n. Έστω τ χρόνος διακοπής με $P(\tau < \infty) = 1$. Τότε $X_\tau = \sum_{n=0}^{\infty} X_n 1_{\{T=n\}}$ και έχουμε

Θεώρημα 8 *Η X_τ είναι $\mathcal{F}_\tau-$μετρήσιμη.*

Απόδειξη. Έστω A ένα Borel σύνολο και θέλουμε να δείξουμε ότι $\{X_\tau \in A\} \in \mathcal{F}_\tau$, δηλαδή θέλουμε να δείξουμε ότι $\{X_\tau \in A\} \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$. Αλλά

$$\begin{aligned}\{X_\tau \in A\} \cap \{\tau \leq n\} &= \bigcap_{k=0}^{n} \{X_\tau \in A\} \cap \{\tau = k\} \\ &= \bigcap_{k=0}^{n} \{X_k \in A\} \cap \{\tau = k\}\end{aligned}$$

και $\{X_k \in A\} \cap \{\tau = k\} \in \mathcal{F}_k \subset \setminus$ για $k \leq n$. ■

Τα επόμενα δύο θεωρήματα δείχνουν ότι η martingale ιδιότητα ισχύει στους χρόνους διακοπής.

Θεώρημα 9 (Doob's Optional Sampling Theorem) *Έστω $X = \{X_n\}_{n\geq 0}$ ένα martingale και έστω σ, τ δύο χρόνοι διακοπής φραγμένοι από μια σταθερά c, με $\sigma \leq \tau$ σ.β. Τότε*

$$E[X_\tau|\mathcal{F}_\sigma] = X_\sigma \;\; \sigma.\beta.$$

Απόδειξη. Αρχικά η $|X_\tau| \leq \sum_{n=0}^{c}|X_n|$ είναι ολοκληρώσιμη (χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι το c είναι ακέραιος), όπως και η X_σ και επιπλέον X_σ είναι $\mathcal{F}_\sigma$-μετρήσιμη από το προηγούμενο θεώρημα. Επομένως, μένει να δείξουμε ότι $E[X_\tau Z] = E[X_\sigma Z]$ για κάθε φραγμένη $\mathcal{F}_\sigma$-μετρήσιμη τ.μ. Z. Από ένα συνηθισμένο ισχυρισμό είναι αρκετό να δείξουμε ότι αν $A \in \mathcal{F}_\sigma$ τότε

$$E[X_\tau 1_A] = E[X_\sigma 1_A]$$

(Αν ισχύει αυτό, τότε ισχύει $E[X_\tau Z] = E[X_\sigma Z]$ για κάθε απλή τ.μ. Z λόγω γραμμικότητας, τότε ισχύει και για όλες τις $\mathcal{F}_\sigma-$μετρήσιμες και φραγμένες Z από το θεώρημα Κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue).

Επομένως, έστω $A \in \mathcal{F}_\sigma$. Ορίζουμε ένα νέο τυχαίο χρόνο ρ ως εξής

$$\rho(\omega) = \sigma(\omega)1_A(\omega) + \tau_A(\omega)1_{A^c}(\omega).$$

Τότε ο ρ είναι επίσης ένας χρόνος διακοπής: πράγματι,

$$\{\rho \leq n\} = (A \cap \{\sigma \leq n\}) \cup (A^c \cap \{\tau \leq n\}),$$

και $A \cap \{\sigma \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ διότι $A \in \mathcal{F}_\sigma$. Εφόσον, $A \in \mathcal{F}_\sigma$ έχουμε ότι $A^c \in \mathcal{F}_\sigma$ και άρα $A^c \in \mathcal{F}_\tau$ από το θεώρημα 7. Άρα $A^c \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ και συμπεραίνουμε ότι $\{R \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ και ρ είναι ένας χρόνος διακοπής. Επομένως, $E[X_\rho] = E[X_\tau] = E[X_0]$ από το θεώρημα 5.Αλλά

$$E[X_\rho] = E[X_\sigma 1_A + X_\tau 1_{A^c}]$$

$$E[X_\tau] = E[X_\tau 1_A + X_\tau 1_{A^c}]$$

και αφαιρώντας έχουμε

$$E[X_\sigma 1_A] - E[X_\tau 1_A] = 0.$$

■

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε συγκεκριμένα το αποτέλεσμα για $\sigma = 0$.

Παρατήρηση 6 *Στο παραπάνω θεώρημα θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι η $\{X_n\}_{n\geq 0}$ είναι submartingale και με τις ίδιες υποθέσεις να πάρουμε $X_\sigma \leq E[X_\tau|\mathcal{F}_\sigma]$ $P-\sigma.\beta.$*

Θεώρημα 10 *Έστω $\{X_n\}_{n\geq 0}$ μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών με X_n να είναι $\mathcal{F}_n-$μετρήσιμη για κάθε n. Υποθέτουμε ότι $E[|X_n|] < \infty$ για κάθε n και $E[X_n] = E[X_0]$ για όλους τους φραγμένους χρόνους διακοπής τ. Τότε X είναι martingale.*

Απόδειξη. Έστω $0 \leq m < n < \infty$, και έστω $A \in \mathcal{F}_m$. Ορίζουμε ένα τυχαίο χρόνο τ ως

$$\tau(\omega) = \begin{cases} m, \text{ αν } \omega \in A^c \\ n, \text{ αν } \omega \in A \end{cases}$$

Τότε τ είναι ένας χρόνος διακοπής, άρα

$$E[X_0] = E[X_\tau] = E[X_m 1_{A^c} + X_n 1_A].$$

Ωστόσο έχουμε επίσης $E[X_0] = E[X_m 1_{A^c} + X_m 1_A]$. Αφαιρώντας έχουμε $E[X_n 1_A] = E[X_m 1_A]$ ή ισοδύναμα $E[X_n|\mathcal{F}_m] = X_m$ $\sigma.\beta.$ ■

3.2 Τιμολόγηση Αμερικάνικων Παραγώγων

Ο αγοραστής ενός παραγώγου Ευρωπαϊκού τύπου έχει την δυνατότητα να το εξασκήσει μόνο στη λήξη του, γεγονός που απλουστεύει τη διαδικασία τιμολόγησης. Θα πρέπει να υπογραμμιστεί όμως ότι στις αγορές παραγώγων είναι πλέον συνήθης η τιμολόγηση των παραγώγων Αμερικάνικου τύπου, καθώς πρόκειται για τον πιο διαδεδομένο τύπο σύγχρονου παραγώγου. Στην περίπτωση ενός παραγώγου Αμερικάνικου τύπου, ο αγοραστής μπορεί να εξασκήσει το παράγωγο οποιαδήποτε στιγμή θελήσει, μέχρι και τη στιγμή της λήξης του, κάτι που περιπλέκει την τιμολόγησή του. Βασική διαφοροποίηση της διαδικασίας τιμολόγησης των παραγώγων Αμερικάνικου τύπου αποτελεί η έμφαση στις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες το πρωτογενές προϊόν διανέμει μέρισμα, καθώς αποτελούν πιθανές βέλτιστες στιγμές εξάσκησης του παραγώγου.

Ένα παράγωγο Αμερικάνικου τύπου (American contingent claim-ACC) θα αναπαριστάται από μια πεπερασμένη ακολουθία $Y = \{Y_t, t = 0, 1, \ldots, T\}$ πραγματικών τυχαίων μεταβλητών τέτοιες ώστε η Y_t να είναι $\mathcal{F}_t-$μετρήσιμη για $t = 0, 1, 2, \ldots, T$. Η τυχαία μεταβλητή $Y_t,\ t = 0, 1, 2, \ldots, T$ ερμηνεύεται ως η απόδοση του παραγώγου αν ο κάτοχος του το εξασκήσει στο χρόνο t. Ο χρόνος στον οποίο ο κάτοχος εξασκεί το παράγωγο απαιτείται να είναι χρόνος διακοπής (stopping time).

Για $s, t \in \{0, 1, \ldots, T\}$ τέτοια ώστε $s \leq t$, θα συμβολίζουμε με $\mathcal{T}_{[s,t]}$ το σύνολο των χρόνων διακοπής ακέραιων τιμών που παίρνουν τιμές στο διάστημα $[s, t]$. Ένα παράδειγμα ενός τέτοιου παραγώγου Αμερικάνικου τύπου είναι ένα Αμερικάνικο δικαίωμα αγοράς (call option) με τιμή εξάσκησης K το οποίο έχει απόδοση $Y_t = (S_t - K)^+$ στο χρόνο t, $t = 0, 1, \ldots, T$. Παρατηρούμε ότι αν $S_t \leq K$, εξασκώντας το παράγωγο στο χρόνο t θα έχει την ίδια απόδοση με το να μην εξασκούσαμε καθόλου το παράγωγο. Υιοθετήσαμε αυτή την σύμβαση ώστε να μπορούμε να έχουμε ένα γενικότερο πλαίσιο αντιμετώπισης των παραγώγων, συμπεριλαμβανομένου δικαιωμάτων προαίρεσης και συμβολαίων.

Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό ενός παραγώγου Αμερικάνικου τύπου είναι ότι ο αγοραστής και ο πωλητής ενός τέτοιου παραγώγου έχουν διαφορετικές δυνατότητες· ο αγοραστής μπορεί να εξασκήσει το παράγωγο σε κάθε χρόνο διακοπής $\tau \in \mathcal{T}_{[0,T]}$, ενώ ο πωλητής αναζητά προστασία από το ρίσκο που συσχετίζεται με όλες τις πιθανές επιλογές του χρόνου διακοπής από τον αγοραστή. Όπως στην τιμολόγηση των Ευρωπαικών παραγώγων, έτσι και στην τιμολόγηση Αμερικάνικων παραγώγων, σημαντικό ρόλο θα έχει η επενδυτική στρατηγική η οποία αντισταθμίζει (hedge) τον κίνδυνο του πωλητή ενός Αμερικάνικου παραγώγου. Ωστόσο, αντίθετα με το Ευρωπαϊκό παράγωγο, ο πωλητής δεν θα είναι πάντα σε θέση να αναπαράγει την απόδοση του Αμερικάνικου παραγώγου σε κάθε χρόνο t. Αντί για αυτό, ο πωλητής ενός Αμερικάνικου παραγώγου αναζητά μια στρατηγική υπεραντιστάθμισης (superhedging) η οποία είναι μια αυτοχρηματοδοτούμενη επενδυτική στρατηγική ϕ με αξία τουλάχιστον όσο η απόδοση του Αμερικάνικου παραγώγου στο χρόνο t.

Πιο συγκεκριμένα, έστω $Y = \{Y_t, t = 0, 1, \ldots, T\}$ η ακολουθία των αποδόσεων του Αμερικάνικου παραγώγου (συμβολισμός ACC). Για $t = 0, 1, \ldots, T$, θα συμβολίζουμε με U_t το ελάχιστο ποσό πλούτου που χρειάζεται να έχει ο πωλητής του ACC στο χρόνο t ώστε να εξασφαλιστεί ότι ο πωλητής έχει αρκετά ώστε να καλύψει την απόδοση αν ο αγοραστής εξασκήσει το παράγωγο σε κάποιο χρόνο διακοπής $\tau \in \mathcal{T}_{[t,T]}$. Μια υπεραντισταθμιτική στρατηγική για τον πωλητή είναι μια αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική $\phi = \{(\alpha_t, \beta_t), t = 1, 2, \ldots, T\}$ με τιμές $V_t(\phi)$ στο χρόνο $t = 0, 1, \ldots, T$ τέτοια ώστε $U_t \leq V_t(\phi)$ για $t = 0, 1, 2, \ldots, T$. Μια τέτοια ϕ μπορεί να κατασκευαστεί σταδιακά προχωρώντας προς τα πίσω στο διωνυμικό δέντρο. Για να το αποδείξουμε αυτό, παρατηρούμε ότι $U_T = Y_T$. Δεδομένης της σ-άλγεβρας $\mathcal{F}_{T-1}$, δηλαδή δοθέντων των $S_0, S_1, \ldots, S_{T-1}$, θα συμβολίσουμε με U_T^u το ποσό που ο πωλητής του ACC θα πρέπει να καλύψει τον χρόνο T αν η τιμή του πρωτογενούς προϊόντος στον χρόνο αυτό είναι $S_{T-1}u$ και με U_T^d το ποσό που ο πωλητής θα πρέπει να καλύψει τον χρόνο T αν η τιμή του πρωτογενούς προϊόντος είναι $S_{T-1}d$. Έτσι, με τον ίδιο τρόπο όπως στην περίπτωση του Ευρωπαϊκού παραγώγου, δεδομένης της $\mathcal{F}_{T-1}$, το ελάχιστο ποσό που χρειάζεται στο χρόνο $T-1$ για να καλυφθεί η πιθανή απόδοση του παραγώγου ACC στο χρόνο T είναι

$$e^{-rh} E^q[U_T | \mathcal{F}_{T-1}]$$

και η απόδοση στο χρόνο T μπορεί να κατασκευαστεί από το ποσό αυτό χρησιμοποιώντας $\mathcal{F}_{T-1}-$μετρήσιμες κατανομές $(\tilde{\alpha}_T, \tilde{\beta}_T)$ του πρωτογενούς και του άνευ κινδύνου προϊόντος στο χρονικό διάστημα $(T-1, T]$ που ορίζονται από τις σχέσεις:

$$\tilde{\alpha}_T S_T + \tilde{\beta}_T B_T = U_T,$$
$$\tilde{\alpha}_T S_{T-1} + \tilde{\beta}_T B_{T-1} = e^{-rh} E^q[U_T | \mathcal{F}_{T-1}]$$

Τώρα, στο χρόνο $T-1$, ο πωλητής πρέπει να έχει τουλάχιστον

$$U_{T-1} = \max\{Y_{T-1}, e^{-rh} E^q[U_T | \mathcal{F}_{T-1}]\}$$

με σκοπό να καλύψει την απόδοση Y_{T-1} που αντιστοιχεί σε πιθανή εξάσκηση του δικαιώματος στο χρόνο $T-1$, και να έχει επαρκή πλούτο ώστε να παράγει αξία στο χρόνο T τουλάχιστον τόσο μεγάλη όσο η απόδοση του παραγώγουACC στο χρόνο T, δηλαδή $U_T = Y_T$.
Έστω

$$\tilde{\delta}_T = U_{T-1} - e^{-rh} E^q[U_T | \mathcal{F}_{T-1}].$$

Τότε $\tilde{\delta}_T$ είναι το πλεόνασμα από το U_{T-1} ως προς αυτό που χρειάζεται για την κάλυψη της απόδοσης του δικαιώματος στο χρόνο T. Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει πλεόνασμα αν $Y_{T-1} < U_{T-1}$. Κάνοντας την διαδικασία προς τα πίσω επαγωγικά στο δένδρο και επαναλαμβάνοντας σε κάθε στάδιο ένα παρόμοιο επιχείρημα με αυτό που εφαρμόστηκε στο διάστημα $(T-1, T]$, βλέπουμε ότι για $t = 0, 1, \ldots, T-1$, δεδομένης της $\mathcal{F}_t$, το ποσό πλούτου που χρειάζεται στο χρόνο t για να καλύψει πιθανή απόδοση του δικαιώματος στο $[t, T]$ είναι

$$U_t = \max\{Y_t, e^{-rh}E^q[U_{t+1}|\mathcal{F}_t]\}.$$

Επιπλέον, δεσμεύοντας ως προς $\mathcal{F}_t$ (δηλαδή δοθέντων $S_0, S_1, \ldots, S_t$) και θέτοντας U_{t+1}^u και U_{t+1}^d τις δύο πιθανές τιμές του U_{t+1} αντίστοιχα αν $S_{t+1} = S_t u$ ή $S_{t+1} = S_t d$, η κατανομη του πρωτογενούς και άνευ κινδύνου προϊόντος, $(\tilde{\alpha}_{t+1}, \tilde{\beta}_{t+1})$ στο $(t, t+1]$,έχει αξία στον χρόνο t που δίνεται από

$$e^{-rh}E^q[U_{t+1}|\mathcal{F}_t] \tag{3.2.1}$$

και η αξία U_{t+1} στον χρόνο $t+1$ δίνεται από την

$$\tilde{\alpha}_{t+1}S_{t+1} + \tilde{\beta}_{t+1}B_{t+1} = U_{t+1}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}_{t+1}S_t u + \tilde{\beta}_{t+1}e^{r(t+1)} = U_{t+1}^u \\ \tilde{\alpha}_{t+1}S_t d + \tilde{\beta}_{t+1}e^{r(t+1)} = U_{t+1}^d \end{cases} \Rightarrow$$

Άρα

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{t+1} &= \frac{U_{t+1}^u - U_{t+1}^d}{(u-d)S_t} \\ \tilde{\beta}_{t+1} &= e^{-r(t+1)}\left(\frac{uU_{t+1}^u - dU_{t+1}^d}{u-d}\right) \end{aligned}$$

Έστω

$$\tilde{\delta}_{t+1} = U_t - e^{-rh}E^q[U_{t+1}|\mathcal{F}_t]. \tag{3.2.2}$$

Τότε $\tilde{\delta}_{t+1}$ είναι το πλεόνασμα από το U_t ως προς το τι θα χρειαστεί για να καλυφθεί η πιθανή απόδοση του δικαιώματος στο $[t+1, T]$. Παρατησούμε ότι εξ' ορισμού του U_t θα έχουμε $\tilde{\delta}_{t+1} = 0$

αν $Y_t < U_t$.

