



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

**Ανάλυση Αποφάσεων,
Ανάλυση Αποφάσεων υπό αβεβαιότητα**

Διπλωματική Εργασία

Αλεξίου Αναστασία

Τριμελής Επιτροπή:

1. Κοκκίνης Βασίλειος Επίκουρος καθηγητής ΕΜΠ
2. Κολέτσος Ιωάννης Επίκουρος καθηγητής ΕΜΠ
3. Πολυράκης Ιωάννης Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα

Ιούλιος 2013

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η θεωρία της ανάλυσης αποφάσεων αποτελεί ένα σημαντικό στοιχείο της επιχειρησιακής έρευνας και εμπλέκεται σε μεγάλο εύρος επιστημών. Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται η γενική θεωρία της ανάλυσης αποφάσεων όπως αυτή διατυπώνεται στη βιβλιογραφία.

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζεται το αντικείμενο της επιχειρησιακής έρευνας, γίνεται μια ιστορική αναδρομή και αναφέρονται οι βασικές τεχνικές της. Στο δεύτερο κεφάλαιο οριοθετείται η έννοια της διαδικασίας της λήψης αποφάσεων και στο τρίτο αναφέρεται η διαδικασία λήψης αποφάσεων χωρίς πειραματισμούς ενώ στο τέταρτο παρουσιάζεται η διαδικασία λήψης αποφάσεων με πειραματισμούς. Ιδιαίτερη αναφορά πραγματοποιείται στο πέμπτο κεφάλαιο για τα δέντρα αποφάσεων που αποτελούν βασικό εργαλείο στη διαδικασία λήψης αποφάσεων. Τέλος στο έκτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η θεωρία της χρησιμότητας που αποτελεί συμπληρωματικό εργαλείο μαζί με τα δέντρα αποφάσεων στη λήψη μιας απόφασης.

ABSTRACT

The theory of decision analysis is an important element in operational research and is involved in a wide range of disciplines. This diploma thesis presents the general theory of decision analysis as presented in literature.

History and basic principles and techniques of operational research is presented in the first chapter of the present thesis. The definition of decision making process and the decision making without experimentation are presented in chapters two and three respectively. In chapter four is presented the decision making with experimentation and in chapter five the basic concept of decision analysis, the decision trees are analyzed. Finally, the utility theory is mentioned in chapter six.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Με την ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επίκουρο καθηγητή του Ε.Μ.Π. κ. Κολέτσο Ιωάννη για το ευχάριστο κλίμα συνεργασίας που αναπτύξαμε κατά τη διάρκεια εκπόνησης της παρούσας εργασίας και για την πολύτιμη καθοδήγησή του. Τέλος δεν θα μπορούσα να ξεχάσω την οικογένεια μου και όλους τους φίλους-ες που με στηρίζουν.

Πίνακας περιεχομένων

ΠΡΟΛΟΓΟΣ.....	3
ABSTRACT.....	4
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ	11
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ	12
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1	15
ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ	15
1.1 Η ανάπτυξη και ο ορισμός της επιχειρησιακής έρευνας	16
1.2 Στάδια Ανάπτυξης Επιχειρησιακής Έρευνας.....	20
1.3 Τεχνικές για την εφαρμογή της επιχειρησιακής έρευνας	24
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2	27
ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ.....	27
2.1 Ανάπτυξη της ανάλυσης αποφάσεων	29
2.2 Στάδια της λήψης αποφάσεων	30
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3	33
ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ ΧΩΡΙΣ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΣΜΟΥΣ (DECISION ANALYSIS WITH EXPERIMENTATION)	33
3.1 Το κριτήριο μέγιστης/ ελάχιστης αποπληρωμής (Maximin Payoff criterion)	35
3.2 Το κριτήριο της μέγιστης πιθανοφάνειας.....	36

3.3 Θεωρία αποφάσεων του Bayes	38
3.3.1 Η απόφαση κατά Bayes και η posteriori αναμενόμενη απώλεια	39
3.3.2 Ο κίνδυνος κατά Bayes	41
3.4 Ανάλυση ευαισθησίας στη θεωρία του Bayes	42
3.4.1 Ανάλυση ευαισθησίας prior πιθανότητας (Prior robustness).....	43
3.4.2 Ολική ανάλυση ευαισθησίας (Global sensitivity analysis)	45
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4	47
ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ ΜΕ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΣΜΟΥΣ (DECISION ANALYSIS WITH EXPERIMENTATION)	47
4.1 Υπό συνθήκη (Posterior) Πιθανότητες	47
4.1.1 Οριακή πιθανότητα ή κανόνας διαμερισμού.....	48
4.1.2 Κανόνας ή Θεώρημα Bayes.....	48
4.2 Αξία υπό συνθήκη.....	51
4.2.1 Αναμενόμενη χρηματική αξία	54
4.2.2 Κόστος ευκαιρίας υπό συνθήκη (Conditional Opportunity Loss).....	56
4.2.3 Κέρδος κάτω από τέλεια πρόβλεψη.....	58
4.3 Η αξία του πειραματισμού	60
4.3.1 Η αξία της υπάρχουσας πληροφορίας	61
4.3.2 Η αξία της τέλει πληροφορίας	62
4.2.3 Η αξία της μερικώς τέλει πληροφορίας.....	63

4.5 Η αναμενόμενη αξία του πειραματισμού	64
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5	65
ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΔΕΝΤΡΩΝ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ (THEORY OF DECISION TREES)	65
5.1 Δημιουργία ενός δέντρου αποφάσεων	67
5.2 Ανάλυση του δέντρου απόφασης.....	72
5.2.1 Καθορίζοντας τη βέλτιστη πολιτική ανάλυσης ενός δέντρου απόφασης	75
5.2.2 Δέντρα αποφάσεων και η χρησιμότητα (utility)	80
5.2.2.1 Περιορισμοί στην κατασκευή των δέντρων αποφάσεων με χρησιμότητες.....	80
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6	83
ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ (UTILITY THEORY).....	83
6.1 Η θεωρία της χρησιμότητας (Utility Theory)	84
6.2 Συνάρτηση χρησιμότητας.....	85
6.3 Λαχειοφόρος αγορά	85
6.4 Αναμενόμενη χρησιμότητα	88
6.5 Αντικειμενική και υποκειμενική χρησιμότητα	92
6.6 Χρησιμότητα και εκτίμηση κινδύνου	93
6.7 Εκθετική Συνάρτηση Χρησιμότητας	95
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	97

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Σχήμα 1.1: Τα βήματα εφαρμογής για την επίλυση ενός προβλήματος επιχειρησιακής έρευνας.....	20
Σχήμα 3.1: Γραφική αναπαράσταση λογαριθμικών παραστάσεων πιθανοφάνειας	37
Σχήμα 4.1: Σχηματική αναπαράσταση του κανόνα Διαμερισμού.....	48
Σχήμα 4.3: Διάγραμμα πιθανοτήτων.....	50
Σχήμα 5.1: Παράδειγμα κατασκευής δέντρου αποφάσεων	68
Σχήμα 5.2 Δέντρο αποφάσεων για την διάθεση στην αγορά ενός προϊόντος.....	70
Σχήμα 5.3: Κόμβος απόφασης 5 για το πρόβλημα επιλογής της εισαγωγής ενός προϊόντος στην αγορά.....	77
Σχήμα 5.4: Απλοποίηση δέντρου απόφασης για το παράδειγμα του προϊόντος.....	78
Σχήμα 5.5: Περαιτέρω απλοποίηση του δέντρου απόφασης.....	79
Σχήμα 6.1: Μορφή της λαχειοφόρου κατά Newman και Morgenstern	86
Σχήμα 6.2: Διάγραμμα πιθανότητας για το τυχερό παιχνίδι.....	87
Σχήμα 6.3: Το διάγραμμα της συνάρτησης χρησιμότητας για το παράδειγμα του επενδυτή	91
Σχήμα 6.4: Η επίδραση της αντοχής του κινδύνου στην καμπύλη χρησιμότητας με α	96

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Πίνακας 4.1: Ιστορικά δεδομένα για τη ζήτηση.....	52
Πίνακας 4.2: Κέρδη υπό συνθήκη στην περίπτωση παραγγελίας κιβωτίων	22 53
Πίνακας 4.3: Αξίες υπό συνθήκη	54
Πίνακας 4.4: Υπολογισμός αναμενόμενης χρηματικής αξίας	55
Πίνακας 4.5: Συγκεντρωτικός EMV πίνακας.....	56
Πίνακας 4.6: Υπολογισμός του υπό συνθήκη κόστους ευκαιρίας.....	57
Πίνακας 4.7: Κόστη ευκαιρίας υπό συνθήκη.....	58
Πίνακας 4.9: Αναμενόμενο κέρδος με τέλεια πρόβλεψη	60
Πίνακας 4.10: Σχέση EMV και EOL	63
Πίνακας 5.1: Τιμή πώλησης προϊόντος για το παράδειγμα παραγωγής ενός προϊόντος	69
Πίνακας 5.2: Σύνοψη των κερδών που εμφανίζονται στις τερματικές κορυφές	75
Πίνακας 6.1 Τιμές χρησιμότητας για το παράδειγμα της ομπρέλας.	88
Πίνακας 6.2: Τιμές των δυο διαφορετικών προϊόντων για τρία πιθανά αποτελέσματα	90

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

Η επιχειρησιακή έρευνα αποτελεί έναν κλάδο των μαθηματικών, ιδιαίτερα των εφαρμοσμένων, ο οποίος χρησιμοποιείται για τη δημιουργία της επιστημονικής βάσης στην ορθή και έγκαιρη λήψη αποφάσεων. Η επιχειρησιακή έρευνα προσπαθεί να αποφύγει τους κινδύνους, που προέρχονται από την τυχαία λήψη αποφάσεων. Η πολυδιαστατικότητα της επιχειρησιακής έρευνας προκύπτει από το γεγονός, πως η διαχείριση των προβλημάτων και η λύση τους επηρεάζει πολλές πλευρές στο ανθρώπινο, στο κοινωνικό, αλλά και στο πολιτικό επίπεδο.

Η γενική προσέγγιση στην επιχειρησιακή έρευνα είναι η ανάλυση του προβλήματος και η εφαρμογή της λύσης, η οποία πρέπει να είναι σε πλήρη εναρμόνιση με τους ανθρώπινους, κοινωνικούς και πολιτικούς περιορισμούς.

Η διαχείριση (management) θεωρείται ως η διαδικασία ολοκλήρωσης των προσπαθειών για την επίτευξη ενός τουλάχιστον στόχου. Το Management μπορεί να θεωρηθεί, ότι βασίζεται σε δύο βασικά στοιχεία: την θεωρία των αποφάσεων και την ποσοτική ανάλυση. Το κοινό ανάμεσα σε αυτά τα δύο στοιχεία είναι η χρήση μαθηματικών ή ποσοτικών μεθόδων για τη λήψη των αποφάσεων. Προκειμένου να λυθούν αποτελεσματικά τα προβλήματα διαχείρισης, θα πρέπει να ορισθούν, να αναλυθούν και στη συνέχεια να επιλυθούν με συστηματικό και επιστημονικό τρόπο και με βάση πραγματικά δεδομένα. Η μαθηματική διάσταση των προβλημάτων αυτών αποτελεί το αντικείμενο της επιχειρησιακής έρευνας.

Γενικά, θα μπορούσε να ειπωθεί, πως στην επιχειρησιακή έρευνα εμπλέκονται διάφορα αντικείμενα όπως η μαθηματική ανάλυση, η στατιστική, η οικονομία και όλα μαζί συνθέτουν τη γνώση που αποτελεί το αντικείμενο της ανάλυσης των αποφάσεων.

1.1 Η ανάπτυξη και ο ορισμός της επιχειρησιακής έρευνας

Από την έλευση της βιομηχανικής επανάστασης έχει σημειωθεί στον κόσμο τεράστια αύξηση στο μέγεθος και στην πολυπλοκότητα των επιχειρήσεων. Μικρά καταστήματα τεχνιτών μιας παλαιότερης εποχής έχουν εξελιχθεί σε δισεκατομμυρίων δολαρίων επιχειρήσεις του σήμερα. Αναπόσπαστο μέρος αυτής της επαναστατικής αλλαγής υπήρξε η τεράστια αύξηση στον καταμερισμό των ευθυνών και η κατανομή της εργασίας μέσα στις επιχειρήσεις. Τα αποτελέσματα ήταν θεαματικά. Ωστόσο, μαζί με τα θετικά της, αυτή η αυξανόμενη εξειδίκευση δημιούργησε νέα προβλήματα, προβλήματα που εξακολουθούν να απασχολούν τις επιχειρήσεις και τους οργανισμούς. Ένα πρόβλημα είναι η τάση πολλών τμημάτων μίας επιχείρησης να αναπτυχθούν σε σχετικά αυτόνομες αυτοκρατορίες με τους δικούς τους στόχους και τα συστήματα αξιών, χάνοντας έτσι κάθε επαφή με το πως οι δραστηριότητες και οι στόχοι τους μπλέκονται με εκείνες της συνολικής επιχείρησης. Ότι είναι καλύτερο για ένα τμήμα της επιχείρησης συχνά είναι επιζήμιο για ένα άλλο, έτσι ώστε τα διάφορα τμήματα μπορεί να καταλήξουν να εργάζονται για αντίθετους σκοπούς. Ένα σχετικό πρόβλημα είναι ότι, καθώς η πολυπλοκότητα και εξειδίκευση σε έναν οργανισμό αυξάνονται γίνεται όλο και πιο δύσκολος ο καταμερισμός των διαθέσιμων πόρων στις διάφορες δραστηριότητες κατά τρόπο που να είναι πιο αποτελεσματικές για την οργάνωση ως σύνολο. Δημιουργήθηκε λοιπόν η ανάγκη μίας επιστήμης η οποία όχι μόνο να έχει ως αντικείμενο την εύρεση του καλύτερου δυνατού τρόπου επίλυσης αυτών και άλλων παρόμοιων προβλημάτων, αλλά ταυτόχρονα να ικανοποιεί την προσπάθεια μας να προσεγγίσουμε επιστημονικά τη διοίκηση των οργανισμών. Παρουσιάστηκε δηλαδή η ανάγκη δημιουργίας της επιστήμης της **Επιχειρησιακής Έρευνας**, που συχνά αποκαλείται και ως OR (operational research).

Οι ρίζες της Επιχειρησιακής Έρευνας βρίσκονται πολλές δεκαετίες πίσω, όταν έγιναν οι πρώτες απόπειρες χρήσης μιας επιστημονικής προσέγγισης στη

διαχείριση των οργανισμών. Ωστόσο, η αρχή του κλάδου, που ονομάζεται επιχειρησιακή έρευνα, γενικά, έχει αποδοθεί στις στρατιωτικές υπηρεσίες στις αρχές του Β Παγκοσμίου Πολέμου. Λόγω της πολεμικής προσπάθειας, ήταν επιτακτική η ανάγκη να διατεθούν περιορισμένοι πόροι στις διάφορες στρατιωτικές επιχειρήσεις και για τις δραστηριότητες σε κάθε λειτουργία με αποτελεσματικό τρόπο. Ως εκ τούτου, η βρετανική και στη συνέχεια η αμερικάνικη στρατιωτική διαχείριση κάλεσε ένα μεγάλο αριθμό επιστημόνων να εφαρμόσει μια επιστημονική προσέγγιση για την αντιμετώπιση αυτού και άλλων προβλημάτων στρατηγικής και τακτικής. Στην πραγματικότητα, τους ζητήθηκε να κάνουν έρευνα σχετικά με (στρατιωτικές) επιχειρήσεις. Αυτές οι ομάδες των επιστημόνων ήταν οι πρώτες ομάδες επιχειρησιακής έρευνας. Με την ανάπτυξη αποτελεσματικών μεθόδων χρησιμοποιώντας το νέο εργαλείο του ραντάρ, αυτές οι ομάδες έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στη νίκη της εναέριας μάχης της Βρετανίας. Μέσα από την έρευνά τους σχετικά με το πώς να διαχειρίζονται καλύτερα το σχηματισμό των νηοπομπών και την ανθυποβρυχιακή τους άμυνα, έπαιξαν επίσης σημαντικό ρόλο στο να κερδηθεί η μάχη του Βορείου Ατλαντικού.

Όταν τελείωσε ο πόλεμος, η επιτυχία της επιχειρησιακής έρευνας στην προσπάθεια του πολέμου δημιούργησε το ενδιαφέρον για την εφαρμογή της και έξω από το στρατό. Καθώς η βιομηχανική άνθηση συνεχιζόταν και μετά τον πόλεμο, τα προβλήματα που δημιουργούνταν από την αυξανόμενη πολυπλοκότητα και εξειδίκευση ήρθαν και πάλι στο προσκήνιο. Γινόταν εμφανές σε έναν αυξανόμενο αριθμό ανθρώπων, συμπεριλαμβανομένων των συμβούλων επιχειρήσεων που είχαν υπηρετήσει με τις ομάδες της επιχειρησιακής έρευνας κατά τη διάρκεια του πολέμου, ότι αυτά ήταν βασικά τα ίδια προβλήματα που είχαν αντιμετωπιστεί από τους στρατιωτικούς, αλλά σε διαφορετικό πλαίσιο. Από τις αρχές του 1950, τα άτομα αυτά είχαν εισάγει τη χρήση της επιχειρησιακής έρευνας σε διάφορους οργανισμούς, στις επιχειρήσεις, τη βιομηχανία και την κυβέρνηση. Η ταχεία εξάπλωση της επιχειρησιακής έρευνας ακολούθησε σύντομα.

Τουλάχιστον άλλοι δύο παράγοντες που έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στην ταχεία ανάπτυξη της κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου μπορούν να προσδιοριστούν. Το ένα ήταν η σημαντική πρόοδος που σημειώθηκε στις αρχές για τη βελτίωση των τεχνικών της επιχειρησιακής έρευνας. Μετά τον πόλεμο, πολλοί από τους επιστήμονες που συμμετείχαν σε ομάδες επιχειρησιακής έρευνας οι οποίοι είχαν ακούσει για αυτό το έργο είχαν το κίνητρο να συνεχίσουν, την σχετική σε αυτόν τον τομέα, έρευνα. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η μέθοδος Simplex για την επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού, η οποία αναπτύχθηκε από τον George Dantzig το 1947. Πολλά από τα βασικά εργαλεία της επιχειρησιακής έρευνας, όπως ο γραμμικός προγραμματισμός, ο δυναμικός προγραμματισμός, η θεωρία ουρών αναμονής και η θεωρία αποθεμάτων ήταν πολύ καλά ανεπτυγμένα πριν το τέλος της δεκαετίας του 1950.

Ένας δεύτερος παράγοντας που έδωσε μεγάλη ώθηση στην ανάπτυξη του τομέα ήταν η εξέλιξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Ένα μεγάλο μέρος του υπολογισμού που απαιτείται συνήθως για να αντιμετωπιστούν πιο αποτελεσματικά τα σύνθετα προβλήματα γίνεται με χρήση της Επιχειρησιακής Έρευνας. Το ενδεχόμενο όλοι αυτοί οι υπολογισμοί να γίνονταν με το χέρι δεν τίθεται ως θέμα συζήτησης. Ως εκ τούτου, η ανάπτυξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών, με την ικανότητά τους να εκτελούν χιλιάδες υπολογισμούς ή ακόμα και εκατομμύρια φορές πιο γρήγορα από ένα ανθρώπινο ον ήταν τεράστιο όφελος για την Επιχειρησιακή Έρευνα. Περαιτέρω άνθηση της Επιχειρησιακής Έρευνας ήρθε στη δεκαετία του 1980 με την ανάπτυξη ολοένα και πιο ισχυρών υπολογιστών που συνοδεύονταν από πολύ καλά πακέτα λογισμικού. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα μεγαλύτερος αριθμός ανθρώπων να έχουν πιο εύκολη πρόσβαση στην Επιχειρησιακή Έρευνα.

Η επίλυση των προβλημάτων του δεύτερου παγκόσμιου πολέμου έγινε με την ανάπτυξη του γραμμικού προγραμματισμού που αποτελεί τη βασική μέθοδο επίλυσης των προβλημάτων της επιχειρησιακής έρευνας. Μετά τη λήξη του δεύτερου παγκοσμίου πολέμου η επιχειρησιακή έρευνα και ο γραμμικός

προγραμματισμός ειδικότερα χρησιμοποιήθηκε στο πλαίσιο της ανοικοδόμησης της βιομηχανίας.

Σήμερα η επιχειρησιακή έρευνα αποτελεί ένα ευρέως αναγνωρισμένο αντικείμενο στο πλαίσιο της ανάλυσης αποφάσεων σε διάφορους τομείς και παρά το γεγονός πως οι ρίζες της ανήκουν στον κλάδο των οικονομικών επιστημών, υπάρχει ένα συνεχώς μεγαλύτερο εύρος εφαρμογής της για την επίλυση διάφορων προβλημάτων. Σήμερα, κυριολεκτικά εκατομμύρια άνθρωποι έχουν άμεση πρόσβαση σε λογισμικό Επιχειρησιακής Έρευνας. Κατά συνέπεια, μια ολόκληρη σειρά από υπολογιστές χρησιμοποιούνται πλέον για την επίλυση προβλημάτων Επιχειρησιακής Έρευνας.

Ο ορισμός της επιχειρησιακής έρευνας αποτελεί μια δύσκολη διαδικασία καθώς δεν έχει σαφώς καθορισμένα όρια και περιεχόμενο. Όπως ήδη αναφέρθηκε, τα βασικά της χαρακτηριστικά είναι ότι είναι πολυδιάστατη, καθώς χρησιμοποιεί δεδομένα από διάφορες επιστήμες προκειμένου να εξετάσει τις συνέπειες από διάφορες δραστηριότητες και επιπλέον χρησιμοποιεί μαθηματικές και ποσοτικές μεθόδους για τον καθορισμό της λήψης αποφάσεων.

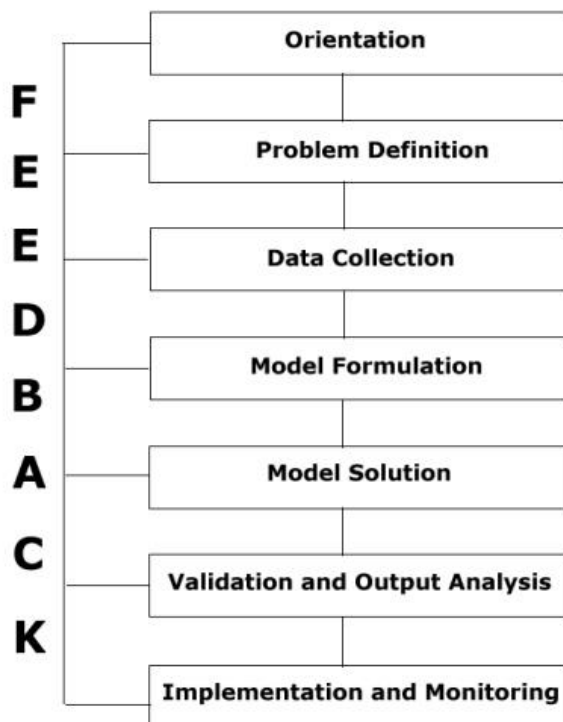
Σύμφωνα με τους Morse και Kimball η επιχειρησιακή έρευνα μπορεί να οριστεί ως μια επιστημονική μέθοδος που παρέχει ποσοτικοποίηση των αποφάσεων των σχετικών με συγκεκριμένες λειτουργίες.

Από τον ορισμό της επιχειρησιακής έρευνας προκύπτει πως αποτελεί μια καθαρά επιστημονική μέθοδο, η οποία είναι μία καλά οργανωμένη διαδικασία που μπορεί να αντιμετωπίσει υπάρχοντα ή μελλοντικά προβλήματα. Το γεγονός ότι ορίζεται ως επιστημονικό αντικείμενο, δίνει σαν χαρακτηριστικό της επιχειρησιακής έρευνας πως μπορεί να διδαχθεί.

1.2 Στάδια Ανάπτυξης Επιχειρησιακής Έρευνας

Η ανάπτυξη της επιχειρησιακής έρευνας μπορεί να πραγματοποιηθεί με επτά βασικά βήματα:

- Οριοθέτηση του συστήματος
- Διατύπωση του προβλήματος
- Συλλογή δεδομένων
- Μαθηματική Μοντελοποίηση
- Επίλυση του μοντέλου
- Αξιολόγηση της λύσης και ανάλυση των αποτελεσμάτων
- Ερμηνεία αποτελεσμάτων και παρακολούθηση της εφαρμογής της λύσης



Σχήμα 1.1: Τα βήματα εφαρμογής για την επίλυση ενός προβλήματος επιχειρησιακής έρευνας

Το πρώτο βήμα της επιχειρησιακής έρευνας είναι η οριοθέτηση του συστήματος. Ο πρωταρχικός στόχος αυτού του βήματος είναι να καλέσει την ερευνητική ομάδα που θα αντιμετωπίσει το πρόβλημα και να διασφαλίσει ότι όλα τα μέλη της έχουν μια σαφή εικόνα του προβλήματος. Αξίζει να σημειωθεί ότι ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό οποιασδήποτε μελέτης στην Επιχειρησιακή Έρευνα είναι ότι η γίνεται από μια πολυλειτουργική ομάδα. Τυπικά, η ομάδα θα έχει έναν επικεφαλής και θα αποτελείται από μέλη από διάφορους τομείς. Στη φάση της οριοθέτησης του συστήματος, η ομάδα συνεδριάζει συνήθως αρκετές φορές για να συζητήσουν όλα τα σχετικά ζητήματα και να καταλήξουν στα πιο σημαντικά. Η φάση αυτή περιλαμβάνει, επίσης, μελέτη διάφορων εγγράφων και βιβλιογραφίας σχετικά με το πρόβλημα, προκειμένου να εξεταστεί αν έχει αντιμετωπισθεί το ίδιο (ή παρόμοιο) πρόβλημα στο παρελθόν, και αν ναι, να προσδιορισθεί και να αξιολογηθεί η διαδικασία που είχε ακολουθηθεί για την αντιμετώπιση του. Ο στόχος της φάσης του οριοθέτησης είναι να γίνει κατανοητό το πρόβλημα και η σχέση του με διάφορες λειτουργικές πτυχές του συστήματος, και να καταλήξει η ομάδα στον πρωταρχικό στόχο του έργου.

