



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

**ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ
ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗ ΘΕΡΜΙΚΗΣ
ΔΙΑΣΤΟΛΗΣ ΚΟΚΚΩΔΩΝ ΣΥΝΘΕΤΩΝ
ΥΛΙΚΩΝ ΔΙΑ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ
ΕΝΔΙΑΜΕΣΟΥ ΦΑΣΕΩΣ**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

ΜΠΕΗ – ΚΟΡΩΝΑΙΟΥ ΑΘΑΝΑΣΙΟΥ

Επιβλέπων καθηγητής: Σιδερίδης Αιμίλιος
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Φεβρουάριος 2013

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1	Εισαγωγή	11
1.1	Σύνθετα υλικά	11
1.1.1	Γενικά – Ορισμοί	11
1.1.2	Ιστορικό σύνθετων υλικών	13
1.1.3	Κατάταξη και ταξινόμηση σύνθετων υλικών	16
1.2	Πολυμερή	20
1.2.1	Δομή, γενικά χαρακτηριστικά και εξέλιξη πολυμερών	20
1.2.2	Ταξινόμηση πολυμερών	23
1.2.3	Πρόσθετα υλικά στα πολυμερή	26
1.2.4	Μηχανισμός ενισχυτικής δράσης των εγκλεισμάτων στα πολυμερή	27
1.2.5	Θερμοκρασία τήξης – Θερμοκρασία υαλώδους μετάπτωσης	29
1.3	Ρητίνες	31
1.3.1	Γενικά	31
1.3.2	Κατηγορίες ρητινών	31
1.3.3	Εποξειδική ρητίνη	33
1.3.4	Ιδιότητες στερεων εποξειδικών ρητινών	35
1.3.5	Ιδιότητες υγρών εποξειδικών ρητινών	35
1.3.6	Εφαρμογές των εποξειδικών ρητινών	37
1.3.7	Επίδραση των εγκλεισμάτων στις ιδιότητες των εποξειδικών ρητινών	39
Κεφάλαιο 2	Μηχανικές ιδιότητες σύνθετων υλικών	43
2.1	Παράμετροι που χαρακτηρίζουν την μηχανική συμπεριφορά των υλικών	43
2.1.1	Ελαστικές σταθερές (ν, E)	43
2.1.2	Μοντέλα και εκφράσεις για το Μέτρο Ελαστικότητας (E) κοκκωδών σύνθετων υλικών	46
2.1.3	Μέτρα ελαστικότητας με σφαιρικά εγκλείσματα	47
2.1.4	Περιορισμοί θεωρητικών μοντέλων σχετικά με το μέτρο ελαστικότητας των σύνθετων υλικών	51
2.1.5	Θεωρητική μελέτη μοντέλων για τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας του κοκκώδους υλικού	54
2.2	Παράμετροι που χαρακτηρίζουν την αντοχή κοκκωδών υλικών	55

2.2.1	Τάση θραύσης	55
2.2.2	Παραμόρφωση θραύσης των κοκκωδών σύνθετων υλικών	56
2.2.3	Ενέργεια θραύσης – Στεργρότητα	57
Κεφάλαιο 3	Θεωρία ενδιάμεσης φάσης σύνθετων υλικών	59
3.1	Γενικά – Ορισμός ενδιάμεσης φάσης (interphase)	59
3.2	Προσδιορισμός της ειδικής θερμότητας και θερμοκρασίας μεταβάσεως στην υαλώδη κατάσταση των σύνθετων υλικών ενισχυμένων με κόκκους μετάλλου. Εκτίμηση ενδιάμεσης φάσης	63
3.2.1	Εισαγωγή	63
3.2.2	Υλικά και πειραματική διαδικασία	65
3.2.3	Προσδιορισμός του πάχους της ενδιάμεσης φάσης	68
3.2.4	Η επίδραση της ενδιάμεσης φάσης και του ρυθμού θέρμανσης επί της υαλώδους μεταβατικής θερμοκρασίας (T_g)	70
Κεφάλαιο 4	Γεωμετρική μοντελοποίηση της κατανομής των εγκλεισμάτων	
4.1	Γενικά	71
4.2	Τετραφασικό κυβικό μοντέλο	72
4.2.1	Τετραφασικό κυβικό μοντέλο 1	72
4.2.2	Τετραφασικό κυβικό μοντέλο 2	76
4.2.3	Τετραφασικό κυβικό μοντέλο 3	79
4.3	Γεωμετρικοί περιορισμοί	81
Κεφάλαιο 5	Ανάπτυξη μοντέλων ενδιάμεσης φάσης	85
5.1	Υπολογισμός ακτίνων ισοδύναμου επταφασικού μοντέλου	85
5.2	Ελαστικές σταθερές για την ενδιάμεση φάση	96
5.2.1	Γραμμικό μοντέλο	97
5.2.2	Παραβολικό μοντέλο	98
5.2.3	Εκθετικό μοντέλο	99
5.2.4	Υπερβολικό μοντέλο	101
5.2.5	Λογαριθμικό μοντέλο	102
5.3	Πίνακες – Διαγράμματα ενδιαμέσου φάσεως – Συμπεράσματα	104

Κεφάλαιο 6	Θεωρητική ανάπτυξη του επταφασικού μοντέλου	117
6.1	Παραδοχές για την ανάπτυξη του θεωρητικού μοντέλου	117
6.2	Επταφασικό μοντέλο – Υπολογισμός του μέτρου ελαστικότητας του σύνθετου υλικού E_c	118
Κεφάλαιο 7	Σύγκριση αποτελεσμάτων με άλλα μοντέλα	157
7.1	Πειραματική διαδικασία – μεθοδολογία	157
7.2	Σύγκριση αποτελεσμάτων με άλλα μοντέλα – Συμπεράσματα	163
Κεφάλαιο 8	Προσεγγιστικός υπολογισμός μέτρου ελαστικότητας E_c	169
8.1	Προσεγγιστικός Υπολογισμός	169
8.2	Υπολογισμός ακτίνων του ισοδύναμου επταφασικού Μοντέλου	170
8.3	Προσεγγιστικός υπολογισμός μέτρου ελαστικότητας του σύνθετου υλικού	175
8.4	Σύγκριση με άλλα μοντέλα	195
Κεφάλαιο 9	Υπολογισμός Συντελεστή Θερμικής Διαστολής α_c	205
9.1	Θεωρητικός υπολογισμός Θερμικής Διαστολής α_c	205
9.2	Σύγκριση με άλλα μοντέλα	217
9.2.1	Τύποι συντελεστή Θερμικής Διαστολής α_c	217
9.2.2	Εφαρμογή των μοντέλων και των θεωρητικών σχέσεων	219
9.3	Γενικά συμπεράσματα	223
Κεφάλαιο 10	Θεωρητική ανάπτυξη του τετραφασικού μοντέλου με ισοδύναμη περιοχή	225
10.1	Υπολογισμός ακτίνων τετραφασικού μοντέλου	225
10.2	Υπολογισμός μέτρου ελαστικότητας σύνθετου υλικού	228
Βιβλιογραφία		239

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η ανάπτυξη ενός μοντέλου που θα βασίζεται στην θεωρία ελαστικότητας και θα μπορεί να προσδιορίσει το μέτρο ελαστικότητας E_c , καθώς και τον λόγο Poisson ν_c ενός σύνθετου υλικού, συναρτήσει της περιεκτικότητας των εγκλεισμάτων κόκκου σιδήρου διαμέτρου 150 μ m, λαμβάνοντας υπ' όψιν μας και την επίδραση των γειτονικών κόκκων αλλά και την ανάπτυξη ενδιάμεσου φάσεως μεταξύ της μήτρας από εποξειδική ρητίνη και του εγκλείσματος.

Γι αυτό θα προχωρήσουμε σταδιακά. Θα αναπτύξουμε αρχικά το μοντέλο μας λαμβάνοντας υπ' όψιν την δημιουργία επιπλέον φάσεων μόνο λόγω της επίδρασης των γειτονικών κόκκων. Αυτό μας οδηγεί σε τετραφασικό μοντέλο. Επειδή η διάταξη των κόκκων του σιδήρου μέσα στην μήτρα θεωρούμε ότι μπορεί να προσεγγισθεί από έναν στοιχειώδη κύβο, δημιουργούνται τρία πιθανά κυβικά τετραφασικά μοντέλα.

Παρόλο που η ανάπτυξη του μοντέλου μας δεν επηρεάζεται από την κατανομή των κόκκων σιδήρου, δηλαδή θα προκύψει μια μόνο εξίσωση και για τα τρία μοντέλα, η διάταξη των μορίων του σιδήρου στο υλικό επηρεάζει τα αποτελέσματα μας. Αυτό συμβαίνει διότι δημιουργεί αφ' ενός γεωμετρικούς περιορισμούς σχετικά με το ποια είναι η μέγιστη δυνατή περιεκτικότητα που μπορεί να αναπτυχθεί για κόκκους του μεγέθους που εξετάζουμε σε κυβική διάταξη, ενώ αφ' ετέρου επηρεάζει την τελική τιμή του E_c και του ν_c που θα προσδιορίσουμε, διότι μεταβάλλονται αναλόγως με την διάταξη των κόκκων σιδήρου, τα πάχη των φάσεων.

Αυτό είναι ούτως ή αλλιώς αναμενόμενο, αφού μιλάμε για μοντέλα. Η διάταξη των κόκκων στην μήτρα είναι στην πραγματικότητα τυχαία και ακανόνιστη. Κάποιο μοντέλο λοιπόν αναμένουμε να προσεγγίζει περισσότερο την πραγματικότητα, ενώ κάποιο άλλο όχι τόσο.

Στην συνέχεια θα θεωρήσουμε την ανάπτυξη ενδιάμεσου φάσεως, η ύπαρξη της οποίας έχει αποδειχθεί πειραματικά , σε κάθε σύνορο μεταξύ της μήτρας μας και του εγκλείσματος. Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας έγινε επίσης και ανάπτυξη της θεωρίας της ενδιάμεσου φάσεως καθώς και διαφορετικές προσεγγίσεις του τρόπου μεταβολής αυτής, συναρτήσει της ακτίνας του ισοδύναμου σφαιρικού μας μοντέλου το οποίο χρησιμοποιήσαμε και το αναπτύξαμε μέσω της θεωρίας ελαστικότητας .

Λαμβάνοντας υπ' όψιν και την ανάπτυξη ενδιάμεσου φάσεως ανάμεσα στην μήτρα και το εγκλείσμα, οδηγούμαστε σε ένα επταφασικό μοντέλο. Την ενδιάμεση φάση την τοποθετούμε ενδιάμεσα από το εγκλείσμα και την μήτρα.

Τελικά εξετάζοντας την επίδραση των γειτονικών κόκκων ταυτόχρονα με την επίδραση της ενδιάμεσου φάσεως , προκύπτουν δύο επταφασικά μοντέλα τα οποία και συγκρίναμε με ήδη υπάρχοντα μοντέλα από την διεθνή βιβλιογραφία εν σχέσει με πειραματικά δεδομένα που είχαμε στην διάθεση μας από το εργαστήριο της αντοχής των υλικών. Τα αποτελέσματα που πήραμε είναι ικανοποιητικά, αφού τα δύο μας μοντέλα (ειδικά το 2^ο) προσεγγίζουν τα πειραματικά δεδομένα με ακρίβεια εφάμιλλη του μοντέλου Counto, το οποίο θεωρείται έως τώρα ίσως το καλύτερο μοντέλο που έχει αναπτυχθεί.

Ένα δεύτερο σκέλος της παρούσας εργασίας είναι η ανάπτυξη ενός **προσεγγιστικού μοντέλου** που θα μπορεί να προσδιορίσει το μέτρο ελαστικότητας E_c , καθώς και τον λόγο Poisson ν_c ενός σύνθετου υλικού , συναρτήσει της περιεκτικότητας των εγκλεισμάτων κόκκου σιδήρου διαμέτρου 150 μ m, λαμβάνοντας υπ' όψιν μας και την επίδραση των γειτονικών κόκκων αλλά και την ανάπτυξη ενδιάμεσου φάσεως μεταξύ της μήτρας από εποξειδική ρητίνη και του εγκλείσματος.

Το προσεγγιστικό αυτό μοντέλο θα το επιτύχουμε σταδιακά . Αρχικά θεωρούμε πως Θα αναπτύξουμε το μοντέλο μας λαμβάνοντας υπ' όψιν την δημιουργία επιπλέον φάσεων μόνο λόγω της επίδρασης των γειτονικών κόκκων.

Αυτό μας οδηγεί σε τετραφασικό μοντέλο. Επειδή η διάταξη των κόκκων του σιδήρου μέσα στην μήτρα θεωρούμε ότι μπορεί να προσεγγισθεί από έναν στοιχειώδη κύβο, δημιουργούνται 2 πιθανά κυβικά τετραφασικά μοντέλα. Όπως και παραπάνω επειδή η ανάπτυξη του μοντέλου μας δεν επηρεάζεται από την κατανομή των κόκκων σιδήρου θα προκύψει μια μόνο εξίσωση και για τα δύο μοντέλα. Λαμβάνοντας υπ' όψιν και την ανάπτυξη ενδιάμεσου φάσεως ανάμεσα στην μήτρα και το έγκλεισμα, για λόγους απλοποίησης οδηγούμαστε σε ένα εννιαφασικό μοντέλο. Την ενδιάμεση φάση την τοποθετούμε ενδιάμεσα από το έγκλεισμα και την μήτρα. Τελικά το επταφασικό μοντέλο το συγκρίναμε με άλλα θεωρητικά μοντέλα άλλων ερευνητών.

Εν συνεχεία, στην εργασία αυτή αναπτύξαμε όπως και προηγουμένως ένα μοντέλο το οποίο θα μπορεί να προσδιορίσει τον συντελεστή θερμικής διαστολής α ενός σύνθετου υλικού συναρτήσει της περιεκτικότητας των εγκλεισμάτων κόκκου σιδήρου διαμέτρου 150 μm λαμβάνοντας υπ' όψιν μας και την επίδραση των γειτονικών κόκκων αλλά και την ανάπτυξη ενδιάμεσου φάσεως μεταξύ της μήτρας από εποξειδική ρητίνη και του εγκλείσματος. Τελικά το επταφασικό μοντέλο που καταλήγουμε το συγκρίνουμε με άλλα θεωρητικά μοντέλα.

Τέλος, προχωρήσαμε στην ανάπτυξη ενός τετραφασικού μοντέλου χωρίς την ύπαρξη ενδιάμεσης φάσης αλλά με τη δημιουργία μιας ισοδύναμης περιοχής εγκλεισμάτων και μήτρας, που θα μπορεί να προσδιορίσει το μέτρο ελαστικότητας E_c , καθώς και τον λόγο Poisson ν_c ενός σύνθετου υλικού, συναρτήσει της περιεκτικότητας των εγκλεισμάτων κόκκου σιδήρου διαμέτρου 150 μm , λαμβάνοντας υπ' όψιν μας και την επίδραση των γειτονικών κόκκων. Στην ισοδύναμη περιοχή, θα διερευνήσουμε τον τρόπο σύνδεσης των εγκλεισμάτων με τη μήτρα σε σειρά και εν παραλλήλω. Τελικά το τετραφασικό μοντέλο που καταλήγουμε το συγκρίνουμε με άλλα θεωρητικά μοντέλα και βλέπουμε πως απέχει πολύ από τις πειραματικές τιμές και δεν είναι ικανοποιητικό.

ABSTRACT

In this thesis a theoretical model for the evaluation of the elastic modulus in particulate - filled polymers has been developed by considering the concept of interphase between main phases. According to this model an important parameter affecting the behaviour of the composite is the adhesion characterized by the existence of an interphase layer between filler and matrix which possesses physico - chemical properties different from those of the constituent phases. The model also takes into account the influence of neighbouring spherical inclusions on the stiffness of the composite material. A microstructural composite model reproducing the basic cell of the composite at a microscopic scale was transformed to a 7 - phase representative volume element in order to apply the classical theory of elasticity to this simplified model of a composite - unit cell.

The theoretical values were compared to those predicted by other theories and to experimental results obtained from experiments on iron / epoxy composites with various frequencies and temperatures. The thickness and volume fraction of the interphase were determined by heat capacity measurements according to an existing theory.

1. Εισαγωγή

1.1 Σύνθετα υλικά

1.1.1 Γενικά – Ορισμός

Ο όρος “σύνθετο”, για ένα σύστημα, σημαίνει ότι αυτό αποτελείται από δύο ή περισσότερα μέρη. Συνεπώς, ένα υλικό αποτελούμενο από δύο ή περισσότερα υλικά ή φάσεις μπορεί να χαρακτηριστεί ως σύνθετο υλικό (composite material).

Πιο ειδικά, σήμερα, ως σύνθετα υλικά αναγνωρίζονται εκείνα τα υλικά, τα οποία συντίθενται από επιμέρους υλικά με σημαντικά διαφορετικές μηχανικές και φυσικές ιδιότητες μεταξύ τους. Το ίδιο το σύνθετο υλικό έχει και αυτό διαφορετικές ιδιότητες από εκείνες των συστατικών του.

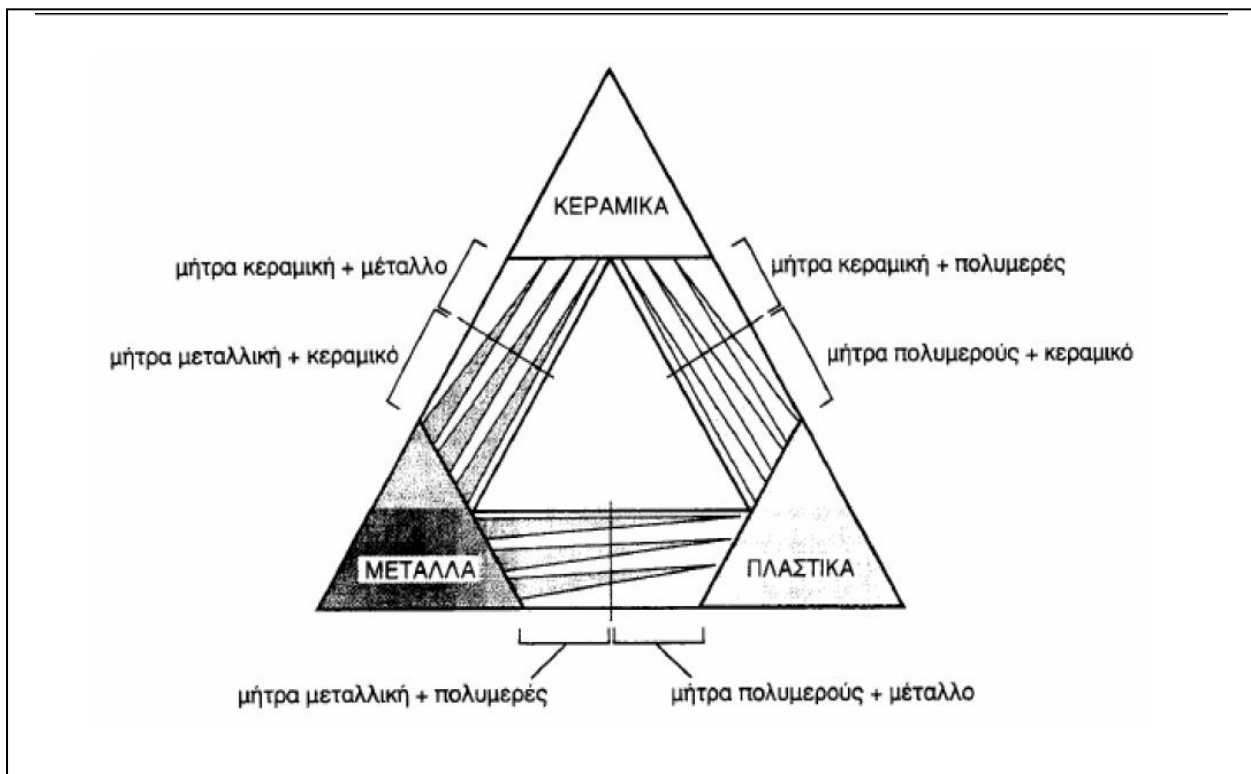
Η προϋπόθεση για να καταταχθεί ένα υλικό στην κατηγορία των σύνθετων είναι να ακολουθείται ο εξής κανόνας:

Το υλικό πρέπει να προκύπτει ως συνδυασμός συστατικών μερών, στα οποία οι ιδιότητες του ενός να είναι σημαντικά μεγαλύτερες από τις ιδιότητες του άλλου (τουλάχιστον πενταπλάσιες) και η κατ’ όγκο περιεκτικότητα του ενός να μην είναι πολύ μικρή ($>10\%$).

ΟΡΙΣΜΟΣ (Agarwal – 1990): Σύνθετα είναι τα υλικά , τα οποία μακροσκοπικά αποτελούνται από δύο ή περισσότερα χημικά ευδιάκριτα συστατικά μέρη που έχουν μια συγκεκριμένη διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ τους.

Το ένα από τα συστατικά μέρη, χαρακτηρίζεται ως συστατικό ενίσχυσης ή δευτερεύουσα φάση και προσδίδει στο σύνθετο υλικό βελτιωμένες μηχανικές, κυρίως, ιδιότητες. Το δεύτερο συστατικό καλείται μήτρα ή κύρια φάση, είναι συνήθως χαμηλής πυκνότητας και η συμμετοχή του στο σύνθετο εξασφαλίζει τη μέγιστη δυνατή εκμετάλλευση των ιδιοτήτων της ενίσχυσης.

Στο σχήμα 1.1 παρουσιάζεται ο συνδυασμός ανά δύο των βασικών οικογενειών υλικών (μεταλλικά, πολυμερικά και κεραμικά υλικά) και οι ομάδες των σύνθετων υλικών που προκύπτουν



Σχήμα 1.1 Κατηγορίες Σύνθετων υλικών

1.1.2 Ιστορικό σύνθετων υλικών

Τα σύνθετα υλικά υλικά χρησιμοποιούνται από τον άνθρωπο από αρχαιοτάτων χρόνων. Υλικά που εύκολα βρίσκουμε στη φύση (ξύλο, πέτρα, πηλός, κόκκαλα) χρησιμοποιήθηκαν ευρύτατα από τον άνθρωπο, ο οποίος έμαθε σύντομα να βελτιώνει τις ιδιότητες τους ενισχύοντας τα υλικά αυτά με πρόσθετα συστατικά.

Για παράδειγμα, οι Αιγύπτιοι (5000 π.Χ.) χρησιμοποιούσαν την τεχνική της ενίσχυσης τούβλων πηλού με πλέγμα αχύρων, με αποτέλεσμα τη μείωση των τάσεων συστολής που αναπτύσσονταν κατά την ξήρανση του πηλού. Επίσης, παρατήρησαν ότι οι πλάκες από πολύστρωτες βέργες ξύλου, παρουσίαζαν πολύ μεγαλύτερη αντοχή από το φυσικό ξύλο. Έτσι δημιούργησαν ένα είδος “κόντρα πλακέ” που είχε ικανοποιητική αντοχή σε διάφορες κατευθύνσεις και ήταν πολύ ανθεκτικό στη διόγκωση και στη στρέβλωση που προκαλείται από την απορρόφηση της υγρασίας.

Η περίοδος άνθισης και επιβολής των Μογγόλων στους γειτονικούς λαούς συνδυάστηκε με την κατασκευή ενός είδους τόξου που ήταν ιδιαίτερα ευλύγιστο και ελαφρύ καθιστώντας το έτσι, πολύτιμο όπλο στα χέρια των ιππέων τους. Το τόξο αυτό ήταν κατασκευασμένο από ένα είδος κεράτου συνδεδεμένο με διάφορες στρώσεις από τένοντες ζώων. Στην αρχαία Ελλάδα χρησιμοποιήθηκαν επίσης σύνθετες κατασκευές για όπλα. Ο Όμηρος στην Ιλιάδα περιγράφει την ασπίδα του Αχιλλέα, λέγοντας ότι την αποτελούσαν επτά εναλλασσόμενες στρώσεις από δέρμα-χρυσό και σίδηρο.

Στη Μεσοποταμία (1000 π.Χ.) εφαρμόστηκε η τεχνική του βερνικόματος των τούβλων και των πλακιδίων με σκοπό τον περιορισμό της επιφανειακής φθοράς. Επίσης, την ίδια εποχή εμφανίστηκαν σχεδίες από καλάμι παπύρου “δεμένου” με άσφαλτο, ενώ κατά τους Ρωμαϊκούς χρόνους, η οδοποιία στηρίχθηκε στην ενίσχυση του οδοστρώματος με τρίμματα κεραμιδιών.

Οι Ασσύριοι έφτιαζαν πλωτές γέφυρες με σανίδες εμποτισμένες με αδιάβροχη άσφαλτο, ενώ στον Μεσαίωνα κατασκευάστηκαν σπαθιά, ασπίδες και θώρακες από συνδυασμούς στρωμάτων διαφόρων μετάλλων.

Η χρήση σιδηρόβεργας για προεντεταμένο σκυρόδεμα, που χρησιμοποιείται στις οικοδομές της σύγχρονης εποχής δεν είναι παρά η μετεξέλιξη της τεχνικής της ανάμιξης γύψου με ζωικό τρίχωμα, η οποία ήταν μια πρακτική μέθοδος ενίσχυσης εύθραυστων υλικών κατασκευής στους αναπτυσσόμενους πολιτισμούς.

Το πρώτο συνθετικό υλικό βασισμένο σε μήτρα πλαστικού εμφανίστηκε τη δεκαετία του 1920 και επρόκειτο για μίγμα ινιδίων ξύλου με φαινολική φορμαλδεΐδη, γνωστό αργότερα ως βακελίτης προς τιμήν του Βέλγου επιστήμονα Leo Baekeland.

Η ανάπτυξη των σύνθετων υλικών με ενίσχυση ινών για υλικά που έχουν μεγάλους λόγους αντοχής / βάρους και ακαμψίας / βάρους κατά τη διάρκεια των τελευταίων 30 ετών υπήρξε ραγδαία. Αυτή η ανάπτυξη συνδυάστηκε με την προηγούμενη ανάπτυξη των υψηλής αντοχής ινών γυαλιού και των υψηλής δυσκαμψίας ινών βορίου (1960) και την έντονη τάση της αεροδιαστημικής βιομηχανίας για μεγαλύτερη απόδοση με παράλληλη μείωση βάρους των αεροσκαφών και των διαστημοπλοίων.

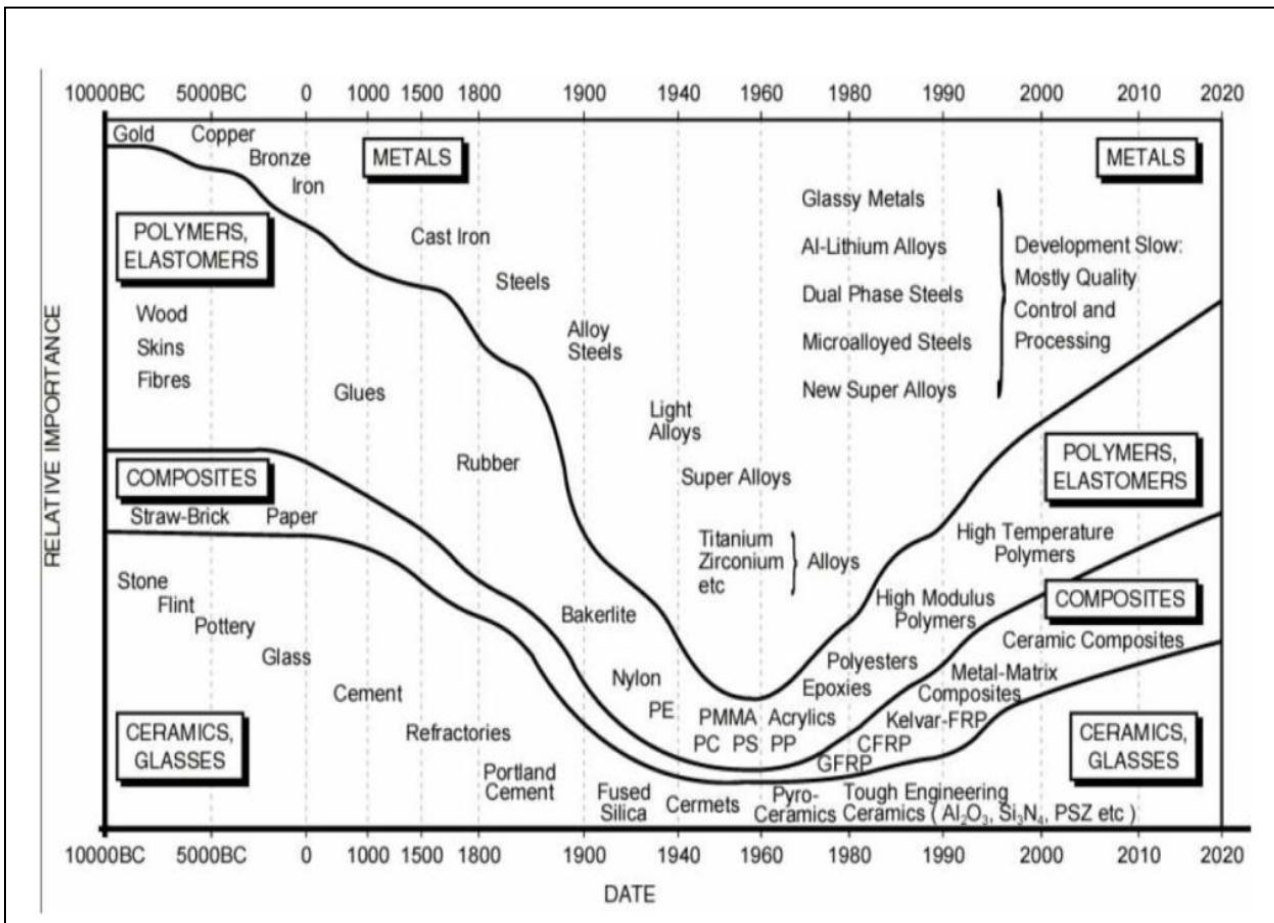
Το 1964 διατέθηκαν στην αγορά, αρχικά σε μικρές ποσότητες οι ίνες άνθρακα (carbon fibers), οι οποίες αποτελούν τις ευρύτερα χρησιμοποιούμενες ενισχύσεις στις αεροδιαστημικές κατασκευαστικές εφαρμογές.

Το 1971 διατέθηκαν στο εμπόριο οι ίνες αραμιδίου, οι οποίες χρησιμοποιούνται ευρέως στα ελαστικά των αυτοκινήτων καθώς και σε αεροναυπηγικές κατασκευές.

Τα όσα αναφέρθηκαν παραπάνω μας δείχνουν ότι ο άνθρωπος είχε αντιληφθεί από την αρχαιότητα ότι συνδυάζοντας δύο ή περισσότερα υλικά μπορούσε να

κατασκευάσει ένα τρίτο “σύνθετο υλικό” που ικανοποιούσε καλύτερα τις κατασκευαστικές του ανάγκες.

Η πορεία εξέλιξης των σύνθετων υλικών δεν παρουσιάζει την ίδια ταχύτητα δια μέσου των αιώνων. Μέχρι τον 19^ο αιώνα μ.Χ. η εξέλιξη αυτή είναι πολύ μικρή και τα σύνθετα υλικά του 19^{ου} αιώνα δεν απέχουν και πάρα πολύ από αυτά των αρχαίων Αιγυπτίων, Ελλήνων κ.λ.π., ούτε σε ποιότητα ούτε σε μεθόδους κατασκευής. Η πραγματικά αλματώδης εξέλιξη των σύνθετων υλικών σημειώθηκε τον 20^ό αιώνα και κυρίως τα τελευταία 30 χρόνια και είναι συνέπεια μιας άλλης σημαντικής εξέλιξης: της εξέλιξης της επιστήμης των γιγαντιαίων μορίων των πολυμερών.



Σχήμα 1.2 Ιστορική εξέλιξη των σύνθετων υλικών

1.1.3 Κατάταξη και ταξινόμηση σύνθετων υλικών

Ανάλογα με τη μορφή του συστατικού ενίσχυσης, τα σύνθετα υλικά κατατάσσονται σε τρεις μεγάλες κατηγορίες:

- Ινώδη σύνθετα (fibrous composites): με ενίσχυση ινών εμποτισμένων σε υλικό μήτρας
- Στρωματικά σύνθετα (laminated composites): με επάλληλες στρώσεις υλικών
- Κοκκώδη σύνθετα (particulate composites): με ενίσχυση σωματιδίων (εγκλεισμάτων) διασκορπισμένων στο υλικό της μήτρας

Ανάλογα με τη μορφή του συστατικού της μήτρας, τα σύνθετα υλικά κατατάσσονται σε τρεις βασικές κατηγορίες:

- Σύνθετα υλικά με μεταλλική μήτρα (mmc: metal matrix composites)
- Σύνθετα υλικά με κεραμική μήτρα (cmc: ceramic matrix composites)
- Σύνθετα υλικά με οργανική μήτρα (pmc: polymer matrix composites)

Ανάλογα με τη μορφή του εγκλείσματος:

- Έγκλεισμα σε μορφή ινών
- Έγκλεισμα σε μορφή κόκκων
- Έγκλεισμα σε μορφή φύλλων

Η επιλογή κατάλληλης μήτρας, εξαρτάται από τη θερμοκρασία και το περιβάλλον χρήσης του σύνθετου, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.3



Σχήμα 1.3 Θερμοκρασιακά όρια χρήσης των υλικών

Στην παρούσα μελέτη, θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με τα κοκκώδη σύνθετα υλικά οργανικής μήτρας

1.1.3.1 Κοκκώδη σύνθετα υλικά

Τα κοκκώδη σύνθετα υλικά αποτελούνται από κόκκους ενός υλικού μέσα σε ένα άλλο υλικό-μήτρα. Οι κόκκοι μπορεί να είναι μεταλλικοί ή και μπορεί να μην είναι, όπως και η μήτρα. Συνεπώς, έχουμε τέσσερις δυνατούς συνδυασμούς υλικού εγκλείσματος και μήτρας :

I. Υλικά μη μεταλλικού εγκλείσματος εντός μη μεταλλικής μήτρας

Παράδειγμα τέτοιου υλικού είναι το σκυρόδεμα (όχι το οπλισμένο). Το σκυρόδεμα αποτελείται από κόκκους άμμου και πέτρας δεμένους με ένα μίγμα τσιμέντου και νερού, το οποίο έχει αντιδράσει χημικά και έχει γίνει πιο σκληρό. Η αντοχή του σκυροδέματος αποδίδεται στην ύπαρξη κόκκων πέτρας.

Επίσης φλούδες μη μεταλλικών υλικών, όπως η μίκα ή το γυαλί, μπορούν να αποτελέσουν το κοκκώδες εγκλείσμα μιας γυάλινης ή πλαστικής μήτρας αντίστοιχα και με τον τρόπο αυτό μπορεί να προκύψει ένα σύνθετο υλικού αυτού του είδους.

II. Υλικά μεταλλικού εγκλείσματος εντός μη μεταλλικής μήτρας

Πολλά υλικά αυτού του είδους έχουν κατασκευαστεί με σκοπό την αύξηση της θερμικής αγωγιμότητας, τη μείωση του συντελεστή θερμικής διαστολής και τη μείωση της φθοράς της μήτρας.

Ένα παράδειγμα τέτοιου υλικού είναι έγκλεισμα χαλκού μέσα σε εποξειδική ρητίνη. Το έγκλεισμα του χαλκού αυξάνει κατά πολύ την ηλεκτρική αγωγιμότητα του σύνθετου.

Επίσης είναι σύνηθες το σύνθετο υλικό με έγκλεισμα από μέταλλο υπό μορφή φλούδας.

III. Υλικά μεταλλικού εγκλείσματος εντός μεταλλικής μήτρας

Τα υλικά αυτού του τύπου δεν είναι κράματα. Το μεταλλικό έγκλεισμα έχει μορφή κόκκων μέσα στη μήτρα και δεν είναι διαλυμένο μέσα σε αυτήν όπως είναι στα κράματα.

Σαν παράδειγμα αυτής της κατηγορίας μπορούμε να αναφέρουμε τους κόκκους μολύβδου εντός κραμάτων χαλκού και χάλυβα, που ως σκοπό έχουν τη βελτίωση της κατεργασιμότητας του κράματος στις εργαλειομηχανές.

IV. Υλικά μη μεταλλικού εγκλείσματος εντός μεταλλικής μήτρας

Μη μεταλλικά υλικά μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε μορφή κοκκώδους εγκλείσματος μέσα σε μεταλλική μήτρα. Τα υλικά που προκύπτουν ονομάζονται κεραμομέταλλα και διαχωρίζονται σε δύο είδη ανάλογα με το έγκλεισμα. Το πρώτο είδος είναι τα κεραμομέταλλα με κόκκους οξειδίου ενός μετάλλου πάνω σε μεταλλική μήτρα, τα οποία χρησιμοποιούνται στην κατασκευή εργαλείων και σε εφαρμογές υψηλής θερμοκρασίας όπου η αντίσταση στη διάβρωση είναι σημαντική. Το άλλο είδος είναι τα κεραμομέταλλα με κόκκους καρβιδίου ενός μετάλλου μέσα σε μεταλλική

μήτρα. Το καρβίδιο του βολφραμίου μέσα σε μήτρα κοβαλτίου χρησιμοποιείται σε τμήματα μηχανών τα οποία απαιτούν μεγάλη αντοχή στην οξείδωση και στη διάβρωση, ενώ έχει συντελεστή θερμικής διαστολής παραπλήσιο με αυτό του χάλυβα, κάτι που το κάνει κατάλληλο για χρήσεις σε βαλβίδες κ.λ.π.. Επίσης, το καρβίδιο του τιτανίου μέσα σε μήτρα νικελίου ή κοβαλτίου χρησιμοποιείται συχνά σε εφαρμογές υψηλής θερμοκρασίας, όπως για παράδειγμα σε διάφορα μέρη στροβιλομηχανών. Τέλος τα κεραμομέταλλα χρησιμοποιούνται στους πυρηνικούς αντιδραστήρες ως καύσιμα.

1.1.3.2 Οργανικές μήτρες

Οι οργανικές μήτρες διακρίνονται σε:

I. Θερμοπλαστικές: Πρόκειται για πολυμερή με γραμμικές αλυσίδες

Λόγω του χαμηλού τους κόστους, χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές ευρείας κατανάλωσης. Αντιπροσωπευτικά παραδείγματα αποτελούν οι μήτρες πολυαιθυλενίου (PE) και πολυστυρενίου (PS).

Ως ενισχυτικά θερμοπλαστικών μητρών χρησιμοποιούνται φθηνά υλικά (αμιάντος, μαρμαρυγίες, κ.α.), ώστε και το τελικό προϊόν να είναι χαμηλής τιμής.

II. Θερμοσκληρυνόμενες:

Χρησιμοποιούνται σε περιπτώσεις που απαιτούνται καλύτερες μηχανικές ιδιότητες. Τα θερμοσκληρυνόμενα πολυμερή παρουσιάζουν τρισδιάστατη δομή πλέγματος από πρωτογενείς ισχυρούς δεσμούς μεταξύ των μοριακών αλυσίδων. Με την αύξηση της θερμοκρασίας, αυξάνεται και το πλήθος των διαμοριακών

δεσμών καθιστώντας τα υλικά αυτά σκληρότερα καθώς και ψαθυρότερα. Τέτοιες μήτρες είναι:

- Πολυεστερικές ρητίνες, που ενισχύονται με ίνες γυαλιού και δίνουν υαλονήματα
- Εποξειδικές ρητίνες, με μέγιστη θερμοκρασία λειτουργίας τους 200° C, καλύτερες μηχανικές ιδιότητες από τις προηγούμενες και χρήση στην αεροναυπηγική.
- Φαινολικές ρητίνες, οι οποίες έχουν χαμηλή πλαστικότητα και μέτριες μηχανικές ιδιότητες. Η μέγιστη θερμοκρασία λειτουργίας τους ωστόσο, φτάνει τους 400° C.

Στην παρούσα εργασία θα μελετήσουμε τις ιδιότητες σύνθετων υλικών με κοκκώδη εγκλείσματα και οργανική μήτρα εποξειδικής ρητίνης.

1.2 Πολυμερή

1.2.1 Δομή, γενικά χαρακτηριστικά και εξέλιξη πολυμερών

1.2.1.1 Δομή πολυμερών

Η λέξη πολυμερές είναι σύνθετη και προέρχεται από τις λέξεις πολύς + μέρος. Τα πολυμερή είναι φυσικά ή τεχνητά παρασκευασμένα υλικά που αποτελούνται από μόρια μεγάλων διαστάσεων, τα μακρομόρια. Δομικά συστατικά των μακρομορίων είναι τα μονομερή, τα οποία ενώνονται μεταξύ τους και σχηματίζουν τη μακρομοριακή αλυσίδα των πολυμερών. Το επαναλαμβανόμενο μονομερές (A) είναι η δομική μονάδα που

επαναλαμβάνεται σε όλη τη δομή του πολυμερούς. Το πολυμερές τότε έχει την εξής μορφή:



Ο αριθμός των επαναλήψεων του μονομερούς (n) ονομάζεται βαθμός πολυμερισμού (degree of polymerization). Ο βαθμός πολυμερισμού έχει σχέση και με το μοριακό βάρος και επηρεάζει τόσο τις φυσικές όσο και τις μηχανικές ιδιότητες των πολυμερών.

Στα πολυμερή συναντάμε τρία είδη χημικών δεσμών: α) ομοιοπολικούς δεσμούς κατά μήκος της αλυσίδας του μακρομορίου, που είναι και οι πιο ισχυροί, β) δεσμούς Van Der Waals και γ) δεσμούς υδρογόνου μεταξύ απομακρυσμένων τμημάτων της ίδιας αλυσίδας ή μεταξύ διαφορετικών μακρομορίων, οι οποίοι είναι οι πιο ασθενείς. Εξαιτίας του μεγάλου αριθμού δεσμών άνθρακα στο μόριο του πολυμερούς, η αλυσίδα του πολυμερούς είναι αδύνατο να ευθυγραμμιστεί. Τα μόρια των πολυμερών με την ίδια σύσταση μπορούν να έχουν διαφορετική διευθέτηση των ατόμων τους, ένα φαινόμενο που ονομάζεται ισομέρεια.

1.2.1.2 Γενικά χαρακτηριστικά των πολυμερών

Μερικά από τα πιο σημαντικά χαρακτηριστικά των πολυμερών είναι:

- Αποτελούνται κυρίως από C και H
- Έχουν χαμηλά σημεία τήξης
- Τα πιο πολλά δεν είναι αγωγοί θερμότητας και ηλεκτρισμού

Τα πολυμερή έχουν μικρή θερμική αγωγιμότητα και για αυτό το λόγο χρησιμοποιούνται ως θερμομονωτικά. Επίσης, βρίσκουν εφαρμογή και ως μονωτές ηλεκτρισμού. Η ιδιότητα τους αυτή οφείλεται στο γεγονός ότι οι ομοιοπολικοί δεσμοί των πολυμερών δεν επιτρέπουν ελεύθερο ηλεκτρικό

φορτίο, οπότε και εμφανίζουν μεγάλη ειδική ηλεκτρική αντίσταση. Τα πολυμερικά υλικά είναι ελαφριά, δηλαδή έχουν χαμηλή πυκνότητα και αυτό γιατί τα στοιχεία H, C έχουν μικρά ατομικά βάρη ενώ η δομή των πολυμερών είναι ανοιχτή.

1.2.1.3 Η εξέλιξη των πολυμερών

Το μόριο ενός πολυμερούς είναι ένα μόριο μεγάλου μεγέθους (μακρομόριο) που αποτελείται από επαναλαμβανόμενες δομικές μονάδες. Οι δομικές μονάδες αυτές είναι απλά χημικά παράγωγα τα οποία προέρχονται από τα αντίστοιχα μονομερή ή αρχικά υλικά με άνοιγμα διπλού δεσμού.

Τα πολυμερή συνθέτουν το υλικό όλων των ζωντανών οργανισμών. Τα κύτταρα τόσο των ζωικών όσο και των φυτικών ιστών με το πρωτόπλασμα τους και τον πυρήνα τους, αποτελούνται από τέτοια μόρια. Ωστόσο η μοριακή δομή των πολυμερών και η επίδραση της δομής αυτής πάνω στις ιδιότητές τους ήταν άγνωστες έως και πριν λίγες δεκαετίες.

Με την ανακάλυψη ότι τα πολυμερή είναι μακριές και με τάξη αλυσίδες μικρότερων μορίων, ο άνθρωπος κατόρθωσε να δημιουργήσει κατά βούληση, όχι μόνο πολυμερή πανομοιότυπα με τα ήδη γνωστά των ζώντων οργανισμών – πράγμα που άλλοτε ήταν εντελώς αδύνατο – αλλά επιπλέον και πρωτότυπα πολυμερή, που δεν συναντώνται στη φύση και είναι τα πιο ενδιαφέροντα από τη σκοπιά των σύνθετων υλικών. Τα αποτελέσματα των επιτευγμάτων αυτών ήταν η δημιουργία πλήθους νέων βιομηχανιών που παράγουν τεράστια ποικιλία από πλαστικές ύλες, συνθετικές υφαντικές ύλες και συνθετικό ελαστικό.

Ένα πολυμερές υλικό ικανοποιεί τον ορισμό ενός σύνθετου υλικού, που δόθηκε στην §1.1 σε μικροσκοπική κλίμακα γιατί αποτελείται από δομικές

μονάδες προερχόμενες από αντίστοιχα μονομερή ή αρχικά υλικά που συνήθως έχουν πολύ διαφορετικές ιδιότητες από τις δικές του.

1.2.2 Ταξινόμηση πολυμερών

Οι όροι “πολυμερή” και “πλαστικά” συνήθως θεωρούνται συνώνυμοι. Στην πραγματικότητα όμως υπάρχει μεγάλη διαφορά μεταξύ τους. Το πολυμερές είναι ένα καθαρό υλικό που προκύπτει από τη διαδικασία του πολυμερισμού και εκπροσωπεί την οικογένεια των υλικών που χαρακτηρίζονται από μακρομοριακή δομή. Καθαρά πολυμερή σπανίως χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές. Συνήθως, τα πολυμερή εμπεριέχουν και διάφορες πρόσθετες ουσίες και τότε ονομάζονται πλαστικά.

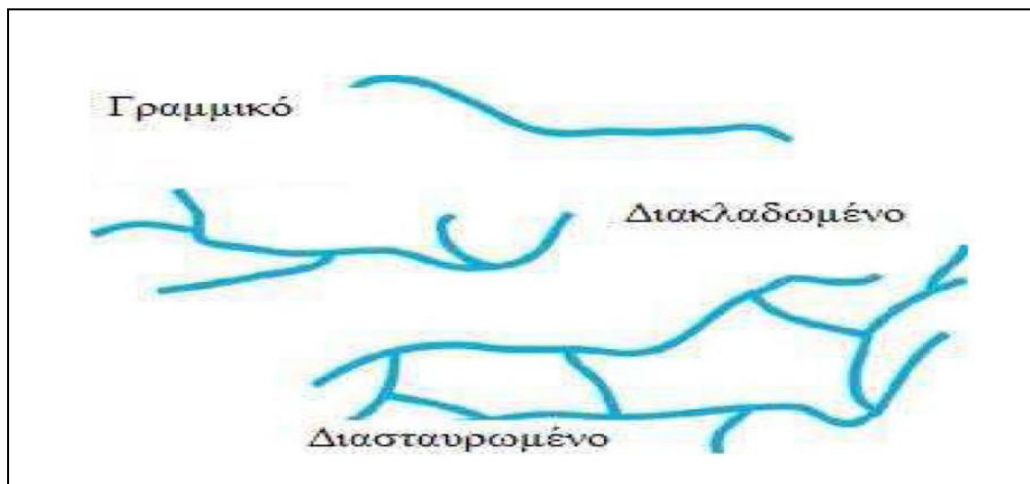
Η ταξινόμηση των πολυμερών πραγματοποιείται με διάφορα κριτήρια.

Με κριτήριο την αρχιτεκτονική της αλυσίδας τους διακρίνονται σε:

- Γραμμικά
- Διακλαδωμένα
- Διασταυρωμένα
- Δικτυωμένα

Γραμμικά είναι τα πολυμερή στα οποία οι ομάδες μονομερών συνδέονται μεταξύ τους από τα άκρα σε απλές αλυσίδες. Μεταξύ των αλυσίδων αναπτύσσονται δυνάμεις Van der Waals. Παραδείγματα τέτοιων πολυμερών είναι το πολυαιθυλένιο, το πολυβινυλοχλωρίδιο, το πολυστυρένιο, το nylon, κ.α.. Διακλαδωμένα είναι αυτά που οι κύριες αλυσίδες συνδέονται με πλευρικές αλυσίδες. Η παρουσία πλευρικών αλυσίδων μειώνει την πυκνότητα του πολυμερούς. Στα διασταυρωμένα πολυμερή οι γειτονικές πλευρικές

αλυσίδες ενώνονται μεταξύ τους με ομοιοπολικούς δεσμούς. Πολλά από τα ελαστικά υλικά είναι αυτής της μορφής. Τέλος, τα δικτυωμένα πολυμερή ονομάζονται έτσι εξαιτίας των τρισδιάστατων δικτύων που σχηματίζουν τα άτομα άνθρακα των ομάδων των μονομερών με τους τρεις ενεργούς ομοιοπολικούς δεσμούς που διαθέτουν.



Σχήμα 1.4 Γραμμικό, διακλαδωμένο και διασταυρωμένο πολυμερές

Με κριτήριο τη μηχανική συμπεριφορά τους κατά τη θέρμανση διακρίνονται:

- Θερμοπλαστικά (thermoplastics)
- Θερμοσκληρυνόμενα (thermo sets)
- Ελαστομερή (elastomers)

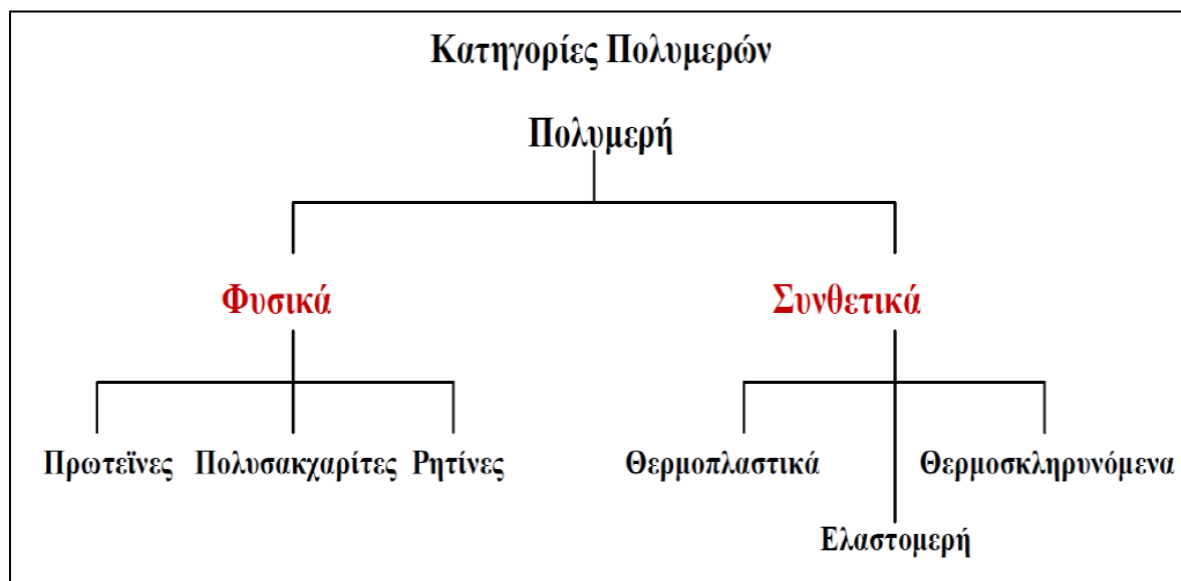
Τα θερμοπλαστικά πολυμερή μαλακώνουν όταν θερμαίνονται και σκληραίνουν όταν ψύχονται, μεταβολές που είναι αντιστρεπτές. Επίσης είναι όλκιμα και μαλακά υλικά και στην κατηγορία των θερμοπλαστικών ανήκουν τα περισσότερα γραμμικά πολυμερή. Τα θερμοσκληρυνόμενα πολυμερή σκληραίνουν μόνιμα όταν ψύχονται και δεν μαλακώνουν με θέρμανση. Είναι σκληρότερα, ισχυρότερα και πιο ψαθυρά από τα θερμοπλαστικά και

διαθέτουν σταθερότητα διαστάσεων. Τα περισσότερα διασταυρωμένα και δικτυωμένα πολυμερή είναι θερμοσκληρυνόμενα, όπως για παράδειγμα το καουτσούκ, οι εποξειδικές και οι πολυεστερικές ρητίνες. Τέλος, τα ελαστομερή μπορούν να υποστούν κατά τη φόρτισή τους μεγάλες παραμορφώσεις και να επανέλθουν στο αρχικό τους σχήμα όταν το φορτίο σταματήσει να υφίσταται. Έχουν μικρά μέτρα ελαστικότητας ενώ η ελαστική τους περιοχή στην καμπύλη τάσης – παραμόρφωσης δεν είναι γραμμική.

Με κριτήριο την προέλευση τα πολυμερή διακρίνονται σε:

- Φυσικά πολυμερή (natural polymers)
- Ημισυνθετικά πολυμερή (artificial polymers)
- Συνθετικά πολυμερή (synthetic polymers)

Τα φυσικά πολυμερή βρίσκονται στη φύση. Ημισυνθετικά ονομάζονται τα πολυμερή που προκύπτουν από χημική επεξεργασία φυσικών πρώτων υλών. Τα συνθετικά πολυμερή έχουν μη ανανεώσιμες πρώτες ύλες και συντίθενται χημικά.



Σχήμα 1.5 Κατηγορίες πολυμερών

1.2.3 Πρόσθετα υλικά στα πολυμερή

Έχει διαπιστωθεί από τα πρώτα βήματα της ανάπτυξης της βιομηχανίας των πολυμερών ότι η ενσωμάτωση πρόσθετων στοιχείων στα πολυμερή οδηγεί στη δημιουργία πολύ χρήσιμων σύνθετων υλικών. Ο όρος πρόσθετα υλικά αναφέρεται σε εκείνα τα υλικά που διασπείρονται μέσα στο πολυμερές χωρίς να προκαλέσουν σημαντική αλλαγή στη δομή του. Για το λόγο αυτό εξαιρούνται οι καταλύτες, τα μέσα σκλήρυνσης που χρησιμοποιούνται στα θερμοσκληρυνόμενα συστήματα.

Τα πρόσθετα υλικά ταξινομούνται ανάλογα με την λειτουργία τους και όχι με κάποια χημική βάση και είναι:

- I. πρόσθετα που τροποποιούν τις μηχανικές ιδιότητες
 - πλαστικοποιητές
 - εγκλείσματα
 - μέσα δυσκαμψίας
- II. πρόσθετα που τροποποιούν τις ιδιότητες επιφανείας
- III. πρόσθετα για τη μείωση του κόστους
 - διαλύτες
 - κοκκώδη εγκλείσματα
- IV. πρόσθετα που βοηθούν την διεργασία παραγωγής
 - σταθεροποιητές
 - λιπαντικά
 - θιξοτροπικά μέσα
- V. τροποποιητές οπτικών ιδιοτήτων

1.2.4 Ο μηχανισμός της ενισχυτικής δράσης των εγκλεισμάτων στα πολυμερή

Η ενσωμάτωση μέσα στη μήτρα του πολυμερούς πολύ λεπτών σωματιδίων ή ινώδων υλικών, ανόργανης ή οργανικής φύσεως συνοδεύεται με αλλαγή των φυσικοχημικών, μηχανικών, θερμικών, ηλεκτρικών και άλλων ιδιοτήτων.

Ανάλογα με την αποτελεσματικότητά τους τα εγκλείσματα διακρίνονται σε ενεργά (εκείνα που προκαλούν ενίσχυση) και σε αδρανή (εκείνα που δεν βελτιώνουν τις ιδιότητες του υλικού, αλλά προκαλούν αλλαγή χρωματισμού και μείωση του κόστους).

Αναφορικά με τα ενεργά εγκλείσματα μπορούμε να διακρίνουμε τη δραστηριότητά τους σε δομική, κινητική και θερμοδυναμική. Με τον όρο δομική δραστηριότητα εννοείται η ικανότητα του εγκλείσματος να επηρεάζει τη δομή του πολυμερούς. Έτσι με την ενσωμάτωση των εγκλεισμάτων στη μήτρα παρατηρούνται αλλαγές στο μέγεθος, στο σχήμα και στην κατανομή των δομικών μονάδων. Με τον όρο κινητική δραστηριότητα εννοείται η ικανότητα του εγκλείσματος να επηρεάζει διάφορες θερμοδυναμικές παραμέτρους του σύνθετου υλικού.

Η ενίσχυση του υλικού λόγω των εγκλεισμάτων μπορεί να συσχετιστεί με την ενέργεια θραύσης W του πολυμερούς, που μετριέται από το εμβαδόν της επιφανείας κάτω από την καμπύλη τάσεων – παραμορφώσεων,

$$W = \int_{L_0}^{L_b} \sigma \cdot \partial L$$

όπου L_b το μήκος του δοκιμίου στη θραύση, L_0 το αρχικό μήκος και σ η επιβαλλόμενη τάση.

Η αύξηση της ενέργειας θραύσης ανά μονάδα όγκου με την παρουσία εγκλεισμάτων μπορεί να θεωρηθεί σαν βασικό χαρακτηριστικό της ενισχυτικής δράσης των εγκλεισμάτων στα πολυμερή στην ελαστική κατάσταση. Έτσι, τα εγκλείσματα που αυξάνουν την ενέργεια θραύσης θεωρούνται ενεργά, ενώ εκείνα που δεν την αυξάνουν θεωρούνται αδρανή. Το μέγεθος της αύξησης ή ελάττωσης εξαρτάται από τη φύση του εγκλείσματος.

Ένας άλλος τρόπος ελέγχου της ενισχυτικής δράσης των εγκλεισμάτων είναι η επίδραση τους στην αντοχή των σύνθετων υλικών. Αυτή η αντοχή επηρεάζεται από διάφορους παράγοντες, λόγω της αλληλεπίδρασης μήτρας και εγκλεισμάτων. Αυτό συμβαίνει διότι η διαφοροποιούμενη δομή της ενδιάμεσης φάσης είναι σημαντικός παράγοντας που καθορίζει τις φυσικοχημικές και μηχανικές ιδιότητες του σύνθετου υλικού. Γενικά όμως, μπορούμε να φτάσουμε στη διαπίστωση ότι η μηχανική αντοχή του σύνθετου υλικού αυξάνει ανάλογα με την περιεκτικότητα και τη λεπτότητα του εγκλείσματος. Το θεωρητικό όριο της περιεκτικότητας σε έγκλεισμα καθορίζεται από το ποσό του εγκλείσματος που κάνει πιθανή την ύπαρξη κάποιας ενδιάμεσης φάσης ή ενδιάμεσου στρώματος μεταξύ των σωματιδίων.

Έτσι η ενίσχυση των πολυμερών με την προσθήκη λεπτών κοκκωδών σωματιδίων οφείλεται στο σχηματισμό ενός συνεχούς ενισχυτικού σκελετού σαν αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης των σωματιδίων μεταξύ τους. Παράλληλα, η αντοχή του σύνθετου υλικού αυξάνεται μαζί με την περιεκτικότητα σε έγκλεισμα, με τη βέλτιστη (Optimum) περιεκτικότητα να είναι εκεί που προκαλείται κορεσμός των κέντρων προσρόφησης μακρομορίων επάνω στην επιφάνεια του εγκλείσματος.

1.2.5 Θερμοκρασία τήξης – Θερμοκρασία υαλώδους μετάπτωσης

Η θερμοκρασία υαλώδους μετάπτωσης (glass transition temperature) T_g αποτελεί την κρίσιμη θερμοκρασία πάνω από την οποία το πολυμερές συμπεριφέρεται όλκιμα, ενώ κάτω από αυτή συμπεριφέρεται ως ψαθυρό και εύθραυστο υλικό. Κατά την ψύξη η θερμοκρασία υαλώδους μετάπτωσης του πολυμερούς αντιστοιχεί στο σταδιακό μετασχηματισμό του από υγρό σε ελαστόμορφο υλικό και τελικά σε άκαμπτο. Η θερμοκρασία υαλώδους μετάπτωσης αυξάνεται με την παρουσία πλευρικών ομάδων στο μόριο του πολυμερούς, και με την ύπαρξη διπλών δεσμών και αρωματικών ομάδων στις αλυσίδες. Οι δεσμοί διασταύρωσης ανεβάζουν το T_g επειδή περιορίζουν την μοριακή κίνηση και καθιστούν το υλικό πιο άκαμπτο.

ΥΑΙΚΟ	Θερμοκρασία υαλώδους μετάπτωσης (° C)	Θερμοκρασία τήξης (° C)
LDPE	-110	115
HDPE	-90	137
PP	-18	175

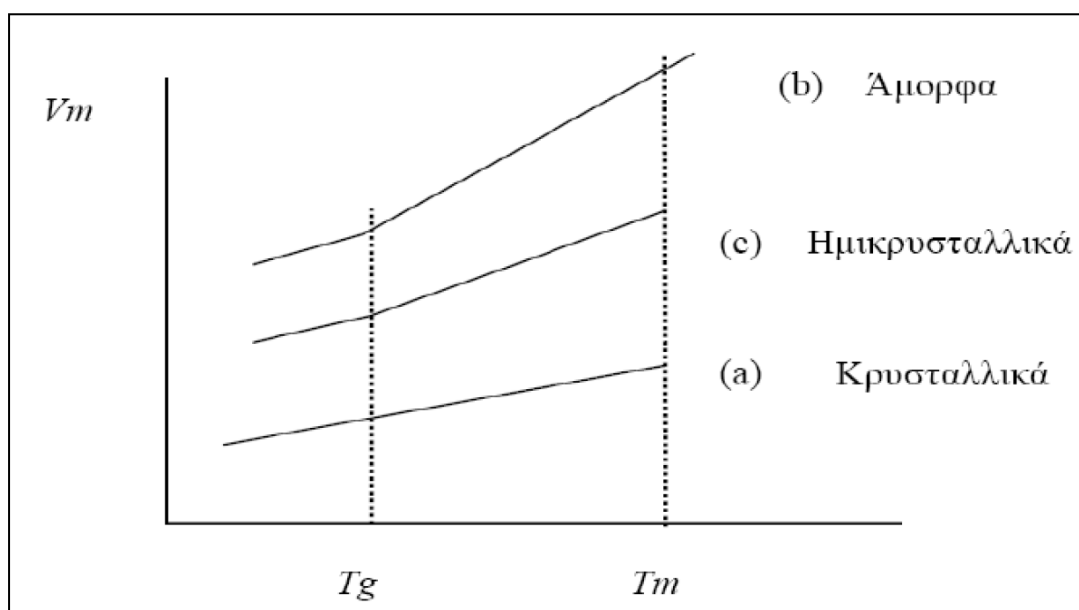
Nylon 6.6	57	165
PET	69	265
PVC	87	212
PS	100	240

Πίνακας 1.1 Θερμοκρασίες υαλώδους μετάπτωσης – τήξης για τα βασικότερα πολυμερή

Ως θερμοκρασία τήξης (T_m) ονομάζουμε τη θερμοκρασία κατά την οποία ένα στερεό πολυμερές με τακτική δομή μοριακών αλυσίδων μετατρέπεται σε παχύρευστο υγρό με τυχαία δομή. Όσο μεγαλύτερο βαθμό κρυστάλλωσης

έχει ένα πολυμερές τόσο περισσότερη ενέργεια απαιτείται για το διαχωρισμό των μορίων, με αποτέλεσμα να αυξάνεται η T_m . Συνεπώς, τα άμορφα πολυμερή έχουν χαμηλότερες θερμοκρασίες τήξης.

Η θερμοκρασία στην οποία πραγματοποιείται η τήξη και η υαλώδης μετάπτωση σε ένα πολυμερές προσδιορίζονται από τη γραφική παράσταση του ειδικού όγκου (αντίστροφο της πυκνότητας) συναρτήσει της θερμοκρασίας.



Σχήμα 1.7 Γραφική παράσταση ειδικού όγκου συναρτήσει της θερμοκρασίας κατά την ψύξη

Κάτω από την θερμοκρασία υαλώδους μετάπτωσης το υλικό παρουσιάζει μηχανικές ιδιότητες στερεού παρά υγρού που ψύχεται. Μερικά υλικά κρυσταλλώνονται μερικώς στην θερμοκρασία τήξης και η συμπεριφορά τους αυτή απεικονίζεται από την καμπύλη c. Σε θερμοκρασίες μικρότερες του T_g ένα πολυμερές μπορεί να βρίσκεται σε ημικρυσταλλική μορφή όπου οι κρυσταλλικές περιοχές βρίσκονται σε ισορροπία με άμορφες περιοχές ή σε καθαρά άμορφη, υαλώδη κατάσταση. Σε θερμοκρασίες μεγαλύτερες του T_g οι άμορφες περιοχές είναι σε ρευστή κατάσταση. Η θερμοκρασία τήξης και

υαλώδους μετάπτωσης καθορίζουν αντίστοιχα το ανώτερο και κατώτερο θερμοκρασιακό όριο για τις κατεργασίες των πολυμερών.

1.3 Ρητίνες

1.3.1 Γενικά

Αν και αναπτύχθηκαν ευρέως κατά τον δεύτερο Παγκόσμιο Πόλεμο, οι εποξειδικές ρητίνες έγιναν εμπορικά διαθέσιμες κατά το 1950, προσφέροντας υψηλή απόδοση σε υψηλές θερμοκρασίες και διαβρωτικά περιβάλλοντα. Λόγω των ιδιοτήτων τους, βρίσκουν μεγάλη εφαρμογή στη βιομηχανία και μια από τις πιο διαδεδομένες εφαρμογές τους είναι η χρήση τους ως μήτρες στα σύνθετα υλικά.

1.3.2 Κατηγορίες ρητινών

Τα πολυμερή ανάλογα με τη μορφή στην οποία διατίθενται για την περαιτέρω επεξεργασία τους διακρίνονται σε διάφορες κατηγορίες. Μεταξύ αυτών και οι συνθετικές ρητίνες.

Οι συνθετικές ρητίνες είναι χαμηλού μοριακού βάρους ενδιάμεσα προϊόντα ή πρώτες ύλες από μακρομοριακές ενώσεις που ευρίσκονται στην υγρή κατάσταση ή είναι διαλυτά ή τηκόμενα στερεά και που λαμβάνουν την απαιτούμενη αντοχή για τις συγκεκριμένες εφαρμογές μόνο κατόπιν της κατάλληλης επεξεργασίας τους.

Διακρίνονται σε δύο κατηγορίες:

- I. Βασικές ύλες για βερνίκια, επιχρίσματα και κόλλες, φερόμενες με την μορφή διαλυμάτων και γαλακτωμάτων
- II. Τεχνητές ρητίνες ως συνδετικά μέσα για ξύλινα αντικείμενα, δέρματα, τεχνητό λίθο και ενδιάμεσα προϊόντα για την κυρίως επεξεργασία των πολυμερών, ενώ συνήθως μαζί με τα πρόσθετα επεξεργάζονται προς μία “μάζα μορφώσεως”, δηλαδή ως πρώτη ύλη για την παραγωγή των τελικών εμπορικών προϊόντων του πολυμερούς με μορφοποίηση υπό θέρμανση και πίεση.

Οι τεχνητές ρητίνες αποτελούνται από μία ευρεία συλλογή πολυμερών:

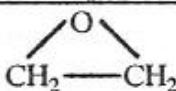
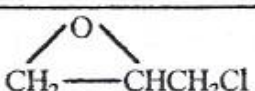
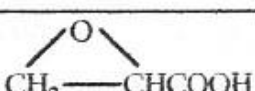
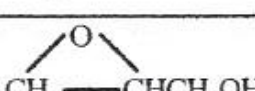
- Σκληρυνόμενες τεχνητές ρητίνες:
 - a. Θερμοσκληρυνόμενες Ρητίνες
Σκληραίνουν μόνιμα κατά τη διάρκεια του πολυμερισμού και της σκλήρυνσής τους (curing). Τέτοιες είναι οι φαινολικές ή φαινοπλάστης (phenolic), οι εποξειδικές (epoxy), οι βινυλεστερικές (vinylester) και οι πολυεστερικές (polyester) ρητίνες, οι οποίες αποτελούν και τις περισσότερο χρησιμοποιούμενες.
 - b. Μονομερείς Ρητίνες χυτεύσεως: πολυμεθακρυλικό μεθύλιο
- Ρητίνες για βερνίκια, μέσα διαποτίσεως, κόλλες κλπ:
 - a. Θερμοπλαστικές Ρητίνες: Είναι διαλύματα πτητικών διαλυτών (20-60%) και επίσης αραιές υδατικές διασπορές. Τέτοιες είναι το πολυχλωριούχο βινύλιο, το πολυοξικό βινύλιο και η πολυβινυλική αλκοόλη.
 - b. Ρητίνες σκληρυνόμενες ως πλέγμα: Τέτοιες είναι οι ρητίνες φορμόλης-ουρίας (αμινοπλάστες), οι οποίες διαλύονται στο οινόπνευμα και στους υδρογονάνθρακες, οι ακόρεστες

πολυεστερικές ρητίνες, οι εποξειδικές ρητίνες, η πολυουρεθάνη, γλυκεροφθαλικές ρητίνες. Τα παρασκευαζόμενα βερνίκια είναι άχρωμα και ανθεκτικά στο φως, αντέχουν στις καιρικές συνθήκες και ξεραίνονται ταχύτατα. Η σχηματιζόμενη μεμβράνη επί της χρωματιζόμενης επιφανείας έχει μεγάλη σκληρότητα και υψηλή αντοχή.

1.3.3 Εποξειδική ρητίνη

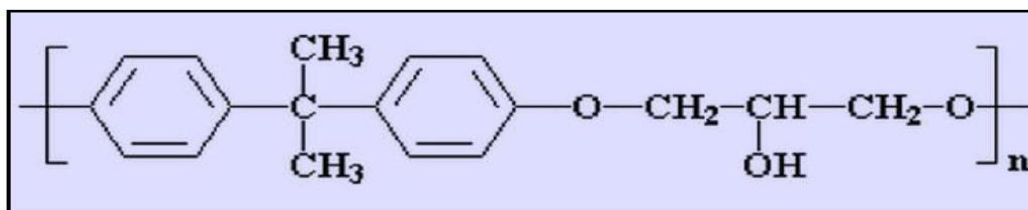
Με τον όρο εποξειδική ρητίνη εννοούμε την ένωση που σχηματίζεται από περισσότερα από ένα εποξείδια τα οποία συνδέονται μεταξύ τους υπό μορφή ευθείας ή δακτυλίου. Εποξειδικό ή πολυεποξειδικό είναι ένα θερμοσκληρυνόμενο πολυμερές, και με τον όρο αυτό εννοούμε τη χημική ομάδα που αποτελείται από ένα άτομο οξυγόνου [O], ενωμένο με δύο άτομα άνθρακα [C] που είναι ήδη ενωμένα με άτομα άλλων στοιχείων.

Στο σχήμα 1.9 φαίνονται οι συντακτικοί τύποι διαφόρων εποξειδίων και η αντίστοιχη ονοματολογία τους. Η ονοματολογία αυτή προκύπτει από το όνομα της ομάδας που ενώνεται με το τρίτο άτομο άνθρακα του εποξειδίου.

	εποξείδιον του αιθυλενίου
	επαχλωρουδρίνη
	γλυκιδικό οξύ
	γλυκιδολική ομάδα

Σχήμα 1.9 Συντακτικοί τύποι και ονομασία εποξειδίων

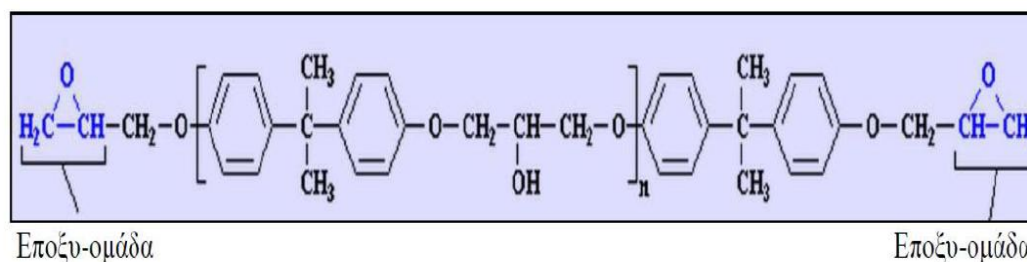
Στο σχήμα 1.10 απεικονίζεται η δομή της εποξειδικής ρητίνης και χημικοί δεσμοί που περιέχει.



Σχήμα 1.10 Δομή εποξειδικής ρητίνης

Οι εποξειδικές ρητίνες ανήκουν στην κατηγορία των θερμοσκληρυνόμενων ή θερμοσταθερών πολυμερών. Είναι προϊόντα ατελούς πολυμερισμού που θερμαινόμενα γίνονται μαλακά. Με την αύξηση όμως της θερμοκρασίας, ο πολυμερισμός καθίσταται πλήρης και σκληρύνονται οριστικά.