Υποθέτοντας ότι $U_t, t = 0, 1, \ldots, T$ και $\tilde{\alpha}_{t+1}, \tilde{\beta}_{t+1}, \tilde{\delta}_{t+1}, t = 1, 2, \ldots, T$ είναι ορισμένα όπως παραπάνω, θα θέσουμε

$$\alpha_t^* = \tilde{\alpha}_t, \tag{3.2.3}$$

$$\beta_t^* = \tilde{\beta}_t + \sum_{s=1}^{t} \frac{\tilde{\delta}_s}{B_{s-1}}, \tag{3.2.4}$$

για $t = 1, 2, \ldots, T$. Για το σκοπό αυτό, παρατηρούμε ότι $\tilde{\delta}_s$ είναι το πλεόνασμα στο χρόνο $s-1$ από την ποσότητα $e^{-rh}E^q[U_s|\mathcal{F}_{s-1}]$ που χρειάζεται στο χρόνο $s-1$ για να χρηματοδοτήσουμε την $(\tilde{\alpha}_s, \tilde{\beta}_s)$. Θεωρούμε αυτό το πλεόνασμα ως επένδυση στο άνευ κινδύνου προϊόν το χρονικό διάστημα $(s-1, T]$. Το κόστος μιας μονάδας του άνευ κινδύνου προϊόντος είναι B_{s-1} στο χρόνο $s-1$ και επομένως το πλήθος των μονάδων από το άνευ κινδύνου που αγοράζονται με το $\tilde{\delta}_s$ θα είναι $\tilde{\delta}_s/B_{s-1}$.

Εκ κατασκευής, για $t = 1, \ldots, T$,

$$\tilde{\alpha}_t S_t + \tilde{\beta}_t B_t = U_t$$

Η επενδυτική στρατηγική $\phi^* = \{(\alpha_t^*, \beta_t^*), t = 1, 2, \ldots, T\}$ ως προς το πρωτογενές και το άνευ κινδύνου προϊόν είναι αυτοχρηματοδοτούμενη εφόσον για $t = 1, \ldots, T-1$,

$$\begin{aligned}
\alpha_{t+1}^* S_t + \beta_{t+1}^* B_t &= \tilde{\alpha}_{t+1} S_t + \tilde{\beta}_{t+1} B_t + \left(\sum_{s=1}^{t+1} \frac{\tilde{\delta}_s}{B_{s-1}} \right) B_t \\
&= e^{-rh} E^q[U_{t+1}|\mathcal{F}_t] + \left(\sum_{s=1}^{t} \frac{\tilde{\delta}_s}{B_{s-1}} \right) + \tilde{\delta}_{t+1} \\
&= U_t + \left(\sum_{s=1}^{t} \frac{\tilde{\delta}_s}{B_{s-1}} \right) B_t \\
&= \tilde{\alpha}_t S_t + \tilde{\beta}_t B_t + \left(\sum_{s=1}^{t} \frac{\tilde{\delta}_s}{B_{s-1}} \right) B_t \\
&= \alpha_t^* S_t + \beta_t^* B_t
\end{aligned}$$

Για την πρώτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό του $(\alpha_{t+1}^*, \beta_{t+1}^*)$ (βλ.(3.2.3)-(3.2.4)). Για την δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι το $(\tilde{\alpha}_{t+1}, \tilde{\beta}_{t+1})$ είναι σχεδιασμένα ώστε να δίνουν την τιμή (3.2.1) στο χρόνο t. Για την τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό

(3.2.2) για το $\tilde{\delta}_{t+1}$. Για την τέταρτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι το (α_t, β_t) έχει κατασκευαστεί έτσι ώστε να έχει την τιμή U_t στο χρόνο t. Η πέμπτη ισότητα χρησιμοποιεί τον ορισμό (3.2.3)-(3.2.4) του (α_t^*, β_t^*).
Η αρχική τιμή της στρατηγικής ϕ^* είναι

$$\begin{aligned} V_0(\phi^*) &= \alpha_1^* S_0 + \beta_1^* B_0 \\ &= \tilde{\alpha}_1 S_0 + \tilde{\beta}_1 B_0 + \tilde{\delta}_1 \\ &= e^{-rh} E^q[U_1] + U_0 - e^{-rh} E^q[U_1] \\ &= U_0 \end{aligned}$$

Σε αυτό το σημείο χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η $\mathcal{F}_0$ είναι τετριμένη και επομένως η δεσμευμένη μέση τιμή ως προς αυτή την σ-άλγεβρα απλοποιείται στην συνήθη μέση τιμή. Η αξία της ϕ^* στο χρόνο $t = 1, 2, \ldots, T$ είναι

$$V_t(\phi^*) = \tilde{\alpha}_t S_t + \tilde{\beta}_t B_t + \left(\sum_{s=1}^{t} \frac{\tilde{\delta}_s}{B_{s-1}} \right) B_t \geq U_t$$

Έστω τώρα ο χρόνος διακοπής

$$\tau^* = \min\{s \geq 0 : U_s = Y_s\}. \tag{3.2.5}$$

Παρατηρούμε ότι $Y_s \leq U_s$ για $s = 0, 1, \ldots, T$ και $Y_s < U_s$ για $0 \leq s < \tau^*$, δηλαδή $\tilde{\delta}_s = 0$ για $1 \leq s \leq \tau^*$ και επομένως

$$V_t(\phi^*) = U_t, \text{ για } 0 \leq t \leq \tau^*. \tag{3.2.6}$$

Για $t = 0, 1, \ldots, T$ ορίζουμε τις προεξοφλημένες τιμές των τυχαίων μεταβλητών

$$Y_t^* = e^{-rt} Y_t, \quad U_t^* = e^{-rt} U_t. \tag{3.2.7}$$

Τότε για $t = 0, 1, \ldots, T-1$,

$$U_t^* = \max\{Y_t^*, E^q[U_{t+1}^* | \mathcal{F}_t]\}, \tag{3.2.8}$$

και $U_T^* = Y_T^*$. Η ανέλιξη $\{U_t^*, t = 0, 1, \ldots, T\}$ καλείται χαρτοφυλάκιο Snell (Snell envelope) του $\{Y_t^*, t = 0, 1, \ldots, T\}$ και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες.

Λήμμα 3 *(i) Υπό το μέτρο q, το $U^* = \{U^*_t, t = 0, 1, \dots, T\}$ είναι το μικρότερο supermartingale τέτοιο ώστε $U^*_t \geq Y^*_t$ για $t = 0, 1, \dots, T$.*

(ii) Για $t = 0, 1, \dots, T$,

$$U^*_t = \max_{\tau \in \mathcal{T}_{[t,T]}} E^q[Y^*_\tau | \mathcal{F}_t]. \tag{3.2.9}$$

(iii) Για $t = 0, 1, \dots, T$,

$$\tau^*(t) \equiv \min\{v \geq t : U^*_v = Y^*_v\} \tag{3.2.10}$$

είναι ένα στοιχείο του $\mathcal{T}_{[t,T]}$ που πιάνει το μέγιστό στο δεξί μέλος της (3.2.9).

Απόδειξη. Στην απόδειξη αυτή όλες οι μέσες τιμές και οι δεσμευμένες μέσες τιμές θα υπολογίζονται ως προς το μέτρο q. Για να δείξουμε ότι το U^* είναι το μικρότερο supermartingale που ικανοποιεί την ανισότητα, υποθέτουμε ότι

$$W = \{W_t, \mathcal{F}_t, t = 0, 1, \dots, T\}$$

είναι ένα άλλο supermartingale τέτοιο ώστε $W_t \geq Y^*_t,\ t = 0, 1, \dots, T$. Τότε $W_T \geq Y^*_T = U^*_T$. Για να το αποδείξουμε με προς τα πίσω επαγωγή, υποθέτουμε ότι $s \in \{0, 1, \dots, T-1\}$ και $W_t \geq U^*_t$ για $t = s+1, \dots, T$. Τότε από την supermartingale ιδιότητα του W και την επαγωγική υπόθεση,

$$W_s \geq E^q[W_{s+1}|\mathcal{F}_s] \geq E^q[U^*_{s+1}|\mathcal{F}_s].$$

Όμως από την υπόθεση έχουμε ότι $W_s \geq Y^*_s$, άρα το W_s θα είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το μέγιστο των Y^*_s και $E^q[U^*_{s+1}|\mathcal{F}_s]$, το οποίο είναι ίσο με U^*_s. Αυτό ολοκληρώνει το επαγωγικό βήμα και άρα $W_t \geq U^*_t$ για $t = T, T-1, \dots, 1, 0$.

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη των (ii) και (iii), θα δείξουμε πρώτα ότι το $\tau^*(t)$ ανήκει στο $\mathcal{T}_{[t,T]}$ για $t = 0, 1, \dots, T$. Έστω $t \in \{0, 1, \dots, T\}$. Τότε εξ' ορισμού $\tau^*(t) \geq t$ και $\tau^*(t) \leq T$

αφού $U_T^* = Y_T^*$. Επίσης, Y_v^* και U_v^* είναι $\mathcal{F}_v-$μετρήσιμες για κάθε $v \in \{0, 1, \ldots, T\}$ και άρα έπεται ότι για κάθε $s \in \{t, t+1, \ldots, T\}$,

$$\{\tau^*(t) = s\} = \{Y_v^* < U_v^* \text{ για } v \in [t, s) \text{ και } Y_s^* = U_s^*\} \in \mathcal{F}_s.$$

Άρα $\tau^*(t)$ είναι ένας χρόνος διακοπής.

Αποδεικνύουμε το υπόλοιπο των (ii) και (iii) μαζί, χρησιμοποιώντας ξανά προς τα πίσω επαγωγή. Για $t = T$, και οι δύο σχέσεις δείχνονται εύκολα καθώς $\mathcal{T}_{[T,T]} = \{T\}$, Y_T^* είναι $\mathcal{F}_T-$μετρήσιμη και $U_T^* = Y_T^*$. Για το επαγωγικό βήμα, υποθέτουμε ότι $s \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$ και ότι ισχύουν οι (i) και (ii) για $t = s+1, s+2, \ldots, T$. Από την (3.2.8) με $t = s$ και την (ii) με $t = s+1$, για κάθε $\sigma \in \mathcal{T}_{[s+1,T]}$ έχουμε

$$U_s^* \geq Y_s^*$$

και

$$U_{s+1}^* \geq E^q[Y_\sigma^* | \mathcal{F}_{s+1}] \Rightarrow U_s^* \geq E^q[U_{s+1}^* | \mathcal{F}_s] \geq E^q[E^q[Y_\sigma^* | \mathcal{F}_{s+1}] | \mathcal{F}_s]$$

Άρα θα έχουμε

$$\begin{aligned} U_s^* &\geq \max\{Y_s^*, E^q[E^q[Y_\sigma^* | \mathcal{F}_{s+1}] | \mathcal{F}_s]\} \\ &= \max\{Y_s^*, E^q[Y_\sigma^* | \mathcal{F}_s]\} \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

Χρησιμοποιήσαμε την tower ιδιότητα για τις δεσμευμένες μέσες τιμές. Για $\tau \in \mathcal{T}_{[s,T]}$,

$$Y_\tau^* = 1_{\{\tau = s\}} Y_s^* + 1_{\{\tau \geq s+1\}} Y_{\tau \vee (s+1)}^*,$$

όπου $\tau \vee (s+1) = \max\{\tau, s+1\}$. Γνωρίζουμε ότι για να είναι μια χαρακτηριστική συνάρτηση $\mathcal{F}_s-$μετρήσιμη αρκεί το σύνολο στο οποίο είναι μη μηδενική να ανήκει στην $\mathcal{F}_s$. Άρα εφόσον τ είναι χρόνος διακοπής με ακέραιες τιμές στο $[s, T]$, τότε επειδή $\{\tau = s\} \in \mathcal{F}_s \Rightarrow \{\tau = s\}^c \in \mathcal{F}_s$ δηλαδή η $1_{\{\tau \geq s+1\}} = 1_{\{\tau = s\}^c}$ είναι $\mathcal{F}_s-$μετρήσιμη. Τότε χρησιμοποιώντας βασικές ιδιότητες των δεσμευμένων μέσων τιμών έχουμε

$$\begin{aligned} E^q[Y_\tau^* | \mathcal{F}_s] &= E^q[1_{\{t=s\}} Y_s^* | \mathcal{F}_s] + E^q[1_{\{\tau \geq s+1\}} Y_{\tau \vee (s+1)}^* | \mathcal{F}_s] \\ &= 1_{\{t=s\}} E^q[Y_s^* | \mathcal{F}_s] + 1_{\{\tau \geq s+1\}} E^q[Y_{\tau \vee (s+1)}^* | \mathcal{F}_s] \\ &= 1_{\{t=s\}} Y_s^* + 1_{\{\tau \geq s+1\}} E^q[Y_{\tau \vee (s+1)}^* | \mathcal{F}_s] \\ &\leq \max\{Y_s^*, E^q[Y_{\tau \vee (s+1)}^* | \mathcal{F}_s]\}. \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

Εφόσον $\tau \vee (s+1) \in \mathcal{T}_{[s+1,T]}$, δηλαδή είναι ένα $\sigma \in \mathcal{T}_{[s+1,T]}$,από τις σχέσεις (3.2.11) και (3.2.12) έπεται ότι

$$U_s^* \geq E^q[Y_\tau^* | \mathcal{F}_f],$$

και επειδή το $\tau \in \mathcal{T}_{[s,T]}$ ήταν τυχαίο, συμπεραίνουμε ότι

$$U_s^* \geq \max_{\tau \in \mathcal{T}_{[s,T]}} E^q[Y_\tau^* | \mathcal{F}_s]. \tag{3.2.13}$$

Η απόδειξη των (ii) και (iii) για $t = s$ θα ολοκληρωθεί μόλις αποδείξουμε ότι το μέγιστο του δεξιού μέλους της (3.2.13) επιτυγχάνεται στο $\tau = \tau^*(s)$ και η τιμή αυτού του μεγίστου είναι το U_s^*. Από την (3.2.8) με $t = s$ και στην (iii) με $t = s + 1$, έχουμε

$$\begin{aligned} U_s^* &= \max\{Y_s^*, E^q[E^q[Y^*_{\tau^*(s+1)} | \mathcal{F}_{s+1}] | \mathcal{F}_s]\} \\ &= \max\{Y_s^*, E^q\left[Y^*_{\tau^*(s+1)} | \mathcal{F}_s\right]\}. \end{aligned}$$

Στο σύνολο $\{\tau^*(s) = s\}$ έχουμε εξ' ορισμού ότι $Y_s^* = U_s^*$ και στο $\{\tau^*(s) \geq s + 1\}$ θα είναι $Y_s^* < U_s^*$. Άρα,

$$U_s^* = 1_{\{\tau^*(s)=s\}} Y_s^* + 1_{\{\tau^*(s) \geq s+1\}} E^q[Y^*_{\tau^*(s+1)} | \mathcal{F}_s].$$

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι $\{\tau^*(s) \geq s + 1\}, \tau^*(s) = \tau^*(s + 1)$ και έτσι η παραπάνω σχέση απλοποιείται στην

$$U_s^* = E^q[Y^*_{\tau^*(s)} | \mathcal{F}_s]$$

Όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι το $\tau^*(s)$ είναι χρόνος διακοπής με ακέραιες τιμές στο $[s, T]$ και έτσι $\{\tau^*(s) \geq s + 1\} = \{\tau^*(s) = s\}^c \in \mathcal{F}_s$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη των (ii) και (iii) για $t = s$, και έτσι το αποτέλεσμα έπεται από την επαγωγή. ■

Από τον ορισμό (3.2.5) του τ^* και παρατηρώντας ότι $\tau^* = \tau^*(0)$. Τότε έχουμε τα επόμενα.