Το δεύτερο βήμα της εφαρμογής της επιχειρησιακής έρευνας είναι η διατύπωση του προβλήματος. Η πλήρης διατύπωση του προβλήματος γίνεται με βάση τρία χαρακτηριστικά. Το πρώτο αφορά στον σαφή καθορισμό του στόχου, δηλαδή στον προσδιορισμό των περιορισμών του προβλήματος που εξετάζεται. Αυτό εξυπηρετεί ιδιαίτερα στα μεγάλα και σύνθετα συστήματα που η επίλυση του προβλήματος για όλα τα συστήματα δεν είναι εφικτή και για αυτό πρέπει κανείς να εστιάσει στα μέρη εκείνα του συστήματος που μπορούν να εξεταστούν μεμονωμένα. Το δεύτερο χαρακτηριστικό του καθορισμού του συστήματος είναι ο καθορισμός των παραγόντων εκείνων που έχουν σαφή και άμεση επίδραση στο πρόβλημα και σχετίζονται με τη λήψη των αποφάσεων. Οι παράγοντες μπορεί να είναι ελεγχόμενοι ή μη ελεγχόμενοι. Ο στόχος είναι, να υπάρχει ένα πλήθος εναλλακτικών αποφάσεων που θα σχετίζονται με το εξεταζόμενο πρόβλημα έτσι ώστε να επιλέγεται η βέλτιστη. Το τρίτο στοιχείο που καθορίζει την πλήρη διατύπωση του προβλήματος είναι ο ορισμός των

περιορισμών, που καθορίζουν την επιλογή της εναλλακτικής κατά τη λήψη αποφάσεων.

Το τρίτο στάδιο στην Επιχειρησιακή Έρευνα είναι η συλλογή δεδομένων. Η παρατήρηση αποτελεί τον έναν τρόπο συλλογής δεδομένων στην επιχειρησιακή έρευνα, ενώ το δεύτερο είναι τα πρότυπα. Τα πρότυπα αποτελούν σταθερές τιμές δεδομένων που είναι ήδη γνωστά για το αντικείμενο μελέτης. Για παράδειγμα πολλές εταιρείες έχουν προκαθορισμένες τις τιμές του κόστους για τους μισθούς, τις τιμές πώλησης κτλ, τις οποίες χρησιμοποιούν για τον υπολογισμό του κόστους των διαφόρων δραστηριοτήτων.

Το τέταρτο στάδιο στην επιχειρησιακή έρευνα είναι η αξιοποίηση των δεδομένων για το σχηματισμό και τη διαμόρφωση ενός μοντέλου που θα χαρακτηρίζει και θα περιγράφει όλες τις λειτουργικές παραμέτρους του αντικειμένου που εξετάζεται. Απαραίτητη προϋπόθεση για την αποτελεσματικότητα του μοντέλου είναι να αναπαριστά με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια το πραγματικό σύστημα. Τα μοντέλα που μπορεί να δημιουργηθούν μπορεί να ταξινομηθούν σε δυο μεγάλες κατηγορίες τα φυσικά και τα αναλογικά. Τα φυσικά μοντέλα αντιπροσωπεύουν σε μικρότερη κλίμακα το εξεταζόμενο σύστημα, ενώ τα αναλογικά είναι φυσικά μοντέλα που όμως χρησιμοποιούν μια δεδομένη αναλογία για την περιγραφή του προβλήματος. Ένα γνωστό παράδειγμα στη βιομηχανία αναλογικού μοντέλου είναι το ANTIAC (Anti-automatic-computation), το οποίο ορίζει πως μπορεί να πραγματοποιηθεί μία έγκυρη ανάλυση επιχειρησιακής έρευνας χωρίς τη χρήση υπολογιστή. Μια άλλη κατηγορία μοντέλων που χρησιμοποιείται ευρέως στην επιχειρησιακή έρευνα είναι τα μοντέλα προσομοίωσης τα οποία εφαρμόζονται μόνο μέσω ηλεκτρονικού υπολογιστή. Για την εφαρμογή αυτών των μοντέλων έχουν δημιουργηθεί πάρα πολλά λογισμικά προγράμματα και γλώσσες προγραμματισμού. Το χαρακτηριστικό των συγκεκριμένων λογισμικών είναι πως επιτρέπουν πολλές φορές την οπτικοποίηση των αποτελεσμάτων μέσω γραφικών παραστάσεων που δημιουργούνται από το ίδιο το λογισμικό. Επιπλέον τα μοντέλα προσομοίωσης δεν αφορούν μόνο στη βέλτιστη λύση του προβλήματος, αλλά αποτελούν μια διαδικασία δοκιμής και σφάλματος που το

αποτελέσμα της εξαρτάται από τις μεταβλητές που επιλέγονται να περιγράψουν την προτεινόμενη στρατηγική.

Τέλος τα μοντέλα που μπορεί να δημιουργηθούν είναι αμιγώς μαθηματικά μοντέλα, τα οποία περιγράφουν τα χαρακτηριστικά του εξεταζόμενου συστήματος μέσω μαθηματικών σχέσεων. Τα μαθηματικά μοντέλα με τη σειρά τους διακρίνονται σε ντετερμινιστικά ή πιθανολογικά. Τα πρώτα αφορούν σε μοντέλα στα οποία όλοι οι παράμετροι είναι γνωστές, ενώ στα δεύτερα μπορούν να χρησιμοποιηθούν παράμετροι, οι ακριβές τιμές των οποίων δεν είναι γνωστές, αλλά μπορούν να εκτιμηθούν. Τα περισσότερα μαθηματικά μοντέλα χαρακτηρίζονται από τις μεταβλητές απόφασης, τους περιορισμούς και τις αντικειμενικές συναρτήσεις. Οι μεταβλητές απόφασης χρησιμοποιούνται για τον ορισμό συγκεκριμένων στοιχείων και μπορεί να έχουν συγκεκριμένες τιμές. Οι περιορισμοί θέτουν τα όρια στις τιμές που μπορεί να λάβουν οι μεταβλητές απόφασης. Κάθε περιορισμός αποτελεί την έκφραση στοιχείων του εύρους των μεταβλητών απόφασης σε κάθε πρόβλημα που εξετάζεται. Τέλος η αντικειμενική συνάρτηση αποτελεί την περιγραφή μιας σχέσης που εκφράζει την απόδοση των μεταβλητών απόφασης που επιλέγονται στο υπό μελέτη πρόβλημα. Στόχος της ανάλυσης είναι η βελτιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης. Στην περίπτωση που απαιτείται η βελτιστοποίηση παραπάνω από μιας αντικειμενικής συνάρτησης συνήθως επιλέγεται μία από αυτές και οι υπόλοιπες μετατρέπονται σε περιορισμούς απλοποιώντας το πρόβλημα ή αλλιώς χρησιμοποιείται μια μέθοδος πολλαπλών στόχων για την λύση του προβλήματος.

Στην Πέμπτη φάση της διαδικασίας της επιχειρησιακής έρευνας το μοντέλο με τους περιορισμούς και την αντικειμενική συνάρτηση που δημιουργήθηκε προηγουμένως επιλύεται. Οι μέθοδοι ανάλυσης των μοντέλων της επιχειρησιακής έρευνας είναι πολλές και διαφορετικές και όλες βασίζονται είτε στη μέθοδο γραφικής επίλυσης, είτε στη μέθοδο δοκιμής και σφάλματος.

Με δεδομένο ότι έχει βρεθεί η βέλτιστη λύση του εξεταζόμενου προβλήματος της επιχειρησιακής έρευνας, θα πρέπει να εκτιμηθεί αν η λύση είναι λογική. Στο στάδιο αυτό της αξιολόγησης της λύσης είναι δυνατό να διαπιστωθούν λάθη

στην διαδικασία που ακολουθήθηκε όπως για παράδειγμα ότι αγνοήθηκαν περιορισμοί που ήταν σημαντικοί. Αυτές οι διαπιστώσεις οδηγούν στην επανάληψη της διαδικασίας από την αρχή.

Το τελευταίο βήμα της ανάλυσης της επιχειρησιακής έρευνας είναι η ερμηνεία των αποτελεσμάτων και η παρακολούθηση εφαρμογής της λύσης. Στο στάδιο αυτό εφαρμόζεται στην πράξη η προτεινόμενη βέλτιστη λύση και εκτιμάται η απόδοσή της στο πραγματικό πρόβλημα ενώ, παράλληλα εξετάζεται και η συμπεριφορά της κάτω από διαφορετικές συνθήκες.

1.3 Τεχνικές για την εφαρμογή της επιχειρησιακής έρευνας

Για την εφαρμογή της επιχειρησιακής έρευνας υπάρχουν μια σειρά τεχνικών που μπορούν να εφαρμοστούν για την επίτευξη της βέλτιστης λύσης ενός προβλήματος. Οι τεχνικές αυτές είναι:

1. Γραμμικός Προγραμματισμός (Linear Programming): ο γραμμικός προγραμματισμός αποτελεί μια μαθηματική τεχνική που επιτρέπει το συσχετισμό μιας ομάδας παραμέτρων έτσι ώστε να ικανοποιείται ένας αριθμός απαιτήσεων ώστε να μεγιστοποιείται ή να ελαχιστοποιείται η αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος κάτω από δεδομένους περιορισμούς.
2. Το πρόβλημα μεταφοράς (Transportation problem) : Το πρόβλημα μεταφοράς αποτελεί υποπερίπτωση του γραμμικού προγραμματισμού. Βασική αρχή του συγκεκριμένου προβλήματος είναι η ελαχιστοποίηση του κόστους κατά τη διανομή ενός προϊόντος από ένα πλήθος πηγών σε ένα πλήθος προορισμών.
3. Επίλυση του προβλήματος καταμερισμού (assignment problem): όταν σε ένα πρόβλημα επιχειρησιακής έρευνας n διαφορετικές δραστηριότητες κατανέμονται σε n αντικείμενα δημιουργείται ένα πρόβλημα καταμερισμού το οποίο επιλύεται με εφαρμογή του γραμμικού προγραμματισμού.

4. Θεωρία Ουρών (Queuing Theory): Η θεωρία των ουρών αναφέρεται στη θεωρία που μπορεί να περιγράψει τις γραμμές αναμονής (ουρές). Η συγκεκριμένη θεωρία αποτελεί τη μαθηματική διατύπωση και ανάλυση των συστημάτων που προσφέρουν υπηρεσίες με δεδομένες απαιτήσεις. Αναπτύχθηκε για να παρέχει μοντέλα τα οποία θα προβλέπουν τη συμπεριφορά συστημάτων παροχής υπηρεσιών, στα οποία προκύπτουν τυχαία διάφορα προβλήματα. Για παράδειγμα η θεωρία ουρών αναμονής μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προσδιοριστεί ο βέλτιστος αριθμός σταθμών διοδίων σε ένα αυτοκινητόδρομο, των διαθέσιμων γιατρών κατά την εφημερία σε ένα νοσοκομείο κ.λ.π..
5. Θεωρία Παιγνίων (Game Theory): όταν το πρόβλημα καθορίζεται από ομάδες αντικρουόμενων καταστάσεων με περισσότερους από έναν αντιπάλους τότε η λήψη των αποφάσεων γίνεται αποτελεσματική με τη χρήση της θεωρίας παιγνίων.
6. Μοντέλο ελέγχου των αποθεμάτων (Inventory control): Η θεωρία ελέγχου των αποθεμάτων αποτελεί ένα σημαντικό αντικείμενο στην επιχειρησιακή έρευνα για την καλύτερη διαχείριση των διαθέσιμων πηγών. Οι τεχνικές ελέγχου των αποθεμάτων μπορεί να ακολουθούν τις αρχές του γραμμικού προγραμματισμού αλλά μπορεί να περιέχουν και στοιχεία μη γραμμικά. Σε κάθε περίπτωση η συγκεκριμένη θεωρία αποσκοπεί στη διασφάλιση της διαθεσιμότητας των αποθεμάτων οποτεδήποτε υπάρχει ζήτηση.
7. Προσομοίωση (Simulation): Η προσομοίωση αποτελεί τη διαδικασία μέσω της οποίας σχεδιάζεται ένα μοντέλο για την αναπαράσταση ενός πραγματικού συστήματος και τη διεξαγωγή πειραμάτων που θα οδηγήσουν στην κατανόηση της συμπεριφοράς του συστήματος και στην εκτίμηση διαφόρων στρατηγικών για τη λειτουργία του συστήματος. Υπάρχουν διάφορα είδη προσομοίωσης: η στατική στην οποία δεν προσομοιώνονται οι χρονικές μεταβολές του συστήματος και η δυναμική στην οποία η προσομοίωση λαμβάνει υπόψη τις χρονικές μεταβολές. Άλλος διαχωρισμός των προσομοιώσεων είναι η ντετερμινιστική που ακολουθεί κανόνες και η στοχαστική που βασίζεται στις πιθανότητες. Τέλος, υπάρχει η διακριτή προσομοίωση που οι μεταβολές στην κατάσταση του συστήματος πραγματοποιούνται στιγμιαία σε τυχαία

χρονικά σημεία και η συνεχής προσομοίωση στην οποία οι μεταβολές της κατάστασης πραγματοποιούνται συνεχώς στο χρόνο.

8. Μη γραμμικός προγραμματισμός (Non-linear programming): οι μέθοδοι μη γραμμικού προγραμματισμού χρησιμοποιούνται όταν, είτε η αντικειμενική συνάρτηση, είτε κάποιοι από τους περιορισμούς του εξεταζόμενου προβλήματος δεν είναι γραμμικά.
9. Ακέραιος Προγραμματισμός(Integer programming): όταν μια ή περισσότερες μεταβλητές λαμβάνουν μόνο ακέραιες τιμές, ο γραμμικός προγραμματισμός είναι το κατάλληλο εργαλείο για την επιχειρησιακή έρευνα για την εύρεση της βέλτιστης λύσης.
10. Δυναμικός προγραμματισμός (Dynamic programming): ο δυναμικός προγραμματισμός αποτελεί μια χρήσιμη μεθοδολογία στα προβλήματα λήψης αποφάσεων και εφαρμόζεται λαμβάνοντας αποφάσεις σε διαφορετικά επίπεδα τα οποία, όμως, βρίσκονται σε σειρά.
11. Θεωρία αλληλουχίας (Sequence theory): Η θεωρία της αλληλουχίας σχετίζεται με την θεωρία της ουράς αναμονής και εφαρμόζεται όταν εξετάζονται συγκεκριμένες δραστηριότητες οι οποίες, όμως, πρέπει να είναι σε ελεγχόμενη σειρά. Σύμφωνα με αυτήν τη θεωρία η αλληλουχία των εργασιών ή των υπηρεσιών αποσκοπεί στην ελαχιστοποίηση του κόστους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ

Βασικό στοιχείο της επιχειρησιακής έρευνας πάνω στην οποία βασίζεται η δομή της είναι η λήψη αποφάσεων. Με τον όρο απόφαση εννοείται το αποτέλεσμα μιας διαδικασίας, όπου ο λήπτης της απόφασης εξετάζει ένα εύρος λύσεων για ένα πρόβλημα και επιλέγει αυτήν την λύση που είναι βέλτιστη.

Η λήψη της απόφασης γίνεται με βάση τους στόχους που εξετάζονται στο συγκεκριμένο πρόβλημα και των εναλλακτικών λύσεων που προσφέρονται και πραγματοποιείται με τη χρήση δεδομένων κριτηρίων και περιορισμών που ορίζονται σε κάθε περίπτωση.

Η αναγκαιότητα για τη λήψη αποφάσεων είναι το αποτέλεσμα των διάφορων αναγκών που υπάρχουν στην καθημερινή ζωή και των περιορισμών των πόρων που μπορούν να οδηγήσουν στη λήψη αυτών των στόχων. Η επιχειρησιακή έρευνα ασχολείται με την επιλογή της βέλτιστης στρατηγικής που επιλέγεται κάτω από συγκεκριμένες προϋποθέσεις.

Οι αποφάσεις ανάλογα με το στόχο μπορούν να ταξινομηθούν σε στρατηγικές αποφάσεις, που αφορούν στο εξωτερικό περιβάλλον, σε διοικητικές που αφορούν στις αποφάσεις, κυρίως, οργανισμών και σε λειτουργικές αποφάσεις που σχετίζονται με την καθημερινή επαναλαμβανόμενη δουλειά.

Ανάλογα με τη φύση τους, οι αποφάσεις διακρίνονται σε προγραμματισμένες και απρόβλεπτες. Οι προγραμματισμένες αφορούν στα επαναλαμβανόμενα προβλήματα, ενώ οι απρογραμμάτιστες στα απρόβλεπτα προβλήματα που παρουσιάζονται.

Οι αποφάσεις ανάλογα με τα άτομα που τις λαμβάνουν διακρίνονται σε μεμονωμένες και διευθυντικές, ενώ ανάλογα με το χρόνο υλοποίησής τους διακρίνονται σε στατικές ή δυναμικές.

Η μελέτη της λήψης αποφάσεων της δίνει τρεις προοπτικές που διακρίνουν την λήψη αποφάσεων σε κανονιστικές, περιγραφικές και καθοδηγητικές. Οι κανονιστικές (normative) αποφάσεις σχετίζονται με τη λογική και λαμβάνονται μέσω κανονιστικών μοντέλων που δημιουργούνται βάσει θεμελιωδών αξιωμάτων που ακολουθούν οι άνθρωποι, προκειμένου να αποφασίσουν για ένα πρόβλημα.

Οι λογικές αποφάσεις στηρίζονται πάνω στο μοντέλο που ανέπτυξε ο Savage (26), το οποίο θεωρεί τη λήψη αποφάσεων κάτω από τον παράγοντα της αβεβαιότητας. Στη λήψη αποφάσεων το κατάλληλο κανονιστικό μοντέλο θα περιλαμβάνει στατιστικά μοντέλα όπως τη θεωρία του Bayes ή τη θεωρία των πιθανοτήτων.

Οι περιγραφικές αποφάσεις αποτελούν ένα άλλο τομέα της λήψης των αποφάσεων, οι οποίες σχετίζονται με την πραγματική σκέψη και συμπεριφορά. Οι περιγραφικές μελέτες βασίζονται στην ανάπτυξη μαθηματικών μοντέλων συμπεριφοράς και η ακρίβεια τους κρίνεται από το κατά πόσο καταφέρνει να προβλέψει την πραγματική ανθρώπινη συμπεριφορά. Η θεωρία στην οποία οφείλεται η λήψη των συγκεκριμένων αποφάσεων αποτελεί τη θεωρία προοπτικής.

Οι καθοδηγητικές αποφάσεις βοηθάνε στη λήψη καλύτερων αποφάσεων με τη λήψη κανονιστικών μοντέλων, χωρίς όμως να λαμβάνεται υπόψη η χρήση περιορισμών και οι περιγραφικές πραγματικότητες της ανθρώπινης κρίσης. Η ανάλυση των αποφάσεων βασίζεται στον καθοδηγητικό περιορισμό και βασίζεται σε κανονιστικά και περιγραφικά μοντέλα.

2.1 Ανάπτυξη της ανάλυσης αποφάσεων

Τα κανονιστικά μοντέλα στη λήψη αποφάσεων παρουσιάζονται από την εποχή του Bernoulli και του Bayes. Σύμφωνα με το Bernoulli, οι αποφάσεις που σχετίζονται με τυχερά παιχνίδια δεν είναι πάντα οι αναμενόμενες. Προκειμένου να ερμηνεύσει τις αποκλίσεις από την αναμενόμενη αξία, ο Bernoulli πρότεινε τη χρήση μιας λογαριθμικής συνάρτησης. Από την άλλη ο Bayes πρότεινε μια διαδικασία για την αναθεώρηση των πιθανοτήτων με βάση τις παρατηρήσεις που είναι γνωστές ως θεωρία του Bayes.

Η συνάφεια της έννοιας της πιθανότητας και της χρησιμότητας αναγνωρίστηκε πολύ αργότερα από τον Ramsey, ενώ ο DeFinetti ανέπτυξε ένα σύστημα υποθέσεων σχετικά με τις προτιμήσεις των τυχερών παιχνιδιών, που του επέτρεψαν να εξάγει τις αντικειμενικές πιθανότητες των γεγονότων.

Η μεγάλη καινοτομία στην ανάλυση αποφάσεων ήρθε το 1944 με τη θεωρία των Παιγνίων και την οικονομική συμπεριφορά (Theory of Games and Economic Behaviour) των von Neumann και Morgenstern. Η διατύπωση της συγκεκριμένης θεωρίας αποτέλεσε τη βάση για τη μαθηματική θεωρία των οικονομικών και την κοινωνική οργάνωση με βάση τη θεωρία παιγνίων.

Αργότερα, η θεωρία των von Neumann και Morgenstern επεκτάθηκε ώστε το μοντέλο χρησιμότητας να χρησιμοποιηθεί και στις περιπτώσεις εκείνες που οι πιθανότητες είναι άγνωστες.

Ο όρος Ανάλυση αποφάσεων χρησιμοποιήθηκε το 1966 από τον Howard ο οποίος εισήγαγε και τη μέθοδο του κύκλου ανάλυσης αποφάσεων για την επίλυση προβλημάτων απόφασης.

Σήμερα με τον όρο Ανάλυση Αποφάσεων εννοείται η θέσπιση του πλαισίου και της μεθοδολογίας που οδηγεί σε λογικές αποφάσεις, ακόμα και όταν τα αποτελέσματα είναι αβέβαια. Η ανάλυση αποφάσεων είναι παρόμοια με την θεωρία των παιγνίων. Το πιο συχνό ερώτημα που έχει να αντιμετωπίσει η ανάλυση αποφάσεων είναι, αν η συγκεκριμένη απόφαση μπορεί να ληφθεί

άμεσα ή απαιτούνται πρώτα να γίνουν κάποιες δοκιμές για να μειωθούν τα επίπεδα αβεβαιότητας σχετικά με τα αποτελέσματα της απόφασης.

2.2 Στάδια της λήψης αποφάσεων

Η μοντελοποίηση της ανάλυσης αποφάσεων μπορεί να προσεγγιστεί με δύο τρόπους: με βάση το αποτέλεσμα της απόφασης και με βάση τη διαδικασία. Με βάση το αποτέλεσμα της απόφασης γίνεται η υπόθεση πως αν κάποιος μπορεί να προβλέψει σωστά το αποτέλεσμα μιας απόφασης, τότε μπορεί να κατανοήσει πλήρως τη διαδικασία της απόφασης. Η διαδικασία επικεντρώνεται στη σωστή πρόβλεψη του αποτελέσματος της απόφασης, ενώ κατά τη διαδικασία της λήψης της απόφασης τίθενται περισσότερο τα ερωτήματα ποιος και πότε παρά το πώς. Από την άλλη μεριά, όταν η διαδικασία μοντελοποίησης της απόφασης βασίζεται στην διαδικασία, θεωρείται πως αν κάποιος κατανοεί την διαδικασία της απόφασης μπορεί και επιτυχώς να προβλέψει το αποτέλεσμά της.

Η διαδικασία της λήψης της απόφασης βασίζεται στην μέτρηση των συγκριτικών στοιχείων της αξίας. Αν τα συνολικά πλεονεκτήματα μιας απόφασης μετρηθούν σωστά τότε κανείς δεν μπορεί να είναι βέβαιος πως θα επιλέξει την βέλτιστη απόφαση. Γενικά η θεωρία λήψης αποφάσεων εφαρμόζεται, όταν εξετάζονται πολλαπλοί στόχοι, αντικείμενα, κριτήρια και χαρακτηριστικά τα οποία μπορεί να μετρηθούν.

Η διαδικασία της λήψης αποφάσεων αποτελεί μια δυναμική διαδικασία που περιλαμβάνει μια σύνθετη μελέτη πληροφοριών και αποτελεσμάτων προς όλες τις κατευθύνσεις. Περιλαμβάνει στάδια αρχικής και τελικής απόφασης τα οποία περιέχουν και μερικές αποφάσεις, ενώ οι αποφάσεις λαμβάνονται από τον άνθρωπο και όχι από κάποια μηχανή.

Τα στάδια που περιλαμβάνονται στη διαδικασία λήψης αποφάσεων είναι η αρχική απόφαση, η απόφαση και η μετά-απόφαση και είναι στάδια ανεξάρτητα

μεταξύ τους. Κάθε στάδιο απόφασης αποτελείται από μερικές αποφάσεις, οι οποίες με τη σειρά τους χαρακτηρίζονται από τις προ και μετά αποφάσεις.

Η προαπόφαση περιλαμβάνει την έννοια της σύγκρουσης. Η έννοια αυτή αποδίδει το κίνητρο για τη λήψη της απόφασης και μια δυσαρέσκεια με την υπάρχουσα κατάσταση. Η βάση στο στάδιο της αρχικής απόφασης είναι η μη διαθεσιμότητα των επιθυμητών εναλλακτικών, καθώς και η μη επίτευξη της βέλτιστης εναλλακτικής. Αυτός που λαμβάνει την απόφαση εξετάζει και εκτιμάει τις διάφορες εναλλακτικές, ενώ γίνεται αντιληπτό ότι η βέλτιστη εναλλακτική δεν είναι εφικτή. Στη συνέχεια ο λήπτης της απόφασης ψάχνει μια νέα εναλλακτική που να προσεγγίζει όσο το δυνατόν περισσότερο την ιδανική. Καθώς τα χαρακτηριστικά της ιδανικής απόφασης σταθεροποιούνται και καθορίζονται πλήρως, αναγνωρίζεται η μη επίτευξη της καθώς και η σύγκρουση ανάμεσα στην επίτευξη της εναλλακτικής και στα διαθέσιμα δεδομένα. Η αναζήτηση των εναλλακτικών συνεχίζεται, αλλά τώρα γίνεται γύρω από το σημείο αναφοράς που είναι η βέλτιστη λύση.

Οι μερικές αποφάσεις περιλαμβάνουν την άμεση ρύθμιση της κατάστασης για την οποία πρέπει να ληφθεί η απόφαση. Το στάδιο των μερικών αποφάσεων στη διαδικασία λήψης της απόφασης περιλαμβάνει την απόρριψη εναλλακτικών από την ομάδα εφικτών λύσεων, καθώς επίσης και την προσθήκη ή απόρριψη κριτηρίων για την λήψη της τελικής απόφασης. Με δεδομένο ότι, όλες οι εναλλακτικές συγκρίνονται με τη βέλτιστη απορρίπτονται στο στάδιο των μερικών αποφάσεων αυτές που αποκλίνουν σημαντικά από αυτήν. Οι μερικές αποφάσεις λαμβάνονται με βάση το κριτήριο της μείωσης της δυσαρμονίας που προκαλείται κατά την λήψη μιας απόφασης.