Από πλευράς σύστασης οι εποξειδικές ρητίνες μπορεί να είναι στερεές ή ρευστές. Οι στερεές εποξειδικές ρητίνες είναι άκαμπτα άμορφα στερεά που μοιάζουν με γυαλί. Μελετώντας τη δομή τους με κάποιο πρόσθετο, όπως σκληρυντής, πλαστικοποιητής με την βοήθεια ηλεκτρονικών μικροσκοπίων, παρατηρούμε ότι οι ρητίνες αποτελούνται από σχεδόν μικρού μεγέθους μακρομόρια τρισδιάστατα διακλαδωμένα δίκτυα ή συσσωματώματα, μέτριου μοριακού βάρους, τοποθετημένα σε ένα πλαίσιο από μόρια μικρού μοριακού βάρους.



Σχήμα 1.11 Μορφή μη τροποποιημένης εποξειδικής ρητίνης

1.3.4 Ιδιότητες στερεών εποξειδικών ρητινών

Οι στέρεες εποξειδικές ρητίνες παρουσιάζουν ισχυρή αντίσταση τριβής και επίσης πολύ καλή χημική αντίσταση.

Τα σημαντικότερα πλεονεκτήματα των στερεών εποξειδικών ρητινών σε σύγκριση με των υγρών ρητινών, είναι η εύκολη επεξεργασία τους, η μηχανική αντοχή, η υψηλή χημική αντίσταση και το άριστο κολλώδες.

Ένας σημαντικός αριθμός ιδιοτήτων των εποξειδικών ρητινών είχε ως αποτέλεσμα το γρήγορο ρυθμό ανάπτυξης και την ευρεία σε έκταση χρήση τους. Έτσι αποτελούν σχεδόν πάντα το ένα από τα δύο ή περισσότερα προϊόντα που συνδυάζονται για να δώσουν το τελικό σύνθετο υλικό. Σε πάρα πολλές δε περιπτώσεις χρησιμοποιούνται και εντελώς μόνες τους.

1.3.5 Ιδιότητες υγρών εποξειδικών ρητινών

Οι υγρές εποξειδικές ρητίνες παρουσιάζουν τις παρακάτω ιδιότητες:

- Χαμηλή υδροσκοπικότητα και ικανοποιητική αντοχή στην επίδραση διαλύματος οξέων, βάσεων και πολλών οργανικών διαλυτών. Είναι υγρά με χαμηλό ιξώδες (low viscosity), καθώς και τα μίγματα τους με πρόσθετα (πλαστικοποιητές, σκληρυντές) με αποτέλεσμα την εύκολη κατεργασία τους
- Οι βασικές τους ιδιότητες μπορούν να τροποποιούνται κάθε φορά ανάλογα με τις απαιτήσεις της συγκεκριμένης εφαρμογής (ανάμιξη με κάποιο πρόσθετο της επιλογής μας, χρήση τροποποιητικών και

συνθέσεων), κάτι που έχει ως αποτέλεσμα την ποικιλία των εφαρμογών.

- Υψηλή δύναμη συγκόλλησης , στη σύγχρονη τεχνολογία πλαστικών, ιδιότητα που είναι από τις μεγαλύτερες που έχουν παρατηρηθεί. Υψηλές μηχανικές ιδιότητες και άριστη ηλεκτρική μόνωση, καθώς και εύκολη επεξεργασία των ρητινών από 5°C έως 150°C εξαρτώμενη βέβαια από την επιλογή του προσθέτου.
- Μικρή συστολή κατά τον πολυμερισμό κατά τη διάρκεια της επεξεργασίας τους. Αυτή η μικρή συστολή είναι ένα μεγάλο πλεονέκτημα για τις εποξειδικές ρητίνες.
- Εξασφαλίζουν πρόσφυση σε ξηρές και υγρές επιφάνειες, ενώ στερεοποιούνται και κάτω από την επιφάνεια ύδατος. Η πρόσφυση εξασφαλίζεται πάνω σε γνωστά δομικά υλικά, όπως σκυρόδεμα, μέταλλα, μάρμαρα, πέτρα και ξύλο
- Παρουσιάζουν καλή χημική αντίσταση, που εξαρτάται από το πρόσθετο που χρησιμοποιείται. Συνολικά οι περισσότερες ρητίνες έχουν υψηλή αντίσταση στα καυστικά και καλή μέχρι άριστη στα οξέα.
- Συνδυάζουν υψηλή αντοχή, δεν έχουν όγκο κατά την σκλήρυνση και δε γίνονται εύθραυστες. Είναι απόλυτα μη διαβρωτικές και είναι κατάλληλες για χρήση σε κατασκευές από οπλισμένο σκυρόδεμα ή δομικό χάλυβα.

1.3.6 Εφαρμογές των εποξειδικών ρητινών

Μερικές από τις σημαντικότερες εφαρμογές των εποξειδικών ρητινών είναι οι ακόλουθες:

- Στην κατασκευή κτιρίων, αυτοκινητοδρόμων και γενικά σε κατασκευές που έχουν απαιτήσεις για υψηλή χημική αντίσταση (βασικό συγκολλητικό σκυροδέματος)
- Στη βιομηχανία κατασκευής αεροσκαφών, αυτοκινήτων, πλοίων (βασικό συγκολλητικό σε δόκιμα μέρη της ατράκτου αεροσκάφους, μεταλλικών και πλαστικών τμημάτων σε βάρκες και αυτοκίνητα) λόγω της υψηλής και τέλειας στεγανότητας.
- Στην κατασκευή τριχών για πινέλα
- Ως φυλλώδεις ρητίνες (laminated resins) για την κατασκευή πλαισίων και τελειωμάτων αεροσκαφών και πυραύλων.
- Ως διαλύματα επίστρωσης που έχουν ως βασικό συστατικό τη ρητίνη, που είναι χρήσιμα για τη συντήρηση και την κατασκευή τελειωμάτων, όπως τελειώματα θαλάσσιας υφής, λιθοδομής και αεροσκαφών. Ακόμη χρησιμοποιούνται για επαλείψεις κατασκευαστικού χάλυβα, δεξαμενών, πτυσσόμενων αγωγών και πλακών σκυροδέματος.
- Συστήματα εποξυ-ρητινών χρησιμοποιούνται σαν συγκολλητικά, επικαλυπτικά και σα μέσα ενσωμάτωσης ηλεκτρικών εξαρτημάτων.

- Τυπικές εφαρμογές χυτών εποξυ-ρητινών αποτελούν οι κατασκευές ανθεκτικών σε χημικά αντλιών και σωλήνων, εργαλείων, μητρών, καθώς και ηλεκτρομαγνητικών μονωτικών ειδών.

Επίσης υπάρχουν ρητίνες (wetscome) δύο συστατικών για επαλείψεις επιφανειών (υγρών και στερεών). Η ξηρή μεμβράνη που σχηματίζουν έχει πυρανασχετικές ιδιότητες και έτσι δεν επιτρέπουν την εξάπλωση της φωτιάς.

- Οι ρητίνες αυτές προορίζονται για υγραμόνωση, για προστασία και διακόσμηση δαπέδων, τοίχων και ορόφων σε οικοδομικούς, βιομηχανικούς, αγροτικούς και άλλους χώρους.
- Εφαρμόζονται σε επιφάνειες σκυροδέματος, τσιμεντοκονιάματος, πέτρας, σοβάδων, τούβλων, γύψου, ασφάλτου κ.ά..
- Για τη σύνδεση παλιού και νέου σκυροδέματος κυρίως σε υγρούς χώρους
- Για την προστασία κτιρίων από τη διάβρωση και διείσδυση της υγρασίας
- Για την υγραμόνωση πισίνων και δεξαμενών, υπόγειων χώρων και παταριών, δαπέδων κ.λ.π..

Μειονέκτημα των εποξυ-ρητινών αποτελεί το υψηλό τους κόστος. Το γεγονός αυτό αντισταθμίζεται όμως από τη μεγάλη χρησιμότητα τους και την ευρεία εφαρμογή που έχουν.

1.3.7 Επίδραση των εγκλεισμάτων στις ιδιότητες των εποξειδικών ρητινών

1.3.7.1 Γενική περιγραφή

Τα εγκλείσματα είναι ανόργανα υλικά που χρησιμοποιούνται μέσα στη μήτρα των εποξειδικών ρητινών, έχουν πολύ μικρές διαστάσεις και μορφή πούδρας σκόνης με μέση διάμετρο 0,015 μ.. Όσο αυξάνει η κατ' όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα, τόσο αυξάνει το ιξώδες και η ρητίνη μετατρέπεται από υγρό σε μια πιο στέρεη μορφή.

Τα εγκλείσματα ρυθμίζουν το ιξώδες των ρητινών, ελαττώνουν το ποσοστό συστολής και το συντελεστή θερμικής διαστολής, ενώ ταυτόχρονα χρωματίζουν το σύνθετο υλικό. Τα εγκλείσματα πρέπει να είναι από χημικής απόψεως ουδέτερα ή ελαφρώς βασικά και να μην αντιδρούν με τη ρητίνη ή το μέσο σκλήρυνσης.

Το σημαντικότερο όμως πλεονέκτημα των εγκλεισμάτων είναι ότι ελαττώνουν το κόστος του σύνθετου με παράλληλο συνδυασμό καλύτερων ποιοτικών ιδιοτήτων.

Για καλύτερα αποτελέσματα, τα εγκλείσματα πρέπει να θερμαίνονται για την απομάκρυνση της υγρασίας και του αέρα, που τυχόν απορροφήθηκε, και μετά να ενσωματώνονται στη ρητίνη. Επίσης είναι σκόπιμη η χρησιμοποίηση κάποιου ειδικού μηχανήματος για πλήρη ανάμιξη.

1.3.7.2 Ιδιότητες – Συμπεριφορά στον εφελκυσμό

Η παρουσία εγκλεισμάτων στις ρητίνες, γενικά αυξάνει το μέτρο ελαστικότητας αυτών, ενώ αντίθετα η παραμόρφωση θραύσης ελαττώνεται και η μεταβολή αυτή είναι ανάλογη με την περιεκτικότητα της σε έγκλεισμα. Αυτό ισχύει για μετρήσεις που γίνονται σε θερμοκρασία περιβάλλοντος.

- Συστολή

Η συστολή κατά τη διάρκεια σκλήρυνσης της ρητίνης ελαττώνεται ανάλογα με την αύξηση της περιεκτικότητας σε έγκλεισμα του σύνθετου υλικού. Αυτό οφείλεται στο ότι η ρητίνη αντικαθίσταται τοπικά από υλικό που δεν εμφανίζει μεταβολή στις διαστάσεις του, σε αντίθεση με την καθαρή ρητίνη.

- Αντοχή σε χημικά αντιδραστήρια και σε διάβρωση

Μερικά εγκλείσματα όπως για παράδειγμα το ανθρακικό ασβέστιο μειώνουν την αντοχή των ρητινών σε οξέα ενώ άλλα όπως το αλουμίνιο μειώνουν την αντοχή στην υγρασία. Τα εγκλείσματα γενικά μειώνουν την ταχύτητα διάχυσης του νερού στα σύνθετα υλικά και συμμετέχουν επίσης στη διάβρωση των πολυμερών στην επαφή τους με τα μέταλλα.

Ιόντα που υπάρχουν στη στερεοποιημένη μήτρα μπορούν να μεταφέρουν γαλβανικά ρεύματα και να ενισχύσουν τη διάβρωση. Αυτό οφείλεται στην αύξηση της αγωγιμότητας του σύνθετου, λόγω της ικανότητας των εγκλεισμάτων να απελευθερώνουν ιόντα.

- Ειδική πυκνότητα

Τα εγκλείσματα που στην πλειοψηφία τους έχουν μεγαλύτερη πυκνότητα από τη ρητίνη, αυξάνουν την πυκνότητα των σύνθετων υλικών ανάλογα με την κατ' όγκο περιεκτικότητά τους. Έτσι η παρουσία των εγκλεισμάτων μειώνει αισθητά το κόστος του σύνθετου υλικού.

- Ιξώδες

Τα εγκλείσματα αυξάνουν το ιξώδες των εποξειδικών ρητινών. Η αύξηση αυτή είναι μεγαλύτερη με ινώδη και μικρότερη με κοκκώδη εγκλείσματα.

- Συντελεστής θερμικής διαστολής

Ο συντελεστής θερμικής διαστολής της στερεοποιημένης εποξειδικής ρητίνης ελαττώνεται με την αύξηση της κατ' όγκο συγκέντρωσης σε εγκλείσματα. Η ελάττωση αυτή δεν είναι γραμμική.

- Πρόσφυση

Τα εγκλείσματα ελαττώνουν το βαθμό συστολής και έτσι αυξάνουν την ικανότητα πρόσφυσης των εποξειδικών ρητινών αποτελεσματικά.

- Θερμική σταθερότητα

Ενισχύεται με την παρουσία εγκλεισμάτων. Με τον όρο θερμική σταθερότητα, εννοούμε την κατάσταση του σύνθετου όταν δεν παρατηρούνται αλλοιώσεις στη δομή του συναρτήσει της θερμοκρασίας.

- Θερμική αγωγιμότητα

Τα εγκλείσματα αυξάνουν τη θερμική αγωγιμότητα των ρητινών, αν και μεγάλες περιεκτικότητες σε εγκλείσμα αυξάνουν την παρουσία φυσαλίδων αέρα (που ως γνωστόν αποτελούν θερμομονωτικά σώματα) μέσα στο σύνθετο. Περισσότερο αυξάνεται η θερμική αγωγιμότητα στην περίπτωση των μεταλλικών ινών, συγκριτικά με τα κοκκώδη μεταλλικά εγκλείσματα.

- Αντοχή στη συμπίεση

Τα κοκκώδη εγκλείσματα αυξάνουν την αντοχή στη συμπίεση λόγω της δυσκαμψίας που προκαλούν.

- Συμπεριφορά στην κρούση

Τα κοκκώδη εγκλείσματα επηρεάζουν την αντοχή σε κρούση των σκληρυνόμενων εποξειδικών ρητινών σε βαθμό που ποικίλλει ανάλογα με τον τύπο του εγκλείσματος, τον τύπο της ρητίνης και το είδος της δοκιμής κρούσης. Γενικά τόσο τα κοκκώδη όσο και τα ινώδη εγκλείσματα ενισχύουν την αντοχή των ρητινών σε κρούση.

- Συμπεριφορά στην κάμψη

Τα κοκκώδη εγκλείσματα γενικά ελαττώνουν την αντοχή σε κάμψη και αυξάνουν το μέτρο ελαστικότητας σε κάμψη.

- Σκληρότητα επιφανείας – Αντίσταση στην τριβή

Τα εγκλείσματα αυξάνουν την σκληρότητα της επιφανείας του σύνθετου υλικού και την αντίσταση τριβής.

2. Μηχανικές ιδιότητες σύνθετων υλικών

2.1 Παράμετροι που χαρακτηρίζουν την μηχανική συμπεριφορά των υλικών

2.1.1 Ελαστικές σταθερές (ν, E)

Από την Αντοχή των Υλικών γνωρίζουμε ότι ένα σύνθετο υλικό μπορεί συνήθως να καταπονηθεί με τρεις διαφορετικούς τρόπους, ανάλογα με την παραμόρφωση που τείνει να επιφέρει η επιβαλλόμενη τάση (Σχήμα 2.1). Έτσι αναφέρεται ενδεικτικά η εφελκυστική καταπόνηση (εφελκυσμός), η θλιπτική καταπόνηση (θλίψη) και η διατμητική καταπόνηση (διάτμηση ή στρέψη).

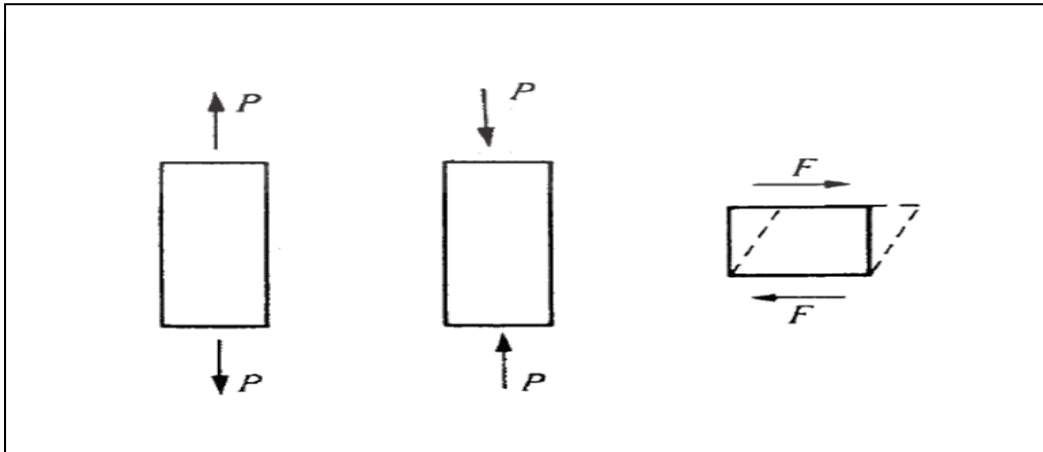
Τα περισσότερα εξαρτήματα ή στοιχεία μηχανών καταπονούνται σε πιο σύνθετες καταπονήσεις που αναλύονται σε απλούστερες. Όταν η τάση διατηρηθεί κάτω από μία κρισιμη τιμή (όριο ελαστικότητας) επιφέρει ελαστικές παραμορφώσεις, που εξαλείφονται με την απομάκρυνση της δύναμης. Σε ατομικό επίπεδο οι εν λόγω τάσεις προκαλούν επιμήκυνση ή συμπίεση των ατομικών δεσμών, οι οποίες αντιστοιχούν στις παραμορφώσεις ελατηρίου (Σχήμα 2.2).

Η τάση που προκαλεί μία τέτοια αντιστρεπτή (ελαστική) παραμόρφωση ακολουθεί το Νόμο του Hooke:

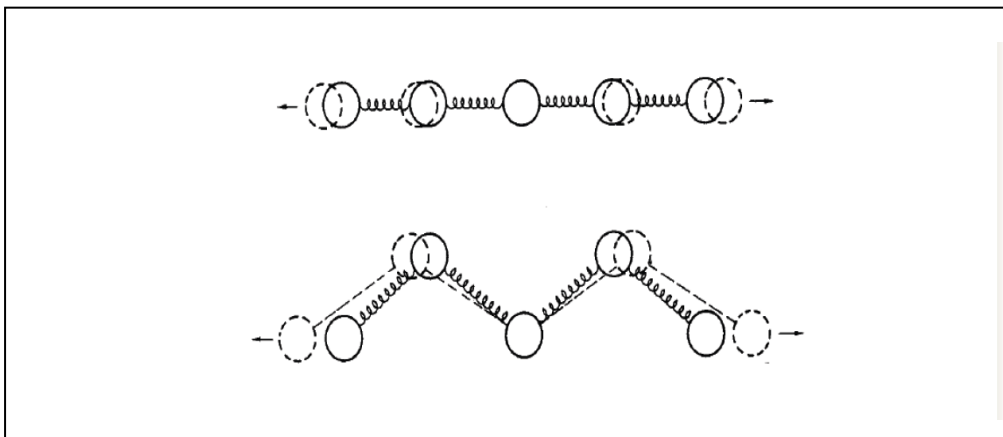
$$\sigma = E \varepsilon$$

όπου E το μέτρο ελαστικότητας (Young) του υλικού.

Η σχέση αυτή είναι γραμμική και γι' αυτό τα υλικά για τα οποία ισχύει ονομάζονται και γραμμικά.



Σχήμα 2.1 Βασικές μηχανικές καταπονήσεις: εφελκυσμός, θλίψη, διάτμηση

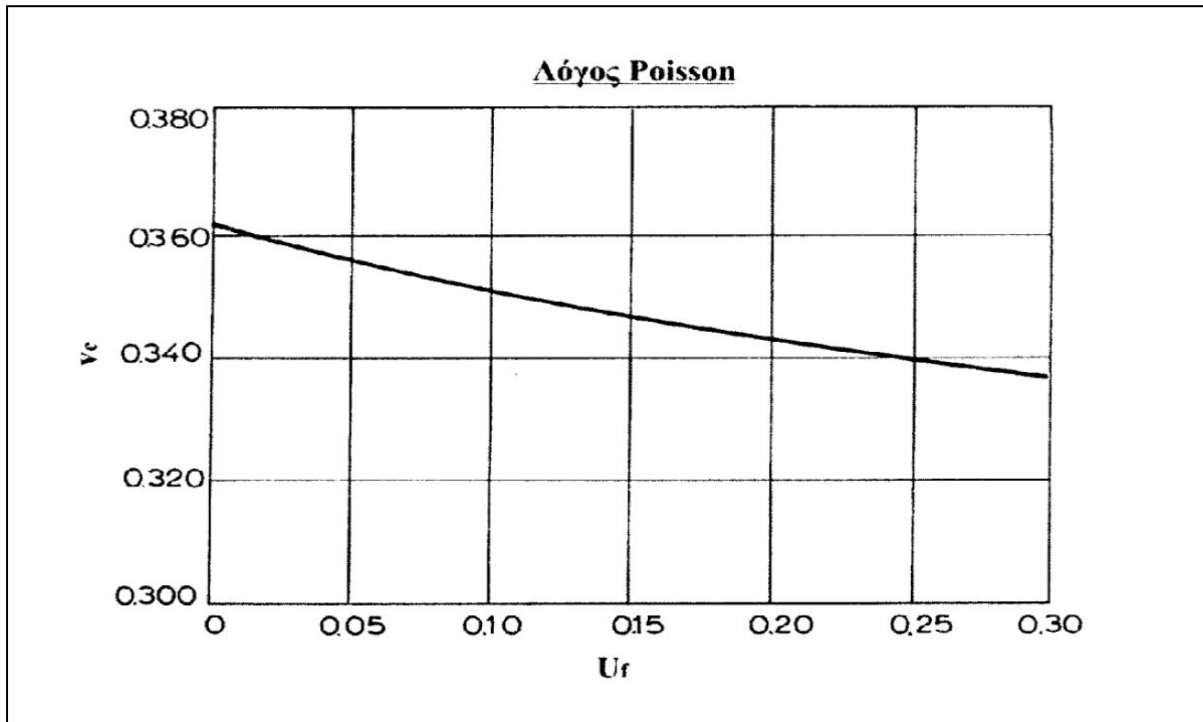


Σχήμα 2.2 Σχηματική αναπαράσταση της ελαστικής μηχανικής καταπόνησης σε ατομική κλίμακα

Σε ένα μακροσκοπικό στερεό η επιβολή εφελκυστικής καταπόνησης δεν οδηγεί μόνο σε παραμορφώσεις κατά τη διεύθυνση της τάσης, αλλά και κάθετα προς αυτήν. Όταν η επιβαλλόμενη τάση τείνει να επιμηκύνει το υλικό (κατά τη διεύθυνση x), είναι λογικό να μεταβάλλεται το πλάτος (y) και το πάχος (z) του υλικού. Ο λόγος της επιμέρους παραμόρφωσης ως προς αυτή κατά τη διεύθυνση της τάσης λέγεται λόγος Poisson (ν):

$$\nu = \epsilon_x / \epsilon_z = - \epsilon_y / \epsilon_z$$

Το (-) πρόσημο τίθεται για να εξασφαλίσει τις θετικές τιμές του λόγου Poisson, ο οποίος έχει συνήθως τιμή ίση προς 1/3 για τα μεταλλικά υλικά. Η γραφική παράσταση του λόγου Poisson για τα σύνθετα υλικά συναρτήσει της περιεκτικότητας των εγκλεισμάτων φαίνεται στο σχήμα 2.3 που ακολουθεί:



Σχήμα 2.3 Λόγος Poisson

Ο λόγος του Poisson εκφράζεται με ένα θετικό αριθμό, ο οποίος πάντοτε είναι μικρότερος από 1/2. Ο λόγος αυτός για όλα τα υλικά παίρνει οριακά την τιμή 1/2 όταν αυτά δεν καταπονούνται με φορτία μέσα στην ελαστική, στην περιοχή δηλαδή όπου ισχύει ο νόμος του Hooke, αλλά με φορτία μεγαλύτερα, που βρίσκονται δηλαδή στην πλαστική περιοχή.

Η παράμετρος $\Delta V/V$ (ανηγμένη μεταβολή του όγκου ή μέτρο διογκώσεως) σχετίζεται με το λόγο του Poisson [1], με βάση τη σχέση:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

όπου $\rho = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3$ είναι η υδροστατική συνιστώσα των τάσεων

2.1.2 Μοντέλα και εκφράσεις για το Μέτρο Ελαστικότητας (E) κοκκωδών σύνθετων υλικών

Από πολλούς ερευνητές αναπτύχθηκαν διάφορα θεωρητικά μοντέλα για τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας. Τα μοντέλα αυτά και οι εξισώσεις που προέκυψαν, είναι άλλοτε απλά και άλλοτε πολύπλοκα ανάλογα με τις παραδοχές που ο καθένας από τους ερευνητές χρησιμοποίησε.

2.1.2.1 Μοντέλο του Counto [2]

Το μοντέλο για τα σύνθετα υλικά δύο φάσεων το οποίο προτάθηκε από τον Counto προϋποθέτει τέλεια πρόσφυση ανάμεσα στον κόκκο και τη μήτρα. Το μέτρο του σύνθετου υλικού, δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{1}{E_c} = \frac{1-U_f^{1/2}}{E_m} + \frac{1}{(1-U_f^{1/2})U_f E_m + E_f}$$

Αυτό το μοντέλο προβλέπει τα μέτρα ελαστικότητας και συμφωνεί με μία ευρεία σειρά από πειραματικά δεδομένα, κυρίως για υλικά από σκυρόδεμα.

2.1.2.2 Μοντέλο του Paul [3]

Στην προσεγγιστική λύση του Paul τα συστατικά (οι φάσεις) του σύνθετου υλικού υποτίθεται ότι είναι στην κατάσταση μακροσκοπικώς ομοιογενούς τάσης. Η πρόσφυση υποτίθεται ότι υπάρχει στην ενδιάμεση επιφάνεια ενός κυβικού εγκλείσματος, το οποίο είναι μέσα σε κυβική μήτρα. Όταν μία ομοιόμορφη τάση εφαρμοστεί στο σύνορο, το μέτρο ελαστικότητας είναι:

$$E_c = E_m \frac{1+(m-1)U_f^{2/3}}{1+(m-1)(U_f^{2/3}-U_f)}$$

2.1.3 Μέτρα ελαστικότητας με σφαιρικά εγκλείσματα

Τα σφαιρικά εγκλείσματα είναι συνήθως αρκετά μεγάλα, έτσι ώστε η μέση απόσταση μεταξύ τους, ακόμα και για μεγάλες περιεκτικότητες, είναι μεγάλη αν συγκριθεί με τις τιμές της τετραγωνικής ρίζας της απόστασης μεταξύ των άκρων των μακρομορίων του πολυμερούς. Επίσης τα σωματίδια είναι τόσο απομακρυσμένα μεταξύ τους που δεν μπορούν να συνδέονται μαζί μέσω μιας απλής αλυσίδας πολυμερούς.

Για τα σύνθετα υλικά όπου το πάχος του στρώματος του πολυμερούς μεταξύ των σωματιδίων είναι πολύ μεγαλύτερο από το πάχος του οριακού στρώματος, η επίδραση του οριακού στρώματος στις διάφορες ιδιότητες μπορεί να αμεληθεί. Με βάση αυτή την υπόθεση έχουν προταθεί κατά καιρούς πολλές εξισώσεις που να περιγράφουν τη μηχανική συμπεριφορά σύνθετων υλικών με σφαιρικά εγκλείσματα.

Ο πρώτος που ασχολήθηκε με το θέμα ήταν ο Einstein [4], όταν το 1906 έκανε παρατηρήσεις στο ιξώδες αιωρήματος στερεών σφαιρών διασπαρμένων σε κάποιο Νευτώνειο υγρό και κατέληξε στην εξίσωση:

$$E_c = E_m(1 + 2.5U_f)$$

Η εξίσωση αυτή ισχύει για μικρές περιεκτικότητες σε έγκλεισμα και για περιπτώσεις πλήρους συνοχής μεταξύ εγκλείσματος και μήτρας. Με τον όρο τέλεια συνοχή εννοούμε ότι δεν υπάρχει σχετική κίνηση μήτρας – σωματιδίων, κατά τη διάρκεια της φόρτισης μέχρι κάποιου ορίου πάνω από το οποίο σπάει ο δεσμός μήτρας – σωματιδίου.

Προϋπόθεση για την παραπάνω εξίσωση είναι ότι το έγκλεισμα είναι σκληρότερο υλικό από τη μήτρα. Ο όγκος του εγκλείσματος είναι η σημαντική παράμετρος για την εξίσωση και όχι το βάρος του. Τέλος, το μέγεθος των σωματιδίων δεν επηρεάζει την ενισχυτική τους δράση.

Η έρευνα συνεχίστηκε από τους Guth και Smallwood [5,6], οι οποίοι πρότειναν την εξίσωση:

$$E_c = E_m(1 + 2.5U_f + 14.1U_f^2)$$

Αργότερα συνέχισε ο Kerner [7] με την παρακάτω σχέση:

$$\frac{E_c}{E_m} = \frac{\frac{U_f G_f}{(7 - 5\nu_m)G_m + (8 - 10\nu_m)G_f} + \frac{U_m}{15(1 - \nu_m)}}{\frac{U_f G_m}{(7 - 5\nu_m)G_m + (8 - 10\nu_m)G_f} + \frac{U_m}{15(1 - \nu_m)}}$$

όπου G το μέτρο διάτμησης και ν ο λόγος Poisson

Για εγκλείσματα πιο σκληρά από τη μήτρα η εξίσωση του Kerner απλοποιείται ως εξής:

$$\frac{E_c}{E_m} = 1 + \frac{U_f}{U_m} \frac{15(1 - \nu_m)}{8 - 10\nu_m}$$

Στην πραγματικότητα δεν ισχύει η προϋπόθεση συνοχής μεταξύ μήτρας και εγκλείσματος όπως έχει ήδη προαναφερθεί σε παραπάνω παράγραφο. Τότε η πραγματική ενισχυτική δράση του εγκλείσματος είναι μικρότερη από αυτή που υπολογίζεται θεωρητικά και σε ακραίες περιπτώσεις μπορεί να ελαττώσει, παρά να αυξήσει το μέτρο ελαστικότητας του συνθέτου.

Ο Einstein κατά τις παρατηρήσεις που έκανε το 1906 και αναφέρονται παραπάνω κατέληξε πως όταν μεταξύ του αιωρήματος στερεών σφαιρών και του Νευτώνιου υγρού δεν υπάρχει τέλεια συνοχή ισχύει η εξίσωση:

$$E_c = E_m(1+U_f)$$

Εάν τα σωματίδια είναι φουσαλίδες αέρα ή βρίσκονται μέσα σε κενά, τότε η εξίσωση Kerner γράφεται:

$$\frac{1}{E_c} = \frac{1}{E_m} + \frac{U_f}{U_m} \frac{15(1-\nu_m)}{7-5\nu_m}$$

Τέλος, ο Takahashi [8] πρότεινε την παρακάτω αρκετά πιο σύνθετη σχέση:

$$\frac{E_c}{E_m} = 1 + (1-\nu_m)U_f \frac{E_f(1-2\nu_m) - E_m(1-\nu_f) + 10(1+\nu_m) - E_m(1+\nu_f)}{E_f(1+\nu_m) + 2E_m(1-2\nu_f) + 2E_f(4-5\nu_m)(1+\nu_m) + E_m(7-5\nu_m)(1+\nu_f)}$$

Μια βασική παραδοχή για τις παραπάνω θεωρίες είναι ότι τα εγκλείσματα δεν σχηματίζουν συσσωματώματα και αυτό οφείλεται στο ότι τα συσσωματώματα δημιουργούν κοιλότητες αέρα και έτσι ο φαινόμενος όγκος του εγκλείσματος είναι μεγαλύτερος του πραγματικού.

Για την περίπτωση ενάρξεως των συσσωματωμάτων ο Mooney [9] διετύπωσε την ακόλουθη εξίσωση:

$$\frac{E_c}{E_m} = \exp\left(\frac{2.5U_f}{1-S \cdot U_f}\right)$$

Όπου S = φαινόμενος όγκος εγκλείσματος / πραγματικός όγκος εγκλείσματος

Η ελάχιστη τιμή του είναι η μονάδα. Σύμφωνα με πειραματικές μετρήσεις το κυμαίνεται από 1.2 μέχρι 2.

Μια άλλη θεωρία που προτάθηκε από τους Eilers και Van-Dyck [10] περιγράφεται από την εξίσωση:

$$\frac{E_c}{E_m} = 1 + \frac{kU_f}{1 - S \cdot U_f}$$

όπου k και S είναι με τιμές 1.25 και 1.2 αντίστοιχα.

Στο Εργαστήριο Αντοχής Υλικών έχει γίνει μελέτη, πάνω στο βαθμό πρόσφυσης μεταξύ μήτρας και εγκλείσματος. Με βάση τον ορισμό της ενδιάμεσης φάσης που έχει μελετηθεί προτείνεται το ακόλουθο μοντέλο για την περίπτωση των κοκκωδών εγκλεισμάτων. Ο δείκτης i αναφέρεται στην ενδιάμεση φάση και k, είναι μια παράμετρος που περιγράφει το βαθμό σύνδεσης μεταξύ εγκλείσματος και ενδιάμεσης φάσης:

$$E_c = E_f U_f k + E_m U_m + E_i U_i$$

Καλύτερη προσέγγιση του πριβλήματος έγινε σε μελέτη του καθηγητή Π.Σ. Θεοχάρη [11,12], όπου προτείνεται μια σειρά μοντέλων στα οποία θεωρείται ότι αναπτύσσεται μια τρίτη ψευδο-φάση μήτρας και εγκλεισμάτων στη διάρκεια του πολυμερισμού της μήτρας.

Επίσης μία ακόμα εξίσωση για το μέτρο ελαστικότητας σύνθετου υλικού πρότειναν αργότερα οι Α. Σιδερίδης και Π.Σ. Θεοχάρης [13]:

$$\frac{2(1-2\nu_c)}{E_c} = \frac{2\lambda^2 U_f}{E_f} + \frac{1}{E_m} \frac{U_f(1-\lambda)^2(1+\nu_m) + 2(\lambda U_f - 1)^2(1-2\nu_m)}{1-U_f}$$

όπου τα ν και c δίνονται από: $1/\nu_c = U_f/\nu_f + U_m/\nu_m$

2.1.4 Περιορισμοί θεωρητικών μοντέλων σχετικά με το μέτρο ελαστικότητας των σύνθετων υλικών

Σε αυτό το σημείο πρέπει να τονιστεί ότι στην ανασκόπηση δεν έγινε καμία προσπάθεια για να συζητηθούν οι προσεγγίσεις, αλλά να δειχθεί ένας αριθμός σε χρήσιμες θεωρητικές υποθέσεις που περιγράφουν τα μέτρα ελαστικότητας ενός συστήματος εγκλεισμάτων. Για τη λεπτομερή συζήτηση των θεωριών γίνεται αναφορά στους Hashin και Hill [14,15].

Στην πράξη τα εγκλείσματα κόκκων δεν μπορούν τελείως να αποχωριστούν το ένα από το άλλο και η ενίσχυση του στοιχείου μπορεί να είναι σε μικρή κλίμακα, στην πραγματικότητα είναι ένα συσσωμάτωμα από μικρούς κόκκους. Έτσι λοιπόν ως απάντηση στο εφαρμοζόμενο φορτίο, η τάση θα κατανομηθεί ομοιόμορφα ανάμεσα στους κόκκους και τα συσσωματώματα και η παραδοχή, τάση ή ομοιόμορφη επιμήκυνση (παραμόρφωση) είναι καθαρά υπεραπλούστευση.

Οι θεωρίες που ασχολούνται με συστήματα εγκλεισμάτων δέχονται ότι τα μέτρα ελαστικότητας για δεδομένο εγκλείσμα και μήτρα εξαρτώνται μόνο από την περιεκτικότητα σε όγκο του εγκλείσματος και όχι από το μέγεθος των κόκκων. Όμως γενικά το μέτρο αυξάνει όσο το μέγεθος των κόκκων μειώνεται. Οι Lewis και Nielsen [16] παραδέχονται ότι όσο το μέγεθος του κόκκου μειώνεται η επιφάνεια των κόκκων αυξάνεται παρέχοντας ένα πιο ενεργό επιφανειακό δεσμό μεταξύ των δύο φάσεων. Αυτό θα μπορούσε να συνοδευτεί από μια κλίση για την αύξηση συσσώρευσης των κόκκων (συσσωματώματα). Οι ιδιότητες των σύνθετων υλικών μπορούν επίσης να μεταβάλλονται, όταν αλλάζει το σχήμα (μορφή) κόκκου, Ο Bueche [17,18] παρατήρησε ότι διαφορετικές μορφές εγκλεισμάτων καταλήγουν σε διαφορετικές μηχανικές ιδιότητες. Το αποτέλεσμα ήταν ιδιαίτερα έντονο με μεγαλύτερους ή μη σφαιρικούς (μη σφαιροειδείς) κόκκους όπου ένας προτιμώμενος

προσανατολισμός θα μπορούσε να τροποποιήσει τη συμπεριφορά παραμόρφωσης.

Ο Wu [19] απέδειξε Θεωρητικά ότι κόκκοι σε μορφή δίσκου έδωσαν καλύτερη ενίσχυση από βελονοειδούς ή σφαιρικής μορφής κόκκους, αλλά αγνόησε την ανισοτροπία η οποία συνδέεται με τη χρήση μη σφαιρικών κόκκων σε σύνθετα υλικά.

Ο Chow [20] έχει ασχοληθεί με πρόβλημα για ευθυγραμμισμένους ελλειψοειδείς κόκκους και προέβλεψε το διάμηκες και εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας. Οι επιδράσεις από το μέγεθος του εγκλείσματος και από την επιφάνεια του εγκλείσματος αγνοήθηκαν. Όμως είναι απίθανο στην πράξη ότι τα εγκλείσματα μπορούν να διαταχθούν ομοιόμορφα με τρόπο που παραδέχεται ο Chow έτσι ώστε η πειραματική επιβεβαίωση των δύο θεωριών να είναι απαραίτητη.

Η κατανομή του μεγέθους των κόκκων επηρεάζει την περιεκτικότητα του εγκλείσματος στη μήτρα. Μίγματα από κόκκους με διαφορετικό μέγεθος εγκλεισμάτων μπορούν να διαταχθούν πιο πυκνά από εγκλείσματα ενός μεγέθους διότι τα μικρά εγκλείσματα μπορούν να γεμίσουν το χώρο μεταξύ των στενά διατεταγμένων μεγάλων εγκλεισμάτων και να σχηματίσουν συσσωματώματα. Αυτοί οι κόκκοι που συσσωματώνονται είναι ικανοί να μεταφέρουν ένα μεγαλύτερο μέτρο ελαστικότητας για την ίδια περιεκτικότητα που προβλέπεται από τις περισσότερες θεωρίες.

Αυτή η επίδραση δημιουργείται όπου υπάρχει μια διαφορετική ενισχυτική ικανότητα άμμου, όπως έχει παρατηρηθεί από τους Ahmed και Jones [21]. Μια εμπειρική τροποποίηση στην εξίσωση Kerner η οποία περιλαμβάνει ένα συντελεστή αλληλεπίδρασης εγκλείσματος προτάθηκε από τον Dickie [22]. Κάθε μια από τις εξισώσεις εμφανίζεται ικανοποιητική στο να περιγράφει τα δεδομένα των διαφόρων ερευνητών.

Πρέπει να σημειωθεί το σχόλιο από τον Christensen [23] επάνω στην εξίσωση του Kerner, ότι το σαφές σφάλμα σ' αυτή την εξίσωση δεν μπορεί να δειχθεί λόγω της συντομίας της παραγώγισης. Αυτό συνεπώς δημιουργεί αμφιβολίες στην εξίσωση του Kerner και στις επακόλουθες τροποποιήσεις.

Οι περισσότερες από τις θεωρίες οι οποίες εξηγούν την ενισχυτική δράση των εγκλεισμάτων παραδέχονται τέλεια πρόσφυση ανάμεσα στα εγκλείσματα και την πολυμερική μήτρα. Η περίπτωση της ελλιπούς προσφύσεως ήταν στην ελαστική περιοχή, όπως συζητήθηκε από τους Sato και Furukawa [24]. Αυτοί παραδέχονται ότι οι συνδεδεμένοι κόκκοι λειτουργούν ως οπές και προβλέπουν μείωση στα μέτρα ελαστικότητας με την αύξηση της περιεκτικότητας σε έγκλεισμα.

Μπορεί να υποστηριχθεί ότι οι μη συνδεδεμένοι κόκκοι δεν λειτουργούν εντελώς ως οπές, επειδή αυτοί συγκρατούν τη μήτρα από την κατάρρευση. Σε αυτή την περίπτωση το μέτρο ελαστικότητας συστήματος εγκλεισμάτων πρέπει να αυξάνει με την αύξηση περιεκτικότητας του εγκλείσματος, η οποία είναι η γενικώς αναμενόμενη συμπεριφορά.

Μια μεταβολή στην πρόσφυση μήτρας - εγκλεισμάτων έχει μικρότερη επίδραση στα μέτρα ελαστικότητας από ότι στην αντοχή. Το τελευταίο είναι περισσότερο εξαρτώμενο από την κατεργασία της επιφάνειας [24]. Στην πραγματικότητα ο βαθμός πρόσφυσης δεν φαίνεται να είναι σημαντικός παράγοντας όσο οι δυνάμεις τριβής ανάμεσα στις φάσεις δεν υπερβαίνονται από την εφαρμοζόμενη τάση.

Οι Spanoudakis και Young [25] εξέτασαν εγκλείσματα γυαλιού σε εποξειδική ρητίνη και βρήκαν ότι οι καλύτερες συνολικές μηχανικές ιδιότητες αποκτήθηκαν από σύνθετα υλικά που περιείχαν κόκκους οι οποίοι είχαν εμβαπτιστεί σε ουσία (coupling agent) προς αύξηση της προσφύσεως μήτρας - εγκλείσματος.

Είναι ξεκάθαρο από τις προηγούμενες αναφορές ότι τα μέτρα ελαστικότητας ενός συστήματος εγκλεισμάτων είναι μια λεπτομερειακή συνάρτηση της μικροδομής, όπως επίσης και της ποιότητας πρόσφυσης μεταξύ των δύο φάσεων.

2.1.5 Θεωρητική μελέτη μοντέλων για τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας του κοκκώδους υλικού

Η θεωρητική μελέτη που ακολουθεί βασίζεται στις ακόλουθες παραδοχές. Οι φάσεις του σύνθετου υλικού (έγκλεισμα και μήτρα) είναι ελαστικά ισότροπα και ομογενή υλικά.

- Ο αριθμός των εγκλεισμάτων είναι μεγάλος και η κατανομή τους ομοιόμορφη, έτσι ώστε το σύνθετο υλικό να μπορεί να θεωρηθεί ομοιογενές και ισότροπο (μακροσκοπικώς ισότροπο υλικό).
- Το έγκλεισμα αποτελείται από κόκκους οι οποίοι έχουν τέλειο σφαιρικό σχήμα
- Οι παραμορφώσεις που αναπτύσσονται στο σύνθετο υλικό είναι αρκετά μικρές έτσι ώστε να μπορεί να θεωρηθεί ότι ισχύουν οι γραμμικές σχέσεις παραμορφώσεων. Η κατ' όγκο περιεκτικότητα των εγκλεισμάτων είναι αρκετά μικρή, ούτως ώστε η αλληλεπίδραση μεταξύ αυτών να μπορεί να αμεληθεί.

Για τον προσδιορισμό των σχέσεων οι οποίες θα δώσουν τη θεωρητική έκφραση για το μέτρο ελαστικότητας (E_c) του σύνθετου υλικού, θα εφαρμόσουμε τη θεωρία της ελαστικότητας στον στοιχειώδη αντιπροσωπευτικό

όγκο του σύνθετου, όπου θεωρείται ότι έχει κατά μέσο όρο τις ιδιότητες του κοκκώδους 'συνθετου υλικού.

2.2 Παράμετροι που χαρακτηρίζουν την αντοχή των κοκκωδών υλικών

2.2.1 Τάση θραύσης

Τα τελευταία χρόνια μεγάλος αριθμός ερευνητών ασχολήθηκε με την αντοχή συστημάτων πολυμερών ενισχυμένων με εγκλείσματα. Μεταξύ άλλων, οι Leidner και Woodhams [26], και Piggott [27] και Leidner πρότειναν μία εξίσωση της μορφής:

$$\sigma_{f,c} = a - b_f$$

όπου $\sigma_{f,c}$ η αντοχή σε εφελκυσμό του σύνθετου, και a και b σταθερές. Οι Nicolais και Mashelkar [28] πρότειναν μια άλλη ημιεμπειρική εξίσωση της μορφής:

$$\sigma_{f,c} = \sigma_{f,m} - b u^{\phi}$$

όπου $\phi < 1$, $\sigma_{f,c}$ η αντοχή σε εφελκυσμό της μήτρας και η σταθερά b παίρνει θετικές τιμές.

Η παραπάνω εξίσωση παρουσιάζει καλή προσέγγιση στις πειραματικές τιμές, αλλά επειδή είναι εμπειρική δεν αντιπροσωπεύει κάποιο πραγματικό μηχανισμό αστοχίας.

Ο Schragger [29] πρότεινε κάποιο μοντέλο που περιγράφεται από εξίσωση διαφορετικής μορφής από τις δύο προηγούμενες:

$$\sigma_{f,c} = \sigma_{f,m} \cdot \exp(-r u_f)$$

όπου η σταθερά r βρέθηκε πειραματικά ίση με 2.66. Το μειονέκτημα αυτού του μεγέθους είναι ότι είναι ακριβές για περιορισμένη περιοχή εγκλεισμάτων.

Η εξίσωση αυτή είναι αντίστοιχη με εκείνη που προτάθηκε από τον Passmore για την περίπτωση πορώδων συστημάτων:

$$\sigma_{f,c} = \sigma_{f,0} \cdot \exp(-aP)$$

όπου $\sigma_{f,0}$ η αντοχή της μήτρας χωρίς πόρους, a σταθερά και P κ κατ' όγκον περιεκτικότητα σε πόρους.

2.2.2 Παραμόρφωση θραύσης

Οι θεωρίες που αναφέρονται στη βιβλιογραφία σχετικά με την παραμόρφωση θραύσης κοκκωδών σύνθετων υλικών είναι περίπου ανάλογες και οι μικρές διαφορές τους οφείλονται στα διαφορετικά μοντέλα πάνω στα οποία βασίζονται.

Παρακάτω αναφέρονται διάφορα θεωρητικά μοντέλα που διατυπώθηκαν από ορισμένους ερευνητές για την παραμόρφωση θραύσης.

Ο Smith [30] πρότεινε τον τύπο:

$$\varepsilon_c = \varepsilon_m (1 - 1,106U_f^{1/3})$$

όπου ε_c και ε_m η παραμόρφωση θραύσης του συνθέτου και της μήτρας αντίστοιχα.

Μία αντίστοιχη εξίσωση πρότεινε ο Bueche χρησιμοποιώντας ένα μοντέλο από κυβικά σωματίδια σε κυβική διάταξη:

$$\varepsilon_c = \varepsilon_m (1 - U_f^{1/3})$$

Ο Nielsen [31] πρότεινε την παρακάτω εξίσωση της οποίας η μορφή είναι ίδια με την παραπάνω:

$$\varepsilon_c = \varepsilon_m (1 - U_f^{1/3})$$

Οι παραπάνω εξισώσεις στηρίζονται περισσότερο στο πείραμα και λιγότερο στη θεωρία και συνοψίζουν τη συμπεριφορά τάσεων – παραμορφώσεων στα σύνθετα υλικά με κοκκώδες έγκλεισμα. Περιγράφουν την επίδραση διαφόρων παραγόντων όπως της κατ' όγκο περιεκτικότητας του εγκλείσματος, των συσσωματωμάτων του μεγέθους των σωματιδίων, του μέτρου πρόσφυσης μεταξύ μήτρας και εγκλείσματος στην μηχανική συμπεριφορά των σύνθετων υλικών.

2.2.3 Ενέργεια θραύσης – Στερρότητα

Οι δύο θεμελιώδεις τρόποι με τους οποίους τα υλικά αντιδρούν στην επιβολή εξωτερικών δυνάμεων είναι η αλλαγή του όγκου τους και η αλλαγή του σχήματός τους. Η αλλαγή όγκου ενός στοιχειώδους κύβου μπορεί να γίνει με ομοιόθετη αλλαγή όλων των γραμμικών του διαστάσεων και προφανώς θα πρέπει να εξαρτάται μόνον από τις ορθές συνιστώσες των τάσεων (δηλαδή των παραμορφώσεων). Στην περίπτωση αυτή ο στοιχειώδης κύβος διατηρεί το σχήμα του, αλλά με νέες διαστάσεις των ακμών του.

Η αλλαγή σχήματος μπορεί να επιτευχθεί με δύο τρόπους:

- I. Με αλλαγή των γωνιών του κύβου χωρίς αισθητή αλλαγή των γραμμικών του διαστάσεων (π.χ. περίπτωση καθαρής διατμήσεως)
- II. Με μη ομοιόθετη αλλαγή των γραμμικών διαστάσεων του στοιχειώδους κύβου οπότε αυτός μετατρέπεται σε στοιχειώδες ορθογώνιο

παραλληλεπίπεδο. Αυτό βέβαια σημαίνει ότι μερικές γωνίες θα αλλάξουν τιμή, όπως εκείνες των διαγωνίων του. Επομένως, η αλλαγή σχήματος επιτυγχάνεται και από ορθές, και από διατμητικές τάσεις και άρα παραμορφώσεις.

Για τις αλλαγές αυτές απαιτείται η καταβολή εξωτερικού έργου που προσφέρεται από τη μηχανή επιβολής των φορτίων. Το έργο αυτό αποθηκεύεται στο δοκίμιο ως ενέργεια παραμορφώσεων, η οποία αποτελείται από δύο προσθετέους, έναν που αντιστοιχεί στην αλλαγή του όγκου και ονομάζεται ενέργεια μεταβολής όγκου και έναν που αντιστοιχεί σε αλλαγές σχήματος ή στρέβλωση του υλικού και καλείται στρωφική ενέργεια. Προφανώς, το άθροισμα των δύο αυτών όρων παριστά το σύνολο της ενέργειας παραμορφώσεως που αποθηκεύτηκε στο υλικό και ισούται με το έργο των εξωτερικών δυνάμεων που δαπανήθηκε για τη φόρτιση του δοκιμίου.

Το εμβαδόν του χωρίου ανάμεσα στην καμπύλη σ - ϵ και τον άξονα των παραμορφώσεων παριστάνει τη συνολική πυκνότητα της ενέργειας των παραμορφώσεων που έχει αποθηκευτεί στο υλικό ή καταναλωθεί από αυτό από την αρχή της φορτίσεως μέχρι τη στιγμή που η τάση είναι σ και η αντίστοιχη παραμόρφωση ϵ . Όταν το ζεύγος (σ, ϵ) αντιστοιχεί στο σημείο θραύσεως Θ του υλικού, τότε η συνολική πυκνότητα της ενέργειας παραμορφώσεων καλείται στερρότητα (toughness) του υλικού και αποτελεί μέτρο της απαιτούμενης από το υλικό ενέργειας για τη θραύση.

3. Θεωρία ενδιάμεσης φάσης σύνθετων υλικών

3.1 Γενικά – Ορισμός ενδιάμεσης φάσης (interphase)

Το δυναμικό μέτρο ελαστικότητας μίας πολυμερικής μήτρας στην οποία έχουν προστεθεί μεταλλικά εγκλείσματα εξαρτάται από τα τασικά και παραμορφωσιακά πεδία που αναπτύσσονται γύρω από κάθε εγκλείσμα ξεχωριστά, υπό την επίδραση δυναμικών φορτίων, τα οποία εξαρτώνται από:

- το σχήμα των εγκλεισμάτων, καθώς και την κατανομή τους εντός της μήτρας
- το μέγεθος των εγκλεισμάτων, και ιδιαίτερα από το μέγεθος τους σε σύγκριση με το μήκος του προσκρούοντος τασικού κύματος
- την αλληλεπίδραση μεταξύ των τασικών και παραμορφωσιακών πεδίων των “γειτονικών” εγκλεισμάτων
- τα τασικά πεδία που δημιουργούνται λόγω της συμπύκνωσης που προκαλείται από την αντίδραση του πολυμερισμού, και η οποία σε πολλές περιπτώσεις δεν είναι ομοιόμορφη
- τα θερμικά τασικά πεδία που προκύπτουν λόγω των διαφορετικών συντελεστών θερμικής διαστολής των υλικών από τα οποία αποτελείται το σύνθετο υλικό, σε υψηλές θερμοκρασίες

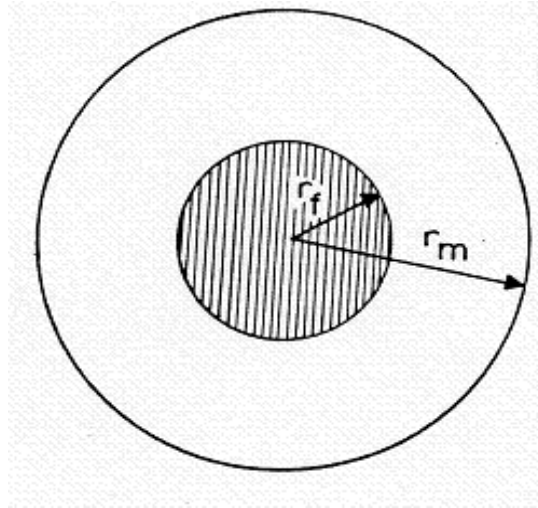
Έχουν γίνει πειράματα με σκοπό τον καθορισμό των δυναμικών ιδιοτήτων των σύνθετων υλικών εποξειδικής μήτρας με μεταλλικά εγκλείσματα. Τα μέτρα αποθήκευσης και απωλειών ενός μεγάλου αριθμού συνθέτων υλικών έχουν εκτιμηθεί, ενώ και η επίδραση της κατ’ όγκον περιεκτικότητας σε εγκλείσματα, καθώς και του μεγέθους των εγκλεισμάτων έχουν μελετηθεί, ειδικά για σύνθετα υλικά που παρουσιάζουν ατελή συνάφεια μεταξύ μήτρας και εγκλεισμάτων.

Η φύση του δεσμού συνάφειας μεταξύ μήτρας και εγκλεισμάτων είναι ιδιαίτερα σημαντική. Στην πραγματικότητα, η υπόθεση της τέλει συνάφειας που ανταποκρίνεται στη συνέχεια των τάσεων και των μετατοπίσεων της ενδιάμεσης φάσης, είναι η συνηθέστερη και βασικότερη παραδοχή που γίνεται με σκοπό να προχωρήσουμε σε αναλυτική επεξεργασία των δεδομένων. Στην πράξη βέβαια, η υπόθεση αυτή δεν ισχύει σχεδόν ποτέ. Αντιθέτως, γύρω από κάθε έγκλεισμα αναπτύσσεται μια πολύπλοκη δομή, εντός της οποίας εμφανίζονται:

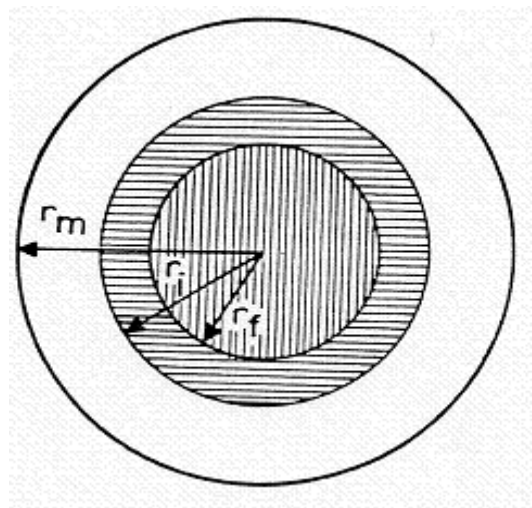
- περιοχές με ατελείς δεσμούς
- μόνιμες τάσεις που προκύπτουν λόγω της συρρίκνωσης της πολυμερικής μήτρας κατά τη διάρκεια κατεργασίας – παρασκευής του σύνθετου υλικού, καθώς και λόγω της αλλαγής θερμικής κατάστασης
- περιοχές υψηλών τασικών φορτίων
- σημειακές τάσεις, λόγω μικρορωγμών που εμφανίζονται στις περιοχές αυτές

Πέραν αυτού, η αλληλεπίδραση της πολυμερικής μήτρας με την επιφάνεια των στερεών μεταλλικών εγκλεισμάτων, κατά τη διάρκεια της κατεργασίας – παρασκευής του υλικού, είναι πάντα μια πολύπλοκη διαδικασία. Πράγματι, η παρουσία των εγκλεισμάτων περιορίζει την ελεύθερη ατομική και μοριακή κινητικότητα της πολυμερικής μήτρας καθώς λαμβάνει χώρα η αλληλεπίδραση μεταξύ των φάσεων (μήτρας – εγκλεισμάτων). Το φαινόμενο αυτό επηρεάζει σημαντικά την ποιότητα της συνάφειας που αναπτύσσεται μεταξύ των φάσεων, συνεισφέροντας έτσι στην ανάπτυξη μίας “υβριδικής” φάσης, που ονομάζεται ενδιάμεση φάση και βρίσκεται ανάμεσα στις κύριες φάσεις (μήτρα – εγκλείσματα). Η ύπαρξη της ενδιάμεσης φάσης έχει αποδειχθεί πειραματικά και το μέγεθός της μπορεί να εκτιμηθεί με τη βοήθεια μίας θεωρίας που αναπτύχθηκε από τον Lipatov.

Παρακάτω απεικονίζεται ένα διφασικό, καθώς και ένα τριφασικό μοντέλο, αμφότερα σε τομή, ώστε να γίνει ευκολότερα αντιληπτή η διαφορά στον τρόπο προσέγγισης του θεωρητικού υπολογισμού των μηχανικών χαρακτηριστικών του σύνθετου σε καθεμία περίπτωση:



Σχήμα 3.1 Διφασικό μοντέλο (έγκλεισμα – μήτρα)



Σχήμα 3.2 Τριφασικό μοντέλο (έγκλεισμα – ενδιάμεση φάση – μήτρα)

Σε μοντέλα που έχουν αναπτυχθεί από τους Παπανικολάου, Παιπέτη και Θεοχάρη [32], η ενδιάμεση φάση αρχικά είχε θεωρηθεί ως ένα ομογενές και ισοτροπικό υλικό, ενώ είχαν γίνει θερμικές μετρήσεις με σκοπό τον καθορισμό της ακτίνας, καθώς και του όγκου της. Τα μεγέθη αυτά, χρησιμοποιήθηκαν για να υπολογιστεί ο συντελεστής συνάφειας που πρώτη φορά χρησιμοποιήθηκε σε ένα βελτιωμένο μοντέλο στηριζόμενο στο νόμο της ανάμιξης.

Η ιδέα μίας ενδιάμεσης φάσης με μεταβλητά μηχανικά χαρακτηριστικά (μέτρο ελαστικότητας, λόγο Poisson) αναπτύχθηκε από τους Σιδερίδη, Θεοχάρη και Παπανικολάου [33]. Στο μοντέλο αυτό, η ενδιάμεση φάση σχηματίζει μια μεταβατική ζώνη μεταξύ μήτρας και εγκλείσματος, και οι μηχανικές της ιδιότητες σε κάθε σημείο εξαρτώνται από τις πολικές συντεταγμένες του σημείου.

Στην παρούσα μελέτη, οι θεωρητικές σχέσεις που θα χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό των μέτρων αποθήκευσης και απωλειών του σύνθετου υλικού έχουν δημιουργηθεί με τη χρησιμοποίηση του μοντέλου ενδιάμεσης φάσης με μεταβλητά μηχανικά χαρακτηριστικά σε συνδυασμό με την αρωγή της θεωρίας ελαστικότητας.

3.2 Προσδιορισμός της ειδικής θερμότητας και της θερμοκρασίας μεταβάσεως στην υαλώδη κατάσταση των σύνθετων υλικών ενισχυμένων με κόκκους μετάλλου. Εκτίμηση της ενδιάμεσης φάσης

3.2.1 Εισαγωγή

Μεταξύ των σπουδαιότερων παραγόντων οι οποίοι προσδιορίζουν την βισκοελαστική συμπεριφορά των σύνθετων υλικών από πολυμερή είναι η προσρόφηση πολυμερικών μακρομορίων εντός των κόκκων των εγκλεισμάτων, όπως επίσης και η πρόσφυση μεταξύ μήτρας και εγκλεισμάτων. Η προσρόφηση των πολυμερικών μορίων εντός των κόκκων, είναι η κυρία αιτία για την δημιουργία διαφορετικών διαμορφώσεων των μακρομορίων στα περίχωρα των κόκκων. Η αλλαγή της μορφής των μακρομορίων προσδιορίζει την περιοχή της ενδιάμεσης φάσης, η οποία έχει διαφορετική δομή και ιδιότητες από την μήτρα. Έτσι η παρουσία εγκλεισμάτων μέσα στην πολυμερική μήτρα καταλήγει σε μια ατέλεια του πολυμερικού δικτύου.

Οι ιδιότητες κατά την χαλάρωση των πολυμερικών σύνθετων υλικών επηρεάζονται πολύ από την ύπαρξη ενδιάμεσης φάσης. Από αυτή την άποψη είναι πολύ σημαντική η μελέτη της θερμικής συμπεριφοράς αυτών των σύνθετων και η διαλογή πληροφοριών οι οποίες αφορούν την δομή και τις ιδιότητες της ενδιάμεσης φάσης καθώς επίσης και την επίδρασή της στην βισκοελαστική συμπεριφορά του σύνθετου συστήματος.

Όμως, η συμπεριφορά και οι ιδιότητες της ενδιάμεσης φάσης εξαρτώνται, μεταξύ άλλων, από την πειραματική μέθοδο η οποία χρησιμοποιείται στις δοκιμές και αυτό διότι κάθε μία από τις πειραματικές μεθόδους χαρακτηρίζεται από τους δικούς της ιδιαίτερους περιορισμούς. Έτσι, η κάθε μέθοδος τείνει να επιδείξει έναν ιδιαίτερο τύπο μοριακών κινήσεων ως συνέπεια των παραπάνω διαφορών τα αποτελέσματα τα οποία λαμβάνονται από τις διαφορετικές

μεθόδους είναι συχνά διαφορετικά, όταν συγκρίνονται μεταξύ τους. Το αποτέλεσμα αυτών των διαφορών είναι οι διαφορετικές τιμές για την θερμοκρασία μεταβάσεως στην υαλώδη κατάσταση, T_g , οι οποίες λαμβάνονται από διαφορετικές πειραματικές μεθόδους, όπως η θερμιδομετρία, διαστολομετρία, δυναμικές μετρήσεις κ.λπ..

Επίσης, υπάρχουν διαφορές όσον αφορά την επίδραση της περιεκτικότητας των εγκλεισμάτων, U_f , στην θερμοκρασία T_g . Αρκετοί ερευνητές βρήκαν ότι όταν αυξάνεται η περιεκτικότητα των κόκκων, αυξάνεται και η T_g , και ότι η σχέση αυτή είναι γραμμική. Άλλοι όμως βρήκαν ότι η T_g δεν επηρεάζεται σημαντικά από την περιεκτικότητα. Μετρήσεις διαστολομετρίας οι οποίες έγιναν σε ρητίνη ενισχυμένη με κόκκους μετάλλου έδειξαν ότι οι τιμές της T_g εξαρτώνται πολύ από την περιεκτικότητα του εγκλείσματος, και σε πολλές περιπτώσεις η T_g ελαττώνεται όταν αυξάνεται η περιεκτικότητα.

Στην περίπτωση μετρήσεων θερμιδομετρίας ή διαστολομετρίας μια παράμετρος η οποία επιδρά στη θέση των μεταβατικών θερμοκρασιών, είναι ο ρυθμός θέρμανσης. Έχει παρατηρηθεί ότι, σε μετρήσεις D.S.C, η εξάρτηση από τον ρυθμό θέρμανσης, H_r , είναι τέτοια ώστε διαφορές της τάξεως 15°C να μπορούν να παρατηρηθούν στις μεταβατικές θερμοκρασίες του πολυμερούς.

Στο Εργαστήριο Αντοχής Υλικών έχουν γίνει συστηματικές μετρήσεις θερμοχωρητικότητας επί δοκιμίων εποξειδικής ρητίνης και κόκκων σιδήρου. Η επίδραση της περιεκτικότητας των εγκλεισμάτων και της διαμέτρου αυτών στην θερμική συμπεριφορά των δοκιμίων του σύνθετου υλικού έχει μελετηθεί εκτενώς. Έχει διερευνηθεί η επίδραση του ρυθμού θέρμανσης επί της T_g και έχει υπολογισθεί το πάχος και ο όγκος της ενδιάμεσης φάσης με βάση αυτές τις θερμικές μετρήσεις. Επίσης, έχουν γίνει ορισμένα πειράματα μικρότερης έκτασης (μία διάμετρος κόκκων) με δοκίμια εποξειδικής ρητίνης και κόκκους

αλουμινίου για την διερεύνηση της επίδρασης της περιεκτικότητας, ρυθμού θέρμανσης και τον προσδιορισμό του πάχους της ενδιάμεσης φάσης.

Ένα μοντέλο με τρεις φάσεις, έγκλεισμα, μήτρα και ενδιάμεση φάση, το οποίο προκύπτει από το διφασικό μοντέλο (Σχήμα 3.1), με την ενδιάμεση φάση να έχει μεταβαλλόμενες ιδιότητες (μέτρο ελαστικότητας, λόγος Poisson, συντελεστής θερμικής διαστολής), έχει χρησιμοποιηθεί για τον θεωρητικό προσδιορισμό του μέτρου ελαστικότητας και συντελεστή θερμικής διαστολής του σύνθετου υλικού, με την εφαρμογή της θεωρίας ελαστικότητας (Σχήμα 3.2). Οι θεωρητικοί τύποι, οι οποίοι προέκυψαν με την εφαρμογή αυτού του μοντέλου, δύνανται να συγκριθούν με άλλους θεωρητικούς τύπους της βιβλιογραφίας καθώς επίσης και με πειραματικά αποτελέσματα.

3.2.2 Υλικά και πειραματική διαδικασία

Τα υλικά των οποίων τα στοιχεία έχουν χρησιμοποιηθεί σε αυτή τη μελέτη είναι σύνθετα υλικά τα οποία κατασκευάστηκαν στο Εργαστήριο Αντοχής Υλικών του Ε.Μ.Π.. Η μήτρα των σύνθετων υλικών, ήταν σε όλες τις περιπτώσεις εποξειδική ρητίνη του τύπου DGEBA (Diglycidyl Ether of Bisphenol A) με ισοδύναμο 185-192, με μοριακό βάρος μεταξύ 370 και 384, και με ιξώδες 15000cP στους 25°C, πολυμεριζόμενη εν ψυχρώ με 8% τριεθυλενική τετραμίνη. Επίσης χρησιμοποιήθηκαν κόκκοι σκόνης σιδήρου ως εξής:

Μέγεθος κόκκου	Ειδικός όγκος	Φαινόμενη πυκνότητα
<i>mm</i>	<i>cm³/100gr</i>	<i>gr/cm³</i>
0,15	38-41	2,60-2,40

Πίνακας 3.1

Οι ιδιότητες των υλικών του σύνθετου υλικού απεικονίζονται στον επόμενο πίνακα 3.2:

Ιδιότητες	Σύμβολα	Μονάδες	Σίδηρος	Ρητίνη
Σταθερές του Lamé	λ μ	N/m^2 N/m^2	$11,20 \times 10^{10}$	$3,34 \times 10^9$ $1,30 \times 10^9$
Μέτρο Ελαστικότητας	E	N/m^2	$21,00 \times 10^{10}$	$3,53 \times 10^9$
Μέτρο Διογκώσεως	K	N/m^2	$16,70 \times 10^{10}$	$4,21 \times 10^9$
Λόγος Poisson	ν	—	0,29	0,36
Πυκνότητα	ρ	gr/cm^3	7,80	1,19
Συντελεστής θερμικής διαστολής	a	C^{-1}	$15,00 \times 10^{-6}$	$60,26 \times 10^{-6}$

Πίνακας 3.2

Οι μηχανικές ιδιότητες της μήτρας E και ν έχουν μετρηθεί κατά την διάρκεια πειράματος ερπυσμού στους 20 °C και σε χρόνο 15 sec από την αρχή του πειράματος. Πρέπει να διευκρινισθεί ότι με a συμβολίζουμε τον συντελεστή θερμικής διαστολής για θερμοκρασίες κάτω της υαλώδους θερμοκρασίας T_g .

Όσον αφορά την παρασκευή των δοκιμίων, θερμαίνουμε το προπολυμερές στους 30 °C περίπου για να ελαττωθεί η εσωτερική τριβή του και στην συνέχεια προσθέτουμε τις κατάλληλες ποσότητες αμίνης και μετάλλου. Ανακατεύουμε το μίγμα και στην συνέχεια το τοποθετούμε σε θάλαμο κενού, έτσι ώστε να ελευθερωθούν όλες οι φυσαλίδες αέρος τις οποίες περιέχει το μίγμα.

Στην συνέχεια γίνεται απόχυση του μίγματος σε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο καλούπι από plexiglass, διαστάσεων 250×250×50mm, το οποίο σφραγίσθηκε με ένα σκέπασμα από plexiglass, ούτως ώστε να είναι δυνατή η εκ νέου ανάδευση του μίγματος για να έχουμε τελικά ένα όσο το δυνατόν πιο ομογενές προϊόν. Το μίγμα έμεινε μέσα στο καλούπι και σε θερμοκρασία περιβάλλοντος για 24 ώρες. Στην συνέχεια, το στερεό πλέον σύνθετο υλικό, υποβλήθηκε σε θερμική κατεργασία διάρκειας 7 ημερών ως εξής:

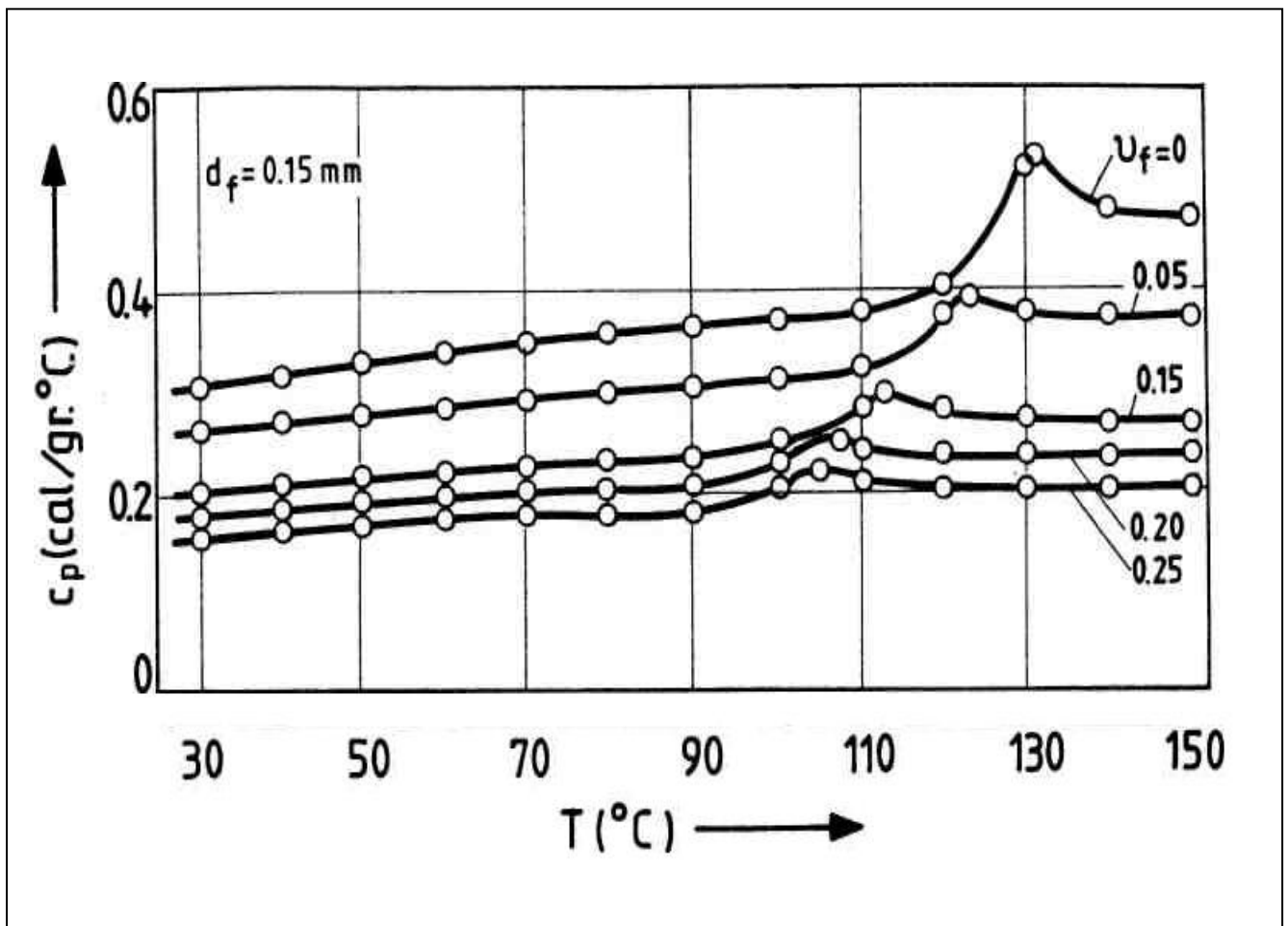
Εισήχθη σε φούρνο, προγραμματισμένο, έτσι ώστε η θερμοκρασία να αυξάνει κατά 5°C/h, στη συνέχεια να παραμείνει σταθερά στους 100 °C και τέλος να ελαττώνεται κατά 1° C/h έως την θερμοκρασία του περιβάλλοντος.