Λήμμα 4 *Υπό το μέτρο q το $\{U^*_{t \wedge \tau^*}, \mathcal{F}_t : t = 0, 1, \ldots, T\}$ είναι martingale.*

Απόδειξη. Καθώς το τ^* είναι χρόνος διακοπής, έχουμε ότι $U^*_{t \wedge \tau^*} \in \mathcal{F}_t$ για $t = 0, 1, \ldots, T$ και ο χώρος πιθανότητας είναι πεπερασμένος, η ολοκληρωσιμότητα τις $U^*_{t \wedge \tau^*}$ είναι αυτόματη για κάθε t. Για δεδομένο $t \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$. Στο σύνολο $\{\tau^* > t\}$, έχουμε $Y_t^* < U_t^*$ και άρα $U_t^* = E^q[U_{t+1}^*|\mathcal{F}_t]$ εκεί. Επομένως,

$$\begin{aligned} U^*_{(t+1)\wedge\tau^*} - U^*_{t\wedge\tau^*} &= 1_{\tau^*>t}(U^*_{t+1} - U^*_t) \\ &= 1_{\tau^*>t}\left(U^*_{t+1} - E^q[U^*_{t+1}|\mathcal{F}_t]\right), \end{aligned}$$

και τότε παίρνοντας τις δεσμευμένες μέσες τιμές ως προς την σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_t$ υπό το μέτρο q, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\{\tau^* > t\} \in \mathcal{F}_t$, θα έχουμε

$$E^q[U^*_{(t+1)\wedge\tau^*} - U^*_{t\wedge\tau^*}|\mathcal{F}_t] = 0.$$

■

Ισχυριζόμαστε τώρα ότι η U_0 είναι η μοναδική αρχική τιμή μη επιτηδειότητας για το Αμερικάνικο παράγωγο. Για να το δούμε αυτό, θα χρειαστούμε την έννοια της επιτηδειότητας σε μια αγορά όπου το πρωτεύον και το άνευ κινδύνου προϊόν εμπορεύονται, και το Αμερικάνικο παράγωγο (ACC) μπορεί να αγοραστεί ή να πωληθεί στο χρόνο 0. Για μια τέτοια αγορά, έστω η αρχική τιμή του ACC είναι μια σταθερά C_0. Υπάρχουν δύο ειδών στρατηγικές επιτηδειότητας (arbitrage opportunity): μια για τον πωλητή και μια για τον αγοραστή του ACC. Ο *πωλητής* του ACC έχει στρατηγική επιτηδειότητας (arbitrage opportunity) αν υπάρχει στρατηγική ϕ^s ως προς το πρωτεύον και το άνευ κινδύνου προϊόν, τέτοια ώστε $V_0(\phi^s) = C_0$ και για όλους τους χρόνους διακοπής $\tau \in \mathcal{T}_{[0,t]}$,

$$V_\tau(\phi^s) - Y_\tau \geq 0 \ \text{ και } \ E[V_\tau(\phi^s) - Y_\tau] > 0. \tag{3.2.14}$$

Ο *αγοραστής* του ACC έχει στρατηγική επιτηδειότητας (arbitrage opportunity) αν υπάρχει μια επενδυτική στρατηγική ϕ^b ως προς το πρωτεύον και το άνευ κινδύνου προϊόν, τέτοια ώστε $V_0(\phi^b) = -C_0$ και υπάρχει ένας χρόνος διακοπής $\tau \in \mathcal{T}_{[0,T]}$ τέτοια ώστε

$$V_\tau(\phi^b) + Y_\tau \geq 0 \ \text{ και } \ E[V_\tau(\phi^b) + Y_\tau] > 0. \tag{3.2.15}$$

Η C_0 είναι τιμή μη επιτηδειότητας αν δεν υπάρχει στρατηγική επιτηδειότητας (arbitrage opportunity) για τον αγοραστή ή τον πωλητή του δικαιώματος προαίρεσης σε αυτή την τιμή.

Για να επωφεληθεί την στρατηγική επιτηδειότητας του πωλητή ένας επενδυτής μπορεί να πουλήσει ένα ACC στο χρόνο μηδέν για C_0 και να επενδύσει την απόδοση C_0 σύμφωνα με την επενδυτική στρατηγική ϕ^s εως ότου το παράγωγο εξασκηθεί από τον αγοραστή σε κάποιο χρόνο διακοπής τ. Στο χρόνο τ, ο πωλητής θα δώσει Y_τ στον αγοραστή για να εξοφλήσει το παράγωγο και θα έχει ένα επακόλουθο πλούτο $V_\tau(\phi^s) - Y_\tau$ στο χρόνο τ. Ο πωλητής μπορεί να επενδύσει αυτό το ποσό στο άνευ κινδύνου προϊόν στη χρονική περίοδο $(\tau, T]$. Αυτό μπορεί να δώσει ένα τελικό ποσό $(V_\tau(\phi^s) - Y_\tau)e^{-r(T-\tau)}$ το οποίο είναι μη μηδενικό και αυστηρά θετικό με θετική πιθανότητα (υπό το p ή το q).

Για να επωφεληθεί την στρατηγική επιτηδειότητας του αγοραστή ένας επενδυτής θα μπορούσε να αγοράσει ένα ACC στο χρόνο μηδέν για C_0 και να επενδύσει $-C_0$ σύμφωνα με την επενδυτική στρατηγική ϕ^b ως τον χρόνο τ, στον οποίο ο αγοραστής εξασκεί το παράγωγο. Ο αγοραστής θα έχει στο χρόνο τ πλούτο $V_\tau(\phi^b) + Y_\tau$ και θα μπορούσε να τον επενδύσει στο διάστημα $(\tau, T]$, ώστε ο τελικός πλούτος του να είναι $(V_\tau(\phi^b) + Y_\tau)e^{-r(T-\tau)}$, το οποίο είναι μη αρνητικό και αυστηρά θετικό με θετική πιθανότητα.

Παρατήρηση 7 *Ερμηνεύοντας εδώ τον ορισμό της στρατηγικής επιτηδειότητας για τον αγοραστή ή τον πωλητή του Αμερικάνικου παραγώγου, υποθέσαμε ότι ο πωλητής ή ο αγοραστής θα συνέχιζαν να επενδύουν στην αρχική αγορά και μετά την εξάσκηση του παραγώγου. Ένα πλεονέκτημα αυτής της ερμηνείας είναι ότι διευκολύνει τη σύγκριση των απολαβών σε συγκεκριμένο χρόνο T. Εναλλακτικά, κάποιος θα μπορούσε να υποθέσει ότι μετά την εξάσκηση του παραγώγου, ο πωλητής και ο αγοραστής δεν επενδύουν άλλο στην αρχική αγορά. Αυτό είναι ισοδύναμο με το να επενδύσουν σε ένα άνευ κινδύνου προϊόν με μηδενικό ρυθμό ανατοκισμού μετά την εξάσκηση του ACC. Με οποιαδήποτε τρόπο σύγκρισης, ο μαθηματικός ορισμός της στρατηγικής επιτηδειότητας είναι ο ίδιος.*

Το επόμενο Λήμμα θα χρησιμοποιηθεί για να δείξουμε ότι η τιμή του U_0 για ένα ACC είναι μια αρχική τιμή μη επιτηδειότητας.

Λήμμα 5 *Έστω ϕ μια επενδυτική στρατηγική ως προς ένα πρωτογενές προϊόν και ένα άνευ κινδύνου με προεξοφλημένη ανέλιξη τιμών*

$$\{V_t^*(\phi) = e^{-rt}V_t(\phi), t = 0, 1, \ldots, T\}.$$

Τότε, για οποιοδήποτε $\tau \in \mathcal{T}_{[0,T]}$,

$$E^q[V_\tau^*(\phi)] = V_0^*(\phi). \tag{3.2.16}$$

Απόδειξη. Από το Λήμμα 2, $\{V_t^*(\phi), \mathcal{F}_t, t = 0, 1, \ldots, T\}$ είναι martingale υπό το μέτρο q. Τότε η εξίσωση (3.2.16) προκύπτει από το θεώρημα 9 (Doob's Optional Sampling Theorem),εφόσον τ είναι ένας φραγμένος χρόνος διακοπής. ■

Θεώρημα 11 *Η μοναδική αρχική τιμή μη επιτηδειότητας για ένα παράγωγο Αμερικάνικου τύπου είναι U_0.*

Απόδειξη. Πρώτα θα δείξουμε ότι η τιμή μη επιτηδειότητας δεν μπορεί να είναι διαφορετική από το U_0 δηλαδή θα αποδείξουμε την μοναδικότητα αυτής της αρχικής τιμής.
Υποθέτουμε ότι $C_0 > U_0$. Τότε υπάρχει μια στρατηγική επιτηδειότητας για τον πωλητή του Αμερικάνικου παραγώγου. Πράγματι, θα συμβολίζουμε με ϕ^s την επενδυτική στρατηγική ως προς το πρωτογενές και το άνευ κινδύνου προϊόν η οποία αντιστοιχεί U_0 στην επένδυση σύμφωνα με την υπεραντισταθμιστική superhedging στρατηγική ϕ^*, και $C_0 - U_0$ στο άνευ κινδύνου προϊόν στο χρόνο μηδέν και διατηρώντας τις μονάδες του σε όλο το χρόνικό διάστημα $[0, T]$. Παρατηρουμε ότι η αρχική τιμή $V_0(\phi^s) = C_0$ και η τιμή $V_t(\phi^*)$ του ϕ^* στο χρόνο t είναι τουλάχιστον U_t για $t = 0, 1, \ldots, T$. Τότε για κάθε χρόνο διακοπής $\tau \in \mathcal{T}_{[0,T]}$,

$$\begin{aligned} V_\tau(\phi^s) - Y_\tau &= V_\tau(\phi^*) + (C_0 - U_0)B_\tau - Y_\tau \\ &\geq U_\tau + (C_0 - U_0)B_\tau - Y_\tau \\ &\geq (C_0 - U_0)B_\tau, \end{aligned} \tag{3.2.17}$$

όπου $(C_0 - U_0)B_\tau > 0$. Έτσι, υπάρχει στρατηγική επιτηδειότητας για τον πωλητή του Αμερικάνικου δικαιώματος προαίρεσης.
Από την άλλη μεριά, υποθέτουμε ότι $C_0 < U_0$. Τότε υπάρχει μια στρατηγική επιτηδειότητας για τον αγοραστή του Αμερικάνικου παραγώγου. Πράγματι, αν συμβολίσουμε με ϕ^b την επενδυτική στρατηγική που αντιστοιχεί $-U_0$ στην επένδυση σύμφωνα με την αρνητική $-\phi^*$ της υπεραντισταθμιστικής (superhedging) στρατηγικής ϕ^* και $U_0 - C_0$ στο άνευ κινδύνου προϊόν

στο χρόνο μηδέν και διατηρώντας τις μονάδες του σε όλο το χρόνικό διάστημα $[0, T]$. Επιπλεόν, θεωρώντας τ^*, όπου θεωρούμε ότι είναι ο χρόνος στον οποίο εξασκείται το παράγωγο ACC. Παρατηρούμε ότι $V_t(-\phi^*) = -V_t(\phi^*)$ για $t = 0, 1, \ldots, T$ και $V_0(\phi^b) = -C_0$. Τότε, από την (3.2.6) και τον ορισμό του τ^*, έχουμε ότι $V_{\tau^*}(\phi^*) = U_{\tau^*} = Y_{\tau^*}$ και έτσι

$$V_{\tau^*}(\phi^b) + Y_{\tau^*} = -V_{\tau^*}(\phi^*) + (U_0 - C_0)B_{\tau^*} + Y_{\tau^*} = (U_0 - C_0)B_{\tau^*}.$$

Εφόσον, $(U_0 - C_0)B_{\tau^*} > 0$, υπάρχει στρατηγική επιτηδειότητας για τον αγοραστή του Αμερικάνικου δικαιώματος προαίρεσης.

Τέλος, υποθέτουμε ότι $C_0 = U_0$. Θέλουμε να δείξουμε ότι δεν υπάρχει επιτηδειότητα. Ξεκινάμε δείχνοντας ότι δεν υπάρχει στρατηγική επιτηδειότητας για τον αγοραστή του Αμερικάνικου παραγώγου με $C_0 = U_0$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια επενδυτική στρατηγική ϕ^s τέτοια ώστε $V_0(\phi^s) = U_0$ και για κάθε $\tau \in \mathcal{T}_{[0,T]}$ η (3.2.14) ισχύει. Παρατηρούμε ότι $\tau^* \in \mathcal{T}_{[0,T]}$. Τότε έπεται από την (3.2.14) με $\tau = \tau^*$ ότι $V_{\tau^*}(\phi^s) - Y_{\tau^*} \geq 0$ και αυτή η ανισότητα ισχύει με αυστηρά θετική πιθανότητα υπό το μέτρο p και έτσι υπό το μέτρο q. Αυτές οι ίδιες ιδιότητες συνεχίζουν να ισχύουν μετά τον πολλαπλασιασμό της τυχαίας μεταβλητής με τον τυχαίο παράγοντα $e^{-r\tau^*}$ και επομένως έπεται ότι

$$E^q[V^*_{\tau^*}(\phi^s) - Y^*_{\tau^*}] > 0. \tag{3.2.18}$$

Από την άλλη, από την σχέση (3.2.16), $E^q[V^*_{\tau^*}(\phi^s)] = V^*_0(\phi^s) = U^*_0$ και από τις (ii) και (iii) του Λήμματος 3, $E^q[Y^*_{\tau^*}] = U^*_0$. Συνδυάζοντας αυτές τις δύο ιδιότητες, παίρνουμε ότι $E^q[V^*_{\tau^*}(\phi^s) - Y^*_{\tau^*}] = 0$, η οποία έρχεται σε αντίθεση με την (3.2.18). Επομένως, δεν υπάρχει τέτοια ϕ^s και συνεπώς δεν υπάρχει στρατηγική επιτηδειότητας για τον πωλητή του Αμερικάνικου παραγώγου.