Ενώ οι μερικές αποφάσεις μειώνουν τη σύγκρουση ανάμεσα στις εναλλακτικές αποφάσεις, η δυσαρμονία αυξάνεται και συνδυάζεται με τη σύγκρουση των εναλλακτικών. Όσο μεγαλύτερη είναι η δυσκολία για τη λήψη των μερικών αποφάσεων και όσο πιο κοντά βρίσκονται οι θεωρούμενες εναλλακτικές τόσο μεγαλύτερη είναι η δυσαρμονία μετά τη λήψη της απόφασης.

Για τη διαδικασία λήψης των αποφάσεων το κίνητρο είναι η δυσαρέσκεια σχετικά με μια κατάσταση αυτού που καλείται να λάβει την απόφαση. Η δυσαρέσκεια αυτή διατηρείται με δύο στοιχεία: τη σύγκρουση των αρχικών αποφάσεων και την ασυμφωνία μετά τη λήψη της απόφασης. Η σύγκρουση των αρχικών αποφάσεων προέρχεται από τη μη εφικτή ιδανική λύση, ενώ η ασυμφωνία μετά τη λήψη της απόφασης είναι αποτέλεσμα της τελικής απόφασης. Στο αρχικό στάδιο της λήψης της απόφασης κυριαρχεί η σύγκρουση των αρχικών αποφάσεων, ενώ στο τελικό στάδιο κυρίαρχη είναι η ασυμφωνία. Η αύξηση της ασυμφωνίας μειώνει τη σύγκρουση διατηρώντας όμως σε υψηλά επίπεδα τη δυσαρέσκεια προκειμένου να ολοκληρωθεί η διαδικασία λήψης των αποφάσεων.

Στη διαδικασία λήψης των αποφάσεων το στάδιο μετά την τελική απόφαση περιλαμβάνει τη διαδικασία ελαχιστοποίησης της ασυμφωνίας. Στο στάδιο αυτό πραγματοποιείται η επανεκτίμηση της τελικής απόφασης. Αυτός που λαμβάνει την απόφαση ενισχύει την επιλογή της εναλλακτικής του με μια κατευθυνόμενη επιλεκτική επανεξέταση της απόφασης. Στο στάδιο αυτό οι πληροφορίες της ασυμφωνίας δεν αγνοούνται αλλά επανεξετάζονται ώστε να μπορέσουν να ενσωματωθούν στην τελική επιλογή της εναλλακτικής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ ΧΩΡΙΣ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΣΜΟΥΣ (DECISION ANALYSIS WITH EXPERIMENTATION)

Όταν πρέπει να ληφθεί μια απόφαση αυτός που πρόκειται να τη λάβει στην πραγματικότητα έχει να επιλέξει μεταξύ διαφόρων ενεργειών που μπορεί να οδηγήσουν στη λύση του θεωρούμενου προβλήματος. Η επιλογή της κατάλληλης ενέργειας γίνεται με βάση την αβεβαιότητα δεδομένου ότι, το αποτέλεσμα της απόφασης μπορεί να επηρεαστεί από τυχαίους παράγοντες που δεν ελέγχονται από αυτόν που καλείται να λάβει την απόφαση και οι οποίοι καθορίζουν την κατάσταση τη στιγμή που εκτελείται η συγκεκριμένη πράξη. Κάθε μία από τις πιθανές καταστάσεις αναφέρεται ως πιθανή κατάσταση της φύσης (state of nature).

Κάθε πράξη και φυσική κατάσταση συνδυάζονται έτσι ώστε να είναι γνωστό το κέρδος τους (payoff) το οποίο είναι το ποσοτικό μέτρο της απόφασης που λαμβάνεται. Το κέρδος αποτελεί μια αναμενόμενη μεταβλητή για τις συνέπειες όταν το αποτέλεσμα της απόφασης δεν ορίζεται πλήρως κάτω από δεδομένες καταστάσεις. Η αναπαράσταση του κέρδους από κάθε συνδυασμό δράσης και κατάστασης της φύσης αποδίδεται μέσω του πίνακα κέρδους (payoff table).

Η ανάπτυξη της ανάλυσης των αποφάσεων μπορεί να αντιστοιχηθεί σε ένα παιχνίδι με δύο παίκτες. Ως παίκτες μπορεί να θεωρηθούν αυτός που λαμβάνει την απόφαση και η φύση του προβλήματος, ενώ οι εναλλακτικές δράσεις και οι πιθανές φυσικές καταστάσεις αποτελούν τις διαθέσιμες στρατηγικές για τους αντίστοιχους παίκτες.

Στην ανάλυση αποφάσεων αυτός που πρέπει να λάβει την απόφαση για ένα συγκεκριμένο πρόβλημα έχει ένα εύρος επιλογών για να επιλέξει ανάμεσα σε εναλλακτικές δράσεις. Στη συνέχεια η φύση είναι αυτή που επιλέγει μία από τις πιθανές καταστάσεις της φύσης. Κάθε συνδυασμός της κατάστασης της φύσης και μιας δράσης έχει ως αποτέλεσμα ένα κέρδος που εισάγεται στον αντίστοιχο

πίνακα. Ο πίνακας κέρδους χρησιμοποιείται για τον εντοπισμό της βέλτιστης απόφασης που μπορεί να ληφθεί και ακολουθεί συγκεκριμένα κριτήρια.

Η διαφορά ανάμεσα στην ανάλυση των αποφάσεων και στην θεωρία παιγνίων είναι ο σκοπός της απόφασης. Στην θεωρία των αποφάσεων όπως και στη θεωρία παιγνίων οι παίκτες λαμβάνουν λογικές αποφάσεις με στόχο το ατομικό τους κέρδος. Η φύση όμως στην θεωρία των αποφάσεων είναι ένας παθητικός παίκτης που επιλέγει τη στρατηγική του τυχαία.

Κατά τη διαδικασία λήψης των αποφάσεων περιλαμβάνονται δεδομένα τα οποία βοηθούν στην εκτίμηση της σχετικής πιθανότητας των πιθανών καταστάσεων τα οποία εκφράζονται μέσω της κατανομής πιθανότητας. Όταν η κατάσταση της φύσης αποτελεί μια τυχαία μεταβλητή, τότε η κατανομή αποτελεί μια *rigor* κατανομή και οι πιθανότητες των αντίστοιχων καταστάσεων που περιγράφουν την *rigor* κατανομή αποτελούν τις *rigor* πιθανότητες.

Για πολλά χρόνια οι *rigor* πιθανότητες απορρίπτονταν από τους στατιστικούς και χρησιμοποιούσαν τις σχετικές (*rigor*) πληροφορίες, περιορίζοντας με αυτόν τον τρόπο το εύρος των προβλημάτων στα οποία μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν. Το γεγονός αυτό, όμως, αποτελεί και το βασικό μειονέκτημα στον ορισμό των διαστημάτων εμπιστοσύνης.

Σήμερα οι *rigor* πιθανότητες έχουν σημαντικό ρόλο στην ανάλυση αποφάσεων, αφού μέχρι αυτές να οριστούν δεν μπορεί κανείς να έχει πλήρη απεικόνιση του εξεταζόμενου προβλήματος. Στην πραγματικότητα υπάρχουν προβλήματα στα οποία οι *rigor* πληροφορίες είναι οι μοναδικές διαθέσιμες και η λήψη των αποφάσεων μπορεί να γίνει μόνο με βάση αυτές τις πληροφορίες.

Από την άλλη ο Savage αναφέρει, πως αυτή η αδυναμία μπορεί να προσπεραστεί με πολλές *rigor* πληροφορίες για μια δεδομένη κατάσταση που προϋπάρχει. Προφανώς ισχύει πως δύο άτομα που έχουν την ίδια *rigor* πληροφορία θα αντιπροσωπεύουν την ίδια *rigor* πιθανότητα. Ισχύει λοιπόν η άποψη πως η πιθανότητα που θεωρείται δεδομένη μπορεί να παραβιαστεί χωρίς να θεωρείται αυτή η παραβίαση παράλογη.

3.1 Το κριτήριο μέγιστης/ ελάχιστης αποπληρωμής (Maximin Payoff criterion)

Η επίλυση ενός προβλήματος ανάλυσης αποφάσεων μπορεί να παρομοιαστεί με την επίλυση ενός παιγνίου με δύο παίκτες (με αντίπαλο τη «φύση»). Τότε η λύση του προβλήματος θα βρεθεί με βάση του κριτηρίου μέγιστης/ ελάχιστης αποπληρωμής σύμφωνα με το οποίο για κάθε πιθανή δράση θα πρέπει να βρεθεί το ελάχιστος όφελος που αποδίδεται σε συνδυασμό με όλες τις πιθανές καταστάσεις της φύσης και να επιλεγεί το μέγιστο από αυτά τα ελάχιστα οφέλη.

Η λογική πίσω από το συγκεκριμένο κριτήριο είναι πως δίνεται το πιο πιθανό όφελος που προκύπτει από την επιλεγμένη απόφαση. Παρόλα αυτά επειδή επικεντρώνεται στη χειρίστη περίπτωση που μπορεί να συμβεί θεωρείται ως απαισιόδοξο σενάριο.

Η λογική αυτή είναι αξιόπιστη όταν κάποιος έχει να αντιπαρατεθεί με έναν λογικό και κακόβουλο αντίπαλο. Παρόλα αυτά το συγκεκριμένο κριτήριο δεν χρησιμοποιείται στα παίγνια ενάντια στη φύση δεδομένου ότι είναι εξαιρετικά συντηρητική προσέγγιση.

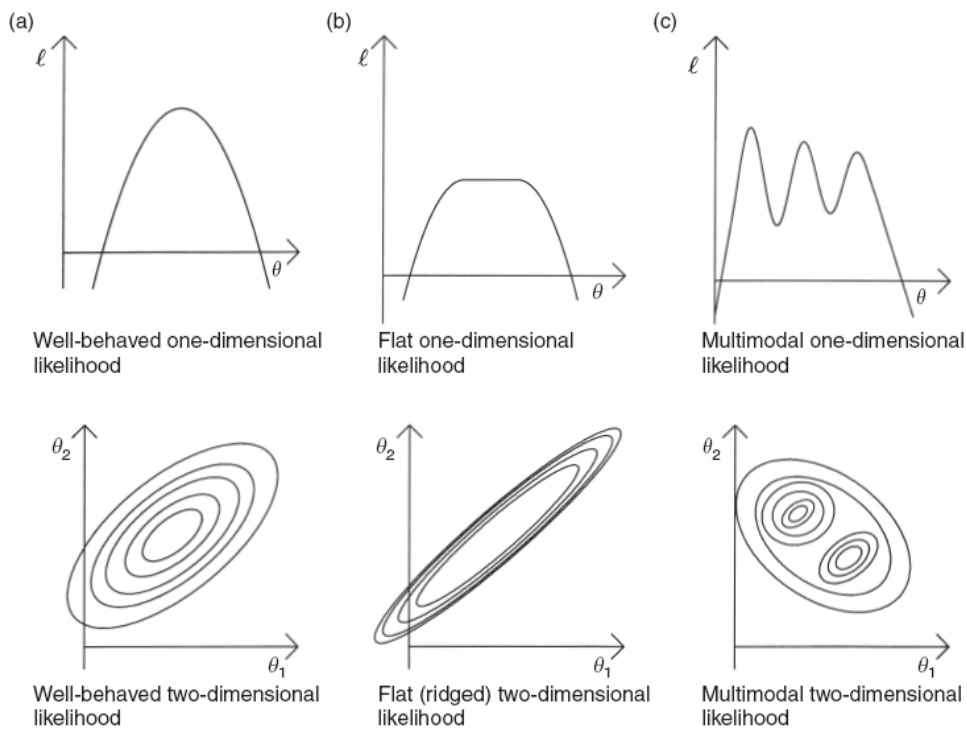
Το συγκεκριμένο κριτήριο θεωρεί πως η φύση είναι ένας συνειδητός αντίπαλος, ο οποίος θέλει να προκαλέσει όσο το δυνατόν περισσότερες καταστροφικές συνέπειες σε αυτόν που καλείται να λάβει την απόφαση. Στην πραγματικότητα αυτό ισχύει όταν η χειρότερη δυνατή αποπληρωμή (payoff) από μια ενέργεια προέρχεται από μια σχεδόν απίθανη φυσική κατάσταση, γεγονός που καθιστά το συγκεκριμένο κριτήριο χρήσιμο στις ιδιαίτερα προσεκτικές λήψεις αποφάσεων.

3.2 Το κριτήριο της μέγιστης πιθανοφάνειας

Σύμφωνα με το κριτήριο της μέγιστης πιθανοφάνειας καθορίζεται η πιο πιθανή κατάσταση της φύσης για την οποία προσδιορίζεται η δράση εκείνη για την οποία αποδίδεται η μέγιστη αποπληρωμή.

Το κριτήριο της μέγιστης πιθανοφάνειας χρησιμοποιείται ευρέως και αποτελεί τη σημαντικότερη από τις μεθόδους εκτίμησης. Αν η συνάρτηση πιθανοφάνειας μιας απόφασης είναι $L(\theta; x)$ θα πρέπει να βρεθεί η εκτιμήτρια $\hat{\theta}$ της μεταβλητής θ που την μεγιστοποιεί. Για την μεγιστοποίηση της πιθανοφάνειας συνήθως χρησιμοποιούνται επαναληπτικές διαδικασίες οι οποίες μεγιστοποιούν αντί για την $L(\theta; x)$ τη συνάρτηση $l(\theta; x) = \ln(L(\theta; x))$. Με δεδομένο ότι η λογαριθμική συνάρτηση είναι αύξουσα, η ίδια τιμή της εκτιμήτριας $\hat{\theta}$ μεγιστοποιεί ταυτόχρονα την L και την l συνάρτηση για αυτό και συνήθως επιλέγεται η λογαριθμική συνάρτηση.

Στην περίπτωση που είναι εφικτό επιλέγεται η γραφική αναπαράσταση της $L(\theta; x)$ ή της $l(\theta; x)$ μέσω της οποίας δίνονται σχετικές πληροφορίες σχετικά με πιθανά προβλήματα που μπορούν να προκύψουν από την μαθηματική οπτική γωνία του κριτηρίου μέγιστης πιθανοφάνειας, όπως είναι ο εντοπισμός πολλαπλών μεγίστων ή η ύπαρξη μιας «επίπεδης» πιθανοφάνειας (flat likelihood) γύρω από την εκτιμήτρια.



Σχήμα 3.1: Γραφική αναπαράσταση λογαριθμικών παραστάσεων πιθανοφάνειας

Το πλεονέκτημα αυτού του κριτηρίου στη θεωρία λήψης αποφάσεων είναι πως καθορίζει πως η πιο σημαντική κατάσταση της φύσης είναι και η πιο πιθανή, με αποτέλεσμα η δράση που επιλέγεται να είναι η βέλτιστη για τη συγκεκριμένη κατάσταση. Στηρίζοντας την απόφαση στο γεγονός ότι η υπάρχουσα κατάσταση της φύσης θα πραγματοποιηθεί, δίνεται ένα πιο επιθυμητό αποτέλεσμα από το να υποθέτουμε ότι κάθε άλλη φυσική κατάσταση μπορεί να συμβεί.

Άλλο βασικό πλεονέκτημα που προκύπτει από την εφαρμογή του συγκεκριμένου κριτηρίου είναι ότι η εφαρμογή του δεν σχετίζεται με αμφισβητήσιμες εκτιμήσεις πιθανοτήτων των φυσικών καταστάσεων, παρά του προσδιορισμού της πιο πιθανής.

Με την εφαρμογή του συγκεκριμένου κριτηρίου, όμως, αγνοούνται οι πιο σημαντικές πληροφορίες όπως, πως καμία φυσική κατάσταση δεν θεωρείται πιο πιθανή από κάποια άλλη. Αυτό αποτελεί μειονέκτημα ειδικά στα

προβλήματα με πολλές πιθανές φυσικές καταστάσεις, όπου η πιθανότητα της βέλτιστης είναι ιδιαίτερα μικρή με αποτέλεσμα να είναι επισφαλής η εστίαση σε αυτήν.

3.3 Θεωρία αποφάσεων του Bayes

Στην ανάλυση αποφάσεων, η θεωρία του Bayes αποτελεί ένα βασικό στοιχείο, που αναπαριστά τη δομή ενός προβλήματος και τις αβεβαιότητες που προκύπτουν από την ανάλυση του, σε όρους ενός απλού πιθανολογικού μοντέλου. Σε ένα καλά δομημένο μοντέλο κατά Bayes η λογική συμφωνία, η επιστήμη, η ορθή κρίση και τα δεδομένα χρησιμοποιούνται για την υποστήριξη της κατανομής της πιθανότητας. Στην απλή της μορφή η θεωρία του Bayes χρησιμοποιείται για την εξήγηση επιστημονικών φαινομένων, ενώ στην πιο σύνθετη αποτελεί ένα σύστημα πιθανοτήτων που μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην διαδικασία λήψης αποφάσεων δίνοντας πληροφορίες που δεν είναι γνωστές από την αρχή του σχεδιασμού της απόφασης.

Αν θεωρηθεί πως D είναι ο χώρος αποφάσεων δηλαδή το σύνολο όλων των πιθανών αποφάσεων d που μπορεί να λάβει κάποιος (decision maker, DM) και θ όλα τα πιθανά αποτελέσματα ή καταστάσεις της φύσης θ , τότε υπάρχει ένας απλός τρόπος για αυτόν που λαμβάνει τις αποφάσεις να αναλύσει ένα πρόβλημα αποφάσεων συστηματικά και να βρει τη βέλτιστη λύση. Πριν κάποιος λάβει τη βέλτιστη απόφαση απαιτείται ο προσδιορισμός δύο εκτιμητριών κατά Bayes. Η πρώτη εκτιμήτρια ποσοτικοποιεί τις συνέπειες της κάθε απόφασης $d \in D$ για κάθε πιθανό αποτέλεσμα $\theta \in \Theta$. Η δεύτερη εκτιμήτρια ποσοτικοποιεί την αντικειμενική κατανομή πιθανότητας στα πιθανά αποτελέσματα που μπορεί να προκύψουν. Η μία εκτιμήτρια αποτελεί την συνάρτηση απωλειών και η άλλη την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

Ως συνάρτηση απωλειών $L(d, \theta)$ ορίζεται η ποσότητα απωλειών, αν ληφθεί μια συγκεκριμένη απόφαση $d \in D$ και το μελλοντικό της αποτέλεσμα είναι $\theta \in$

θ . Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $p(\theta)$ για $\theta \in \Theta$ δίνει τις πιθανότητες των διαφόρων αποτελεσμάτων θ ή των πιθανών φυσικών καταστάσεων ακριβώς πριν ληφθεί η απόφαση d . Όταν η δημιουργία της πυκνότητας πιθανότητας βασίζεται στη λογική ανάλυση των διαθέσιμων δεδομένων, ονομάζεται posteriori πυκνότητα πιθανότητας. Η συνάρτηση της πυκνότητας πιθανότητας αναπαριστά την αβεβαιότητα της λήψης απόφασης σχετικά με το μέλλον.

3.3.1 Η απόφαση κατά Bayes και η posteriori αναμενόμενη απώλεια

Το ρίσκο που λαμβάνεται κατά τη λήψη μιας απόφασης βρίσκεται από το μέσο όρο της συνάρτησης απωλειών σε όλες τις πιθανές παρατηρήσεις, αγνοώντας τη διαθεσιμότητα τους κατά τη λήψη μιας απόφασης. Το βασικό μειονέκτημα του ρίσκου είναι η εξάρτηση του από τις άγνωστες φυσικές καταστάσεις και κατά συνέπεια δεν επιτρέπει την ομαδοποίηση των κανόνων για τη λήψη μίας απόφασης. Έτσι από το ρίσκο δεν μπορεί να προκύψει η βέλτιστη λύση.

Η προσέγγιση του Bayes χρησιμοποιεί μία εντελώς διαφορετική πορεία δράσης για την οποία είναι σημαντική η απόδοση του κανόνα απόφασης $\delta(x)$ (συνάρτηση $X \rightarrow D$ όπου είναι η συνάρτηση απόφασης για τον λήπτη αποφάσεων υπό κάποιο κριτήριο βελτιστοποίησης) για τα δεδομένα x που είναι πραγματικά και όχι για αυτά που δεν είναι σίγουρο ότι υπάρχουν. Επιπλέον, σύμφωνα με τον Bayes, η συνάρτηση απωλειών αποτελεί το μέσο του διαστήματος θ σύμφωνα με την πιθανότητα $p_\theta(x)$, δεδομένου ότι αποτελεί τη φύση θ που είναι άγνωστη. Η posteriori αναμενόμενη απώλεια με βάση τις παρατηρήσεις x θα είναι:

$$\begin{aligned} \rho(p_\theta, \delta(x)|x) &= E_\theta[L(\theta, \delta(x)|x)] \\ &= \begin{cases} \int_\theta L(\theta, \delta(x)) p(\theta|x) d\theta & \theta \text{ συνεχές} \\ \sum_{\theta \in \Theta} L(\theta, \delta(x)) p(\theta|x) d\theta & \theta \text{ διακριτό} \end{cases} \quad (\text{Εξ. 3.1}) \end{aligned}$$

Η posteriori συνάρτηση πιθανότητας $p(\theta|x)$ προσδιορίζεται από το θεώρημα Bayes από τη σχέση:

$$p(\theta|x) = \frac{f_x(x|\theta) p_\theta(\theta)}{f_x(x)} \quad (\text{Εξ. 3.2})$$

$$\text{Όπου: } f_x(x) = \begin{cases} \int_\theta f_x(x|\theta) p_\theta(\theta) & \text{όταν } \theta \text{ συνεχές} \\ \sum_{\theta \in \Theta} f_x(x|\theta) p_\theta(\theta) & \text{όταν } \theta \text{ διακριτό} \end{cases} \quad (\text{Εξ.3.3})$$

Είναι η οριακή συνάρτηση πιθανότητας.

Το θεώρημα Bayes έχει βασικό ρόλο στην Μπευζιανή συμπερασματολογία, αφού αποτελεί ένα χρήσιμο εργαλείο για τη μετατροπή των ρόλων των άγνωστων θ και των παρατηρήσεων x με βάση το πώς εμφανίζονται στο μοντέλο πιθανότητας $f(x|\theta)$. Αποτελεί τη γενική λύση στα πιθανολογικά αντιστρεπτά προβλήματα μέσω του οποίου οι a priori πιθανότητες μετατρέπονται σε posteriori όταν επιτυγχάνεται η παρατήρηση x .

Η βέλτιστη απόφαση Bayes είναι αυτή που ελαχιστοποιεί την posteriori αναμενόμενη απώλεια:

$$\delta(x) = \arg \min_{d \in D} \rho(p(\theta), d|x) \quad (\text{Εξ. 3.4})$$

Για κάθε παρατήρηση $x \in X$

3.3.2 Ο κίνδυνος κατά Bayes

Οι κανόνες απόφασης μπορούν να εκτιμηθούν με τον υπολογισμό του κινδύνου Bayes ή του «επαναλαμβανόμενου» κινδύνου $r(p(\theta), \delta(\cdot))$ (frequentist risk) που αποτελεί τον μέσο κίνδυνο συχνοτήτων με βάση την άγνωστη φυσική κατάσταση. Για παράδειγμα η μέση συνάρτηση απωλειών για θ και X σύμφωνα με τις αντίστοιχες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας είναι:

$$\begin{aligned} r(p_\theta(\theta), \delta(\cdot)) &= \int_{\theta} R_\delta(\theta) p_\theta(\theta) d\theta \\ &= \int_{\theta} \int_X L(\theta, \delta(x)) f_x(x|\theta) p_\theta(\theta) dx d\theta \\ &= \int_{\theta} \int_X L(\theta, \delta(x)) p_{X,\theta}(x, \theta) dx d\theta \end{aligned}$$

(Εξ.3.5)

Όπου $p_{X,\theta}(x, \theta) = f_x(x|\theta) p_\theta(\theta) = p_\theta(x|\theta) f_x(x)$ (Εξ. 3.6)

Είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών θ και X . Στην περίπτωση που οι μεταβλητές θ και X είναι διακριτές στις παραπάνω σχέσεις τα ολοκληρώματα εκφράζονται μέσω αθροισμάτων.

Η συνάρτηση κινδύνου του Bayes αποδίδει έναν πραγματικό αριθμό και όχι μια συνάρτηση για κάθε κανόνα απόφασης και εισάγει μια συνολική διάταξη του συνόλου των κανόνων αποφάσεων.

Η posteriori αναμενόμενη απώλεια και ο κίνδυνος κατά Bayes είναι ισοδύναμα οδηγούν ,δηλαδή, στον ίδιο κανόνα απόφασης. Παρόλα αυτά, το πραγματικό κριτήριο κατά Bayes είναι η posterior αναμενόμενη απώλεια και όχι ο κίνδυνος Bayes.

3.4 Ανάλυση ευαισθησίας στη θεωρία του Bayes

Όπως σε κάθε ποσοτική προσέγγιση, έτσι και στην ανάλυση αποφάσεων Bayes υπάρχουν πολλοί λόγοι που επιβάλλουν την ανάλυση ευαισθησίας με βάση τις αρχικές παραμέτρους, το μοντέλο, τις απώλειες και τις προηγούμενες καταστάσεις, έτσι ώστε να εξεταστεί η μεταβολή των παραμέτρων αυτών και ποια επίδραση έχουν στην λήψη της τελικής απόφασης.

Έχουν προταθεί πληθώρα μεθόδων που αφορούν στην επίδραση των μεταβολών στις αποφάσεις και τα αποτελέσματά τους. Τα κριτήρια με βάση τα οποία εφαρμόζεται μια μέθοδος ανάλυσης της ευαισθησίας παρουσιάζονται στη συνέχεια.

Μια προσέγγιση αφορά στον διαχωρισμό των *prior* πιθανοτήτων λαμβάνοντας υπόψη μια βασική πιθανότητα που φαίνεται πως είναι λογική επιλογή και εξετάζεται τι συμβαίνει στην περιοχή γύρω από αυτήν την απόφαση.