Με αυτόν τον τρόπο, επιτυγχάνεται πλήρης πολυμερισμός της μήτρας, σε ένα διάστημα που το σύνθετο υλικό να μη παρουσιάζει έντονη βισκοελαστική συμπεριφορά.

Δοκίμια με διάμετρο 4mm και πάχους 1-1,50mm κόπηκαν από κάθε υλικό με διαφορετική περιεκτικότητα και διάμετρο κόκκων του μετάλλου. Οι μετρήσεις έγιναν με την βοήθεια ενός θερμικού αναλυτή (DSC) Du-Pont 900. Η τοποθέτηση των δοκιμίων έγινε όταν η συσκευή ήταν σε θερμοκρασία περιβάλλοντος και μετά η αύξηση της θερμοκρασίας έγινε με σταθερό ρυθμό. Για να μελετηθεί η επίδραση του ρυθμού θέρμανσης χρησιμοποιήθηκαν τρεις διαφορετικοί ρυθμοί θέρμανσης (5,10 και 205°C/min). Η περιεκτικότητα των εγκλεισμάτων σε σίδηρο μεταβάλλεται από 5% έως 25%.

3.2.3 Προσδιορισμός πάχους ενδιάμεσης φάσης

Η μεταβολή της ειδικής θερμότητας (C_p) με την θερμοκρασία για κόκκους σιδήρου με $d_f = 150\mu\text{m}$, εξετάζεται για πέντε περιεκτικότητες ($U_f = 0, 0.5, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25$) με ρυθμό θέρμανσης $H_f = 5\text{ }^\circ\text{C}/\text{min}$. Από το Σχήμα 3.3 παρατηρούμε όχι μόνο μία μεταβολή στη θέση της μεταβατικής περιοχής, η οποία εκδηλώνεται με μια απότομη μεταβολή στην ειδική θερμότητα, αλλά επίσης και μία μείωση της ΔC_p στην υαλώδη μεταβατική περιοχή όταν αυξάνεται η περιεκτικότητα του εγκλείσματος.



Σχήμα 3.3 Μεταβολή της C_p με την T για κόκκους σιδήρου $d_f = 150\mu\text{m}$

Όταν η περιεκτικότητα των εγκλεισμάτων αυξάνεται, το ποσοστό των μακρομορίων τα οποία χαρακτηρίζονται από μειωμένη κινητικότητα επίσης αυξάνεται, έτσι ώστε ο αριθμός των μακρομορίων τα οποία συμμετέχουν στη διαδικασία της υαλώδους μεταβατικής θερμοκρασίας T_g ελαττώνεται. Αυτό είναι ισοδύναμο με μία αύξηση του όγκου της ενδιάμεσης φάσης και οδηγεί στο συμπέρασμα ότι υπάρχει μία σχέση μεταξύ της ΔC_p και του όγκου της ενδιάμεσης φάσης [34], η οποία εκφράζεται ως εξής:

$$\lambda = 1 - \frac{\Delta C_p^f}{\Delta C_p^0}$$

όπου ΔC_p^f και ΔC_p^0 είναι τα άλματα (απότομη μεταβολή) της ειδικής θερμότητας στην μεταβατική περιοχή για το ενισχυμένο και μη ενισχυμένο πολυμερές αντιστοίχως, ενώ λ είναι μία σταθερά η οποία πολλαπλασιάζεται με την περιεκτικότητα του εγκλείσματος U_f ώστε να ληφθεί υπόψη η συνεισφορά του όγκου της ενδιάμεσης φάσης στην θερμοχημική συμπεριφορά του σύνθετου υλικού.

Εάν r_f , r_i , r_m συμβολίζουν τις εξωτερικές ακτίνες του εγκλείσματος, της ενδιάμεσης φάσης και της μήτρας αντιστοίχως, τότε οι όγκοι των τριών φάσεων δίνονται ως εξής:

$$U_f = \frac{r_f^3}{r_m^3}$$

$$U_i = \frac{r_i^3 - r_f^3}{r_m^3}$$

$$U_m = \frac{r_m^3 - r_i^3}{r_m^3}$$

με $U_f + U_i + U_m = 1$

Για να προσδιορισθεί η ακτίνα του σφαιρικού τμήματος το οποίο αντιστοιχεί στην ενδιάμεση φάση εκφράζουμε αυτό ως $r_i = r_f + \Delta r_i$, όπου Δr_i το πάχος της ενδιάμεσης φάσης και χρησιμοποιούμε την σχέση του Liratov[39]:

$$\frac{r_f + \Delta r_i}{r_f} - 1 = \frac{\lambda U_f}{1 - U_f}$$

3.2.4 Η επίδραση της ενδιάμεσης φάσης και του ρυθμού θέρμανσης επί της υαλώδους μεταβατικής θερμοκρασίας (T_g)

Όταν ένα πολυμερές θερμαίνεται ή ψύχεται, υφίσταται ορισμένα είδη μεταβατικών καταστάσεων οι οποίες δημιουργούν μεταβολές στις φυσικές ιδιότητες του. Μία από τις σημαντικότερες είναι η υαλώδης μεταβατική θερμοκρασία ή η θερμοκρασία υαλώδους μεταπτώσεως ενός άμορφου πολυμερούς το οποίο μεταβάλλεται από ένα στέρεο ως ύαλο υλικό σε μαλακό υλικό όταν αυτό θερμανθεί.

Πίνακας 3.3

U_f	$\Delta r_i \mu m$	U_i
0,05	0,30	0,0013
0,10	1,06	0,0040
0,15	2,12	0,0130
0,20	3,53	0,0280
0,25	5,00	0,0500

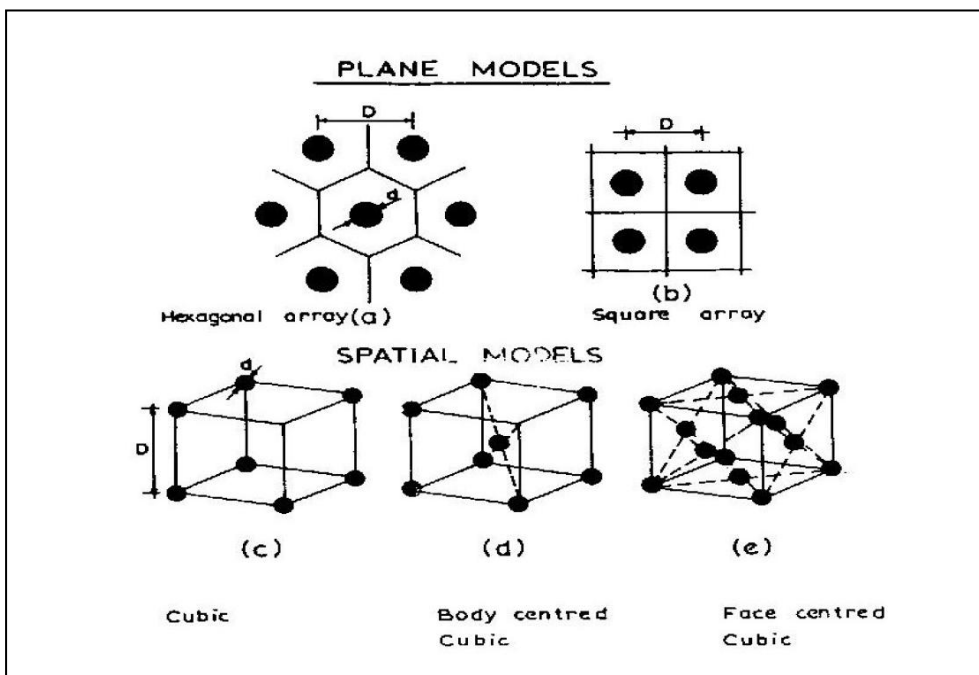
4. Γεωμετρική μοντελοποίηση της κατανομής των εγκλεισμάτων

4.1 Γενικά

Τα μικροδομικά, γεωμετρικά μοντέλα μελέτης των μηχανικών ιδιοτήτων των σύνθετων υλικών με εγκλείσματα, βασίζονται κυρίως στις εξής παραδοχές:

- Μια τυπική γεωμετρική δομή υιοθετείται για την εξομοίωση της διάταξης των εγκλεισμάτων στο χώρο. Συνήθως μία σφαίρα ή ένας κύλινδρος.
- Οι υπολογισμοί που γίνονται κατά τη μελέτη του μοντέλου είναι βασισμένοι στη συνήθη γεωμετρία και τοπολογία.

Τα μοντέλα αυτά μπορεί να είναι είτε επίπεδα (plane models), είτε τρισδιάστατα –ηλιοκεντρικά (spatial models).



Σχήμα 4.1 Απλά και τρισδιάστατα μοντέλα κατανομής εγκλεισμάτων σύνθετων υλικών στο χώρο

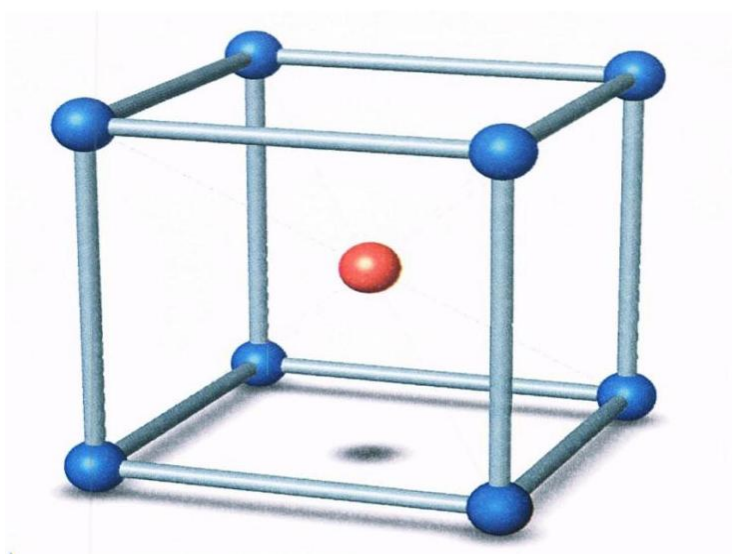
Στην παρούσα εργασία θα θεωρήσουμε ότι το βασικό δομικό κύτταρο του σύνθετου υλικού έχει κυβική μορφή, ενώ τα εγκλείσματα κατανέμονται με διάφορους τρόπους στο χώρο γύρω από το δομικό κύβο, δίνοντας έτσι διαφορετικά κυβικά μοντέλα κάθε φορά.

Τέλος, καθένα από αυτά τα μοντέλα θα προσομοιώνεται με ένα αντίστοιχο σφαιρικό πολυφασικό μοντέλο για λόγους απλούστευσης της κατανομής των τάσεων στο δομικό κύτταρο και συνεπώς απλούστευσης των υπολογισμών (λόγω και της σφαιρικής συμμετρίας).

4.2 Τετραφασικό κυβικό μοντέλο

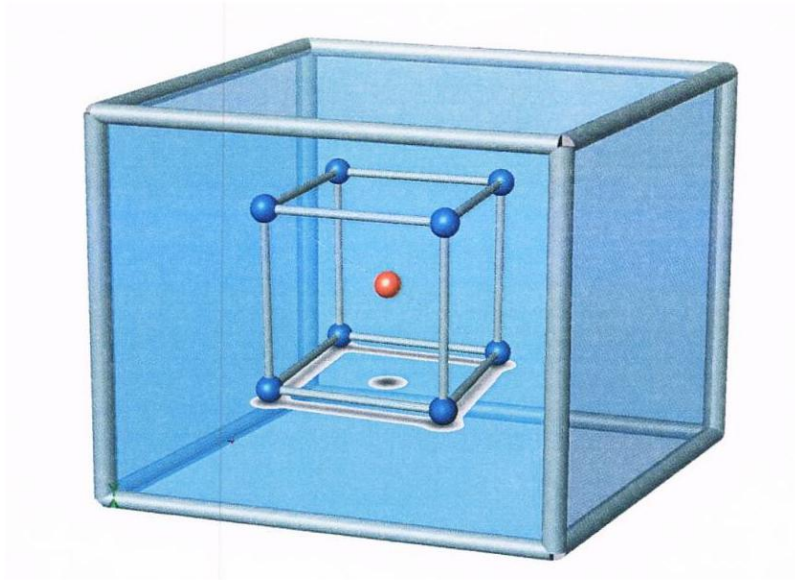
4.2.1 Τετραφασικό κυβικό μοντέλο 1

Στο πρώτο τετραφασικό μοντέλο θεωρούμε ότι 8 σφαιρικά εγκλείσματα καταλαμβάνουν τις κορυφές ενός Κύβου ακμής λ , και 1 σφαιρικό έγκλεισμα στο κέντρο βάρους του Κύβου, ενώ ανάμεσα στα εγκλείσματα υπάρχει μήτρα και το δομικό αυτό μοντέλο επαναλαμβάνεται με πλήρη συμμετρία στο χώρο, όπως φαίνεται και στα σχήματα 4.2 και 4.3.



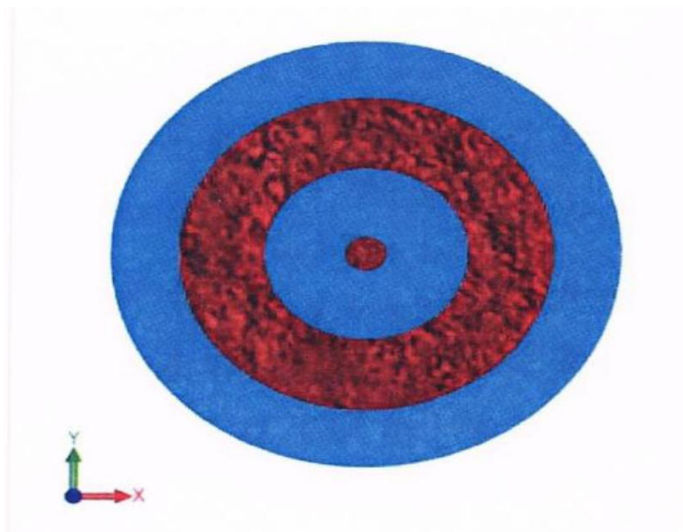
Σχήμα 4.2 Κυβικό μοντέλο 1

Ο Κύβος αυτός ακμής λ , τον οποίο περιγράψαμε παραπάνω, θεωρούμε ότι περικλείεται σε έναν δεύτερο Κύβο ακμής 2λ , δημιουργώντας έτσι το δομικό “κύτταρο” του σώματος το οποίο επαναλαμβάνεται συμμετρικά σε όλη τη μάζα του σύνθετου υλικού (Σχήμα 4.3).



Σχήμα 4.3 Δομικό “κύτταρο” σύνθετου υλικού για το κυβικό μοντέλο 1

Τον κύβο ακμής 2λ θα τον ανάγουμε σε ένα τετραφασικό μοντέλο αποτελούμενο από τέσσερις ομόκεντρες σφαίρες ακτίνας a , b , c και d αντίστοιχα ($a < b < c < d$).



Σχήμα 4.4 Εξομοίωση κυβικού μοντέλου 1 σε αντίστοιχο σφαιρικό (τομή)

Σε αυτό το μοντέλο, η δεύτερη και η τέταρτη φάση, τις οποίες αποτελούν ο σφαιρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα a και εξωτερική b και ο σφαιρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα c και εξωτερική d , αντιπροσωπεύουν το υλικό της μήτρας. Η σφαίρα ακτίνας a (πρώτη φάση) και ο σφαιρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα b και εξωτερική c (τρίτη φάση) αντιπροσωπεύουν το σύνολο των σφαιρών εγκλείσματος, δηλαδή το υλικό ενίσχυσης. Συνεπώς, σε πρώτη προσέγγιση δεν θα λάβουμε υπόψη μας την ύπαρξη ενδιάμεσου φάσεως που όπως είδαμε παραπάνω αναπτύσσεται μεταξύ εγκλεισμάτων και μήτρας.

Ο όγκος του Κύβου ακμής 2λ θα είναι:

$$V_{2\lambda} = (2\lambda)^3 \Rightarrow V_{2\lambda} = 8\lambda^3$$

Για ένα οποιοδήποτε σύνθετο υλικό γνωρίζουμε την κατ' όγκο περιεκτικότητα U_f των σφαιρών, όπως και την ακτίνα τους r_f . Για τον κύβο ακμής 2λ η U_f θα προκύπτει ως ο λόγος του όγκου των 8 σφαιρών που βρίσκονται στις κορυφές του κύβου και της 1 σφαίρας που βρίσκεται στο κέντρο βάρους του κύβου, προς τον όγκο του Κύβου ακμής 2λ , δηλαδή:

$$U_f = \frac{8 \frac{4}{3} \pi r_f^3 + \frac{4}{3} \pi r_f^3}{8\lambda^3} \Rightarrow \lambda = r_f \sqrt[3]{\frac{9 \frac{4}{3} \pi}{8U_f}} = r_f \sqrt[3]{\frac{3\pi}{2U_f}}$$

Ο όγκος του Κύβου ακμής 2λ στο κυβικό μοντέλο αντιπροσωπεύεται από τον όγκο της σφαίρας ακτίνας d , ισχύει λοιπόν:

$$8\lambda^3 = \frac{4}{3} \pi d^3 \Rightarrow d = \lambda \sqrt[3]{\frac{8 \cdot 3}{4\pi}} = \lambda \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}} \Rightarrow d = r_f \cdot \sqrt[3]{\frac{9}{U_f}}$$

Θεωρούμε τον κύβο ακμής λ . Η απόσταση από το κέντρο βάρους του Κύβου έως μία εκ των κορυφών του, όπως προκύπτει από τη γεωμετρία, έχει μήκος $\lambda \frac{\sqrt{3}}{2}$. Αν ονομάσουμε w αυτήν την απόσταση, το w αντιπροσωπεύει την απόσταση του κέντρου βάρους του Κύβου από τα κέντρα των σφαιριδίων που βρίσκονται στις κορυφές του.

$$w = \lambda \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Η πρώτη φάση αποτελείται από τη σφαίρα που βρίσκεται στο κέντρο βάρους του κύβου. Άρα θα ισχύει:

$$a = r_f$$

Θεωρούμε ότι ο σφαιρικός φλοιός με ακτίνες a , b , κατανέμεται ισόογκα εκατέρωθεν της σφαιρικής επιφάνειας που ορίζει η ακτίνα w . Με αφετηρία δηλαδή την επιφάνεια αυτή, η δεύτερη φάση “απλώνεται” κατά τέτοιο τρόπο ώστε να ισχύει:

$$\frac{4}{3} \pi (c^3 - w^3) = \frac{4}{3} \pi (w^3 - b^3) \Rightarrow c^3 + b^3 = 2w^3$$

Ο όγκος όμως της δεύτερης φάσης ισούται με τον όγκο των 8 σφαιρών, δηλαδή έχουμε:

$$\frac{4}{3} \pi (c^3 - b^3) = 8 \frac{4}{3} \pi r_f^3 \Rightarrow c^3 - b^3 = 8r_f^3$$

Από το παραπάνω σύστημα προσθέτοντας κατά μέλη έχω:

$$2c^3 = 2w^3 + 8r_f^3 \Rightarrow c^3 = w^3 + \frac{8}{2}r_f^3 \Rightarrow c^3 = \sqrt[3]{w^3 + \frac{8}{2}r_f^3}$$

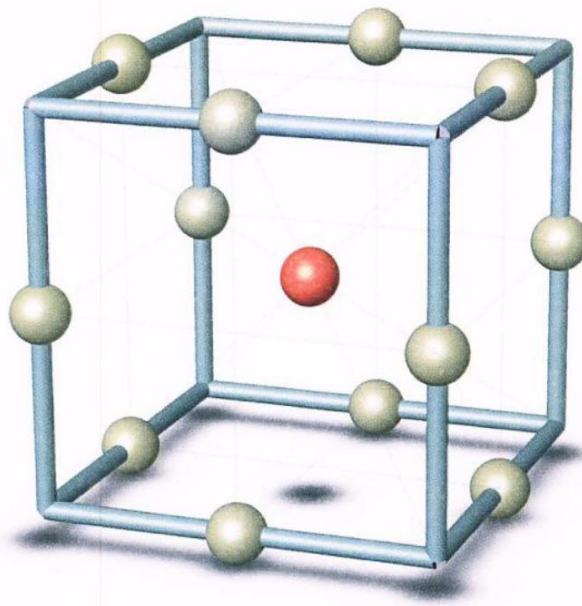
$$2b^3 = 2w^3 - 8r_f^3 \Rightarrow b^3 = w^3 - \frac{8}{2}r_f^3 \Rightarrow b^3 = \sqrt[3]{w^3 - \frac{8}{2}r_f^3}$$

Κατφέραμε λοιπόν να εκφράσουμε τις ακτίνες a , b , c , d συναρτήσει των γνωστών μεγεθών U_f και r_f .

4.2.2 Τετραφασικό κυβικό μοντέλο 2

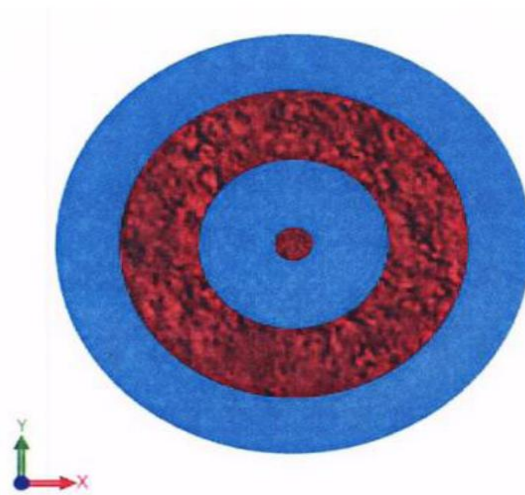
Σε αυτό το κυβικό μοντέλο έχουμε την εξής διάταξη των εγκλεισμάτων στο χώρο:

Θεωρούμε ότι υπάρχουν 12 εγκλείσματα στα μέσα των ακμών του κύβου και 1 στο κέντρο βάρους του. Έτσι προκύπτει το σχήμα 4.5.



Σχήμα 4.5 Κυβικό μοντέλο 2

Το παραπάνω μοντέλο ανάγεται στο ισοδύναμο τετραφασικό σφαιρικό μοντέλο, τομή του οποίου απεικονίζεται στο σχήμα 4.6.



Σχήμα 4.6 Εξομοίωση κυβικού μοντέλου 2 σε αντίστοιχο σφαιρικό (τομή)

Η κατ' όγκο περιεκτικότητα των κόκκων U_f δίνεται:

$$U_f = \frac{13 \frac{4}{3} \pi r_f^3}{8\lambda^3} \Rightarrow \lambda = r_f \sqrt[3]{\frac{13\pi}{6U_f}}$$

Ο όγκος του κύβου ακμής 2λ αντιπροσωπεύεται από τον όγκο της σφαίρας ακτίνας d , οπότε ισχύει:

$$2\lambda^3 = \frac{4}{3} \pi d^3 \Rightarrow d = r_f \cdot \sqrt[3]{\frac{13}{U_f}}$$

Η ακτίνα a ισούται με την ακτίνα του κάθε κόκκου, δηλαδή $a = r_f$.

Η απόσταση από το κέντρο βάρους του κύβου ακμής λ έως το μέσο μιας εκ των ακμών, την ονομάζω w είναι:

$$w = \lambda \frac{\sqrt{2}}{2}$$

και αντικαθιστώντας το λ έχω:

$$w = \frac{\sqrt{2}}{2} r_f \sqrt[3]{\frac{13\pi}{6U_f}}$$

Από το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$c^3 - b^3 = 12r_f^3, c^3 + b^3 = 2w^3$$

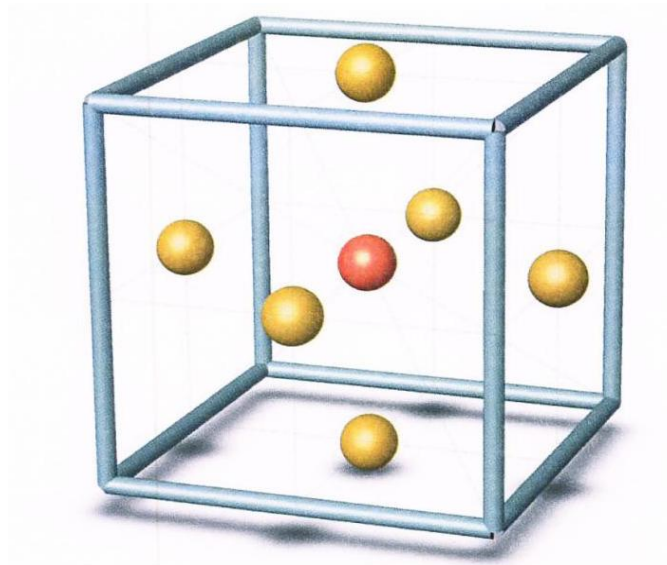
προκύπτουν οι εκφράσεις των ακτίνων b , c στο ισοογκικό μοντέλο ως εξής:

$$b = \sqrt[3]{w^3 - 6r_f^3}$$

$$c = \sqrt[3]{w^3 + 6r_f^3}$$

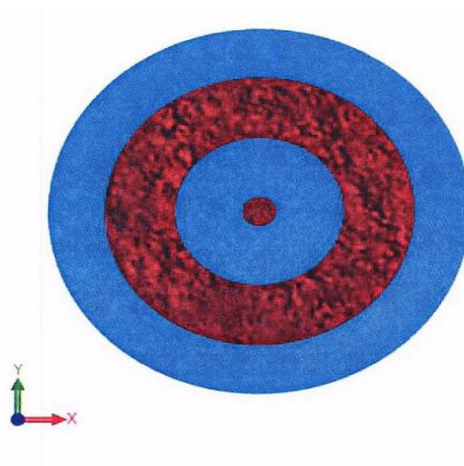
4.2.3 Τετραφασικό κυβικό μοντέλο 3

Σε αυτό το κυβικό μοντέλο η διάταξη των εγκλεισμάτων στο χώρο είναι η εξής: Θεωρούμε ότι υπάρχουν 6 εγκλείσματα στα κέντρα βάρους των πλευρικών επιφανειών του κύβου και 1 στο κέντρο βάρους του. Έτσι προκύπτει το μοντέλο που απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 4.7 Κυβικό μοντέλο 3

Το κυβικό μοντέλο του σχήματος 4.7 ανάγεται στο ισοδύναμο τετραφασικό σφαιρικό μοντέλο του παρακάτω σχήματος:



Σχήμα 4.8 Εξομοίωση κυβικού μοντέλου 3 σε αντίστοιχο σφαιρικό (τομή)

Η κατ' όγκο περιεκτικότητα των κόκκων U_f είναι:

$$U_f = \frac{7 \frac{4}{3} \pi r_f^3}{8 \lambda^3} \Rightarrow \lambda = r_f \sqrt[3]{\frac{7\pi}{6U_f}}$$

Ο όγκος του κύβου ακμής 2λ αντιπροσωπεύεται από τον όγκο της σφαίρας ακτίνας d , οπότε ισχύει:

$$2\lambda^3 = \frac{4}{3} \pi d^3 \Rightarrow d = r_f \cdot \sqrt[3]{\frac{7}{U_f}}$$

Η ακτίνα a ισούται με την ακτίνα του κάθε κόκκου, δηλαδή $a = r_f$.

Η απόσταση από το κέντρο βάρους του κύβου ακμής λ έως το μέσο μιας εκ των εδρών του, την ονομάζω w είναι:

$$w = \frac{1}{2} \lambda$$

και αντικαθιστώντας το λ έχω:

$$w = \frac{1}{2} r_f \sqrt[3]{\frac{7\pi}{6U_f}}$$

Από το σύστημα εξισώσεων:

$$c^3 - b^3 = 6r_f^3, c^3 + b^3 = 2w^3$$

προκύπτουν οι εκφράσεις των ακτίνων b, c στο ισοογκικό μοντέλο ως εξής:

$$b = \sqrt[3]{w^3 - 3r_f^3}$$

$$c = \sqrt[3]{w^3 + 3r_f^3}$$

4.3 Γεωμετρικοί περιορισμοί

Στην παράγραφο αυτή θα αναλυθούν οι γεωμετρικοί περιορισμοί που προκύπτουν από το κάθε κυβικό μοντέλο, λόγω της διάταξης των μορίων των εγκλεισμάτων σιδήρου που θεωρούμε κάθε φορά. Επειδή η ανάπτυξη της ενδιάμεσου φάσεως γίνεται μέσα στην περιοχή της μήτρας, γι αυτό άλλωστε μπορεί να θεωρηθεί και σαν αλλοιωμένη μήτρα, δεν προσθέτει κάποιον επιπλέον γεωμετρικό περιορισμό σχετικά με τις μέγιστες δυνατές περιεκτικότητες που μπορεί να έχουμε στο κάθε μοντέλο. Για αυτό και θα τους εξετάσουμε στα τετραφασικά μοντέλα μας, παραβλέποντας την επίδραση της ενδιάμεσου φάσεως.

I. Τετραφασικό κυβικό μοντέλο 1

$$b > 0 \Leftrightarrow w^3 - 4r_f^3 > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \frac{9\pi}{6U_f} r_f^3 - 4r_f^3 > 0 \Leftrightarrow U_f < \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \frac{9\pi}{24} \Leftrightarrow U_f < 0,765196$$

$$a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3 \Leftrightarrow r_f^3 < w^3 - 4r_f^3 \Leftrightarrow r_f^3 < \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \frac{9\pi}{6U_f} r_f^3 - 4r_f^3 \Leftrightarrow U_f < \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 9\pi}{30}$$

$$\Leftrightarrow U_f < 0,612157$$

$$c < d \Leftrightarrow c^3 < d^3 \Leftrightarrow w^3 + 4r_f^3 < r_f^3 \frac{9}{U_f} \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \frac{9\pi}{6U_f} r_f^3 + 4r_f^3 < r_f^3 \frac{9}{U_f} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow U_f < \frac{9 \left[6 - \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \right]}{24} \Leftrightarrow U_f < 1,48$$

Άρα θα πρέπει $U_f < U_{f(\min)} \Leftrightarrow U_f < 0,612157$

II. Τετραφασικό κυβικό μοντέλο 2

$$b > 0 \Leftrightarrow w^3 - 6r_f^3 > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \frac{13\pi}{6U_f} r_f^3 - 6r_f^3 > 0 \Leftrightarrow U_f < \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \frac{13\pi}{36} \Leftrightarrow U_f < 0,401093$$

$$a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3 \Leftrightarrow r_f^3 < w^3 - 6r_f^3 \Leftrightarrow r_f^3 < \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \frac{13\pi}{6U_f} r_f^3 - 6r_f^3 \Leftrightarrow U_f < \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 13\pi}{42}$$

$$\Leftrightarrow U_f < 0,343794$$

$$c < d \Leftrightarrow c^3 < d^3 \Leftrightarrow w^3 + 6r_f^3 < r_f^3 \frac{13}{U_f} \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \frac{13\pi}{6U_f} r_f^3 + 6r_f^3 < r_f^3 \frac{13}{U_f} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow U_f < \frac{13 \left[6 - \pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \right]}{36} \Leftrightarrow U_f < 1,76$$

$$\text{Άρα θα πρέπει } U_f < U_{f(\min)} \Leftrightarrow U_f < 0,343794$$

III. Τετραφασικό κυβικό μοντέλο 3

$$b > 0 \Leftrightarrow w^3 - 3r_f^3 > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{7\pi}{6U_f} r_f^3 - 3r_f^3 > 0 \Leftrightarrow U_f < \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{7\pi}{18} \Leftrightarrow U_f < 0,152716$$

$$a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3 \Leftrightarrow r_f^3 < w^3 - 3r_f^3 \Leftrightarrow r_f^3 < \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{7\pi}{6U_f} r_f^3 - 3r_f^3 \Leftrightarrow U_f < \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3 7\pi}{24}$$

$$\Leftrightarrow U_f < 0,114537$$

$$c < d \Leftrightarrow c^3 < d^3 \Leftrightarrow w^3 + 3r_f^3 < r_f^3 \frac{7}{U_f} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{7\pi}{6U_f} r_f^3 + 3r_f^3 < r_f^3 \frac{7}{U_f} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow U_f < \frac{7 \left[6 - \pi \left(\frac{1}{2}\right)^3 \right]}{18} \Leftrightarrow U_f < 2,18$$

$$\text{Άρα θα πρέπει } U_f < U_{f(\min)} \Leftrightarrow U_f < 2,18$$

Άρα τελικά οι μέγιστες δυνατές περιεκτικότητες σε κόκκους σιδήρου για κάθε μοντέλο είναι :

Μοντέλο	Κυβικό 1	Κυβικό 2	Κυβικό 3
Μέγιστη δυνατή κατ' όγκο περιεκτικότητα σε εγκλείσματα (U_f)%	61.22	34.38	11.45

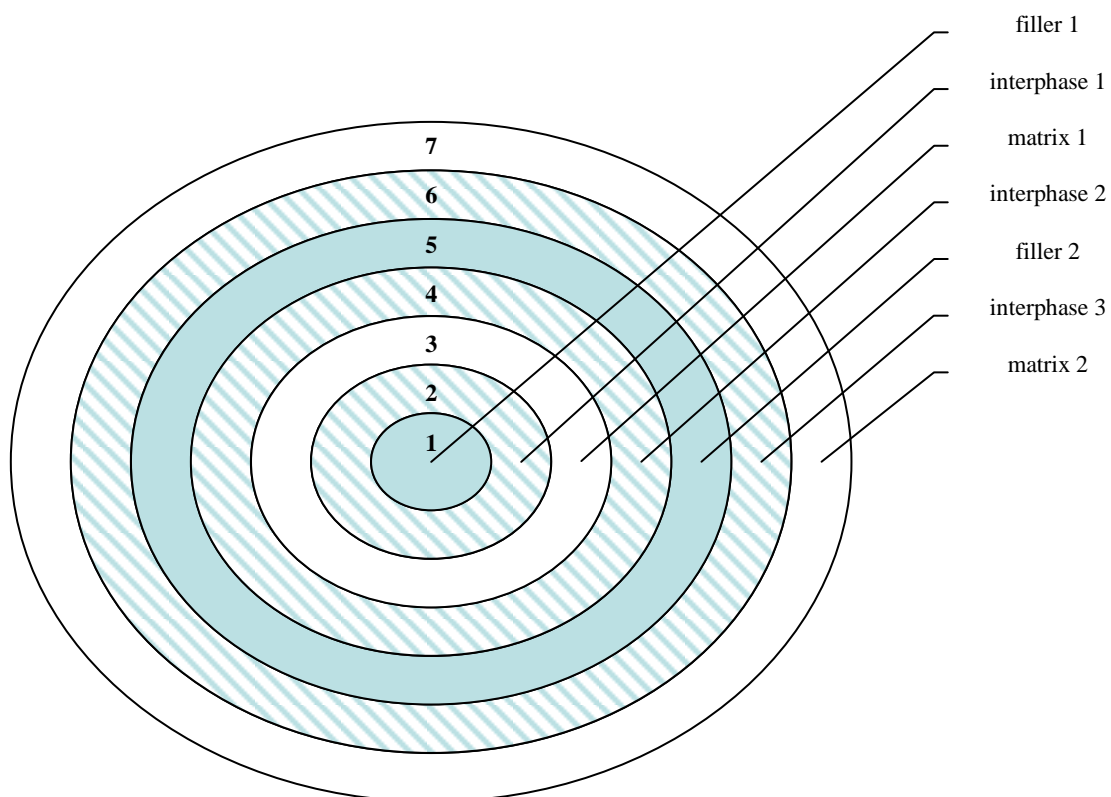
5. Ανάπτυξη μοντέλων ενδιάμεσης φάσης

5.1 Υπολογισμός ακτίνων ισοδύναμου επταφασικού μοντέλου

Στο προηγούμενο κεφάλαιο αναλύσαμε μία σειρά από γεωμετρικά μοντέλα διάταξης εγκλεισμάτων στο χώρο. Η ανάλυση του καθενός από αυτά τα μοντέλα στηρίχτηκε στην εξομοίωση τους με ένα αντίστοιχο σφαιρικό τετραφασικό μοντέλο, αποτελούμενο μόνο από φάσεις εγκλεισμάτων και μήτρας, ενώ παραλείψαμε την ύπαρξη ενδιάμεσου φάσεως.

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναλύσουμε το σφαιρικό επταφασικό μοντέλο που θα προκύψει αν θεωρήσουμε την ύπαρξη ενδιάμεσου φάσεως ανάμεσα σε κάθε ζευγάρι φάσεων εγκλείσματος – μήτρας.

Η τομή του μοντέλου αυτού φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 5.1 Επταφασικό σφαιρικό μοντέλο (σε τομή)

όπου:

filler: φάση εγκλεισμάτων (f)

interphase: ενδιάμεση φάση (i)

matrix: μήτρα (m)

Το επταφασικό μοντέλο που χρησιμοποιούμε αποτελείται από δύο περιοχές εγκλεισμάτων σιδήρου (περιοχές 1 και 5), δύο περιοχές μήτρας εποξειδικής ρητίνης (περιοχές 3 και 7). Ανάμεσα σε αυτές θεωρούμε ότι αναπτύσσονται περιοχές ενδιάμεσης φάσης (περιοχές 2, 4 και 6).

Το μέτρο ελαστικότητας σε αυτές καθώς και ο μέσος λόγος Poisson που τους αντιστοιχεί E_2, E_4, E_6 και ν_2, ν_4, ν_6 χρειάζεται αρχικά να προσδιοριστούν όπως και οι ακτίνες που αντιστοιχούν στα όρια της κάθε περιοχής, ώστε στη συνέχεια να γίνει εφικτός ο υπολογισμός του μέτρου ελαστικότητας E_c του σύνθετου υλικού καθώς και ο λόγος Poisson ν_c .

Για τον υπολογισμό της ακτίνας γνωρίζουμε ότι:

$$E_1 = E_5 = E_f = 210 \text{ GPa}$$

και

$$E_3 = E_7 = E_m = 3,5 \text{ GPa}$$

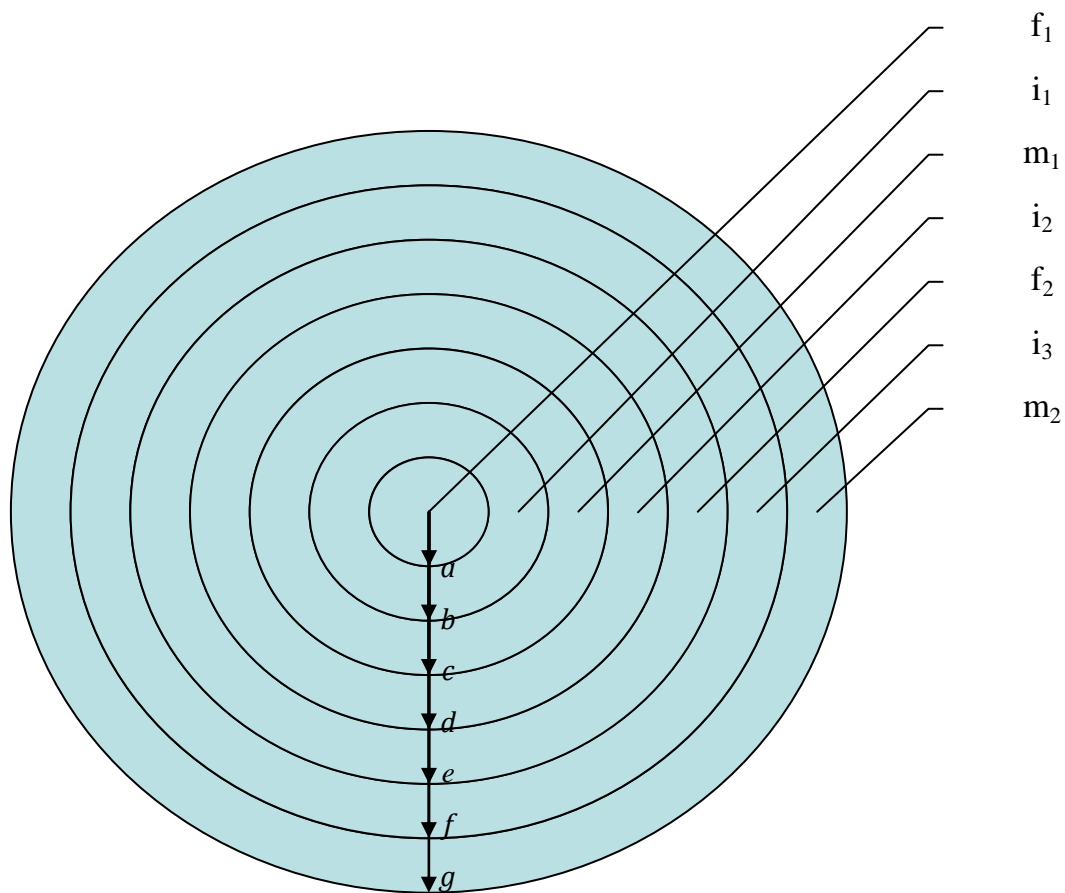
Αν με U_f συμβολίσουμε τη συνολική κατ' όγκο περιεκτικότητα του εγκλείσματος, U_i της ενδιάμεσης φάσης και U_m της μήτρας τότε θα ισχύει:

$$U_f = U_1 + U_5$$

$$U_i = U_2 + U_4 + U_6$$

$$U_m = U_3 + U_7$$

Κυβικό μοντέλο 1



Σχήμα 5.2 Ακτίνες επταφασικού σφαιρικού μοντέλου (σε τομή)

Οι ακτίνες όλων των φάσεων φαίνονται στο σχήμα 5.2 και είναι οι a , b , c , d , e , f , g .

Δουλεύοντας το πρώτο κυβικό μοντέλο του κεφαλαίου 4, έχουμε ως γνωστά τα U_f και r_f . Ξέρουμε από το τέταρτο κεφάλαιο ότι:

$$a = r_f$$

I

$$\lambda = r_f \sqrt[3]{\frac{3\pi}{2U_f}}$$

II

$$w = \lambda \frac{\sqrt{3}}{2}$$

III

$$g = r_f \cdot \sqrt[3]{\frac{9}{U_f}} \quad \boxed{\text{IV}}$$

ισόογκη κατανομή: $\frac{4}{3}\pi(e^3 - w^3) = \frac{4}{3}\pi(w^3 - d^3) \Rightarrow 2w^3 = e^3 + d^3$

όγκος 5^{ης} φάσης : $\frac{4}{3}\pi(e^3 - d^3) = 8\frac{4}{3}\pi r_f^3 \Rightarrow e^3 - d^3 = 8r_f^3$

Από τις 2 παραπάνω σχέσεις έχω: $d = \sqrt[3]{w^3 - 4r_f^3} \quad \boxed{\text{V}}$

$$e = \sqrt[3]{2w^3 + d^3} \quad \boxed{\text{VI}}$$

Κάνοντας την παραδοχή ότι η ενδιάμεση φάση μπορεί να θεωρηθεί ως αλλοιωμένη μήτρα και ότι η αναλογία της σε σχέση με το υλικό του εγκλείσματος θα είναι σταθερή και στις τρεις περιοχές εμφάνισης της θα ισχύει:

$$\frac{U_{i,1} + U_{i,2}}{U_{m,1}} = \frac{U_{i,3}}{U_{m,2}} = \frac{U_{i,1} + U_{i,2} + U_{i,3}}{U_{m,1} + U_{m,2}} = \frac{U_i}{U_m} = t$$

άρα

$$\frac{U_{i,3}}{U_{m,2}} = t \Rightarrow U_{i,3} = t \cdot U_{m,2} \Rightarrow \frac{\frac{4}{3}\pi(f^3 - e^3)}{\frac{4}{3}\pi g^3} = t \frac{\frac{4}{3}\pi(g^3 - f^3)}{\frac{4}{3}\pi g^3} \Rightarrow (f^3 - e^3) = t(g^3 - f^3) \Rightarrow$$

$$f = \sqrt[3]{\frac{tg^3 + e^3}{1-t}} \quad \boxed{\text{VII}}$$

Επίσης θα κάνουμε την παραδοχή ότι $U_{i,1} = U_{i,2}$ διότι θεωρούμε πως είναι ενδιάμεσες φάσεις (δηλαδή αλλοιωμένη μήτρα) της κοινής τους μήτρας m_1 . Έτσι έχουμε:

$$\frac{U_{i,1} + U_{i,2}}{U_{m,1}} = t \Rightarrow 2U_{i,1} = t \cdot U_{m,1} \Rightarrow \frac{\frac{4}{3}\pi(b^3 - a^3)}{\frac{4}{3}\pi g^3} = t \frac{\frac{4}{3}\pi(c^3 - b^3)}{\frac{4}{3}\pi g^3} \Rightarrow 2b^3 - 2a^3 = tc^3 - tb^3 \Rightarrow$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{tc^3 + 2a^3}{2+t}} \quad \boxed{\text{VIII}}$$

Ομοίως έχουμε:

$$\frac{U_{i,1} + U_{i,2}}{U_{m,1}} = t \Rightarrow 2U_{i,2} = t \cdot U_{m,1} \Rightarrow \frac{\frac{4}{3}\pi(d^3 - c^3)}{\frac{4}{3}\pi g^3} = t \frac{\frac{4}{3}\pi(c^3 - b^3)}{\frac{4}{3}\pi g^3} \Rightarrow 2d^3 - 2c^3 = tc^3 - tb^3 \Rightarrow$$

$$c = \sqrt[3]{\frac{tb^3 + 2d^3}{2+t}} \quad \boxed{\text{IX}}$$

Συνεπώς από τις σχέσεις I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX βρίσκω τις

ακτίνες a, b, c, d, e, f, g καθώς και τα l και t.

Για τις κατ' όγκο περιεκτικότητες των φάσεων θα ισχύει:

$$U_1 = \frac{\frac{4}{3}\pi(a^3)}{\frac{4}{3}\pi g^3} = \frac{a^3}{g^3}$$

$$U_2 = \frac{\frac{4}{3}\pi(b^3 - a^3)}{\frac{4}{3}\pi g^3} = \frac{(b^3 - a^3)}{g^3}$$

$$U_3 = \frac{\frac{4}{3}\pi(c^3 - b^3)}{\frac{4}{3}\pi g^3} = \frac{c^3 - b^3}{g^3}$$

$$U_4 = \frac{\frac{4}{3}\pi(d^3 - c^3)}{\frac{4}{3}\pi g^3} = \frac{d^3 - c^3}{g^3}$$

$$U_5 = \frac{\frac{4}{3}\pi(e^3 - d^3)}{\frac{4}{3}\pi g^3} = \frac{e^3 - d^3}{g^3}$$

$$U_6 = \frac{\frac{4}{3}\pi(f^3 - e^3)}{\frac{4}{3}\pi g^3} = \frac{f^3 - e^3}{g^3}$$

$$U_7 = \frac{\frac{4}{3}\pi(g^3 - f^3)}{\frac{4}{3}\pi g^3} = \frac{g^3 - f^3}{g^3}$$

Οι ακτίνες των φάσεων του κυβικού μοντέλου 1 δίνονται από τις εξής

σχέσεις :

$$a = r_f$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{t+2 a^3 + td^3}{2 t+1}}$$

$$c = \sqrt[3]{\frac{tb^3 + 2d^3}{2+t}}$$

$$d = \sqrt[3]{w^3 - 4r_f^3}$$

$$e = \sqrt[3]{2w^3 - d^3}$$

$$f = \sqrt[3]{\frac{tg^3 + e^3}{1-t}}$$

$$g = r_f \cdot \sqrt[3]{\frac{9}{U_f}}$$

$$\mu\epsilon \quad \lambda = r_f \sqrt[3]{\frac{3\pi}{2U_f}}$$

$$\kappa\alpha\iota \quad w = \lambda \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Κυβικό μοντέλο 2

Ομοίως για το κυβικό μοντέλο 2 του κεφαλαίου 4 όπου έχουμε 12 εγκλείσματα στα μέσα των ακμών του κύβου και 1 στο κέντρο βάρους του, έχουμε:

$$a = r_f$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{t+2}{2} \frac{a^3 + td^3}{t+1}}$$

$$c = \sqrt[3]{\frac{tb^3 + 2d^3}{2+t}}$$

$$d = \sqrt[3]{w^3 - 6r_f^3}$$

$$e = \sqrt[3]{2w^3 - d^3}$$

$$f = \sqrt[3]{\frac{tg^3 + e^3}{1-t}}$$

$$g = r_f \cdot \sqrt[3]{\frac{13}{U_f}}$$

$$\text{Με } \lambda = r_f \sqrt[3]{\frac{13\pi}{6U_f}} \quad \text{και} \quad w = \lambda \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Από τον παρακάτω πίνακα, σε κάθε σύσταση U_f αντιστοιχεί μια σύσταση U_i για το σύνολο της ενδιάμεσης φάσης. Έτσι έχουμε τα ζεύγη :

U_f	U_i
0,05	0,0013
0,10	0,004
0,15	0,013
0,20	0,028
0,25	0,05

Πίνακας 5.1

Όποτε χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις για κάθε ζεύγος τιμών (U_f , U_i) υπολογίζονται οι ακτίνες στα όρια της κάθε ενδιάμεσης φάσης καθώς και οι αντίστοιχες τους κατ' όγκο περιεκτικότητες.

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται συνοπτικά τα αποτελέσματα που προέκυψαν σε κάθε περίπτωση σύστασης. Όλες οι ακτίνες είναι σε μm :

Κυβικό μοντέλο 1

U _f	U _i	R ₁ (μm)	R ₂ (μm)	R ₃ (μm)	R ₄ (μm)	R ₅ (μm)	R ₆ (μm)	R ₇ (μm)
0,05	0,0013	75	75,949513	288,936	289,001	301,8877	302,406	423,47
0,1	0,004	75	76,396495	223,746	223,905	244,4103	245,7187	336,11
0,15	0,013	75	77,836492	190,113	190,57	217,5483	221,4351	293,62
0,2	0,02	75	78,090851	167,679	168,321	201,1916	206,9066	266,77
0,25	0,05	75	80,60642	150,011	151,505	189,9407	204,4659	247,64

Πίνακας 5.2 Ακτίνες φάσεων συναρτήσει της κατ'όγκο περιεκτικότητας σε εγκλείσματα

U _f	U ₁	U ₂	U ₃	U ₄	U ₅	U ₆	U ₇
0,05	0,005555556	0,000213686	0,311882232	0,000213686	0,044444444	0,0018693	0,635821068
0,1	0,011111111	0,000632293	0,283267239	0,000632293	0,088888889	0,0062087	0,609259512
0,15	0,016666667	0,001963413	0,252827221	0,001963413	0,133333333	0,0221939	0,571052017
0,2	0,022222222	0,002862203	0,223251863	0,002862203	0,177777778	0,0376046	0,533419092
0,25	0,027777778	0,006706616	0,187785259	0,006706616	0,222222222	0,1116307	0,437170855

Πίνακας 5.3 Περιεκτικότητα της κάθε φάσης

Κυβικό μοντέλο 2

U_f	U_i	R₁(μm)	R₂(μm)	R₃(μm)	R₄(μm)	R₅(μm)	R₆(μm)	R₇(μm)
0,05	0,0013	75	75,697062	260,915	260,973	283,7117	284,4628	478,69
0,1	0,004	75	75,936351	196,656	196,794	233,2122	235,0535	379,93
0,15	0,013	75	76,690558	161,446	161,818	210,2921	215,6104	331,9
0,2	0,02	75	76,540878	136,056	136,532	196,675	204,3179	301,55
0,25	0,05	75	77,127611	114,29	115,225	187,505	206,3537	279,94

Πίνακας 5.4 Ακτίνες φάσεων συναρτήσει της κατ'όγκο περιεκτικότητας σε εγκλείσματα

U_f	U₁	U₂	U₃	U₄	U₅	U₆	U₇
0,05	0,003846154	0,00010824	0,157980565	0,00010824	0,046153846	0,0016579	0,790145095
0,1	0,007692308	0,00029172	0,130690529	0,00029172	0,092307692	0,0055214	0,763204623
0,15	0,011538462	0,000797977	0,102754937	0,000797977	0,138461538	0,0197895	0,725859592
0,2	0,015384615	0,000967848	0,075492119	0,000967848	0,184615385	0,0336165	0,688955664
0,25	0,019230769	0,001683491	0,047137755	0,001683491	0,230769231	0,1000388	0,599456436

Πίνακας 5.5 Περιεκτικότητα της κάθε φάσης

5.2 Ελαστικές σταθερές για την ενδιάμεση φάση

Η φυσική συμπεριφορά του συστήματος εξαρτάται ξεχωριστά από τις ιδιότητες του εγκλείσματος και της μήτρας, όπως επίσης και από την αλληλεπίδρασή τους. Αυτή η αλληλεπίδραση είναι δυνατό να ληφθεί υπόψη υπό τη μορφή της ενδιάμεσης περιοχής - φάσης, το οποίο δημιουργείται κατά την παραγωγή του σύνθετου υλικού και παίζει ένα πολύ σημαντικό ρόλο στη γενική θερμομηχανική συμπεριφορά του σύνθετου.

Γενικά, το μέτρο ελαστικότητας E_i και ο λόγος Poisson ν_i της ενδιάμεσης φάσης μπορούν να εκφραστούν ως ένα πολυώνυμο n βαθμού με μεταβλητή την ακτίνα r .

Δηλαδή:

$$E_i(r) = f(r) \text{ και } \nu_i(r) = g(r)$$

ή

$$E_i(r) = Ar^n + Br^{n-1} + Cr^{n-2} + \dots, \quad \nu_i(r) = A'r^n + B'r^{n-1} + C'r^{n-2} + \dots$$

όπου $r_f \leq r \leq r_i$

Στην μελέτη αυτή, για απλουστευτικούς λόγους, λαμβάνουμε υπ' όψιν την γραμμική, την υπερβολική, την λογαριθμική, την παραβολική και εκθετική μεταβολή των $E_i(r)$ και $\nu_i(r)$.

Θεωρούμε ότι $E_m \leq E_i(r) \leq E_f$ και $\nu_f \leq \nu_i(r) \leq \nu_m$, όταν $r_f \leq r \leq r_i$. Οι οριακές συνθήκες τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε είναι:

$$\text{Στο } r = r_f : E_i(r) = \eta E_f \text{ και } \nu_i(r) = \xi \nu_f$$

$$\text{Στο } r = r_i : E_i(r) = E_m \text{ και } \nu_i(r) = \nu_m$$

Δεχόμαστε δηλαδή, ότι τα $E_i(r)$ και $v_i(r)$ της ενδιάμεσης φάσης στο όριο αυτής με την μήτρα είναι ίσα με E_m και v_m αντιστοίχως, ενώ στο όριο αυτής με το έγκλεισμα είναι τμήμα των E_f και v_f αντιστοίχως, που εκφράζεται με τους συντελεστές η και ξ . Όμως, για να εκτιμήσουμε την μεγίστη δυνατή επίδραση της ενδιάμεσης φάσης, θα θεωρήσουμε ότι τα $E_i(r)$ και $v_i(r)$ στο όριο αυτής με το έγκλεισμα είναι ίσα με E_f και v_f αντιστοίχως, δηλαδή ότι $\eta = \xi = 1$.

5.2.1 Γραμμικό Μοντέλο

Σύμφωνα με αυτήν την μεταβολή τα $E_i(r)$ και $v_i(r)$ μεταβάλλονται ως εξής:

$$E_i(r) = A + Br \text{ και } v_i(r) = A' + B'r \text{ με } r_f \leq r \leq r_i$$

Εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες προκύπτει:

$$A = nE_f + \frac{nE_f - E_m}{r_i - r_f} r_f$$

$$B = \frac{nE_f - E_m}{r_i - r_f}$$

Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής του μέτρου ελαστικότητας της ενδιάμεσης περιοχής θα ισχύει ότι

$$E_i = \frac{1}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} E_i(r) dV = \frac{1}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} (A - Br) 4\pi r^2 dr = \frac{1}{V_i} 4\pi \left[A \frac{r^3}{3} - B \frac{r^4}{4} \right]_{r_f}^{r_i}$$

Όπου dV ο όγκος της στοιχειώδους περιοχής της ενδιάμεσης φάσης και είναι ίσος με:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow \frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$$

Επομένως προκύπτει:

$$E_i = \frac{1}{V_i} 4\pi \left[\frac{A}{3} (r_i^3 - r_f^3) - \frac{B}{4} (r_i^4 - r_f^4) \right]$$

5.2.2 Παραβολικό Μοντέλο

Σύμφωνα με αυτήν την μεταβολή τα $E_i(r)$ και $v_i(r)$ μεταβάλλονται ως εξής:

$$E_i(r) = Ar^2 + Br + C \quad \text{και} \quad v_i(r) = A'r^2 + B'r + C' \quad \text{με} \quad r_f \leq r \leq r_i$$

Για τον υπολογισμό των A , B , C και A' , B' , C' εκτός από τις προαναφερθείσες οριακές συνθήκες θα θεωρήσουμε ότι η $E_i(r)$ παρουσιάζει ελάχιστο και η $v_i(r)$ παρουσιάζει μέγιστο για $r = r_i$. Δηλαδή:

$$\text{Στο } r = r_i: \frac{dE_i(r)}{dr} = 0 \quad \text{με} \quad \frac{d^2E_i(r)}{dr^2} > 0$$

$$\text{και} \quad \frac{dv_i(r)}{dr} = 0 \quad \text{με} \quad \frac{d^2v_i(r)}{dr^2} < 0$$

Έτσι βρίσκουμε:

$$A = \frac{nE_f - E_m}{(r_i - r_f)^2}$$

$$B = -\frac{(nE_f - E_m)2r_i}{(r_i - r_f)^2}$$

$$C = \frac{nE_f r_i^2 + E_m r_f - 2E_m r_f r_i}{(r_i - r_f)^2}$$

Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής του μέτρου ελαστικότητας της ενδιάμεσης περιοχής θα ισχύει όπως και παραπάνω ότι:

$$E_i = \frac{1}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} E_i(r) dV = \frac{1}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} (Ar^2 + Br + C) 4\pi r^2 dr = \frac{1}{V_i} 4\pi \left[A \frac{r^5}{5} - B \frac{r^4}{4} + C \frac{r^3}{3} \right]_{r_f}^{r_i} \Rightarrow$$

$$E_i = \frac{1}{V_i} 4\pi \left[\frac{A}{5} (r_i^5 - r_f^5) + \frac{B}{4} (r_i^4 - r_f^4) + \frac{C}{3} (r_i^3 - r_f^3) \right]$$

5.2.3 Εκθετικό μοντέλο

Σύμφωνα με αυτή τη μεταβολή το $E_i(r)$ μεταβάλλεται ως εξής:

$$E = Ae^{Br}$$

Με τις προαναφερθείσες οριακές συνθήκες βρίσκουμε:

$$E_m = Ae^{Br_i}$$

$$\text{και } nE_f = Ae^{Br_f}$$

Διαιρώντας κατά μέλη προκύπτει:

$$\frac{E_m}{nE_f} = e^{B(r_i - r_f)} \Rightarrow \ln\left(\frac{E_m}{nE_f}\right) = B(r_i - r_f) \Rightarrow B = \frac{\ln\left(\frac{E_m}{nE_f}\right)}{r_i - r_f}$$

$$\text{και } A = \frac{Em}{e^{Br_i}}$$

Για τη μέση τιμή του μέτρου ελαστικότητας $E_i(r)$ θα ισχύει ότι:

$$E_i = \frac{1}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} E_i(r) dV = \frac{1}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} (Ae^{Br}) 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi}{V_i} A \int_{r_f}^{r_i} e^{Br} 4r^2 dr$$

και τελικά προκύπτει:

$$E_i = \frac{1}{V_i B^3} 4\pi A \left[e^{Br_i} (Br_i (Br_i - 2) + 2) - e^{Br_f} (Br_f (Br_f - 2) + 2) \right]$$

5.2.4 Υπερβολικό Μοντέλο

Σύμφωνα με αυτήν την μεταβολή το $E_i(r)$ μεταβάλλεται ως εξής:

$$E_i(r) = A + \frac{B}{r}$$

Εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες που αναφέρθηκαν παραπάνω, προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις για τις σταθερές A και B:

$$A = nE_f - \frac{B}{r_f}$$

$$B = \frac{r_i r_f}{r_i - r_f} (nE_f - E_m)$$

Για την μέση τιμή του μέτρου ελαστικότητας $E_i(r)$ θα ισχύει όπως και για τις προηγούμενες προσεγγίσεις ότι:

$$E_i = \frac{1}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} E_i(r) dV = \frac{1}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} \left(A + \frac{B}{r} \right) 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} (Ar^2 + Br) dr$$

$$\Rightarrow E_i = \frac{1}{V_i} 4\pi \left[A \frac{r^3}{3} - B \frac{r^2}{2} \right]_{r_f}^{r_i}$$

Άρα τελικά έχουμε:

$$E_i = \frac{1}{V_i} 4\pi \left[\frac{A}{3} (r_i^3 - r_f^3) + \frac{B}{2} (r_i^2 - r_f^2) \right]$$

5.2.5 Λογαριθμικό Μοντέλο

Σύμφωνα με αυτήν την μεταβολή το $E_i(r)$ μεταβάλλεται ως εξής:

$$E_i(r) = A \ln\left(\frac{B}{r}\right)$$

όπου χρησιμοποιώντας τις οριακές συνθήκες προκύπτουν οι τιμές των σταθερών ίσες με:

$$A = \frac{nE_f - E_m}{\ln\left(\frac{r_i}{r_f}\right)}$$

$$B = r_i e^{\frac{E_m}{A}}$$

Για τη μέση τιμή του μέτρου ελαστικότητας $E_i(r)$ θα ισχύει

$$E_i = \frac{1}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} E_i(r) dV = \frac{1}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} A \ln\left(\frac{B}{r}\right) 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} (A \ln B - \ln r) r^2 dr$$

$$\Rightarrow E_i = \frac{1}{V_i} 4\pi \int_{r_f}^{r_i} A \ln(B) r^2 dr - \frac{4\pi}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} A \ln(r) r^2 dr$$

Οπότε τελικά προκύπτει:

$$E_i = \frac{1}{V_i} 4\pi A \ln B \left(\frac{r_i^3 - r_f^3}{3} \right) - \frac{4\pi A}{V_i} \left[\frac{3r^3 \ln r - r^3}{9} \right]_{r_f}^{r_i} \Rightarrow$$

$$E_i = \frac{1}{V_i} 4\pi A \ln B \left(\frac{r_i^3 - r_f^3}{3} \right) - \frac{4\pi A}{9V_i} (3r_i^3 \ln r_i - r_i^3 - 3r_f^3 \ln r_f + r_f^3)$$

Σε όλες τις παραπάνω προσεγγίσεις που εξετάσαμε η διαδικασία για την εύρεση των v_i και είναι ακριβώς η ίδια όπως άλλωστε έχουμε εξηγήσαμε, γι' αυτό και οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν ακριβώς όπως είναι και για τα v_i . Αυτό που αλλάζει μόνο είναι οι τιμές των συντελεστών που έχουμε βάλει (οι τιμές δηλαδή των A και B) και οι οποίες προσδιορίζονται με βάση τις οριακές τιμές του λόγου Poisson στα όρια των δύο φάσεων.

Οι τιμές των E και ν της ενδιάμεσου φάσεως, για κάθε ακτίνα, καθώς και η μορφή της συνάρτησής τους σε σχέση με την ακτίνα r του ισοδύναμου επταφασικού μας μοντέλου, σχεδιάστηκαν για την φάση 2 και για $U_f = 0,05$ και $U_f = 0,0013$, το κυβικό μοντέλο 1 και για διαφορετική επίδραση της ενδιάμεσου φάσεως, δηλαδή για $n = \xi = 0,2$, $n = \xi = 0,4$, $n = \xi = 0,6$, $n = \xi = 0,8$, $n = \xi = 1$, και φαίνονται στους πίνακες και τις γραφικές παραστάσεις που ακολουθούν.

