

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

---

Εκτιμήσεις Σφαλμάτων για τη Μέθοδο των  
Πεπερασμένων Στοιχείων σε Ελλειπτικά και  
Παραβολικά Προβλήματα

---

Επιμέλεια:

Δημήτριος Ντόγκας

Επιβλέπων καθηγητής:

Κωνσταντίνος Χρυσάφινος

1 Ιουλίου 2013



# Περιεχόμενα

<b>1 Χώροι Sobolev</b>	<b>7</b>
1.1 Χώροι Banach	7
1.2 Χώροι Sobolev	8
1.2.1 Ασθενείς παράγωγοι	9
1.2.2 Ορισμοί χώρων Sobolev	10
1.2.3 Βασικές ιδιότητες	11
1.3 Ομαλοποιητής και Προσέγγιση	12
1.3.1 Προσέγγιση στο εσωτερικό από ομαλές συναρτήσεις	15
1.3.2 Προσέγγιση από ομαλές συναρτήσεις	17
1.3.3 Ολική προσέγγιση από ομαλές συναρτήσεις	18
1.4 Επεκτάσεις	20
1.5 Ίχνη	23
1.6 Ανισότητες Sobolev	28
1.6.1 Ανισότητα Gagliardo-Nirenberg-Sobolev	28
1.6.2 Ανισότητα Morrey	32
1.6.3 Γενικές ανισότητες Sobolev	36
1.7 Συμπάγια	38
1.8 Πρόσθετα Στοιχεία για τους χώρους Sobolev	42
1.8.1 Ανισότητες Poincaré	42
1.8.2 Πηλικά Διαφορών	44
1.8.3 Παραγωγισιμότητα σχεδόν παντού	48
1.9 Άλλοι χώροι συναρτήσεων	50

1.9.1	Ο χώρος $H^{-1}$ . . . . .	50
1.9.2	Χώροι που περιλαμβάνουν και μεταβλητή χρόνο . . . . .	51
<b>2</b>	<b>Ελλειπτικές Εξισώσεις Δεύτερης Τάξης</b>	<b>57</b>
2.1	Ορισμοί . . . . .	57
2.1.1	Ελλειπτικές Εξισώσεις . . . . .	57
2.1.2	Ασθενείς Λύσεις . . . . .	58
2.2	Υπαρξη Ασθενών Λύσεων . . . . .	60
2.2.1	Το Θεώρημα Lax-Milgram . . . . .	60
2.2.2	Ενεργειακές Εκτιμήσεις . . . . .	63
2.2.3	Fredholm Alternative . . . . .	66
2.3	Ομαλότητα . . . . .	74
2.3.1	Ομαλότητα στο εσωτερικό . . . . .	76
2.3.2	Ομαλότητα στο σύνορο . . . . .	81
2.4	Αρχή Μεγίστου . . . . .	89
2.4.1	Ασθενής Αρχή Μεγίστου . . . . .	89
2.4.2	Ισχυρή Αρχή Μεγίστου . . . . .	93
<b>3</b>	<b>Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων για Ελλειπτικά Προβλήματα</b>	<b>97</b>
3.1	Μεταβολικό Πρόβλημα . . . . .	97
3.2	Κατασκευή του Χώρου Πεπερασμένων Στοιχείων . . . . .	100
3.2.1	Το Πεπερασμένο Στοιχείο . . . . .	100
3.2.2	Τριγωνικά Πεπερασμένα Στοιχεία . . . . .	102
3.2.3	Η Συνάρτηση Παρεμβολής . . . . .	105
3.2.4	Ισοδυναμία των Στοιχείων . . . . .	108
3.3	Θεωρία Πολυωνυμικής Προσέγγισης σε Χώρους Sobolev . . . . .	110
3.3.1	Φράγματα για το Σφάλμα Παρεμβολής . . . . .	110
3.3.2	Αντίστροφες Εκτιμήσεις . . . . .	116
3.4	n-Διάστατα Μεταβολικά Προβλήματα . . . . .	118
3.4.1	Μεταβολική Διατύπωση της Εξίσωσης Poisson . . . . .	118
3.4.2	Μεταβολική Διατύπωση του Καθαρά Neumann Προβλήματος . . . . .	120

3.4.3	Μεταβολική Προσέγγιση της Εξίσωσης Poisson . . . . .	122
3.4.4	Μεταβολική Προσέγγιση Γενικών Ελλειπτικών Προβλημάτων . . . . .	125
3.4.5	Εκτιμήσεις Αρνητικών Νορμών . . . . .	128
3.5	Ένα Μη-Γραμμικό Πρόβλημα . . . . .	129
3.5.1	Ένα Βασικό Θεώρημα . . . . .	129
3.5.2	$L^p$ – Εκτιμήσεις . . . . .	132
3.5.3	Μη-Γραμμικό Πρόβλημα . . . . .	133
<b>4</b>	<b>Παραβολικές Εξισώσεις Δεύτερης Τάξης</b>	<b>137</b>
4.1	Ορισμοί . . . . .	137
4.1.1	Παραβολικές Εξισώσεις . . . . .	137
4.1.2	Ασθενείς Λύσεις . . . . .	138
4.2	Υπαρξη Ασθενών Λύσεων . . . . .	140
4.2.1	Προσεγγίσεις Galerkin . . . . .	140
4.2.2	Ενεργειακές Εκτιμήσεις . . . . .	141
4.2.3	Υπαρξη και Μοναδικότητα . . . . .	144
4.3	Ομαλότητα . . . . .	146
4.4	Θεωρία Ημιομάδων . . . . .	153
4.4.1	Ορισμοί και Βασικές Ιδιότητες . . . . .	154
4.4.2	Δημιουργία Συστολικών Ημιομάδων . . . . .	160
4.4.3	Εφαρμογή σε Παραβολική ΜΔΕ 2ης τάξης . . . . .	162
<b>5</b>	<b>Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων για Παραβολικά Προβλήματα</b>	<b>165</b>
5.1	Η Κλασική Μέθοδος Galerkin . . . . .	165
5.2	Μέθοδοι που Βασίζονται σε Πιο Γενικές Προσεγγίσεις του Ελλειπτικού Προβλήματος . . . . .	179
5.3	Πιο Γενικές Ελλειπτικές Εξισώσεις . . . . .	192
<b>6</b>	<b>Παραδείγματα στο FreeFem++</b>	<b>203</b>
6.1	Ελλειπτικές ΜΔΕ . . . . .	203
6.1.1	Γραμμικό Πρόβλημα . . . . .	204
6.1.2	Μη Γραμμικό Πρόβλημα . . . . .	209
6.2	Γραμμική Παραβολική ΜΔΕ . . . . .	214



# Κεφάλαιο 1

## Χώροι Sobolev

### 1.1 Χώροι Banach

**Ορισμός 1.1.1** Έστω  $X$  ένας γραμμικός χώρος. Μία απεικόνιση  $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$  καλείται νόρμα αν  $\forall u, v \in X$  και  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$(i) \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

$$(ii) \|\lambda u\| \leq |\lambda| \|u\|$$

$$(iii) \|u\| = 0 \text{ αν και μόνο αν } u = 0$$

**Ορισμός 1.1.2** Ένας γραμμικός χώρος με νόρμα λέγεται Banach αν είναι πλήρης, δηλαδή αν κάθε ακολουθία Cauchy είναι συγκλίνουσα.

#### Ορισμοί 1.1.3

1. Έστω  $V$  ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα  $F$ . Μία απεικόνιση  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow F$  καλείται εσωτερικό γινόμενο αν  $\forall u, v, w \in V$  και  $\forall a, b \in F$  :

$$(i) \langle u, u \rangle \geq 0 \text{ και } \langle u, u \rangle = 0 \Rightarrow u = 0$$

$$(ii) \langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle} \text{ ( Αν } F = \mathbb{R}, \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle)$$

$$(iii) \langle au + bv, w \rangle = a\langle u, w \rangle + b\langle v, w \rangle$$

2. Ένας χώρος Banach του οποίου η νόρμα επάγεται από εσωτερικό γινόμενο ονομάζεται χώρος Hilbert

### Ορισμοί 1.1.4

1. Έστω  $U \subset \mathbb{R}^n$  ανοιχτό και  $u \in U$ . Η  $u$  καλείται Hölder συνεχής με εκθέτη  $\gamma$ , αν για κάποια σταθερά  $C$ :

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\gamma \quad (x, y \in U)$$

2. Αν  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής και φραγμένη, ορίζουμε:

$$\|u\|_{C(\bar{U})} := \sup_{x \in \bar{U}} |u(x)|$$

3. (i) Η  $\gamma$ -Hölder σεμνύομα μιας  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  είναι η

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\bar{U})} := \sup_{\substack{x,y \in \bar{U} \\ x \neq y}} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma} \right\}$$

- (ii) Και η  $\gamma$ -Hölder νόρμα είναι η

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\bar{U})} := \|u\|_{C(\bar{U})} + [u]_{C^{0,\gamma}(\bar{U})}$$

4. Ο χώρος που αποτελείται από τις συναρτήσεις  $u \in C^{k,\gamma}(\bar{U})$  για τις οποίες η νόρμα

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\bar{U})} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{C(\bar{U})} + \sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha u]_{C^{0,\gamma}(\bar{U})}$$

είναι πεπερασμένη καλείται χώρος Hölder και συμβολίζεται  $C^{k,\gamma}(\bar{U})$

**Θεώρημα 1.1.1** Ο χώρος  $C^{k,\gamma}(\bar{U})$  είναι χώρος Banach.

## 1.2 Χώροι Sobolev

Σε αυτή την ενότητα ορίζουμε την ασθενή παράγωγο, τους χώρους Sobolev και αποδεικνύουμε κάποιες ιδιότητές τους. Με τον συμβολισμό  $C_c^\infty(U)$  εννοούμε το χώρο των άπειρες φορές παραγωγίσιμων συναρτήσεων  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$  που έχουν συμπαγή φορέα στο  $U$ . Αυτές τις συναρτήσεις θα τις λέμε στο εξής δοκιμαστικές συναρτήσεις.



### 1.2.1 Ασθενείς παράγωγοι

**Ορισμός 1.2.1** Έστω  $u, v \in L^1_{loc}(U)$  και  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , όπου  $L^1_{loc}(U) = \{u : U \rightarrow \mathbb{R} \mid u \in L^1(V) \forall V \subset\subset U\}$ . Θα λέμε ότι η  $v$  είναι η  $\alpha$ -ασθενής μερική παράγωγος της  $u$  και θα συμβολίζουμε  $D^\alpha u = v$  αν

$$\int_U u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v \phi \, dx \quad \forall \phi \in C_c^\infty(U)$$

**Λήμμα 1.2.1** (Μοναδικότητα της ασθενούς παραγώγου). Μία  $\alpha$ -ασθενής μερική παράγωγος της  $u$ , αν υπάρχει, είναι μοναδική εκτός από σύνολο μέτρου μηδέν.

**Απόδειξη.** Έστω  $v, \tilde{v} \in L^1_{loc}(U)$  τέτοιες ώστε

$$\int_U u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U \tilde{v} \phi \, dx$$

για κάθε  $\phi \in C_c^\infty(U)$ . Τότε

$$\int_U (v - \tilde{v}) \phi \, dx = 0$$

για κάθε  $\phi \in C_c^\infty(U)$  και συνεπώς  $v - \tilde{v} = 0$  σχεδόν παντού. ■

**Παράδειγμα 1.2.1** Για  $n = 1, U = (0, 2)$  και

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{για } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{για } 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

Ορίζουμε

$$v(x) = \begin{cases} 1 & \text{για } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{για } 1 < x < 2 \end{cases}$$

όπου  $u' = v$  με την ασθενή έννοια, αφού για κάθε  $\phi \in C_c^\infty(U)$

$$\begin{aligned} \int_0^2 u \phi' \, dx &= \int_0^1 x \phi' \, dx + \int_1^2 \phi' \, dx \\ &= - \int_0^1 \phi \, dx + \phi(1) - \phi(1) = - \int_0^2 v \phi \, dx \end{aligned}$$

από παραγοντική ολοκλήρωση και το γεγονός ότι  $\phi(2) = 0$ .

## 1.2.2 Ορισμοί χώρων Sobolev

### Ορισμοί 1.2.2

1. Ο χώρος Sobolev  $W^{k,p}(U)$  αποτελείται από όλες τις τοπικά αδροίσιμες συναρτήσεις  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοιες ώστε για κάθε  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  με  $|\alpha| \leq k$  οι  $D^\alpha u$  να υπάρχουν με την ασθενή έννοια και να ανήκουν στον  $L^p(U)$ .
2. Στην περίπτωση που  $p = 2$ , ο χώρος συμβολίζεται  $H^k(U) = W^{k,2}(U)$  και είναι χώρος Hilbert.
3. Για  $u \in W^{k,p}(U)$  ορίζουμε τη νόρμα της ως:

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)} := \begin{cases} \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \int_U |D^\alpha u|^p dx \right)^{1/p} & (1 \leq p < \infty) \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \text{ess sup}_U |D^\alpha u| & (p = \infty) \end{cases}$$

### Ορισμοί 1.2.3

- (i) Έστω  $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ ,  $u \in W^{k,p}(U)$ . Λέμε ότι η  $u_m$  συγκλίνει στη  $u$  στον  $W^{k,p}(U)$  και γράφουμε

$$u_m \rightarrow u \text{ στον } W^{k,p}(U)$$

αν ισχύει ότι

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|u_m - u\|_{W^{k,p}(U)} = 0$$

- (ii) Γράφουμε

$$u_m \rightarrow u \text{ στον } W_{loc}^{k,p}(U)$$

για να υποδηλώσουμε ότι

$$u_m \rightarrow u \text{ στον } W^{k,p}(V) \text{ για κάθε } V \subset\subset U$$

**Ορισμός 1.2.4** Συμβολίζουμε ως  $W_0^{k,p}(U)$  την κλειστότητα του χώρου  $C_c^\infty(U)$  στον  $W^{k,p}(U)$ .

Αυτό σημαίνει πως μία  $u \in W_0^{k,p}(U)$  αν και μόνο αν υπάρχουν συναρτήσεις  $u_m \in C_c^\infty(U)$  τέτοιες ώστε  $u_m \rightarrow u$  στον  $W^{k,p}(U)$ . Στην ουσία ερμηνεύουμε τον  $W_0^{k,p}(U)$  ως τον χώρο που αποτελείται από τις συναρτήσεις  $u \in W^{k,p}(U)$  έτσι ώστε

$$D^\alpha u = 0 \text{ στο } \partial U \text{ για όλα τα } \alpha \text{ με } |\alpha| \leq k - 1$$

### 1.2.3 Βασικές ιδιότητες

**Θεώρημα 1.2.1** Έστω  $u, v \in W^{k,p}(U)$ ,  $|\alpha| \leq k$ . Τότε

(i)  $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(U)$  και  $D^\beta(D^\alpha u) = D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta}u$  για κάθε  $\alpha, \beta$  με  $|\alpha| + |\beta| \leq k$ .

(ii) Για κάθε  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(U)$  και  $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$ ,  $|\alpha| \leq k$ .

(iii) Αν  $V$  είναι ανοιχτό υποσύνολο του  $U$ , τότε  $u \in W^{k,p}(V)$ .

(iv) Αν  $\zeta \in C_c^\infty(U)$ , τότε  $\zeta u \in W^{k,p}(U)$  και

$$D^\alpha(\zeta u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \zeta D^{\alpha-\beta} u$$

**Θεώρημα 1.2.2** Για κάθε  $k = 1, \dots$  και  $1 \leq p \leq \infty$ , ο χώρος Sobolev  $W^{k,p}(U)$  είναι χώρος Banach.

**Απόδειξη.**

1. Ελέγχουμε πρώτα απ'όλα ότι η  $\|u\|_{W^{k,p}(U)}$  είναι πράγματι νόρμα. Από τον ορισμό εύκολα προκύπτει ότι

$$\|\lambda u\|_{W^{k,p}(U)} = |\lambda| \|u\|_{W^{k,p}(U)}$$

και

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)} = 0 \text{ αν και μόνο αν } u = 0 \text{ σχεδόν παντού.}$$

Για την τριγωνική ανισότητα υποθέτουμε ότι  $u, v \in W^{k,p}(U)$ . Τότε, για την περίπτωση  $1 \leq p < \infty$  χρησιμοποιούμε την ανισότητα Minkowski ( $\|u + v\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^p} + \|v\|_{L^p}$ ) και προκύπτει

$$\begin{aligned} \|u + v\|_{W^{k,p}(U)} &= \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u + D^\alpha v\|_{L^p(U)} \right)^{1/p} \\ &\leq \left( \sum_{|\alpha| \leq k} (\|D^\alpha u\|_{L^p(U)} + \|D^\alpha v\|_{L^p(U)})^p \right)^{1/p} \\ &\leq \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(U)}^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v\|_{L^p(U)}^p \right)^{1/p} \\ &= \|u\|_{W^{k,p}(U)} + \|v\|_{W^{k,p}(U)} \end{aligned}$$

2. Μένει να δείξουμε ότι ο  $W^{k,p}(U)$  είναι πλήρης. Υποθέτουμε άρα ότι η  $\{u_m\}_{m=1}^\infty$  είναι ακολουθία Cauchy στον  $W^{k,p}(U)$ . Τότε για κάθε  $|\alpha| \leq k$ , η  $\{D^\alpha u_m\}_{m=1}^\infty$  είναι ακολουθία Cauchy στον  $L^p(U)$ . Αφού ο  $L^p(U)$  είναι πλήρης, υπάρχουν συναρτήσεις  $u_\alpha \in L^p(U)$  τέτοιες ώστε

$$D^\alpha u_m \rightarrow u_\alpha \text{ στον } L^p(U)$$

για κάθε  $|\alpha| \leq k$ . Πιο συγκεκριμένα,

$$u_m \rightarrow u_{(0,\dots,0)} =: u \text{ στον } L^p(U).$$

3. Μπορούμε πλέον να ισχυριστούμε ότι

$$u \in W^{k,p}(U), \quad D^\alpha u = u_\alpha \quad (|\alpha| \leq k) \quad (1.2.1)$$

Για να επαληθεύσουμε αυτό τον ισχυρισμό, σταθεροποιούμε μία  $\phi \in C_c^\infty(U)$ . Τότε

$$\begin{aligned} \int_U u D^\alpha \phi \, dx &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_U u_m D^\alpha \phi \, dx \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} (-1)^{|\alpha|} \int_U D^\alpha u_m \phi \, dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_U u_\alpha \phi \, dx \end{aligned}$$

Συνεπώς, η (1.2.1) ισχύει και, άρα, αφού  $D^\alpha u_m \rightarrow D^\alpha u$  στον  $L^p(U)$  για κάθε  $|\alpha| \leq k$ , βλέπουμε ότι  $u_m \rightarrow u$  στον  $W^{k,p}(U)$ , όπως θέλαμε.

■

### 1.3 Ομαλοποιητής και Προσέγγιση

Έστω  $U \subset \mathbb{R}^n$  ανοιχτό και  $\varepsilon > 0$ . Ορίζουμε το σύνολο  $U_\varepsilon$  ως  $U_\varepsilon := \{x \in U \mid \text{dist}(x, \partial U) > \varepsilon\}$ .

**Ορισμός 1.3.1** (i) Ορίζουμε τον πρότυπο ομαλοποιητή  $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  ως

$$\eta(x) := \begin{cases} C \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & \text{αν } |x| < 1 \\ 0 & \text{αν } |x| \geq 1 \end{cases}$$

όπου η σταθερά  $C > 0$  είναι τέτοια ώστε  $\int_{\mathbb{R}^n} \eta \, dx = 1$ .

(ii) Για κάθε  $\varepsilon > 0$ , θέτουμε

$$\eta_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Οι  $\eta_\varepsilon$  ανήκουν στον  $C^\infty$  και ικανοποιούν τα

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon dx = 1 \text{ και } \text{spt}(\eta_\varepsilon) \subset B(0, \varepsilon).$$

**Ορισμός 1.3.2** Αν  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  είναι τοπικά ολοκληρώσιμη, ορίζουμε την ομαλοποίησή της ως

$$f^\varepsilon := \eta_\varepsilon * f \text{ στο } U_\varepsilon$$

Αυτή είναι η

$$f^\varepsilon(x) = \int_U \eta_\varepsilon(x-y)f(y) dy = \int_{B(0,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(y)f(x-y) dy$$

για  $x \in U_\varepsilon$

**Θεώρημα 1.3.1** (Ιδιότητες του ομαλοποιητή)

(i)  $f^\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon)$

(ii)  $f^\varepsilon \rightarrow f$  σεδόν παντού καθώς  $\varepsilon \rightarrow 0$

(iii) Αν  $f \in C(U)$ , τότε  $f^\varepsilon \rightarrow f$  ομοιόμορφα σε συμπαγή υποσύνολα του  $U$ .

(iv) Αν  $1 \leq p \leq \infty$  και  $f \in L^p_{loc}$ , τότε  $f^\varepsilon \rightarrow f$  στον  $L^p_{loc}(U)$ .

**Απόδειξη.**

1. Έστω  $x \in U_\varepsilon$  το οποίο κρατάμε σταθερό,  $i \in \{1, \dots, n\}$  και  $h$  τόσο μικρο που το  $x + he_i \in U_\varepsilon$ .

Τότε

$$\begin{aligned} \frac{f^\varepsilon(x + he_i) - f^\varepsilon(x)}{h} &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_U \frac{1}{h} \left[ \eta\left(\frac{x + he_i - y}{\varepsilon}\right) - \eta\left(\frac{x - y}{\varepsilon}\right) \right] f(y) dy \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_V \frac{1}{h} \left[ \eta\left(\frac{x + he_i - y}{\varepsilon}\right) - \eta\left(\frac{x - y}{\varepsilon}\right) \right] f(y) dy \end{aligned}$$

για κάποιο ανοιχτό σύνολο  $V \subset \subset U$ . Επειδή

$$\frac{1}{h} \left[ \eta\left(\frac{x + he_i - y}{\varepsilon}\right) - \eta\left(\frac{x - y}{\varepsilon}\right) \right] \rightarrow \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \left(\frac{x - y}{\varepsilon}\right)$$

ομοιόμορφα στο  $V$ , η  $\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial x_i}(x)$  υπάρχει και ισούται με

$$\int_U \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x-y) f(y) dy.$$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι η  $D^\alpha f^\varepsilon$  υπάρχει και

$$D^\alpha f^\varepsilon(x) = \int_U D^\alpha \eta_\varepsilon(x-y) f(y) dy \quad (x \in U_\varepsilon)$$

για κάθε  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ . Αυτό αποδεικνύει το (i).

2. Σύμφωνα με το Θεώρημα Διαφορισιμότητας του Lebesgue (με βάση το οποίο για τοπικά αθροισμη  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ισχύει σχεδόν για κάθε σημείο  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  ότι  $\int_{B(x_0,r)} f dx \rightarrow f(x_0)$  καθώς  $r \rightarrow 0$ ),

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| dy = 0 \quad (1.3.1)$$

για σχεδόν κάθε  $x \in U$ . Σταθεροποιούμε ένα τέτοιο  $x$ . Τότε

$$\begin{aligned} |f^\varepsilon(x) - f(x)| &= \left| \int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y) [f(y) - f(x)] dy \right| \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B(x,\varepsilon)} \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) |f(y) - f(x)| dy \\ &\leq C \int_{B(x,\varepsilon)} |f(y) - f(x)| dy \rightarrow 0 \text{ καθώς } \varepsilon \rightarrow 0 \end{aligned}$$

από την (1.3.1). Από αυτό προκύπτει το (ii).

3. Υποθέτουμε τώρα ότι  $f \in C(U)$ . Δεδομένου ενός  $V \subset\subset U$  διαλέγουμε  $V \subset\subset W \subset\subset U$  και παρατηρούμε ότι η  $f$  είναι ομοιόμορφα συνεχής στο  $W$ . Άρα, το όριο της (1.3.1) ισχύει ομοιόμορφα για  $x \in V$ . Συνεπώς ο παραπάνω υπολογισμός συνεπάγεται ότι  $f^\varepsilon \rightarrow f$  ομοιόμορφα στο  $V$ .
4. Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι  $1 \leq p < \infty$  και  $f \in L^p_{loc}(U)$ . Διαλέγουμε οποιοδήποτε ανοιχτό σύνολο  $V \subset\subset U$  και όπως πριν ένα ανοιχτό  $W$  τέτοιο ώστε  $V \subset\subset W \subset\subset U$ . Ισχυριζόμαστε ότι για αρκετά μικρό  $\varepsilon > 0$

$$\|f^\varepsilon\|_{L^p(V)} \leq \|f\|_{L^p(W)}. \quad (1.3.2)$$

Για να το δειξουμε αυτό, παρατηρούμε ότι αν  $1 < p < \infty$  και  $x \in V$ ,

$$\begin{aligned} |f^\varepsilon(x)| &= \left| \int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y) f(y) dy \right| \\ &\leq \int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon^{1-1/p}(x-y) \eta_\varepsilon^{1/p}(x-y) |f(y)| dy \\ &\leq \left( \int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y) dy \right)^{1-1/p} \left( \int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y) |f(y)|^p dy \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Δεδομένου ότι  $\int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y) dy = 1$ , η παραπάνω ανισότητα συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} \int_V |f^\varepsilon(x)|^p dx &\leq \int_V \left( \int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y) |f(y)|^p dy \right) dx \\ &\leq \int_W |f(y)|^p \left( \int_{B(y,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y) dx \right) dy = \int_W |f(y)|^p dy, \end{aligned}$$

δεδομένου ότι το  $\varepsilon > 0$  είναι αρκετά μικρό. Αυτή είναι η ανισότητα (1.3.2).

5. Σταθεροποιούμε τώρα  $V \subset\subset W \subset\subset U$ ,  $\delta > 0$  και διαλέγουμε  $g \in C(W)$  τέτοιο ώστε

$$\|f - g\|_{L^p(W)} < \delta$$

Τότε

$$\begin{aligned} \|f^\varepsilon - f\|_{L^p(V)} &\leq \|f^\varepsilon - g^\varepsilon\|_{L^p(V)} + \|g^\varepsilon - g\|_{L^p(V)} + \|g - f\|_{L^p(V)} \\ &\leq 2\|f - g\|_{L^p(W)} + \|g^\varepsilon - g\|_{L^p(V)} \text{ από την (1.3.2)} \\ &\leq 2\delta + \|g^\varepsilon - g\|_{L^p(V)}. \end{aligned}$$

Επειδή  $g^\varepsilon \rightarrow g$  ομοιόμορφα στο  $V$ , έχουμε  $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \|f^\varepsilon - f\|_{L^p(V)} \leq 2\delta$ . Συνεπώς δείχτηκε και το (iv).

■

### 1.3.1 Προσέγγιση στο εσωτερικό από ομαλές συναρτήσεις

**Θεώρημα 1.3.2** Θεωρούμε  $u \in W^{k,p}(U)$  για κάποιο  $1 \leq p < \infty$  και θέτουμε

$$u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u \text{ στο } U_\varepsilon$$

Τότε

(i)  $u^\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon)$  για κάθε  $\varepsilon > 0$

και

(ii)  $u^\varepsilon \rightarrow u$  στον  $W_{loc}^{k,p}(U)$ , καθώς  $\varepsilon \rightarrow 0$

### Απόδειξη.

1. Η υπόθεση (i) αποδεικνύεται όπως στο Θεώρημα 1.3.1

2. Ισχυριζόμαστε ότι αν  $|\alpha| \leq k$ , τότε

$$D^\alpha u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * D^\alpha u \text{ στο } U_\varepsilon \quad (1.3.3)$$

δηλαδή ότι η κλασική  $\alpha$ -μερική παράγωγος της ομαλής συνάρτησης  $u^\varepsilon$  είναι η  $\varepsilon$ -ομαλοποίηση της  $\alpha$ -ασθενούς μερικής παραγώγου της  $u$ . Για να το επιβεβαιώσουμε, υπολογίζουμε για  $x \in U_\varepsilon$

$$\begin{aligned} D^\alpha u^\varepsilon(x) &= D^\alpha \int_U \eta_\varepsilon(x-y)u(y) dy \\ &= \int_U D_x^\alpha \eta_\varepsilon(x-y)u(y) dy \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_U D_y^\alpha \eta_\varepsilon(x-y)u(y) dy \end{aligned}$$

Για σταθερό  $x \in U_\varepsilon$  η συνάρτηση  $\phi(y) := \eta_\varepsilon(x-y)$  ανήκει στο  $C_c^\infty(U)$  και συνεπώς από τον ορισμό της  $\alpha$ -ασθενούς μερικής παραγώγου προκύπτει ότι

$$\int_U D_y^\alpha \eta_\varepsilon(x-y)u(y) dy = (-1)^{|\alpha|} \int_U \eta_\varepsilon(x-y)D^\alpha u(y) dy.$$

Έτσι

$$\begin{aligned} D^\alpha u^\varepsilon(x) &= (-1)^{|\alpha|+|\alpha|} \int_U \eta_\varepsilon(x-y)D^\alpha u(y) dy \\ &= [\eta_\varepsilon * D^\alpha u](x) \end{aligned}$$

που είναι η σχέση (1.3.3)

3. Διαλέγουμε τώρα ένα ανοιχτό σύνολο  $V \subset\subset U$ . Με βάση τη σχέση (1.3.3) και το προηγούμενο θεώρημα  $D^\alpha u^\varepsilon \rightarrow D^\alpha u$  στον  $L^p(V)$  καθώς  $\varepsilon \rightarrow 0$ , για κάθε  $|\alpha| \leq k$ . Συνεπώς

$$\|u^\varepsilon - u\|_{W^{k,p}(V)}^p = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u^\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(V)}^p \rightarrow 0$$

καθώς  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Αυτό αποδεικνύει το (ii).

■



### 1.3.2 Προσέγγιση από ομαλές συναρτήσεις

Σε αυτό το σημείο θα δείξουμε ότι μπορούμε να βρούμε ομαλές συναρτήσεις που να προσεγγίζουν τις συναρτήσεις του  $W^{k,p}(U)$  και όχι απλά του  $W_{loc}^{k,p}(U)$ . Ακόμα δεν κάνουμε καμία υπόθεση για την ομαλότητα του συνόρου  $\partial U$ .

**Θεώρημα 1.3.3** Υποθέτουμε ότι το  $U$  είναι φραγμένο και ότι  $u \in W^{k,p}(U)$  για κάποιο  $1 \leq p < \infty$ . Τότε υπάρχουν συναρτήσεις  $u_m \in C^\infty(U) \cap W^{k,p}(U)$  τέτοιες ώστε

$$u_m \rightarrow u \text{ στον } W^{k,p}(U)$$

**Παρατήρηση 1.3.1** Δεν υποθέσαμε ότι  $u_m \in C^\infty(\bar{U})$ . Με το σύνορο ασχολούμαστε στο επόμενο θεώρημα.

**Απόδειξη.** (Θεωρήματος)

1. Έχουμε  $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ , όπου

$$U_i := \{x \in U \mid \text{dist}(x, \partial U) > 1/i\} \quad (i = 1, 2, \dots)$$

Γράφουμε  $V_i := U_{i+3} - \bar{U}_{i+1}$ .

Διαλέγουμε επίσης ένα οποιοδήποτε ανοιχτό σύνολο  $V_0 \subset\subset U$  τέτοιο ώστε  $U = \bigcup_{i=0}^{\infty} V_i$ . Έστω τώρα  $\{\zeta_i\}_{i=0}^{\infty}$  μία ομαλή διαμέριση της μονάδας αντίστοιχη των  $\{V_i\}_{i=0}^{\infty}$ , δηλαδή τέτοια ώστε

$$\begin{cases} 0 \leq \zeta_i \leq 1, & \zeta_i \in C_c^\infty(V_i) \\ \sum_{i=0}^{\infty} \zeta_i = 1 & \text{στο } U \end{cases} \quad (1.3.4)$$

Στη συνέχεια διαλέγουμε τυχαία συνάρτηση  $u \in W^{k,p}(U)$ . Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.3.1  $\zeta_i u \in W^{k,p}(U)$  και  $\text{spt}(\zeta_i u) \subset V_i$ .

2. Έστω  $\delta > 0$ . Διαλέγουμε  $\varepsilon_i > 0$  τόσο μικρό ώστε  $u^i := \eta_{\varepsilon_i} * (\zeta_i u)$  να ικανοποιεί τα εξής:

$$\begin{cases} \|u^i - \zeta_i u\|_{W^{k,p}(U)} \leq \frac{\delta}{2^{i+1}} & (i = 0, 1, \dots) \\ \text{spt } u^i \subset W_i & (i = 1, \dots) \end{cases} \quad (1.3.5)$$

για  $W_i := U_{i+4} - \bar{U}_i \supset V_i$  ( $i = 1, \dots$ ).

3. Θέτουμε  $v := \sum_{i=0}^{\infty} u^i$ . Αυτή η συνάρτηση ανήκει στον  $C^\infty(U)$  αφού για κάθε ανοιχτό συνολο  $V \subset\subset U$  υπάρχουν το πολύ πεπερασμένα πολλοί μη μηδενικοί όροι στο άθροισμα. Επειδή ισχύει και ότι  $u = \sum_{i=0}^{\infty} \zeta_i u$ , έχουμε για κάθε  $V \subset\subset U$

$$\begin{aligned} \|v - u\|_{W^{k,p}(V)} &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \|u^i - \zeta_i u\|_{W^{k,p}(U)} \\ &\leq \delta \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} \text{ από την (1.3.5)} \\ &= \delta. \end{aligned}$$

Παίρνουμε το supremum ως προς σύνολα  $V \subset\subset U$ , για να καταλήξουμε ότι

$$\|v - u\|_{W^{k,p}(U)} \leq \delta.$$

■

### 1.3.3 Ολική προσέγγιση από ομαλές συναρτήσεις

**Θεώρημα 1.3.4** Έστω ότι το  $U$  είναι φραγμένο και το  $\partial U$  είναι  $C^1$ . Έστω, ακόμα,  $u \in W^{k,p}(U)$  για κάποιον  $1 \leq p < \infty$ . Τότε, υπάρχουν συναρτήσεις  $u_m \in C^\infty(\bar{U})$  τέτοιες ώστε

$$u_m \rightarrow u \text{ στον } W^{k,p}(U)$$

**Απόδειξη.**

1. Σταθεροποιούμε ένα σημείο  $x^0 \in \partial U$ . Επειδή το  $\partial U$  είναι  $C^1$ , υπάρχει ακτίνα  $r > 0$  και  $C^1$  συνάρτηση  $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε - ύστερα από αλλαγή των αξόνων, αν χρειαστεί - να έχουμε

$$U \cap B(x^0, r) = \{x \in B(x^0, r) \mid x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\}.$$

Θέτουμε  $V := U \cap B(x^0, r/2)$ .

2. Ορίζουμε το μετατοπισμένο σημείο

$$x^\varepsilon := x + \lambda \varepsilon e_n \quad (x \in V, \varepsilon > 0)$$

και παρατηρούμε ότι για κάποιο σταθερό, επαρκώς μεγάλο αριθμό  $\lambda > 0$  η μπάλα  $B(x^\varepsilon, \varepsilon)$  βρίσκεται μέσα στο  $U \cap B(x^0, r)$  για κάθε  $x \in V$  και όλα τα μικρά  $\varepsilon > 0$ .

Ορίζουμε στη συνέχεια την  $u_\varepsilon(x) := u(x^\varepsilon)$  ( $x \in V$ ). Η συνάρτηση αυτή είναι η  $u$  μετατοπισμένη

κατά απόσταση  $\lambda\varepsilon$  στη κατεύθυνση του  $e_n$ . Έπειτα, ορίζουμε τη  $v^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u^\varepsilon$ . Η ιδέα είναι ότι μετακινηθήκαμε τόσο ώστε “να υπάρχει χώρος να ομαλοποιήσουμε μέσα στο  $U$ ”. Εμφανώς,  $v^\varepsilon \in C^\infty(\bar{V})$ .

3. Ισχυριζόμαστε τώρα ότι

$$v^\varepsilon \rightarrow u \quad \text{στον } W^{k,p}(V) \quad (1.3.6)$$

Για να το επιβεβαιώσουμε, παίρνουμε οποιοδήποτε  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  τέτοιο ώστε  $|\alpha| \leq k$ . Τότε

$$\|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(V)} \leq \|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u_\varepsilon\|_{L^p(V)} + \|D^\alpha u_\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(V)}.$$

Ο δεύτερος όρος στα δεξιά τείνει στο μηδέν μαζί με το  $\varepsilon$  καθώς η μεταφορά είναι συνεχής στην  $L^p$ -νόρμα. Ο πρώτος όρος επίσης εξαφανίζεται στο όριο με σκεπτικό παρόμοιο με αυτό στην απόδειξη του Θεωρήματος 1.3.2.

4. Επιλέγουμε  $\delta > 0$ . Επειδή το  $\partial U$  είναι συμπαγές, μπορούμε να βρούμε πεπερασμένο πλήθος σημείων  $x_i^0 \in \partial U$ , ακτίνες  $r_i > 0$ , αντίστοιχα σύνολα  $V_i = U \cap B(x_i^0, \frac{r_i}{2})$  και συναρτήσεις  $v_i \in C^\infty(\bar{V}_i)$  ( $i = 1, \dots, N$ ) τέτοια ώστε  $\partial U \subset \bigcup_{i=1}^N B^0(x_i^0, \frac{r_i}{2})$  και

$$\|v_i - u\|_{W^{k,p}(V_i)} \leq \delta \quad (1.3.7)$$

Παίρνουμε ένα ανοιχτό σύνολο  $V_0 \subset\subset U$  τέτοιο ώστε  $U \subset \bigcup_{i=0}^N V_i$  και διαλέγουμε, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.3.2, μία συνάρτηση  $v_0 \in C^\infty(\bar{V}_0)$  που ικανοποιεί

$$\|v_0 - u\|_{W^{k,p}(V_0)} \leq \delta. \quad (1.3.8)$$

5. Έστω τώρα  $\{\zeta_i\}_{i=0}^N$  μία ομαλή διαμέριση της μονάδας αντίστοιχη των ανοιχτών συνόλων  $\{V_i\}_{i=0}^N$  στο  $U$ . Ορίζουμε  $v := \sum_{i=0}^N \zeta_i v_i$ . Τότε εμφανώς  $v \in C^\infty(\bar{U})$ . Επιπλέον, επειδή  $u = \sum_{i=0}^N \zeta_i u$ , βλέπουμε χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.3.1 ότι για κάθε  $|\alpha| \leq k$ :

$$\begin{aligned} \|D^\alpha v - D^\alpha u\|_{L^p(U)} &\leq \sum_{i=0}^N \|D^\alpha(\zeta_i v_i) - D^\alpha(\zeta_i u)\|_{L^p(V_i)} \\ &\leq C \sum_{i=0}^N \|v_i - u\|_{W^{k,p}(V_i)} = CN\delta, \end{aligned}$$

με βάση τις (1.3.7) και (1.3.8).

■

## 1.4 Επεκτάσεις

Στο παρακάτω θεώρημα προσπαθούμε να επεκτείνουμε συναρτήσεις του χώρου  $W^{1,p}(U)$  ώστε να γίνουν συναρτήσεις του χώρου  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ . Αυτό χρειάζεται ειδική μεταχείριση, γιατί το να επεκτείνουμε τέτοιες συναρτήσεις με τρόπο που απλά να είναι μηδεν στο  $\mathbb{R}^n - U$  θα μπορούσε να οδηγήσει σε πολύ μεγάλη ασυνέχεια στο σύνορο  $\partial U$  σε βαθμό που η επεκτεταμένη συνάρτηση να μην έχει πλέον ασθενή μερική παράγωγο πρώτης τάξης.

**Θεώρημα 1.4.1** (Θεώρημα Επέκτασης). Έστω το  $U$  είναι φραγμένο, το  $\partial U \in C^1$  και

$1 \leq p \leq \infty$ . Επιλέγουμε ένα φραγμένο ανοιχτό σύνολο  $V$  τέτοιο ώστε  $U \subset \subset V$ . Τότε, υπάρχει φραγμένος γραμμικός τελεστής

$$E : W^{1,p}(U) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \quad (1.4.1)$$

τέτοιος ώστε για κάθε  $u \in W^{1,p}(U)$ :

(i)  $Eu = u$  σχεδόν παντού στο  $U$

(ii) Η  $Eu$  έχει φορέα στο  $V$

και

(iii)

$$\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)},$$

όπου η σταθερά  $C$  εξαρτάται μόνο από τα  $p, U$  και  $V$ .

**Ορισμός 1.4.1** Ονομάζουμε την  $Eu$  επέκταση του  $u$  στο  $\mathbb{R}^n$

**Απόδειξη.**

1. Σταθεροποιούμε ένα  $x^0 \in \partial U$  και θεωρούμε αρχικά ότι

$$\text{το } \partial U \text{ είναι επίπεδο κοντά στο } x^0 \text{ και βρίσκεται στο επίπεδο } \{x_n = 0\} \quad (1.4.2)$$

Έτσι μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει ανοιχτή μπάλα  $B$  με κέντρο το  $x^0$  και ακτίνα  $r$  τέτοια ώστε

$$\begin{cases} B^+ := B \cap \{x_n \geq 0\} \subset \bar{U} \\ B^- := B \cap \{x_n \leq 0\} \subset \mathbb{R}^n - U \end{cases}$$

2. Προσωρινά υποθέτουμε ακόμα ότι  $u \in C^\infty(\bar{U})$ . Στη συνέχεια ορίζουμε

$$\bar{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{αν } x \in B^+ \\ -3u(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) + 4u(x_1, \dots, x_{n-1}, -\frac{x_n}{2}) & \text{αν } x \in B^- \end{cases} \quad (1.4.3)$$

Αυτή ονομάζεται μία μεγάλης τάξης αντανάκλαση του  $u$  από το  $B^+$  στο  $B^-$ .

3. Ισχυριζόμαστε ότι

$$\bar{u} \in C^1(B). \quad (1.4.4)$$

Για να το ελέγξουμε, γράφουμε  $u^- := \bar{u}|_{B^-}$ ,  $u^+ := \bar{u}|_{B^+}$ . Δείχνουμε πρώτα ότι

$$u_{x_n}^- = u_{x_n}^+ \text{ στο } \{x_n = 0\} \quad (1.4.5)$$

Πράγματι, σύμφωνα με την (1.4.3),

$$\frac{\partial u^-}{\partial x_n}(x) = 3 \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) - 2 \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, -\frac{x_n}{2})$$

και άρα

$$u_{x_n}^-|_{\{x_n=0\}} = u_{x_n}^+|_{\{x_n=0\}}.$$

Αυτό επιβεβαιώνει την (1.4.5). Επιπλέον, επειδή  $u^+ = u^-$  στο  $\{x_n = 0\}$  βλέπουμε ότι

$$u_{x_i}^-|_{\{x_n=0\}} = u_{x_i}^+|_{\{x_n=0\}} \quad (1.4.6)$$

για  $i = 1, \dots, n-1$ . Τότε όμως οι (1.4.5) και (1.4.6) συνεπάγονται ότι

$$D^\alpha u^-|_{\{x_n=0\}} = D^\alpha u^+|_{\{x_n=0\}}$$

για κάθε  $|\alpha| \leq 1$  και έτσι προκύπτει η (1.4.4).

4. Χρησιμοποιώντας αυτούς τους υπολογισμούς βλέπουμε ότι

$$\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(B)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(B^+)} \quad (1.4.7)$$

για κάποια σταθερά  $C$  που δεν εξαρτάται από τη  $u$ .

5. Στη συνέχεια, εξετάζουμε την περίπτωση που το σύνορο  $\partial U$  δεν είναι κατ'ανάγκη επίπεδο κοντά στο  $x^0$ . Δεδομένου όμως ότι είναι  $C^1$ , μπορούμε να βρούμε μία  $C^1$  απεικόνιση  $\Phi$ , με αντίστροφη

$\Psi$ , τέτοια ώστε η  $\Phi^{-1}$  να ισιώνει το  $\partial U$  κοντά στο  $x^0$ .

Γράφουμε  $y = \Phi(x)$ ,  $x = \Psi(y)$ ,  $u'(y) := u(\Psi(y))$ . Διαλέγουμε μία μικρή μπάλα  $B$  όπως πριν. Τότε, χρησιμοποιώντας τα βήματα 1-3, επεκτείνουμε τη  $u'$  από το  $B^+$  σε μία συνάρτηση  $\bar{u}'$  που είναι ορισμένη σε όλη τη  $B$ , τέτοια ώστε η  $\bar{u}'$  να είναι  $C^1$  και έχουμε την εκτίμηση

$$\|\bar{u}'\|_{W^{1,p}(B)} \leq C \|u'\|_{W^{1,p}(B^+)}.$$

Έστω  $W := \Psi(B)$ . Τότε, επιστρέφοντας στις  $x$ -μεταβλητές, παίρνουμε μία επέκταση  $\bar{u}$  της  $u$  στο  $W$  με

$$\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(W)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(U)}. \quad (1.4.8)$$

6. Επειδή το  $\partial U$  είναι συμπαγές, υπάρχουν πεπερασμένα πολλά σημεία  $x_i^0 \in \partial U$ , ανοιχτά σύνολα  $W_i$  και επεκτάσεις  $\bar{u}_i$  της  $u$  στο  $W_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ), όπως παραπάνω, τέτοια ώστε  $\Gamma \subset \bigcup_{i=1}^N W_i$ . Παίρνουμε  $W_0 \subset\subset U$  τέτοιο ώστε  $U \subset \bigcup_{i=0}^N W_i$  και θεωρούμε  $\{\zeta_i\}_{i=0}^N$  μία αντίστοιχη διαμέριση της μονάδας. Γράφουμε  $\bar{u} := \sum_{i=0}^N \zeta_i \bar{u}_i$ , όπου  $\bar{u}_0 = u$ . Τότε, χρησιμοποιώντας την εκτίμηση (1.4.8) (με  $u_i$  στη θέση του  $u$  και  $\bar{u}_i$  στη θέση του  $\bar{u}$ ) παίρνουμε το φράγμα

$$\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(U)} \quad (1.4.9)$$

για κάποια σταθερά  $C$  που εξαρτάται μόνο από τα  $U, p, n$  κλπ αλλά όχι από τη  $u$ . Επιπλέον, μπορούμε να φροντίσουμε ώστε ο φορέας της  $\bar{u}$  να βρίσκεται μέσα στο  $V \supset\supset U$ .

7. Μπορούμε πλέον να γράψουμε  $Eu := \bar{u}$  και παρατηρούμε ότι η απεικόνιση  $u \mapsto Eu$  είναι γραμμική.

Σημειώνουμε ότι μέχρι στιγμής είχαμε υποθέσει ότι η  $u \in C^\infty(\bar{U})$ . Υποθέτουμε τώρα ότι  $u \in W^{1,p}(U)$  και διαλέγουμε  $u_m \in C^\infty(\bar{U})$  που να συγκλίνουν στην  $u$  στο  $W^{1,p}(U)$ . Η εκτίμηση (1.4.9) και η γραμμικότητα του  $E$  συνεπάγονται ότι

$$\|Eu_m - Eu_l\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u_m - u_l\|_{W^{1,p}(U)}.$$

Απ'αυτό προκύπτει ότι η  $\{Eu_m\}_{m=1}^\infty$  είναι ακολουθία Cauchy και άρα συγκλίνει στο  $\bar{u} := Eu$ . Αυτή η επέκταση, που δεν εξαρτάται από την επιλογή της προσεγγίζουσας ακολουθίας  $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ , ικανοποιεί τα συμπεράσματα του θεωρήματος.

■

**Παρατηρήσεις 1.4.1** (i) Ας υποθέσουμε τώρα ότι το  $\partial U$  είναι  $C^2$ . Τότε, ο τελεστής επέκτασης που κατασκευάστηκε παραπάνω είναι επίσης ένας φραγμένος, γραμμικός τελεστής από τον  $W^{2,p}(U)$  στον  $W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ . Για να το δούμε αυτό, παρατηρούμε πρώτα ότι στα βήματα 3-4 της απόδειξης, παρ'όλο που η  $\bar{u}$  δεν είναι γενικά  $C^2$ , ανήκει στον  $W^{2,p}(B)$ . Έχουμε επιπλέον το φράγμα

$$\|\bar{u}\|_{W^{2,p}(B)} \leq C\|u\|_{W^{2,p}(B^+)},$$

που προκύπτει από τον ορισμό της (1.4.3). Όπως πριν, εξάγουμε την εκτίμηση

$$\|Eu\|_{W^{2,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{2,p}(U)}, \quad (1.4.10)$$

δεδομένου ότι το  $\partial U$  είναι  $C^2$ . Οι σταθερές  $C$  εξαρτώνται μόνο από τα  $U, V, n$  και  $p$ .

Θα χρειαστούμε αυτές τις παρατηρήσεις αργότερα.

(ii) Η παραπάνω κατασκευή δεν μας παρέχει επέκταση των χώρων Sobolev  $W^{k,p}(U)$  για  $k > 2$ .

## 1.5 Ίχνη

Σε αυτή την ενότητα ορίζουμε τον τελεστή ίχνους, για να μπορέσουμε να δώσουμε τιμές στο σύνορο σε μία συνάρτηση  $u \in W^{1,p}(U)$  δεδομένου ότι το  $\partial U$  είναι  $C^1$ . Ο λόγος που χρειάζεται να ορίσουμε έναν τέτοιο τελεστή είναι ότι στις περισσότερες περιπτώσεις μία συνάρτηση του  $W^{1,p}(U)$  δεν είναι γενικά συνεχής και, ακόμα χειρότερα, ορίζεται σχεδόν παντού μόνο στο  $U$  και όχι και στο συνορό του και δεδομένου ότι το  $\partial U$  έχει  $n$ -διάστατο μέτρο Lebesgue μηδέν η έκφραση “ η  $u$  περιορισμένη στο  $\partial U$  ” δεν έχει κάποιο νόημα.

Σε όλη την ενότητα θεωρούμε ότι  $1 \leq p < \infty$ .

**Θεώρημα 1.5.1** Έστω ότι το  $U$  είναι φραγμένο και ότι το  $\partial U$  είναι  $C^1$ . Τότε υπάρχει ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής

$$T : W^{1,p}(U) \rightarrow L^p(\partial U)$$

τέτοιος ώστε

(i)  $Tu = u|_{\partial U}$  αν  $u \in W^{1,p}(U) \cap C(\bar{U})$

και

(ii)

$$\|Tu\|_{L^p(\partial U)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$$

για κάθε  $u \in W^{1,p}(U)$ , με τη σταθερά  $C$  να εξαρτάται μόνο από τα  $p$  και  $U$ .

**Ορισμός 1.5.1** Καθούμε τον  $Tu$  ίχνος της  $u$  στο  $\partial U$ .

**Απόδειξη.**

1. Θεωρούμε αρχικά ότι  $u \in C^1(\bar{U})$ . Όπως στο πρώτο κομμάτι της απόδειξης του Θεωρήματος 1.4.1, θεωρούμε αρχικά ότι για  $x^0 \in \partial U$  το  $\partial U$  είναι επίπεδο κοντά σε αυτό και ότι ανήκει στο επίπεδο  $\{x_n = 0\}$ . Διαλέγουμε μία ανοιχτή μπάλα  $B$  όπως στην προηγούμενη απόδειξη και θέτουμε  $\hat{B}$  την ομόκεντρη μπάλα με ακτίνα  $r/2$ .

Διαλέγουμε  $\zeta \in C_c^\infty(B)$  με  $\zeta \geq 0$  στο  $B$ ,  $\zeta \equiv 1$  στο  $\hat{B}$ . Συμβολίζουμε με  $\Gamma$  το μέρος του  $\partial U$  μέσα στο  $\hat{B}$ . Θέτουμε  $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} = \{x_n = 0\}$ .

Τότε

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} |u|^p dx' &\leq \int_{\{x_n=0\}} \zeta |u|^p dx' = - \int_{B^+} (\zeta |u|^p)_{x_n} dx \\ &= - \int_{B^+} |u|^p \zeta_{x_n} + p |u|^{p-1} (\text{sgn } u) u_{x_n} \zeta dx \\ &\leq C \int_{B^+} |u|^p + |Du|^p dx \end{aligned} \quad (1.5.1)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την *ανισότητα του Young*, σύμφωνα με την οποία

για  $1 < p, q < \infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (a, b > 0).$$

2. Αν  $x^0 \in \partial U$  αλλά το  $\partial U$  δεν είναι επίπεδο κοντά στο  $x^0$ , "ισιώνουμε" ως συνήθως το σύνορο γύρω από το  $x^0$  για να έχουμε την παραπάνω σύνθεση. Εφαρμόζουμε την εκτίμηση (1.5.1) και, αλλάζοντας μεταβλητές, αποκτάμε το παρακάτω φράγμα

$$\int_{\Gamma} |u|^p dS \leq C \int_U |u|^p + |Du|^p dx,$$

όπου το  $\Gamma$  είναι κάποιο ανοιχτό υποσύνολο του  $\partial U$  που περιέχει το  $x^0$ .



3. Επειδή το  $\partial U$  είναι συμπαγές, υπάρχουν πεπερασμένα πολλά σημεία  $x_i^0 \in \partial U$  και ανοιχτά υποσύνολα  $\Gamma_i \subset \partial U$  ( $i = 1, \dots, N$ ) τέτοια ώστε  $\partial U = \bigcup_{i=1}^N \Gamma_i$  και

$$\|u\|_{L^p(\Gamma_i)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)} \quad (i = 1, \dots, N).$$

Συνεπώς, αν γράψουμε

$$Tu := u|_{\partial U},$$

τότε

$$\|Tu\|_{L^p(\partial U)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)} \quad (1.5.2)$$

για κάποια κατάλληλη σταθερά  $C$  που δεν εξαρτάται από την  $u$ .

4. Η ανισότητα (1.5.2) ισχύει για  $u \in C^1(\bar{U})$ . Ας θεωρήσουμε τώρα ότι  $u \in W^{1,p}(U)$ . Τότε, υπάρχουν συναρτήσεις  $u_m \in C^\infty(\bar{U})$  που συγκλίνουν στη  $u$  στον  $W^{1,p}(U)$ . Σύμφωνα με την (1.5.2) έχουμε ότι

$$\|Tu_m - Tu_l\|_{L^p(\partial U)} \leq C\|u_m - u_l\|_{W^{1,p}(U)} \quad (1.5.3)$$

και άρα η  $\{Tu_m\}_{m=1}^\infty$  είναι ακολουθία Cauchy στον  $L^p(\partial U)$ . Ορίζουμε

$$Tu := \lim_{m \rightarrow \infty} Tu_m,$$

όπου το όριο το παίρνουμε στον  $L^p(\partial U)$ . Σύμφωνα με την (1.5.3) αυτός ο ορισμός δεν εξαρτάται από την επιλογή των ομαλών συναρτήσεων που προσεγγίζουν τη  $u$ .

Τελικά, αν  $u \in W^{1,p}(U) \cap C(\bar{U})$ , παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις  $u_m \in C^\infty(\bar{U})$  που κατασκευάστηκαν στην απόδειξη του Θεωρήματος 1.3.4 συγκλίνουν ομοιόμορφα στη  $u$  στο  $\bar{U}$ . Έτσι τελικά,  $Tu = u|_{\partial U}$ .

■

**Θεώρημα 1.5.2** Έστω το  $U$  είναι φραγμένο και το  $\partial U$  είναι  $C^1$ . Υποθέτουμε επίσης ότι  $u \in W^{1,p}(U)$ .

Τότε

$$u \in W_0^{1,p}(U) \text{ αν και μόνο αν } Tu = 0 \text{ στο } \partial U \quad (1.5.4)$$

**Απόδειξη.**

1. Έστω  $u \in W_0^{1,p}(U)$ . Τότε εξ ορισμού υπάρχουν συναρτήσεις  $u_m \in C_c^\infty(U)$  τέτοιες ώστε

$$u_m \rightarrow u \text{ στο } W^{1,p}(U)$$

Επειδή  $Tu_m = 0$  στο  $\partial U$  ( $m = 1, \dots$ ) και ο  $T : W^{1,p}(U) \rightarrow L^p(\partial U)$  είναι ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής, συμπεραίνουμε ότι  $Tu = 0$  στο  $\partial U$ .

2. Για το αντίστροφο υποθέτουμε ότι

$$Tu = 0 \text{ στο } \partial U. \quad (1.5.5)$$

Χρησιμοποιώντας διαμέριση της μονάδας και κάνοντας το  $\partial U$  πιο επίπεδο ως συνήθως, μπορούμε επίσης να υποθέσουμε

$$\begin{cases} u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n), \text{ η } u \text{ έχει συμπαγή φορέα στο } \bar{\mathbb{R}}_+^n, \\ Tu = 0 \text{ στο } \partial\mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}^{n-1}. \end{cases} \quad (1.5.6)$$

Τότε, επειδή  $Tu = 0$  στο  $\mathbb{R}^{n-1}$ , υπάρχουν συναρτήσεις  $u_m \in C^1(\bar{\mathbb{R}}_+^n)$  τέτοιες ώστε

$$u_m \rightarrow u \text{ στον } W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n) \quad (1.5.7)$$

και

$$Tu_m = u_m|_{\mathbb{R}^{n-1}} \rightarrow 0 \text{ στον } L^p(\mathbb{R}^{n-1}). \quad (1.5.8)$$

Τώρα, αν  $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ ,  $x_n \geq 0$ , έχουμε

$$|u_m(x', x_n)| \leq |u_m(x', 0)| + \int_0^{x_n} |u_{m,x_n}(x', t)| dt.$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_m(x', x_n)|^p dx' &\leq C \left( \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_m(x', 0)|^p dx' \right. \\ &\quad \left. + x_n^{p-1} \int_0^{x_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du_m(x', t)|^p dx' dt \right). \end{aligned}$$

Για  $m \rightarrow \infty$  συμπεραίνουμε από τις (1.5.7) και (1.5.8) ότι

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x', x_n)|^p dx' \leq C x_n^{p-1} \int_0^{x_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du|^p dx' dt \quad (1.5.9)$$

για σχεδόν κάθε  $x_n > 0$ .

3. Στη συνέχεια επιλέγουμε  $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R})$  που να ικανοποιεί τα

$$\zeta \equiv 1 \text{ στο } [0, 1], \zeta \equiv 0 \text{ στο } \mathbb{R} - [0, 2], 0 \leq \zeta \leq 1$$

και γράφουμε

$$\begin{cases} \zeta_m(x) := \zeta(mx_n) & (x \in \mathbb{R}_+^n) \\ w_m := u(x)(1 - \zeta_m) \end{cases}$$

Τότε

$$\begin{cases} w_{m,x_n} = u_{x_n}(1 - \zeta_m) - m u \zeta' \\ D_{x'} w_m = D_{x'} u (1 - \zeta_m). \end{cases}$$

Κατά συνέπεια

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^n} |Dw_m - Du|^p dx &\leq C \int_{\mathbb{R}_+^n} |\zeta_m|^p |Du|^p dx \\ &+ Cm^p \int_0^{2/m} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u|^p dx' dt \\ &=: A + B. \end{aligned} \tag{1.5.10}$$

Τώρα

$$A \rightarrow 0 \text{ καθώς } m \rightarrow \infty \tag{1.5.11}$$

αφού  $\zeta_m \neq 0$  μόνο αν  $0 \leq x_n \leq 2/m$ . Για να εκτιμήσουμε τον όρο  $B$ , χρησιμοποιούμε την ανισότητα (1.5.9) :

$$\begin{aligned} B &\leq Cm^p \left( \int_0^{2/m} t^{p-1} dt \right) \left( \int_0^{2/m} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du|^p dx' dx_n \right) \\ &\leq C \int_0^{2/m} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du|^p dx' dx_n \rightarrow 0 \text{ καθώς } m \rightarrow \infty \end{aligned} \tag{1.5.12}$$

Χρησιμοποιώντας τις ανισότητες (1.5.10)–(1.5.12) συμπεραίνουμε ότι  $Dw_m \rightarrow Du$  στον  $L^p(\mathbb{R}_+^n)$ .

Επειδή εμφανώς και  $w_m \rightarrow u$  στον  $L^p(\mathbb{R}_+^n)$  καταλήγουμε ότι

$$w_m \rightarrow u \text{ στον } W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n).$$

Ισχύει όμως ότι  $w_m = 0$  αν  $0 < x_n < 1/m$ . Μπορούμε, άρα, να ομαλοποιήσουμε τις  $w_m$  για να παράξουμε συναρτήσεις  $u_m \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^n)$  τέτοιες ώστε  $u_m \rightarrow u$  στον  $W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$ . Ως εκ τούτου,  $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$ .

■

## 1.6 Ανισότητες Sobolev

Σε αυτή την ενότητα θα δούμε τις Ανισότητες Sobolev οι οποίες βρίσκουν εφαρμογή σε αρκετά από τα Θεωρήματα των επόμενων ενοτήτων, όπως στη θεωρία για το Μη-Γραμμικό Ελλειπτικό Πρόβλημα.

### 1.6.1 Ανισότητα Gagliardo-Nirenberg-Sobolev

Σε αυτή την υποενότητα θεωρούμε ότι

$$1 \leq p < n \quad (1.6.1)$$

και προσπαθούμε να βρούμε κάποια εκτίμηση της μορφής

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad (1.6.2)$$

για συγκεκριμένες σταθερές  $C > 0$ ,  $1 \leq q < \infty$ , και όλες τις συναρτήσεις  $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Αυτό που έχει σημασία σε αυτή τη διαδικασία είναι οι σταθερές  $C, q$  να μην εξαρτώνται από τη  $u$ .

**Κίνητρο.** Δείχνουμε ότι για οποιαδήποτε ανισότητα της μορφής της (1.6.2), ο αριθμός  $q$  δεν μπορεί να είναι αυθαίρετος, αλλά αντίθετα έχει πολύ συγκεκριμένη μορφή. Για να το δείξουμε, διαλέγουμε  $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $u \not\equiv 0$  και ορίζουμε για  $\lambda > 0$  την ανακλιμακωμένη συνάρτηση

$$u_\lambda(x) := u(\lambda x) \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

Εφαρμόζοντας την (1.6.2) στη  $u_\lambda$ , βρίσκουμε:

$$\|u_\lambda\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Du_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.6.3)$$

Έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_\lambda|^q dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u(\lambda x)|^q dx = \frac{1}{\lambda^n} \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^q dy$$

και

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Du_\lambda|^p dx = \lambda^p \int_{\mathbb{R}^n} |Du(\lambda x)|^p dx = \frac{\lambda^p}{\lambda^n} \int_{\mathbb{R}^n} |Du(y)|^p dy$$

Εισάγοντας αυτές τις ισότητες στην (1.6.3), ανακαλύπτουμε ότι

$$\frac{1}{\lambda^{n/q}} \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \frac{\lambda}{\lambda^{n/p}} \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

και άρα

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \lambda^{1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q}} \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.6.4)$$

Τότε όμως, αν  $1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} \neq 0$ , στέλνοντας το  $\lambda$  είτε στο 0 είτε στο  $\infty$  στην (1.6.4), πέφτουμε σε αντίφαση. Έτσι, αν η ανισότητα (1.6.2) όντως ισχύει, πρέπει οπωσδήποτε να έχουμε  $1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} = 0$ , δηλαδή  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$  και άρα  $q = \frac{np}{n-p}$ .

**Ορισμός 1.6.1** Αν  $1 \leq p < n$ , ο Sobolev συζυγής του  $p$  είναι ο

$$p^* := \frac{np}{n-p} \quad (1.6.5)$$

όπου παρατηρούμε πως

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}, \quad p^* > p \quad (1.6.6)$$

**Παρατήρηση 1.6.1** Η προηγούμενη ανάλυση δείχνει ότι η εκτίμηση (1.6.2) μπορεί να ισχύει μόνο για  $q = p^*$ .

**Θεώρημα 1.6.1** (Ανισότητα Gagliardo-Nirenberg-Sobolev). Έστω  $1 \leq p < n$ . Υπάρχει σταθερά  $C$  που εξαρτάται μόνο από τα  $n$  και  $p$  τέτοια ώστε

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad (1.6.7)$$

για όλες τις  $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$

**Παρατήρηση 1.6.2** Το γεγονός ότι η  $u$  έχει συμπαγή φορέα είναι απαραίτητο στην (1.6.7), όπως δείχνει το παράδειγμα  $u \equiv 1$ . Η σταθερά  $C$  όμως δεν εξαρτάται καθόλου από το μέγεθος του φορέα της  $u$ .

**Απόδειξη.**

1. Αρχικά υποθέτουμε ότι  $p = 1$ .

Επειδή η  $u$  έχει συμπαγή φορέα, για κάθε  $i = 1, \dots, n$  και  $x \in \mathbb{R}^n$ , έχουμε

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} u_{x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n) dy_i,$$

και άρα

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)| dy_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

Ως εκ τούτου

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{i=1}^n \left( \int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}}. \quad (1.6.8)$$

Ολοκληρώνουμε αυτή την ανισότητα ως προς  $x_1$ :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n \left( \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\ &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=2}^n \left( \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\ &\leq \left( \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \left( \prod_{i=2}^n \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dx_1 dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}}, \end{aligned} \quad (1.6.9)$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από την *Ανισότητα Hölder* σύμφωνα με την οποία για  $1 \leq p, q \leq \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  και  $u \in L^p(U), v \in L^q(U)$  ισχύει ότι

$$uv \in L^1(U) \quad \text{με} \quad \int_U |uv| dx \leq \|u\|_{L^p(U)} \|v\|_{L^q(U)}.$$

Ολοκληρώνουμε τώρα την (1.6.9) ως προς  $x_2$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 dx_2 \leq \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dx_1 dy_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^n I_i^{\frac{1}{n-1}} dx_2,$$

για

$$I_1 := \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dy_1, \quad I_i := \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dx_1 dy_i \quad (i = 3, \dots, n).$$

Εφαρμόζοντας για άλλη μια φορά τη *Γενικευμένη Ανισότητα Hölder*, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 dx_2 &\leq \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dx_1 dy_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dy_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \\ &\quad \cdot \prod_{i=3}^n \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dx_1 dx_2 dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}}. \end{aligned}$$

Συνεχίζουμε ολοκληρώνοντας ως προς  $x_3, \dots, x_n$  για να βρούμε τελικά

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx &\leq \prod_{i=1}^n \left( \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} |Du| dx_1 \dots dy_i \dots dx_n \right)^{\frac{1}{n-1}} \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} |Du| dx \right)^{\frac{n}{n-1}}. \end{aligned} \quad (1.6.10)$$

Αυτή είναι η ζητούμενη ανισότητα (1.6.7) για  $p = 1$ .

2. Θεωρούμε τώρα την περίπτωση  $1 < p < n$ . Εφαρμόζουμε την εκτίμηση (1.6.10) στη  $v := |u|^\gamma$  για  $\gamma > 1$  που επιλέγουμε. Τότε

$$\begin{aligned} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{\gamma n}{n-1}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |D|u|^\gamma| dx = \gamma \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\gamma-1} |Du| dx \\ &\leq \gamma \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned} \quad (1.6.11)$$

Διαλέγουμε  $\gamma$  τέτοιο ώστε  $\frac{\gamma n}{n-1} = (\gamma-1)\frac{p}{p-1}$ . Με αυτό τον τρόπο έχουμε

$$\gamma = \frac{p(n-1)}{n-p} > 1$$

και σε αυτή την περίπτωση  $\frac{\gamma n}{n-1} = (\gamma-1)\frac{p}{p-1} = \frac{np}{n-p} = p^*$ . Έτσι, λόγω και της (1.6.2), η εκτίμηση (1.6.11) γίνεται

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq C \left( \int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

■

**Θεώρημα 1.6.2** (Εκτιμήσεις για τον  $W^{1,p}$ ,  $1 \leq p < n$ ). Έστω  $U$  ένα φραγμένο, ανοιχτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^n$  και έστω ότι το  $\partial U$  είναι  $C^1$ . Έστω  $1 \leq p < n$  και  $u \in W^{1,p}(U)$ . Τότε  $u \in L^{p^*}(U)$  με την εκτίμηση

$$\|u\|_{L^{p^*}(U)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(U)}, \quad (1.6.12)$$

όπου η σταθερά  $C$  εξαρτάται μόνο από τα  $p, n$  και  $U$ .

**Απόδειξη.** Επειδή το  $\partial U$  είναι  $C^1$ , υπάρχει σύμφωνα με το Θεώρημα 1.4.1 μία επέκταση  $Eu = \bar{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  τέτοια ώστε

$$\begin{cases} \bar{u} = u \text{ στο } U, \text{ η } \bar{u} \text{ έχει συμπαγή φορέα, και} \\ \|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(U)}. \end{cases} \quad (1.6.13)$$

Επειδή η  $\bar{u}$  έχει συμπαγή φορέα, ξέρουμε από το Θεώρημα 1.3.2 ότι υπάρχουν συνάρτησεις  $u_m \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) τέτοιες ώστε

$$u_m \rightarrow \bar{u} \text{ στον } W^{1,p}(\mathbb{R}^n). \quad (1.6.14)$$

Σύμφωνα τώρα με το Θεώρημα 1.6.1,  $\|u_m - u_l\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Du_m - Du_l\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$  για όλα τα  $l, m \geq 1$ .

Ως εκ τούτου ισχύει ακόμα και ότι

$$u_m \rightarrow \bar{u} \text{ στον } L^{p^*}(\mathbb{R}^n) \quad (1.6.15)$$

Επειδή σύμφωνα με το Θεώρημα 1.6.1 ισχύει ακόμα ότι  $\|u_m\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|Du_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ , οι (1.6.14) και (1.6.15) οδηγούν στο εξής φράγμα:

$$\|\bar{u}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|D\bar{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Αυτή η ανισότητα και η (1.6.13) ολοκληρώνουν την απόδειξη. ■

**Θεώρημα 1.6.3** (Εκτιμήσεις για τον  $W_0^{1,p}$ ,  $1 \leq p < n$ ). Έστω  $U$  ένα φραγμένο, ανοιχτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^n$ . Έστω ακόμα  $u \in W_0^{1,p}(U)$  για κάποιο  $1 \leq p < n$ . Τότε, έχουμε την εκτίμηση

$$\|u\|_{L^q(U)} \leq C\|Du\|_{L^p(U)}$$

για κάθε  $q \in [1, p^*]$ , όπου η σταθερά  $C$  εξαρτάται μόνο από τα  $p, q, n, U$ .

**Παρατήρηση 1.6.3** Αυτή η εκτίμηση ονομάζεται συχνά *Ανισότητα Poincaré*.

**Απόδειξη.** Επειδή η  $u \in W_0^{1,p}(U)$ , υπάρχουν συναρτήσεις  $u_m \in C_c^\infty(U)$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) που συγκλίνουν στη  $u$  στον  $W^{1,p}(U)$ . Επεκτείνουμε κάθε συνάρτηση  $u_m$  έτσι ώστε να είναι 0 στον  $\mathbb{R}^n - \bar{U}$  και εφαρμόζουμε το Θεώρημα 1.6.1 για να δούμε ότι  $\|u\|_{L^{p^*}(U)} \leq C\|Du\|_{L^p(U)}$ . Επειδή  $|U| < \infty$ , έχουμε ακόμα ότι  $\|u\|_{L^q(U)} \leq C\|u\|_{L^{p^*}(U)}$  αν  $1 \leq q \leq p^*$ . ■

**Παρατήρηση 1.6.4** (i) Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.6.3, στον  $W_0^{1,p}(U)$  η νόρμα  $\|Du\|_{L^p(U)}$  είναι ισοδύναμη με τη  $\|u\|_{W^{1,p}(U)}$  αν το  $U$  είναι φραγμένο.

(ii) Για την περίπτωση  $p = n$ , επειδή  $p^* = \frac{np}{n-p} \rightarrow +\infty$  καθώς  $p \rightarrow n$ , θα περιμέναμε ότι  $u \in L^\infty(U)$  για  $u \in W^{1,n}(U)$ . Αυτό όμως δεν ισχύει αν  $n > 1$ . Για παράδειγμα, αν  $U = B^0(0, 1)$ , η συνάρτηση  $u = \log \log \left(1 + \frac{1}{|x|}\right)$  ανήκει στον  $W^{1,n}(U)$ , αλλά όχι στον  $L^\infty(U)$ .

## 1.6.2 Ανισότητα Morrey

Σε αυτή την υποενότητα θεωρούμε ότι

$$n < p < \infty \tag{1.6.16}$$

Θα δείξουμε ότι αν η  $u \in W^{1,p}(U)$ , τότε η  $u$  είναι στην πραγματικότητα Hölder συνεχής, ύστερα ίσως και από τον επαναορισμό της σε ένα σύνολο μέτρου 0.



**Θεώρημα 1.6.4** (Ανισότητα Morrey). Έστω  $n < p \leq \infty$ . Τότε υπάρχει μία σταθερά  $C$  που εξαρτάται μόνο από τα  $p$  και  $n$  τέτοια ώστε

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \quad (1.6.17)$$

για όλες τις  $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ , με

$$\gamma := 1 - n/p$$

**Απόδειξη.**

1. Αρχικά διαλέγουμε οποιαδήποτε μπάλα  $B(x, r) \subset \mathbb{R}^n$ .

Ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει μία σταθερά  $C$  που εξαρτάται μόνο από το  $n$  τέτοια ώστε

$$\int_{B(x,r)} |u(y) - u(x)| dy \leq C \int_{B(x,r)} \frac{|Du(y)|}{|y-x|^{n-1}} dy. \quad (1.6.18)$$

Για να το αποδείξουμε, σταθεροποιούμε ένα σημείο  $w \in \partial B(0, 1)$ . Τότε, αν  $0 < s < r$ ,

$$\begin{aligned} |u(x+sw) - u(x)| &= \left| \int_0^s \frac{d}{dt} u(x+tw) dt \right| \\ &= \left| \int_0^s Du(x+tw) \cdot w dt \right| \\ &\leq \int_0^s |Du(x+tw)| dt. \end{aligned}$$

Έτσι

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(0,1)} |u(x+sw) - u(x)| dS &\leq \int_0^s \int_{\partial B(0,1)} |Du(x+tw)| dS dt \\ &= \int_0^s \int_{\partial B(0,1)} |Du(x+tw)| \frac{t^{n-1}}{t^{n-1}} dS dt. \end{aligned}$$

Θέτουμε  $y = x + tw$  ώστε  $t = |x - y|$ . Τότε, μετατρέποντας από πολικές συντεταγμένες, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(0,1)} |u(x+sw) - u(x)| dS &\leq \int_{B(x,s)} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy \\ &\leq \int_{B(x,r)} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy. \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας με  $s^{n-1}$  και ολοκληρώνοντας από 0 μέχρι  $r$  ως προς  $s$  προκύπτει:

$$\int_{B(x,r)} |u(y) - u(x)| dy \leq \frac{r^n}{n} \int_{B(x,r)} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy$$

που είναι η (1.6.18).