Ένα άλλο κριτήριο θεωρεί ισοδύναμες τις μεταβολές των *prior* πιθανοτήτων αλλά και των θεμάτων που προκύπτουν όταν θεωρούνται γνωστές οι πιθανότητες και οι απώλειες.

Η πρώτη προσέγγιση αποτελεί την *άτυπη* προσέγγιση σύμφωνα με την οποία λίγες *priors* επιλέγονται να συγκριθούν με τη θεωρούμενη ποσότητα. Η συγκεκριμένη προσέγγιση είναι ιδιαίτερα απλή και βασίζεται στο γεγονός ότι αντί να αναλυθούν πολύπλοκα υπολογιστικά προβλήματα είναι προτιμότερη η ανάλυση της ευαισθησίας δοκιμάζοντας ζεύγη απωλειών-*priors* πιθανοτήτων. Παρά το γεγονός ότι η συγκεκριμένη προσέγγιση είναι μια καλή αφετηρία για την ανάλυση ευαισθησίας γενικά δεν είναι αρκετή, δεδομένου ότι ο περιορισμένος αριθμός των επιλεγμένων *priors* πιθανοτήτων που επιλέγονται μπορεί να μην περιέχουν κάποιες από τις βασικές πληροφορίες και μπορεί να οδηγήσουν σε εντελώς διαφορετικές αποφάσεις.

Η πιο ευρέως διαδεδομένη μέθοδος που χρησιμοποιείται στην ανάλυση ευαισθησίας Bayes είναι αυτή που ονομάζεται ολική ανάλυση ευαισθησίας (global sensitivity analysis) και βασίζεται στην υπόθεση πως όλη η προηγούμενη γνώση είναι γνωστή και διαθέσιμη και η ευαισθησία μετριέται καθώς μεταβάλλονται οι prior πιθανότητες.

3.4.1 Ανάλυση ευαισθησίας prior πιθανότητας (Prior robustness)

Η ανάλυση ευαισθησίας σε αυτήν την περίπτωση ξεκινάει με το διαχωρισμό των prior πιθανοτήτων σε ομάδες και στη συνέχεια ακολουθείται από τον καθορισμό ενός εργαλείου ικανού να μετρήσει τα αποτελέσματα της αβεβαιότητας στις ποσότητες που εξετάζονται. Η συγκεκριμένη μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί θεωρώντας διαφορετικές προσεγγίσεις ανάλογα με την ύπαρξη ή όχι μιας βασικής γραμμής και την ύπαρξη της γειτονικής ομάδας. Είναι δυνατόν να θεωρηθεί μια γειτονική ομάδα στην αρχική Π_0 και να εξεταστεί τι συμβαίνει όταν υπάρχουν απειροελάχιστες ή περισσότερο σημαντικές μεταβολές γύρω από αυτή.

Η επιλογή των ομάδων prior πιθανοτήτων γίνεται έτσι ώστε να περιλαμβάνει προηγούμενες πιθανότητες αποφεύγοντας λανθασμένα συμπεράσματα σχετικά με την ευαισθησία και να υπολογίζονται οι σχετικές παράμετροι ευαισθησίας με εύκολο τρόπο.

Έχει αποδειχθεί στη βιβλιογραφία πως αν ο διαχωρισμός των ομάδων δεν περιλαμβάνει κάποιο άλλο χαρακτηριστικό ο υπολογισμός των παραμέτρων ευαισθησίας είναι άμεσος και μπορεί να επιτευχθεί θεωρώντας την ομάδα των διακριτών μεταβλητών που δεν αποτελούν πάντα «λογική» επιλογή.

Μια χαρακτηριστική διάκριση των ομάδων prior είναι αυτή που περιλαμβάνει όλες τις προηγούμενες καταστάσεις με τα ίδια χαρακτηριστικά. Τυπικές επιλογές αποτελούν για παράδειγμα οι πιθανότητες Γ για μια εκθετική

κατανομή. Παρά το γεγονός πως η επιλογή ενός δεδομένου χαρακτηριστικού αποτελεί μαθηματικά ένα εύκολο κριτήριο επιλογής δεν ανταποκρίνεται στην έννοια της prior πιθανότητας.

Μια άλλη διάκριση είναι με βάση τις γενικές ροπές των πιθανοτήτων. Η γενική ροπή μιας ομάδας πιθανοτήτων δίνεται από τη σχέση:

$$\Gamma = \{p: \int_{\theta} H_i(\theta)p(\theta)d\theta \leq \alpha_i, i = 1, \dots, n\} \quad (\text{Εξ.3.7})$$

Όπου H_i είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις πιθανότητας και α_i είναι δεδομένοι πραγματικοί αριθμοί. Η επιλογή των δυο πρώτων ροπών εκφράζουν τη μέση τιμή και τη διακύμανση της κατανομής της πιθανότητας.

Η ομάδα πιθανοτήτων μπορεί επίσης να οριστεί από τις οριακές πιθανότητες μιας δεδομένης ομάδας K_i με

$$H_i(\theta) = \int_{K_i} f(x|\theta) dx \quad (\text{Εξ.3.8}).$$

Υπάρχουν επίσης περιπτώσεις που μια βασική prior πιθανότητα Π_0 επιλέγεται και η ανάλυση ευαισθησίας γίνεται με την εξέταση των γειτονικών πιθανοτήτων.

Ένας άλλος τρόπος διαχωρισμού των ομάδων πιθανοτήτων είναι η ομαδοποίηση με βάση την αλληλεπίδραση ε (ε -contamination). Η αλληλεπίδραση ε των ομάδων ορίζεται από τη σχέση:

$$\Gamma_{\varepsilon} = \{p: p = (1 - \varepsilon)p_0 + \varepsilon q, q \in \mathbb{Q}\} \quad (\text{Εξ. 3.9})$$

Η ομαδοποίηση αυτή αποτελεί το επονομαζόμενο μεικτό μοντέλο σφάλματος που καθορίζει δεδομένα που προέρχονται από διαφορετικές κατανομές με την ίδια πιθανότητα ε . Στη θεωρία αποφάσεων του Bayes η ταξινόμηση ε πραγματοποιείται με prior πιθανότητες που αντανakλούν μια γραμμή βάσης

που είναι πολύ κοντά στο επιτρεπόμενο μέγεθος της ομάδας των αλληλεπιδράσεων και της πιθανότητας ε .

Ένα βασικό μειονέκτημα της ταξινόμησης με βάση την αλληλεπίδραση είναι ότι δεν λαμβάνει υπόψη τις πραγματικές γειτονικές ομάδες. Για αυτό έχουν προταθεί διάφορες άλλες ταξινομήσεις με βάση την τοπολογική γειννίαση των ομάδων. Η συνάρτηση συγκέντρωσης αποτελεί ένα εργαλείο για τον γειτονικό ορισμό των ομάδων το οποίο αποτελεί γενίκευση της καμπύλης.

Ενώ η καμπύλη Lorentz συγκρίνει τη διακριτή κατανομή με μια συνεχή η συνάρτηση συγκέντρωσης επιτρέπει τη σύγκριση ανάμεσα σε δύο συναρτήσεις πιθανότητας Π και Π_0 θεωρώντας όλα τα υποσύνολα που περιλαμβάνονται στην πιθανότητα Π με όλα τα υποσύνολα που αφορούν στην πιθανότητα Π_0 . Παρά το γεγονός πως η συνάρτηση συγκέντρωσης περιλαμβάνει πολύ καλά ορισμένες ομαδοποιήσεις η επιλογή της δεν είναι εύκολη ως προς τις γειτονικές ομάδες δεδομένου ότι απαιτεί τον καθορισμό μια συνεχούς, αύξουσας και πολύπλοκης συνάρτησης.

3.4.2 Ολική ανάλυση ευαισθησίας (Global sensitivity analysis)

Η συγκεκριμένη ανάλυση ευαισθησίας εισάγει κάποιες παραμέτρους που μπορούν να προσδιορίζουν τις μεταβολές σε διάφορες ομάδες που εξετάζονται. Οι παράμετροι αυτοί επιλέγονται με βάση μια σειρά αρχών που αναφέρονται στη συνέχεια:

- ✓ Αν η παράμετρος έχει «μικρό» μέγεθος τότε η ανάλυση της ευαισθησίας επιτυγχάνεται και κάθε prior πιθανότητα μπορεί να επιλεγεί χωρίς όμως να προκαλείται επίδραση στην ποσότητα που μελετάται.
- ✓ Αν η παράμετρος έχει μεγάλο μέγεθος θα πρέπει να θεωρηθεί μια νέα και να διερευνηθεί η ομάδα στην οποία ανήκει και πρέπει να υπολογιστεί ξανά το μέτρο της ευαισθησίας μέχρι να συγκλίνουν τα αποτελέσματα.

- ✓ Αν το μέτρο της παραμέτρου είναι μεγάλο και δεν μπορεί να διαμορφωθεί η ομάδα, τότε μπορεί να επιλεγεί μια prior πιθανότητα της ομάδας, η επιλογή της οποίας εξαρτάται από την εξεταζόμενη ποσότητα.

Με δεδομένη μια ομάδα Γ prior πιθανοτήτων η ολική ανάλυση ευαισθησίας εστιάζει στο εύρος της μεταβολής μιας posterior συνάρτησης. Το εύρος μπορεί να προσδιορίσει τις μεταβολές της εξεταζόμενης ποσότητας. Η αναφορά όμως μόνο του εύρους της κλάσης μπορεί να οδηγήσει σε λάθος συμπεράσματα δεδομένου ότι ένα εύρος ίσο με τη μονάδα έχει διαφορετικό νόημα σε όρους ευαισθησίας. Επιπλέον δεν υπάρχει κάποιο καθορισμένο κριτήριο που να ορίζει πότε επιτυγχάνεται η βέλτιστη απόφαση. Για να αντιμετωπιστεί αυτό το μειονέκτημα εισήχθηκε η έννοια της σχετικής ευαισθησίας που δίνεται από τη σχέση:

$$R_{II} = \frac{(T(h,p) - T(h,p_0))^2}{V^p} \quad (\text{Εξ.3.10})$$

Στην οποία $T(h,p)$ και $T(h,p_0)$ είναι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας με πιθανότητα p και σημείο αναφοράς p_0 ενώ V^p είναι η posterior μεταβολή της εξεταζόμενης ποσότητας $h(\theta)$ με βάση την πιθανότητα p . Η εκτίμηση της $h(\theta)$ προσδιορίζει την ακρίβεια που προέρχεται από τις δοκιμές και αναφέρεται στην ανάλυση αποφάσεων με πειραματισμό που θα παρουσιαστεί στη συνέχεια.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ ΜΕ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΣΜΟΥΣ (DECISION ANALYSIS WITH EXPERIMENTATION)

Για την βελτίωση των αρχικών εκτιμήσεων των πιθανοτήτων σε ένα πρόβλημα ανάλυσης αποφάσεων διεξάγονται επιπρόσθετες δοκιμές (πειραματισμοί). Οι καινούριες πιθανότητες που προκύπτουν αποτελούν τις μεταγενέστερες ή αλλιώς posterior πιθανότητες. Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η θεωρία των συγκεκριμένων πιθανοτήτων και ο τρόπος απόφασης σχετικά με πως αποφασίζεται η διεξαγωγή ή μη ενός πειράματος.

4.1 Υπό συνθήκη (Posterior) Πιθανότητες

Αν θεωρηθεί s_i δείγμα του δειγματοχώρου με μέτρο πιθανότητας $P(s_i)$ η πιθανότητα να συμβεί το s_i με δεδομένο ότι έχει συμβεί το ενδεχόμενο B με πιθανότητα $P(B)$ είναι $P(s_i)/P(B)$ αν το s_i είναι μέρος του ενδεχόμενου B και 0 αν το s_i δεν είναι μέρος του ενδεχόμενου B.

Η φυσική ερμηνεία της υπό συνθήκης πιθανότητας είναι ότι το B είναι βέβαιο ενδεχόμενο. Όλα τα δείγματα που ανήκουν στο συμπληρωματικό ενδεχόμενο του B (B') είναι αδύνατον να συμβούν και άρα έχουν πιθανότητα 0. Αντίθετα τα δείγματα που αποτελούν το B είναι πιθανά και το άθροισμα της δεσμευμένης πιθανότητας τους πρέπει να είναι ίσο με 1 (διαμερισμός). Κατά συνέπεια η δεσμευμένη πιθανότητα πρέπει να διαιρεθεί με το $P(B)$ έτσι ώστε να παίρνει τιμές στο $(0,1]$. Αντίστοιχα η δεσμευμένη πιθανότητα $P(A|B)$ του ενδεχόμενου A με δεδομένο το B είναι η πιθανότητα τομής των A και B κανονικοποιημένη με την πιθανότητα $P(B)$.

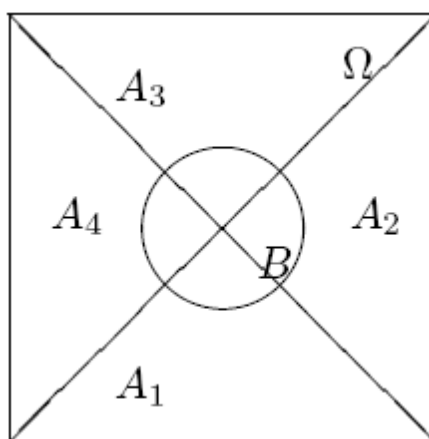
$$P(A|B) = P(AB + AB'|B) = P(AB|B) + P(AB'|B) = P(AB|B) \Rightarrow$$

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \equiv \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (\text{Εξ. 3.1})$$

4.1.1 Οριακή πιθανότητα ή κανόνας διαμερισμού

Η πιθανότητα του ενδεχομένου B μπορεί να εκφραστεί ως το άθροισμα των πιθανοτήτων της τομής του B με ένα διαμερισμό A_i $i=1,2,\dots,N$ ως εξής:

$$P(B) = \sum_{i=1}^N P(A_i \cap B) \equiv \sum_{i=1}^N P(A_i|B) \quad (\text{Εξ. 3.2})$$



Σχήμα 4.1: Σχηματική αναπαράσταση του κανόνα Διαμερισμού

Από το σχήμα 4.1 φαίνεται πως το εμβαδόν του ενδεχομένου B μπορεί να εκφραστεί ως το άθροισμα του εμβαδού του B με κάθε ένα από τα ενδεχόμενα που αποτελούν το διαμερισμό δηλαδή το άθροισμα του εμβαδού των A_1B , A_2B , A_3B και A_4B . Ο κανόνας του διαμερισμού θα ισχύει ακόμα και όταν τα A_i , B προέρχονται από διαφορετικούς δειγματοχώρους.

4.1.2 Κανόνας ή Θεώρημα Bayes

Όπως ήδη αναφέρθηκε το θεώρημα του Bayes είναι ένα αποτέλεσμα στη θεωρία των πιθανοτήτων που συσχετίζεται άμεσα με τις δεσμευμένες ή υπό συνθήκη πιθανότητες. Αν A και B είναι δύο ανεξάρτητα γεγονότα μεταξύ τους η πιθανότητα $P(A|B)$ συμβολίζει την υπό συνθήκη πιθανότητα να συμβεί το A δεδομένου ότι έχει πραγματοποιηθεί το B . Οι δύο πιθανότητες $P(A|B)$ και

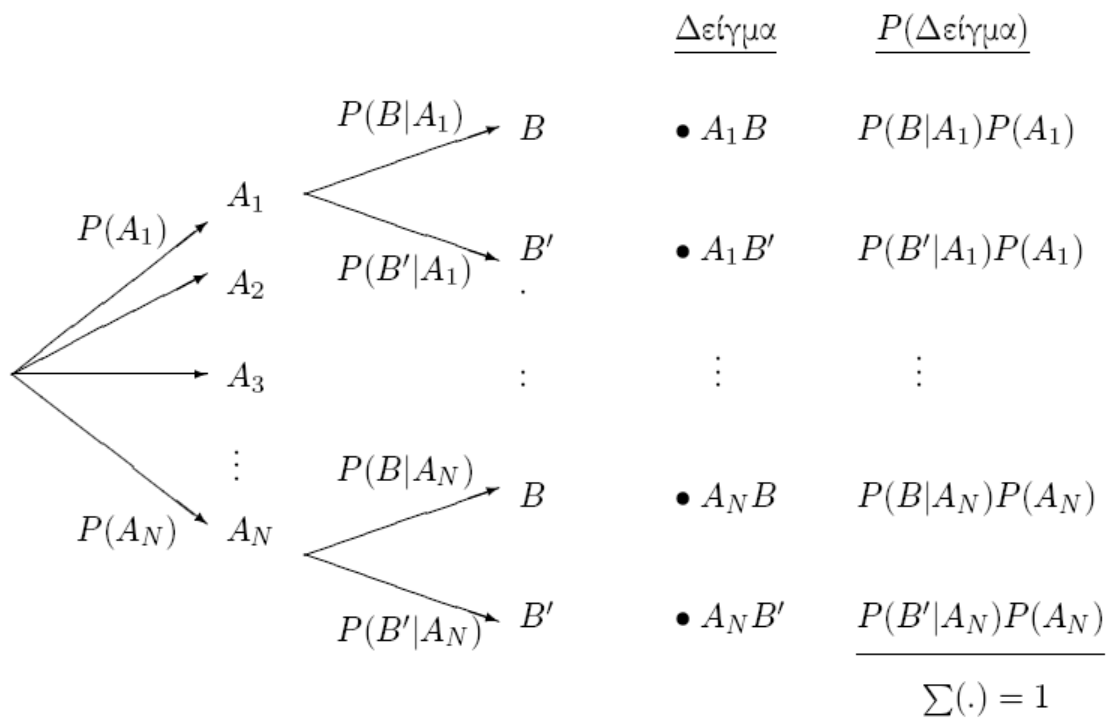
$P(B|A)$ είναι γενικά διαφορετικές και η σχέση μεταξύ τους προσδιορίζεται από το θεώρημα του Bayes.

Το θεώρημα του Bayes συσχετίζει τις υπό συνθήκη και τις περιθωριακές πιθανότητες των στοχαστικών γεγονότων με τη σχέση:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)} \equiv \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^N P(A_iB)} \quad (\text{Εξ. 4.3})$$

Ο κανόνας του Bayes αποτελεί χρήσιμο εργαλείο για τη στατιστική μοντελοποίηση. Σε μια αλυσίδα πειραμάτων $A \rightarrow B$ συνήθως είναι γνωστές οι άμεσες πιθανότητες (direct probabilities) δηλαδή οι πιθανότητες της μορφής $P(B|A)$. Οι συγκεκριμένες πιθανότητες είναι χρήσιμες στα προβλήματα πρόβλεψης, όπου ζητείται το πιο πιθανό αποτέλεσμα δηλαδή μεγιστοποιούνται οι πιθανότητες της μορφής $P(B|A)$ πάνω σε όλα τα δυνατά αποτελέσματα (αιτιατά B). Στα προβλήματα διάγνωσης το ζητούμενο είναι η πιο πιθανή αιτία που αντιστοιχεί σε ένα αποτέλεσμα δηλαδή ζητείται η μεγιστοποίηση της a posteriori πιθανότητας της μορφής $P(A|B)$ πάνω σε όλα τα A . Η a posteriori πιθανότητα $P(A|B)$ εκφράζεται από τον κανόνα του Bayes ως συνάρτηση της απευθείας πιθανότητας $P(A|B)$ και της a priori πιθανότητας $P(A)$.

Η γραφική απεικόνιση των a posteriori πιθανοτήτων πραγματοποιείται μέσω του δέντρου πιθανότητας (Σχήμα 4.3) στο οποίο απεικονίζεται η διαδοχή δύο πειραμάτων το πρώτο με ενδεχόμενα $\{A_1, A_2, \dots, A_N\}$ και το δεύτερο με ενδεχόμενα $\{B_1, B_2, \dots, B_N\}$.



Σχήμα 4.3: Διάγραμμα πιθανοτήτων

Ο κοινός δειγματικός χώρος του πειράματος αποτελείται από τα δείγματα $\{A_1B, A_1B', A_2B, A_2B', \dots, A_NB, A_NB'\}$ και η πιθανότητα του κάθε δείγματος υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τις γνωστές ριγορί και απευθείας πιθανότητες ενώ, για τον υπολογισμό της υπό συνθήκης πιθανότητας χρησιμοποιείται το θεώρημα Bayes.

Για να κατασκευαστεί ένα δέντρο πιθανοτήτων θα πρέπει αρχικά να προσδιοριστεί ο δειγματικός χώρος και τα ενδεχόμενα που περιέχονται σε αυτόν. Στη συνέχεια, θα πρέπει να δημιουργείται η χρονική ή αιτιατή αλυσίδα για παράδειγμα αν η ύπαρξη του B βασίζεται στην ύπαρξη του A τότε θα είναι $A \rightarrow B$. Στη συνέχεια ξεκινάει η κατασκευή του δέντρου. Για να κατασκευαστεί το δέντρο πιθανοτήτων η αρχή γίνεται από την αιτία A και η διαδικασία εξελίσσεται με τέτοιο τρόπο ώστε να φτάνει στο αιτιατό B. Στα κλαδιά του δέντρου προστίθενται οι άμεσες και α ριγορί πιθανότητες για παράδειγμα $P(A_i), P(B_j|A_i), P(C_k|B_j, A_i)$. Σε κάθε μονοπάτι πολλαπλασιάζονται οι

πιθανότητες προκειμένου να υπολογιστεί η πιθανότητα κάθε δείγματος στον κοινό δειγματικό χώρο για παράδειγμα θα ισχύει:

$$P(A_i, B_j, C_k) = P(A_i) P(B_j|A_i) P(C_k|B_j, A_i).$$

Από τα δέντρα πιθανοτήτων υπολογίζεται οποιαδήποτε πιθανότητα ζητείται. Για τον υπολογισμό των κοινών πιθανοτήτων αθροίζεται η πιθανότητα των δειγμάτων που συμφωνούν με το ενδεχόμενο, για τον υπολογισμό των απευθείας πιθανοτήτων χρησιμοποιείται ο ορισμός της δεσμευμένης πιθανότητας ενώ για τις υπό συνθήκη πιθανότητες το θεώρημα του Bayes.

4.2 Αξία υπό συνθήκη

Ένα από τα βασικά στοιχεία της θεωρίας λήψης των αποφάσεων είναι η αξία υπό συνθήκη. Ας θεωρηθεί ο ιδιοκτήτης ενός παντοπωλείου που επιθυμεί να καθορίσει πόσα κιβώτια γάλα πρέπει να παραγγείλει για να ικανοποιήσει τη ζήτηση της ημέρας και μόνο αυτή. Αυτό πρακτικά σημαίνει πως παραγγέλλεται κάθε μέρα συγκεκριμένη ποσότητα γάλατος η οποία παραλαμβάνεται την επομένη με το άνοιγμα του καταστήματος. Η ποσότητα που μένει απούλητη αποτελεί απώλεια για τον παντοπώλη. Η επιπλέον ζήτηση που δεν μπορεί να ικανοποιηθεί σημαίνει ότι χάθηκε η ευκαιρία να αποκομισθεί κέρδος. Έστω δηλαδή ότι ο πελάτης που δεν θα ικανοποιηθεί θα επιστρέψει στο μέλλον για μια άλλη αγορά.

Η παραγγελία του παντοπώλη βασίζεται στο αρχείο που κρατάει για τις πωλήσεις της προηγούμενης χρονιάς το οποίο φαίνεται στον πίνακα 4.1.

Πίνακας 4.1: Ιστορικά δεδομένα για τη ζήτηση

Συνολική ημερήσια ζήτηση	Αριθμός ημερών που καταγράφεται η ζήτηση	Πιθανότητα της κάθε ζήτησης
20 κιβώτια	15	0.05
21 κιβώτια	30	0.10
22 κιβώτια	90	0.3
23 κιβώτια	150	0.5
24 κιβώτια	15	0.05
Σύνολο	300	1

Το μεταβλητό κόστος της παραγγελίας για ένα κιβώτιο ή αλλιώς η τιμή της αγοράς του κιβωτίου είναι 12€ ενώ η τιμή πώλησής του είναι 15€. Κατά συνέπεια το κέρδος σε κάθε κιβώτιο είναι 3€. Ο παντοπώλης θεωρεί ότι μια ζήτηση μικρότερη από 20 και μεγαλύτερη από 24 κιβώτια είναι αδύνατο να συμβεί (μηδενική πιθανότητα) παραγγέλνει καθημερινά μεταξύ 20 και 24 κιβωτίων κάθε ημέρα. Για την περίπτωση που παραγγέλνει 22 κιβώτια τα υπό συνθήκη κέρδη φαίνονται στον πίνακα 4.2.

Πίνακας 4.2: Κέρδη υπό συνθήκη στην περίπτωση παραγγελίας 22 κιβωτίων

Ενδεχόμενο (ζήτηση)	Τιμή πώλησης	Έσοδα	Κόστος Αγοράς 22κιβώτια	Κέρδος υπό συνθήκη της ενέργειας «παραγγέλνω 22 κιβώτια»
20 κιβώτια	15	300	264	36
21 κιβώτια	15	315	264	51
23 κιβώτια	15	330	264	66
24 κιβώτια	15	330	264	66

Αν ο παντοπώλης έχει παραγγείλει 22 κιβώτια και η ζήτηση είναι 23 κιβώτια θα πουλήσει και τα 22 κιβώτια με κέρδος 66€ και απλά θα χάσει την δυνατότητα να αποκομίσει κέρδος και από το κιβώτιο που ζητήθηκε αλλά δεν είχε να το πουλήσει. Από την άλλη, αν η ζήτηση αποδειχθεί 20 κιβώτια ενώ έχει παραγγείλει 22 θα πουλήσει τα 20 αποκομίζοντας ένα κέρδος $(15€ - 12€) \times 20 = 66€$ και θα έχει ζημιά από 2 κιβώτια που δεν θα τα διαθέτει για να πουληθούν η οποία σε κόστος είναι $2 \times 12 = 24 €$. Τα 2 επιπλέον κιβώτια που έμειναν απούλητα θα έχουν και μηδενική τιμή εκποίησης (salvage price) για την επόμενη μέρα. Όταν ο παντοπώλης έχει ζήτηση για 20 κιβώτια και έχει παραγγείλει 22 το τελικό του κέρδος θα είναι $60€ - 24€ = 36€$.