5.3 Πίνακες – Διαγράμματα Ενδιάμεσου Φάσεως – Συμπεράσματα

r (μm)	E (E _{i1}) (Gra) (Γραμμικό Μοντέλο)				
	η= 0,2	η= 0,4	η= 0,6	η= 0,8	η= 1
75,00	42,00	84,00	126,00	168,00	210,00
75,09	38,15	75,95	113,75	151,55	189,35
75,19	34,30	67,90	101,50	135,10	168,70
75,28	30,45	59,85	89,25	118,65	148,05
75,38	26,60	51,80	77,00	102,20	127,40
75,47	22,75	43,75	64,75	85,75	106,75
75,57	18,90	35,70	52,50	69,30	86,10
75,66	15,05	27,65	40,25	52,85	65,45
75,76	11,20	19,60	28,00	36,40	44,80
75,85	7,35	11,55	15,75	19,95	24,15
75,95	3,50	3,50	3,50	3,50	3,50

Πίνακας 5.6

r (μm)	E (Gra) (Παραβολικό Μοντέλο)				
	0,2	0,4	0,6	0,8	1
75,00	42,00	84,00	126,00	168,00	210,00
75,09	34,69	68,71	102,73	136,74	170,77
75,19	28,14	55,02	81,90	108,78	135,66
75,28	22,37	42,95	63,53	84,11	104,69
75,38	17,36	32,48	47,60	62,72	77,84
75,47	13,13	23,63	34,13	44,63	55,13
75,57	9,66	16,38	23,10	29,82	36,54
75,66	6,97	10,75	14,53	18,30	22,09
75,76	5,04	6,72	8,40	10,08	11,76
75,85	3,89	4,31	4,73	5,14	5,57
75,95	3,50	3,50	3,50	3,50	3,50

Πίνακας 5.7

r (μm)	E (Gra) (Εκθετικό Μοντέλο)				
	0,2	0,4	0,6	0,8	1
75,00	42,00	84,00	126,00	168,00	210,00
75,09	32,76	61,13	88,05	114,07	139,45
75,19	25,55	44,49	61,53	77,46	92,60
75,28	19,93	32,38	43,00	52,59	61,49
75,38	15,54	23,56	30,05	35,71	40,83
75,47	12,12	17,15	21,00	24,25	27,11
75,57	9,46	12,48	14,68	16,47	18,00
75,66	7,38	9,08	10,26	11,18	11,95
75,76	5,75	6,61	7,17	7,59	7,94
75,85	4,49	4,81	5,01	5,15	5,27
75,95	3,50	3,50	3,50	3,50	3,50

Πίνακας 5.8

r (μm)	E (Gra) (Υπερβολικό Μοντέλο)				
	0,2	0,4	0,6	0,8	1
75,00	42,00	84,00	126,00	168,00	210,00
75,09	38,10	75,85	113,61	151,36	189,11
75,19	34,22	67,73	101,24	134,75	168,27
75,28	30,34	59,63	88,91	118,20	147,48
75,38	26,48	51,55	76,62	101,68	126,75
75,47	22,62	43,49	64,35	85,21	106,08
75,57	18,78	35,45	52,12	68,78	85,45
75,66	14,94	27,43	39,91	52,40	64,88
75,76	11,12	19,43	27,74	36,06	44,37
75,85	7,30	11,46	15,61	19,76	23,91
75,95	3,50	3,50	3,50	3,50	3,50

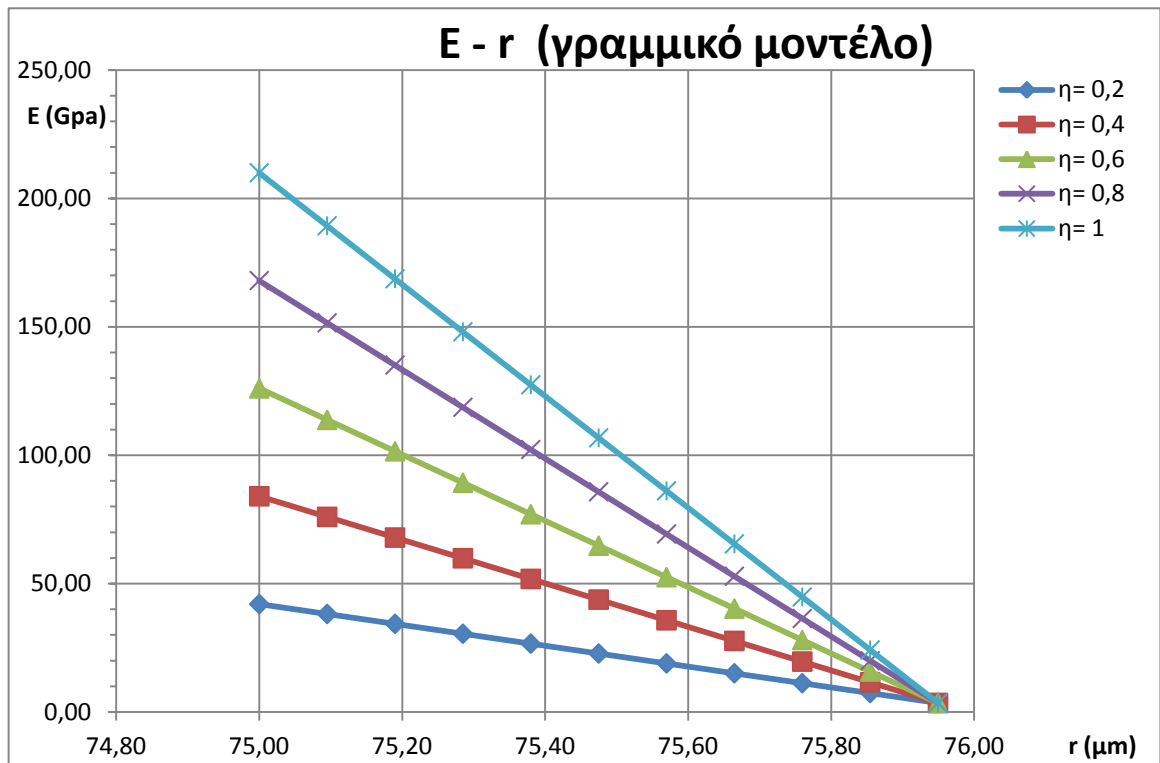
Πίνακας 5.9

r (μm)	E (GPa) (Λογαριθμικό Μοντέλο)				
	0,2	0,4	0,6	0,8	1
75,00	42,00	84,00	126,00	168,00	210,00
75,09	38,13	75,90	113,68	151,45	189,23
75,19	34,26	67,82	101,37	134,93	168,48
75,28	30,40	59,74	89,08	118,42	147,77
75,38	26,54	51,67	76,81	101,94	127,08
75,47	22,69	43,62	64,55	85,48	106,41
75,57	18,84	35,57	52,31	69,04	85,78
75,66	15,00	27,54	40,08	52,62	65,17
75,76	11,16	19,52	27,87	36,23	44,58
75,85	7,33	11,50	15,68	19,85	24,03
75,95	3,50	3,50	3,50	3,50	3,50

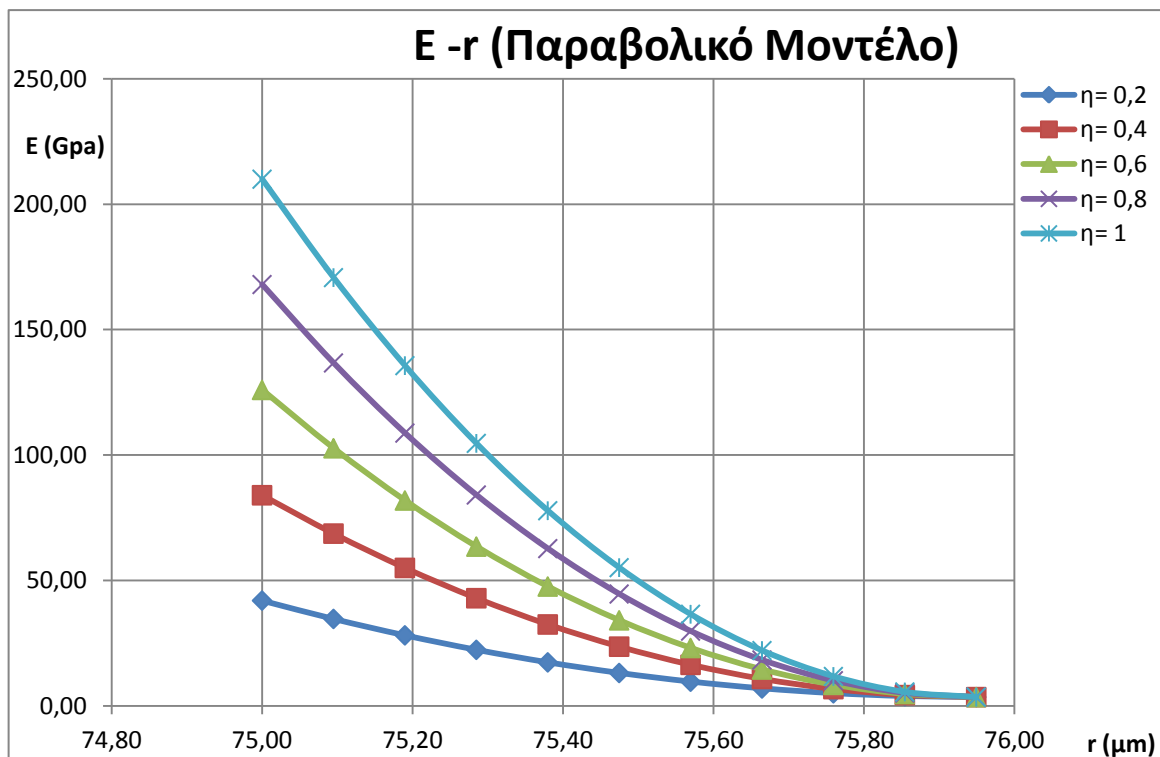
Πίνακας 5.10

r (μm)	E(GPa) (για η= 1)				
	Γραμμικό	Παραβολικό	Υπερβολικό	Λογαριθμικό	Εκθετικό
75,00	210,00	210,00	210,00	210,00	210,00
75,09	189,35	170,77	189,11	189,23	139,45
75,19	168,70	135,66	168,27	168,48	92,60
75,28	148,05	104,69	147,48	147,77	61,49
75,38	127,40	77,84	126,75	127,08	40,83
75,47	106,75	55,13	106,08	106,41	27,11
75,57	86,10	36,54	85,45	85,78	18,00
75,66	65,45	22,09	64,88	65,17	11,95
75,76	44,80	11,76	44,37	44,58	7,94
75,85	24,15	5,57	23,91	24,03	5,27
75,95	3,50	3,50	3,50	3,50	3,50

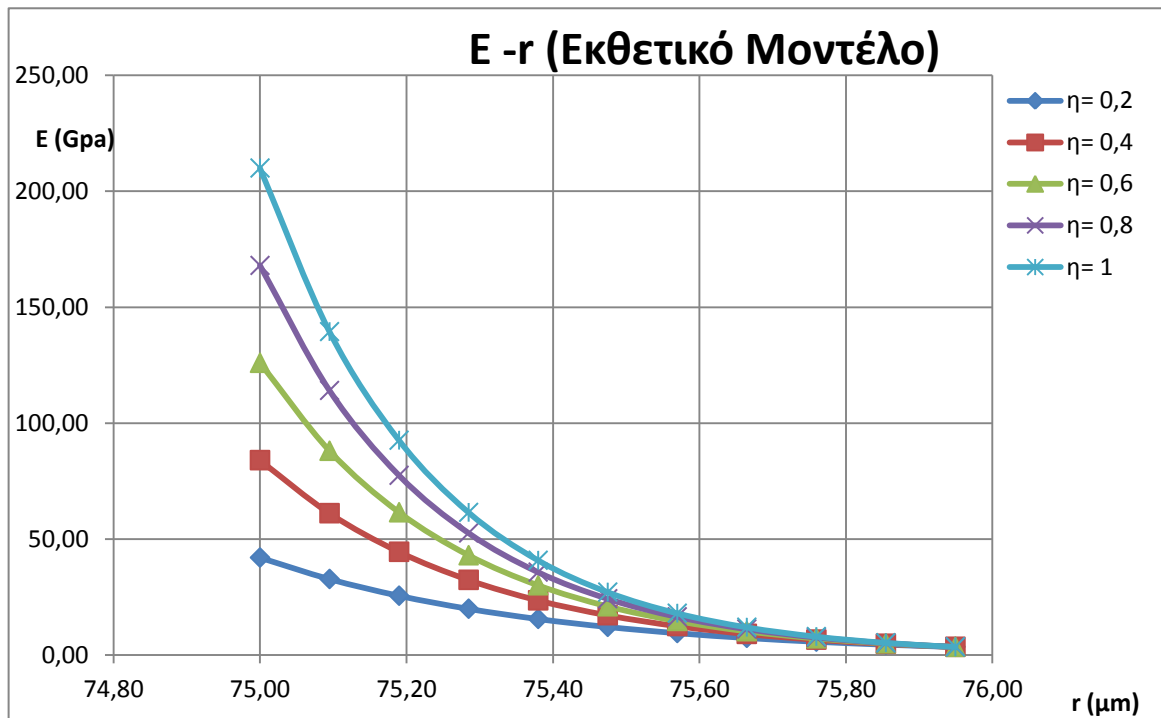
Πίνακας 5.11



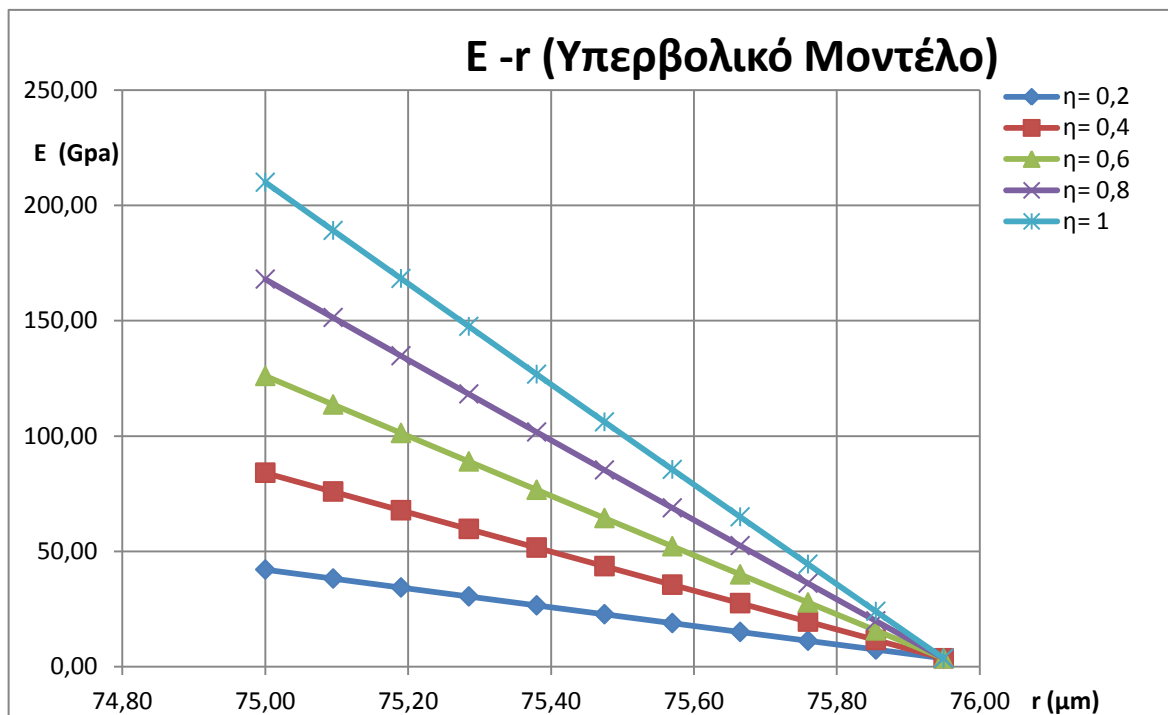
Διάγραμμα 5.1



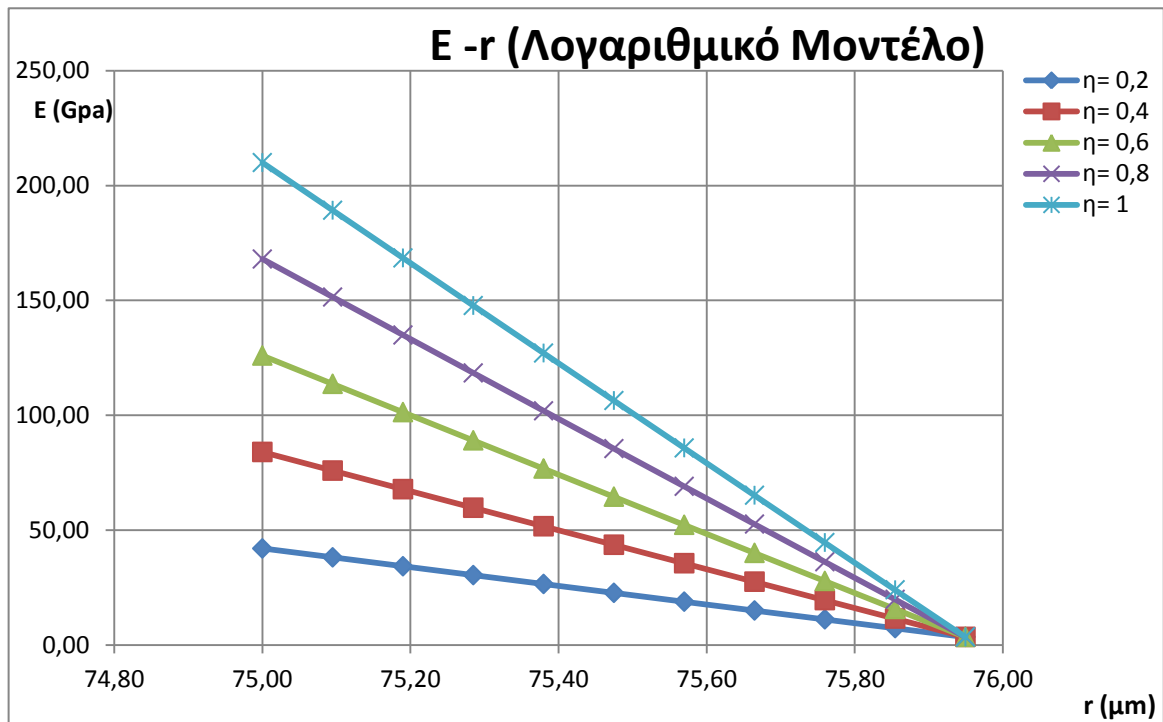
Διάγραμμα 5.2



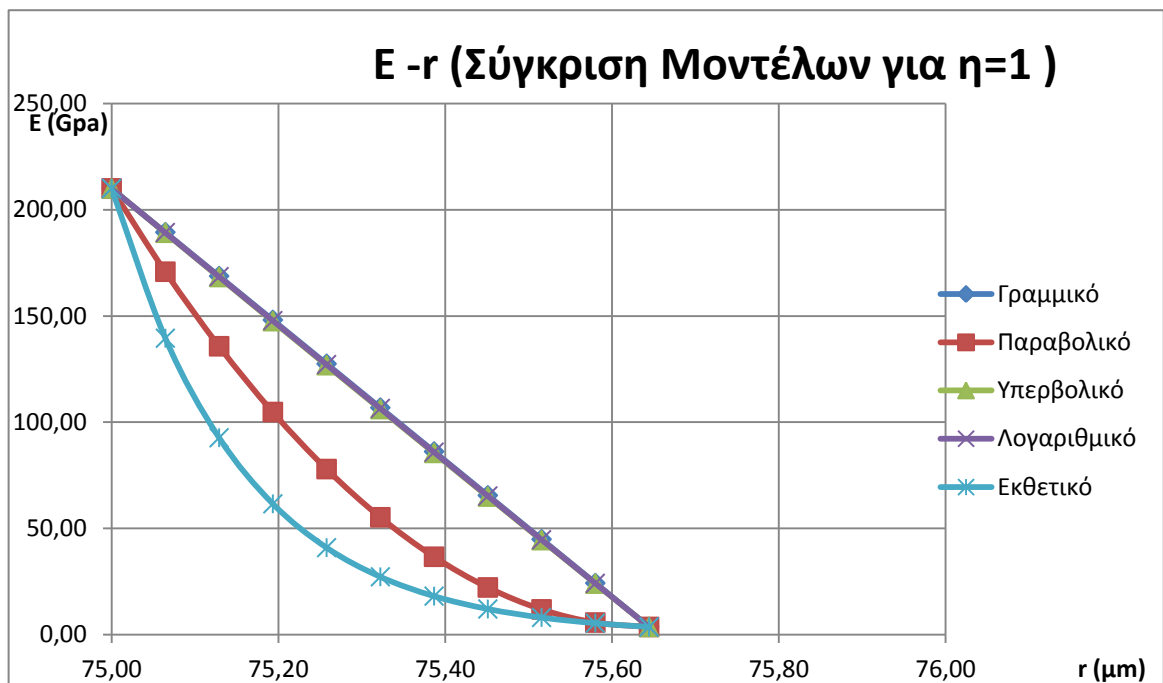
Διάγραμμα 5.3



Διάγραμμα 5.4



Διάγραμμα 5.5



Διάγραμμα 5.6

Σε όλες τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις παρατηρούμε ότι η τιμή του E πέφτει καθώς αυξάνεται η ακτίνα r . Αυτό είναι κάτι που αναμένουμε, αφού αυξανόμενη της ακτίνας r , πλησιάζουμε φάση μήτρας και απομακρυνόμαστε από τη φάση του εγκλείσματος. Παρατηρούμε επίσης ότι στα άκρα της ενδιάμεσης φάσης το E είναι E_f και E_m , πράγμα λογικό αφού το απαιτήσαμε στις οριακές μας συνθήκες για $\eta=1$.

Επιπλέον βλέπουμε στην τελευταία γραφική παράσταση του $E_i(r)$, όπου έχουμε βάλει όλες τις προσεγγίσεις που εξετάσαμε, ότι τρεις από αυτές, το γραμμικό, το υπερβολικό και το λογαριθμικό μοντέλο σχεδόν ταυτίζονται. Αυτό συμβαίνει γιατί το πάχος της ενδιάμεσου φάσεως είναι πολύ μικρό (είναι λιγότερο από $1\mu\text{m}$).

r (μm)	ν (Γραμμικό Μοντέλο)				
	$\eta= 0,2$	$\eta= 0,4$	$\eta= 0,6$	$\eta= 0,8$	$\eta= 1$
75,00	0,058	0,116	0,174	0,232	0,290
75,09	0,088	0,140	0,193	0,245	0,297
75,19	0,118	0,165	0,211	0,258	0,304
75,28	0,149	0,189	0,230	0,270	0,311
75,38	0,179	0,214	0,248	0,283	0,318
75,47	0,209	0,238	0,267	0,296	0,325
75,57	0,239	0,262	0,286	0,309	0,332
75,66	0,269	0,287	0,304	0,322	0,339
75,76	0,300	0,311	0,323	0,334	0,346
75,85	0,330	0,336	0,341	0,347	0,353
75,95	0,360	0,360	0,360	0,360	0,360

Πίνακας 5.12

r (μm)	ν (Παραβολικό Μοντέλο)				
	0,2	0,4	0,6	0,8	1
75,00	0,058	0,116	0,174	0,232	0,290
75,09	0,115	0,162	0,209	0,256	0,303
75,19	0,167	0,204	0,241	0,278	0,315
75,28	0,212	0,240	0,269	0,297	0,326
75,38	0,251	0,272	0,293	0,314	0,335
75,47	0,284	0,299	0,313	0,328	0,342
75,57	0,312	0,321	0,330	0,340	0,349
75,66	0,333	0,338	0,343	0,348	0,354
75,76	0,348	0,350	0,353	0,355	0,357
75,85	0,357	0,358	0,358	0,359	0,359
75,95	0,360	0,360	0,360	0,360	0,360

Πίνακας 5.13

r (μm)	ν (Εκθετικό Μοντέλο)				
	0,2	0,4	0,6	0,8	1
75,00	0,058	0,116	0,174	0,232	0,290
75,09	0,070	0,130	0,187	0,242	0,296
75,19	0,084	0,145	0,201	0,253	0,303
75,28	0,100	0,163	0,216	0,265	0,309
75,38	0,120	0,182	0,233	0,277	0,316
75,47	0,144	0,204	0,250	0,289	0,323
75,57	0,173	0,229	0,269	0,302	0,330
75,66	0,208	0,256	0,289	0,316	0,337
75,76	0,250	0,287	0,311	0,330	0,345
75,85	0,300	0,321	0,335	0,345	0,352
75,95	0,360	0,360	0,360	0,360	0,360

Πίνακας 5.14

r (μm)	v (Υπερβολικό Μοντέλο)				
	0,2	0,4	0,6	0,8	1
75,00	0,058	0,116	0,174	0,232	0,290
75,09	0,089	0,141	0,193	0,245	0,297
75,19	0,119	0,165	0,212	0,258	0,304
75,28	0,149	0,190	0,230	0,271	0,311
75,38	0,180	0,214	0,249	0,284	0,318
75,47	0,210	0,239	0,268	0,296	0,325
75,57	0,240	0,263	0,286	0,309	0,332
75,66	0,270	0,287	0,305	0,322	0,339
75,76	0,300	0,312	0,323	0,335	0,346
75,85	0,330	0,336	0,342	0,347	0,353
75,95	0,360	0,360	0,360	0,360	0,360

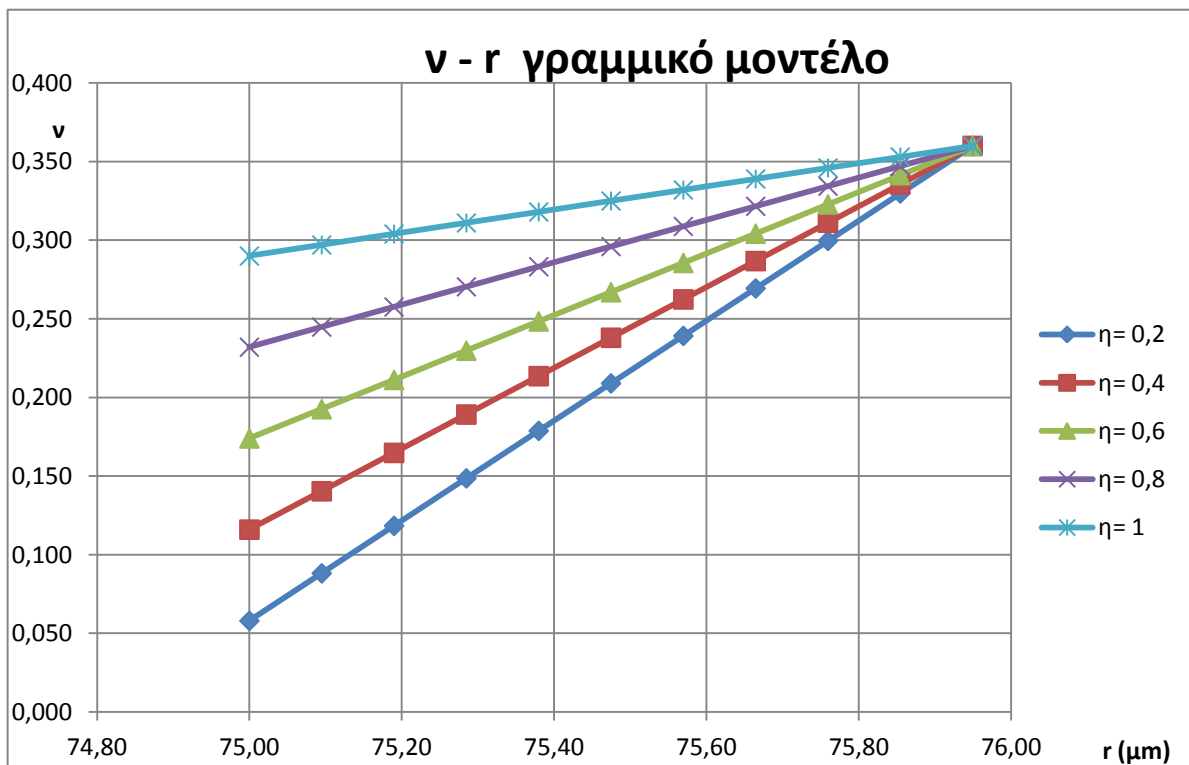
Πίνακας 5.15

r (μm)	v (Λογαριθμικό Μοντέλο)				
	0,2	0,4	0,6	0,8	1
75,00	0,058	0,116	0,174	0,232	0,290
75,09	0,088	0,141	0,193	0,245	0,297
75,19	0,119	0,165	0,211	0,258	0,304
75,28	0,149	0,190	0,230	0,271	0,311
75,38	0,179	0,214	0,249	0,283	0,318
75,47	0,209	0,238	0,267	0,296	0,325
75,57	0,240	0,263	0,286	0,309	0,332
75,66	0,270	0,287	0,304	0,322	0,339
75,76	0,300	0,311	0,323	0,335	0,346
75,85	0,330	0,336	0,342	0,347	0,353
75,95	0,360	0,360	0,360	0,360	0,360

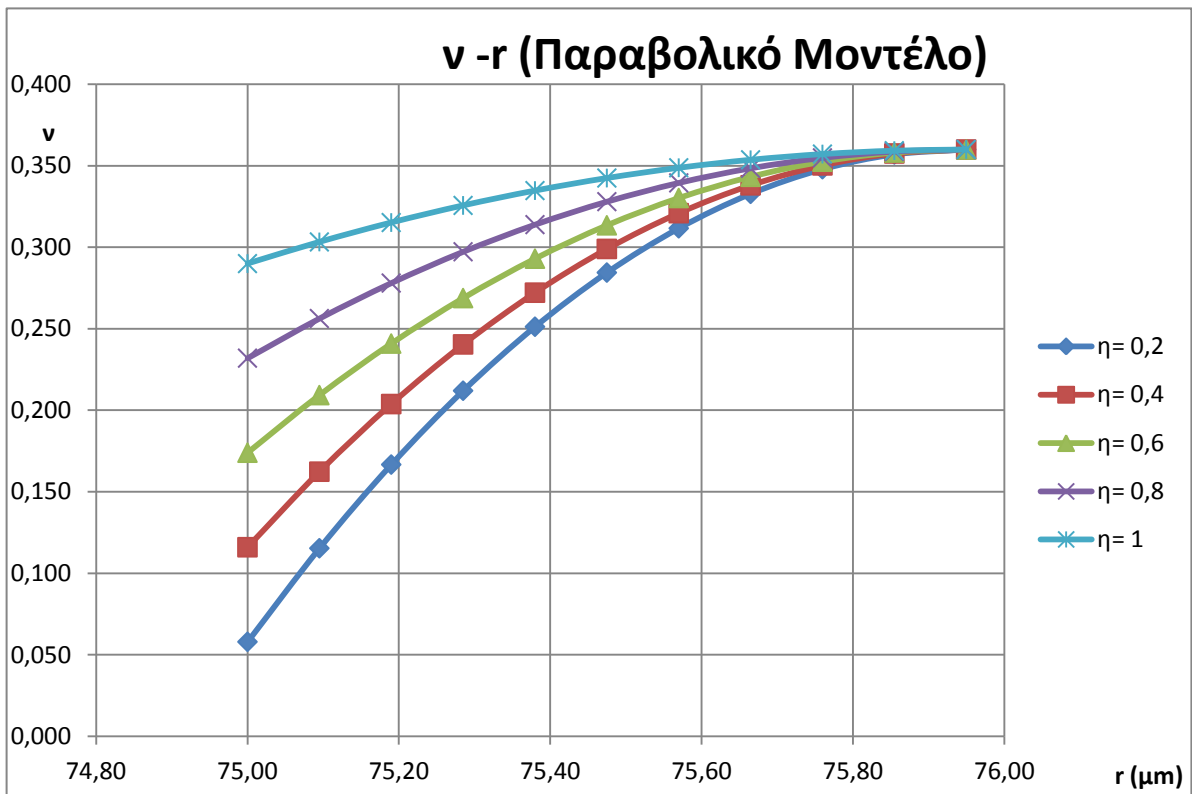
Πίνακας 5.16

r (μm)	ν (για η= 1)				
	Γραμμικό	Παραβολικό	Υπερβολικό	Λογαριθμικό	Εκθετικό
75,00	0,290	0,290	0,290	0,290	0,290
75,09	0,297	0,303	0,297	0,297	0,296
75,19	0,304	0,315	0,304	0,304	0,303
75,28	0,311	0,326	0,311	0,311	0,309
75,38	0,318	0,335	0,318	0,318	0,316
75,47	0,325	0,342	0,325	0,325	0,323
75,57	0,332	0,349	0,332	0,332	0,330
75,66	0,339	0,354	0,339	0,339	0,337
75,76	0,346	0,357	0,346	0,346	0,345
75,85	0,353	0,359	0,353	0,353	0,352
75,95	0,360	0,360	0,360	0,360	0,360

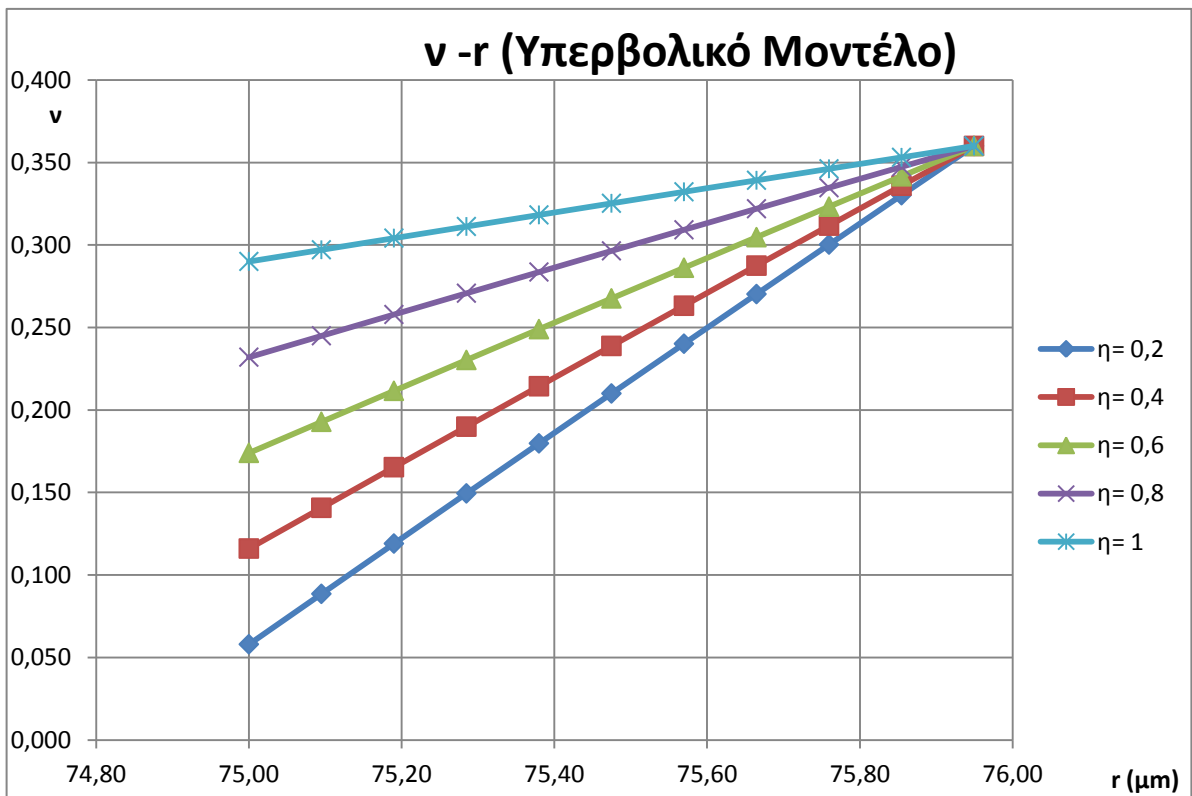
Πίνακας 5.17



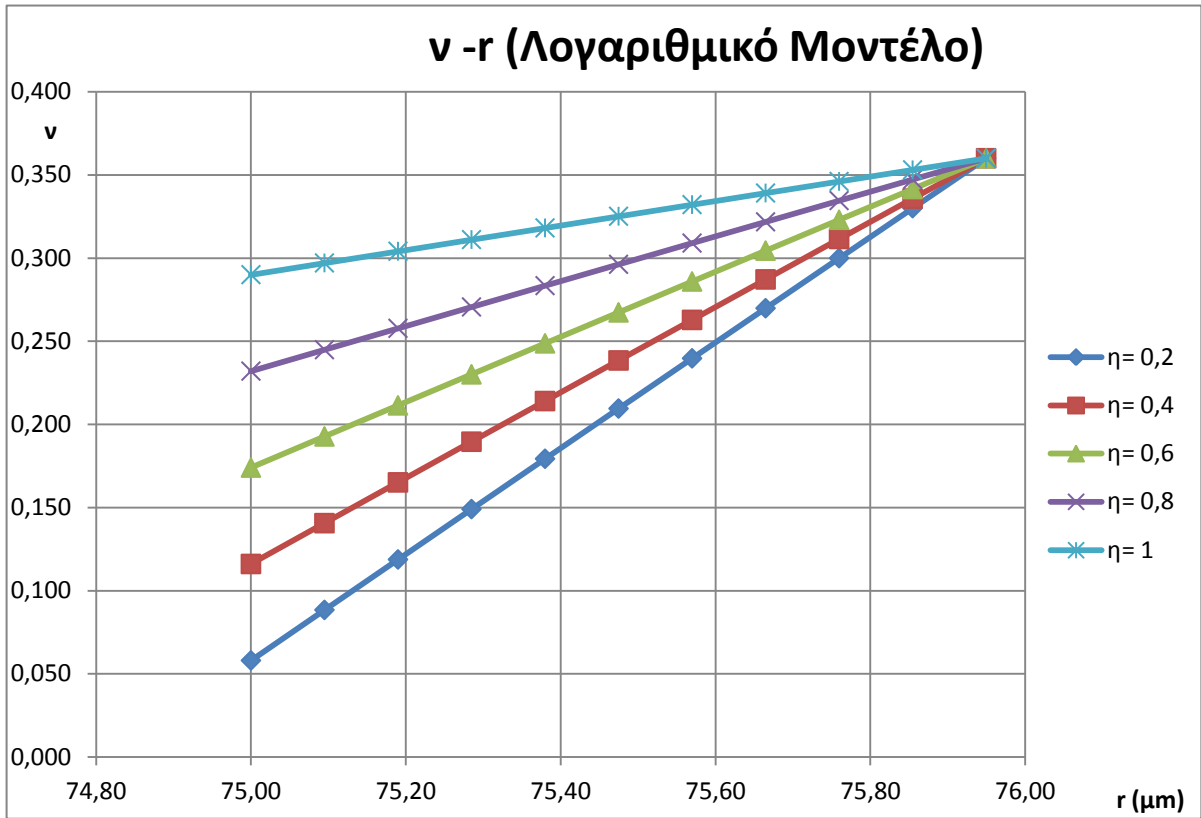
Διάγραμμα 5.7



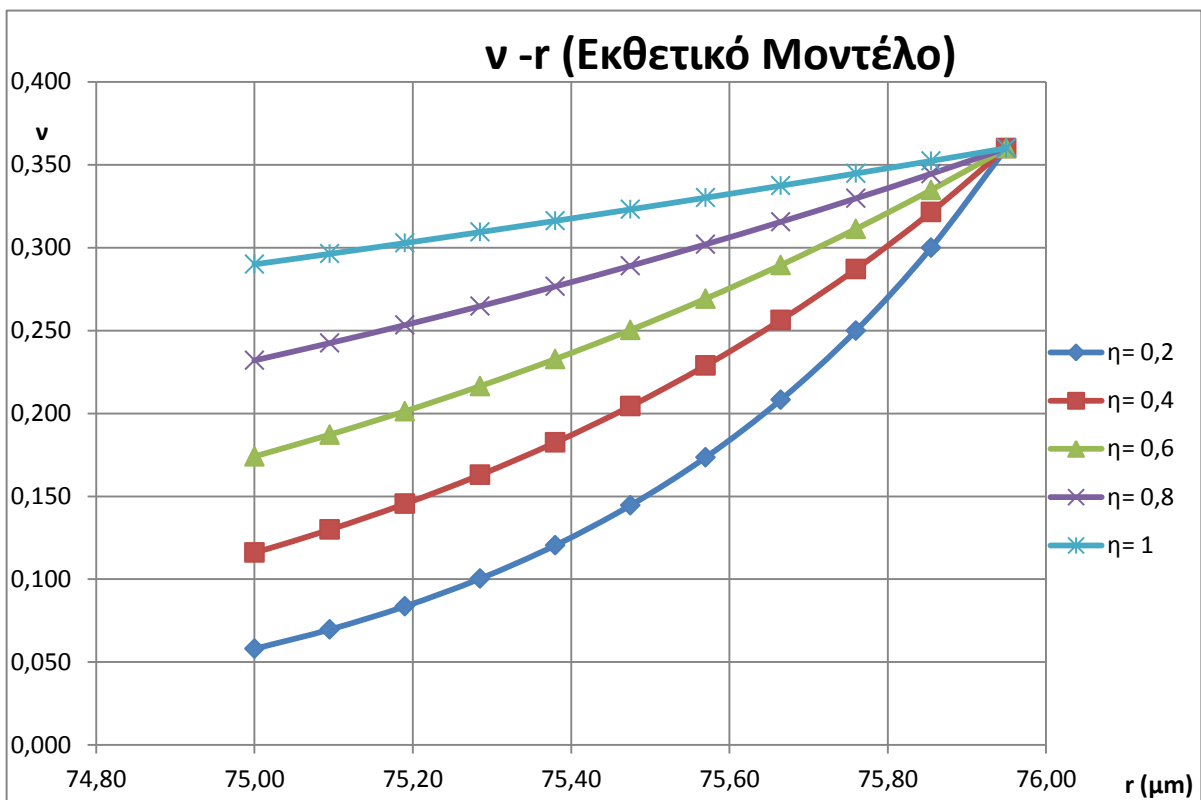
Διάγραμμα 5.8



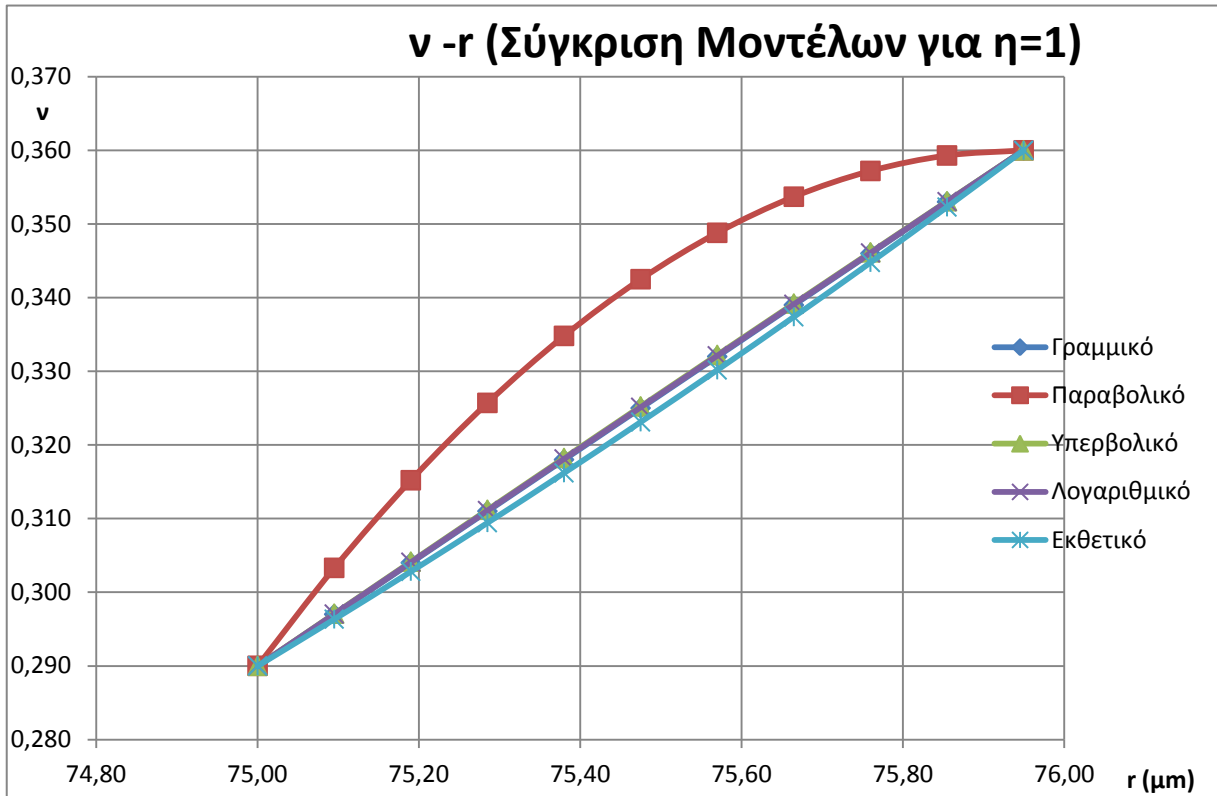
Διάγραμμα 5.9



Διάγραμμα 5.9



Διάγραμμα 5.10



Διάγραμμα 5.11

Στις παραπάνω γραφικές παραστάσεις παρατηρούμε ότι η τιμή του ν αυξάνεται καθώς αυξάνεται και η ακτίνα r . Αυτό είναι κάτι αναμενόμενο, αφού αυξανόμενη της ακτίνας r , πλησιάζουμε τη φάση της μήτρας και απομακρυνόμαστε από τη φάση του εγκλείσματος.

Επιπλέον βλέπουμε στην τελευταία γραφική παράσταση του $\nu_i(r)$, όπου έχουμε βάλει όλες τις προσεγγίσεις που εξετάσαμε, ότι τρεις από αυτές, το γραμμικό, το υπερβολικό και το λογαριθμικό μοντέλο σχεδόν ταυτίζονται, ενώ το εκθετικό μοντέλο είναι πάρα πολύ καντά τους. Αυτό συμβαίνει γιατί το πάχος της ενδιαμέσου φάσεως είναι πολύ μικρό (είναι λιγότερο από $1\mu\text{m}$) και γιατί το ν_i δε μεταβάλλεται ιδιαίτερα.

6. Θεωρητική ανάπτυξη επταφασικού μοντέλου

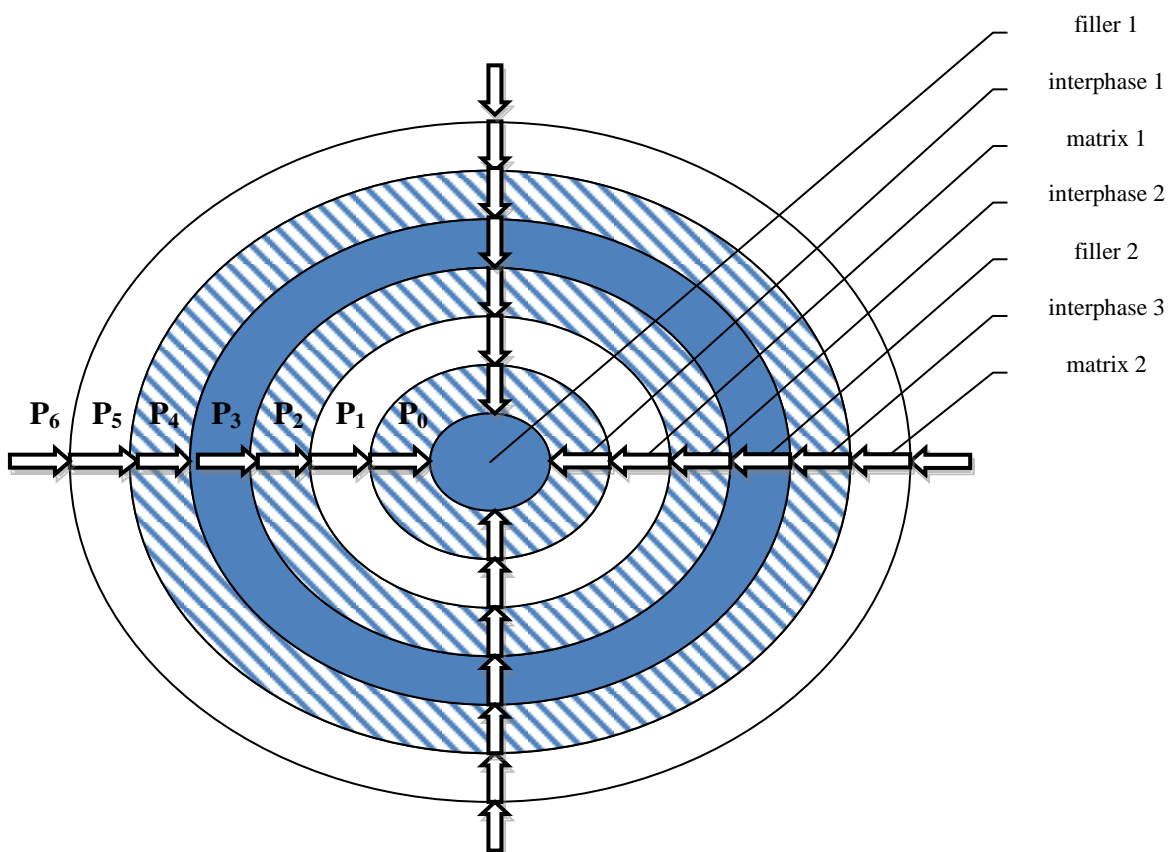
6.1 Παραδοχές για την ανάπτυξη του θεωρητικού μοντέλου

Η μοντελοποίηση του πραγματικού σύνθετου υλικού για να γίνει η μελέτη του με χρήση της θεωρίας ελαστικότητας βασίζεται στις εξής παραδοχές :

- Το έγκλεισμα (filler) αποτελείται από κόκκους οι οποίοι έχουν τέλειο σφαιρικό σχήμα και είναι όλοι του ίδιου μεγέθους με διάμετρο $d_f = 150\mu\text{m}$.
- Οι φάσεις του σύνθετου υλικού θεωρούνται ελαστικά, ομογενή και ισότροπα υλικά.
- Ο αριθμός των εγκλεισμάτων είναι μεγάλος και η κατανομή τους μπορεί να θεωρηθεί ομοιόμορφη, έτσι ώστε το σύνθετο υλικό να μπορεί να θεωρηθεί ομοιογενές και ισότροπο.
- Οι παραμορφώσεις που αναπτύσσονται στο σύνθετο υλικό είναι αρκετά μικρές ώστε να μπορεί να θεωρηθεί ότι ισχύουν οι γραμμικές σχέσεις τάσεων – παραμορφώσεων
- Θεωρούμε ότι ο συντελεστής n είναι ίσος με $n=1$, ούτως ώστε να έχουμε απλούστευση των υπολογισμών, καθώς και του τελικού τύπου που θα προκύψει, με σκοπό να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο αυτό ως βάση για τη μιγαδική ανάλυση του μέτρου ελαστικότητας αλλά και του μέτρου απωλειών.

6.2 Επταφασικό μοντέλο – Υπολογισμός του μέτρου ελαστικότητας του σύνθετου υλικού E_c

Θεωρούμε το επταφασικό σφαιρικό μοντέλο του σχήματος 5.1. Έστω ότι στην εξωτερική επιφάνεια της σφαίρας που έχει ακτίνα g (R_7) ασκούμε ομοιόμορφα ακτινική πίεση P_6 . Επειδή όμως έχουμε την αλληλεπίδραση μεταξύ της 6^{ης} και 7^{ης} φάσης, στο σύνορό τους θα ασκείται μία πίεση που την καλούμε P_5 . Ομοίως, λόγω αλληλεπίδρασης μεταξύ 5^{ης} και 6^{ης} φάσης, στο σύνορο τους θα ασκείται μια δύναμη P_4 και αντίστοιχα στα σύνορα των υπόλοιπων φάσεων θα ασκούνται οι πιέσεις P_3 , P_2 , P_1 και P_0 όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Σχήμα 6.1 Άσκηση ομοιόμορφης εξωτερικής πίεσης στο ισοδύναμο σφαιρικό επταφασικό μοντέλο

Η τασική συνάρτηση Φ σε σφαιρικές συντεταγμένες, που περιγράφει το πρόβλημα μας είναι:

$$\Phi = K_1 / r + K_2 r^2$$

Συνεπώς για κάθε φάση έχουμε και την αντίστοιχη τασική συνάρτηση:

$$\Phi_1 = A / r + Br^2$$

$$\Phi_2 = C / r + Dr^2$$

$$\Phi_3 = F / r + Hr^2$$

$$\Phi_4 = J / r + Lr^2$$

$$\Phi_5 = M / r + Nr^2$$

$$\Phi_6 = P / r + Qr^2$$

$$\Phi_7 = R / r + Sr^2$$

Στη θέση $r=0$ πρέπει η τασική συνάρτηση να παίρνει τιμή, οπότε για $r=0$ πρέπει $A=0$.

Οι μετατοπίσεις δίνονται από την παρακάτω σχέση:

$$\vec{u} = \frac{1}{2G} \text{grad}\Phi$$

όπου G το μέτρο διάτμησης : $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

Εξαιτίας όμως της σφαιρικής συμμετρίας οι μετατοπίσεις κατά τις διευθύνσεις φ και θ είναι μηδενικές:

$$u_\varphi = u_\theta = 0$$

Οι ακτινικές μετατοπίσεις είναι:

$$u_{r_1} = \frac{Br}{G_1}$$

$$u_{r_2} = \frac{-\frac{C}{r^2} + 2Dr}{2G_2}$$

$$u_{r_3} = \frac{-\frac{F}{r^2} + 2Hr}{2G_3}$$

$$u_{r_4} = \frac{-\frac{J}{r^2} + 2Lr}{2G_4}$$

$$u_{r_5} = \frac{-\frac{M}{r^2} + 2Nr}{2G_5}$$

$$u_{r_6} = \frac{-\frac{P}{r^2} + 2Qr}{2G_6}$$

$$u_{r_7} = \frac{-\frac{R}{r^2} + 2Sr}{2G_7}$$

Οι παραμορφώσεις δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} 0 = \frac{u}{r} \Rightarrow \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} 0 = \frac{u}{r} \Rightarrow \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r}$$

άρα έχουμε:

$$\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{\theta1} = \varepsilon_{\varphi1} = \frac{2B(1+\nu_1)}{E_1}$$

$$\varepsilon_{r2} = \left(\frac{2C}{r^3} + 2D \right) \left(\frac{1+\nu_2}{E_2} \right)$$

$$\varepsilon_{\theta2} = \varepsilon_{\varphi2} = \left(-\frac{C}{r^3} + 2D \right) \left(\frac{1+\nu_2}{E_2} \right)$$

$$\varepsilon_{r3} = \left(\frac{2F}{r^3} + 2H \right) \left(\frac{1+\nu_3}{E_3} \right)$$

$$\varepsilon_{\theta3} = \varepsilon_{\varphi3} = \left(-\frac{F}{r^3} + 2H \right) \left(\frac{1+\nu_3}{E_3} \right)$$

$$\varepsilon_{r4} = \left(\frac{2J}{r^3} + 2L \right) \left(\frac{1+\nu_4}{E_4} \right)$$

$$\varepsilon_{\theta4} = \varepsilon_{\varphi4} = \left(-\frac{J}{r^3} + 2L \right) \left(\frac{1+\nu_4}{E_4} \right)$$

$$\varepsilon_{r5} = \left(\frac{2M}{r^3} + 2N \right) \left(\frac{1+\nu_5}{E_5} \right)$$

$$\varepsilon_{\theta 5} = \varepsilon_{\varphi 5} = \left(-\frac{M}{r^3} + 2N \right) \left(\frac{1+\nu_5}{E_5} \right)$$

$$\varepsilon_{r6} = \left(\frac{2P}{r^3} + 2Q \right) \left(\frac{1+\nu_6}{E_6} \right)$$

$$\varepsilon_{\theta 6} = \varepsilon_{\varphi 6} = \left(-\frac{P}{r^3} + 2Q \right) \left(\frac{1+\nu_6}{E_6} \right)$$

$$\varepsilon_{r7} = \left(\frac{2R}{r^3} + 2S \right) \left(\frac{1+\nu_7}{E_7} \right)$$

$$\varepsilon_{\theta 7} = \varepsilon_{\varphi 7} = \left(-\frac{R}{r^3} + 2S \right) \left(\frac{1+\nu_7}{E_7} \right)$$

Από το βιβλίο «Μηχανική Παραμορφώσιμων Σωμάτων Ι» του Τσαμασφύρου έχουμε την εξής σχέση για τις ορθές τάσεις:

$$\sigma_r = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_r + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \theta$$

όπου $\theta = \varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_\theta$

Άρα τελικά προκύπτουν οι παρακάτω τάσεις:

$$\begin{aligned}\sigma_{r1} &= \frac{E_1}{1+\nu_1} \varepsilon_{r1} + \frac{E_1 \nu_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)} \theta_1 = \frac{E_1}{1+\nu_1} \varepsilon_{r1} + \frac{E_1 \nu_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)} (\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{\varphi1} + \varepsilon_{\theta1}) \\ &= \frac{E_1}{1+\nu_1} 2B \frac{1+\nu_1}{E_1} + 3 \frac{E_1 \nu_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)} 2B \frac{1+\nu_1}{E_1} = 2B + \frac{6B\nu_1}{1-2\nu_1} \Rightarrow \sigma_{r1} = \frac{2B(1+\nu_1)}{1-2\nu_1} \\ \Rightarrow \sigma_{r1} &= \frac{2B(1+\nu_1)}{1-2\nu_1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{r2} &= \frac{E_2}{1+\nu_2} \varepsilon_{r2} + \frac{E_2 \nu_2}{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)} (\varepsilon_{r2} + \varepsilon_{\varphi2} + \varepsilon_{\theta2}) = \\ \sigma_{r2} &= \frac{E_2}{1+\nu_2} \left(\frac{2C}{r^3} + 2D \right) \frac{1+\nu_2}{E_2} + \frac{E_2 \nu_2}{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)} \left[\left(\frac{2C}{r^3} + 2D \right) \frac{1+\nu_2}{E_2} + 2 \left(-\frac{C}{r^3} + 2D \right) \frac{1+\nu_2}{E_2} \right] = \\ \frac{2C}{r^3} + 2D + \frac{\nu_2}{1-2\nu_2} \left[\frac{2C}{r^3} + 2D - \frac{2C}{r^3} + 4D \right] &= \\ \frac{2C}{r^3} + 2D + \frac{\nu_2}{1-2\nu_2} 6D \Rightarrow \sigma_{r2} &= \frac{2C}{r^3} + 2D \frac{(1+\nu_2)}{1-2\nu_2} \\ \Rightarrow \sigma_{r2} &= \frac{2C}{r^3} + \frac{2D(1+\nu_2)}{1-2\nu_2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta2} &= \frac{E_2}{1+\nu_2} \varepsilon_{\theta2} + \frac{E_2 \nu_2}{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)} (\varepsilon_{r2} + 2\varepsilon_{\theta2}) = \\ \frac{E_2}{1+\nu_2} \left(-\frac{C}{r^3} + 2D \right) \frac{1+\nu_2}{E_2} + \frac{E_2 \nu_2}{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)} \left[\left(\frac{2C}{r^3} + 2D \right) \frac{1+\nu_2}{E_2} + 2 \left(-\frac{C}{r^3} + 2D \right) \frac{1+\nu_2}{E_2} \right] &= \\ -\frac{C}{r^3} + 2D + \frac{\nu_2}{1-2\nu_2} 2D + 4D &= -\frac{C}{r^3} + 2D \frac{(1-2\nu_2)}{1-2\nu_2} + \frac{\nu_2}{1-2\nu_2} 6D \\ \Rightarrow \sigma_{\theta2} &= -\frac{C}{r^3} + 2D \frac{(1+\nu_2)}{1-2\nu_2} = \sigma_{\varphi2}\end{aligned}$$

Ομοίως βρίσκουμε και τις υπόλοιπες:

$$\sigma_{r3} = \frac{2F}{r^3} + \frac{2H(1+\nu_3)}{1-2\nu_3}$$

$$\sigma_{\theta3} = \frac{-F}{r^3} + \frac{2H(1+\nu_3)}{1-2\nu_3} = \sigma_{\varphi3}$$

$$\sigma_{r4} = \frac{2J}{r^3} + \frac{2L(1+\nu_4)}{1-2\nu_4}$$

$$\sigma_{\theta4} = \frac{-J}{r^3} + \frac{2L(1+\nu_4)}{1-2\nu_4} = \sigma_{\varphi4}$$

$$\sigma_{r5} = \frac{2M}{r^3} + \frac{2N(1+\nu_5)}{1-2\nu_5}$$

$$\sigma_{\theta5} = \frac{-M}{r^3} + \frac{2N(1+\nu_5)}{1-2\nu_5} = \sigma_{\varphi5}$$

$$\sigma_{r6} = \frac{2P}{r^3} + \frac{2Q(1+\nu_6)}{1-2\nu_6}$$

$$\sigma_{\theta6} = \frac{-P}{r^3} + \frac{2Q(1+\nu_6)}{1-2\nu_6} = \sigma_{\varphi6}$$

$$\sigma_{r7} = \frac{2R}{r^3} + \frac{2S(1+\nu_7)}{1-2\nu_7}$$

$$\sigma_{\theta7} = \frac{-R}{r^3} + \frac{2S(1+\nu_7)}{1-2\nu_7} = \sigma_{\varphi7}$$

Στη μελέτη αυτή οι συνοριακές συνθήκες των τάσεων τις οποίες λοιπόν θα χρησιμοποιήσουμε είναι:

- Στο $r=a \Rightarrow \sigma_{r1} = \sigma_{r2} = -P_0$
- Στο $r=b \Rightarrow \sigma_{r2} = \sigma_{r3} = -P_1$
- Στο $r=c \Rightarrow \sigma_{r3} = \sigma_{r4} = -P_2$
- Στο $r=d \Rightarrow \sigma_{r4} = \sigma_{r5} = -P_3$
- Στο $r=e \Rightarrow \sigma_{r5} = \sigma_{r6} = -P_4$
- Στο $r=f \Rightarrow \sigma_{r6} = \sigma_{r7} = -P_5$
- Στο $r=g \Rightarrow \sigma_{r7} = -P_6$

Εφαρμόζοντας τις παραπάνω συνθήκες στις σχέσεις των τάσεων που υπολογίσαμε προηγουμένως, έχουμε :

$$B = \frac{P_0(1-2\nu_1)}{2(1+\nu_1)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{2C}{a^3} + 2D \frac{(1+\nu_2)}{(1-2\nu_2)} = -P_0 \\ \frac{2C}{b^3} + 2D \frac{(1+\nu_2)}{(1-2\nu_2)} = -P_1 \end{array} \right\} \Rightarrow C = \frac{(P_1 - P_0)b^3 a^3}{2(b^3 - a^3)}$$

$$\frac{2(1+\nu_2)}{1-2\nu_2} D(a^3 - b^3) = P_1 b^3 - P_0 a^3 \Rightarrow D = \frac{(a^3 P_0 - b^3 P_1)(1-2\nu_2)}{2(b^3 - a^3)(1+\nu_2)}$$

Ομοίως βρίσκω και τις υπόλοιπες σταθερές:

$$F = \frac{(P_2 - P_1)b^3 c^3}{2(c^3 - b^3)}$$

$$H = \frac{(b^3 P_1 - c^3 P_2)(1 - 2\nu_3)}{2(c^3 - b^3)(1 + \nu_3)}$$

$$J = \frac{(P_3 - P_2)d^3 c^3}{2(d^3 - c^3)}$$

$$L = \frac{(c^3 P_2 - d^3 P_3)(1 - 2\nu_4)}{2(d^3 - c^3)(1 + \nu_4)}$$

$$M = \frac{(P_4 - P_3)e^3 d^3}{2(e^3 - d^3)}$$

$$N = \frac{(d^3 P_3 - e^3 P_4)(1 - 2\nu_5)}{2(e^3 - d^3)(1 + \nu_5)}$$

$$P = \frac{(P_5 - P_4)f^3 e^3}{2(f^3 - e^3)}$$

$$Q = \frac{(e^3 P_4 - f^3 P_5)(1 - 2\nu_6)}{2(f^3 - e^3)(1 + \nu_6)}$$

$$R = \frac{(P_6 - P_5)g^3 f^3}{2(g^3 - f^3)}$$

$$S = \frac{(f^3 P_5 - g^3 P_6)(1 - 2\nu_7)}{2(g^3 - f^3)(1 + \nu_7)}$$

Αντικαθιστώ τις σταθερές που βρήκα στις σχέσεις των μετατοπίσεων:

$$u_{r1} = -\frac{P_0(1-2\nu_1)}{E_1} r \quad (6.1)$$

$$u_{r2} = -\frac{(P_1 - P_0)a^3b^3(1+\nu_2)}{2(b^3 - a^3)E_2} \frac{1}{r^2} + \frac{(a^3P_0 - b^3P_1)(1-2\nu_2)}{(b^3 - a^3)E_2} r \quad (6.2)$$

$$u_{r3} = -\frac{(P_2 - P_1)b^3c^3(1+\nu_3)}{2(c^3 - b^3)E_3} \frac{1}{r^2} + \frac{(b^3P_1 - c^3P_2)(1-2\nu_3)}{(c^3 - b^3)E_3} r \quad (6.3)$$

$$u_{r4} = -\frac{(P_3 - P_2)c^3d^3(1+\nu_4)}{2(d^3 - c^3)E_4} \frac{1}{r^2} + \frac{(c^3P_2 - d^3P_3)(1-2\nu_4)}{(d^3 - c^3)E_4} r \quad (6.4)$$

$$u_{r5} = -\frac{(P_4 - P_3)d^3e^3(1+\nu_5)}{2(e^3 - d^3)E_5} \frac{1}{r^2} + \frac{(d^3P_3 - e^3P_4)(1-2\nu_5)}{(e^3 - d^3)E_5} r \quad (6.5)$$

$$u_{r6} = -\frac{(P_5 - P_4)e^3f^3(1+\nu_6)}{2(f^3 - e^3)E_6} \frac{1}{r^2} + \frac{(e^3P_4 - f^3P_5)(1-2\nu_6)}{(f^3 - e^3)E_6} r \quad (6.6)$$

$$u_{r7} = -\frac{(P_6 - P_5)f^3g^3(1+\nu_7)}{2(g^3 - f^3)E_7} \frac{1}{r^2} + \frac{(f^3P_5 - g^3P_6)(1-2\nu_7)}{(g^3 - f^3)E_7} r \quad (6.7)$$

Οι συνοριακές συνθήκες μετατοπίσεων είναι:

Για $\underline{r=a}$: $u_{r1}=u_{r2}$

$\underline{r=b}$: $u_{r2}=u_{r3}$

$\underline{r=c}$: $u_{r3}=u_{r4}$

$\underline{r=d}$: $u_{r4}=u_{r5}$

$\underline{r=e}$: $u_{r5}=u_{r6}$

$\underline{r=f}$: $u_{r6}=u_{r7}$

Για $\underline{r} = \underline{a}$ εξισώνω τις σχέσεις 6.1 και 6.2 οπότε έχω:

$$\begin{aligned}
u_{r_1} = u_{r_2} &\Rightarrow -\frac{P_0(1-2v_1)}{E_1}a = -\frac{(P_1-P_0)a^3b^3(1+v_2)}{2(b^3-a^3)E_2} \frac{1}{a^2} + \frac{(a^3P_0-b^3P_1)(1-2v_2)}{(b^3-a^3)E_2}a \Rightarrow \\
&\Rightarrow -2P_0(1-2v_1)(b^3-a^3)E_2 + (P_1-P_0)b^3(1+v_2)E_1 - 2(a^3P_0-b^3P_1)(1-2v_2)E_1 = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow -2P_0(1-2v_1)(b^3-a^3)E_2 + b^3E_1P_1 + b^3v_2E_1P_1 - b^3v_2E_1P_0 - P_0b^3E_1 - 2a^3E_1P_0 + 4a^3v_2E_1P_0 + 2b^3E_1P_1 - \\
&\quad -4b^3v_2E_1P_1 = 0 \\
&\Rightarrow 3b^3E_1(1-v_2)P_1 - 2P_0(1-2v_1)(b^3-a^3)E_2 - [b^3(1+v_2) + 2a^3(1-2v_2)]E_1P_0 = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow P_1[3b^3(1-v_2)E_1] = P_0[2(b^3-a^3)(1-2v_1)E_2 + [b^3(1+v_2) + 2a^3(1-2v_2)E_1]] \Rightarrow \\
&\Rightarrow P_0 = \mu P_1 \Rightarrow \mu = \frac{3E_1b^3(1-v_2)}{\left\{ (1-2v_1)(b^3-a^3)E_2 + [b^3(1+v_2) + 2a^3(1-2v_2)]E_1 \right\}}
\end{aligned}$$

Για $\underline{r} = \underline{b}$ εξισώνω τις 6.2 και 6.3:

$$\begin{aligned}
u_{r_2} = u_{r_3} &\Rightarrow -\frac{(P_1-P_0)a^3b^3(1+v_2)}{2(b^3-a^3)E_2b^2} + \frac{(a^3P_0-b^3P_1)(1-2v_2)b}{(b^3-a^3)E_2} = -\frac{(P_2-P_1)b^3c^3(1+v_3)}{2(c^3-b^3)E_3b^2} + \frac{(b^3P_1-c^3P_2)(1-2v_3)b}{(c^3-b^3)E_3} \\
&\Rightarrow -(P_1-P_0)a^3b^3(1+v_2)(c^3-b^3)E_3 + 2b^3(c^3-b^3)(a^3P_0-b^3P_1)(1-2v_2)E_3 + \\
&\quad + 2(b^3-a^3)(P_2-P_1)b^3c^3(1+v_3)E_2 - 2(b^3-a^3)b^3(b^3P_1-c^3P_2)(1-2v_3)E_2 = 0 \\
&\Rightarrow (a^3c^3 - a^3b^3 + a^3c^3 - a^3b^3v_2)E_3(P_0-P_1) + 2(a^3P_0-b^3P_1)(c^3-b^3-2c^3v_2+2b^3v_2)E_3 \\
&\quad + (P_2-P_1)(b^3c^3 - a^3c^3 + b^3c^3v_2 - a^3c^3v_2)E_2 - 2(b^3P_1-c^3P_2)(b^3-a^3-2b^3v_3+2a^3v_3)E_2 = 0 \\
&\Rightarrow [3a^3c^3 - 3a^3b^3 - a^3c^3 - v_2 + a^3b^3v_2]E_3P_0 + (-a^3c^3 + a^3b^3 - a^3c^3v_2 \\
&\quad + a^3b^3v_2 - 2b^3c^3 + 2b^6 + 4b^3c^3v_2 - 4b^6v_2)E_3P_1 + (-b^3c^3 + a^3c^3 - b^3c^3v_3 + \\
&\quad a^3c^3v_3 - 2b^6 + 2a^3b^3 + 4b^6v_3 - 4a^3b^3v_3)E_2P_1 + (3b^3c^3 - 3a^3c^3 - 3b^3c^3v_3 + 3a^3c^3v_3)E_2P_2 = 0
\end{aligned}$$

αλλά $P_0 = \mu P_1$ άρα έχω:

$$P_2[3c^3(1-v_3)(b^3-a^3)E_2] = P_1 \begin{bmatrix} a^3(1+v_2) + 2b^3(1-2v_2)(c^3-b^3)E_3 \\ + [c^3(1+v_3) + 2b^3(1-2v_3)](b^3-a^3)E_2 \\ - 3\mu a^3(c^3-b^3)(1-v_2)E_3 \end{bmatrix}$$

Επίσης ισχύει $P_1 = \lambda P_2$ άρα τελικά έχουμε:

$$\lambda_1 = \frac{3c^3(1-v_3)(b^3-a^3)E_2}{[a^3(1+v_2) + 2b^3(1-2v_2)](c^3-b^3)E_3 + [c^3(1+v_3) + 2b^3(1-2v_3)](b^3-a^3)E_2 - 3\mu a^3(c^3-b^3)(1-v_2)E_3}$$

Για $\underline{r} = \underline{c}$ εξισώνω ομοίως με παραπάνω τις 6.3 και 6.4:

$$\begin{aligned} P_1 [3b^3(d^3 - c^3)(1 - v_3)E_4] + P_3 [3d^3(1 - v_4)(c^3 - b^3)E_3] = \\ = P_2 [b^3(1 + v_3) + 2c^3(1 - 2v_3)](d^3 - c^3)E_4 + [d^3(1 + v_4) + 2c^3(1 - 2v_4)(c^3 - b^3)E_3] \end{aligned}$$

Όμως $P_2 = \lambda_2 P_3$, άρα έχω

$$P_3 [3d^2(1 - v_4)(c^3 - b^3)E_3] = P_2 \begin{bmatrix} (b^3(1 + v_3) + 2c^3(1 - 2v_3))(d^3 - c^3)E_4 \\ (d^3(1 + v_4) + 2c^3(1 - 2v_4))(c^3 - b^3)E_3 \\ -3\lambda_1 b^3(d^3 - c^3)(1 - v_3)E_4 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \lambda_2 P_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = \frac{3d^2(1 - v_4)(c^3 - b^3)E_3}{(b^3(1 + v_3) + 2c^3(1 - 2v_3))(d^3 - c^3)E_4 + (d^3(1 + v_4) + 2c^3(1 - 2v_4))(c^3 - b^3)E_3 - 3\lambda_1 b^3(d^3 - c^3)(1 - v_3)E_4}$$

Για $\underline{r} = \underline{d}$ εξισώνω ομοίως με παραπάνω τις 6.4 και 6.5:

$$P_3 = \lambda_3 P_4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_3 = \frac{3e^2(1 - v_5)(d^3 - c^3)E_4}{[c^3(1 + v_4) + 2d^3(1 - 2v_4)](e^3 - d^3)E_5 + [e^3(1 + v_5) + 2d^3(1 - 2v_5)](d^3 - c^3)E_4 - 3\lambda_2 c^3(e^3 - d^3)(1 - v_4)E_5}$$

Εξισώνω με τον ίδιο τρόπο τις σχέσεις 6.5 και 6.6 για $\underline{r} = \underline{e}$:

$$P_4 = \lambda_4 P_5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_4 = \frac{3f^2(1 - v_6)(e^3 - d^3)E_5}{[d^3(1 + v_5) + 2e^3(1 - 2v_5)](f^3 - e^3)E_6 + [f^3(1 + v_6) + 2e^3(1 - 2v_6)](e^3 - d^3)E_5 - 3\lambda_3 d^3(f^3 - e^3)(1 - v_5)E_6}$$

Ομοίως για $\underline{r} = \underline{f}$ και για 6.6 και 6.7 έχω:

$$P_5 = \lambda_5 P_6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_5 = \frac{3g^2(1 - v_7)(f^3 - e^3)E_6}{[e^3(1 + v_6) + 2f^3(1 - 2v_6)](g^3 - f^3)E_7 + [g^3(1 + v_7) + 2f^3(1 - 2v_7)](f^3 - e^3)E_6 - 3\lambda_4 e^3(g^3 - f^3)(1 - v_6)E_7}$$

Για να υπολογίσω το μέτρο ελαστικότητας E_c του σύνθετου υλικού, θεωρώ ότι η ενέργεια παραμόρφωσης του υλικού ισούται με το άθροισμα των ενεργειών παραμόρφωσης των επτά (7) φάσεων από τις οποίες αποτελείται:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{V_c} \frac{P_6^2}{K_c} dV_c &= \frac{1}{2} \int_{V_1} (\sigma_{r1} \varepsilon_{r1} + \sigma_{\theta1} \varepsilon_{\theta1} + \sigma_{\varphi1} \varepsilon_{\varphi1}) dV_1 + \frac{1}{2} \int_{V_2} (\sigma_{r2} \varepsilon_{r2} + \sigma_{\theta2} \varepsilon_{\theta2} + \sigma_{\varphi2} \varepsilon_{\varphi2}) dV_2 \\ &+ \frac{1}{2} \int_{V_3} (\sigma_{r3} \varepsilon_{r3} + \sigma_{\theta3} \varepsilon_{\theta3} + \sigma_{\varphi3} \varepsilon_{\varphi3}) dV_3 + \frac{1}{2} \int_{V_4} (\sigma_{r4} \varepsilon_{r4} + \sigma_{\theta4} \varepsilon_{\theta4} + \sigma_{\varphi4} \varepsilon_{\varphi4}) dV_4 + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{V_5} (\sigma_{r5} \varepsilon_{r5} + \sigma_{\theta5} \varepsilon_{\theta5} + \sigma_{\varphi5} \varepsilon_{\varphi5}) dV_5 + \frac{1}{2} \int_{V_6} (\sigma_{r6} \varepsilon_{r6} + \sigma_{\theta6} \varepsilon_{\theta6} + \sigma_{\varphi6} \varepsilon_{\varphi6}) dV_6 \\ &+ \frac{1}{2} \int_{V_7} (\sigma_{r7} \varepsilon_{r7} + \sigma_{\theta7} \varepsilon_{\theta7} + \sigma_{\varphi7} \varepsilon_{\varphi7}) dV_7 \end{aligned}$$

όπου $K_c = \frac{E_c}{3(1-2\nu_c)}$ είναι το μέτρο διόγκωσης σύνθετου υλικού

και $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ με $dV = 4\pi r^2 dr$

Στη συνέχεια αντικαθιστώ τις τιμές των σταθερών που έχω υπολογίσει στις 7 παραπάνω εξισώσεις των τάσεων:

$$\begin{aligned} \sigma_{r1} = \sigma_{\theta1} = \sigma_{\varphi1} &= -2 \frac{(1+\nu_1)}{1-2\nu_1} \frac{P_0(1-2\nu_1)}{1+\nu_1} \\ \sigma_{r2} &= \frac{2C}{r^3} + 2D \frac{1+\nu_2}{1-2\nu_2} = \frac{2}{r^3} (P_1 - P_0) \frac{a^3 b^3}{2(b^3 - a^3)} + 2 \frac{(a^3 P_0 - b^3 P_1)(1-2\nu_2)}{2(b^3 - a^3)(1+\nu_2)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \sigma_{r2} &= \frac{(P_1 - P_0) a^3 b^3}{b^3 - a^3} \frac{1}{r^3} + \frac{a^3 P_0 - b^3 P_1}{b^3 - a^3} \end{aligned}$$

$$\sigma_{\theta 2} = \sigma_{\varphi 2} = \frac{-C}{r^3} + 2D \frac{1+v_2}{1-2v_2} = \frac{-1}{r^3} (P_1 - P_0) \frac{a^3 b^3}{2(b^3 - a^3)} + 2 \frac{(a^3 P_0 - b^3 P_1)(1-2v_2)}{2(b^3 - a^3)(1+v_2)} \frac{(1+v_2)}{(1-2v_2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_{\theta 2} = \sigma_{\varphi 2} = -\frac{(P_1 - P_0)a^3 b^3}{b^3 - a^3} \frac{1}{2r^3} + \frac{a^3 P_0 - b^3 P_1}{b^3 - a^3}$$

$$\sigma_{r3} = \frac{(P_2 - P_1)b^3 c^3}{c^3 - b^3} \frac{1}{r^3} + \frac{b^3 P_1 - c^3 P_2}{c^3 - b^3}$$

$$\sigma_{\theta 3} = \sigma_{\varphi 3} = -\frac{(P_2 - P_1)b^3 c^3}{c^3 - b^3} \frac{1}{2r^3} + \frac{b^3 P_1 - c^3 P_2}{c^3 - b^3}$$

$$\sigma_{r4} = \frac{(P_3 - P_2)c^3 d^3}{d^3 - c^3} \frac{1}{r^3} + \frac{c^3 P_2 - d^3 P_3}{d^3 - c^3}$$

$$\sigma_{\theta 4} = \sigma_{\varphi 4} = -\frac{(P_3 - P_2)c^3 d^3}{d^3 - c^3} \frac{1}{2r^3} + \frac{c^3 P_2 - d^3 P_3}{d^3 - c^3}$$

$$\sigma_{r5} = \frac{(P_4 - P_3)d^3 e^3}{e^3 - d^3} \frac{1}{r^3} + \frac{d^3 P_3 - e^3 P_4}{e^3 - d^3}$$

$$\sigma_{\theta 5} = \sigma_{\varphi 5} = -\frac{(P_4 - P_3)d^3 e^3}{e^3 - d^3} \frac{1}{2r^3} + \frac{d^3 P_3 - e^3 P_4}{e^3 - d^3}$$

$$\sigma_{r6} = \frac{(P_5 - P_4)e^3 f^3}{f^3 - e^3} \frac{1}{r^3} + \frac{e^3 P_4 - f^3 P_5}{f^3 - e^3}$$

$$\sigma_{\theta 6} = \sigma_{\varphi 6} = -\frac{(P_5 - P_4)e^3 f^3}{f^3 - e^3} \frac{1}{2r^3} + \frac{e^3 P_4 - f^3 P_5}{f^3 - e^3}$$

$$\sigma_{r7} = \frac{(P_6 - P_5)f^3 g^3}{g^3 - f^3} \frac{1}{r^3} + \frac{f^3 P_5 - g^3 P_6}{g^3 - f^3}$$

$$\sigma_{\theta 7} = \sigma_{\varphi 7} = -\frac{(P_6 - P_5)f^3 g^3}{g^3 - f^3} \frac{1}{2r^3} + \frac{f^3 P_5 - g^3 P_6}{g^3 - f^3}$$