Θα δείξουμε τώρα ότι δεν υπάρχει στρατηγική επιτηδειότητας για τον πωλητή του Αμερικάνικου παραγώγου με $C_0 = U_0$. Πράγματι, υποθέτουμε ότι υπάρχει επενδυτική στρατηγική ϕ^b τέτοια ώστε $V_0(\phi^b) = -U_0$ και ένας χρόνος διακοπής $\tau \in \mathcal{T}_{[0,T]}$ τέτοιος ώστε να ισχύει η (3.2.15). Για το άτοπο, θα δείξουμε ότι $E[V_\tau(\phi^b) + Y_\tau] \leq 0$, ή ισοδύναμα ότι $E^q[V_\tau(\phi^b) + Y_\tau] \leq 0$, το οποίο είναι ισοδύναμο με το να δείξουμε ότι $E^q[V^*_\tau(\phi^b) + Y^*_\tau] \leq 0$ (καθώς έχουμε υποθέσει ότι $V_\tau(\phi^b) + Y_\tau \geq 0$). Από την (3.2.16), $E^q[V^*_\tau(\phi^b)] = V^*_0(\phi^b) = -U^*_0$. Επιπλέον, από το (ii) του

Λήμματος (3), $E^q[Y_\tau^*] \leq U_0^*$. Επομένως, $E^q[V_\tau^*(\phi^b) + Y_\tau^*] \leq 0$, και δείξαμε το άτοπο. Συνεπώς, δεν υπάρχει στρατηγική επιτηδειότητας για τον αγοραστή του Αμερικάνικου παραγώγου. ■

Κεφάλαιο 4

Σύγκλιση στο μοντέλο Black-Scholes

4.1 Σύγκλιση στο μοντέλο Black-Scholes

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εισάγουμε το λογαριθμοκανονικό μοντέλο για τις τιμές της μετοχής και θα συζητήσουμε πως μπορεί να προσεγγιστεί από το διωνυμικό υπόδειγμα. Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε αυτό το υπόδειγμα για να τιμολογήσουμε τα παράγωγα. Η Black-Scholes ανάλυση επιτυγχάνεται στο όριο $h \to 0$.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει στα προηγούμενα κεφάλαια, αν έχουμε σταθερό επιτόκιο για το άνευ κινδύνου προϊόν και περιγράφουμε την εξέλιξη του πρωτογενούς προϊόντος με ένα πολλαπλό διωνυμικό δένδρο με $S^u_{t_k} = uS_{t_{k-1}}$ και $S^d_{t_k} = dS_{t_{k-1}}$ τότε η αξία στο χρόνο 0 του παραγώγου με χρόνο ωρίμανσης $T = Nh$ και απόδοση $X = f(S_T)$ είναι

$$V_0 = e^{-rT}E^q[X] = e^{-rT}E^q[f(S_T)] = e^{-rT}\sum_{k=0}^{N}(Nk)q^{N-k}(1-q)^k f(S_0u^{N-k}d^k)$$

με $q = \frac{e^{rh}-d}{u-d}$. Η σχέση αυτή είναι γνωστή και ως ο διακριτός τύπος των Black-Scholes.

Αν έχουμε ένα άνευ κινδύνου προϊόν που αξίζει B_0 ευρώ στο χρόνο 0 θα αξίζει $B(t) = B_0e^{rt}$ ευρώ στο χρόνο t, όπου r σταθερό επιτόκιο. Η ποσότητα η οποία μένει σταθερή δεν είναι ο ρυθμός ανάπτυξης αλλά το επιτόκιο $r = \frac{1}{B}\frac{dB}{dt} = \frac{dlogB}{dt}$.

Το πρωτογενές προϊόν ενέχει κίνδυνο, δηλαδή η εξέλιξη του είναι άγνωστη και φαίνεται να είναι τυχαία. Μπορούμε όμως να περιγράψουμε την δυναμική του με ένα ισοδύναμο επιτόκιο για κάθε χρονική περίοδο. Διασπώντας τον χρόνο σε διαστήματα μήκους h, το ισοδύναμο επιτόκιο για $kh < t < (k+1)h$ είναι r_k αν $S_{(k+1)h} = e^{r_k h} S_{kh}$ δηλαδή

$$r_k = \frac{log(S_{(k+1)h}) - log(S_{kh})}{h}$$

Το r_k λέγεται ότι είναι η επιστροφή (return) του πρωτογενούς προϊόντος στο αντίστοιχο χρονικό διάστημα. Παρατηρούμε ότι για να υπολογίσουμε την τιμή του πρωτογενούς προϊόντος σε ένα μεγαλύτερο διάστημα μπορούμε απλά να αθροίσουμε τους εκθέτες

$$S_{lh} = e^{r_k h + r_{k+1} h + \cdots + r_{l-1} h} S_{kh}, \text{ για } k < l.$$

Στη πραγματικότητα, το r_k είναι ο ρυθμός επιστροφής στο διάστημα k και η πραγματική επιστροφή σε αυτό το διάστημα είναι $e^{r_k h}$. Αλλά για ευκολία θα χρησιμοποιήσουμε τον όρο "επιστροφή" (return) για το r_k.

Εφόσον η τιμή του πρωτογενούς προϊόντος είναι τυχαία το ίδιο θα ισχύει και για κάθε r_k. Οι τυχαίες μεταβλητές $r_k h$ είναι ανεξάρτητες, ισόνομες και ακολουθούν την Κανονική κατανομή με μέσο μh και διασπορά $\sigma^2 h$, για κάποιες σταθερές μ και σ.

Η σταθερά μ λέγεται αναμενόμενη επιστροφή (expected return), καθώς η αναμενόμενη επιστροφή σε διάστημα μήκους h είναι μh. Η σταθερά σ καλείται μεταβλητότητα(volatility). Αυτές οι σταθερές θεωρούνται ανεξάρτετες από το διάστημα h. Επομένως, έχουμε την επόμενη ισχυρότερη υπόθεση

- Για κάθε διάστημα (t_1, t_2) η τυχαία μεταβλητή $log(S_{t_2}) - log(S_{t_1})$ ακολουθεί την Κανονική κατανομή με μέσο $\mu(t_2 - t_1)$ και διασπορά $\sigma^2(t_2 - t_1)$.

- Οι Κανονικές τυχαίες μεταβλητές που αντιστοιχούν σε ξένα διαστήματα χρόνου είναι ανεξάρτητες.

Συγκεκριμένα η $logS_t$ είναι μια κίνηση Brown με τάση(drift).

Σημείωση 1 *Η κίνηση Brown είναι ο θεμέλιος λίθος των συνεχών μοντέλων. Η στοχαστική αυτή διαδικασία παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στην θεωρία των στοχαστικών διαφορικών εξισώ-*

σεων και αποτελεί έναν από τους ακρογωνιαίους λίθους των χρηματοοικονομικών μαθηματικών, όσο αφορά τα μοντέλα σε συνεχή χρόνο.
Η κίνηση Brown είναι μια στοχαστική διαδικασία B_t η οποία παίρνει τιμές στον $\mathbb{R}$ και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες

(i) *Αν $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ τότε οι τυχαίες μεταβλητές $B_{t_0}, B_{t_1} - B_{t_0}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ είναι ανεξάρτητες (ανεξάρτητες μεταβολές)*

(ii) *Αν $s, t \geq 0$, τότε $B_{t+s} - B_s \sim N(0, t)$*

(iii) *Οι τροχιές της κίνησης Brown είναι συνεχείς με πιθανότητα 1, δηλαδή η $t \to B_t$ είναι συνεχής συνάρτηση του t, σχεδόν βέβαια.*

Η κίνηση Brown αν την θεωρήσουμε σαν μια τυχαία συνάρτηση του χρόνου, είναι ένα παράδειγμα μιας αρκετά παθολογικής συνάρτησης.

- *Η κίνηση Brown είναι μια συνάρτηση η οποία είναι μεν συνεχής ως προς t αλλά δεν είναι διαφορίσιμη ως προς t πουθενά, σχεδόν βεβαίως.*

- *Η μεταβολή της κίνησης Brown στο διάστημα $[0, t]$ είναι άπειρη για κάθε t, σχεδόν βεβαίως, ενώ αντίθετα η τετραγωνική μεταβολή της στο διάστημα αυτό είναι πεπερασμένη και ίση με t.*

Παρατήρηση 8 *Η υπόθεση της Κανονικότητας των r_{kh} δεν είναι απαραίτητη για το συμπέρασμα της λογαριθμοκανονικής κατανομής. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι για κάθε $n \geq 1$ υπάρχουν n τυχαίες μεταβλητές $\{r_{nk}, 1 \leq k \leq n\}$, όπου $n \to \infty$:*

$$\begin{array}{cccc} r_{11}, & 0, & \ldots, & 0; \\ r_{21}, & r_{22}, & \ldots, & 0; \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots; \\ r_{n1}, & r_{n2}, & \ldots, & r_{nn}; \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots; \end{array}$$

Υποθέτουμε ότι σε κάθε γραμμή οι τυχαίες μεταβλητές είναι ανεξάρτητες όμως αυτές που είναι σε διαφορετικές γραμμές μπορούν να είναι εξαρτημένες. Επίσης θεωρούμε F_{nk} *και* f_{nk} *τη συνάρτηση κατανομής και τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ.* r_{nk} *και υποθέτουμε ότι ικανοποιούν την εξής ιδιότητα:Για κάθε* $\eta > 0$, $\sum_{i=1}^{n} \int_{|x|>\eta} x^2 dF_{ni} \to 0$. *Αν συμβολίσουμε με* $T_n = \sum_{k=1}^{n} r_{nk}$ *και*

$$E(r_{nk}) = a_{nk}, \qquad V(r_{nk}) = \sigma_{nk}^2 < \infty,$$

$$E(T_n) = \sum_{k=1}^{n} a_{nk} = \mu T, \qquad V(T_n) = \sum_{k=1}^{n} \sigma_{nk}^2 = \sigma^2 T,$$

τότε από το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα Lindeberg-Feller έχουμε ότι

$$\frac{T_n - E(T_n)}{\sqrt{V(T_n)}} \xrightarrow{d} Z$$

καθώς $n \to \infty$, *όπου η* Z *είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή* $N(0,1)$. *Επομένως, η* $T_n \xrightarrow{d} \mu T + \sigma\sqrt{T}Z$ *καθώς* $n \to \infty$, *άρα η* T_n *συγκλίνει σε μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την* $N(\mu T, \sigma^2 T)$. *Συνεπώς,*

$$\ln \frac{S_n}{S_0} = \sum_{k=1}^{n} r_{nk} \xrightarrow{d} \mu T + \sigma\sqrt{T}Z \Rightarrow S_n = S_0 e^{\sum_{k=1}^{n} r_{nk}} \xrightarrow{d} e^{\mu T + \sigma\sqrt{T}Z}$$

καθώς $n \to \infty$,*όπου* Z *τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή* $N(0,1)$.

Η λογαριθμοκανονική υπόθεση θα μας οδηγήσει σε ένα τύπο για την παρούσα αξία του παραγώγου αλλά είναι σημαντικό να θυμόμαστε ότι ο τύπος αυτός δεν είναι καλύτερος από το διωνυμικό υπόδειγμα στο οποίο βασίζεται. Ο τύπος αυτός δεν συμφωνεί απόλυτα με αυτό που θα έβρισκε κάποιος στην αγορά, ο κύριος λόγος είναι ότι το λογαριθμοκανονικό μοντέλο δεν είναι το τέλειο μοντέλο για την πραγματική αγορά. Πολύ δουλειά έχει γίνει με σκοπό την βελτιωσή του, για παράδειγμα υποθέτοντας ότι η μεταβλητότητα είναι τυχαία και όχι σταθερή ως προς τον χρόνο.

Στην πραγματικότητα, κανένας δεν πιστεύει ότι η λογαριθμοκανονική υπόθεση είναι κυριολεκτικά σωστή. Είναι όμως μια βολική προσέγγιση, η οποία (α) εμπεριέχει το γεγονός ότι οι τιμές δεν γίνονται αρνητικές, (β) γενικά δεν είναι τόσο μακριά από αυτά που παρατηρούνται και (γ) οδηγεί σε ένα απλό τύπο τιμολόγησης και αντιστάθμισης.

Ισχυριζόμαστε ότι η λογαριθμοκανονική δυναμική μπορεί να προσεγγιστεί διαιρώντας το χρόνο σε πολλά διαστήματα και ρίχνοντας ένα νόμισμα για να προσδιορίσουμε την επιστροφη σε κάθε διάστημα.

Το νόμισμα μπορεί να είναι δίκαιο ή μεροληπτικό. Για απλότητα θα υποθέσουμε ότι είναι δίκαιο. Για την προσομοίωση μιας λογαριθμοκανονικής ανέλιξης με αναμενόμενη επιστροφή μ και μεταβλητότητα σ η επιστροφή πρέπει να είναι

$$\begin{cases} \mu h + \sigma\sqrt{h}, & \text{αν έρθει κεφάλι (πιθανότητα } 1/2) \\ \mu h - \sigma\sqrt{h}, & \text{αν έρθει γράμματα (πιθανότητα } 1/2) \end{cases}$$

Με άλλα λόγια, δοθέντος h θέλουμε να βρούμε το διωνυμικό δένδρο με

$$S^u_{t_k} = S_{t_{k-1}} e^{\mu h + \sigma\sqrt{h}},$$
$$S^d_{t_k} = S_{t_{k-1}} e^{\mu h - \sigma\sqrt{h}}$$

με ίση πιθανότητα πραγματοποίησης κάθε κλάδου ($p = 1/2$).

Έστω κάποιος χρόνος t και για απλότητα υποθέτουμε ότι είναι πολλαπλάσιο του h, δηλαδή $t = nh$. Φτάνοντας στον χρόνο αυτό αν έχουμε j φορές κεφαλή και $n - j$ φορές γράμματα, τότε η τιμή του πρωτογενούς προϊόντος είναι

$$S_0 \exp[n\mu h + j\sigma\sqrt{h} - (n-j)\sigma\sqrt{h}] = S_0 exp[\mu t + (2j - n)\sigma\sqrt{h}].$$

Θα πρέπει τώρα να μπορούμε να κατανοήσουμε την συνάρτηση κατανομής πιθανότητας (ασυμπτωτικά καθώς $h \to 0$), εφόσον μπορούμε να κατανοήσουμε τα αποτελέσματα της ρίψης νομίσματος πολλές φορές. Απο το Κεντρικό Οριακό θεώρημα γνωρίζουμε ότι η κατανομή για το νόμισμα προσεγγίζει την κανονική κατανομή όταν $n \to \infty$.