Κάνοντας αντίστοιχους υπολογισμούς και για τις υπόλοιπες περιπτώσεις σχηματίζεται ο πίνακας με τις αξίες υπό συνθήκη για κάθε παραγγελία σε σχέση με το ενδεχόμενο ζήτηση. Η βέλτιστη ενέργεια για κάθε ενδεχόμενο θα είναι το μέγιστο κέρδος κάθε στήλης.

Πίνακας 4.3: Αξίες υπό συνθήκη

Πιθανά ενδεχόμενα (ζήτηση)	Δυνατές ενέργειες (παραγγελίες)				
	20 κιβώτια	21 κιβώτια	22 κιβώτια	23 κιβώτια	24 κιβώτια
20 κιβώτια	60€*	48€	36€	24€	12€
21 κιβώτια	60€	63€*	51€	39€	27€
22 κιβώτια	60€	63€	66€*	54€	42€
23 κιβώτια	60€	63€	66€	69€*	57€
24 κιβώτια	60€	63€	66€	69€	72€*

4.2.1 Αναμενόμενη χρηματική αξία

Ακόμα και στην περίπτωση που έχουν εκτιμηθεί οι πιθανότητες υπό αξία δεν είναι απόλυτο πως μπορεί να εκτιμηθεί η βέλτιστη λύση. Για το παράδειγμα του παντοπώλη που παρουσιάστηκε δεν μπορεί να γνωρίζει τη βέλτιστη λύση αφού δεν μπορεί να ξέρει τη ζήτηση της επόμενης μέρας. Στο ίδιο παράδειγμα οι πιθανότητες για τα διάφορα ενδεχόμενα θα πρέπει να εκτιμηθούν έτσι ώστε με βάση τα ιστορικά στοιχεία να εξαχθεί η αξία κάθε παραγγελίας. Σε αυτό βοηθάει η αναμενόμενη χρηματική αξία (Estimated Monetary Value, EMV).

Με τον όρο αναμενόμενη χρηματική αξία εννοείται η στάθμιση του κέρδους που προκύπτει από κάθε ενέργεια για κάθε ενδεχόμενο. Το κριτήριο της αναμενόμενης χρηματικής αξίας εφαρμόζεται μέσω μιας σειράς βημάτων:

- Κατασκευή του πίνακα αξιών υπό συνθήκη που περιέχει τις ενέργειες και τα ενδεχόμενα που μπορεί να προκύψουν καθώς και την αξία υπό συνθήκη της κάθε ενέργειας σε σχέση με το ενδεχόμενο.
- Αντιστοίχιση των πιθανοτήτων σε κάθε ενδεχόμενο

- Υπολογισμός μιας αναμενόμενης χρηματικής αξίας EMV για κάθε ενέργεια. Ο υπολογισμός γίνεται με την άθροιση των γινομένων της αξίας υπό συνθήκη της ενέργειας με κάθε ενδεχόμενο επί την πιθανότητα αυτού του ενδεχομένου.
- Επιλογή της ενέργειας με τη μεγαλύτερη αναμενόμενη χρηματική αξία.

Τα ενδεχόμενα πρέπει να είναι αμοιβαία αποκλειόμενα και όλα μαζί πρέπει να καλύπτουν όλες τις περιπτώσεις. Κατά συνέπεια το άθροισμα των πιθανοτήτων θα πρέπει να ισούται με τη μονάδα.

Για το παράδειγμα του παντοπωλή ο πίνακας αναμενόμενης αξίας είναι:

Πίνακας 4.4: Υπολογισμός αναμενόμενης χρηματικής αξίας

Ενδεχόμενο (Ζήτηση)	Πιθανότητα	Ενέργεια: Παραγγελία 22 κιβώτιων		Ενέργεια: Παραγγελία 23 κιβώτιων	
		Αξία υπό συνθήκη (CV)	Σταθμισμένη Αξία (WCV)	Αξία υπό συνθήκη (CV)	Σταθμισμένη Αξία (WCV)
20 κιβώτια	0.05	36€	1.80€	24€	1.20€
21 κιβώτια	0.1	51€	5.10€	39€	3.90€
22 κιβώτια	0.3	66€	19.80€	54€	16.20€
23 κιβώτια	0.5	66€	33€	69€	34.50€
24 κιβώτια	0.05	66€	3.30€	69€	3.45€
Σύνολο	1		63€		59.25€

Αν συγκεντρωθούν όλες οι αναμενόμενες αξίες για όλες τις ενέργειες – παραγγελίες εντοπίζεται η βέλτιστη λύση η οποία είναι η λύση με το μεγαλύτερο αναμενόμενο κέρδος.

Πίνακας 4.5: Συγκεντρωτικός EMV πίνακας

Ενέργεια (Παραγγελία)	Αναμενόμενη χρηματική αξία EMV, €	Κατάταξη ενεργειών	Διαφορά κέρδους σε σχέση με τη βέλτιστη ενέργεια
20 κιβώτια	60.00	3 ^η	3.00€
21 κιβώτια	62.25	2 ^η	0.75€
22 κιβώτια	63.00	1 ^η	0.00€
23 κιβώτια	59.25	4 ^η	3.75€
24 κιβώτια	48	5 ^η	15.00€

4.2.2 Κόστος ευκαιρίας υπό συνθήκη (Conditional Opportunity Loss)

Το κόστος ευκαιρίας (Opportunity Loss) ορίζεται ως το ποσό του κέρδους που χάνεται λόγω της μη επιλογής της βέλτιστης ενέργειας σε κάθε ενδεχόμενο. Το κέρδος ή η ζημία υπό συνθήκη εξαρτάται από τη δεδομένη ενέργεια που εκτελέστηκε και από το ενδεχόμενο που προέκυψε. Κατά συνέπεια το υπό συνθήκη κέρδος δεν είναι ένας αριθμός αλλά ένας πίνακας τιμών που αφορά σε όλα τα πιθανά ενδεχόμενα.

Στην περίπτωση του παραδείγματος του παντοπώλη που παρουσιάστηκε παραπάνω και αν θεωρηθεί η ενέργεια της παραγγελίας των 23 κιβωτίων, εάν η ζήτηση αποδειχθεί πραγματικά ότι είναι 23 κιβώτια τότε το συνολικό κέρδος υπολογίζεται στα 69€. Αυτό αποτελεί το βέλτιστο κέρδος που θα επιτευχθεί αν η ζήτηση είναι 23 κιβώτια. Αν όμως η ζήτηση είναι 23 κιβώτια ενώ έχουν παραγγελθεί τα 22 τότε το κέρδος θα περιοριστεί στα 66 ευρώ δηλαδή θα υπάρχει ένα υπό συνθήκη κόστος ευκαιρίας (69€-66€)=3€. Τα υπό συνθήκη

κόστη ευκαιρίας για τις ενέργειες «παραγγελία 22 κιβώτιων», «παραγγελία 23 κιβώτιων» για κάθε ενδεχόμενο – ζήτηση στο παράδειγμα του παντοπώλη παρουσιάζεται στον πίνακα 4.6.

Πίνακας 4.6: Υπολογισμός του υπό συνθήκη κόστους ευκαιρίας

Ενδεχόμεν ο (ζήτηση)	Βέλτιστη Ενέργεια	Κέρδος Βέλτιστης Ενέργειας	Διαφορά κέρδους μεταξύ ενέργειας και βέλτιστης ενέργειας	
			Παραγγελία	
			22 κιβώτια	23 κιβώτια
20 κιβώτια	20	60€	$60-36=24$	$60-24=36€$
21 κιβώτια	21	63€	$63-51=12€$	$63-39=24€$
22 κιβώτια	22	66€	$66-66=0€$	$66-54=12€$
23 κιβώτια	23	69€	$69-66=3€$	$69-69=0€$
24 κιβώτια	24	72€	$72-66=6€$	$72-69=3€$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζονται και τα κόστη ευκαιρίας υπό συνθήκη για την παραγγελία 20, 21 και 24 κιβωτίων και σχηματίζεται ο συγκεντρωτικός πίνακας με τα υπό συνθήκη κόστη ευκαιρίας για τις διάφορες ενέργειες παραγγελίες για κάθε ενδεχόμενο – ζήτηση.

Πίνακας 4.7: Κόστη ευκαιρίας υπό συνθήκη

Ενδεχόμενο (ζήτηση)	Ενέργεια- Παραγγελία				
	20 κιβώτια	21 κιβώτια	22 κιβώτια	23 κιβώτια	24 κιβώτια
20 κιβώτια	0€*	12€	24€	36€	48€
21 κιβώτια	3€	0€*	12€	24€	36€
22 κιβώτια	6€	3€	0€*	12€	24€
23 κιβώτια	9€	6€	3€	0€*	12€
24 κιβώτια	12€	9€	6€	3€	0€*

Κατά συνέπεια η βέλτιστη λύση μπορεί να επιλεγεί αντί με βάση την αναμενόμενη χρηματική αξία (EMV) με βάση το αναμενόμενο κόστος ευκαιρίας (Expected Opportunity Loss, EOL).

4.2.3 Κέρδος κάτω από τέλεια πρόβλεψη

Το ερώτημα στο πρόβλημα με τον παντοπώλη είναι ποιο θα είναι το κέρδος του αν γνωρίζει επακριβώς τι θα γίνει την επόμενη μέρα δηλαδή αν γνωρίζει ποια θα ήταν την επόμενη μέρα η ζήτηση του γάλατος. Με βάση αυτό το ερώτημα κατασκευάζεται ο πίνακας 4.8 με τις αξίες υπό συνθήκη μόνο της βέλτιστης ενέργειας για κάθε ενδεχόμενο. Για παράδειγμα αν είναι γνωστό πως την επόμενη μέρα η ζήτηση είναι 23 κιβώτια η παραγγελία την επόμενη μέρα θα είναι 23 κιβώτια και το κέρδος θα ήταν 69€. Αν παραγγέλνονταν 22 κιβώτια θα υπήρχε απώλεια των 3 € από το ένα κιβώτιο που δεν θα ήταν διαθέσιμο

προς πώληση ενώ αν παραγγέλονταν 24 θα υπήρχε ζημία 12€ από το απούλητο κιβώτιο.

Πίνακας 4.8: Αξίες υπό συνθήκη της βέλτιστης απόφασης

Ενδεχόμενο (ζήτηση)	Ενέργεια- Παραγγελία				
	20 κιβώτια	21 κιβώτια	22 κιβώτια	23 κιβώτια	24 κιβώτια
20 κιβώτια	60€				
21 κιβώτια		63€			
22 κιβώτια			66€		
23 κιβώτια				69€	
24 κιβώτια					72€

Αν σταθμιστεί το κέρδος κάθε ενδεχομένου με την πιθανότητα που υπάρχει να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο τα παραπάνω κέρδη μετατρέπονται σε αναμενόμενες τιμές. Το αναμενόμενο κέρδος με τέλεια πρόβλεψη (Expected Profit with Perfect Prediction, EPPP) παρουσιάζεται στον πίνακα 4.9.

Πίνακας 4.9: Αναμενόμενο κέρδος με τέλεια πρόβλεψη

Ενέργεια (παραγγελία)	Πιθανότητα	Κέρδος βέλτιστης ενέργειας (€)	Σταθμισμένο Κέρδος
20 κιβώτια	0.05	60	3.00
21 κιβώτια	0.1	63	6.30
22 κιβώτια	0.3	66	19.80
23 κιβώτια	0.5	69	34.50
24 κιβώτια	0.05	72	3.60
Αναμενόμενο κέρδος με τέλεια πρόβλεψη			67.20

4.3 Η αξία του πειραματισμού

Πριν την πραγματοποίηση ενός πειράματος είναι απαραίτητος ο καθορισμός της δυνητικής του τιμής. Ο προσδιορισμός της συγκεκριμένης αξίας μπορεί να γίνει με δύο μεθόδους. Η πρώτη μέθοδος θεωρεί πως το πείραμα μπορεί να απομακρύνει οποιαδήποτε αβεβαιότητα αφορά στην πραγματική κατάσταση της φύσης και στη συνέχεια με βάση αυτήν την υπόθεση υπολογίζει την βελτίωση στην αναμενόμενη πληρωμή (improvement in expected payoff) χωρίς να λαμβάνει υπόψη το κόστος του πειράματος. Η ποσότητα αυτή ονομάζεται αναμενόμενη αξία της τέλει πληροφόρησης και ορίζει το άνω όριο της εν δυνάμει τιμής του πειράματος. Κατά συνέπεια αν το άνω όριο είναι μικρότερο από το κόστος του πειράματος το πείραμα θα είναι σίγουρα διαφυγόν. Στην περίπτωση όμως που το άνω όριο υπερβαίνει το κόστος του πειράματος τότε θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί η δεύτερη μέθοδος που υπολογίζει την πραγματική βελτίωση της αναμενόμενης πληρωμής και η οποία προκύπτει από την απόδοση της διαδικασίας του πειράματος. Η σύγκριση αυτής της

βελτίωσης με το κόστος υποδεικνύει αν το πείραμα πρέπει ή όχι να πραγματοποιηθεί.

Η αναμενόμενη αξία μιας τέλεις πληροφόρησης (expected value of perfect information, EVPI) για ένα πρόβλημα αποφάσεων θα πρέπει να υπερβαίνει το κόστος της έρευνας για να αξίζει την περαιτέρω διερεύνηση του.

Η αναμενόμενη αξία της μερικώς βέλτιστης πληροφόρησης (expected value of partial perfect information, EVPPI) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον ορισμό των παραμέτρων εκείνων που συνεισφέρουν περισσότερο στην αναμενόμενη αξία της τέλεις απόφασης για το συνολικό πρόβλημα, όπως επίσης και για τον καθορισμό των παραμέτρων χωρίς καμία αναμενόμενη αξία της μερικώς βέλτιστης πληροφόρησης που μπορεί να μη θεωρείται ως δυναμικός στόχος για περαιτέρω έρευνα. Έχει αποδειχθεί πρόσφατα πως οι παράμετροι με μηδενική EVPPI για ένα μοναδικό σχεδιασμό μπορεί να συσχετιστούν με τις παραμέτρους με υψηλό EVPPI μιας αλληλουχίας σχεδιασμών έρευνας.

Για τον υπολογισμό των απλών EVPI, EVPPI, των συνδυαστικών EVPPI, των υπό συνθήκη EVPPI και των διαδοχικών EVPPI παραμέτρων μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένα απλό πρόβλημα απόφασης με δύο παραμέτρους. Με τον όρο αναμενόμενη αξία υπό συνθήκη μερικώς βέλτιστης πληροφορίας (EVPPI) θεωρείται η αναμενόμενη αξία της βέλτιστης πληροφορίας για την δεύτερη παράμετρο με δεδομένο πως έχει επιτευχθεί η τέλεια πληροφορία για την πρώτη παράμετρο, ενώ η διαδοχική (EVPPI) είναι η αναμενόμενη αξία της τέλεις πληροφορίας για μια διαδοχική έρευνα προκειμένου να μελετηθεί πρώτα η μια παράμετρος και μετά η δεύτερη.

4.3.1 Η αξία της υπάρχουσας πληροφορίας

Το αναμενόμενο καθαρό κέρδος (NB) μπορεί να υπολογιστεί ως συνάρτηση μιας ομάδας παραμέτρων εισόδου ($\theta = \theta_1, \theta_2$) που είναι γνωστές με αβεβαιότητα. Με την υπάρχουσα πληροφορία θα πρέπει να υπολογιστεί η τιμή

της μεταβλητής j που θα μπορεί να μεγιστοποιήσει το αναμενόμενο καθαρό κέρδος. Η τιμή της συγκεκριμένης απόφασης θα είναι

$$EVI = \max_j E_{\theta_1, \theta_2} NB(j, \theta_1, \theta_2) \quad (\text{Εξ. 4.4})$$

4.3.2 Η αξία της τέλειας πληροφορίας

Με την τέλεια πληροφορία θα πρέπει να υπολογιστεί η παρέμβαση με την οποία μεγιστοποιείται το καθαρό κέρδος μιας δεδομένης τιμής της μεταβλητής θ . Με δεδομένο ότι οι πραγματικές τιμές της μεταβλητής θ δεν είναι γνωστές η αναμενόμενη αξία της απόφασης με την τέλεια πληροφορία μπορεί να προσδιοριστεί με το μέσο καθαρό κέρδος πάνω στην κοινή κατανομή της θ :

$$EVPI = E_{\theta_1, \theta_2} \max_j NB(j, \theta_1, \theta_2) \quad (\text{Εξ. 4.4})$$

Η αναμενόμενη αξία της τέλειας πληροφορίας μπορεί να προσδιοριστεί ως τη διαφορά:

EVPI= αναμενόμενο όφελος με την βέλτιστη πληροφορία –αναμενόμενο όφελος χωρίς πειραματισμό.

Ή με πιο απλά λόγια η αναμενόμενη αξία της τέλειας πληροφορίας μπορεί να δίνεται από τον τύπο:

(Αναμενόμενη αξία τέλειας πληροφορίας) = (Αναμενόμενο κέρδος με τέλεια πρόβλεψη)-(Αναμενόμενη χρηματική αξία της βέλτιστης ενέργειας)
 $EMV + EOL = EPPP$

Η σχέση EMV και EOL παρουσιάζεται για το παράδειγμα του παντοπώλη στον Πίνακα 4.10.

Πίνακας 4.10: Σχέση EMV και EOL

Ενέργεια (παραγγελία)	EMV (€)	EOL(€)	EPPI(€)
20 κιβώτια	60	7.20	67.20
21 κιβώτια	62.25	4.95	67.20
22 κιβώτια	63	4.20	67.20
23 κιβώτια	59.25	7.95	67.20
24 κιβώτια	48	19.20	67.20

Κατά συνέπεια αν ληφθεί υπόψη ότι ο πειραματισμός συνήθως δεν παρέχει την βέλτιστη πληροφορία η EVPI προσφέρει το άνω όριο στην αναμενόμενη αξία του πειραματισμού.

4.2.3 Η αξία της μερικώς τέλει πληροφορίας

Μια απόφαση μπορεί να ληφθεί με την τέλεια πληροφορία για μια παράμετρο θ_1 επιλέγοντας μια παρέμβαση που θα μεγιστοποιεί το αναμενόμενο καθαρό κέρδος πάνω στην εναπομένουσα αβέβαιη παράμετρο θ_2 , υπό τη συνθήκη της ειδικής τιμής της παραμέτρου θ_1 . Και σε αυτήν την περίπτωση οι πραγματικές τιμές του θ_1 είναι άγνωστες. Κατά συνέπεια στην περίπτωση ενός προβλήματος απόφασης δύο παραμέτρων οι αναμενόμενες αξίες για μια απόφαση με τέλεια πληροφορία σχετικά με τη θ_1 και τη θ_2 αντίστοιχα θα είναι:

$$EVPI_{\theta_1} = E_{\theta_1} \max_j E_{\theta_2|\theta_1} NB(j, \theta_1, \theta_2) \quad (Eξ. 4.5)$$

$$EVPI_{\theta_2} = E_{\theta_2} \max_j E_{\theta_1|\theta_2} NB(j, \theta_1, \theta_2) \quad (Eξ. 4.6)$$

4.5 Η αναμενόμενη αξία του πειραματισμού

Έχοντας προσδιορίσει το ανώτερο όριο στην αναμενόμενη αύξηση του κέρδους εξαιτίας της απόδοσης του πειραματισμού μπορεί να υπολογιστεί στη συνέχεια η αναμενόμενη αξία του πειραματισμού.

Υπολογίζοντας την απαιτούμενη ποσότητα αρχικά υπολογίζεται το αναμενόμενο όφελος του πειραματισμού (χωρίς να υπολογίζεται το κόστος του πειράματος). Για την επίτευξη του αναμενόμενου οφέλους πειραματισμού θα πρέπει να υπολογιστούν όλες οι posterior πιθανότητες, η τελική βέλτιστη πολιτική του πειράματος και το αναμενόμενο όφελος για κάθε αποτέλεσμα του πειράματος. Στη συνέχεια κάθε ένα από αυτά τα αναμενόμενα οφέλη χρησιμοποιούνται για την εξισορρόπηση της πιθανότητας των πιθανών αποτελεσμάτων.

Η αναμενόμενη αξία του πειραματισμού (Expected Value of experimentation, EVE) δίνεται από τη σχέση:

EVE = αναμενόμενο όφελος με πειραματισμό- αναμενόμενο όφελος χωρίς πειραματισμό.

Κατά συνέπεια η αναμενόμενη αξία του πειραματισμού καθορίζει την εν δυνάμει τιμή του πειράματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΔΕΝΤΡΩΝ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ (THEORY OF DECISION TREES)

Τα δέντρα αποφάσεων αποτελούν μια μέθοδο που βοηθάει στην επιλογή της βέλτιστης απόφασης, ειδικά όταν οι αποφάσεις περιλαμβάνουν υψηλά κόστη και κινδύνους. Τα δέντρα αποφάσεων χρησιμοποιούν μια γραφική προσέγγιση για τη σύγκριση των διάφορων εναλλακτικών και την απόδοση τιμών σε αυτές τις εναλλακτικές με το συνδυασμό αβεβαιοτήτων κόστους και οφελών σε συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές.

Τα δέντρα αποφάσεων προσφέρουν διάφορα πλεονεκτήματα σχετικά με τις μεθόδους ανάλυσης εναλλακτικών αποφάσεων. Τα βασικότερα από αυτά τα πλεονεκτήματα είναι:

- ✓ Αναπαριστούν τις εναλλακτικές αποφάσεις, τα πιθανά αποτελέσματα και τα γεγονότα επιλογής γραφικά. Η οπτική αναπαράσταση του προβλήματος βοηθάει στον προσδιορισμό των διαδοχικών αποφάσεων και στην εξάρτηση των αποτελεσμάτων.
- ✓ Οι πολύπλοκες εναλλακτικές αποφάσεις που είναι διαθέσιμες μπορούν να εκφραστούν πιο εύκολα με τα δέντρα αποφάσεων. Επιπλέον τα δέντρα αποφάσεων προσαρμόζονται ιδιαίτερα εύκολα όταν διατίθενται νέες πληροφορίες. Η δημιουργία ενός δέντρου απόφασης βοηθάει στη σύγκριση της μεταβολής των μεταβλητών εισόδου που επηρεάζουν τις διάφορες εναλλακτικές αποφάσεις.
- ✓ Ακόμα και όταν δεν είναι διαθέσιμες πλήρεις πληροφορίες η σύγκριση των εναλλακτικών αποφάσεων είναι εφικτή μέσω των δέντρων αποφάσεων σε όρους κινδύνου και πιθανών τιμών. Ο όρος της αναμενόμενης αξίας συνδυάζει τα σχετικά κόστη επένδυσης, τα αναμενόμενα οφέλη και τις αβεβαιότητες σε μια απλή τιμή. Οι αναμενόμενες αξίες απεικονίζουν τα συνολικά οφέλη των διάφορων εναλλακτικών αποφάσεων.

- ✓ Τα δέντρα αποφάσεων μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε συνδυασμό με άλλα εργαλεία ιδιαίτερα σε θέματα διαχείρισης όπως για παράδειγμα μπορεί να χρησιμοποιηθούν για την εκτίμηση του προγραμματισμού ενός σχεδίου.

Η γραφική απεικόνιση των δέντρων αποφάσεων αποτελείται από κλαδιά και κόμβους. Υπάρχουν τρεις απλοί κανόνες που χρησιμοποιούνται για το σχηματισμό ενός δέντρου αποφάσεων:

Με κύκλο συμβολίζονται οι κόμβοι που δηλώνουν την φυσική κατάσταση, με τετράγωνα συμβολίζονται οι κόμβοι της απόφασης, ενώ τα κλαδιά που προέρχονται από έναν κόμβο απόφασης αντανakλούν όλες τις εναλλακτικές αποφάσεις που μπορεί να ληφθούν και αφορούν στο συγκεκριμένο σημείο.

Η μέθοδος των δέντρων αποφάσεων είναι η βέλτιστη λύση, όταν μια απόφαση απαιτεί διαδοχικές αποφάσεις όταν δεν είναι εφικτή η επίλυση του προβλήματος μέσω ενός πίνακα αποπληρωμής.

Τα δέντρα αποφάσεων μπορεί να χρησιμοποιηθούν για την ταξινόμηση ενός προβλήματος ξεκινώντας από τη ρίζα του δέντρου και με την κίνηση μέσα σε αυτό μέχρι να συναντήσει κανείς τον τελικό κόμβο που δείχνει την ταξινόμηση της στιγμής.

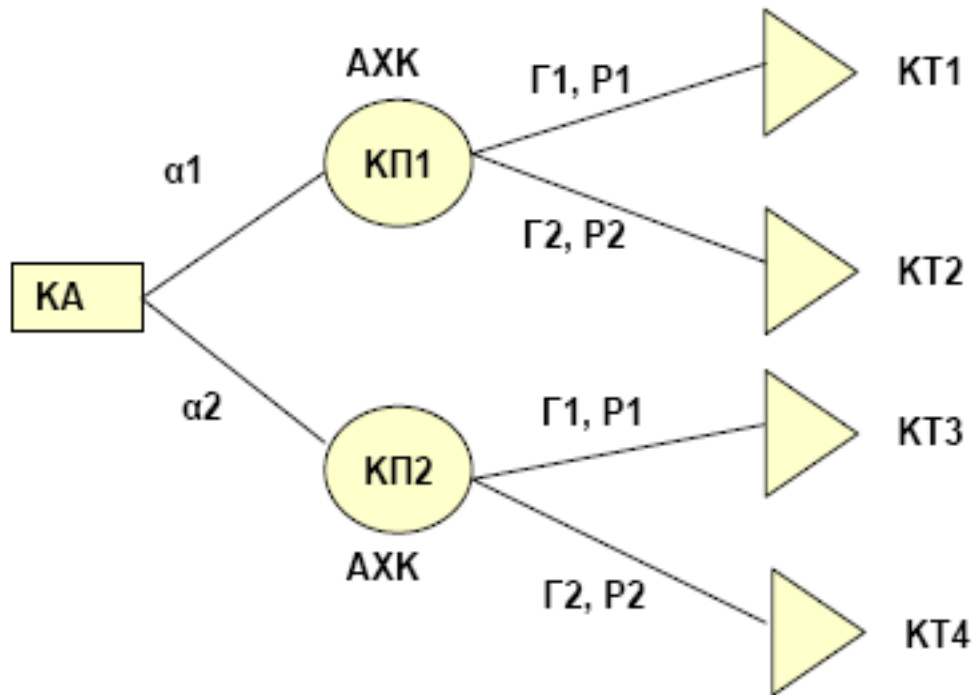
Το επαγωγικό δέντρο απόφασης είναι μια τυπική επαγωγική διαδικασία που βοηθάει στην απόκτηση γνώσης στην ταξινόμηση. Οι βασικές προϋποθέσεις για την εξαγωγή πληροφοριών από τα δέντρα απόφασης είναι: η περιγραφή της τιμής των χαρακτηριστικών, ο προκαθορισμός των κλάσεων, η διακρίσιμότητα των κλάσεων και τα επαρκή δεδομένα.