Αντικαθιστώ τις τιμές των σταθερών που έχω υπολογίσει στις εξισώσεις των παραμορφώσεων:

$$\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{\theta1} = \varepsilon_{\varphi1} = \frac{2B(1+\nu_1)}{E_1} = 2 \frac{-P_0(1-2\nu_1)}{2(1+\nu_1)} \frac{(1+\nu_1)}{E_1} = -P_0 \frac{(1-2\nu_1)}{E_1}$$

$$\varepsilon_{r2} = \left[\frac{2C}{r^3} + 2D \right] \frac{1+\nu_2}{E_2} = \left[\frac{(P_1 - P_0)a^3b^3(1+\nu_2)}{(b^3 - a^3)E_2r^3} + \frac{1-2\nu_2}{E_2} \frac{a^3P_0 - b^3P_1}{b^3 - a^3} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{r2} = \frac{(P_1 - P_0)a^3b^3(1+\nu_2)}{(b^3 - a^3)E_2r^3} + \frac{1-2\nu_2}{E_2} \frac{a^3P_0 - b^3P_1}{b^3 - a^3}$$

$$\varepsilon_{\theta2} = \varepsilon_{\varphi2} = \left[\frac{-C}{r^3} + 2D \right] \frac{1+\nu_2}{E_2} = \left[-\frac{(P_1 - P_0)a^3b^3}{(b^3 - a^3)r^3} + \frac{2}{2} \frac{1-2\nu_2}{E_2} \frac{a^3P_0 - b^3P_1}{b^3 - a^3} \frac{1}{1+\nu_2} \right] \frac{1+\nu_2}{E_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{\theta2} = \varepsilon_{\varphi2} = -\frac{(P_1 - P_0)a^3b^3(1+\nu_2)}{2(b^3 - a^3)E_2r^3} + \frac{1-2\nu_2}{E_2} \frac{a^3P_0 - b^3P_1}{b^3 - a^3}$$

$$\varepsilon_{r3} = \frac{(P_2 - P_1)b^3a^3(1+\nu_3)}{(c^3 - b^3)E_3r^3} + \frac{1-2\nu_3}{E_3} \frac{b^3P_1 - c^3P_2}{c^3 - b^3}$$

$$\varepsilon_{\theta3} = \varepsilon_{\varphi3} = -\frac{(P_3 - P_2)c^3b^3(1+\nu_4)}{2(c^3 - b^3)E_4r^3} + \frac{1-2\nu_4}{E_4} \frac{b^3P_2 - c^3P_3}{c^3 - b^3}$$

$$\varepsilon_{r4} = \frac{(P_3 - P_2)c^3b^3(1+\nu_4)}{(d^3 - c^3)E_4r^3} + \frac{1-2\nu_4}{E_3} \frac{c^3P_2 - d^3P_3}{d^3 - c^3}$$

$$\varepsilon_{\theta4} = \varepsilon_{\varphi4} = -\frac{(P_3 - P_2)c^3d^3(1+\nu_4)}{2(d^3 - c^3)E_4r^3} + \frac{1-2\nu_4}{E_3} \frac{c^3P_2 - d^3P_3}{d^3 - c^3}$$

$$\varepsilon_{r5} = \frac{(P_4 - P_3)d^3c^3(1+\nu_5)}{(e^3 - d^3)E_5r^3} + \frac{1-2\nu_5}{E_5} \frac{d^3P_3 - e^3P_4}{e^3 - d^3}$$

$$\varepsilon_{\theta5} = \varepsilon_{\varphi5} = -\frac{(P_4 - P_3)d^3e^3(1+\nu_5)}{2(e^3 - d^3)E_5r^3} + \frac{1-2\nu_5}{E_5} \frac{d^3P_3 - e^3P_4}{e^3 - d^3}$$

$$\varepsilon_{r6} = \frac{(P_5 - P_4)e^3 f^3 (1 + v_6)}{(f^3 - e^3)E_6 r^3} + \frac{1 - 2v_6}{E_6} \frac{e^3 P_4 - f^3 P_5}{f^3 - e^3}$$

$$\varepsilon_{\theta 6} = \varepsilon_{\varphi 6} = -\frac{(P_5 - P_4)e^3 f^3 (1 + v_6)}{2(f^3 - e^3)E_6 r^3} + \frac{1 - 2v_6}{E_6} \frac{e^3 P_4 - f^3 P_5}{f^3 - e^3}$$

$$\varepsilon_{r7} = \frac{(P_6 - P_5)f^3 g^3 (1 + v_7)}{(g^3 - f^3)E_7 r^3} + \frac{1 - 2v_7}{E_7} \frac{f^3 P_5 - g^3 P_6}{g^3 - f^3}$$

$$\varepsilon_{\theta 7} = \varepsilon_{\varphi 7} = -\frac{(P_6 - P_5)f^3 g^3 (1 + v_7)}{2(g^3 - f^3)E_7 r^3} + \frac{1 - 2v_7}{E_7} \frac{f^3 P_5 - g^3 P_6}{g^3 - f^3}$$

Θα υπολογίσω τα επιμέρους γινόμενα:

$$\sigma_{r1} = \sigma_{\theta 1} = \sigma_{\varphi 1} = -P_0$$

$$\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{\theta 1} = \varepsilon_{\varphi 1} = -P_0 \frac{(1 - 2v_1)}{E_1}$$

$$\varepsilon_{r1} \sigma_{r1} + \varepsilon_{\theta 1} \sigma_{\theta 1} + \varepsilon_{\varphi 1} \sigma_{\varphi 1} = 3P_0^2 \frac{(1 - 2v_1)}{E_1}$$

$$\sigma_{r2} \varepsilon_{r2} + \varepsilon_{\theta 2} \sigma_{\theta 2} + \varepsilon_{\varphi 2} \sigma_{\varphi 2} = \left(\frac{(P_1 - P_0)a^3 b^3 (1 + v_2)}{(b^3 - a^3)E_2 r^3} + \frac{1 - 2v_2}{E_2} \frac{a^3 P_0 - b^3 P_1}{b^3 - a^3} \right) \left(\frac{(P_1 - P_0)a^3 b^3}{b^3 - a^3} \frac{1}{r^3} + \frac{a^3 P_0 - b^3 P_1}{b^3 - a^3} \right) +$$

$$2 \left(-\frac{(P_1 - P_0)a^3 b^3}{b^3 - a^3} \frac{1}{2r^3} + \frac{a^3 P_0 - b^3 P_1}{b^3 - a^3} \right) \left(\frac{(P_1 - P_0)a^3 b^3 (1 + v_2)}{2(b^3 - a^3)E_2 r^3} + \frac{1 - 2v_2}{E_2} \frac{a^3 P_0 - b^3 P_1}{b^3 - a^3} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(P_1 - P_0)^2 a^6 b^6 (1 + v_2)}{(b^3 - a^3)^2 E_2} \frac{1}{r^6} + \frac{1 - 2v_2}{E_2} \frac{(a^3 P_0 - b^3 P_1)(P_1 - P_0)a^3 b^3}{(b^3 - a^3)r^3} + \frac{(a^3 P_0 - b^3 P_1)(P_1 - P_0)a^3 b^3}{2(b^3 - a^3)r^3}$$

$$- 2 \frac{1 - 2v_2}{E_2} \frac{(a^3 P_0 - b^3 P_1)(P_1 - P_0)a^3 b^3}{2(b^3 - a^3)^2} \frac{1}{r^3} + 2 \frac{1 - 2v_2}{E_2} \frac{(a^3 P_0 - b^3 P_1)}{(b^3 - a^3)^2} = \sigma_{r2} \varepsilon_{r2} + \varepsilon_{\theta 2} \sigma_{\theta 2} + \varepsilon_{\varphi 2} \sigma_{\varphi 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_{r2} \varepsilon_{r2} + \varepsilon_{\theta 2} \sigma_{\theta 2} + \varepsilon_{\varphi 2} \sigma_{\varphi 2} = \frac{3}{2} \frac{(P_1 - P_0)^2 a^6 b^6 (1 + v_2)}{(b^3 - a^3)^2 E_2} \frac{1}{r^6} + 3 \frac{1 - 2v_2}{E_2} \frac{(a^3 P_0 - b^3 P_1)^2}{(b^3 - a^3)^2}$$

$$\sigma_{r_3}\varepsilon_{r_3} + \varepsilon_{\theta_3}\sigma_{\theta_3} + \varepsilon_{\varphi_3}\sigma_{\varphi_3} = \frac{3(P_2 - P_1)^2 b^6 c^6 (1 + \nu_3)}{2(c^3 - b^3)^2 E_3} \frac{1}{r^6} + 3 \frac{1 - 2\nu_3}{E_3} \frac{(b^3 P_1 - c^3 P_2)^2}{(c^3 - b^3)^2}$$

$$\sigma_{r_4}\varepsilon_{r_4} + \varepsilon_{\theta_4}\sigma_{\theta_4} + \varepsilon_{\varphi_4}\sigma_{\varphi_4} = \frac{3(P_3 - P_2)^2 d^6 c^6 (1 + \nu_4)}{2(d^3 - c^3)^2 E_4} \frac{1}{r^6} + 3 \frac{1 - 2\nu_4}{E_4} \frac{(c^3 P_2 - d^3 P_3)^2}{(d^3 - c^3)^2}$$

$$\sigma_{r_5}\varepsilon_{r_5} + \varepsilon_{\theta_5}\sigma_{\theta_5} + \varepsilon_{\varphi_5}\sigma_{\varphi_5} = \frac{3(P_4 - P_3)^2 e^6 d^6 (1 + \nu_5)}{2(e^3 - d^3)^2 E_5} \frac{1}{r^6} + 3 \frac{1 - 2\nu_5}{E_5} \frac{(d^3 P_3 - e^3 P_4)^2}{(e^3 - d^3)^2}$$

$$\sigma_{r_6}\varepsilon_{r_6} + \varepsilon_{\theta_6}\sigma_{\theta_6} + \varepsilon_{\varphi_6}\sigma_{\varphi_6} = \frac{3(P_5 - P_4)^2 f^6 e^6 (1 + \nu_6)}{2(f^3 - e^3)^2 E_6} \frac{1}{r^6} + 3 \frac{1 - 2\nu_6}{E_6} \frac{(e^3 P_4 - f^3 P_5)^2}{(f^3 - e^3)^2}$$

$$\sigma_{r_7}\varepsilon_{r_7} + \varepsilon_{\theta_7}\sigma_{\theta_7} + \varepsilon_{\varphi_7}\sigma_{\varphi_7} = \frac{3(P_6 - P_5)^2 g^6 f^6 (1 + \nu_7)}{2(g^3 - f^3)^2 E_7} \frac{1}{r^6} + 3 \frac{1 - 2\nu_7}{E_7} \frac{(f^3 P_5 - g^3 P_6)^2}{(g^3 - f^3)^2}$$

Εν συνεχεία θέτω:

$$q_1 = \frac{(P_1 - P_0)^2 a^6 b^6 (1 + \nu_2)}{(b^3 - a^3)^2 E_2}$$

$$q_2 = \frac{1 - 2\nu_2}{E_2} \frac{(a^3 P_0 - b^3 P_1)^2}{(b^3 - a^3)^2}$$

$$s_1 = \frac{(P_2 - P_1)^2 b^6 c^6 (1 + \nu_3)}{(c^3 - b^3)^2 E_3}$$

$$s_2 = \frac{1 - 2\nu_3}{E_3} \frac{(b^3 P_1 - c^3 P_2)^2}{(c^3 - b^3)^2}$$

$$t_1 = \frac{(P_3 - P_2)^2 d^6 c^6 (1 + \nu_4)}{(d^3 - c^3)^2 E_4}$$

$$t_2 = \frac{1 - 2\nu_4}{E_4} \frac{(c^3 P_2 - d^3 P_3)^2}{(d^3 - c^3)^2}$$

$$x_1 = \frac{(P_4 - P_3)^2 e^6 d^6 (1 + \nu_5)}{(e^3 - d^3)^2 E_5}$$

$$x_2 = \frac{1 - 2\nu_5}{E_5} \frac{(d^3 P_3 - e^3 P_4)^2}{(e^3 - d^3)^2}$$

$$y_1 = \frac{(P_5 - P_4)^2 f^6 e^6 (1 + v_6)}{(f^3 - e^3)^2 E_6}$$

$$y_2 = \frac{1 - 2v_6 (e^3 P_4 - f^3 P_5)^2}{E_6 (f^3 - e^3)^2}$$

$$z_1 = \frac{(P_6 - P_5)^2 g^6 f^6 (1 + v_7)}{(g^3 - f^3)^2 E_7}$$

$$z_2 = \frac{1 - 2v_7 (f^3 P_5 - g^3 P_6)^2}{E_7 (g^3 - f^3)^2}$$

Συνεπώς η σχέση (Σ) γράφεται:

$$\begin{aligned} \int_0^g \frac{3P_6^2(1-2v_c)}{E_c} r^2 dr &= \int_0^a \frac{3P_0^2(1-2v_1)}{E_1} r^2 dr + \int_a^b \left[\frac{3}{2} q_1 \frac{1}{r^6} + 3q_2 \right] r^2 dr + \int_b^c \left[\frac{3}{2} s_1 \frac{1}{r^6} + 3s_2 \right] r^2 dr + \\ &\int_c^d \left[\frac{3}{2} t_1 \frac{1}{r^6} + 3t_2 \right] r^2 dr + \int_d^e \left[\frac{3}{2} x_1 \frac{1}{r^6} + 3x_2 \right] r^2 dr + \int_e^f \left[\frac{3}{2} y_1 \frac{1}{r^6} + 3y_2 \right] r^2 dr + \\ &\int_f^g \left[\frac{3}{2} z_1 \frac{1}{r^6} + 3z_2 \right] r^2 dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{3P_6^2(1-2v_c)}{E_c} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^g &= \frac{3P_0^2(1-2v_1)}{E_1} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^a + \frac{3}{2} q_1 \left[-\frac{r^{-3}}{3} \right]_a^b + 3q_2 \left[\frac{r^3}{3} \right]_a^b + \\ &\frac{3}{2} s_1 \left[-\frac{r^{-3}}{3} \right]_b^c + 3s_2 \left[\frac{r^3}{3} \right]_b^c + \frac{3}{2} t_1 \left[-\frac{r^{-3}}{3} \right]_c^d + 3t_2 \left[\frac{r^3}{3} \right]_c^d + \\ &\frac{3}{2} x_1 \left[-\frac{r^{-3}}{3} \right]_d^e + 3x_2 \left[\frac{r^3}{3} \right]_d^e + \frac{3}{2} y_1 \left[-\frac{r^{-3}}{3} \right]_e^f + 3y_2 \left[\frac{r^3}{3} \right]_e^f + \\ &\frac{3}{2} z_1 \left[-\frac{r^{-3}}{3} \right]_f^g + 3z_2 \left[\frac{r^3}{3} \right]_f^g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{P_6^2(1-2\nu_c)}{E_c} g^3 &= \frac{P_0^2(1-2\nu_1)}{E_1} a^3 - \frac{1}{2} q_1 \left(\frac{1}{b^3} - \frac{1}{a^3} \right) + q_2 (b^3 - a^3) - \frac{1}{2} s_1 \left(\frac{1}{c^3} - \frac{1}{b^3} \right) + s_2 (c^3 - b^3) \\
&\quad - \frac{1}{2} t_1 \left(\frac{1}{d^3} - \frac{1}{c^3} \right) + t_2 (d^3 - c^3) - \frac{1}{2} x_1 \left(\frac{1}{e^3} - \frac{1}{d^3} \right) + x_2 (e^3 - d^3) \\
&\quad - \frac{1}{2} y_1 \left(\frac{1}{f^3} - \frac{1}{e^3} \right) + y_2 (f^3 - e^3) - \frac{1}{2} z_1 \left(\frac{1}{g^3} - \frac{1}{f^3} \right) + z_2 (g^3 - f^3) \\
&= \frac{P_0^2(1-2\nu_1)}{E_1} a^3 - \frac{1}{2} q_1 \left(\frac{a^3 - b^3}{a^3 b^3} \right) + q_2 (b^3 - a^3) - \frac{1}{2} s_1 \left(\frac{b^3 - c^3}{b^3 c^3} \right) + s_2 (c^3 - b^3) \\
&\quad - \frac{1}{2} t_1 \left(\frac{c^3 - d^3}{c^3 d^3} \right) + t_2 (d^3 - c^3) - \frac{1}{2} x_1 \left(\frac{d^3 - e^3}{d^3 e^3} \right) + x_2 (e^3 - d^3) \\
&\quad - \frac{1}{2} y_1 \left(\frac{e^3 - f^3}{e^3 f^3} \right) + y_2 (f^3 - e^3) - \frac{1}{2} z_1 \left(\frac{f^3 - g^3}{f^3 g^3} \right) + z_2 (g^3 - f^3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{P_6^2(1-2\nu_c)}{E_c} g^3 &= \frac{P_0^2(1-2\nu_1) a^3}{E_1} + \frac{1}{2} \frac{(P_1 - P_0)^2 a^3 b^3 (1 + \nu_2)}{(b^3 - a^3) E_2} + \frac{(1 - 2\nu_2)(a^3 P_0 - b^3 P_1)^2}{(b^3 - a^3) E_2} + \\
&\quad \frac{1}{2} \frac{(P_2 - P_1)^2 b^3 c^3 (1 + \nu_3)}{(c^3 - b^3) E_3} + \frac{(1 - 2\nu_3)(b^3 P_1 - c^3 P_2)^2}{(c^3 - b^3) E_3} + \\
&\quad \frac{1}{2} \frac{(P_3 - P_2)^2 c^3 d^3 (1 + \nu_4)}{(d^3 - c^3) E_4} + \frac{(1 - 2\nu_4)(c^3 P_2 - d^3 P_3)^2}{(d^3 - c^3) E_4} + \\
&\quad \frac{1}{2} \frac{(P_4 - P_3)^2 d^3 e^3 (1 + \nu_5)}{(e^3 - d^3) E_5} + \frac{(1 - 2\nu_5)(d^3 P_3 - e^3 P_4)^2}{(e^3 - d^3) E_5} + \\
&\quad \frac{1}{2} \frac{(P_5 - P_4)^2 e^3 f^3 (1 + \nu_6)}{(f^3 - e^3) E_6} + \frac{(1 - 2\nu_6)(e^3 P_4 - f^3 P_5)^2}{(f^3 - e^3) E_6} + \\
&\quad \frac{1}{2} \frac{(P_6 - P_5)^2 f^3 g^3 (1 + \nu_7)}{(g^3 - f^3) E_7} + \frac{(1 - 2\nu_7)(f^3 P_5 - g^3 P_6)^2}{(g^3 - f^3) E_7}
\end{aligned}$$

Ισχύουν ακόμη οι σχέσεις:

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= \frac{a^3}{g^3} \\ U_2 &= \frac{b^3 - a^3}{g^3} \\ U_3 &= \frac{c^3 - b^3}{g^3} \\ U_4 &= \frac{d^3 - c^3}{g^3} \\ U_5 &= \frac{e^3 - d^3}{g^3} \\ U_6 &= \frac{f^3 - e^3}{g^3} \\ U_7 &= \frac{g^3 - f^3}{g^3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7 = 1}$$

Προκύπτει επίσης:

$$\frac{b^3}{g^3} = U_1 + U_2$$

$$\frac{c^3}{g^3} = U_1 + U_2 + U_3$$

$$\frac{d^3}{g^3} = U_1 + U_2 + U_3 + U_4$$

$$\frac{e^3}{g^3} = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5$$

$$\frac{f^3}{g^3} = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 = 1 - U_7$$

Τέλος ισχύουν και οι παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned}
P_0 &= \mu P_1 = \mu \lambda_1 P_2 = \mu \lambda_1 \lambda_2 P_3 = \mu \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 P_4 = \mu \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 P_5 = \mu \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 P_6 \\
\Rightarrow \frac{P_0}{P_6} &= \mu \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \\
\frac{P_1}{P_6} &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \\
\frac{P_2}{P_6} &= \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \\
\frac{P_3}{P_6} &= \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \\
\frac{P_4}{P_6} &= \lambda_4 \lambda_5 \\
\frac{P_5}{P_6} &= \lambda_5
\end{aligned}$$

Συνεπώς, σύμφωνα με τις παραπάνω σχέσεις και διαιρώντας με $P_6^2 g^3$ η σχέση (Σ_2) γίνεται:

$$\begin{aligned}
\frac{2(1-2v_c)}{E_c} &= \frac{2U_1(\mu\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5)^2(1-2v_1)}{E_1} + \frac{(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5 - \mu\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5)^2 a^3 b^3 (1+v_2)}{(b^3 - a^3)E_2 g^3} + \\
&\frac{2(1-2v_2)(a^3 \mu\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5 - b^3 \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5)^2}{E_2 (b^3 - a^3) g^3} + \frac{(\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5 - \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5)^2 b^3 c^3 (1+v_3)}{(c^3 - b^3)E_3 g^3} + \\
&\frac{2(1-2v_3)(b^3 \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5 - c^3 \lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5)^2}{E_3 (c^3 - b^3) g^3} + \frac{(\lambda_3\lambda_4\lambda_5 - \lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5)^2 c^3 d^3 (1+v_4)}{(d^3 - c^3)E_4 g^3} + \\
&\frac{2(1-2v_4)(c^3 \lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5 - d^3 \lambda_3\lambda_4\lambda_5)^2}{E_4 (d^3 - c^3) g^3} + \frac{(\lambda_4\lambda_5 - \lambda_3\lambda_4\lambda_5)^2 d^3 e^3 (1+v_5)}{(e^3 - d^3)E_5 g^3} + \\
&\frac{2(1-2v_5)(d^3 \lambda_3\lambda_4\lambda_5 - e^3 \lambda_4\lambda_5)^2}{E_5 (e^3 - d^3) g^3} + \frac{(\lambda_5 - \lambda_4\lambda_5)^2 e^3 f^3 (1+v_6)}{(f^3 - e^3)E_6 g^3} + \\
&\frac{2(1-2v_6)(e^3 \lambda_4\lambda_5 - f^3 \lambda_5)^2}{E_6 (f^3 - e^3) g^3} + \frac{(1 - \lambda_5)^2 f^3 g^3 (1+v_7)}{(g^3 - f^3)E_7 g^3} + \\
&\frac{2(1-2v_7)(f^3 \lambda_5 - g^3)^2}{E_7 (g^3 - f^3) g^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{2(1-2\nu_c)}{E_c} &= \frac{2U_1(\mu\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5)^2(1-2\nu_1)}{E_1} + \frac{(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5 - \mu\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5)^2 U_1(U_1+U_2)(1+\nu_2)}{U_2 E_2} + \\
&\frac{2(1-2\nu_2)[U_1\mu\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5 - (U_1+U_2)\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5]^2}{U_2 E_2} + \frac{(\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5 - \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5)^2 (U_1+U_2)(U_1+U_2+U_3)(1+\nu_3)}{U_3 E_3} + \\
&\frac{2(1-2\nu_3)((U_1+U_2)\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5 - (U_1+U_2+U_3)\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5)^2}{U_3 E_3} + \frac{(\lambda_3\lambda_4\lambda_5 - \lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5)^2 (U_1+U_2+U_3)(U_1+U_2+U_3+U_4)(1+\nu_4)}{U_4 E_4} + \\
&\frac{2(1-2\nu_4)[(U_1+U_2+U_3)\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5 - (U_1+U_2+U_3+U_4)\lambda_3\lambda_4\lambda_5]^2}{U_4 E_4} + \frac{(\lambda_4\lambda_5 - \lambda_3\lambda_4\lambda_5)^2 (U_1+U_2+U_3+U_4)(U_1+U_2+U_3+U_4+U_5)(1+\nu_5)}{U_5 E_5} + \\
&\frac{2(1-2\nu_5)[(U_1+U_2+U_3+U_4)\lambda_3\lambda_4\lambda_5 - (U_1+U_2+U_3+U_4+U_5)\lambda_4\lambda_5]^2}{U_5 E_5} + \frac{(\lambda_5 - \lambda_4\lambda_5)^2 (U_1+U_2+U_3+U_4+U_5)(1-U_7)(1+\nu_6)}{U_6 E_6} + \\
&\frac{2(1-2\nu_6)[(U_1+U_2+U_3+U_4+U_5)\lambda_4\lambda_5 - (1-U_7)\lambda_5]^2}{U_6 E_6} + \frac{(1-\lambda_5)^2(1-U_7)(1+\nu_7)}{U_7 E_7} + \\
&\frac{2(1-2\nu_7)[(1-U_7)\lambda_5 - 1]^2}{U_7 E_7}
\end{aligned}$$

Ο λόγος Poisson του σύνθετου υλικού προκύπτει από το νόμο φάσεων και είναι ο εξής:

$$\frac{1}{\nu_c} = \frac{U_1}{\nu_1} + \frac{U_2}{\nu_2} + \frac{U_3}{\nu_3} + \frac{U_4}{\nu_4} + \frac{U_5}{\nu_5} + \frac{U_6}{\nu_6} + \frac{U_7}{\nu_7}$$

Τελικά προκύπτουν τα παρακάτω διαγράμματα και αποτελέσματα για τη μέγιστη επίδραση της ενδιάμεσου φάσεως, δηλαδή για $n = \xi = 1$ και παραβολική μεταβολή της ενδιάμεσης φάσης.

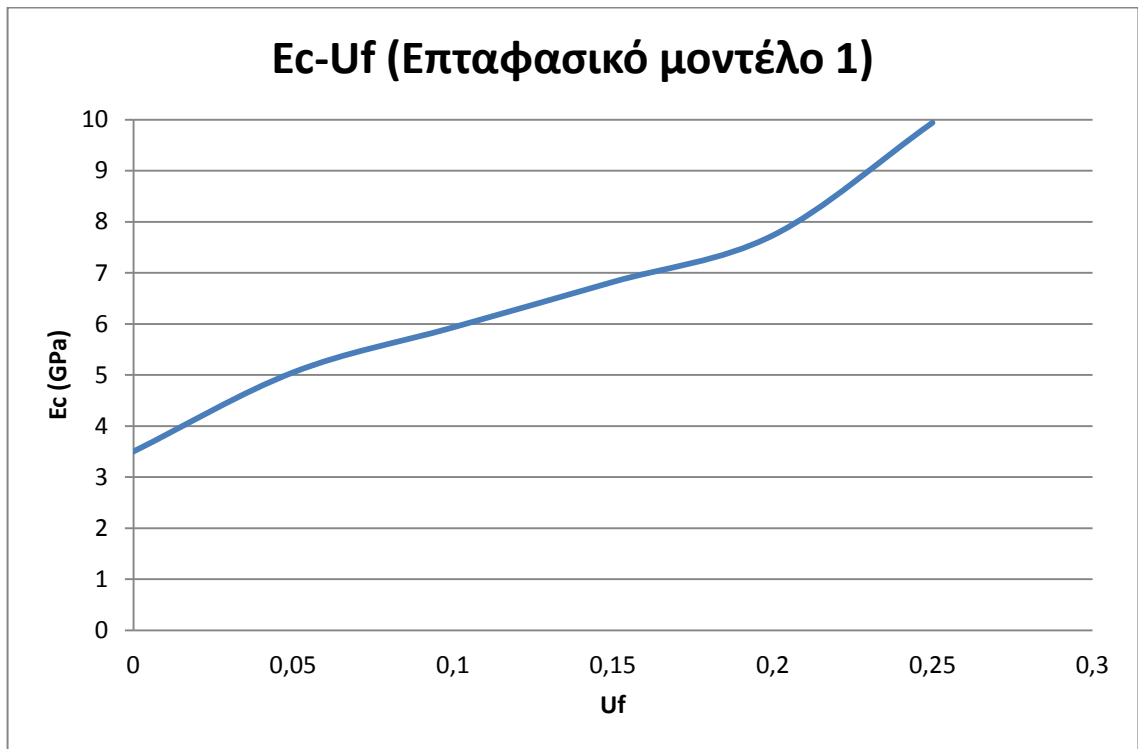
U_f	E_c για 7φασικό Μοντέλο 1 (GPa)	E_c για 7φασικό Μοντέλο 2 (GPa)
0.05	5,05	4,55
0.1	5,93	5,05
0.15	6,82	5,60
0.2	7,73	6,18
0.25	9,94	7,52

Πίνακας 6.1

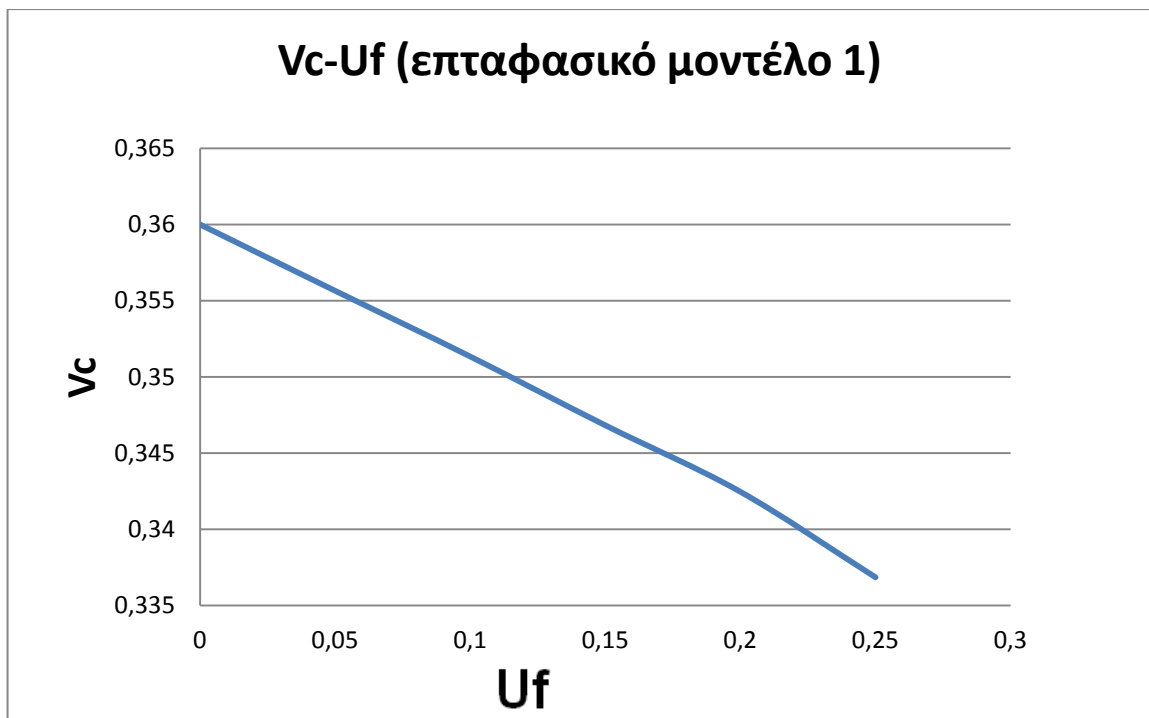
U_f	ν_c για 7φασικό Μοντέλο 1	ν_c για 7φασικό Μοντέλο 2
0.05	0,355651168	0,355661431
0.1	0,351338797	0,351371076
0.15	0,346824043	0,346932104
0.2	0,342464034	0,34263541
0.25	0,336853544	0,337310624

Πίνακας 6.2

Επταφασικό κυβικό μοντέλο 1

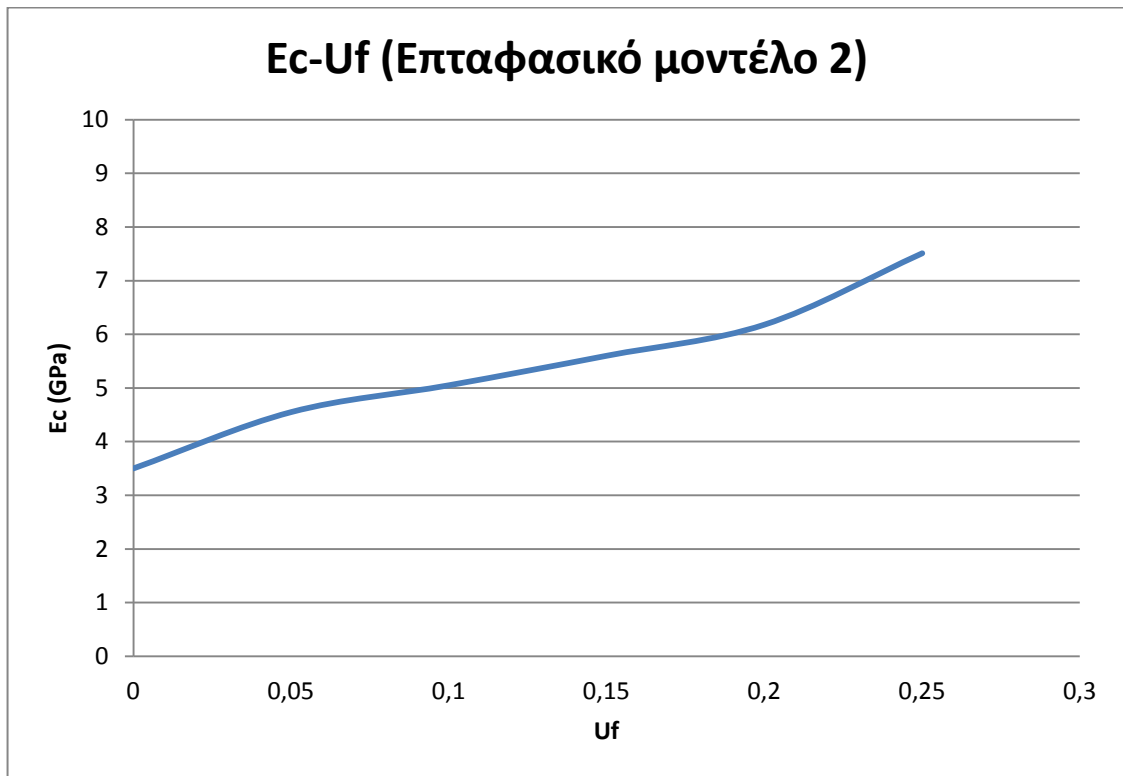


Διάγραμμα 6.1

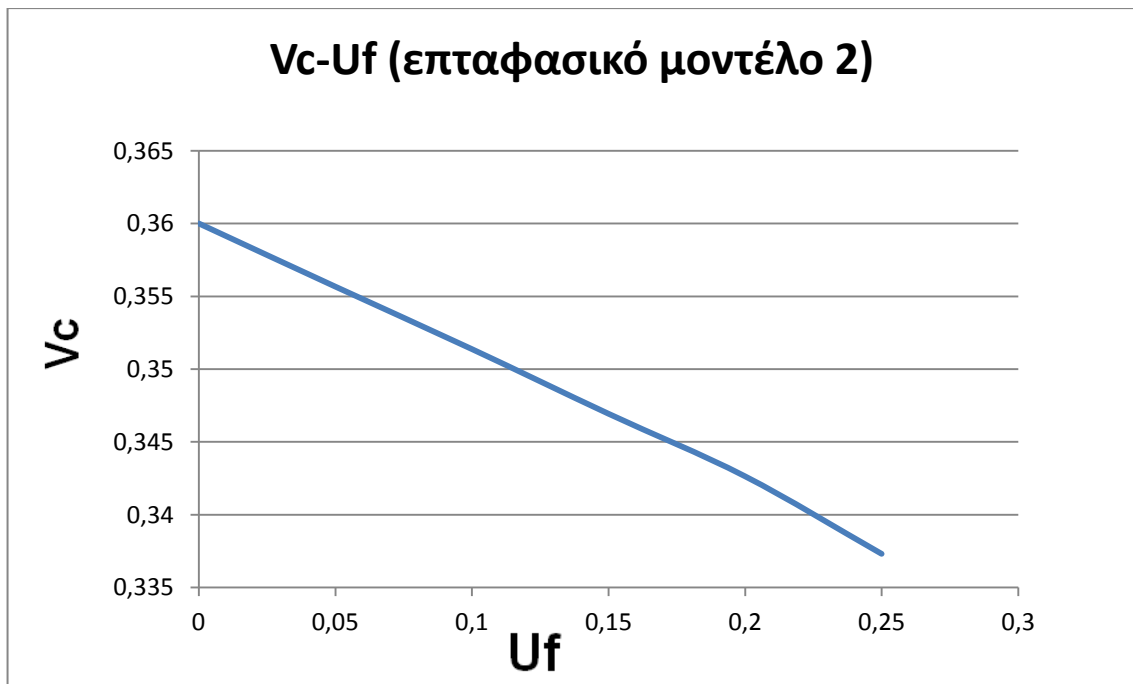


Διάγραμμα 6.2

Επταφασικό κυβικό μοντέλο 2



Διάγραμμα 6.3



Διάγραμμα 6.4

6.3 Μέτρο ελαστικότητας για διαφορετική επίδραση της ενδιάμεσου φάσεως

Εν συνεχεία παραθέτουμε πίνακες και διαγράμματα του μέτρου ελαστικότητας και του λόγου Poisson του σύνθετου υλικού για διαφορετική επίδραση των ελαστικών σταθερών της ενδιάμεσου φάσεως, η οποία γίνεται μέσω του συντελεστή n , δηλαδή για $n=0.2, 0.4, 0.6, 0.8$. Η επίδραση αυτή είναι πολύ πιο σημαντική στο μέτρο ελαστικότητας $E_c(r)$ όπου η διαφορά μεταξύ των μέτρων του εγκλείσματος και της μήτρας είναι πολύ μεγάλη ($E_f=60E_m$) έν σχέσει με την διαφορά των λόγων Poisson ν_f και ν_m των δύο φάσεων.

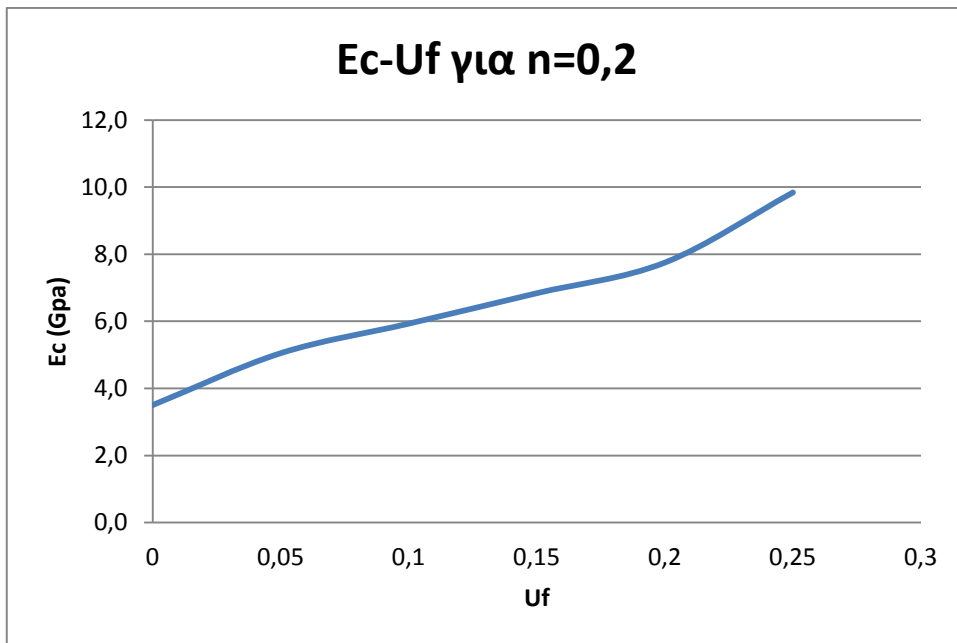
U_f	E_c κυβικού μοντέλου 1 (Gpa)				
	$n=\xi=0,2$	$n=\xi=0,4$	$n=\xi=0,6$	$n=\xi=0,8$	$n=\xi=1$
0,05	5,04826	5,04970	5,05043	5,05125	5,05228
0,10	5,92974	5,93235	5,93115	5,92968	5,92862
0,15	6,83875	6,85094	6,84379	6,83378	6,82427
0,2	7,75226	7,78377	7,77240	7,75302	7,73304
0,25	9,84405	10,05300	10,05524	10,00719	9,94507

Πίνακας 6.3

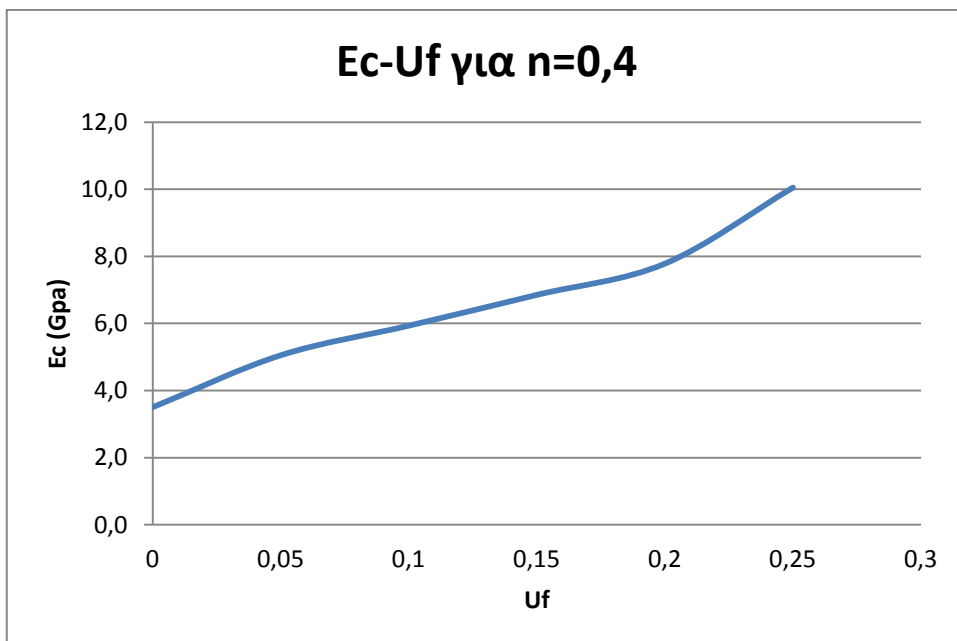
U_f	ν_c κυβικού μοντέλου 1				
	$n=\xi=0,2$	$n=\xi=0,4$	$n=\xi=0,6$	$n=\xi=0,8$	$n=\xi=1$
0,05	0,35539	0,35547	0,35554	0,35560	0,35565
0,10	0,35053	0,35077	0,35099	0,35117	0,35134
0,15	0,34412	0,34493	0,34564	0,34627	0,34682
0,2	0,33817	0,33945	0,34057	0,34157	0,34246
0,25	0,32528	0,32867	0,33169	0,33440	0,33685

Πίνακας 6.4

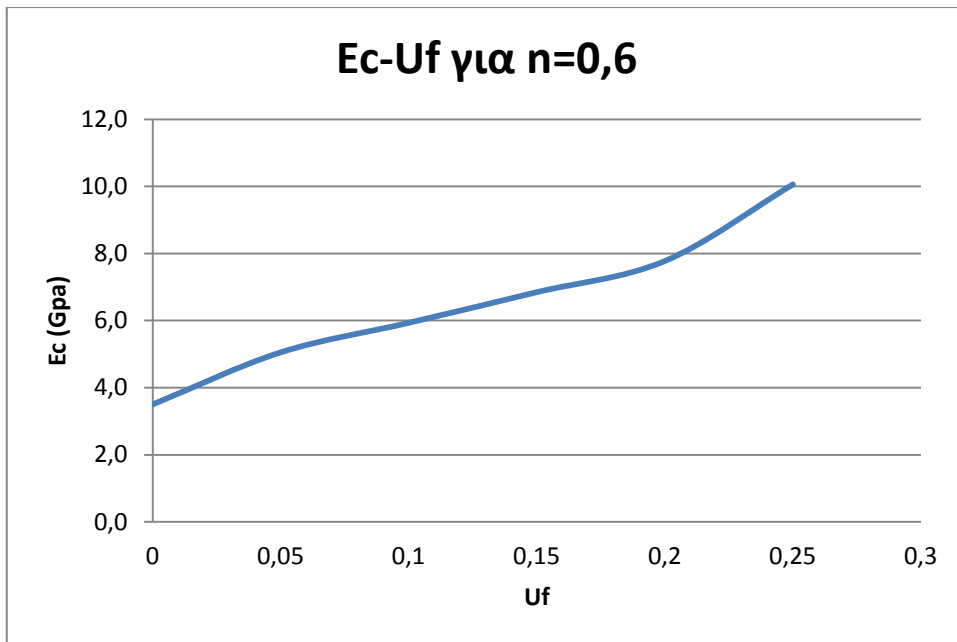
Επταφασικό κυβικό μοντέλο 1



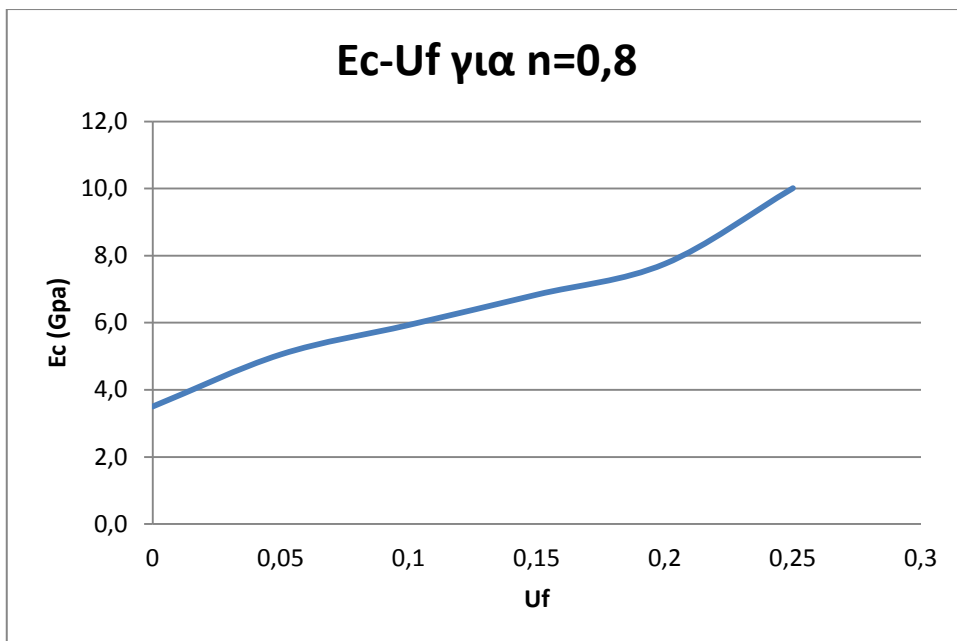
Διάγραμμα 6.5



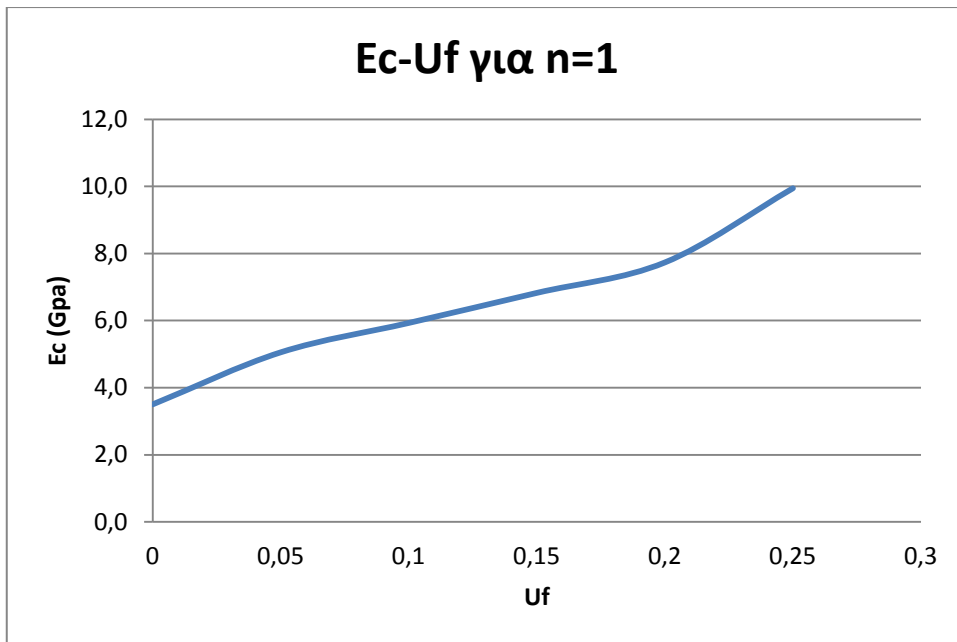
Διάγραμμα 6.6



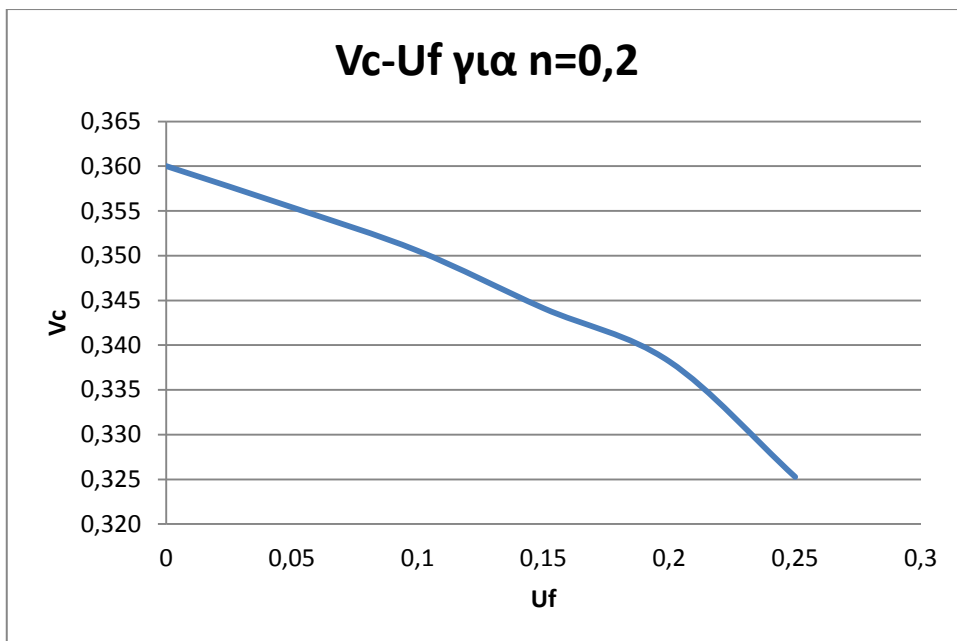
Διάγραμμα 6.7



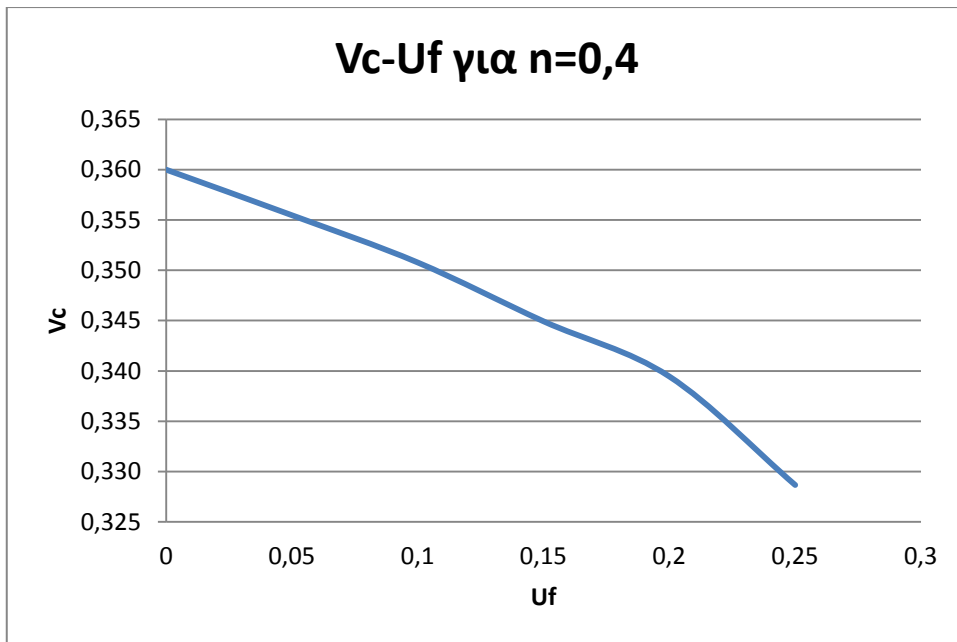
Διάγραμμα 6.8



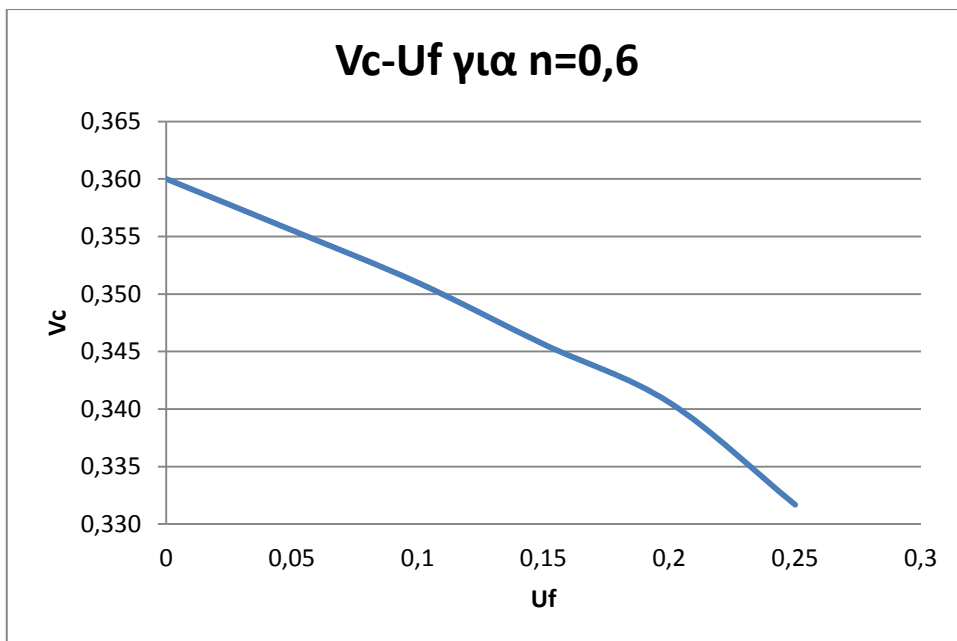
Διάγραμμα 6.9



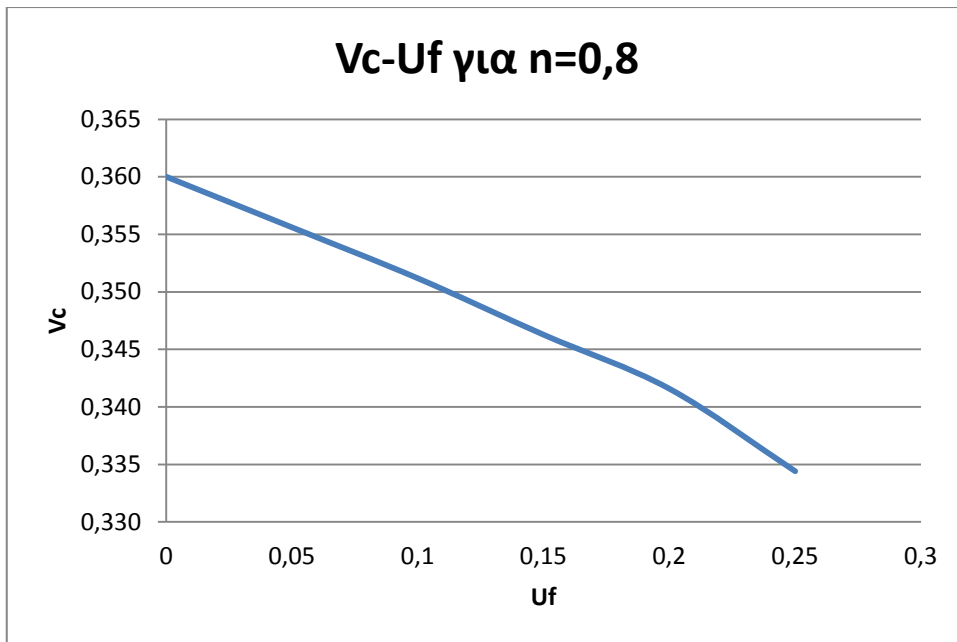
Διάγραμμα 6.10



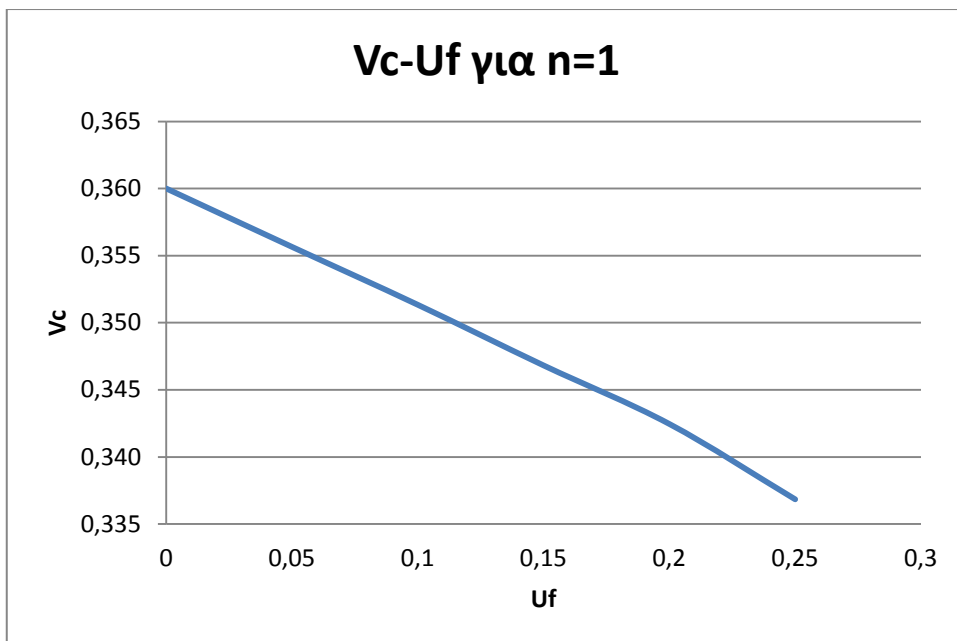
Διάγραμμα 6.11



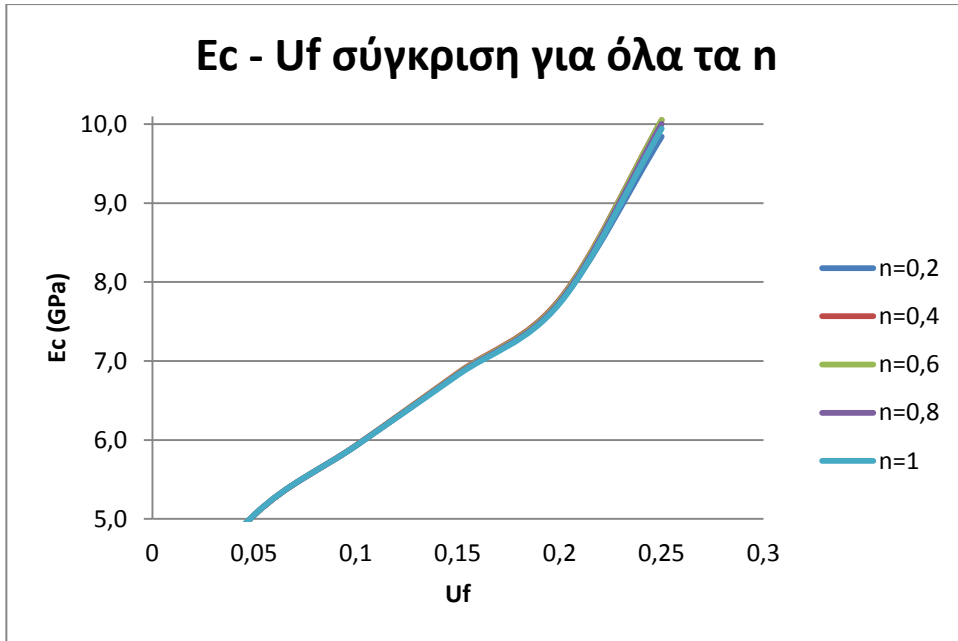
Διάγραμμα 6.12



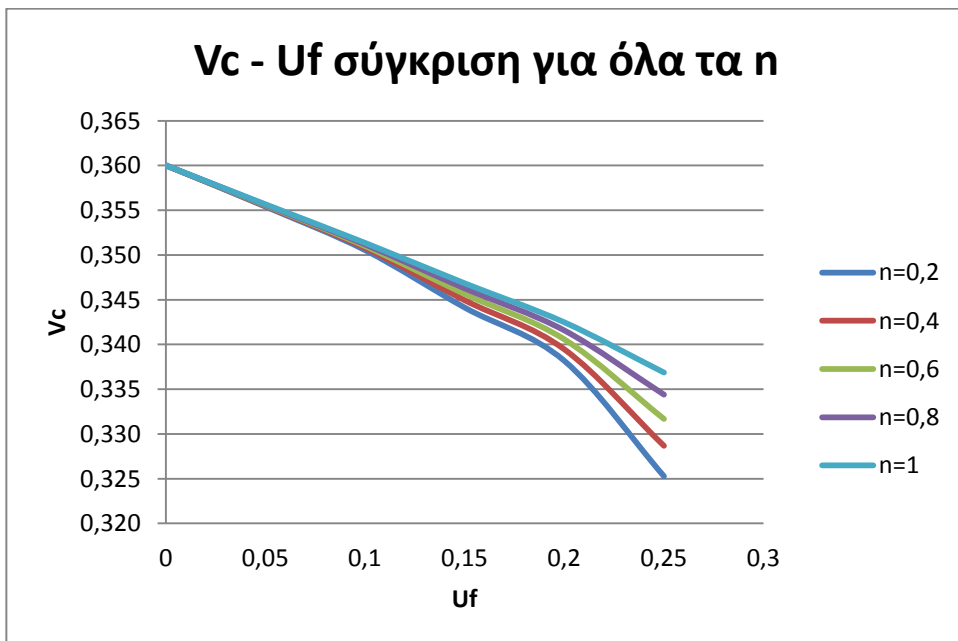
Διάγραμμα 6.13



Διάγραμμα 6.14



Διάγραμμα 6.15



Διάγραμμα 6.16

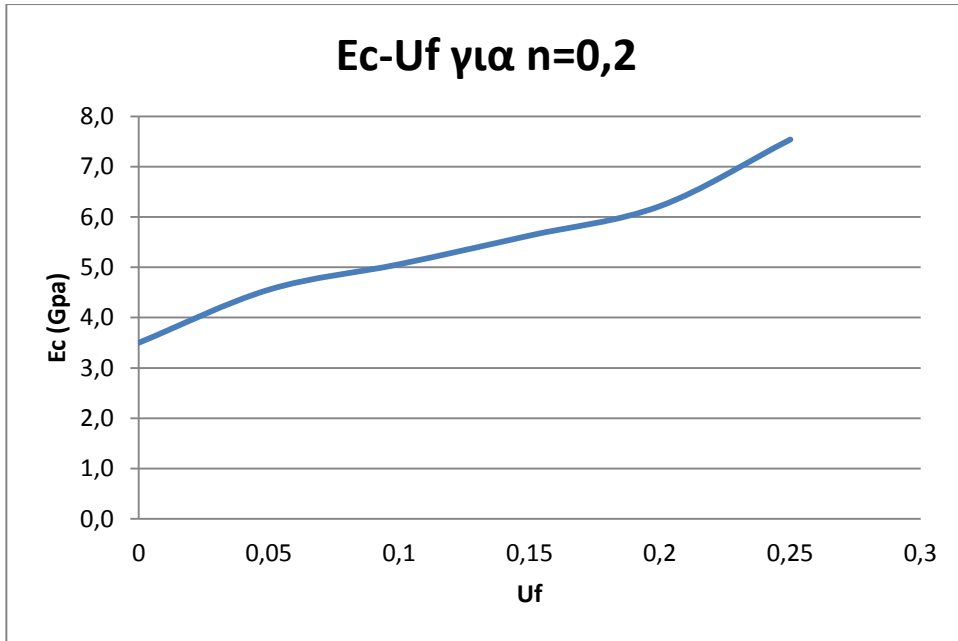
Επταφασικό κυβικό μοντέλο 2

U_f	E_c κυβικού μοντέλου 2 (Gpa)				
	$n=\xi=0,2$	$n=\xi=0,4$	$n=\xi=0,6$	$n=\xi=0,8$	$n=\xi=1$
0,05	4,55604	4,55628	4,55588	4,55548	4,55518
0,10	5,06185	5,06222	5,05970	5,05686	5,05422
0,15	5,63197	5,63638	5,62738	5,61627	5,60536
0,2	6,21709	6,23175	6,21836	6,19974	6,18069
0,25	7,54177	7,64474	7,62371	7,57378	7,51658

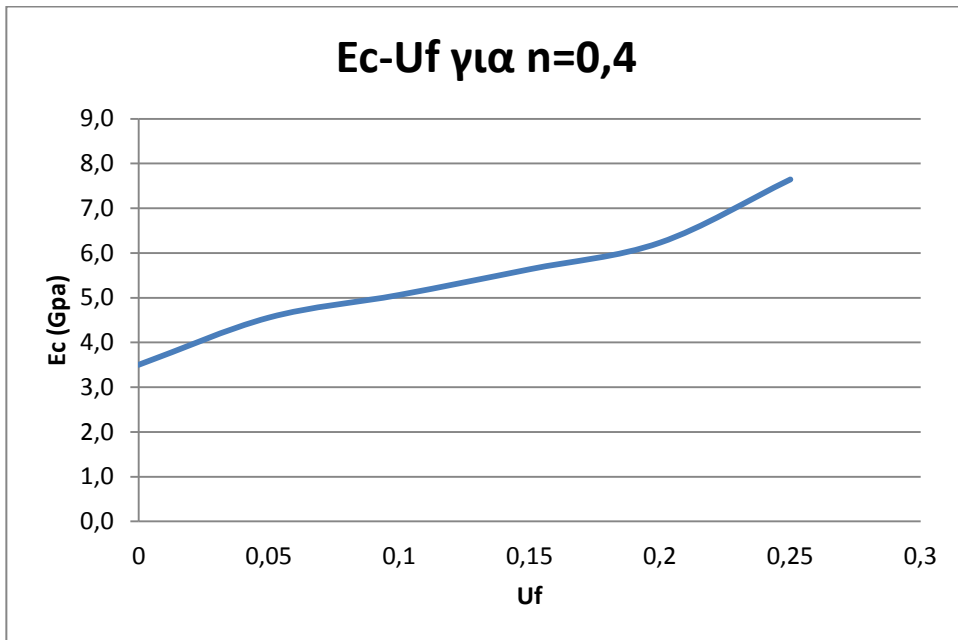
Πίνακας 6.5

U_f	ν_c κυβικού μοντέλου 2				
	$n=\xi=0,2$	$n=\xi=0,4$	$n=\xi=0,6$	$n=\xi=0,8$	$n=\xi=1$
0,05	0,35545	0,35552	0,35557	0,3556	0,35566
0,10	0,35071	0,35091	0,351083	0,3512	0,35137
0,15	0,34471	0,34538	0,34596	0,3465	0,34693
0,2	0,3391	0,34015	0,341081	0,3419	0,34264
0,25	0,32766	0,33049	0,333016	0,3353	0,33731