Για να το μελετήσουμε πιο ποσοτικά είναι χρήσιμο να χρησιμοποιήσουμε πιθανοθεωρητικό συμβολισμό. Αναγνωρίζοντας ότι η j είναι μια τυχαία μεταβλητή θα την συμβολίσουμε με X_n:

$$X_n = \text{ το πλήθος των κεφαλών κατά τις } n \text{ ρίψεις ενός δίκαιου νομίσματος.}$$

Εφόσον X_n είναι το άθροισμα n ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών(μια για κάθε ρίψη) που ακολουθούν την Bernoulli με πιθανότητα p, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι

$$E[X_n] = n/2, \;\; V(X_n) = n/4$$

Το Κεντρικό Οριακό θεώρημα μας δίνει ότι η $\frac{1}{n}X_n$ συγκλίνει σε μια Κανονική τυχαία μεταβλητή με μέσο $\frac{1}{2}$ και διασπορά $\frac{1}{4n}$. Είναι εύκολα τώρα από αυτό να δούμε ότι η

$$\frac{2X_n - n}{\sqrt{n}}$$

συγκλίνει σε μια Κανονική με μέση τιμή 0 και διασπορά 1. Εφόσον όμως $\sqrt{h} = \sqrt{t}/\sqrt{n}$, ο τύπος για την τελική τιμή του πρωτογενούς προϊόντος μπορεί να γραφεί ως

$$S_t = S_0 \exp[\mu t + \sigma\sqrt{t}\frac{2X_n - n}{\sqrt{n}}].$$

Επομένως, ασυμπτωτικά $h \to 0$ καθώς $n \to \infty$ με $t = nh$ σταθερό,

$$S_t = S_0 \exp[\mu t + \sigma\sqrt{t}Z],$$

όπου Z είναι μια τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή 0 και διασπορά 1. Ειδικότερα, $logS_t - logS_0$ είναι μια Κανονική τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή μt και διασπορά $\sigma^2 t$, όπως περιμέναμε.
Ο ισχυρισμός για την λογαριθμοκανονική δυναμική μας λέει επίσης ότι $logS_{t_2} - logS_{t_1}$ ακολουθεί Κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu(t_2 - t_1)$ και διασπορά $\sigma^2(t_2 - t_1)$ για όλα τα $t_1 < t_2$. Η επιβεβαίωση αυτού είναι όμοια με αυτό που κάναμε παραπάνω.

Παρατήρηση 9 *Παρατηρούμε ότι στους υπολογισμούς μας χρησιμοποιήσαμε μόνο την μέση τιμή και την διασπορά για την X_n, εφόσον βασιστήκαμε στο Κεντρικό Οριακό Θεώρημα. Ο συγκεκριμένος τρόπος που επιλέξαμε το δένδρο (δηλαδή με $S^u_{t_k} = S_{t_{k-1}} e^{\mu h + \sigma\sqrt{h}}$, $S^d_{t_k} = S_{t_{k-1}} e^{\mu h - \sigma\sqrt{h}}$ και με πιθανότητα να συμβεί η κάθε περίπτωση 1/2) δεν είναι ο μόνος. Ένας πιο γενικός τρόπος είναι να πάρουμε $S^u_{t_k} = S_{t_{k-1}} u$ με πιθανότητα p και $S^d_{t_k} = S_{t_{k-1}} d$ με πιθανότητα $1 - p$ και επιλέγοντας οι τρείς σταθερές u, d, p να ικανοποιούν δύο περιορισμούς που να συνδέονται με την μέση τιμή και την διασπορά.*

Στα προηγούμενα αντιστοιχίσαμε πιθανότητα 1/2 στο διωνυμικό δένδρο καθώς θέλαμε να κατανοήσουμε το λογαριθμοκανονικό μοντέλο ως το όριο της διαδικασίας ρίψης ενός νομίσματος. Έστω τώρα ένα διωνυμικό δένδρο, για κάποιο συγκεκριμένο h κοντά στο μηδέν. Θα το χρησιμοποιήσουμε για να τιμολογήσουμε παράγωγα.

Γνωρίζουμε ότι ο τύπος για την τιμολόγηση ενός παραγώγου με απόδοση $X = f(S_T)$ στο χρόνο ωρίμανσης T είναι

$$V_0 = e^{-rT}E^q[X] = e^{-rT}E^q[f(S_T)]$$

όπου το E^q συμβολίζει την αναμενόμενη τιμή ως προς το αδιάφορο μέτρο κινδύνου. Χρησιμοποιώντας το αδιάφορο μέτρο κινδύνου το νόμισμα μας δεν είναι πλέον δίκαιο. Αντιθέτως, είναι μεροληπτικό με πιθανότητα να έρθει κεφαλή (η μετοχή ανεβαίνει) q και με πιθανότητα να έρθουν γράμματα (η μετοχή να πέσει) $1-q$, όπου

$$q = \frac{e^{rh}-d}{u-d} = \frac{e^{rh}-e^{\mu h-\sigma\sqrt{h}}}{e^{\mu h+\sigma\sqrt{h}}-e^{\mu h-\sigma\sqrt{h}}}.$$

Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$ μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι

$$q = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{h}\frac{\mu - r + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}\right) + \text{ όροι δυνάμεων του } h.$$

δηλαδή στην πραγματικότητα η τιμή του q ειναι κοντά στο 1/2 όταν h είναι μικρό. Επίσης, από την παραπάνω σχέση έχουμε

$$q(1-q) = \frac{1}{4} + \text{ όροι δυνάμεων του } h.$$

Στόχος μας τώρα είναι να βρούμε την κατανομή για τις τελικές τιμές του S_T όταν χρησιμοποιούμε το $q-$μεροληπτικό νόμισμα και στη συνέχεια θα βρούμε την αναμενόμενη τιμή του $X = f(S_T)$ ως προς αυτή την κατανομή. Μπορούμε πάλι να χρησιμοποιήσουμε ανάλογα επιχειρήματα με αυτά που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω:

όπως πριν συμβολίζουμε με X_n το πλήθος των κεφαλών και έχουμε

$$S_t = S_0 \exp[\mu t + \sigma\sqrt{t}\frac{2X_n - n}{\sqrt{n}}].$$

Αλλά τώρα το X_n είναι άθροισμα ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με μέση τιμή q και διασπορά $q(1-q)$, έτσι η X_n έχει μέση τιμή nq και διασπορά $nq(1-q)$. Επομένως,

$$E[\frac{2X_n - n}{\sqrt{n}}] = (2q-1)\sqrt{n} \approx -\sqrt{t}\left(\frac{\mu - r + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}\right)$$

και

$$V[\frac{2X_n - n}{\sqrt{n}}] \approx 1.$$

Από το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα έχουμε ότι αυτή η τυχαία μεταβλητή θα συγκλίνει σε μια τ.μ. που θα ακολουθεί Κανονική κατανομή με μέση τιμή και διασπορά σύμφωνα με τους παραπάνω υπολογισμούς. Δηλαδή, καθώς το $h \to 0$, όταν χρησιμοποιούμε το μεροληπτικό νόμισμα με το αδιάφορο κινδύνου μέτρο,

$$S_t = S_0 \exp[\mu t + \sigma\sqrt{t}Z'].$$

όπου Z' είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί Κανονική κατανομή με μέση τιμή $\sqrt{t}\left(\frac{r-\mu-\frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}\right)$ και διασπορά 1. Ισοδύναμα, αν $Z' = Z + \sqrt{t}\left(\frac{r-\mu-\frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}\right)$,

$$S_t = S_0 \exp[(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\sqrt{t}Z],$$

όπου Z ακολουθεί την Κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά 1. Παρατηρούμε ότι η κατανομή του S_t εξαρτάται από τα σ και r αλλά όχι από το μ.

Η τιμή του δικαιώματος είναι e^{-rT} φορές την αναμενόμενη τιμή της απόδοσης του ως προς την αντίστοιχη κατανομή πιθανότητας. Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση κατανομής της Κανονικής για την εκτίμηση της αναμενόμενης τιμής, έχουμε

$$V_0 = e^{-rT}E[X] = e^{-rT}E[f(S_T)] = e^{-rT}E[f(S_0e^Y)]$$

όπου Y είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την Κανονική κατανομή με μέση τιμή $\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T$ και διασπορά $\sigma^2 T$ ή ισοδύναμα

$$V_0 = e^{-rT}\int_{-\infty}^{\infty} f(S_0e^y)\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}}\exp[\frac{-(y-[r-\sigma^2/2]T)^2}{2\sigma^2 T}]dy$$

Αυτή η σχέση είναι η γνωστή σχέση Black Scholes.

Παρατήρηση 10 *Η S_t συγκλίνει κατά νόμο στην τυχαία μεταβλητή S_0e^Y. Αυτό είναι ισοδύναμο με*

$$\lim_{n\to\infty} E[f(S_t)] = E[f(S_0e^Y)], \text{ για κάθε συνεχή και φραγμένη } f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

Άρα η σχέση Black Scholes που αναφέρουμε παραπάνω είναι σωστή για παράγωγα που έχουν φραγμένη απόδοση f, όμως θα πρέπει να διερευνήσουμε την περίπτωση των μη φραγμένων παραγώγων. Μας αρκεί να αποδείξουμε την ισχή της σχέσης για συναρτήσεις της μορφής

$$f(x) \le C(1+x^m), \;\; C, m > 0.$$

Πράγματι, αν θέσουμε $g(x) = \min\{f(x), L\}$ με L θετική σταθερά, τότε η g είναι συνεχής και φραγμένη από το L άρα από την κατά νόμο σύγκλιση έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} E[g(S_t)] = E[g(S_0e^Y)] \text{ για κάθε τυχαία σταθερά } L.$$

Συνεπώς, για $L\to\infty$ έχουμε $\lim_{n\to\infty} E[f(S_t)] = E[f(S_0e^Y)]$, δηλαδή η σχέση Black Scholes ισχύει για παράγωγα αυτής της μορφής. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι το δικαίωμα αγοράς $f(x) = (x-K)^+ < x$.

Για τώρα θα υποθέσουμε αρκετό να δουλέψουμε προς τα πίσω στο διωνυμικό δένδρο που έχουμε για μια συγκεριμένη μικρή τιμή h.

Κάνοντας μια επανάληψη στο τι έχουμε βρει παραπάνω έχουμε ότι δοθείσης μιας λογαριθμοκανονικής ανέλιξης τιμών ενός πρωτογενούς προϊόντος με επιστροφή μ και μεταβλητότητα σ και δοθέντος ενός h, το δένδρο θα πρέπει να κατασκευαστεί έτσι ώστε $S_t^u = uS_{t-1}, S_t^d = dS_{t-1}$ με

$$u = e^{\mu h+\sigma\sqrt{h}}, \;\; d = e^{\mu h-\sigma\sqrt{h}}$$

Αυτά καθορίζουν το μέτρο αδιάφορο κινδύνου q από τον τύπο που δόθηκε παραπάνω. Δουλεύοντας προς τα πίσω κατά μήκος του διωνυμικού δένδρου καταλήγουμε ισοδύναμα στην προεξοφλημένη αναμενόμενη τιμή $f(S_T)$ ως προς το αδιάφορο κινδύνου μέτρο. Η εύρεση της προεξοφλημένης αναμενόμενης τιμής του $X = f(S_T)$ ως προς το αντίστοιχο μέτρο αδιάφορο κινδύνου είναι ισοδύναμη διαδικασία με το να δουλέψουμε προς τα πίσω στο διωνυμικό δένδρο.

Όπως παρατηρήσαμε παραπάνω η κατανομή του S_t που αντιστοιχεί στο μέτρο αδιάφορο κινδύνου εξαρτάται από τη σ (την μεταβλητότητα του πρωτογενούς προϊόντος) και το r (επιτόκιο) αλλά όχι από το μ. Επομένως, για να τιμολογήσουμε παράγωγα δεν χρειαζόμαστε την τιμή του μ. Πιο συγκεκριμένα,αν έχουμε για παράδειγμα δύο λογαριθμοκανονικά μοντέλα για το πρωτογενές προϊόν με διαφορετικά μ αλλά ίδια σ, τότε στο όριο $h \to 0$ δεν θα δώσουν διαφορετικές τιμές για το παράγωγο. Άρα μπορούμε να επιλέξουμε το μ με όποιο τρόπο επιθυμούμε, δεν υπαρχει λόγος να απαιτήσουμε να έχει την πραγματική αναμενόμενη τιμή επιστροφής.
Οι πιο συνήθεις επιλογές είναι

1. το μ να έχει την αναμενόμενη τιμή της επιστροφής ή
2. το μ να είναι τέτοιο ώστε $\mu - r + \frac{1}{2}\sigma^2 = 0$ δηλαδή $\mu = r - \frac{1}{2}\sigma^2$.

Η τελευταία επιλογή έχει το πλεονέκτημα ότι η τιμή του q γίνεται ακόμα πιο κοντινή στο $1/2$. Ίσως φαίνεται περίεργο πως η αξία ενός παραγώγου δεν εξαρτάται από το μ αλλά μια διαισθητική εξήγηση που μπορούμε να δώσουμε είναι ότι έχοντας την υπόθεση της μη επιτηδειότητας, η τιμή του δεν θα πρέπει να εξαρτάται από την ανοδική ή καθοδική τάση του πρωτογενούς προϊόντος, κάτι το οποίο μας δίνεται κυρίως από το μ. Μια μη διαισθητική εξήγηση μπορεί να δωθεί παρατηρώντας το εξής:
Θεωρούμε την ειδική περίπτωση όπου $f(s) = s$, δηλαδή αν η απόδοση είναι απλά η αξία του πρωτογενούς προϊόντος στον χρόνο ωρίμανσης, τότε η αξία του παραγώγου στο χρόνο μηδέν είναι S_0. Ας δούμε τώρα την ανάλυση με βάση το συνεχές διωνυμικό μοντέλο. Η αξία του παραγώγου είναι

$$e^{-rT}E[S_0 e^Y]$$

όπου Y είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την Κανονική κατανομή με μέση τιμή $rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T$ και διασπορά $\sigma^2 T$.
Οι δύο τρόποι υπολογισμού μας δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα μόνο αν η Y είναι τέτοια ώστε

$$e^{-rT}E[e^Y] = 1.$$

Είναι όμως οι ποσοτητες αυτές ίσες ; Η απάντηση είναι ναι.
Αν δεχθούμε την ύπαρξη του τύπου τιμολόγησης $V_0 = e^{-rT}E[f(S_0 e^Y)]$, με Y Κανονική τυχαία

μεταβλητή με διασπορά $\sigma^2 T$, τότε η επιβεβαίωση της συνθήκης ισότητας των τιμών αναγκάζει την μέση τιμή της Y να είναι $rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T$.

Μένει λοιπόν να διαπιστώσουμε τον ισχυρισμό αυτό, ο οποίος έπεται από το επόμενο Λήμμα:

Λήμμα 6 *Αν Y είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί Κανονική κατανομή με μέση τιμή m και τυπική απόκλιση s, τότε*

$$E[e^Y] = e^{m+\frac{1}{2}s^2}$$

Απόδειξη. Ως γνωστόν

$$E[e^Y] = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^y e^{-\frac{(y-m)^2}{2s^2}} dy.$$

Συμπληρώνοντας το τετράγωνο

$$y - \frac{(y-m)^2}{2s^2} = m + \frac{1}{2}s^2 - \frac{(y-[m+s^2])^2}{2s^2}.$$

Επομένως, η αναμενόμενη τιμή της e^Y είναι

$$e^{m+\frac{1}{2}s^2} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} exp[\frac{-[y-[m+s^2]])^2}{2s^2}]dy$$

Κάνοντας αλλαγή μεταβλητών $u = (y - [m+s^2])/s$ γίνεται

$$e^{m+\frac{1}{2}s^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} exp^{-u^2/2} du = e^{m+\frac{1}{2}s^2}.$$

■

Συνεπώς, αν η Y έχει διασπορά $\sigma^2 T$, τότε από το Λήμμα θα πρέπει $E[e^Y] = e^{m+\frac{1}{2}\sigma^2 T}$ και από την συνθήκη ισότητας των τιμών η μέση τιμή της Y θα είναι $m = rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T$. Άρα, η τιμή του παραγώγου δεν εξαρτάται από το μ.