5.1 Δημιουργία ενός δέντρου αποφάσεων

Για να δημιουργηθεί ένα δέντρο αποφάσεων πρέπει να είναι καθορισμένη η απόφαση που πρέπει να ληφθεί. Αυτή η απόφαση αναπαρίσταται με ένα μικρό τετράγωνο που τοποθετείται στα αριστερά στο χαρτί. Από το τετράγωνο αυτό σχεδιάζονται γραμμές προς τα δεξιά τόσες όσες είναι και οι πιθανές λύσεις. Κάθε λύση σημειώνεται πάνω στο κλαδί του δέντρου. Στο τέλος του κλαδιού θεωρείται το αποτέλεσμα της λύσης. Αν το αποτέλεσμα της λήψης μιας συγκεκριμένης απόφασης είναι αβέβαιο συμβολίζεται με ένα μικρό κύκλο. Αν το αποτέλεσμα είναι μια νέα απόφαση που πρέπει να ληφθεί σχεδιάζεται ως τετράγωνο. Τα τετράγωνα στα δέντρα αποφάσεων συμβολίζουν τις αποφάσεις, ενώ οι κύκλοι την αβεβαιότητα ή τις τυχαίες μεταβλητές. Πάνω από κάθε τετράγωνο ή κύκλο σημειώνεται η αξία της απόφασης εκτός αν έχει τελειώσει η διαδικασία της απόφασης οπότε αφήνεται κενό.

Για το σχηματισμό δηλαδή ενός δέντρου απόφασης χρειάζονται τρεις κόμβοι απόφασης: οι κόμβοι απόφασης (D) που σχετίζονται με τις αποφάσεις που πρέπει να ληφθούν οι κόμβοι (E) που σχετίζονται με τα γεγονότα που είναι πιθανόν να συμβούν και οι τελικοί κόμβοι (T) που αναφέρονται στις τελικές καταστάσεις.

Κάθε κλαδί που ξεκινάει από έναν κόμβο απόφασης αναπαριστά μια ενέργεια και κατά συνέπεια αντιπροσωπεύει ένα κόστος, ενώ κάθε κλαδί που προέρχεται από έναν κόμβο γεγονότος αναπαριστά την υπάρχουσα πιθανή κατάσταση. Τέλος με κάθε τελικό κόμβο σχετίζεται μια αξία η οποία μπορεί να αποτελεί όφελος ή απώλεια.



Σχήμα 5.1: Παράδειγμα κατασκευής δέντρου αποφάσεων

Όπου στο παραπάνω δέντρο έχουμε:

- **KA** κόμβος απόφασης
- **KP1** και **KP2** κόμβοι πιθανότητας
- Οι δεσμοί α_1 , α_2 συμβολίζουν τις εναλλακτικές ενέργειες
- P_1 και P_2 είναι οι πιθανότητες να εμφανιστούν τα ενδεχόμενα Γ_1 και Γ_2 αντίστοιχα
- Οι τερματικοί κόμβοι **KT1**, ..., **KT4** συμβολίζουν τα αποτελέσματα (κέρδη) που θα προκύψουν από τα αντίστοιχα γεγονότα
- **ΑΧΚ** είναι το αναμενόμενο χρηματικό κέρδος (Expected Monetary Value (EMV))

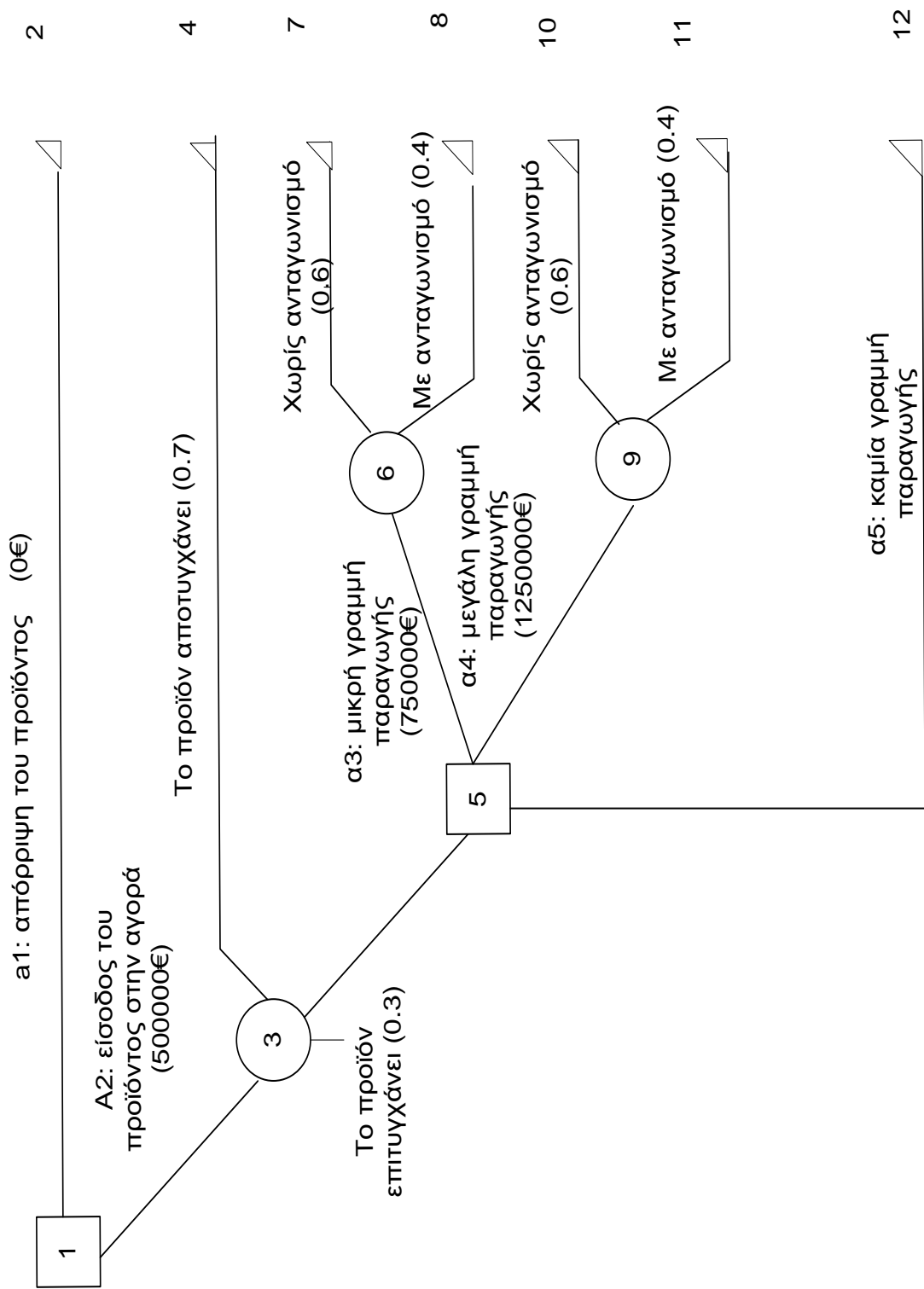
Για παράδειγμα μπορεί να θεωρηθεί μια εταιρεία έχει αναπτύξει ένα προϊόν Π και καλείται να αποφασίσει αν θα το βγάλει στην αγορά δοκιμαστικά ή θα το απορρίψει. Η δοκιμαστική είσοδος του προϊόντος στην αγορά θα κοστίσει 500.000€. Επιπλέον η εμπειρία λέει πως από τα δοκιμαστικά προϊόντα που εισέρχονται στην αγορά μόνο το 30% επιτυγχάνουν. Αν το προϊόν επιτύχει στη

δοκιμαστική αγορά η εταιρεία θα πρέπει να αποφασίσει για τη δυναμικότητα της γραμμής παραγωγής που θα δημιουργήσει για να παράγει το προϊόν. Αν επιλέξει τη δημιουργία μιας μικρής γραμμής παραγωγής δυναμικότητας 2000 μονάδων ανά έτος θα πληρώσει 750.000€, ενώ μια μεγάλη γραμμή δυναμικότητας 4000 μονάδων προϊόντος ανά έτος θα της κοστίσει 1.250.000€. Επιπλέον η εταιρεία γνωρίζει πως όταν το προϊόν κυκλοφορήσει στην αγορά θα λάβει απάντηση από το 40% των ανταγωνιστριών εταιρειών με την εισαγωγή ενός παρόμοιου προϊόντος. Επιπλέον η τιμή πώλησης του προϊόντος θεωρώντας ότι πωλούνται όλες οι μονάδες εξαρτάται από την απάντηση του ανταγωνισμού και από το μέγεθος της μονάδας. Η τιμή πώλησης φαίνεται στον πίνακα 5.1

Πίνακας 5.1: Τιμή πώλησης προϊόντος για το παράδειγμα παραγωγής ενός προϊόντος

	Μεγάλη Μονάδα	Μικρή Μονάδα
Ο ανταγωνισμός απαντά	100€	175€
Ο ανταγωνισμός δεν απαντά	250€	325€

Ο κύκλος ζωής του προϊόντος θα είναι 7 χρόνια, ενώ τα ετήσια έξοδα των μονάδων παραγωγής θα είναι 250.000€. Το ζητούμενο είναι αν η εταιρεία θα πρέπει να προχωρήσει στη δοκιμαστική εισαγωγή του προϊόντος στην αγορά. Το δέντρο απόφασης για το συγκεκριμένο πρόβλημα θα είναι:



Σχήμα 5.2 Δέντρο αποφάσεων για την διάθεση στην αγορά ενός προϊόντος

Η ρίζα του δέντρου είναι ο κόμβος απόφασης 1 (KA1) όπου η εταιρεία καλείται να αποφασίσει αν θα δώσει το προϊόν στην αγορά ή θα το απορρίψει ενώ και στο 5 η εταιρεία καλείται να πάρει μια απόφαση σχετικά με τη γραμμή παραγωγής αν τελικά διοχετεύσει το προϊόν στην αγορά.

Από τον κόμβο απόφασης 1 δίνεται η δυνατότητα δύο επιλογών. Στη μία (α1) το προϊόν θα απορριφθεί οριστικά και δεν θα κυκλοφορήσει στην αγορά. Το κόστος για αυτήν την ενέργεια είναι μηδενικό και η συγκεκριμένη επιλογή δεν αποδίδει κανένα κέρδος.

Η δεύτερη επιλογή (α2) είναι το προϊόν να κυκλοφορήσει δοκιμαστικά στην αγορά. Το κόστος αυτής της επιλογής είναι 500.000€.

Στον κόμβο απόφασης 5 αν το προϊόν επιτύχει στην αγορά η εταιρεία θα πρέπει να επιλέξει το είδος της γραμμής που θα δημιουργήσει. Οι εναλλακτικές σε αυτόν τον κόμβο απόφασης είναι τρεις: η α3 επιλογή είναι να επιλέξει μια μικρή γραμμή παραγωγής και η α4 να επιλέξει μια μεγάλη γραμμή παραγωγής. Η τρίτη επιλογή (α5) αφορά στην μη δημιουργία καμίας γραμμής παραγωγής που η ύπαρξή της δηλώνει την πιθανότητα και η μεγάλη και η μικρή γραμμή παραγωγής να είναι ασύμφωρες από πλευρά απόδοσης ακόμη και αν το προϊόν έχει πετύχει στην δοκιμαστική αγορά.

Οι κόμβοι πιθανότητας αντιπροσωπεύουν σημεία στη διαδικασία λήψης της απόφασης όπου η πιθανότητα παίζει καθοριστικό ρόλο. Σε αυτούς τους κόμβους τα εναλλακτικά ενδεχόμενα δεν είναι στον έλεγχο της εταιρείας. Για παράδειγμα στον κόμβο πιθανότητας 3 (ΚΠ3) υπάρχουν δύο ενδεχόμενα: το προϊόν να εισαχθεί δοκιμαστικά στην αγορά αλλά να αποτύχει και το προϊόν να εισαχθεί δοκιμαστικά στην αγορά και να πετύχει. Η πιθανότητα εμφάνισης του πρώτου ενδεχομένου είναι ίση με 0.7 ενώ του δεύτερου με 0.3.

Το τέρμα μιας μοναδικής διαδρομής που ξεκινά από τη ρίζα και διαπερνά το δέντρο απόφασης καταλήγει στους τερματικούς κόμβους που για το συγκεκριμένο παράδειγμα είναι οι κόμβοι 2, 4, 7, 8, 10, 11 και 12.

Το δέντρο απόφασης δίνει μια ξεκάθαρη εικόνα της φύσης και της δομής του προβλήματος απόφασης. Για να εξαχθεί η τελική απόφαση θα πρέπει να γίνει η ανάλυση του.

5.2 Ανάλυση του δέντρου απόφασης

Η ανάλυση του δέντρου αποφάσεων γίνεται με τον υπολογισμό της απόφασης που έχει το μεγαλύτερο όφελος. Η ανάλυση του δέντρου αποφάσεων βασίζεται στα ακόλουθα βήματα:

A) Δημιουργείται μια συνάρτηση χρησιμότητας η οποία αποδίδει ένα βαθμό χρησιμότητας σε κάθε κέρδος ή απώλεια.

B) Υπολογίζονται τα καθαρά κέρδη ή απώλειες λαμβάνοντας υπόψη τις τιμές που σχετίζονται με τους τελικούς κόμβους και τα κόστη που υπολογίζονται για κάθε κλαδί και συνδέονται με τη ρίζα του δέντρου

Γ) Ξεκινώντας από τους τελικούς κόμβους εκτιμώνται οι κόμβοι γεγονότων και αποφάσεων. Η εκτίμηση των κόμβων γεγονότων οδηγεί στην απόδοση αυτού του κόμβου μιας αξίας χρησιμότητας που αποτελεί μαθηματικά την αναμενόμενη αξία των χρησιμοτήτων των κερδών ή των απωλειών που σχετίζονται με τα διαφορετικά γεγονότα που αναπαρίστανται στο δέντρο.

Η εκτίμηση των κόμβων αποφάσεων αποτελείται από την επιλογή ανάμεσα στο εύρος των πιθανών δράσεων και επιλέγεται η δράση που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη χρησιμότητα. Η διαδικασία ανάλυσης ενός δέντρου αποφάσεων ολοκληρώνεται όταν φτάσει κανείς στη ρίζα του δέντρου. Το σύνολο των ενεργειών που επιλέγονται κατά τη διαδικασία ανάλυσης αποτελούν μια στρατηγική βελτιστοποίησης.

Στο παράδειγμα της εισαγωγής στην αγορά του προϊόντος Π η ανάλυση του δέντρου αποφάσεων αφορά στον καθορισμό του κέρδους για κάθε δρόμο του ΔΑ από τη ρίζα του στους τερματικούς κόμβους:

Διαδρομή προς τον τερματικό κόμβο 2 (KT2): σε αυτήν την περίπτωση η απόφαση είναι «*το προϊόν απορρίπτεται οριστικά*». Δεν υπάρχουν έσοδα έξοδα ή κέρδος για αυτήν την επιλογή αφού το προϊόν δεν εισάγεται στην αγορά και εγκαταλείπεται εντελώς.

Διαδρομή προς τον τερματικό κόμβο 4 (KT4): σε αυτήν τη διαδρομή γίνεται επιλογή της απόφασης «*το προϊόν εισάγεται δοκιμαστικά στην αγορά αλλά αποτυγχάνει*». Στην απόφαση αυτή δεν υπάρχουν έσοδα ενώ τα έξοδα είναι 500.000€ όσο δηλαδή είναι το κόστος από την είσοδο του προϊόντος στη δοκιμαστική αγορά. Το κέρδος σε αυτήν την επιλογή θα είναι $0-500.000=-500.000$ € (απώλεια τελικά).

Διαδρομή προς τον τερματικό κόμβο 7 (KT7): σε αυτήν τη διαδρομή γίνεται επιλογή της απόφασης «*το προϊόν εισάγεται δοκιμαστικά στην αγορά, η εταιρεία προχωράει στη παραγωγή με μια μικρή γραμμή παραγωγής και κανένα ανταγωνιστικό προϊόν δεν εμφανίζεται στην αγορά*». Σε αυτήν την επιλογή έχουμε:

$$\text{Έσοδα} = 7 \times 2.000 \times 325 = 4.550.000 \text{€},$$

$$\text{Έξοδα} = 500000 + 750000 + (7 \times 250000) = 3000000 \text{€}$$

$$\text{Κέρδος} = 4.550.000 - 3.000.000 = 1.550.000 \text{€}.$$

Διαδρομή προς τον τερματικό κόμβο 8 (KT8): «*Το προϊόν εισάγεται δοκιμαστικά στην αγορά, η εταιρεία προχωράει στην παραγωγή του σε μια μικρή γραμμή παραγωγής και δεν εμφανίζεται κανένα ανταγωνιστικό προϊόν στην αγορά*». Στην περίπτωση αυτή έχουμε:

$$\text{Έσοδα} = 7 \times 2000 \times 175 = 2.450.000 \text{€},$$

$$\text{Έξοδα} = 500000 + 7.500.000 + 7 \times 250.000 = 3.000.000 \text{€}$$

$$\text{Κέρδος} = 2.450.000 - 3.000.000 = - 550.000 \text{€}$$

Διαδρομή προς τον τερματικό κόμβο 10 (KT10): «Το προϊόν εισάγεται δοκιμαστικά στην αγορά, η εταιρεία προχωράει δοκιμαστικά στην παραγωγή του σε μια μεγάλη γραμμή παραγωγής και κανένα ανταγωνιστικό προϊόν δεν εμφανίζεται στην αγορά». Στη συγκεκριμένη επιλογή έχουμε:

$$\text{Έσοδα} = 7 \times 4.000 \times 250 = 7.000.000 \text{€}$$

$$\text{Έξοδα} = 500.000 + 1.250.000 + 7 \times 250.000 = 3.500.000 \text{€}$$

$$\text{Κέρδος} = 7.000.000 - 3.500.000 = 3.500.000 \text{€}$$

Διαδρομή προς τον τερματικό κόμβο 11 (KT11): «Το προϊόν επιτυγχάνει στην δοκιμαστική αγορά η εταιρεία προχωράει στην παραγωγή του σε μια μεγάλη μονάδα αλλά ένα ανταγωνιστικό προϊόν κάνει την εμφάνισή του στην αγορά». Τα δεδομένα σε αυτήν την περίπτωση είναι:

$$\text{Έσοδα} = 7 \times 4.000 \times 100 = 2.800.000 \text{€}$$

$$\text{Έξοδα} = 500.000 + 1.250.000 + 7 \times 250.000 = 3.500.000 \text{€}$$

$$\text{Κέρδος} = 2.800.000 - 3.500.000 = - 700.000 \text{€}$$

Διαδρομή προς τον τερματικό κόμβο 12 (KT12): «Το προϊόν επιτυγχάνει στη δοκιμαστική αγορά αλλά η εταιρεία δεν προχωράει στην παραγωγή του».

$$\text{Έσοδα} = 0 \text{€}$$

$$\text{Έξοδα} = 500.000 \text{€ και}$$

$$\text{Κέρδος} = -500.000 \text{€}$$

Με αυτόν τον τρόπο γίνεται η ανάλυση του δέντρου αποφάσεων για το συγκεκριμένο πρόβλημα της απόφασης διάθεσης στην αγορά ενός προϊόντος. Τα αποτελέσματα που εμφανίζονται στις τερματικές κορυφές συνοψίζονται στον Πίνακα 5.2.

Πίνακας 5.2: Σύνοψη των κερδών που εμφανίζονται στις τερματικές κορυφές

Τερματικός Κόμβος (ΚΤ)	Κέρδος
2	0
4	-500.000€
7	1.550.000€
8	-550.000€
10	3.500.000€
11	-700.000€
12	-500.000€

5.2.1 Καθορίζοντας τη βέλτιστη πολιτική ανάλυσης ενός δέντρου απόφασης

Η συνηθέστερη μέθοδος για την εκτίμηση της βέλτιστης λύσης σε ένα δέντρο ανάλυσης είναι η προς τα πίσω μέθοδος (rollback method). Η εφαρμογή αυτής της μεθόδου αναλύει το δέντρο από δεξιά προς τα αριστερά θεωρώντας την τελευταία απόφαση πρώτη. Η συγκεκριμένη μέθοδος επιτρέπει την ανάλυση σύνθετων προβλημάτων αποφάσεων σε μια σειρά μικρότερων προβλημάτων.

Τα δέντρα απόφασης προτείνουν τη βέλτιστη πολιτική που βασίζεται στις διαθέσιμες πληροφορίες τη στιγμή που κατασκευάζεται το δέντρο απόφασης. Επιπλέον, η περίοδος σχεδιασμού σε ένα δέντρο αποφάσεων είναι αυθαίρετη. Ακόμα και αν ο σχεδιασμός μιας απόφασης πραγματοποιηθεί, αυτός δεν μπορεί να θεωρηθεί ως τελικός, αφού μπορεί να προστεθούν επιμέρους κλαδιά ανα πάσα στιγμή στο δέντρο αποφάσεων.

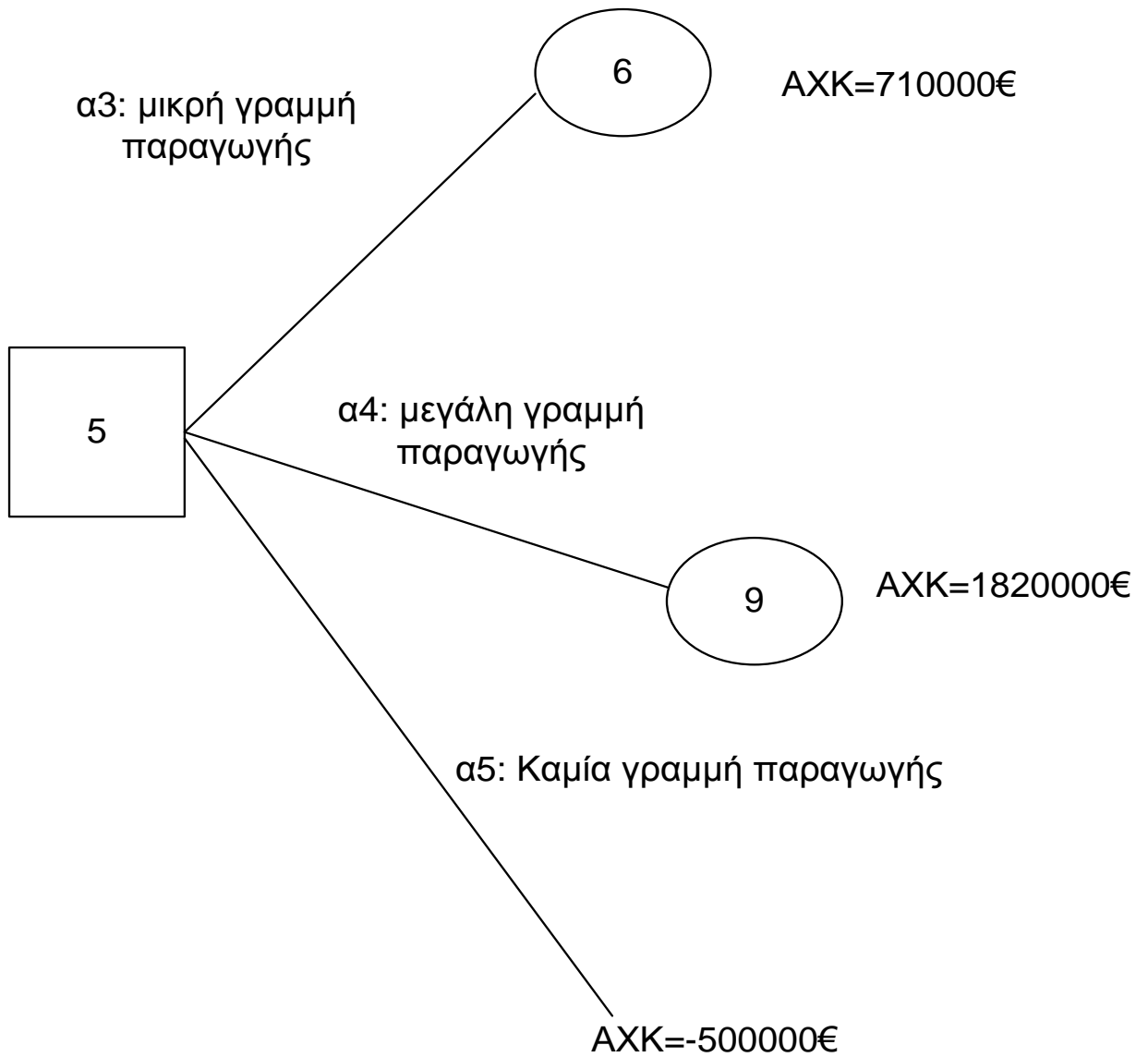
Πρακτικά στη διαδικασία εύρεσης της βέλτιστης λύσης λαμβάνονται υπόψη οι πιθανότητες εμφάνισης των διαφόρων ενδεχομένων και υπολογίζονται σε κάθε

κόμβο πιθανότητας τα αναμενόμενα χρηματικά κέρδη (ΑΧΚ). Το αναμενόμενο χρηματικό κέρδος σε κάθε κόμβο πιθανότητας είναι το άθροισμα για όλους τους κλάδους του γινομένου της πιθανότητας εμφάνισης του κλάδου επί το κέρδος του κλάδου.