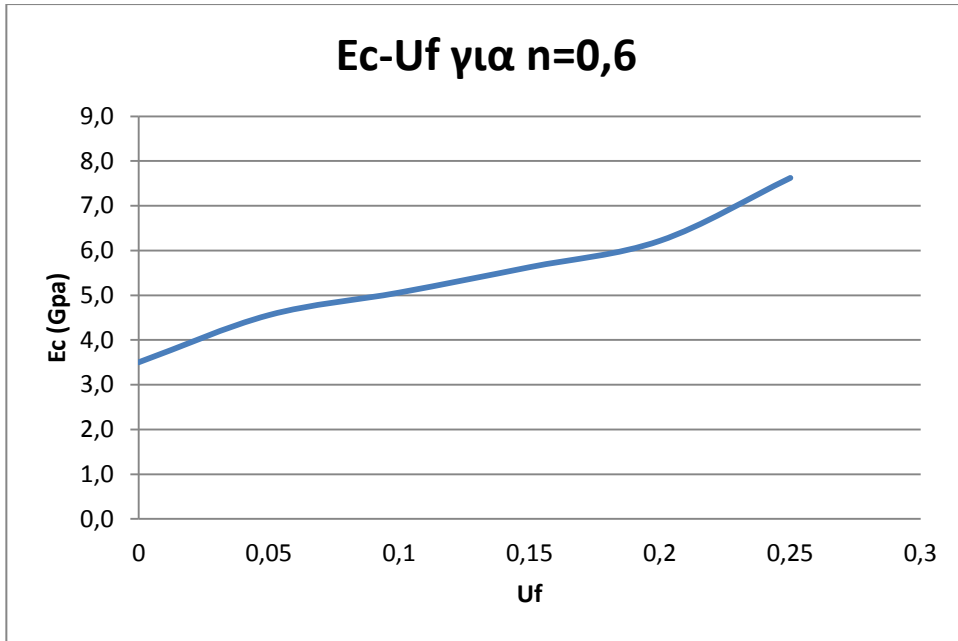
Πίνακας 6.6



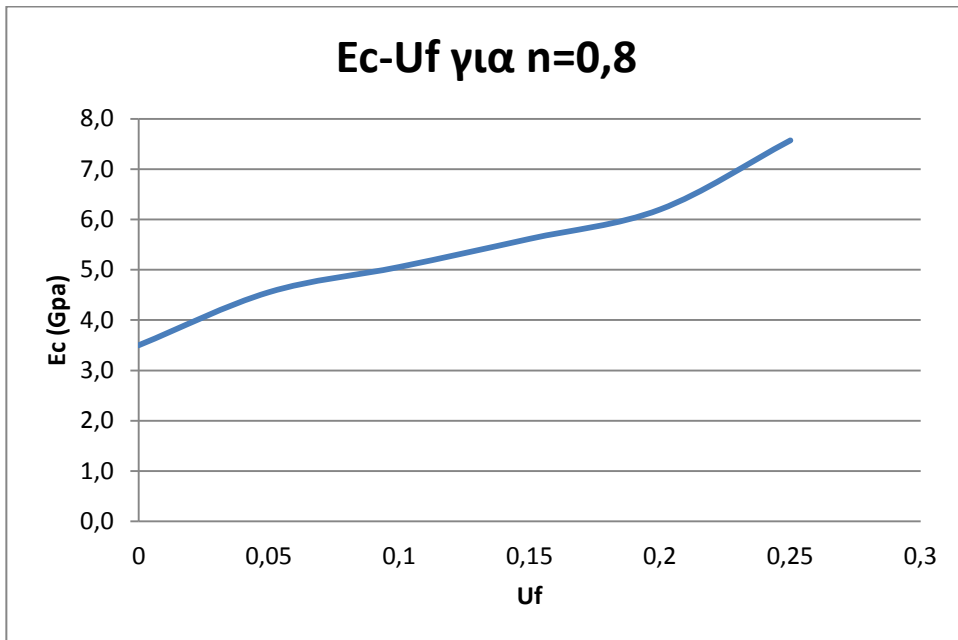
Διάγραμμα 6.17



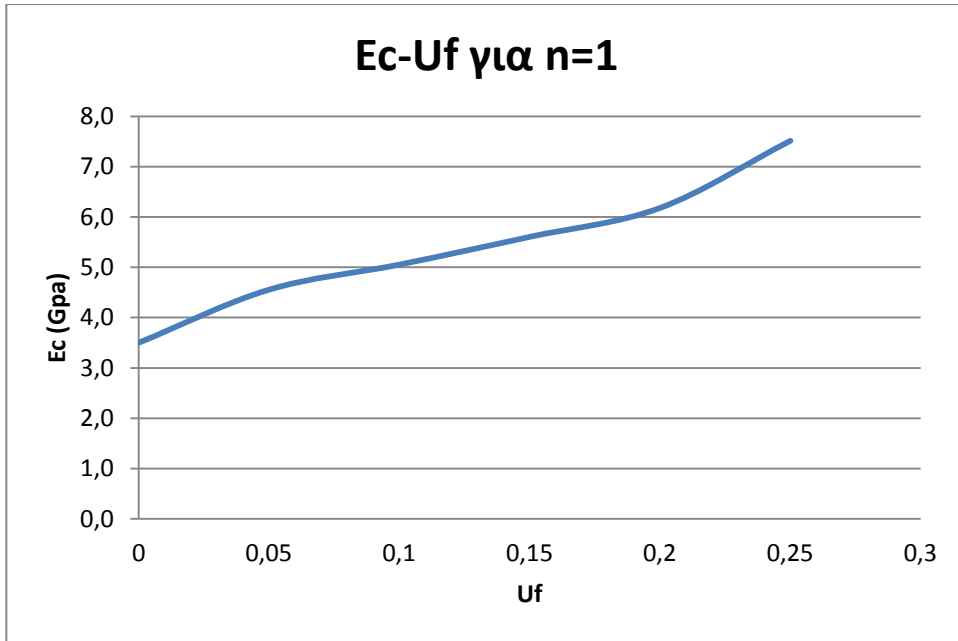
Διάγραμμα 6.18



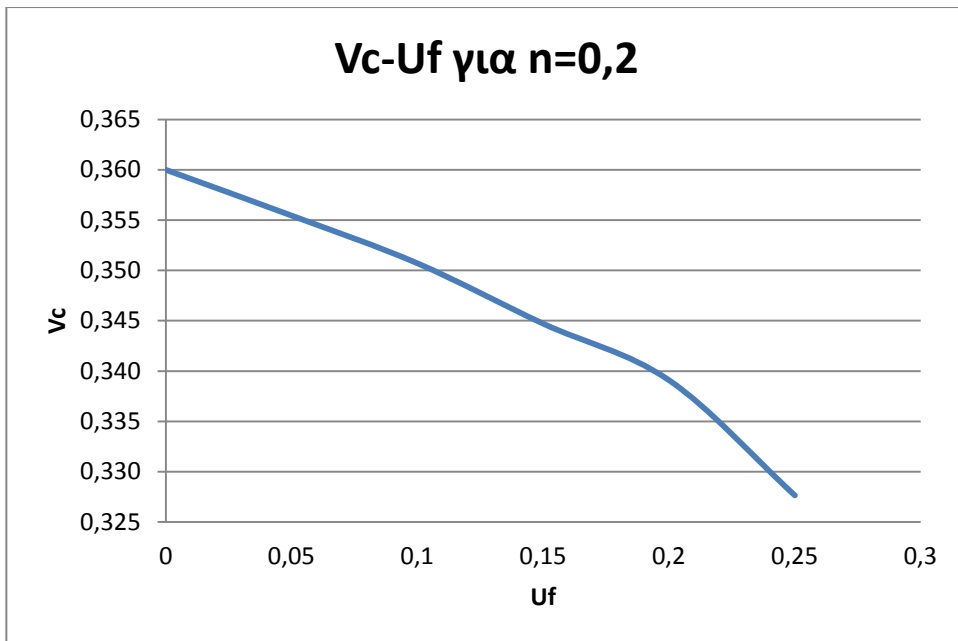
Διάγραμμα 6.19



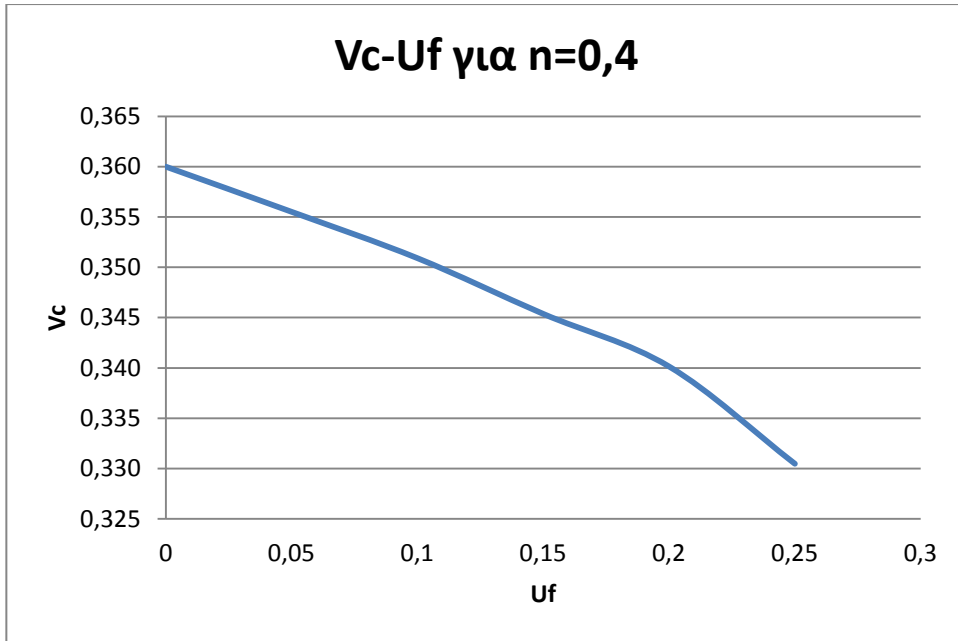
Διάγραμμα 6.20



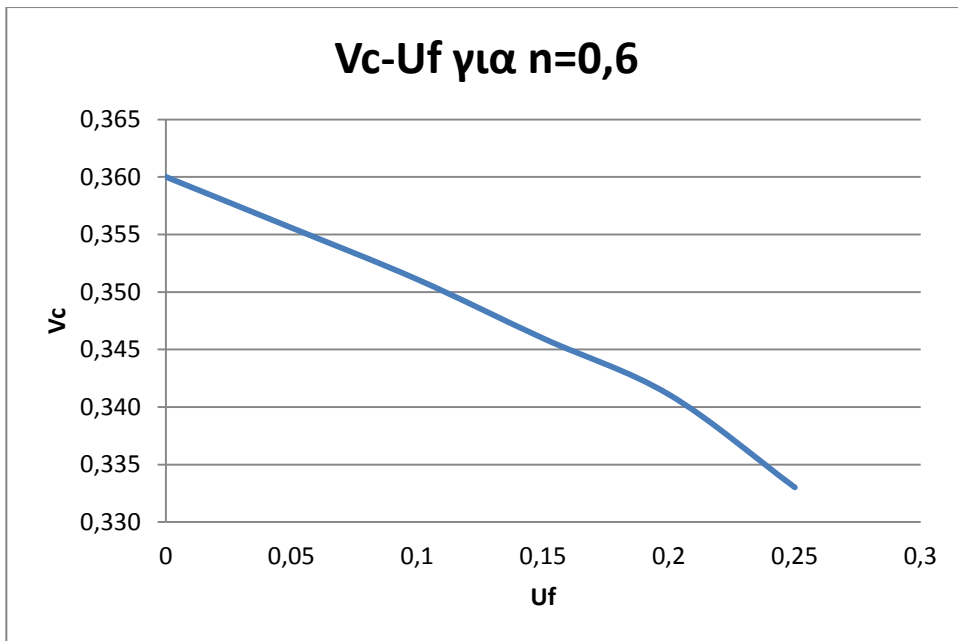
Διάγραμμα 6.21



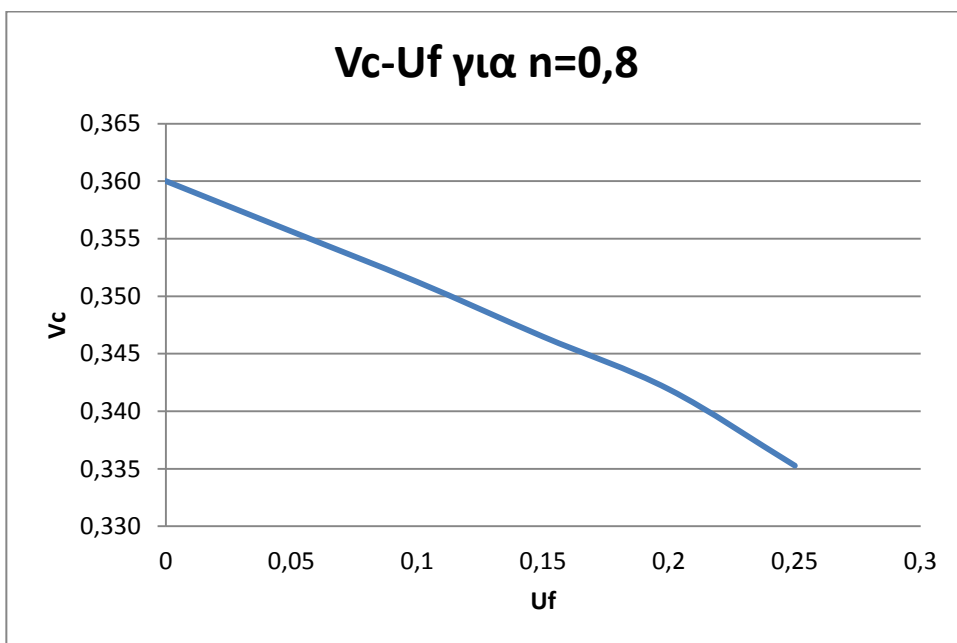
Διάγραμμα 6.22



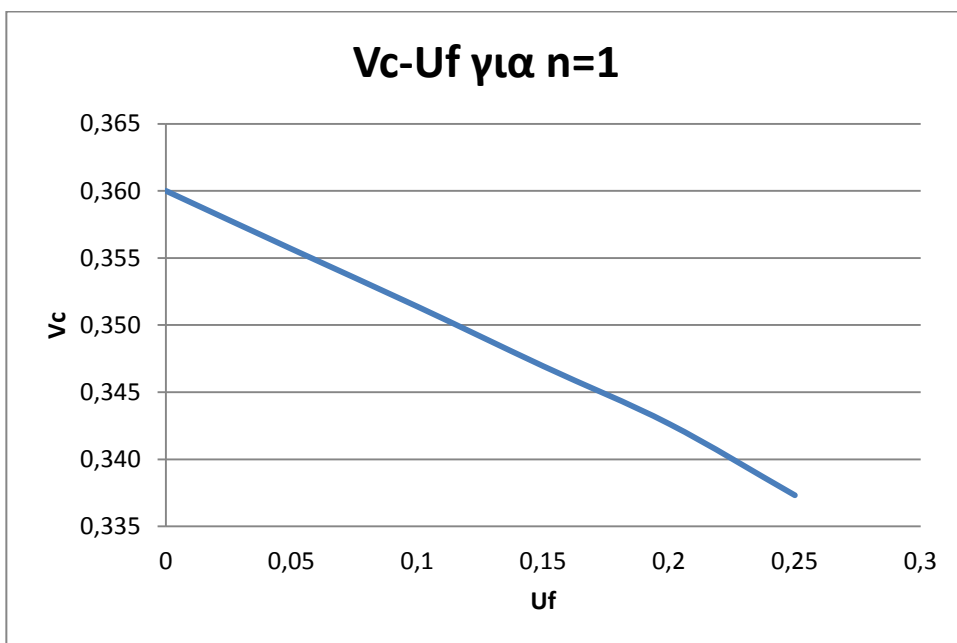
Διάγραμμα 6.23



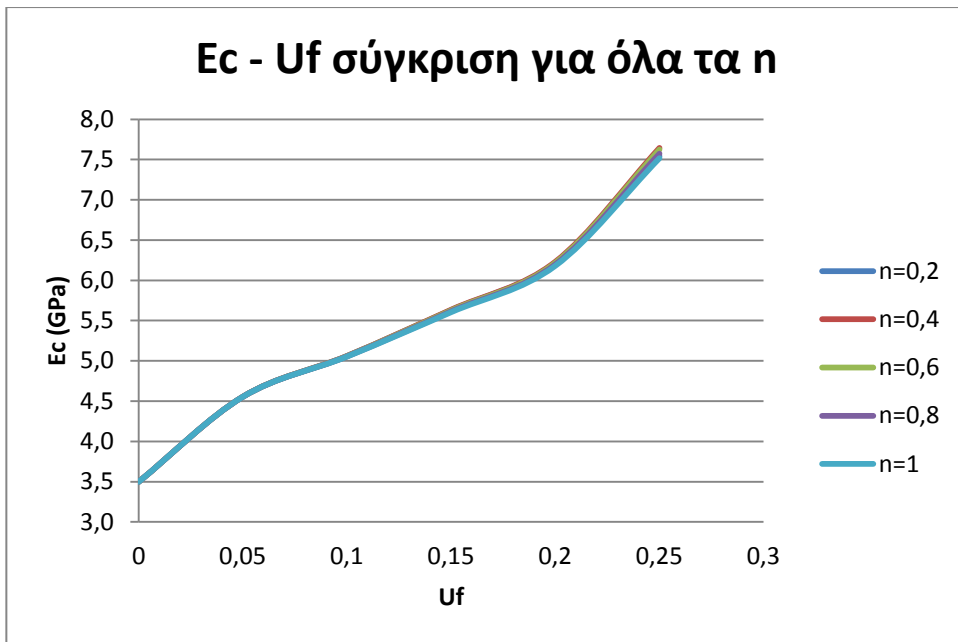
Διάγραμμα 6.24



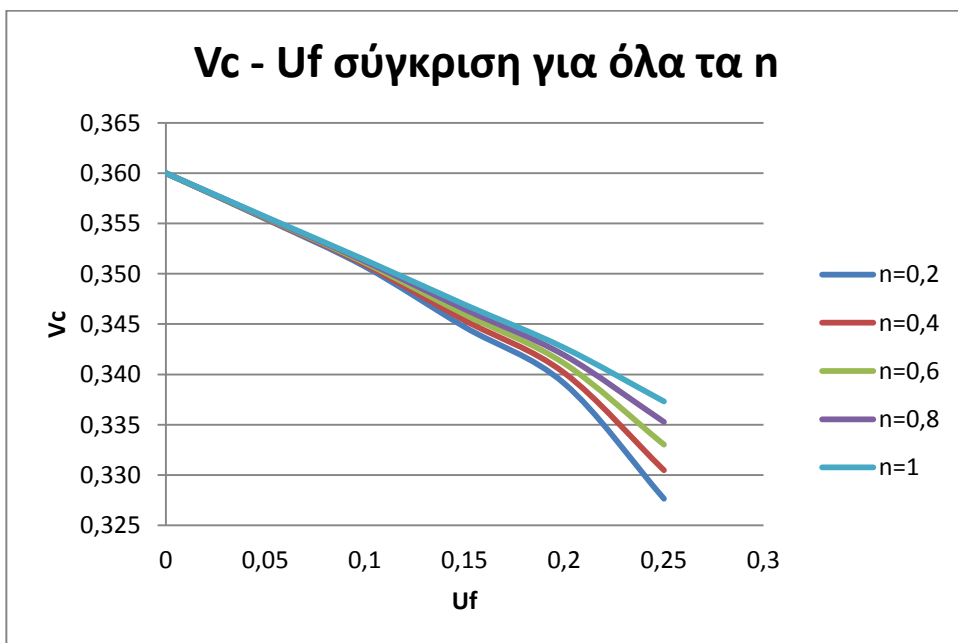
Διάγραμμα 6.25



Διάγραμμα 6.26



Διάγραμμα 6.27



Διάγραμμα 6.28

Τελικά από τα παραπάνω διαγράμματα βλέπουμε κατά πόσο το μέτρο ελαστικότητας και ο λόγος Poisson εξαρτώνται από τον βαθμό επίδρασης της ενδιάμεσου φάσεως.

7. Σύγκριση με άλλα μοντέλα

7.1 Πειραματική διαδικασία- μεθοδολογία

Για να ελέγξουμε το πόσο καλά προσεγγίζουν την πραγματικότητα τα κυβικά επταφασικά μοντέλα μας με ενδιάμεση φάση χρησιμοποιήσαμε πειραματικά δεδομένα από πειράματα τα οποία πραγματοποιήθηκαν στο εργαστήριο Αντοχής Υλικών.

Τα δοκίμια που χρησιμοποιήθηκαν στο πείραμα έχουν ως μήτρα εποξειδική ρητίνη τύπου DGEBA (Dyglycidyl Ether Bisphenol A) με ισοδύναμο 185-192, με μοριακό βάρος μεταξύ 370 και 384 και με ιξώδες 15000P στους 25°C, πολυμεριζόμενα εν ψυχρώ με 8% τριεθυλενική τετραμίνη.

Τα υλικά παρασκευάζονται ως εξής:

Το προ-πολυμερές θερμαίνεται σε θερμοκρασία πάνω από τους 30°C ώστε να μειωθεί το ιξώδες του και στη συνέχεια σε κατάλληλη ποσότητα αυτού προστίθεται κονιοποιημένος σίδηρος με διάμετρο κόκκων 150 μm. Το μίγμα αφού ανακατευτεί πλήρως τοποθετείται σε θάλαμο χαμηλής πίεσης για περίπου 15 λεπτά για απομαγνητισμό.

Στη συνέχεια τοποθετείται σε ορθογώνιο καλούπι από plexiglass, με κατάλληλο όγκο και σχήμα, επενδυμένο με σιλικόνη ώστε να μην κολλήσει.

Έπειτα κλείνεται έτσι ώστε να είναι δυνατό να περιστραφεί, για να αποτραπεί η κατακάθιση των εγκλεισμάτων σιδήρου και να προκύψει όσο το

δυνατό ομοιογενές υλικό. Ο χρόνος τον οποίο χρειάζεται για να «πήξει» το υλικό, για θερμοκρασία 20°C είναι 20-25 λεπτά, χρόνος ο οποίος μειώνεται ελαφρά από την παρουσία εγκλεισμάτων. Μετά την πάροδο των 20-25 λεπτών το ανακάτεμα δεν είναι πλέον απαραίτητο.

Το καλούπι απομακρύνεται 24 ώρες αργότερα και το χυτό υποβάλλεται σε θερμική επεξεργασία που περιλαμβάνει:

- Αύξηση της θερμοκρασίας με ρυθμό 5°C/h, σταθερή διατήρηση στους 100°C
- Τελική μείωση σε θερμοκρασία περιβάλλοντος με ρυθμό 1°C/h.

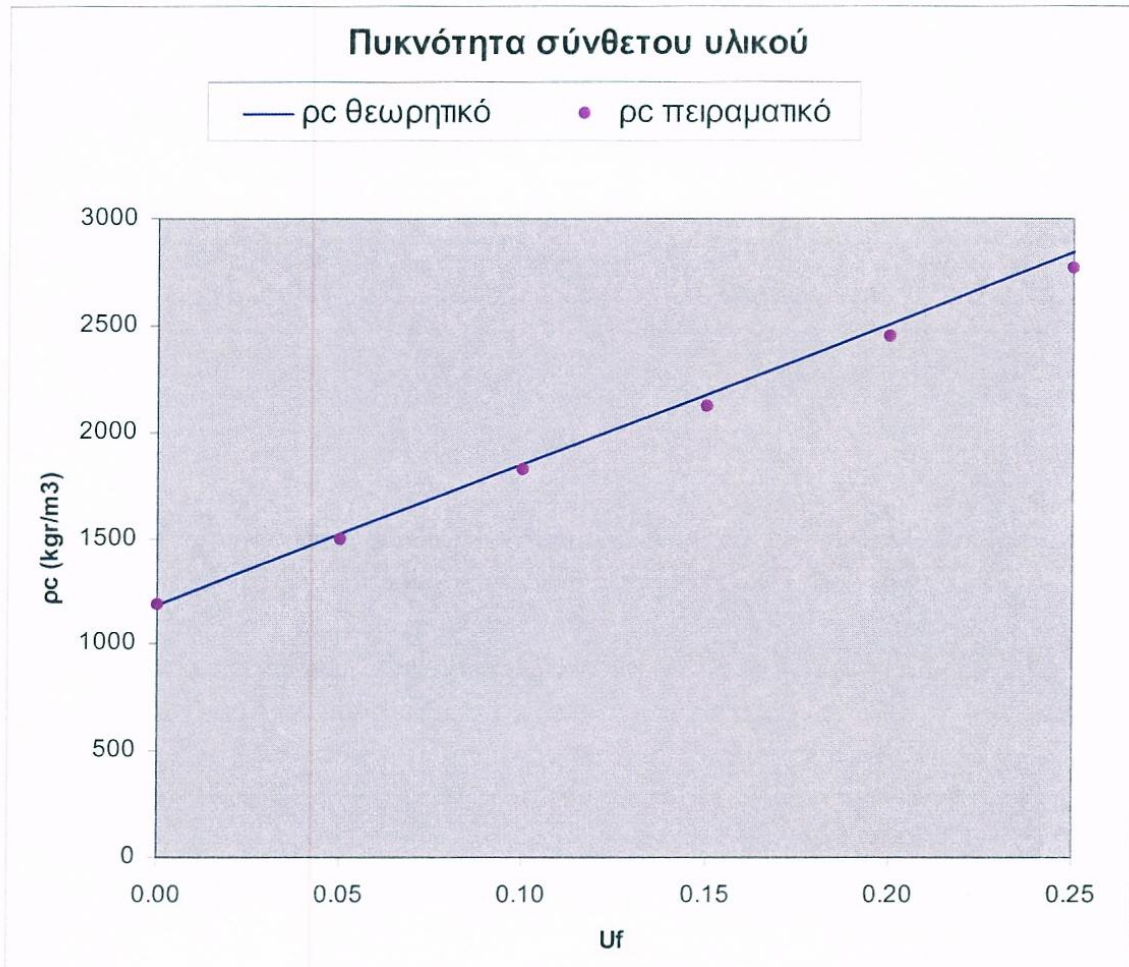
Με αυτό τον τρόπο επιτυγχάνουμε πλήρη πολυμερισμό του υλικού που θα χρησιμοποιηθεί ως μήτρα και επομένως οι ιδιότητες του τελικού προϊόντος είναι οι επιθυμητές.

Στα επεξεργασμένα δοκίμια γίνεται μέτρηση της πυκνότητας και η τιμή αυτή συγκρίνεται με την αντίστοιχη θεωρητική που προκύπτει από τη σχέση:

$$p_c = p_f U_f + p_m U_m$$

Τα αποτελέσματα από αυτή τη μέτρηση φαίνονται στο διάγραμμα που ακολουθεί. Οι πυκνότητες δίδονται σε kg/m^3 :

Uf (%)	0	5	10	15	20	25
ρ_c θεωρητικό	1190	1520,5	1851	2181,5	2512	2842,5
ρ_c πειραματικό	1190	1500	1820	2120	2450	2770

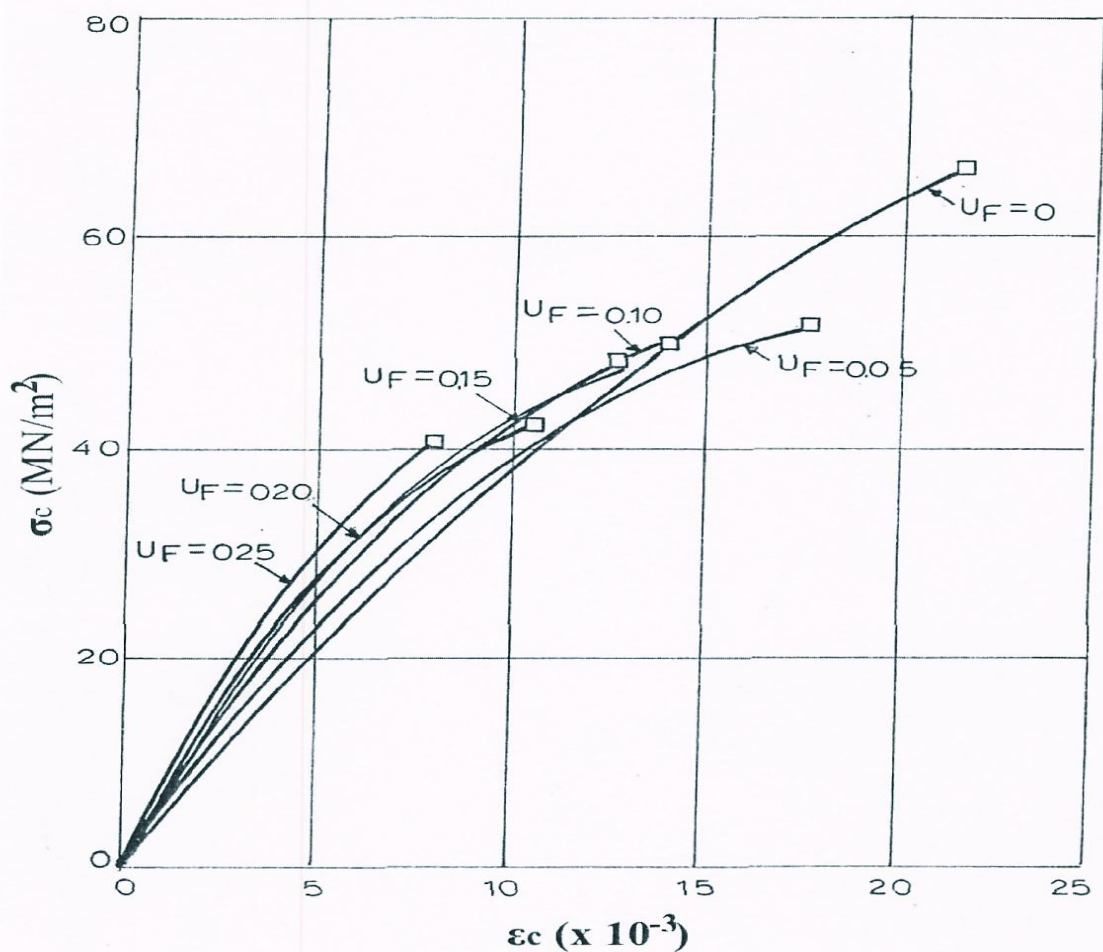


Σχήμα 7.1 Πυκνότητα σύνθετου υλικού συναρτήσει της περιεκτικότητας του σε εγκλείσματα

Παρατηρούμε ότι τα πειραματικά αποτελέσματα έχουν πολύ μικρή απόκλιση από τα θεωρητικά, οπότε το υλικό μπορεί να θεωρηθεί συμπαγές και χωρίς ατέλειες (ασυνέχειες, κενά αέρος κ.λπ.).

Για τον προσδιορισμό των μηχανικών ιδιοτήτων του κοκκώδους σύνθετου υλικού έγιναν πειράματα εφελκυσμού με συσκευή τύπου instron σε θερμοκρασία δωματίου, χρησιμοποιήθηκαν 5 δοκίμια διαστάσεων 45x6x3mm για κάθε περιεκτικότητα. Η ταχύτητα φόρτισης c ήταν 0,1 cm/min.

Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνονται οι καμπύλες τάσεων-παραμορφώσεων για την εποξειδική ρητίνη ενισχυμένη με κόκκους σιδήρου.



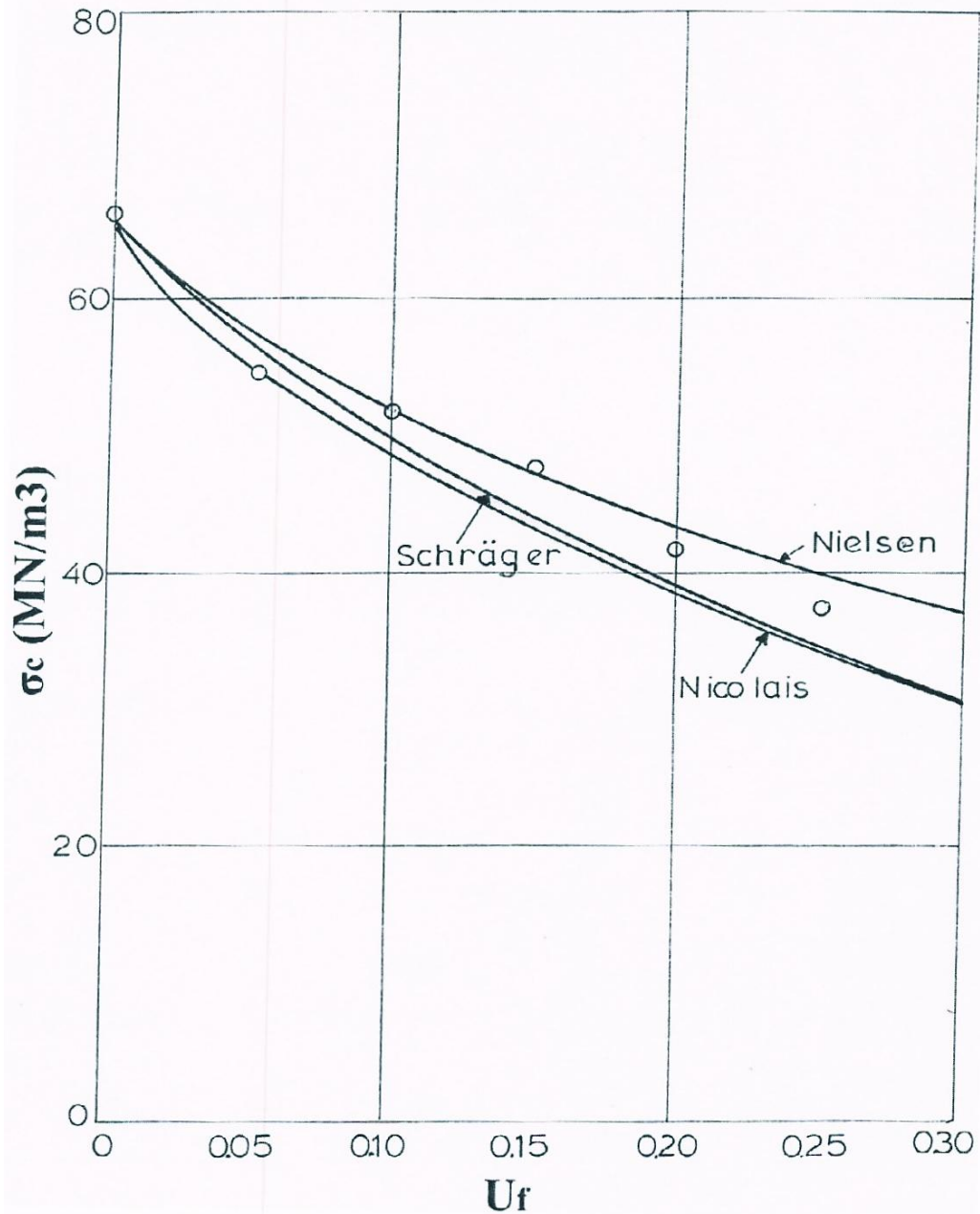
Σχήμα 7.2 Καμπύλες τάσεων – παραμορφώσεων για την εποξειδική ρητίνη ενισχυμένη με κόκκους σιδήρου

Από τις καμπύλες αυτές φαίνεται η επίδραση της κατ' όγκο περιεκτικότητας σε σίδηρο στη μηχανική συμπεριφορά του σύνθετου υλικού. Η μορφή των καμπυλών αυτών δείχνει ότι γενικά τα σύνθετα αυτά υλικά εμφανίζουν μη γραμμικότητα. Επειδή η μήτρα είναι βισκοελαστικό υλικό η μη γραμμική συμπεριφορά η οποία παρατηρείται είναι δυνατό να οφείλεται σε παράγοντες εξαρτώμενους από το χρόνο. Είναι φανερό ότι ελαστική συμπεριφορά παρατηρείται μόνο στο αρχικό τμήμα τάσεων παραμορφώσεων.

Από τις ίδιες καμπύλες φαίνεται ότι καθώς αυξάνει η κατ' όγκο περιεκτικότητα του έγκλεισματος, προκύπτει μια πλέον ελαστική συμπεριφορά. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι το έγκλεισμα είναι καθαρά ελαστικό υλικό και η παρουσία του αποδυναμώνει την βισκοελαστική συμπεριφορά της μήτρας.

Τέλος μετρήθηκε η τάση θραύσης για διάφορες περιεκτικότητες και για ταχύτητα φορτίσεως $c=0,1\text{cm/min}$. Τα αποτελέσματα των μετρήσεων φαίνονται στο διάγραμμα που ακολουθεί.

ΤΑΣΕΙΣ ΘΡΑΥΣΗΣ

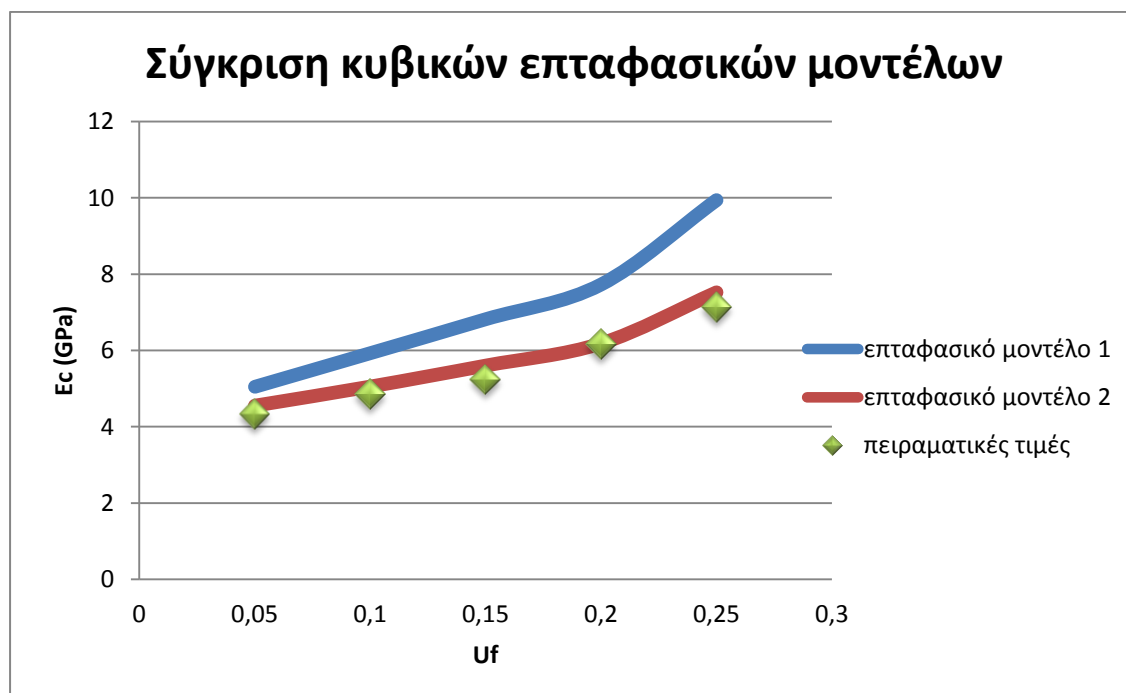


Σχήμα 7.3 Τάση θραύσης σύνθετου υλικού για διάφορες περιεκτικότητες και για ταχύτητα φορτίσεως $c=0,1\text{cm/min}$

Η κάποια διασπορά η οποία εμφανίζεται στα αποτελέσματα βρίσκεται μέσα στα όρια των θεωρητικών καμπυλών των Nielsen, Nicolais και Schragger.

7.2 Σύγκριση με άλλα θεωρητικά μοντέλα

- Υπολογισμός μέτρου ελαστικότητας E_c των κυβικών μοντέλων



Διάγραμμα 7.1

U_f	Πειραματικά	Κυβικό 1	Κυβικό 2
	E_c (Gpa)	E_c (Gpa)	E_c (Gpa)
0,05	4,33	5,05	4,55
0,1	4,86	5,93	5,05
0,15	5,24	6,82	5,60
0,2	6,17	7,73	6,18
0,25	7,14	9,94	7,52

Πίνακας 7.1

Για να δούμε πόσο προσεγγίζουν οι θεωρητικές καμπύλες το κάθε μοντέλο, τα πειραματικά σημεία, εισάγουμε από τη στατιστική ένα δείκτη προσαρμογής που φανερώνει πόσο καλά προσαρμόζεται η θεωρητική καμπύλη στα πειραματικά σημεία.

Ο συντελεστής προσαρμογής δίνεται από τον παρακάτω τύπο :

$$r = 100 \left[1 - \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \hat{y}_i)^2}{\hat{y}_i} \right] \%$$

όπου y η πρόβλεψη του μεγέθους y (για εμάς E_c) στην τιμή x_i (U_f).

Η τιμή του συντελεστή προσαρμογής κυμαίνεται στο διάστημα $[0, 1]$. Μάλιστα όσο πιο πολύ τείνει προς τη μονάδα τόσο πιο καλή προσέγγιση στα πειραματικά μου δεδομένα έχω ενώ όσο τείνει προς το μηδέν, τόσο πιο κακή είναι η θεωρητική μου εκτίμηση.

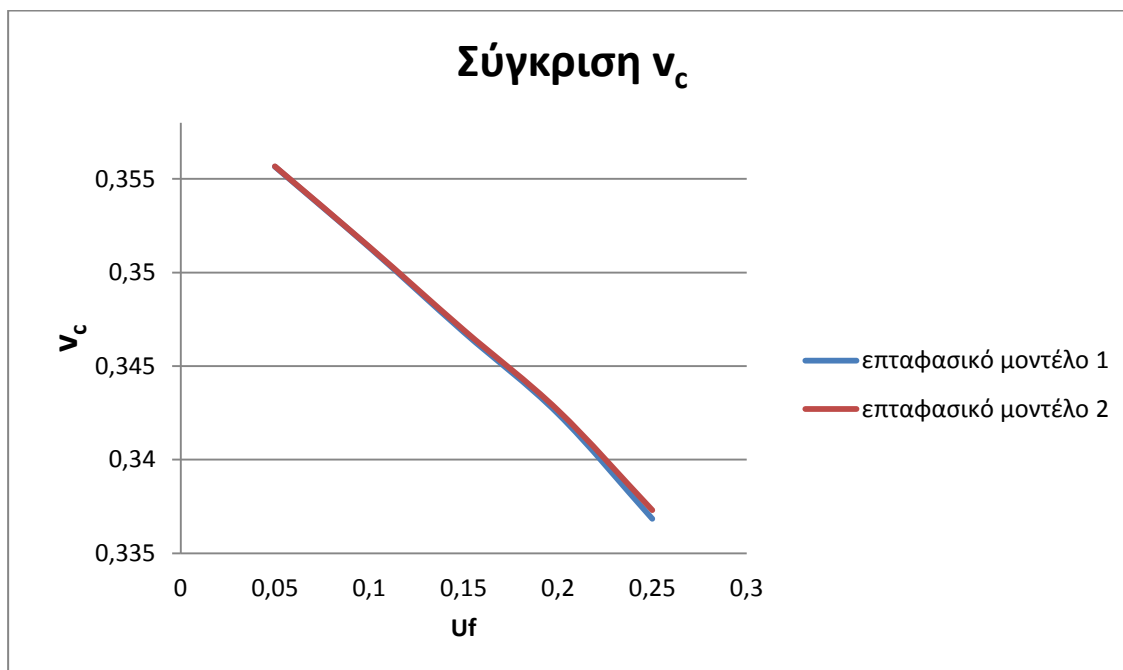
Για τον συντελεστή προσαρμογής των δύο κυβικών μοντέλων 1 και 2 σε σχέση με τις πειραματικές τιμές, προέκυψαν τα παρακάτω αποτελέσματα:

	Συντελεστής Προσαρμογής
r_1	92,45%
r_2	99,65%

Πίνακας 7.2

Συνεπώς όπως είναι φανερό άλλωστε και από το παραπάνω διάγραμμα η προσέγγιση των πειραματικών δεδομένων γίνεται πολύ καλά από το δεύτερο κυβικό μοντέλο με $r_2=99,65\%$. Το πρώτο μοντέλο απέχει σημαντικά από τα πειραματικά δεδομένα όπως φαίνεται και από την τιμή 9,94 για $U_f=0,25$.

- Υπολογισμός λόγου Poisson ν_c των κυβικών μοντέλων



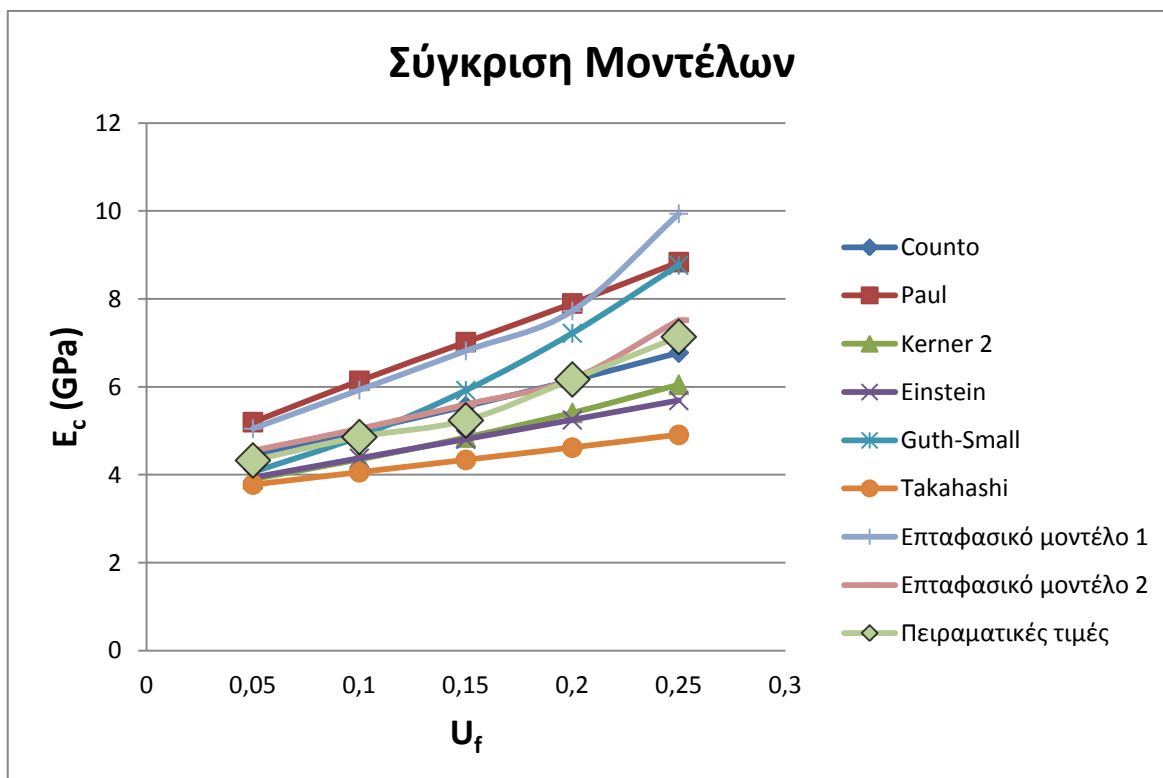
Διάγραμμα 7.2

U_f	Κυβικό 1	Κυβικό 2
	ν_c	ν_c
0,05	0,35565	0,35566
0,1	0,35134	0,35137
0,15	0,34682	0,34693
0,2	0,34246	0,34264
0,25	0,33685	0,33731

Πίνακας 7.3

Για την τιμή του ν_c παρατηρούμε ότι και τα δύο διαγράμματα συμπίπτουν. Αυτό συμβαίνει γιατί το εύρος μεταβολής του ν_c είναι πολύ

μικρό, οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιοδήποτε από τα δύο κυβικά μοντέλα.



Διάγραμμα 7.3

	Counto	Paul	Kerner2	Einstein	Guth-small	Takahashi
U_f	E_c (Gpa)	E_c (Gpa)	E_c (Gpa)	E_c (Gpa)	E_c (Gpa)	E_c (Gpa)
0,01	3,82	4,16	3,58	3,59	3,59	3,56
0,05	4,41	5,20	3,90	3,94	4,06	3,78
0,1	5,00	6,14	4,35	4,38	4,87	4,06
0,15	5,56	7,02	4,85	4,81	5,92	4,34
0,2	6,15	7,90	5,41	5,25	7,22	4,62
0,25	6,78	8,84	6,05	5,69	8,77	4,91
0,3	7,46	9,86	6,77	6,13	10,57	5,19

Πίνακας 7.4

Το διάγραμμα 7.3 αποτελεί τον πυρήνα της παρούσας εργασίας. Είναι η γραφική παράσταση του επταφασικού κυβικού μοντέλου 1 και 2 σε σχέση με διαγράμματα που έχουν προτείνει στο παρελθόν σπουδαίοι επιστήμονες.

Παρατηρούμε ότι όλες οι εκφράσεις δίνουν τιμές για το E_c αυξάνουν αυξανόμενης της περιεκτικότητας του εγκλείσματος.

Επίσης παρατηρούμε ότι κάποια μοντέλα άλλων ερευνητών έχουν μεγάλη απόκλιση από τις πειραματικές μετρήσεις. Τη μεγαλύτερη απόκλιση την παρουσιάζει το μοντέλο του Takahashi και ακολουθείται από το μοντέλο Paul και το μοντέλο του Einstein. Τα μοντέλα Kerner 2 και Guth - Smallwood δίνουν καλύτερα αποτελέσματα όμως το καλύτερο θεωρητικό μοντέλο προκύπτει το μοντέλο Counto για το υλικό μας.

Το μοντέλο μας αποτελεί μια πολύ καλή προσέγγιση της πραγματικότητας του σύνθετου υλικού, δηλαδή ενός σύνθετου υλικού που έχει ως εγκλείσμα κόκκους σιδήρου διαμέτρου $d=150\mu\text{m}$ και μήτρα εποξειδική ρητίνη. Το αποτέλεσμα είναι λίγο χειρότερο από το μοντέλο του Counto, το οποίο αποτέλεσε έως σήμερα ένα από τα καλύτερα μοντέλα για το σύνθετο υλικό που εξετάζουμε.

Αυτό επιβεβαιώνεται και μαθηματικά, εάν υπολογίσουμε την τιμή του r για κάθε ερευνητή, οπότε προκύπτει:

Ερευνητής	r (%)
COUNTO	99,74
ΚΥΒΙΚΟ ΕΠΤΑΦΑΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ 1 ΜΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΦΑΣΗ	92,45
ΚΥΒΙΚΟ ΕΠΤΑΦΑΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ 2 ΜΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΦΑΣΗ	99,65
GUTH-SMALLWOOD	97,41
KERNER 2	97,07
EINSTEIN	95,69
PAUL	92,39
TAKAHASHI	85,88

Πίνακας 7.5

Η απόκλιση των θεωρητικών μας προβλέψεων για το E_c από τα πειραματικά δεδομένα είναι αναμενόμενη κυρίως για τους εξής λόγους:

1. Η κατανομή των εγκλεισμάτων μέσα στη ρητίνη στην πραγματικότητα είναι ανομοιογενής και τυχαία και όχι ομοιογενής όπως έχουμε υποθέσει.
2. Ύπαρξη ατελειών στη μήτρα (φυσαλίδες, ατελείς δεσμοί κλπ)
3. Ύπαρξη ασυνέχειας μεταξύ εγκλείσματος και μήτρα, δηλαδή όχι καλή συνοχή του υλικού.
4. Τα θεωρητικά μοντέλα προβλέπουν τέλεια γεωμετρικά σχήματα (σφαιρικοί κόκκοι) ενώ στην πραγματικότητα η επιφάνεια των εγκλεισμάτων είναι ανώμαλη και τραχεία.

8. Προσεγγιστικός θεωρητικός υπολογισμός του μέτρου ελαστικότητας

8.1 Προσεγγιστικός Υπολογισμός

Εδώ θα προσπαθήσουμε να απλοποιήσουμε το θεωρητικό μας μοντέλο μέσω κάποιων παραδοχών ώστε να έχουμε μια πλέον συμπαγή έκφραση.

Θα θεωρήσουμε ένα επταφασικό μοντέλο το οποίο θα αποτελείται από επτά φάσεις όπως στα προηγούμενα κεφάλαια και μεταξύ των κυρίων φάσεων (μήτρας και εγκλεισμάτων) θα υπάρχει ενδιάμεση φάση.

Η θεωρητική ανάλυση βασίζεται στις ακόλουθες υποθέσεις:

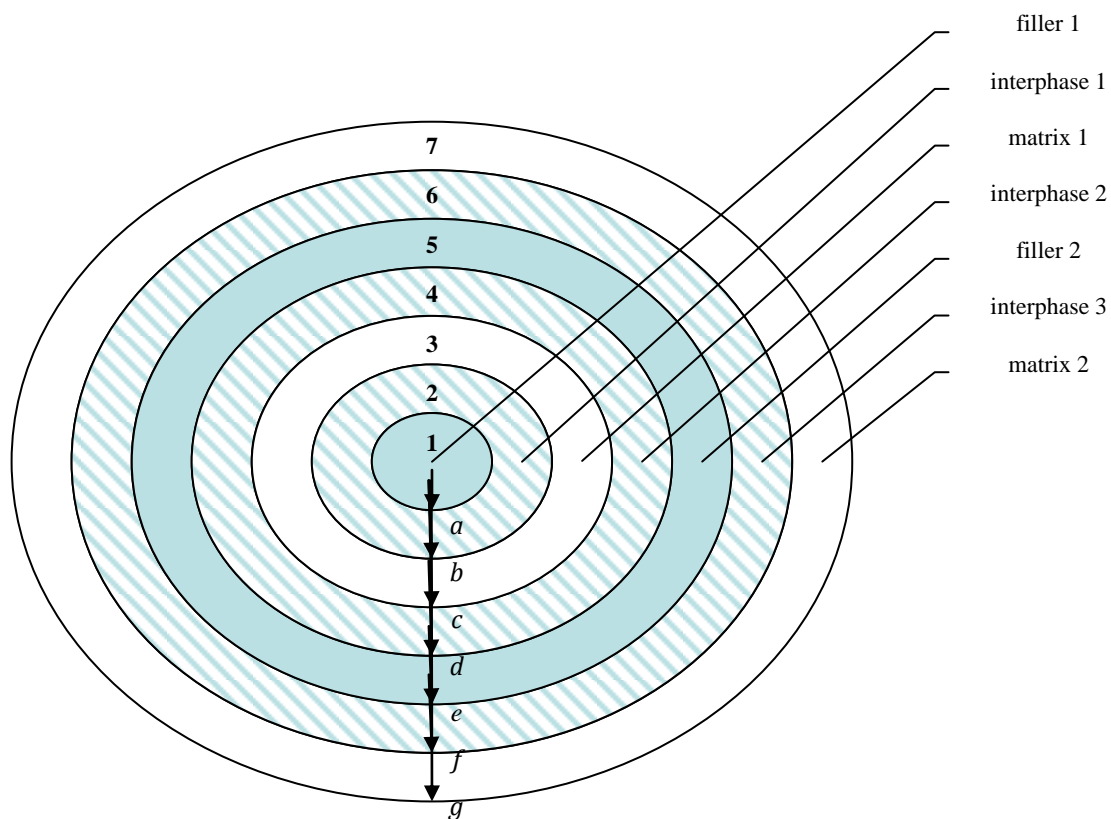
- Τα εγκλείσματα και η μήτρα είναι ελαστικά, ισότροπα και ομοιογενή υλικά, ενώ η ενδιάμεση φάση είναι ανομοιογενής και έχει μεταβλητές ιδιότητες κατά την ακτινική διεύθυνση.
- Τα εγκλείσματα έχουν σχήμα σφαιρικό.
- Ο αριθμός των εγκλεισμάτων είναι μεγάλος και η κατανομή τους ομοιόμορφη, έτσι ώστε το σύνθετο υλικό να δύναται να θεωρηθεί ως μακροσκοπικά ομοιογενές και ισότροπο.
- Οι εφαρμοζόμενες καταπονήσεις στο σύνθετο υλικό είναι αρκετά μικρές έτσι ώστε να διατηρείται η γραμμικότητα στις σχέσεις τάσεων παραμορφώσεων.

8.2 Υπολογισμός ακτίνων του ισοδύναμου επαφασικού προσεγγιστικού μοντέλου

Οι ακτίνες του προσεγγιστικού επαφασικού μοντέλου θα υπολογιστούν με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που υπολογίσαμε τις ακτίνες του ακριβούς επαφασικού μοντέλου στην παράγραφο 5.1.

Υπενθυμίζουμε πως θα μελετήσουμε το σφαιρικό επαφασικό μοντέλο που θα προκύψει αν θεωρήσουμε την ύπαρξη ενδιάμεσου φάσεως ανάμεσα σε κάθε ζευγάρι φάσεων εγκλείσματος – μήτρας.

Η τομή του μοντέλου αυτού φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 8.1 Επαφασικό σφαιρικό μοντέλο (σε τομή)

Συνεπώς, από το κεφάλαιο 5.1 γνωρίζουμε για το επταφασικό μοντέλο πως:

$$E_1 = E_5 = E_f = 210 \text{ GPa} \quad \text{και} \quad E_3 = E_7 = E_m = 3,5 \text{ GPa}$$

$$\text{Επίσης} \quad U_f = U_1 + U_5$$

$$U_i = U_2 + U_4 + U_6$$

$$U_m = U_3 + U_7$$

Για τις κατ' όγκο περιεκτικότητες των φάσεων θα ισχύει:

$$U_1 = \frac{\frac{4}{3}\pi(a^3)}{\frac{4}{3}\pi g^3} = \frac{a^3}{g^3}$$

$$U_2 = \frac{\frac{4}{3}\pi(b^3 - a^3)}{\frac{4}{3}\pi g^3} = \frac{b^3 - a^3}{g^3}$$

$$U_3 = \frac{\frac{4}{3}\pi(c^3 - b^3)}{\frac{4}{3}\pi g^3} = \frac{c^3 - b^3}{g^3}$$

$$U_4 = \frac{\frac{4}{3}\pi(d^3 - c^3)}{\frac{4}{3}\pi g^3} = \frac{d^3 - c^3}{g^3}$$

$$U_5 = \frac{\frac{4}{3}\pi(e^3 - d^3)}{\frac{4}{3}\pi g^3} = \frac{e^3 - d^3}{g^3}$$

$$U_6 = \frac{\frac{4}{3}\pi(f^3 - e^3)}{\frac{4}{3}\pi g^3} = \frac{f^3 - e^3}{g^3}$$

$$U_7 = \frac{\frac{4}{3}\pi(g^3 - f^3)}{\frac{4}{3}\pi g^3} = \frac{g^3 - f^3}{g^3}$$

Οι ακτίνες των φάσεων (βλ. Κεφάλαιο 5.1) δίνονται από τις εξής σχέσεις :

Προσεγγιστικό κυβικό μοντέλο 1:

$$\alpha = r_f, \quad b = \sqrt[3]{\frac{t+2}{2} \frac{a^3 + td^3}{t+1}}, \quad c = \sqrt[3]{\frac{tb^3 + 2d^3}{2+t}}, \quad d = \sqrt[3]{w^3 - 4r_f^3}$$

$$e = \sqrt[3]{2w^3 - d^3}, \quad f = \sqrt[3]{\frac{tg^3 + e^3}{1-t}}, \quad g = r_f \cdot \sqrt[3]{\frac{9}{U_f}}$$

$$\text{με } \lambda = r_f \sqrt[3]{\frac{3\pi}{2U_f}} \quad \text{και} \quad w = \lambda \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Προσεγγιστικό κυβικό μοντέλο 2:

$$a = r_f, \quad b = \sqrt[3]{\frac{t+2}{2} \frac{a^3 + td^3}{t+1}}, \quad c = \sqrt[3]{\frac{tb^3 + 2d^3}{2+t}}, \quad d = \sqrt[3]{w^3 - 6r_f^3}$$

$$e = \sqrt[3]{2w^3 - d^3}, \quad f = \sqrt[3]{\frac{tg^3 + e^3}{1-t}}, \quad g = r_f \cdot \sqrt[3]{\frac{13}{U_f}}$$

$$\text{Με } \lambda = r_f \sqrt[3]{\frac{13\pi}{6U_f}} \quad \text{και} \quad w = \lambda \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Από τον παρακάτω πίνακα, σε κάθε σύσταση U_f αντιστοιχεί μια σύσταση U_i για το σύνολο της ενδιάμεσης φάσης. Έτσι έχουμε τα ζεύγη :

U_f	U_i
0,05	0,0013
0,10	0,004
0,15	0,013
0,20	0,028
0,25	0,05

Πίνακας 8.1

Όποτε χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις για κάθε ζεύγος τιμών (U_f , U_i) υπολογίζονται οι ακτίνες στα όρια της κάθε ενδιάμεσης φάσης καθώς και οι αντίστοιχες τους κατ' όγκο περιεκτικότητες.

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται συνοπτικά τα αποτελέσματα που προέκυψαν σε κάθε περίπτωση σύστασης. Όλες οι ακτίνες είναι σε μm :

Προσεγγιστικό κυβικό μοντέλο 1

U_f	a	b	c	d	e	f	g
0.05	75	75,949513	288,936	289,001	301,8877	302,406	423,47
0.1	75	76,396495	223,746	223,905	244,4103	245,7187	336,11
0.15	75	77,836492	190,113	190,57	217,5483	221,4351	293,62
0.2	75	78,090851	167,679	168,321	201,1916	206,9066	266,77
0.25	75	80,60642	150,011	151,505	189,9407	204,4659	247,64

Πίνακας 8.2

U_f	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	U_7
0.05	0,005555556	0,000213686	0,311882232	0,000213686	0,044444444	0,0018693	0,635821068
0.1	0,011111111	0,000632293	0,283267239	0,000632293	0,088888889	0,0062087	0,609259512
0.15	0,016666667	0,001963413	0,252827221	0,001963413	0,133333333	0,0221939	0,571052017
0.2	0,022222222	0,002862203	0,223251863	0,002862203	0,177777778	0,0376046	0,533419092
0.25	0,027777778	0,006706616	0,187785259	0,006706616	0,222222222	0,1116307	0,437170855

Πίνακας 8.3

Προσεγγιστικό κυβικό μοντέλο 2

U_f	a	b	c	d	e	f	g
0.05	75	75,697062	260,915	260,973	283,7117	284,4628	478,69
0.1	75	75,936351	196,656	196,794	233,2122	235,0535	379,93
0.15	75	76,690558	161,446	161,818	210,2921	215,6104	331,9
0.2	75	76,540878	136,056	136,532	196,675	204,3179	301,55
0.25	75	77,127611	114,29	115,225	187,505	206,3537	279,94

Πίνακας 8.4

U_f	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	U_7
0.05	0,003846154	0,00010824	0,157980565	0,00010824	0,046153846	0,0016579	0,790145095
0.1	0,007692308	0,00029172	0,130690529	0,00029172	0,092307692	0,0055214	0,763204623
0.15	0,011538462	0,000797977	0,102754937	0,000797977	0,138461538	0,0197895	0,725859592
0.2	0,015384615	0,000967848	0,075492119	0,000967848	0,184615385	0,0336165	0,688955664
0.25	0,019230769	0,001683491	0,047137755	0,001683491	0,230769231	0,1000388	0,599456436

Πίνακας 8.5

8.3 Προσεγγιστικός Υπολογισμός Μέτρου ελαστικότητας του σύνθετου υλικού

Για την εύρεση των σχέσεων οι οποίες θα δώσουν την θεωρητική έκφραση για το μέτρο ελαστικότητας του σύνθετου υλικού, θα εφαρμοστεί, όπως και πριν, η θεωρία ελαστικότητας στο αντιπροσωπευτικό στοιχείο όγκου των ομόκεντρων σφαιρών, το οποίο θεωρείται ότι έχει κατά μέσο όρο τις ιδιότητες του κοκκώδους σύνθετου υλικού.

Ας θεωρήσουμε λοιπόν ότι εφαρμόζεται μια εξωτερική πίεση P_0 . Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας του εφαρμοζομένου εξωτερικού φορτίου, οι τάσεις και οι παραμορφώσεις είναι συναρτήσεις μόνο της ακτίνας r , μη εξαρτώμενες από τις γωνίες θ και φ .

Η λύση του προβλήματος δίνεται από την τασική συνάρτηση:

$$\Phi_1 = A / r + Br^2$$

$$\Phi_2 = C / r + Dr^2$$

$$\Phi_3 = F / r + Hr^2$$

$$\Phi_4 = J / r + Lr^2$$

$$\Phi_5 = M / r + Nr^2$$

$$\Phi_6 = P / r + Qr^2$$

$$\Phi_7 = R / r + Sr^2$$

Στη θέση $r=0$ πρέπει η τασική συνάρτηση να παίρνει τιμή, οπότε για $r=0$ πρέπει $A=0$.

Εξαιτίας όμως της σφαιρικής συμμετρίας οι μετατοπίσεις κατά τις διευθύνσεις φ και θ είναι μηδενικές:

$$u_\varphi = u_\theta = 0$$

Οι ακτινικές μετατοπίσεις είναι:

$$u_{r_1} = \frac{Br}{G_1}$$

$$u_{r_2} = \frac{-\frac{C}{r^2} + 2Dr}{2G_2}$$

$$u_{r_3} = \frac{-\frac{F}{r^2} + 2Hr}{2G_3}$$

$$u_{r_4} = \frac{-\frac{J}{r^2} + 2Lr}{2G_4}$$

$$u_{r_5} = \frac{-\frac{M}{r^2} + 2Nr}{2G_5}$$

$$u_{r_6} = \frac{-\frac{P}{r^2} + 2Qr}{2G_6}$$

$$u_{r_7} = \frac{-\frac{R}{r^2} + 2Sr}{2G_7}$$

Οι παραμορφώσεις δίνονται:

$$\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{\theta1} = \varepsilon_{\varphi1} \frac{2B(1+\nu_1)}{E_1}$$

$$\varepsilon_{r2} = \left(\frac{2C}{r^3} + 2D \right) \left(\frac{1+\nu_2}{E_2} \right)$$

$$\varepsilon_{\theta2} = \varepsilon_{\varphi2} = \left(-\frac{C}{r^3} + 2D \right) \left(\frac{1+\nu_2}{E_2} \right)$$

$$\varepsilon_{r3} = \left(\frac{2F}{r^3} + 2H \right) \left(\frac{1+\nu_3}{E_3} \right)$$

$$\varepsilon_{\theta3} = \varepsilon_{\varphi3} = \left(-\frac{F}{r^3} + 2H \right) \left(\frac{1+\nu_3}{E_3} \right)$$

$$\varepsilon_{r4} = \left(\frac{2J}{r^3} + 2L \right) \left(\frac{1+\nu_4}{E_4} \right)$$

$$\varepsilon_{\theta4} = \varepsilon_{\varphi4} = \left(-\frac{J}{r^3} + 2L \right) \left(\frac{1+\nu_4}{E_4} \right)$$

$$\varepsilon_{r5} = \left(\frac{2M}{r^3} + 2N \right) \left(\frac{1+\nu_5}{E_5} \right)$$

$$\varepsilon_{\theta5} = \varepsilon_{\varphi5} = \left(-\frac{M}{r^3} + 2N \right) \left(\frac{1+\nu_5}{E_5} \right)$$

$$\varepsilon_{r6} = \left(\frac{2P}{r^3} + 2Q \right) \left(\frac{1+\nu_6}{E_6} \right)$$

$$\varepsilon_{\theta6} = \varepsilon_{\varphi6} = \left(-\frac{P}{r^3} + 2Q \right) \left(\frac{1+\nu_6}{E_6} \right)$$

$$\varepsilon_{r7} = \left(\frac{2R}{r^3} + 2S \right) \left(\frac{1+\nu_7}{E_7} \right)$$

$$\varepsilon_{\theta 7} = \varepsilon_{\varphi 7} = \left(-\frac{R}{r^3} + 2S \right) \left(\frac{1 + \nu_7}{E_7} \right)$$

Οι τάσεις είναι:

$$\sigma_{r1} = \frac{2B(1 + \nu_1)}{1 - 2\nu_1}$$

$$\sigma_{r2} = \frac{2C}{r^3} + \frac{2D(1 + \nu_2)}{1 - 2\nu_2}$$

$$\sigma_{\theta 2} = -\frac{C}{r^3} + 2D \frac{(1 + \nu_2)}{1 - 2\nu_2} = \sigma_{\varphi 2}$$

$$\sigma_{r3} = \frac{2F}{r^3} + \frac{2H(1 + \nu_3)}{1 - 2\nu_3}$$

$$\sigma_{\theta 3} = \frac{-F}{r^3} + \frac{2H(1 + \nu_3)}{1 - 2\nu_3} = \sigma_{\varphi 3}$$

$$\sigma_{r4} = \frac{2J}{r^3} + \frac{2L(1 + \nu_4)}{1 - 2\nu_4}$$

$$\sigma_{\theta 4} = \frac{-J}{r^3} + \frac{2L(1 + \nu_4)}{1 - 2\nu_4} = \sigma_{\varphi 4}$$

$$\sigma_{r5} = \frac{2M}{r^3} + \frac{2N(1 + \nu_5)}{1 - 2\nu_5}$$

$$\sigma_{\theta 5} = \frac{-M}{r^3} + \frac{2N(1 + \nu_5)}{1 - 2\nu_5} = \sigma_{\varphi 5}$$

$$\sigma_{r6} = \frac{2P}{r^3} + \frac{2Q(1 + \nu_6)}{1 - 2\nu_6}$$

$$\sigma_{\theta 6} = \frac{-P}{r^3} + \frac{2Q(1+\nu_6)}{1-2\nu_6} = \sigma_{\varphi 6}$$

$$\sigma_{r 7} = \frac{2R}{r^3} + \frac{2S(1+\nu_7)}{1-2\nu_7}$$

$$\sigma_{\theta 7} = \frac{-R}{r^3} + \frac{2S(1+\nu_7)}{1-2\nu_7} = \sigma_{\varphi 7}$$

Θεωρώ τώρα ότι για:

$$r = r_{f1} = a \Rightarrow E_{i1} = nE_f, \nu_{i1} = \nu_f$$

$$r = r_{i1} = b \Rightarrow E_{i1} = E_m, \nu_{i1} = \nu_m$$

$$r = r_{m1} = c \Rightarrow E_{i2} = E_m, \nu_{i2} = \nu_m$$

$$r = r_{i2} = d \Rightarrow E_{i2} = nE_f, \nu_{i2} = \nu_f$$

$$r = r_{f2} = e \Rightarrow E_{i3} = nE_f, \nu_{i3} = \nu_f$$

$$r = r_{i3} = f \Rightarrow E_{i3} = E_m, \nu_{i3} = \nu_m$$

Συνοριακές συνθήκες

Για $r = a$: $\sigma_{r,1} = \sigma_{r,2}$ και $u_{r,1} = u_{r,2}$:

$$\frac{2B(1+\nu_1)}{1-2\nu_1} = \frac{2C}{r^3} + \frac{2D(1+\nu_2)}{1-2\nu_2} \Rightarrow \frac{2B(1+\nu_f)}{1-2\nu_f} = \frac{2C}{r^3} + \frac{2D(1+\nu_f)}{1-2\nu_f}$$

$$\frac{Br2(1+\nu_1)}{E_1} = \left(-\frac{C}{r^2} + 2Dr \right) \frac{(1+\nu_2)}{E_2} \Rightarrow \frac{Ba2(1+\nu_f)}{\eta E_f} = \left(-\frac{C}{a^2} + 2Da \right) \frac{(1+\nu_f)}{\eta E_f}$$

Για $r = b$: $\sigma_{r,2} = \sigma_{r,3}$ και $u_{r,2} = u_{r,3}$

$$\frac{2C}{r^3} + \frac{2D(1+v_2)}{1-2v_2} = \frac{2F}{r^3} + \frac{2H(1+v_3)}{1-2v_3} \Rightarrow \frac{2C}{b^3} + \frac{2D(1+v_m)}{1-2v_m} = \frac{2F}{b^3} + \frac{2H(1+v_m)}{1-2v_m}$$

$$\left(-\frac{C}{r^2} + 2Dr\right) \frac{(1+v_2)}{E_2} = \left(-\frac{F}{r^2} + 2Hr\right) \frac{(1+v_3)}{E_3} \Rightarrow \left(-\frac{C}{b^2} + 2Db\right) \frac{(1+v_m)}{E_m} = \left(-\frac{F}{b^2} + 2Hb\right) \frac{(1+v_m)}{E_m}$$

Για $r = c$: $\sigma_{r,3} = \sigma_{r,4}$ και $u_{r,3} = u_{r,4}$

$$\frac{2F}{r^3} + \frac{2H(1+v_3)}{1-2v_3} = \frac{2J}{r^3} + \frac{2L(1+v_4)}{1-2v_4} \Rightarrow \frac{2F}{c^3} + \frac{2H(1+v_m)}{1-2v_m} = \frac{2J}{c^3} + \frac{2L(1+v_m)}{1-2v_m}$$

$$\left(-\frac{F}{r^2} + 2Hr\right) \frac{(1+v_3)}{E_3} = \left(-\frac{J}{r^2} + 2Lr\right) \frac{(1+v_4)}{E_4} \Rightarrow \left(-\frac{F}{c^2} + 2Hc\right) \frac{(1+v_m)}{E_m} = \left(-\frac{J}{c^2} + 2Lc\right) \frac{(1+v_m)}{E_m}$$

Για $r = d$: $\sigma_{r,4} = \sigma_{r,5}$ και $u_{r,4} = u_{r,5}$

$$\frac{2J}{r^3} + \frac{2L(1+v_4)}{1-2v_4} = \frac{2M}{r^3} + \frac{2N(1+v_5)}{1-2v_5} \Rightarrow \frac{2J}{d^3} + \frac{2L(1+v_f)}{1-2v_f} = \frac{2M}{d^3} + \frac{2N(1+v_f)}{1-2v_f}$$

$$\left(-\frac{J}{r^2} + 2Lr\right) \frac{(1+v_4)}{E_4} = \left(-\frac{M}{r^2} + 2Nr\right) \frac{(1+v_5)}{E_5} \Rightarrow \left(-\frac{J}{d^2} + 2Ld\right) \frac{(1+v_f)}{\eta E_f} = \left(-\frac{M}{d^2} + 2Nd\right) \frac{(1+v_f)}{E_f}$$

Για $r = e$: $\sigma_{r,5} = \sigma_{r,6}$ και $u_{r,5} = u_{r,6}$

$$\frac{2M}{r^3} + \frac{2N(1+v_5)}{1-2v_5} = \frac{2P}{r^3} + \frac{2Q(1+v_6)}{1-2v_6} \Rightarrow \frac{2M}{e^3} + \frac{2N(1+v_f)}{1-2v_f} = \frac{2P}{e^3} + \frac{2Q(1+v_f)}{1-2v_f}$$

$$\left(-\frac{M}{r^2} + 2Nr\right) \frac{(1+v_5)}{E_5} = \left(-\frac{P}{r^2} + 2Qr\right) \frac{(1+v_6)}{E_6} \Rightarrow \left(-\frac{L}{e^2} + 2Me\right) \frac{(1+v_f)}{E_f} = \left(-\frac{P}{e^2} + 2Qe\right) \frac{(1+v_f)}{\eta E_f}$$

Για $r = f$: $\sigma_{r,6} = \sigma_{r,7}$ και $u_{r,6} = u_{r,7}$

$$\frac{2P}{r^3} + \frac{2Q(1+\nu_6)}{1-2\nu_6} = \frac{2R}{r^3} + \frac{2S(1+\nu_7)}{1-2\nu_7} \Rightarrow \frac{2P}{f^3} + \frac{2Q(1+\nu_m)}{1-2\nu_m} = \frac{2R}{f^3} + \frac{2S(1+\nu_m)}{1-2\nu_m}$$

$$\left(-\frac{P}{r^2} + 2Qr\right) \frac{(1+\nu_6)}{E_6} = \left(-\frac{R}{r^2} + 2Sr\right) \frac{(1+\nu_7)}{E_7} \Rightarrow \left(-\frac{P}{f^2} + 2Qf\right) \frac{(1+\nu_m)}{E_m} = \left(-\frac{R}{f^2} + 2Sf\right) \frac{(1+\nu_m)}{E_m}$$

Για $r = g$: $\sigma_{r7} = -P_0$

$$\frac{2R}{g^3} + \frac{2S(1+\nu_m)}{1-2\nu_m} = -P_0$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει το εξής σύστημα 13 εξισώσεων:

$$B = C \left(\frac{1-2\nu_f}{1+\nu_f} \right) + D \quad \boxed{8.1}$$

$$B = -\frac{C}{2\eta a^3} + \frac{D}{\eta} \quad \boxed{8.2}$$

$$\frac{C}{b^3} + \frac{D(1+\nu_m)}{(1-2\nu_m)} = \frac{F}{b^3} + \frac{H(1+\nu_m)}{(1-2\nu_m)} \quad \boxed{8.3}$$

$$-\frac{C}{b^2} + 2Db = -\frac{F}{b^2} + 2Hb \quad \boxed{8.4}$$

$$\frac{F}{c^3} + \frac{H(1+\nu_m)}{(1-2\nu_m)} = \frac{J}{c^3} + \frac{L(1+\nu_m)}{(1-2\nu_m)} \quad \boxed{8.5}$$

$$-\frac{F}{c^2} + 2Hc = -\frac{J}{c^2} + 2Lc \quad \boxed{8.6}$$

$$\frac{J}{d^3} + \frac{L(1+\nu_f)}{(1-2\nu_f)} = \frac{M}{d^3} + \frac{N(1+\nu_f)}{(1-2\nu_f)} \quad \boxed{8.7}$$

$$-\frac{J}{\eta d^2} + \frac{2Ld}{\eta} = -\frac{M}{d^2} + 2Nd \quad \boxed{8.8}$$

$$\frac{M}{e^3} + \frac{N(1+v_f)}{(1-2v_f)} = \frac{P}{e^3} + \frac{Q(1+v_f)}{(1-2v_f)} \quad \boxed{8.9}$$

$$-\frac{M}{e^2} + 2Ne = -\frac{P}{\eta e^2} + \frac{2Qe}{\eta} \quad \boxed{8.10}$$

$$\frac{P}{f^3} + \frac{Q(1+v_m)}{(1-2v_m)} = \frac{R}{f^3} + \frac{S(1+v_m)}{(1-2v_m)} \quad \boxed{8.11}$$

$$-\frac{P}{f^2} + 2Qf = -\frac{R}{f^2} + 2Sf \quad \boxed{8.12}$$

$$\frac{2R}{g^3} + \frac{2S(1+v_m)}{(1-2v_m)} = -P_0 \quad \boxed{8.13}$$

Λύνουμε το σύστημα εκφράζοντας όλες τις μεταβλητές συναρτήσει του P_0 :

$$\left. \begin{array}{l} 8.1 \\ 8.2 \end{array} \right\} \Rightarrow C = \frac{(1-\eta)(1+v_f)(2\eta a^3)}{\eta[(1-2v_f)2\eta a^3 + (1+v_f)]} D \quad \boxed{8.14}$$

$$\left. \begin{array}{l} 8.1 \\ 8.14 \end{array} \right\} \Rightarrow B = \left\{ \frac{(1-2v_f)(1-\eta)2\eta a^3}{\eta[(1-2v_f)2\eta a^3 + (1+v_f)]} + 1 \right\} D \quad \boxed{8.15}$$

Προσθέτω κατά μέλη τις 8.3 και 8.4 αφού διαιρέσω την 8.4 με b:

8.3+8.4 :

$$\frac{C}{b^3} + D \frac{(1+\nu_m)}{(1-2\nu_m)} - \frac{C}{b^3} + 2D = \frac{F}{b^3} + H \frac{(1+\nu_m)}{(1-2\nu_m)} - \frac{F}{b^3} + 2H$$

$$\Rightarrow 3 \frac{(1-\nu_m)}{(1-2\nu_m)} D = 3 \frac{(1-\nu_m)}{(1-2\nu_m)} H \Rightarrow D = H$$

Από την 8.3 έχω: $C = F$

$$\text{Ομοίως έχω από τις 8.5 και 8.6: } \left. \begin{array}{l} H = L = D \\ F = J = C \end{array} \right\}$$

Πολλαπλασιάζω την 8.8 με η/d και προσθέτω κατά μέλη τις 8.7 και 8.8:

$$\Rightarrow \frac{3(1-\nu_f)}{(1-2\nu_f)} L = \frac{(1-\eta)}{d^3} M + \left(\frac{1+\nu_f}{1-2\nu_f} + 2\eta \right) N \quad \boxed{8.16}$$

Πολλαπλασιάζω την 8.8 με $1/d$ και προσθέτω κατά μέλη τις 8.7 και 8.8:

$$\Rightarrow \frac{3(1-\nu_f)}{(1-2\nu_f)} N = \frac{(\eta-1)}{\eta d^3} J + \left(\frac{1+\nu_f}{1-2\nu_f} + \frac{2}{\eta} \right) L \quad \boxed{8.17}$$

Πολλαπλασιάζω την 8.10 με η/e και προσθέτω κατά μέλη τις 8.9 και 8.10:

$$\Rightarrow \frac{(1-\eta)}{e^3} M + \left[2\eta + \left(\frac{1+\nu_f}{1-2\nu_f} \right) \right] N = 3 \left(\frac{1+\nu_f}{1-2\nu_f} \right) Q \quad \boxed{8.18}$$

Πολλαπλασιάζω την 8.10 με $1/e$ και προσθέτω κατά μέλη τις 8.9 και 8.10:

$$\Rightarrow 3 \left(\frac{1-\nu_f}{1-2\nu_f} \right) N = \left(\frac{\eta-1}{\eta e^3} \right) P + \left(\frac{1+\nu_f}{1-2\nu_f} + \frac{2}{\eta} \right) Q \quad \boxed{8.19}$$

Ομοίως διαιρώ την 8.12 με f και προσθέτω κατά μέλη τις 8.11 και 8.12 και

$$\text{τελικά έχω: } Q = S$$

$$P = R$$

Τελικά εκφράζω όλες τις μεταβλητές συναρτήσει του P_0 ώστε να απλοποιηθεί

στη συνέχεια, και συνεπώς έχω:

$$Q = \frac{\left\{ \left[2\eta + \left(\frac{1+v_f}{1-2v_f} \right) \right] \left[\frac{1-2v_f}{3\eta(1-v_f)} \right] \frac{(-g^3)}{2} + \left[\frac{g^3(\eta-1)(1-2v_f)}{3\eta(1-v_f)} \right] + \frac{g^3}{2\eta} \right\}}{\left\{ \left[\frac{3e^3(1-v_f)}{(1-\eta)(1-2v_f)} - \left(\frac{\eta(1+v_f)+2(1-2v_f)}{3\eta(1-v_f)} - \frac{g^3(1+v_m)}{(1-2v_m)} \right) \left(2\eta + \frac{1+v_f}{1-2v_f} \right) \frac{e^3}{1-\eta} \right] - 2e^3 \left(\frac{\eta(1+v_f)+2(1-2v_f)}{3\eta(1-v_f)} - \frac{g^3(1+v_m)}{(1-2v_m)} \right) - \frac{g^3(1+v_m)}{\eta(1-2v_m)} - \frac{2e^3}{\eta} \right\}} P_0$$

Θέτω

$$A_1 = \frac{\left\{ \left[2\eta + \left(\frac{1+v_f}{1-2v_f} \right) \right] \left[\frac{1-2v_f}{3\eta(1-v_f)} \right] \frac{(-g^3)}{2} + \left[\frac{g^3(\eta-1)(1-2v_f)}{3\eta(1-v_f)} \right] + \frac{g^3}{2\eta} \right\}}{\left\{ \left[\frac{3e^3(1-v_f)}{(1-\eta)(1-2v_f)} - \left(\frac{\eta(1+v_f)+2(1-2v_f)}{3\eta(1-v_f)} - \frac{g^3(1+v_m)}{(1-2v_m)} \right) \left(2\eta + \frac{1+v_f}{1-2v_f} \right) \frac{e^3}{1-\eta} \right] - 2e^3 \left(\frac{\eta(1+v_f)+2(1-2v_f)}{3\eta(1-v_f)} - \frac{g^3(1+v_m)}{(1-2v_m)} \right) - \frac{g^3(1+v_m)}{\eta(1-2v_m)} - \frac{2e^3}{\eta} \right\}}$$

$$\text{ώστε } Q = A_1 P_0$$

$$P = -\frac{P_0 g^3}{2} - g^3 \left(\frac{1+v_m}{1-2v_m} \right) A_1 P_0$$

$$S = Q, \quad R = P$$

$$N = \left[\frac{\left(\frac{\eta-1}{\eta} \right)}{\frac{3(1-v_f)}{(1-2v_f)} e^3} \right] \left(\frac{-g^3}{2} \right) P_0 + \left[\frac{\eta(1+v_f)+2(1-2v_f)}{3\eta(1-v_f)} - g^3 \frac{(1+v_m)}{(1-2v_m)} \right] A_1 P_0$$

$$M = \frac{3(1-v_f)e^3 A_1}{(1-2v_f)(1-\eta)} P_0 - \left[2\eta + \left(\frac{1+v_f}{1-2v_f} \right) \frac{e^3}{(1-\eta)} \right] \left\{ \left[\frac{(\eta-1)(1-2v_f)}{3\eta e^3(1-v_f)} \right] \left(\frac{-g^3}{2} \right) P_0 + \frac{\eta(1+v_f) + 2(1-2v_f)}{3\eta(1-v_f)} - \frac{g^3(1+v_m)}{(1-2v_m)} \right\} A_1 P_0$$

$$L = \frac{\frac{(1-\eta)}{d^3} M + \left(\frac{1+v_f}{1-2v_f} + 2\eta \right) N}{\frac{3(1-v_f)}{1-2v_f}}$$

Όπου τα M, N τα βρήκαμε παραπάνω συναρτήσει του P₀ άρα το L είναι συνάρτηση του P₀ { L(P₀)}.