4.2 Εφαρμογές του τύπου Black-Scholes

Στην ενότητα αυτή θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο Black-Scholes με σκοπό να τιμολογήσουμε ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς και πώλησης. Όπως ήδη έχουμε αναφέρει η αξία στο χρόνο t ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος με απόδοση $f(S_T)$ είναι

$$V_t = e^{-r(T-t)} E^q[f(S_T)]$$

όπου q είναι το άνευ κινδύνου μέτρο πιθανότητας. Στο λογαριθμοκανονικό μοντέλο όπως αποδείξαμε στην προηγούμενη παράγραφο η κατανομή του πρωτογενούς προϊόντος μπορεί να προσδιοριστεί από την ιδιότητα

$$S_T = S_t \exp[(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}Z]$$

όπου η τυχαία μεταβλητή Z ακολουθεί Κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά 1. Ισοδύναμα η $\log[S_T/S_t]$ ακολουθεί Κανονική κατανομή με μέση τιμή $(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)$ και διασπορά $\sigma^2(T-t)$.

Η αξία του δικαιώματος για κάθε απόδοση f μπορεί να εκτιμηθεί με αριθμητική ολοκλήρωση. Αλλά στην περίπτωση των δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης μπορούμε να εξάγουμε ακριβείς εκφράσεις ως προς την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυπικής Κανονικής κατανομής

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du.$$

Έστω

- $c[S_0, T; K]$ η αξία στο χρόνο 0 ενός Ευρωπαϊκού διακαιώματος αγοράς με τιμή εξάσκησης K, χρόνο λήξης T και αρχική τιμή του πρωτογενούς προϊόντος S_0.
- $p[S_0, T; K]$ η αξία στο χρόνο 0 ενός Ευρωπαϊκού διακαιώματος πώλησης με τιμή εξάσκησης K, χρόνο λήξης T και αρχική τιμή του πρωτογενούς προϊόντος S_0.

Λήμμα 7 *Έστω X μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί Κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2. Τότε για κάθε πραγματικό αριθμό a και k,*

$$E[e^{aX}|X \geq k] = e^{a\mu + \frac{1}{2}\alpha^2\sigma^2} N(d)$$

με $d = \frac{-k+\mu+a\sigma^2}{\sigma}$.

Απόδειξη. Το αριστερό μέλος της σχέσης είναι εξ' ορισμού

$$E[e^{aX}|X \geq k] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{k}^{\infty} e^{ax} \exp\,[\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}] dx.$$

Συμπληρώνοντας το τετράγωνο

$$ax - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} = a\mu + \frac{1}{2}a^2\sigma^2 - \frac{[x-(\mu+a\sigma^2)]^2}{2\sigma^2}.$$

Επομένως,

$$E[e^{aX}|X \geq k] = e^{a\mu+\frac{1}{2}a^2\sigma^2}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_k^\infty \exp\,[\frac{-[x-(\mu+a\sigma^2)]^2}{2\sigma^2}]dx.$$

Αν θέσουμε $u = [x-(\mu+a\sigma^2)]/\sigma$ και $\kappa = [k-(\mu+a\sigma^2)]/\sigma$ έχουμε

$$\begin{aligned} e^{a\mu+\frac{1}{2}a^2\sigma^2}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_\kappa^\infty e^{-u^2/2}du &= e^{a\mu+\frac{1}{2}a^2\sigma^2}[1-N(\kappa)] \\ &= e^{a\mu+\frac{1}{2}a^2\sigma^2}N(d) \end{aligned}$$

όπου $d = -\kappa = (-k+\mu+a\sigma^2)/\sigma$. ■

Θα εφαρμόσουμε τώρα το Λήμμα για να τιμολογήσουμε το Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς. Θέλουμε να υπολογίσουμε

$$e^{-rT}\int_{-\infty}^\infty (S_0e^x - K)^+\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}}\exp[\frac{-(x-[r-\sigma^2/2]T)^2}{2\sigma^2 T}]dx.$$

Το ολοκλήρωμα είναι μη μηδενικό όταν $S_0e^x > K$, δηλαδή όταν $x > \log(K/S_0)$. Εφαρμόζοντας το Λήμμα με $a=1$ και $k = \log(K/S_0)$ όπως παραπάνω, έχουμε

$$e^{-rT}\int_k^{-\infty} S_0e^x\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}}\exp\frac{-(x-[r-\sigma^2/2]T)^2}{2\sigma^2 T}dx = S_0N(d_1)$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα ξανά για $a=0$ όπως παραπάνω, έχουμε

$$e^{-rT}\int_k^\infty K\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}}\exp\frac{-(x-[r-\sigma^2/2]T)^2}{2\sigma^2 T}dx = Ke^{-rT}N(d_2)$$

Από τα δύο αυτά αποτελέσματα καταλήγουμε στη σχέση

$$c[S_0,T;K] = S_0N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2),$$

όπου $d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}[\log(S_0/K)+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)T]$ και $d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}[\log(S_0/K)+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T] = d_1 - \sigma\sqrt{T}$

Θα εφαρμόσουμε τώρα το Λήμμα για να τιμολογήσουμε το Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης. Θέλουμε να υπολογίσουμε

$$e^{-rT}\int_{-\infty}^\infty (K - S_0e^x)^+\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}}\exp[\frac{-(x-[r-\sigma^2/2]T)^2}{2\sigma^2 T}]dx.$$

Το ολοκλήρωμα είναι μη μηδενικό όταν $S_0 e^x < K$, δηλαδή όταν $x < \log(K/S_0)$. Εφαρμόζοντας το Λήμμα με $a = 1$ και $k = \log(K/S_0)$ έχουμε

$$e^{-rT} \int_{\infty}^{k} S_0 e^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}} \exp \frac{-(x - [r - \sigma^2/2]T)^2}{2\sigma^2 T} dx = S_0(1 - N(d_1)) = S_0 N(-d_1)$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα ξανά για $a = 0$ έχουμε

$$e^{-rT} \int_{-\infty}^{k} K \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}} \exp \frac{-(x - [r - \sigma^2/2]T)^2}{2\sigma^2 T} dx = Ke^{-rT}(1 - N(d_2)) = Ke^{-rT} N(-d_2)$$

Από τα δύο αυτά αποτελέσματα καταλήγουμε στη σχέση

$$c[S_0, T; K] = Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1),$$

όπου d_1, d_2 όπως προηγουμένος.

Για δικαιώματα με χρόνο ωρίμανσης T και τιμή εξάσκησης K, η αξία σε κάποιο χρόνο t είναι ανάλογα $c[S_t, T - t; K]$ για ένα δικαίωμα αγοράς και $p[S_t, T - t; K]$ για ένα δικαίωμα πώλησης.

Παράρτημα Α΄

Βασικές Έννοιες Θεωρίας Πιθανοτήτων

Α΄.1 Βασικοί ορισμοί

Για να ορίσουμε μαθηματικά την έννοια του γεγονότος ή της συλλογής γεγονότων, θα πρέπει να εισάγουμε την έννοια της σ- άλγεβρας.

Ορισμός 5 *Έστω Ω κάποιο σύνολο. Μια σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$ επάνω στο σύνολο Ω είναι μία οικογένεια υποσυνόλων του Ω με τις παρακάτω ιδιότητες:*
(i) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$
(ii) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \equiv \Omega \backslash A \in \mathcal{F}$
(iii) $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Από τον ορισμό έχουμε την παρακάτω άμεση ιδιότητα

$$\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \cap_{i=1}^{\infty} A_i = (\cup_{i=1}^{\infty} A_i)^c \in \mathcal{F}$$

Οι σ-άλγεβρες συνήθως χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν δομές πληροφορίας. Τα στοιχεία του συνόλου Ω μπορούν να θεωρηθούν σαν οι πιθανές καταστάσεις του κόσμου ή τα πιθανά αποτελέσματα ενός πειράματος. Μια σ- άλγεβρα, η οποία εξ΄ ορισμού είναι ένα σύνολο υποσυνόλων του Ω, είναι κατά κάποιο τρόπο το σύνολο όλων των πιθανών ερωτήσεων που μπορεί κάποιος να θέσει για το πείραμα αυτό ή την κατάσταση του κόσμου. Τα υποσύνολα του Ω θα αναφέρονται ως γεγονότα.

Πρόταση 12 *Έστω D μια οικογένεια υποσυνόλων του Ω, τότε υπάρχει μοναδική ελάχιστη σ-άλγεβρα που την περιέχει. Η σ-άλγεβρα αυτή συνήθως συμβολίζεται με $\sigma(D)$.*

Άν ο Ω είναι το σύνολο $\mathbb{R}$ και U η οικογένεια των ανοιχτών υποσυνόλων του, τότε το σύνολο $\sigma(U)$ συμβολίζεται με $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ και τα στοιχεία του καλούνται σύνολα Borel του $\mathbb{R}$. Πρόκειται δηλαδή για την ελάχιστη σ-άλγεβρα που περιέχει τα ανοιχτά σύνολα, αποδεικνύεται ότι περιέχει και όλα τα κλειστά σύνολα και όλα τα διαστήματα του $\mathbb{R}$. Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$, δηλαδή υπάρχουν υποσύνολα του $\mathbb{R}$ που δεν είναι σύνολα Borel, δηλαδή δεν μπορούν να παραχθούν από τα ανοιχτά σύνολα (ή π.χ. τα διαστήματα) μέσω αριθμήσιμων τομών, ενώσεων και συμπληρωμάτων. Ο ορισμός των Borel συνόλων γενικεύεται με προφανή τρόπο και στον $\mathbb{R}^n$ και γενικότερα σε κάθε μετρικό χώρο.

Ορισμός 6 *Έστω ένα σύνολο Ω και μια σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$ που αποτελείται από υποσύνολα του Ω. Το ζεύγος $(\Omega, \mathcal{F})$ καλείται μετρήσιμος χώρος.*

Παράδειγμα 4 *Ας θεωρήσουμε το σύνολο $\Omega = \{1, 2, 3\}$ και την σ- άλγεβρα $\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset, \{2\}, \{1, 3\}\}$. Το ζεύγος $(\Omega, \mathcal{F})$ είναι μετρήσιμος χώρος.*

Χρειαζόμαστε σε αυτό το σημείο συναρτήσεις που να μας απαντούν στο ερώτημα του κατά πόσο είναι κάτι πιθανό να συμβεί. Αυτές οι συναρτήσεις θα ονομάζονται μέτρα πιθανότητας.

Ορισμός 7 *Ένα μέτρο πιθανότητας P επάνω σε ένα μετρήσιμο χώρο $(\Omega, \mathcal{F})$ είναι μια απεικόνιση $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ με τις ιδιότητες*
(i) $P(\emptyset) = 0,\ P(\Omega) = 1$
(ii) Αν $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων, τότε

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Η τριάδα τώρα $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ καλείται χώρος πιθανότητας.

Πρόταση 13 *Έστω δύο υποσύνολα A, B ενός συνόλου Ω και $\mathcal{F}$ μια σ-άλγεβρα που περιέχει το A. Μπορούμε να ορίσουμε την απεικόνιση $A \to P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$, η οποία είναι ένα νέο μέτρο πιθανότητας στο $\mathcal{F}$, το οποίο ονομάζεται υπό συνθήκη μέτρο πιθανότητας.*

Απόδειξη. Μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι η νέα αυτή απεικόνιση είναι μέτρο πιθανότητας. Πράγματι, αν θέσουμε $Q(A) = P(A|B)$ για δεδομένο B έχουμε

$$Q(\emptyset) = \frac{P(\emptyset \cap B)}{P(B)} = 0,\ Q(\Omega) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

και έστω $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \Omega$ ξένα ανά δύο, τότε και $\{A_i \cap B\}_{i=1}^{\infty}$ θα είναι ξένα ανά δύο

$$Q(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i|B) = \frac{P((\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\cup_{i=1}^{\infty}(A_i \cap B))}{P(B)} = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \sum_{i=n}^{\infty} Q(A_i)$$

■

Μια πολύ σημαντική έννοια είναι αυτή του μετρήσιμου συνόλου. Η έννοια αυτή ορίζεται πάντοτε ως προς μια συγκεκριμένη σ-άλγεβρα. Τα υποσύνολα A του Ω που ανήκουν στη σ-αλγεβρα $\mathcal{F}$ αποκαλούνται $\mathcal{F}-$μετρήσιμα. Όπως είναι προφανές το ότι ένα σύνολο είναι μετρήσιμο ως προς μια σ-άλγεβρα δεν συνεπάγεται ότι είναι μετρήσιμο και ως προς οποιαδήποτε άλλη.

Ορισμός 8 *Έστω Ω ένα σύνολο και $\mathcal{F}$ μια σ-άλγεβρα ορισμένη πάνω στο Ω. Η συνάρτηση $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ αποκαλείται $\mathcal{F}-$μετρήσιμη αν*

$$X^{-1}(U) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in U\} \in \mathcal{F}$$

για κάθε ανοιχτό σύνολο $U \subset \mathbb{R}^n$

Με άλλα λόγια λέμε ότι μια συνάρτηση X είναι $\mathcal{F}-$μετρήσιμη αν η αντίστροφη εικόνα μέσω της X ενός ανοιχτού υποσυνόλου του $\mathbb{R}^n$ ανήκει στην σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$.

Ορισμός 9 *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ένας χώρος πιθανοτήτων και $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ μια συνάρτηση. Αν η X είναι $\mathcal{F}-$μετρήσιμη, τότε θα λέμε ότι είναι τυχαία μεταβλητή.*

Μια τυχαία μεταβλητή είναι εξ΄ ορισμού μετρήσιμη ως προς την σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$. Όμως, κατά κανόνα θα υπάρχουν και μικρότερες σ-άλγεβρες για τις οποίες η X είναι επίσης μετρήσιμη.

Ορισμός 10 *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ένας χώρος πιθανοτήτων και μια τυχαία μεταβλητή X. Θα λέμε ότι η $\sigma(X)$ είναι η σ-άλγεβρα που παράγεται από την X, αν είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα για την οποία η τυχαία μεταβλητή X είναι μετρήσιμη.*

Είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι η σ-άλγεβρα αυτή θα είναι $\sigma(X) = \{X^{-1}(U) : U \subset \mathbb{R}^n\} = \{X^{-1}(U) : U \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$
Με άλλα λόγια η $\sigma(X)$ είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει την πληροφορία σχετικά με τις τιμές που μπορεί να πάρει η X. Επιπλέον, αν $X_i,\ i \in I$ είναι μια οικογένεια τ.μ., συμβολίζουμε με $\sigma(X_i,\ i \in I)$ την σ-άλγεβρα

$$\sigma(X_i,\ i \in I) = \sigma\left(\cup_{i \in I} \sigma(X_i)\right)$$

η οποία είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα στον Ω ως προς την οποία όλες οι $X_i,\ i \in I$ είναι μετρήσιμες. Θα δώσουμε παρακάτω καποιούς ορισμούς για την ανεξαρτησία. Θα ξεκινήσουμε με την ανεξαρτησία γεγονότων, μετά με την ανεξαρτησία συλλογών γεγονότων δηλαδή με σ-άλγεβρες και τέλος με την ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών.