Στο παράδειγμα της απόφασης για την εισαγωγή ενός προϊόντος στην αγορά στον κόμβο πιθανότητας 6 του δέντρου αποφάσεων αναδιπλώνονται δύο ενδεχόμενα: να υπάρχει ή να μην υπάρχει ανταγωνισμός. Το ενδεχόμενο να μην υπάρχει ανταγωνισμός αντιστοιχεί στον τερματικό κόμβο 7 και εμφανίζεται με πιθανότητα 0.6 και κέρδος 1.550.000€, ενώ το ενδεχόμενο να υπάρχει ανταγωνισμός εμφανίζεται με πιθανότητα 0.4 και κέρδος -550.000€ και αντιστοιχεί στον τερματικό κόμβο 8. Κατά συνέπεια το αναμενόμενο χρηματικό κέρδος στον κόμβο πιθανότητα 6 είναι:

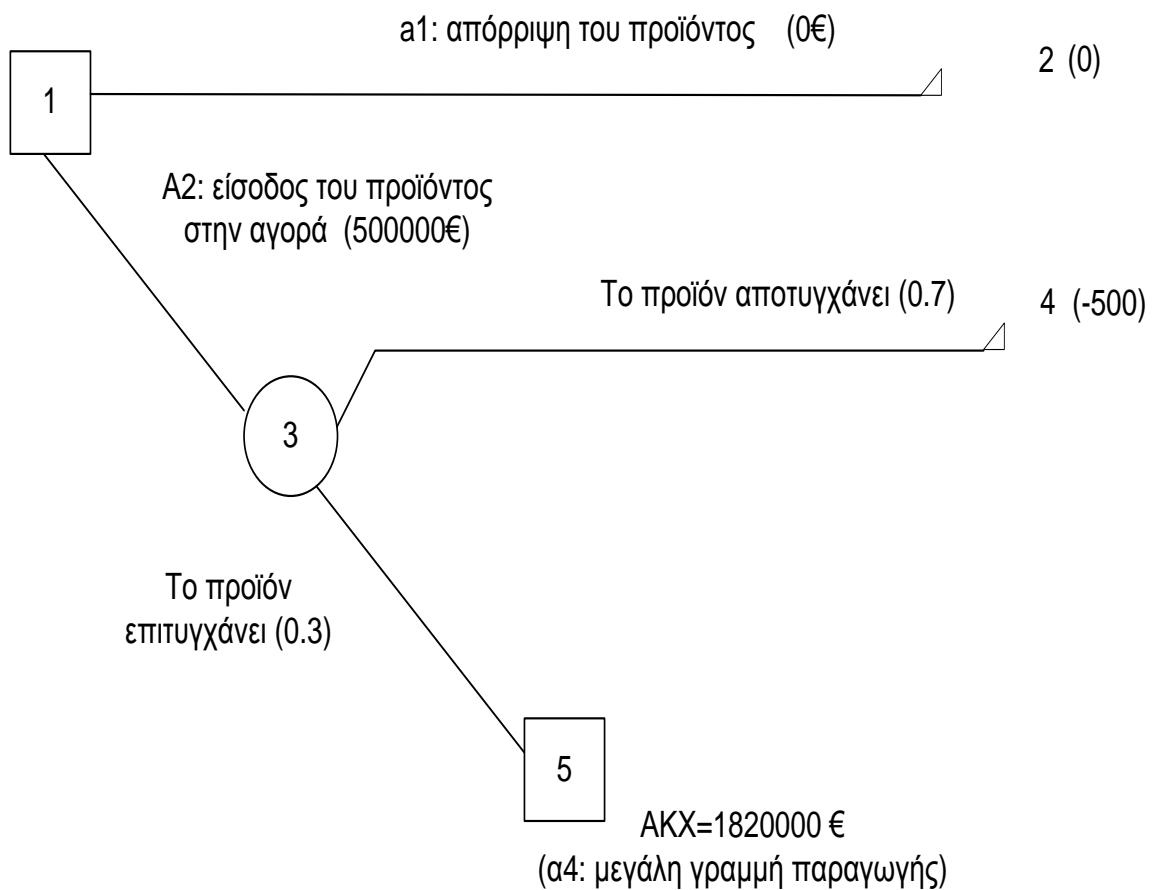
$AΧΚ(6)=0.6(1550000)+0.4(-550000)=710000€$ και για τον κόμβο πιθανότητας 9 είναι: $AΧΚ(9)=0.6(3500000)+0.4(-700000)=1820000€$.

Αν θεωρηθεί ο κόμβος απόφασης 5 συμπεραίνεται ότι η δημιουργία μεγάλης μονάδας δηλαδή η επιλογή της απόφασης 4 είναι η βέλτιστη επιλογή στο σημείο αυτό με αναμενόμενο χρηματικό κέρδος 1820000€.



Σχήμα 5.3: Κόμβος απόφασης 5 για το πρόβλημα επιλογής της εισαγωγής ενός προϊόντος στην αγορά

Ο κόμβος απόφασης 5 αντικαθίσταται με το αναμενόμενο χρηματικό κέρδος της απόφασης που λαμβάνεται και το δέντρο απλοποιείται στη μορφή του Σχήματος 5.4.

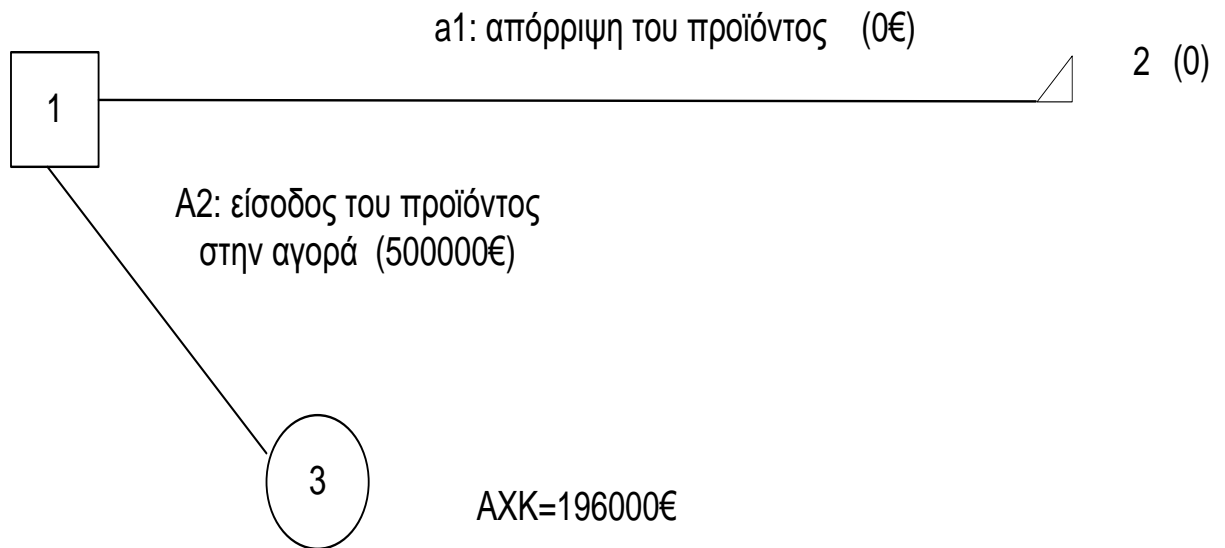


Σχήμα 5.4: Απλοποίηση δέντρου απόφασης για το παράδειγμα του προϊόντος

Υπολογίζεται το αναμενόμενο χρηματικό κέρδος του ΚΠ3:

$$AKX(3)=0.7(-500)+0.3(1820)=196000\text{€}$$

Στον κόμβο απόφασης 1 υπάρχουν πλέον δύο διαθέσιμες αποφάσεις ή να απορριφθεί εντελώς το προϊόν με $A_{XK}=0\text{€}$ ή να δοκιμασθεί στην αγορά με $A_{XK}=196000\text{€}$.



Σχήμα 5.5: Περαιτέρω απλοποίηση του δέντρου απόφασης

Προφανώς η επιλογή της δοκιμαστικής εισόδου στην αγορά του προϊόντος είναι η πλέον συμφέρουσα και επιλέγεται ως βέλτιστη

5.2.2 Δέντρα αποφάσεων και η χρησιμότητα (utility)

Τα δέντρα αποφάσεων μπορούν να χρησιμοποιηθούν και στην περίπτωση που ο λήπτης της απόφασης δεν είναι ουδέτερος στον κίνδυνο της απόφασης.

Η διαδικασία ανάλυσης ενός δέντρου απόφασης όταν οι χρησιμότητες εμπλέκονται είναι ακριβώς η ίδια με την περίπτωση που προαναφέρθηκε. Η προς τα πίσω διαδικασία εφαρμόζεται με τον ίδιο τρόπο και στην περίπτωση των χρησιμότητων ακόμα και αν το πρόβλημα είναι πολυπαραμετρικό.

Μια δεύτερη προσέγγιση στην κατασκευή ενός δένδρου απόφασης είναι ότι αυτό μπορεί να περιγραφεί από τη σχέση:

$$T = \{C \cup A \cup N \cup \{r\}, E\} \quad (\text{Εξ. 5.1})$$

Όπου με r συμβολίζεται η ρίζα του δένδρου, A είναι η ομάδα των κόμβων στο επίπεδο 1, C είναι τα φύλα του δένδρου, N η ομάδα των ενδιάμεσων κόμβων στο δέντρο εκτός από αυτούς που ανήκουν στο A και E είναι το σύνολο των ζεύγων των που συνδέουν τους κόμβους στα ρυθμιστικά επίπεδα.

Το δέντρο απόφασης είναι ένας τρόπος μοντελοποίησης μιας κατάστασης απόφασης όπου A είναι η ομάδα των εναλλακτικών και C η ομάδα των τελικών συνεπειών.

5.2.2.1 Περιορισμοί στην κατασκευή των δέντρων αποφάσεων με χρησιμότητες

Οι περιορισμοί είναι πρώτης τάξης πληροφορίες απόφασης και κατασκευαστικές πληροφορίες που περιορίζουν το χώρο λύσης ενός προβλήματος σε επίπεδο πιθανοτήτων και μεταβλητών χρησιμότητας. Υπάρχουν δύο είδη περιορισμών: οι πιθανολογικές καταστάσεις της απόφασης και οι χρησιμότητες.

Οι καταστάσεις μεταφράζονται στους αντίστοιχους περιορισμούς οι οποίοι μπορεί να αποτελούν ένα εύρος που θα περιέχει μόνο μια μεταβλητή ή διάφορα είδη συγκριτικών περιορισμών.

Αν θεωρηθούν δεδομένα αποτελέσματα c_i, c_j, c_k και c_m για τα οποία είναι γνωστές οι πιθανότητες p_i, p_j, p_k και p_m με δεδομένες χρησιμότητες u_i, u_j, u_k και u_m η κατάσταση του χρήστη μπορεί να είναι ένα από τα ακόλουθα είδη πραγματικών αριθμών a_1, a_2, d_1, d_2, d_3 και d_m :

- ✓ Εύρος περιορισμών: Το u_i είναι ανάμεσα στα a_1 και a_2 . Μαθηματικά ο περιορισμός αυτός γράφεται $u_i \in [a_1, a_2]$ και μεταφράζεται ως $u_i \geq a_1$ και $u_i \leq a_2$. Παρόμοια οι πιθανότητες p_i είναι ανάμεσα στα b_1 και b_2 και γράφεται $p_i \in [b_1, b_2]$ και μεταφράζεται $p_i \geq b_1$ και $p_i \leq b_2$
- ✓ Συγκριτικοί περιορισμοί: Οι διάφορες πιθανότητες που περιλαμβάνουν για παράδειγμα «τη διαφορά ανάμεσα στα u_i και u_j που είναι ανάμεσα στα d_1 και d_2 » και γράφεται $u_i - u_j \in [d_1, d_2]$ και μεταφράζεται ως $u_i - u_j \geq d_1$ και $u_i - u_j \leq d_2$

Υπάρχουν επίσης εφαρμογές στις οποίες ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν περιορισμοί της μορφής $u_i/u_j \geq a$. Οι συγκεκριμένοι περιορισμοί εξαρτώνται από τις χρησιμότητες που ορίζονται ως λόγος κλίμακας.

Άλλη πηγή περιορισμών είναι οι έμμεσοι περιορισμοί οι οποίοι προκύπτουν είτε από τις ιδιότητες των μεταβλητών ή από τις δομικές εξαρτήσεις. Οι συγκεκριμένοι περιορισμοί μπορεί να είναι είτε προεπιλεγμένοι περιορισμοί που περιέχουν ένα είδος μεταβλητής είτε δομικοί περιορισμοί που περιλαμβάνουν περισσότερες από μια μεταβλητές.

Οι προεπιλεγμένοι περιορισμοί ορίζονται ως ένα εύρος τιμών κλίμακας του u_i από το δειγματικό χώρο s έως t που εκφράζεται ως $u_i \in [s, t]$ και μεταφράζεται σε $u_i \geq s$ και $u_i \leq t$.

Οι δομικοί περιορισμοί ορίζονται για κάθε αρχικό κόμβο x_i με κλάδους x_{ij} για τον οποίο ο κανονιστικός περιορισμός για τις πιθανότητες είναι: $\sum_j p_{ij} = 1$.

Η ομάδα των περιορισμών που προκύπτει από αυτές τις δύο πηγές μπορεί να είναι είτε εξαρτώμενοι είτε ανεξάρτητοι. Οι εξαρτημένοι περιορισμοί περιέχουν μόνο περιορισμούς που περιλαμβάνουν μόνο μια μεταβλητή ενώ οι ανεξάρτητοι περιέχουν περιορισμούς με περισσότερες από μια μεταβλητές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ (UTILITY THEORY)

Όπως ήδη αναφέρθηκε στα προηγούμενα κεφάλαια η αναγκαιότητα για την λήψη αποφάσεων κάτω από συνθήκες αβεβαιότητας είναι αναπόσπαστο κομμάτι της αβεβαιότητας. Σε πολλούς τομείς της καθημερινότητας η λήψη των αποφάσεων γίνεται χωρίς να είναι γνωστές οι συνέπειες που προέρχονται από αυτές. Οι καταστάσεις αυτές της αβεβαιότητας θεωρούνται ως βασικές καταστάσεις σε πολλά προβλήματα όπως επίσης και σε καθημερινές αποφάσεις που καλείται κανείς να πάρει. Η ανάγκη αντιμετώπισης αυτών των προβλημάτων θεωρείται η απαρχή για την ανάπτυξη μιας θεωρητικής δομής που περικλείει την αβεβαιότητα.

Η θεωρία των αποφάσεων αποτελεί μια τυποποίηση της κοινής αίσθησης. Οι μαθηματικοί υπολογισμοί παρέχουν συνήθως την έκφραση της ερμηνείας και της αναπαράστασης ενός προβλήματος απόφασης. Τα βασικά στοιχεία της μαθηματικής αναπαράστασης αποτελούν η αξία σε όρους της θεωρίας χρησιμότητας και η πληροφορία σε όρους της θεωρίας των πιθανοτήτων. Με αυτήν την αναπαράσταση τα μεγάλα και σύνθετα προβλήματα της ανάλυσης των συστημάτων μετατρέπονται σε απλά καθημερινά προβλήματα.

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστεί η θεωρία της χρησιμότητας (Utility Theory) και θα εξεταστεί πως η χρήση της μπορεί να οδηγήσει στη βέλτιστη απόφαση και κατά συνέπεια στο μέγιστο αναμενόμενο κέρδος.

6.1 Η θεωρία της χρησιμότητας (Utility Theory)

Το πρώτο στάδιο για τη δημιουργία μιας απόφασης είναι να θεωρηθεί πως υπάρχουν δύο πιθανά αποτελέσματα από μια απόφαση που μπορεί να συγκριθούν. Αν τα αποτελέσματα κάθε εναλλακτικής είναι δεδομένα και γνωστά είναι δυνατό ο λήπτης της απόφασης να επιλέξει αυτή που προτιμάει. Σε ορισμένες περιπτώσεις το αποτέλεσμα της απόφασης είναι αδιάφορο, δηλαδή μπορεί να είναι ισοδύναμα επιθυμητό ή ανεπιθύμητο. Χαρακτηριστικό παράδειγμα, όταν κάποιος έχει να επιλέξει ανάμεσα σε ένα σαββατοκύριακο για διακοπές στο Πήλιο και στα εισιτήρια μιας θεατρικής παράστασης. Το κριτήριο απόφασης δεν είναι αν είναι πιο ακριβό το ένα ή το άλλο, αλλά το πώς θέλει να περάσει το σαββατοκύριακο του ο λήπτης της απόφασης.

Συνοψίζοντας ένας λήπτης αποφάσεων χρειάζεται να ορίσει μια ομάδα υπαρχουσών ευκαιριών και να μετρήσει την προτίμηση προκειμένου να λάβει μια απόφαση. Η ομάδα των ευκαιριών αποτελεί τις διαθέσιμες εναλλακτικές που υπάρχουν πριν ληφθεί η απόφαση, ενώ το μέτρο της προτίμησης ένας κανόνας ταξινόμησης των ευκαιριών σε όρους επιθυμητότητας.

Η χρησιμότητα εκφράζει την προτίμηση ενός ατόμου για την τιμή και τον κίνδυνο της αποπληρωμής (payoff), η οποία θεωρείται ως ένα ειδικό αποτέλεσμα ή συνέπεια. Η χρησιμότητα εξαρτάται από την αποπληρωμή χωρίς να είναι απόλυτα γραμμική η σχέση μεταξύ τους. Μπορεί να εξαχθεί από τις επιλογές του λήπτη απόφασης για διαφορετικά επίπεδα κινδύνου.

Το βασικό χαρακτηριστικό των αποφάσεων με βάση την προτίμηση είναι ότι η προτίμηση είναι μεταβατική ιδιότητα. Αν προτιμάται το A έναντι του B και το B έναντι του C τότε έπεται πως θα προτιμάται και το A έναντι του C.

6.2 Συνάρτηση χρησιμότητας

Η συνάρτηση χρησιμότητας είναι μια μαθηματική συνάρτηση που μετασχηματίζει την αποπληρωμή σε αξία της χρησιμότητας. Με άλλα λόγια αν το αποτέλεσμα αποπληρωμής είναι x τότε η χρησιμότητα του αποτελέσματος είναι $U(x)$. Η χρησιμότητα είναι ο μέσος των ποσοτικοποιημένων προτιμήσεων για την αποπληρωμή ενός γεγονότος συγκριτικά με ένα άλλο. Κατά συνέπεια μπορεί να συνεισφέρει όχι μόνο ποσοτικές εκτιμήσεις, όπως τη νομισματική αξία, αλλά και λιγότερο ποσοτικές όπως η αντιμετώπιση κινδύνου.

Η πρώτη ιδιότητα της χρησιμότητας είναι πως όταν ο λήπτης μιας απόφασης προτιμά το αποτέλεσμα x_1 από το αποτέλεσμα x_2 τότε η χρησιμότητα του x_1 είναι $U(x_1)$ είναι μεγαλύτερη από τη $U(x_2)$ και ισχύει $U(x_1) > U(x_2)$. Με αυτό τον τρόπο εκφράζεται η στάση του λήπτη απόφασης απέναντι στον κίνδυνο.

Μπορεί να επιλεγεί μια αυθαίρετη κλίμακα για τις χρησιμότητες έστω μεταξύ 0 και 1. Θεωρείται ότι ο λήπτης της απόφασης προτιμά τη μεγαλύτερη από τη μικρότερη τιμή και άρα το μικρότερο αποτέλεσμα θα έχει την τιμή 0 και το μεγαλύτερο την τιμή 1.

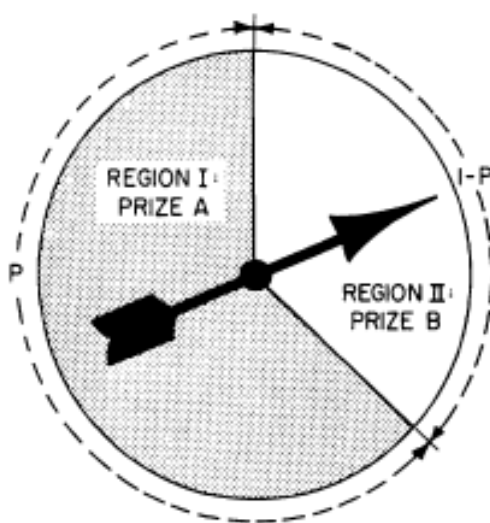
6.3 Λαχειοφόρος αγορά

Η θεωρία της χρησιμότητας βασίζεται στην υπόθεση των von Neumann και Morgenstern σύμφωνα με την οποία οι προτιμήσεις μπορούν να εκφραστούν όπως και τα βραβεία σε ένα τυχερό παιχνίδι.

Η λαχειοφόρος είναι ένα παιχνίδι της ακόλουθης μορφής. Ο χαρτοπαίκτης έχει την ευκαιρία να κερδίσει 1000€ με μια πιθανότητα 0,5 ή να μην κερδίσει τίποτα με την ίδια πιθανότητα 0,5. Εκτός από το να δεχτεί την παρτίδα ο χαρτοπαίκτης έχει επίσης την δυνατότητα να εγκαταλείψει την παρτίδα και να δεχτεί ως αντάλλαγμα ένα ποσό Z . Η τιμή του Z μπορεί να κυμαίνεται από 0 έως 1000€.

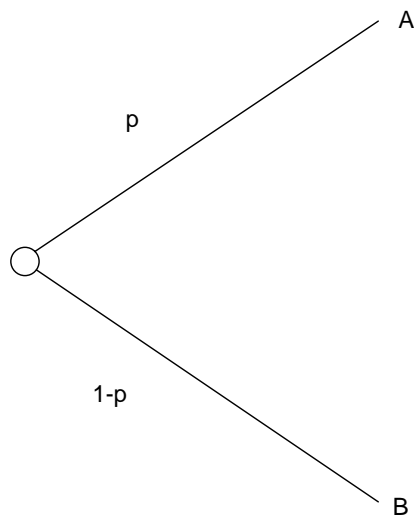
Η τιμή του Z είναι η ποσότητα εκείνη που κάνει το χαρτοπαίκτη αδιάφορο, είτε συμμετέχει στο παιχνίδι, είτε παίρνει τα μετρητά και αποτελεί τη σίγουρη βεβαιότητα στο στοίχημα.

Στον ορισμό των von Neumann και Morgenstern η λαχειοφόρος αντικαθίσταται με τη λοταρία και αναπτύσσεται ως εξής: Έστω ότι υπάρχει μια ρουλέτα που ο δείκτης της γυρίζει στο κέντρο του κύκλου που χωρίζεται σε δύο περιοχές. Αν ο δείκτης σταματήσει στην περιοχή A ο παίκτης κερδίζει το δώρο A ενώ αν σταματήσει στην περιοχή B κερδίζει το δώρο B .



Σχήμα 6.1: Μορφή της λαχειοφόρου κατά Newman και Morgenstern

Η βασική υπόθεση που γίνεται είναι πως ο δείκτης περιστρέφεται με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι ισοδύναμη η πιθανότητα να σταματήσει σε οποιοδήποτε σημείο της ρουλέτας. Αν ο λόγος των περιφερειών του κύκλου είναι p για το κομμάτι A και $1-p$ για το κομμάτι B , τότε με δεδομένο ότι όλες οι κατευθύνσεις είναι ισοδύναμες, η πιθανότητα να κερδίσει κανείς το δώρο A είναι p και να κερδίσει το δώρο B είναι $1-p$. Το διάγραμμα πιθανότητας για το παιχνίδι της λοταρίας φαίνεται στο Σχήμα 6.2.



Σχήμα 6.2: Διάγραμμα πιθανότητας για το τυχερό παιχνίδι

Αν ληφθεί υπόψη και η προτίμηση για το δώρο της λοταρίας και θεωρηθεί πως ο λήπτης της απόφασης προτιμάει το δώρο A από το δώρο B, τότε είναι φυσικό να προτιμάται το δώρο A στη λοταρία ανάμεσα στα δύο δώρα και αν η επιλογή γίνεται ανάμεσα σε διαφορετικές λοταρίες είναι φυσικό να επιλέγεται η λοταρία που παρουσιάζει τη μεγαλύτερη πιθανότητα να δώσει το δώρο A από το B.

Σε κάθε περίπτωση το ισοδύναμο βεβαιότητας του στοιχήματος θεωρείται ως η ελάχιστη τιμή πώλησης της λοταρίας. Απαντάει δηλαδή στο ερώτημα αν ο παίκτης κερδίσει, για ποιο ποσό μετρητών θα πουλήσει το αποτέλεσμα. Για παράδειγμα ένας παίκτης μπορεί να πουλήσει τη λοταρία για 400€ που σημαίνει πως εκτιμάει το κέρδος της στα 500€ οπότε μια τιμή μικρότερη από το αναμενόμενο κέρδος θεωρείται για αυτόν λογική ενώ ένας άλλος παίκτης που είναι περισσότερο ριψοκίνδυνος μπορεί να συμβιβαστεί μόνο με τη συμμετοχή του στη λοταρία και το κέρδος των 500€.

Κατά συνέπεια, η χρησιμότητα που εκφράζεται από το ισοδύναμο βεβαιότητας υποδηλώνει την τάση του παίκτη για το ρίσκο.

6.4 Αναμενόμενη χρησιμότητα

Η αναμενόμενη χρησιμότητα (expected utility) που είναι γνωστή και ως θεωρία χρησιμότητας με ισοσταθμισμένη πιθανότητα συσχετίζει κάθε εναλλακτική απόφαση με μια ισοσταθμισμένη μέση τιμή των αξιών της χρησιμότητας τους σε διαφορετικές καταστάσεις. Οι πιθανότητες των συγκεκριμένων καταστάσεων αποτελούν τις ισοσταθμισμένες τιμές.

Έστω ότι κάποιος θέλει να αποφασίσει αν θα βγεί από το σπίτι παίρνοντας μαζί του ή όχι μια ομπρέλα. Η απόφαση αυτή θα επηρεάζεται από το αν ο καιρός είναι βροχερός ή όχι. Οι δύο φυσικές καταστάσεις αυτής της απόφασης θα είναι «βρέχει» και «δεν βρέχει». Το πρόβλημα της απόφασης περιγράφεται από τις τιμές του πίνακα 6.1.

Πίνακας 6.1 Τιμές χρησιμότητας για το παράδειγμα της ομπρέλας.