Γνωρίζουμε επίσης ότι D = H = L = L(P₀)

Ακόμα ισχύει ότι :

$$C = F = J = \frac{(1-\eta)(1+v_f)(2\eta a^3)}{\eta[(1-2v_f)2\eta a^3 + (1+v_f)]} L = \frac{(1-\eta)(1+v_f)(2\eta a^3)}{\eta[(1-2v_f)2\eta a^3 + (1+v_f)]} \left\{ \frac{\frac{(1-\eta)}{d^3} M + \left(\frac{1+v_f}{1-2v_f} + 2\eta \right) N}{\frac{3(1-v_f)}{1-2v_f}} \right\}$$

Ο προσδιορισμός του μέτρου ελαστικότητας E_c του κοκκώδους σύνθετου υλικού

γίνεται με τη συνθήκη ισορροπίας ενέργειας στο σφαιρικό επταφασικό μοντέλο:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{V_c} \frac{P_0^2}{K_c} dV_c &= \frac{1}{2} \int_0^a (\sigma_{r1} \varepsilon_{r1} + \sigma_{\theta1} \varepsilon_{\theta1} + \sigma_{\varphi1} \varepsilon_{\varphi1}) r^2 dr + \frac{1}{2} \int_a^b (\sigma_{r2} \varepsilon_{r2} + \sigma_{\theta2} \varepsilon_{\theta2} + \sigma_{\varphi2} \varepsilon_{\varphi2}) r^2 dr \\ &+ \frac{1}{2} \int_b^c (\sigma_{r3} \varepsilon_{r3} + \sigma_{\theta3} \varepsilon_{\theta3} + \sigma_{\varphi3} \varepsilon_{\varphi3}) r^2 dr + \frac{1}{2} \int_c^d (\sigma_{r4} \varepsilon_{r4} + \sigma_{\theta4} \varepsilon_{\theta4} + \sigma_{\varphi4} \varepsilon_{\varphi4}) r^2 dr \\ &+ \frac{1}{2} \int_d^e (\sigma_{r5} \varepsilon_{r5} + \sigma_{\theta5} \varepsilon_{\theta5} + \sigma_{\varphi5} \varepsilon_{\varphi5}) r^2 dr + \frac{1}{2} \int_e^f (\sigma_{r6} \varepsilon_{r6} + \sigma_{\theta6} \varepsilon_{\theta6} + \sigma_{\varphi6} \varepsilon_{\varphi6}) r^2 dr \\ &+ \frac{1}{2} \int_f^g (\sigma_{r7} \varepsilon_{r7} + \sigma_{\theta7} \varepsilon_{\theta7} + \sigma_{\varphi7} \varepsilon_{\varphi7}) r^2 dr \end{aligned}$$

$$\text{με } K_c = \frac{E_c}{3(1-2\nu_c)}, V = \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow dV = 4\pi r^2 dr, \text{ άρα έχουμε:}$$

$$\begin{aligned} \frac{P_0^2(1-2\nu_c)}{E_c} g^3 &= \int_0^a \frac{12B_{(P_0)}^2(1+\nu_f)^2}{(1-2\nu_f)E_f} r^2 dr + \\ &+ \int_a^b \left[\left(\frac{2J_{(P_0)}}{r^3} + \frac{2L_{(P_0)}(1+\nu_{i1})}{(1-2\nu_{i1})} \right) \left(\frac{2J_{(P_0)}}{r^3} + 2L_{(P_0)} \right) \frac{(1+\nu_{i1})}{E_{i1}} + 2 \left(\frac{-J_{(P_0)}}{r^3} + \frac{2L_{(P_0)}(1+\nu_{i1})}{(1-2\nu_{i1})} \right) \left(\frac{-J_{(P_0)}}{r^3} + L_{(P_0)} \right) \frac{(1+\nu_{i1})}{E_{i1}} \right] r^2 dr \\ &+ \int_b^c \left[\left(\frac{2J_{(P_0)}}{r^3} + \frac{2L_{(P_0)}(1+\nu_m)}{(1-2\nu_m)} \right) \left(\frac{2J_{(P_0)}}{r^3} + 2L_{(P_0)} \right) \frac{(1+\nu_m)}{E_m} + 2 \left(\frac{-J_{(P_0)}}{r^3} + \frac{2L_{(P_0)}(1+\nu_m)}{(1-2\nu_m)} \right) \left(\frac{-J_{(P_0)}}{r^3} + L_{(P_0)} \right) \frac{(1+\nu_m)}{E_m} \right] r^2 dr \\ &+ \int_c^d \left[\left(\frac{2J_{(P_0)}}{r^3} + \frac{2L_{(P_0)}(1+\nu_{i2})}{(1-2\nu_{i2})} \right) \left(\frac{2J_{(P_0)}}{r^3} + 2L_{(P_0)} \right) \frac{(1+\nu_{i2})}{E_{i2}} + 2 \left(\frac{-J_{(P_0)}}{r^3} + \frac{2L_{(P_0)}(1+\nu_{i2})}{(1-2\nu_{i2})} \right) \left(\frac{-J_{(P_0)}}{r^3} + L_{(P_0)} \right) \frac{(1+\nu_{i2})}{E_{i2}} \right] r^2 dr \\ &+ \int_d^e \left[\left(\frac{2M_{(P_0)}}{r^3} + \frac{2N_{(P_0)}(1+\nu_f)}{(1-2\nu_f)} \right) \left(\frac{2M_{(P_0)}}{r^3} + 2N_{(P_0)} \right) \frac{(1+\nu_f)}{E_f} + 2 \left(\frac{-M_{(P_0)}}{r^3} + \frac{2N_{(P_0)}(1+\nu_f)}{(1-2\nu_f)} \right) \left(\frac{-M_{(P_0)}}{r^3} + N_{(P_0)} \right) \frac{(1+\nu_f)}{E_f} \right] r^2 dr \\ &+ \int_e^f \left[\left(\frac{2P_{(P_0)}}{r^3} + \frac{2Q_{(P_0)}(1+\nu_{i3})}{(1-2\nu_{i3})} \right) \left(\frac{2P_{(P_0)}}{r^3} + 2Q_{(P_0)} \right) \frac{(1+\nu_{i3})}{E_{i3}} + 2 \left(\frac{-P_{(P_0)}}{r^3} + \frac{2Q_{(P_0)}(1+\nu_{i3})}{(1-2\nu_{i3})} \right) \left(\frac{-P_{(P_0)}}{r^3} + Q_{(P_0)} \right) \frac{(1+\nu_{i3})}{E_{i3}} \right] r^2 dr \\ &+ \int_f^g \left[\left(\frac{2P_{(P_0)}}{r^3} + \frac{2Q_{(P_0)}(1+\nu_m)}{(1-2\nu_m)} \right) \left(\frac{2P_{(P_0)}}{r^3} + 2Q_{(P_0)} \right) \frac{(1+\nu_m)}{E_m} + 2 \left(\frac{-P_{(P_0)}}{r^3} + \frac{2Q_{(P_0)}(1+\nu_m)}{(1-2\nu_m)} \right) \left(\frac{-P_{(P_0)}}{r^3} + Q_{(P_0)} \right) \frac{(1+\nu_m)}{E_m} \right] r^2 dr \end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη και εκτενής, συνεπώς η επίλυση της είναι πολύ δύσκολη και αρκετά χρονοβόρα. Για το λόγο αυτό θα πάρουμε στην επόμενη ενότητα $\eta = 1$, έτσι ώστε να απλοποιηθούν πολύ οι πράξεις χωρίς να αλλάζει το αποτέλεσμα καθώς, όπως είδαμε στα προηγούμενα κεφάλαια, η τελική τιμή του μέτρου ελαστικότητας του σύνθετου υλικού εξαρτάται σε πολύ μικρό βαθμό από το η . Για $\eta = 1$ θα βρούμε τη μέγιστη τιμή του E_c .

Συνεπώς, ομοίως με προηγουμένως, αλλά για $\eta = 1$ έχουμε τις εξής συνοριακές συνθήκες για το ίδιο επταφασικό μοντέλο:

$$r = r_{f1} = a \Rightarrow E_{i1} = E_f, \nu_{i1} = \nu_f$$

$$r = r_{i1} = b \Rightarrow E_{i1} = E_m, \nu_{i1} = \nu_m$$

$$r = r_{m1} = c \Rightarrow E_{i2} = E_m, \nu_{i2} = \nu_m$$

$$r = r_{i2} = d \Rightarrow E_{i2} = E_f, \nu_{i2} = \nu_f$$

$$r = r_{f2} = e \Rightarrow E_{i3} = E_f, \nu_{i3} = \nu_f$$

$$r = r_{i3} = f \Rightarrow E_{i3} = E_m, \nu_{i3} = \nu_m$$

Για $r = a$: $\sigma_{r,1} = \sigma_{r,2}$ και $u_{r,1} = u_{r,2}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2B(1+v_f)}{1-2v_f} = \frac{2C}{r^3} + \frac{2D(1+v_f)}{1-2v_f} \end{array} \right. \quad \boxed{8.20}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{Ba2(1+v_f)}{E_f} = \left(-\frac{C}{a^2} + 2Da \right) \frac{(1+v_f)}{E_f} \end{array} \right. \quad \boxed{8.21}$$

Για $r = b$: $\sigma_{r,2} = \sigma_{r,3}$ και $u_{r,2} = u_{r,3}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{C}{b^3} + \frac{2D(1+v_m)}{1-2v_m} = \frac{F}{b^3} + \frac{2H(1+v_m)}{1-2v_m} \end{array} \right. \quad \boxed{8.22}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{C}{b^2} + 2Db = -\frac{F}{b^2} + 2Hb \end{array} \right. \quad \boxed{8.23}$$

Για $r = c$: $\sigma_{r,3} = \sigma_{r,4}$ και $u_{r,3} = u_{r,4}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{F}{c^3} + \frac{H(1+v_m)}{1-2v_m} = \frac{J}{c^3} + \frac{L(1+v_m)}{1-2v_m} \end{array} \right. \quad \boxed{8.24}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{F}{c^2} + 2Hc = -\frac{J}{c^2} + 2Lc \end{array} \right. \quad \boxed{8.25}$$

Για $r = d$: $\sigma_{r,4} = \sigma_{r,5}$ και $u_{r,4} = u_{r,5}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{J}{d^3} + \frac{L(1+v_f)}{1-2v_f} = \frac{M}{d^3} + \frac{N(1+v_f)}{1-2v_f} \end{array} \right. \quad \boxed{8.26}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{J}{d^2} + 2Ld = -\frac{M}{d^2} + 2Nd \end{array} \right. \quad \boxed{8.27}$$

Για $r = e$: $\sigma_{r,5} = \sigma_{r,6}$ και $u_{r,5} = u_{r,6}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{M}{e^3} + \frac{N(1+v_f)}{1-2v_f} = \frac{P}{e^3} + \frac{Q(1+v_f)}{1-2v_f} \\ -\frac{M}{e^2} + 2Ne = -\frac{P}{e^2} + 2Qe \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \boxed{8.28} \\ \boxed{8.29} \end{array}$$

Για $r = f$: $\sigma_{r,6} = \sigma_{r,7}$ και $u_{r,6} = u_{r,7}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{P}{f^3} + \frac{Q(1+v_m)}{1-2v_m} = \frac{R}{f^3} + \frac{S(1+v_m)}{1-2v_m} \\ -\frac{P}{f^2} + 2Qf = -\frac{R}{f^2} + 2Sf \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \boxed{8.30} \\ \boxed{8.31} \end{array}$$

Για $r = g$: $\sigma_{r7} = -P_0$

$$\frac{2R}{g^3} + \frac{2S(1+v_m)}{1-2v_m} = -P_0 \quad \boxed{8.32}$$

Από 8.20 , 8.21 έχω:

$$\left. \begin{array}{l} B = -\frac{C}{2a^3} + D \\ B = \frac{C}{a^3} \left(\frac{1-2v_f}{1+v_f} \right) + D \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{C}{2a^3} = \frac{C}{a^3} \left(\frac{1-2v_f}{1+v_f} \right) \Rightarrow C \left[\frac{2-4v_f+1+v_f}{1+v_f} \right] = 0 \Rightarrow C \left[3 \left(\frac{1-v_f}{1+v_f} \right) \right] = 0$$

$$\Rightarrow C = 0 \quad \text{ή} \quad v_f = 1 \quad \text{ατοπο}$$

Άρα $C = 0$

Ομοίως με προηγουμένως, προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτουν:

$$A = C = F = J = M = P = R = 0$$

$$B = D = H = L = N = Q = S = -\frac{1}{2} \left(\frac{1-2\nu_m}{1+\nu_m} \right) P_0$$

Εν συνεχεία, αντικαθιστώ στις τιμές των **τάσεων**, τις των σταθερών:

$$\sigma_{r1} = \sigma_{\theta1} = \sigma_{\phi1} = \frac{2(1+\nu_f)}{1-2\nu_f} \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1-2\nu_m}{1+\nu_m} \right) P_0 = -\left(\frac{1+\nu_f}{1+\nu_m} \right) \left(\frac{1-2\nu_m}{1-2\nu_f} \right) P_0$$

$$\sigma_{r2} = \sigma_{\theta2} = \sigma_{\phi2} = -\left(\frac{1+\nu_{i1}}{1+\nu_m} \right) \left(\frac{1-2\nu_m}{1-2\nu_{i1}} \right) P_0$$

$$\sigma_{r3} = \sigma_{\theta3} = \sigma_{\phi3} = -P_0$$

$$\sigma_{r4} = \sigma_{\theta4} = \sigma_{\phi4} = -\left(\frac{1+\nu_{i2}}{1+\nu_m} \right) \left(\frac{1-2\nu_m}{1-2\nu_{i2}} \right) P_0$$

$$\sigma_{r5} = \sigma_{\theta5} = \sigma_{\phi5} = -\left(\frac{1+\nu_f}{1+\nu_m} \right) \left(\frac{1-2\nu_m}{1-2\nu_f} \right) P_0$$

$$\sigma_{r6} = \sigma_{\theta6} = \sigma_{\phi6} = -\left(\frac{1+\nu_{i3}}{1+\nu_m} \right) \left(\frac{1-2\nu_m}{1-2\nu_{i3}} \right) P_0$$

$$\sigma_{r7} = \sigma_{\theta7} = \sigma_{\phi7} = -P_0$$

Αντίστοιχα στις παραμορφώσεις έχουμε:

$$\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{\theta1} = \varepsilon_{\phi1} = -\left(\frac{1-2\nu_m}{1+\nu_m}\right)\left(\frac{1+\nu_f}{E_f}\right)P_0$$

$$\varepsilon_{r2} = \varepsilon_{\theta2} = \varepsilon_{\phi2} = -\left(\frac{1-2\nu_m}{1+\nu_m}\right)\left(\frac{1+\nu_{i1}}{E_{i1}}\right)P_0$$

$$\varepsilon_{r3} = \varepsilon_{\theta3} = \varepsilon_{\phi3} = -\left(\frac{1-2\nu_m}{E_m}\right)P_0$$

$$\varepsilon_{r4} = \varepsilon_{\theta4} = \varepsilon_{\phi4} = -\left(\frac{1-2\nu_m}{1+\nu_m}\right)\left(\frac{1+\nu_{i2}}{E_{i2}}\right)P_0$$

$$\varepsilon_{r5} = \varepsilon_{\theta5} = \varepsilon_{\phi5} = -\left(\frac{1-2\nu_m}{1+\nu_m}\right)\left(\frac{1+\nu_f}{E_f}\right)P_0$$

$$\varepsilon_{r6} = \varepsilon_{\theta6} = \varepsilon_{\phi6} = -\left(\frac{1-2\nu_m}{1+\nu_m}\right)\left(\frac{1+\nu_{i3}}{E_{i3}}\right)P_0$$

$$\varepsilon_{r7} = \varepsilon_{\theta7} = \varepsilon_{\phi7} = -\left(\frac{1-2\nu_m}{E_m}\right)P_0$$

Όμοια με προηγουμένως, για τον προσδιορισμό του μέτρου ελαστικότητας E_c του κοκκώδους σύνθετου υλικού θα εφαρμοστεί η συνθήκη ισορροπίας ενέργειας στο σφαιρικό επταφασικό μοντέλο, δηλαδή ότι η ενέργεια παραμορφώσεως του υλικού ισούται με το άθροισμα των ενεργειών των επτά φάσεων(εγκλείσματος, μήτρας και ενδιάμεσου φάσεως):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_{V_c} \frac{P_0^2}{K_c} dV_c &= \frac{1}{2} \int_0^a (\sigma_{r1} \varepsilon_{r1} + \sigma_{\theta1} \varepsilon_{\theta1} + \sigma_{\varphi1} \varepsilon_{\varphi1}) r^2 dr + \frac{1}{2} \int_a^b (\sigma_{r2} \varepsilon_{r2} + \sigma_{\theta2} \varepsilon_{\theta2} + \sigma_{\varphi2} \varepsilon_{\varphi2}) r^2 dr \\
&+ \frac{1}{2} \int_b^c (\sigma_{r3} \varepsilon_{r3} + \sigma_{\theta3} \varepsilon_{\theta3} + \sigma_{\varphi3} \varepsilon_{\varphi3}) r^2 dr + \frac{1}{2} \int_c^d (\sigma_{r4} \varepsilon_{r4} + \sigma_{\theta4} \varepsilon_{\theta4} + \sigma_{\varphi4} \varepsilon_{\varphi4}) r^2 dr \\
&+ \frac{1}{2} \int_d^e (\sigma_{r5} \varepsilon_{r5} + \sigma_{\theta5} \varepsilon_{\theta5} + \sigma_{\varphi5} \varepsilon_{\varphi5}) r^2 dr + \frac{1}{2} \int_e^f (\sigma_{r6} \varepsilon_{r6} + \sigma_{\theta6} \varepsilon_{\theta6} + \sigma_{\varphi6} \varepsilon_{\varphi6}) r^2 dr \\
&+ \frac{1}{2} \int_f^g (\sigma_{r7} \varepsilon_{r7} + \sigma_{\theta7} \varepsilon_{\theta7} + \sigma_{\varphi7} \varepsilon_{\varphi7}) r^2 dr
\end{aligned}$$

με $K_c = \frac{E_c}{3(1-2\nu_c)}, V = \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow dV = 4\pi r^2 dr$, όπου K_c είναι το

μέτρο διογκώσεως του σύνθετου υλικού.

Ο λόγος Poisson του σύνθετου υλικού προκύπτει από το νόμο των φάσεων και είναι:

$$\begin{aligned}
\nu_c &= \nu_f U_1 + \nu_{i1} U_2 + \nu_m U_3 + \nu_{i2} U_4 + \nu_f U_5 + \nu_{i3} U_6 + \nu_m U_7 \\
\Rightarrow \nu_c &= \nu_f U_1 + \frac{3}{g^3} \int_a^b \nu_i(r) r^2 dr + \nu_m U_3 + \frac{3}{g^3} \int_c^d \nu_i(r) r^2 dr + \\
&\nu_f U_5 + \frac{3}{g^3} \int_e^f \nu_i(r) r^2 dr + \nu_m U_7
\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τα επιμέρους ολοκληρώματα και τελικά έχουμε:

$$\begin{aligned}
P_0^2 \frac{(1-2v_c)}{E_c} g^3 &= P_0^2 \frac{(1+v_f)^2 (1-2v_m)^2}{(1-2v_f)(1+v_m)^2 E_f} a^3 + 3P_0^2 \left(\frac{1-2v_m}{1+v_m} \right)^2 \int_a^b \frac{(1+v_{i1})^2}{(1-2v_{i1}) E_{i1}} r^2 dr \\
&+ P_0^2 \frac{(1-2v_m)}{E_m} (c^3 - b^3) + 3P_0^2 \left(\frac{1-2v_m}{1+v_m} \right)^2 \int_c^d \frac{(1+v_{i2})^2}{(1-2v_{i2}) E_{i2}} r^2 dr \\
&+ P_0^2 \frac{(1+v_f)^2 (1-2v_m)^2}{(1-2v_f)(1+v_m)^2 E_f} (e^3 - d^3) + 3P_0^2 \left(\frac{1-2v_m}{1+v_m} \right)^2 \int_e^f \frac{(1+v_{i3})^2}{(1-2v_{i3}) E_{i3}} r^2 dr \\
&+ P_0^2 \frac{(1-2v_m)}{E_m} (g^3 - f^3)
\end{aligned}$$

Διαιρώντας με g^3 και αντικαθιστώντας τις περιεκτικότητες καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση:

$$\begin{aligned}
\frac{(1-2v_c)}{E_c} &= \frac{(1+v_f)^2 (1-2v_m)^2}{(1-2v_f)(1+v_m)^2 E_f} U_1 + \frac{3}{g^3} \left(\frac{1-2v_m}{1+v_m} \right)^2 \int_a^b \frac{(1+v_{i1})^2}{(1-2v_{i1}) E_{i1}} r^2 dr \\
&+ \frac{(1-2v_m)}{E_m} U_3 + \frac{3}{g^3} \left(\frac{1-2v_m}{1+v_m} \right)^2 \int_c^d \frac{(1+v_{i2})^2}{(1-2v_{i2}) E_{i2}} r^2 dr \\
&+ \frac{(1+v_f)^2 (1-2v_m)^2}{(1-2v_f)(1+v_m)^2 E_f} U_5 + \frac{3}{g^3} \left(\frac{1-2v_m}{1+v_m} \right)^2 \int_e^f \frac{(1+v_{i3})^2}{(1-2v_{i3}) E_{i3}} r^2 dr \\
&+ \frac{(1-2v_m)}{E_m} U_7
\end{aligned}$$

Αλλά $\mathbf{v}_{i1} = \mathbf{v}_{i2} = \mathbf{v}_{i3} = \mathbf{v}_i(\mathbf{r})$ και $\mathbf{E}_{i1} = \mathbf{E}_{i2} = \mathbf{E}_{i3} = \mathbf{E}_i(\mathbf{r})$ άρα έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{(1-2\nu_c)}{E_c} &= \frac{(1+\nu_f)^2(1-2\nu_m)^2}{(1-2\nu_f)(1+\nu_m)^2 E_f} U_1 + \frac{3}{g^3} \left(\frac{1-2\nu_m}{1+\nu_m} \right)^2 \int_a^b \frac{(1+\nu_i(r))^2}{(1-2\nu_i(r)) E_i(r)} r^2 dr \\ &+ \frac{(1-2\nu_m)}{E_m} U_3 + \frac{3}{g^3} \left(\frac{1-2\nu_m}{1+\nu_m} \right)^2 \int_c^d \frac{(1+\nu_i(r))^2}{(1-2\nu_i(r)) E_i(r)} r^2 dr \\ &+ \frac{(1+\nu_f)^2(1-2\nu_m)^2}{(1-2\nu_f)(1+\nu_m)^2 E_f} U_5 + \frac{3}{g^3} \left(\frac{1-2\nu_m}{1+\nu_m} \right)^2 \int_e^f \frac{(1+\nu_i(r))^2}{(1-2\nu_i(r)) E_i(r)} r^2 dr \\ &+ \frac{(1-2\nu_m)}{E_m} U_7 \end{aligned}$$

όπου $\nu_i(r)$ και $E_i(r)$ θα είναι οι συναρτήσεις γραμμικού, υπερβολικού, παραβολικού, λογαριθμικού και εκθετικού που έχουν προσδιορισθεί στο κεφάλαιο 5.2. Ως εφαρμογή θα πάρω την παραβολική μεταβολή, η οποία παρουσιάζεται ως η πλέον κατάλληλη. Δηλαδή:

$$E_i(r) = Ar^2 + Br + C$$

$$\nu_i(r) = A'r^2 + B'r + C'$$

8.4 Σύγκριση με άλλα μοντέλα

Για να ελέγξουμε το πόσο καλά προσεγγίζουν την πραγματικότητα τα κυβικά μοντέλα μας με ενδιάμεση φάση που υπολογίσθηκαν με την προσεγγιστική μέθοδο χρησιμοποιούμε τα ίδια πειραματικά δεδομένα που αναλύθηκαν στο κεφάλαιο 7. Κάνουμε τη διαδικασία και για τις δύο περιπτώσεις κατανομής των κόκκων σε αντιστοιχία με τα κυβικά μοντέλα του κεφαλαίου 6.

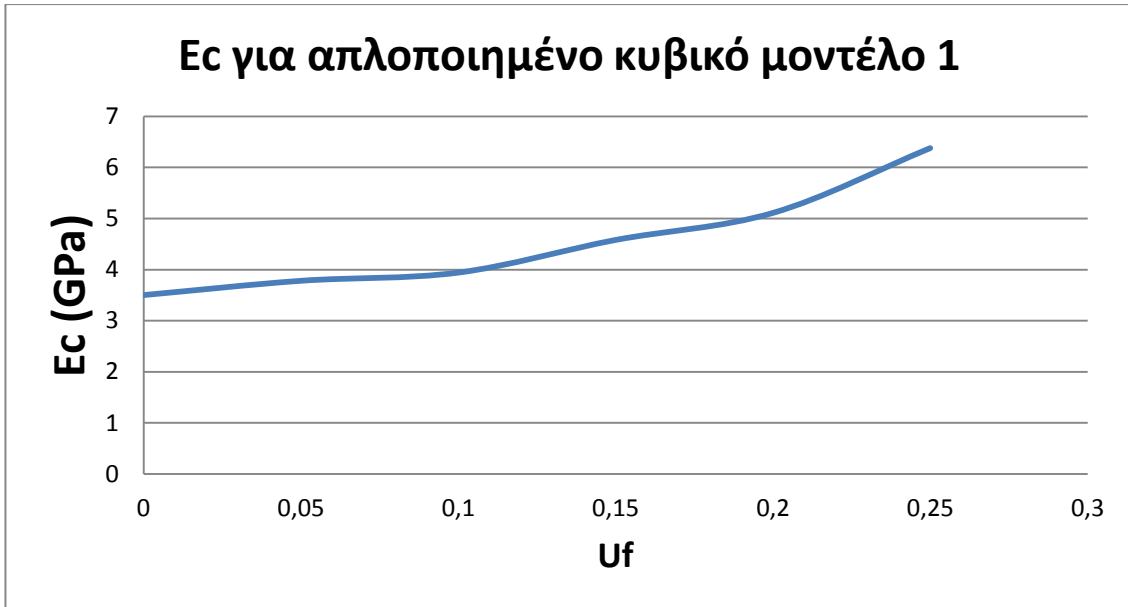
Παρακάτω παρουσιάζονται οι πίνακες και διαγράμματα των αποτελεσμάτων των υπολογισμών του προσεγγιστικού θεωρητικού υπολογισμού του μέτρου ελαστικότητας.

U_f	E_c για προσεγγιστικό κυβικό μοντέλο1 (GPa)	E_c για προσεγγιστικό κυβικό μοντέλο2 (GPa)
0.05	3,78	3,78
0.1	3,94	4,28
0.15	4,58	4,55
0.2	5,11	5,05
0.25	6,38	6,12

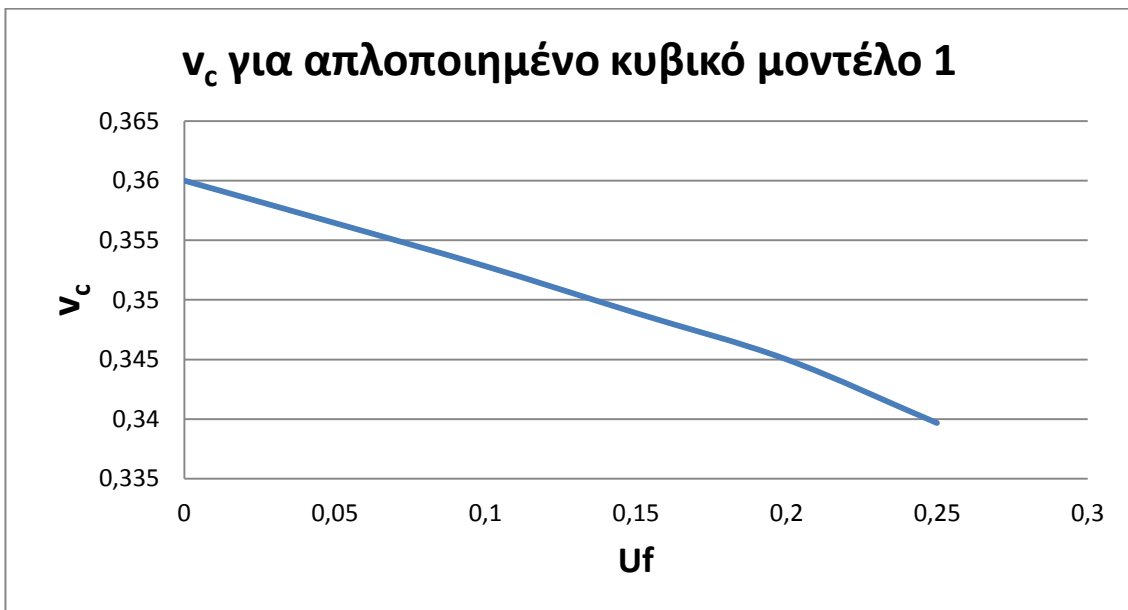
Πίνακας 8.6

U_f	V_c για προσεγγιστικό κυβικό μοντέλο 1	V_c για προσεγγιστικό κυβικό μοντέλο 2
0.05	0,356447	0,356456
0.1	0,352827	0,352859
0.15	0,348899	0,349008
0.2	0,345012	0,345189
0.25	0,339676	0,340165

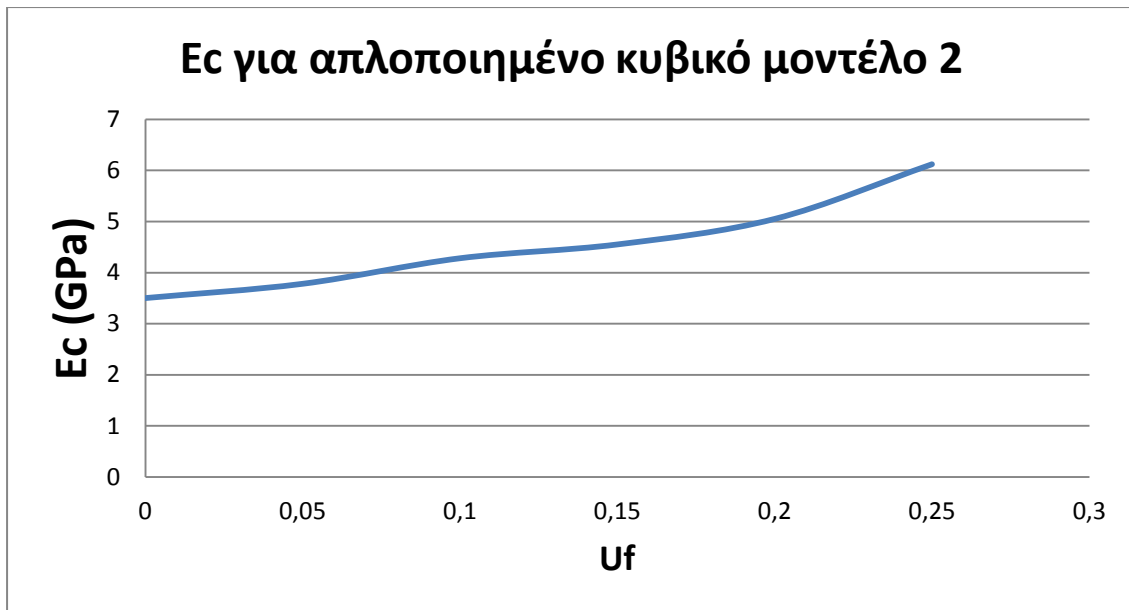
Πίνακας 8.7



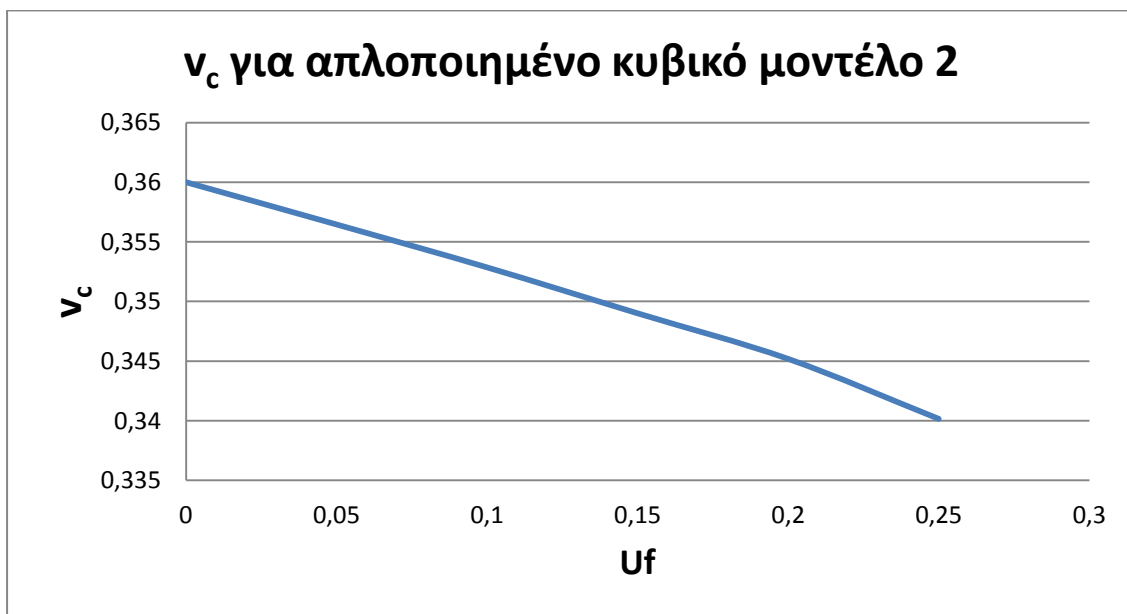
Διάγραμμα 8.1



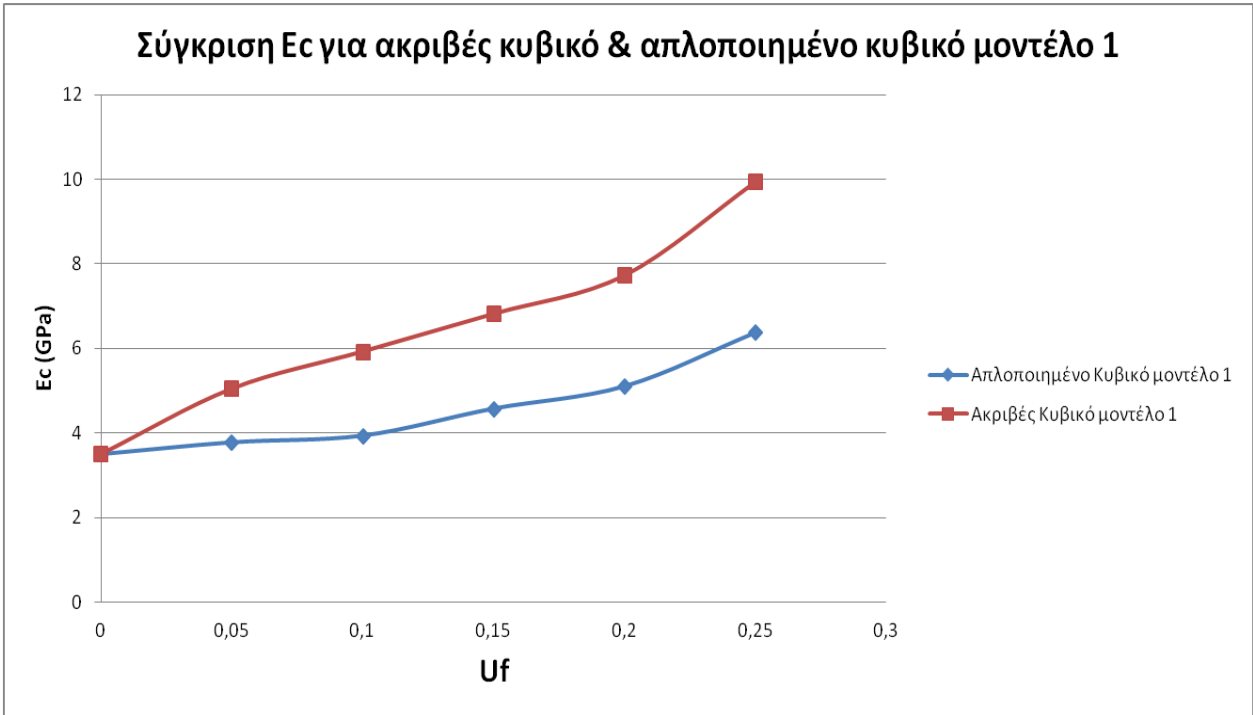
Διάγραμμα 8.2



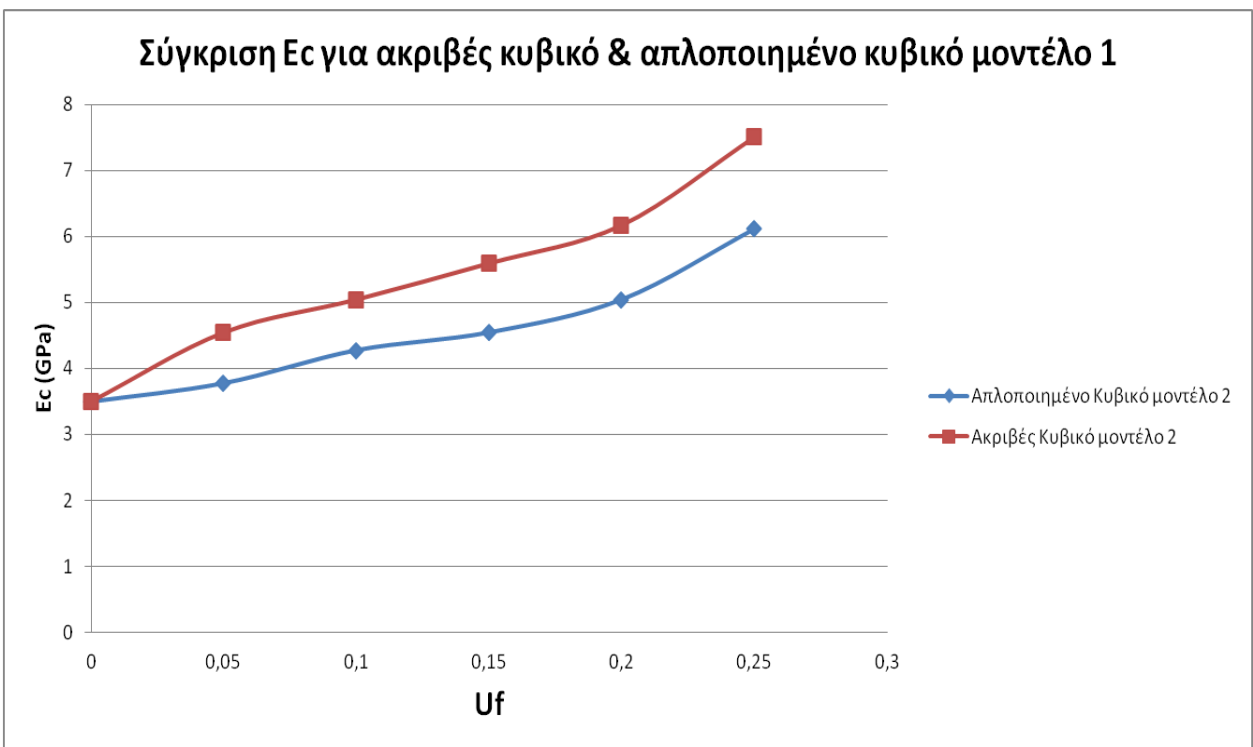
Διάγραμμα 8.3



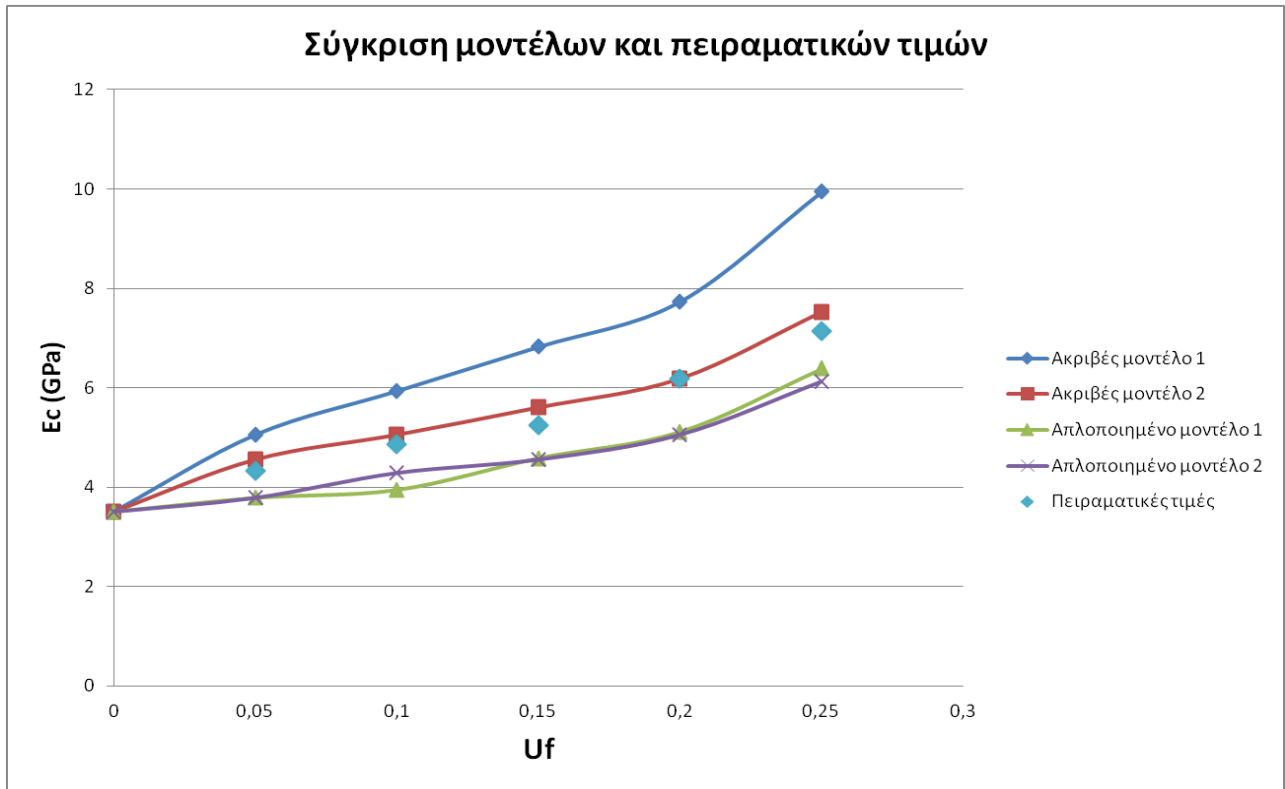
Διάγραμμα 8.4



Διάγραμμα 8.5



Διάγραμμα 8.6



Διάγραμμα 8.7

Για να δούμε πόσο προσεγγίζουν οι θεωρητικές καμπύλες για το κάθε μοντέλο, τα πειραματικά σημεία, εισάγουμε από τη στατιστική ένα δείκτη προσαρμογής που φανερώνει πόσο καλά προσαρμόζεται η θεωρητική καμπύλη στα πειραματικά σημεία.

Ο συντελεστής προσαρμογής δίνεται από τον παρακάτω τύπο :

$$r = 100 \left[1 - \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \hat{y}_i)^2}{\hat{y}_i} \right] \%$$

όπου y η πρόβλεψη του μεγέθους y (για εμάς E_c) στην τιμή x_i (U_f).

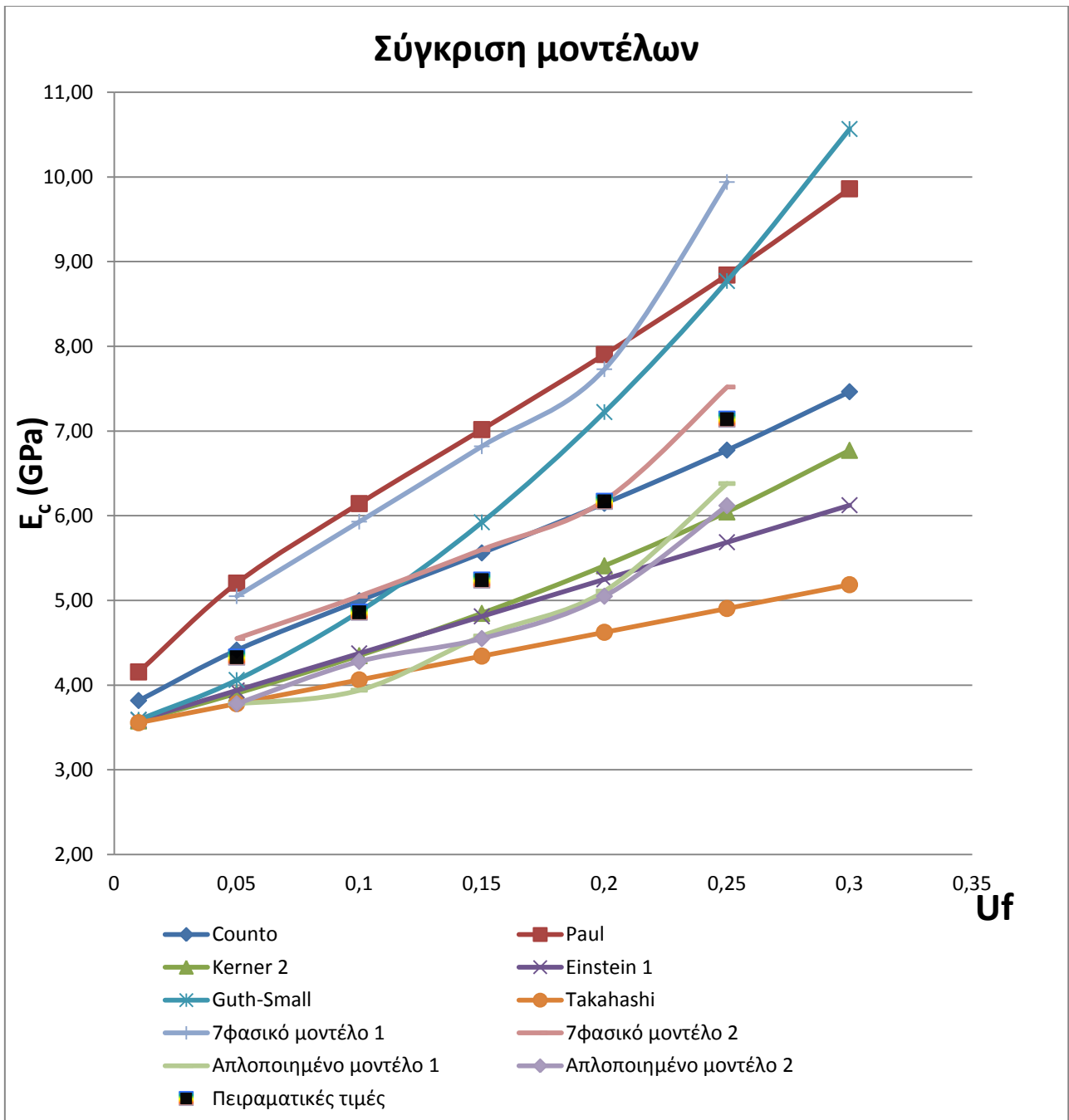
Η τιμή του συντελεστή προσαρμογής κυμαίνεται στο διάστημα $[0, 1]$. Μάλιστα όσο πιο πολύ τείνει προς τη μονάδα τόσο πιο καλή προσέγγιση στα πειραματικά μου δεδομένα έχω ενώ όσο τείνει προς το μηδέν, τόσο πιο κακή είναι η θεωρητική μου εκτίμηση.

Για τον συντελεστή προσαρμογής των δύο απλοποιημένων μοντέλων 1 και 2 σε σχέση με τις πειραματικές τιμές, προέκυψαν τα παρακάτω αποτελέσματα:

	Συντελεστής προσαρμογής
r_1	94,88%
r_2	95,35%

Πίνακας 8.8

Συνεπώς όπως είναι φανερό άλλωστε και από το παραπάνω διάγραμμα η προσέγγιση των πειραματικών δεδομένων γίνεται καλύτερα από το δεύτερο ακριβές κυβικό μοντέλο.



Διάγραμμα 8.8

E_c U_f	κυβικό μοντέλο 1	προσεγγιστικό κυβικό μοντέλο 1	κυβικό μοντέλο 2	προσεγγιστικό κυβικό μοντέλο 2	Πειραματικές τιμές
0,05	5,05	3,78	4,55	3,78	4,33
0,1	5,93	3,94	5,05	4,28	4,86
0,15	6,82	4,58	5,6	4,55	5,24
0,2	7,73	5,11	6,18	5,05	6,17
0,25	9,94	6,38	7,52	6,12	7,14

Πίνακας 8.9

E_c U_f	Counto	Paul	Kerner2	Einstein1	Guth-small	Takahashi	Counto
0,05	4,4136	5,2045	3,9019	3,9375	4,0609	3,781	4,4136
0,1	4,9973	6,1437	4,3485	4,375	4,8685	4,062	4,9973
0,15	5,5617	7,0174	4,8476	4,8125	5,9229	4,3431	5,5617
0,2	6,147	7,9041	5,4091	5,25	7,224	4,6241	6,147
0,25	6,7751	8,8419	6,0455	5,6875	8,7719	4,9051	6,7751

Πίνακας 8.10

Στο διάγραμμα 8.8 παρουσιάζεται η μεταβολή του μέτρου ελαστικότητας του σύνθετου E_c συναρτήσει της κατ' όγκον περιεκτικότητας U_f όπου οι τιμές του μέτρου ελαστικότητας οι οποίες προκύπτουν από τα δύο μοντέλα μας συγκρίνονται με τις θεωρητικές τιμές που προκύπτουν από μοντέλα (θεωρητικές εκφράσεις) άλλων ερευνητών της βιβλιογραφίας, με τα δύο κυβικά μοντέλα (ακριβή μοντέλα) των προηγούμενων κεφαλαίων όπως επίσης και με τα πειραματικά αποτελέσματα.

Παρατηρούμε ότι τα προσεγγιστικά (απλοποιημένα) μοντέλα παρουσιάζουν μεγαλύτερη απόκλιση από τα πειραματικά αποτελέσματα αλλά και το μοντέλο Counto σε σχέση με τα δύο κυβικά μοντέλα που αναλύσαμε στο 8^ο κεφάλαιο. Προφανώς οι απλουστεύσεις και οι παραδοχές οδήγησαν σ' αυτό το αποτέλεσμα. Παρατηρούμε ότι όλες οι εκφράσεις δίνουν τιμές για το E_c που αυξάνουν αυξανόμενης της περιεκτικότητας του εγκλείσματος. Το μοντέλο μας αποτελεί μια καλή και συνοπτική προσέγγιση της πραγματικότητας του σύνθετου υλικού μας, δηλαδή ενός σύνθετου υλικού που έχει ως εγκλείσμα κόκκους σιδήρου διαμέτρου $d=150\mu\text{m}$ και μήτρα εποξειδική ρητίνη. Το αποτέλεσμά μας είναι ικανοποιητικό διότι είναι συμπαγές σαν τύπος και δίνει τιμές πολύ κοντά στις πειραματικές αλλά και σε αυτές των μοντέλων άλλων μεγάλων ερευνητών.

9.Υπολογισμός Συντελεστή Θερμικής Διαστολής α_c

9.1 Θεωρητικός Υπολογισμός Θερμικής Διαστολής α_c

Θεωρούμε και πάλι τα δύο σφαιρικά μοντέλα που περιγράφονται στο κεφάλαιο 4. Τα επταφασικά μοντέλα που χρησιμοποιούμε αποτελούνται από δύο περιοχές εγκλεισμάτων κόκκων σιδήρου (περιοχές 1 και 5) και δύο περιοχές μήτρας εποξειδικής ρητίνης (περιοχές 3 και 7). Ανάμεσα σε αυτές θεωρούμε ότι αναπτύσσεται περιοχή ενδιάμεσης φάσης (περιοχές 2,4 και 6).

Το μέσο μέτρο ελαστικότητας σε αυτές καθώς και ο μέσος λόγος Poisson που τους αντιστοιχεί E_2, E_4, E_6 και ν_2, ν_4, ν_6 προσδιορίστηκαν στο κεφάλαιο 6 όπως και οι ακτίνες που αντιστοιχούν στα όρια της κάθε περιοχής, ώστε στη συνέχεια να γίνει εφικτός ο υπολογισμός του συντελεστή θερμικής διαστολής.

Έστω ότι μεταβάλλουμε τη θερμοκρασία του σύνθετου υλικού κατά ΔT . Εξαιτίας αυτής της θερμοκρασιακής μεταβολής εμφανίζονται εσωτερικές τάσεις στο υλικό. Έστω P_5 η πίεση που ασκείται στο σύνορο 6ης και 7ης φάσης. Ομοίως, λόγω αλληλεπίδρασης 6ης και 5ης φάσης, στο σύνορο τους θα ασκείται μια δύναμη P_4 , λόγω αλληλεπίδρασης 5ης και 4ης φάσης, στο σύνορο τους θα ασκείται μια δύναμη P_3 , λόγω αλληλεπίδρασης 4ης και 3ης φάσης, στο σύνορο τους θα ασκείται μια δύναμη P_2 , λόγω αλληλεπίδρασης 3ης και 2ης φάσης, στο σύνορο τους θα ασκείται μια δύναμη P_1 , λόγω αλληλεπίδρασης 2ης και 1ης φάσης, στο σύνορο τους θα ασκείται μια δύναμη P_0 .

Οι παραμορφώσεις ως προς τη διεύθυνση θ σύμφωνα και με τους προηγούμενους θεωρητικούς υπολογισμούς δίνονται από τους τύπους:

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} 0 = \frac{u}{r}$$

$$\varepsilon_{\theta 1} = -P_0(1-2\nu_1)/E_1$$

$$\varepsilon_{\theta 2} = \varepsilon_{\varphi 2} = \frac{-(P_1 - P_0)b^3 a^3(1+\nu_2)}{2(b^3 - a^3)E_2} \frac{1}{r^3} + \frac{(a^3 P_0 - b^3 P_1)(1-2\nu_2)}{(b^3 - a^3)E_2}$$

$$\varepsilon_{\theta 3} = \frac{-(P_2 - P_1)c^3 b^3(1+\nu_3)}{2(c^3 - b^3)E_3} \frac{1}{r^3} + \frac{(b^3 P_1 - c^3 P_2)(1-2\nu_3)}{(c^3 - b^3)E_3}$$

$$\varepsilon_{\theta 4} = \frac{-(P_3 - P_2)d^3 c^3(1+\nu_4)}{2(d^3 - c^3)E_4} \frac{1}{r^3} + \frac{(c^3 P_2 - d^3 P_3)(1-2\nu_4)}{(d^3 - c^3)E_4}$$

$$\varepsilon_{\theta 5} = \frac{-(P_4 - P_3)e^3 d^3(1+\nu_5)}{2(e^3 - d^3)E_5} \frac{1}{r^3} + \frac{(d^3 P_3 - e^3 P_4)(1-2\nu_5)}{(e^3 - d^3)E_5}$$

$$\varepsilon_{\theta 6} = \frac{-(P_5 - P_4)f^3 e^3(1+\nu_6)}{2(f^3 - e^3)E_6} \frac{1}{r^3} + \frac{(e^3 P_4 - f^3 P_5)(1-2\nu_6)}{(f^3 - e^3)E_6}$$

$$\varepsilon_{\theta 7} = \frac{P_5 f^3 \left[g^3(1+\nu_7) + 2r^3(1-2\nu_7) \right]}{2(g^3 - f^3)E_7 r^3}$$

Οι συνοριακές συνθήκες είναι οι εξής:

$$\text{Για } r=a : \varepsilon_{\theta 1} = \alpha_1 \Delta T$$

$$r=b : \varepsilon_{\theta 2} = \alpha_2 \Delta T$$

$$r=c : \varepsilon_{\theta 3} = \alpha_3 \Delta T$$

$$r=d : \varepsilon_{\theta 4} = \alpha_4 \Delta T$$

$$r=e : \varepsilon_{\theta 5} = \alpha_5 \Delta T$$

$$r=f : \varepsilon_{\theta 6} = \alpha_6 \Delta T$$

$$r=g : \varepsilon_{\theta 7} = \alpha_7 \Delta T$$

Αφαιρώντας κατά μέλη προκύπτει:

$$\varepsilon_{\theta 2}-\varepsilon_{\theta 1}=\left(\alpha_2-\alpha_1\right) \Delta T$$

$$\varepsilon_{\theta 3}-\varepsilon_{\theta 2}=\left(\alpha_3-\alpha_2\right) \Delta T$$

$$\varepsilon_{\theta 4}-\varepsilon_{\theta 3}=\left(\alpha_4-\alpha_3\right) \Delta T$$

$$\varepsilon_{\theta 5}-\varepsilon_{\theta 4}=\left(\alpha_5-\alpha_4\right) \Delta T$$

$$\varepsilon_{\theta 6}-\varepsilon_{\theta 5}=\left(\alpha_6-\alpha_5\right) \Delta T$$

$$\varepsilon_{\theta 7}-\varepsilon_{\theta 6}=\left(\alpha_7-\alpha_6\right) \Delta T$$

Ισχύει :

$$U_1=\frac{a^3}{g^3}$$

$$U_2=\frac{b^3-a^3}{g^3}$$

$$U_3=\frac{c^3-b^3}{g^3}$$

$$U_4=\frac{d^3-c^3}{g^3}$$

$$U_5=\frac{e^3-d^3}{g^3}$$

$$U_6=\frac{f^3-e^3}{g^3}$$

$$U_7=\frac{g^3-f^3}{g^3}$$

Ύστερα από πράξεις έχουμε :

$$(a_2 - a_1)\Delta T = \frac{P_0 \left\{ \left[(U_1 + U_2)(1 + v_2) + 2U_1(1 - 2v_2) \right] E_1 + 2U_2(1 - 2v_2)E_2 \right\} - P_1 3(U_1 + U_2)(1 - v_2)E_1}{2U_2 E_1 E_2}$$

$$(a_3 - a_2)\Delta T = \frac{P_1 \left\{ U_2 E_2 \left[(U_1 + U_2 + U_3)(1 + v_3) + 2(U_1 + U_2)(1 - 2v_3) \right] + E_3 U_3 \left[U_1(1 + v_2) + 2(U_1 + U_2)(1 - 2v_2) \right] \right\} - P_0 E_3 U_3 3U_1(1 - v_2) - P_2 E_2 U_2 3(U_1 + U_2 + U_3)(1 - v_3)}{2U_3 U_2 E_2 E_3}$$

$$(a_4 - a_3)\Delta T = \frac{P_2 \left\{ U_3 E_3 \left[(U_1 + U_2 + U_3 + U_4)(1 + v_4) + 2(U_1 + U_2 + U_3)(1 - 2v_4) \right] + E_4 U_4 \left[(U_1 + U_2)(1 + v_3) + 2(U_1 + U_2 + U_3)(1 - 2v_3) \right] \right\} - P_1 E_4 U_4 3(U_1 + U_2)(1 - v_3) - P_3 E_3 U_3 3(U_1 + U_2 + U_3 + U_4)(1 - v_4)}{2U_4 U_3 E_4 E_3}$$

$$(a_5 - a_4)\Delta T = \frac{P_3 \left\{ U_4 E_4 \left[(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5)(1 + v_5) + 2(U_1 + U_2 + U_3 + U_4)(1 - 2v_5) \right] + E_5 U_5 \left[(U_1 + U_2 + U_3)(1 + v_4) + 2(U_1 + U_2 + U_3 + U_4)(1 - 2v_4) \right] \right\} - P_2 E_5 U_5 3(U_1 + U_2 + U_3)(1 - v_4) - P_4 E_4 U_4 3(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5)(1 - v_5)}{2U_5 U_4 E_5 E_4}$$

$$(a_6 - a_5)\Delta T = \frac{P_4 \left\{ U_5 E_5 \left[(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6)(1 + v_6) + 2(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5)(1 - 2v_6) \right] + E_6 U_6 \left[(U_1 + U_2 + U_3 + U_4)(1 + v_5) + 2(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5)(1 - 2v_5) \right] \right\} - P_3 E_6 U_6 3(U_1 + U_2 + U_3 + U_4)(1 - v_5) - P_5 E_5 U_5 3(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6)(1 - v_6)}{2U_5 U_6 E_5 E_6}$$

$$a_7 - a_6 \Delta T = \frac{P_5 \left\{ U_6 E_6 \left[U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7 (1 + v_7) + 2(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6)(1 - 2v_7) \right] + E_7 U_7 \left[(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5)(1 + v_6) + 2(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6)(1 - 2v_6) \right] \right\} - P_4 E_7 U_7 3(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5)(1 - v_6)}{2U_7 U_6 E_7 E_6}$$

Θέτω τους εξής συντελεστές :

$$A = \left[(U_1 + U_2)(1 + v_2) + 2U_1(1 - 2v_2) \right] E_1 + 2U_2(1 - 2v_1)E_2$$

$$B = 3(U_1 + U_2)(1 - v_2)E_1$$

$$\Gamma = U_2 E_2 \left[(U_1 + U_2 + U_3)(1 + v_3) + 2(U_1 + U_2)(1 - 2v_3) \right] + E_3 U_3 \left[U_1(1 + v_2) + 2(U_1 + U_2)(1 - 2v_2) \right]$$

$$\Delta = 3E_3 U_3 (U_1)(1 - v_2)$$

$$Z = 3E_2 U_2 (U_1 + U_2 + U_3)(1 - v_3)$$

$$H = U_3 E_3 \left[(U_1 + U_2 + U_3 + U_4)(1 + v_4) + 2(U_1 + U_2 + U_3)(1 - 2v_4) \right] + E_4 U_4 \left[(U_1 + U_2)(1 + v_3) + 2(U_1 + U_2 + U_3)(1 - 2v_3) \right]$$

$$\Theta = 3E_4 U_4 (U_1 + U_2)(1 - v_3)$$

$$I = 3E_3 U_3 (U_1 + U_2 + U_3 + U_4)(1 - v_4)$$

$$K = U_4 E_4 \left[(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5)(1 + v_5) + 2(U_1 + U_2 + U_3 + U_4)(1 - 2v_5) \right] + E_5 U_5 \left[\begin{array}{l} (U_1 + U_2 + U_3)(1 + v_4) + \\ 2(U_1 + U_2 + U_3 + U_4)(1 - 2v_4) \end{array} \right]$$

$$\Lambda = 3E_5 U_5 (U_1 + U_2 + U_3)(1 - v_4)$$

$$M = 3E_4 U_4 (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5)(1 - v_5)$$

$$N = U_5 E_5 \left[(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6)(1 + v_6) + 2(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5)(1 - 2v_6) \right] + E_6 U_6 \left[\begin{array}{l} (U_1 + U_2 + U_3 + U_4)(1 + v_5) + \\ 2(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5)(1 - 2v_5) \end{array} \right]$$

$$\Xi = 3E_6 U_6 (U_1 + U_2 + U_3 + U_4)(1 - v_5)$$

$$O = 3E_5 U_5 (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6)(1 - v_6)$$

$$\Pi = U_6 E_6 \left[(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7)(1 + v_7) + 2(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6)(1 - 2v_7) \right] + E_7 U_7 \left[(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5)(1 + v_6) + 2(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6)(1 - 2v_6) \right]$$

$$P = 3E_7 U_7 (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5)(1 - v_6)$$

Άρα προκύπτει:

$$(\alpha_2 - \alpha_1) 2\Delta T U_2 U_1 E_2 E_1 = A P_0 - B P_1 \quad (1)$$

$$(\alpha_3 - \alpha_2) 2\Delta T U_2 U_3 E_2 E_3 = \Gamma P_1 - \Delta P_0 - Z P_2 \quad (2)$$

$$(\alpha_4 - \alpha_3) 2\Delta T U_3 U_4 E_4 E_3 = H P_2 - \Theta P_1 - I P_3 \quad (3)$$

$$(\alpha_5 - \alpha_4) 2\Delta T U_4 U_5 E_4 E_5 = K P_3 - \Lambda P_2 - M P_4 \quad (4)$$

$$(\alpha_6 - \alpha_5) 2\Delta T U_5 U_6 E_5 E_6 = N P_4 - \Xi P_3 - O P_4 \quad (5)$$

$$(\alpha_7 - \alpha_6) 2\Delta T U_6 U_7 E_6 E_7 = \Pi P_5 - P P_4 \quad (6)$$

Από τη λύση του συστήματος προκύπτει :

$$P_5 = \frac{2\Delta T}{\Pi - \frac{P_0}{N - \frac{\Xi M}{K - \frac{\Lambda I}{H - \frac{\Theta Z}{\Gamma - \frac{\Delta B}{A}}}}}} \left\{ \begin{aligned} & \left((a_7 - a_6)U_6U_7E_7E_6 + \frac{P}{\Xi M} \left((a_6 - a_5)U_6U_5E_5E_6 + \right. \right. \\ & \frac{\Xi}{K - \frac{\Lambda I}{H - \frac{\Theta Z}{\Gamma - \frac{\Delta B}{A}}} \left((a_5 - a_4)U_5U_4E_5E_4 + \right. \\ & \frac{\Lambda}{H - \frac{\Theta Z}{\Gamma - \frac{\Delta B}{A}}} \left((a_4 - a_3)U_4U_3E_4E_3 + \right. \\ & \left. \left. \left. \frac{\Theta}{\Gamma - \frac{\Delta B}{A}} \left((a_3 - a_2)U_2U_3E_2E_3 + \frac{\Delta}{A} (a_2 - a_1)U_2E_2E_1 \right) \right) \right) \right) \end{aligned} \right\}$$

Και τελικά

$$\alpha_c = \alpha_7 - \frac{(P_5 \cdot f^3 3(1 - \nu_7))}{2(g^3 - f^3)E_7\Delta T}$$

$$a_7 = a_m = 65,26 \cdot 10^{-6} \cdot C^{-1}$$

Όπου $\nu_7 = \nu_m = 0,36$

$$E_7 = E_m = 3,5 \cdot 10^9 Pa$$

Επίσης τα α_i στις ενδιάμεσες φάσεις (φάσεις 2, 4, 6) το υπολογίζουμε από το τριφασικό μοντέλο και για παραβολική μεταβολή του συντελεστή διαστολής όπως φαίνεται στον πίνακα:

Uf	α_i ($10^{-6} C^{-1}$)
0,05	45,20
0,1	45,28
0,15	45,38
0,2	45,52
0,25	45,66

Πίνακας 9.1

Η φυσική συμπεριφορά του συστήματος εξαρτάται ξεχωριστά από τις ιδιότητες του εγκλείσματος και της μήτρας, όπως επίσης και από την αλληλεπίδρασή τους. Αυτή η αλληλεπίδραση είναι δυνατό να ληφθεί υπόψη υπό τη μορφή της ενδιάμεσης περιοχής, το οποίο δημιουργείται κατά την παραγωγή του σύνθετου υλικού και παίζει ένα πολύ σημαντικό ρόλο στη γενική θερμομηχανική συμπεριφορά του σύνθετου υλικού.

Όπως και στο 5^ο κεφάλαιο και εδώ χρησιμοποιούμε διαφορετικές μεταβολές του μέτρου ελαστικότητας, του λόγου Poisson και του συντελεστή θερμικής διαστολής.

Για το μέτρο ελαστικότητας και τον λόγο Poisson ισχύουν οι ίδιες τιμές όπως στο κεφάλαιο 5 για το κάθε ένα από τα δύο επταφασικά κυβικά μοντέλα.