2. Σταθεροποιούμε τώρα ένα  $x \in \mathbb{R}^n$ . Εφαρμόζουμε την ανισότητα (1.6.18) ως εξής:

$$\begin{aligned}
|u(x)| &\leq \int_{B(x,1)} |u(x) - u(y)| dy + \int_{B(x,1)} |u(y)| dy \\
&\leq C \int_{B(x,1)} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy + C \|u\|_{L^p(B(x,1))} \\
&\leq C \left( \int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p dy \right)^{1/p} \left( \int_{B(x,1)} \frac{dy}{|x-y|^{(n-1)\frac{p}{p-1}}} \right)^{\frac{p-1}{p}} + C \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned} \tag{1.6.19}$$

Η τελευταία εκτίμηση ισχύει αφού το  $p > n$  συνεπάγεται ότι  $(n-1)\frac{p}{p-1} < n$  και έτσι

$$\int_{B(x,1)} \frac{1}{|x-y|^{(n-1)\frac{p}{p-1}}} dy < \infty.$$

Αφού το  $x \in \mathbb{R}^n$  είναι αυθαίρετο, η ανισότητα (1.6.19) συνεπάγεται ότι

$$\sup_{\mathbb{R}^n} |u| \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \tag{1.6.20}$$

3. Στη συνέχεια, διαλέγουμε δύο τυχαία σημεία  $x, y \in \mathbb{R}^n$  και γράφουμε  $r := |x - y|$ . Έστω  $W := B(x, r) \cap B(y, r)$ . Τότε

$$|u(x) - u(y)| \leq \int_W |u(x) - u(z)| dz + \int_W |u(y) - u(z)| dz. \tag{1.6.21}$$

Η ανισότητα (1.6.18) μας επιτρέπει να κάνουμε την εξής εκτίμηση:

$$\begin{aligned}
\int_W |u(x) - u(z)| dz &\leq C \int_{B(x,r)} |u(x) - u(z)| dz \\
&\leq C \left( \int_{B(x,r)} |Du|^p dz \right)^{1/p} \left( \int_{B(x,r)} \frac{dz}{|x-z|^{(n-1)\frac{p}{p-1}}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq C \left( r^{n-(n-1)\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&= Cr^{1-\frac{n}{p}} \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned} \tag{1.6.22}$$

Όμοια

$$\int_W |u(y) - u(z)| dz \leq Cr^{1-\frac{n}{p}} \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Αντικαθιστώντας αυτή την εκτίμηση στις (1.6.21) και (1.6.22) προκύπτει

$$|u(x) - u(y)| \leq Cr^{1-\frac{n}{p}} \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = C|x-y|^{1-\frac{n}{p}} \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Έτσι,

$$[u]_{C^{0,1-n/p}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \neq y} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{1-n/p}} \right\} \leq C \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Αυτή η ανισότητα μαζί με την (1.6.20) ολοκληρώνουν την απόδειξη.

■

**Παρατήρηση 1.6.5** Μια μικρή παραλληλαγή της παραπάνω απόδειξης δίνει την εκτίμηση

$$|u(y) - u(x)| \leq Cr^{1-\frac{n}{p}} \left( \int_{B(x,2r)} |Du(z)|^p dz \right)^{1/p}$$

για όλες τις  $u \in C^1(B(x, 2r))$ ,  $y \in B(x, r)$ ,  $n < p < \infty$ . Με προσέγγιση βλέπουμε ότι το ίδιο φράγμα ισχύει και για  $u \in W^{1,p}(B(x, 2r))$ ,  $n < p < \infty$ .

**Ορισμός 1.6.2** Λέμε ότι η  $u^*$  είναι μία εκδοχή μιας δεδομένης συνάρτησης  $u$  αν

$$u = u^* \text{ σχεδόν παντού}$$

**Θεώρημα 1.6.5** (Εκτιμήσεις για τον  $W^{1,p}$ ,  $n < p \leq \infty$ ). Έστω  $U$  ένα φραγμένο, ανοιχτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^n$  και έστω το  $\partial U$  είναι  $C^1$ . Έστω  $n < p \leq \infty$  και  $u \in W^{1,p}(U)$ . Τότε η  $u$  έχει μία εκδοχή  $u^* \in C^{0,\gamma}(\bar{U})$  για  $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$  με την εκτίμηση

$$\|u^*\|_{C^{0,\gamma}(\bar{U})} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(U)}.$$

Η σταθερά  $C$  εξαρτάται μόνο από τα  $p, n$  και  $U$ .

**Παρατήρηση 1.6.6** Με βάση αυτό το θεώρημα θα αντιλαμβανόμαστε πλέον κάθε  $u \in W^{1,p}(U)$  ( $p > n$ ) ως τη συνεχή της εκδοχή.

**Απόδειξη.** Επειδή το  $\partial U$  είναι  $C^1$ , υπάρχει σύμφωνα με το Θεώρημα 1.4.1 μία επέκταση  $Eu = \bar{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  τέτοια ώστε

$$\begin{cases} \bar{u} = u \text{ στο } U \\ \eta \bar{u} \text{ έχει συμπαγή φορέα, και} \\ \|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(U)}. \end{cases} \quad (1.6.23)$$

Επειδή η  $\bar{u}$  έχει συμπαγή φορέα, έχουμε από το Θεώρημα 1.3.2 ότι υπάρχουν συναρτήσεις  $u_m \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  τέτοιες ώστε

$$u_m \rightarrow \bar{u} \text{ στον } W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \quad (1.6.24)$$

Σύμφωνα τώρα με το προηγούμενο θεώρημα,  $\|u_m - u_l\|_{C^{0,1-n/p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u_m - u_l\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$  για όλα τα  $l, m \geq 1$ . Έτσι υπάρχει συνάρτηση  $u^* \in C^{0,1-n/p}(\mathbb{R}^n)$  τέτοια ώστε

$$u_m \rightarrow u^* \text{ στον } C^{0,1-n/p}(\mathbb{R}^n). \quad (1.6.25)$$

Με βάση τις 1.6.24 και 1.6.25 βλέπουμε ότι  $u^* = u$  σχεδόν παντού στο  $U$  και άρα η  $u^*$  είναι εκδοχή της  $u$ . Αφού επιπλέον έχουμε από το Θεώρημα 1.6.4 ότι  $\|u_m\|_{C^{0,1-n/p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u_m\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$ , οι 1.6.24 και 1.6.25 συνεπάγονται ότι:

$$\|u^*\|_{C^{0,1-n/p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Αυτή η ανισότητα μαζί με την 1.6.23 ολοκληρώνουν την απόδειξη. ■

### 1.6.3 Γενικές ανισότητες Sobolev

**Θεώρημα 1.6.6** Έστω  $U$  ένα φραγμένο, ανοιχτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^n$  με  $C^1$  σύνορο. Έστω επίσης  $u \in W^{k,p}(U)$ .

(i) Αν

$$k < \frac{n}{p}, \quad (1.6.26)$$

τότε  $u \in L^q(U)$ , όπου

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}.$$

Έχουμε επιπλέον την εκτίμηση

$$\|u\|_{L^q(U)} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(U)}, \quad (1.6.27)$$

όπου η σταθερά  $C$  εξαρτάται μόνο από τα  $k, p, n$  και  $U$ .

(ii) Αν

$$k > \frac{n}{p}, \quad (1.6.28)$$

τότε  $u \in C^{k - \left[\frac{n}{p}\right] - 1, \gamma}(\bar{U})$ , όπου

$$\gamma = \begin{cases} \left[\frac{n}{p}\right] + 1 - \frac{n}{p}, & \text{αν ο } \frac{n}{p} \text{ δεν είναι ακέραιος} \\ \text{οποιοσδήποτε θετικός αριθμός } < 1, & \text{αν ο } \frac{n}{p} \text{ είναι ακέραιος.} \end{cases}$$

Έχουμε επιπλέον την εκτίμηση

$$\|u\|_{C^{k - \left[\frac{n}{p}\right] - 1, \gamma}(\bar{U})} \leq C \|u\|_{W^{k, p}(U)}, \quad (1.6.29)$$

όπου η σταθερά  $C$  εξαρτάται μόνο από τα  $k, p, n, \gamma$  και  $U$ .

### Απόδειξη.

1. Έστω ισχύει η (1.6.26). Τότε, επειδή  $D^\alpha u \in L^p(U)$  για κάθε  $|\alpha| = k$ , από την Ανισότητα Gagliardo-Nirenberg-Sobolev προκύπτει ότι

$$\|D^\beta u\|_{L^{p^*}(U)} \leq C \|u\|_{W^{k, p}(U)} \quad \text{αν } |\beta| = k - 1$$

και άρα  $u \in W^{k-1, p^*}(U)$ . Όμοια βρίσκουμε ότι  $u \in W^{k-2, p^{**}}(U)$ , όπου  $\frac{1}{p^{**}} = \frac{1}{p^*} - \frac{1}{n} = \frac{1}{p} - \frac{2}{n}$ . Συνεχίζοντας, βρίσκουμε τελικά ύστερα από  $k$  βήματα ότι  $u \in W^{0, q}(U) = L^q(U)$  για  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$ . Η ζητούμενη εκτίμηση (1.6.27) προκύπτει πολλαπλασιάζοντας τις αντίστοιχες εκτιμήσεις σε κάθε στάδιο του παραπάνω επιχειρήματος.

2. Υποθέτουμε τώρα ότι ισχύει η (1.6.28) και ο  $\frac{n}{p}$  δεν είναι ακέραιος. Τότε, όπως παραπάνω, βλέπουμε ότι

$$u \in W^{k-l, r}(U), \quad (1.6.30)$$

για

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{l}{n}, \quad (1.6.31)$$

δεδομένου ότι  $lp < n$ . Διλέγουμε τον ακέραιο  $l$  έτσι ώστε

$$l < \frac{n}{p} < l + 1 \quad (1.6.32)$$

θέτουμε δηλαδή,  $l = \left[\frac{n}{p}\right]$ . Ως εκ τούτου οι (1.6.31) και (1.6.32) δίνουν  $r = \frac{pn}{n-pl} > n$ . Έτσι, η (1.6.30) και η Ανισότητα Morrey δίνουν ότι  $D^\alpha u \in C^{0, 1 - \frac{n}{r}}(\bar{U})$  για όλα τα  $|\alpha| \leq k - l - 1$ . Παρατηρούμε επίσης ότι  $1 - \frac{n}{r} = 1 - \frac{n}{p} + l = \left[\frac{n}{p}\right] + 1 - \frac{n}{p}$ . Ως εκ τούτου, η  $u \in C^{k - \left[\frac{n}{p}\right] - 1, \left[\frac{n}{p}\right] + 1 - \frac{n}{p}}(\bar{U})$  και η ζητούμενη σχέση προκύπτει εύκολα.

3. Τέλος, υποθέτουμε ότι η (1.6.28) ισχύει με  $\frac{n}{p}$  ακέραιο. Θέτουμε  $l = \left[ \frac{n}{p} \right] - 1 = \frac{n}{p} - 1$ . Ως εκ τούτου, έχουμε όπως παραπάνω ότι  $u \in W^{k-l,r}(U)$  για  $r = \frac{pn}{n-pl} = n$ . Συνεπώς, η Ανισότητα Gagliardo-Nirenberg-Sobolev δείχνει ότι  $D^\alpha u \in L^q(U)$  για όλα τα  $n \leq q < \infty$  και όλα τα  $|\alpha| \leq k - l - 1 = k - \left[ \frac{n}{p} \right]$ . Επομένως, από την Ανισότητα Morrey προκύπτει ακόμα ότι  $D^\alpha u \in C^{0,1-\frac{n}{q}}(\bar{U})$  για όλα τα  $n < q < \infty$  και όλα τα  $|\alpha| \leq k - \left[ \frac{n}{p} \right] - 1$ . Συνεπώς, η  $u \in C^{k-\left[ \frac{n}{p} \right]-1,\gamma}(\bar{U})$  για κάθε  $0 < \gamma < 1$ . Όπως και πριν, η ζητούμενη εκτίμηση προκύπτει εύκολα.

■

## 1.7 Συμπάγεια

Είδαμε στην προηγούμενη ενότητα ότι η Ανισότητα Gagliardo-Nirenberg-Sobolev συνεπάγεται την εμφύτευση του  $W^{1,p}(U)$  στον  $L^{p^*}(U)$  για  $1 \leq p < n$ ,  $p^* = \frac{pn}{n-p}$ . Θα δείξουμε τώρα ότι ο  $W^{1,p}(U)$  είναι στην πραγματικότητα συμπαγώς εμφυτεύσιμος στον  $L^q(U)$  για  $1 \leq q < p^*$ .

**Ορισμός 1.7.1** Έστω  $X$  και  $Y$  χώροι Banach,  $X \subset Y$ . Λέμε ότι ο  $X$  εμφυτεύεται συμπαγώς στον  $Y$  και γράφουμε

$$X \subset\subset Y$$

αν

(i)  $\|x\|_Y \leq C\|x\|_X$  ( $x \in X$ ) για κάποια σταθερά  $C$ ,

και

(ii) κάθε φραγμένη ακολουθία στον  $X$  είναι precompact στον  $Y$ , δηλαδή έχει υπακολουθία που συγκλίνει στον  $Y$ .

**Θεώρημα 1.7.1** (Θεώρημα Συμπάγειας Rellich-Kondrachou). Έστω  $U$  ένα φραγμένο, ανοιχτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^n$  και το  $\partial U$  είναι  $C^1$ . Έστω  $1 \leq p < n$ . Τότε

$$W^{1,p}(U) \subset\subset L^q(U)$$

για κάθε  $1 \leq q < p^*$ .

**Απόδειξη.**

1. Σταθεροποιούμε ένα  $1 \leq q < p^*$  και παρατηρούμε ότι αφού το  $U$  είναι φραγμένο, το Θεώρημα 1.6.2 δίνει

$$W^{1,p}(U) \subset L^q(U), \quad \|u\|_{L^q(U)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}.$$

Μένει να δείξουμε, άρα, ότι αν  $\{u_m\}_{m=1}^\infty$  είναι μια φραγμένη ακολουθία στον  $W^{1,p}(U)$ , υπάρχει υπακολουθία  $\{u_{m_j}\}_{j=1}^\infty$  που συγκλίνει στον  $L^q(U)$ .

2. Με βάση το Θεώρημα Επέκτασης στην ενότητα (1.4) μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι  $U = \mathbb{R}^n$  και ότι όλες οι συναρτήσεις  $\{u_m\}_{m=1}^\infty$  έχουν συμπαγή φορέα σε κάποιο φραγμένο ανοιχτό σύνολο  $V \subset \mathbb{R}^n$ . Μπορούμε ακόμα να υποθέσουμε ότι

$$\sup_m \|u_m\|_{W^{1,p}(V)} < \infty \tag{1.7.1}$$

3. Μελετάμε πρώτα τις ομαλοποιημένες συναρτήσεις

$$u_m^\varepsilon := \eta_\varepsilon * u_m \quad (\varepsilon > 0, m = 1, 2, \dots),$$

όπου  $\eta_\varepsilon$  είναι ο συνήθης ομαλοποιητής. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι όλες οι συναρτήσεις  $\{u_m^\varepsilon\}_{m=1}^\infty$  έχουν επίσης φορέα στο  $V$ .

4. Ισχυριζόμαστε αρχικά ότι

$$u_m^\varepsilon \rightarrow u_m \text{ στον } L^q(V) \text{ καθώς } \varepsilon \rightarrow 0, \text{ ομοιόμορφα ως προς } m. \tag{1.7.2}$$

Για να το αποδείξουμε, παρατηρούμε πρώτα ότι αν οι  $u_m$  είναι ομαλές, τότε

$$\begin{aligned} u_m^\varepsilon(x) - u_m(x) &= \int_{B(0,1)} \eta(y) (u_m(x - \varepsilon y) - u_m(x)) dy \\ &= \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 \frac{d}{dt} (u_m(x - \varepsilon ty)) dt dy \\ &= -\varepsilon \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 Du_m(x - \varepsilon ty) \cdot y dt dy. \end{aligned}$$

Έτσι

$$\begin{aligned} \int_V |u_m^\varepsilon(x) - u_m(x)| dx &\leq \varepsilon \int_{B(0,1)} \eta(y) \int_0^1 \int_V |Du_m(x - \varepsilon ty)| dx dt dy \\ &\leq \varepsilon \int_V |Du_m(z)| dz \end{aligned}$$

Προσεγγίζοντας, η παραπάνω εκτίμηση ισχύει αν  $u_m \in W^{1,p}(V)$ . Έτσι,

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(V)} \leq \varepsilon \|Du_m\|_{L^1(V)} \leq \varepsilon C \|Du_m\|_{L^p(V)},$$

όπου η τελευταία ανισότητα ισχύει επειδή το  $V$  είναι φραγμένο. Με βάση και την (1.7.1) βρίσκουμε ότι

$$u_m^\varepsilon \rightarrow u_m \text{ στον } L^1(V), \text{ ομοιόμορφα ως προς } m \quad (1.7.3)$$

Αλλά τότε, επειδή  $1 \leq q < p^*$ , βλέπουμε χρησιμοποιώντας την *Ανισότητα Παρεμβολής*, σύμφωνα με την οποία αν  $1 \leq s \leq r \leq t \leq \infty$  με  $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{s} + \frac{1-\theta}{t}$  και  $u \in L^s(U) \cap L^t(U)$ , τότε  $u \in L^r(U)$  και  $\|u\|_{L^r(U)} \leq \|u\|_{L^s(U)}^\theta \|u\|_{L^t(U)}^{1-\theta}$ , προκύπτει ότι

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(V)} \leq \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(V)}^\theta \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^{p^*}(V)}^{1-\theta},$$

όπου  $\frac{1}{q} = \theta + \frac{1-\theta}{p^*}$ ,  $0 < \theta < 1$ . Συνεπώς, η (1.7.1) και η Ανισότητα Gagliardo-Nirenberg-Sobolev συνεπάγονται ότι

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(V)} \leq C \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(V)}^\theta$$

και άρα η (1.7.2) προκύπτει από την (1.7.3).

5. Στη συνέχεια ισχυριζόμαστε ότι

$$\begin{cases} \text{για κάθε σταθεροποιημένο } \varepsilon > 0, \text{ η ακολουθία } \{u_m^\varepsilon\}_{m=1}^\infty \\ \text{είναι ομοιόμορφα φραγμένη και ισοσυνεχής} \end{cases} \quad (1.7.4)$$

Πράγματι, αν  $x \in \mathbb{R}^n$ , τότε

$$\begin{aligned} |u_m^\varepsilon(x)| &\leq \int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y) |u_m(y)| dy \\ &\leq \|\eta_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|u_m\|_{L^1(V)} \leq \frac{C}{\varepsilon^n} < \infty \end{aligned}$$

για  $m = 1, 2, \dots$  Όμοια,

$$\begin{aligned} |Du_m^\varepsilon(x)| &\leq \int_{B(x,\varepsilon)} |D\eta_\varepsilon(x-y)| |u_m(y)| dy \\ &\leq \|D\eta_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|u_m\|_{L^1(V)} \leq \frac{C}{\varepsilon^{n+1}} < \infty \end{aligned}$$

για  $m = 1, \dots$  Η υπόθεση (1.7.4) προκύπτει από αυτές τις δύο εκτιμήσεις.



6. Σταθεροποιούμε τώρα ένα  $\delta > 0$ . Θα δείξουμε ότι υπάρχει μία υπακολουθία  $\{u_{m_j}\}_{j=1}^\infty \subset \{u_m\}_{m=1}^\infty$  τέτοια ώστε

$$\limsup_{j,k \rightarrow \infty} \|u_{m_j} - u_{m_k}\|_{L^q(V)} \leq \delta. \quad (1.7.5)$$

Για να το δούμε αυτό, χρησιμοποιούμε την υπόθεση (1.7.2) και διαλέγουμε  $\varepsilon > 0$  τόσο μικρό ώστε

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(V)} \leq \delta/2 \quad (1.7.6)$$

για  $m = 1, 2, \dots$

Παρατηρούμε τώρα ότι αφού οι συναρτήσεις  $\{u_m\}_{m=1}^\infty$  και άρα και οι συναρτήσεις  $\{u_m^\varepsilon\}_{m=1}^\infty$  έχουν φορέα σε κάποιο σταθερό φραγμένο σύνολο  $V \subset \mathbb{R}^n$ , μπορούμε χρησιμοποιώντας την (1.7.4) και το Κριτήριο Συμπάγειας Arzela-Ascoli (Παρατήρηση 1.7.1) να βρούμε υπακολουθία  $\{u_{m_j}^\varepsilon\}_{j=1}^\infty \subset \{u_m^\varepsilon\}_{m=1}^\infty$  που συγκλίνει ομοιόμορφα στο  $V$ . Επομένως, πιο συγκεκριμένα,

$$\limsup_{j,k \rightarrow \infty} \|u_{m_j}^\varepsilon - u_{m_k}^\varepsilon\|_{L^q(V)} = 0.$$

Αλλά τότε οι (1.7.6) και (1.7.7) συνεπάγονται ότι

$$\limsup_{j,k \rightarrow \infty} \|u_{m_j} - u_{m_k}\|_{L^q(V)} \leq \delta$$

και άρα η (1.7.5) αποδειχτηκε.

7. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε την υπόθεση (1.7.5) με  $\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$  και χρησιμοποιούμε ένα κλασσικό διαγώνιο επιχείρημα για να βρούμε μια υπακολουθία  $\{u_{m_l}\}_{l=1}^\infty \subset \{u_m\}_{m=1}^\infty$  που ικανοποιεί:

$$\limsup_{l,k \rightarrow \infty} \|u_{m_l} - u_{m_k}\|_{L^q(V)} = 0.$$

■

- Παρατηρήσεις 1.7.1** (i) Οι συναρτήσεις  $\{f_k\}_{k=1}^\infty$  λέγονται ομοιόμορφα ισοσυνεχείς αν για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο ώστε  $|x-y| < \delta$  να συνεπάγεται  $|f_k(x) - f_k(y)| < \varepsilon$  για  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $k = 1, \dots$
- (ii) (Κριτήριο Συμπάγειας Arzela-Ascoli). Έστω  $\{f_k\}_{k=1}^\infty$  είναι μια ακολουθία πραγματικών συναρτήσεων ορισμένων στον  $\mathbb{R}^n$ , τέτοιων ώστε

$$|f_k(x)| \leq M \quad (k = 1, \dots, x \in \mathbb{R}^n)$$

για κάποια σταθερά  $M$  και επίσης  $\{f_k\}_{k=1}^\infty$  είναι ομοιόμορφα ισοσυνεχείς. Τότε, υπάρχει υπακο-  
 βουθία  $\{f_{k_j}\}_{j=1}^\infty \subseteq \{f_k\}_{k=1}^\infty$  και συνεχής συνάρτηση  $f$  τέτοιες ώστε

$$f_{k_j} \rightarrow f \text{ ομοιόμορφα σε συμπαγή υποσύνολα του } \mathbb{R}^n.$$

**Παρατήρηση 1.7.2** Παρατηρούμε ότι επειδή  $p^* > p$  και  $p^* \rightarrow \infty$  καθώς  $p \rightarrow n$ , έχουμε ότι

$$W^{1,p}(U) \subset\subset L^p(U)$$

για όλα τα  $1 \leq p \leq \infty$ . Παρατηρούμε επίσης ότι έχουμε και

$$W_0^{1,p}(U) \subset\subset L^p(U)$$

ακόμα και αν δεν υποθέσουμε ότι το  $\partial U$  είναι  $C^1$ .

Αργότερα, θα χρησιμοποιήσουμε αρκετές φορές τα αποτελέσματα αυτής της ενότητας, όπως για πα-  
 ράδειγμα στη Θεωρία Υπαρξης Ασθενούς Λύσης στα Ελλειπτικά Προβλήματα.

## 1.8 Πρόσθετα Στοιχεία για τους χώρους Sobolev

### 1.8.1 Ανισότητες Poincaré

**Ορισμοί 1.8.1** (i) Ορίζουμε ως  $(u)_U$  τη μέση τιμή του  $u$  πάνω στο  $U$ , δηλαδή  $(u)_U = \int_U u \, dy$ .

(ii) Αντίστοιχα ορίζουμε  $(u)_{x,r} = \int_{B(x,r)} u \, dy$  να είναι η μέση τιμή της  $u$  στην μπάλα  $B(x, r)$ .

**Θεώρημα 1.8.1** (Ανισότητα Poincaré). Έστω  $U$  ένα φραγμένο, συνεκτικό, ανοιχτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^n$ ,  
 με  $C^1$  σύνορο  $\partial U$ . Έστω  $1 \leq p \leq \infty$ . Τότε, υπάρχει σταθερά  $C$  που εξαρτάται μόνο από τα  $n, p$  και  $U$ ,  
 τέτοια ώστε

$$\|u - (u)_U\|_{L^p(U)} \leq C \|Du\|_{L^p(U)} \quad (1.8.1)$$

για κάθε συνάρτηση  $u \in W^{1,p}(U)$ .

**Απόδειξη.** Θα το δείξουμε χρησιμοποιώντας εις άτοπο απαγωγή. Έστω ότι η ζητούμενη εκτίμηση ήταν  
 λάθος. Τότε, θα υπήρχε για κάθε ακέραιο  $k = 1, \dots$  μία συνάρτηση  $u_k \in W^{1,p}(U)$  που ικανοποιεί  
 την

$$\|u_k - (u_k)_U\|_{L^p(U)} > k \|Du_k\|_{L^p(U)}. \quad (1.8.2)$$

Κανονικοποιούμε ορίζοντας την

$$v_k := \frac{u_k - (u_k)_U}{\|u_k - (u_k)_U\|_{L^p(U)}} \quad (k = 1, \dots). \quad (1.8.3)$$

Τότε

$$(v_k)_U = 0, \quad \|v_k\|_{L^p(U)} = 1$$

και η (1.8.2) συνεπάγεται

$$\|Dv_k\|_{L^p(U)} < \frac{1}{k} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (1.8.4)$$

Άρα, οι συναρτήσεις  $\{v_k\}_{k=1}^\infty$  είναι φραγμένες στον  $W^{1,p}(U)$ .

Με βάση την Παρατήρηση 1.7.2, υπάρχει υπακολουθία  $\{v_{k_j}\}_{j=1}^\infty \subset \{v_k\}_{k=1}^\infty$  και συνάρτηση  $v \in L^p(U)$  τέτοια ώστε

$$v_{k_j} \rightarrow v \quad \text{στον } L^p(U). \quad (1.8.5)$$

Από την (1.8.3) προκύπτει ότι

$$(v)_U = 0, \quad \|v\|_{L^p(U)} = 1. \quad (1.8.6)$$

Από την άλλη, η (1.8.4) συνεπάγεται ότι για κάθε  $i = 1, \dots, n$  και  $\phi \in C_c^\infty(U)$

$$\int_U v \phi_{x_i} dx = \lim_{k_j \rightarrow \infty} \int_U v_{k_j} \phi_{x_i} dx = - \lim_{k_j \rightarrow \infty} \int_U v_{k_j, x_i} \phi dx = 0.$$

Συνεπώς  $v \in W^{1,p}(U)$  με  $Dv = 0$  σχεδόν παντού. Άρα η  $v$  είναι σταθερή, αφού το  $U$  είναι συνεκτικό. Αυτό όμως, δεδομένου ότι  $(v)_U = 0$ , μας δίνει ότι  $v \equiv 0$ , το οποίο συνεπάγεται ότι  $\|v\|_{L^p(U)} = 0$  και έρχεται σε αντίθεση με (1.8.6). Άρα, οδηγηθήκαμε σε Άτοπο και συνεπώς η (1.8.1) είναι αληθής. ■

**Θεώρημα 1.8.2** (Ανισότητα Poincaré για μπάλλα). Έστω  $1 \leq p \leq \infty$ . Τότε υπάρχει σταθερά  $C$  που εξαρτάται μόνο από τα  $n$  και  $p$  τέτοια ώστε

$$\|u - (u)_{x,r}\|_{L^p(B(x,r))} \leq Cr \|Du\|_{L^p(B(x,r))} \quad (1.8.7)$$

για κάθε μπάλλα  $B(x, r) \subset \mathbb{R}^n$  και για κάθε συνάρτηση  $u \in W^{1,p}(B^0(x, r))$ .

**Απόδειξη.** Η περίπτωση  $U = B^0(0, 1)$  προκύπτει από το προηγούμενο θεώρημα. Γενικά, αν  $u \in W^{1,p}(B^0(x, r))$  γράφουμε

$$v(y) := u(x + ry) \quad (y \in B(0, 1)).$$

Τότε  $v \in W^{1,p}(B^0(0,1))$  και έχουμε

$$\|v - (v)_{0,1}\|_{L^p(B(0,1))} \leq C \|Dv\|_{L^p(B(0,1))}.$$

Αλλάζοντας συντεταγμένες, παίρνουμε την εκτίμηση (1.8.7). ■

**Παρατήρηση 1.8.1** Έστω  $u \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$  και έστω  $B(x,r)$  μία τυχαία μπάλα. Τότε το Θεώρημα 1.8.2 για  $p = 1$  συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} \int_{B(x,r)} |u - (u)_{x,r}| dy &\leq Cr \int_{B(x,r)} |Du| dy \\ &\leq Cr \left( \int_{B(x,r)} |Du|^n dy \right)^{1/n} \leq C \left( \int_{\mathbb{R}^n} |Du|^n dy \right)^{1/n}. \end{aligned}$$

Άρα  $u \in BMO(\mathbb{R}^n)$ , δηλαδή στο χώρο των συναρτήσεων με φραγμένη μέση ταλάντωση στον  $\mathbb{R}^n$ , με τη σεμινόρμα

$$[u]_{BMO(\mathbb{R}^n)} := \sup_{B(x,r) \subset \mathbb{R}^n} \left\{ \int_{B(x,r)} |u - (u)_{x,r}| dy \right\}.$$

## 1.8.2 Πηλίκα Διαφορών

### a. Πηλίκα Διαφορών και $W^{1,p}$

Σε αυτή την υποενότητα υποθέτουμε ότι η  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  είναι τοπικά αθροίσιμη και ότι  $V \subset\subset U$

**Ορισμοί 1.8.2** (i) Το  $i$ -πηλίκο διαφορών μεγέθους  $h$  ορίζεται ως

$$D_i^h u(x) = \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h} \quad (i = 1, \dots, n)$$

για  $x \in V$  και  $h \in \mathbb{R}$ ,  $0 < |h| < \text{dist}(V, \partial U)$ .

(ii)  $D^h u := (D_1^h u, \dots, D_n^h u)$ .

**Θεώρημα 1.8.3** (Πηλίκα διαφορών και ασθενείς παράγωγοι).

(i) Έστω  $1 \leq p < \infty$  και  $u \in W^{1,p}(U)$ . Τότε για κάθε  $V \subset\subset U$

$$\|D^h u\|_{L^p(V)} \leq C \|Du\|_{L^p(U)} \quad (1.8.8)$$

για κάποια σταθερά  $C$  και όλα τα  $0 < |h| < \frac{1}{2} \text{dist}(V, \partial U)$ .

(ii) Έστω  $1 < p < \infty$ ,  $u \in L^p(V)$  και υπάρχει μία σταθερά  $C$  τέτοια ώστε

$$\|D^h u\|_{L^p(V)} \leq C \quad (1.8.9)$$

για όλα τα  $0 < |h| < \frac{1}{2} \text{dist}(V, \partial U)$ . Τότε

$$u \in W^{1,p}(V), \quad \mu\epsilon \quad \|Du\|_{L^p(V)} \leq C.$$

### Απόδειξη.

1. Έστω  $1 \leq p < \infty$  και υποθέτουμε προσωρινά ότι η  $u$  είναι ομαλή. Τότε για κάθε  $x \in V$ ,  $i = 1, \dots, n$  και  $0 < |h| < \frac{1}{2} \text{dist}(V, \partial U)$ , έχουμε

$$u(x + he_i) - u(x) = \int_0^1 u_{x_i}(x + the_i) dt \cdot he_i$$

και άρα

$$|u(x + he_i) - u(x)| \leq h \int_0^1 |Du(x + the_i)| dt.$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} \int_V |D^h u|^p dx &\leq C \sum_{i=1}^n \int_V \int_0^1 |Du(x + the_i)|^p dt dx \\ &= C \sum_{i=1}^n \int_0^1 \int_V |Du(x + the_i)|^p dx dt. \end{aligned}$$

Έτσι

$$\int_V |D^h u|^p dx \leq C \int_U |Du|^p dx.$$

Αυτή η εκτίμηση ισχύει αν η  $u$  είναι ομαλή και άρα, μέσω προσέγγισης, ισχύει και αν  $u \in W^{1,p}(U)$ .

2. Υποθέτουμε τώρα ότι η (1.8.9) ισχύει για όλα τα  $0 < |h| < \frac{1}{2} \text{dist}(V, \partial U)$  και κάποια σταθερά  $C$ . Διαλέγουμε  $i = 1, \dots, n$ ,  $\phi \in C_c^\infty(V)$  και παρατηρούμε ότι για μικρά  $h$

$$\int_V u(x) \left[ \frac{\phi(x + he_i) - \phi(x)}{h} \right] dx = - \int_V \left[ \frac{u(x) - u(x - he_i)}{h} \right] \phi(x) dx$$

δηλαδή

$$\int_V u(D_i^h \phi) dx = - \int_V (D_i^{-h} u) \phi dx. \quad (1.8.10)$$

Αυτός είναι ο τύπος παραγοντικής ολοκλήρωσης για πηλικά διαφορών. Η εκτίμηση (1.8.9) συνεπάγεται

$$\sup_h \|D_i^{-h}u\|_{L^p(V)} < \infty$$

και άρα, αφού  $1 < p < \infty$ , υπάρχει συνάρτηση  $v_i \in L^p(V)$  και μία υπακολουθία  $h_k \rightarrow 0$  τέτοιες ώστε

$$D_i^{-h_k}u \rightharpoonup v_i \text{ ασθενώς στον } L^p(V). \quad (1.8.11)$$

Αλλά τότε

$$\begin{aligned} \int_V u\phi_{x_i} dx &= \int_U u\phi_{x_i} dx = \lim_{h_k \rightarrow 0} \int_U uD_i^{h_k}\phi dx \\ &= - \lim_{h_k \rightarrow 0} \int_V D_i^{-h_k}u\phi dx \\ &= - \int_V v_i\phi dx = - \int_U v_i\phi dx. \end{aligned}$$

Ως εκ τούτου  $v_i = u_{x_i}$  με την ασθενή έννοια ( $i = 1, \dots, n$ ) και άρα  $Du \in L^p(V)$ . Τέλος, επειδή  $u \in L^p(V)$ , συμπεραίνουμε ότι  $u \in W^{1,p}(V)$ .

■

**Παρατήρηση 1.8.2** Παραλληλαγές αυτού του θεωρήματος μπορούν να ισχύουν ακόμα και αν δεν ισχύει ότι  $V \subset\subset U$ . Για παράδειγμα, αν το  $U$  είναι η ανοιχτή ημι-μπάλα  $B^0(0, 1) \cap \{x_n > 0\}$ ,  $V = B^0(0, 1/2) \cap \{x_n > 0\}$ , έχουμε το φράγμα  $\int_V |D_i^h u|^p dx \leq \int_U |u_{x_i}|^p dx$  για  $i = 1, \dots, n-1$ . Η απόδειξη είναι παρόμοια με του θεωρήματος.

## b. Lipschitz συναρτήσεις και $W^{1,\infty}$

**Θεώρημα 1.8.4** (Χαρακτηρισμός του  $W^{1,\infty}$ ). Έστω  $U$  ανοιχτό και φραγμένο με  $C^1$  σύνορο  $\partial U$ . Τότε μία  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  είναι Lipschitz συνεχής αν και μόνο αν  $u \in W^{1,\infty}(U)$ .

**Απόδειξη.**

1. Υποθέτουμε αρχικά ότι  $U = \mathbb{R}^n$  και η  $u$  έχει συμπαγή φορέα.

Έστω  $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ . Τότε η  $u^\varepsilon := \eta_\varepsilon * u$ , όπου  $\eta_\varepsilon$  είναι ο συνήθης ομαλοποιητής, είναι ομαλή και ικανοποιεί

$$\begin{cases} u^\varepsilon \rightarrow u \text{ ομοιόμορφα καθώς } \varepsilon \rightarrow 0, \\ \|Du^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|Du\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}. \end{cases}$$

Διαλέγουμε δυο οποιαδήποτε σημεία  $x, y \in \mathbb{R}^n, x \neq y$ . Έχουμε

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(x) - u^\varepsilon(y) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} u^\varepsilon(tx + (1-t)y) dt \\ &= \int_0^1 Du^\varepsilon(tx + (1-t)y) dt \cdot (x - y) \end{aligned}$$

και άρα

$$|u^\varepsilon(x) - u^\varepsilon(y)| \leq \|Du^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} |x - y| \leq \|Du\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} |x - y|.$$

Αφήνουμε το  $\varepsilon \rightarrow 0$  για να δούμε ότι

$$|u(x) - u(y)| \leq \|Du\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} |x - y|.$$

Συνεπώς, η  $u$  είναι Lipschitz συνεχής.

2. Από την άλλη υποθέτουμε ότι η  $u$  είναι Lipschitz συνεχής. Πρέπει να δείξουμε ότι η  $u$  έχει ομοιωδώς φραγμένη ασθενή πρώτη παράγωγο. Αφού η  $u$  είναι Lipschitz, βλέπουμε ότι

$$\|D_i^{-h} u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq Lip(u)$$

και άρα υπάρχει συνάρτηση  $v_i \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  και υπακολουθία  $h_k \rightarrow 0$  τέτοιες ώστε

$$D_i^{-h_k} u \rightharpoonup v_i \text{ ασθενώς στον } L_{loc}^2(\mathbb{R}^n). \quad (1.8.12)$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} u \phi_{x_i} dx &= \lim_{h_k \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} u D_i^{h_k} \phi dx \\ &= - \lim_{h_k \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} D_i^{-h_k} u \phi dx = - \int_{\mathbb{R}^n} v_i \phi dx \end{aligned}$$

από την (1.8.12). Η παραπάνω ισότητα ισχύει για όλες τις  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  και άρα  $v_i = u_{x_i}$  με την ασθενή έννοια ( $i = 1, \dots, n$ ). Συνεπώς  $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ .

3. Στη γενική περίπτωση που το  $U$  είναι φραγμένο και το  $\partial U$  είναι  $C^1$ , επεκτείνουμε ως συνήθως σε  $Eu = \bar{u}$  και εφαρμόζουμε το παραπάνω επιχείρημα.

■

**Παρατήρηση 1.8.3** Το παραπάνω επιχείρημα προσαρμόζεται εύκολα για να δείξουμε ότι για κάθε ανοιχτό σύνολο  $U$ , η  $u \in W_{loc}^{1,\infty}(U)$  αν και μόνο αν η  $u$  είναι τοπικά Lipschitz συνεχής στο  $U$ . Δεν υπάρχει αντίστοιχος χαρακτηρισμός για τους χώρους  $W^{1,p}$  για  $1 \leq p < \infty$ . Αν  $n < p < \infty$ , τότε κάθε συνάρτηση  $u \in W^{1,p}$  ανήκει στον  $C^{0,1-n/p}$ , αλλιώς, αντίθετα, μια Hölder συνεχής συνάρτηση με εκθέτη λιγότερο από ένα δεν ανήκει κατ'ανάγκη σε κάποιο χώρο Sobolev  $W^{1,p}$ .

### 1.8.3 Παραγωγισιμότητα σχεδόν παντού

**Ορισμός 1.8.3** Μία συνάρτηση  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  είναι διαφορίσιμη σε κάποιο  $x \in U$  αν υπάρχει  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  τέτοιο ώστε

$$u(y) = u(x) + \alpha \cdot (y - x) + o(|y - x|) \text{ καθώς } y \rightarrow x. \quad (1.8.13)$$

Με άλλα λόγια,

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{|u(y) - u(x) - \alpha \cdot (y - x)|}{|y - x|} = 0.$$

**Παρατήρηση 1.8.4** Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι αν το  $\alpha$  υπάρχει, είναι μοναδικό. Γράφουμε, άρα,

$$Du(x)$$

για όλα τα  $\alpha$  και ονομάζουμε το  $Du$  ανάδεφτα του  $u$ .

**Θεώρημα 1.8.5** (Παραγωγισιμότητα σχεδόν παντού). Έστω  $u \in W_{loc}^{1,p}(U)$  για κάποιο  $n < p \leq \infty$ . Τότε η  $u$  είναι διαφορίσιμη σχεδόν παντού στο  $U$  και το ανάδεφτά της ισούται με το ασθενές της ανάδεφτα σχεδόν παντού.

Θυμίζουμε ότι πάντα αντιλαμβανόμαστε τη  $u$  ως τη συνεχή της εκδοχή.

#### Απόδειξη.

1. Υποθέτουμε αρχικά ότι  $n < p < \infty$ . Από την Παρατήρηση 1.6.5 ανακαλούμε την ανισότητα Morrey

$$|v(y) - v(x)| \leq Cr^{1-\frac{n}{p}} \left( \int_{B(x,2r)} |Dv(z)|^p dz \right)^{1/p} \quad (y \in B(x,r)), \quad (1.8.14)$$

που ισχύει για κάθε  $C^1$  συνάρτηση  $v$  και, άρα, μέσω προσέγγισης, για κάθε  $v \in W^{1,p}$ .



2. Διαλέγουμε  $u \in W_{loc}^{1,p}(U)$ . Τώρα, σχεδόν για κάθε  $x \in U$  μία εκδοχή του Θεωρήματος Διαφορισιμότητας του Lebesgue συνεπάγεται ότι

$$\int_{B(x,r)} |Du(x) - Du(z)|^p dz \rightarrow 0 \quad (1.8.15)$$

καθώς  $r \rightarrow 0$ , όπου η  $Du$  είναι η συνήθης ασθενής παράγωγος της  $u$ . Σταθεροποιούμε τώρα οποιοδήποτε τέτοιο σημείο  $x$  και θέτουμε

$$v(y) := u(y) - u(x) - Du(x) \cdot (y - x)$$

στην εκτίμηση (1.8.14), όπου

$$r = |x - y|. \quad (1.8.16)$$

Βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} & |u(y) - u(x) - Du(x) \cdot (y - x)| \\ & \leq Cr^{1-n/p} \left( \int_{B(x,2r)} |Du(x) - Du(z)|^p dz \right)^{1/p} \\ & \leq Cr \left( \int_{B(x,2r)} |Du(x) - Du(z)|^p dz \right)^{1/p} \\ & = o(r) \text{ από την (1.8.15)} \\ & = o(|x - y|) \text{ απ' την (1.8.16)}. \end{aligned}$$

Άρα, η  $u$  είναι διαφορίσιμη στο  $x$  και το ανάδελτά της είναι ίσο με το ασθενές της ανάδελτα στο  $x$ .

3. Στη περίπτωση που  $p = \infty$ , παρατηρούμε ότι  $W_{loc}^{1,\infty}(U) \subset W_{loc}^{1,p}(U)$  για όλα τα  $1 \leq p < \infty$  και εφαρμόζουμε τον παραπάνω συλλογισμό.

■

Τέλος, με βάση το παραπάνω θεώρημα έχουμε το

**Θεώρημα 1.8.6** (Θεώρημα Rademacher). Έστω  $u$  τοπικά Lipschitz συνεχής στο  $U$ . Τότε η  $u$  είναι διαφορίσιμη σχεδόν παντού στο  $U$ .

## 1.9 Άλλοι χώροι συναρτήσεων

### 1.9.1 Ο χώρος $H^{-1}$

**Ορισμός 1.9.1** Συμβολίζουμε με  $H^{-1}$  τον δυικό χώρο του  $H_0^1(U)$ . Με άλλα λόγια, μία  $f$  ανήκει στον  $H^{-1}(U)$  αν η  $f$  είναι ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον  $H_0^1(U)$ . Θα γράφουμε  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  εννοώντας το ταιρίασμα ανάμεσα στον  $H^{-1}(U)$  και τον  $H_0^1(U)$ .

**Θεώρημα 1.9.1** (Χαρακτηρισμός του  $H^{-1}$ ).

(i) Έστω  $f \in H^{-1}(U)$ . Τότε υπάρχουν συναρτήσεις  $f^0, f^1, \dots, f^n$  στον  $L^2(U)$  τέτοιες ώστε

$$\langle f, v \rangle = \int_U f^0 v + \sum_{i=1}^n f^i v_{x_i} dx \quad (v \in H_0^1(U)). \quad (1.9.1)$$

(ii) Επιπλέον,

$$\|f\|_{H^{-1}(U)} = \inf \left\{ \left( \int_U \sum_{i=0}^n |f^i|^2 dx \right)^{1/2} \mid \eta f \text{ ικανοποιεί την (1.9.1) για } f^0, \dots, f^n \in L^2(U) \right\}.$$

Θα γράφουμε  $f = f^0 - \sum_{i=1}^n f_{x_i}^i$  κάθε φορά που ισχύει η (1.9.1).

**Απόδειξη.**

1. Δεδομένων δύο  $u$  και  $v \in H_0^1(U)$  ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο  $(u, v) := \int_U DuDv + uv dx$ . Έστω  $f \in H^{-1}(U)$ . Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz για να εξάγουμε την υπάρξη μίας μοναδικής συνάρτησης  $u \in H_0^1(U)$  που να ικανοποιεί τη σχέση  $B[u, v] = \langle f, v \rangle$  για όλες τις  $v \in H_0^1(U)$ , δηλαδή

$$\int_U DuDv + uv dx = \langle f, v \rangle \quad (1.9.2)$$

για κάθε  $v \in H_0^1(U)$ . Αυτό αποδεικνύει την (1.9.1) για

$$\begin{cases} f^0 = u \\ f^i = u_{x_i} \quad (i = 1, \dots, n). \end{cases} \quad (1.9.3)$$

2. Έστω τώρα  $f \in H^{-1}(U)$ ,

$$\langle f, v \rangle = \int_U g^0 v + \sum_{i=1}^n g^i v_{x_i} dx \quad (1.9.4)$$

για  $g^0, g^1, \dots, g^n \in L^2(U)$ . Θέτοντας  $v = u$  στην (1.9.2) και χρησιμοποιώντας την (1.9.4), έχουμε ότι

$$\int_U |Du|^2 + |u|^2 dx \leq \int_U \sum_{i=0}^n |g^i|^2 dx.$$

Τότε, η (1.9.3) συνεπάγεται

$$\int_U \sum_{i=0}^n |f^i|^2 dx \leq \int_U \sum_{i=0}^n |g^i|^2 dx. \quad (1.9.5)$$

3. Από την (1.9.1) προκύπτει ότι

$$|\langle f, v \rangle| \leq \left( \int_U \sum_{i=0}^n |f^i|^2 dx \right)^{1/2}$$

αν  $\|v\|_{H_0^1(U)} \leq 1$ . Συνεπώς

$$\|f\|_{H^{-1}(U)} \leq \left( \int_U \sum_{i=0}^n |f^i|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Θέτοντας  $v = \frac{u}{\|u\|_{H_0^1(U)}}$  στην (1.9.2), συμπεραίνουμε ότι στην πραγματικότητα

$$\|f\|_{H^{-1}(U)} = \left( \int_U \sum_{i=0}^n |f^i|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (1.9.6)$$

Ο ισχυρισμός (ii) προκύπτει τώρα από τις σχέσεις (1.9.4) – (1.9.6).

■

## 1.9.2 Χώροι που περιλαμβάνουν και μεταβλητή χρόνου

Σε αυτή την υποενότητα θα συμβολίζουμε με  $X$  κάποιο πραγματικό χώρο Banach.

**Ορισμός 1.9.2** Ο χώρος

$$L^p(0, T; X)$$

αποτελείται από όλες τις μετρήσιμες συναρτήσεις  $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow X$  με

(i)

$$\|\mathbf{u}\|_{L^p(0, T; X)} := \left( \int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|^p dt \right)^{1/p} < \infty$$

για  $1 \leq p < \infty$  και

(ii)

$$\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;X)} := \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{u}(t)\| < \infty.$$

**Ορισμός 1.9.3** Ο χώρος

$$C([0, T]; X)$$

αποτελείται από όλες τις συνεχείς συναρτήσεις  $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow X$  με

$$\|\mathbf{u}\|_{C([0,T];X)} := \max_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{u}(t)\| < \infty.$$

**Ορισμός 1.9.4** Έστω  $\mathbf{u} \in L^1(0, T; X)$ . Λέμε ότι  $\mathbf{v} \in L^1(0, T; X)$  είναι η ασθενής παράγωγος της  $\mathbf{u}$  και θα γράφουμε

$$\mathbf{u}' = \mathbf{v}$$

αν

$$\int_0^T \phi'(t) \mathbf{u}(t) dt = - \int_0^T \phi(t) \mathbf{v}(t) dt$$

για όλες τις βαθμωτές δοκιμαστικές συναρτήσεις  $\phi \in C_c^\infty(0, T)$ .

**Ορισμοί 1.9.5** (i) Ο χώρος Sobolev

$$W^{1,p}(0, T; X)$$

αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις  $\mathbf{u} \in L^p(0, T; X)$  τέτοιες ώστε η  $\mathbf{u}'$  να υπάρχει με την ασθενή έννοια και να ανήκει στον  $L^p(0, T; X)$ . Επιπλέον,

$$\|\mathbf{u}\|_{W^{1,p}(0,T;X)} := \begin{cases} \left( \int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|^p + \|\mathbf{u}'(t)\|^p dt \right)^{1/p} & (1 \leq p < \infty) \\ \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} (\|\mathbf{u}(t)\| + \|\mathbf{u}'(t)\|) & (p = \infty). \end{cases}$$

(ii) Γράφουμε  $H^1(0, T; X) = W^{1,2}(0, T; X)$ .

**Θεώρημα 1.9.2** Έστω  $\mathbf{u} \in W^{1,p}(0, T; X)$  για κάποιο  $1 \leq p \leq \infty$ . Τότε

(i)  $\mathbf{u} \in C([0, T]; X)$  (ύστερα ίσως από επαναορισμό της σε σύνολο μέτρου μηδέν) και

(ii)  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(s) + \int_s^t \mathbf{u}'(\tau) d\tau$  για όλα τα  $0 \leq s \leq t \leq T$ .

(iii) Επιπλέον, έχουμε την εκτίμηση

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{u}(t)\| \leq C \|\mathbf{u}\|_{W^{1,p}(0,T;X)}, \quad (1.9.7)$$

όπου η σταθερά  $C$  εξαρτάται μόνο από το  $T$ .

### Απόδειξη.

1. Επεκτείνουμε τη  $\mathbf{u}$  να είναι  $\mathbf{0}$  στα  $(-\infty, 0)$  και  $(T, \infty)$  και μετά θέτουμε  $\mathbf{u}^\varepsilon = \eta_\varepsilon * \mathbf{u}$ , όπου  $\eta_\varepsilon$  είναι ο συνήθης ομαλοποιητής στον  $\mathbb{R}^1$ . Ελέγχουμε όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 1.3.2 ότι  $\mathbf{u}^{\varepsilon'} = \eta_\varepsilon * \mathbf{u}'$  στο  $(\varepsilon, T - \varepsilon)$ .

Τότε, καθώς  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

$$\begin{cases} \mathbf{u}^\varepsilon \rightarrow \mathbf{u} & \text{στον } L^p(0, T; X), \\ (\mathbf{u}^\varepsilon)' \rightarrow \mathbf{u}' & \text{στον } L^p(0, T; X). \end{cases} \quad (1.9.8)$$

Σταθεροποιώντας  $0 < s < t < T$  υπολογίζουμε

$$\mathbf{u}^\varepsilon(t) = \mathbf{u}^\varepsilon(s) + \int_s^t \mathbf{u}^{\varepsilon'}(\tau) d\tau.$$

Έτσι

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(s) + \int_s^t \mathbf{u}'(\tau) d\tau \quad (1.9.9)$$

για σχεδόν όλα τα  $0 < s < t < T$  σύμφωνα με την (1.9.8). Επειδή η απεικόνιση  $t \mapsto \int_0^t \mathbf{u}'(\tau) d\tau$  είναι συνεχής, προκύπτουν οι υποθέσεις (i) και (ii).

2. Η εκτίμηση (1.9.7) προκύπτει εύκολα από την (1.9.9).

■

**Θεώρημα 1.9.3** Έστω  $\mathbf{u} \in L^2(0, T; H_0^1(U))$ , με  $\mathbf{u}' \in L^2(0, T; H^{-1}(U))$ .

(i) Τότε

$$\mathbf{u} \in C([0, T]; L^2(U))$$

(ύστερα ίσως από επαναορισμό της σε σύνολο μέτρου μηδέν).

(ii) Η απεικόνιση

$$t \mapsto \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(U)}^2$$

είναι αποβλήτως συνεχής με

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(U)}^2 = 2\langle \mathbf{u}'(t), \mathbf{u}(t) \rangle$$

για σχεδόν όλα τα  $0 \leq t \leq T$ .

(iii) Επιπλέον, έχουμε την εκτίμηση

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(U)} \leq C(\|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;H_0^1(U))} + \|\mathbf{u}'\|_{L^2(0,T;H^{-1}(U))}), \quad (1.9.10)$$

όπου η σταθερά  $C$  εξαρτάται μόνο από το  $T$ .

### Απόδειξη.

1. Επεκτείνουμε τη  $\mathbf{u}$  στο μεγαλύτερο διάστημα  $[-\sigma, T + \sigma]$  για  $\sigma > 0$  και ορίζουμε τις ομαλοποιημένες  $\mathbf{u}^\varepsilon = \eta_\varepsilon * \mathbf{u}$  όπως στην προηγούμενη απόδειξη. Τότε για  $\varepsilon, \delta > 0$ ,

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{u}^\varepsilon(t) - \mathbf{u}^\delta(t)\|_{L^2(U)}^2 = 2\langle \mathbf{u}^{\varepsilon'}(t) - \mathbf{u}^{\delta'}(t), \mathbf{u}^\varepsilon(t) - \mathbf{u}^\delta(t) \rangle_{L^2(U)}.$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^\varepsilon(t) - \mathbf{u}^\delta(t)\|_{L^2(U)}^2 &= \|\mathbf{u}^\varepsilon(s) - \mathbf{u}^\delta(s)\|_{L^2(U)}^2 \\ &+ 2 \int_s^t \langle \mathbf{u}^{\varepsilon'}(\tau) - \mathbf{u}^{\delta'}(\tau), \mathbf{u}^\varepsilon(\tau) - \mathbf{u}^\delta(\tau) \rangle d\tau \end{aligned} \quad (1.9.11)$$

για όλα τα  $0 \leq s, t \leq T$ . Σταθεροποιούμε τυχαίο  $s \in (0, T)$  για το οποίο

$$\mathbf{u}^\varepsilon(s) \rightarrow \mathbf{u}(s) \quad \text{στον } L^2(U).$$

Συνεπώς, η (1.9.11) συνεπάγεται

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon, \delta \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{u}^\varepsilon(t) - \mathbf{u}^\delta(t)\|_{L^2(U)}^2 &\leq \lim_{\varepsilon, \delta \rightarrow 0} \int_0^T \|\mathbf{u}^{\varepsilon'}(\tau) - \mathbf{u}^{\delta'}(\tau)\|_{H^1(U)}^2 \\ &+ \|\mathbf{u}^\varepsilon(\tau) - \mathbf{u}^\delta(\tau)\|_{H_0^1(U)}^2 d\tau \\ &= 0. \end{aligned}$$

Έτσι, οι ομαλοποιημένες συναρτήσεις  $\{\mathbf{u}^\varepsilon\}_{0 < \varepsilon \leq 1}$  συγκλίνουν στον  $C([0, T]; L^2(U))$  σε ένα όριο  $\boldsymbol{\nu} \in C([0, T]; L^2(U))$ . Επειδή ξέρουμε ακόμα ότι  $\mathbf{u}^\varepsilon(t) \rightarrow \mathbf{u}(t)$  για σχεδόν όλα τα  $t$  συμπεραίνουμε ότι  $\mathbf{u} = \boldsymbol{\nu}$  σχεδόν παντού.

2. Όμοια έχουμε

$$\|\mathbf{u}^\varepsilon(t)\|_{L^2(U)}^2 = \|\mathbf{u}^\varepsilon(s)\|_{L^2(U)}^2 + 2 \int_s^t \langle \mathbf{u}^{\varepsilon'}(\tau), \mathbf{u}^\varepsilon(\tau) \rangle d\tau,$$

και, άρα, αντιλαμβανόμενοι τη  $\mathbf{u}$  ως την παραπάνω  $\nu$  έχουμε

$$\|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(U)}^2 = \|\mathbf{u}(s)\|_{L^2(U)}^2 + 2 \int_s^t \langle \mathbf{u}'(\tau), \mathbf{u}(\tau) \rangle d\tau \quad (1.9.12)$$

για όλα τα  $0 \leq s, t \leq T$ .

3. Για να πάρουμε την (1.9.10), ολοκληρώνουμε την (1.9.12) ως προς  $s$ , ανακαλούμε την ανισότητα  $|\langle \mathbf{u}', \mathbf{u} \rangle| \leq \|\mathbf{u}'\|_{H^{-1}(U)} \|\mathbf{u}\|_{H_0^1(U)}$  και κάνουμε κάποιες απλές εκτιμήσεις.

■

**Θεώρημα 1.9.4** Έστω το  $U$  είναι φραγμένο και ανοιχτό και το  $\partial U$  είναι ομαλό. Παίρνουμε έναν μη αρνητικό ακέραιο  $m$ .

Έστω  $\mathbf{u} \in L^2(0, T; H^{m+2}(U))$  με  $\mathbf{u}' \in L^2(0, T; H^m(U))$ .

(i) Τότε

$$\mathbf{u} \in C([0, T]; H^{m+1}(U))$$

(ύστερα ίσως από επαναορισμό της σε σύνολο μέτρου μηδέν).

(ii) Επιπλέον, έχουμε την εκτίμηση

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{u}(t)\|_{H^{m+1}(U)} \leq C (\|\mathbf{u}\|_{L^2(0, T; H^{m+2}(U))} + \|\mathbf{u}'\|_{L^2(0, T; H^m(U))}), \quad (1.9.13)$$

όπου η σταθερά  $C$  εξαρτάται μόνο από τα  $T, U$  και  $m$ .

**Απόδειξη.**

1. Υποθέτουμε πρώτα ότι  $m = 0$ . Σε αυτή την περίπτωση

$$\mathbf{u} \in L^2(0, T; H^2(U)), \quad \mathbf{u}' \in L^2(0, T; L^2(U)).$$

Διαλέγουμε ένα ανοιχτό φραγμένο σύνολο  $V \supset \supset U$  και στη συνέχεια κατασκευάζουμε την ανίσοιχη επέκταση  $\bar{\mathbf{u}} = E\mathbf{u}$  όπως στην Ενότητα 1.4. Με βάση την εκτίμηση (1.4.10) στην Παρατήρηση 1.4.1

$$\|E\mathbf{u}\|_{W^{2,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\mathbf{u}\|_{W^{2,p}(U)}$$

και άρα

$$\bar{\mathbf{u}} \in L^2(0, T; H^2(V))$$

και

$$\|\bar{\mathbf{u}}\|_{L^2(0, T; H^2(V))} \leq C\|\mathbf{u}\|_{L^2(0, T; H^2(U))}, \quad (1.9.14)$$

για κατάλληλη σταθερά  $C$ . Επιπλέον,  $\bar{\mathbf{u}}' \in L^2(0, T; L^2(V))$  με την εκτίμηση

$$\|\bar{\mathbf{u}}'\|_{L^2(0, T; L^2(V))} \leq C\|\mathbf{u}'\|_{L^2(0, T; L^2(U))}. \quad (1.9.15)$$

Αυτό προκύπτει αν θεωρήσουμε τα ηλίκα διαφορών ως προς την  $t$ -μεταβλητή, θυμηθούμε τις μεθόδους στην Υποενότητα 1.8.2 και παρατηρήσουμε ότι ο  $E$  είναι ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής από τον  $L^2(U)$  στον  $L^2(V)$ .

2. Υποθέτουμε προς στιγμήν ότι η  $\bar{\mathbf{u}}$  είναι ομαλή. Στη συνέχεια υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dt} \left( \int_V |D\bar{\mathbf{u}}|^2 dx \right) \right| &= 2 \left| \int_V D\bar{\mathbf{u}} \cdot D\bar{\mathbf{u}}' dx \right| = 2 \left| \int_V \Delta \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{u}}' dx \right| \\ &\leq C(\|\bar{\mathbf{u}}\|_{H^2(V)}^2 + \|\bar{\mathbf{u}}'\|_{L^2(V)}^2). \end{aligned}$$

Δεν υπάρχει συνοριακός όρος στην κατά παράγοντες ολοκλήρωση, αφού η επέκταση  $\bar{\mathbf{u}} = E\mathbf{u}$  έχει συμπαγή φορέα μέσα στο  $V$ . Ολοκληρώνοντας και ανακαλώντας τις (1.9.14) και (1.9.15) προκύπτει ότι

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{u}(t)\|_{H^1(U)} \leq C(\|\mathbf{u}\|_{L^2(0, T; H^2(U))} + \|\mathbf{u}'\|_{L^2(0, T; L^2(U))}). \quad (1.9.16)$$

Παίρνουμε την ίδια εκτίμηση αν η  $\mathbf{u}$  δεν είναι ομαλή προσεγγίζοντας με  $\mathbf{u}^\varepsilon = \eta_\varepsilon * \mathbf{u}$  όπως παραπάνω. Όπως και στις προηγούμενες αποδείξεις, προκύπτει ακόμα ότι  $\mathbf{u} \in C([0, T]; H^1(U))$ .

3. Στη γενική περίπτωση που  $m \geq 1$ , θεωρούμε  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  τάξης  $|\alpha| \leq m$  και θέτουμε  $\boldsymbol{\nu} := D^\alpha \mathbf{u}$ . Τότε

$$\boldsymbol{\nu} \in L^2(0, T; H^2(U)), \quad \boldsymbol{\nu}' \in L^2(0, T; L^2(U)).$$

Εφαρμόζουμε την εκτίμηση (1.9.16) αντικαθιστώντας το  $\mathbf{u}$  με  $\boldsymbol{\nu}$  και αθροίζουμε πάνω σε όλα τα  $|\alpha| \leq m$  για να προκύψει η (1.9.13).

■



## Κεφάλαιο 2

# Ελλειπτικές Εξισώσεις Δεύτερης Τάξης

## 2.1 Ορισμοί

### 2.1.1 Ελλειπτικές Εξισώσεις

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε κυρίως το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} Lu = f & \text{στο } U \\ u = 0 & \text{στο } \partial U \end{cases} \quad (2.1.1)$$

όπου το  $U$  είναι ανοιχτό, φραγμένο υποσύνολο του  $\mathbb{R}^n$  και  $u : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι η άγνωστη  $u = u(x)$ . Εδώ η  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  είναι δοσμένη και ο  $L$  είναι ένας δεύτερης-τάξης μερικός διαφορικός τελεστής που έχει είτε τη μορφή

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n (a^{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x)u_{x_i} + c(x)u \quad (2.1.2)$$

ή την

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x)u_{x_i} + c(x)u, \quad (2.1.3)$$

για δεδομένες συναρτήσεις-συντελεστές  $a^{ij}, b^i, c$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ).

Λέμε ότι η Μερική Διαφορική Εξίσωση (ΜΔΕ)  $Lu = f$  είναι σε *μορφή απόκλισης* αν ο  $L$  δίνεται από την (2.1.2) και σε *μορφή μη απόκλισης* αν ο  $L$  δίνεται από την (2.1.3). Η απαίτηση  $u = 0$  στο  $\partial U$  στην (2.1.1) καλείται Dirichlet συνοριακή συνθήκη.

**Παρατήρηση 2.1.1** Αν οι συντελεστές μέγιστης τάξης  $a^{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) είναι  $C^1$  συναρτήσεις, τότε η κάθε μία από τις δύο αυτές μορφές μπορεί να γραφεί στην άλληλη. Σε αυτή την περίπτωση, η (2.1.2)

γίνεται

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n \tilde{b}^i(x)u_{x_i} + c(x)u,$$

όπου  $\tilde{b}^i := b^i - \sum_{j=1}^n a^{ij}$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

Απο δω και στο εξής υποθέτουμε ότι ισχύει η συνθήκη συμμετρίας για τους συντελεστές μέγιστης τάξης

$$a^{ij} = a^{ji} \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

**Ορισμός 2.1.1** Ο μερικός διαφορικός τελεστής  $L$  είναι (ομοιόμορφα) ελλειπτικός αν υπάρχει σταθερά  $\theta > 0$  τέτοια ώστε

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)\xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2 \quad (2.1.4)$$

για σχεδόν κάθε  $x \in U$  και για όλα τα  $\xi \in \mathbb{R}^n$ .

Αυτή η συνθήκη ελλειπτικότητας συνεπάγεται ότι για κάθε  $x \in U$ , ο συμμετρικός  $n \times n$  πίνακας  $A(x) = ((a^{ij}(x)))$  είναι θετικά ορισμένος με τη μικρότερη του ιδιοτιμή να είναι μεγαλύτερη από ή ίση με  $\theta$ .

### 2.1.2 Ασθενείς Λύσεις

Θεωρούμε ότι στο πρόβλημα συνοριακών τιμών (2.1.1) ο  $L$  έχει τη μορφή απόκλισης (2.1.2). Θα ορίσουμε και θα κατασκευάσουμε μια κατάλληλη ασθενή λύση  $u$  του (2.1.1) και στη συνέχεια θα εξετάσουμε την ομαλότητά και άλλες της ιδιότητες.

Θα υποθέσουμε στα παρακάτω ότι

$$a^{ij}, b^i, c \in L^\infty(U) \quad (i, j = 1, \dots, n) \quad (2.1.5)$$

και

$$f \in L^2(U). \quad (2.1.6)$$

**Παρατήρηση 2.1.2** (Κίνητρο για τον ορισμό της ασθενούς λύσης.) Θεωρούμε προς στιγμήν ότι η  $u$  είναι πράγματι μία ομαλή λύση και πολλαπλασιάζουμε τη ΜΔΕ  $Lu = f$  με μία ομαλή δοκιμαστική συνάρτηση  $v \in C_c^\infty(U)$  και ολοκληρώνουμε πάνω στο  $U$ , για να βρούμε ότι

$$\int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} v + cuv \, dx = \int_U f v \, dx \quad (2.1.7)$$

όπου κάναμε παραγοντική ολοκλήρωση στον πρώτο όρο του αριστερού μέλους. Δεν υπάρχουν συνοριακοί όροι λόγω του ότι  $v = 0$  στο  $\partial U$ . Με προσέγγιση βλέπουμε ότι το ίδιο ισχύει και για  $v \in H_0^1(U)$  και

τότε η ταυτότητα έχει νόημα μόνο αν  $u \in H_0^1(U)$ , όπου διαλέγουμε το χώρο  $H_0^1(U)$  επειδή στο (2.1.1) θέλουμε μηδενισμό στο σύνορο.

**Ορισμοί 2.1.2** (i) Η διγραμμική μορφή  $B[ \cdot, \cdot ]$  που συνδέεται με τον ελλειπτικό τελεστή  $L$  σε μορφή απόκλισης όπως στην (2.1.2) είναι η

$$B[u, v] := \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} v + c u v \, dx \quad (2.1.8)$$

για  $u, v \in H_0^1(U)$ .

(ii) Λέμε ότι η  $u \in H_0^1(U)$  είναι μία ασθενής λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών (2.1.1) αν

$$B[u, v] = (f, v) \quad (2.1.9)$$

για όλες τις  $v \in H_0^1(U)$  όπου το  $( \cdot, \cdot )$  αναπαριστά το εσωτερικό γινόμενο στον  $L^2(U)$ .

**Παρατήρηση 2.1.3** Η ταυτότητα (2.1.9) λέγεται συχνά μεταβολική διατύπωση του (2.1.1).

Πιο γενικά, θεωρούμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} Lu = f^0 - \sum_{i=1}^n f_{x_i}^i & \text{στο } U \\ u = 0 & \text{στο } \partial U \end{cases} \quad (2.1.10)$$

όπου ο  $L$  είναι της μορφής (2.1.2) και  $f^i \in L^2(U)$  ( $i = 0, \dots, n$ ). Με βάση τη θεωρία που αναπτύχθηκε στην ενότητα 1.9.1, βλέπουμε ότι το δεξί μέλος  $f = f^0 - \sum_{i=1}^n f_{x_i}^i$  ανήκει στον  $H^{-1}(U)$ , τον δεικτό του  $H_0^1(U)$ .

**Ορισμός 2.1.3** Λέμε ότι  $u \in H_0^1(U)$  είναι μία ασθενής λύση του προβλήματος (1.9.10) αν

$$B[u, v] = \langle f, v \rangle$$

για όλες τις  $v \in H_0^1(U)$ , όπου  $\langle f, v \rangle = \int_U f^0 v + \sum_{i=1}^n f^i v_{x_i} \, dx$  και  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  είναι το ταιριασμα του  $H^{-1}(U)$  με τον  $H_0^1(U)$ .

**Παρατήρηση 2.1.4** Από δω και στο εξής θα περιοριστούμε αποκλειστικά στην περίπτωση μηδενικών συνοριακών συνθηκών. Παρ' όλα αυτά, ένα πρόβλημα με μη-μηδενικές συνοριακές τιμές μπορεί εύκολα να μετατραπεί σε πρόβλημα μηδενικών συνοριακών συνθηκών. Για να το δείξουμε, θεωρούμε ότι το  $\partial U$  είναι  $C^1$  και η  $u \in H^1(U)$  είναι μία ασθενής λύση του

$$\begin{cases} Lu = f & \text{στο } U \\ u = g & \text{στο } \partial U. \end{cases}$$

Αυτό σημαίνει ότι  $u = g$  στο  $\partial U$  με την έννοια του ίχνους και ότι η διγραμμική μορφής ταυτότητα (2.1.9) ισχύει για κάθε  $v \in H_0^1(U)$ . Για να ισχύει αυτό, πρέπει η  $g$  να είναι το ίχνος κάποιας  $H^1$  συνάρτησης, έστω  $w$ . Τότε όμως, η  $\tilde{u} := u - w$  ανήκει στον  $H_0^1(U)$  και είναι ασθενής λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} L\tilde{u} = \tilde{f} & \text{στο } U \\ \tilde{u} = 0 & \text{στο } \partial U, \end{cases}$$

όπου  $\tilde{f} := f - Lw \in H^{-1}(U)$ .

## 2.2 Ύπαρξη Ασθενών Λύσεων

### 2.2.1 Το Θεώρημα Lax-Milgram

Υποθέτουμε για αυτή την ενότητα ότι ο  $H$  είναι ένας πραγματικός χώρος Hilbert με νόρμα  $\|\cdot\|$  και εσωτερικό γινόμενο  $(\cdot, \cdot)$ . Συμβολίζουμε ως  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  το ταίριασμα του  $H$  με τον δυικό του χώρο.

**Θεώρημα 2.2.1** (Θεώρημα Lax-Milgram). Έστω

$$B : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$$

είναι μια διγραμμική απεικόνιση για την οποία υπάρχουν σταθερές  $\alpha, \beta > 0$  τέτοιες ώστε

(i)

$$|B[u, v]| \leq \alpha \|u\| \|v\| \quad (u, v \in H)$$

και

(ii)

$$\beta \|u\|^2 \leq B[u, u] \quad (u \in H).$$

Τέλος, έστω  $f : H \rightarrow \mathbb{R}$  ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον  $H$ . Τότε, υπάρχει ένα μοναδικό στοιχείο  $u \in H$  τέτοιο ώστε

$$B[u, v] = \langle f, v \rangle \quad (2.2.1)$$

για όλες τις  $v \in H$ .

### Απόδειξη.

1. Για κάθε σταθεροποιημένο στοιχείο  $u \in H$  η απεικόνιση  $v \mapsto B[u, v]$  είναι ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον  $H$  απ' όπου το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz συνεπάγεται την ύπαρξη ενός μοναδικού στοιχείου  $w \in H$  που ικανοποιεί την

$$B[u, v] = (w, v) \quad (v \in H). \quad (2.2.2)$$

Γράφουμε  $Au = w$  όποτε ισχύει η (2.2.2). Έτσι

$$B[u, v] = (Au, v) \quad (u, v \in H) \quad (2.2.3)$$

2. Ισχυριζόμαστε πρώτα ότι ο  $A : H \rightarrow H$  είναι ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής. Πράγματι, για  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  και  $u_1, u_2 \in H$  βλέπουμε ότι για κάθε  $v \in H$

$$\begin{aligned} (A(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2), v) &= B[\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v] \text{ από την (2.2.3)} \\ &= \lambda_1 B[u_1, v] + \lambda_2 B[u_2, v] \\ &= \lambda_1 (Au_1, v) + \lambda_2 (Au_2, v) \text{ από την (2.2.3) πάλι} \\ &= (\lambda_1 Au_1 + \lambda_2 Au_2, v). \end{aligned}$$

Η ισότητα ισχύει για κάθε  $v \in H$  και άρα ο  $A$  είναι γραμμικός. Επιπλέον,

$$\|Au\|^2 = (Au, Au) = B[u, Au] \leq \alpha \|u\| \|Au\|.$$

Συνεπώς,  $\|Au\| \leq \alpha \|u\|$  για όλες τις  $u \in H$  και άρα ο  $A$  είναι φραγμένος.

3. Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ο } A \text{ είναι } 1 - 1 \text{ και} \\ \text{το } R(A), \text{ το σύνολο τιμών του } A, \text{ είναι κλειστό στον } H. \end{array} \right. \quad (2.2.4)$$

Για να το δείξουμε αυτό, υπολογίζουμε

$$\beta\|u\|^2 \leq B[u, u] = (Au, u) \leq \|Au\|\|u\|,$$

δηλαδή  $\beta\|u\| \leq \|Au\|$ . Η ανισότητα αυτή εύκολα οδηγεί στην (2.2.4).

4. Θα δείξουμε τώρα ότι

$$R(A) = H. \quad (2.2.5)$$

Αν όχι, επειδή το  $R(A)$  είναι κλειστό, θα υπήρχε ένα μη μηδενικό στοιχείο  $w \in H$  με  $w \in R(A)^\perp$ .

Αλλά αυτό με τη σειρά του οδηγεί στην αντίφαση  $\beta\|w\|^2 \leq B[w, w] = (Aw, w) = 0$ .

5. Στη συνέχεια, παρατηρούμε για άλλη μία φορά από το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz ότι

$$\langle f, v \rangle = (w, v) \quad \text{για όλες τις } v \in H$$

για κάποιο στοιχείο  $w \in H$ . Χρησιμοποιούμε, μετά, τις (2.2.4) και (2.2.5) για να βρούμε  $u \in H$  που να ικανοποιεί την  $Au = w$ . Τότε

$$B[u, v] = (Au, v) = (w, v) = \langle f, v \rangle \quad (v \in H),$$

που είναι η (2.2.1).

6. Τέλος, δείχνουμε ότι υπάρχει το πολύ ένα στοιχείο  $u \in H$  που ικανοποιεί την (2.2.1). Πράγματι, αν ίσχυε ότι υπάρχουν  $u, \tilde{u} \in H$  τέτοια ώστε  $B[u, v] = \langle f, v \rangle$  και  $B[\tilde{u}, v] = \langle f, v \rangle$ , τότε  $B[u - \tilde{u}, v] = 0$  ( $v \in H$ ). Θέτουμε  $v = u - \tilde{u}$  για να βρούμε  $\beta\|u - \tilde{u}\|^2 \leq B[u - \tilde{u}, u - \tilde{u}] = 0$  και άρα  $u = \tilde{u}$ .

■

**Παρατήρηση 2.2.1** Το Θεώρημα Lax-Milgram έχει ιδιαίτερη αξία για την περίπτωση που η διγραμμική μορφή  $B[ \cdot, \cdot ]$  δεν είναι συμμετρική. Σε αντίθετη περίπτωση, θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε κατευθείαν το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz στο εσωτερικό γινόμενο στον  $H$  που μπορεί να οριστεί ως  $((u, v)) := B[u, v]$ .

### 2.2.2 Ενεργειακές Εκτιμήσεις

Επιστρέφουμε τώρα στη συγκεκριμένη διγραμμική μορφή που είδαμε στην ενότητα 2.1.2 με τον τύπο

$$B[u, v] := \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} v + cuv \, dx$$

για  $u, v \in H_0^1(U)$  και προσπαθούμε να επαληθεύσουμε τις υποθέσεις του Θεωρήματος Lax-Milgram

**Θεώρημα 2.2.2** (Ενεργειακές Εκτιμήσεις). Υπάρχουν σταθερές  $\alpha, \beta > 0$  και  $\gamma \geq 0$  τέτοιες ώστε

(i)

$$|B[u, v]| \leq \alpha \|u\|_{H_0^1(U)} \|v\|_{H_0^1(U)}$$

και

(ii)

$$\beta \|u\|_{H_0^1(U)}^2 \leq B[u, u] + \gamma \|u\|_{L^2(U)}^2$$

για όλες τις  $u, v \in H_0^1(U)$ .

**Απόδειξη.**

1. Αρχικά δείχνουμε ότι

$$\begin{aligned} |B[u, v]| &\leq \sum_{i,j=1}^n \|a^{ij}\|_{L^\infty} \int_U |Du||Dv| \, dx \\ &+ \sum_{i=1}^n \|b^i\|_{L^\infty} \int_U |Du||v| \, dx + \|c\|_{L^\infty} \int_U |u||v| \, dx \\ &\leq \alpha \|u\|_{H_0^1(U)} \|v\|_{H_0^1(U)} \end{aligned}$$

για κατάλληλη σταθερά  $\alpha$ .

2. Επιπλέον, σύμφωνα με τη συνθήκη ελλειπτικότητας έχουμε

$$\begin{aligned} \theta \int_U |Du|^2 \, dx &\leq \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i} u_{x_j} \, dx \\ &= B[u, u] - \int_U \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} u + cu^2 \, dx \\ &\leq B[u, u] + \sum_{i=1}^n \|b^i\|_{L^\infty} \int_U |Du||u| \, dx + \|c\|_{L^\infty} \int_U u^2 \, dx. \quad (2.2.6) \end{aligned}$$

Από την Ανισότητα Cauchy με  $\varepsilon$  παρατηρούμε ότι

$$\int_U |Du||u| dx \leq \varepsilon \int_U |Du|^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon} \int_U u^2 dx \quad (\varepsilon > 0).$$

Εισάγουμε αυτή την εκτίμηση στη (2.2.6) και διαλέγουμε  $\varepsilon > 0$  τόσο μικρό ώστε

$$\varepsilon \sum_{i=1}^n \|b^i\|_{L^\infty} < \frac{\theta}{2}.$$

Έτσι

$$\frac{\theta}{2} \int_U |Du|^2 dx \leq B[u, u] + C \int_U u^2 dx$$

για κατάλληλη σταθερά  $C$ . Επιπλέον, από την Ανισότητα Poincaré στο Θεώρημα 1.6.3 έχουμε ότι

$$\|u\|_{L^2(U)} \leq C \|Du\|_{L^2(U)}.$$

Εύκολα προκύπτει ότι

$$\beta \|u\|_{H_0^1(U)}^2 \leq B[u, u] + \gamma \|u\|_{L^2(U)}^2$$

για κατάλληλες σταθερές  $\beta > 0, \gamma \geq 0$ .

■

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση που το  $\gamma$  είναι αυστηρά θετικό, η  $B[ \cdot, \cdot ]$  δεν ικανοποιεί ακριβώς τις υποθέσεις του Θεωρήματος Lax-Milgram. Για αυτό το λόγο χρειαζομαστε το επόμενο θεώρημα.

**Θεώρημα 2.2.3** (Πρώτο Θεώρημα Ύπαρξης για ασθενείς λύσεις). Υπάρχει αριθμός  $\gamma \geq 0$  τέτοιος ώστε για κάθε

$$\mu \geq \gamma \tag{2.2.7}$$

και κάθε συνάρτηση

$$f \in L^2(U)$$

να υπάρχει μία μοναδική ασθενής λύση  $u \in H_0^1(U)$  του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} Lu + \mu u = f & \text{στο } U \\ u = 0 & \text{στο } \partial U. \end{cases} \tag{2.2.8}$$

**Απόδειξη.**



1. Παίρνουμε το  $\gamma$  του προηγούμενου θεωρήματος, θεωρούμε  $\mu \geq \gamma$  και ορίζουμε τη διγραμμική μορφή

$$B_\mu[u, v] := B[u, v] + \mu(u, v) \quad (u, v \in H_0^1(U))$$

που αντιστοιχεί στον τελεστή  $L_\mu u := Lu + \mu u$ . Όπως και προηγουμένως, το  $(\cdot, \cdot)$  συμβολίζει το εσωτερικό γινόμενο στον  $L^2(U)$ . Τότε, η  $B_\mu[\cdot, \cdot]$  ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Lax-Milgram.

2. Στη συνέχεια, σταθεροποιούμε  $f \in L^2(U)$  και θέτουμε  $\langle f, v \rangle := (f, v)_{L^2(U)}$ . Αυτό είναι ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον  $L^2(U)$  και άρα στον  $H_0^1(U)$ .

Εφαρμόζουμε στη συνέχεια το Θεώρημα Lax-Milgram για να βρούμε μοναδική συνάρτηση  $u \in H_0^1(U)$  που ικανοποιεί

$$B_\mu[u, v] = \langle f, v \rangle$$

για όλες τις  $v \in H_0^1(U)$ . Ως εκ τούτου, η  $u$  είναι η μοναδική ασθενής λύση της (2.2.8).

■

**Παρατήρηση 2.2.2** Μπορούμε όμοια να δείξουμε ότι για όλες τις

$$f^i \in L^2(U) \quad (i = 0, \dots, n)$$

υπάρχει μοναδική ασθενής λύση  $u$  της ΜΔΕ

$$\begin{cases} Lu + \mu u = f^0 - \sum_{i=1}^n f_{x_i}^i & \text{στο } U \\ u = 0 & \text{στο } \partial U \end{cases} \quad (2.2.9)$$

Πράγματι, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι το  $\langle f, v \rangle = \int_U f^0 v + \sum_{i=1}^n f^i v_{x_i} dx$  είναι ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον  $H_0^1(U)$  με βάση τη συζήτηση που έγινε στην ενότητα 1.9.1.

Συγκεκριμένα, εξάγουμε ότι η απεικόνιση

$$L_\mu := L + \mu I : H_0^1(U) \rightarrow H^{-1}(U) \quad (\mu \geq \gamma)$$

είναι ισομορφισμός.

### 2.2.3 Fredholm Alternative

Πριν μπούμε στο βασικό σκοπό της ενότητας, αναφέρουμε κάποια βασικά θεωρήματα στους συμπαγείς τελεστές, τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια.

Εστω  $X, Y$  χώροι Banach.

**Ορισμός 2.2.1** Ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής

$$K : X \rightarrow Y$$

λέγεται συμπαγής αν για κάθε φραγμένη ακολουθία  $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ , η ακολουθία  $\{Ku_k\}_{k=1}^{\infty}$  είναι προσυμπαγής στον  $Y$ , δηλαδή υπάρχει υπακολουθία  $\{u_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$  τέτοια ώστε η  $\{Ku_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$  να συγκλίνει στον  $Y$ .

Στη συνέχεια, συμβολίζουμε με  $H$  ένα χώρο Hilbert με εσωτερικό γινόμενο  $(\cdot, \cdot)$ . Είναι εύκολο να δούμε ότι αν ένας γραμμικός τελεστής  $K : H \rightarrow H$  είναι συμπαγής και  $u_k \rightarrow u$ , τότε  $Ku_k \rightarrow Ku$ .

**Θεώρημα 2.2.4** Αν  $K : H \rightarrow H$  είναι συμπαγής, τότε είναι και ο  $K^* : H \rightarrow H$ .

**Θεώρημα 2.2.5** (Fredholm Alternative). Έστω  $K : H \rightarrow H$  ένας συμπαγής γραμμικός τελεστής. Τότε

- (i) ο  $N(I - K)$  έχει πεπερασμένη διάσταση,
- (ii) το  $R(I - K)$  είναι κλειστό,
- (iii)  $R(I - K) = N(I - K^*)^{\perp}$ ,
- (iv)  $N(I - K) = \{0\}$  αν και μόνο αν  $R(I - K) = H$   
και
- (v)  $\dim N(I - K) = \dim N(I - K^*)$ .

**Παρατήρηση 2.2.3** Το Θεώρημα 2.2.5 λέει στην ουσία ότι

(i) είτε

$$\begin{cases} \text{για κάθε } f \in H, \text{ η εξίσωση } u - Ku = f \\ \text{έχει μοναδική λύση} \end{cases}$$

(ii) ή

$$\begin{cases} \eta \text{ ομογενής εξίσωση } u - Ku = 0 \\ \text{έχει λύσεις } u \neq 0 \end{cases}$$

Αυτή η διχοτόμηση είναι το Fredholm Alternative. Επιπλέον, αν ισχύει η (ii), ο χώρος των λύσεων του ομογενούς προβλήματος έχει πεπερασμένη διάσταση και η μη ομογενής εξίσωση

$$u - Ku = f$$

έχει λύση αν και μόνο αν  $f \in N(I - K^*)^\perp$ .

[(i)]

**Ορισμοί 2.2.2** Έστω  $A : X \rightarrow X$  ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής

1. Το επιλύου σύνολο του  $A$  είναι το

$$\rho(A) = \{\eta \in \mathbb{R} \mid (A - \eta I) \text{ είναι 1-1 και επί}\}$$

2. Το φάσμα του  $A$  είναι το

$$\sigma(A) = \mathbb{R} - \rho(A).$$

**Ορισμοί 2.2.3** (i) Λέμε ότι ένα  $\eta \in \sigma(A)$  είναι ιδιοτιμή του  $A$  αν

$$N(A - \eta I) \neq \{0\}.$$

Γράφουμε  $\sigma_p(A)$  για να συμβολίσουμε τη συλλογή των ιδιοτιμών του  $A$ . Το  $\sigma_p(A)$  είναι το σημειακό φάσμα.

(ii) Αν η  $\eta$  είναι ιδιοτιμή και  $w \neq 0$  ικανοποιεί την

$$Aw = \eta w,$$

λέμε ότι το  $w$  είναι το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα.

**Θεώρημα 2.2.6** (Φάσμα συμπαγούς τελεστή). Έστω  $\dim H = \infty$  και ο  $K : H \rightarrow H$  είναι συμπαγής.

Τότε

1.  $0 \in \sigma(K)$ ,

$$2. \sigma(K) - \{0\} = \sigma_p(K) - \{0\},$$

3. και

$$\begin{cases} \text{το } \sigma(K) - \{0\} \text{ είναι πεπερασμένο, ή} \\ \text{το } \sigma(K) - \{0\} \text{ είναι ακολουθία που τείνει στο } 0. \end{cases}$$

Επιστρέφουμε τώρα στον τελεστή  $L$  και στον τρόπο που εφαρμόζεται σε αυτόν το Fredholm Alternative.

**Ορισμοί 2.2.4** (i) Ο συζυγής του  $L$  είναι ο τελεστής  $L^*$  για τον οποίο

$$L^*v := - \sum_{i,j=1}^n (a^{ij}v_{x_j})_{x_i} - \sum_{i=1}^n b^i v_{x_i} + (c - \sum_{i=1}^n b_{i,x_i})v$$

για  $b^i \in C^1(\bar{U})$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

(ii) Η συζυγής διγραμμική μορφή

$$B^* : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$$

ορίζεται ως

$$B^*[v, u] = B[u, v]$$

για όλες τις  $u, v \in H_0^1(U)$ .

(iii) Λέμε ότι η  $v \in H_0^1(U)$  είναι ασθενής λύση του συζυγούς προβλήματος

$$\begin{cases} L^*v = f & \text{στο } U \\ v = 0 & \text{στο } \partial U \end{cases}$$

αν

$$B^*[v, u] = (f, u)$$

για όλες τις  $u \in H_0^1(U)$ .

**Θεώρημα 2.2.7** (Δεύτερο Θεώρημα Ύπαρξης για ασθενείς λύσεις).

1. Ακριβώς ένα από τα παρακάτω ισχύει:

είτε

$$\begin{aligned}
(\alpha) \quad & \left\{ \begin{array}{l} \text{για κάθε } f \in L^2(U) \text{ υπάρχει μοναδική} \\ \text{ασθενής λύση } u \text{ του προβλήματος συνοριακών τιμών} \end{array} \right. \\
& \left\{ \begin{array}{ll} Lu = f & \text{στο } U \\ u = 0 & \text{στο } \partial U \end{array} \right. \quad (2.2.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{ή} \\
(\beta) \quad & \left\{ \begin{array}{l} \text{υπάρχει ασθενής λύση } u \neq 0 \\ \text{του ομογενούς προβλήματος} \end{array} \right. \\
& \left\{ \begin{array}{ll} Lu = 0 & \text{στο } U \\ u = 0 & \text{στο } \partial U \end{array} \right. \quad (2.2.11)
\end{aligned}$$

2. Επιπλέον, αν ισχύει η  $(\beta)$ , η διάσταση του υποχώρου  $N \subset H_0^1(U)$  των ασθενών λύσεων της (2.2.11) είναι πεπερασμένη και ίση με τη διάσταση του υποχώρου  $N^* \subset H_0^1(U)$  των ασθενών λύσεων του

$$\left\{ \begin{array}{ll} L^*v = 0 & \text{στο } U \\ v = 0 & \text{στο } \partial U \end{array} \right. \quad (2.2.12)$$

3. Τέλος, το πρόβλημα συνοριακών τιμών (2.2.10) έχει ασθενή λύση αν και μόνο αν

$$(f, v) = 0 \text{ για όλες τις } v \in N^*.$$

Η διχοτόμηση  $(\alpha), (\beta)$  είναι το Fredholm Alternative.

### Απόδειξη.

1. Διαλέγουμε  $\mu = \gamma$  όπως στο Θεώρημα 2.2.3 και ορίζουμε τη διγραμμική μορφή

$$B_\gamma[u, v] := B[u, v] + \gamma(u, v)$$

που αντιστοιχεί στον τελεστή  $L_\gamma u := Lu + \gamma u$ . Τότε για κάθε  $g \in L^2(U)$  υπάρχει μοναδική συνάρτηση  $u \in H_0^1(U)$  που λύνει το

$$B_\gamma[u, v] = (g, v) \text{ για όλες τις } v \in H_0^1(U). \quad (2.2.13)$$

Γράφουμε

$$u = L_\gamma^{-1}g \quad (2.2.14)$$

όποτε ισχύει η (2.2.13).

2. Παρατηρούμε στη συνέχεια ότι η  $u \in H_0^1(U)$  είναι ασθενής λύση της (2.2.10) αν και μόνο αν

$$B_\gamma[u, v] = (\gamma u + f, v) \quad \text{για όλες τις } v \in H_0^1(U) \quad (2.2.15)$$

δηλαδή αν και μόνο αν

$$u = L_\gamma^{-1}(\gamma u + f). \quad (2.2.16)$$

Ξαναγράφουμε αυτή την ισότητα ως

$$u - Ku = h \quad (2.2.17)$$

για

$$Ku := \gamma L_\gamma^{-1}u \quad (2.2.18)$$

και

$$h := L_\gamma^{-1}f. \quad (2.2.19)$$

3. Ισχυριζόμαστε τώρα ότι ο  $K : L^2(U) \rightarrow L^2(U)$  είναι ένας φραγμένος, γραμμικός, συμπαγής τελεστής. Πράγματι, από την επιλογή του  $\gamma$  και τις ενεργειακές εκτιμήσεις της προηγούμενης υποενότητας, παρατηρούμε ότι αν ισχύει η (2.2.13), τότε

$$\beta \|u\|_{H_0^1(U)}^2 \leq B_\gamma[u, u] = (g, u) \leq \|g\|_{L^2(U)} \|u\|_{L^2(U)} \leq \|g\|_{L^2(U)} \|u\|_{H_0^1(U)}$$

και έτσι η 2.2.18 συνεπάγεται ότι

$$\|Kg\|_{H_0^1(U)} \leq C \|g\|_{L^2(U)} \quad (g \in L^2(U))$$

για κατάλληλη σταθερά  $C$ . Αλλά επειδή  $H_0^1(U) \subset\subset L^2(U)$  σύμφωνα με το Θεώρημα Συμπάγειας Rellich-Kondrachov, εξάγουμε ότι ο  $K$  είναι συμπαγής τελεστής.

4. Μπορούμε συνεπώς να εφαρμόσουμε το Fredholm Alternative και έτσι είτε

$$(\alpha) \quad \begin{cases} \text{για κάθε } h \in L^2(U) \text{ η εξίσωση} \\ u - Ku = h \\ \text{έχει μοναδική λύση } u \in L^2(U) \end{cases} \quad (2.2.20)$$

ή

$$(\beta) \begin{cases} \text{η εξίσωση} \\ u - Ku = 0 \\ \text{έχει μη μηδενικές λύσεις στον } L^2(U). \end{cases} \quad (2.2.21)$$

Αν ισχύει η περίπτωση (α), τότε, σύμφωνα με τις (2.2.15) – (2.2.19) υπάρχει μοναδική ασθενής λύση του προβλήματος (2.2.10). Στην αντίθετη περίπτωση, αν ισχύει η (β), τότε απαραίτητα  $\gamma \neq 0$  και η διάσταση του χώρου  $N$  των λύσεων της (2.2.21) είναι πεπερασμένη και ισούται με τη διάσταση του χώρου  $N^*$  των λύσεων της

$$v - K^*v = 0 \quad (2.2.22)$$

Βλέπουμε, όμως, ότι η (2.2.21) ισχύει αν και μόνο αν η  $u$  είναι ασθενής λύση της (2.2.11) και ότι η (2.2.22) ισχύει αν και μόνο αν η  $v$  είναι ασθενής λύση της (2.2.12).

5. Τέλος, ανακαλούμε το γεγονός ότι η (2.2.20) έχει λύση αν και μόνο αν

$$(h, v) = 0 \quad (2.2.23)$$

για όλες τις  $v$  που λύνουν την (2.2.22). Αλλά τότε από τις (2.2.18), (2.2.19) και (2.2.22) υπολογίζουμε

$$(h, v) = \frac{1}{\gamma}(Kf, v) = \frac{1}{\gamma}(f, K^*v) = \frac{1}{\gamma}(f, v).$$

Συνεπώς, το πρόβλημα συνοριακών τιμών (2.2.10) έχει λύση αν και μόνο αν  $(f, v) = 0$  για όλες τις ασθενείς λύσεις  $v$  της (2.2.12).

■

**Θεώρημα 2.2.8** (Τρίτο Θεώρημα Ύπαρξης για ασθενείς λύσεις).

(i) Υπάρχει ένα το πολύ μετρήσιμο σύνολο  $\Sigma \subset \mathbb{R}$  τέτοιο ώστε το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} Lu = \lambda u + f & \text{στο } U \\ u = 0 & \text{στο } \partial U \end{cases} \quad (2.2.24)$$

να έχει μοναδική ασθενή λύση για κάθε  $f \in L^2(U)$  αν και μόνο αν  $\lambda \notin \Sigma$ .

(ii) Αν το  $\Sigma$  είναι άπειρο, τότε  $\Sigma = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ , όπου η  $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$  είναι αύξουσα (όχι κατ' ανάγκη γνησίως) ακολουθία με

$$\lambda_k \rightarrow +\infty.$$

**Ορισμός 2.2.5** Καλούμε το  $\Sigma$  το (πραγματικό) φάσμα του τελεστή  $L$ .

**Παρατήρηση 2.2.4** Παρατηρούμε ότι το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} Lu = \lambda u & \text{στο } U \\ u = 0 & \text{στο } \partial U \end{cases}$$

έχει μη τετριμμένη λύση  $w \neq 0$  αν και μόνο αν  $\lambda \in \Sigma$ , οπότε το  $\lambda$  καλείται ιδιοτιμή του  $L$  και το  $w$  το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Η ΜΔΕ  $Lu = \lambda u$  για  $L = -\Delta$  καλείται μερικές φορές Εξίσωση Helmholtz.

**Απόδειξη.**

1. Έστω  $\gamma$  η σταθερά από το Θεώρημα 2.2.2 και έστω

$$\lambda > -\gamma. \tag{2.2.25}$$

Υποθέτουμε ακόμα χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι  $\gamma > 0$ .

2. Σύμφωνα με το Fredholm Alternative το πρόβλημα συνοριακών τιμών (2.2.24) έχει μοναδική ασθενή λύση για κάθε  $f \in L^2(U)$  αν και μόνο αν η  $u \equiv 0$  είναι η μόνη ασθενής λύση του ομογενούς προβλήματος

$$\begin{cases} Lu = \lambda u & \text{στο } U \\ u = 0 & \text{στο } \partial U \end{cases}$$

Αυτό με τη σειρά του ισχύει αν και μόνο αν η  $u \equiv 0$  είναι η μόνη ασθενής λύση του

$$\begin{cases} Lu + \gamma u = (\gamma + \lambda)u & \text{στο } U \\ u = 0 & \text{στο } \partial U \end{cases} \tag{2.2.26}$$

Η (2.2.26) τώρα, ισχύει ακριβώς όταν

$$u = L_{\gamma}^{-1}(\gamma + \lambda)u = \frac{\gamma + \lambda}{\gamma}Ku, \tag{2.2.27}$$



όπου, όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.7, έχουμε θέσει  $Ku = \gamma L_\gamma^{-1}u$ . Από την ίδια απόδειξη ανακαλούμε ακόμα ότι ο  $K : L^2(U) \rightarrow L^2(U)$  είναι ένας φραγμένος, γραμμικός, συμπαγής τελεστής.

Τώρα, αν  $u \equiv 0$  είναι η μοναδική λύση της (2.2.27), βλέπουμε ότι

$$\frac{\gamma}{\gamma + \lambda} \text{ δεν είναι ιδιοτιμή του } K. \quad (2.2.28)$$

Συνεπώς, βλέπουμε ότι η ΜΔΕ (2.2.24) έχει μοναδική ασθενή λύση για κάθε  $f \in L^2(U)$  αν και μόνο αν ισχύει η (2.2.28).

3. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2.6 η συλλογή όλων των ιδιοτιμών του  $K$  αποτελεί είτε ένα πεπερασμένο σύνολο ή μια ακολουθία τιμών που τείνουν στο μηδέν. Στη δεύτερη περίπτωση, βλέπουμε σύμφωνα με τις (2.2.25) και (2.2.27) ότι η ΜΔΕ (2.2.24) έχει μοναδική ασθενή λύση για όλες τις  $f \in L^2(U)$  εκτός από μία ακολουθία  $\lambda_k \rightarrow +\infty$ .

■

**Θεώρημα 2.2.9** (Φράγμα του αντιστρόφου). Αν  $\lambda \notin \Sigma$ , υπάρχει μία σταθερά  $C$  τέτοια ώστε

$$\|u\|_{L^2(U)} \leq C \|f\|_{L^2(U)}, \quad (2.2.29)$$

οποιοδήποτε  $f \in L^2(U)$  και η  $u \in H_0^1(U)$  είναι η μοναδική ασθενής λύση του

$$\begin{cases} Lu = \lambda u + f & \text{στο } U \\ u = 0 & \text{στο } \partial U. \end{cases}$$

Η σταθερά  $C$  εξαρτάται μόνο από τα  $\lambda, U$  και τους συντελεστές του  $L$ .

Αυτή η σταθερά εκτινάσσεται αν το  $\lambda$  πλησιάσει κάποια ιδιοτιμή.

**Απόδειξη.** Αν όχι, θα υπήρχαν  $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset L^2(U)$  και  $\{u_k\}_{k=1}^\infty \subset H_0^1(U)$  τέτοιες ώστε

$$\begin{cases} Lu_k = \lambda u_k + f_k & \text{στο } U \\ u_k = 0 & \text{στο } \partial U. \end{cases}$$

με την ασθενή έννοια, αλλά

$$\|u_k\|_{L^2(U)} > k \|f_k\|_{L^2(U)} \quad (k = 1, \dots).$$

Μιας και μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι  $\|u_k\|_{L^2(U)} = 1$ , βλέπουμε ότι  $f_k \rightarrow 0$  στον  $L^2(U)$ . Σύμφωνα με τις συνήθεις ενεργειακές εκτιμήσεις η ακολουθία  $\{u_k\}_{k=1}^\infty$  είναι φραγμένη στον  $H_0^1(U)$ . Έτσι, υπάρχει υπακολουθία  $\{u_{k_j}\}_{j=1}^\infty \subset \{u_k\}_{k=1}^\infty$  τέτοια ώστε

$$\begin{cases} u_{k_j} \rightharpoonup u & \text{ασθενώς στον } H_0^1(U), \\ u_{k_j} \rightarrow u & \text{στον } L^2(U). \end{cases} \quad (2.2.30)$$

Έτσι, η  $u$  είναι ασθενής λύση του

$$\begin{cases} Lu = \lambda u & \text{στο } U \\ u = 0 & \text{στο } \partial U. \end{cases}$$

Επειδή  $\lambda \notin \Sigma$ ,  $u \equiv 0$ . Όμως, η (2.2.30) συνεπάγεται επίσης ότι  $\|u\|_{L^2(U)} = 1$ , που αποτελεί αντίφαση και οδηγηθήκαμε σε Άτοπο. ■

**Παρατήρηση 2.2.5 Μιγαδικές Λύσεις.** Η προηγούμενη θεωρία επεκτείνεται εύκολα για να συμπεριλάβει λύσεις με μιγαδικές τιμές. Δοσμένων μιγαδικών συναρτήσεων  $u, v \in H^1(U)$  γράφουμε

$$(u, v)_{L^2(U)} := \int_U u \bar{v} \, dx, \quad (u, v)_{H^1(U)} := \int_U Du \cdot D\bar{v} + u \bar{v} \, dx$$

και θέτουμε

$$B[u, v] := \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i} \bar{v}_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} \bar{v} + cu \bar{v} \, dx$$

όπου με  $\bar{\phantom{x}}$  συμβολίζουμε τον μιγαδικό συζυγή. Σε αυτή την περίπτωση θα ισχύει

$$|B[u, v]| \leq \alpha \|u\|_{H_0^1(U)} \|v\|_{H_0^1(U)},$$

$$\beta \|u\|_{H_0^1(U)}^2 \leq \operatorname{Re} B[u, u] + \gamma \|u\|_{L^2(U)}^2 \quad (u, v \in H_0^1(U))$$

για κατάλληλες σταθερές  $\alpha, \beta > 0, \gamma \geq 0$ . Τα μιγαδικά ανάλογα του Θεωρήματος Lax-Milgram και του Fredholm Alternative οδηγούν στα ανάλογα των Θεωρημάτων 2.2.3 και 2.2.7-2.2.9.

## 2.3 Ομαλότητα

Θα εξετάσουμε τώρα το κατά πόσο μία ασθενής λύση  $u$  της ΜΔΕ

$$Lu = f \quad \text{στο } U \quad (2.3.1)$$

είναι πράγματι ομαλή.

**Παρατήρηση 2.3.1 (Κίνητρο: Τυπική εξαγωγή εκτιμήσεων.)** Για να δούμε ότι υπάρχει πράγματι ελπίδα μία ασθενής λύση να είναι καλύτερη από μία τυπική συνάρτηση στον  $H_0^1(U)$ , θεωρούμε το στοιχειώδες πρόβλημα

$$-\Delta u = f \text{ στον } \mathbb{R}^n. \quad (2.3.2)$$

Υποθέτουμε, για να μπορέσουμε να εκτελέσουμε τους ακόλουθους υπολογισμούς, ότι η  $u$  είναι ομαλή και εξαφανίζεται γρήγορα καθώς  $|x| \rightarrow \infty$ . Υπολογίζουμε τότε

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta u)^2 dx = \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} u_{x_i x_i} u_{x_j x_j} dx \\ &= - \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} u_{x_i x_i x_j} u_{x_j} dx \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} u_{x_i x_j} u_{x_i x_j} dx = \int_{\mathbb{R}^n} |D^2 u|^2 dx. \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Βλέπουμε, άρα, ότι η  $L^2$ -νόρμα της δεύτερης παραγώγου της  $u$  ισούται με την  $L^2$ -νόρμα της  $f$ . Όμοια, αν παραγωγίσουμε τη (2.3.2) βρίσκουμε

$$-\Delta \tilde{u} = \tilde{f},$$

για  $\tilde{u} := u_{x_k}$  και  $\tilde{f} := f_{x_k}$  ( $k = 1, \dots, n$ ). Εφαρμόζοντας την ίδια μέθοδο, βρίσκουμε ότι η  $L^2$ -νόρμα της τρίτης παραγώγου της  $u$  εκτιμάται από την  $L^2$ -νόρμα της πρώτης παραγώγου της  $f$ . Συνεχίζοντας, βλέπουμε ότι η  $L^2$ -νόρμα της  $(m+2)$  παραγώγου της  $u$  εκτιμάται από την  $L^2$ -νόρμα της  $m$  παραγώγου της  $f$  για  $m = 0, 1, \dots$

Αυτοί οι υπολογισμοί δείχνουν ότι για την εξίσωση Poisson (2.3.2) μπορούμε να περιμένουμε ότι μία ασθενής λύση  $u \in H_0^1$  θα ανήκει τελικά στον  $H^{m+2}$  οποτεδήποτε ο μη-ομογενής όρος  $f$  ανήκει στον  $H^m$  ( $m = 1, \dots$ ). Ανεπίσημα θα λέμε ότι η  $u$  "έχει δύο παραπάνω παραγώγους στον  $L^2$  από ότι η  $f$ ". Αυτό είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρον στην περίπτωση που  $m = \infty$  αφού τότε η  $u$  θα ανήκει στον  $H^m$  για όλα τα  $m = 1, \dots$  και, άρα, θα ανήκει στον  $C^\infty$ .

Παρατηρούμε, βέβαια, ότι οι παραπάνω υπολογισμοί δεν αποτελούν επί της ουσίας απόδειξη, αφού για την εκτίμηση (2.3.3) υποθέσαμε ότι η  $u$  ήταν ομαλή ή έστω  $C^3$  και άρα τέτοιοι υπολογισμοί δεν μπορούν να προκύψουν απευθείας όταν ξεκινάμε απλά με μία ασθενή λύση στον  $H_0^1$ . Αυτό θα καλυφθεί από την ανάλυση συγκεκριμένων πηλίκων διαφορών παρακάτω.

### 2.3.1 Ομαλότητα στο εσωτερικό

Υποθέτουμε, όπως πάντα, ότι το  $U \subset \mathbb{R}^n$  είναι ένα φραγμένο, ανοιχτό σύνολο. Υποθέτουμε ακόμα ότι η  $u \in H_0^1(U)$  είναι η ασθενής λύση της ΜΔΕ (2.3.1) όπου ο  $L$  έχει τη μορφή απόκλισης

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n (a^{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x)u_{x_i} + c(x)u. \quad (2.3.4)$$

Για τις συναρτήσεις-συντελεστές θα κάνουμε διάφορες υποθέσεις στη συνέχεια, ενώ συνεχίζουμε να θεωρούμε την υπόθεση ελλειπτικότητας.

**Θεώρημα 2.3.1** ( $H^2$ -Ομαλότητα στο εσωτερικό). Έστω

$$a^{ij} \in C^1(U), \quad b^i, c \in L^\infty(U) \quad (i, j = 1, \dots, n) \quad (2.3.5)$$

και

$$f \in L^2(U). \quad (2.3.6)$$

Υποθέτουμε, επιπλέον, ότι η  $u \in H^1(U)$  είναι ασθενής λύση της ελλειπτικής ΜΔΕ

$$Lu = f \quad \text{στο } U.$$

Τότε

$$u \in H_{loc}^2(U) \quad (2.3.7)$$

και για κάθε ανοιχτό  $V \subset\subset U$  έχουμε την εκτίμηση

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)}) \quad (2.3.8)$$

όπου η σταθερά  $C$  εξαρτάται μόνο από τα  $V, U$  και τους συντελεστές του  $L$ .

**Παρατηρήσεις 2.3.2** (i) Παρατηρούμε ότι δεν απαιτούμε  $u \in H_0^1(U)$ , δηλαδή δεν ζητάμε να ισχύει κατ' ανάγκη ότι  $u = 0$  στο  $\partial U$  με την έννοια του ίχνους.

(ii) Παρατηρούμε επιπλέον ότι αφού  $u \in H_{loc}^2(U)$ , έχουμε ότι

$$Lu = f \quad \text{σχεδόν παντού στο } U.$$

Έτσι, η  $u$  πράγματι λύνει τη ΜΔΕ, τουλάχιστον για σχεδόν όλα τα σημεία του  $U$ . Για να το δούμε αυτό, παρατηρούμε ότι για κάθε  $v \in C_c^\infty(U)$ , έχουμε ότι

$$B[u, v] = (f, v).$$

Επειδή  $u \in H_{loc}^2(U)$ , μπορούμε να κάνουμε παραγοντική ολοκλήρωση και να προκύψει ότι

$$B[u, v] = (Lu, v).$$

Έτσι,  $(Lu - f, v) = 0$  για όλες τις  $v \in C_c^\infty(U)$  και άρα  $Lu = f$  σχεδόν παντού.

### Απόδειξη.

1. Σταθεροποιούμε ένα ανοιχτό σύνολο  $V \subset\subset U$  και διαλέγουμε ένα ανοιχτό σύνολο  $W$  τέτοιο ώστε  $V \subset\subset W \subset\subset U$ . Διαλέγουμε τότε μια ομαλή συνάρτηση  $\zeta$  που ικανοποιεί:

$$\begin{cases} \zeta \equiv 1 \text{ στο } V, \zeta \equiv 0 \text{ στο } \mathbb{R}^n - W, \\ 0 \leq \zeta \leq 1. \end{cases}$$

Ονομάζουμε τη  $\zeta$  συνάρτηση αποκοπής: ο ρόλος της στους παρακάτω υπολογισμούς θα είναι να περιορίσει όλες τις εκφράσεις στο υποσύνολο  $W$ , που έχει κάποια θετική απόσταση από το  $\partial U$ . Αυτό είναι απαραίτητο, μιας και δεν έχουμε καμία πληροφορία για τη συμπεριφορά της  $u$  κοντά στο  $\partial U$ .

2. Επειδή τώρα η  $u$  είναι ασθενής λύση της (2.3.1), έχουμε ότι  $B[u, v] = (f, v)$  για όλες τις  $v \in H_0^1(U)$ . Συνεπώς,

$$\sum_{i,j=1}^n \int_U a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} dx = \int_U \tilde{f} v dx, \quad (2.3.9)$$

όπου

$$\tilde{f} := f - \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} - cu. \quad (2.3.10)$$

3. Παίρνουμε ένα μικρό  $|h| > 0$ , διαλέγουμε  $k \in \{1, \dots, n\}$  και αντικαθιστούμε την

$$v := -D_k^{-h}(\zeta^2 D_k^h u) \quad (2.3.11)$$

στη (2.3.9), όπου, όπως ορίσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο,

$$D_k^h u(x) = \frac{u(x + h e_k) - u(x)}{h} \quad (h \in \mathbb{R}, h \neq 0).$$

Γράφουμε την έκφραση που προκύπτει ως

$$A = B \quad (2.3.12)$$

για

$$A := \sum_{i,j=1}^n \int_U a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} dx \quad (2.3.13)$$

και

$$B := \int_U \tilde{f} v dx. \quad (2.3.14)$$

4. Εκτιμηση του  $A$ . Έχουμε

$$\begin{aligned} A &= - \sum_{i,j=1}^n \int_U a^{ij} u_{x_i} \left[ D_k^{-h} (\zeta^2 D_k^h u) \right]_{x_j} dx \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_U D_k^h (a^{ij} u_{x_i}) (\zeta^2 D_k^h u)_{x_j} dx \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_U a^{ij,h} (D_k^h u_{x_i}) (\zeta^2 D_k^h u)_{x_j} + (D_k^h a^{ij}) u_{x_i} (\zeta^2 D_k^h u)_{x_j} dx. \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

Εδώ χρησιμοποιήσαμε τους τύπους

$$\int_U v D_k^{-h} w dx = - \int_U w D_k^h v dx \quad (2.3.16)$$

και

$$D_k^h (vw) = v^h D_k^h w + w D_k^h v \quad (2.3.17)$$

για  $v^h(x) := v(x + h e_k)$ .

Επιστρέφοντας τώρα στη (2.3.15), βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i,j=1}^n \int_U a^{ij,h} D_k^h u_{x_i} D_k^h u_{x_j} \zeta^2 dx \\ &+ \sum_{i,j=1}^n \int_U [a^{ij,h} D_k^h u_{x_i} D_k^h u_{x_j} 2\zeta \zeta_{x_j} + (D_k^h a^{ij}) u_{x_i} D_k^h u_{x_j} \zeta^2 + (D_k^h a^{ij}) u_{x_i} D_k^h u_{x_j} 2\zeta \zeta_{x_j}] dx \\ &=: A_1 + A_2. \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

Η συνθήκη ομοιόμορφης ελλειπτικότητας συνεπάγεται

$$A_1 \geq \theta \int_U \zeta^2 |D_k^h Du|^2 dx. \quad (2.3.19)$$

Επιπλέον, βλέπουμε από τη (2.3.5) ότι

$$|A_2| \leq C \int_U \zeta |D_k^h Du| |D_k^h u| + \zeta |D_k^h Du| |Du| + \zeta |D_k^h u| |Du| dx$$

για κατάλληλη σταθερά  $C$ . Η ανισότητα του Cauchy με  $\varepsilon$  όμως δίνει το φράγμα

$$|A_2| \leq \varepsilon \int_U \zeta^2 |D_k^h Du|^2 dx + \frac{C}{\varepsilon} \int_W |D_k^h u|^2 + |Du|^2 dx.$$

Διαλέγουμε  $\varepsilon = \frac{\theta}{2}$  και ανακαλώντας από την ενότητα 1.8 την εκτίμηση

$$\int_W |D_k^h u|^2 dx \leq C \int_U |Du|^2 dx$$

παίρνουμε την ανισότητα

$$|A_2| \leq \frac{\theta}{2} \int_U \zeta^2 |D_k^h Du|^2 dx + C \int_U |Du|^2 dx.$$

Αυτή η εκτίμηση, η (2.3.19) και η (2.3.18) συνεπάγονται τελικά ότι

$$A \geq \frac{\theta}{2} \int_U \zeta^2 |D_k^h Du|^2 dx - C \int_U |Du|^2 dx. \quad (2.3.20)$$

5. Εκτίμηση του  $B$ . Ανακαλώντας τις (2.3.10), (2.3.11) και (2.3.14) βρίσκουμε

$$|B| \leq C \int_U (|f| + |Du| + |u|)|v| dx. \quad (2.3.21)$$

Τώρα, από το Θεώρημα 1.8.3 έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_U |v|^2 dx &\leq C \int_U |D(\zeta^2 D_k^h u)|^2 dx \\ &\leq C \int_W |D_k^h u|^2 + \zeta^2 |D_k^h Du|^2 dx \\ &\leq C \int_U |Du|^2 + \zeta^2 |D_k^h Du|^2 dx. \end{aligned}$$

Έτσι, η (2.3.21) και η ανισότητα του Cauchy με  $\varepsilon$  συνεπάγονται

$$|B| \leq \varepsilon \int_U \zeta^2 |D_k^h Du|^2 dx + \frac{C}{\varepsilon} \int_U f^2 + u^2 dx + \frac{C}{\varepsilon} \int_U |Du|^2 dx.$$

Διαλέγουμε  $\varepsilon = \frac{\theta}{4}$ , για να πάρουμε

$$|B| \leq \frac{\theta}{4} \int_U \zeta^2 |D_k^h Du|^2 dx + C \int_U f^2 + u^2 + |Du|^2 dx. \quad (2.3.22)$$

6. Συνδυάζουμε, τέλος, τις (2.3.12), (2.3.20) και (2.3.22), για να βρούμε

$$\int_V |D_k^h Du|^2 dx \leq \int_U \zeta^2 |D_k^h Du|^2 dx \leq C \int_U f^2 + u^2 + |Du|^2 dx$$

για  $k = 1, \dots, n$  και όλα τα αρκετά μικρά  $|h| \neq 0$ .

Με βάση το Θεώρημα 1.8.3 πάλι, συμπεραίνουμε ότι  $Du \in H_{loc}^1(U)$  και άρα  $u \in H_{loc}^2(U)$  με την εκτίμηση

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{H^1(U)}). \quad (2.3.23)$$

7. Βελτιώνουμε τώρα τη (2.3.23) παρατηρώντας ότι αν  $V \subset\subset W \subset\subset U$ , τότε το ίδιο επιχείρημα δίνει

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C(\|f\|_{L^2(W)} + \|u\|_{H^1(W)}) \quad (2.3.24)$$

για κατάλληλη σταθερά  $C$  που εξαρτάται μόνο από τα  $V, W$  κλπ. Διαλέγουμε μια καινούρια συνάρτηση αποκοπής  $\zeta$  τέτοια ώστε

$$\begin{cases} \zeta \equiv 1 \text{ στο } W, \text{ spt } \zeta \subset U, \\ 0 \leq \zeta \leq 1. \end{cases}$$

Θέτουμε τώρα  $v = \zeta^2 u$  στην ταυτότητα (2.3.9) και κάνουμε στοιχειώδεις υπολογισμούς για να βρούμε

$$\int_U \zeta^2 |Du|^2 dx \leq C \int_U f^2 + u^2 dx.$$

Άρα

$$\|u\|_{H^1(W)} \leq C(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)}).$$

Αυτή η ανισότητα και η (2.3.24) δίνουν τη (2.3.8).

■

Με επαγωγικό επιχείρημα προκύπτει και το επόμενο θεώρημα

**Θεώρημα 2.3.2** (Μεγαλύτερη ομαλότητα στο εσωτερικό). Έστω  $m$  ένας μη αρνητικός ακέραιος και έστω

$$a^{ij}, b^i, c \in C^{m+1}(U) \quad (i, j = 1, \dots, n) \quad (2.3.25)$$

και

$$f \in H^m(U). \quad (2.3.26)$$

Έστω  $u \in H^1(U)$  μία ασθενής λύση της ελλειπτικής ΜΔΕ

$$Lu = f \text{ στο } U.$$



Τότε

$$u \in H_{loc}^{m+2}(U) \quad (2.3.27)$$

και για κάθε  $V \subset\subset U$  έχουμε την εκτίμηση

$$\|u\|_{H^{m+2}(V)} \leq C(\|f\|_{H^m(U)} + \|u\|_{L^2(U)}) \quad (2.3.28)$$

όπου η  $C$  εξαρτάται μόνο από τα  $m, U, V$  και τους συντελεστές του  $L$ .

Μπορούμε τώρα να εφαρμόσουμε επανειλημμένα το Θεώρημα 2.3.2 για  $m = 0, 1, 2, \dots$  για να εξαγάγουμε μέσω της Γενικής Ανισότητας Sobolev την άπειρη παραγωγισιμότητα της  $u$ .

**Θεώρημα 2.3.3** (Άπειρη παραγωγισιμότητα στο εσωτερικό). Έστω

$$a^{ij}, b^i, c \in C^\infty(U) \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

και

$$f \in C^\infty(U).$$

Έστω  $u \in H^1(U)$  είναι μία ασθενής λύση της ελλειπτικής ΜΔΕ

$$Lu = f \quad \text{στο } U.$$

Τότε

$$u \in C^\infty(U).$$

### 2.3.2 Ομαλότητα στο σύνορο

Εδώ επεκτείνουμε τα προηγούμενα αποτελέσματα και μελετάμε την ομαλότητα της ασθενούς λύσης στο σύνορο.

**Θεώρημα 2.3.4** ( $H^2$ -ομαλότητα στο σύνορο). Έστω

$$a^{ij} \in C^1(\bar{U}), b^i, c \in L^\infty(U) \quad (i, j = 1, \dots, n) \quad (2.3.29)$$

και

$$f \in L^2(U). \quad (2.3.30)$$

Έστω ότι  $u \in H_0^1(U)$  είναι ασθενής λύση του ελλειπτικού προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} Lu = f & \text{στο } U \\ u = 0 & \text{στο } \partial U. \end{cases} \quad (2.3.31)$$

Υποθέτουμε τέλος ότι

$$\text{το } \partial U \text{ είναι } C^2. \quad (2.3.32)$$

Τότε

$$u \in H^2(U)$$

και έχουμε την εκτίμηση

$$\|u\|_{H^2(U)} \leq C(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)}) \quad (2.3.33)$$

όπου η  $C$  εξαρτάται μόνο από το  $U$  και τους συντελεστές του  $L$ .

**Παρατηρήσεις 2.3.3** (i) Αν η  $u \in H_0^1(U)$  είναι η μοναδική ασθενής λύση της (2.3.31), τότε, λόγω του Θεωρήματος 2.2.9, η (2.3.33) απλοποιείται σε

$$\|u\|_{H^2(U)} \leq C\|f\|_{L^2(U)}.$$

(ii) Σε αντίθεση με τα θεώρηματα της προηγούμενης ενότητας, τώρα ζητάμε  $u = 0$  στο  $\partial U$  με την έννοια του ίχνους.

**Απόδειξη.**

1. Εξετάζουμε πρώτα την ειδική περίπτωση που το  $U$  είναι η μισή μπάλα

$$U = B^0(0, 1) \cap \mathbb{R}_+^n. \quad (2.3.34)$$

Θέτουμε  $V := B^0(0, \frac{1}{2}) \cap \mathbb{R}_+^n$ . Διαλέγουμε τότε μία ομαλή συνάρτηση αποκοπής  $\zeta$  που ικανοποιεί (!! το από κάτω στο βιβλίο το έχει  $B(0, \frac{1}{2})$ . Το σωστό είναι με ή χωρίς τον 'εκθέτη' 0; )

$$\begin{cases} \zeta \equiv 1 \text{ στη } B^0(0, \frac{1}{2}), \zeta \equiv 0 \text{ στο } \mathbb{R}^n - B(0, 1), \\ 0 \leq \zeta \leq 1. \end{cases}$$

Έτσι,  $\zeta \equiv 1$  στο  $V$  και η  $\zeta$  εξαφανίζεται κοντά στο καμπυλωτό μέρος του  $\partial U$ .

2. Μιας και η  $u$  είναι ασθενής λύση της (2.3.31) έχουμε  $B[u, v] = (f, v)$  για όλες τις  $v \in H_0^1(U)$ .

Συνεπώς

$$\sum_{i,j=1}^n \int_U a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} dx = \int_U \tilde{f} v dx \quad (2.3.35)$$

για

$$\tilde{f} := f - \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} - cu. \quad (2.3.36)$$

3. Παίρνουμε τώρα  $h > 0$  μικρό, διαλέγουμε  $k \in \{1, \dots, n-1\}$  και γράφουμε

$$v := -D_k^{-h}(\zeta^2 D_k^h u).$$

Παρατηρούμε ότι για  $x \in U$

$$\begin{aligned} v(x) &= -\frac{1}{h} D_k^{-h}(\zeta^2(x)[u(x + he_k) - u(x)]) \\ &= -\frac{1}{h^2}(\zeta^2(x - he_k)[u(x) - u(x - he_k)] - \zeta^2(x)[u(x + he_k) - u(x)]). \end{aligned}$$

Επειδή τώρα  $u = 0$  στο  $\{x_n = 0\}$  με την έννοια του ίχνους και  $\zeta \equiv 0$  κοντά στο καμπυλωτό μέρος του  $\partial U$ , βλέπουμε ότι  $v \in H_0^1(U)$ .

Μπορούμε, άρα, να αντικαταστήσουμε τη  $v$  στην ταυτότητα (2.3.35) και γράφουμε την έκφραση που προκύπτει ως

$$A = B \quad (2.3.37)$$

για

$$A := \sum_{i,j=1}^n \int_U a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} dx \quad (2.3.38)$$

και

$$B := \int_U \tilde{f} v dx. \quad (2.3.39)$$

4. Μπορούμε τώρα να προσεγγίσουμε τους όρους  $A$  και  $B$  με σχεδόν ακριβώς τον ίδιο τρόπο που το κάναμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.1. Μετά από κάποιους υπολογισμούς βρίσκουμε

$$A \geq \frac{\theta}{2} \int_U \zeta^2 |D_k^h Du|^2 dx - C \int_U |Du|^2 dx \quad (2.3.40)$$

και

$$|B| \leq \frac{\theta}{4} \int_U \zeta^2 |D_k^h Du|^2 dx + C \int_U f^2 + u^2 + |Du|^2 dx \quad (2.3.41)$$

για κατάλληλες σταθερές  $C$ . Στη συνέχεια, συνδυάζουμε τις (2.3.27), (2.3.40) και (2.3.41) για να βρούμε

$$\int_V |D_k^h Du|^2 dx \leq C \int_U f^2 + u^2 + |Du|^2 dx$$

για  $k = 1, \dots, n-1$ . Έτσι, με βάση την Παρατήρηση 1.8.2 προκύπτει ότι

$$u_{x_k} \in H^1(V) \quad (k = 1, \dots, n-1)$$

με την εκτίμηση

$$\sum_{\substack{k,l=1 \\ k+l < 2n}}^n \|u_{x_k x_l}\|_{L^2(V)} \leq C(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{H^1(U)}). \quad (2.3.42)$$

5. Πρέπει τώρα να ενισχύσουμε την (2.3.42) με μια εκτίμηση για την  $L^2$ -νόρμα της  $u_{x_n x_n}$  στο  $V$ . Για αυτό, ανακαλούμε από την Παρατήρηση 2.3.2 ότι  $Lu = f$  σχεδόν παντού στο  $U$ . Με βάση τον ορισμό του  $L$ , γράφουμε αυτή την ισότητα σε μορφή μη-απόκλισης ως

$$-\sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n \tilde{b}^i u_{x_i} + cu = f \quad (2.3.43)$$

για  $\tilde{b}^i := b^i - \sum_{j=1}^n a_{x_j}^{ij}$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Έτσι βλέπουμε ότι

$$a^{nn} u_{x_n x_n} = -\sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j < 2n}}^n a^{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n \tilde{b}^i u_{x_i} + cu - f. \quad (2.3.44)$$

Σύμφωνα τώρα με τη συνθήκη ομοιόμορφης ελλειπτικότητας,  $\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2$  για όλα τα  $x \in U, \xi \in \mathbb{R}^n$ . Θέτουμε  $\xi = e_n = (0, \dots, 0, 1)$  για να καταλήξουμε ότι

$$a^{nn}(x) \geq \theta > 0 \quad (2.3.45)$$

για όλα τα  $x \in U$ . Αλλά τότε οι (2.3.29), (2.3.44) και (2.3.45) συνεπάγονται ότι

$$|u_{x_n x_n}| \leq C \left( \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j < 2n}}^n |u_{x_i x_j}| + |Du| + |u| + |f| \right) \quad (2.3.46)$$

στο  $U$ . Χρησιμοποιώντας αυτή την εκτίμηση και την (2.3.42), συμπεραίνουμε ότι  $u \in H^2(V)$  και

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{H^1(U)}) \quad (2.3.47)$$

για κατάλληλη σταθερά  $C$ .

6. Αφήνουμε τώρα την υπόθεση ότι το  $U$  είναι μία μισή μπάλα με τη μορφή (2.3.34). Στη γενική περίπτωση, διαλέγουμε τυχαίο  $x^0 \in \partial U$  και παρατηρούμε ότι αφού το  $\partial U$  είναι  $C^2$ , μπορούμε να υποθέσουμε-αλλάζοντας τους άξονες συντεταγμένων, αν χρειαστεί- ότι

$$U \cap B(x^0, r) = \{x \in B(x^0, r) \mid x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\}$$

για κάποιο  $r > 0$  και κάποια  $C^2$  συνάρτηση  $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ . Όπως συνήθως, αλλάζουμε μεταβλητές και γράφουμε

$$y = \Phi(x), \quad x = \Psi(y). \quad (2.3.48)$$

7. Διαλέγουμε  $s > 0$  τόσο μικρο ώστε η μισή μπάλα  $U' := B^0(0, s) \cap \{y_n > 0\}$  να βρίσκεται στο  $\Phi(U \cap B(x^0, r))$ . Θέτουμε  $V' := B^0(0, s/2) \cap \{y_n > 0\}$ . Τέλος, ορίζουμε

$$u'(y) := u(\Psi(y)) \quad (y \in U'). \quad (2.3.49)$$

Άμεσα προκύπτει

$$u' \in H^1(U') \quad (2.3.50)$$

και

$$u' = 0 \quad \text{στο } \partial U' \cap \{y_n = 0\} \quad (2.3.51)$$

με την έννοια του ίχνους.

8. Ισχυριζόμαστε τώρα ότι η  $u'$  είναι ασθενής λύση της ΜΔΕ

$$L'u' = f' \quad \text{στο } U' \quad (2.3.52)$$

για

$$f'(y) := f(\Psi(y)) \quad (2.3.53)$$

και

$$L'u' := - \sum_{k,l=1}^n (a'^{kl} u'_{y_k})_{y_l} + \sum_{k=1}^n b'^k u'_{y_k} + c'u' \quad (2.3.54)$$

όπου

$$a'^{kl}(y) := \sum_{r,s=1}^n a^{rs}(\Psi(y)) \Phi_{x_r}^k(\Psi(y)) \Phi_{x_s}^l(\Psi(y)) \quad (k, l = 1, \dots, n), \quad (2.3.55)$$

$$b'^k(y) := \sum_{r=1}^n b^r(\Psi(y)) \Phi_{x_r}^k(\Psi(y)) \quad (k = 1, \dots, n) \quad (2.3.56)$$

και

$$c'(y) := c(\Psi(y)) \quad (2.3.57)$$

για  $y \in U'$ ,  $k, l = 1, \dots, n$ .

Αν  $v' \in H_0^1(U')$  και το  $B'[\cdot, \cdot]$  συμβολίζει τη διγραμμική μορφή που συνδέεται με τον τελεστή  $L'$ , έχουμε

$$B'[u', v'] = \int_{U'} \sum_{k,l=1}^n a'^{kl} u'_{y_k} v'_{y_l} + \sum_{k=1}^n b'^k u'_{y_k} v' + c' u' v' dy. \quad (2.3.58)$$

Ορίζουμε τώρα

$$v(x) := v'(\Phi(x)).$$

Τότε, από την (2.3.58) υπολογίζουμε

$$B'[u', v'] = \sum_{i,j=1}^n \sum_{k,l=1}^n \int_U a'^{kl} u_{x_i} \Psi_{y_k}^i v_{x_j} \Psi_{y_l}^j dy + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \int_U b'^k u_{x_i} \Psi_{y_k}^i v dy + \int_U c' uv dy. \quad (2.3.59)$$

Σύμφωνα τώρα με την (2.3.55) βρίσκουμε για κάθε  $i, j = 1, \dots, n$  ότι

$$\sum_{k,l=1}^n a'^{kl} \Psi_{y_k}^i \Psi_{y_l}^j = \sum_{r,s=1}^n \sum_{k,l=1}^n a^{rs} \Phi_{x_r}^k \Phi_{x_s}^l \Psi_{y_k}^i \Psi_{y_l}^j = a^{ij}$$

αφού  $D\Phi = (D\Psi)^{-1}$ . Όμοια, για  $i = 1, \dots, n$  έχουμε

$$\sum_{k=1}^n b'^k \Psi_{y_k}^i = \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n b^r \Phi_{x_r}^k \Psi_{y_k}^i = b^i.$$

Αντικαθιστώντας αυτούς τους υπολογισμούς στην (2.3.59) και αλλάζοντας μεταβλητές παίρνουμε, δεδομένου ότι  $|\det D\Phi| = 1$ ,

$$\begin{aligned} B'[u', v'] &= \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} v + c u v dx \\ &= B[u, v] = (f, v)_{L^2(U)} = (f', v')_{L^2(U')}. \end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει τη (2.3.52).

9. Ελέγχουμε τώρα ότι ο τελεστής  $L'$  είναι ομοιόμορφα ελλειπτικός στο  $U'$ . Πράγματι, αν  $y \in U'$  και  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \sum_{k,l=1}^n a'^{kl}(y) \xi_k \xi_l &= \sum_{r,s=1}^n \sum_{k,l=1}^n a^{rs}(\Psi(y)) \Phi_{x_r}^k \Phi_{x_s}^l \xi_k \xi_l \\ &= \sum_{r,s=1}^n a^{rs}(\Psi(y)) \eta_r \eta_s \geq \theta |\eta|^2 \end{aligned} \quad (2.3.60)$$

όπου  $\eta = \xi D\Phi$  και άρα  $\eta_r = \sum_{k=1}^n \Phi_{x_r}^k \xi_k$  ( $r = 1, \dots, n$ ). Αλλά τότε, αφού  $D\Phi D\Psi = I$ , έχουμε  $\xi = \eta D\Psi$  και άρα  $|\xi| \leq C|\eta|$  για κάποια σταθερά  $C$ .

Αυτή η ανισότητα και η (2.3.60) συνεπάγονται

$$\sum_{k,l=1}^n a^{kl}(y) \xi_k \xi_l \geq \theta' |\xi|^2 \quad (2.3.61)$$

για κάποιο  $\theta' > 0$  και για όλες τις  $y \in U'$  και όλα τα  $\xi \in \mathbb{R}^n$ .

Παρατηρούμε ακόμα από την (2.3.55) ότι οι συντελεστές  $a^{kl}$  είναι  $C^1$ , αφού οι  $\Phi$  και  $\Psi$  είναι  $C^2$ .

10. Με βάση τις (2.3.52) και (2.3.61), μπορούμε να εφαρμόσουμε τα αποτελέσματα των βημάτων 1-5 στην παραπάνω απόδειξη για να επιβεβαιώσουμε ότι  $u' \in H^2(V')$  με το φράγμα

$$\|u'\|_{H^2(V')} \leq C(\|f'\|_{L^2(U')} + \|u'\|_{L^2(U')}).$$

Συνεπώς,

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)}) \quad (2.3.62)$$

για  $V := \Psi(V')$ .

Επειδή το  $\partial U$  είναι συμπαγές, μπορούμε, ως συνήθως, να το καλύψουμε με πεπερασμένο πλήθος συνόλων  $V_1, \dots, V_N$  όπως παραπάνω. Αθροίζουμε τις εκτιμήσεις που προκύπτουν, μαζί και με την εκτίμηση στο εσωτερικό, και βρίσκουμε ότι  $u \in H^2(U)$  και ισχύει η ανισότητα (2.3.33).

■

Τώρα, βρίσκουμε ακόμα μεγαλύτερη ομαλότητα στις ασθενείς λύσεις μέχρι και το σύνορο χρησιμοποιώντας επαγωγικό επιχείρημα.

**Θεώρημα 2.3.5** (Μεγαλύτερη ομαλότητα στο σύνορο). Έστω  $m$  μη αρνητικός ακέραιος και έστω

$$a^{ij}, b^i, c \in C^{m+1}(\bar{U}) \quad (i, j = 1, \dots, n) \quad (2.3.63)$$

και

$$f \in H^m(U). \quad (2.3.64)$$

Έστω ακόμα  $u \in H_0^1(U)$  είναι ασθενής λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} Lu = f & \text{στο } U \\ u = 0 & \text{στο } \partial U. \end{cases} \quad (2.3.65)$$

Υποθέτουμε τέλος ότι

$$\partial U \in C^{m+2}. \quad (2.3.66)$$

Τότε

$$u \in H^{m+2}(U) \quad (2.3.67)$$

με την εκτίμηση

$$\|u\|_{H^{m+2}(U)} \leq C(\|f\|_{H^m(U)} + \|u\|_{L^2(U)}) \quad (2.3.68)$$

όπου η  $C$  εξαρτάται μόνο από τα  $m, U$  και τους συντελεστές του  $L$ .

**Παρατήρηση 2.3.4** Αν η  $u$  είναι η μοναδική λύση του (2.3.65), τότε η εκτίμηση (2.3.68) απλοποιείται σε

$$\|u\|_{H^{m+2}(U)} \leq C\|f\|_{H^m(U)}. \quad (2.3.69)$$

Εφαρμόζοντας τώρα επανειλημένα το Θεώρημα 2.3.5 για  $m = 1, 2, \dots$ , εξάγουμε μέσω της Γενικής Ανισότητας Sobolev το εξής θεώρημα.

**Θεώρημα 2.3.6** (Άπειρη παραγωγισιμότητα μέχρι και το σύνορο). Έστω

$$a^{ij}, b^i, c \in C^\infty(\bar{U}) \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

και

$$f \in C^\infty(\bar{U}).$$

Έστω ακόμα η  $u \in H_0^1(U)$  είναι η μοναδική ασθενής λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} Lu = f & \text{στο } U \\ u = 0 & \text{στο } \partial U. \end{cases}$$

Υποθέτουμε τέλος ότι το  $\partial U$  είναι  $C^\infty$ . Τότε,

$$u \in C^\infty(\bar{U}).$$



## 2.4 Αρχή Μεγίστου

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε την *Αρχή Μεγίστου* για ελλειπτικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης.

Οι μέθοδοι της Αρχής Μεγίστου βασίζονται στην παρατήρηση ότι αν μία  $C^2$  συνάρτηση  $u$  πετυχαίνει το μέγιστό της ως προς ένα ανοιχτό σύνολο  $U$  σε ένα σημείο  $x_0 \in U$ , τότε

$$Du(x_0) = 0, \quad D^2(x_0) \leq 0, \quad (2.4.1)$$

όπου η δευτερη ανισότητα σημαίνει ότι ο συμμετρικός πίνακας  $D^2u = ((u_{x_i x_j}))$  είναι μη-θετικός στο  $x_0$ . Συμπεράσματα που βασίζονται στη (2.4.1) έχουν συνεπώς σημειακό χαρακτήρα και άρα, διαφέρουν σημαντικά από τις ολοκληρωτικού χαρακτήρα ενεργειακές μεθόδους των προηγούμενων ενοτήτων.

Συγκεκριμένα, θα χρειαστεί να γνωρίζουμε ότι οι λύσεις μας  $u$  είναι τουλάχιστον  $C^2$ , ώστε να έχουν νόημα σημειακά οι  $Du, D^2u$ . (Από την προηγούμενη ενότητα ξέρουμε ότι μία ασθενής λύση έχει τέτοια ομαλότητα με την προϋπόθεση ότι οι συντελεστές του τελεστή είναι επαρκώς ομαλοί.)

Για τα παρακάτω θα θεωρούμε ότι ο τελεστής  $L$  έχει τη μορφή μη-απόκλισης

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} + cu, \quad (2.4.2)$$

όπου οι συντελεστές  $a^{ij}, b^i, c$  είναι συνεχείς και ισχύει η συνθήκη ομοιόμορφης ελλειπτικότητας. Τέλος, χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι  $a^{ij} = a^{ji}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ).

### 2.4.1 Ασθενής Αρχή Μεγίστου

Πρώτα, διακρίνουμε τις συνθήκες κάτω από τις οποίες μία συνάρτηση πετυχαίνει το μέγιστο (ελάχιστο) της στο σύνορο. Πάντα θεωρούμε ότι το  $U \subset \mathbb{R}^n$  είναι ανοιχτό και φραγμένο.

**Θεώρημα 2.4.1** (*Ασθενής Αρχή Μεγίστου*). Έστω  $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$  και

$$c \equiv 0 \text{ στο } U.$$

(i) Αν

$$Lu \leq 0 \text{ στο } U, \quad (2.4.3)$$

τότε

$$\max_{\bar{U}} u = \max_{\partial U} u.$$

(ii) Αν

$$Lu \geq 0 \text{ στο } U, \quad (2.4.4)$$

τότε

$$\min_{\bar{U}} u = \min_{\partial U} u.$$

**Παρατήρηση 2.4.1** Μία συνάρτηση που ικανοποιεί τη (2.4.3) καλείται υποβλήση και, άρα, ισχυριζόμαστε ότι μία υποβλήση πετυχαίνει το μέγιστό της στο  $\partial U$ . Όμοια, αν ισχύει η (2.4.4), η  $u$  καλείται υπερβλήση και πετυχαίνει το ελάχιστό της στο  $\partial U$ .

**Απόδειξη.**

1. Αρχικά υποθέτουμε ότι έχουμε την αυστηρή ανισότητα

$$Lu < 0 \text{ στο } U \quad (2.4.5)$$

αλλά υπάρχει σημείο  $x_0 \in U$  με

$$u(x_0) = \max_{\bar{U}} u. \quad (2.4.6)$$

Τώρα, σε αυτό το μέγιστο σημείο  $x_0$  έχουμε

$$Du(x_0) = 0 \quad (2.4.7)$$

και

$$D^2u(x_0) \leq 0. \quad (2.4.8)$$

2. Επειδή ο πίνακας  $A = ((a^{ij}(x_0)))$  είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, υπάρχει ένας ορθογώνιος πίνακας  $O = ((o^{ij}))$  τέτοιος ώστε

$$OAO^T = \text{diag}(d_1, \dots, d_n), \quad OO^T = I \quad (2.4.9)$$

με  $d_k > 0$  ( $k = 1, \dots, n$ ). Γράφουμε  $y = x_0 + O(x - x_0)$ . Τότε  $x - x_0 = O^T(y - x_0)$  και άρα

$$u_{x_i} = \sum_{k=1}^n u_{y_k} o_{ik}, \quad u_{x_i x_j} = \sum_{k,l=1}^n u_{y_k y_l} o_{ik} o_{jl} \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

Έτσι, στο σημείο  $x_0$

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i x_j} &= \sum_{k,l=1}^n \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{y_k y_l} O_{ik} O_{jl} \\ &= \sum_{k=1}^n d_k u_{y_k y_k} \text{ από τη (2.4.9)} \\ &\leq 0 \end{aligned} \tag{2.4.10}$$

αφού  $d_k > 0$  και  $u_{y_k y_k}(x_0) \leq 0$  ( $k = 1, \dots, n$ ) με βάση τη (2.4.8).

3. Έτσι, στο  $x_0$

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} \geq 0$$

με βάση τις (2.4.7) και (2.4.10). Έτσι, οι (2.4.5) και (2.4.6) είναι μεταξύ τους ασύμβατες και άρα, οδηγηθήκαμε σε αντίφαση.

4. Στη γενική περίπτωση που ισχύει η (2.4.3), γράφουμε

$$u^\varepsilon(x) := u(x) + \varepsilon e^{\lambda x_1} \quad (x \in U)$$

όπου το  $\lambda > 0$  θα επιλεγεί παρακάτω και  $\varepsilon > 0$ . Θυμόμαστε (όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.4) ότι η συνθήκη ομοιόμορφης ελλειπτικότητας συνεπάγεται ότι  $a^{ii}(x) \geq \theta$  ( $i = 1, \dots, n, x \in U$ ). Ως εκ τούτου

$$\begin{aligned} Lu^\varepsilon &= Lu + \varepsilon L(e^{\lambda x_1}) \\ &\leq \varepsilon e^{\lambda x_1} [-\lambda^2 a^{11} + \lambda b^1] \\ &\leq \varepsilon e^{\lambda x_1} [-\lambda^2 \theta + \|\mathbf{b}\|_{L^\infty} \lambda] \\ &< 0 \text{ στο } U, \end{aligned}$$

αν διαλέξουμε  $\lambda > 0$  αρκετά μεγάλο. Τότε, σύμφωνα με τα βήματα 1 και 2 παραπάνω,  $\max_{\bar{U}} u^\varepsilon = \max_{\partial U} u^\varepsilon$ . Αφήνουμε το  $\varepsilon \rightarrow 0$  και βρίσκουμε  $\max_{\bar{U}} u = \max_{\partial U} u$ . Αυτό αποδεικνύει το (i).

5. Επειδή η  $-u$  είναι υπολύση όταν η  $u$  είναι υπερλύση, προκύπτει η (ii).

■

Μεταβάλλουμε την αρχή μεγίστου για να μπορούμε να έχουμε και μη-αρνητικό μηδενικού βαθμού συντελεστή  $c$ . Σημειώνουμε ότι  $u^+ = \max(u, 0)$ ,  $u^- = -\min(u, 0)$ .

**Θεώρημα 2.4.2** (Ασθενής Αρχή Μεγίστου για  $c \geq 0$ ). Έστω  $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$  και

$$c \geq 0 \text{ στο } U.$$

(i) Αν

$$Lu \leq 0 \text{ στο } U,$$

τότε

$$\max_{\bar{U}} u \leq \max_{\partial U} u^+. \quad (2.4.11)$$

(ii) Επίσης αν

$$Lu \geq 0 \text{ στο } U,$$

τότε

$$\min_{\bar{U}} u \geq -\max_{\partial U} u^-. \quad (2.4.12)$$

**Παρατήρηση 2.4.2** Αν συγκεκριμένα,  $Lu = 0$  στο  $U$ , τότε

$$\max_{\bar{U}} |u| = \max_{\partial U} |u|. \quad (2.4.13)$$

**Απόδειξη.**

1. Έστω  $u$  μία υπολύση και θέτουμε  $V := \{x \in U \mid u(x) > 0\}$ . Τότε

$$Ku := Lu - cu \leq -cu \leq 0 \text{ στο } V.$$

Ο τελεστής  $K$  δεν έχει όρο μηδενικής τάξης και άρα, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 2.4.1 και προκύπτει ότι  $\max_{\bar{V}} u = \max_{\partial V} u = \max_{\partial U} u^+$ . Αυτό δίνει την (2.4.11) στην περίπτωση που  $V \neq \emptyset$ . Διαφορετικά  $u \leq 0$  παντού στο  $U$  και προκύπτει η (2.4.11).

2. Η υπόθεση (ii) προκύπτει από την (i) εφαρμοσμένη στη  $-u$ , παρατηρώντας ότι  $(-u)^+ = u^-$ .

■

## 2.4.2 Ισχυρή Αρχή Μεγίστου

Στη συνέχεια, ισχυροποιούμε τους προηγούμενους ισχυρισμούς δείχνοντας ότι η υπολύση  $u$  δεν μπορεί να πετύχει το μέγιστο σε εσωτερικό σημείο ενός συνεκτικού πεδίου, εκτός αν είναι σταθερή. Αυτή είναι η *Ισχυρή Αρχή Μεγίστου*. Για να την αποδείξουμε, χρησιμοποιούμε το παρακάτω λήμμα.

**Λήμμα 2.4.1** (Λήμμα του Hopf). Έστω  $u \in C^2(U) \cap C^1(\bar{U})$  και

$$c \equiv 0 \text{ στο } U.$$

Υποθέτουμε ακόμα ότι

$$Lu \leq 0 \text{ στο } U$$

και υπάρχει σημείο  $x^0 \in \partial U$  τέτοιο ώστε

$$u(x^0) > u(x) \text{ για όλα τα } x \in U. \quad (2.4.14)$$

Υποθέτουμε τέλος, ότι το  $U$  ικανοποιεί τη συνθήκη εσωτερικής μπάλας στο  $x^0$ . Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ανοιχτή μπάλα  $B \subset U$  με  $x^0 \in \partial B$ .

(i) Τότε

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x^0) > 0$$

όπου το  $\nu$  είναι το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο στη  $B$  στο  $x^0$ .