	Βρέχει	Δεν Βρέχει
Ομπρέλα	15	15
Χωρίς Ομπρέλα	0	18

Αν υποτεθεί ότι η πιθανότητα να βρέχει είναι ίση με 0.1 τότε η αναμενόμενη χρησιμότητα του να πάρει μαζί του ομπρέλα είναι $0.1 \times 15 + 0.9 \times 15 = 15$ και του να μην πάρει μαζί του ομπρέλα είναι $0.1 \times 0 + 0.9 \times 18 = 16.2$. Με κριτήριο τη μέγιστη αναμενόμενη χρησιμότητα δεν θα πρέπει σε αυτήν την περίπτωση να πάρει μαζί του ομπρέλα. Αν όμως η πιθανότητα να βρέξει είναι 0.5 τότε η αναμενόμενη (ισοσταθμισμένης πιθανότητας) χρησιμότητα είναι $0.5 \times 15 + 0.5 \times 15 = 15$ για να πάρει μαζί του ομπρέλα και $0.5 \times 0 + 0.5 \times 18 = 9$ για να μην πάρει. Σε αυτήν την περίπτωση η μέγιστη αναμενόμενη χρησιμότητα δείχνει πως πρέπει να πάρει μαζί του ομπρέλα.

Ισχύει κατά συνέπεια: Για n ενέργειες που η καθεμία έχει μια πιθανότητα p_i και μια χρησιμότητα u_i η αναμενόμενη χρησιμότητα θα δίνεται από τη σχέση: $p_1u_1 * p_2u_2 * \dots * p_nu_n$.

Έστω μια γενική λοταρία με έναν αριθμό αποπληρωμών $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n$ με πιθανότητες p_0, p_1, \dots, p_n . Η αναμενόμενη αξία της χρησιμότητας $E(X)$ δίνεται από τη σχέση: $E(X) = p_0X_0 + p_1X_1 + \dots + p_nX_n = \sum_{i=1}^n p_iX_i$. (Εξ.6.1)

Η χρησιμότητα κάθε αποτελέσματος μπορεί να εκφραστεί ως $U(X_0), U(X_1), \dots, U(X_n)$. Η αναμενόμενη χρησιμότητα τότε μπορεί να εκφραστεί από τη σχέση:

$$E(U) = p_0U(X_0) + p_1U(X_1) + \dots + p_nU(X_n) = \sum_{i=1}^n p_iU(X_i) \quad (\text{Εξ. 6.2})$$

Η δεύτερη σημαντική ιδιότητα της χρησιμότητας θεωρεί πως η αναμενόμενη αξία της χρησιμότητας είναι ισοδύναμη με τη βεβαιότητα της χρησιμότητας. Κατά συνέπεια αν με Z παριστάνεται η τιμή της ισοδύναμης βεβαιότητας και με $U(Z)$ η χρησιμότητα της ισοδύναμης βεβαιότητας τότε η χρησιμότητα της ισοδύναμης βεβαιότητας δίνεται από τη σχέση:

$$U(Z) = E(Z) \quad (\text{Εξ. 6.3})$$

Η ιδιότητα αυτή επιτρέπει την εκτίμηση της συνάρτησης χρησιμότητας. Προκειμένου να καθοριστούν οι τιμές της χρησιμότητας στο εσωτερικό εύρος των χρησιμοτήτων το οποίο κυμαίνεται από 0 έως 1 τα ισοδύναμα βεβαιότητας καθορίζονται από τα τυχερά παιχνίδια λοταρίες.

Για να γίνει πιο κατανοητή η χρήση της πιθανότητας χρησιμότητας χρησιμοποιείται το ακόλουθο παράδειγμα:

Έστω ότι κάποιος θέλει να αποφασίσει να επιλέξει ανάμεσα σε δύο επενδύσεις. Υπάρχουν τρία πιθανά αποτελέσματα από τη στιγμή που θα κάνει την επιλογή το κάθε ένα με την ίδια πιθανότητα να συμβεί όπως φαίνεται στον πίνακα 6.2.

Πίνακας 6.2: Τιμές των δυο διαφορετικών προϊόντων για τρία πιθανά αποτελέσματα

Αποτέλεσμα	Προϊόν Α	Προϊόν Β
1	100	90
2	50	70
3	5	6

Η αναμενόμενη αξία για κάθε επένδυση είναι:

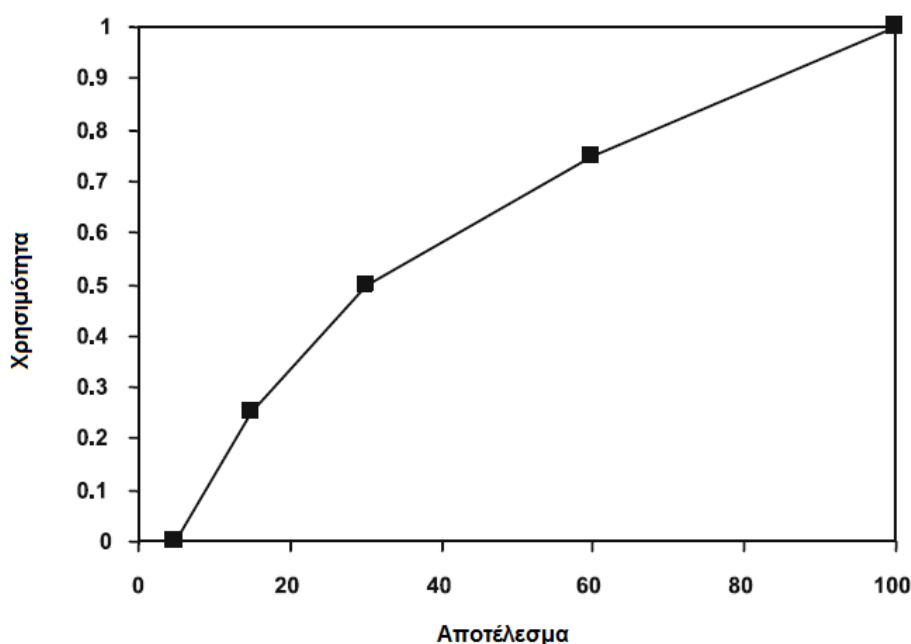
$$E(A) = \frac{1}{3}100 + \frac{1}{3}50 + \frac{1}{3}5 = 51.6$$

$$E(B) = \frac{1}{3}90 + \frac{1}{3}70 + \frac{1}{3}6 = 55.3$$

Με βάση τις αναμενόμενες τιμές των αποτελεσμάτων θα προτιμηθεί η επένδυση Β επειδή η χρησιμότητα της είναι μεγαλύτερη από αυτή της Α. Η επιλογή όμως μπορεί να πραγματοποιηθεί με βάση τη χρησιμότητα.

Η χρησιμότητα των ειδικών σημείων είναι γνωστή. Μηδενική είναι η $U(5)$ και ίση με τη μονάδα η $U(100)$. Οι τιμές της χρησιμότητας ανάμεσα σε αυτές τις δύο ακραίες τιμές είναι το ζητούμενο και για να εκτιμηθούν χρησιμοποιείται η δημιουργία της λοταρίας από τα γνωστά σημεία. Κατά συνέπεια η πρώτη λοταρία είναι ότι θα πρέπει να πληρώσει 100 με πιθανότητα 0.5 και 5 με πιθανότητα ίση πάλι με 0.5. Ο στόχος της δημιουργίας της λοταρίας είναι ο καθορισμός της ισοδύναμης βεβαιότητας του επενδυτή για αυτήν την λοταρία. Ο πελάτης ανταποκρίνεται με μια τιμή ίση με 30 η χρησιμότητα της οποίας μπορεί να καθοριστεί ως εξής: $U_{30}=E(U)=p_5U_5+p_{100}U_{100}=0.5 \times 0 + 0.5 \times 1 = 0.5$

Κατά συνέπεια η χρησιμότητα για το αποτέλεσμα ίσο με 30 είναι ίση με 0.5. Η επόμενη βεβαιότητα πιθανότητας που πρέπει να καθοριστεί είναι για τη λοταρία που πληρώνει 5 με πιθανότητα 0.5 και 30 με πιθανότητα πάλι 0.5. Η απόκριση του πελάτη σε αυτήν την περίπτωση είναι ίση με 15 και η αντίστοιχη χρησιμότητα: $U(15)=E(U)=p_5U_5+p_{30}U_{30}=0.5 \times 0+0.5 \times 0.5=0.25$. Παρομοίως η ισοδύναμη βεβαιότητα μιας λοταρίας που πληρώνει 30 με πιθανότητα 0.5 και 100 με πιθανότητα 0.5 είναι ίση με 60 έτσι ώστε η χρησιμότητα του 60 να είναι: $U(60)=E(U)=p_{30}U_{30}+p_{100}U_{100}=0.5 \times 0.5+0.5 \times 1=0.75$. Το διάγραμμα της χρησιμότητας – αποτελέσματος για το συγκεκριμένο παράδειγμα είναι:



Σχήμα 6.3: Το διάγραμμα της συνάρτησης χρησιμότητας για το παράδειγμα του επενδυτή

Η βέλτιστη επιλογή για το συγκεκριμένο παράδειγμα θα είναι η επιλογή για την οποία μεγιστοποιείται η χρησιμότητα. Η αναμενόμενη χρησιμότητα για την επένδυση A με βάση τα παραπάνω θα είναι:

$$E(U) = \frac{1}{3}U(100) + \frac{1}{3}U(50) + \frac{1}{3}U(5) = \frac{1}{3}1 + \frac{1}{3}0.66 + \frac{1}{3}0 = 0.55 \quad \text{και για την επένδυση B θα είναι:}$$

$$E(U) = \frac{1}{3}U(90) + \frac{1}{3}U(70) + \frac{1}{3}U(6) = \frac{1}{3}0.94 + \frac{1}{3}0.81 + \frac{1}{3}0.025 = 0.59$$

Κατά συνέπεια η επιλογή της επένδυσης B είναι προτιμότερη και στην περίπτωση που χρησιμοποιηθούν οι χρησιμότητες.

6.5 Αντικειμενική και υποκειμενική χρησιμότητα

Η θεωρία της χρησιμότητας πρωτοχρησιμοποιήθηκε με χρησιμότητες που αφορούν οικονομικές ενέργειες. Η χρήση τους θεωρούνταν ως ένα παιχνίδι που εξέταζε αν μεγιστοποιούταν το κέρδος ή όχι.

Το 1793 ο Bernoulli εισήγαγε ένα πολύπλοκο πρόβλημα στη θεωρία των πιθανοτήτων που είναι γνωστό ως «η ρίψη του νομίσματος». Θεωρείται το ακόλουθο παιχνίδι: Ρίχνεται ένα νόμισμα μέχρι να έρθει πρώτη φορά κορώνα. Αν στην πρώτη ρίψη έρθει κορώνα τότε ο παίχτης κερδίζει ένα χρυσό νόμισμα. Αν η κορώνα έρθει στη δεύτερη ρίψη τότε κερδίζει δύο χρυσά νομίσματα ενώ αν έρθει στην τέταρτη ρίψη κερδίζει 4 χρυσά νομίσματα. Γενικά αν έρθει με τη νιοστή ρίψη θα λάβει 2^n χρυσά νομίσματα.

Η πιθανότητα ότι η πρώτη κεφαλή που θα πραγματοποιηθεί στη νιοστή ρίψη είναι $1/2^n$. Το αναμενόμενο κέρδος μετά τη λήξη του παιχνιδιού είναι:

$\frac{1}{2} * 1 + \frac{1}{4} * 2 + \frac{1}{2^n} * 2^{n-1} + \dots$.Αυτό το άθροισμα είναι άπειρο. Σύμφωνα με τη μέγιστη αναμενόμενη χρησιμότητα οι παίκτες αυτού του παιχνιδιού θα πρέπει να είναι έτοιμοι να πληρώσουν ένα συγκεκριμένο ποσό για να παίξουν αυτό το παιχνίδι. Ειδικότερα θα πρέπει να βάλει όλη του την τύχη για ένα γύρο από το παιχνίδι που είναι γνωστό ως παιχνίδι της Αγίας Πετρούπολης.

Η βασική λύση στο συγκεκριμένο παιχνίδι δόθηκε από τον Daniel Bernoulli το 1738. Η βασική ιδέα πάνω στην οποία βασίστηκε η λύση του παιχνιδιού ήταν η μεγιστοποίηση της αναμενόμενης αξίας μέσω της μεγιστοποίησης της αναμενόμενης χρησιμότητας. Συγκεκριμένα πρότεινε πως η χρησιμότητα της

επόμενης αύξησης της αξίας είναι αντιστρόφως ανάλογη στο ήδη διαθέσιμο ποσό του παίκτη δηλαδή η χρησιμότητα είναι λογαριθμική συνάρτηση της τιμής της αξίας.

Οι υποκειμενικές χρησιμότητες χρησιμοποιούνται κυρίως στα οικονομικά προβλήματα όπου θεωρείται πως κάθε χρησιμότητα αποτελεί αύξουσα συνάρτηση της αξίας της. Στην ανάλυση κινδύνου όμως οι αντικειμενικές χρησιμότητες είναι αυτές που κυριαρχούν. Ο πιο συνηθισμένος τρόπος για να μετρηθεί ο κίνδυνος είναι να πολλαπλασιαστεί η πιθανότητα του κινδύνου με τα όρια του δίνοντας με αυτόν τον τρόπο την αναμενόμενη αξία και να χρησιμοποιηθεί αυτή η αξία για να συγκριθούν οι κίνδυνοι.

6.6 Χρησιμότητα και εκτίμηση κινδύνου

Θεωρείται η βασική αρχή της λοταρίας που λέει ότι ένας παίκτης μπορεί να παίξει σε μια λοταρία και ή να κερδίσει 1000€ με πιθανότητα 0.5 ή να μην κερδίσει τίποτα πάλι με πιθανότητα 0.5 ή επίσης μπορεί να επιλέξει να μην παίξει. Στην περίπτωση που ο παίκτης επιλέξει να μην παίξει θα λάβει 500€ σίγουρα. Το παιχνίδι αυτό αποτελεί ένα «δίκαιο» παιχνίδι με την ίδια αναμενόμενη τιμή και για τα δύο ενδεχόμενα. Οι αναμενόμενες χρησιμότητες είναι:

$$U(\text{Παίξει})=0.5U(1000)+0.5U(0) \text{ και}$$

$$U(\text{Δεν παίξει})=U(500)$$

Στην περίπτωση που ο παίκτης επιλέξει να μην παίξει ισχύει

$$U(\text{Δεν παίξει})>U(\text{παίξει})\rightarrow U(500)>0.5U(1000)+0.5U(0)\rightarrow U(500)-U(0)>U(1000)-U(500)$$

Αυτό πρακτικά σημαίνει πως η χρησιμότητα στο πεδίο $[0,500]$ προτιμάται για τη μεταβολή της χρησιμότητας σε σχέση με το πεδίο $[500,1000]$. Το σχήμα της

συνάρτησης χρησιμότητας θα είναι κοίλο. Το γεγονός πως όσο μεγαλύτερο είναι το στοίχημα τόσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα να παίξει σημαίνει ότι εμπεριέχει κίνδυνο η επιλογή. Κατά συνέπεια το στοιχείο του κινδύνου περιγράφεται από μια κοίλη συνάρτηση χρησιμότητας.

Η αναμενόμενη τιμή της συγκεκριμένης λοταρίας θα είναι $E(X)=pX_0+(1-p)X_1$ όπου με p συμβολίζεται η πιθανότητα του κέρδους X_0 .

Η αναμενόμενη τιμή της χρησιμότητας της συγκεκριμένης λοταρίας δίνεται από τη σχέση:

$$E(U)=pU(X_0)+(1-p)U(X_1)=U(CE) \quad (\text{Εξ.6.4})$$

Η διαφορά ανάμεσα στην αναμενόμενη τιμή της λοταρίας και της ισοδύναμης βεβαιότητας ορίζει την Ασφάλεια κινδύνου (Risk Premium, RP):

$$RP=E(X)-CE \quad (\text{Εξ. 6.5})$$

Όταν το RP ισούται με μηδέν ο παίκτης χαρακτηρίζεται ουδέτερος ως προς τον κίνδυνο και ισχύει:

$$U(E(X))=U(CE) \quad (\text{Εξ.6.6})$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι ισχύει:

$$U(pX_0+(1-p)X_1)=pU(X_0)+(1-p)U(X_1) \quad (\text{Εξ.6.7})$$

Η σχέση 6.7 ισχύει όταν η συνάρτηση χρησιμότητας είναι γραμμική συνάρτηση του X . Κατά συνέπεια η συνάρτηση χρησιμότητας ενός ουδέτερου προς τον κίνδυνο παίκτη είναι μια ευθεία γραμμή.

Αν $RP>0$ τότε η ισοδύναμη βεβαιότητα είναι οι αναμενόμενες τιμές μείον την ασφάλεια κινδύνου δηλαδή:

$$CE=E(X)-RP \quad (\text{Εξ.6.8})$$

Με δεδομένο ότι η χρησιμότητα του $E(X)$ πρέπει να είναι μεγαλύτερη από τη χρησιμότητα $E(X)-RP$ θα ισχύει:

$$U(E(X)) > U(E(X)-RP) \rightarrow U(E(X)) > U(CE) \quad (\text{Εξ.6.9})$$

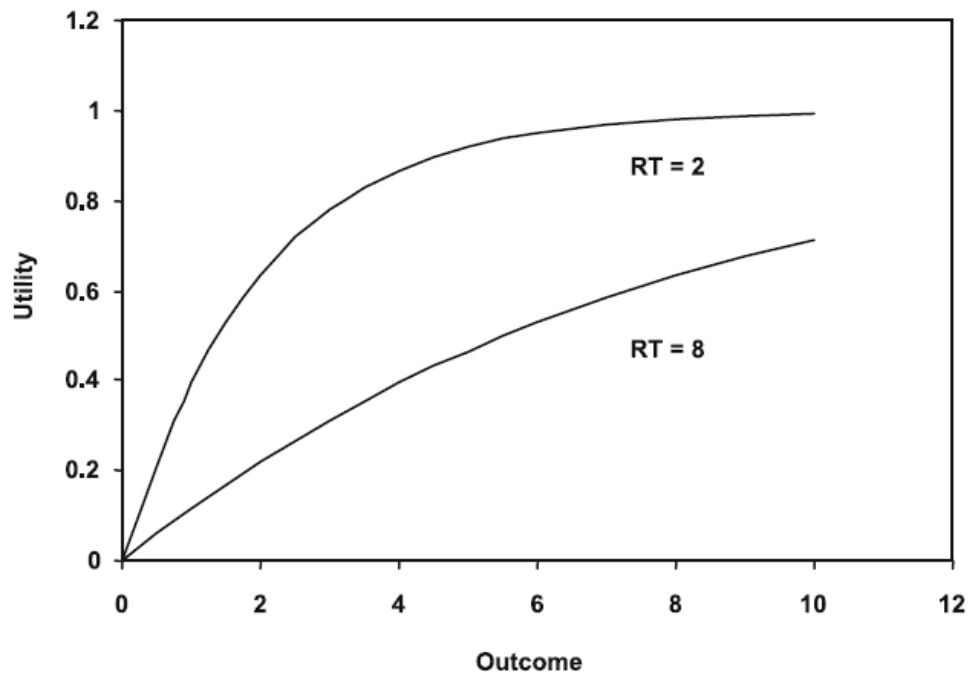
Όπου $CE = E(X)-RP$ η ισοδύναμη βεβαιότητα. Ο ριψοκίνδυνος παίκτης θα ανταλλάξει τη χρησιμότητα του $E(X)$ για τη χρησιμότητα του CE με στόχο να αποφύγει τον κίνδυνο του παιχνιδιού.

6.7 Εκθετική Συνάρτηση Χρησιμότητας

Κάθε μαθηματική συνάρτηση που έχει μια κοίλη καμπύλη μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την περιγραφή της συνάρτησης χρησιμότητας. Η πιο συνηθισμένη συνάρτηση που χρησιμοποιείται είναι η εκθετική συνάρτηση:

$$U(x) = 1 - ae^{-x/RT} \quad (\text{Εξ.6.10})$$

Όπου a είναι σταθερά αναλογίας και RT η αντοχή στον κίνδυνο. Η αντοχή σε κίνδυνο δίνει το μέτρο του βαθμού κινδύνου στον οποίο ο παίκτης είναι πρόθυμος να εκτεθεί.



Σχήμα 6.4: Η επίδραση της αντοχής του κινδύνου στην καμπύλη χρησιμότητας με α

Καθώς η αντοχή σε κίνδυνο αυξάνεται η συνάρτηση χρησιμότητας τείνει σε μια σταθερή τιμή. Η ισοδύναμη βεβαιότητα CE για τη χρησιμότητα με βάση την εκθετική συνάρτηση χρησιμότητας δίνεται από τη σχέση:

$$CE = -RT \ln \left(\frac{1-U(x)}{a} \right) \quad (Eξ. 6.11)$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Κολέτσος, Ι., Στόγιαννης, Δ "Κεφάλαιο 10 Έλεγχος αποφάσεων υπό αβεβαιότητα-Δένδρα αποφάσεων."
2. Ποταμιανός, Α., Διγαλάκης, Β., (2009). "Κεφάλαιο 1: Πιθανότητες." Σημειώσεις Τμήμα ΗΜΜΥ, Πολυτεχνείο Κρήτης.
3. "Δέντρα αποφάσεων." Απλές τεχνικές ανάλυσης αποφάσεων
<http://dsslab.cs.unipi.gr/Courses/PostGraduateAdvInfSys/Decision%20Analysis/%5Bsl2%5D.pdf>.
4. "Maximum likelihood and other methods of likelihood and other methods of estimation." Ch.3
<http://fds.oup.com/www.oup.com/pdf/13/9780198572268.pdf>.
5. "SUPPLEMENT TO CHAPTER 9: DECISION CRITERIA."
<http://highered.mcgraw-hill.com/sites/dl/free/0073129038/449977/Chapter9Supplement.pdf>.
6. "Types of decisions and decision making process."
<http://managementinnovations.wordpress.com/2008/12/08/types-of-decisions-decision-making-process/>.
7. Adamo, J. M. (1980). "Fuzzy Decision Trees." Fuzzy Sets and Systems 4: 207-219.
8. Andersen, K. (2007). "Solving a transportation problem."
http://www.diku.dk/OLD/undervisning/2006-2007/2006-2007_b3_opt/example_transp_prob.pdf.
9. Bell, D. E., Raiffa, H., Tversky, A (1988). "Decision Making: Descriptive, Normative, and Prescriptive Interactions." Cambridge University Press, available
10. Crudwell, F. K. (2008). "Decision Tree Analysis and Utility Theory." Ch 14 in Finance for Engineers Springerlink edition available at
http://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-1-84800-033-9_14.
11. Danielson, M., Ekenberg, L., Larsson, A (2007). "Distribution of expected utility in decision trees." International Journal of Approximate Reasoning 46: 387-407.
12. Eisenhardt, K. M., Zbaraki, M.J (1992). "Strategic decision making." Strategic Management Journal, 13: 17-37.
13. Figueiredo, M. A. T. (2004). "Lecture Notes on Bayesian Estimation and Classification." http://www.lx.it.pt/~mtf/learning/Bayes_lecture_notes.pdf.
14. Gass, S. I., Assad, A.A. (2011). "History of Operational Research." Tutorials in Operational Research
<http://s12.middlebury.edu/MATH0318A/History%20of%20OR.pdf>.
15. Griffin, S., Claxton, K. "Interpreting the expected value of perfect information parameters."

- http://www.york.ac.uk/media/che/documents/papers/presentations/seqp_osterSMDMfina.pdf.
16. Hanson, S. (2005). "Decision Theory A brief Introduction."
<http://home.abe.kth.se/~soh/decisiontheory.pdf>.
 17. Hiller, L. (2001). "Introduction to operational research." Mc Graw Hill Edition.
 18. Howard, R. (1968). "The foundation of decision analysis." Ch 3 in Advances: Foundations of DA Revisited available at:
<http://www.usc.edu/dept/create/assets/001/50843.pdf>.
 19. Luce Dunkan, R., Raiffa, H. (1957). "Games and Decisions: Introduction and Critical Survey
 20. Maredia, K. (2010). "A Study in Decision Analysis using Decision Trees and Game Theory." Department of Computer and Mathematical Sciences University of Houston – Downtown available at
<http://cms.uhd.edu/faculty/redlt/kizzieseniorproject.pdf>.
 21. Martin, J., Rios Insuna, D (1996). "Local sensitivity analysis in Bayesian decision theory." Bayesian Robustness, IMS Lecture Notes - Monograph Series
http://projecteuclid.org/DPubS/Repository/1.0/Disseminate?view=body&id=pdf_1&handle=euclid.Inms/1215453064 29.
 22. MindTools "Unit 4 Decision analysis."
<http://businessmanagementcourses.org/Lesson37DecisionTheory&DecisionTrees.pdf>.
 23. Olivas, R. (2007). "A Primer for Decision Making Professionals."
http://www.lumenaut.com/download/decision_tree_primer_v5.pdf.
 24. Rajgopal, J. "Principles and Applications of Operations Research." Maynard's Industrial Engineering Handbook, 5th Edition available at
[http://www.pitt.edu/~jrclass/or/or-intro.html#approach: 11.27-11.44](http://www.pitt.edu/~jrclass/or/or-intro.html#approach:11.27-11.44).
 25. Ruggeri, F. (2008). "Bayesian Robustness." European Working Group "Multiple Criteria Decision Aiding 17:
<http://www.inescc.pt/~ewgmcd/ForRuggeri.pdf>.
 26. Savage, L. (1972). "The foundations of statistics
 27. Silva, C. A. S. (2009). "Decision Analysis."
<https://dspace.ist.utl.pt/bitstream/2295/316776/1/Class10.pdf>.
 28. Smith, J. E. (2000). "Bayesian Decision Analysis Principles and practices."
 29. Smith, J. E., Winterfeldt, D. (2004). "Decision Analysis in "Management Science"." Management Science 50: 561-574.
 30. Sottinen, T. (2009). "Operations Research with GNU Linear Programming Kit." http://lipas.uwasa.fi/~tsottine/lecture_notes/or.pdf.
 31. Zeleny, M. "The Decision Process and its stages." Ch.3 in Multiple Criteria Decision Making, McGraw Hill Book Company