Ορισμός 11 *Έστω $\{A_i\}_{i \in I}$ μια άπειρη οικογένεια γεγονότων. Θα λέμε ότι είναι ανεξάρτητη αν για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο J του I ισχύει*

$$P(\cap_{j \in J} A_j) = \prod_{j \in J} P(A_j)$$

Έστω τώρα μια σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$ επάνω σε ένα σύνολο Ω.

Ορισμός 12 *Οι σ-υποάλγεβρες $\mathcal{F}_i,\ i \in I$ της $\mathcal{F}$ ονομάζονται ανεξάρτητες αν για κάθε υποσύνολο J του I και κάθε σύνολο $A_i \in \mathcal{F}_i$ έχουμε*

$$P(\cap_{j \in J} A_j) = \prod_{j \in J} P(A_j)$$

Με βάση τον ορισμό των ανεξάρτητων αλγεβρών μπορούμε να ορίσουμε την έννοια των ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών.

Ορισμός 13 *Έστω $X_i,\ i \in I$ τυχαίες μεταβλητές. Θα λέμε ότι είναι ανεξάρτητες αν οι σ-άλγεβρες που παράγονται από τις τυχαίες μεταβλητές είναι ανεξάρτητες.*

Α΄.2 Υπό συνθήκη μέση τιμή

Η έννοια της υπό συνθήκης μέσης τιμής είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην στοχαστική ανάλυση.

Ορισμός 14 *Έστω ένας χώρος πιθανοτήτων $(\Omega, \mathcal{F}_0, P)$, μια σ-άλγεβρα $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_0$ και μια $\mathcal{F}_0-$μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή X για την οποία ισχύει $E[|X|] < \infty$. Τότε μπορούμε να ορίσουμε την τυχαία μεταβλητή $Y := E[X|\mathcal{F}]$ με τις ιδιότητες*
(i) Η Y είναι $\mathcal{F}-$μετρήσιμη.
(ii) $\int_A XdP = \int_A YdP$, για κάθε $A \in \mathcal{F}$.
Η τυχαία μεταβλητή $E[X|\mathcal{F}]$ ονομάζεται δεσμευμένη μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής X ως προς την σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$.

Διαισθητικά μπορούμε να θεωρήσουμε την $\mathcal{F}$ σαν την "πληροφορία" την οποία έχουμε στην διάθεση μας. Στην περίπτωση αυτή η υπό συνθήκη μέση τιμή $E[X|\mathcal{F}]$ είναι η καλύτερη εκτίμηση της τυχαίας μεταβλητής X δεδομένης της πληροφορίας που έχουμε στην διάθεση μας.
Η $E[X|\mathcal{F}]$ υπάρχει πάντοτε και είναι μοναδική σχεδόν για κάθε $\omega \in \Omega$ (αν υπάρχουν δύο τ.μ. που ικανοποιούν τον ορισμό, τότε θα είναι ίσες με πιθανότητα 1).
Αν Y είναι μια τυχαία μεταβλητή ορισμένη σε ένα χώρο πιθανότητας και $\sigma(Y)$ η σ-άλγεβρα που παράγεται από την Y, τότε η δεσμευμένη μέση τιμή $E[X|\sigma(Y)]$ συχνά συμβολίζεται με $E[X|Y]$. Είναι γνωστό ότι όταν οι X, Y είναι συνεχείς τ.μ., η δεσμευμένη μέση τιμή $E[X|Y] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)dx$, ανάλογα στη περίπτωση των διακριτών τ.μ. $E[X|Y] = \sum_i x_i P(X = x_i|Y)$. Οι μέσες τιμές αυτές είναι συναρτήσεις του y, για κάθε τιμή που θα πάρει η $Y = y$ έχουμε ανάλογη μέση τιμή.
Μερικές φορές θα γράφουμε $E[X|Y_i,\ i \in I]$ εννοώντας την $E[X|\sigma(Y_i,\ i \in I)]$ δηλαδή την μέση τιμή της X δεδομένης της σ-άλγεβρας που παράγεται από τις $Y_i,\ i \in I$.

Ιδιότητες Δεσμευμένης μέσης τιμής

Έστω ένας χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y με $E[|X|], E[|Y|] < \infty$ και $\mathcal{D}, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ υποάλγεβρες της $\mathcal{F}$.

(i) $E[X|\{\emptyset, \Omega\}] = X$.

Η σ-άλγεβρα $\{\emptyset, \Omega\}$ δεν μας παρέχει καμία πληροφορία, το Ω θα πραγματοποιηθεί σίγουρα ενώ το $\emptyset$ όχι.

(ii) $E[X|\mathcal{F}] = X,\ E[X|\sigma(X)] = X$.

Αν γνωρίζουμε ποιά από τα ενδεχόμενα της $\mathcal{F}$ ή της $\sigma(X)$ πραγματοποιήθηκαν, ουσιαστικά γνωρίζουμε και την τιμή που θα πάρει η X και επομένως η αναμενόμενη τιμή θα είναι η ίδια η X.

(iii) Αν η X είναι $\mathcal{D}-$μετρήσιμη και $E[|XY|] < \infty$, τότε $E[XY|\mathcal{D}] = XE[Y|\mathcal{D}]$

(iv) Αν $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2$, τότε $E[E[X|\mathcal{D}_2]|\mathcal{D}_1] = E[E[X|\mathcal{D}_1]|\mathcal{D}_2] = E[X|\mathcal{D}_1]$.

Δηλαδή αν δεσμεύσουμε ως προς δύο "πληροφορίες ", μια "μεγαλύτερη" και μια "μικρότερη", τότε είναι σαν να δεσμέυουμε μόνο ως προς την μικρότερη. Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως tower property.

Α΄.3 Βασικά Θεωρήματα Πιθανοτήτων

Θεώρημα 14 (Κεντρικό Οριακό Θεώρημα) *Έστω $\{X_n, n \geq 1\}$ μια ακολουθία ισόνομων και ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με μέση τιμή μ και πεπερασμένη διασπορά σ^2. Αν συμβολίσουμε με $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, τότε*

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \to Z \ \ \textit{κατα νόμο καθώς}\ n \to +\infty$$

όπου Z είναι η τυποποιημένη Κανονική κατανομή.

Κάποιες φορές οι $X_1, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, πιθανά της ίδιας κατανομής, αλλά οι κατανομές να εξαρτώνται από το n. Για παράδειγμα η Διωνυμική $B(n, p_n)$ όπου η πιθανότητα επιτυχίας p_n κάθε δοκιμής αλλάζει καθώς το n μεγαλώνει. Για την επίλυση αυτού του προβλήματος χρειαζόμαστε μια γενίκευση του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος όπου οι τυχαίες μεταβλητές δεν είναι ισόνομες.

Εστω για κάθε $n \geq 1$ υπάρχουν k_n τυχαίες μεταβλητές, $\{X_{ni}, 1 \leq i \leq k_n\}$, όπου το $k_n \to \infty$ καθώς $n \to \infty$:

$$\begin{matrix} X_{11}, & X_{12}, & \ldots, & X_{1k_1}; \\ X_{21}, & X_{22}, & \ldots, & X_{2k_2}; \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots; \\ X_{n1}, & X_{n2}, & \ldots, & X_{nk_n}; \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots; \end{matrix}$$

Έστω F_{ni} και f_{ni} η συνάρτηση κατανομής και πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X_{ni}.

Υποθέτουμε ότι

$$E[X_{ni}] = \mu_{ni}, \qquad V[X_{ni}] = \sigma^2_{ni}$$

$$E[\sum_{i=1}^{k_n} X_{ni}] = \sum_{i=1}^{k_n} \mu_{ni} = \mu_n, \qquad V[\sum_{i=1}^{k_n} X_{ni}] = \sum_{i=1}^{k_n} \sigma^2_{ni} = \sigma^2_n$$

Θεώρημα 15 (Κεντρικό Οριακό Θεώρημα Lindeberg-Feller) *Έστω $\sigma^2_{ni} < \infty$ για κάθε n και i. Για κάθε X_{ni} υποθέτουμε ότι $\mu_{ni} = 0$ και $\sum_{i=1}^{k_n} \sigma^2_{ni} = 1$. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Για κάθε $\epsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq i\leq k_n} P(|X_{ni}| > \epsilon) = 0$ και η T_n συγκλίνει κατά νόμον σε μια τυχαία μεταβλητή $Z\tilde{N}(0,1)$

(ii) Για κάθε $\eta > 0$, έχουμε

$$\sum_{i=1}^{k_n} \int_{|x|>\eta} x^2 dF_{ni} \to 0.$$

Α΄.4 Βέλτιστος χρόνος διακοπής

Σε αυτή την παράγραφο θα ασχοληθούμε με την εύρεση του βέλτιστου χρόνου διακοπής. Με αυτό εννοούμε την καλύτερη χρονική στιγμή για να σταματήσουμε μια διαδικασία σύμφωνα με την πληροφορία που έχουμε μέχρι εκείνη τη στιγμή, δηλαδή για παράδειγμα αν έχουμε στην κατοχή μας ένα Αμερικάνικο δικαίωμα να βρούμε τον βέλτιστο χρόνο στον οποίο θα μπορούσαμε να εξασκήσουμε το δικαίωμα.

Έστω $X = \{X_n\}_{n\geq 0}$ μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών ορισμένων σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ με φιλτράρισμα $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$, δηλαδή κάθε $\mathcal{F}_n$ είναι σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω και $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}$. Υποθέτουμε ότι το X_n είναι η απόδοση που θα έχουμε αν η διαδικασία σταματήσει στο χρόνο n. Επίσης, θεωρούμε ότι η $\{X_n\}_{n\geq 0}$ είναι προσαρμοσμένη στο φιλτράρισμα $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$, δηλαδή η X_n είναι $\mathcal{F}_n-$μετρήσιμη. Τέλος, θεωρούμε ότι η $\mathcal{F}_n$ αντιστοιχεί στην πληροφορία που έχουμε μέχρι την χρονική στιγμή n και οι αποφάσεις μας όσον αφορά τον βέλτιστο χρόνο διακοπής στο χρόνο n θα βασιστούν σε αυτή την πληροφορία.

Θα συμβολίσουμε με $\mathfrak{M}$ το σύνολο των χρόνων διακοπής και θα ορίσουμε την ακόλουθη οικογένεια στοιχείων του $\mathfrak{M}$ ως εξής:

$$\mathfrak{M}_n^N = \{\tau \in \mathfrak{M} : n \leq \tau \leq N\},$$

όπου $0 \leq n \leq N$. Για ευκολία θέτουμε $\mathfrak{M}^N = \mathfrak{M}_0^N$ και $\mathfrak{M}_n = \mathfrak{M}_n^\infty$.

Το πρόβλημα του βέλτιστου χρόνου διακοπής που θα μελετήσουμε είναι η επίλυση του προβλήματος

$$V_* = \sup_{\tau\in\mathfrak{M}} E[X_\tau] \tag{Α΄.4.1}$$

Παρατηρούμε ότι η (Α΄.4.1) περιλαμβάνει δύο θέματα (α) να υπολογίσουμε την αξία του V_*, (β) να βρούμε τον βέλτιστο χρόνο διακοπής τ_* στον οποίο επιτυγχάνεται το supremum.

Για να διαπιστώσουμε την ύπαρξη της $E[X_\tau]$ στην (Α΄.4.1) θα πρέπει να θέσουμε κάποιες επιπλέον συνθήκες για την X και τα τ. Αν η επόμενη συνθήκη ικανοποιείται (με $X_N \equiv 0$ όταν $N = \infty$):

$$E\left(\sup_{n\leq k\leq N} |X_k|\right) < \infty \tag{Α΄.4.2}$$

τότε $E[Q_\tau]$ είναι καλά ορισμένη για όλα τα $\tau \in \mathfrak{M}_n^N$.

Για τις υποοικογένειες $\mathfrak{M}_n^N$ των χρόνων διακοπής που ορίσαμε προηγουμένως θέτουμε αντίστοιχες συναρτήσεις αξιών ως

$$V_n^N = \sup_{\tau\in\mathfrak{M}_n^N} E[X_\tau], \tag{Α΄.4.3}$$

όπου $0 \leq n \leq N$. Πάλι για ευκολία θέτουμε $V^N = V_0^N$ και $V_n = V_n^\infty$. Ομοίως, θέτουμε $V = V_0^\infty$ όταν το supremum επιτυγχάνεται πανω σε ολά τα τ του $\mathfrak{M}$.

Για να λύσουμε το πρόβλημα (Α΄.4.3) όταν $N < \infty$ με την μέθοδο της προς τα πίσω επαγωγής θα πρέπει να εισάγουμε μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{S_n^N\}_{0\leq n\leq N}$ τέτοια ώστε για κάθε $n_0 \in \{0, 1, \ldots, N\}$ να ισχύει

$$S_{n_0}^N = \sup_{0\leq t\leq n_0} E[X_t]$$

Σημειώνουμε ότι η $\{S_n^N\}_{0\leq n\leq N}$ αποτελεί μια στοχαστική λύση του προβήματος μας. Ο βέλτιστος χρόνος διακοπής τ_n^N είναι σταθερός και είναι ο μικρότερος χρόνος στον οποίο η αναμενόμενη τιμή της X γίνεται για πρώτη φορά μέγιστη, δηλαδή

$$\tau_n^N = \inf\{n \leq k \leq N : S_k^N = Q_k\}, \ \ 0 \leq n \leq N$$

Η μέθοδος της προς τα πίσω επαγωγής είναι ουσιαστικά μια μέθοδος για να προσδιορίσουμε την $\{S_n^N\}_{0\leq n\leq N}$ και ορίζεται επαγωγικά ως εξής:

$$S_n^N = X_N, \text{ αν } n = N, \tag{Α΄.4.4}$$

$$S_n^N = \max(X_n, E[S_{n+1}^N|\mathcal{F}_n]), \ \ \text{αν } n = N-1, \ldots, 0 \tag{Α΄.4.5}$$

Το πρώτο μέρος του επόμενου θεωρήματος μας δίνει ότι τα S_n^N και τ_n^N λύνουν το πρόβλημα με στοχαστική έννοια. Το δεύτερο μέρος του θεωρήματος μας οδηγεί σε μια λύση του αρχικού μας προβλήματος (Α΄.4.3). Το τρίτο μέρος μας δίνει ένα supermartingale χαρακτηρισμό για την λύση.

Θεώρημα 16 *Έστω το πρόβλημα βέλτιστου χρόνου διακοπής (Α΄.4.3) υπό την ισχύ της συνθήκης (Α΄.4.2). Τότε για όλα τα $0 \leq n \leq N$ έχουμε:*

$$S_n^N \geq E[X_\tau|\mathcal{F}_n], \ \ \text{για κάθε } \tau \in \mathfrak{M}_n^N, \tag{Α΄.4.6}$$

$$S_n^N = E[X_{\tau_n^N}|\mathcal{F}_n]. \tag{Α΄.4.7}$$

Επιπλέον, αν $0 \leq n \leq N$ δίνεται και είναι σταθερό, τότε έχουμε:

(i) Ο χρόνος διακοπής τ_n^N είναι βέλτιστος για το (Α΄.4.3).