(ii) Αν

$$c \geq 0 \text{ στο } U,$$

το ίδιο συμπέρασμα ισχύει αν

$$u(x^0) \geq 0.$$

**Θεώρημα 2.4.3** (Ισχυρή Αρχή Μεγίστου). Έστω  $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$  και

$$c \equiv 0 \text{ στο } U.$$

Υποθέτουμε ακόμα ότι το  $U$  είναι συνεκτικό, ανοιχτό και φραγμένο.

(i) Αν

$$Lu \leq 0 \text{ στο } U$$

και η  $u$  πετυχαίνει το μέγιστό της πάνω στο  $\bar{U}$  σε ένα εσωτερικό σημείο, τότε

η  $u$  είναι σταθερή στο  $U$ .

(ii) Επίσης, αν

$$Lu \geq 0 \text{ στο } U$$

και η  $u$  πετυχαίνει το ελάχιστό της πάνω στο  $\bar{U}$  σε ένα εσωτερικό σημείο, τότε

η  $u$  είναι σταθερή στο  $U$ .

**Απόδειξη.** Γράφουμε  $M := \max_{\bar{U}} u$  και  $C := \{x \in U \mid u(x) = M\}$ . Τότε, αν  $u \not\equiv M$ , θέτουμε

$$V := \{x \in U \mid u(x) < M\}.$$

Διαλέγουμε ένα σημείο  $y \in V$  τέτοιο ώστε  $\text{dist}(y, C) < \text{dist}(y, \partial U)$  και συμβολίζουμε με  $B$  τη μεγαλύτερη μπάλα με κέντρο  $y$  που το εσωτερικό της βρίσκεται στο  $V$ . Τότε, υπάρχει κάποιο σημείο  $x^0 \in C$  με  $x^0 \in \partial B$ . Το  $V$  ικανοποιεί τη συνθήκη ανοιχτής μπάλας στο  $x^0$  και από το (i) του Λήμματος του Hopf προκύπτει ότι  $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x^0) > 0$ . Αλλά αυτό αποτελεί αντίφαση: αφού η  $u$  πετυχαίνει το μέγιστό της στο  $x^0 \in U$ , έχουμε ότι  $Du(x^0) = 0$ . ■

Χρησιμοποιώντας το (ii) του Λήμματος του Hopf έχουμε την παρακάτω εκδοχή του ερωτήματος για την περίπτωση που το  $c$  είναι μη-αρνητικό.

**Θεώρημα 2.4.4** (Ισχυρή Αρχή Μεγίστου για  $c \geq 0$ ). Έστω  $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$  και

$$c \geq 0 \text{ στο } U.$$

Υποθέτουμε ακόμα ότι το  $U$  είναι συνεκτικό.

(i) Αν

$$Lu \leq 0 \text{ στο } U$$

και η  $u$  πετυχαίνει μη-αρνητικό μέγιστό πάνω στο  $\bar{U}$  σε ένα εσωτερικό σημείο, τότε

η  $u$  είναι σταθερή στο  $U$ .

(ii) Επίσης, αν

$$Lu \geq 0 \text{ στο } U$$

και η  $u$  πετυχαίνει μη-θετικό ελάχιστο πάνω στο  $\bar{U}$  σε ένα εσωτερικό σημείο, τότε

η  $u$  είναι σταθερή στο  $U$ .





## Κεφάλαιο 3

# Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων για Ελλειπτικά Προβλήματα

### 3.1 Μεταβολικό Πρόβλημα

Όπως έχουμε δει στο προηγούμενο κεφάλαιο, σε ένα τελεστή  $L$  της μορφής

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n (a^{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x)u_{x_i} + c(x)u$$

αντιστοιχεί κάποια διγραμμική μορφή ανάλογα με τις συνθήκες του προβλήματος (πχ Dirichlet) και υπάρχει κάποιος κατάλληλος χώρος συναρτήσεων (πχ  $H_0^1(U)$  για κάποιο  $U \subset \mathbb{R}^n$ ) στον οποίο ψάχνουμε τη λύση του προβλήματος. Στο προηγούμενο κεφάλαιο είχαμε κάποιο πρόβλημα της μορφής

$$\begin{cases} Lu = f & \text{στο } U \\ u = 0 & \text{στο } \partial U \end{cases} \quad (3.1.1)$$

και είχαμε καταλήξει ότι η ισοδύναμη μεταβολική διατύπωση του προβλήματος αυτού ήταν:

Να βρεθεί  $u \in H_0^1(U)$  (ασθενής λύση) τέτοια ώστε να ισχύει

$$B[u, v] = (f, v) \quad \text{για κάθε } v \in H_0^1(U).$$

Στο εξής θα συμβολίζουμε  $F(v) = (f, v)$ .

Η διγραμμική μορφή για το συγκεκριμένο πρόβλημα ήταν:

$$B[u, v] := \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} v + cuv \, dx.$$

Στη συνέχεια, είχαμε δει ότι στην περίπτωση συμμετρικού τελεστή η ύπαρξη μοναδικής λύσης προέκυπτε από το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz, ενώ για μη συμμετρικούς τελεστές προέκυπτε από το Θεώρημα Lax-Milgram.

Για τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων ορίζουμε το *Προσεγγιστικό Πρόβλημα Galerkin*:

Για πεπερασμένο υπόχωρο  $V_h$  του  $V$  και  $F \in V'$  να βρεθεί  $u_h \in V_h$  τέτοια ώστε

$$B[u_h, v] = F(v) \text{ για κάθε } v \in V_h$$

όπου ο  $V$  είναι ο εκάστοτε χώρος συναρτήσεων στον οποίο ψάχνουμε τη λύση.

Στη συμμετρική περίπτωση, για  $V$  κλειστό υπόχωρο ενός χώρου Hilbert και  $B[ \cdot, \cdot ]$  φραγμένη και πιεστική (ισχύει δηλαδή η συνθήκη  $\exists \alpha > 0 : B[v, v] \geq \alpha \|v\|^2 \forall v \in V$ ), το μεταβολικό πρόβλημα έχει μοναδική λύση και το ίδιο ισχύει και για το προσεγγιστικό πρόβλημα Galerkin δεδομένου ότι ο  $V_h$  είναι κλειστός υπόχωρος του  $V$ . Σε αυτή την περίπτωση έχουμε το παρακάτω θεώρημα.

Πριν το διατυπώσουμε και το αποδείξουμε όμως, αναφέρουμε την *Αρχή της Ορθογωνιότητας* που ισχύει και για συμμετρικές και για μη συμμετρικές μορφές:

**Παρατήρηση 3.1.1** Έστω  $u \in V$  η λύση του μεταβολικού προβλήματος και  $u_h \in V_h$  η λύση του αντίστοιχου προσεγγιστικού προβλήματος. Έχουμε δηλαδή ότι

$$B[u, v] = F(v) \text{ για κάθε } v \in V \tag{3.1.2}$$

και

$$B[u_h, v] = F(v) \text{ για κάθε } v \in V_h \tag{3.1.3}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη και χρησιμοποιώντας ότι  $V_h \subset V$  προκύπτει ότι

$$B[u - u_h, v] = 0 \text{ για κάθε } v \in V_h. \tag{3.1.4}$$

**Θεώρημα 3.1.1** Έστω  $u \in V$  η λύση του μεταβολικού προβλήματος και  $u_h \in V_h$  η λύση του προσεγγιστικού προβλήματος. Τότε, για τη νόρμα  $\|\cdot\|_E$  της διγραμμικής μορφής (ενεργειακή νόρμα) για την οποία  $\|v\|_E := \sqrt{B[v, v]}$  για  $v \in V$ , έχουμε ότι

$$\|u - u_h\|_E = \min_{v \in V_h} \|u - v\|_E$$

**Απόδειξη.** Από την ανισότητα του Schwarz έχουμε ότι

$$|B(v, w)| \leq \|v\|_E \|w\|_E \quad \forall v, w \in V.$$

Έτσι, για κάθε  $v \in V_h$

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_E^2 &= B[u - u_h, u - u_h] \\ &= B[u - u_h, u - v] + B[u - u_h, v - u_h] \\ &= B[u - u_h, u - v] \quad (\text{από αρχή ορθογωνιότητας αφού } v - u_h \in V_h) \\ &\leq \|u - u_h\|_E \|u - v\|_E. \end{aligned}$$

Αν  $\|u - u_h\|_E \neq 0$ , διαρούμε και προκύπτει ότι  $\|u - u_h\|_E \leq \|u - v\|_E \quad \forall v \in V_h$  και άρα και  $\|u - u_h\|_E \leq \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_E$ . Επιπλέον, επειδή  $u_h \in V$ ,  $\inf_{v \in V_h} \|u - v\|_E \leq \|u - u_h\|_E$  και άρα  $\|u - u_h\|_E = \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_E$ . Τέλος, επειδή αυτό το infimum το πετυχαίνει για  $v = u_h$ , γράφουμε τελικά  $\|u - u_h\|_E = \min_{v \in V_h} \|u - v\|_E$ .

Στην περίπτωση που  $\|u - u_h\|_E = 0$ , η ανισότητα είναι τετριμμένη. ■

Στη μη συμμετρική περίπτωση, αν η διγραμμική μορφή είναι επίσης φραγμένη (συνεχής) και πιεστική, έχουμε τα ίδια συμπεράσματα για την ύπαρξη και τη μοναδικότητα της λύσης για το μεταβολικό και το προσεγγιστικό πρόβλημα. Σε αυτή την περίπτωση, ισχύει το παρακάτω Θεώρημα.

**Θεώρημα 3.1.2** (Θεώρημα του Céa) Έστω  $(H, (\cdot, \cdot))$  χώρος Hilbert,  $V$  κλειστος υπόχωρος του και  $B[\cdot, \cdot]$  φραγμένη, πιεστική διγραμμική μορφή, όχι κατά ανάγκη συμμετρική. Έστω ακόμα για  $F \in V'$  η  $u$  λύνει το μεταβολικό πρόβλημα (3.1.2). Τότε, για το μεταβολικό πρόβλημα πεπερασμένων στοιχείων (3.1.3) και τη λύση του έχουμε

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{C}{\alpha} \min_{v \in V_h} \|u - v\|_V \quad (3.1.5)$$

όπου η  $C$  είναι η σταθερά συνέχειας για τη διγραμμική μορφή, δηλαδή η  $C$  για την οποία  $|B[v, w]| \leq C \|v\|_H \|w\|_H \quad \forall v, w \in H$ ,  $\alpha$  είναι η σταθερά πιεστικότητας και η νόρμα  $\|\cdot\|_V$  είναι αυτή που επάγεται από το εσωτερικό γινόμενο.

**Απόδειξη.** Για κάθε  $v \in V_h$  έχουμε

$$\begin{aligned}
 \alpha \|u - u_h\|_V^2 &\leq B[u - u_h, u - u_h] && \text{(λόγω πιεστικότητας)} \\
 &= B[u - u_h, u - v] + B[u - u_h, v - u_h] \\
 &= B[u - u_h, u - v] && \text{(από αρχή ορθογωνιότητας αφού } v - u_h \in V_h) \\
 &\leq C \|u - u_h\|_V \|u - v\|_V && \text{(από συνέχεια)}
 \end{aligned}$$

Άρα

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{C}{\alpha} \|u - v\|_V \quad \forall v \in V_h. \quad (3.1.6)$$

Ως εκ τούτου,

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{C}{\alpha} \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_V$$

και, επειδή ο  $V_h$  είναι κλειστός,

$$\|u - u_h\|_V = \frac{C}{\alpha} \min_{v \in V_h} \|u - v\|_V.$$

■

## 3.2 Κατασκευή του Χώρου Πεπερασμένων Στοιχείων

### 3.2.1 Το Πεπερασμένο Στοιχείο

**Ορισμός 3.2.1** Έστω

(i)  $K \subset \mathbb{R}^n$  ένα φραγμένο κλειστό σύνολο με μη-κενό εσωτερικό και κατά τμήματα ομαλό σύνορο (πεδίο ορισμού του στοιχείου),

(ii)  $\mathcal{P}$  ένας πεπερασμένης διάστασης χώρος στο  $K$  (ο χώρος των **συναρτήσεων σχήματος**) και

(iii)  $\mathcal{N} = \{N_1, N_2, \dots, N_k\}$  μία βάση του  $\mathcal{P}'$  (το σύνολο των **κομβικών μεταβλητών**).

Τότε, το  $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$  καλείται **πεπερασμένο στοιχείο**.

**Ορισμός 3.2.2** Έστω  $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$  ένα πεπερασμένο στοιχείο. Η δυική βάση  $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k\}$  του  $\mathcal{P}$  ως προς  $\mathcal{N}$  (δηλαδή  $N_i(\phi_j) = \delta_{ij}$ ) καλείται **κομβική βάση** του  $\mathcal{P}$ .

**Λήμμα 3.2.1** Έστω  $\mathcal{P}$  ένας  $d$ -διάστατος διανυσματικός χώρος και έστω  $\{N_1, N_2, \dots, N_d\}$  ένα υποσύνολο του δυικού χώρου  $\mathcal{P}'$ . Τότε, οι δύο επόμενες διατυπώσεις είναι ισοδύναμες.

(i) Το  $\{N_1, N_2, \dots, N_d\}$  είναι βάση του  $\mathcal{P}'$ .

(ii) Αν για  $v \in \mathcal{P}$  ισχύει  $N_i v = 0$  για  $i = 1, 2, \dots, d$ , τότε  $v \equiv 0$ .

**Απόδειξη.**

1. Έστω  $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_d\}$  μία βάση του  $\mathcal{P}$ . Το  $\{N_1, N_2, \dots, N_d\}$  είναι βάση του  $\mathcal{P}'$  αν και μόνο αν για οποιοδήποτε  $L$  στο  $\mathcal{P}'$

$$L = a_1 N_1 + \dots + a_d N_d \quad (3.2.1)$$

(επειδή  $d = \dim \mathcal{P} = \dim \mathcal{P}'$ ). Η (3.2.1) είναι ισοδύναμη με

$$y_i := L(\phi_i) = a_1 N_1(\phi_i) + \dots + a_d N_d(\phi_i), \quad i = 1, \dots, d.$$

Έστω  $\mathbf{B} = (N_j(\phi_i))$ ,  $i, j = 1, \dots, d$ . Τότε, η (i) είναι ισοδύναμη με:

$$\text{Το } \mathbf{B}a = y \text{ είναι πάντα επιλύσιμο,}$$

που είναι το ίδιο με το ο  $\mathbf{B}$  να είναι αντιστρέψιμος.

2. Για δοσμένο  $v \in \mathcal{P}$ , μπορούμε να γράψουμε  $v = b_1 \phi_1 + \dots + b_d \phi_d$ . Το  $N_i(v) = 0$  σημαίνει ότι  $b_1 N_i(\phi_1) + \dots + b_d N_i(\phi_d) = 0$ . Έτσι, η (ii) είναι ισοδύναμη με

$$b_1 N_i(\phi_1) + \dots + b_d N_i(\phi_d) = 0 \text{ για } i = 1, \dots, d \implies b_1 = \dots = b_d = 0 \quad (3.2.2)$$

Έστω  $\mathbf{C} = (N_i(\phi_j))$ ,  $i, j = 1, \dots, d$ . Τότε η (ii) είναι ισοδύναμη με το

$$\text{Το } \mathbf{C}x = 0 \text{ έχει μόνο τετριμμένες λύσεις,}$$

που είναι το ίδιο με το ο  $\mathbf{C}$  να είναι αντιστρέψιμος. Αλλά  $\mathbf{C} = \mathbf{B}^T$ . Άρα, οι (i) και (ii) είναι ισοδύναμες.

■

**Παράδειγμα 3.2.1** (Μονοδιάστατο στοιχείο Langrange). Έστω  $K = [0, 1]$ ,  $\mathcal{P}$  = το σύνολο των γραμμικών πολυωνύμων και  $\mathcal{N} = \{N_1, N_2\}$ , όπου  $N_1(v) = v(0)$  και  $N_2(v) = v(1) \forall v \in \mathcal{P}$ . Τότε, το  $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$

είναι πεπερασμένο στοιχείο και η κομβική βάση αποτελείται από τις  $\phi_1(x) = 1 - x$  και  $\phi_2(x) = x$ . Το γεγονός ότι είναι πεπερασμένο στοιχείο προκύπτει από το Λήμμα, αφού για  $v \in \mathcal{P}$  έχουμε  $v = ax + b$  και από  $N_1(v) = N_2(v) = 0$ , δηλαδή  $v(0) = v(1) = 0$ , προκύπτει ότι  $a = b = 0$  και άρα  $v \equiv 0$ .

Γενικά, μπορούμε να θέσουμε  $K = [a, b]$  και  $\mathcal{P}_k =$  το σύνολο όλων των πολυωνύμων με βαθμό μικρότερο ή ίσο του  $k$ . Τότε,  $\mathcal{N}_k = \{N_0, N_1, N_2, \dots, N_k\}$  όπου  $N_i(v) = v(a + (b - a)i/k) \forall v \in \mathcal{P}_k$  και  $i = 0, 1, \dots, k$ . Τότε, το  $(K, \mathcal{P}_k, \mathcal{N}_k)$  είναι πεπερασμένο στοιχείο, αφού αν για  $v \in \mathcal{P}_k$   $N_i(v) = v(a + (b - a)i/k) = 0 \forall i = 0, 1, \dots, k$ , το  $v$  έχει  $k + 1$  ρίζες και άρα  $v \equiv 0$ .

**Ορισμός 3.2.3** Λέμε ότι το  $\mathcal{N}$  καθορίζει το  $\mathcal{P}$  αν για  $\psi \in \mathcal{P}$  το  $N(\psi) = 0 \forall N \in \mathcal{N}$  συνεπάγεται ότι  $\psi = 0$ .

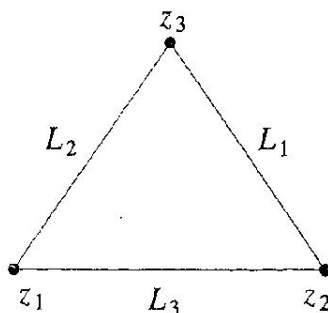
**Παρατήρηση 3.2.1** Συχνά θα αναφερόμαστε στο υπερεπίπεδο  $\{x : L(x) = 0\}$ , όπου  $L$  μη εκφυλισμένη γραμμική συνάρτηση, απλά ως  $L$ .

**Λήμμα 3.2.2** Έστω  $P$  πολυώνυμο βαθμού  $d \geq 1$  που μηδενίζεται σε υπερεπίπεδο  $L$ . Τότε, μπορούμε να γράψουμε  $P = LQ$ , όπου το  $Q$  είναι πολυώνυμο βαθμού  $d - 1$ .

### 3.2.2 Τριγωνικά Πεπερασμένα Στοιχεία

Έστω ένα τρίγωνο  $K$ . Έστω ακόμα  $\mathcal{P}_k$  το σύνολο των πολυωνύμων δύο μεταβλητών με βαθμό  $\leq k$ . Η διάσταση κάθε  $\mathcal{P}_k$  είναι  $\frac{1}{2}(k + 1)(k + 2)$ .

#### Τα Στοιχεία Lagrange



**Παράδειγμα 3.2.2** ( $k=1$ ) Έστω  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$  και  $\mathcal{N}_1 = \{N_1, N_2, N_3\}$  ( $\dim \mathcal{P}_1 = 3$ ), όπου  $N_i(v) = v(z_i)$  και  $z_1, z_2, z_3$  οι κορυφές του  $K$ , όπως φαίνεται στην εικόνα. Το  $\bullet$  αντιπροσωπεύει την κομβική μεταβλητή υπολογισμού στο σημείο που βρίσκεται η κουκίδα.

Έστω  $L_1, L_2, L_3$  τρεις μη-τετριμμένες γραμμικές συναρτήσεις που ορίζουν τις γραμμές στις οποίες βρίσκονται οι ακμές του τριγώνου. Υποθέτουμε ότι ένα πολυώνυμο  $P \in \mathcal{P}$  μηδενίζεται στις  $z_1, z_2$  και  $z_3$ . Αφού το  $P|_{L_1}$  είναι γραμμική συνάρτηση μίας μεταβλητής που μηδενίζεται σε δύο σημεία,  $P = 0$  στην  $L_1$  και άρα, από το Λήμμα 3.2.2 μπορούμε να γράψουμε  $P = cL_1$  όπου  $c$  σταθερά. Αλλά

$$0 = P(z_1) = cL_1(z_1) \implies c = 0,$$

αφού  $L_1(z_1) \neq 0$ . Έτσι,  $P \equiv 0$  και άρα το  $\mathcal{N}_1$  καθορίζει το  $\mathcal{P}_1$ .

**Παρατήρηση 3.2.2** Η παραπάνω επιλογή  $\mathcal{N}$  δεν είναι μοναδική. Για παράδειγμα θα μπορούσαμε να έχουμε ορίσει

$$N_i(v) = v(\text{μέσο της } i \text{ ακμής}).$$

Ενώνοντας τα μέσα, κατασκευάζουμε ένα τρίγωνο στο οποίο τα  $P \in \mathcal{P}_1$  μηδενίζονται στις ακμές και όμοια με το προηγούμενο παράδειγμα προκύπτει ότι  $P \equiv 0$  και άρα το  $\mathcal{N}_1$  καθορίζει το  $\mathcal{P}_1$ .

**Παράδειγμα 3.2.3** ( $k=2$ ). Έστω  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2$  και  $\mathcal{N}_2 = \{N_1, N_2, \dots, N_6\}$  ( $\dim \mathcal{P}_2 = 6$ ) όπου

$$N_i(v) = \begin{cases} v(i\text{-κορυφής}) & i = 1, 2, 3 \\ v(\text{μέσου της } (i-3)\text{-ακμής ή οποιοδήποτε άλλο σημείο της } (i-3)\text{-ακμής}) & i = 4, 5, 6 \end{cases}$$

Θα δείξουμε ότι το  $\mathcal{N}_2$  καθορίζει το  $\mathcal{P}_2$ . Όπως και πριν,  $L_1, L_2$  και  $L_3$  είναι μη-τετριμμένες γραμμικές συναρτήσεις που ορίζουν τις ακμές του τριγώνου. Υποθέτουμε ότι το πολυώνυμο  $P \in \mathcal{P}_2$  μηδενίζεται στις  $z_1, z_2, \dots, z_6$ . Επειδή το  $P|_{L_1}$  είναι τετραγωνική συνάρτηση μίας μεταβλητής που μηδενίζεται σε τρία σημεία,  $P = 0$  στην  $L_1$  και άρα, μπορούμε να γράψουμε  $P = L_1Q_1$  όπου  $\deg Q_1 = \deg P - 1 = 2 - 1 = 1$ . Το  $P$  όμως, μηδενίζεται και στην  $L_2$  και άρα,  $L_1Q_1|_{L_2} = 0$ . Συνεπώς, στην  $L_2$  είτε  $L_1 = 0$  ή  $Q_1 = 0$ . Αλλά η  $L_1$  μπορεί να μηδενίζεται μόνο σε ένα σημείο της  $L_2$ , αφού έχουμε μη-εκφυλισμένο τρίγωνο. Έτσι,  $Q_1 = 0$  στο  $L_2$  εκτός ίσως από ένα σημείο. Λόγω συνέχειας έχουμε ότι  $Q_1 \equiv 0$  στην  $L_2$ . Έτσι, μπορούμε εφαρμόζοντας ξανά το Λήμμα 3.2.2, να γράψουμε  $Q_1 = L_2Q_2$ , όπου  $\deg Q_2 = \deg L_2 - 1 = 1 - 1 = 0$  και άρα, το  $Q_2$  είναι ένα σταθερό πολυώνυμο, έστω  $c$ , και μπορούμε

να γράψουμε  $P = cL_1L_2$ . Έχουμε όμως, ότι  $P(z_6) = 0$  και η  $z_6$  δε βρίσκεται ούτε στη  $L_1$  ούτε στη  $L_2$ . Έτσι,

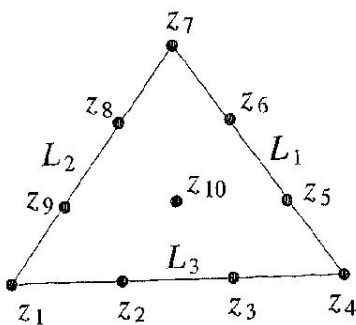
$$0 = P(z_6) = cL_1(z_6)L_2(z_6) \implies c = 0$$

αφού  $L_1(z_6) \neq 0$  και  $L_2(z_6) \neq 0$ . Συνεπώς,  $P \equiv 0$ .

**Παράδειγμα 3.2.4** ( $k=3$ ). Έστω  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_3$  και  $\mathcal{N}_3 = \{N_i : i = 1, 2, \dots, 10 (= \dim \mathcal{P}_3)\}$  όπου

$$\begin{cases} N_i(v) = v(z_i) & i = 1, 2, \dots, 9 \text{ (} z_i \text{ διακριτά σημεία στις ακμές όπως στην εικόνα)} \\ N_{10}(v) = v(\text{εσωτερικού σημείου}). \end{cases}$$

Θα δείξουμε ότι το  $\mathcal{N}_3$  καθορίζει το  $\mathcal{P}_3$ .



Έστω  $L_1, L_2$  και  $L_3$  μη-τετριμμένες συναρτήσεις που ορίζουν τις ακμές του τριγώνου. Υποθέτουμε ότι κάποιο  $P \in \mathcal{P}_3$  μηδενίζεται στις  $z_i$  για  $i = 1, 2, \dots, 10$ . Εφαρμόζοντας τρεις φορές το Λήμμα 3.2.2 μαζί με το γεγονός ότι  $P(z_i) = 0$  για  $i = 1, 2, \dots, 9$ , μπορούμε να γράψουμε  $P = cL_1L_2L_3$ . Αλλά

$$0 = P(z_{10}) = cL_1(z_{10})L_2(z_{10})L_3(z_{10}) \implies c = 0$$

αφού  $L_i(z_{10}) \neq 0$  για  $i = 1, 2, 3$ . Έτσι,  $P \equiv 0$ .

Γενικά, για  $k \geq 1$ , θέτουμε  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_k$ . Για  $\mathcal{N}_k = \{N_i : i = 1, 2, \dots, \frac{1}{2}(k+1)(k+2)\}$  διαλέγουμε σημεία υπολογισμού σε

$$\begin{cases} 3 \text{ κορυφές} \\ 3(k-1) \text{ διακριτά σημεία στις ακμές και} \\ \frac{1}{2}(k-2)(k-1) \text{ εσωτερικά σημεία.} \end{cases} \quad (3.2.3)$$



### 3.2.3 Η Συνάρτηση Παρεμβολής

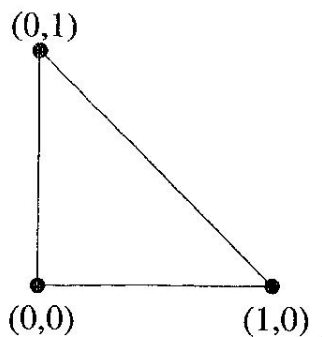
**Ορισμός 3.2.4** Έστω ένα πεπερασμένο στοιχείο  $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$  και  $\{\phi_i : 1 \leq i \leq k\} \subset \mathcal{P}$  η δυική βάση ως προς το  $\mathcal{N}$ . Αν η  $v$  είναι συνάρτηση τέτοια ώστε να ορίζονται όλα τα  $N_i \in \mathcal{N}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , τότε ορίζουμε την **τοπική συνάρτηση παρεμβολής**

$$\mathcal{I}_K v := \sum_{i=1}^k N_i(v) \phi_i. \quad (3.2.4)$$

**Παράδειγμα 3.2.5** Έστω  $K$  το παρακάτω τρίγωνο,  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{N} = \{N_1, N_2, N_3\}$  και  $f = e^{xy}$ . Θα υπολογίσουμε τη  $\mathcal{I}_K f$ .

Εξ ορισμού,  $\mathcal{I}_K f = N_1(f)\phi_1 + N_2(f)\phi_2 + N_3(f)\phi_3$ . Πρέπει άρα να βρούμε τις  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ . Η ευθεία  $L_1$  δίνεται από την  $y = 1 - x$ . Μπορούμε να γράψουμε  $\phi_1 = cL_1 = c(1 - x - y)$ . Αλλά το  $N_1\phi_1 = 1$  συνεπάγεται ότι  $c = \phi_1(z_1) = 1$  και άρα  $\phi_1 = 1 - x - y$ . Όμοια,  $\phi_2 = L_2(x, y)/L_2(z_2) = x$  και  $\phi_3 = L_3(x, y)/L_3(z_3) = y$ . Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_K f &= N_1(f)(1 - x - y) + N_2(f)x + N_3(f)y \\ &= 1 - x - y + x + y \quad (f(0,0) = f(0,1) = f(1,0) = 1) \\ &= 1. \end{aligned}$$



**Πρόταση 3.2.1** Η  $\mathcal{I}_K$  είναι γραμμική.

**Πρόταση 3.2.2**  $N_i(\mathcal{I}_K(f)) = N_i(f) \quad \forall 1 \leq i \leq d$ .

**Απόδειξη.** Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
 N_i(\mathcal{I}_K(f)) &= N_i\left(\sum_{j=1}^k N_j(f)\phi_j\right) && \text{(εξ ορισμού της } \mathcal{I}_K) \\
 &= \sum_{j=1}^k N_j(f)N_i(\phi_j) && \text{(γραμμικότητα των } N_i) \\
 &= N_i(f) && (\{\phi_j\} \text{ δυικό του } \{N_j\}).
 \end{aligned}$$

■

**Πόρισμα 3.2.1**  $\mathcal{I}_K(f) = f$  για  $f \in \mathcal{P}$ . Συγκεκριμένα, η  $\mathcal{I}_K$  είναι ταυτοδύναμη, δηλαδή  $\mathcal{I}_K^2 = \mathcal{I}_K$ .

**Ορισμός 3.2.5** Μια υποδιαίρεση του χωρίου  $\Omega$  είναι μία πεπερασμένη συλλογή χωρίων  $\{K_i\}$  τέτοιων ώστε

1.  $\text{int}K_i \cap \text{int}K_j = \emptyset$  για  $i \neq j$  και
2.  $\bigcup K_i = \overline{\Omega}$ .

**Ορισμός 3.2.6** Έστω  $\Omega$  ένα χωρίο με υποδιαίρεση  $\mathcal{T}$ . Υποθέτουμε ότι κάθε στοιχείο  $K$  της υποδιαίρεσης είναι εφοδιασμένο με κάποιου είδους συναρτήσεις σχήματος  $\mathcal{P}$  και κομβικές μεταβλητές  $\mathcal{N}$  τέτοιες ώστε το  $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$  να είναι πεπερασμένο στοιχείο. Έστω  $m$  η τάξη της μεγαλύτερης μερικής παραγώγου που περιλαμβάνεται στις κομβικές μεταβλητές. Για  $f \in C^m(\overline{\Omega})$  η **ολική συνάρτηση παρεμβολής** ορίζεται ως

$$\mathcal{I}_{\mathcal{T}}f|_{K_i} = \mathcal{I}_{K_i}f \tag{3.2.5}$$

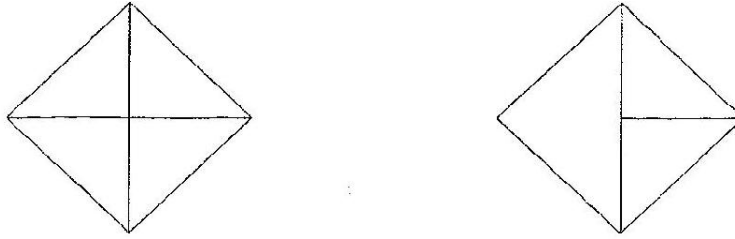
για όλα τα  $K_i \in \mathcal{T}$ .

Παρακάτω, εξετάζουμε συνθήκες που εξασφαλίζουν συνέχεια για την περίπτωση τριγωνικών στοιχείων στις 2 διαστάσεις.

**Ορισμός 3.2.7** Μία τριγωνοποίηση ενός πολυγωνικού χωρίου  $\Omega$  είναι μία υποδιαίρεση που αποτελείται από τρίγωνα με την ιδιότητα

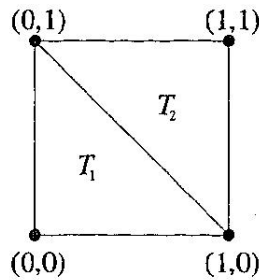
(3) καμία κορυφή οποιουδήποτε τριγώνου δε βρίσκεται στο εσωτερικό ακμής ενός άλλου τριγώνου.

**Παράδειγμα 3.2.6** Για παράδειγμα, στις παρακάτω εικόνες, η πρώτη υποδιαίρεση είναι τριγωνοποίηση ενώ η δεύτερη όχι.



**Παράδειγμα 3.2.7** Έστω  $\Omega$  το τετράγωνο της παρακάτω εικόνας. Η τριγωνοποίηση  $\mathcal{T}$  αποτελείται από τα δύο τρίγωνα  $T_1$  και  $T_2$ , όπως φαίνεται. Το πεπερασμένο στοιχείο σε κάθε ένα από αυτά είναι το στοιχείο Langrange του Παραδείγματος 3.2.2. Η δυική βάση του  $T_1$  έχει υπολογιστεί στο Παράδειγμα 3.2.5 και είναι  $\{1 - x - y, x, y\}$ , ενώ όμοια προκύπτει και η βάση του  $T_2$ ,  $\{1 - x, 1 - y, x + y - 1\}$ . Έστω  $f = \sin(\pi(x + y)/2)$ . Τότε

$$\mathcal{I}_{\mathcal{T}}f = \begin{cases} x + y & \text{στο } T_1 \\ 2 - x - y & \text{στο } T_2. \end{cases}$$



**Ορισμός 3.2.8** Λέμε ότι μία συνάρτηση παρεμβολής έχει τάξη συνέχειας  $r$  (είναι δηλαδή  $C^r$ ) αν  $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}f \in C^r$  για όλες τις  $f \in C^m(\bar{\Omega})$ . Ο χώρος  $V_{\mathcal{T}} = \{\mathcal{I}_{\mathcal{T}}f : f \in C^m\}$  λέγεται τότε  $C^r$  χώρος πεπερασμένων στοιχείων.

**Παρατήρηση 3.2.3** Μία τέτοια συνέχεια δεν επιτυγχάνεται για οποιαδήποτε επιλογή κόμβων. Όπως θα φανεί και στο επόμενο θεώρημα, απαιτείται να είναι τοποθετημένοι με τρόπο ανεξάρτητο των συντεταγμένων και συμμετρικά ως προς το μέσο της ακμής.

**Πρόταση 3.2.3** Τα στοιχεία Langrange είναι  $C^0$ . Για την ακρίβεια, για δοσμένη τριγωνοποίηση  $\mathcal{T}$  ενός  $\Omega$ , μπορούμε να διαλέξουμε κόμβους στις ακμές για τα αντίστοιχα στοιχεία  $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ ,  $K \in \mathcal{T}$  τέτοιους ώστε  $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}f \in C^0$  για  $f \in C^0$ . Συγκεκριμένα, αρκεί για κάθε ακμή  $\overline{xx'}$  να έχουμε κόμβους  $\xi_i(x' - x) + x$

όπου τα  $\{\xi_i : i = 1, \dots, k-1\}$  είναι σταθεροποιημένα και συμμετρικά γύρω απ'ο το  $\xi = 1/2$ . Επιπλέον, κάτω από αυτές τις υποθέσεις,  $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}f \in W_{\infty}^1$ .

**Απόδειξη.** Αρκεί να δείξουμε ότι η ζητούμενη συνέχεια ισχύει κατά μήκος κάθε ακμής. Έστω  $\mathcal{T}_i$ ,  $i = 1, 2$  δύο τρίγωνα που έχουν κοινή μία ακμή  $e$ . Αφού υποθέσαμε ότι οι κόμβοι στις ακμές έχουν επιλεγεί συμμετρικά και ανεξάρτητα συντεταγμένων, ξέρουμε ότι οι κόμβοι της ακμής  $e$  βρίσκονται στην ίδια θέση στο χώρο και για τα δύο τρίγωνα. Θέτουμε  $w := \mathcal{I}_{\mathcal{T}_1}f - \mathcal{I}_{\mathcal{T}_2}f$  όπου και τα δύο πολυώνυμα  $\mathcal{I}_{\mathcal{T}_i}f$  τα θεωρούμε ορισμένα παντού, επεκτείνοντας τα εκτός των  $\mathcal{T}_i$  ως πολυώνυμα. Τότε η  $w$  είναι πολυώνυμο βαθμού  $k$  και ο περιορισμός της στην ακμή  $e$  έχει μονοδιάστατες κομβικές μεταβλητές ίσες με μηδέν. Έτσι η  $w|_e$  είναι η μηδενική συνάρτηση και άρα, η συνάρτηση παρεμβολής είναι συνεχής κατά μήκος κάθε ακμής.

Η Lipschitz συνέχεια της  $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}f$  πορκύπτει δείχνοντας ότι έχει ασθενείς παραγώγους τάξης  $r+1$  (=1) που δίνονται από τη σχέση

$$(D_{(w)}^{\alpha} \mathcal{I}_{\mathcal{T}}f)|_T = D^{\alpha} \mathcal{I}_{\mathcal{T}}f \quad \forall T \in \mathcal{T}, \quad |\alpha| \leq r+1.$$

Το τελευταίο ανήκει στον  $L^{\infty}$ . Η επαλήθευση ότι αυτή είναι πράγματι ασθενής παράγωγος προκύπτει από το

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (D^{\alpha} \phi)(\mathcal{I}_{\mathcal{T}}f) dx &= \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T (D^{\alpha} \phi)(\mathcal{I}_{\mathcal{T}}f) dx \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}} (-1)^{|\alpha|} \int_T \phi(D^{\alpha} \mathcal{I}_{\mathcal{T}}f) dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \phi \sum_{T \in \mathcal{T}} \chi_T(D^{\alpha} \mathcal{I}_{\mathcal{T}}f) dx \end{aligned}$$

όπου η  $\chi_T$  είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του  $T$ . Η δεύτερη ισότητα στέκει επειδή όλοι οι συνοριακοί όροι αλληλοεξουδετερώνονται λόγω της συνέχειας της συνάρτησης παρεμβολής. ■

### 3.2.4 Ισοδυναμία των Στοιχείων

Όταν εφαρμόζουμε την ολική συνάρτηση παρεμβολής, είναι σημαντικό να έχουμε κάποιο ομοιόμορφο φράγμα (ανεξάρτητο του  $T \in \mathcal{T}$ ) για τη νόρμα του τοπικού τελεστή παρεμβολής  $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ . Για αυτό, θέλουμε να συγκρίνουμε τοπικούς τελεστές παρεμβολής διαφορετικών στοιχείων.

**Ορισμός 3.2.9** Έστω  $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$  ένα πεπερασμένο στοιχείο και έστω  $F(x) = Ax + b$  ( $A$  μή ιδιάζων) μία affine απεικόνιση. Το πεπερασμένο στοιχείο  $(\hat{K}, \hat{\mathcal{P}}, \hat{\mathcal{N}})$  είναι affine ισοδύναμο με το  $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$  αν

$$(i) F(K) = \hat{K}$$

$$(ii) F^*\hat{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \text{ και}$$

$$(iii) F_*(\mathcal{N}) = \hat{\mathcal{N}}.$$

όπου  $F^*(\hat{f}) := \hat{f} \circ F$  και  $(F_*\mathcal{N})(\hat{f}) := \mathcal{N}(F^*(\hat{f}))$ .

Γράφουμε  $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N}) \xrightarrow{\cong} (\hat{K}, \hat{\mathcal{P}}, \hat{\mathcal{N}})$  αν είναι affine ισοδύναμα.

**Παρατήρηση 3.2.4** Η affine ισοδυναμία είναι σχέση ισοδυναμίας.

**Πρόταση 3.2.4** Υπάρχουν τοποθετήσεις κόμβων τέτοιες ώστε όλα τα στοιχεία Lagrange δεδομένου βαθμού να είναι affine ισοδύναμα.

**Απόδειξη.** Διαλέγουμε κόμβους χρησιμοποιώντας βαρυκεντρικές συντεταγμένες  $(b_1, b_2, b_3)$  για κάθε τρίγωνο. Η  $i$ -βαρυκεντρική συντεταγμένη ενός σημείου  $(x, y)$  μπορεί να οριστεί ως η τιμή της  $i$ -γραμμικής Lagrange συνάρτησης βάσης στο σημείο  $(b_i(x, y) := \phi_i(x, y))$ . Έτσι, κάθε βαρυκεντρική συντεταγμένη συνδέεται φυσικά με δεδομένη κορυφή (είναι ίση με την αναλογική απόσταση του σημείου από την αντίθετη ακμή). Παρατηρούμε ότι οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες έχουν άθροισμα ένα (αφού αυτό δίνει τη συνάρτηση παρεμβολής της σταθεράς 1). Έτσι, η απεικόνιση  $(x, y) \rightarrow b(x, y)$  απεικονίζει (αντιστρέψιμα) το τρίγωνο σε ένα υποσύνολο του  $\{b \in [0, 1]^3 : b_1 + b_2 + b_3 = 1\}$ .

Για στοιχεία Lagrange βαθμού  $k$ , διαλέγουμε κόμβους στα σημεία που οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες είναι

$$\left(\frac{i}{k}, \frac{j}{k}, \frac{l}{k}\right) \text{ όπου } 0 \leq i, j, l \leq k \text{ και } i + j + l = k.$$

■

**Ορισμός 3.2.10** Τα πεπερασμένα στοιχεία  $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$  και  $(K, \mathcal{P}, \tilde{\mathcal{N}})$  είναι παρεμβολικά ισοδύναμα αν

$$\mathcal{I}_{\mathcal{N}}f = \mathcal{I}_{\tilde{\mathcal{N}}}f \quad \forall f \text{ επαρκώς ομαλή}$$

Γράφουμε  $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N}) \xrightarrow{\cong} (K, \mathcal{P}, \tilde{\mathcal{N}})$ .

**Πρόταση 3.2.5** Έστω  $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$  και  $(K, \mathcal{P}, \tilde{\mathcal{N}})$  πεπερασμένα στοιχεία. Κάθε κομβική μεταβλητή του  $\mathcal{N}$  είναι γραμμικός συνδυασμός των κομβικών μεταβλητών του  $\tilde{\mathcal{N}}$  αν και μόνο αν  $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N}) \xrightarrow{\cong} (K, \mathcal{P}, \tilde{\mathcal{N}})$ .

**Ορισμός 3.2.11** Έστω  $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$  ένα πεπερασμένο στοιχείο που είναι affine ισοδύναμο με το  $(\hat{K}, \hat{\mathcal{P}}, \hat{\mathcal{N}})$  και το  $(\hat{K}, \hat{\mathcal{P}}, \hat{\mathcal{N}})$  είναι παρεμβολικά ισοδύναμο με το  $(\tilde{K}, \tilde{\mathcal{P}}, \tilde{\mathcal{N}})$ . Τότε, πλέμε ότι το  $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$  είναι affine-παρεμβολικά ισοδύναμο με το  $(\tilde{K}, \tilde{\mathcal{P}}, \tilde{\mathcal{N}})$ .

### 3.3 Θεωρία Πολυωνυμικής Προσέγγισης σε Χώρους Sobolev

Σε αυτή την ενότητα θα δούμε εκτιμήσεις σφαλμάτων για τη συνάρτηση παρεμβολής καθώς και τις λεγόμενες Αντίστροφες Εκτιμήσεις.

#### 3.3.1 Φράγματα για το Σφάλμα Παρεμβολής

**Λήμμα 3.3.1** Έστω  $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$  πεπερασμένο στοιχείο τέτοιο ώστε  $\text{diam}K = 1$ ,  $\mathcal{P} \subseteq W^{m,\infty}(K)$  και  $\mathcal{N} \subseteq (C^l(\bar{K}))'$  (δηλαδή οι κομβικές μεταβλητές στο  $\mathcal{N}$  περιλαμβάνουν παραγώγους μέχρι τάξης  $l$ ). Τότε, ο τελεστής παρεμβολής από το  $C^l(\bar{K})$  στο  $W^{m,p}(K)$  είναι φραγμένος για  $1 \leq p \leq \infty$ .

**Απόδειξη.** Έστω  $\mathcal{N} = \{N_1, \dots, N_k\}$  και  $\{\phi_1, \dots, \phi_k\} \subseteq \mathcal{P}$  η δυική βάση. Ο τελεστής παρεμβολής ορίζεται ως  $\mathcal{I}u = \sum_{i=1}^k N_i(u)\phi_i$  και κάθε  $\phi_i \in W^{m,\infty}(K) \subseteq W^{m,p}(K)$  από υπόθεση. Τότε

$$\begin{aligned} \|\mathcal{I}u\|_{W^{m,p}(K)} &\leq \sum_{i=1}^k |N_i(u)| \|\phi_i\|_{W^{m,p}(K)} \\ &\leq \left( \sum_{1 \leq i \leq k} \|N_i\|_{C^l(\bar{K})} \|\phi_i\|_{W^{m,p}(K)} \right) \|u\|_{C^l(\bar{K})} \\ &= C \|u\|_{C^l(\bar{K})}. \end{aligned}$$

■

**Ορισμός 3.3.1** Αν το  $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$  ικανοποιεί τις υποθέσεις του προηγούμενου Λήμματος, τότε  $\sigma(K)$  ορίζεται να είναι η νόρμα του τελεστή  $\mathcal{I} : C^l(\bar{K}) \rightarrow W^{m,p}(K)$ .

**Ορισμός 3.3.2** Για κάθε φραγμένη περιοχή  $K$  ορίζουμε

$$\hat{K} := \{(1/\text{diam}K)x : x \in K\}$$

Πριν περάσουμε στο επόμενο θεώρημα, αναφέρουμε κάποιους ορισμούς και κάποια αποτελέσματα χωρίς απόδειξη, που θα χρειαστούν στη συνέχεια.

**Ορισμός 3.3.3** Ένα  $\Omega$  είναι αστερόμορφο ως προς μπάλα  $B$  αν για όλα τα  $x \in \Omega$  η κλειστή κυρτή θήκη του  $\{x\} \cup B$  είναι υποσύνολο του  $\Omega$ .

**Ορισμός 3.3.4** Έστω ένα  $\Omega$  έχει διάμετρο  $d$  και είναι αστερόμορφο ως προς μπάλα  $B$ . Έστω  $\rho_{\max} = \sup \{\rho : \text{το } \Omega \text{ είναι αστερόμορφο ως προς μπάλα ακτίνας } \rho\}$ . Τότε, η παράμετρος παχύτητας του  $\Omega$  ορίζεται ως

$$\gamma = \frac{d}{\rho_{\max}}. \quad (3.3.1)$$

**Ορισμοί 3.3.5** 1. Το πολυώνυμο Taylor τάξης  $m$  υπολογισμένο στο  $y$  δίνεται ως

$$T_y^m u(x) = \sum_{|\alpha| < m} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha u(y) (x - y)^\alpha. \quad (3.3.2)$$

2. Σε περιπτώσεις χώρων Sobolev μπορεί το  $D^\alpha$  να μην υπάρχει σημειακά. Σε τέτοιες περιπτώσεις χρησιμοποιούμε το μέσο πολυώνυμο Taylor:

Έστω  $\eta$   $u$  έχει ασθενείς παραγώγους τάξης ασημερά μικρότερης από  $m$  σε πεδίο  $\Omega$  τέτοιο ώστε  $B \subset \subset \Omega$ . Το αντίστοιχο μέσο πολυώνυμο Taylor τάξης  $m$  της  $u$  πάνω στη  $B$  ορίζεται ως

$$Q^m u(x) = \int_B T_y^m u(x) \phi(y) dy \quad (3.3.3)$$

όπου  $\eta$   $\phi$  είναι συνάρτηση αποκοπής με φορέα στο  $\bar{B}$ .

**Λήμμα 3.3.2** (Μία μορφή της Ανωσύτητας Sobolev). Έστω ένα  $\Omega$  έχει διάμετρο  $d$  και είναι αστερόμορφο ως προς μπάλα  $B$ . Αν  $\eta$   $u$  ανήκει στον  $W^{m,p}(\Omega)$  όπου είτε (i)  $1 < p < \infty$  και  $m > n/p$  ή (ii)  $p = 1$  και  $m \geq n$ , τότε  $\eta$   $u$  είναι συνεχής στο  $\Omega$  και

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_{m,n,\gamma,d} \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}.$$

όπου οι δείκτες στη σταθερά δείχνουν από ποιά μεγέθη εξαρτάται.

**Λήμμα 3.3.3** (Bramble-Hilbert). Έστω  $B$  μία μπάλα στο  $\Omega$  τέτοια ώστε το  $\Omega$  είναι στερόμορφο ως προς τη  $B$  και τέτοια ώστε  $\rho > (1/2)\rho_{\max}$ . Έστω  $Q^m u$  το μέσο πολυώνυμο Taylor τάξης  $m$  της  $u$  πάνω στη  $B$  όπου  $u \in W^{m,p}(\Omega)$  και  $p \geq 1$ . Τότε

$$|u - Q^m u|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq C_{m,n,\gamma} d^{m-k} |u|_{W^{m,p}(\Omega)} \quad k = 0, 1, \dots, m \quad (3.3.4)$$

όπου  $d = \text{diam}(\Omega)$ .

**Λήμμα 3.3.4** (Ανισότητα Friedrich). Έστω  $\Omega$  αστερόμορφο ως προς μπάλα  $B$ . Τότε, για όλες τις  $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$\|u - \bar{u}\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C_{\Omega} |u|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad (3.3.5)$$

όπου  $\bar{u}$  όπως έχει οριστεί σε προηγούμενο κεφάλαιο.

Επιστρέφοντας, έστω  $\mathcal{P}_k$  το σύνολο των πολυωνύμων  $n$  μεταβλητών με βαθμό μικρότερο ή ίσο του  $k$ .

**Θεώρημα 3.3.1** Έστω  $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$  πεπερασμένο στοιχείο που ικανοποιεί

(i) Το  $K$  είναι αστρόμορφο ως προς κάποια μπάλα,

(ii)  $\mathcal{P}_{m-1} \subseteq \mathcal{P} \subseteq W^{m,\infty}(K)$  και

(iii)  $\mathcal{N} \subseteq (C^l(\bar{K}))'$ .

Έστω  $1 \leq p \leq \infty$  και είτε  $m - l - n/p > 0$  όταν  $p > 1$  ή  $m - l - n \geq 0$  όταν  $p = 1$ . Τότε, για  $0 \leq i \leq m$  και  $v \in W^{m,p}(K)$  έχουμε

$$|v - \mathcal{I}v|_{W^{i,p}(K)} \leq C_{m,n,\gamma,\sigma(\hat{K})} (\text{diam}K)^{m-i} |v|_{W^{m,p}(K)} \quad (3.3.6)$$

όπου το  $\hat{K}$  είναι όπως ορίστηκε παραπάνω και το  $\gamma$  είναι η παράμετρος παχύτητας για το  $K$ .

**Απόδειξη.** Αρκεί να πάρουμε  $\text{diam}K = 1$  (σε αυτή την περίπτωση  $K = \hat{K}$ ). Η γενική περίπτωση προκύπτει έπειτα από επιχείρημα ομοιογένειας. Επιπλέον, από το Λήμμα 3.3.2 προκύπτει ότι ο τελεστής παρεμβολής είναι καλά ορισμένος στον  $W^{m,p}(K)$ .

Έστω  $B$  μπάλα τέτοια ώστε το  $K$  να είναι αστερόμορφο ως προς την μπάλα και  $\rho > (1/2)\rho_{\max}$ . Έστω  $Q^m v$  το μέσο πολυώνυμο Taylor τάξης  $m$  της  $v$  πάνω στη  $B$ . Επειδή  $\mathcal{I}f = f$  για  $f \in \mathcal{P}$ ,

$$\mathcal{I}Q^m v = Q^m v \quad \text{αφού } Q^m v \in \mathcal{P}_{m-1} \subseteq \mathcal{P}. \quad (3.3.7)$$



Τώρα

$$\begin{aligned}
\|v - \mathcal{I}v\|_{W^{m,p}(K)} &\leq \|v - Q^m v\|_{W^{m,p}(K)} + \|Q^m v - \mathcal{I}v\|_{W^{m,p}(K)} \\
&= \|v - Q^m v\|_{W^{m,p}(K)} + \|\mathcal{I}(Q^m v - v)\|_{W^{m,p}(K)} \quad (\text{από την 3.3.7}) \\
&\leq \|v - Q^m v\|_{W^{m,p}(K)} + \sigma(K) \|Q^m v - v\|_{C^l(\bar{K})} \\
&\leq (1 + \sigma(K) C_{m,n,\gamma}) \|v - Q^m v\|_{W^{m,p}(K)} \quad (\text{από Λήμμα 3.3.2}) \\
&\leq (1 + \sigma(K) C_{m,n,\gamma}) C'_{m,n,\gamma} |v|_{W^{m,p}(K)} \quad (\text{από Bramble-Hilbert}) \\
&= C_{m,n,\gamma,\sigma(K)} |v|_{W^{m,p}(K)}.
\end{aligned}$$

■

**Πόρισμα 3.3.1** *Με τις ίδιες υποθέσεις εκτός του  $i \leq l$  έχουμε ότι*

$$|v - \mathcal{I}v|_{W^{i,\infty}(K)} \leq C_{m,n,\gamma,\sigma(\hat{K})} (\text{diam} K)^{m-i-n/p} |v|_{W^{m,p}(K)}. \quad (3.3.8)$$

Θα προσπαθήσουμε τώρα να βρούμε ένα ομοιόμορφο φράγμα για την  $C_{m,n,\gamma,\sigma(\hat{K})}$  όταν το  $K$  ανήκει σε μια συλλογή στοιχείων. Συνειπώς, πρέπει να ελέγξουμε την εξάρτηση του  $\sigma(\hat{K})$  από affine μετασχηματισμούς.

**Πρόταση 3.3.1** *Δεδομένου ενός στοιχείου αναφοράς  $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$  και ενός affine ισοδύναμου  $(\tilde{K}, \tilde{\mathcal{P}}, \tilde{\mathcal{N}})$  με τον affine μετασχηματισμό  $Ax = ax + b$  έχουμε*

$$\sigma(\tilde{K}) \leq C_{\text{ref}} \chi(a) \quad (3.3.9)$$

όπου η  $\chi$  είναι μία συνεχής συνάρτηση στον  $GL(\mathbb{R}^n)$ . Για παράδειγμα, μπορούμε να πάρουμε

$$\chi(a) := \left(1 + \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|\right)^l \left(1 + \max_{1 \leq i, j \leq n} |(a^{-1})_{ij}|\right)^m |\det a|^{1/p}.$$

**Απόδειξη.** Από τον ορισμό της affine ισοδυναμίας έχουμε ότι

$$\tilde{\mathcal{I}}\tilde{v}(\tilde{x}) = \sum_{N \in \mathcal{N}} (A_* N) \tilde{v} \cdot (A^{-1})^* \phi_N(\tilde{x}) \quad (3.3.10)$$

Σημειώνουμε ότι  $(A_*N)\tilde{v} = N(A^*\tilde{v})$  όπου  $(A^*\tilde{v})x = \tilde{v}(Ax)$ . Έτσι,

$$\begin{aligned} |(A_*N)\tilde{v}| &= |N(A^*\tilde{v})| \\ &\leq C_N \|A^*\tilde{v}\|_{C^l(\bar{K})} \\ &\leq C_{N,n,l} \left(1 + \max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}|\right)^l \|\tilde{v}\|_{C^l(\bar{K})}. \end{aligned}$$

Ακόμα,

$$\|(A^{-1})^*\phi_N\|_{W^{m,p}(\tilde{K})} \leq C'_{N,n,m} \left(1 + \max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}^{-1}|\right)^m \times \|\phi_N\|_{W^{m,p}(K)} |\det a|^{1/p}.$$

Επειδή η  $\|\phi_N\|_{W^{m,p}(K)}$  είναι φραγμένη στο στοιχείο αναφοράς, έχουμε

$$\|\tilde{\mathcal{I}}\tilde{v}\|_{W^{m,p}(\tilde{K})} \leq C_{ref} \left(1 + \max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}|\right)^l \times \left(1 + \max_{1 \leq i,j \leq n} |(a^{-1})_{ij}|\right)^m |\det a|^{1/p} \|\tilde{v}\|_{C^l(\bar{K})}.$$

όπου

$$C_{ref} = |\mathcal{N}| \cdot \max_{N \in \mathcal{N}} \{C_{N,n,l}\} \cdot \max_{N \in \mathcal{N}} \{C'_{N,n,m}\} \cdot \max_{N \in \mathcal{N}} \{\|\phi_N\|_{W^{m,p}(K)}\}$$

και το  $|\mathcal{N}|$  είναι ο αριθμός κομβικών μεταβλητών ( $= \dim \mathcal{P}$ ). Συνεπώς,

$$\sigma(\tilde{K}) \leq C_{ref} \left(1 + \max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}|\right)^l \times \left(1 + \max_{1 \leq i,j \leq n} |(a^{-1})_{ij}|\right)^m |\det a|^{1/p}. \quad (3.3.11)$$

■

**Ορισμοί 3.3.6** Έστω  $\Omega$  δοσμένο χωρίο και  $\{\mathcal{T}^h\}$ ,  $0 < h \leq 1$  οικογένεια υποδιαίρεσεων τέτοια ώστε

$$\max \{diam T : T \in \mathcal{T}^h\} \leq h diam \Omega. \quad (3.3.12)$$

(i) Η οικογένεια ονομάζεται σχεδόν ομοιόμορφη αν υπάρχει  $\rho > 0$  τέτοιο ώστε

$$\min \{diam B_T : T \in \mathcal{T}^h\} \geq \rho h diam \Omega. \quad (3.3.13)$$

για όλα τα  $h \in (0, 1]$ , όπου  $B_T$  είναι η μεγαλύτερη μπάλα που περιέχεται στο  $T$  τέτοια ώστε το  $T$  είναι αστερόμορφο ως προς τη  $B_T$ .

(ii) Η οικογένεια λέγεται μη-εκφυλισμένη αν υπάρχει  $\rho > 0$  τέτοιο ώστε για όλα τα  $T \in \mathcal{T}^h$  και όλα τα  $h \in (0, 1]$

$$diam B_T \geq \rho diam T. \quad (3.3.14)$$

**Παρατηρήσεις 3.3.1** (i) Η  $\{\mathcal{T}^h\}$  είναι μη-εκφυλισμένη αν και μόνο αν η παράμετρος παχύτητας είναι ομοιόμορφα φραγμένη για όλα τα  $T \in \mathcal{T}^h$  και όλα τα  $h \in (0, 1]$ .

(ii) Αν μία οικογένεια είναι σχεδόν-ομοιόμορφη, τότε είναι μη-εκφυλισμένη, αλλά δεν ισχύει και το αντίστροφο.

(iii) Αν ξεκινήσουμε με μία αυθαίρετη τριγωνοποίηση σε δύο διαστάσεις και υποδιαιρέσουμε ενώνοντας τα μέσα των ακμών, προκύπτει μία σχεδόν ομοιόμορφη οικογένεια τριγωνοποιήσεων. Παρόμοια, αλλά πιο περίπλοκη κατασκευή μπορεί να γίνει και στις τρεις διαστάσεις.

Για το επόμενο θεώρημα, θυμίζουμε ότι ένα στοιχείο αναφοράς  $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$  είναι  $C^r$  στοιχείο αν  $r$  είναι ο μεγαλύτερος μη αρνητικός ακέραιος για τον οποίο

$$V^h = \mathcal{I}^h C^l(\bar{\Omega}) \subseteq C^r(\Omega) \cap W^{r+1, \infty}(\Omega). \quad (3.3.15)$$

Εδώ,  $\mathcal{I}^h : C^l(\bar{\Omega}) \rightarrow L^1(\Omega)$  είναι ο ολικός τελεστής παρεμβολής που ορίζεται ως

$$\mathcal{I}^h u|_T := \mathcal{I}_T^h u \quad \text{για } T \in \mathcal{T}^h, h \in (0, 1] \quad (3.3.16)$$

όπου  $\mathcal{I}_T^h$  είναι ο τελεστής παρεμβολής για το affine ισοδύναμο στοιχείο  $(T, \mathcal{P}_T, \mathcal{N}_T)$ .

**Θεώρημα 3.3.2** Έστω  $\{\mathcal{T}^h\}$ ,  $0 < h \leq 1$ , μία μη-εκφυλισμένη οικογένεια υποδιαιρέσεων ενός πολυεδρικού χωρίου  $\Omega$  στο  $\mathbb{R}^n$ . Έστω  $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$  ένα στοιχείο αναφοράς που ικανοποιεί τις συνθήκες του Θεωρήματος 3.3.1 για κάποια  $l, m$  και  $p$ . Για όλα τα  $T \in \mathcal{T}^h$ ,  $0 < h \leq 1$ , έστω  $(T, \mathcal{P}_T, \mathcal{N}_T)$  το affine ισοδύναμο στοιχείο. Τότε, υπάρχει θετική σταθερά  $C$  που εξαρτάται από το στοιχείο αναφοράς, τα  $n, m, p$  και τον αριθμό  $\rho$  της (3.3.14) τέτοια ώστε για  $0 \leq s \leq m$

$$\left( \sum_{T \in \mathcal{T}^h} \|v - \mathcal{I}^h v\|_{W^{s,p}(T)}^p \right)^{1/p} \leq Ch^{m-s} |v|_{W^{m,p}(\Omega)} \quad (3.3.17)$$

για όλες τις  $v \in W^{m,p}(\Omega)$ . Στην περίπτωση που  $p = \infty$ , η (3.3.17) γίνεται για  $0 \leq s \leq l$

$$\max_{T \in \mathcal{T}^h} \|v - \mathcal{I}^h v\|_{W^{s,\infty}(T)} \leq Ch^{m-s-n/p} |v|_{W^{m,p}(\Omega)} \quad \forall v \in W^{m,p}(\Omega). \quad (3.3.18)$$

**Πόρισμα 3.3.2** Η ίδια ακριβώς εκτίμηση ισχύει και αν όλα τα  $(T, \mathcal{P}_T, \mathcal{N}_T)$  είναι affine-παρεμβολικά ισοδύναμα με το  $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$  για όλα τα  $T \in \mathcal{T}^h$ ,  $0 < h \leq 1$ .

### 3.3.2 Αντίστροφες Εκτιμήσεις

Σε αυτή την ενότητα εξετάζουμε τις σχέσεις μεταξύ διαφόρων νορμών σε χώρο πεπερασμένων στοιχείων. Έστω  $K$  ένα φραγμένο χωρίο στον  $\mathbb{R}^n$ . Αν  $v$  είναι μία συνάρτηση ορισμένη στο  $K$ , τότε η  $\hat{v}$  ορίζεται στο  $\hat{K} = \{(1/\text{diam}K)x : x \in K\}$  ως

$$\hat{v}(\hat{x}) = v((\text{diam}K)\hat{x}) \quad \forall \hat{x} \in \hat{K}. \quad (3.3.19)$$

Είναι εμφανές ότι  $v \in W^{k,r}(K)$  αν και μόνο αν  $\hat{v} \in W^{k,r}(\hat{K})$  και

$$|\hat{v}|_{W^{k,r}(\hat{K})} = (\text{diam}K)^{k-(n/r)} |v|_{W^{k,r}(K)}. \quad (3.3.20)$$

Αν  $\mathcal{P}$  είναι διανυσματικός χώρος συναρτήσεων ορισμένος στο  $K$ , τότε  $\hat{\mathcal{P}} := \{\hat{v} : v \in \mathcal{P}\}$ .

**Λήμμα 3.3.5** Έστω  $\rho h \leq \text{diam}K \leq h$ , όπου  $0 < h \leq 1$  και  $\mathcal{P}$  ένας πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του  $W_p^l(K) \cap W^{m,q}(K)$ , όπου  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $1 \leq q \leq \infty$  και  $0 \leq m \leq l$ . Τότε, υπάρχει  $C = C(\hat{\mathcal{P}}, \hat{K}, l, p, q, \rho)$  τέτοια ώστε για όλες τις  $v \in \mathcal{P}$

$$\|v\|_{W^{l,p}(K)} \leq Ch^{m-l+n/p-n/q} \|v\|_{W^{m,q}(K)}. \quad (3.3.21)$$

**Απόδειξη.** Θα χρησιμοποιούμε το  $C$  για να αναπαραστήσουμε μία σταθερά που εξαρτάται μόνο από τα  $\hat{\mathcal{P}}, \hat{K}, l, p, q$  και  $\rho$ .

1. Δείχνουμε πρώτα την (3.3.21) για  $m = 0$ . Για οποιοδήποτε πεπερασμένης διάστασης χώρο  $\mathcal{P}$  που ικανοποιεί τις συνθήκες του λήμματος, έχουμε από την ισοδυναμία των νορμών ότι

$$\|\hat{v}\|_{W^{l,p}(\hat{K})} \leq C \|\hat{v}\|_{L^q(\hat{K})} \quad \forall v \in \mathcal{P}. \quad (3.3.22)$$

Συνεπώς, η (3.3.20) συνεπάγεται ότι

$$|v|_{W^{j,p}(K)} (\text{diam}K)^{j-n/p} \leq C \|v\|_{L^q(K)} (\text{diam}K)^{-n/q} \quad (3.3.23)$$

για  $0 \leq j \leq l$  από την οποία εξάγουμε ότι

$$|v|_{W^{j,p}(K)} \leq Ch^{-j+n/p-n/q} \|v\|_{L^q(K)} \quad \text{για } 0 \leq j \leq l. \quad (3.3.24)$$

Επειδή  $h \leq 1$ , έχουμε

$$\|v\|_{W^{j,p}(K)} \leq Ch^{-j+n/p-n/q} \|v\|_{L^q(K)} \quad \text{για } 0 \leq j \leq l, \quad (3.3.25)$$

που είναι η (3.3.21) για  $m = 0$  αν πάρουμε  $j = l$ .

2. Για τη γενική περίπτωση που  $m \leq l$ , το δείχνουμε ως εξής. Για  $l - m \leq k \leq l$  και  $|\alpha| = k$ , μπορούμε να γράψουμε  $D^\alpha v = D^\beta D^\gamma v$  για  $|\beta| = l - m$  και  $|\gamma| = k + m - l$ :

$$\begin{aligned} \|D^\alpha v\|_{L^p(K)} &\leq \|D^\gamma v\|_{W^{l-m,p}(K)} \\ &\leq Ch^{-(l-m)+\frac{n}{p}-\frac{n}{q}} \|D^\gamma v\|_{L^q(K)} \quad \text{από την (3.3.25) για } D^\gamma \mathcal{P} \\ &\leq Ch^{-(l-m)+\frac{n}{p}-\frac{n}{q}} |v|_{W^{k+m-l,q}(K)}. \end{aligned}$$

Επειδή το  $|\alpha| = k$  είναι αυθαίρετο, έχουμε

$$|v|_{W^{k,p}(K)} \leq Ch^{-(l-m)+\frac{n}{p}-\frac{n}{q}} |v|_{W^{k+m-l,q}(K)} \quad (3.3.26)$$

για οποιοδήποτε  $k$  ικανοποιεί το  $l - m \leq k \leq l$ . Συγκεκριμένα, αυτό συνεπάγεται ότι

$$|v|_{W^{k,p}(K)} \leq Ch^{-(l-m)+\frac{n}{p}-\frac{n}{q}} \|v\|_{W^{m,q}(K)} \quad (3.3.27)$$

για  $k$  που ικανοποιεί το  $l - m \leq k \leq l$ , αφού αυτό σημαίνει ότι  $k + m - l \leq m$ . Η (3.3.21) προκύπτει τώρα από την (3.3.25) για  $j = l - m$  και την (3.3.27).

■

Ακολουθεί η γενική εκδοχή του λήμματος.

**Θεώρημα 3.3.3** Έστω  $\{\mathcal{T}^h\}$ ,  $0 < h \leq 1$  μία σχεδόν ομοιόμορφη οικογένεια υποδιαίρεσεων ενός πο-  
λυεδρικού χωρίου  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . Έστω  $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$  ένα στοιχείο αναφοράς τέτοιο ώστε  $\mathcal{P} \subseteq W^{l,p}(K) \cap W^{m,q}(K)$   
όπου  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $1 \leq q \leq \infty$  και  $0 \leq m \leq l$ . Για  $T \in \mathcal{T}^h$  θεωρούμε το affine ισοδύνα-  
μο στοιχείο  $(T, \mathcal{P}_T, \mathcal{N}_T)$  και  $V^h = \{v : \eta \text{ } v \text{ είναι μετρήσιμη και } v|_T \in \mathcal{P}_T \text{ } \forall T \in \mathcal{T}^h\}$ . Τότε υπάρχει  
 $C = C(l, p, q, \rho)$  τέτοια ώστε

$$\left[ \sum_{T \in \mathcal{T}^h} \|v\|_{W^{l,p}(T)}^p \right]^{1/p} \leq Ch^{m-l+\min(0, \frac{n}{p}-\frac{n}{q})} \left[ \sum_{T \in \mathcal{T}^h} \|v\|_{W^{m,q}(T)}^q \right]^{1/q} \quad (3.3.28)$$

για όλες τις  $v \in V^h$ . Όταν  $p = \infty$ , έχουμε  $\max_{T \in \mathcal{T}^h} \|v\|_{W^{l,\infty}(T)}$  αντί για  $\left[ \sum_{T \in \mathcal{T}^h} \|v\|_{W^{l,p}(T)}^p \right]^{1/p}$  και  
αντίστοιχα για  $q = \infty$ .

### 3.4 n-Διάστατα Μεταβολικά Προβλήματα

Εδώ συνδυάζουμε τα θεωρήματα ύπαρξης και τη θεωρία προσέγγισης των προηγούμενων ενοτήτων. Υποθέτουμε ότι το χωρίο  $\Omega$  είναι φραγμένο.

#### 3.4.1 Μεταβολική Διατύπωση της Εξίσωσης Poisson

Ξεκινάμε με την εξίσωση Poisson

$$-\Delta u = f \text{ στο } \Omega \quad (3.4.1)$$

Οι συνοριακές συνθήκες που μπορεί να τη συνοδεύουν είναι δύο ειδών:

$$\begin{aligned} u &= 0 \text{ στο } \Gamma \subset \partial\Omega && \text{(Dirichlet)} \\ \text{και} &&& (3.4.2) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \text{ στο } \partial\Omega \setminus \Gamma && \text{(Neumann)} \end{aligned}$$

όπου το  $\frac{\partial u}{\partial \nu}$  είναι η παράγωγος του  $u$  στην κατεύθυνση που είναι κάθετη στο σύνορο  $\partial\Omega$ . Δηλαδή, υποθέτουμε ότι το  $\partial\Omega$  είναι Lipschitz συνεχές, θέτουμε  $\nu$  το προς τα έξω μοναδιαίο που είναι κάθετο στο  $\partial\Omega$ , που είναι από υπόθεση  $L^\infty(\partial\Omega)^n$ , και θέτουμε

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nu \cdot \nabla u$$

Αρχικά, θα θεωρήσουμε ότι το  $\Gamma$  είναι κλειστό και έχει μη-μηδενικό μέτρο. Στη συνέχεια θα δούμε και την περίπτωση που είναι το κενό, δηλαδή την καθαρά Neumann περίπτωση.

Για να δημιουργήσουμε το ισοδύναμο μεταβολικό πρόβλημα του ((3.4.1) – (3.4.2)), ορίζουμε ένα μεταβολικό χώρο που να ενσωματώνει το Dirichlet σκέλος της συνοριακής συνθήκης (3.4.2):

$$V := \{v \in H^1(\Omega) : v|_\Gamma = 0\} \quad (3.4.3)$$

όπου το  $v|_\Gamma$  το ερμηνεύουμε με βάση το Θεώρημα Ίχνους στον  $L^2(\partial\Omega)$ , το αντιλαμβανόμαστε δηλαδή, ως  $v \cdot \chi_\Gamma = 0$ , όπου  $\chi_\Gamma$  η χαρακτηριστική συνάρτηση του  $\Gamma$ .

Για τα παρακάτω, υποθέτουμε ότι το  $\Omega$  είναι Lipschitz. Για κάθε γαμμικό χώρο  $B$  συμβολίζουμε με  $B^n$  το γραμμικό χώρο των  $n$ -άδων από στοιχεία του  $B$ . Όπως και στην απλή περίπτωση έχουμε:

**Πρόταση 3.4.1** Έστω  $u \in W^{1,1}(\Omega)^n$ . Τότε,

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot u \, dx = \int_{\partial\Omega} u \cdot \nu \, ds$$

**Πρόταση 3.4.2** Έστω  $v, w \in H^1(\Omega)$ . Τότε, για  $i = 1, \dots, n$

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) w \, dx = - \int_{\Omega} v \left( \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) \, dx + \int_{\partial\Omega} v w \nu_i \, ds.$$

και

**Πρόταση 3.4.3** Έστω  $u \in H^2(\Omega)$  και  $v \in H^1(\Omega)$ . Τότε,

$$\int_{\Omega} (-\Delta u)v \, dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, ds$$

Χρησιμοποιώντας αυτές τις προτάσεις, προκύπτει ότι για  $u \in H^2(\Omega)$  που ικανοποιεί το ((3.4.1) – (3.4.2)) και για κάθε  $v \in V$

$$(f, v) = \int_{\Omega} (-\Delta u)v \, dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} \, ds \quad (3.4.4)$$

$$= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx := B[u, v]. \quad (3.4.5)$$

Ο συνοριακός όρος εξαφανίζεται για  $v \in V$  γιατί σε κάθε κομμάτι του συνόρου είτε η  $v$  είτε η  $\frac{\partial u}{\partial \nu}$  είναι μηδέν. Έχουμε έτσι δείξει την επόμενη πρόταση.

**Πρόταση 3.4.4** Έστω  $u \in H^2(\Omega)$  που ικανοποιεί το ((3.4.1) – (3.4.2)) και  $f \in L^2(\Omega)$ . Τότε η  $u$  μπορεί να χαρακτηριστεί από το

$$u \in V \text{ ικανοποιεί } B[u, v] = (f, v) \quad \forall v \in V. \quad (3.4.6)$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή:

**Πρόταση 3.4.5** Έστω  $f \in L^2(\Omega)$  και  $u \in H^2(\Omega)$  που λύνει το μεταβολικό πρόβλημα (3.4.6). Τότε, η  $u$  λύνει την εξίσωση Poisson (3.4.1) με τις συνοριακές συνθήκες (3.4.2).