Για τον συντελεστή θερμικής διαστολής για την δεύτερη ενδιάμεση φάση του κυβικού επταφασικού μοντέλου 1, δηλαδή την τέταρτη φάση του επταφασικού κυβικού μοντέλου 1 έχουμε τα παρακάτω διαγράμματα για διαφορετική μεταβολή και διαφορετική επίδραση n . Θεωρούμε και πάλι την ενδιάμεση φάση σαν αλλοιωμένη μήτρα.

r (μm)	Συντελεστής θερμικής διαστολής $\alpha(10^{-6}C^{-1})$ (Γραμμικό Μοντέλο)				
	$\eta=0,2$	$\eta=0,4$	$\eta=0,6$	$\eta=0,8$	$\eta=1$
75,00	3	6	9	12	15
75,09	8,726	11,426	14,126	16,826	19,526
75,19	14,452	16,852	19,252	21,652	24,052
75,28	20,178	22,278	24,378	26,478	28,578
75,38	25,904	27,704	29,504	31,304	33,104
75,47	31,63	33,13	34,63	36,13	37,63
75,57	37,356	38,556	39,756	40,956	42,156
75,66	43,082	43,982	44,882	45,782	46,682
75,76	48,808	49,408	50,008	50,608	51,208
75,85	54,534	54,834	55,134	55,434	55,734
75,95	65,26	65,26	65,26	65,26	65,26

Πίνακας 9.2

r (μm)	Συντελεστής θερμικής διαστολής $\alpha(10^{-6}C^{-1})$ (Παραβολικό Μοντέλο)				
	$\eta=0,2$	$\eta=0,4$	$\eta=0,6$	$\eta=0,8$	$\eta=1$
75,00	3	6	9	12	15
75,09	13,8794	16,3094	18,7394	21,1694	23,5994
75,19	23,6135	25,5336	27,4536	29,3736	31,2936
75,28	32,2026	33,6726	35,1426	36,6126	38,0826
75,38	39,6464	40,7264	41,8064	42,8864	43,9664
75,47	45,9449	46,695	47,445	48,195	48,945
75,57	51,0984	51,5784	52,0584	52,5384	53,0184
75,66	55,1066	55,3766	55,6466	55,9166	56,1866
75,76	57,9696	58,0896	58,2096	58,3296	58,4496
75,85	59,6874	59,7174	59,7474	59,7774	59,8074
75,95	65,26	65,26	65,26	65,26	65,26

Πίνακας 9.3

r (μm)	Συντελεστής θερμικής διαστολής α(10 ⁻⁶ C ⁻¹) (Υπερβολικό Μοντέλο)				
	η= 0,2	η= 0,4	η= 0,6	η= 0,8	η= 1
75,00	3	6	9	12	15
75,09	8,73369199	11,43328899	14,13289	16,83248	19,53208
75,19	14,46567261	16,86495627	19,26424	21,66352	24,06281
75,28	20,19594262	22,29500256	24,39406	26,49312	28,59218
75,38	25,92450279	27,7234286	29,52235	31,32128	33,12021
75,47	31,65135389	33,15023511	34,64912	36,148	37,64688
75,57	37,37649668	38,5754228	39,77435	40,97328	42,1722
75,66	43,09993192	43,99899242	44,89805	45,79711	46,69617
75,76	48,82166038	49,42094467	50,02023	50,61951	51,2188
75,85	54,54168282	54,84128029	55,14088	55,44048	55,74007
75,95	65,26	65,26	65,26	65,26	65,26

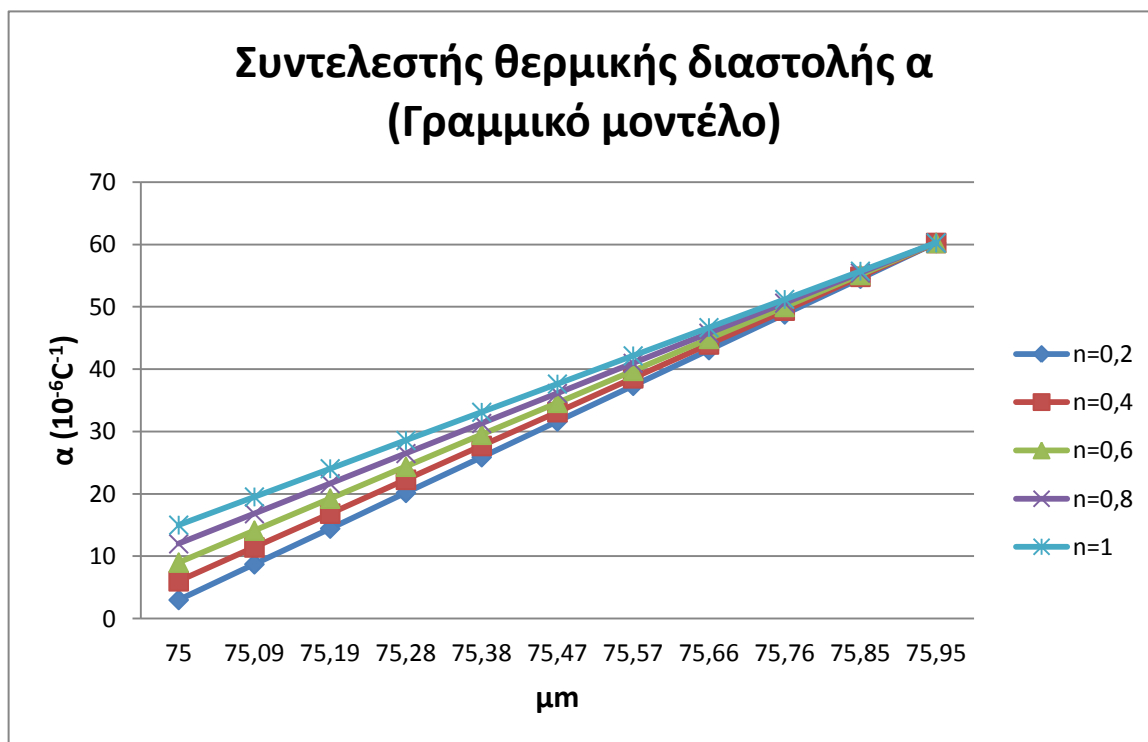
Πίνακας 9.4

r (μm)	Συντελεστής θερμικής διαστολής α(10 ⁻⁶ C ⁻¹) (Λογαριθμικό Μοντέλο)				
	η= 0,2	η= 0,4	η= 0,6	η= 0,8	η= 1
75,00	3	6	9	12	15
75,09	8,72984523	11,42964377	14,12944	16,82924	19,52903938
75,19	14,45883529	16,85847717	19,25812	21,65776	24,05740281
75,28	20,18697042	22,28650044	24,38603	26,48556	28,58509049
75,38	25,91425089	27,71371382	29,51318	31,31264	33,11210261
75,47	31,64067695	33,14011755	34,63956	36,139	37,63843937
75,57	37,36624885	38,56571189	39,76517	40,96464	42,16410099
75,66	43,09096685	43,99049705	44,89003	45,78956	46,68908767
75,76	48,81483121	49,4144733	50,01412	50,61376	51,21339959
75,85	54,53784217	54,83764087	55,13744	55,43724	55,73703697
75,95	65,26	65,26	65,26	65,26	65,26

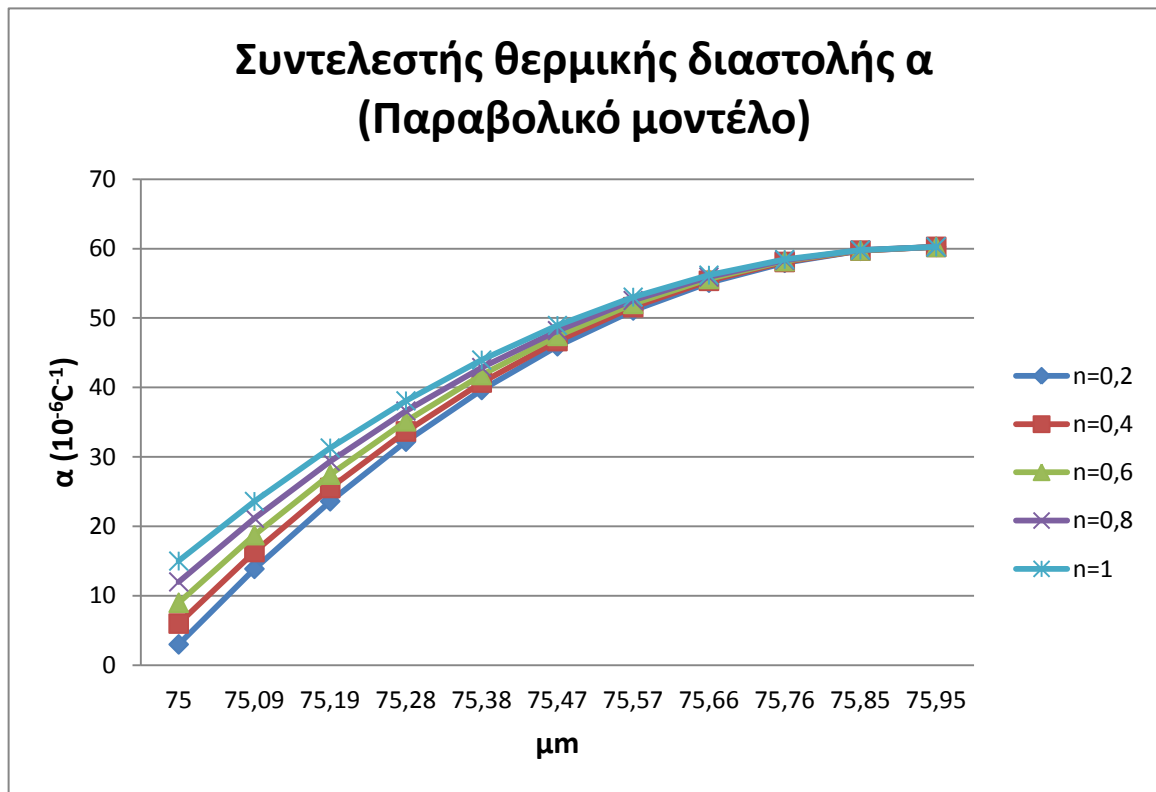
Πίνακας 9.5

r (μm)	Συντελεστής θερμικής διαστολής α(10 ⁻⁶ C ⁻¹) (Εκθετικό Μοντέλο)				
	η= 0,2	η= 0,4	η= 0,6	η= 0,8	η= 1
75,00	3	6	9	12	15
75,09	8,72984523	11,42964377	14,12944	16,82924	19,52903938
75,19	14,45883529	16,85847717	19,25812	21,65776	24,05740281
75,28	20,18697042	22,28650044	24,38603	26,48556	28,58509049
75,38	25,91425089	27,71371382	29,51318	31,31264	33,11210261
75,47	31,64067695	33,14011755	34,63956	36,139	37,63843937
75,57	37,36624885	38,56571189	39,76517	40,96464	42,16410099
75,66	43,09096685	43,99049705	44,89003	45,78956	46,68908767
75,76	48,81483121	49,4144733	50,01412	50,61376	51,21339959
75,85	54,53784217	54,83764087	55,13744	55,43724	55,73703697
75,95	65,26	65,26	65,26	65,26	65,26

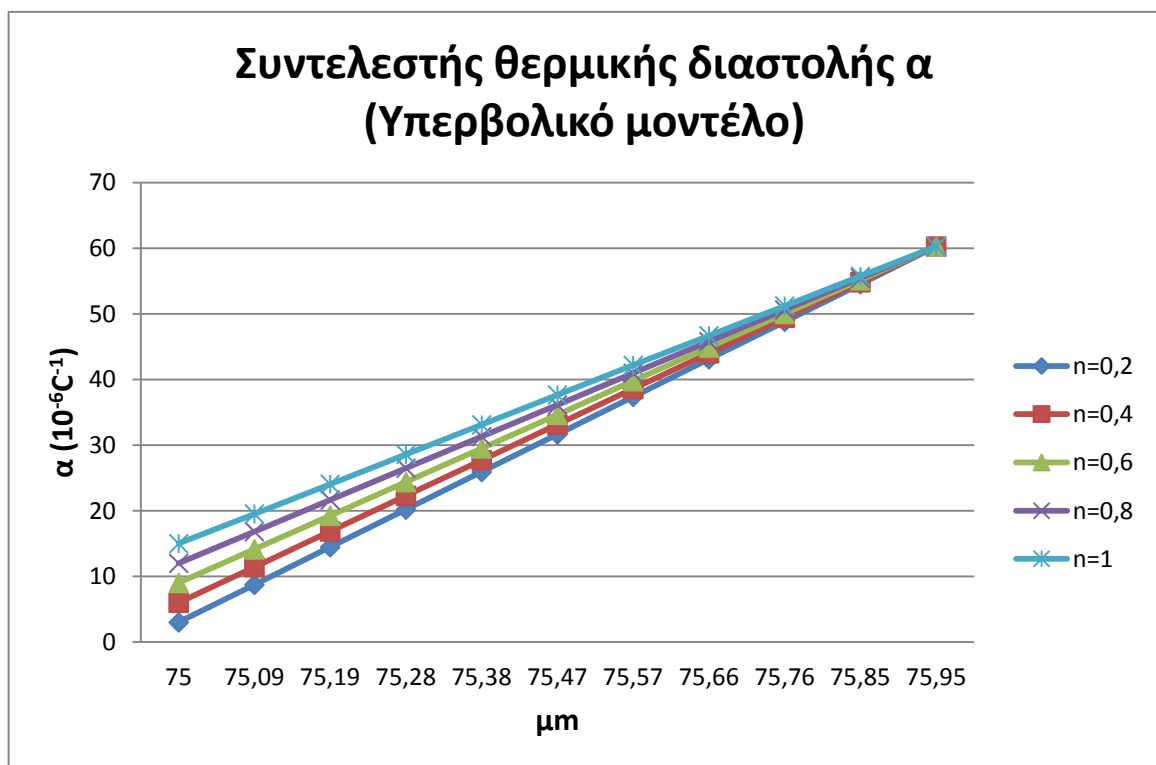
Πίνακας 9.6



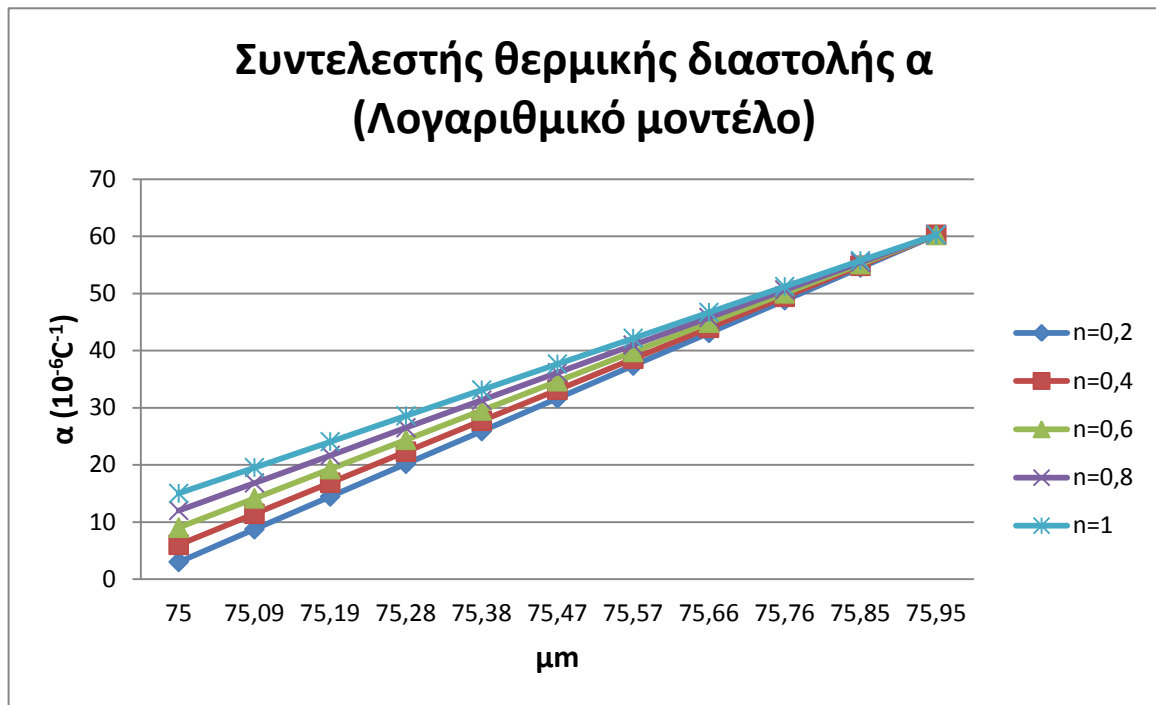
Διάγραμμα 9.1



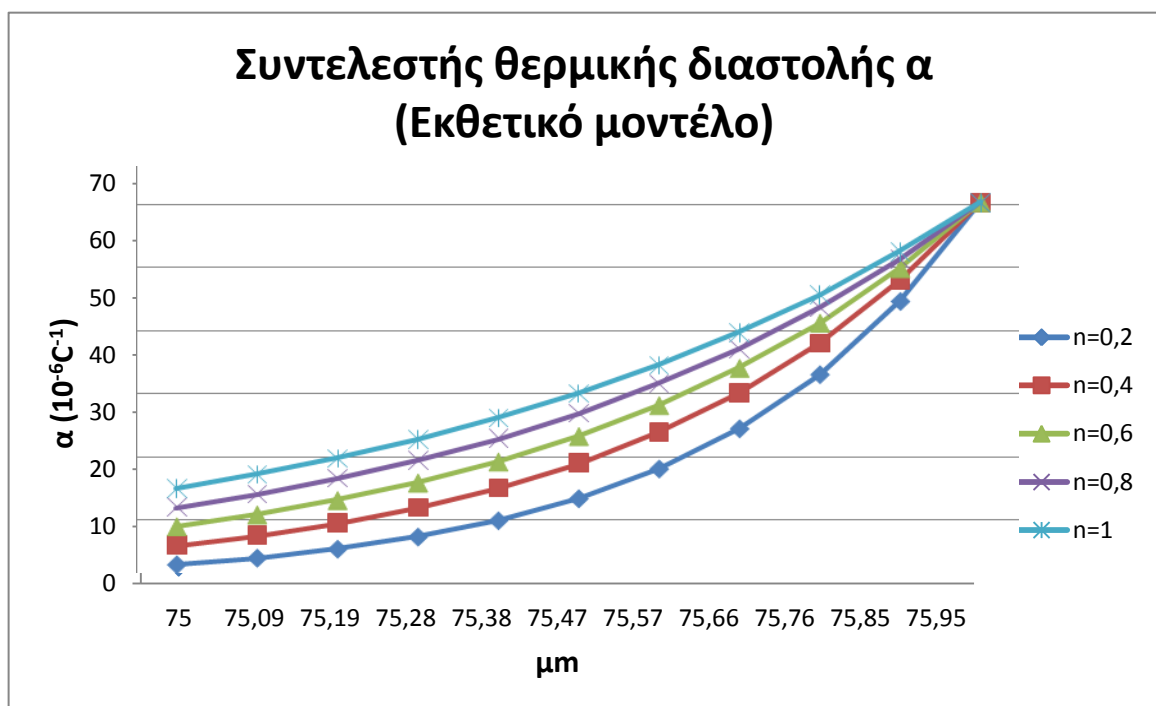
Διάγραμμα 9.2



Διάγραμμα 9.3



Διάγραμμα 9.4



Διάγραμμα 9.5

Σε όλα τα παραπάνω διαγράμματα βλέπουμε πως ο η τιμή του συντελεστή θερμικής διαστολής αυξάνεται ανάλογα με την ακτίνα. Αυτό είναι και αναμενόμενο διότι όσο αυξάνει η ακτίνα απομακρύνεται από την περιοχή του εγκλείσματος και φτάνει στην περιοχή της μήτρας.

9.2 Σύγκριση με άλλα θεωρητικά μοντέλα

9.2.1 Τύποι συντελεστή θερμικής διαστολής α_c

Στις παρακάτω σχέσεις το σύμβολο γ εκφράζει το συντελεστή κυβικής διαστολής ο οποίος για ένα ομογενές και ισότροπο υλικό, συνδέεται με το συντελεστή γραμμικής διαστολής α με τη σχέση

$$\gamma = 3\alpha$$

Εξίσωση Kerner:

$$\gamma_c = U_f \gamma_f + U_m \gamma_m + U_m \nu_f (\gamma_m - \gamma_c) q$$

Όπου η παράμετρος q δίνεται από τη σχέση :

$$q = \frac{\frac{1}{K_m} - \frac{1}{K_f}}{\frac{U_f}{K_f} + \frac{U_m}{K_m} + 3 \frac{1}{4G_m}}$$

Και K το μέτρο διόγκωσης.

Εξίσωση Blackburn:

$$\gamma_c = \gamma_f + \frac{\frac{3}{2}(1-\nu_f)U_m(\gamma_m - \gamma_f)}{\frac{1}{2}(1+\nu_f) + U_m(1-2\nu_f) + (1-2\nu_m)\frac{E_f}{E_m}U_f}$$

Εξίσωση Tummala-Friedberg:

$$\gamma_c = \gamma_m - U_f q (\gamma_m - \gamma_f)$$

Όπου

$$q = \frac{\frac{1 + \nu_m}{2E_m}}{\frac{1 + \nu_m}{2E_m} + \frac{1 - 2\nu_f}{E_f}}$$

Εξίσωση Wang-Kwei:

$$\gamma_c = \gamma_m - U_f q (\gamma_m - \gamma_f)$$

Όπου

$$q = \frac{\frac{3E_f}{E_m} U_f}{\frac{E_f}{E_m} \left[2U_f (1 - 2\nu_m) + (1 + \nu_m) \right] + 2U_m (1 - 2\nu_f)}$$

Εξίσωση Turner:

$$\gamma_c = \frac{U_m \gamma_m k_m + U_f \gamma_f k_f}{U_m k_m + U_f k_f}$$

Εξίσωση Fahmi-Ragai:

$$a_c = a_m - \frac{3U_f (a_m - a_f)(1 - \nu_m)}{2(1 - 2\nu_f)(1 - U_f) \frac{E_m}{E_f} + 2U_f (1 - 2\nu_m) + (1 + \nu_m)}$$

9.2.2 Εφαρμογή των Μοντέλων και των Θεωρητικών Σχέσεων

Η εφαρμογή των θεωρητικών σχέσεων έγινε για ένα κοκκώδες σύνθετο υλικό αποτελούμενο από εποξειδική ρητίνη και κόκκους σιδήρου.

Οι τιμές των ελαστικών σταθερών των παραπάνω υλικών φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Ιδιότητες της μήτρας και των εγκλεισμάτων

Ιδιότητες	Σύμβολα	Μονάδε	Σίδηρος	Ρητίνη
Σταθερές του Lame	λ μ M	N/m^2 N/m^2	$11,20 \times 10^{10}$	$3,34 \times 10^9$ $1,30 \times 10^9$
Μέτρο Ελαστικότητας	E	N/m^2	$21,00 \times 10^{10}$	$3,53 \times 10^9$
Μέτρο Διογκώσεως	K	N/m^2	$16,70 \times 10^{10}$	$4,21 \times 10^9$
Λόγος Poisson	ν	—	0,29	0,36
Πυκνότητα	ρ	gr/cm^3	7,80	1,19
Συντελεστής θερμικής	a	C^{-1}	$15,00 \times 10^{-6}$	$65,26 \times 10^{-6}$

Πίνακας 9.7

Η διάμετρος των σφαιρικών εγκλεισμάτων σιδήρου είναι ίση με $150\mu m$, άρα λοιπόν η ακτίνα r_f , της οποίας η τιμή απαιτείται στους υπολογισμούς είναι:

$$r_f = 75\mu m$$

Τελικά προκύπτουν τα παρακάτω αποτελέσματα:

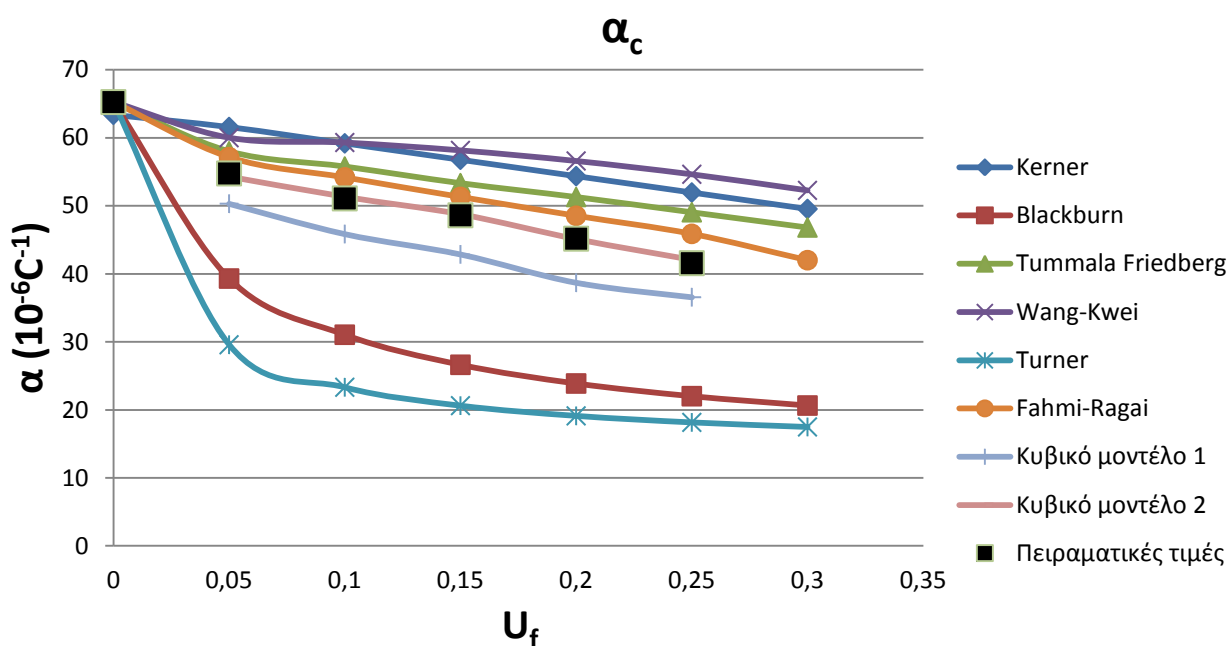
U_f	Κυβικό Μοντέλο 1 $\alpha_c(10^{-6}C^{-1})$	Κυβικό Μοντέλο 2 $\alpha_c(10^{-6}C^{-1})$
0,05	50,32	54,27
0,1	45,86	51,31
0,15	42,86	48,75
0,2	38,7	45,1
0,25	36,57	42,04

Πίνακας 9.8

$10^{-6}C^{-1}$ U_f	Πειραματικά αποτελέσματα	Kerner	Blackburn	Tummala Friedberg	Wang- Kwei	Turner	Fahmi- Ragai
0	65,26	63,39	65,26	65,26	65,26	65,26	65,26
0,05	54,76	61,59	39,31	58,02	60,02	29,58	57,16
0,1	51,09	59,19	31,05	55,78	59,31	23,32	54,18
0,15	48,61	56,78	26,63	53,34	58,16	20,62	51,31
0,2	41,57	54,37	23,88	51,3	56,6	19,12	48,54
0,25	38,6	51,96	22,01	49,06	54,64	18,16	45,88
0,3		49,54	20,64	46,82	52,28	17,49	42,01

Πίνακας 9.9

Σύγκριση διαφορετικών σχέσεων για τον υπολογισμό του θερμικού συντελεστή διαστολής



Διάγραμμα 9.6

Το διάγραμμα 9.6 αποτελεί τον πυρήνα αυτού του κεφαλαίου. Είναι η γραφική παράσταση του κυβικού μοντέλου 1 και 2 σε σχέση με διαγράμματα που έχουν προτείνει στο παρελθόν σπουδαίοι επιστήμονες.

Παρατηρούμε ότι όλες οι εκφράσεις δίνουν τιμές για το α_c που μειώνονται αυξανόμενης της περιεκτικότητας του εγκλείσματος.

Επίσης παρατηρούμε ότι κάποια μοντέλα άλλων ερευνητών έχουν μεγάλη απόκλιση από τις πειραματικές μετρήσεις. Τη μεγαλύτερη απόκλιση την παρουσιάζει το μοντέλο του Turner και ακολουθείται από το μοντέλο του Blackburn. Το μοντέλα Kerner και Tummala Friedberg [52,54] δίνει καλύτερα αποτελέσματα όμως το καλύτερο θεωρητικό μοντέλο προκύπτει το κυβικό μοντέλο 2 που αναπτύξαμε σε αυτή την εργασία για το υλικό αυτό.

Το κυβικό μοντέλο 2 αποτελεί μια πολύ καλή προσέγγιση της πραγματικότητας του σύνθετου υλικού μας, δηλαδή ενός σύνθετου υλικού που έχει ως εγκλείσμα κόκκους σιδήρου διαμέτρου $d=150\mu\text{m}$ και μήτρα

εποξειδική ρητίνη, σε αντίθεση με το κυβικό μοντέλο 1 που αναπτύξαμε το οποίο δεν δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα.

Για να δούμε πόσο προσεγγίζουν οι θεωρητικές καμπύλες για το κάθε μοντέλο, τα πειραματικά σημεία, εισάγουμε και εδώ από τη στατιστική τον δείκτη προσαρμογής που φανερώνει πόσο καλά προσαρμόζεται η θεωρητική καμπύλη στα πειραματικά σημεία.

Ερευνητής	r (%)
Fahmi-Ragai	0,9821
Tummala Friedberg	0,9668
Kerner	0,9422
Wang-Kwei	0,9298
Blackburn	0,2102
Turner	0,1203
Κυβικό μοντέλο 1	0,9715
Κυβικό μοντέλο 2	0,9999

Πίνακας 9.10

Και εδώ βλέπουμε πως το κυβικό μοντέλο 2 έχει τον μεγαλύτερο δείκτη προσαρμογής από όλα τα υπόλοιπα θεωρητικά μοντέλα όπως παρατηρήσαμε και παραπάνω στο διάγραμμα.

9.3 Γενικά συμπεράσματα

Σ' αυτήν την εργασία έγινε η θεωρητική μελέτη προσδιορισμού του μέτρου ελαστικότητας ν , του λόγου Poisson και του συντελεστή θερμικής διαστολής κοκκώδους σύνθετου υλικού λαμβάνοντας υπόψη την επίδραση των κόκκων αλλά και της ενδιάμεσου φάσεως.

Για το σκοπό αυτό θεωρήσαμε ότι η κατανομή των εγκλεισμάτων στο χώρο ν , εν σχέσει με τη μήτρα είναι συγκεκριμένη και μοντελοποιείται με τη μορφή κύβου με δύο πιθανούς τρόπους ενώ θεωρήσαμε και την ύπαρξη μιας τρίτης φάσης (εκτός της μήτρας και των εγκλεισμάτων) η οποία συνδυάζει χαρακτηριστικά και των δυο άλλων φάσεων και καλείται ενδιάμεση φάση (*Interface*). Έπειτα αντιστοιχίσαμε το κυβικό μοντέλο σε αντίστοιχο σφαιρικό ώστε να απλουστευτούν οι υπολογισμοί.

Αρχικά υπολογίσαμε τη μέση τιμή του μέτρου ελαστικότητας της ενδιάμεσης φάσης E_i που έδινε το καθένα από τα δύο κυβικά μοντέλα και συγκρίναμε τα αποτελέσματα που έδωσε το κάθε μοντέλο. Έπειτα υπολογίσαμε το μέτρο ελαστικότητας ν , τον λόγο Poisson και τον συντελεστή θερμικής διαστολής του σύνθετου υλικού E_c , ν_c και α_c όπως αυτό προέκυψε από τη διαφορετική τιμή του E_i που έδωσε το κάθε κυβικό μοντέλο και συγκρίναμε τα αποτελέσματα τόσο μεταξύ τους, όσο και με πειραματικά δεδομένα αλλά και με αποτελέσματα άλλων επιστημόνων.

Το μέτρο ελαστικότητας που υπολογίσαμε από το δεύτερο κυβικό μοντέλο που αναπτύξαμε δίνει απόλυτα ικανοποιητικές τιμές οι οποίες βρίσκονται πολύ κοντά στις πειραματικές και σε αυτές που δίνει η θεωρητική σχέση του Counto που θεωρείται ως η καλύτερη. Ο συντελεστής θερμικής διαστολής που υπολογίστηκε από το κυβικό μοντέλο 2 που αναπτύξαμε έχει την καλύτερη σύγκλιση εν συγκρίσει με τα θεωρητικά μοντέλα άλλων ερευνητών ως προς τις πειραματικές τιμές που είχαμε στην διάθεση μας.

Αντιθέτως, οι απλουστεύσεις και οι παραδοχές δεν ευνόησαν το προσεγγιστικό μοντέλο που αναπτύξαμε για τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας και του λόγου Poisson του κοκκώδους σύνθετου υλικού το οποίο παρ' ότι συμπαγές και συντομότερο είχε μέτρια σύγκλιση με τα πειραματικά αποτελέσματα αλλά και με το μοντέλο Counto.

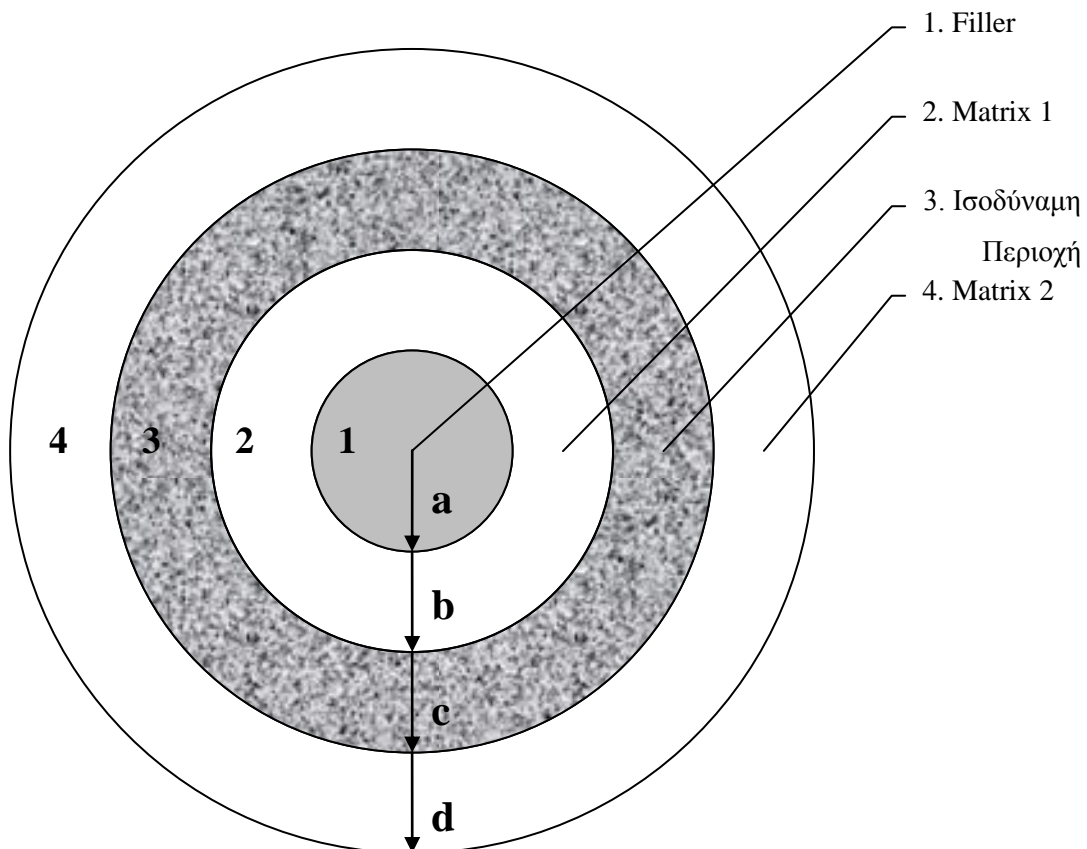
Στον επόμενο πίνακα βλέπουμε τα αποτελέσματα από τα διάφορα μοντέλα που αναπτύξαμε.

U_f	Κυβικό Μοντέλο 1		Κυβικό Μοντέλο 2		Προσεγγιστικό Κυβικό μοντέλο 1	Προσεγγιστικό Κυβικό μοντέλο 2	Πειραματικές Τιμές	
	E_c	α_c	E_c	α_c	E_c	E_c	E_c	α_c
0,05	5,05	50,32	4,55	54,27	3,78	3,78	4,33	54,76
0,1	5,93	45,86	5,05	51,31	3,94	4,28	4,86	51,09
0,15	6,82	42,86	5,60	48,75	4,58	4,55	5,24	48,61
0,2	7,73	38,7	6,18	45,1	5,11	5,05	6,17	45,17
0,25	9,94	36,57	7,52	42,04	6,38	6,12	7,14	41,57

Πίνακας 9.11

10. Θεωρητική ανάπτυξη τετραφασικού μοντέλου με ισοδύναμη περιοχή

10.1 Υπολογισμός ακτίνων τετραφασικού μοντέλου



Σχήμα 10.1 Τετραφασικό σφαιρικό μοντέλο σε τομή

Θεωρούμε τη διάταξη του τετραφασικού κυβικού μοντέλου 1 (κεφάλαιο 4.2) όπου 8 σφαιρικά εγκλείσματα καταλαμβάνουν τις κορυφές ενός κύβου ακμής λ , και 1 εγκλείσμα το κέντρο βάρους του κύβου. Στο σχήμα 10.1 ανάγουμε το κυβικό μοντέλο σε ένα ισοδύναμο σφαιρικό για να εκμεταλλευτούμε τη σφαιρική συμμετρία και τις απλοποιήσεις που θα προκύψουν από αυτή.

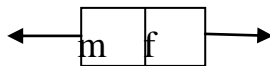
Σε αντίθεση όμως με τα σφαιρικά μοντέλα του κεφαλαίου 4, θεωρούμε ότι μεταξύ των ακτίνων b και c (φάση 3) έχουμε μία “ισοδύναμη” περιοχή εγκλείσματος και μήτρας.

Συνεπώς, οι ακτίνες θα δίνονται ως εξής:

$$\begin{aligned} a &= r_f & d &= r_f \sqrt[3]{\frac{9}{U_f}} \\ b &= \frac{\lambda\sqrt{3}}{2} - r_f \\ c &= \frac{\lambda\sqrt{3}}{2} + r_f & \lambda &= r_f \sqrt[3]{\frac{3\pi}{2Uf}} \end{aligned}$$

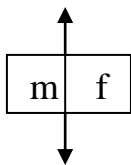
Στην ισοδύναμη περιοχή (περιοχή 3) θα διερευνήσουμε και θα διακρίνουμε 2 περιπτώσεις σχετικά με την σύνδεση του μέτρου ελαστικότητας (E) και του λόγου Poisson (ν) ανάμεσα στο έγκλεισμα και τη μήτρα για την εύρεση του ισοδύναμου μέτρου ελαστικότητας $E_{ισοδ} = E_3$ και ισοδύναμου $\nu_{ισοδ} = \nu_3$. Στην περιοχή 3 θα ισχύει $E_m < E_{ισοδ} < E_f$ και $\nu_f < \nu_{ισοδ} < \nu_m$ και συνεπώς διακρίνουμε:

A. Σε ‘σειρά’:

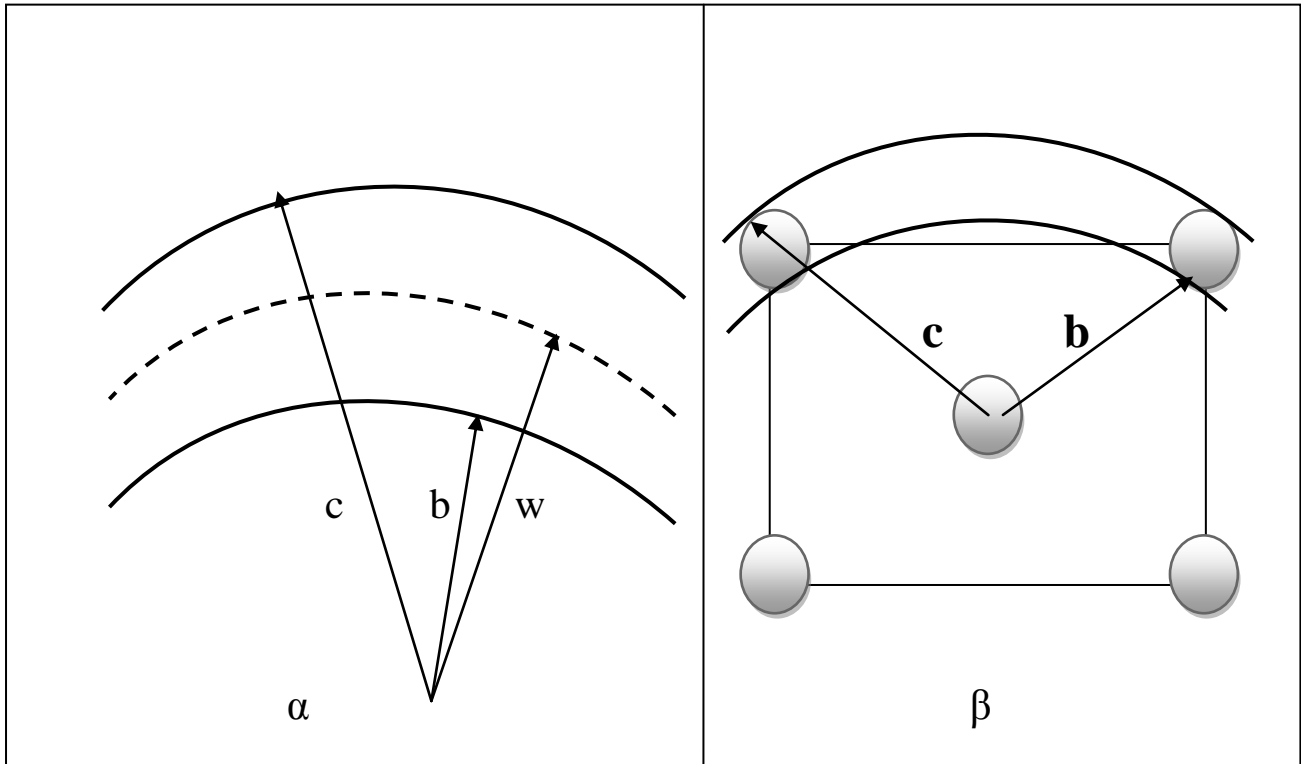


$$\frac{1}{E_{ισοδ}} = \frac{U_{f_{ισοδ}}}{E_f} + \frac{U_{m_{ισοδ}}}{E_m} \Rightarrow E_{ισοδ} = \frac{E_m \cdot E_f}{U_{f_{ισοδ}} (E_m - E_f) + E_f}$$

B. ‘Παράλληλα’:



$$E_{ισοδ} = U_{f_{ισοδ}} E_f + U_{m_{ισοδ}} E_m$$



Σχήμα 10.2 Ισοδύναμη περιοχή

Οι ίδιες σχέσεις για τα μέτρα ελαστικότητας θα ισχύουν και για τους λόγους

Poisson:

$$A) \quad \nu_{ισοδ} = \frac{\nu_m \cdot \nu_f}{U_{fισοδ} (\nu_m - \nu_f) + \nu_f}$$

$$B) \quad \nu_{ισοδ} = U_{fισοδ} \nu_f + U_{mισοδ} \nu_m$$

Από το σχήμα 10.2β $c - w = w - b \Rightarrow w = \frac{b+c}{2}$ έχουμε

Περιοχή 3(ισοδύναμη περιοχή) :

$$V_{f_{ισοδ}} = 8 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot r_f^3$$

$$V_{ισοδ} = \frac{4}{3} \pi (c^3 - b^3)$$

$$U_{f_{ισοδ}} = \frac{V_f}{V_{ισοδ}} = \frac{8r_f^3}{c^3 - b^3}$$

$$V_{m_{ισοδ}} = \frac{4}{3} \pi (c^3 - b^3) - 8 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot r_f^3 = \frac{4}{3} \pi (c^3 - b^3 - 8r_f^3)$$

$$U_{m_{ισοδ}} = \frac{V_{m_{ισοδ}}}{V_{ισοδ}} = \frac{\frac{4}{3} \pi (c^3 - b^3 - 8r_f^3)}{\frac{4}{3} \pi (c^3 - b^3)} = 1 - U_{f_{ισοδ}}$$

10.2 Υπολογισμός μέτρου ελαστικότητας σύνθετου υλικού

Ομοίως με το κεφάλαιο 6 για να υπολογίσουμε το μέτρο ελαστικότητας του σύνθετου υλικού ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία.

Υπολογίζουμε αρχικά την τασική συνάρτηση

$$\Phi_1 = A / r + Br^2$$

$$\Phi_2 = C / r + Dr^2$$

$$\Phi_3 = F / r + Hr^2$$

$$\Phi_4 = J / r + Lr^2$$

Στη θέση $r=0$ πρέπει η τασική συνάρτηση να παίρνει τιμή, οπότε για $r=0$ πρέπει $A=0$.

Οι μετατοπίσεις δίνονται από την παρακάτω σχέση:

$$\vec{u} = \frac{1}{2G} \text{grad}\Phi$$

όπου G το μέτρο διάτμησης :
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Εξαιτίας όμως της σφαιρικής συμμετρίας οι μετατοπίσεις κατά τις διευθύνσεις φ και θ είναι μηδενικές:

$$u_\varphi = u_\theta = 0$$

Οι ακτινικές μετατοπίσεις είναι:

$$u_{r_1} = \frac{Br}{G_1}$$

$$u_{r_2} = \frac{-\frac{C}{r^2} + 2Dr}{2G_2}$$

$$u_{r_3} = \frac{-\frac{F}{r^2} + 2Hr}{2G_3}$$

$$u_{r_4} = \frac{-\frac{J}{r^2} + 2Lr}{2G_4}$$

Οι παραμορφώσεις δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} 0 = \frac{u}{r} \Rightarrow \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} 0 = \frac{u}{r} \Rightarrow \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r}$$

άρα έχουμε:

$$\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{\theta1} = \varepsilon_{\varphi1} = \frac{2B(1+\nu_1)}{E_1}$$

$$\varepsilon_{r2} = \left(\frac{2C}{r^3} + 2D \right) \left(\frac{1+\nu_2}{E_2} \right)$$

$$\varepsilon_{\theta2} = \varepsilon_{\varphi2} = \left(-\frac{C}{r^3} + 2D \right) \left(\frac{1+\nu_2}{E_2} \right)$$

$$\varepsilon_{r3} = \left(\frac{2F}{r^3} + 2H \right) \left(\frac{1+\nu_3}{E_3} \right)$$

$$\varepsilon_{\theta3} = \varepsilon_{\varphi3} = \left(-\frac{F}{r^3} + 2H \right) \left(\frac{1+\nu_3}{E_3} \right)$$

$$\varepsilon_{r4} = \left(\frac{2J}{r^3} + 2L \right) \left(\frac{1+\nu_4}{E_4} \right)$$

$$\varepsilon_{\theta4} = \varepsilon_{\varphi4} = \left(-\frac{J}{r^3} + 2L \right) \left(\frac{1+\nu_4}{E_4} \right)$$

Οι ορθές τάσεις δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\sigma_r = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_r + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \theta$$

όπου $\theta = \varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_\theta$

Άρα τελικά προκύπτουν οι παρακάτω τάσεις:

$$\begin{aligned} \sigma_{r1} &= \frac{E_1}{1+\nu_1} \varepsilon_{r1} + \frac{E_1\nu_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)} \theta_1 = \frac{E_1}{1+\nu_1} \varepsilon_{r1} + \frac{E_1\nu_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)} (\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{\varphi1} + \varepsilon_{\theta1}) \\ &= \frac{E_1}{1+\nu_1} 2B \frac{1+\nu_1}{E_1} + 3 \frac{E_1\nu_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)} 2B \frac{1+\nu_1}{E_1} = 2B + \frac{6B\nu_1}{1-2\nu_1} \Rightarrow \sigma_{r1} = \frac{2B(1+\nu_1)}{1-2\nu_1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sigma_{r1} = \frac{2B(1+\nu_1)}{1-2\nu_1}$$

$$\sigma_{r2} = \frac{E_2}{1+\nu_2} \varepsilon_{r2} + \frac{E_2\nu_2}{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)} (\varepsilon_{r2} + \varepsilon_{\varphi2} + \varepsilon_{\theta2}) =$$

$$\sigma_{r2} = \frac{E_2}{1+\nu_2} \left(\frac{2C}{r^3} + 2D \right) \frac{1+\nu_2}{E_2} + \frac{E_2\nu_2}{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)} \left[\left(\frac{2C}{r^3} + 2D \right) \frac{1+\nu_2}{E_2} + 2 \left(-\frac{C}{r^3} + 2D \right) \frac{1+\nu_2}{E_2} \right] =$$

$$\frac{2C}{r^3} + 2D + \frac{\nu_2}{1-2\nu_2} \left[\frac{2C}{r^3} + 2D - \frac{2C}{r^3} + 4D \right] =$$

$$\frac{2C}{r^3} + 2D + \frac{\nu_2}{1-2\nu_2} 6D \Rightarrow \sigma_{r2} = \frac{2C}{r^3} + 2D \frac{(1+\nu_2)}{1-2\nu_2}$$

$$\Rightarrow \sigma_{r2} = \frac{2C}{r^3} + \frac{2D(1+\nu_2)}{1-2\nu_2}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta 2} &= \frac{E_2}{1+\nu_2} \varepsilon_{\theta 2} + \frac{E_2 \nu_2}{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)} (\varepsilon_{r2} + 2\varepsilon_{\theta 2}) = \\ &= \frac{E_2}{1+\nu_2} \left(-\frac{C}{r^3} + 2D \right) \frac{1+\nu_2}{E_2} + \frac{E_2 \nu_2}{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)} \left[\left(\frac{2C}{r^3} + 2D \right) \frac{1+\nu_2}{E_2} + 2 \left(-\frac{C}{r^3} + 2D \right) \frac{1+\nu_2}{E_2} \right] = \\ &= -\frac{C}{r^3} + 2D + \frac{\nu_2}{1-2\nu_2} (2D + 4D) = -\frac{C}{r^3} + 2D \frac{(1-2\nu_2)}{1-2\nu_2} + \frac{\nu_2}{1-2\nu_2} 6D \\ \Rightarrow \sigma_{\theta 2} &= -\frac{C}{r^3} + 2D \frac{(1+\nu_2)}{1-2\nu_2} = \sigma_{\varphi 2}\end{aligned}$$

Ομοίως βρίσκουμε και τις υπόλοιπες:

$$\sigma_{r3} = \frac{2F}{r^3} + \frac{2H(1+\nu_3)}{1-2\nu_3}$$

$$\sigma_{\theta 3} = \frac{-F}{r^3} + \frac{2H(1+\nu_3)}{1-2\nu_3} = \sigma_{\varphi 3}$$

$$\sigma_{r4} = \frac{2J}{r^3} + \frac{2L(1+\nu_4)}{1-2\nu_4}$$

$$\sigma_{\theta 4} = \frac{-J}{r^3} + \frac{2L(1+\nu_4)}{1-2\nu_4} = \sigma_{\varphi 4}$$

Οι **συνοριακές συνθήκες** των τάσεων είναι:

- Στο $r=a \Rightarrow \sigma_{r1} = \sigma_{r2} = -P_0$
- Στο $r=b \Rightarrow \sigma_{r2} = \sigma_{r3} = -P_1$
- Στο $r=c \Rightarrow \sigma_{r3} = \sigma_{r4} = -P_2$
- Στο $r=d \Rightarrow \sigma_{r4} = -P_3$

Εφαρμόζοντας τις παραπάνω συνθήκες στις σχέσεις των τάσεων που υπολογίσαμε προηγουμένως, έχουμε :

$$B = \frac{P_0(1-2\nu_1)}{2(1+\nu_1)}$$

$$C = \frac{(P_1 - P_0)b^3 a^3}{2(b^3 - a^3)}$$

$$D = \frac{(a^3 P_0 - b^3 P_1)(1-2\nu_2)}{2(b^3 - a^3)(1+\nu_2)}$$

$$F = \frac{(P_2 - P_1)b^3 c^3}{2(c^3 - b^3)}$$

$$H = \frac{(b^3 P_1 - c^3 P_2)(1-2\nu_3)}{2(c^3 - b^3)(1+\nu_3)}$$

$$J = \frac{(P_3 - P_2)d^3 c^3}{2(d^3 - c^3)}$$

$$L = \frac{(c^3 P_2 - d^3 P_3)(1-2\nu_4)}{2(d^3 - c^3)(1+\nu_4)}$$

Αντικαθιστώ τις σταθερές που βρήκα στις σχέσεις των μετατοπίσεων:

$$u_{r1} = -\frac{P_0(1-2\nu_1)}{E_1} r$$

$$u_{r2} = -\frac{(P_1 - P_0)a^3 b^3 (1+\nu_2)}{2(b^3 - a^3)E_2} \frac{1}{r^2} + \frac{(a^3 P_0 - b^3 P_1)(1-2\nu_2)}{(b^3 - a^3)E_2} r$$

$$u_{r3} = -\frac{(P_2 - P_1)b^3 c^3 (1+\nu_3)}{2(c^3 - b^3)E_3} \frac{1}{r^2} + \frac{(b^3 P_1 - c^3 P_2)(1-2\nu_3)}{(c^3 - b^3)E_3} r$$

$$u_{r4} = -\frac{(P_3 - P_2)c^3 d^3 (1+\nu_4)}{2(d^3 - c^3)E_4} \frac{1}{r^2} + \frac{(c^3 P_2 - d^3 P_3)(1-2\nu_4)}{(d^3 - c^3)E_4} r$$

Οι τιμές των P_0, P_1, P_2, P_3 θα υπολογιστούν χρησιμοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες μετατοπίσεων οι οποίες περιγράφονται ως εξής:

$$\Gamma\alpha \quad \underline{r=a}: \quad \mathbf{u}_{r1}=\mathbf{u}_{r2}$$

$$\underline{r=b}: \quad \mathbf{u}_{r2}=\mathbf{u}_{r3}$$

$$\underline{r=c}: \quad \mathbf{u}_{r3}=\mathbf{u}_{r4}$$

Ομοίως με το κεφάλαιο 6.2 καταλήγω στα παρακάτω:

$$P_0 = \mu P_1 \Rightarrow \mu = \frac{3E_1 b^3 (1 - \nu_2)}{2(1 - 2\nu_1)(b^3 - a^3)E_2 + [b^3(1 + \nu_2) + 2a^3(1 - 2\nu_2)]E_1}$$

$$P_1 = \lambda_1 P_2 \text{ άρα τελικά έχουμε:}$$

$$\lambda_1 = \frac{3c^3(1 - \nu_3)(b^3 - a^3)E_2}{[a^3(1 + \nu_2) + 2b^3(1 - 2\nu_2)](c^3 - b^3)E_3 + [c^3(1 + \nu_3) + 2b^3(1 - 2\nu_3)](b^3 - a^3)E_2 - 3\mu a^3(c^3 - b^3)(1 - \nu_2)E_3}$$

$$P_2 = \lambda_2 P_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = \frac{3d^2(1 - \nu_4)(c^3 - b^3)E_3}{(b^3(1 + \nu_3) + 2c^3(1 - 2\nu_3))(d^3 - c^3)E_4 + (d^3(1 + \nu_4) + 2c^3(1 - 2\nu_4))(c^3 - b^3)E_3 - 3\lambda_1 b^3(d^3 - c^3)(1 - \nu_3)E_4}$$

Στη συνέχεια αντικαθιστώ τις τιμές των σταθερών που έχω υπολογίσει στις εξισώσεις των τάσεων:

$$\sigma_{r1} = \sigma_{\theta1} = \sigma_{\varphi1} = -P_0$$

$$\sigma_{r2} = \frac{(P_1 - P_0)a^3 b^3}{b^3 - a^3} \frac{1}{r^3} + \frac{a^3 P_0 - b^3 P_1}{b^3 - a^3}$$

$$\sigma_{\theta2} = \sigma_{\varphi2} = -\frac{(P_1 - P_0)a^3 b^3}{b^3 - a^3} \frac{1}{2r^3} + \frac{a^3 P_0 - b^3 P_1}{b^3 - a^3}$$

$$\sigma_{r3} = \frac{(P_2 - P_1)b^3 c^3}{c^3 - b^3} \frac{1}{r^3} + \frac{b^3 P_1 - c^3 P_2}{c^3 - b^3}$$

$$\sigma_{\theta3} = \sigma_{\varphi3} = -\frac{(P_2 - P_1)b^3 c^3}{c^3 - b^3} \frac{1}{2r^3} + \frac{b^3 P_1 - c^3 P_2}{c^3 - b^3}$$

$$\sigma_{r4} = \frac{(P_3 - P_2)c^3 d^3}{d^3 - c^3} \frac{1}{r^3} + \frac{c^3 P_2 - d^3 P_3}{d^3 - c^3}$$

$$\sigma_{\theta4} = \sigma_{\varphi4} = -\frac{(P_3 - P_2)c^3 d^3}{d^3 - c^3} \frac{1}{2r^3} + \frac{c^3 P_2 - d^3 P_3}{d^3 - c^3}$$

Αντικαθιστώ τις τιμές των σταθερών που έχω υπολογίσει στις εξισώσεις των παραμορφώσεων:

$$\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{\theta1} = \varepsilon_{\varphi1} = -P_0 \frac{(1 - 2\nu_1)}{E_1}$$

$$\varepsilon_{r2} = \frac{(P_1 - P_0)a^3 b^3 (1 + \nu_2)}{(b^3 - a^3)E_2 r^3} + \frac{1 - 2\nu_2}{E_2} \frac{a^3 P_0 - b^3 P_1}{b^3 - a^3}$$

$$\varepsilon_{\theta2} = \varepsilon_{\varphi2} = -\frac{(P_1 - P_0)a^3 b^3 (1 + \nu_2)}{2(b^3 - a^3)E_2 r^3} + \frac{1 - 2\nu_2}{E_2} \frac{a^3 P_0 - b^3 P_1}{b^3 - a^3}$$

$$\varepsilon_{r3} = \frac{(P_2 - P_1)b^3 a^3 (1 + \nu_3)}{(c^3 - b^3)E_3 r^3} + \frac{1 - 2\nu_3}{E_3} \frac{b^3 P_1 - c^3 P_2}{c^3 - b^3}$$

$$\varepsilon_{\theta3} = \varepsilon_{\varphi3} = -\frac{(P_2 - P_1)b^3 a^3 (1 + \nu_3)}{2(c^3 - b^3)E_3 r^3} + \frac{1 - 2\nu_3}{E_3} \frac{b^3 P_1 - c^3 P_2}{c^3 - b^3}$$

$$\varepsilon_{r4} = \frac{(P_3 - P_2)c^3 b^3 (1 + \nu_4)}{(d^3 - c^3)E_4 r^3} + \frac{1 - 2\nu_4}{E_4} \frac{c^3 P_2 - d^3 P_3}{d^3 - c^3}$$

$$\varepsilon_{\theta4} = \varepsilon_{\varphi4} = -\frac{(P_3 - P_2)c^3 b^3 (1 + \nu_4)}{2(d^3 - c^3)E_4 r^3} + \frac{1 - 2\nu_4}{E_4} \frac{c^3 P_2 - d^3 P_3}{d^3 - c^3}$$

Για να υπολογίσω το μέτρο ελαστικότητας E_c του σύνθετου υλικού, θεωρώ ότι η ενέργεια παραμόρφωσης του υλικού ισούται με το άθροισμα

των ενεργειών παραμόρφωσης των τεσσάρων (4) φάσεων από τις οποίες αποτελείται:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{V_c} \frac{P_3^2}{K_c} dV_c &= \frac{1}{2} \int_{V_1} (\sigma_{r1} \varepsilon_{r1} + \sigma_{\theta1} \varepsilon_{\theta1} + \sigma_{\varphi1} \varepsilon_{\varphi1}) dV_1 + \frac{1}{2} \int_{V_2} (\sigma_{r2} \varepsilon_{r2} + \sigma_{\theta2} \varepsilon_{\theta2} + \sigma_{\varphi2} \varepsilon_{\varphi2}) dV_2 \\ &+ \frac{1}{2} \int_{V_3} (\sigma_{r3} \varepsilon_{r3} + \sigma_{\theta3} \varepsilon_{\theta3} + \sigma_{\varphi3} \varepsilon_{\varphi3}) dV_3 + \frac{1}{2} \int_{V_4} (\sigma_{r4} \varepsilon_{r4} + \sigma_{\theta4} \varepsilon_{\theta4} + \sigma_{\varphi4} \varepsilon_{\varphi4}) dV_4 \end{aligned}$$

Τελικά προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{2(1-2\nu_c)}{E_c} &= \frac{2U_1(\mu\lambda_1\lambda_2)^2(1-2\nu_1)}{E_1} + \frac{(\lambda_1 - \mu\lambda_1)^2 \lambda_2^2 U_1(U_1+U_2)(1+\nu_2)}{U_2 E_2} + \\ &\frac{2(1-2\nu_2)[U_1\mu - (U_1+U_2)]^2 (\lambda_1\lambda_2)^2}{U_2 E_2} + \frac{(1-\lambda_1)^2 \lambda_2^2 (U_1+U_2)(U_1+U_2+U_3)(1+\nu_3)}{U_3 E_3} + \\ &\frac{2(1-2\nu_3)((U_1+U_2)\lambda_1 - (1-U_4))^2 \lambda_2^2}{U_3 E_3} + \frac{(1-\lambda_2)^2 (1-U_4)(1+\nu_4)}{U_4 E_4} + \\ &\frac{2(1-2\nu_4)[(1-U_4)\lambda_2 - 1]^2}{U_4 E_4} \end{aligned}$$

Ο λόγος Poisson του σύνθετου υλικού προκύπτει από το νόμο φάσεων:

$$\frac{1}{\nu_c} = \frac{U_1}{\nu_1} + \frac{U_2}{\nu_2} + \frac{U_3}{\nu_3} + \frac{U_4}{\nu_4}$$

Θα διερευνήσουμε λοιπόν τι συμβαίνει σε καθεμία από τις 2 περιπτώσεις (A, B) των “ισοδύναμων” περιοχών για περιεκτικότητες $U_f=0,2$ και $U_m=0,8$ με γνωστά τα $E_f=210$ GPa και $E_m=3,5$ Gra. Θα υπολογίσουμε το τελικό E_c

του σύνθετου υλικού για να συγκρίνουμε με τα υπόλοιπα μοντέλα και να βγάλουμε περαιτέρω συμπεράσματα.

Περίπτωση Α

Υπολογίζουμε: $E_{\text{ισοδ}} = 4,3847 \text{ GPa}$, $\nu_{\text{ισοδ}} = 0,343$

	<u>Περιοχή 1</u> (έγκλεισμα)	<u>Περιοχή 2</u> (μήτρα)	<u>Περιοχή 3</u> (ισοδύναμη)	<u>Περιοχή 4</u> (μήτρα)
U	$U_1=U_{f1}=0,023$	$U_2=U_{m1}=0,05$	$U_3=U_{\text{ισοδ}}=0,866$	$U_4=0,061$
V	$\nu_1=0,29$	$\nu_2=\nu_m=0,36$	$\nu_3=\nu_{\text{ισοδ}}=0,343$	$\nu_4=\nu_m=0,36$
E (Gpa)	$E_1=210$	$E_2=3,5$	$E_3=E_{\text{ισοδ}}=4,3847$	$E_4=3,5$
r (μm)	$r_1=a=75$	$r_2=b=111,21$	$r_3=c=261,21$	$r_4=d=266,77$

Υπολογίζω τους συντελεστές μ , λ_1 , λ_2 :

$$\mu = 0,124553568$$

$$\lambda_1 = 0,68$$

$$\lambda_2 = 1,00053$$

Τελικά βρίσκω

$E_c = 4,0355 \text{ GPa}$

Περίπτωση Β

Υπολογίζουμε: $E_{\text{ισοδ}} = 45,87 \text{ GPa}$, $\nu_{\text{ισοδ}} = 0,346$

	<u>Περιοχή 1</u> (έγκλεισμα)	<u>Περιοχή 2</u> (μήτρα)	<u>Περιοχή 3</u> (ισοδύναμη)	<u>Περιοχή 4</u> (μήτρα)
U	$U_1=U_{f1}=0,023$	$U_2=U_{m1}=0,05$	$U_3=U_{\text{ισοδ}}=0,866$	$U_4=0,061$
v	$\nu_1=0,29$	$\nu_2=\nu_m=0,36$	$\nu_3=\nu_{\text{ισοδ}}=0,346$	$\nu_4=\nu_m=0,36$
E (Gpa)	$E_1=210$	$E_2=3,5$	$E_3=E_{\text{ισοδ}}=45,87$	$E_4=3,5$
r (μm)	$r_1=a=75$	$r_2=b=111,21$	$r_3=c=261,21$	$r_4=d=266,77$

Υπολογίζω τους συντελεστές μ , λ_1 , λ_2 :

$$\mu = 0,124553568$$

$$\lambda_1 = 0,11439$$

$$\lambda_2 = 1,016263886$$

Τελικά βρίσκω

$E_c = 26,552 \text{ GPa}$

Συμπερασματικά, βλέπουμε πως τα μέτρα ελαστικότητας των περιπτώσεων Α και Β απέχουν πάρα πολύ από τις πειραματικές τιμές. Συνεπώς το μοντέλο αυτό με την ισοδύναμη περιοχή δεν πλησιάζει, ούτε είναι ικανό να αναπαραστήσει με επιτυχία το σύνθετο υλικό με εγκλείσματα σιδήρου διαμέτρου 150 μm και μήτρα από εποξειδική ρητίνη. Στην περίπτωση Α, σύνδεση σε σειρά στην ισοδύναμη περιοχή, το μέτρο ελαστικότητας για $\eta=1$ είναι πολύ μικρό ($E_c = 4,03 \text{ GPa}$) σε σχέση με τα πειραματικά δεδομένα. Στην περίπτωση Β, παράλληλη σύνδεση στην ισοδύναμη περιοχή, ο βαθμός ελαστικότητας είναι εξωπραγματικά μεγάλος ($E_c = 26,55 \text{ GPa}$) και συνεπώς η διερεύνηση για τη δημιουργία τετραφασικού μοντέλου με ισοδύναμη περιοχή απέτυχε καθώς οι τιμές δεν είναι ικανοποιητικές και η σύγκλιση είναι κάτω του μετρίου.

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. S.P. Timoshenko and J.N. Goodier, "Theory of Elasticity", Mc Graw-Hill (1983).
2. Counto, Mag. Concr. Res 16 (1964) 129.
3. Paul, Trans Amer. Inst. Mech. Eng. 36 (1960) 218.
4. A. Einstein, "Über die von Molekularkinetischen theorie der. Warme Geforderte Bewegung von in Ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen", Ann Physic, Vol. 17, p. 549, (1905), "Eine Neue Bestimmung der Molekuldimensionen", Ann Physic, Vol 19, p. 289, (1906), "Berichtigung zu meiner Arbeit Eine neue Bestimmung der Molekuldimensionen", Vol. 34, p. 591, (1911).
5. Guth, J. Appl. Phys 15 (1945) 20.
6. H. M. Smallwood, "Limiting Law of the Reinforcement of Rubber", Jnl. Appl. Phys, Vol. 15, pp. 758-762, (1944).
7. E. H. Kerner, "The Elastic and Thermoelastic Properties of Composite Media", Proc. Phys. Soc. 698, pp. 808-813, (1956).
8. K. Takahashi, M. Ikeda, K. Harakawa and K. Tanaka, "Analysis of the Effect of Intefacial Slippage on the Elastic Moduli of a Particle - Filled Polymer", Jnl. Pol. Phys. Ed., Vol. 16, pp. 415-421, (1978).
9. M Mooney, "The Viscosity of a Concentrated Suspension of Spherical Particles", Jnl. Colloid Sci. Vol. 6, pp. 162-169, (1951).
- 10.H. Eilers and Van Dyck, kolloid Z, Vol. 97, pp. 313-318, (1941).
- 11.P. S. Theocharis, "The Mesophase and its influence on the Mechanical Behaviour of Composites", Advances in Polymer Science 66, Springer - Verlag Berlin, pp. 149-186, (1985).
- 12.P. S. Theocharis, "The Adhesion Quality and the Extent of the Mesophase in Particulates", Jnl. of Reinforced Plastics and Composites, Vol. 3, pp. 204 2331, (1984).
- 13.P. S. Theocharis and E. Sideridis, Journal of Applied Polymer Science, Vol. 29, 2997-3011 (1984).
- 14.Z. Hashin and B. W. Rosen, J. Appl. Mech. 31 (1964) 223.
- 15.R. Hill, J. Mech, Phys. Solids 13 (1965) 213.
- 16.T .Lewis and L. Nielsen, J. Appl. Polym. Sci. 14 (1970) 1449.
- 17.F. Bueche, "Molecular Basis for the Mullins Effect", Jnl. Appl. Polym. Sci., Vol. 4, pp. 107-114,(1960).

- 18.A. M. Bueche, J. Polym. Sci. 25 (1957) 139.
- 19.T. T. Wu, Int. J. Solids Struc. 2 (1966) I.
- 20.T. S. Chow, J. Polym. Phys. 16 (1978) 959.
- 21.S. Ahmed and F. R. Jones, Composites 19 (1988) 277.
- 22.R. A. Dickie, J. Appl. Polym. Sci., 17 (1973) 454.
- 23.R. M. Christensen, "Mechanics of Composite Materials", (Wiley New York, 1979).
- 24.Y. Sato and Furukawa, "A Molecular Theory of Filler Reinforcement based upon the conception of the internal Deformation", Rubber Chem. Technol., Vol. 35, pp. 857-862, (1962).
- 25.J. Spanoudakis and R. J. Young, J. Mater. Sci. 19 (1984) 487.
- 26.J. Leidner and R. T. Woodhams, J. Appl. Polym. Sci. 18 (1974) 1639.
- 27.M. R. Piggott and J. Leidner, J. Appl. Polym. Sci. 18 (1974) 1619.
- 28.L. Nicolais and M. Narkis, ibid 11 (1971) 194.
- 29.M.Schrager , Jnl, Appl.Pol. Sci., Vol 32, p 2379 (1978)
- 30.R.F. Landel and T.L. Smith, American Rocket Society Jnl., p. 599 (1961).
- 31.L. E. Nielsen, J. Appl. Polym. Sci. 10 (1966) 97.
- 32.G.C. Papanicolaou, S.A. Paipetis and P.S. Theocaris, J. Appl. Pol. Sci., 21, p. 689 (1977).
- 33.G.C. Papanicolaou, P.S. Theocaris, Colloid and Polymer Sci., 257, 3, p. 239 (1979).
- 34.Γ.Ι. Τσαμασφύρος , Μηχανική Παραμορφωσίμων Σωμάτων Ι , Εκδόσεις Συμμετρία 1991
- 35.G. Landon, G. Lewis and G. Boden, J. Mater. Sci 12 (1977) 1605.
- 36.H. Hojo and W. Toyoshima, 31st ANTEC, SPE Montreal, Canada (1973) (Teehnomic, 1973), p. 163.
- 37.H. Hojo, W. Tanura and N. Kawanura, Polym. Eng. Sci. 14 (1974) 604.
- 38.Passmore, J. Appl. Polym. Sci., 17 (1989).
- 39.Yu.S. Lipatov, V.F. Babich and V.F. Rosovizky, J. Appl. Polym. Sci., 18, p. 1213 (1974).
- 40.Yu.S. Lipatov and L.M. Sergeeva, Adsorption of Polymer, New York, (1974).
- 41.Yu.S. Lipatov, Plaste Kautschuk, 10, p. 738 (1973).
- 42.Yu.S. Lipatov and V.F. Babich, Vysokomol, Soedin, B10, p. 848 (1968).
- 43.Yu.S. Lipatov and T.E Geller, Vysokomol, Soedin, 8, p. 592, (1966).
- 44.Yu.S. Lipatov and F.G. Fabulyak, J. Appl. Polym. Sci., 16, p. 2131 (1972).

45. Yu.S. Lipatov, V.F. Babich and V.F. Rosovozky, J. Appl. Polymer Sci., 20, p. 1787 (1976).
46. P.S. Theocaris and G.C. Papanicolaou, Colloid and Polymer Sci., 258, 9, p. 1044 (1980).
47. S. Turner, Appl. Mat. Res., p. 10, (1965).
48. C.W. Van Der Wal, H.W. Bree and F.R. Schwarzl, J. Appl. Pol. Sci., 9, p. 2143 (1965).
49. C.A. Kumins and J. Roteman, J. Pol. Sci., 1-A, p. 527 (1963).
50. S. Strella and P.F. Erhardt, J. Appl. Pol. Sci., 13, p. 1373 (1969).
51. Αιμ. Σιδερίδης, “Μελέτη της θερμομηχανικής συμπεριφοράς των κοκκωδών και ινωδών συνθέτων υλικών διά της θεωρίας της ενδιάμεσου φάσεως”, Διδακτορική διατριβή, ΕΜΠ (1998).
52. Kerner E.H.,(1956),Proc.Phys.Soc. 69B:808
53. Artur C.,Coulson JA,(1964), J.Appl.Phys. 11:5104
54. Tummala RR.,Friedberg AL.,(1970),J. Appl.Phys. 11:5104
55. Wang TT., Kwei TK.,(1969) J.Polym.Sc.A-2, 7:889.
56. Fahmi AA.,Ragai AI.,(1970)J.Appl. Phys. 41:5108.
57. <http://www.cem.msu.edu/~reusch/VirtualText/polymers.htm>
58. Δ. Μανωλάκος, “Σύνθετα Υλικά”, Σημειώσεις Κατεύθυνσης Κατασκευαστών Μηχ. Μηχ. 9^ο εξαμήνου για το μάθημα “Εφαρμογές Προηγμένων Υλικών”, Αθήνα 2004