(ii) Αν τ_* είναι ένας βέλτιστος χρόνος διακοπής της (Α΄.4.3), τότε $\tau_n^N \leq \tau_*$ $P-\sigma.\beta.$

(iii) Η ακολουθία $\{S_k^N\}_{n\leq k\leq N}$ είναι το μικρότερο martingale το οποίο κυριαρχεί την $\{X_k\}_{n\leq k\leq N}$

(iv) Η ακολουθία $\{S_{k\wedge\tau_n^N}^N\}_{n\leq k\leq N}$ είναι martingale.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε επαγωγικά τη σχέση:

$$S_n^N \geq E[X_\tau|\mathcal{F}_n], \;\; \forall \tau \in \mathfrak{M}_n^N. \tag{Α΄.4.8}$$

Για $n = N$ επειδή $\mathfrak{M}_N^N = \{N\}$ αρκεί να ελέγξουμε αν

$$S_N^N \geq E[X_N|\mathcal{F}_N]$$

Η $\{X_n\}_{n\geq 0}$ είναι προσαρμοσμένη στο φιλτράρισμα $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$ και συνεπώς είναι $\mathcal{F}_N-$μετρήσιμη, έτσι

$$E[X_N|\mathcal{F}_N] = X_N$$

και η σχέση γίνεται

$$S_N^N \geq X_N$$

για την οποία ικανοποιείται η ισότητα εξ΄ ορισμού της S_n. Υποθέτουμε πως η (Α΄.4.8) ικανοποιείται για $n = N, N-1, \ldots, k$ και θα δείξουμε ότι ισχύει για $n = k-1$. Έστω $\tau \in \mathfrak{M}_{k-1}^N$ και ορίζουμε $\overline{\tau} = \tau \vee k \equiv \max(\tau, k)$ με $\overline{\tau} \in \mathfrak{M}_k^N$. Τότε μπορούμε να γράψουμε την X_τ για $\tau \in \mathfrak{M}_{k-1}^N$ ως

$$X_\tau = 1_{\{\tau=k-1\}}X_{k-1} + 1_{\{\tau\geq k\}}X_{\overline{\tau}}$$

και συνεπώς το δεξί μέλος της σχέσης (Α΄.4.8) γίνεται

$$E[X_\tau|\mathcal{F}_{k-1}] = E[1_{\{\tau=k-1\}}X_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1}] + E[1_{\{\tau\geq k\}}X_{\overline{\tau}}|\mathcal{F}_{k-1}]$$

Παρατηρούμε ότι η $1_{\{\tau=k-1\}}$ είναι $\mathcal{F}_{k-1}-$μετρήσιμη αφού

$$\{\tau = k-1\} = \cap_{i=0}^{k-1}\{t \leq i\} \in \mathcal{F}_{k-1}$$

και για κάθε $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ ισχύει ότι $\{\tau \leq i\} \in \mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_{k-1}$. Επιπλέον, η X_{k-1} είναι $\mathcal{F}_{k-1}-$μετρήσιμη άρα η συνάρτηση $1_{\{\tau=k-1\}}X_{k-1}$ θα είναι $\mathcal{F}_{k-1}-$μετρήσιμη , άρα

$$E[X_\tau|\mathcal{F}_n] = 1_{\{\tau=k-1\}}X_{k-1} + E[1_{\{\tau\geq k\}}X_{\overline{\tau}}|\mathcal{F}_{k-1}].$$

Επίσης, η $1_{\{\tau\geq k\}}$ είναι $\mathcal{F}_{k-1}-$μετρήσιμη αφού το $\{\tau \geq k\} = \{\tau < k\}^c \in \mathcal{F}_{k-1}$, άρα

$$E[X_\tau|\mathcal{F}_{k-1}] = 1_{\{\tau=k-1\}}X_{k-1} + 1_{\{\tau\geq k\}}E[X_{\overline{\tau}}|\mathcal{F}_{k-1}].$$

Επίσης, επειδή $\mathcal{F}_{k-1} \subset \mathcal{F}_k$ και την tower property θα ισχύει

$$E[X_\tau|\mathcal{F}_{k-1}] = E[E[X_{\overline{\tau}}|\mathcal{F}_k]|\mathcal{F}_{k-1}]$$

και έτσι η σχέση γίνεται

$$E[X_\tau|\mathcal{F}_{k-1}] = 1_{\{\tau=k-1\}}X_{k-1} + 1_{\{\tau\geq k\}}E[E[X_{\overline{\tau}}|\mathcal{F}_k]|\mathcal{F}_{k-1}].$$

Από τον ορισμό τώρα της S_n^N έχουμε

$$S_n^N = \max(X_n, E[S_{n+1}^N|\mathcal{F}_n]) \geq X_n$$

για κάθε $n = 0, \ldots, N-1$, επομένως $X_{k-1} \leq S_{k-1}^N$. Επιπλέον, από την επαγωγική υπόθεση για $n = N, N-1, \ldots, k$ ισχύει

$$S_k^N \geq E[X_\tau|\mathcal{F}_k],\ \forall \tau \in \mathfrak{M}_k^N$$

και εφόσον $\overline{\tau} \in \mathfrak{M}_k^N$ έπεται ότι $S_k^N \geq E[X_{\overline{\tau}}|\mathcal{F}_k]$. Συνεπώς,

$$E[X_\tau|\mathcal{F}_{k-1}] \leq 1_{\{\tau=k-1\}}S_{k-1}^N + 1_{\{\tau\geq k\}}E[S_k^N|\mathcal{F}_{k-1}]$$

Τέλος, από τον ορισμό της S_n^N θα ισχύει

$$S_{k-1}^N = \max(X_{k-1}, E[S_k^N|\mathcal{F}_{k-1}]) \geq E[S_k^N|\mathcal{F}_{k-1}].$$

Άρα

$$E[X_\tau|\mathcal{F}_k] \leq 1_{\{\tau=k-1\}}S_{k-1}^N + 1_{\{\tau\geq k\}}S_{k-1}^N = S_{k-1}^N.$$

Συνεπώς, αποδείξαμε τον ισχυρισμό

$$S_{k-1}^N \geq E[X_\tau|\mathcal{F}_k],\ \forall \tau \in \mathfrak{M}_{k-1}^N.$$

Για την επόμενη σχέση θα εργαστούμε πάλι επαγωγικά και θα αποδείξουμε ότι ισχύει η σχέση

$$S_n^N = E[X_{\tau_n^N}|\mathcal{F}_n] \tag{A'.4.9}$$

Για $n = N$ θα πρέπει να δείξουμε ότι

$$S_N^N = E[X_{\tau_N^N}|\mathcal{F}_N]$$

Επειδή όμως $S_N^N = X_N$, έχουμε

$$\tau_N^N = \inf\{N \leq k \leq N : S_k^N = X_k\} = \{N\}$$

και άρα

$$S_N^N = E[Q_{\tau_N^N}|\mathcal{F}_N] = E[X_N|\mathcal{F}_N] = X_N,$$

αφού η X_N είναι $\mathcal{F}_N-$μετρήσιμη. Από τον ορισμό της S_n^N έχουμε ότι η σχέση αυτή ισχύει. Υποθέτουμε τώρα ότι ισχύει η (A΄.4.9) για $n = N, N-1, \ldots, k$ και θα δείξουμε ότι ισχύει για $n = k-1$. Όμοια με πριν, θα σπάσουμε την $X_{\tau_{k-1}^N}$ ώστε

$$E[X_{\tau_{k-1}^N}|\mathcal{F}_{k-1}] = E[1_{\{\tau_{k-1}^N=k-1\}}X_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1}] + E[1_{\{\tau_{k-1}^N\geq k\}}X_{\tau_{k-1}^N}|\mathcal{F}_{k-1}]$$

Παρατηρούμε ότι $1_{\{\tau_{k-1}^N=k-1\}} = 1_{\{\tau=k-1\}}$ που έχουμε δείξει ότι είναι $\mathcal{F}_{k-1}-$μετρήσιμη και $1_{\{\tau_{k-1}^N\geq k\}} = 1_{\{\tau\geq k\}}$ για $\tau \in \mathfrak{M}_{k-1}^N$, δηλαδή είναι $\mathcal{F}_{k-1}-$μετρήσιμη. Αν τώρα εφαρμόσουμε την tower property θα έχουμε

$$E[X_{\tau_{k-1}^N}|\mathcal{F}_{k-1}] = 1_{\{\tau_{k-1}^N=k-1\}}X_{k-1} + 1_{\{\tau_{k-1}^N\geq k\}}E[E[X_{\tau_{k-1}^N}|\mathcal{F}_k]|\mathcal{F}_{k-1}].$$

Από την επαγωγική υπόθεση $E[X_{\tau_{k-1}^N}|\mathcal{F}_{k-1}] = S_k^N$, άρα

$$E[X_{\tau_{k-1}^N}|\mathcal{F}_{k-1}] = 1_{\{\tau_{k-1}^N=k-1\}}X_{k-1} + 1_{\{\tau_{k-1}^N\geq k\}}E[S_k^N|\mathcal{F}_{k-1}]$$

Επειδή όμως $\tau_{k-1}^N = \inf\{k-1 \leq t \leq N : S_t^N = X_t\}$ και έτσι όταν $\tau_{k-1}^N = k-1$ έπεται ότι $X_{k-1} = S_{k-1}^N$, άρα

$$E[X_{\tau_{k-1}^N}|\mathcal{F}_{k-1}] = 1_{\{\tau_{k-1}^N = k-1\}} S_{k-1}^N + 1_{\{\tau_{k-1}^N \geq k\}} E[S_k^N|\mathcal{F}_{k-1}].$$

Πάλι επειδή $\tau_{k-1}^N = \inf\{k-1 \leq t \leq N : S_t^N = X_t\}$ και δεδομένου ότι $\tau_{k-1}^N \geq k$ έπεται ότι $S_{k-1}^N \neq X_{k-1}$. Συνεπώς, θα πρέπει $S_{k-1}^N = E[S_k^N|\mathcal{F}_{k-1}]$, άρα

$$E[X_{\tau_{k-1}^N}|\mathcal{F}_{k-1}] = 1_{\{\tau_{k-1}^N = k-1\}} S_{k-1}^N + 1_{\{\tau_{k-1}^N \geq k\}} S_{k-1}^N = S_{k-1}^N$$

που είναι το ζητούμενο.

Θα αποδείξουμε τώρα το (i). Έστω $0 \leq n \leq N$, από τον ορισμό της S_n^N έχουμε $S_n^N \geq E[X_\tau|\mathcal{F}_n] \Rightarrow E[S_n^N]E[E[X_\tau|\mathcal{F}_n]], \ \forall \tau \in \mathfrak{M}_n^N$ και άρα

$$E[S_n^N] \geq E[X_\tau|\mathcal{F}_n] \ \ \forall \tau \in \mathfrak{M}_n^N$$

Άρα η $E[S_n^N]$ είναι άνω φράγμα των $E[X_\tau]$ για $\tau \in \mathfrak{M}_n^N$ και άρα θα ισχύει ότι

$$E[S_n^N] \geq \sup_{n \leq \tau \leq N} E[X_\tau] V_n^N$$

Αντιστρόφως, αποδείξαμε παραπάνω ότι $S_n^N = E[X_{\tau_n^N}|\mathcal{F}_n]$ και άρα

$$E[S_n^N] = E[E[X_{\tau_n^N}|\mathcal{F}_n]] = E[X_{\tau_n^N}]$$

έτσι

$$E[S_n^N] \leq \sup_{n\tau \leq N} E[S_n] = \sup_{n \leq \tau \leq N} E[X_{\tau_n^N}] \leq \sup_{n \leq \tau \leq N} E[X_\tau]$$

διότι παρατηρούμε ότι $\{\tau_n^N : n \leq \tau \leq N\}$ είναι υποσύνολο των $\{\tau : n \leq \tau \leq N\}$, άρα

$$E[S_n^N] \leq V_n^N$$

Συνεπώς, από τις δύο ανισότητες προκύπτει ότι

$$E[S_n^N] = V_n^N$$

η οποία μας δίνει το ζητούμενο

$$E[X_{\tau_n^N}] = \sup_{n \le \tau \le N} E[X_\tau]$$

δηλαδή ότι ο χρόνος τ_n^N για δεδομένο n είναι βέλτιστος.

Τέλος, θα αποδείξουμε την (ii), για τις $(iii), (iv)$ παραπέμπουμε στο πρώτο κεφάλαιο του βιβλίου του Goran Peskir ([8]). Ισχυριζόμαστε ότι αν το τ_* είναι βέλτιστο, θα πρέπει $S_{\tau_*}^N = X_{\tau_*}$ $P-\sigma.\beta.$ Πράγματι, έστω πως δεν ισχύει αυτό, τότε χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $S_k^N \ge X_k$ για όλα τα $n \le k \le N$, θα έχουμε $S_{\tau_*}^N \ge X_{\tau_*}$ με $P(S_{\tau_*}^N > X_{\tau_*}) > 0$. Από αυτό έπεται ότι $E[X_{\tau_*}] < E[S_{\tau_*}^N] \le E[S_n^N] = V_n^N$, όπου η δεύτερη ανισότητα είναι συνέπεια του θεωρήματος 9 και από το (iii) η $\{S_k^N\}_{n \le k \le N}$ είναι supermartingale, ενώ η ισότητα είναι συνέπεια του (i). Αυτό μας οδηγεί σε άτοπο, καθώς στη σχέση μας έχουμε αυστηρή ανισότητα και το τ_* έχουμε υποθέσει ότι είναι βέλτιστο. Επομένως, $S_{\tau_*}^N = X_{\tau_*}$ $P-\sigma.\beta.$ όπως ισχυριστήκαμε και το γεγονός ότι $\tau_n^N \le \tau_*$ $P-\sigma.\beta.$ έπεται από τον ορισμό του τ_n^N. ■

Βιβλιογραφία

[1] Α.Ν.Γιαννόπουλος, *Εισαγωγή στα Στοχαστικά Οικονομικά*, Σημειώσεις Μαθήματος, Τμήμα Στατιστικής ΟΠΑ, 2011.

[2] Α.Ν.Γιαννόπουλος, *Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στη Χρηματοοικονομική-Τόμος I*, Σημειώσεις Μαθήματος,Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικής Επιστήμης, Π.Αιγαίου, 2004.

[3] Α.Ν.Γιαννόπουλος, *Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στη Χρηματοοικονομική-Τόμος II*, Σημειώσεις Μαθήματος, Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικής Επιστήμης, Π.Αιγαίου, 2004.

[4] Μ.Λουλάκης, *Μαθηματική Χρηματοοικονομία I*, Σημειώσεις Μαθήματος, Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Παν.Κρήτης, 2006.

[5] Μ.Μπουτσίκας, *Εισαγωγή στη Στοχαστική Χρηματοοικονομική Ανάλυση*, Σημειώσεις Μαθήματος, Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, ΠΑ.ΠΕΙ., 2005.

[6] K.L.Chung, *A course in Probability Theory*,2nd ed., Acad.Press, 1974.

[7] J.Jacod,P.Potter, *Probability Essentials*,2nd ed., Springer, 2004.

[8] G.Peskir,A.Shiryaev, *Optimal Stopping and Free-Boundary Problems*, Birkhauser Verlag, 2006.

[9] R.J.Williams, *Introduction to the Mathematics of Finance*, American Mathematical Society , 2006.