**Απόδειξη.** Η Dirichlet συνοριακή συνθήκη προκύπτει από το γεγονός ότι  $u \in V$ . Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 3.4.3 με  $v \in C_0^\infty(\Omega) \subset V$  ( $C_0^\infty(\Omega)$  είναι ο χώρος των  $C^\infty$  με φορέα στο  $\Omega$ ) και τη σχέση (3.4.6) βρίσκουμε ότι

$$\int_{\Omega} (f + \Delta u)v \, dx = (f, v) - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = (f, v) - B[u, v] = 0.$$

Επειδή ο  $C_0^\infty(\Omega)$  είναι πυκνός στον  $L^2(\Omega)$ , η (3.4.1) ικανοποιείται στον  $L^2(\Omega)$  και λόγω της Πρότασης 3.4.3 έχουμε και ότι

$$0 = (f, v) - B[u, v] = \int_{\Omega} (-\Delta u)v \, dx - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} \, ds$$

για όλες τις  $v \in V$ . Η Neumann συνοριακή συνθήκη στη  $u$  προκύπτει δείχνοντας ότι η  $v|_{\partial\Omega \setminus \Gamma}$  μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα με  $v \in V$ . Επειδή το  $\partial\Omega$  είναι Lipschitz και το  $\Gamma$  είναι κλειστό υποσύνολό του, ξέρουμε ότι για κάθε σημείο  $P$  στο  $\partial\Omega \setminus \Gamma$  υπάρχει περιοχή  $N$  του  $P$  στο  $\partial\Omega \setminus \Gamma$  που μπορεί να γραφεί ως το γράφημα μίας Lipschitz συνάρτησης  $\phi$ :

$$N = \{(\hat{x}, \phi(\hat{x})) : \hat{x} \in \omega\}$$

όπου το  $\omega$  είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^{n-1}$  και  $\hat{x} := (x_1, \dots, x_{n-1})$ . Επιπλέον, μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$\{(x_1, \dots, x_n) : \hat{x} \in \omega, -\varepsilon < x_n - \phi(\hat{x}) < 0\} \subset \Omega$$

όπου το  $\varepsilon > 0$  εξαρτάται μόνο από το  $\Omega$ . Το συνοριακό ολοκλήρωμα πάνω στη  $N$  μπορεί να γραφεί ως

$$\int_N v \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = \int_\omega \left( v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) (\hat{x}, \phi(\hat{x})) \sqrt{1 + |\nabla \phi(\hat{x})|^2} d\hat{x}.$$

Έστω  $w \in C_0^\infty(\omega)$  και θέτουμε

$$v(\hat{x}, t + \phi(\hat{x})) := w(\hat{x})(1 + t/\varepsilon) \quad \forall \hat{x} \in \omega, -\varepsilon < t < 0$$

με τη  $v$  να είναι εξ ορισμού μηδέν οπουδήποτε αλλού. Τότε,  $v \in V$  και

$$0 = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = \int_N v \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = \int_\omega w(\hat{x}) \frac{\partial u}{\partial \nu} (\hat{x}, \phi(\hat{x})) \sqrt{1 + |\nabla \phi(\hat{x})|^2} d\hat{x}.$$

Επειδή η  $L^\infty$  συνάρτηση  $\sqrt{1 + |\nabla \phi(\hat{x})|^2}$  είναι φραγμένη από κάτω από το 1 και η  $w$  ήταν αυθαίρετη, συμπεραίνουμε ότι  $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_N = 0$ . Επειδή το  $\partial\Omega \setminus \Gamma$  καλύπτεται από τέτοιες περιοχές,  $N$ , συμπεραίνουμε ότι η συνθήκη Neumann ισχύει σε όλο το  $\partial\Omega \setminus \Gamma$ . ■

### 3.4.2 Μεταβολική Διατύπωση του Καθαρά Neumann Προβλήματος

Σε αυτή την υποενότητα μελετάμε την περίπτωση που  $\Gamma = \emptyset$  και άρα

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{στο } \partial\Omega \tag{3.4.7}$$

Σε αυτή την περίπτωση θέλουμε η  $f$  του Poisson να ικανοποιεί:

$$\begin{aligned} \int_\Omega f(x) dx &= \int_\Omega -\Delta u(x) dx \\ &= \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla 1 dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.4.8}$$



Τέτοια συμπεριφορά είναι τυπική για ελλειπτικούς τελεστές, όπως της μορφής  $-\Delta + \lambda I$ ,  $\lambda$  απλή ιδιοτιμή, που είδαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο.

Ένας μεταβολικός χώρος κατάλληλος για την παρούσα περίπτωση είναι ο

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} v(x) dx = 0 \right\}. \quad (3.4.9)$$

Θυμίζουμε ότι η μέση τιμή μίας  $u$  πάνω σε ένα σύνολο  $U$  ορίζεται ως  $\bar{u} = (u)_U = \int_U u dy = \frac{1}{|U|} \int_U u dx$  όπου  $\bar{u}$  και  $(u)_U$  είναι ισοδύναμοι συμβολισμοί. Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι για οποιαδήποτε  $v \in H^1(\Omega)$ ,  $v - \bar{v} \in V$ .

Χρησιμοποιώντας τις τεχνικές της προηγούμενης υποενότητας, αποδεικνύεται η επόμενη πρόταση.

**Πρόταση 3.4.6** Έστω  $u \in H^2(\Omega)$  λύνει την εξίσωση Poisson με καθαρά Neumann συνοριακές συνθήκες (3.4.7). Τότε  $u - \bar{u}$  ικανοποιεί το μεταβολικό πρόβλημα (3.4.6) με τον  $V$  ορισμένο όπως στη (3.4.9).

Θα αποδείξουμε τώρα το αντίστροφο της πρότασης.

**Πρόταση 3.4.7** Έστω  $f \in L^2(\Omega)$  και  $u \in H^2(\Omega)$  που λύνει το μεταβολικό πρόβλημα (3.4.6) με το  $V$  όπως έχει οριστεί στην (3.4.9). Τότε,  $u$  λύνει το πρόβλημα Poisson ((3.4.1) – (3.4.2)) με δεξι μέλος

$$\tilde{f}(x) := f(x) - \bar{f} \quad \forall x \in \Omega.$$

**Παρατήρηση 3.4.1** Παρατηρούμε ότι αυτές οι προτάσεις είναι παρόμοιες με αυτές της προηγούμενης ενότητας με τη διαφορά ότι έχει αλληλάξει το  $V$  και εμφανίζονται και σταθερές στις  $f$  και  $u$ . Παρατηρούμε ότι το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz εγκυιάται την ύπαρξη λύσης για κάθε  $f$  αν η  $B[\cdot, \cdot]$  είναι πειστική. Επειδή το  $v \in V$  συνεπάγεται ότι  $\int_{\Omega} v(x) dx = 0$ , έχουμε

$$\int_{\Omega} v(x) \tilde{f}(x) dx = \int_{\Omega} v(x) f(x) dx \quad \forall v \in V$$

και άρα τα μεταβολικά προβλήματα για  $f$  και  $\tilde{f}$  είναι ακριβώς τα ίδια.

**Απόδειξη.** Η προηγούμενη παρατήρηση δείχνει ότι το μεταβολικό πρόβλημα είναι το ίδιο είτε χρησιμοποιήσουμε την  $f$  είτε την  $\tilde{f}$ . Έτσι, αρκεί να υποθέσουμε ότι η  $f$  έχει μέση τιμή μηδέν και να επαληθεύσουμε τις (3.4.1) και (3.4.7) σε αυτή την περίπτωση.

Χρησιμοποιώντας τα επιχειρήματα της προηγούμενης υποενότητας, βλέπουμε ότι

$$\int_{\Omega} (-\Delta u - f)v dx = 0 \quad \forall v \in \tilde{C}_0^\infty(\Omega) := \{ \phi \in C_0^\infty(\Omega) : \bar{\phi} = 0 \}.$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι η κλεισιότητα του  $\tilde{C}_0^\infty$  στον  $L^2(\Omega)$  είναι ο υπόχωρος

$$\tilde{L}^2(\Omega) := \{\phi \in L^2(\Omega) : \bar{\phi} = 0\}.$$

Έτσι, συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση  $-\Delta u = f + \delta$  ισχύει στον  $L^2(\Omega)$ , όπου  $\delta = -\overline{\Delta u}$ , αφού  $\int_{\Omega} \delta v(x) dx = 0$  για  $v \in V$ . Χρησιμοποιώντας πάλι την Πρόταση 3.4.3, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} 0 &= (f, v) - B[u, v] = \int_{\Omega} (-\Delta u - \delta)v dx - B[u, v] \\ &= \int_{\Omega} (-\Delta u)v dx - B[u, v] \\ &= - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} ds \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

Αλλά το  $v|_{\partial\Omega}$  μπορεί να διαλεχθεί αυθαίρετα κρατώντας  $v \in V$ : έστω  $w \in H^1(\Omega)$  αυθαίρετο και θέτουμε  $v := w - \bar{w}\phi$  όπου η  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$  ικανοποιεί το  $\bar{\phi} = 1$ . Έτσι, συμπεραίνουμε ότι η (3.4.7) ισχύει. Τέλος, εφαρμόζοντας άλλη μία φορά την Πρόταση 3.4.3 με  $v \equiv 1$ , προκύπτει ότι  $\delta = 0$ . ■

### 3.4.3 Μεταβολική Προσέγγιση της Εξίσωσης Poisson

Έστω  $\mathcal{T}^h$  μία υποδιαίρεση του  $\Omega$  και  $\mathcal{I}^h$  μία ολική συνάρτηση παρεμβολής για μία οικογένεια πεπερασμένων στοιχείων βασισμένων στα στοιχεία του  $\mathcal{T}^h$ . Υποθέτουμε ότι η  $\mathcal{I}^h u$  είναι συνεχής, η οικογένεια δηλαδή των στοιχείων που περιλαμβάνονται είναι  $C^0$ . Επιπλέον, υποθέτουμε ότι οι αντίστοιχες συναρτήσεις σχήματος έχουν τάξη προσέγγισης  $m$ , δηλαδή

$$\|u - \mathcal{I}^h u\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^{m-1}|u|_{H^m(\Omega)}. \quad (3.4.10)$$

Για να προσεγγίσουμε το μεταβολικό πρόβλημα (3.4.6), πρέπει να καταχωρώσουμε δύο ιδιότητες του αντίστοιχου χώρου  $V_h$ . Για να εφαρμόσουμε το Θεώρημα του Cέα, πρέπει να έχουμε

$$V_h \subset V. \quad (3.4.11)$$

Για να χρησιμοποιήσουμε την προσεγγιστική θεωρία της προηγούμενης ενότητας, πρέπει

$$\mathcal{I}^h(V \cap C^k(\Omega)) \subset V_h \quad (3.4.12)$$

όπου  $k$  είναι η υψηλότερη τάξη παραγώγισης στον ορισμό του  $\mathcal{I}^h$ . Αν ισχύουν και οι δύο αυτές συνθήκες, έχουμε το επόμενο ως άμεση συνέπεια του Θεωρήματος του Cέα.

**Θεώρημα 3.4.1** Έστω ισχύουν οι συνθήκες (3.4.10), (3.4.11) και (3.4.12). Τότε, η μοναδική λύση  $u_h \in V_h$  στο μεταβολικό πρόβλημα

$$B[u_h, v] = (f, v) \quad \forall v \in V_h$$

ικανοποιεί την

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^{m-1} |u|_{H^m(\Omega)}. \quad (3.4.13)$$

Οι δύο τελευταίες συνθήκες θέτουν περιορισμούς στην υποδιαίρεση στην περίπτωση που το  $\Gamma$  δεν είναι ούτε το κενό ούτε όλο το σύνορο. Σε αυτή την περίπτωση, πρέπει να διαλέξουμε το πλέγμα με τρόπο που να ευθυγραμμίζεται ομαλά με τα σημεία που οι συνοριακές συνθήκες αλλάζουν από Dirichlet σε Neumann. Για παράδειγμα, στις δύο διαστάσεις, αν χρησιμοποιήσουμε στοιχεία Lagrange και φροντίσουμε τα σημεία στα οποία αλλάζουν οι συνοριακές συνθήκες να είναι κορυφές, τότε το να ορίσουμε

$$V_h := \mathcal{I}^h(V \cap C^0(\Omega))$$

είναι ισοδύναμο με το να ορίσουμε τον  $V_h$  να είναι ο χώρος των κατά τμήματα πολυωνύμων που μηδενίζονται στις ακμές που περιέχονται στο  $\Gamma$ . Επειδή έχουμε διαλέξει το πλέγμα έτσι ώστε οι ακμές που περιέχονται στο  $\Gamma$  να δημιουργούν μία υποδιαίρεσή του, προκύπτει ότι η (3.4.11) ισχύει. Από την άλλη, αν το σύνολο των κορυφών όπου οι συναρτήσεις του  $V_h$  εξαφανίζονται είναι πολύ μικρό, τότε δεν μπορεί να ισχύσει η (3.4.11). Αν αυτό το σύνολο είναι πολύ μεγάλο, τότε δεν ισχύει η (3.4.12). Στην περίπτωση που έχουμε καθαρά Dirichlet δεδομένα, δηλαδή  $\Gamma = \partial\Omega$ , ο  $V_h$  είναι απλά το σύνολο των κατά τμήματα πολυωνύμων που μηδενίζονται σε ολόκληρο το σύνορο. Στην περίπτωση που έχουμε μόνο Neumann συνοριακή, δηλαδή  $\Gamma = \emptyset$ , ο  $V_h$  είναι όλο το σύνολο των κατά τμήματα πολυωνύμων χωρίς περιορισμό στο σύνορο.

Ψάχνουμε τώρα εκτιμήσεις σφάλματος για τη  $u - u_h$  στην  $L^2$  νόρμα. Έστω  $w$  λύση του

$$\begin{aligned} -\Delta w &= e \quad \text{στο } \Omega \\ w &= 0 \quad \text{στο } \Gamma \subset \partial\Omega \quad \text{και} \quad \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \quad \text{στο } \partial\Omega \setminus \Gamma \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

όπου  $e := u - u_h$ . Η μεταβολική μορφή αυτού του προβλήματος είναι: να βρεθεί  $w \in V$  τέτοιο ώστε

$$B[w, v] = (e, v) \quad \forall v \in V. \quad (3.4.15)$$

Επειδή  $u - u_h \in V'$ , η λύση υπάρχει μοναδικά. Έτσι,

$$\begin{aligned}
 \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 &= (u - u_h, u - u_h) \\
 &= B[w, u - u_h] \\
 &= B[u - u_h, w - \mathcal{I}^h w] \\
 &\leq C \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \|w - \mathcal{I}^h w\|_{H^1(\Omega)} \\
 &\leq Ch \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} |w|_{H^2(\Omega)}.
 \end{aligned}$$

Υποθέτουμε τώρα ότι τα ισοδύναμα προβλήματα (3.4.14) και (3.4.15) έχουν την ιδιότητα:

$$|w|_{H^2(\Omega)} \leq C \|e\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.4.16)$$

**Θεώρημα 3.4.2** *Αν ισχύουν οι συνθήκες (3.4.10), (3.4.11), (3.4.12) και (3.4.16), τότε*

$$\begin{aligned}
 \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} &\leq Ch \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \\
 &\leq Ch^m |u|_{H^m(\Omega)}.
 \end{aligned} \quad (3.4.17)$$

Έχοντας δει αυτά, είναι εύκολο να τα προσαρμόσουμε σε μη-ομογενείς συνοριακές συνθήκες. Για παράδειγμα, έστω ότι θέλουμε να λύσουμε το (3.4.1) με τις συνοριακές συνθήκες:

$$u = g_D \text{ στο } \Gamma \subset \partial\Omega \text{ και } \frac{\partial u}{\partial \nu} = g_N \text{ στο } \partial\Omega \setminus \Gamma \quad (3.4.18)$$

για δοσμένες  $g_D$  και  $g_N$ . Για απλότητα, υποθέτουμε ότι η  $g_D$  έχει οριστεί σε όλο το  $\Omega$  με  $g_D \in H^1(\Omega)$  και ότι  $g_N \in L^2(\partial\Omega \setminus \Gamma)$ . Ορίζουμε  $V$  να είναι ο χώρος (3.4.3). Τότε η μεταβολική διατύπωση του προβλήματος (3.4.1), (3.4.18) είναι η εξής: να βρεθεί  $u$  τέτοια ώστε  $u - g_D \in V$  και τέτοια ώστε

$$B[u, v] = (f, v) + \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma} g_N v \, ds \quad \forall v \in V. \quad (3.4.19)$$

Αυτό είναι καλά τοποθετημένο, αφού η γραμμική μορφή

$$F(v) := (f, v) + \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma} g_N v \, ds$$

είναι καλά ορισμένη (και συνεχής) για όλες τις  $v \in V$ .

Η ισοδυναμία αυτών των μορφών προκύπτει από την Πρόταση 3.4.3

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (-\Delta u)v \, dx &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \, ds - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} \, ds \\ &= B[u, v] - \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma} v \frac{\partial u}{\partial \nu} \, ds \end{aligned}$$

για κάθε  $v \in V$ . Έτσι, αν η  $u$  λύνει το (3.4.1), (3.4.18), τότε η (3.4.19) προκύπτει ως συνέπεια. Αντίστροφα, αν η  $u$  λύνει την (3.4.19), τότε διαλέγοντας  $v$  που μηδενίζεται κοντά στο  $\partial\Omega$ , βλέπουμε ότι η (3.4.1) ισχύει και άρα,

$$\int_{\partial\Omega \setminus \Gamma} g_N v \, ds - \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma} v \frac{\partial u}{\partial \nu} \, ds = 0 \quad \forall v \in V$$

Διαλέγοντας  $v$  όπως στην απόδειξη της Πρότασης 3.4.5, προκύπτει η (3.4.18).

Η προσέγγιση πεπερασμένων στοιχείων (3.4.19) περιλαμβάνει, συνήθως, τη χρήση συνάρτησης παρεμβολής,  $\mathcal{I}^h g_D$  για τα Dirichlet δεδομένα. Δαλέγουμε υπόχωρο  $V_h$  του  $V$  όπως πριν και ψάχνουμε  $u_h$  τέτοια ώστε  $u_h - \mathcal{I}^h g_D \in V_h$  και τέτοια ώστε

$$B[u_h, v] = (f, v) + \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma} g_N v \, ds \quad \forall v \in V_h. \quad (3.4.20)$$

Για τη (3.4.20) ισχύουν σχέσεις ανάλογες με τις (3.4.13) και (3.4.17).

### 3.4.4 Μεταβολική Προσέγγιση Γενικών Ελλειπτικών Προβλημάτων

Έχουμε δει σε προηγούμενο κεφάλαιο ότι αν και σε κάποια καλώς τοποθετημένα ελλειπτικά προβλήματα το μεταβολικό τους πρόβλημα δεν είναι πιεστικό, μπορεί πάντα να γίνει μέσω μίας προσθετικής σταθεράς. Για να βρούμε τις ζητούμενες εκτιμήσεις, υποθέτουμε ότι η μεταβολική μορφή  $B[\cdot, \cdot]$  έχει τις εξής ιδιότητες:

1. Είναι συνεχής στον  $H^1(\Omega)$ , δηλαδή

$$|B[u, v]| \leq C_1 \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad (3.4.21)$$

2. Υπάρχει κατάλληλη προσθετική σταθερά  $K \in \mathbb{R}$  που την κάνει πιεστική

$$B[v, v] + K(v, v) \geq \alpha \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad (3.4.22)$$

3. Υπάρχει  $V \subset H^1(\Omega)$  τέτοιος ώστε να υπάρχει μοναδική λύση,  $u$ , στο μεταβολικό πρόβλημα

$$B[u, v] = (f, v) \quad \forall v \in V$$

και στο συζυγές μεταβολικό πρόβλημα

$$B[v, u] = (f, v) \quad \forall v \in V$$

και ισχύει και στις δύο περιπτώσεις η εκτίμηση ομαλότητας

$$|u|_{H^2(\Omega)} \leq C_R \|f\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall f \in L^2(\Omega). \quad (3.4.23)$$

Έστω  $V_h \subset V$  ένας υπόχωρος πεπερασμένων στοιχείων, όπως στην προηγούμενη υποενότητα, και ορίζουμε  $u_h \in V_h$  μέσω της

$$B[u_h, v] = (f, v) \quad \forall v \in V_h. \quad (3.4.24)$$

Σε αυτό, η (3.4.24) δεν είναι απαραίτητο να έχει μοναδική λύση αφού η  $B[ \cdot, \cdot ]$  μπορεί να μην είναι πιεστική. Πράγματι, δεν μπορούμε να εγγυηθούμε κάτι τέτοιο για όλους τους υποχώρους  $V_h$ . Υποθέτουμε, πάντως, ότι

$$\inf_{v \in V_h} \|u - v\|_{H^1(\Omega)} \leq C_A h |u|_{H^2(\Omega)} \quad \forall u \in H^2(\Omega). \quad (3.4.25)$$

Ακολουθεί ένα θεώρημα ανάλογο με αυτό του Céas.

**Θεώρημα 3.4.3** Έστω ότι ισχύουν οι συνθήκες (3.4.21), (3.4.22), (3.4.23) και (3.4.25). Τότε, υπάρχουν σταθερές  $h_0$  και  $C$  τέτοιες ώστε για όλα τα  $h \leq h_0$  να υπάρχει μοναδική λύση της (3.4.24) που να ικανοποιεί την

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_{H^1(\Omega)} \quad (3.4.26)$$

όπου μπορούμε να πάρουμε  $C = 2C_1/\alpha$  και

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 C_A C_R h \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}.$$

Συγκεκριμένα, μπορούμε να πάρουμε

$$h_0 = \frac{(\alpha/2K)^{1/2}}{C_1 C_A C_R}.$$

**Απόδειξη.** Ξεκινάμε βρίσκοντας μία εκτίμηση για κάθε λύση της (3.4.24) που μπορεί να υπάρξει. Παρατηρούμε ότι σε κάθε περίπτωση, έχουμε τη αρχή της ορθογωνιότητας

$$B[u - u_h, v] = 0 \quad \forall v \in V_h. \quad (3.4.27)$$

Από τις (3.4.22), (3.4.27) και (3.4.1) προκύπτει άρα ότι για κάθε  $v \in V_h$

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq B[u - u_h, u - u_h] + K(u - u_h, u - u_h) \\ &= B[u - u_h, u - v] + K\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq C_1\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}\|u - v\|_{H^1(\Omega)} + K\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Θα προσπαθήσουμε τώρα να φράξουμε το  $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$ . Έστω  $w$  η λύση (γνωρίζουμε την ύπαρξή της από την (3.4.23)) του συζυγούς προβλήματος

$$B[v, w] = (u - u_h, v) \quad \forall v \in V.$$

Τότε, για κάθε  $w_h \in V_h$

$$\begin{aligned} (u - u_h, u - u_h) &= B[u - u_h, w] \\ &= B[u - u_h, w - w_h] \quad (\text{από την (3.4.27)}) \\ &\leq C_1\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}\|w - w_h\|_{H^1(\Omega)} \quad (\text{από την (3.4.21)}). \end{aligned}$$

Έτσι, για κατάλληλη επιλογή της  $w_h$

$$\begin{aligned} (u - u_h, u - u_h) &\leq C_1 C_A h \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \|w\|_{H^2(\Omega)} \quad (\text{από την (3.4.25)}) \\ &\leq C_1 C_A C_R h \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \quad (\text{από την (3.4.23)}). \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \quad (3.4.28)$$

όπου  $C = C_1 C_A C_R$ . Εφαρμόζοντας αυτό παραπάνω, βρίσκουμε

$$\alpha \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C_1 \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \|u - v\|_{H^1(\Omega)} + KC^2 h^2 \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Έτσι, για  $h \leq h_0$ , όπου  $h_0 = \frac{(\alpha/2K)^{1/2}}{C_1 C_A C_R}$ , βρίσκουμε

$$\alpha \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq 2C_1 \|u - v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in V_h. \quad (3.4.29)$$

Μέχρι στιγμής, λειτουργούσαμε με την υπόθεση ότι υπάρχει μία λύση  $u_h$ . Τώρα, θα εξετάσουμε το ερώτημα της ύπαρξης και μοναδικότητάς της. Επειδή η (3.4.24) είναι ένα πεπερασμένης διάστασης σύστημα που έχει τον ίδιο αριθμό αγνώστων και εξισώσεων, η ύπαρξη και η μοναδικότητα είναι ισοδύναμες. Η μη-μοναδικότητα θα συνεπάγετο την ύπαρξη μη-τετριμμένης λύσης,  $u_h$ , για  $f \equiv 0$ . Σε αυτή την περίπτωση, έχουμε από την (3.4.23) ότι  $u \equiv 0$ . Αλλά η (3.4.29) συνεπάγεται τότε ότι και  $u_h \equiv 0$  για  $h$  επαρκώς μικρό. Συγκεκριμένα, αυτό λέει ότι η (3.4.24) έχει μοναδικές λύσεις για  $h$  αρκετά μικρό, αφού  $f = 0$  συνεπάγεται ότι  $u_h = 0$ .

Τέλος, για  $h \leq h_0$ , συμπεραίνουμε ότι η μοναδική λύση της (3.4.24) ικανοποιεί την (3.4.29) και την (3.4.28), που ολοκληρώνει την απόδειξη. ■ Τις εκτιμήσεις για την  $L^2$  και την  $H^1$  νόρμα του σφάλματος και της απόκλισής του αυτών των ενοτήτων θα τις επαληθεύσουμε μέσω του FreeFem++ στο τελευταίο κεφάλαιο.

### 3.4.5 Εκτιμήσεις Αρνητικών Νορμών

Στην προηγούμενη υποενότητα είδαμε τις  $L^2$  εκτιμήσεις σφάλματος να βελτιώνονται σε  $H^1$  εκτιμήσεις με έναν παράγοντα  $h$ . Υπό συγκεκριμένες συνθήκες, μπορούμε να συνεχίσουμε να βελτιώνουμε τις εκτιμήσεις σφάλματος σε χαμηλότερες (αρνητικές) νόρμες. Το να έχουμε μεγαλύτερη δύναμη του  $h$  σε κάποια εκτίμηση σε αρνητική νόρμα μπορεί να ερμηνευθεί ως ότι το σφάλμα είναι ταλαντούμενο. Υπενθυμίζουμε ότι η αρνητική νόρμα  $H^{-s}$  ορίζεται ως

$$\|u\|_{H^{-s}(\Omega)} = \sup_{0 \neq v \in H^s(\Omega)} \frac{(u, v)}{\|v\|_{H^s(\Omega)}}.$$

Υποθέτουμε ότι η εκτίμηση ομαλότητας

$$\|u\|_{H^{s+2}(\Omega)} \leq C_R \|f\|_{H^s(\Omega)} \quad (3.4.30)$$

και η εκτίμηση προσέγγισης

$$\inf_{v \in V_h} \|u - v\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^{s+1} \|u\|_{H^{s+2}(\Omega)} \quad (3.4.31)$$

ισχύουν για κάποιο  $s \geq 0$ .

**Θεώρημα 3.4.4** *Αν ισχύουν οι συνθήκες (3.4.21), (3.4.22), (3.4.30) και (3.4.31), υπάρχουν σταθερές  $h_0$  και  $C$  τέτοιες ώστε για όλα τα  $h \leq h_0$ , η λύση του (3.4.24) να ικανοποιεί την*

$$\|u - u_h\|_{H^{-s}(\Omega)} \leq Ch^{s+1} \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.4.32)$$



**Απόδειξη.** Θέλουμε να εκτιμήσουμε το  $(u - u_h, \phi)$  για αυθαίρετη  $\phi \in H^s(\Omega)$ . Έστω  $w$  η λύση (ξέρουμε ότι υπάρχει από την (3.4.30)) του συζυγούς προβλήματος

$$B[v, w] = (v, \phi) \quad \forall v \in V.$$

Τότε, για οποιοδήποτε  $w_h \in V_h$

$$\begin{aligned} (u - u_h, \phi) &= B[u - u_h, w] \\ &= B[u - u_h, w - w_h] && \text{(από την (3.4.27))} \\ &\leq C \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \|w - w_h\|_{H^1(\Omega)} && \text{(από την (3.4.21))} \end{aligned}$$

Έτσι, για κατάλληλη επιλογή του  $w_h$  έχουμε

$$\begin{aligned} (u - u_h, \phi) &\leq Ch^{s+1} \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \|w\|_{H^{s+2}(\Omega)} && \text{(από την (3.4.31))} \\ &\leq Ch^{s+1} \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \|\phi\|_{H^s(\Omega)} && \text{(από την (3.4.30))} \end{aligned}$$

Παίρνοντας το supremum ολοκληρώνεται η απόδειξη. ■

### 3.5 Ένα Μη-Γραμμικό Πρόβλημα

Ο βασικός σκοπός αυτής της ενότητας είναι η εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων σε ένα μη-γραμμικό πρόβλημα. Πριν δούμε αυτό, θα αναφέρουμε κάποια συμπεράσματα που αφορούν εκτιμήσεις για τη max-νόρμα και τις  $L^p$ -νόρμες.

#### 3.5.1 Ένα Βασικό Θεώρημα

Ξεκινάμε με μία διγραμμική μορφή

$$B[u, v] := \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^d b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) v(x) + b_0(x) u(x) v(x) dx$$

με την παρακάτω συνθήκη πιεστικότητας για τα  $a_{ij}$ :

$$C_a |\xi|^2 \leq \sum_{ij} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \text{για σχεδόν όλα τα } x \in \Omega. \quad (3.5.1)$$

Υποθέτουμε ακόμα ότι οι συντελεστές  $a_{ij}$  και  $b_i$  είναι φραγμένοι στο  $\Omega$ . Για απλότητα, εξετάζουμε μόνο το πρόβλημα Dirichlet και άρα  $V = H_0^1(\Omega)$ . Ως προς την ομαλότητα του μεταβολικού προβλήματος, υποθέτουμε ότι υπάρχει μοναδική λύση στο

$$B[u, v] = (f, v) \quad \forall v \in V \quad (3.5.2)$$

που ικανοποιεί την:

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^p(\Omega)} \quad (3.5.3)$$

για  $1 < p < \mu$  για κάποιο  $\mu > 1$  που θα διαλέξουμε αργότερα. Υποθέτουμε ακόμα ότι ισχύει η ίδια ομαλότητα για το συζυγές πρόβλημα

$$B[v, u] = (f, v) \quad \forall v \in V. \quad (3.5.4)$$

Θεωρούμε χώρους  $V_h$ , βασισμένους σε γενικά στοιχεία  $\mathcal{E}$ , σε δύο και τρεις διαστάσεις. Υποθέτουμε για απλότητα ότι τα στοιχεία είναι συμμορφικά και βασίζονται σε μία σχεδόν-ομοιόμορφη οικογένεια υποδιαίρέσεων,  $\mathcal{T}^h$ .

Εισάγουμε την οικογένεια των σταθμισμένων συναρτήσεων

$$\sigma_z(x) = (|x - z|^2 + \kappa^2 h^2)^{\frac{1}{2}}$$

που εξαρτάται από την παράμετρο  $\kappa \geq 1$ . Είναι εύκολο να επαληθεύσουμε ότι για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\max_{T \in \mathcal{T}^h} \left( \frac{\sup_{x \in T} \sigma_z^\lambda(x)}{\inf_{x \in T} \sigma_z^\lambda(x)} \right) \leq C \quad (3.5.5)$$

$$\|\sigma_z^\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \max \left\{ 1, (\kappa h)^\lambda \right\} \quad (3.5.6)$$

$$|D_x^\beta \sigma_z^\lambda(x)| \leq C \sigma_z^{\lambda - |\beta|}(x) \quad \forall x \in \Omega \quad \forall \beta \quad (3.5.7)$$

όπου η σταθερά  $C$  εξαρτάται συνεχώς από το  $\lambda$  και είναι ανεξάρτητη των  $z \in \Omega$  και  $h$ . Εισάγουμε τον συμβολισμό

$$\widetilde{\int}_\Omega \dots dx := \sum_{T \in \mathcal{T}^h} \int_T \dots dx$$

Υποθέτουμε ότι οι χώροι πεπερασμένων στοιχείων  $V_h \subset V$  αποτελούνται από κατά τμήματα πολυώνυμα βαθμού  $\leq k_{\max}$  και έχουν τάξη προσέγγισης  $2 \leq k \leq k_{\max}$  με την έννοια ότι υπάρχει μία συνάρτηση παρεμβολής (ή άλλη προβολή στο χώρο  $V_h$ )  $\mathcal{I}^h$  τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_z^\lambda (\psi - \mathcal{I}^h \psi)^2 dx + h^2 \int_{\Omega} \sigma_z^\lambda |\nabla(\psi - \mathcal{I}^h \psi)|^2 dx &\leq C \sum_{r=k}^{k_{\max}} h^{2r} \int_{\Omega} \sigma_z^\lambda |\nabla_{\mathcal{E},r} \psi|^2 dx \\ \int_{\Omega} \sigma_z^\lambda (\psi - \mathcal{I}^h \psi)^2 dx + h^2 \int_{\Omega} \sigma_z^\lambda |\nabla(\psi - \mathcal{I}^h \psi)|^2 dx &\leq Ch^4 \int_{\Omega} \sigma_z^\lambda |\nabla_2 \psi|^2 dx \end{aligned} \quad (3.5.8)$$

για κάθε  $\psi \in H^1(\Omega)$  που ικανοποιεί το  $\psi|_T \in H^k(T)$  για όλα τα  $T \in \mathcal{T}^h$  και τέτοια ώστε

$$\nabla_{\mathcal{E},r}(\psi_h|_T) = 0 \quad \forall T \in \mathcal{T}^h \quad \forall \psi_h \in V_h \quad \forall k \leq r \leq k_{\max} \quad (3.5.9)$$

όπου το  $\nabla_j$  είναι το διάνυσμα όλων των μερικών παραγώγων τάξης  $j$  και  $\nabla_{\mathcal{E},r}$  είναι ένα διάνυσμα μερικών παραγώγων τάξης  $r$  που εξαρτάται από το στοιχείο που χρησιμοποιείται. Επιπλέον, υποθέτουμε μία αντίστροφη εκτίμηση της μορφής

$$\int_{\Omega} \sigma_z^\lambda |\nabla_j \psi_h|^2 dx \leq Ch^{-2j} \int_{\Omega} \sigma_z^\lambda \psi_h^2 dx \quad \forall \psi_h \in V_h, \quad j \geq 1. \quad (3.5.10)$$

Υποθέτουμε ότι οι σταθερές  $C$  στις (3.5.8) και (3.5.10) εξαρτώνται συνεχώς από το  $\lambda$ . Επαληθεύεται εύκολα ότι οι παραπάνω υποθέσεις ισχύουν για τα στοιχεία Langrange που μελετήσαμε προηγουμένως. Για στοιχεία που βασίζονται σε τρίγωνα και τετράεδρα, για τα οποία οι συναρτήσεις μετατόπισης αποτελούνται από όλα τα πολυώνυμα βαθμού μικρότερου από  $k$ , παίρνουμε  $\nabla_{\mathcal{E},r} = \nabla_k$  για  $r = k$  (και τίποτα διαφορετικά).

Όπως συνήθως, παίρνουμε  $u_h \in V_h$  που λύνει το

$$B[u_h, v] = (f, v) \quad \forall v \in V_h. \quad (3.5.11)$$

Ακολουθεί το βασικό θεώρημα

**Θεώρημα 3.5.1** Έστω οι χώροι πεπερασμένων στοιχείων ικανοποιούν τις (3.5.8), (3.5.9) και (3.5.10). Υποθέτουμε ότι ισχύει η (3.5.1) και ότι οι συντελεστές  $a_{ij}, b_j$  βρίσκονται όλοι στον  $L^\infty(\Omega)$ . Υποθέτουμε ότι  $d \leq 3$ ,  $a^{ij} \in W^{1,p}(\Omega)$  για  $p > 2$  αν  $d = 2$  και  $p \geq 12/5$  αν  $d = 3$  για όλα τα  $i, j = 1, \dots, d$  και ότι η (3.5.3) ισχύει για  $\mu > d$ . Τότε, υπάρχει ένα  $h_0 > 0$  και  $C < \infty$  τέτοιο ώστε

$$\|u_h\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}$$

για  $0 < h < h_0$ .

**Παρατήρηση 3.5.1** Αποδεικνύεται ότι το παραπάνω θεώρημα ισχύει και για πεπερασμένο  $2 < p < \infty$  αντί για  $\infty$ , δηλαδή με τις ίδιες προϋποθέσεις ισχύει ότι

$$\|u_h\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad (3.5.12)$$

**Πόρισμα 3.5.1** Κάτω από τις ίδιες υποθέσεις

$$\|u - u_h\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq Ch^{k-1} \|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)}.$$

### 3.5.2 $L^p$ – Εκτιμήσεις

Σε αυτή την υποενότητα αναφέρουμε δύο συμπεράσματα για  $L^p$  εκτιμήσεις, ανάλογα με την ομαλότητα των συντελεστών.

**Πρόταση 3.5.1** Κάτω από τις υποθέσεις του Θεωρήματος (3.5.2) και αν οι συντελεστές  $a_{ij} \in C^0(\bar{\Omega})$ , τότε υπάρχει κάποιο  $h_0 > 0$  και  $C < \infty$  τέτοια ώστε

$$\|u_h\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \forall 1 < p \leq \infty \quad (3.5.13)$$

για  $0 < h < h_0$

Για την επόμενη πρόταση δε θεωρούμε πλέον ότι ισχύουν κάποιες συνθήκες για τους συντελεστές παρά μόνο ότι είναι φραγμένες, μετρήσιμες συναρτήσεις. Για απλότητα, περιοριζόμαστε στη συμμετρική περίπτωση, υποθέτουμε δηλαδή ότι

$$B[u, v] := \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j}(x) dx \quad (3.5.14)$$

**Πρόταση 3.5.2** Υποθέτουμε ότι η  $B[ \cdot, \cdot ]$  είναι όπως στην (3.5.14) και οι  $a_{ij}$  είναι φραγμένες, μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε να ικανοποιείται η (3.5.1) (πιεστικότητα). Τότε, υπάρχουν σταθερές  $\alpha < \infty$ ,  $h_0 > 0$  και  $\varepsilon > 0$  τέτοιες ώστε για όλα τα  $0 < h \leq h_0$  και  $u_h \in V_h$

$$|u_h|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq \alpha \sup_{0 \neq v_h \in V_h} \frac{B[u_h, v_h]}{|v_h|_{W^{1,q}(\Omega)}} \quad (3.5.15)$$

οποιοδήποτε  $|2 - p| \leq \varepsilon$ , όπου  $q$  είναι ο δυικός του  $p$ , ( $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ).

Αν έχουμε  $P_h u$  την προβολή ενός  $u \in V$  στον  $V_h$  ως προς τη διγραμμική μορφή  $B[u, v]$ , δηλαδή το  $P_h u$  είναι το μοναδικό στοιχείο του  $V_h$  που ικανοποιεί την

$$B[u - P_h u, v] = 0 \quad \forall v \in V_h.$$

**Πρόταση 3.5.3** Με τις υποθέσεις της Πρότασης 3.5.2, η προβολή  $P_h$  είναι ευσταθής στον  $W^{1,p}(\Omega)$ , δηλαδή υπάρχει σταθερά  $C$ , ανεξάρτητη των  $h$  και  $u$ , τέτοια ώστε

$$\|P_h u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad |2-p| \leq \varepsilon. \quad (3.5.16)$$

### 3.5.3 Μη-Γραμμικό Πρόβλημα

Θα μελετήσουμε τώρα ένα μη-γραμμικό πρόβλημα, για να δούμε πως οι προηγούμενες εκτιμήσεις μπορούν να μας δώσουν αποτελέσματα ύπαρξης για μη-γραμμικά προβλήματα. Έστω

$$B[u, v; w] := \int_{\Omega} A(w) \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad (3.5.17)$$

όπου η συνάρτηση  $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ικανοποιεί την

$$0 < C_a \leq A(s) \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (3.5.18)$$

Επιπλέον, υποθέτουμε μόνο ότι η  $A$  είναι φραγμένη σε φραγμένα υποσύνολα του  $\mathbb{R}$ . Ψάχνουμε  $u$  τέτοιο ώστε

$$B[u, v; u] = F(v) \quad \forall v \in V \quad (3.5.19)$$

όπου, ας πούμε,  $V = H_0^1(\Omega)$ . Παρατηρούμε ότι η  $B[u, u; u]$  δεν ορίζεται ακριβώς για αυθαίρετο  $u \in H^1(\Omega)$  και άρα η μεταβολική διατύπωση ενός τέτοιου προβλήματος χρειάζεται κάποια ανάπτυξη. Εδώ θα δείξουμε απλά πως μπορούμε να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη λύσης στο διακριτό πρόβλημα

$$B[u_h, v; u_h] = F(v) \quad \forall v \in V_h \quad (3.5.20)$$

κάτω από κατάλληλες συνθήκες. Έστω

$$V_h^{K,p} := \{v \in V_h : \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq K\} \quad (3.5.21)$$

για δοσμένο  $K > 0$ . Ορίζουμε την απλή απεικόνιση επανάληψης,  $T_h : V_h \rightarrow V_h$  μέσω της

$$B[T_h u_h, v; u_h] = F(v) \quad \forall v \in V_h. \quad (3.5.22)$$

Αυτό είναι πάντα καλά ορισμένο, αφού  $u_h \in V_h$  συνεπάγεται ότι  $A(u_h) \in L^\infty(\Omega)$ .

**Θεώρημα 3.5.2** Έστω η  $A$  είναι φραγμένη σε φραγμένα σύνολα και ισχύει η (3.5.18). Τότε, υπάρχουν  $K > 0, p > 2, h_0 > 0$  και  $\delta > 0$  τέτοια ώστε για κάθε  $F$  με  $\|F\|_{W^{-1,p}} \leq \delta$ , η  $T^h$  να απεικονίζει τον  $V_h^{K,p}$  στον εαυτό του για όλα τα  $0 < h \leq h_0$ .

**Απόδειξη.** Για κάθε  $u_h \in V_h^{K,p}$  η  $A(u_h)$  ικανοποιεί τις συνθήκες της Πρότασης 3.5.2 και ισχύει ότι

$$\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq M |\xi|^2 \quad \text{για σχεδόν όλα τα } x \in \Omega \quad (3.5.23)$$

όπου η  $M$  είναι φραγμένη από

$$M = \sup \{A(s) : |s| \leq c_p K\} \quad (3.5.24)$$

όπου η  $c_p$  είναι η σταθερά στην ανισότητα Sobolev:

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_p \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \forall v \in W^{1,p}(\Omega)$$

επειδή το  $v \in V_h^{K,p}$  συνεπάγεται ότι  $\|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_p K$  και άρα  $\|A(v)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M$ . Για αρκετά μικρό  $K$ , (π.χ.  $K = C/c_p$ ) υπάρχει ένα  $p > 2$  τέτοιο ώστε η ανισότητα στην Πρόταση 3.5.2 να ισχύει. Τότε

$$\begin{aligned} \|T_h u_h\|_{W^{1,p}(\Omega)} &\leq \alpha \sup_{0 \neq v_h \in V_h} \frac{B[T_h u_h, v_h; u_h]}{|v_h|_{W^{1,q}(\Omega)}} && \text{(από την (3.5.23))} \\ &= \alpha \sup_{0 \neq v_h \in V_h} \frac{F(v_h)}{|v_h|_{W^{1,q}(\Omega)}} \\ &\leq C \|F\|_{W^{-1,p}}. \end{aligned}$$

Διαλέγουμε  $\delta = K/C$ . ■

**Πόρισμα 3.5.2** Υποθέτουμε ότι η  $A$  είναι συνεχής και ισχύει η (3.5.18). Έστω  $K > 0, p > 2, h_0 > 0$  και  $\delta > 0$  όπως στο προηγούμενο θεώρημα. Για  $\|F\|_{W^{-1,p}} \leq \delta$ , η (3.5.20) έχει μία λύση  $u_h$  που ικανοποιεί την

$$\|u_h\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq K \quad (3.5.25)$$

για  $0 < h \leq h_0$

**Απόδειξη.** Εφαρμογή του Θεώρηματος Σταθερού Σημείου του Brouwer. ■

Το παραπάνω πόρισμα δεν εγγυάται απλά την ύπαρξη λύσης του διακριτού προβλήματος που παραμένει ομοιόμορφα φραγμένη καθώς  $h \rightarrow 0$ , αλλά παρέχει αποτέλεσμα και για την ευστάθεια, αφού στην οικογένεια των προβλημάτων (3.5.20) είναι όλα ομοιόμορφα συνεχή (και πιεστικά) ανεξάρτητα του  $h$ . Αυτό μας επιτρέπει να εξασφαλίσουμε εκτιμήσεις σύγκλισης:

$$\begin{aligned} B[u - u_h, v; u_h] &= B[u, v; u_h] - F(v) && \text{(από την (3.5.20))} \\ &= B[u, v; u_h] - B[u, v; u] && \text{(από την (3.5.19))} \\ &= \int_{\Omega} (A(u) - A(u_h)) \nabla u \cdot \nabla v \, dx \end{aligned}$$

για κάθε  $v \in V_h$ . Υποθέτοντας ότι  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  και  $A \in W^{1,\infty}(I)$  για κάθε φραγμένο διάστημα  $I \subset \mathbb{R}$ , βρίσκουμε ότι για κάθε  $v \in V_h$

$$\begin{aligned}
& B[u - u_h, u - u_h; u_h] = B[u - u_h, u - v; u_h] + B[u - u_h, v - u_h; u_h] \\
& = B[u - u_h, u - v; u_h] + \int_{\Omega} (A(u) - A(u_h)) \nabla u \cdot \nabla (v - u_h) dx \\
& \leq M \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \|u - v\|_{H^1(\Omega)} + \int_{\Omega} |A(u) - A(u_h)| |\nabla u \cdot \nabla (v - u_h)| dx \\
& \leq M \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \|u - v\|_{H^1(\Omega)} + \|A\|_{W^{1,\infty}(I)} \int_{\Omega} |u - u_h| |\nabla u \cdot \nabla (v - u_h)| dx \\
& \leq M \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \|u - v\|_{H^1(\Omega)} + \|A\|_{W^{1,\infty}(I)} \| |u - u_h| |\nabla u| \|_{L^2(\Omega)} \|v - u_h\|_{H^1(\Omega)} \\
& \leq M \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \|u - v\|_{H^1(\Omega)} + \|A\|_{W^{1,\infty}(I)} \|u - u_h\|_{L^q(\Omega)} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \|v - u_h\|_{H^1(\Omega)} \\
& \leq \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} (M \|u - v\|_{H^1(\Omega)} + c'_p \|A\|_{W^{1,\infty}(I)} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \|v - u_h\|_{H^1(\Omega)})
\end{aligned}$$

όπου  $I = [0, \max \{M, \|u\|_{L^\infty(\Omega)}\}]$ ,  $q = 2p/(p-2)$  και χρησιμοποιήσαμε επανειλημμένα την Ανισότητα Hölder και στο τελευταίο βήμα την Ανισότητα Sobolev. Έτσι,

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{C_a} (M \|u - v\|_{H^1(\Omega)} + c'_p \|A\|_{W^{1,\infty}(I)} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \|v - u_h\|_{H^1(\Omega)}) \quad (3.5.26)$$

Από την τριγωνική ανισότητα βρίσκουμε ότι

$$(1 - \gamma) \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \left( \frac{M}{C_a} + \gamma \right) \|u - v\|_{H^1(\Omega)}$$

όπου  $\gamma := \frac{c'_p}{C_a} \|A\|_{W^{1,\infty}(I)} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ . Έτσι, αν  $\gamma < 1$ , παίρνουμε ένα αποτέλεσμα όμοιο με το Θεώρημα του Cέα:

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{M + \gamma C_a}{(1 - \gamma) C_a} \|u - v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in V_h. \quad (3.5.27)$$

Χρησιμοποιώντας παρόμοιες αλλά πιο πολύπλοκες τεχνικές, μπορεί κανείς να δείξει ότι υπάρχει λύση  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  στην (3.5.19) με τις συνθήκες του Θεωρήματος 3.5.2 για αρκετά μικρό  $\delta > 0$ , χρησιμοποιώντας μία απεικόνιση  $T : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W_0^{1,p}(\Omega)$  που ορίζεται ως

$$B[Tu, v; u] = F(v) \quad \forall v \in W_0^{1,q}(\Omega).$$

Κάτι τέτοιο προκύπτει πιο εύκολα από το γεγονός ότι και ο  $T$  και ο  $T_h$  είναι Lipschitz συνεχείς αν η  $A$  είναι Lipschitz συνεχής.

Δείχνουμε ότι η  $T_h$  είναι Lipschitz συνεχής, καθώς αυτό εξασφαλίζει τόσο τη μοναδικότητα της λύσης όσο και τη σύγκλιση της επανάληψης σταθερού σημείου

$$u_h^{n+1} := T_h u_h^n \quad (3.5.28)$$

στη  $u_h$  καθώς  $n \rightarrow \infty$ . Για  $v, w, \phi \in V_h$ , βρίσκουμε, χρησιμοποιώντας τις τεχνικές που οδήγησαν στην (3.5.26) ότι

$$\begin{aligned} |B[T_h v - T_h w, \phi; v]| &= \left| \int_{\Omega} (A(w) - A(v)) \nabla T_h w \cdot \nabla \phi \, dx \right| \\ &\leq c'_p \|A\|_{W^{1,\infty}(0,M)} \|w - v\|_{H^1(\Omega)} \|T_h v\|_{W^{1,p}(\Omega)} \|\phi\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

για όλες τις  $v, w \in V_h^{K,p}$ . Παρόμοιο αποτέλεσμα μπορεί να αποδειχθεί και για την  $T$ . Παρατηρούμε ότι το  $K$  μπορεί να γίνει όσο μικρό θέλουμε, διαλέγοντας κατάλληλο  $\delta$ . Συγκεντρώνουμε αυτά τα αποτελέσματα στο επόμενο θεώρημα

**Θεώρημα 3.5.3** *Έστω η  $A$  είναι Lipschitz συνεχής και ισχύει η (3.5.18). Υπάρχουν  $\delta > 0, h_0 > 0$  και  $p > 2$  τέτοια ώστε οι (3.5.19) και (3.5.20) να έχουν για όλα τα  $0 < h \leq h_0$  μοναδικές λύσεις για τυχαίο  $F$  τέτοιο ώστε  $\|F\|_{W^{-1,p}} \leq \delta$ . Επιπλέον, η  $u_h$  μπορεί να προσεγγιστεί από αυθαίρετη ακρίβεια μέσω της απλής επανάληψης (3.5.28), που περιλαμβάνει την επίλυση μόνο γραμμικών εξισώσεων σε κάθε βήμα. Τέλος, το σφάλμα  $u - u_h$  ικανοποιεί την (3.5.27).*



## Κεφάλαιο 4

# Παραβολικές Εξισώσεις Δεύτερης Τάξης

Τα παραβολικά προβλήματα είναι, όπως και τα υπερβολικά, εξελικτικές εξισώσεις, αφού περιλαμβάνουν και μεταβλητή χρόνου. Αποτελούν γενίκευση της εξίσωσης θερμότητας.

### 4.1 Ορισμοί

#### 4.1.1 Παραβολικές Εξισώσεις

Για αυτό το κεφάλαιο υποθέτουμε ότι το  $U$  είναι ανοιχτό, φραγμένο υποσύνολο του  $\mathbb{R}^n$  και, όπως πριν, θέτουμε  $U_T = U \times (0, T]$  για σταθερό  $T > 0$ .

Θα μελετήσουμε αρχικά το το πρόβλημα αρχικών/συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} u_t + Lu = f & \text{στο } U_T \\ u = 0 & \text{στο } \partial U \times [0, T] \\ u = g & \text{στο } U \times \{t = 0\}, \end{cases} \quad (4.1.1)$$

όπου δίνονται οι  $f : U_T \rightarrow \mathbb{R}$  και  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  και η  $u : \bar{U}_T \rightarrow \mathbb{R}$  είναι η άγνωστη  $u = u(x, t)$ . Το  $L$  συμβολίζει για κάθε χρόνο  $t$  έναν τελεστή μερικής παραγωγίσης δεύτερης τάξης που έχει είτε τη μορφή απόκλισης

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n (a^{ij}(x, t)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x, t)u_{x_i} + c(x, t)u \quad (4.1.2)$$

ή τη μορφή μη-απόκλισης

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x, t)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x, t)u_{x_i} + c(x, t)u \quad (4.1.3)$$

για δοσμένους συντελεστές  $a^{ij}, b^i, c$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ).

**Ορισμός 4.1.1** Λέμε ότι ένας παραβολικός τελεστής  $\frac{\partial}{\partial t} + L$  είναι (ομοιόμορφα) παραβολικός αν υπάρχει σταθερά  $\theta > 0$  τέτοια ώστε

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x,t) \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2 \quad (4.1.4)$$

για όλα τα  $(x,t) \in U_T, \xi \in \mathbb{R}^n$ .

**Παρατήρηση 4.1.1** Παρατηρούμε ότι για σταθερό  $0 \leq t \leq T$  ο τελεστής  $L$  είναι ένας ομοιόμορφα ελλειπτικός τελεστής ως προς τη χωρική μεταβλητή  $x$ .

#### 4.1.2 Ασθενείς Λύσεις

Όπως και με τους ελλειπτικούς τελεστές, θεωρούμε τον  $L$  στη μορφή απόκλισης (4.1.2) και προσαπαθούμε να ορίσουμε την ασθενή λύση του προβλήματος αρχικών/συνοριακών τιμών. Υποθέτουμε ότι

$$a^{ij}, b^i, c \in L^\infty(U_T) \quad (i, j = 1, \dots, n), \quad (4.1.5)$$

$$f \in L^2(U_T) \quad \text{και} \quad (4.1.6)$$

$$g \in L^2(U). \quad (4.1.7)$$

Υποθέτουμε επίσης πάντα ότι  $a^{ij} = a^{ji}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ).

Ορίζουμε τώρα τη χρόνο-εξαρτώμενη διγραμμική μορφή

$$B[u, v; t] := \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(\cdot, t) u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(\cdot, t) u_{x_i} v + c(\cdot, t) uv \, dx \quad (4.1.8)$$

για  $u, v \in H_0^1(U)$  και για σχεδόν όλα τα  $0 \leq t \leq T$ .

**Παρατήρηση 4.1.2** (Κίνητρο για τον ορισμό της ασθενούς λύσης.) Για να είναι ευφικτός ο επόμενος ορισμός της ασθενούς λύσης, υποθέτουμε αρχικά ότι η  $u = u(x, t)$  είναι μία ομαλή λύση του παραβολικού προβλήματος (4.1.1). Αφλάζουμε τώρα οπτική, συνδέοντας τη  $u$  με μία απεικόνιση

$$\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow H_0^1(U)$$

που ορίζεται ως

$$[\mathbf{u}(t)](x) := u(x, t) \quad (x \in U, 0 \leq t \leq T).$$

Με άλληλα λόγια δε θα θεωρούμε τη  $u$  ως συνάρτηση του  $x$  και του  $t$  μαζί, αλλά ως απεικόνιση  $\mathbf{u}$  του  $t$  στο χώρο  $H_0^1(U)$  των συναρτήσεων του  $x$ .

Επιστρέφοντας στο πρόβλημα (4.1.1), ορίζουμε ομοία την

$$\mathbf{f} : [0, T] \rightarrow L^2(U)$$

ως

$$[\mathbf{f}(t)](x) := f(x, t) \quad (x \in U, 0 \leq t \leq T).$$

Τότε, αν σταθεροποιήσουμε μία συνάρτηση  $v \in H_0^1(U)$ , μπορούμε πολυπλασιάζοντας τη ΜΔΕ  $\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f$  με  $v$  και ολοκληρώνοντας κατά μέλη, να βρούμε

$$\langle \mathbf{u}', v \rangle + B[\mathbf{u}, v; t] = \langle \mathbf{f}, v \rangle \quad \left( ' = \frac{d}{dt} \right) \quad (4.1.9)$$

για κάθε  $0 \leq t \leq T$ , όπου το  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  είναι το εσωτερικό γινόμενο στον  $L^2(U)$ .

Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι

$$u_t = g^0 + \sum_{j=1}^n g_{x_j}^j \quad \text{στο } U_T \quad (4.1.10)$$

για  $g^0 := f - \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} - cu$  και  $g^j := \sum_{i=1}^n a^{ij} u_{x_i}$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Συνεπώς, η (4.1.10) και οι ορισμοί στην ενότητα 1.9.1 συνεπάγονται ότι το δεξι μέλος της (4.1.10) βρίσκεται στο χώρο Sobolev  $H^{-1}(U)$  με

$$\|u_t\|_{H^{-1}(U)} \leq \left( \sum_{j=0}^n \|g^j\|_{L^2(U)}^2 \right)^{1/2} \leq C \left( \|u\|_{H_0^1(U)} + \|f\|_{L^2(U)} \right).$$

Αυτή η εκτίμηση υποδηλώνει ότι ίσως είναι λογικό να ψάξουμε για κάποια ασθενή λύση με  $\mathbf{u}' \in H^{-1}(U)$  για σχεδόν όλους τους χρόνους  $0 \leq t \leq T$ . Σε αυτή την περίπτωση ο πρώτος όρος της (4.1.9) μπορεί να εκφραστεί ως  $\langle \mathbf{u}', v \rangle$ , όπου το  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  είναι το ταίριασμα του  $H^{-1}(U)$  με τον  $H_0^1(U)$ .

Όλα αυτά οδηγούν στον ακόλουθο ορισμό.

**Ορισμός 4.1.2** Λέμε ότι μία συνάρτηση

$$\mathbf{u} \in L^2(0, T; H_0^1(U)), \quad \text{με } \mathbf{u}' \in L^2(0, T; H^{-1}(U))$$

είναι ασθενής λύση του παραβολικού προβλήματος αρχικών/συνοριακών τιμών (4.1.1) αν

$$(i) \quad \langle \mathbf{u}', v \rangle + B[\mathbf{u}, v; t] = \langle \mathbf{f}, v \rangle$$

για κάθε  $v \in H_0^1(U)$  και σχεδόν για όλους τους χρόνους  $0 \leq t \leq T$  και

$$(ii) \quad \mathbf{u}(0) = g.$$

**Παρατήρηση 4.1.3** Με βάση το Θεώρημα 1.9.3 βλέπουμε ότι  $\mathbf{u} \in C([0, T]; L^2(U))$  και άρα η (ii) έχει νόημα.

## 4.2 Ύπαρξη Ασθενών Λύσεων

### 4.2.1 Προσεγγίσεις Galerkin

Θα κατασκευάσουμε μία ασθενή λύση στο παραβολικό πρόβλημα

$$\begin{cases} u_t + Lu = f & \text{στο } U_T \\ u = 0 & \text{στο } \partial U \times [0, T] \\ u = g & \text{στο } U \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (4.2.1)$$

κατασκευάζοντας πρώτα λύσεις συγκεκριμένων προσεγγίσεων του (4.2.1) πεπερασμένης διάστασης και περνώντας σε όρια. Αυτό ονομάζεται μέθοδος Galerkin.

Πιο συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις  $w_k = w_k(x)$  ( $k = 1, \dots$ ) είναι ομαλές,

$$\text{η } \{w_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ είναι ορθογώνια βάση του } H_0^1(U), \quad (4.2.2)$$

και

$$\text{η } \{w_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ είναι ορθοκανονική βάση του } L^2(U). \quad (4.2.3)$$

(Θα μπορούσαμε να πάρουμε ως  $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$  το πλήρες σετ των κατάλληλα κανονικοποιημένων ιδιοσυναρτήσεων του  $L = -\Delta$  στον  $H_0^1(U)$ .) Σταθεροποιούμε τώρα ένα θετικό ακέραιο  $m$ . Θα ψάξουμε για μία συνάρτηση  $\mathbf{u}_m : [0, T] \rightarrow H_0^1(U)$  της μορφής

$$\mathbf{u}_m(t) := \sum_{k=1}^m d_m^k(t) w_k \quad (4.2.4)$$

όπου θέλουμε να διαλέξουμε συντελεστές  $d_m^k(t)$  ( $0 \leq t \leq T, k = 1, \dots, m$ ) τέτοιες ώστε

$$d_m^k(0) = (g, w_k) \quad (k = 1, \dots, m) \quad (4.2.5)$$

και

$$(\mathbf{u}'_m, w_k) + B[\mathbf{u}_m, w_k; t] = (\mathbf{f}, w_k) \quad (0 \leq t \leq T, k = 1, \dots, m). \quad (4.2.6)$$

Ψάχνουμε, άρα, μία συνάρτηση  $\mathbf{u}_m$  της μορφής (4.2.4) που να ικανοποιεί την "προβολή" (4.2.6) του προβλήματος (4.2.1) στο χώρο πεπερασμένης διάστασης που παράγεται από την  $\{w_k\}_{k=1}^m$ .

**Θεώρημα 4.2.1** (Κατασκευή προσεγγιστικών λύσεων). Για κάθε ακέραιο  $m = 1, 2, \dots$  υπάρχει μοναδική συνάρτηση  $\mathbf{u}_m$  της μορφής (4.2.4) που ικανοποιεί τις (4.2.5) και (4.2.6).

**Απόδειξη.** Υποθέτοντας ότι η  $\mathbf{u}_m$  έχει τη μορφή (4.2.4), παρατηρούμε πρώτα από την (4.2.3) ότι

$$(\mathbf{u}'_m(t), w_k) = d_m^{k'}(t). \quad (4.2.7)$$

Επιπλέον,

$$B[\mathbf{u}_m, w_k; t] = \sum_{l=1}^m e^{kl}(t) d_m^l(t) \quad (4.2.8)$$

για  $e^{kl}(t) := B[w_l, w_k; t]$  ( $k, l = 1, \dots, m$ ). Γράφουμε ακόμα  $f^k(t) := (\mathbf{f}(t), w_k)$  ( $k = 1, \dots, m$ ). Τότε, η (4.2.6) μετατρέπεται στο γραμμικό σύστημα Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων

$$d_m^{k'}(t) + \sum_{l=1}^m e^{kl}(t) d_m^l(t) = f^k(t) \quad (k = 1, \dots, m) \quad (4.2.9)$$

με τις αρχικές συνθήκες (4.2.5). Σύμφωνα με την κλασσική θεωρία ύπαρξης για συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, υπάρχει μοναδική, απολύτως συνεχής συνάρτηση  $\mathbf{d}_m(t) = (d_m^1(t), \dots, d_m^m(t))$  που ικανοποιεί τις (4.2.5) και (4.2.9) για σχεδόν όλα τα  $0 \leq t \leq T$ . Τότε, η  $\mathbf{u}_m$  που ορίζεται στην (4.2.4) λύνει την (4.2.6) για σχεδόν όλα τα  $0 \leq t \leq T$ . ■

## 4.2.2 Ενεργειακές Εκτιμήσεις

Σκοπεύουμε τώρα να στείλουμε το  $m$  στο άπειρο και να δείξουμε ότι μία υπακολουθία των λύσεων μας  $\mathbf{u}_m$  των προσεγγιστικών προβλημάτων (4.2.5) και (4.2.6) συγκλίνει σε ασθενή λύση του (4.2.1). Για να το κάνουμε αυτό, χρειαζόμαστε κάποιες ομοιόμορφες εκτιμήσεις.

Πρώτα, όμως, αναφέρουμε, χωρίς απόδειξη, τις δύο μορφές της *Ανισότητας Gronwall*.

**Πρόταση 4.2.1** (Διαφορική Μορφή Ανισότητας Gronwall). Έστω  $\eta(\cdot)$  μία μη-αρνητική απολύτως συνεχής συνάρτηση στο  $[0, T]$  που σχεδόν για κάθε  $t$  ικανοποιεί τη διαφορική ανισότητα

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t)$$

όπου οι  $\phi(t)$  και  $\psi(t)$  είναι μη-αρνητικές, αθροίσιμες συναρτήσεις στο  $[0, T]$ . Τότε

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s) ds} \left[ \eta(0) + \int_0^t \psi(s) ds \right]$$

για όλα τα  $0 \leq t \leq T$ .

Ειδικότερα, αν

$$\eta' \leq \phi\eta \text{ στο } [0, T] \text{ και } \eta(0) = 0,$$

τότε

$$\eta \equiv 0 \text{ στο } [0, T].$$

**Πρόταση 4.2.2** (Ολοκληρωτική Μορφή Ανισότητας Gronwall). Έστω  $\xi(t)$  μία μη-αρνητική αθροίσιμη συνάρτηση στο  $[0, T]$  που ικανοποιεί για σχεδόν όλα τα  $t$  την ολοκληρωτική ανισότητα

$$\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s) ds + C_2$$

για σταθερές  $C_1, C_2 \geq 0$ . Τότε

$$\xi(t) \leq C_2(1 + C_1 t e^{C_1 t})$$

για σχεδόν όλα τα  $0 \leq t \leq T$ .

Ειδικότερα, αν

$$\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s) ds$$

για σχεδόν όλα τα  $0 \leq t \leq T$ , τότε

$$\xi(t) = 0 \text{ σχεδόν παντού}$$

Επιστρέφουμε τώρα στο βασικό θεώρημα της υποενοότητας.

**Θεώρημα 4.2.2** (Ενεργειακές εκτιμήσεις). Υπάρχει μία σταθερά  $C$  που εξαρτάται μόνο από τα  $U$  και  $T$  και από τους συντελεστές του  $L$  τέτοια ώστε

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{u}_m(t)\|_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}_m\|_{L^2(0,T;H_0^1(U))} + \|\mathbf{u}'_m\|_{L^2(0,T;H^{-1}(U))} \leq C(\|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;L^2(U))} + \|g\|_{L^2(U)}) \quad (4.2.10)$$

για  $m = 1, 2, \dots$

**Απόδειξη.**

1. Πολλαπλασιάζουμε την (4.2.6) με  $d_m^k(t)$ , αθροίζουμε για  $k = 1, \dots, m$  και χρησιμοποιούμε την (4.2.4) για να βρούμε

$$(\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}_m) + B[\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m; t] = (\mathbf{f}, \mathbf{u}_m) \quad (4.2.11)$$

για σχεδόν όλα τα  $0 \leq t \leq T$ . Στην υποενότητα 2.2.2 δείξαμε ότι υπάρχουν σταθερές  $\beta > 0$  και  $\gamma \geq 0$  τέτοιες ώστε

$$\beta \|\mathbf{u}_m\|_{H_0^1(U)}^2 \leq B[\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m; t] + \gamma \|\mathbf{u}_m\|_{L^2(U)}^2 \quad (4.2.12)$$

για όλα τα  $0 \leq t \leq T$ ,  $m = 1, \dots$ . Επιπλέον,  $|(\mathbf{f}, \mathbf{u}_m)| \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{f}\|_{L^2(U)}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_m\|_{L^2(U)}^2$  και  $(\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}_m) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_m\|_{L^2(U)}^2 \right)$  για σχεδόν όλα τα  $0 \leq t \leq T$ . Συνεπώς, η (4.2.11) δίνει την ανισότητα

$$\frac{d}{dt} \left( \|\mathbf{u}_m\|_{L^2(U)}^2 \right) + 2\beta \|\mathbf{u}_m\|_{H_0^1(U)}^2 \leq C_1 \|\mathbf{u}_m\|_{L^2(U)}^2 + C_2 \|\mathbf{f}\|_{L^2(U)}^2 \quad (4.2.13)$$

για σχεδόν όλα τα  $0 \leq t \leq T$  και κατάλληλες σταθερές  $C_1$  και  $C_2$ .

2. Γράφουμε τώρα

$$\eta(t) := \|\mathbf{u}_m(t)\|_{L^2(U)}^2 \quad (4.2.14)$$

και

$$\xi(t) := \|\mathbf{f}(t)\|_{L^2(U)}^2 \quad (4.2.15)$$

Τότε, η (4.2.13) συνεπάγεται ότι

$$\eta'(t) \leq C_1 \eta(t) + C_2 \xi(t)$$

για σχεδόν όλα τα  $0 \leq t \leq T$ . Έτσι, η διαφορική μορφή της Ανισότητας Gronwall δίνει την εκτίμηση

$$\eta(t) \leq e^{C_1 t} \left( \eta(0) + C_2 \int_0^t \xi(s) ds \right) \quad (0 \leq t \leq T). \quad (4.2.16)$$

Επειδή από την (4.2.5)  $\eta(0) = \|\mathbf{u}_m(0)\|_{L^2(U)}^2 \leq \|g\|_{L^2(U)}^2$ , έχουμε από τις (4.2.14) μέχρι (4.2.16) την εκτίμηση

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{u}_m(t)\|_{L^2(U)}^2 \leq C \left( \|g\|_{L^2(U)}^2 + \|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;L^2(U))}^2 \right).$$

3. Επιστρέφουμε για άλλη μία φορά στην (4.2.13), ολοκληρώνουμε από 0 μέχρι  $T$  και χρησιμοποιούμε την παραπάνω ανισότητα για να βρούμε

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_m\|_{L^2(0,T;H_0^1(U))}^2 &= \int_0^T \|\mathbf{u}_m\|_{H_0^1(U)}^2 dt \\ &\leq C \left( \|g\|_{L^2(U)}^2 + \|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;L^2(U))}^2 \right). \end{aligned}$$

4. Σταθεροποιούμε οποιαδήποτε  $v \in H_0^1(U)$  με  $\|v\|_{H_0^1(U)} \leq 1$  και γράφουμε  $v = v^1 + v^2$ , όπου  $v^1 \in \text{span} \{w_k\}_{k=1}^m$  και  $(v^2, w_k) = 0$  ( $k = 1, \dots, m$ ). Επειδή οι συναρτήσεις  $\{w_k\}_{k=0}^\infty$  είναι ορθογώνιες στον  $H_0^1(U)$ ,  $\|v^1\|_{H_0^1(U)} \leq \|v\|_{H_0^1(U)} \leq 1$ . Χρησιμοποιώντας την (4.2.6), συμπεραίνουμε ότι για κάθε  $0 \leq t \leq T$

$$(\mathbf{u}'_m, v^1) + B[\mathbf{u}_m, v^1; t] = (\mathbf{f}, v^1).$$

Τότε, η (4.2.4) συνεπάγεται ότι

$$\langle \mathbf{u}'_m, v \rangle = (\mathbf{u}'_m, v) = (\mathbf{u}'_m, v^1) = (\mathbf{f}, v^1) - B[\mathbf{u}_m, v^1; t].$$

Συνεπώς,

$$|\langle \mathbf{u}'_m, v \rangle| \leq C \left( \|\mathbf{f}\|_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}_m\|_{H_0^1(U)} \right)$$

αφού  $\|v^1\|_{H_0^1(U)} \leq 1$ . Έτσι,

$$\|\mathbf{u}'_m\|_{H^{-1}(U)} \leq C \left( \|\mathbf{f}\|_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}_m\|_{H_0^1(U)} \right)$$

και άρα

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\mathbf{u}'_m\|_{H^{-1}(U)}^2 dt &\leq C \int_0^T \|\mathbf{f}\|_{L^2(U)}^2 + \|\mathbf{u}_m\|_{H_0^1(U)}^2 dt \\ &\leq C \left( \|g\|_{L^2(U)}^2 + \|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;L^2(U))}^2 \right). \end{aligned}$$

■

### 4.2.3 Ύπαρξη και Μοναδικότητα

Στη συνέχεια, περνάμε σε όρια καθώς  $m \rightarrow \infty$ , για να φτιάξουμε μία ασθενή λύση του προβλήματος αρχικών/συνοριακών τιμών 4.2.1.

**Θεώρημα 4.2.3** (Ύπαρξη ασθενούς λύσης). Υπάρχει ασθενής λύση του (4.2.1).

**Απόδειξη.**

1. Σύμφωνα με την ενεργειακή εκτίμηση (4.2.10), βλέπουμε ότι η ακολουθία  $\{\mathbf{u}_m\}_{m=1}^\infty$  είναι φραγμένη στον  $L^2(0, T; H_0^1(U))$  και η  $\{\mathbf{u}'_m\}_{m=1}^\infty$  είναι φραγμένη στον  $L^2(0, T; H^{-1}(U))$ .



Συνεπώς, υπάρχει υπακολουθία  $\{\mathbf{u}_{m_l}\}_{l=1}^\infty \subset \{\mathbf{u}_m\}_{m=1}^\infty$  και μία συνάρτηση  $\mathbf{u} \in L^2(0, T; H_0^1(U))$  με  $\mathbf{u}' \in L^2(0, T; H^{-1}(U))$  τέτοια ώστε

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{m_l} \rightharpoonup \mathbf{u} & \text{ασθενώς στον } L^2(0, T; H_0^1(U)) \\ \mathbf{u}'_{m_l} \rightharpoonup \mathbf{u}' & \text{ασθενώς στον } L^2(0, T; H^{-1}(U)). \end{cases} \quad (4.2.17)$$

2. Στη συνέχεια σταθεροποιούμε έναν ακέραιο  $N$  και διαλέγουμε μία συνάρτηση  $\mathbf{v} \in C^1([0, T]; H_0^1(U))$  που έχει τη μορφή

$$\mathbf{v}(t) = \sum_{k=1}^N d^k(t) w_k \quad (4.2.18)$$

όπου οι  $\{d^k\}_{k=1}^N$  είναι δοσμένες ομαλές συναρτήσεις. Διαλέγουμε  $m \geq N$ , πολλαπλασιάζουμε τη (4.2.6) με  $d^k(t)$ , αθροίζουμε για  $k = 1, \dots, N$  και μετά ολοκληρώνουμε ως προς  $t$  για να βρούμε

$$\int_0^T \langle \mathbf{u}'_m, \mathbf{v} \rangle + B[\mathbf{u}_m, \mathbf{v}; t] dt = \int_0^T (\mathbf{f}, \mathbf{v}) dt. \quad (4.2.19)$$

Θέτουμε  $m = m_l$  και χρησιμοποιούμε την (4.2.17) για να βρούμε περνώντας σε ασθενή όρια ότι

$$\int_0^T \langle \mathbf{u}', \mathbf{v} \rangle + B[\mathbf{u}, \mathbf{v}; t] dt = \int_0^T (\mathbf{f}, \mathbf{v}) dt. \quad (4.2.20)$$

Αυτή η ανισότητα ισχύει τότε για όλες τις συναρτήσεις  $\mathbf{v} \in L^2(0, T; H_0^1(U))$ , αφού οι συναρτήσεις της μορφής (4.2.18) είναι πυκνές σε αυτόν το χώρο. Έτσι,

$$\langle \mathbf{u}', v \rangle + B[\mathbf{u}, v; t] = (\mathbf{f}, v) \quad (4.2.21)$$

για κάθε  $v \in H_0^1(U)$  και σχεδόν όλα τα  $0 \leq t \leq T$ . Από το Θεώρημα 1.9.3 βλέπουμε ακόμα ότι  $\mathbf{u} \in C([0, T]; L^2(U))$ .

3. Για να δείξουμε ότι  $\mathbf{u}(0) = g$ , παρατηρούμε πρώτα από την (4.2.20) ότι

$$\int_0^T -\langle \mathbf{v}', \mathbf{u} \rangle + B[\mathbf{u}, \mathbf{v}; t] dt = \int_0^T (\mathbf{f}, \mathbf{v}) dt + (\mathbf{u}(0) + \mathbf{v}(0)) \quad (4.2.22)$$

για κάθε  $\mathbf{v} \in C^1([0, T]; H_0^1(U))$  με  $\mathbf{v}(T) = 0$ . Όμοια, από την (4.2.19) εξαγάγουμε ότι

$$\int_0^T -\langle \mathbf{v}', \mathbf{u}_m \rangle + B[\mathbf{u}_m, \mathbf{v}; t] dt = \int_0^T (\mathbf{f}, \mathbf{v}) dt + (\mathbf{u}_m(0) + \mathbf{v}(0)). \quad (4.2.23)$$

Θέτουμε  $m = m_l$  και ξαναχρησιμοποιούμε την (4.2.17) για να βρούμε

$$\int_0^T -\langle \mathbf{v}', \mathbf{u} \rangle + B[\mathbf{u}, \mathbf{v}; t] dt = \int_0^T (\mathbf{f}, \mathbf{v}) dt + (g, \mathbf{v}(0)) \quad (4.2.24)$$

αφού  $\mathbf{u}_{m_i}(0) \rightarrow g$  στον  $L^2(U)$ . Επειδή το  $\mathbf{v}(0)$  είναι αυθαίρετο, συγκρίνοντας τις (4.2.22) και (4.2.24), συμπεραίνουμε ότι  $\mathbf{u}(0) = g$ .

■

**Θεώρημα 4.2.4** (Μοναδικότητα της ασθενούς λύσης). *Μία ασθενής λύση του (4.2.1) είναι μοναδική.*

**Απόδειξη.** Αρκεί να δείξουμε ότι η μόνη ασθενής λύση του (4.2.1) με  $\mathbf{f} \equiv g \equiv 0$  είναι η

$$\mathbf{u} \equiv 0 \quad (4.2.25)$$

Για να το δείξουμε αυτό, παρατηρούμε ότι θέτοντας  $\mathbf{v} = \mathbf{u}$  στην ταυτότητα (4.2.21) (για  $\mathbf{f} \equiv 0$ ), συμπεραίνουμε, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.9.3, ότι

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|_{L^2(U)}^2 \right) + B[\mathbf{u}, \mathbf{u}; t] = \langle \mathbf{u}', \mathbf{u} \rangle + B[\mathbf{u}, \mathbf{u}; t] = 0. \quad (4.2.26)$$

Επειδή

$$B[\mathbf{u}, \mathbf{u}; t] \geq \beta \|\mathbf{u}\|_{H_0^1(U)}^2 - \gamma \|\mathbf{u}\|_{L^2(U)}^2 \geq -\gamma \|\mathbf{u}\|_{L^2(U)}^2,$$

η ανισότητα Gronwall και η (4.2.26) συνεπάγονται την (4.2.25). ■

### 4.3 Ομαλότητα

Σε αυτή την ενότητα εξετάζουμε την κανονικότητα της ασθενούς λύσης  $\mathbf{u}$ . Ο τελικός μας στόχος είναι να δείξουμε ότι η  $\mathbf{u}$  είναι ομαλή αν οι συντελεστές της ΜΔΕ, το σύνορο του χωρίου κλπ είναι ομαλά.

**Παρατήρηση 4.3.1** (Κίνητρο: Τυπική εξαγωγή εκτιμήσεων.)

(i) Για να δούμε τι υποθέσεις κανονικότητας θα μπορούσαν να ισχύουν, υποθέτουμε αρχικά ότι η  $u = u(x, t)$  είναι ομαλή λύση του προβλήματος αρχικών/συνοριακών τιμών για την εξίσωση θερμότητας:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{στο } \mathbb{R}^n \times (0, T] \\ u = g & \text{στο } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (4.3.1)$$

και υποθέτουμε ακόμα ότι η  $u$  πάει στο μηδέν καθώς  $|x| \rightarrow \infty$  αρκετά γρήγορα, ώστε να δικαιολογούνται οι παρακάτω υπολογισμοί. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε για  $0 \leq t \leq T$ :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (u_t - \Delta u)^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 - 2\Delta u u_t + (\Delta u)^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 + 2Du \cdot Du_t + (\Delta u)^2 dx. \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Από  $2Du \cdot Du_t = \frac{d}{dt}(|Du|^2)$  έχουμε ότι

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} 2Du \cdot Du_t dx ds = \int_{\mathbb{R}^n} |Du|^2 dx \Big|_{s=0}^{s=t}.$$

Επιπλέον, όπως δείξαμε και στην ενότητα 2.3,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta u)^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |D^2 u|^2 dx.$$

Εισάγουμε τις δύο αυτές ανισότητες στην (4.3.2) και ολοκληρώνουμε ως προς το χρόνο, για να πάρουμε

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^n} |Du|^2 dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 + |D^2 u|^2 dx dt \leq C \left( \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f^2 dx dt + \int_{\mathbb{R}^n} |Dg|^2 dx \right) \quad (4.3.3)$$

Βλέπουμε, άρα, ότι μπορούμε να εκτιμήσουμε τις  $L^2$ -νόρμες των  $u_t$  και  $D^2 u$  στο  $\mathbb{R}^n \times (0, T)$  ως προς την  $L^2$ -νόρμα της  $f$  στο  $\mathbb{R}^n \times (0, T)$  και την  $L^2$ -νόρμα του  $Dg$  στον  $\mathbb{R}^n$ .

(ii) Στη συνέχεια, παραγωγίζουμε τη ΜΔΕ ως προς  $t$  και θέτουμε  $\tilde{u} := u_t$ . Τότε

$$\begin{cases} \tilde{u}_t - \Delta \tilde{u} = \tilde{f} & \text{στο } \mathbb{R}^n \times (0, T] \\ \tilde{u} = \tilde{g} & \text{στο } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (4.3.4)$$

για  $\tilde{f} := f_t$ ,  $\tilde{g} := u_t(\cdot, 0) = f(\cdot, 0) + \Delta g$ . Πολλοπλοσιάζοντας με  $\tilde{u}$ , ολοκληρώνοντας κατά μέλη και χρησιμοποιώντας την Ανισότητα Gronwall, προκύπτει ότι

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^n} |u_t|^2 dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |Du_t|^2 dx dt \leq C \left( \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f_t^2 dx dt + \int_{\mathbb{R}^n} |D^2 g|^2 + f(\cdot, 0)^2 dx \right). \quad (4.3.5)$$

Αλλά

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|f(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C(\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n \times (0, T))} + \|f_t\|_{L^2(\mathbb{R}^n \times (0, T))}) \quad (4.3.6)$$

σύμφωνα με το Θεώρημα 1.9.2 (iii). Επιπλέον, γράφοντας  $-\Delta u = f - u_t$ , βρίσκουμε, όπως στην Ενότητα 2.3, ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} |D^2 u|^2 dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} f^2 + u_t^2 dx. \quad (4.3.7)$$

Συνδυάζοντας τις ((4.3.5) – (4.3.7)), οδηγούμαστε στην εκτίμηση

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^n} |u_t|^2 + |D^2 u|^2 dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |Du_t|^2 dx dt \leq C \left( \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f_t^2 + f^2 dx dt + \int_{\mathbb{R}^n} |D^2 g|^2 dx \right) \quad (4.3.8)$$

για κάποια σταθερά  $C$ .

Προφανώς τα παραπάνω δεν αποτελούν κάποιου είδους απόδειξη, γιατί η ασθενής λύση που κατασκευάσαμε προηγουμένως δεν είναι αρκετά ομαλή ώστε να δικαιολογήσει αυτούς τους υπολογισμούς. Για τους υπολογισμούς μας θα χρησιμοποιήσουμε τις προσεγγίσεις Galerkin. Για να διευκολύνουμε τη διαδικασία, θα υποθέτουμε στο εξής ότι  $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$  είναι η πλήρης συλλογή των ιδιοσυναρτήσεων της  $-\Delta$  στον  $H_0^1$  και ότι το  $U$  είναι φραγμένο, ανοιχτό με ομαλό  $\partial U$ . Υποθέτουμε επιπλέον ότι

$$\begin{cases} \text{οι συντελεστές } a^{ij}, b^i, c \text{ (} i, j = 1, \dots, n \text{) είναι ομαλοί στο} \\ \bar{U} \text{ και δεν εξαρτώνται από το } t. \end{cases} \quad (4.3.9)$$

**Θεώρημα 4.3.1** (Βελτιωμένη κανονικότητα.)

(i) Έστω

$$g \in H_0^1(U), \mathbf{f} \in L^2(0, T; L^2(U)).$$

Υποθέτουμε ακόμα ότι η  $\mathbf{u} \in L^2(0, T; H_0^1(U))$  με  $\mathbf{u}' \in L^2(0, T; H^{-1}(U))$  είναι η ασθενής λύση του

$$\begin{cases} u_t + Lu = f & \text{στο } U_T \\ u = 0 & \text{στο } \partial U \times [0, T] \\ u = g & \text{στο } U \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Τότε στην πραγματικότητα

$$\mathbf{u} \in L^2(0, T; H^2(U)) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(U)), \mathbf{u}' \in L^2(0, T; L^2(U))$$

και έχουμε την εκτίμηση

$$\operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{u}(t)\|_{H_0^1(U)} + \|\mathbf{u}\|_{L^2(0, T; H^2(U))} + \|\mathbf{u}'\|_{L^2(0, T; L^2(U))} \leq C \left( \|\mathbf{f}\|_{L^2(0, T; L^2(U))} + \|g\|_{H_0^1(U)} \right) \quad (4.3.10)$$

όπου η σταθερά  $C$  εξαρτάται μόνο από τα  $U$  και  $T$  και τους συντελεστές του  $L$ .

(ii) Αν επιπλέον

$$g \in H^2(U), \mathbf{f}' \in L^2(0, T; L^2(U)),$$

τότε

$$\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; H^2(U)), \mathbf{u}' \in L^\infty(0, T; L^2(U)) \cap L^2(0, T; H_0^1(U)) \text{ και}$$

$$\mathbf{u}'' \in L^2(0, T; H^{-1}(U))$$

με την εκτίμηση

$$\begin{aligned} \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} (\|\mathbf{u}(t)\|_{H^2(U)} + \|\mathbf{u}'(t)\|_{L^2(U)}) + \|\mathbf{u}'\|_{L^2(0, T; H_0^1(U))} \\ + \|\mathbf{u}''\|_{L^2(0, T; H^{-1}(U))} \leq C(\|\mathbf{f}\|_{H^1(0, T; L^2(U))} + \|g\|_{H^2(U)}) \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

**Απόδειξη.**

1. Σταθεροποιούμε ένα  $m \geq 1$ , πολλαπλασιάζουμε τη σχέση (4.2.6)  $((\mathbf{u}'_m, w_k) + B[\mathbf{u}_m, w_k; t] = (\mathbf{f}, w_k) \quad (0 \leq t \leq T, k = 1, \dots, m))$  με  $d_m^{k'}(t)$  και αθροίζουμε για  $k = 1, \dots, m$  για να βρούμε

$$(\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}'_m) + B[\mathbf{u}_m, \mathbf{u}'_m] = (\mathbf{f}, \mathbf{u}'_m)$$

για σχεδόν όλα τα  $0 \leq t \leq T$ . Τώρα,

$$\begin{aligned} B[\mathbf{u}_m, \mathbf{u}'_m] &= \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \mathbf{u}_{m,x_i} \mathbf{u}'_{m,x_j} dx + \int_U \sum_{i=1}^n b^i \mathbf{u}_{m,x_i} \mathbf{u}'_m + c \mathbf{u}_m \mathbf{u}'_m dx \\ &=: A + B. \end{aligned}$$

Επειδή  $a^{ij} = a^{ji}$ ,  $(i, j = 1, \dots, n)$  και αυτοί οι συντελεστές δεν εξαρτώνται από το  $t$ , βλέπουμε ότι  $A = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} A[\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m] \right)$  για τη συμμετρική διγραμμική μορφή

$$A[u, v] := \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} dx \quad (u, v \in H_0^1(U)).$$

Επιπλέον,

$$|B| \leq \frac{C}{\varepsilon} \|\mathbf{u}_m\|_{H_0^1(U)}^2 + \varepsilon \|\mathbf{u}'_m\|_{L^2(U)}^2, \quad |(\mathbf{f}, \mathbf{u}'_m)| \leq \frac{C}{\varepsilon} \|\mathbf{f}\|_{L^2(U)}^2 + \varepsilon \|\mathbf{u}'_m\|_{L^2(U)}^2$$

για κάθε  $\varepsilon > 0$ .

2. Συνδυάζοντας τις παραπάνω ανισότητες, συμπεραίνουμε ότι

$$\|\mathbf{u}'_m\|_{L^2(U)}^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} A[\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m] \right) \leq \frac{C}{\varepsilon} (\|\mathbf{u}_m\|_{H_0^1(U)}^2 + \|\mathbf{f}\|_{L^2(U)}^2) + 2\varepsilon \|\mathbf{u}'_m\|_{L^2(U)}^2.$$

Επιλέγοντας  $\varepsilon = \frac{1}{4}$  και ολοκληρώνοντας, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} & \int_0^T \|\mathbf{u}'_m\|_{L^2(U)}^2 + \sup_{0 \leq t \leq T} A[\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t)] \\ & \leq C \left( A[\mathbf{u}_m(0), \mathbf{u}_m(0)] + \int_0^T \|\mathbf{u}_m\|_{H_0^1(U)}^2 + \|\mathbf{f}\|_{L^2(U)}^2 dt \right) \\ & \leq C \left( \|g\|_{H_0^1(U)}^2 + \|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;L^2(U))}^2 \right) \end{aligned}$$

σύμφωνα με το Θεώρημα 4.2.2 όπου εκτιμήσαμε το  $\|\mathbf{u}_m(0)\|_{H_0^1(U)} \leq \|g\|_{H_0^1(U)}$ . Επειδή  $A[u, u] \geq \theta \int_U |Du|^2 dx$  για κάθε  $u \in H_0^1(U)$ , βρίσκουμε ότι

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{u}_m(t)\|_{H_0^1(U)}^2 \leq C \left( \|g\|_{H_0^1(U)}^2 + \|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;L^2(U))}^2 \right). \quad (4.3.12)$$

Παιρνώντας σε όρια καθώς  $m = m_l \rightarrow \infty$ , εξάγουμε ότι  $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; H_0^1(U))$  και  $\mathbf{u}' \in L^2(0, T; L^2(U))$  με τα αναφερθέντα φράγματα.

3. Συγκεκριμένα, για σχεδόν όλα τα  $t$  έχουμε την ταυτότητα

$$(\mathbf{u}', v) + B[\mathbf{u}, v] = (\mathbf{f}, v)$$

για κάθε  $v \in H_0^1(U)$ . Μπορούμε να ξαναγράψουμε αυτή την ισότητα ως

$$B[\mathbf{u}, v] = (\mathbf{h}, v)$$

για  $\mathbf{h} := \mathbf{f} - \mathbf{u}'$ . Επειδή  $\mathbf{h}(t) \in L^2(U)$  για σχεδόν όλα τα  $0 \leq t \leq T$ , συμπεραίνουμε από το Θεώρημα 2.3.4 για την ελλειπτική κανονικότητα ότι  $\mathbf{u}(t) \in H^2(U)$  για σχεδόν όλα τα  $0 \leq t \leq T$  με την εκτίμηση

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{H^2(U)}^2 & \leq C \left( \|\mathbf{h}\|_{L^2(U)}^2 + \|\mathbf{u}\|_{L^2(U)}^2 \right) \\ & \leq C \left( \|\mathbf{f}\|_{L^2(U)}^2 + \|\mathbf{u}'\|_{L^2(U)}^2 + \|\mathbf{u}\|_{L^2(U)}^2 \right). \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

Ολοκληρώνοντας και χρησιμοποιώντας τις εκτιμήσεις του βήματος 2, ολοκληρώνουμε την απόδειξη του (i).

4. Ο επόμενος στόχος είναι να εξασφαλίσουμε μεγαλύτερη κανονικότητα για την ασθενή μας λύση. Υποθέτουμε ότι  $g \in H^2(U) \cap H_0^1(U)$ ,  $\mathbf{f} \in H^1(0, T; L^2(U))$ . Σταθεροποιούμε  $m \geq 1$  και παραγωγίζουμε την εξίσωση (4.2.6) ως προς  $t$ . Με βάση την (4.3.9) βρίσκουμε

$$(\tilde{\mathbf{u}}'_m, w_k) + B[\tilde{\mathbf{u}}_m, w_k] = (\mathbf{f}', w_k) \quad (k = 1, \dots, m) \quad (4.3.14)$$

όπου  $\tilde{\mathbf{u}}_m := \mathbf{u}'_m$ . Πολλαπλασιάζουμε την (4.3.14) με  $d_m^{k'}(t)$  και αθροίζουμε ως προς  $k = 1, \dots, m$ :

$$(\tilde{\mathbf{u}}'_m, \tilde{\mathbf{u}}_m) + B[\tilde{\mathbf{u}}_m, \tilde{\mathbf{u}}_m] = (\mathbf{f}', \tilde{\mathbf{u}}_m).$$

Χρησιμοποιώντας την Ανισότητα Gronwall εξάγουμε ότι

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{u}'_m(t)\|_{L^2(U)}^2 + \int_0^T \|\mathbf{u}'_m\|_{H_0^1(U)}^2 dt & \leq C \left( \|\mathbf{u}'_m(0)\|_{L^2(U)}^2 + \|\mathbf{f}'\|_{L^2(0, T; L^2(U))}^2 \right) \\ & \leq C \left( \|\mathbf{f}\|_{H^1(0, T; L^2(U))}^2 + \|\mathbf{u}_m(0)\|_{H^2(U)}^2 \right) \end{aligned} \quad (4.3.15)$$

όπου στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την (4.2.6).

5. Πρέπει να εκτιμήσουμε τον τελευταίο όρο στην (4.3.15). Θυμίζουμε ότι έχουμε πάρει  $\{w_k\}_{k=1}^\infty$  την πλήρη συλλογή των (ομαλών) ιδιοσυναρτήσεων του  $-\Delta$  στον  $H_0^1(U)$ . Συγκεκριμένα,  $\Delta \mathbf{u}_m = 0$  στο  $\partial U$ . Έτσι,

$$\|\mathbf{u}_m(0)\|_{H^2(U)}^2 \leq C \|\Delta \mathbf{u}_m(0)\|_{L^2(U)}^2 = C(\mathbf{u}_m(0), \Delta^2 \mathbf{u}_m(0)).$$

Επειδή  $\Delta^2 \mathbf{u}_m(0) \in \text{span} \{w_k\}_{k=1}^\infty$  και  $(\mathbf{u}_m(0), w_k) = (g, w_k)$  για  $k = 1, \dots, m$ , έχουμε

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_m(0)\|_{H^2(U)}^2 & \leq C(g, \Delta^2 \mathbf{u}_m(0)) = C(\Delta g, \Delta \mathbf{u}_m(0)) \\ & \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_m(0)\|_{H^2(U)}^2 + C \|g\|_{H^2(U)}^2. \end{aligned}$$

Έτσι,  $\|\mathbf{u}_m(0)\|_{H^2(U)} \leq C \|g\|_{H^2(U)}$ . Ως εκ τούτου, η (4.2.15) συνεπάγεται ότι

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{u}'_m(t)\|_{L^2(U)}^2 + \int_0^T \|\mathbf{u}'_m\|_{H_0^1(U)}^2 dt \leq C \left( \|\mathbf{f}\|_{H^1(0, T; L^2(U))}^2 + \|g\|_{H^2(U)}^2 \right). \quad (4.3.16)$$

6. Τώρα

$$B[\mathbf{u}_m, w_k] = (\mathbf{f} - \mathbf{u}'_m, w_k) \quad (k = 1, \dots, m).$$

Θέτουμε  $\lambda_k$  την  $k$ -ιδιοτιμή του  $-\Delta$  στον  $H_0^1(U)$ . Πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω ταυτότητα με  $\lambda_k a_m^k(t)$  και αθροίζοντας για  $k = 1, \dots, m$  εξάγουμε ότι για  $0 \leq t \leq T$

$$B[\mathbf{u}_m, -\Delta \mathbf{u}_m] = (\mathbf{f} - \mathbf{u}'_m, -\Delta \mathbf{u}_m). \quad (4.3.17)$$

Αφού  $\Delta \mathbf{u}_m = 0$  στο  $\partial U$ , βλέπουμε ότι  $B[\mathbf{u}_m, -\Delta \mathbf{u}_m] = (L\mathbf{u}_m, -\Delta \mathbf{u}_m)$ . Στη συνέχεια, επικαλούμαστε την ανισότητα

$$\beta \|u\|_{H^2(U)}^2 \leq (Lu, -\Delta u) + \gamma \|u\|_{L^2(U)}^2 \quad (u \in H^2(U) \cap H_0^1(U)) \quad (4.3.18)$$

για σταθερές  $\beta > 0, \gamma \geq 0$ .

Έπειτα, συμπεραίνουμε από την (4.3.17) ότι

$$\|\mathbf{u}_m\|_{H^2(U)} \leq C (\|\mathbf{f}\|_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}'_m\|_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}_m\|_{L^2(U)}).$$

Αυτή η ανισότητα μαζί με (4.3.16) και (4.3.12) και το Θεώρημα 1.9.4 συνεπάγονται

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left( \|\mathbf{u}'_m\|_{L^2(U)}^2 + \|\mathbf{u}_m(t)\|_{H^2(U)}^2 \right) + \int_0^T \|\mathbf{u}'_m\|_{H_0^1(U)}^2 dt \leq C \left( \|\mathbf{f}\|_{H^1(0,T;L^2(U))}^2 + \|g\|_{H^2(U)}^2 \right)$$

Περνώντας σε όρια καθώς  $m = m_l \rightarrow \infty$ , εξάγουμε το ίδιο φράγμα και για τη  $\mathbf{u}$ .

7. Μένει να δείξουμε ότι  $\mathbf{u}'' \in L^2(0, T; H^{-1}(U))$ . Για να το κάνουμε αυτό, παίρνουμε  $v \in H_0^1(U)$  με  $\|v\|_{H_0^1(U)} \leq 1$  και γράφουμε  $v = v^1 + v^2$  όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.2. Τότε, για σχεδόν όλους τους χρόνους  $0 \leq t \leq T$ :

$$\langle \mathbf{u}''_m, v \rangle = (\mathbf{u}''_m, v) = (\mathbf{u}''_m, v^1) = (\mathbf{f}', v^1) - B[\mathbf{u}'_m, v^1; t]$$

σύμφωνα με την (4.3.14), αφού  $\mathbf{u}''_m = \tilde{\mathbf{u}}'_m$ . Συνεπώς,

$$|\langle \mathbf{u}''_m, v \rangle| \leq C \left( \|\mathbf{f}'\|_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}'_m\|_{H_0^1(U)} \right)$$

αφού  $\|v^1\|_{H_0^1(U)} \leq 1$ . Έτσι,

$$\|\mathbf{u}''_m\|_{H^{-1}(U)} \leq C \left( \|\mathbf{f}'\|_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}'_m\|_{H_0^1(U)} \right)$$

και, άρα, η  $\mathbf{u}''_m$  είναι φραγμένη στον  $L^2(0, T; H^{-1}(U))$ . Περνώντας σε όρια, συμπεραίνουμε ότι  $\mathbf{u}'' \in L^2(0, T; H^{-1}(U))$  με τη ζητούμενη εκτίμηση.



■

Με επαγωγικά επιχειρήματα προκύπτει και το ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα 4.3.2** (Μεγαλύτερη κανονικότητα). Έστω

$$g \in H^{2m+1}(U), \frac{d^k \mathbf{f}}{dt^k} \in L^2(0, T; H^{2m-2k}(U)) \quad (k = 0, \dots, m).$$

Υποθέτουμε ακόμα ότι ισχύει η ακόλουθη συνθήκη συμβατότητας  $m$ -τάξης:

$$\begin{cases} g_0 := g \in H_0^1(U), g_1 := \mathbf{f}(0) - Lg_0 \in H_0^1(U), \\ \dots, g_m := \frac{d^{m-1} \mathbf{f}}{dt^{m-1}}(0) - Lg_{m-1} \in H_0^1(U). \end{cases}$$

Τότε

$$\frac{d^k \mathbf{u}}{dt^k} \in L^2(0, T; H^{2m+2-2k}(U)) \quad (k = 0, \dots, m+1)$$

και έχουμε την εκτίμηση

$$\sum_{k=0}^{m+1} \left\| \frac{d^k \mathbf{u}}{dt^k} \right\|_{L^2(0, T; H^{2m+2-2k}(U))} \leq C \left( \sum_{k=0}^m \left\| \frac{d^k \mathbf{f}}{dt^k} \right\|_{L^2(0, T; H^{2m-2k}(U))} + \|g\|_{H^{2m+1}(U)} \right) \quad (4.3.19)$$

όπου η σταθερά  $C$  εξαρτάται μόνο από τα  $m, U, T$  και τους συντελεστές του  $L$ .

Τέλος, εφαρμόζοντας το προηγούμενο θεώρημα για  $m = 0, 1, \dots$  προκύπτει το ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα 4.3.3** (Άπειρη παραγωγισιμότητα). Έστω

$$g \in C^\infty(\bar{U}), \mathbf{f} \in C^\infty(\bar{U}_T)$$

και οι συνθήκες συμβατότητας  $m$ -τάξης ισχύουν για  $m = 0, 1, \dots$ . Τότε, το παραβολικό πρόβλημα αρχικών/συνοριακών τιμών (4.2.1) έχει μοναδική λύση

$$u \in C^\infty(\bar{U}_T).$$

## 4.4 Θεωρία Ημιομάδων

Η θεωρία ημιομάδων είναι η αφηρημένη μελέτη συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης με τιμές σε χώρους Banach, που εκφράζονται μέσω γραμμικών-αλλά ίσως μη-φραγμένων- τελεστών.

#### 4.4.1 Ορισμοί και Βασικές Ιδιότητες

Έστω  $X$  ένας πραγματικός χώρος Banach και η συνήθης διαφορική εξίσωση (ΣΔΕ)

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = A\mathbf{u}(t) & (t \geq 0) \\ \mathbf{u}(0) = u \end{cases} \quad (4.4.1)$$

όπου  $' = \frac{d}{dt}$ ,  $u \in X$  δοσμένο και  $A$  ένας γραμμικός τελεστής. Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε ότι το  $D(A)$ , το πεδίο ορισμού του  $A$ , είναι ένας γραμμικός υπόχωρος του  $X$  και έχουμε έναν πιθανώς μη-φραγμένο τελεστή

$$A : D(A) \rightarrow X. \quad (4.4.2)$$

Εξετάζουμε την ύπαρξη και μοναδικότητα μίας λύσης

$$\mathbf{u} : [0, \infty) \rightarrow X$$

της ΣΔΕ (4.4.1). Το βασικό μας πρόβλημα είναι να εξασφαλίσουμε λογικές συνθήκες για τον τελεστή  $A$  ώστε (i) η ΣΔΕ να έχει μοναδική λύση  $\mathbf{u}$  για κάθε αρχικό σημείο  $u \in X$  και (ii) πολλές ενδιαφέρουσες ΜΔΕ να μπορούν να εκφραστούν στην αφηρημένη μορφή (4.4.1).

#### Ημιομάδες

Υποθέτουμε προς στιγμήν ότι η  $\mathbf{u} : [0, \infty) \rightarrow X$  είναι μία λύση της διαφορικής εξίσωσης (4.4.1) και ότι στην πραγματικότητα η (4.4.1) έχει μοναδική λύση για κάθε αρχικό σημείο  $u \in X$ .

**Παρατήρηση 4.4.1** (Συμβολισμός). Θα γράφουμε

$$\mathbf{u}(t) := S(t)u \quad (t \geq 0) \quad (4.4.3)$$

για να δείξουμε καθαρά την εξάρτηση του  $\mathbf{u}(t)$  από την αρχική συνθήκη  $u \in X$ . Για κάθε χρόνο  $t \geq 0$  μπορούμε ως εκ τούτου να θεωρούμε το  $S(t)$  ως μία απεικόνιση από τον  $X$  στον  $X$ .

Όσον αφορά τις ιδιότητες του  $S$ , είναι σίγουρα γραμμικός και επιπλέον:

$$S(0)u = u \quad (u \in X) \quad (4.4.4)$$

και

$$S(t+s)u = S(t)S(s)u = S(s)S(t)u \quad (t, s \geq 0, u \in X). \quad (4.4.5)$$

Η συνθήκη (4.4.5) εξασφαλίζει την υπόθεσή μας ότι η ΣΔΕ (4.4.1) έχει μοναδική λύση για κάθε αρχική τιμή. Τέλος, φαίνεται λογικό να υποθέσουμε ότι για κάθε  $u \in X$

$$\text{η απεικόνιση } t \mapsto S(t)u \text{ είναι συνεχής από το } [0, \infty) \text{ στον } X. \quad (4.4.6)$$

**Ορισμοί 4.4.1** (i) Μία οικογένεια  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  φραγμένων γραμμικών τελεστών που απεικονίζουν τον  $X$  στον  $X$  καλείται ημιομάδα αν ικανοποιούνται οι συνθήκες ((4.4.4) – (4.4.6)).

(ii) Λέμε ότι η  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  είναι συστολική ημιομάδα αν επιπλέον

$$\|S(t)\| \leq 1 \quad (t \geq 0) \quad (4.4.7)$$

όπου εδώ η  $\|\cdot\|$  συμβολίζει τη νόρμα του τελεστή. Έτσι,

$$\|S(t)u\| \leq \|u\| \quad (t \geq 0, u \in X).$$

### Στοιχειώδεις Ιδιότητες και Γεννήτορες

Το ζητούμενο τώρα είναι να βρούμε ποιού τελεστής  $A$  αποτελούν γεννήτορες συστολικών ημιομάδων. Απο εδώ και στο εξής υποθέτουμε ότι η  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  είναι μία συστολική ημιομάδα στον  $X$ .

**Ορισμοί 4.4.2** Γράφουμε

$$D(A) := \left\{ u \in X \mid \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} \text{ υπάρχει στον } X \right\} \quad (4.4.8)$$

και

$$Au := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} \quad (u \in D(A)). \quad (4.4.9)$$

Καλούμε τον  $A : D(A) \rightarrow X$  τον (απειροστό) γεννήτορα της ημιομάδας  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  όπου  $D(A)$  είναι το πεδίο ορισμού του  $A$ .

**Θεώρημα 4.4.1** (Διαφορικές Ιδιότητες των Ημιομάδων). Υποθέτουμε ότι  $u \in D(A)$ . Τότε

(i)  $S(t)u \in D(A)$  για κάθε  $t \geq 0$ ,

(ii)  $AS(t)u = S(t)Au$  για κάθε  $t > 0$ ,

(iii) η απεικόνιση  $t \mapsto S(t)u$  είναι διαφορίσιμη για κάθε  $t > 0$  και

(iv)  $\frac{d}{dt}S(t)u = AS(t)u$  ( $t > 0$ ).

**Απόδειξη.**

1. Έστω  $u \in D(A)$ . Τότε

$$\begin{aligned} & \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{S(s)S(t)u - S(t)u}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{S(t)S(s)u - S(t)u}{s} \\ &= S(t) \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{S(s)u - u}{s} = S(t)Au \end{aligned}$$

Άρα,  $S(t)u \in D(A)$  και  $AS(t)u = S(t)Au$ , οπότε δείχθηκαν οι (i) και (ii).

2. Έστω  $u \in D(A)$ ,  $h > 0$ . Τότε, αν  $t > 0$ ,

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{S(t)u - S(t-h)u}{h} - S(t)Au \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left\{ S(t-h) \left( \frac{S(h)u - u}{h} \right) - S(t)Au \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left\{ S(t-h) \left( \frac{S(h)u - u}{h} - Au \right) + (S(t-h) - S(t))Au \right\} = 0 \end{aligned}$$

αφού  $\frac{S(h)u - u}{h} \rightarrow Au$  και  $\|S(t-h)\| \leq 1$ . Συνεπώς,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(t)u - S(t-h)u}{h} = S(t)Au.$$

Όμοια,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(t+h)u - S(t)u}{h} = S(t) \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)u - u}{h} = S(t)Au.$$

Έτσι, το  $\frac{d}{dt}S(t)u$  υπάρχει για κάθε χρόνο  $t > 0$  και ισούται με  $S(t)Au = AS(t)u$ .

■

**Παρατήρηση 4.4.2** Επειδή η  $t \mapsto AS(t)u = S(t)Au$  είναι συνεχής, η απεικόνιση  $t \mapsto S(t)u$  είναι  $C^1$  στο  $(0, \infty)$ , αν  $u \in D(A)$ .

**Θεώρημα 4.4.2** (Ιδιότητες των γεννητόρων).

(i) Το πεδίο ορισμού  $D(A)$  είναι πυκνό στο  $X$   
και

(ii) Ο  $A$  είναι κλειστός τελεστής. Λέγοντας ότι ένας τελεστής είναι κλειστός, εννοούμε ότι οποιαδήποτε  $u_k \in D(A)$  ( $k = 1, \dots$ ) και  $u_k \rightarrow u, Au_k \rightarrow v$  καθώς  $k \rightarrow \infty$ , τότε

$$u \in D(A), v = Au.$$

### Απόδειξη.

1. Σταθεροποιούμε ένα  $u \in X$  και ορίζουμε  $u^t := \int_0^t S(s)u \, ds$ . Με βάση την (4.4.6),  $\frac{u^t}{t} \rightarrow u$  στον  $X$ , καθώς  $t \rightarrow 0+$ .

2. Ισχυριζόμαστε ότι

$$u^t \in D(A) \quad (t > 0). \quad (4.4.10)$$

Πράγματι, αν  $r > 0$ , έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{S(r)u^t - u^t}{r} &= \frac{1}{r} \left[ S(r) \left( \int_0^t S(s)u \, ds \right) - \left( \int_0^t S(s)u \, ds \right) \right] \\ &= \frac{1}{r} \int_0^t S(r+s)u - S(s)u \, ds \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα (4.4.5) των ημιομάδων. Έτσι,

$$\begin{aligned} \frac{S(r)u^t - u^t}{r} &= \frac{1}{r} \int_t^{t+r} S(s)u \, ds - \frac{1}{r} \int_0^r S(s)u \, ds \\ &\rightarrow S(t)u - u \quad \text{καθώς } r \rightarrow 0+. \end{aligned}$$

Έτσι,  $u^t \in D(A)$  με  $Au^t = S(t)u - u$ . Αυτό αποδεικνύει την (4.4.10) και ολοκληρώνει την απόδειξη του (i).

3. Για να αποδείξουμε ότι ο  $A$  είναι κλειστός, παίρνουμε  $u_k \in D(A)$  ( $k = 1, \dots$ ) και υποθέτουμε ότι

$$u_k \rightarrow u, Au_k \rightarrow v \quad \text{στον } X. \quad (4.4.11)$$

Πρέπει να αποδείξουμε ότι  $u \in D(A)$  και  $v = Au$ . Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.41

$$S(t)u_k - u_k = \int_0^t S(s)Au_k \, ds.$$

Έστω  $k \rightarrow \infty$  και χρησιμοποιώντας την (4.4.11):

$$S(t)u - u = \int_0^t S(s)v \, ds.$$

Έτσι έχουμε

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t S(s)v \, ds = v.$$

Αλλά τότε εξ ορισμού  $u \in D(A)$  και  $v = Au$ .

■

## Επιλύοντες

**Ορισμοί 4.4.3** 1. Λέμε ότι ένας πραγματικός αριθμός  $\lambda$  ανήκει στο  $\rho(A)$ , το επιλύον σύνολο του  $A$ , αν ο τελεστής

$$\lambda I - A : D(A) \rightarrow X$$

είναι 1-1 και επί.

2. Αν  $\lambda \in \rho(A)$ , ο επιλύων τελεστής  $R_\lambda : X \rightarrow X$  ορίζεται ως

$$R_\lambda u := (\lambda I - A)^{-1}u.$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα Κλειστού Γραφήματος, ο  $R_\lambda : X \rightarrow D(A) \subseteq X$  είναι ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής. Επιπλέον,

$$AR_\lambda u = R_\lambda Au \quad \text{αν } u \in D(A)$$

**Θεώρημα 4.4.3** (Ιδιότητες των επιλυόντων τελεστών).

(i) Αν  $\lambda, \mu \in \rho(A)$ , έχουμε

$$R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda)R_\lambda R_\mu \quad (\text{ταυτότητα επιλυόντων}) \quad (4.4.12)$$

και

$$R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda. \quad (4.4.13)$$

(ii) Αν  $\lambda > 0$ , τότε  $\lambda \in \rho(A)$

$$R_\lambda u = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)u \, dt \quad (u \in X) \quad (4.4.14)$$

και άρα,  $\|R_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda}$ .

**Παρατήρηση 4.4.3** Ο επιλύων τελεστής είναι ο μετασχηματισμός Laplace της ημιομάδας.

**Απόδειξη.**

1. Από το γεγονός ότι  $A(\lambda I - A) = (\lambda I - A)A$  προκύπτει ότι  $R_\lambda A = AR_\lambda$ . Ακόμα, εξ ορισμού έχουμε ότι  $(\mu I - A)R_\mu = I$  και  $(\lambda I - A)R_\lambda = I$ . Έτσι,

$$\begin{aligned} R_\lambda - R_\mu &= R(\lambda)(\mu I - A)R_\mu - (\lambda I - A)R_\lambda R_\mu \\ &= (\mu I - A)R_\lambda R_\mu - (\lambda I - A)R_\lambda R_\mu \\ &= (\mu - \lambda)R_\lambda R_\mu \end{aligned}$$

που δείχνει την (4.4.12). Η (4.4.13) είναι προφανής.

2. Παρατηρούμε πρώτα ότι, αφού  $\lambda > 0$  και  $\|S(t)\| \leq 1$ , το ολοκλήρωμα στη δεξιά πλευρά της (4.4.14) είναι καλά ορισμένο. Θέτουμε  $\tilde{R}_\lambda u$  το ολοκλήρωμα αυτό. Τότε, για  $h > 0$  και  $u \in X$

$$\begin{aligned} \frac{S(h)\tilde{R}_\lambda u - \tilde{R}_\lambda u}{h} &= \frac{1}{h} \left\{ \int_0^\infty e^{-\lambda t} [S(t+h)u - S(t)u] dt \right\} \\ &= -\frac{1}{h} \int_0^h e^{-\lambda(t-h)} S(t)u dt + \frac{1}{h} \int_0^\infty (e^{-\lambda(t-h)} - e^{-\lambda t}) S(t)u dt \\ &= -e^{-\lambda h} \frac{1}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} S(t)u dt + \left( \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \right) \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)u dt. \end{aligned}$$

Έτσι,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)\tilde{R}_\lambda u - \tilde{R}_\lambda u}{h} = -u + \lambda \tilde{R}_\lambda u.$$

Έτσι,  $A\tilde{R}_\lambda u = -u + \lambda \tilde{R}_\lambda u$ , δηλαδή

$$(\lambda I - A)\tilde{R}_\lambda u = u \quad (u \in X). \quad (4.4.15)$$

Από την άλλη, αν  $u \in D(A)$ ,

$$\begin{aligned} A\tilde{R}_\lambda u &= A \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)u dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} AS(t)u dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)Au dt = \tilde{R}_\lambda Au. \end{aligned} \quad (4.4.16)$$

Το ότι περάσαμε τον  $A$  μέσα στο ολοκλήρωμα δικαιολογείται από το γεγονός ότι ο  $A$  είναι κλειστός τελεστής. Έτσι,

$$\tilde{R}_\lambda(\lambda I - A)u = u \quad (u \in D(A)).$$

Με βάση την (4.4.15) και τον παραπάνω τύπο, ο  $\lambda I - A$  είναι ένα προς ένα και επί. Συνεπώς,  $\lambda \in \rho(A)$  με  $\tilde{R}_\lambda = (\lambda I - A)^{-1} = R_\lambda$ .

■

#### 4.4.2 Δημιουργία Συστολικών Ημιομάδων

**Θεώρημα 4.4.4** (Θεώρημα Hile-Yosida). Έστω  $A$  ένας κλειστός, πυκνά-ορισμένος γραμμικός τελεστής στο  $X$ . Τότε ο  $A$  είναι ο γεννήτορας μιας συστολικής ημιομάδας  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  αν και μόνο αν

$$(0, \infty) \subset \rho(A) \text{ και } \|R_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda} \text{ για } \lambda > 0 \quad (4.4.17)$$

**Απόδειξη.**

1. Αν ο  $A$  είναι γεννήτορας, τότε απ' το Θεώρημα 4.4.3 (ii) προκύπτει άμεσα η (4.4.17).
2. Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι ο  $A$  είναι κλειστός, πυκνά-ορισμένος και ικανοποιεί την (4.4.17). Πρέπει να κατασκευάσουμε μία συστολική ημιομάδα με γεννήτορα το  $A$ . Γι' αυτό, σταθεροποιούμε ένα  $\lambda > 0$  και ορίζουμε

$$A_\lambda := -\lambda I + \lambda^2 R_\lambda = \lambda A R_\lambda. \quad (4.4.18)$$

Ο τελεστής  $A_\lambda$  είναι ένα είδος κανονικοποιημένης προσέγγισης του  $A$ .

3. Ισχυριζόμαστε αρχικά ότι

$$A_\lambda u \rightarrow Au \text{ καθώς } \lambda \rightarrow \infty \text{ (} u \in D(A)\text{)}. \quad (4.4.19)$$

Πράγματι, αφού  $\lambda R_\lambda u - u = A R_\lambda u = R_\lambda A u$ ,  $\|\lambda R_\lambda u - u\| \leq \|R_\lambda\| \|A u\| \leq \frac{1}{\lambda} \|A u\| \rightarrow 0$ . Έτσι,  $\lambda R_\lambda u \rightarrow u$  καθώς  $\lambda \rightarrow \infty$  αν  $u \in D(A)$ . Αλλά επειδή  $\|\lambda R_\lambda\| \leq 1$  και το  $D(A)$  είναι πυκνό, εξάγουμε ότι

$$\lambda R_\lambda u \rightarrow u \text{ καθώς } \lambda \rightarrow \infty \text{ για όλα τα } u \in X. \quad (4.4.20)$$

Αν τώρα  $u \in D(A)$ , τότε

$$A_\lambda u = \lambda A R_\lambda u = \lambda R_\lambda A u.$$

Με βάση την (4.4.20), ο ισχυρισμός μας (4.4.19) αποδείχθηκε.

4. Στη συνέχεια ορίζουμε

$$S_\lambda(t) := e^{tA_\lambda} = e^{-\lambda t} e^{\lambda^2 t R_\lambda} = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t)^k}{k!} R_\lambda^k.$$

Παρατηρούμε ότι επειδή  $\|R_\lambda\| \leq \lambda^{-1}$ ,

$$\|S_\lambda(t)\| \leq e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} t^k}{k!} \|R_\lambda\|^k \leq e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k t^k}{k!} = 1.$$



Συνεπώς, το  $\{S_\lambda(t)\}_{t \geq 0}$  είναι μία συστολική ημιομάδα και είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι ο γεννήτοράς της είναι ο  $A_\lambda$  με  $D(A_\lambda) = X$ .

5. Έστω  $\lambda, \mu > 0$ . Επειδή  $R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda$ , βλέπουμε ότι  $A_\lambda A_\mu = A_\mu A_\lambda$  και άρα

$$A_\mu S_\lambda(t) = S_\lambda(t) A_\mu \text{ για κάθε } t > 0.$$

Τότε αν  $u \in D(A)$ , μπορούμε να υπολογίσουμε

$$\begin{aligned} S_\lambda(t)u - S_\mu(t)u &= \int_0^t \frac{d}{ds} [S_\mu(t-s)S_\lambda(s)u] ds \\ &= \int_0^t S_\mu(t-s)S_\lambda(s)(A_\lambda u - A_\mu u) ds \end{aligned}$$

αφού  $\frac{d}{dt} S_\lambda(t)u = A_\lambda S_\lambda(t)u = S_\lambda(t)A_\lambda u$ . Συνεπώς  $\|S_\lambda(t)u - S_\mu(t)u\| \leq t\|A_\lambda u - A_\mu u\| \rightarrow 0$  καθώς  $\lambda, \mu \rightarrow \infty$ . Έτσι, το

$$S(t)u := \lim_{\lambda \rightarrow \infty} S_\lambda(t)u \text{ υπάρχει για κάθε } t \geq 0, u \in D(A). \quad (4.4.21)$$

Καθώς  $\|S_\lambda(t)\| \leq 1$ , το όριο (4.4.21) στην πραγματικότητα υπάρχει για όλα τα  $u \in X$ , ομοιόμορφα για  $t$  σε συμπαγή υποσύνολα του  $[0, \infty)$ . Εύκολα ελέγχουμε ότι η  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  είναι συστολική ημιομάδα στον  $X$ .

6. Μένει να δείξουμε ότι ο  $A$  είναι ο γεννήτορας της  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ . Γράφουμε ως  $B$  τον εν λόγω γεννήτορα. Τώρα,

$$S_\lambda(t)u - u = \int_0^t S_\lambda(s)A_\lambda u ds. \quad (4.4.22)$$

Επιπλέον

$$\|S_\lambda(s)A_\lambda u - S(s)Au\| \leq \|S_\lambda(s)\|\|A_\lambda u - Au\| + \|(S_\lambda(s) - S(s))Au\| \rightarrow 0$$

καθώς  $\lambda \rightarrow \infty$ , αν  $u \in D(A)$ . Περνώντας σε όρια στην (4.4.22), συμπεραίνουμε ότι

$$S(t)u - u = \int_0^t S(s)Au ds$$

αν  $u \in D(A)$ . Έτσι,  $D(A) \subseteq D(B)$  και

$$Bu = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} = Au \quad (u \in D(A)).$$

Αν τώρα  $\lambda > 0$ ,  $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$ . Επίσης,  $(\lambda I - B)(D(A)) = (\lambda I - A)(D(A)) = X$  σύμφωνα με την 4.4.17. Έτσι, ο  $(\lambda I - B)|_{D(A)}$  είναι ένα προς ένα και επί και άρα  $D(A) = D(B)$ . Συνεπώς,  $A = B$  και ο  $A$  είναι πράγματι ο γεννήτορας της  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ .

■

**Παρατήρηση 4.4.4** Έστω  $\omega \in \mathbb{R}$ . Μια ημιομάδα  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  ονομάζεται  $\omega$ -συστολική αν  $\|S(t)\| \leq e^{\omega t}$  ( $t \geq 0$ ). Μια παραλλαγή του προηγούμενου θεωρήματος εξασφαλίζει ότι ένας κλειστός, πυκνά-ορισμένος γραμμικός τελεστής  $A$  δημιουργεί μία  $\omega$ -συστολική ημιομάδα αν και μόνο αν

$$(\omega, \infty) \subset \rho(A) \text{ και } \|R_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda - \omega} \text{ για όλα τα } \lambda > \omega. \quad (4.4.23)$$

### 4.4.3 Εφαρμογή σε Παραβολική ΜΔΕ 2ης τάξης

Θεωρούμε πρώτα το παραβολικό πρόβλημα αρχικών συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} u_t + Lu = 0 & \text{στο } U_T \\ u = 0 & \text{στο } \partial U \times [0, T] \\ u = g & \text{στο } U \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (4.4.24)$$

που είναι ειδική περίπτωση της (4.1.1) για  $f \equiv 0$ . Θεωρούμε ότι ο  $L$  είναι σε μορφή απόκλισης (4.1.2), ικανοποιεί την ισχυρή συνθήκη ομοιόμορφης ελλειπτικότητας και έχει ομαλούς συντελεστές που δεν εξαρτώνται από το  $t$ . Υποθέτουμε ακόμα, ότι το φραγμένο ανοιχτό σύνολο  $U$  έχει ομαλό σύνορο.

Θα προσπαθήσουμε να ερμηνεύσουμε την (4.4.24) ως τη ροή που καθορίζεται από μία ημιομάδα στο χώρο  $X = L^2(U)$ . Για αυτό, θέτουμε

$$D(A) := H_0^1(U) \cap H^2(U) \quad (4.4.25)$$

και ορίζουμε

$$Au := -Lu \text{ αν } u \in D(A). \quad (4.4.26)$$

Τότε ο  $A$  είναι ένας μη-φραγμένος γραμμικός τελεστής στο  $X$ . Ανακαλούμε την ενεργειακή εκτίμηση

$$\beta \|u\|_{H_0^1(U)}^2 \leq B[u, u] + \gamma \|u\|_{L^2(U)}^2 \quad (4.4.27)$$

για σταθερές  $\beta > 0, \gamma \geq 0$ , όπου  $B[\cdot, \cdot]$  είναι η διγραμμική μορφή που συνδέεται με τον  $L$ .

**Θεώρημα 4.4.5** (Παραβολικές ΜΔΕ δεύτερης τάξης ως ημιομάδες). Ο τελεστής  $A$  δημιουργεί μία  $\gamma$ -συστολική ημιομάδα  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  στον  $L^2(U)$ .

**Απόδειξη.**

1. Πρέπει να ελέγξουμε τις υποθέσεις της παραλλαγής του θεωρήματος Hille-Yosida που παρουσιάστηκε στην Παρατήρηση 4.4.4 με  $\gamma$  αντί για  $\omega$ . Πρώτα από όλα, το  $D(A)$  που δίνεται στην 4.4.25 είναι πράγματι πυκνό στον  $L^2(U)$ .
2. Ισχυριζόμαστε τώρα ότι ο τελεστής  $A$  είναι κλειστός. Πράγματι, έστω  $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D(A)$  με

$$u_k \rightarrow u, Au_k \rightarrow f \text{ στον } L^2(U). \quad (4.4.28)$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα ομαλότητας 2.3.4

$$\|u_k - u_l\|_{H^2(U)} \leq C(\|Au_k - Au_l\|_{L^2(U)} + \|u_k - u_l\|_{L^2(U)})$$

για όλα τα  $k$  και  $l$ . Έτσι, η (4.4.28) συνεπάγεται ότι η  $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$  είναι ακολουθία Cauchy στον  $H^2(U)$  και άρα

$$u_k \rightarrow u \text{ στον } H^2(U). \quad (4.4.29)$$

Άρα  $u \in D(A)$ . Επιπλέον, η (4.4.29) συνεπάγεται ότι  $Au_k \rightarrow Au$  στον  $L^2(U)$  και συνεπώς  $f = Au$ .

3. Στη συνέχεια, ελέγχουμε τις συνθήκες (4.4.23) για τον επιλύοντα με  $\omega$  αντί για  $\gamma$ . Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2.3 για κάθε  $\lambda \geq \gamma$  το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} Lu + \lambda u = f & \text{στο } U \\ u = 0 & \text{στο } \partial U \end{cases} \quad (4.4.30)$$

έχει μοναδική ασθενή λύση  $u \in H_0^1(U)$  για κάθε  $f \in L^2(U)$ . Με βάση τη θεωρία ομαλότητας για τα ελλειπτικά προβλήματα, προκύπτει ότι στην πραγματικότητα  $u \in H^2(U) \cap H_0^1(U)$ . Άρα,  $u \in D(A)$ . Μπορούμε πλέον να ξαναγράψουμε την (4.4.30) χρησιμοποιώντας την (4.4.26) και να βρούμε

$$\lambda u - Au = f. \quad (4.4.31)$$

Έτσι, ο  $(\lambda I - A) : D(A) \rightarrow X$  είναι ένα προς ένα και επί για  $\lambda \geq \gamma$ . Συνεπώς,  $\rho(A) \supset [\gamma, \infty)$ .

4. Θεωρούμε την ασθενή μορφή του προβλήματος συνοριακών τιμών (4.4.30):

$$B[u, v] + \lambda(u, v) = (f, v)$$

για κάθε  $v \in H_0^1(U)$  όπου  $(\cdot, \cdot)$  είναι το εσωτερικό γινόμενο στον  $L^2(U)$ . Θέτουμε  $v = u$  και χρησιμοποιούμε την 4.4.27 για να υπολογίσουμε για  $\lambda > \gamma$ :

$$(\lambda - \gamma)\|u\|_{L^2(U)}^2 \leq \|f\|_{L^2(U)}\|u\|_{L^2(U)}.$$

Έτσι, επειδή  $u = R_\lambda f$ , έχουμε την εκτίμηση

$$\|R_\lambda f\|_{L^2(U)} \leq \frac{1}{\lambda - \gamma}\|f\|_{L^2(U)}.$$

Αυτό το φράγμα ισχύει για όλες τις  $f \in L^2(U)$  και άρα

$$\|R_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda - \gamma} \quad (\lambda > \gamma) \tag{4.4.32}$$

όπως απαιτείται.

■

**Παρατήρηση 4.4.5** Βλέπουμε ότι η μέθοδος των ημιομάδων ξεκινάει κατασκευάζοντας πιο ομαλή ρύση από τη μέθοδο Galerkin. Παρ' όλα αυτά, περιορίζεται μόνο στις περιπτώσεις που οι συντελεστές  $a^{ij}, b^i, c$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) του  $L$  είναι ανεξάρτητοι του χρόνου  $t$ , ενώ η μέθοδος Galerkin δεν έχει τέτοιο περιορισμό.

## Κεφάλαιο 5

# Η Μέθοδος των Πεπερασμένων

# Στοιχείων για Παραβολικά Προβλήματα

### 5.1 Η Κλασσική Μέθοδος Galerkin

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε την κλασσική μέθοδο Galerkin για πεπερασμένα στοιχεία, για να βρούμε την προσεγγιστική λύση του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών της εξίσωσης θερμότητας

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{στο } \Omega \text{ για } t > 0 \\ u = 0 & \text{στο } \partial\Omega \text{ για } t > 0 \text{ με } u(\cdot, 0) = v \text{ στο } \Omega \end{cases} \quad (5.1.1)$$

όπου το  $\Omega$  είναι πεδίο του  $\mathbb{R}^d$  με ομαλό σύνορο  $\partial\Omega$  και όπου  $u = u(x, t)$ .

Θυμίζουμε κάποιες υποθέσεις και κάποια αποτελέσματα από το αντίστοιχο κεφάλαιο για τα ελλειπτικά προβλήματα που θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω. Για το ελλειπτικό πρόβλημα

$$-\Delta u = f \text{ στο } \Omega, \text{ με } u = 0 \text{ στο } \partial\Omega \quad (5.1.2)$$

θεωρούμε ότι το  $\Omega$  είναι κυρτό με ομαλό σύνορο και  $\mathcal{T}_h$  την τριγωνοποίησή του όπως πριν, που στην περίπτωση που είναι σχεδόν-ομοιόμορφα φραγμένη έχουμε ότι η επιφάνεια κάθε τριγώνου της τριγωνοποίησης είναι κάτω φραγμένη από το  $ch^2$  για  $c$  θετική σταθερά ανεξάρτητη του  $h$ .

Παίρνουμε ως  $S_h$  τον χώρο των συνεχών συναρτήσεων στο  $\bar{\Omega}$  που είναι γραμμικές σε κάθε τρίγωνο της  $\mathcal{T}_h$  και που μηδενίζονται έξω από το πολυγωνικό χωρίο  $\Omega_h$  που δημιουργείται από την ένωση

των τριγώνων της  $\mathcal{T}_h$ . Ονομάζουμε  $\{P_j\}_{j=1}^{N_h}$  τις εσωτερικές κορυφές της  $\mathcal{T}_h$  και  $\{\Phi_j\}_{j=1}^{N_h}$  τις συνρτήσεις πυραμίδας που αποτελούν βάση του  $S_h$ . Τότε, ο τελεστής παρεμβολής μίας ομαλής  $v \in \Omega$  που μηδενίζεται στο  $\partial\Omega$  έχουμε πει ότι είναι ο

$$\mathcal{I}_h v(x) = \sum_{j=1}^{N_h} v(P_j) \Phi_j(x). \quad (5.1.3)$$

Συμβολίζουμε  $\|v\| = \|v\|_{L^2}$  και  $\|v\|_r = \|v\|_{H^r}$  και θυμόμαστε ότι για συναρτήσεις στον  $H_0^1$  έχουμε την εξής ισοδυναμία νορμών

$$c\|v\|_1 \leq \|\nabla v\| \leq \|v\|_1, \quad \forall v \in H_0^1 \text{ με } c > 0 \quad (5.1.4)$$

Θυμίζουμε ακόμα ότι έχουμε την ακόλουθη εκτίμηση σφάλματος για την παρεμβολή για  $v \in H^2 \cap H_0^1$

$$\|\mathcal{I}_h v - v\| \leq Ch^2 \|v\|_2 \text{ και } \|\nabla(\mathcal{I}_h v - v)\| \leq Ch \|v\|_2. \quad (5.1.5)$$

Έχουμε, ακόμα, για τη γενική περίπτωση ενός  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  με οικογένεια  $\{S_h\}_{j=1}^{N_h}$  υποχώρων του  $H_0^1$  πεπερασμένης διάστασης ότι για κάποιο  $r \geq 2$  και μικρό  $h$

$$\inf_{\chi \in S_h} \{\|v - \chi\| + h\|\nabla(v - \chi)\|\} \leq Ch^s \|v\|_s, \text{ για } 1 \leq s \leq r \text{ και } v \in H^s \cap H_0^1. \quad (5.1.6)$$

Ομοίως, για τον τελεστή παρεμβολής  $\mathcal{I}_h : H^r \cap H_0^1 \rightarrow S_h$  μπορούμε να βρούμε αντίστοιχη εκτίμηση

$$\|\mathcal{I}v - v\| + h\|\nabla(\mathcal{I}_h v - v)\| \leq Ch^s \|v\|_s, \text{ για } 1 \leq s \leq r. \quad (5.1.7)$$

Σημειώνουμε ακόμα ότι αν η  $\{S_h\}$  βασίζεται σε σχεδόν-ομοιόμορφες τριγωνοποιήσεις και αποτελείται από κατά τμήματα πολυώνυμα βαθμού το πολύ  $r - 1$ , τότε έχουμε την αντίστροφη ανισότητα

$$\|\nabla \chi\| \leq Ch^{-1} \|\chi\|, \quad \forall \chi \in S_h \quad (5.1.8)$$

Όπως έχουμε δει, στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων ψάχνουμε συνάρτηση  $u_h \in S_h$  τέτοια ώστε

$$(\nabla u_h, \nabla \chi) = (f, \chi), \quad \forall \chi \in S_h. \quad (5.1.9)$$

για τη λύση της οποίας και τη λύση του προβλήματός μας θυμίζουμε ότι ισχύει η σχέση ορθογωνιότητας

$$(\nabla(u_h - u), \nabla \chi) = 0, \quad \forall \chi \in S_h \quad (5.1.10)$$

Με βάση αυτά αποδεικνύεται το ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα 5.1.1** Υποθέτουμε ότι ισχύει η (5.1.6) και έστω  $u_h$  και  $u$  οι λύσεις των (5.1.2) και (5.1.9) αντίστοιχα. Τότε για  $1 \leq s \leq r$

$$\|u_h - u\| \leq Ch^s \|u\|_s \quad \text{και} \quad \|\nabla u_h - \nabla u\| \leq Ch^{s-1} \|u\|_s. \quad (5.1.11)$$

Επιστρέφουμε τώρα στο πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών (5.1.1) για την εξίσωση θερμότητας. Όπως φαίνεται παραπάνω, είναι βολικότερο να ορίσουμε και να αναλύσουμε την προσεγγιστική λύση σε δύο βήματα. Στο πρώτο βήμα θα προσεγγίσουμε τη  $u(x, t)$  μέσω μίας συνάρτησης  $u_h(x, t)$  που για κάθε σταθερό  $t$  ανήκει σε έναν πεπερασμένης διάστασης γραμμικό χώρο  $S_h$  από συναρτήσεις του  $x$  όπως περιγράφηκε παραπάνω. Αυτή η συνάρτηση θα είναι λύση ενός  $h$ -εξαρτώμενου πεπερασμένου συστήματος συνήθων διαφορικών εξισώσεων στο χρόνο και αναφέρεται ως *χωρικά διακριτή* ή *ημιδιακριτή* λύση. Όπως στην ελλειπτική περίπτωση που υπενθυμίσαμε, το χωρικά διακριτό πρόβλημα βασίζεται σε μία μεταβολική μορφή του (5.1.1). Προχωράμε στη συνέχεια στη διακριτοποίηση αυτού του συστήματος ως προς τη μεταβλητή του χρόνου, για να παράγουμε ένα *πλήρως διακριτό χρονοθηματικό* σχέδιο για την προσεγγιστική λύση του (5.1.1). Για να κάνουμε τη διακριτοποίηση στο χρόνο, θα χρησιμοποιήσουμε προσέγγιση πεπερασμένης διαφοράς για την χρονική παράγωγο.

Για το αρχικό στάδιο του να ορίσουμε μία χωρικά ημιδιακριτή προσεγγιστική λύση στο πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών, γράφουμε το πρόβλημα σε ασθενή μορφή πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση θερμότητας με μία ομαλή συνάρτηση  $\phi$  που εξαφανίζεται στο  $\partial\Omega$  (ή  $\phi \in H_0^1$ ), ολοκληρώνουμε στο  $\Omega$ , εφαρμόζουμε τον τύπο του Green και προκύπτει:

$$(u_t, \phi) + (\nabla u, \nabla \phi) = (f, \phi) \quad \forall \phi \in H_0^1, \quad t > 0.$$

Μπορούμε στη συνέχεια να θέσουμε το προσεγγιστικό πρόβλημα να βρούμε  $u_h(t) := u_h(\cdot, t)$  που ανήκει στον  $S_h$  για κάθε  $t$ , τέτοια ώστε:

$$(u_{h,t}, \chi) + (\nabla u_h, \nabla \chi) = (f, \chi) \quad \forall \chi \in S_h, \quad t > 0, \quad u_h(0) = v_h \quad (5.1.12)$$

όπου  $v_h$  είναι κάποια προσέγγιση της  $v$  στον  $S_h$ .

Ως προς τη βάση  $\{\Phi_j\}_1^{N_h}$  του  $S_h$  το ημιδιακριτό μας πρόβλημα γίνεται:

Να βρεθούν συντελεστές  $\alpha_j(t)$  στην  $u_h(x, t) = \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j(t) \Phi_j(x)$  τέτοιοι ώστε

$$\sum_{j=1}^{N_h} \alpha'_j(t) (\Phi_j, \Phi_k) + \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j(t) (\nabla \Phi_j, \nabla \Phi_k) = (f, \Phi_k), \quad k = 1, \dots, N_h$$

και με  $\gamma_j$  τα συστατικά της δοθείσας αρχικής προσέγγισης  $v_h$ ,  $\alpha_j(0) = \gamma_j$  για  $1, \dots, N_h$ . Με συμβολισμό πινάκων αυτό μπορεί να εκφραστεί ως

$$A\alpha'(t) + B\alpha(t) = \tilde{f}(t) \text{ για } t > 0, \text{ με } \alpha(0) = \gamma$$

όπου  $A = (a_{jk})$  είναι ο πίνακας μάζας με στοιχεία  $a_{jk} = (\Phi_j, \Phi_k)$ ,  $B = (b_{jk})$  ο πίνακας ακαμψίας με  $b_{jk} = (\nabla\phi_j, \nabla\Phi_k)$ ,  $\tilde{f} = (f_k)$  το διάνυσμα με στοιχεία  $f_k = (f, \Phi_k)$ ,  $\alpha(t)$  το διάνυσμα των αγνώστων  $\alpha_j(t)$  και  $\gamma = (\gamma_k)$ . Η διάσταση όλων αυτών είναι  $N_h$ , η διάσταση του  $S_h$ .

Επειδή όπως και στον πίνακα ακαμψίας  $B$  ο πίνακας μάζας  $A$  είναι πίνακας Gram και άρα και θετικά ορισμένος και αντιστρέψιμος, το παραπάνω σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων μπορεί να γραφεί

$$\alpha'(t) + A^{-1}B\alpha(t) = A^{-1}\tilde{f}(t) \text{ για } t > 0, \text{ με } \alpha(0) = \gamma$$

και άρα έχει μοναδική λύση για  $t$  θετικό.

Πρώτος μας στόχος είναι να αποδείξουμε την παρακάτω εκτίμηση στον  $L^2$  για το σφάλμα μεταξύ των λύσεων του ημιδιακριτού και του συνεχούς προβλήματος.

**Θεώρημα 5.1.2** Έστω  $u_h$  και  $u$  οι λύσεις των (5.1.12) και (5.1.1). Τότε

$$\|u_h(t) - u(t)\| \leq \|v_h - v\| + Ch^r (\|v\|_r + \int_0^t \|u_s\|_r ds), \text{ για } t \geq 0.$$

**Παρατήρηση 5.1.1** Όπως και προηγουμένως, απαιτούμε η λύση του συνεχούς προβλήματος να έχει την ομαλότητα που υπονοείται από τις νόρμες στο δεξι μέλος και η  $v$  να εξαφανίζεται στο  $\partial\Omega$ . Παρατηρούμε επίσης ότι αν ισχύει η (5.1.7) και  $v_h = I_h v$ , τότε ο πρώτος όρος στο δεξι μέλος κυριαρχείται από τον δεύτερο. Το ίδιο ισχύει και αν  $v_h = P_h v$ , όπου  $P_h$  είναι η ορθογώνια προβολή της  $v$  στον  $S_h$  ως προς το εσωτερικό γινόμενο του  $L^2$ , αφού αυτή είναι η βέλτιστη προσέγγιση της  $v$  στον  $S_h$  ως προς την  $L^2$ -νόρμα. Μια άλλη βέλτιστη προσέγγιση επιτυγχάνεται αν ορίσουμε την ελλειπτική ή Ritz προβολή  $R_h$  στον  $S_h$  ως την ορθογώνια προβολή ως προς το εσωτερικό γινόμενο  $(\nabla v, \nabla w)$  τέτοια ώστε

$$(\nabla R_h v, \nabla \chi) = (\nabla v, \nabla \chi) \quad \forall \chi \in S_h, \text{ για } v \in H_0^1. \quad (5.1.13)$$

Μπορούμε να πούμε ότι η  $R_h v$  είναι η προσέγγιση πεπερασμένων στοιχείων της λύσης του αντίστοιχου ελλειπτικού προβλήματος με ακριβή λύση  $v$ .

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 5.1.2 αμέσως παρακάτω, θα χρησιμοποιήσουμε το εξής Λήμμα.



**Λήμμα 5.1.1** Έστω ότι ισχύει η (5.1.6). Τότε για  $R_h$  όπως παραπάνω έχουμε

$$\|R_h v - v\| + h\|\nabla(R_h v - v)\| \leq Ch^s \|v\|_s, \text{ για } v \in H^s \cap H_0^1, 1 \leq s \leq r.$$

**Απόδειξη.** (Θεωρήματος). Όπως θα κάνουμε συχνά στο εξής, γράφουμε

$$u_h - u = \theta + \rho, \text{ όπου } \theta = u_h - R_h u, \rho = R_h u - u. \quad (5.1.14)$$

Ο δεύτερος όρος φράσσεται εύκολα από το Λήμμα 5.1.1 και προφανείς εκτιμήσεις:

$$\|\rho(t)\| \leq Ch^r \|u(t)\|_r \leq Ch^r (\|v\|_r + \int_0^t \|u_t\|_r ds). \quad (5.1.15)$$

Για να εκτιμήσουμε το  $\theta$ , παρατηρούμε από τους ορισμούς μας ότι

$$\begin{aligned} (\theta_t, \chi) &+ (\nabla\theta, \nabla\chi) \\ &= (u_{h,t}, \chi) + (\nabla u_h, \nabla\chi) - (R_h u_t, \chi) - (\nabla R_h u, \nabla\chi) \\ &= (f, \chi) - (R_h u_t, \chi) - (\nabla u, \nabla\chi) \\ &= (u_t - R_h u_t, \chi) \end{aligned} \quad (5.1.16)$$

ή

$$(\theta_t, \chi) + (\nabla\theta, \nabla\chi) = -(\rho_t, \chi) \quad \forall \chi \in S_h, t > 0. \quad (5.1.17)$$

Δεδομένου ότι το  $\theta$  ανήκει στον  $S_h$ , μπορούμε να διαλέξουμε  $\chi = \theta$  στην (5.1.17) και να καταλήξουμε ότι

$$(\theta_t, \theta) + \|\nabla\theta\|^2 = (-\rho_t, \theta). \quad (5.1.18)$$

Ο πρώτος όρος είναι ίσος με  $\frac{1}{2}(d/dt)\|\theta\|^2$  και ο δεύτερος είναι μη αρνητικός. Επειδή το  $\|\theta\|$  μπορεί να μην παραγωγίζεται όταν  $\theta = 0$ , προσθέτουμε  $\varepsilon^2$  για να πάρουμε

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta\|^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\theta\|^2 + \varepsilon^2) \leq \|\rho_t\| \|\theta\| \text{ με } \varepsilon > 0$$

Αυτό δείχνει ότι

$$(\|\theta\|^2 + \varepsilon^2)^{1/2} \frac{d}{dt} (\|\theta\|^2 + \varepsilon^2)^{1/2} \leq \|\rho_t\| \|\theta\|$$

και επειδή  $\|\theta\| \leq (\|\theta\|^2 + \varepsilon^2)^{1/2}$ , ολοκληρώνοντας και παίρνοντας  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

$$\|\theta(t)\| \leq \|\theta(0)\| + \int_0^t \|\rho_t\| ds. \quad (5.1.19)$$

Εδώ

$$\|\theta(0)\| = \|v_h - R_h v\| \leq \|v_h - v\| + \|R_h v - v\| \leq \|v_h - v\| + Ch^r \|v\|_r$$

και

$$\|\rho_t\| = \|R_h u_t - u_t\| \leq Ch^r \|u_t\|_r$$

οπότε προκύπτει το επιθυμητό φράγμα για το  $\|\theta(t)\|$ . ■

**Παρατήρηση 5.1.2** Στην παραπάνω απόδειξη χρησιμοποιήσαμε στην (5.1.18) το γεγονός ότι το  $\|\nabla\theta\|^2$  είναι μη αρνητικό. Χρησιμοποιώντας διαφορετικά αυτόν τον όρο, μπορούμε να δείξουμε ότι η επίδραση της αρχικής συνθήκης στο σφάλμα τείνει στο μηδέν εκθετικά καθώς το  $t$  μεγαλώνει. Πράγματι, για  $\lambda_1$  τη μικρότερη ιδιοτιμή του  $-\Delta$  με Dirichlet συνοριακές συνθήκες έχουμε

$$\|\nabla v\|^2 \geq \lambda_1 \|v\|^2, \forall v \in H_0^1 \quad (5.1.20)$$

και άρα η (5.1.18) δίνει

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta\|^2 + \lambda_1 \|\theta\|^2 \leq \|\rho_t\| \|\theta\|$$

ή  $(d/dt)\|\theta\| + \lambda_1 \|\theta\| \leq \|\rho_t\|$  και άρα, χρησιμοποιώντας  $\varepsilon > 0$  όπως παραπάνω,

$$\begin{aligned} \|\theta(t)\| &\leq e^{-\lambda_1 t} \|\theta(0)\| + \int_0^t e^{-\lambda_1(t-s)} \|\rho_t(s)\| ds \\ &\leq e^{-\lambda_1 t} \|v_h - v\| + Ch^r (e^{-\lambda_1 t} \|v\|_r + \int_0^t e^{-\lambda_1(t-s)} \|u_t(s)\|_r ds). \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το πρώτο μέρος της (5.1.15) καταλήγουμε ότι με κατάλληλα επιλεγμένη  $v_h$

$$\|u_h(t) - u(t)\| \leq Ch^r (e^{-\lambda_1 t} \|v\|_r + \|u(t)\|_r + \int_0^t e^{-\lambda_1(t-s)} \|u_t(s)\|_r ds).$$

Κοιτάζουμε τώρα μία άλλη προσέγγιση τις απόδειξης του Θεωρήματος 5.1.2, στην οποία δουλεύουμε την εξίσωση για  $\theta$ , σε μορφή τελεστών. Ανακαλούμε αρχικά ότι από την Αρχή του Duhamel η λύση του (5.1.1) μπορεί να γραφεί

$$u(t) = E(t)v + \int_0^t E(t-s)f(s) ds. \quad (5.1.21)$$

Εδώ ο  $E(t)$  είναι ο επιλύων τελεστής της ομογενούς εξίσωσης ( $f \equiv 0$  στο (5.1.1)), δηλαδή ο τελεστής που παίρνει τις αρχικές τιμές  $u(0) = v$  στη λύση  $u(t)$  σε χρόνο  $t$ . Αυτός ο τελεστής μπορεί επίσης να

γίνει αντιληπτός ως η ημιομάδα  $e^{\Delta t}$  στον  $L^2$  που δημιουργείται από τον Λαπλασιανό τελεστή ορισμένο στο  $\mathcal{D}(\Delta) = H^2 \cap H_0^1$ . Εισάγουμε τώρα έναν *διακριτό Λαπλασιανό τελεστή*  $\Delta_h : S_h \rightarrow S_h$  μέσω της

$$(\Delta_h \psi, \chi) = -(\nabla \psi, \nabla \chi) \quad \forall \psi, \chi \in S_h \quad (5.1.22)$$

Το ανάλογο του τύπου του Green ορίζει το  $\Delta_h \psi = \sum_{j=1}^{N_h} d_j \Phi_j$  μέσω της

$$\sum_{j=1}^{N_h} d_j (\Phi_j, \Phi_k) = -(\nabla \psi, \nabla \Phi_k) \quad \text{για } k = 1, \dots, N_h$$

αφού ο πίνακας του συστήματος είναι ο θετικά ορισμένος πίνακας μάζας που συναντήσαμε παραπάνω. Ο τελεστής  $-\Delta_h$  εύκολα φαίνεται ότι είναι αυτοσυζυγής και θετικά ορισμένος στον  $S_h$  ως προς το  $(\cdot, \cdot)$ . Παρατηρούμε ότι ο  $\Delta_h$  συνδέεται με τους άλλους τελεστές που είδαμε μέσω της

$$\Delta_h R_h = P_h \Delta \quad (5.1.23)$$

αφού

$$(\Delta_h R_h v, \chi) = -(\nabla R_h v, \nabla \chi) = -(\nabla v, \nabla \chi) = (\Delta v, \chi) = (P_h \Delta v, \chi) \quad \forall \chi \in S_h.$$

Με αυτούς τους συμβολισμούς η ημιδιακριτή εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$(u_{h,t}, \chi) - (\Delta_h u_h, \chi) = (P_h f, \chi) \quad \forall \chi \in S_h, \quad t > 0$$

ή, επειδή όλοι οι παράγοντες στα αριστερά είναι στον  $S_h$ ,  $u_{h,t} - \Delta_h u_h = P_h f$ . Χρησιμοποιώντας την (5.1.23) προκύπτει για το  $\theta$  ότι

$$\begin{aligned} \theta_t - \Delta_h \theta &= (u_{h,t} - \Delta_h u_h) - (R_h u_t - \Delta_h R_h u) \\ &= P_h f + (P_h - R_h) u_t - P_h (u_t - \Delta u) \\ &= P_h (I - R_h) u_t \\ &= -P_h \rho_t \end{aligned}$$

ή

$$\theta_t - \Delta_h \theta = -P_h \rho_t, \quad \text{για } t > 0. \quad (5.1.24)$$

Συμβολίζουμε με  $E_h(t)$  το διακριτό ανάλογο του τελεστή  $E(t)$ , δηλαδή τον επιλύοντα τελεστή του ομογενούς ημιδιακριτού προβλήματος

$$u_{h,t} - \Delta_h u_h = 0, \quad \text{για } t > 0, \quad \text{με } u_h(0) = v_h.$$

Ένα ανάλογο της (5.1.21) μας λέει ότι η (5.1.23) συνεπάγεται ότι

$$\theta(t) = E_h(t)\theta(0) - \int_0^t E_h(t-s)P_h\rho_t(s) ds. \quad (5.1.25)$$

Παρατηρούμε τώρα ότι ο  $E_h(t)$  είναι ευσταθής στον  $L^2$  ή ακριβέστερα

$$\|E_h(t)v_h\| \leq e^{-\lambda_1 t}\|v_h\| \leq \|v_h\| \text{ για } v_h \in S_h, t \geq 0. \quad (5.1.26)$$

Διαλέγοντας  $\chi = u_h$  στην ομογενή μορφή της (5.1.12) και χρησιμοποιώντας την (5.1.20) έχουμε

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_h\|^2 + \lambda_1 \|u_h\|^2 \leq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_h\|^2 + \|\nabla u_h\|^2 = 0, \text{ για } t > 0$$

που εύκολα δείχνει την (5.1.26). Επειδή ο  $P_h$  έχει μοναδιαία νόρμα στον  $L^2$ , η (5.1.25) συνεπάγεται την (5.1.19) από την οποία προκύπτει το Θεώρημα όπως παραπάνω. Η ζητούμενη εκτίμηση για το  $\theta$  είναι έτσι συνέπεια της εκτίμησης ευστάθειας για τον  $E_h(t)$  και της εκτίμησης σφάλματος για το ελλειπτικό πρόβλημα εφαρμοσμένης στο  $\rho_t = (R_h - I)u_t$ .

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύουμε και το παρακάτω θεώρημα για την εκτίμηση σφάλματος της απόκλισης.

**Θεώρημα 5.1.3** *Κάτω από τις υποθέσεις του Θεωρήματος 5.1.2 έχουμε*

$$\|\nabla u_h(t) - \nabla u(t)\| \leq C\|\nabla v_h - \nabla v\| + Ch^{r-1} \left( \|v\|_r + \|u(t)\|_r + \left( \int_0^t \|u_t\|_{r-1}^2 ds \right)^{1/2} \right), \text{ για } t \geq 0.$$

**Απόδειξη.** Όπως πριν, γράφουμε το σφάλμα στη μορφή

$$u_h - u = \theta + \rho, \text{ όπου } \theta = u_h - R_h u, \rho = R_h u - u.$$

Τότε, από το Λήμμα 5.1.1 έχουμε ότι

$$\|\nabla \rho(t)\| = \|\nabla(R_h u(t) - u(t))\| \leq Ch^{r-1} \|u(t)\|_r.$$

Για να εκτιμήσουμε τη  $\nabla \theta$ , χρησιμοποιούμε πάλι την (5.1.17) με  $\chi = \theta_t$  αυτή τη φορά. Παίρνουμε

$$\|\theta_t\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla \theta\|^2 = -(\rho_t, \theta_t) \leq \frac{1}{2} \|\rho_t\|^2 + \frac{1}{2} \|\theta_t\|^2$$

και άρα  $(d/dt)\|\nabla \theta\|^2 \leq \|\rho_t\|^2$  ή

$$\begin{aligned} \|\nabla \theta(t)\|^2 &\leq \|\nabla \theta(0)\|^2 + \int_0^t \|\rho_t\|^2 ds \\ &\leq (\|\nabla(v_h - v)\| + \|\nabla(R_h v - v)\|)^2 + \int_0^t \|\rho_t\|^2 ds. \end{aligned} \quad (5.1.27)$$

Έτσι, από το Λήμμα 5.1.1

$$\|\nabla\theta(t)\|^2 \leq 2\|\nabla(v_h - v)\|^2 + Ch^{2r-2}(\|v\|_r^2 + \int_0^t \|u_t\|_{r-1}^2 ds) \quad (5.1.28)$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη. ■

**Παρατήρηση 5.1.3** Στην περίπτωση μίας σχεδόν-ομοιόμορφης οικογένειας τριγωνοποιήσεων  $\mathcal{T}_h$  ενός επίπεδου χωρίου ή γενικότερα όταν ισχύει η αντίστροφη εκτίμηση (5.1.8), μία εκτίμηση για το σφάλμα στην απόκλιση μπορεί να εξαχθεί απευθείας από το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 5.1.2. Πράγματι, έχουμε σε εκείνη την περίπτωση για αυθαίρετο  $\chi$  στον  $S_h$

$$\begin{aligned} \|\nabla u_h(t) - \nabla u(t)\| &\leq \|\nabla(u_h(t) - \chi)\| + \|\nabla\chi - \nabla u(t)\| \\ &\leq Ch^{-1}\|u_h(t) - \chi\| + \|\nabla\chi - \nabla u(t)\| \\ &\leq Ch^{-1}\|u_h(t) - u(t)\| + Ch^{-1}(\|\chi - u(t)\| + h\|\nabla\chi - \nabla u(t)\|). \end{aligned} \quad (5.1.29)$$

Εδώ από την (5.1.6) έχουμε για κατάλληλο  $\chi \in S_h$

$$\|\chi - u(t)\| + h\|\nabla\chi - \nabla u(t)\| \leq Ch^r \|u(t)\|_r$$

και άρα από το Θεώρημα 5.1.2 για κατάλληλη επιλογή  $v_h$

$$\|\nabla u_h(t) - \nabla u(t)\| \leq Ch^{r-1}(\|v\|_r + \int_0^t \|u_t(s)\|_r ds).$$

Κάνουμε και την ακόλουθη παρατήρηση σχετικά με τον όρο  $\theta = u_h - R_h u$  στην (5.1.14): Υποθέτουμε ότι έχουμε διαλέξει  $v_h = R_h$  ώστε  $\theta(0) = 0$ . Τότε, εκτός από την (5.1.28) έχουμε από την (5.1.27)

$$\|\nabla\theta(t)\| \leq C \left( \int_0^t \|\rho_t\|^2 ds \right)^{1/2} \leq Ch^r \left( \int_0^t \|u_t\|_r^2 ds \right)^{1/2}. \quad (5.1.30)$$

Έτσι, η απόκλιση του  $\theta$  είναι τάξης  $O(h^r)$ , ενώ η κλίση του ολικού σφάλματος μπορεί να είναι μόνο  $O(h^{r-1})$  για μικρό  $h$ . Έτσι, η  $\nabla u_h$  είναι καλύτερη προσέγγιση του  $\nabla R_h u$  απ' ό,τι μπορεί να είναι για το  $\nabla u$ . Αυτό είναι ένα παράδειγμα του φαινομένου που ονομάζεται υπερσύγκλιση.

Επιστρέφουμε τώρα την προσοχή μας σε κάποιους απλούς τρόπους διακριτοποίησης ως προς τη

μεταβλητή του χρόνου. Ξεκινάμε με την προς τα πίσω Euler-Galerkin μέθοδο. Έχοντας ως  $k$  το βήμα για το χρόνο και  $U^n$  την προσέγγιση της  $u(t)$  στον  $S_h$  για  $t = t_n = nk$ , η μέθοδος αυτή ορίζεται αντικαθιστώντας την παράγωγο ως προς το χρόνο στην (5.1.12) με ένα πηλικό προς τα πίσω διαφοράς, οπότε για  $\bar{\partial}U^n = (U^n - U^{n-1})/k$  γίνεται

$$(\bar{\partial}U^n, \chi) + (\nabla U^n, \nabla \chi) = (f(t_n), \chi) \quad \forall \chi \in S_h, \quad n \geq 1, \quad U^0 = v_h. \quad (5.1.31)$$

Για δοσμένο  $U^{n-1}$  αυτό ορίζει τη  $U^n$  πεπλεγμένα μέσω της εξίσωσης

$$(U^n, \chi) + k(\nabla U^n, \nabla \chi) = (U^{n-1} + kf(t_n), \chi) \quad \forall \chi \in S_h$$

που είναι ο φορμαλισμός πεπερασμένων στοιχείων για μια ελλειπτική εξίσωση της μορφής  $(I - k\Delta)u = g$ . Με συμβολισμό όπως στην ημιδιακριτή περίπτωση, αυτό μπορεί να γραφεί

$$(A + kB)\alpha^n = A\alpha^{n-1} + k\tilde{f}(t_n)$$

όπου ο  $A + kB$  είναι θετικά ορισμένος και άρα εδώ και αντιστρέψιμος.

**Θεώρημα 5.1.4** Για  $U^n$  και  $u$  τις λύσεις των (5.1.31) και (5.1.1) αντίστοιχα έχουμε ότι αν  $\|v_h - v\| \leq Ch^r \|v\|_r$ ,

$$\|U^n - u(t_n)\| \leq Ch^r (\|v\|_r + \int_0^{t_n} \|u_t\|_r ds) + k \int_0^{t_n} \|u_{tt}\| ds \quad \text{για } n \geq 0.$$

**Απόδειξη.** Κατα αναλογία με την (5.1.14) γράφουμε

$$U^n - u(t_n) = (U^n - R_h u(t_n)) + (R_h u(t_n) - u(t_n)) = \theta^n + \rho^n$$

και το  $\rho^n = \rho(t_n)$  είναι φραγμένο όπως στην (5.1.15). Αυτή τη φορά ένας υπολογισμός που αντιστοιχεί στην (5.1.16) δίνει

$$(\bar{\partial}\theta^n, \chi) + (\nabla\theta^n, \nabla\chi) = -(\omega^n, \chi) \quad \forall \chi \in S_h, \quad n \geq 1 \quad (5.1.32)$$

όπου

$$\omega^n = R_h \bar{\partial}u(t_n) - u_t(t_n) = (R_h - I)\bar{\partial}u(t_n) + (\bar{\partial}u(t_n) - u_t(t_n)) = \omega_1^n + \omega_2^n.$$

Διαλέγοντας  $\chi = \theta^n$ , έχουμε  $(\bar{\partial}\theta^n, \theta^n) \leq \|\omega^n\| \|\theta^n\|$  ή

$$\|\theta^n\|^2 - (\theta^{n-1}, \theta^n) \leq k \|\omega^n\| \|\theta^n\|$$

ώστε

$$\|\theta^n\| \leq \|\theta^{n-1}\| + k \|\omega^n\| \quad (5.1.33)$$

και με διαδοχικές εφαρμογές

$$\|\theta^n\| \leq \|\theta^0\| + k \sum_{j=1}^n \|\omega^j\| \leq \|\theta^0\| + k \sum_{j=1}^n \|\omega_1^j\| + k \sum_{j=1}^n \|\omega_2^j\|. \quad (5.1.34)$$

Εδώ, όπως πριν, το  $\theta^0 = \theta(0)$  είναι φραγμένο όπως επιθυμούμε. Γράφουμε

$$\omega_1^j = (R_h - I)k^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} u_t ds = k^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (R_h - I)u_t ds$$

και παίρνουμε

$$k \sum_{j=1}^n \|\omega_1^j\| \leq \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} Ch^r \|u_t\|_r ds = Ch^r \int_0^{t_n} \|u_t\|_r ds.$$

Επιπλέον,

$$k\omega_2^j = u(t_j) - u(t_{j-1}) - ku_t(t_j) = - \int_{t_{j-1}}^{t_j} (s - t_{j-1})u_{tt}(s) ds \quad (5.1.35)$$

έτσι ώστε

$$k \sum_{j=1}^n \|\omega_2^j\| \leq \sum_{j=1}^n \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} (s - t_{j-1})u_{tt}(s) ds \right\| \leq k \int_0^{t_n} \|u_{tt}\| ds.$$

Μαζί οι εκτιμήσεις μας ολοκληρώνουν την απόδειξη. ■

**Παρατήρηση 5.1.4** Για να βρούμε κάποια εκτίμηση για το  $\nabla\theta$ , μπορούμε να διαλέξουμε  $\chi = \bar{\delta}\theta^n$  στην (5.1.32) για να πάρουμε  $\bar{\delta}\|\nabla\theta^n\|^2 \leq \|\omega^n\|^2$  ή, αν  $\nabla\theta(0) = 0$ ,

$$\|\nabla\theta^n\|^2 \leq k \sum_{j=1}^n \|\omega^j\|^2 \leq Ch^{2s} \int_0^{t_n} \|u_t\|_s^2 dt + Ck^2 \int_0^{t_n} \|u_{tt}\|^2 dt \quad (5.1.36)$$

για  $1 \leq s \leq r$ . Μαζί με την σπάνια εκτίμηση για το  $\nabla\rho$ , αυτό δείχνει για  $s = r-1$  ότι  $\|\nabla(U^n - u(t_n))\| \leq C(u)(h^{r-1} + k)$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 5.1.4 μαζί με την αντίστροφη ανισότητα (5.1.8) παίρνει κανείς την ασθενέστερη εκτίμηση  $\|\nabla(U^n - u(t_n))\| \leq C(u)(h^{r-1} + kh^{-1})$ . Παρατηρούμε ακόμα ότι για  $s = r$  στην (5.1.36) μπορεί κανείς να εξάγει την εκτίμηση μέγιστης νόρμας  $\|U^n - u(t_n)\|_{L^\infty} \leq C(u)\ell_h(h^r + k)$ , όπου  $\ell_h = \log \frac{1}{h}$ .

Παρατηρούμε, τέλος, ότι λόγω της μη-συμμετρικής επιλογής της διακριτοποίησης στο χρόνο, η προς τα πίσω Euler-Galerkin μέθοδος είναι μόνο πρώτης τάξης ως προς το  $k$ .

Θα αναφέρουμε τώρα δύο άλλες μεθόδους που πετυχαίνουν δεύτερης τάξης σύγκλιση καθώς και τα αντίστοιχα θεωρήματα για αυτές.

Κοιτάμε πρώτα τη μέθοδο *Crank-Nicolson Galerkin*. Εδώ η ημιδιακριτή εξίσωση διακριτοποιείται με ένα συμμετρικό τρόπο γύρω από το σημείο  $t_{n-\frac{1}{2}} = (n - \frac{1}{2}k)$ . Πιο συγκεκριμένα, ορίζουμε τη  $U^n$  στον  $S_h$  αναδρομικά για  $n \geq 1$  μέσω της

$$(\bar{\partial}U^n, \chi) + (\nabla \frac{U^n + U^{n-1}}{2}, \nabla \chi) = (f(t_{n-\frac{1}{2}}), \chi) \quad \forall \chi \in S_h \quad (5.1.37)$$

με  $U^0 = v_h$ . Εδώ η εξίσωση της  $U^n$  μπορεί να γραφεί σε μορφή πινάκων ως

$$(A + \frac{1}{2}kB)\alpha^n = (A - \frac{1}{2}kB)\alpha^{n-1} + k\tilde{f}(t_{n-\frac{1}{2}})$$

με θετικά ορισμένο πίνακα  $A + \frac{1}{2}kB$ .

**Θεώρημα 5.1.5** Έστω  $U^n$  και  $u$  οι λύσεις των (5.1.37) και (5.1.1) αντίστοιχα και έστω  $\|v_h - v\| \leq Ch^r \|v\|_r$ .

Τότε έχουμε για  $n \geq 0$

$$\|U^n - u(t_n)\| \leq Ch^r (\|v\|_r + \int_0^{t_n} \|u_t\|_r ds) + Ck^2 \int_0^{t_n} (\|u_{ttt}\| + \|\Delta u_{tt}\|) ds.$$

**Απόδειξη.** Επειδή η  $\rho^n$  είναι φραγμένη, όπως παραπάνω, χρειάζεται να εξετάσουμε μόνο τη  $\theta^n$ .

Έχουμε

$$(\bar{\partial}\theta^n, \chi) + (\nabla \frac{\theta^n + \theta^{n-1}}{2}, \nabla \chi) = -(\omega^n, \chi) \quad \text{για } \chi \in S_h, n \geq 1,$$

όπου τώρα

$$\begin{aligned} \omega^n &= (R_h - I)\bar{\partial}u(t_n) + (\bar{\partial}u(t_n) - u_t(t_{n-\frac{1}{2}})) \\ &\quad - \Delta(u(t_{n-\frac{1}{2}}) - \frac{1}{2}(u(t_n) + u(t_{n-1}))) \\ &= \omega_1^n + \omega_2^n + \omega_3^n. \end{aligned}$$

Διαλέγοντας αυτή τη φορά  $\chi = (\theta^n + \theta^{n-1})/2$  στην εξίσωση για τη  $\theta^n$ , βρίσκουμε

$$(\bar{\partial}\theta^n, \frac{1}{2}(\theta^n + \theta^{n-1})) \leq \frac{1}{2}\|\omega^n\|(\|\theta^n\| + \|\theta^{n-1}\|)$$

ή

$$\|\theta^n\|^2 - \|\theta^{n-1}\|^2 \leq k\|\omega^n\|(\|\theta^n\| + \|\theta^{n-1}\|)$$

ώστε μετά από απαλοιφή ομοίων όρων,

$$\|\theta^n\| \leq \|\theta^{n-1}\| + k\|\omega^n\|.$$



Υστερα από επαναλαμβανόμενες εφαρμογές παίρνουμε

$$\|\theta^n\| \leq \|\theta^0\| + k \sum_{j=1}^n (\|\omega_1^j\| + \|\omega_2^j\| + \|\omega_3^j\|).$$

Επειδή οι  $\theta^0$  και  $\omega_1^j$  εκτιμώνται όπως πριν, μένει να φράξουμε τους όρους των  $\omega_2^j$  και  $\omega_3^j$ . Εδώ

$$\begin{aligned} k\|\omega_2^j\| &= \|u(t_j) - u(t_{j-1}) - ku_t(t_{j-\frac{1}{2}})\| \\ &= \frac{1}{2} \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_{j-\frac{1}{2}}} (s - t_{j-1})^2 u_{ttt}(s) ds + \int_{t_{j-\frac{1}{2}}}^{t_j} (s - t_j)^2 u_{ttt}(s) ds \right\| \\ &= Ck^2 \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|u_{ttt}\| ds \end{aligned}$$

και όμοια

$$k\|\omega_3^j\| = k \left\| \Delta(u(t_{j-\frac{1}{2}}) - \frac{1}{2}(u(t_j) + u(t_{j-1}))) \right\| \leq Ck^2 \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\Delta u_{tt}\| ds.$$

Συνολικά,

$$k \sum_{j=1}^k (\|\omega_2^j\| + \|\omega_3^j\|) \leq Ck^2 \int_0^{t_n} (\|u_{ttt}\| + \|\Delta u_{tt}\|) ds$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη. ■

Ο δεύτερος τρόπος να πετύχουμε τάξη 2 στη διακριτοποίηση του χρόνου είναι να προσεγγίσουμε τη χρονική παράγωγο στη διαφορική εξίσωση με ένα δεύτερης τάξης προς τα πίσω πηλίκο διαφορών.

Θέτοντας

$$\bar{D}U^n = \bar{\partial}U^n + \frac{1}{2}k\bar{\partial}^2U^n = (\frac{3}{2}U^n - 2U^{n-1} + \frac{1}{2}U^{n-2})/k$$

έχουμε από το ανάπτυγμα Taylor για ομαλή συνάρτηση  $u$  ότι

$$\bar{D}u(t_n) = u_t(t_n) + O(k^2) \text{ καθώς } k \rightarrow 0.$$

Θέτουμε έτσι το διακριτό πρόβλημα

$$(\bar{D}U^n, \chi) + (\nabla U^n, \nabla \chi) = (f(t_n), \chi) \quad \forall \chi \in S_h, \quad n \geq 2. \quad (5.1.38)$$

Παρατηρούμε ότι για σταθερό  $n$  η εξίσωση αυτή έχει τρία επίπεδα αντί για δύο που είχαν οι προηγούμενες. Γι' αυτό πρέπει να περιορίσουμε τη χρήση της σε  $n \geq 2$ , γιατί δε θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε

τη  $U^n$  με  $n$  αρνητικό. Με δοσμένο  $U^0 = v_h$  πρέπει και πάλι να υπολογίσουμε το  $U^1$  με κάποια μέθοδο και το κάνουμε χρησιμοποιώντας ένα βήμα της προς τα πίσω Euler-Galerkin. Θέτουμε δηλαδή

$$(\bar{\partial}U^1, \chi) + (\nabla U^1, \nabla \chi) = (f(t_1), \chi) \quad \forall \chi \in S_h. \quad (5.1.39)$$

Παρατηρούμε ότι σε συμβολισμό με πίνακες, η (5.1.38) μπορεί να γραφεί ως

$$\left(\frac{3}{2}A + kB\right)\alpha^n = 2A\alpha^{n-1} - \frac{1}{2}A\alpha^{n-2} + k\tilde{f}(t_n) \quad \text{για } n \geq 2$$

με το συντελεστή του  $\alpha^n$  και πάλι θετικά ορισμένο. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε την ακόλουθη εκτίμηση σφάλματος, την οποία αναφέρουμε χωρίς απόδειξη.

**Θεώρημα 5.1.6** Έστω  $U^n$  και  $u$  οι λύσεις των (5.1.38) και (5.1.1) αντίστοιχα με  $U^0 = v_h$  και  $U^1$  όπως στην (5.1.39). Αν  $\|v_h - v\| \leq Ch^r \|v\|_r$ , έχουμε

$$\|U^n - u(t_n)\| \leq Ch^r (\|v\|_r + \int_0^{t_n} \|u_t\|_r ds) + Ck \int_0^{t_n} \|u_{tt}\| ds + Ck^2 \int_0^{t_n} \|u_{ttt}\| ds \quad \text{για } n \geq 0.$$

Αν, σε αντίθεση με τις παραπάνω περιπτώσεις, είχαμε μεταβλητό βήμα, είχαμε δηλαδή μία διαμέριση του χρόνου  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots$  με  $k_n = t_n - t_{n-1}$  και

$$(\bar{\partial}_n U^n, \chi) + (\nabla U^n, \nabla \chi) = (f(t_n), \chi) \quad \forall \chi \in S_h, \quad n \geq 1 \quad (5.1.40)$$

όπου  $U^0 = v_h$  και  $\bar{\partial}_n U^n = (U^n - U^{n-1})/k_n$ , τότε παρόμοια με το Θεώρημα 5.1.4 έχουμε το παρακάτω.

**Θεώρημα 5.1.7** Έστω  $U^n$  και  $u$  οι λύσεις των (5.1.40) και (5.1.1) με  $U^0 = v_h$  τέτοιο ώστε  $\|v_h - v\| \leq Ch^r \|v\|_r$ . Τότε για  $n \geq 0$  έχουμε

$$\|U^n - u(t_n)\| \leq Ch^r (\|v\|_r + \int_0^{t_n} \|u_t\|_r ds) + \sum_{j=1}^n k_j \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|u_{tt}\| ds.$$

**Παρατήρηση 5.1.5** Παρατηρούμε ότι από τη μορφή της εκτίμησης στο θεώρημα προκύπτει ότι χρειαζόμαστε μικρότερα βήματα για το χρόνο όταν το  $\|u_{tt}\|$  είναι μεγαλύτερο.

Τα αποτελέσματα αυτής της ενότητας θα επαληθευτούν και αυτά στο τελευταίο κεφάλαιο μέσω του FreeFem++.

## 5.2 Μέθοδοι που Βασίζονται σε Πιο Γενικές Προσεγγίσεις του Ελλειπτικού Προβλήματος

Στην προηγούμενη ενότητα για τις προσεγγίσεις του παραβολικού προβλήματος η διακριτοποίηση στο χώρο βασίστηκε σε μία οικογένεια πεπερασμένης-διάστασης χώρων  $S_h \subset H_0^1 = H_0^1(\Omega)$  τέτοιων ώστε για  $r \geq 2$  να ισχύει η ιδιότητα προσέγγισης (5.1.6). Το πιο φυσικό παράδειγμα τέτοιας οικογένειας σε επίπεδο χωρίο  $\Omega$  είναι να πάρουμε για  $S_h$  τις συνεχείς συναρτήσεις που είναι πολυώνυμα βαθμού το πολύ  $r - 1$  όταν περιορίζονται στα τρίγωνα  $\tau$  μιας τριγωνοποίησης  $\mathcal{T}_h$  του  $\Omega$  του τύπου που περιγράφηκε προηγουμένως και που μηδενίζονται στο  $\partial\Omega$ . Όμως, για  $r > 2$  και στην περίπτωση χωρίου με ομαλό σύνορο δεν είναι γενικά δυνατό να ικανοποιηθούν οι ομογενείς συνοριακές συνθήκες για αυτή την επιλογή. Η δυσκολία αυτή υπάρχει προφανώς ήδη από το ελλειπτικό πρόβλημα και αρκετές μέθοδοι έχουν προταθεί για να ξεπεραστεί. Εδώ θα δούμε τη μέθοδο που πρότεινε ο Nitsche και θα λειτουργήσει ως υπόβαθρο για την επακόλουθη συζήτηση για το παραβολικό πρόβλημα.

Θεωρούμε λοιπόν για  $\Omega$  ένα επίπεδο χωρίο με ομαλό σύνορο το πρόβλημα Dirichlet

$$-\Delta u = f \text{ στο } \Omega, \text{ με } u = 0 \text{ στο } \partial\Omega. \quad (5.2.1)$$

Έστω τώρα η  $\mathcal{T}_h = \{\tau_j\}_{j=1}^{M_h}$  να ανήκει σε μία οικογένεια σχεδόν-ομοιόμορφων τριγωνοποιήσεων του  $\Omega$  με  $\max_j \text{diam}(\tau_j) \leq h$ , όπου τα συνοριακά τρίγωνα επιτρέπεται να έχουν καμπυλωτή ακμή κατά μήκος του  $\partial\Omega$  και έστω  $S_h$  ο πεπερασμένης-διάστασης γραμμικός χώρος συνεχών συναρτήσεων στο  $\bar{\Omega}$  που είναι πολυώνυμα βαθμού  $\leq r - 1$  όταν περιορίζονται σε κάθε ένα από τα  $\tau_j$ , χωρίς συνοριακές συνθήκες στο  $\partial\Omega$ , δηλαδή

$$S_h = \{\chi \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}); \chi|_{\tau_j} \in \Pi_{r-1}\} \quad (5.2.2)$$

όπου  $\Pi_s$  είναι το σύνολο των πολυωνύμων με βαθμό το πολύ  $s$ .

Εκτός του εσωτερικού γινομένου στον  $L^2 = L^2(\Omega)$ , ορίζουμε

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int_{\partial\Omega} \phi \psi \, ds \text{ και } |\phi| = \langle \phi, \phi \rangle^{1/2} = \|\phi\|_{L^2(\partial\Omega)}$$

και εισάγουμε τη διγραμμική μορφή

$$N_\gamma(\phi, \psi) = (\nabla\phi, \nabla\psi) - \left\langle \frac{\partial\phi}{\partial n}, \psi \right\rangle - \left\langle \phi, \frac{\partial\psi}{\partial n} \right\rangle + \gamma h^{-1} \langle \phi, \psi \rangle \quad (5.2.3)$$

όπου το  $\gamma$  είναι μία θετική σταθερά που θα σταθεροποιηθεί αργότερα και το  $\partial/\partial n$  συμβολίζει την παραγωγή στην κατεύθυνση του εξωτερικού κάθετου διανύσματος στο  $\partial\Omega$ .

Έστω τώρα  $u$  μία λύση του Dirichlet προβλήματός μας (5.2.1). Τότε, χρησιμοποιώντας τον τύπο του Green και επειδή το  $u$  μηδενίζεται στο  $\partial\Omega$ , έχουμε

$$\begin{aligned} N_\gamma(u, \chi) &= (\nabla u, \nabla \chi) - \left\langle \frac{\partial u}{\partial n}, \chi \right\rangle - \left\langle u, \frac{\partial \chi}{\partial n} \right\rangle + \gamma h^{-1} \langle u, \chi \rangle \\ &= -(\Delta u, \chi) = (f, \chi) \quad \text{για } \chi \in S_h. \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

Δεδομένου αυτού, στη μέθοδο του Nitsche για το Dirichlet πρόβλημα ψάχνουμε  $u_h \in S_h$  που να ικανοποιεί τη μεταβολική εξίσωση

$$N_\gamma(u_h, \chi) = (f, \chi) \quad \forall \chi \in S_h. \quad (5.2.5)$$

Θα δείξουμε παρακάτω ότι αν το  $\gamma$  είναι κατάλληλα επιλεγμένο, τότε το πρόβλημα έχει μοναδική λύση για την οποία ισχύουν εκτιμήσεις σφάλματος βέλτιστης τάξης.

Για την ανάλυση μας εισάγουμε για  $\phi$  καταλλήλως ομαλή τη νόρμα

$$|||\phi||| = (\|\nabla \phi\|^2 + h \left| \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|^2 + h^{-1} |\phi|^2)^{1/2}.$$

Παρατηρούμε πρώτα την ακόλουθη αντίστροφη ιδιότητα.

**Λήμμα 5.2.1** Υπάρχει σταθερά  $C$  ανεξάρτητη του  $h$  τέτοια ώστε

$$|||\chi||| \leq Ch^{-1} \|\chi\| \quad \forall \chi \in S_h.$$

**Απόδειξη.** Λόγω της σχεδόν-ομοιομορφίας της οικογένειας τριγωνοποιήσεων  $\mathcal{T}_h$ , το  $\nabla \chi$  εκτιμάται μέσω της (5.1.8). Επιπλέον,

$$\left| \frac{\partial \chi}{\partial n} \right|^2 \leq C_0 h^{-1} \|\nabla \chi\|^2 \quad \forall \chi \in S_h. \quad (5.2.6)$$

Αυτό προκύπτει εύκολα χρησιμοποιώντας για κάθε συνοριακό τρίγωνο  $\tau_j$  ένα γραμμικό μετασχηματισμό, για να το απεικονίσουμε σε ενός μοναδιαίου μεγέθους τρίγωνο αναφοράς  $\tilde{\tau}_j$  με ακμές  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(0,1)$  με την καμπυλωτή ακμή ανάμεσα έστω από τις  $(0,1)$  και  $(1,0)$  και παρατηρώντας ότι  $\|\eta\|_{L^2(\partial\tilde{\tau}_j)} \leq C \|\eta\|_{L^2(\tilde{\tau}_j)}$  για  $\eta = \partial\chi/\partial x_i$ , δεδομένου ότι το δεξί μέλος είναι νόρμα στον  $\Pi_{r-2}$ . Χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο του γραμμικού μετασχηματισμού που χρησιμοποιήσαμε για να απεικονίσουμε το  $\tilde{\tau}_j$  πίσω στο  $\tau_j$ , παίρνουμε  $\|\partial\chi/\partial x_i\|_{L^2(\partial\tau_j)}^2 \leq Ch^{-1} \|\partial\chi/\partial x_i\|_{L^2(\tau_j)}^2$  και η (5.2.6)

προκύπτει προσθέτοντας στα συνοριακά τρίγωνα. Χρησιμοποιώντας επίσης την (5.1.8) το  $\partial\chi/\partial n$  φράσσεται όπως ζητάμε. Τέλος, με τον ίδιο τρόπο,  $|\chi|^2 \leq C_0 h^{-1} \|\chi\|^2$  για  $\chi \in S_h$ . Μαζί αυτές οι εκτιμήσεις δίνουν το Λήμμα. ■

Από τον ορισμό του  $N_\gamma$  και με απλές πράξεις προκύπτει και το ακόλουθο Λήμμα.

**Λήμμα 5.2.2** Για σταθερό  $\gamma$  και  $\phi, \psi$  καταλλήλως ομαλές έχουμε

$$|N_\gamma(\phi, \psi)| \leq C \|\phi\| \|\psi\|$$

και για  $S_h$  ορισμένο όπως στην (5.2.2) υπάρχουν θετικοί αριθμοί  $\gamma_0$  και  $c$  τέτοιοι ώστε

$$N_\gamma(\chi, \chi) \geq c \|\chi\|^2, \quad \forall \chi \in S_h, \text{ για } \gamma \geq \gamma_0. \quad (5.2.7)$$

Τέλος, θα χρειαστούμε και το παρακάτω Λήμμα.

**Λήμμα 5.2.3** Για  $S_h$  ορισμένο όπως στην (5.2.2), έχουμε

$$\inf_{\chi \in S_h} \|\|v - \chi\|\| \leq C h^{s-1} \|v\|_s, \text{ για } 2 \leq s \leq r, v \in H^s. \quad (5.2.8)$$

**Απόδειξη.** Επειδή οι συναρτήσεις του  $S_h$  δεν ανήκουν στον  $H^2(\Omega)$ , παρόλο που είναι στον  $H^2(\tau_j)$  για κάθε  $j$ , πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την κατά τρίγωνα ορισμένη νόρμα

$$\|\phi\|_{2,h} = \left( \sum_{j=1}^{M_h} \|\phi\|_{H^2(\tau_j)}^2 \right)^{1/2}$$

και να δείξουμε ότι για καταλλήλως ομαλή  $\phi$

$$\|\|\phi\|\| \leq C h^{-1} (\|\phi\| + h \|\phi\|_1 + h^2 \|\phi\|_{2,h}). \quad (5.2.9)$$

Επειδή είναι εύκολο να βρούμε έναν τελεστή παρεμβολής  $I_h$  στον  $S_h$  (χρησιμοποιώντας π.χ. παρεμβολή Lagrange) τέτοιο ώστε

$$\|I_h v - v\| + h \|I_h v - v\|_1 + h^2 \|I_h v - v\|_{2,h} \leq C h^s \|v\|_s, \text{ για } 2 \leq s \leq r,$$

αυτό θα ολοκληρώσει την απόδειξη της (5.2.8).

Για να δείξουμε την (5.2.9), ξεκινάμε φράζοντας τον όρο  $|\phi|$ . Έστω  $\tau_j$  ένα συνοριακό τρίγωνο της

$\mathcal{T}_h$  και  $(\partial\Omega)_j$  το αντίστοιχο κομμάτι του  $\partial\Omega$ . Αντιστοιχώντας το  $\tau_j$  στο μοναδιαίου μεγέθους τρίγωνο αναφοράς  $\tilde{\tau}_j$ , παρατηρούμε ότι για  $\tilde{\phi}$  ορισμένη στο  $\tilde{\tau}_j$  έχουμε την ανισότητα ίχνους

$$\|\tilde{\phi}\|_{L^2(\partial\tilde{\tau}_j)}^2 \leq C\|\tilde{\phi}\|_{L^2(\tilde{\tau}_j)}\|\tilde{\phi}\|_{H^1(\tilde{\tau}_j)}. \quad (5.2.10)$$

Επιστρέφοντας στο  $\tau_j$ , βρίσκουμε ότι για κάθε  $\phi \in H^1(\tau_j)$ ,

$$\|\phi\|_{L^2((\partial\Omega)_j)}^2 \leq C\|\phi\|_{L^2(\tau_j)}\left(\|\nabla\phi\|_{L^2(\tau_j)} + h^{-1}\|\phi\|_{L^2(\tau_j)}\right) \quad (5.2.11)$$

και άρα

$$h^{-1}\|\phi\|_{L^2((\partial\Omega)_j)}^2 \leq C(h^{-2}\|\phi\|_{L^2(\tau_j)}^2 + \|\phi\|_{H^1(\tau_j)}^2)$$

και μετά από άθροιση αυτό δείχνει ότι

$$h^{-1}|\phi|^2 \leq C(h^{-2}\|\phi\|^2 + \|\phi\|_1^2).$$

Όμοια, θεωρώντας αρχικά  $\phi \in H^2(\tau_j)$ , έχουμε

$$h\left|\frac{\partial\phi}{\partial n}\right|^2 \leq C(\|\phi\|_1^2 + h^2\|\phi\|_{2,h}^2).$$

Επειδή το  $\|\nabla\phi\|$  είναι προφανώς φραγμένο όπως θέλουμε, προκύπτει η (5.2.9) και έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη. ■

Από εδώ και στο εξής υποθέτουμε ότι το  $\gamma$  είναι έτσι επιλεγμένο ώστε η δεύτερη εκτίμηση του Λήμματος 5.2.2 να ισχύει. Τότε, ο  $N_\gamma$  είναι θετικά ορισμένος στον  $S_h$  και, συνεπώς, το διακριτό μας πρόβλημα Dirichlet έχει μοναδική λύση. Αφαιρώντας τις (5.2.4) και (5.2.5) προκύπτει η εξίσωση σφάλματος:

$$N_\gamma(u_h - u, \chi) = 0 \quad \forall \chi \in S_h, \quad (5.2.12)$$

την οποία θα χρησιμοποιήσουμε για την απόδειξη της ακόλουθης εκτίμησης.

**Θεώρημα 5.2.1** Έστω  $S_h$  ορισμένος όπως στην (5.2.2). Τότε, για  $u_h$  και  $u$  τις λύσεις των (5.2.5) και (5.2.1) αντίστοιχα, έχουμε

$$\|u_h - u\| \leq Ch^{s-1}\|u\|_s \quad \text{για } 2 \leq s \leq r.$$

Συγκεκριμένα,  $\|\nabla(u_h - u)\| \leq Ch^{r-1}\|u\|_r$ .

**Απόδειξη.** Για κάθε  $\chi \in S_h$  έχουμε

$$\|u_h - u\| \leq \|u - \chi\| + \|\chi - u_h\|.$$

Τώρα, από το Λήμμα 5.2.2 και την (5.2.12):

$$\begin{aligned} \|\chi - u_h\|^2 &\leq CN_\gamma(\chi - u_h, \chi - u_h) \\ &= CN_\gamma(\chi - u, \chi - u_h) \\ &\leq C\|\chi - u\| \|\chi - u_h\|. \end{aligned}$$

Συνεπώς  $\|\chi - u_h\| \leq C\|\chi - u\|$  και, άρα, από το Λήμμα 5.2.3

$$\|u_h - u\| \leq (1 + C) \inf_{\chi \in S_h} \|\chi - u\| \leq Ch^{s-1} \|u\|_s, \text{ για } 2 \leq s \leq r$$

που αποδεικνύει το θεώρημα. ■

**Παρατήρηση 5.2.1** Παρατηρούμε ότι παρόλο που η διακριτή λύση  $u_h$  δεν ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη  $u_h = 0$  στο  $\partial\Omega$ , είναι μικρή στο σύνορο, αφού ως αποτέλεσμα του Θεωρήματος 5.2.1 έχουμε

$$|u_h| = |u_h - u| \leq h^{1/2} \|u_h - u\| \leq Ch^{r-1/2} \|u\|_r.$$

Έχουμε, επίσης, την παρακάτω εκτίμηση για την  $L^2$ -νόρμα.

**Θεώρημα 5.2.2** Κάτω από τις υποθέσεις του Θεωρήματος 5.2.1 έχουμε

$$\|u_h - u\| \leq Ch^s \|u\|_s \text{ για } 2 \leq s \leq r.$$

**Απόδειξη.** Θα χρησιμοποιήσουμε το κλασσικό δυικό επιχείρημα. Ορίζουμε  $\psi$  μέσω της

$$-\Delta\psi = \phi \text{ στο } \Omega, \text{ με } \psi = 0 \text{ στο } \partial\Omega \tag{5.2.13}$$

και ανακαλούμε την εκτίμηση ελλειπτικής ομαλότητας

$$\|\psi\|_2 \leq C\|\Delta\psi\| = C\|\phi\|. \tag{5.2.14}$$

Έχουμε για  $e = u_h - u$

$$(e, \phi) = -(e, \Delta\psi) = (\nabla e, \nabla\psi) - \langle e, \frac{\partial\psi}{\partial n} \rangle = N_\gamma(e, \psi).$$

Τώρα, για  $\psi_h$  την προσεγγιστική λύση του βοηθητικού προβλήματος (5.2.13) έχουμε, χρησιμοποιώντας την (5.2.12), το Λήμμα 2.2, το Θεώρημα 2.1 με  $s = 2$  και την (5.2.14)

$$\begin{aligned} |(e, \phi)| &= |N_\gamma(e, \psi - \psi_h)| \leq C \|e\| \| \psi - \psi_h \| \\ &\leq Ch \|\psi\|_2 \|e\| \leq Ch \|\phi\| \|e\|. \end{aligned}$$

Έτσι, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 5.2.1 άλλη μία φορά για να φράξουμε την  $\|e\|$  παίρνουμε

$$|(e, \phi)| \leq Ch^s \|u\|_s \|\phi\| \quad \text{για } 2 \leq s \leq r$$

που δείχνει το θεώρημα. ■

Επιστρέφουμε τώρα στο παραβολικό πρόβλημα

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f \quad \text{στο } \Omega \quad \text{για } t > 0 \\ u &= 0 \quad \text{στο } \partial\Omega \quad \text{για } t > 0 \quad \text{με } u(\cdot, 0) = v \quad \text{στο } \Omega. \end{aligned} \tag{5.2.15}$$

Θα παρουσιάσουμε έναν εναλλακτικό τρόπο για να καταλήξουμε στην εκτίμηση σφάλματος για την  $L^2$ -νόρμα, που θα είναι αρκετά γενικός ώστε να μπορεί να εφαρμοστεί και σε περιπτώσεις που  $S_h \not\subset H_0^1$ , όπως για παράδειγμα στη μέθοδο του Nitsche που περιγράφηκε παραπάνω. Θα θεωρήσουμε τώρα ότι  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  με  $d \geq 2$ .

Θυμόμαστε πρώτα τη σπάνταρ μέθοδο Galerkin για το ελλειπτικό πρόβλημα (5.2.1) με  $S_h \subset H_0^1$ , δηλαδή την

$$(\nabla u_h, \nabla \chi) = (f, \chi) \quad \forall \chi \in S_h$$

και ορίζουμε τον γραμμικό τελεστή  $T_h : L^2 \rightarrow S_h$  μέσω της  $T_h f = u_h$  έτσι ώστε η  $u_h = T_h f \in S_h$  να είναι η προσεγγιστική λύση του (5.2.1). Παίρνοντας  $u = Tf$  να είναι η ακριβής λύση του προβλήματος έτσι ώστε ο  $T : L^2 \rightarrow H_0^1$  να είναι ο τελεστής της ακριβούς λύσης, έχουμε

$$T_h = R_h T \tag{5.2.16}$$

όπου  $R_h$  είναι ο τελεστής ελλειπτικής προβολής που ορίστηκε στην προηγούμενη ενότητα. Πράγματι, από τους ορισμούς μας έχουμε

$$(\nabla T_h f, \nabla \chi) = (f, \chi) = (\nabla T f, \nabla \chi) = (\nabla R_h T f, \nabla \chi) \quad \forall \chi \in S_h$$



που δείχνει την (5.2.16).

Ανακαλούμε ότι

$$\|R_h u - u\| + h\|\nabla(R_h u - u)\| \leq Ch^s \|u\|_s \quad \text{για } u \in H^s \cap H_0^1, \quad 1 \leq s \leq r$$

και γράφουμε

$$\|T_h f - T f\| = \|(R_h - I)T f\| \leq Ch^s \|T f\|_s.$$

Από την εκτίμηση ελλειπτικής ομαλότητας έχουμε για  $s \geq 2$

$$\|u\|_s \leq C\|\Delta u\|_{s-2} \quad \text{αν } u = 0 \text{ στο } \partial\Omega$$

ή  $\|T f\|_s \leq C\|f\|_{s-2}$  και άρα

$$\|T_h f - T f\| \leq Ch^s \|f\|_{s-2} \quad \text{για } 2 \leq s \leq r \quad \text{αν } f \in H^{s-2}.$$

Παρατηρούμε ακόμα ότι ο  $T_h$  είναι αυτοσυζυγής, θετικά ημιορισμένος στον  $L^2$ :

$$(f, T_h g) = (\nabla T_h f, \nabla T_h g) = (T_h f, g) \quad \forall f, g \in L^2.$$

Συγκεκριμένα,

$$(T_h f, f) = \|\nabla T_h f\|^2 \geq 0. \tag{5.2.17}$$

Στην πραγματικότητα ο  $T_h$  είναι θετικά ορισμένος στον  $S_h$  αν θεωρηθεί ως χώρος με εσωτερικό γινόμενο ως προς το  $L^2$  εσωτερικό γινόμενο. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι  $f_h \in S_h$  είναι τέτοια ώστε  $(T_h f_h, f_h) = 0$ . Τότε  $T_h f_h = 0$  από την (5.2.17) και άρα

$$\|f_h\|^2 = (f_h, f_h) = (\nabla T_h f_h, \nabla f_h) = 0.$$

Ανακαλούμε τον ορισμό (5.1.22) του διακριτού Λαπλασιανού τελεστή  $\Delta_h : S_h \rightarrow S_h$  και βλέπουμε ότι  $T_h = (-\Delta_h)^{-1}$  στον  $S_h$ , αφού

$$(f_h, \chi) = (\nabla(T_h f_h), \nabla \chi) = -(\Delta_h(T_h f_h), \chi) \quad \text{για } \chi \in S_h$$

και άρα  $-\Delta_h(T_h f_h) = f_h$  για  $f_h \in S_h$ . Παρατηρούμε ακόμα ότι  $T_h P_h = T_h$ , αφού

$$(\nabla(T_h P_h) f, \nabla \chi) = (P_h f, \chi) = (f, \chi) = (\nabla T_h f, \nabla \chi) \quad \forall \chi \in S_h. \tag{5.2.18}$$

Ανακαλούμε τώρα το ημιδιακριτό πρόβλημα

$$u_{h,t} - \Delta_h u_h = P_h f \quad \text{για } t > 0 \text{ με } u_h(0) = v_h.$$

Με βάση τον παραπάνω ορισμό του διακριτού επιλύοντα τελεστή  $T_h$ , αυτό μπορεί να γραφεί ισοδύναμα

$$T_h u_{h,t} + u_h = T_h P_h f = T_h f \quad \text{για } t > 0 \text{ με } u_h(0) = v_h.$$

Όμοια, για το συνεχές πρόβλημα έχουμε

$$T u_t + u = T f \quad \text{για } t > 0 \text{ με } u(0) = v.$$

Για τον ίδιο λόγο όπως για τον  $T_h$ , ο τελεστής  $T$  είναι αυτοσυζυγής και θετικά ορισμένος στον  $L^2$ . Αυτό ισχύει επειδή το  $(f, \phi) = (\nabla(Tf), \nabla\phi)$  για  $\phi \in H_0^1$  δίνει  $(f, Tf) = \|\nabla Tf\|^2 \geq 0$  και το  $Tf = 0$  συνεπάγεται ότι  $f = -\Delta(Tf) = 0$ .

Από εδώ και στο εξής, αντί να ορίζουμε την προσεγγιστική λύση του ελλειπτικού προβλήματος όπως παραπάνω, θα υποθέτουμε μόνο ότι μας δίνεται ένας προσεγγιστικός επιλύων τελεστής  $T_h$  με τις ιδιότητες:

- (i) ο  $T_h$  είναι αυτοσυζυγής, θετικά ημιορισμένος στον  $L^2$  και θετικά ορισμένος στον  $S_h$ .
- (ii) Υπάρχει θετικός ακέραιος  $r \geq 2$  τέτοιος ώστε

$$\|(T_h - T)f\| \leq Ch^s \|f\|_{s-2} \quad \text{για } 2 \leq s \leq r, f \in H^{s-2}.$$

Θα θέσουμε στη συνέχεια το ημιδιακριτό πρόβλημα να βρούμε  $u_h(t) \in S_h$  για  $t \geq 0$  τέτοια ώστε

$$T_h u_{h,t} + u_h = T_h f \quad \text{για } t > 0 \text{ με } u_h(0) = v_h \tag{5.2.19}$$

που μπορεί να λυθεί μοναδικά για  $t \geq 0$ , αφού ο  $T_h^{-1}$  υπάρχει στον  $S_h$  από το (i).

Ως παράδειγμα, μπορούμε να δούμε τη μέθοδο του Nitsche για το ελλειπτικό πρόβλημα και να ορίσουμε τον  $T_h$  μέσω της

$$N_\gamma(T_h f, \chi) = (f, \chi) \quad \forall \chi \in S_h, f \in L^2. \tag{5.2.20}$$

Η ιδιότητα (i) προκύπτει τότε από τη σπάνια μέθοδο Galerkin και η ιδιότητα (ii) είναι η  $L^2$  εκτίμηση σφάλματος για τη μέθοδο Nitsche (Θεώρημα 5.2.2). Επειδή η (5.2.19) είναι ισοδύναμη με τη μεταβολική διατύπωση

$$N_\gamma(T_h u_{h,t}, \chi) + N_\gamma(u_h, \chi) = N_\gamma(T_h f, \chi),$$

η (5.2.20) δείχνει ότι το ημιδιακριτό πρόβλημα είναι τώρα ισοδύναμο με το

$$(u_{h,t}, \chi) + N_\gamma(u_h, \chi) = (f, \chi) \quad \forall \chi \in S_h, \quad t > 0 \text{ με } u_h(0) = v_h.$$

Παρατηρούμε ότι αυτή τη φορά δεν κάνουμε κάποια ιδιαίτερη υπόθεση για τις προσεγγιστικές ιδιότητες του  $\{S_h\}$ , αφού πλέον εμπεριέχονται έμμεσα στη (ii). Συγκεκριμένα, προκύπτει από τη (ii) ότι

$$\begin{aligned} \inf_{\chi \in S_h} \|v - \chi\| &\leq \|v - T_h(-\Delta v)\| = \|(T - T_h)\Delta v\| \\ &\leq Ch^s \|\Delta v\|_{s-2} \leq Ch^s \|v\|_s \quad \text{για } 2 \leq s \leq r. \end{aligned} \quad (5.2.21)$$

Συγκεκριμένα, για  $P_h$  την ορθογώνια  $L^2$ -προβολή, έχουμε

$$\|v - P_h v\| \leq Ch^s \|v\|_s \quad \text{για } 2 \leq s \leq r.$$

και αν εισάγουμε την ελλειπτική προβολή  $R_h = T_h(-\Delta) : H^2 \cap H_0^1 \rightarrow S_h$ , η (5.2.21) συνεπάγεται ότι

$$\|v - R_h v\| \leq Ch^s \|v\|_s \quad \text{για } 2 \leq s \leq r. \quad (5.2.22)$$

Για την κλασσική μέθοδο Galerkin η παρούσα προβολή συμπίπτει με την παλιά ελλειπτική προβολή και για τη μέθοδο του Nitsche έχουμε από τους ορισμούς μας

$$N_\gamma((R_h - I)v, \chi) = 0 \quad \forall \chi \in S_h.$$

Παρατηρούμε ότι από την (i) έχουμε

$$T_h P_h = T_h. \quad (5.2.23)$$

Πράγματι, επειδή ο  $T_h$  είναι αυτοσυζυγής,

$$(T_h P_h f, g) = (P_h f, T_h g) = (f, T_h g) = (T_h f, g) \quad \forall f, g \in L^2$$

από όπου προκύπτει η (5.2.23).

Με βάση τις καινούριες αυτές γενικές υποθέσεις θα αποδείξουμε μία εκτίμηση σφάλματος όμοια με την ειδική περίπτωση για τη σπάνια μέθοδο Galerkin.

**Θεώρημα 5.2.3** Έστω ο  $T_h$  ικανοποιεί τις (i) και (ii) και έστω  $u_h$  και  $u$  οι λύσεις των (5.2.19) και (5.2.15) αντίστοιχα. Τότε

$$\|u_h(t) - u(t)\| \leq \|v_h - v\| + Ch^r (\|v\|_r + \int_0^t \|u_t\|_r ds) \quad \text{για } t \geq 0.$$

**Απόδειξη.** Έχουμε για το σφάλμα  $e = u_h - u$

$$\begin{aligned} T_h e_t + e &= (T_h u_{h,t} + u_h) - (T_h u_t + u) \\ &= T_h f - (T_h u_t + u) + (T - T_h) u_t \\ &= (T - T_h)(u_t - f) = (T - T_h) \Delta u \end{aligned}$$

που χρησιμοποιώντας και την (5.2.16) γίνεται

$$T_h e_t + e = \rho, \text{ όπου } \rho = -(T_h - T) \Delta u = (R_h - I)u. \quad (5.2.24)$$

Πολλαπλασιάζουμε με  $2e_t$  και ολοκληρώνουμε στο  $\Omega$  για να βρούμε

$$2(T_h e_t, e_t) + \frac{d}{dt} \|e\|^2 = 2(\rho, e_t) = 2 \frac{d}{dt} (\rho, e) - 2(\rho_t, e)$$

που ολοκληρώνοντας ως προς  $t$  γίνεται

$$\begin{aligned} \|e(t)\|^2 &\leq \|e(0)\|^2 + 2\|\rho(t)\| \|e(t)\| + 2\|\rho(0)\| \|e(0)\| + 2 \int_0^t \|\rho_t\| \|e\| ds \\ &\leq \sup_{s \leq t} \|e(s)\| \left( \|e(0)\| + 4 \sup_{s \leq t} \|\rho(s)\| + 2 \int_0^t \|\rho_t\| ds \right). \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντάς το αυτό με  $\tau$  τέτοιο ώστε  $\|e(\tau)\| = \sup_{s \leq t} \|e(s)\|$ , έχουμε

$$\begin{aligned} \|e(t)\| &\leq \|e(\tau)\| \leq \|e(0)\| + 4 \sup_{s \leq t} \|\rho(s)\| + 2 \int_0^t \|\rho_t\| ds \\ &\leq \|e(0)\| + C \left( \|\rho(0)\| + \int_0^t \|\rho_t\| ds \right). \end{aligned} \quad (5.2.25)$$

Εδώ  $e(0) = v_h - v$  και

$$\|\rho(0)\| = \|(T_h - T) \Delta v\| \leq Ch^r \|\Delta v\|_{r-2} \leq Ch^r \|v\|_r$$

και όμοια,  $\|\rho_t\| = \|(T_h - T) \Delta u_t\| \leq Ch^r \|u_t\|_r$ , που ολοκληρώνει την απόδειξη. ■

Παρατηρούμε από τη συζήτησή μας πριν το Θεώρημα 5.2.3 ότι αν η  $v_h$  επιλεγεί ως  $v_h = P_h v$  ή  $v_h = R_h v$ , τότε ο πρώτος όρος στα δεξιά της εκτίμησης σφάλματος φράσσεται από τον δεύτερο.

Αναφέρουμε ως Λήμμα του προηγούμενου θεωρήματος ένα σημαντικό αποτέλεσμα της απόδειξης, που θα χρησιμοποιηθεί αργότερα.

**Λήμμα 5.2.4** Έστω  $T_h e_t + e = \rho$  για  $t \geq 0$  όπου ο  $T_h$  είναι μη-αρνητικός ( $(T_h f, f) \geq 0$ ) ως προς το (ημι-)εσωτερικό γινόμενο  $(\cdot, \cdot)$ . Τότε, για την αντίστοιχη (ημι-)νόρμα  $\|\cdot\| = (\cdot, \cdot)^{1/2}$  έχουμε ότι

$$\|e(t)\| \leq \|e(0)\| + C \left( \|\rho(0)\| + \int_0^t \|\rho_t\| ds \right).$$

Για τη σπάνια μέθοδο Galerkin είδαμε ότι εκτιμήσεις σφάλματος βέλτιστης τάξης για την απόκλιση μπορούν να εξαχθούν από την ασθενή μορφή του παραβολικού προβλήματος. Παρόμοιο επιχείρημα δίνει εκτιμήσεις για την απόκλιση και όταν το ημιδιακριτό πρόβλημα βασίζεται στη μέθοδο του Nitsche. Είδαμε ακόμα ότι τέτοιες εκτιμήσεις μπορούν να προκύψουν χρησιμοποιώντας αντίστροφη ιδιότητα, κάτι το οποίο ισχύει και με τις τωρινές γενικότερες υποθέσεις μας, όπως φαίνεται στο επόμενο θεώρημα, το οποίο αποδεικνύεται όπως και προηγουμένως.

**Θεώρημα 5.2.4** Έστω ισχύουν οι (i),(ii),(5.1.8), καθώς και η προσεγγιστική ιδιότητα

$$\inf_{\chi \in S_h} \{ \|v - \chi\| + h \|\nabla(v - \chi)\| \} \leq Ch^r \|v\|_r. \quad (5.2.26)$$

Έστω  $u_h$  και  $u$  οι λύσεις των (5.2.19) και (5.2.15) με  $v_h$  επιλεγμένη έτσι ώστε  $\|v_h - v\| \leq Ch^r \|v\|_r$ . Έχουμε τότε ότι

$$\|\nabla(u_h(t) - u(t))\| \leq Ch^{r-1} \left( \|v\|_r + \int_0^t \|u_t\|_r ds \right) \text{ για } t \geq 0.$$

Κλείνουμε με δύο θεωρήματα για το σφάλμα του παραβολικού προβλήματος, τα οποία δεν περιλαμβάνουν χρονική παράγωγο.

**Θεώρημα 5.2.5** Έστω ο  $T_h$  ικανοποιεί τις (i) και (ii) και  $u_h$  και  $u$  οι λύσεις των (5.2.19) και (5.2.15) αντίστοιχα, με  $v_h = P_h v$ . Τότε

$$\left( \int_0^t \|u_h - u\|^2 ds \right)^{1/2} \leq Ch^r \left( \int_0^t \|u\|_r^2 ds \right)^{1/2} \text{ για } t \geq 0.$$

**Απόδειξη.** Παίρνουμε το  $L^2$ -εσωτερικό γινόμενο της εξίσωσης σφάλματος (5.2.24) με  $e$  και παρατηρούμε ότι, επειδή ο  $T_h$  είναι αυτοσυζυγής,  $2(T_h e_t, e) = \frac{d}{dt}(T_h e, e)$ . Έτσι

$$\frac{d}{dt}(T_h e, e) + 2\|e\|^2 = (\rho, e) \leq \|e\|^2 + \|\rho\|^2.$$

Υστερα από ολοκλήρωση προκύπτει ότι

$$(T_h e(t), e(t)) + \int_0^t \|e\|^2 ds \leq (T_h e(0), e(0)) + \int_0^t \|\rho\|^2 ds.$$

Παρατηρούμε τώρα ότι  $T_h e(0) = 0$  για  $v_h = P_h v$ , επειδή

$$(T_h e(0), w) = (P_h v - v, T_h w) = 0 \quad \forall w \in L^2, \quad (5.2.27)$$

αφού  $T_h w \in S_h$ . Ως εκ τούτου,

$$\int_0^t \|e\|^2 ds \leq \int_0^t \|\rho\|^2 ds \quad (5.2.28)$$

και το ζητούμενο συμπέρασμα προκύπτει από την (5.2.22). ■

Για την απόδειξη της τελευταίας εκτίμησης σφάλματος της ενότητας εισάγουμε τον τελεστή λύσης  $E_h(t)$  του προβλήματος αρχικών τιμών για την ομογενή ημιδιακριτή παραβολική εξίσωση, δηλαδή την (5.2.19) με  $f = 0$ . Ορίζοντας τον διακριτό Λαπλασιανό τελεστή  $\Delta_h = -T_h^{-1} : S_h \rightarrow S_h$ , αυτή η εξίσωση μπορεί να γραφεί ως

$$u_{h,t} = \Delta_h u_h \quad \text{για } t > 0 \text{ με } u_h(0) = v_h. \quad (5.2.29)$$

Για την απόδειξη του θεωρήματος θα χρησιμοποιήσουμε και το ακόλουθο λήμμα.

**Λήμμα 5.2.5** *Έστω ισχύει η (i). Τότε, για κάθε  $l \geq 0$  υπάρχει σταθερά  $C_l$  με  $C_0 = 1$  τέτοια ώστε για τη λύση της (5.2.29) να έχουμε*

$$\|D_t^l E_h(t) v_h\| \leq C_l t^{-l} \|v_h\| \quad \text{για } t > 0, \text{ όπου } D_t = \partial/\partial t.$$

Πρέπει ακόμα να υποθέσουμε την αντίστροφη εκτίμηση

$$\|\Delta_h \chi\| \leq C h^{-\beta} \|\chi\| \quad \text{για } \chi \in S_h \text{ με } \beta > 0. \quad (5.2.30)$$

Για τη σπάνια μέθοδο Galerkin με την προαναφερθείσα αντίστροφη υπόθεση (5.2.8), μία εκτίμηση της μορφής της (5.2.30) ισχύει για  $\beta = 2$ , αφού για  $\chi \in S_h$

$$\|\Delta_h \chi\|^2 = -(\nabla(\Delta_h \chi), \nabla \chi) \leq \|\nabla(\Delta_h \chi)\| \|\nabla \chi\| \leq C h^{-2} \|\Delta_h \chi\| \|\chi\|$$

και ομοίως προκύπτει για τη μέθοδο του Nitsche από το Λήμμα 5.2.1 ότι

$$\|\Delta_h \chi\|^2 = -N_\gamma(\Delta_h \chi, \chi) \leq C \|\Delta_h \chi\| \|\chi\| \leq C h^{-2} \|\Delta_h \chi\| \|\chi\|.$$

Έχουμε, λοιπόν, την ακόλουθη σχεδόν βέλτιστης τάξης εκτίμηση σφάλματος.

**Θεώρημα 5.2.6** *Έστω ισχύουν οι (i), η (ii) και η (5.2.30) και  $u_h$  και  $u$  οι λύσεις των (5.2.19) και (5.2.15) αντίστοιχα, με  $v_h = R_h v = -T_h \Delta v$ . Τότε*

$$\|u_h(t) - u(t)\| \leq C h^r (1 + \max(0, \log \frac{t}{h^\beta})) \sup_{0 \leq s \leq t} \|u(s)\|_r \quad \text{για } t \geq 0.$$

**Απόδειξη.** Όπως και στην προηγούμενη ενότητα, γράφουμε  $u_h - u = (u_h - R_h u) + (R_h u - u) = \theta + \rho$ . Από την (5.2.22) έχουμε ότι  $\|\rho(t)\| \leq Ch^r \|u(t)\|_r$  και μένει να φράξουμε τη  $\theta = u_h - R_h u$ . Από τις (5.2.19) και (5.2.16) παίρνουμε ότι

$$T_h \theta_t + \theta = T_h f - (T_h R_h u_t + R_h u) = -T_h \rho_t = -T_h P_h \rho_t$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε την (5.2.23). Έχουμε, λοιπόν,

$$\theta_t - \Delta_h \theta = -P_h \rho_t \quad \text{για } t > 0 \text{ με } \theta(0) = 0$$

και άρα, από την αρχή του Duhamel

$$\theta(t) = - \int_0^t E_h(t-s) P_h \rho_t(s) ds.$$

Με ολοκλήρωση κατά μέλη παίρνουμε

$$\theta(t) = E_h(t) P_h \rho(0) - P_h \rho(t) - \int_0^t E_h'(t-s) P_h \rho(s) ds$$

που συνεπάγεται ότι

$$\|\theta(t)\| \leq \left( \|E_h(t)\| + 1 + \int_0^t \|E_h'(s)\| ds \right) \sup_{0 \leq s \leq t} \|\rho(s)\|. \quad (5.2.31)$$

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα, θα φράξουμε την προς ολοκλήρωση ποσότητα για μικρό  $s$  από το  $Ch^{-\beta}$ . Πράγματι, εφαρμόζοντας την αντίστροφη υπόθεση (5.2.30) και το Λήμμα 5.2.5, έχουμε

$$\|E_h'(t)v_h\| = \|\Delta_h E_h(t)v_h\| \leq Ch^{-\beta} \|E_h(t)v_h\| \leq Ch^{-\beta} \|v_h\|.$$

Έτσι, για  $t \leq h^\beta$

$$\int_0^t \|E_h'(s)\| ds \leq C.$$

Επειδή από το Λήμμα 5.2.5 ισχύει ακόμα ότι  $\|E_h'(t)v_h\| \leq Ct^{-1} \|v_h\|$ , έχουμε

$$\int_{h^\beta}^t \|E_h'(s)\| ds \leq C \left| \int_{h^\beta}^t \frac{ds}{s} \right| = C \left| \log \frac{t}{h^\beta} \right| \quad \text{για } t \geq h^\beta.$$

Επειδή ο  $E_h(t)$  είναι φραγμένος, συμπεραίνουμε από τις (5.2.31) και (5.2.22) ότι

$$\|\theta(t)\| \leq Ch^r (1 + \max(0, \log \frac{t}{h^\beta})) \sup_{0 \leq s \leq t} \|u(s)\|_r$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη. ■

### 5.3 Πιο Γενικές Ελλειπτικές Εξισώσεις

Σε αυτή την ενότητα θα δούμε τη γενίκευση των προηγούμενων εκτιμήσεων σφαλμάτων προβλημάτων αρχικών-συνοριακών τιμών για πιο γενικές παραβολικές εξισώσεις, στις οποίες επιτρέπουμε στον ελλειπτικό τελεστή να έχει συντελεστές που εξαρτώνται και από το  $x$  και από το  $t$ , να έχει όρους χαμηλότερης τάξης και να μην είναι ούτε αυτοσυζυγής ούτε θετικός. Για να μην έχουμε όμως να εξετάσουμε και το ενδεχόμενο εκθετικής αύξησης των σταθερών ευστάθειας και των φραγμάτων για τα σφάλματα, περιορίζουμε τη μελέτη μας σε πεπερασμένο διάστημα χρόνου.

Θεωρούμε λοιπόν το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών

$$\begin{aligned} u_t + L(t)u &= f \text{ στο } \Omega \text{ για } t \in J & (5.3.1) \\ u &= 0 \text{ στο } \partial\Omega \text{ για } t \in J \text{ με } u(0) = v \text{ στο } \Omega \end{aligned}$$

όπου το  $\Omega$  είναι ένα χωρίο στον  $\mathbb{R}^d$  με ομαλό σύνορο  $\partial\Omega$ ,  $J = (0, \bar{t}]$  και  $L(t)$  είναι ο ελλειπτικός τελεστής

$$L(t)u := - \sum_{j,k=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k}) + \sum_{j=1}^d a_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + a_0 u$$

όπου οι  $a_{jk}$ ,  $a_j$  και  $a_0$  είναι  $C^\infty$  συναρτήσεις στον  $\bar{\Omega} \times \bar{J}$ ,  $a_{jk} = a_{kj}$  και

$$\sum_{j,k=1}^d a_{jk}(x,t) \xi_j \xi_k \geq c_0 |\xi|^2 \text{ με } c_0 > 0 \text{ για } (x,t) \in \bar{\Omega} \times \bar{J}.$$

Συνδέοντας με τον  $L(t)$  τη διγραμμική μορφή

$$B[t; v, w] = \int_{\Omega} \left( \sum_{j,k=1}^d a_{jk} \frac{\partial v}{\partial x_k} \frac{\partial w}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^d a_j \frac{\partial v}{\partial x_j} w + a_0 v w \right) dx$$

μπορούμε να γράψουμε το παραβολικό πρόβλημα σε μεταβολική μορφή

$$\begin{aligned} (u_t, \phi) + B[t; u, \phi] &= (f, \phi) \quad \forall \phi \in H_0^1 = H_0^1(\Omega), t \in J & (5.3.2) \\ u(0) &= v. \end{aligned}$$

Αυτή τη φορά η διγραμμική μορφή δεν είναι απαραίτητα θετικά ορισμένη, αλλά μπορεί κανείς να δείξει την ανισότητα Garding

$$B[t; v, v] \geq c \|v\|_1^2 - \kappa \|v\|^2 \quad \forall v \in H_0^1 \text{ με } c > 0, \kappa \in \mathbb{R}. \quad (5.3.3)$$



Πράγματι, έχουμε για  $v \in H_0^1$

$$\begin{aligned}
B[t; v, v] + \kappa \|v\|^2 &= \int_{\Omega} \left( \sum_{j,k=1}^d a_{jk} \frac{\partial v}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^d a_j v \frac{\partial v}{\partial x_j} + (a_0 + \kappa) v^2 \right) dx \\
&= \int_{\Omega} \left( \sum_{j,k=1}^d a_{jk} \frac{\partial v}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_j} + (\kappa + a_0 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \frac{\partial a_j}{\partial x_j}) v^2 \right) dx \\
&\geq c \|v\|_1^2 \text{ με } c > 0, \text{ αν } \kappa > \sup_{\Omega \times J} \left( \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \frac{\partial a_j}{\partial x_j} - a_0 \right)
\end{aligned}$$

όπου από εδώ και στο εξής θα θεωρούμε το  $\kappa$  σταθερό.

Μπορούμε να δείξουμε ότι το πρόβλημα (5.3.1) έχει μοναδική λύση που ανήκει σε κάθε χώρο  $H^s = H^s(\Omega)$  για  $t \in J$  αν οι  $f$  και  $v$  είναι αρκετά ομαλές και ικανοποιούν τις κατάλληλες συνθήκες συμβατότητας στο  $\partial\Omega$  για  $t = 0$ . Εδώ θα δείξουμε μόνο την εκτίμηση ευστάθειας στον  $L^2 = L^2(\Omega)$

$$\|u(t)\| \leq C(\|v\| + \int_0^t \|f\| ds) \text{ για } t \in \bar{J}. \quad (5.3.4)$$

Για να το δείξουμε, διαλέγουμε  $\phi = u$  στην (5.3.2) και με βάση την (5.3.3) παίρνουμε ότι

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 + c \|u\|_1^2 \leq \|f\| \|u\| + \kappa \|u\|^2. \quad (5.3.5)$$

Όπως στην απόδειξη της (5.1.19), αυτό δείχνει ότι

$$\|u(t)\| \leq \|v\| + \int_0^t \|f\| ds + \kappa \int_0^t \|u\| ds$$

από την οποία προκύπτει η (5.3.4) μέσω του Λήμματος του Gronwall. Παρατηρούμε ότι σε αντίθεση με τις προηγούμενες ενότητες που είχαμε τελεστή  $A$  ανεξάρτητο του  $t$  και αυτοσυζυγή, η μέθοδος της επέκτασης σε ιδιοσυναρτήσεις δεν μπορεί να εφαρμοστεί εδώ.

Συνδέουμε τώρα με το παραβολικό πρόβλημα (5.3.1) το χρονοεξαρτώμενο πρόβλημα Dirichlet

$$L_{\kappa}(t)u := L(t)u + \kappa u = f \text{ στο } \Omega \text{ με } u = 0 \text{ για } t \in J$$

ή σε ασθενή μορφή

$$B_{\kappa}[t; u, \phi] := B[t; u, \phi] + \kappa(u, \phi) = (f, \phi) \quad \forall \phi \in H_0^1, t \in J.$$

Συμβολίζουμε με  $T(t) : L^2 \rightarrow H^2 \cap H_0^1$  τον επιλύοντα τελεστή του προβλήματος έτσι ώστε

$$B_{\kappa}(t; T(t)f, \phi) = (f, \phi) \quad \forall \phi \in H_0^1 \text{ για } t \in \bar{J} \quad (5.3.6)$$

και ανακαλούμε την εκτίμηση ελλειπτικής ομαλότητας

$$\|T(t)f\|_s \leq C\|f\|_{s-2} \text{ για } s \geq 2, t \in \bar{J}. \quad (5.3.7)$$

Εισάγοντας την  $\check{u} = e^{-t\kappa}u$  ως νέα εξαρτημένη μεταβλητή στο (5.3.1), έχουμε

$$\check{u}_t + B_\kappa(t)\check{u} = \check{f}, \text{ όπου } \check{f} = e^{-t\kappa}f \quad (5.3.8)$$

ή

$$(\check{u}, \phi) + B_\kappa[t; \check{u}, \phi] = (\check{f}, \phi) \quad \forall \phi \in H_0^1 \text{ για } t \in J$$

ή επίσης

$$T(t)\check{u}_t + \check{u} = T(t)\check{f} \text{ για } t \in J \text{ με } \check{u}(0) = v.$$

Για να ορίσουμε τις προσεγγιστικές λύσεις του (5.3.1), παίρνουμε ως  $\{S_h\}$  μία οικογένεια από πεπερασμένης διάστασης υποχώρους του  $L^2$  και  $T_h(t) : L^2 \rightarrow S_h$  προσεγγίσεις του  $T(t)$  με συγκεκριμένες ιδιότητες που θα αναφέρουμε παρακάτω. Θεωρούμε τότε ως προσεγγιστική λύση του (5.3.1) μία συνάρτηση  $u_h : J \rightarrow S_h$  τέτοια ώστε

$$u_h(t) = e^{\kappa t}\check{u}_h(t), \text{ όπου } T_h\check{u}_{h,t} + \check{u}_h = T_h\check{f} \text{ για } t \in J, \check{u}_h(0) = v_h. \quad (5.3.9)$$

Παρατηρούμε ότι το να φράσσονται για θετικό χρόνο οι  $\check{u}$  και  $\check{u}_h$  στις (5.3.8) και (5.3.9) αντιστοιχεί σε εκθετική αύξηση των  $u$  και  $u_h$  όταν  $\kappa > 0$ .

Για συντομία θα παραλείπουμε συχνά το  $t$  από το συμβολισμό και θα γράφουμε απλά  $L$  αντί του  $L(t), B[v, w]$  αντί για  $B[t; v, w], T_h$  αντί για  $T_h(t)$  κλπ.

Περιγράφουμε τώρα τις συνθήκες που θα απαιτούμε για τον  $T_h$  ώστε οι συναρτήσεις  $u_h$  που ορίστηκαν στην (5.3.9) να είναι μια καλή προσέγγιση της ακριβούς λύσης (5.3.1). Οι πρώτες δύο συνθήκες αντιστοιχούν σε αυτές που περιγράψαμε σε προηγούμενη ενότητα, όπου η απλά η δεύτερη τροποποιήθηκε ώστε να επιτρέπεται η μεταβολή ως προς το χρόνο στους συντελεστές. Η τρίτη συνθήκη θα φράζει το βαθμό της μη-αυτοσυζυγίας του  $T_h$  και ικανοποιείται αυτομάτως όταν ο  $T_h$  είναι αυτοσυζυγής. Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι για  $t \in J$  με  $C$  ανεξάρτητο του  $t$  και για  $'$  την παραγώγιση ως προς  $t$ :

$$(i) (f, T_h f) \geq 0 \text{ για } f \in L^2 \text{ και } (\chi, T_h \chi) > 0 \text{ για } 0 \neq \chi \in S_h.$$

$$(ii) \text{ για κάποιο ακέραιο } r \geq 2 \text{ και για } 2 \leq s \leq r$$

$$\|(T_h - T)f\| + \|(T_h' - T')f\| \leq Ch^s \|f\|_{s-2} \text{ για } f \in H^{s-2}.$$

(iii)  $|(T_h f, g) - (f, T_h g)| \leq C(f, T_h f)^{1/2} \|T_h g\|$  για  $f, g \in L^2$ .

Ως πρώτο παράδειγμα βλέπουμε την περίπτωση που  $S_h \subset H_0^1$  και που ο  $T_h$  συνδέεται με τη σπάντα μέθοδο Galerkin έτσι ώστε

$$B_\kappa[t; T_h(t)f, \chi] = (f, \chi) \quad \forall \chi \in S_h, t \in J. \quad (5.3.10)$$

Τότε η ημιδιακριτή εξίσωση στην (5.3.9) είναι ισοδύναμη με

$$(\dot{u}_{h,t}, \chi) + B_\kappa[\tilde{u}_h, \chi] = (\dot{f}, \chi) \quad \forall \chi \in S_h, t \in J$$

που με τη σειρά του για  $u_h(t) = e^{\kappa t} \tilde{u}_h(t)$  γίνεται η σπάντα ασθενής μορφή

$$(u_{h,t}, \chi) + B[u_h, \chi] = (f, \chi) \quad \forall \chi \in S_h, t \in J.$$

Θα δείξουμε ότι οι συνθήκες μας ισχύουν για αυτή την επιλογή  $T_h$ .

**Λήμμα 5.3.1** Έστω  $T_h$  ορισμένος όπως στην (5.3.10) με τον  $S_h$  να ικανοποιεί την (5.1.6). Τότε, οι (i), (ii) και (iii) ισχύουν.

**Απόδειξη.** Από τις (5.3.10) και (5.3.3) έχουμε απευθείας ότι

$$(f, T_h f) = B_\kappa[T_h f, T_h f] \geq c \|T_h f\|_1^2 \geq 0$$

που δείχνει το πρώτο μέρος του (i) και ότι η ισότητα ισχύει αν  $T_h f = 0$ . Υποθέτουμε τώρα ότι  $T_h f = 0$  και  $f = \chi \in S_h$ . Χρησιμοποιώντας για άλλη μία φορά την (5.3.10), έχουμε ότι  $\|\chi\|^2 = B_\kappa[T_h \chi, \chi] = 0$  και άρα  $\chi = 0$ , που δείχνει το δεύτερο μέρος του (i).

Επιστρέφουμε τώρα στη συνθήκη (ii). Είναι γνωστό και αποδείξιμο με τον ίδιο σχεδόν τρόπο όπως η αυτοσυζυγής περίπτωση ότι

$$\|(T_h - T)f\| + h\|(T_h - T)f\|_1 \leq Ch^s \|f\|_{s-2} \quad \text{για } 2 \leq s \leq r \quad (5.3.11)$$

και μένει, άρα, να αποδείξουμε το αντίστοιχο αποτέλεσμα για τη χρονική παράγωγο. Γι' αυτόν το σκοπό, θέτουμε  $w = Tf, w_h = T_h f$  και  $e = w_h - w$  ώστε  $(T'_h - T')f = e_t$ . Παραγωγίζοντας την εξίσωση  $B_\kappa(e, \chi) = 0$ , παίρνουμε με  $B'[\cdot, \cdot]$  τη διγραμμική μορφή που προκύπτει από την  $B[\cdot, \cdot]$  παραγωγίζοντας τους συντελεστές ως προς  $t$ , παρατηρώντας ότι  $B'_\kappa[\cdot, \cdot] = B'[\cdot, \cdot]$ ,

$$B_\kappa[e_t, \chi] + B'[e, \chi] = 0 \quad \forall \chi \in S_h, t \in J. \quad (5.3.12)$$

Έτσι, για κάθε  $\chi \in S_h$

$$c\|e_t\|_1^2 \leq B_\kappa(e_t, e_t) = B_\kappa[e_t, e_t + \chi] + B'[e, e_t + \chi] - B'[e, e_t].$$

Από αυτό συμπεραίνουμε ότι

$$\|e_t\|_1^2 \leq C(\|e_t\|_1 + \|e\|_1) \inf_{\chi \in S_h} \|w_t - \chi\|_1 + C\|e\|_1 \|e_t\|_1$$

και άρα, χρησιμοποιώντας την (5.3.11) προκύπτει ότι

$$\|e_t\|_1 \leq C(\|e\|_1 + \inf_{\chi \in S_h} \|w_t - \chi\|_1) \leq Ch^{s-1}(\|f\|_{s-2} + \|w_t\|_s), \quad 2 \leq s \leq r.$$

Εδώ  $\|w_t\|_s \leq C\|w\|_s$ , που προκύπτει επειδή η  $w_t \in H_0^1$  είναι η λύση του προβλήματος Dirichlet

$$B_\kappa(w_t, \phi) = -B'(w, \phi) \quad \forall \phi \in H_0^1$$

και  $\|w\|_s \leq C\|f\|_{s-2}$  από την (5.3.7) ώστε  $\|e_t\|_1 \leq h^{s-1}\|f\|_{s-2}$  για  $2 \leq s \leq r$ .

Για να δείξουμε το φράγμα για την  $L^2$ -νόρμα του  $e_t$ , θεωρούμε  $L_\kappa^*$  τον συζυγή του  $L_\kappa$  και  $\psi$  τη λύση του

$$L_\kappa^* \psi = \phi \quad \text{στο } \Omega \quad \text{με } \psi = 0 \quad \text{στο } \partial\Omega.$$

Έχουμε τότε πάλι από εφαρμογή της (5.3.12)

$$(e_t, \phi) = B_\kappa[e_t, \psi] = B_\kappa[e_t, \psi - \chi] + B'[e, \psi - \chi] - B'[e, \psi] \quad \forall \chi \in S_h,$$

όπου, χρησιμοποιώντας τον τύπο του Green στον τελευταίο όρο, έχουμε

$$\begin{aligned} |(e_t, \phi)| &\leq C(\|e_t\|_1 + \|e\|_1) \inf_{\chi \in S_h} \|\psi - \chi\|_1 + C\|e\| \|\psi\|_2 \\ &\leq C(h(\|e_t\|_1 + \|e\|_1) + \|e\|) \|\psi\|_2. \end{aligned}$$

Από την εκτίμηση ελλειπτικής ομαλότητας  $\|\psi\|_2 \leq C\|\phi\|$ , αυτό σε συνδυασμό με τα φράγματα σφαλμάτων που ήδη έχουν δειχθεί δίνει

$$\|e_t\| \leq C(h(\|e_t\|_1 + \|e\|_1) + \|e\|) \leq Ch^s \|f\|_{s-2} \quad \text{για } 2 \leq s \leq r$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη του (ii).

Από τους ορισμούς μας έχουμε με  $v_h = T_h f, w_h = T_h g$

$$\begin{aligned}
(T_h f, g) - (f, T_h g) &= B_\kappa[T_h g, T_h f] - B_\kappa[T_h f, T_h g] \\
&= \int_\Omega \sum_{j=1}^d a_j \left( \frac{\partial w_h}{\partial x_j} v_h - \frac{\partial v_h}{\partial x_j} w_h \right) dx \\
&= - \int_\Omega \sum_{j=1}^d \left( 2a_j \frac{\partial v_h}{\partial x_j} w_h + \frac{\partial a_j}{\partial x_j} v_h w_h \right) dx \tag{5.3.13}
\end{aligned}$$

και άρα

$$\begin{aligned}
|(T_h f, g) - (f, T_h g)| &\leq C \|v_h\|_1 \|w_h\| = C \|T_h f\|_1 \|T_h g\| \\
&\leq C (f, T_h f)^{1/2} \|T_h g\|
\end{aligned}$$

που δείχνει την (iii) και έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη του λήμματος. ■

Ένα άλλο παράδειγμα οικογένειας τελεστών  $T_h$  που ικανοποιούν τις (i),(ii),(iii) προέρχεται από τη γενίκευση της μεθόδου του Nitsche, όπου η διγραμμική ορφή ορίζεται τώρα ως

$$N_{\kappa,\gamma}[t; \phi, \psi] = B_\kappa[t; \phi, \psi] - \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial v}, \psi \right\rangle - \left\langle \phi, \frac{\partial \psi}{\partial v} + \sum_{j=1}^2 a_j n_j \psi \right\rangle + \gamma h^{-1} \langle \phi, \psi \rangle$$

όπου  $\partial/\partial v = \sum_{jk} n_j a_{jk} \partial/\partial x_k$  η συνκανονική παράγωγος.

Επιστρέφουμε στο πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών (5.3.1) και ξεκινάμε την ανάλυση σφαλμάτων στον  $L^2$  με το ακόλουθο απλό αποτέλεσμα από τη μη-ομογενή εξίσωση, που γενικεύει το Θεώρημα 5.2.3. Παρατηρούμε ότι η συνθήκη (iii) δεν εμφανίζεται σε αυτό το αποτέλεσμα.

**Θεώρημα 5.3.1** Έστω ισχύουν οι (i) και (ii). Τότε, έχουμε για το σφάλμα στο ημιδιακριτό πρόβλημα (5.3.9) ότι

$$\|u_h(t) - u(t)\| \leq C \|v_h - v\| + Ch^r \left( \|v\|_r + \int_0^t \|u_t\|_r ds \right) \text{ για } t \in \bar{J}.$$

**Απόδειξη.** Με τον παραπάνω συμβολισμό, θέτουμε  $e = \check{u}_h - \check{u} = e^{-\kappa t} (u_h - u)$ . Έχουμε τότε την εξίσωση σφάλματος:

$$T_h e_t + e = \rho := (T_h - T) L_\kappa \check{u}.$$

Ανακαλώντας το Λήμμα 5.2.4, έχουμε

$$\|e(t)\| \leq \|e(0)\| + C \left( \|\rho(0)\| + \int_0^t \|\rho_t\| ds \right).$$

Εδώ από τη (ii) έχουμε

$$\|\rho(0)\| \leq Ch^r \|L_\kappa v\|_{r-2} \leq Ch^r \|v\|_r$$

και

$$\begin{aligned} \|\rho_t\| &\leq \|(T'_h - T')L_\kappa \check{u}\| + \|(T_h - T)(L' \check{u} + L_\kappa \check{u}_t)\| \\ &\leq Ch^r (\|\check{u}\|_r + \|\check{u}_t\|_r) \leq Ch^r (\|u\|_r + \|u_t\|_r) \end{aligned}$$

όπου  $L' = L'(t)$  συμβολίζει τον τελεστή που προέρχεται από τον  $L(t)$  παραγωγίζοντας τους συντελεστές του ως προς  $t$ . Έτσι, επειδή το  $J$  είναι φραγμένο,

$$\int_0^t \|\rho\| ds \leq Ch^r \left( \|v\|_r + \int_0^t \|u_t\|_r ds \right)$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. ■

Κοιτάμε τώρα την ομογενή εξίσωση

$$u_t + L(t)u = 0 \text{ στο } \Omega \text{ για } t \in J \quad (5.3.14)$$

πάλι με τις αρχικές-συνοριακές συνθήκες του (5.3.1) και το ημιδιακριτό ανάλογο του, να βρούμε  $u_h(t) : J \rightarrow S_h$  τέτοια ώστε η  $\check{u}_h(t) = e^{-\kappa t} u_h(t)$  να ικανοποιεί την

$$T_h \check{u}_{h,t} + \check{u}_h = 0 \text{ για } t \in J \text{ με } \check{u}_h(0) = v_h. \quad (5.3.15)$$

Ως παράδειγμα, θα δείξουμε την ακόλουθη εκτίμηση σφάλματος για μη ομαλά δεδομένα στην περίπτωση που ο  $S_h$  αποτελείται από συνεχείς κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις.

**Θεώρημα 5.3.2** Έστω ότι οι (i),(ii) με  $r = 2$  και (iii) ισχύουν και ότι  $v_h = P_h v$ . Τότε, έχουμε για το σφάλμα του ημιδιακριτού ομογενούς παραβολικού προβλήματος (5.3.15)

$$\|u_h(t) - u(t)\| \leq Ch^2 t^{-1} \|v\| \text{ για } t \in J.$$

Θα ξεκινήσουμε την απόδειξη δείχνοντας κάποια σφάλματα για τον  $T'_h$ .

**Λήμμα 5.3.2** Έστω ισχύει η (ii) με  $r = 2$ . Τότε, για  $f \in L^2$

$$|(T'_h f, f)| \leq C((T_h f, f) + h^2 \|f\|^2)$$

και

$$\|T'_h f\| \leq C(\|T_h f\| + h^2 \|f\|).$$

**Απόδειξη.** Θα δείξουμε τα συνεχή ανάλογα αυτών των εκτιμήσεων, δηλαδή

$$|(T'f, f)| \leq C(Tf, f) \text{ και } \|T'f\| \leq C\|Tf\|.$$

Τα επιθυμητά αποτελέσματα προκύπτουν εύκολα τότε από τη (ii), όπως π.χ. για την πρώτη ανισότητα :

$$\begin{aligned} |(T'_h f, f)| &= |(T'f, f) + ((T'_h - T')f, f)| \leq C((Tf, f) + h^2\|f\|^2) \\ &\leq C((T_h f, f) + h^2\|f\|^2). \end{aligned}$$

Για τα συνεχή ανάλογα, λοιπόν, θυμόμαστε τον ορισμό (5.3.6) και παρατηρούμε ότι μπορούμε να προσδιορίσουμε τον συζυγή του  $T$  στον  $L^2$  μέσω του τελεστή  $T^* : L^2 \rightarrow H^2 \cap H_0^1$  που ορίζεται από την  $B_\kappa[\phi, T^*g] = (\phi, g)$  για  $\phi \in H_0^1$ , είναι, δηλαδή, η λύση του Dirichlet προβλήματος που αντιστοιχεί στον ελλειπτικό τελεστή  $L_\kappa^*$ . Για

$$(Tf, g) = B_\kappa[Tf, T^*g] = (f, T^*g) \quad \forall f, g \in L^2.$$

Παραγωγίζοντας την (5.3.6), έχουμε  $B_\kappa[T'f, \phi] + B'[Tf, \phi] = 0$  και βρίσκουμε

$$\begin{aligned} |(T'f, f)| &= |B_\kappa[T'f, T^*f]| = |B'[Tf, T^*f]| \leq C\|Tf\|_1\|T^*f\|_1 \\ &\leq C(f, Tf)^{1/2}(T^*f, f)^{1/2} = C(f, Tf) \end{aligned}$$

που είναι το πρώτο από τα επιθυμητά αποτελέσματα.

Επιπλέον, για  $\phi \in L^2$ ,  $(T'f, \phi) = B_\kappa[T'f, T^*\phi] = -B'[Tf, T^*\phi]$  και χρησιμοποιώντας τον τύπο του Green για να μεταφέρουμε τις παραγώγους στον δεύτερο όρο :

$$|(T'f, \phi)| \leq C\|Tf\|\|T^*\phi\|_2 \leq C\|Tf\|\|\phi\|$$

που δείχνει τη δεύτερη ζητούμενη εκτίμηση. ■

Επειδή έχουμε μη-ομαλά δεδομένα, θα χρειαστούμε στην απόδειξή μας και το ακόλουθο Λήμμα, το οποίο παραθέτουμε χωρίς απόδειξη.

**Λήμμα 5.3.3** Έστω ισχύουν οι (i),(ii) με  $r = 2$  και (iii), καθώς και ότι

$$T_h e_t + e = \rho \text{ για } t \in J \text{ με } T_h e(0) = 0. \quad (5.3.16)$$

Τότε, για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $C_\varepsilon$  τέτοιο ώστε

$$\|e(t)\| \leq \varepsilon \sup_{s \leq t} (s\|\rho_t(s)\|) + C_\varepsilon \sup_{s \leq t} \|\rho(s)\| \text{ για } t \in J.$$

Θα χρειαστούμε, τέλος, και το ακόλουθο Λήμμα, το οποίο επίσης θα παρουσιάσουμε χωρίς απόδειξη.

**Λήμμα 5.3.4** Για κάθε  $j \geq 0$  έχουμε για τη λύση του (5.3.14) με  $u(0) = v$  ότι

$$\|D_t^j u(t)\| \leq Ct^{-j} \|v\| \quad \text{για } t \in J. \quad (5.3.17)$$

Επιστρέφουμε τώρα στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.3.2.

**Απόδειξη.** Από τους ορισμούς μας το σφάλμα  $e = \check{u}_h - \check{u} = e^{-\kappa t}(u_h - u)$  ικανοποιεί την εξίσωση

$$T_h e_t + e = \rho = -(T_h - T)\check{u}_t \quad \text{για } t \in J. \quad (5.3.18)$$

Παρατηρούμε ακόμα ότι για  $v_h = P_h v$  έχουμε  $T_h e(0) = 0$ , αφού, επειδή το  $e(0) = P_h v - v$  είναι ορθογώνιο στον  $S_h$ , έχουμε από την (iii) ότι για κάθε  $\chi \in S_h$

$$|(T_h(0), \chi)| = |(T_h e(0), \chi) - (e(0), T_h \chi)| \leq C(T_h e(0), e(0))^{1/2} \|T_h \chi\| = 0.$$

Θα δείξουμε τώρα, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 5.3.3, ότι για  $\tilde{\rho}(t) = \int_0^t \rho ds$

$$\|e(t)\| \leq Ct^{-1} \sup_{s \leq t} (s^2 \|\rho_t\| + s \|\rho\| + \|\tilde{\rho}\| + h^2 \|e\|) \quad \text{για } t \in J. \quad (5.3.19)$$

Θα ολοκληρώσουμε πρώτα την απόδειξη υποθέτοντας ότι αυτή η ανισότητα έχει ήδη αποδειχθεί. Έχουμε από το Λήμμα 4.4

$$s \|\rho(s)\| = s \|(T_h - T)\check{u}_t(s)\| \leq Ch^2 s \|\check{u}_t(s)\| \leq Ch^2 \|v\|$$

και

$$\begin{aligned} s^2 \|\rho_t(s)\| &\leq s^2 \|(T'_h - T')\check{u}_t\| + s^2 \|(T_h - T)\check{u}_{tt}\| \\ &\leq Ch^2 s^2 (\|\check{u}_t(s)\| + \|\check{u}_{tt}(s)\|) \leq Ch^2 \|v\|. \end{aligned}$$

Επειδή

$$\tilde{\rho}(t) = - \int_0^t (T_h - T)\check{u}_t ds = -[(T_h - T)\check{u}(s)]_0^t + \int_0^t (T'_h - T')\check{u} ds,$$

έχουμε ακόμα

$$\|\tilde{\rho}(s)\| \leq Ch^2 \sup_{y \leq s} \|\check{u}(y)\| \leq Ch^2 \|v\|$$



και η ευστάθεια των επιλυόντων τελεστών δίνει άμεσα

$$\|e(s)\| \leq \|\tilde{u}_h(s)\| + \|\tilde{u}(s)\| \leq 2\|v\|.$$

Αν τις εισάγουμε στην (5.3.19), έχουμε  $\|e(t)\| \leq Ch^2t^{-1}\|v\|$ , που είναι το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Για να δείξουμε την (5.3.19), θέτουμε  $w = te$ . Θα δείξουμε ότι

$$\|w(t)\| \leq C \sup_{s \leq t} (s^2 \|\rho_t\| + s \|\rho\| + \|T_h e\|) \quad (5.3.20)$$

και έπειτα

$$\|T_h e(t)\| \leq C \sup_{s \leq t} (s \|\rho\| + \|\tilde{\rho}\| + h^2 \|e\|). \quad (5.3.21)$$

Μαζί αυτές οι εκτιμήσεις συνεπάγονται την (5.3.19).

Ξεκινάμε με την (5.3.20) και παρατηρούμε ότι η  $w$  ικανοποιεί την

$$T_h w_t + w = \omega = t\rho + T_h e.$$

Παρατηρούμε, χρησιμοποιώντας την (5.3.18), το Λήμμα 5.3.2 και τη φραξιμότητα του  $T'_h$ , ότι

$$\|\omega_t\| = \|t\rho_t + \rho + T_h e_t + T'_h e\| \leq C(t\|\rho_t\| + \|\rho\| + \|e\|).$$

Έτσι, από το Λήμμα 5.3.3 έχουμε για κατάλληλο  $\varepsilon$  ότι, αφού  $w(0) = 0$ , για  $t \in J$

$$\begin{aligned} \|w(t)\| &\leq \varepsilon \sup_{s \leq t} (s \|\omega_t(s)\|) + C_\varepsilon \sup_{s \leq t} \|\omega(s)\| \\ &\leq \frac{1}{2} \sup_{s \leq t} \|w(s)\| + C \sup_{s \leq t} (s^2 \|\rho_t\| + s \|\rho\| + \|T_h e\|) \end{aligned}$$

που δίνει την (5.3.20).

Για την (5.3.21) ολοκληρώνουμε την εξίσωση σφάλματος (5.3.16) και παίρνουμε για  $\tilde{e}(t) = \int_0^t e \, ds$ , θυμώμενοι και ότι  $T_h e(0) = 0$ , ότι

$$T_h e + \tilde{e} \equiv T_h \tilde{e}_t + \tilde{e} = \tilde{\rho} + \int_0^t T'_h e \, ds. \quad (5.3.22)$$

Επειδή  $\tilde{e}(0) = 0$ , μπορούμε να ξαναεφαρμόσουμε το Λήμμα 5.3.3 για να βρούμε ότι

$$\|\tilde{e}(t)\| \leq \varepsilon \sup_{s \leq t} (s \|\tilde{\rho}_t\| + s \|T'_h e\|) + C_\varepsilon \sup_{s \leq t} (\|\tilde{\rho}\| + \|\int_0^s T'_h e \, dy\|)$$

και, συνεπώς, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 5.3.2 για να εκτιμήσουμε το  $T'_h e$ ,

$$\|\tilde{e}(t)\| \leq \varepsilon \sup_{s \leq t} (s \|\rho\| + Cs \|T_h e\| + Csh^2 \|e\|) + C_\varepsilon \sup_{s \leq t} \|\tilde{\rho}\| + C_\varepsilon \int_0^t (\|T_h e\| + h^2 \|e\|) \, ds.$$

Προκύπτει από την (5.3.22) ότι

$$\begin{aligned} \|T_h e(t)\| &\leq \|\tilde{e}\| + \|\tilde{\rho}\| + \left\| \int_0^t T_h' e \, ds \right\| \\ &\leq \varepsilon C \bar{t} \sup_{s \leq t} \|T_h e(s)\| + C_\varepsilon \sup_{s \leq t} (s \|\rho\| + \|\tilde{\rho}\| + h^2 \|e\|) + C_\varepsilon \int_0^t \|T_h e\| \, ds. \end{aligned}$$

Διαλέγοντας  $\varepsilon$  τέτοιο ώστε  $\varepsilon C \bar{t} < 1$ , αυτό μας δίνει για  $t \in \bar{J}$  ότι

$$\|T_h e(t)\| \leq C \sup_{s \leq t} (s \|\rho\| + \|\tilde{\rho}\| + h^2 \|e\|) + C \int_0^t \|T_h e\| \, ds.$$

Η ζητούμενη ανισότητα (5.3.21) προκύπτει τώρα άμεσα από εφαρμογή του Λήμματος του Gronwall και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. ■

## Κεφάλαιο 6

# Παραδείγματα στο FreeFem++

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε παραδείγματα γραμμικών και μη γραμμικών ελλειπτικών και παραβολικών μερικών διαφορικών εξισώσεων και θα προσπαθήσουμε να επαληθεύσουμε τις εκτιμήσεις σφαλμάτων που προκύπτουν από τη θεωρία.

### 6.1 Ελλειπτικές ΜΔΕ

Θα λύσουμε ένα γραμμικό και ένα μη γραμμικό ελλειπτικό πρόβλημα χρησιμοποιώντας στοιχεία Lagrange.

Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι ισχύουν οι εξής εκτιμήσεις για τα σφάλματα στην  $L^2$  και την  $H^1$ -νόρμα.

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq Ch^2 \quad (6.1.1)$$

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq Ch \quad (6.1.2)$$

Για να επαληθεύσουμε αυτές τις εκτιμήσεις, θα λύσουμε τα προβλήματά μας σε πλέγμα με  $h$  που συνεχώς θα υποδιπλασιάζεται. Στη συνέχεια, θα πάρουμε το λόγο των ανά δύο διαδοχικών σφαλμάτων, ο οποίος, αν όλα είναι σωστά, θα πρέπει να τείνει στο  $4 = 2^2$  και στο  $2 = 2^1$ , επαληθεύοντας τάξη σύγκλισης 2 και 1 για την  $L^2$  και την  $H^1$ -νόρμα αντίστοιχα.

### 6.1.1 Γραμμικό Πρόβλημα

Ξεκινάμε με ένα απλό πρόβλημα Poisson στις δύο διαστάσεις.

$$-\Delta u = 2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y) \quad \text{στο } \Omega = (0, 1) \times (0, 1) \quad (6.1.3)$$

$$u = 0 \quad \text{στο } \partial\Omega \quad (6.1.4)$$

Η πραγματική λύση του προβλήματος είναι η  $u(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ .

Θεωρούμε ότι  $u \in H^2((0, 1) \times (0, 1))$  και ορίζουμε ως χώρο πεπερασμένων στοιχείων  $V$  το χώρο των  $H^1$  συναρτήσεων που μηδενίζονται στο σύνορο. Επιλέγουμε  $v \in V$ , πολλαπλασιάζουμε με  $v$  την (6.1.3) και ολοκληρώνουμε στο  $\Omega$ . Τότε, προκύπτει για  $f = 2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ :

$$\int_{\Omega} -\Delta u \cdot v \, dx \, dy = \int_{\Omega} f v \, dx \, dy.$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Green, αυτό γίνεται

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \, dy - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot v = \int_{\Omega} f v \, dx \, dy$$

που επειδή έχουμε πάρει  $v \in V$ , δηλαδή  $v = 0$  στο  $\partial\Omega$ , γίνεται

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \, dy = \int_{\Omega} f v \, dx \, dy. \quad (6.1.5)$$

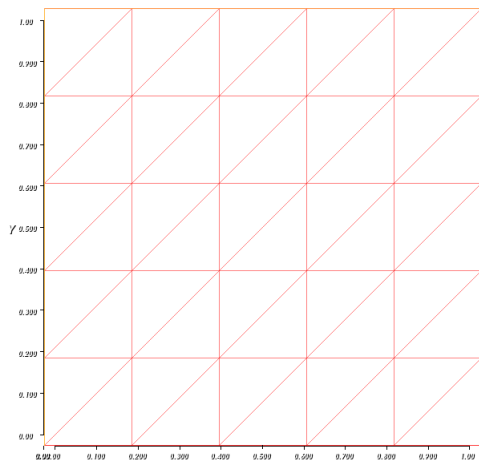
Επιλύοντας το πρόβλημα για συνεχώς υποδιαπλασιαζόμενο  $h$ , προκύπτει ο παρακάτω πίνακας αποτελεσμάτων.

Μέγεθος Πλέγματος	Εκτιμήσεις Σφαλμάτων			
	$\ u - u_h\ _{L^2(V_h)}$	$\frac{\ u - u_{h_{prev}}\ _{L^2(V_{h_{prev}})}}{\ u - u_h\ _{L^2(V_h)}}$	$\ u - u_h\ _{H^1(V_h)}$	$\frac{\ u - u_{h_{prev}}\ _{H^1(V_{h_{prev}})}}{\ u - u_h\ _{H^1(V_h)}}$
0.282843	0.0780602	-	0.697228	-
0.141421	0.0210895	3.70138	0.349199	1.99665
0.0707107	0.00537942	3.92039	0.174516	2.00096
0.0353553	0.00135171	3.97973	0.0872417	2.00037
0.0176777	0.000338357	3.99491	0.0436187	2.0001
0.00883883	8.46163ε-005	3.99872	0.021809	2.00003

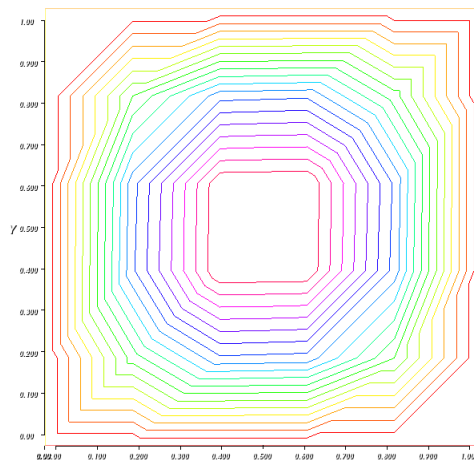
Στον παραπάνω πίνακα  $u_h$  είναι η  $V_h$  συνάρτησή μας που προσεγγίζει τη  $u$  στον πεπερασμένης διάστασης χώρο  $V_h$ .

Παρατηρούμε ότι οι λόγοι των σφαλμάτων τείνουν πράγματι στις τιμές που περιμέναμε, επαληθεύοντας τη θεωρία.

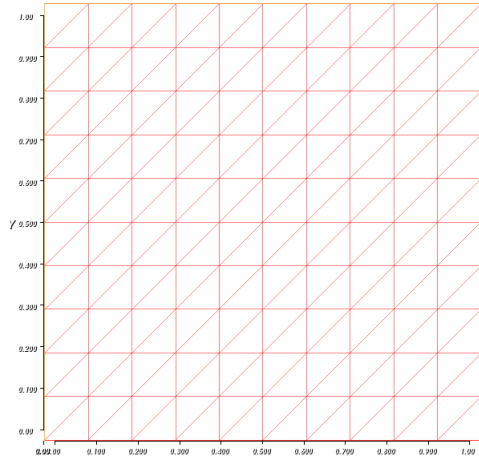
Ακολουθούν τα πλέγματα και οι  $u_h$  που αντιστοιχούν στα παραπάνω  $h$ , καθώς και η πραγματική λύση την οποία παρατηρούμε ότι την προσεγγίζουμε όλο και καλύτερα όσο μικραίνουμε το  $h$ .



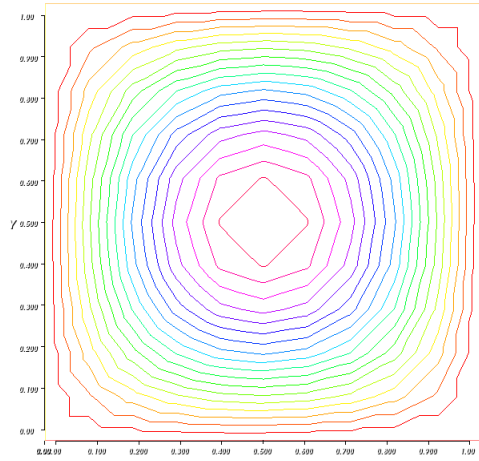
(α) Το πλέγμα για  $h = 0.282843$



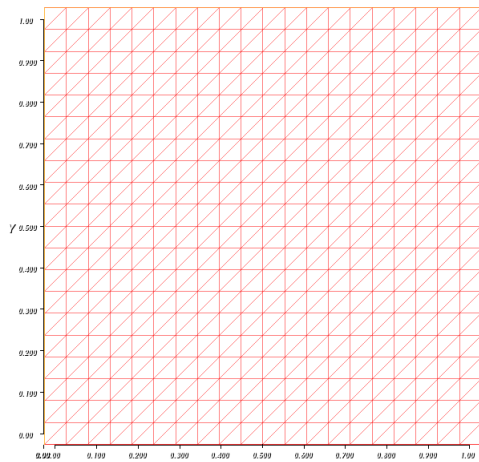
(β) Η  $u_h$  γι' αυτό το πλέγμα



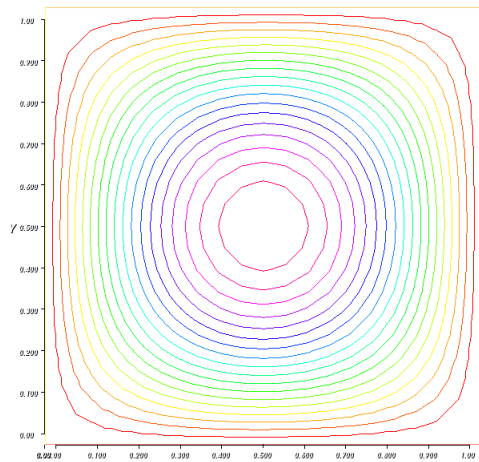
(γ) Το πλέγμα για  $h = 0.141421$



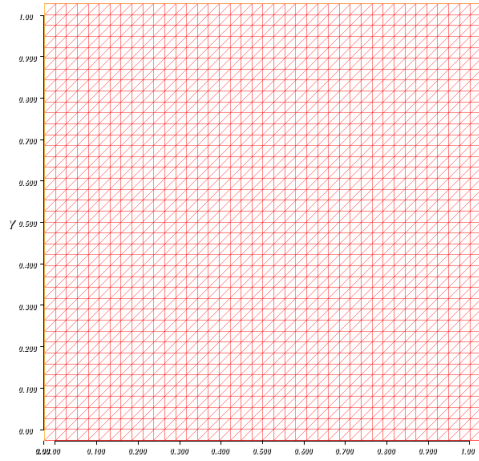
(δ) Η  $u_h$  γι' αυτό το πλέγμα



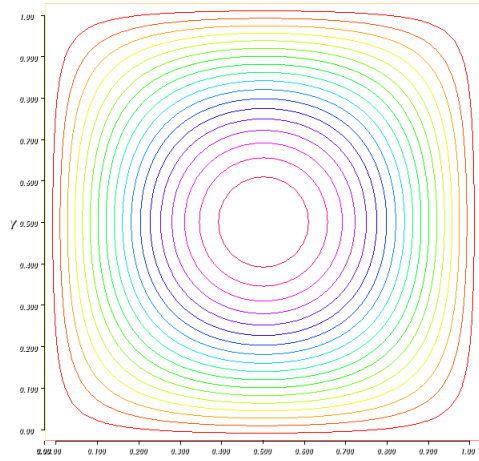
(ε) Το πλέγμα για  $h = 0.0707107$



(ϛ) Η  $u_h$  γι' αυτό το πλέγμα



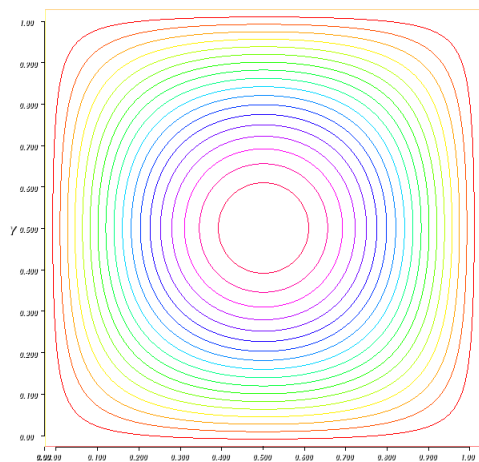
(ζ) Το πλέγμα για  $h = 0.0353553$



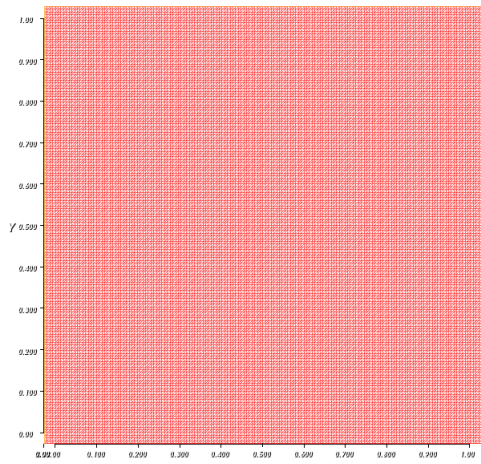
(η) Η  $u_h$  γι' αυτό το πλέγμα



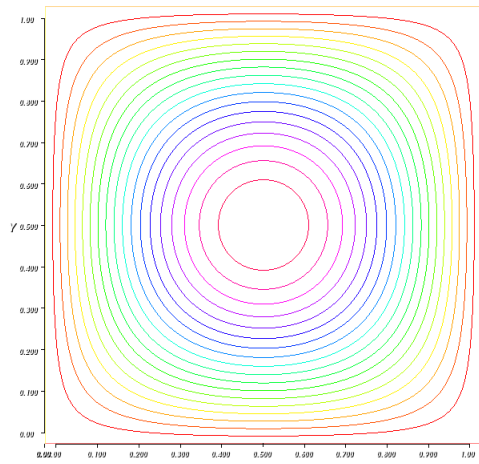
(θ) Το πλέγμα για  $h = 0.0176777$



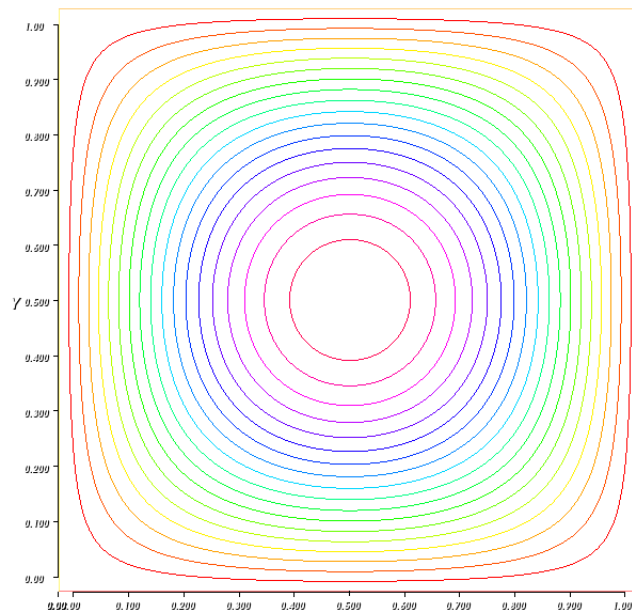
(ι) Η  $u_h$  γι' αυτό το πλέγμα



(α) Το πλέγμα για  $h = 0.00883883$



(β) Η  $u_h$  γι' αυτό το πλέγμα



Σχήμα 6.1: Πραγματική λύση



### 6.1.2 Μη Γραμμικό Πρόβλημα

Συνεχίζουμε με ένα μη γραμμικό ελλειπτικό πρόβλημα στο οποίο θα προσπαθήσουμε να επαληθεύσουμε τις ίδιες εκτιμήσεις σφαλμάτων, όπως και προηγουμένως.

Το πρόβλημα Poisson είναι το προηγούμενο στο οποίο προσθέτουμε επιπλέον έναν παράγοντα  $u^3$  για να γίνει μη γραμμικό. :

$$\begin{aligned} -\Delta u + u^3 &= 2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y) + \sin^3(\pi x) \sin^3(\pi y) & \text{στο } \Omega &= (0, 1) \times (0, 1) \\ u &= 0 & \text{στο } \partial\Omega & \end{aligned} \quad (6.1.6)$$

Η πραγματική λύση είναι και πάλι η  $u(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$  και ανήκει στον  $H^2(\Omega)$  και ορίζουμε όπως και προηγουμένως το χώρο  $V$  των  $H^1$  συναρτήσεων που μηδενίζονται στο σύνορο.

Επιλέγοντας  $v \in V$ , μπορούμε όπως και πριν να καταλήξουμε για  $f = 2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y) + \sin^3(\pi x) \sin^3(\pi y)$  ότι

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \, dy + \int_{\Omega} u^3 v \, dx \, dy = \int_{\Omega} f v \, dx \, dy \quad (6.1.7)$$

Λόγω της μη γραμμικότητας του προβλήματος, δηλαδή λόγω του όρου  $u^3$ , δεν μπορούμε να ορίσουμε κάποια διγραμμική μορφή για το πρόβλημα. Για να το ξεπεράσουμε αυτό, ορίζουμε ως  $b = uu^2$  όπου  $uu$  είναι η προηγούμενη τιμή της  $u$  σε μία επαναληπτική διαδικασία που θα χρησιμοποιήσουμε για να λύσουμε το πρόβλημα. Έχουμε λοιπόν

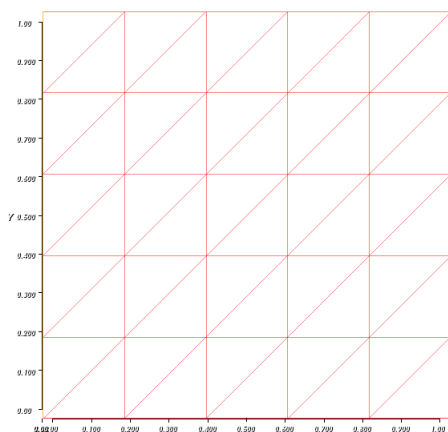
$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \, dy + \int_{\Omega} buv \, dx \, dy = \int_{\Omega} f v \, dx \, dy \quad (6.1.8)$$

και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία του προηγούμενου παραδείγματος, αλλά κάνοντας και δέκα επαναλήψεις για να προσεγγίσουμε τη  $u$  ανανεώνοντας συνεχώς την τιμή του  $b$  σε κάθε επανάληψη για το πλέγμα.

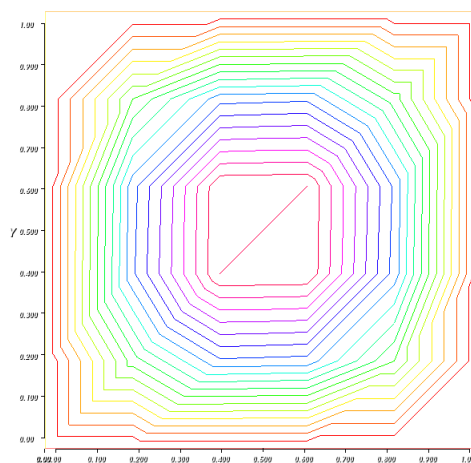
Με αυτό τον τρόπο προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας αποτελεσμάτων, από τον οποίο βλέπουμε ότι και πάλι επαληθεύονται οι θεωρητικές εκτιμήσεις για τα σφάλματα.

Μέγεθος Πλέγματος	Εκτιμήσεις Σφαλμάτων			
	$\ u - u_h\ _{L^2(V_h)}$	$\frac{\ u - u_{h_{prev}}\ _{L^2(V_{h_{prev}})}}{\ u - u_h\ _{L^2(V_h)}}$	$\ u - u_h\ _{H^1(V_h)}$	$\frac{\ u - u_{h_{prev}}\ _{H^1(V_{h_{prev}})}}{\ u - u_h\ _{H^1(V_h)}}$
0.282843	0.07474372731	-	0.693993306	-
0.141421	0.02000612953	3.736041356	0.3486502025	1.990514564
0.0707107	0.005089415316	3.930928858	0.1744414171	1.99866642
0.0353553	0.00127795793	3.9824592	0.08723223578	1.999735711
0.0176777	0.0003198583729	3.995386828	0.04361746302	1.999938322
0.00883883	8.038278655e-005	3.979189907	0.02180890792	1.999983822

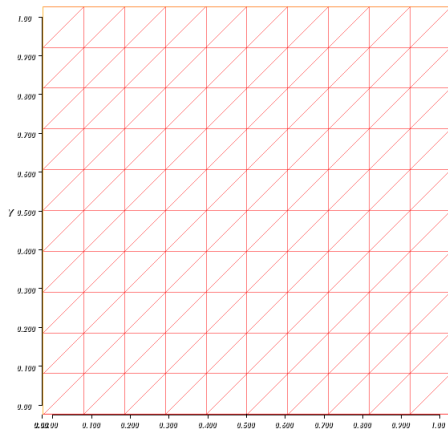
Ακολουθούν τα πλέγματα και οι  $u_h$  που αντιστοιχούν στα παραπάνω  $h$ , καθώς και η πραγματική λύση την οποία παρατηρούμε ότι επίσης την προσεγγίζουμε όλο και καλύτερα όσο μικραίνουμε το  $h$ .



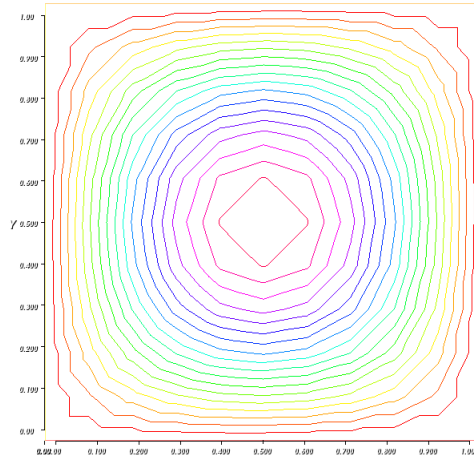
(α) Το πλέγμα για  $h = 0.282843$



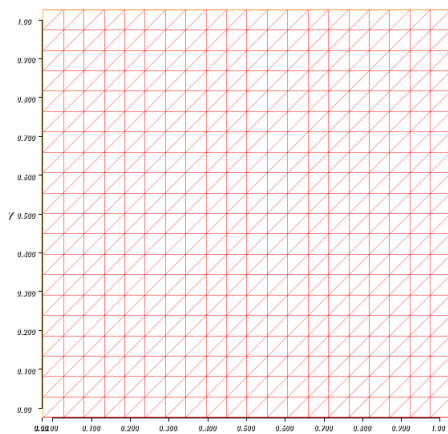
(β) Η  $u_h$  γι' αυτό το πλέγμα



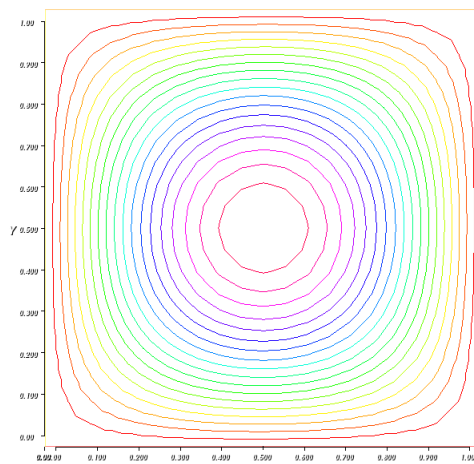
(γ) Το πλέγμα για  $h = 0.141421$



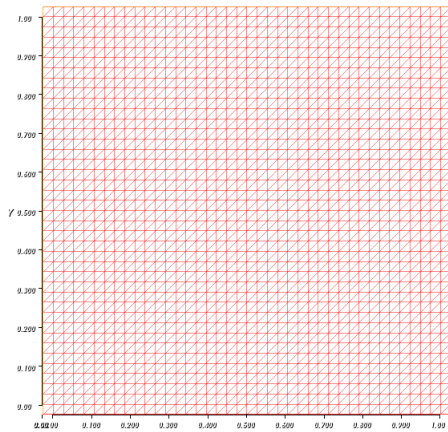
(δ) Η  $u_h$  γι' αυτό το πλέγμα



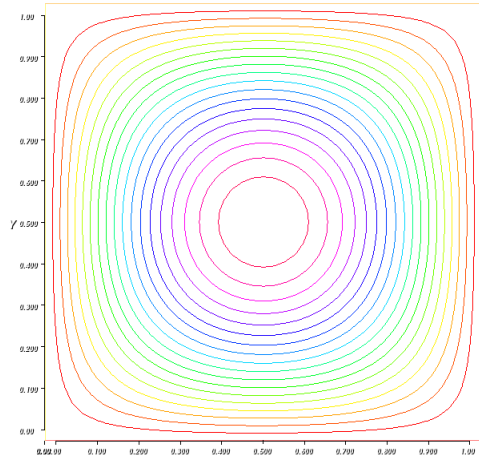
(ε) Το πλέγμα για  $h = 0.0707107$



(ϛ) Η  $u_h$  γι' αυτό το πλέγμα



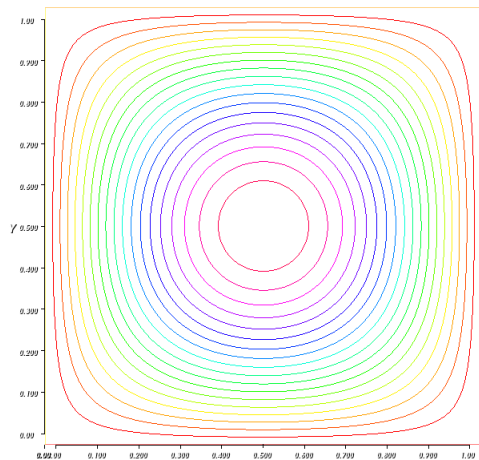
(ζ) Το πλέγμα για  $h = 0.0353553$



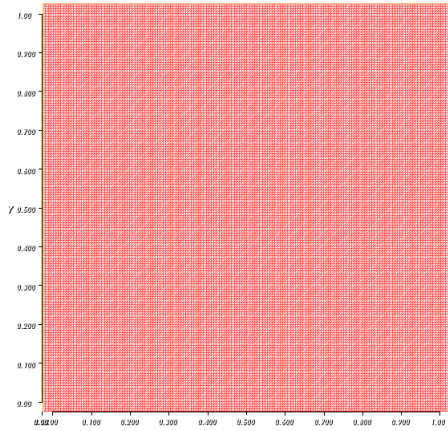
(η) Η  $u_h$  γι' αυτό το πλέγμα



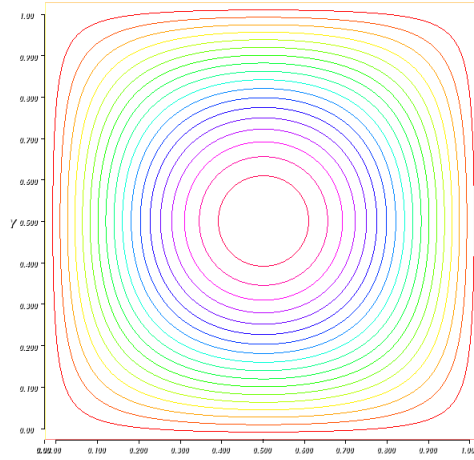
(θ) Το πλέγμα για  $h = 0.0176777$



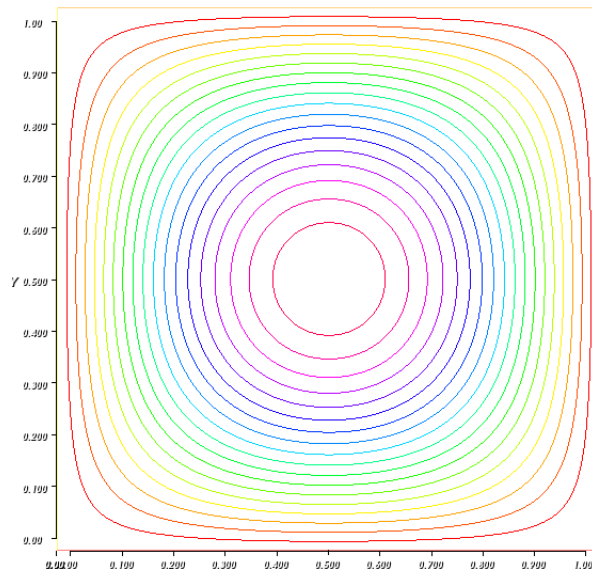
(ι) Η  $u_h$  γι' αυτό το πλέγμα



(α') Το πλέγμα για  $h = 0.00883883$



(β') Η  $u_h$  γι' αυτό το πλέγμα



Σχήμα 6.2: Πραγματική λύση

## 6.2 Γραμμική Παραβολική ΜΔΕ

Θα λύσουμε ένα γραμμικό παραβολικό πρόβλημα χρησιμοποιώντας στοιχεία Lagrange.

Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι, απορροφώντας σε σταθερές  $C$  τις νόρμες της πραγματικής λύσης, των χρονικών της παραγώγων και της αρχικής συνάρτησης, ισχύουν οι εξής εκτιμήσεις για τα σφάλματα στην  $L^2$  και την  $H^1$ -νόρμα.

$$\|u - u_h\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C(h^2 + k) \quad (6.2.1)$$

$$\|u - u_h\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C(h + k) \quad (6.2.2)$$

όπου  $k = dt$  της χρονικής διακριτοποίησης.

Για να επαληθεύσουμε αυτές τις εκτιμήσεις, θα λύσουμε τα προβλήματά μας σε πλέγμα με  $h$  που συνεχώς θα υποδιπλασιάζεται, όπως και πριν. Στη συνέχεια, θα πάρουμε το λόγο των ανά δύο διαδοχικών σφαλμάτων για συγκεκριμένη σχέση ανάμεσα στα  $k$  και  $h$  και θα επαληθεύσουμε τις θεωρητικές εκτιμήσεις.

Παίρνουμε ένα απλό πρόβλημα Poisson στις δύο διαστάσεις, το οποίο είναι το αντίστοιχο γραμμικό ελλειπτικό πρόβλημα στο οποίο προσθέσαμε και την πρώτη παράγωγο ως προς το χρόνο με  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$  και  $T = (0, 1)$ .

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 2\pi^2 e^{-t} \sin(\pi x) \sin(\pi y) - e^{-t} \sin(\pi x) \sin(\pi y) \quad \text{στο } \Omega \times T \quad (6.2.3)$$

$$u = 0 \quad \text{στο } \partial\Omega \times \partial T \quad (6.2.4)$$

Η πραγματική λύση του προβλήματος είναι η  $u(x, y) = e^{-t} \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ .

Για να λύσουμε το πρόβλημα αυτή τη φορά, προχωράμε σε μία διακριτοποίηση του χρόνου, όπου θέτουμε ως χρονικό βήμα κάθε φορά  $(k = )dt = h^2$ , για να έχουμε εκτιμήσεις ανάλογες των  $h^2$  και  $h$  στην  $L^2$  και  $H^1$  νόρμα αντίστοιχα και να παρατηρήσουμε αντίστοιχες τάξεις 2 και 1, όπως στο ελλειπτικό πρόβλημα. Θα μπορούσαμε βέβαια να έχουμε πάρει άλλη σχέση ανάμεσα στο  $h$  και το  $dt$ , όπως πχ να είναι ίσα, αλλά τότε θα έπρεπε να περιμένουμε και άλλη τάξη στα αποτελέσματά μας.

Έχοντας κάνει διακριτοποίηση ως προς το χρόνο, εκφράζουμε την αρχική μας εξίσωση ως

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{dt} - \Delta u = f \quad (6.2.5)$$

όπου  $U^n = u(\cdot, t_n)$  και  $f = 2\pi^2 e^{-t} \sin(\pi x) \sin(\pi y) - e^{-t} \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ .

Έπειτα, θεωρώντας ότι για κάθε  $t$  η  $u \in V$  με  $V$  όπως στο ελλειπτικό πρόβλημα, παίρνουμε  $v \in V$

τέτοια που να μηδενίζεται στο σύνορο και προκύπτει όπως πριν:

$$\int_{\Omega} U^{n+1} v \, dx \, dy + \int_{\Omega} dt \cdot \nabla U^{n+1} \cdot \nabla v \, dx \, dy = \int_{\Omega} U^n v \, dx \, dy + \int_{\Omega} dt f v \, dx \, dy. \quad (6.2.6)$$

Επιλύοντας το πρόβλημα για συνεχώς υποδιαπλασιαζόμενο  $h$  και  $dt = h^2$ , προκύπτει ο παρακάτω πίνακας αποτελεσμάτων, ύστερα από εκτέλεση κώδικα στον οποίο γίνεται εσωτερική επανάληψη ως προς το χρόνο για κάθε διακριτοποίηση.

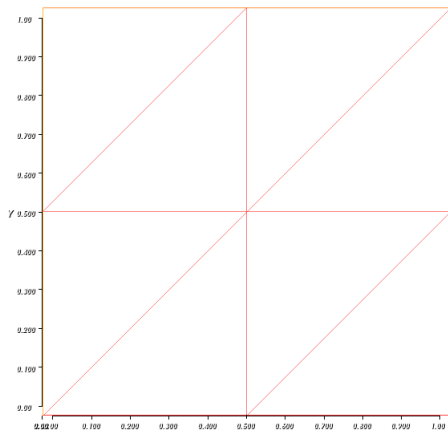
Στον πίνακα  $\|\cdot\|_{L^2} = \|\cdot\|_{L^2(0,T;L^2(V_h))}$ ,  $\|\cdot\|_{L^2_{prev}} = \|\cdot\|_{L^2(0,T;L^2(V_{h_{prev}}))}$ ,  $\|\cdot\|_{H^1} = \|\cdot\|_{L^2(0,T;H^1(V_h))}$  και  $\|\cdot\|_{H^1_{prev}} = \|\cdot\|_{L^2(0,T;H^1(V_{h_{prev}}))}$ .

Μέγεθος Πλέγματος	Εκτιμήσεις Σφαλμάτων			
	$\ u - u_h\ _{L^2}$	$\frac{\ u - u_{h_{prev}}\ _{L^2_{prev}}}{\ u - u_h\ _{L^2}}$	$\ u - u_h\ _{H^1}$	$\frac{\ u - u_{h_{prev}}\ _{H^1_{prev}}}{\ u - u_h\ _{H^1}}$
0.707107	0.2718087498	-	1.500467592	-
0.353553	0.08217960889	3.30749627	0.6383768747	2.350441646
0.176777	0.02184442372	3.762040598	0.2959165307	2.157286966
0.0883883	0.005554024807	3.93307997	0.1445759155	2.046789949
0.0441942	0.001394562197	3.982629688	0.0718475513	2.01225947
0.0220971	0.0003490236086	3.995609933	0.03586814225	2.003102106

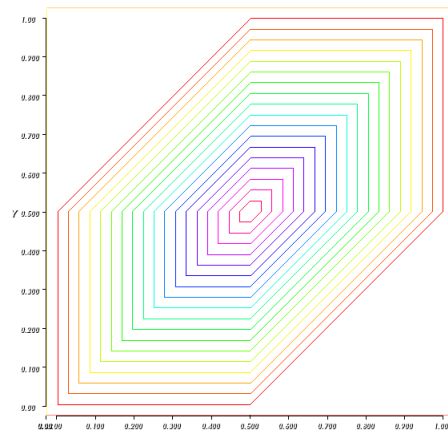
Στον παραπάνω πίνακα  $u_h$  είναι η συνάρτησή μας που προσεγγίζει τη  $u$ .

Παρατηρούμε ότι οι λόγοι των σφαλμάτων τείνουν πράγματι στις τιμές που περιμέναμε, επαληθεύοντας τη θεωρία.

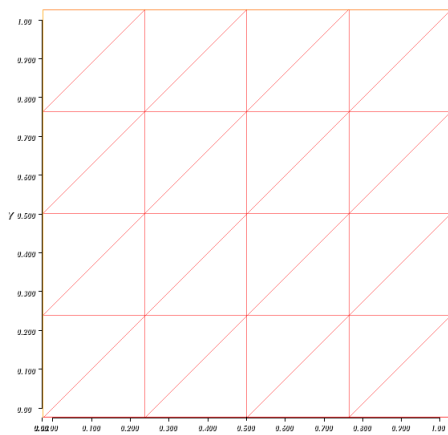
Ακολουθούν τα πλέγματα και οι  $u_h$  που αντιστοιχούν στα παραπάνω  $h$ , υπολογισμένες σε χρόνο  $t = 1$ .



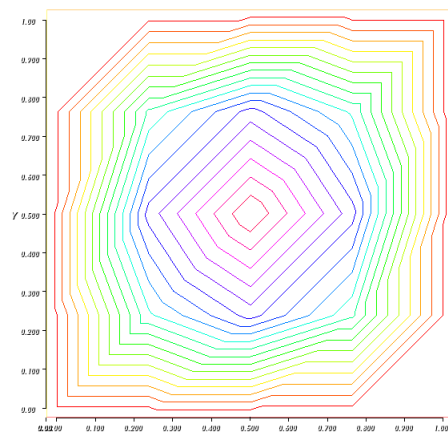
(α) Το πλέγμα για  $h = 0.707107$



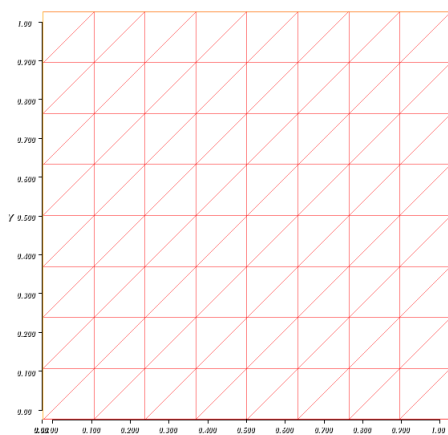
(β) Η  $u_h$  γι' αυτό το πλέγμα



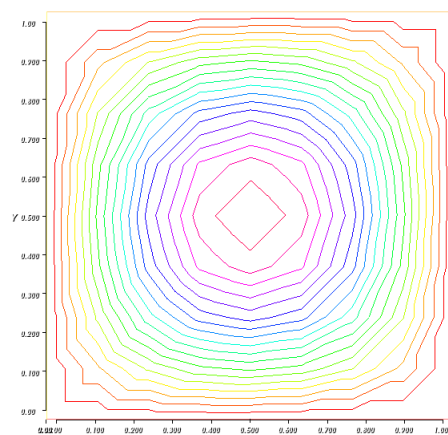
(γ) Το πλέγμα για  $h = 0.353553$



(δ) Η  $u_h$  γι' αυτό το πλέγμα

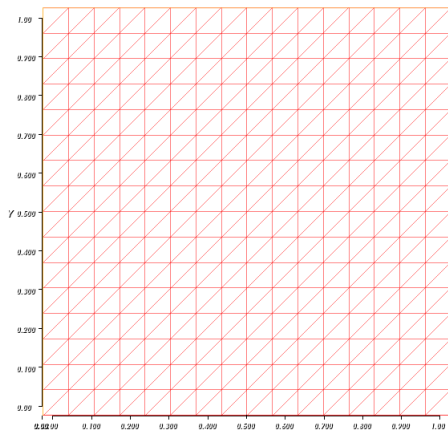


(ε) Το πλέγμα για  $h = 0.176777$

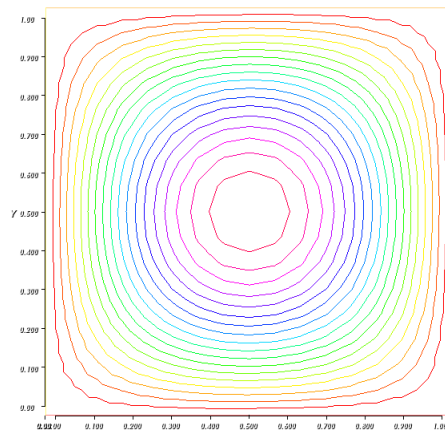


(ϛ) Η  $u_h$  γι' αυτό το πλέγμα

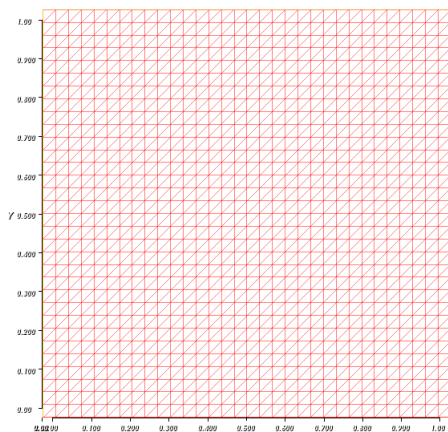




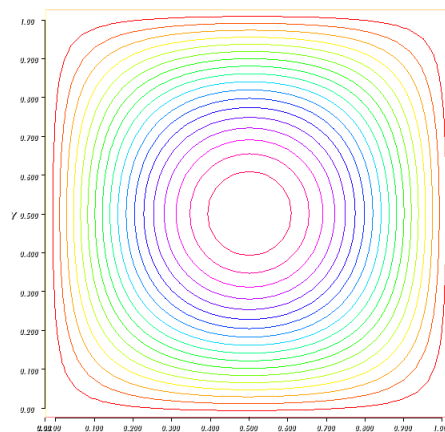
(ζ) Το πλέγμα για  $h = 0.0883883$



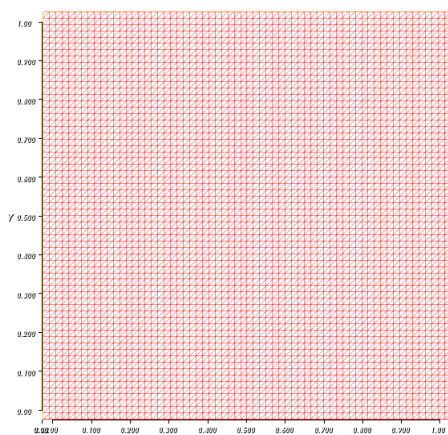
(η) Η  $u_h$  γι' αυτό το πλέγμα



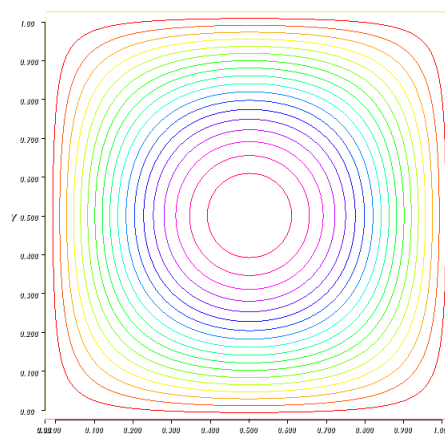
(θ) Το πλέγμα για  $h = 0.0441942$



(ι) Η  $u_h$  γι' αυτό το πλέγμα



(ια) Το πλέγμα για  $h = 0.0220971$



(ιβ) Η  $u_h$  γι' αυτό το πλέγμα

Ακολουθούν οι κώδικες του FreeFem++ για τα προηγούμενα παραδείγματα:

## Γραμμικό Ελλειπτικό Πρόβλημα

```
real L2pr=0,H1pr=0;

int n=5;

real L2,H1;

func g=sin(pi*x)*sin(pi*y);

for(int j=1;j<7;j++)
{
  mesh Th=square(n,n);
  fespace Vh(Th,P1);
  Vh u,v,f,h;

  h=hTriangle;

  f=2*pi^2*sin(pi*x)*sin(pi*y);

  problem linear(u,v)= int2d(Th) (dx(u)*dx(v)+dy(u)*dy(v))
  -int2d(Th) (f*v) + on(1,2,3,4,u=0);

  linear;

  L2= sqrt ( int2d(Th) ( (u-g)^2 ) );
  H1= sqrt (int2d(Th) ((u-g)^2
  + int2d(Th)((dx(u)-pi*cos(pi*x)*sin(pi*y))^2)
  + int2d(Th)((dy(u)-pi*sin(pi*x)*cos(pi*y))^2));
```

```

plot(Th);

plot(u);

cout << h[].max << endl;

n=2*n;

cout << L2 << endl;

cout << H1 << endl;

cout << L2pr/L2 << endl;

cout << H1pr/H1 << endl;

L2pr=L2;

H1pr=H1;

}

mesh Th=square(500,500);

fespace Vh(Th,P1);

Vh k=sin(pi*x)*sin(pi*y);

plot(k);

```

## **Μη-Γραμμικό Ελλειπτικό Πρόβλημα**

```

int n=5;

real[int] L2(6),H1(6);

func g=sin(pi*x)*sin(pi*y);

for(int j=1;j<7;j++)

{

mesh Th=square(n,n);

fespace Vh(Th,P1);

Vh u,v,b,f,F,h;

```

```

h=hTriangle;

varf A(u,v)= int2d(Th)( dx(u)*dx(v)+dy(u)*dy(v))
+ int2d(Th) (b*u*v)
+ on(1,2,3,4,u=0);

varf B([v],[f])= int2d (Th)(v*f);

f = 2*pi^2*sin(pi*x)*sin(pi*y)+(sin(pi*x))^3*(sin(pi*y))^3;

u=0;

for(int i=0;i<10;i++)
{
b=u^2;

matrix a=A(Vh,Vh);

matrix bc=B(Vh,Vh);

F[]=bc*f[];

u[]=a^-1*F[];
}

L2[j-1]= sqrt ( int2d(Th) ( (u-g)^2 ) );

H1[j-1]= sqrt ( int2d(Th) ( (u-g)^2 ) + int2d(Th)
( (dx(u)-pi*cos(pi*x)*sin(pi*y))^2 ) + int2d(Th)
((dy(u)-pi*sin(pi*x)*cos(pi*y))^2 ) );

plot(Th);

plot(u);

cout << h[].max << endl;

```

```

n=2*n;
}
real[int] L2r(5),H1r(5);
for (int i=0;i<5;i++)
{
L2r[i]=L2[i]/L2[i+1];
H1r[i]=H1[i]/H1[i+1];
}
cout << L2 << endl;
cout << H1 << endl;
cout << L2r << endl;
cout << H1r << endl;

```

```

mesh Th=square(500,500);
fespace Vh(Th,P1);
Vh k=sin(pi*x)*sin(pi*y);
plot(k);

```

## **Γραμμικό Παραβολικό Πρόβλημα**

```

int n=2;
real L,H;
real [int] L2(6),H1(6);
real[int] L2r(6),H1r(6);
for(int j=1;j<7;j++)
{
mesh Th=square(n,n);
fespace Vh(Th,P1);

```

```

Vh u,v,uu,f,h,u0;

h=hTriangle;

real dt = (h[]).max)^2;

problem parab(u,v) =
int2d(Th)( u*v + dt*(dx(u)*dx(v) + dy(u)*dy(v)))
+ int2d(Th) (- uu*v - dt*f*v )
+ on(1,2,3,4,u=0);

real t = 0;

u0 = sin(pi*x)*sin(pi*y); // u(x,y,0)=0
uu=u0;

func g = exp(-t)*sin(pi*x)*sin(pi*y);

real L20,H10;

L20=dt*int2d(Th) ((u0-g)^2)/2;

H10=dt*(int2d(Th) ( (u0-g)^2 ) + int2d(Th)
( ( dx(u0)-exp(-t)*pi*cos(pi*x)*sin(pi*y))^2 ) + int2d(Th)
((dy(u0)-exp(-t)*pi*sin(pi*x)*cos(pi*y))^2 )/2);

for ( t=0;t<=1;t+=dt)
{
func g = exp(-t)*sin(pi*x)*sin(pi*y);

f =2*pi^2*exp(-t)*sin(pi*x)*sin(pi*y)-exp(-t)*sin(pi*x)*sin(pi*y);

parab;

uu = u;

L20+=dt*int2d(Th) ((u-g)^2 );

```

```

H10+=dt*(int2d(Th) ( (u-g)^2 ) + int2d(Th)
( ( dx(u)-exp(-t)*pi*cos(pi*x)*sin(pi*y))^2 ) + int2d(Th)
((dy(u)-exp(-t)*pi*sin(pi*x)*cos(pi*y))^2 ));
}
L20-=dt*(int2d(Th) ((u-g)^2 ))/2;
H10-=dt*( int2d(Th) ( (u-g)^2 ) + int2d(Th)
( ( dx(u)-exp(-t)*pi*cos(pi*x)*sin(pi*y))^2 ) + int2d(Th)
((dy(u)-exp(-t)*pi*sin(pi*x)*cos(pi*y))^2 ))/2;

L2[j-1]=sqrt(L20);
H1[j-1]=sqrt(H10);

plot(Th);
plot(u);
cout << h[].max << endl;
n=2*n;
}

for(int j=1;j<6;j++)
{
L2r[j-1]=L2[j-1]/L2[j];
H1r[j-1]=H1[j-1]/H1[j];
}

cout << L2 << endl;
cout << L2r << endl;
cout << H1 << endl;
cout << H1r << endl;

```





# Βιβλιογραφία

- [1] Frederich Hecht. *FreeFem++ : Manual, Third Edition*. Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, Paris.
- [2] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations: Second Edition (Graduate Studies in Mathematics)*. American Mathematical Society, 2010.
- [3] Susanne Brenner and Ridgway Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods (Texts in Applied Mathematics)*. Springer, 2010.
- [4] Vidar Thomee. *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems (Springer Series in Computational Mathematics)*. Springer, 2010.