ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΔΙΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

« ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ
ΥΔΑΤΙΚΩΝ ΠΟΡΩΝ »

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΚΥΜΑΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΣΕ ΠΥΘΜΕΝΑ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΟΥ ΒΑΘΟΥΣ

Κωνσταντίνος Παπαδόπουλος

Αθήνα, Ιούλιος 2013

Επιβλέπων: Καθηγητής Κ.Μέμος

« ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ ΥΔΑΤΙΚΩΝ ΠΟΡΩΝ »

εικόνα εξωφύλλου: *Great wave off Kanagawa, Hokusai*

Προσομοίωση κυματικού πεδίου σε πυθμένα μεταβαλλόμενου βάθους

Μεταπτυχιακή εργασία

Κωνσταντίνος Παπαδόπουλος
Μηχανικός Περιβάλλοντος

Δ.Π.Μ.Σ. «Επιστήμη και Τεχνολογία Υδατικών Πόρων»

Αθήνα, Ιούλιος 2013

Αυτή η σελίδα είναι σκοπίμως λευκή

Πρόλογος

Η παρούσα εργασία εκπονήθηκε κατά τη διάρκεια του ακαδημαϊκού έτους 2012-2013 στα πλαίσια του διατμηματικού προγράμματος μεταπτυχιακών σπουδών «*Επιστήμη και Τεχνολογία Υδατικών πόρων*» του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου. Αντικείμενο αυτής αποτελεί η προσομοίωση του κυματικού πεδίου εφαρμόζοντας διαφορετικές θεωρητικές προσεγγίσεις.

Με την ολοκλήρωση της θα ήθελα πρωτίστως να ευχαριστήσω το καθηγητή κ. Κωνσταντίνο Μέμο για την εμπιστοσύνη, την εποπτεία, την υποστήριξη και το ενδιαφέρον του καθ' όλη τη διάρκεια της εξέλιξης της. Θερμές ευχαριστίες θα ήθελα να αποδώσω στους υποψήφιους διδάκτορες του Ε.Μ.Π. κ. Μιχάλη Χονδρό, κ. Αναστάσιο Μεταλληνό και κ. Γεώργιο Κλωνάρη. Η βοήθεια τους ήταν καθοριστική και οι γνώσεις που αποκόμισα από αυτούς πολύτιμες. Ευχαριστώ τον καθηγητή κ. Κώστα Μπελιμπασάκη για τη βοήθεια του και την παραχώρηση του κώδικα υπολογιστή του μοντέλου συζευγμένων ιδιομορφών.

Τέλος θέλω να ευχαριστήσω τους φίλους και ιδιαίτερα την οικογένεια μου που με στηρίζουν σε ότι κι αν κάνω όλα αυτά τα χρόνια.

Κώστας Παπαδόπουλος

Αθήνα, Μάιος 2013

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 4 Εξισώσεις Navier- Stokes: μοντέλο *Cornell Breaking Waves And Structures*

Κεφάλαιο 5 Θεωρία Stokes: μοντέλο των *Belibassakis & Athanassoulis*

Κεφάλαιο 6 Παρουσίαση αποτελεσμάτων

Κεφάλαιο 7 Συμπεράσματα

Παράρτημα

Περίληψη

Αντικείμενο της παρούσας εργασίας είναι η μελέτη και η εφαρμογή τριών διαφορετικών θεωριών προσομοίωσης του κυματικού πεδίου σε ένα παράκτιο σύστημα. Αυτές είναι η θεωρία Stokes, οι εξισώσεις τύπου Boussinesq και οι εξισώσεις Reynolds Averaged Navier Stokes. Η εφαρμογή τους έγινε χρησιμοποιώντας τρία μοντέλα που αναπτύχθηκαν από τους Belibassakis & Athanassoulis, Chondros & Memos και Liu, Lin αντίστοιχα. Τα τρία αυτά μοντέλα αναφέρονται σε μια οριζόντια διάσταση, ενώ στο πρώτο και τρίτο υπάρχει και η κατακόρυφη διάσταση. Για την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων τους συγκρίνονται με γνωστές μετρήσεις πειραμάτων. Τα πειράματα αυτά αφορούν δύο τύπους διάταξης πυθμένα. Ως κριτήριο χρησιμοποιείται η χρονικά εξελισσόμενη ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας σε συγκεκριμένες θέσεις των πειραματικών διατάξεων. Η δεύτερη παράμετρος που εξετάζεται είναι ο χρόνος προσομοίωσης σε κάθε περίπτωση. Τελικά ζητούμενα αποτελούν η ικανότητα των τριών μοντέλων να προσεγγίζουν την διάδοση ενός κυματισμού, την επίδραση της θραύσης (λόγω ρήχωσης), τα μη γραμμικά χαρακτηριστικά και τη διασπορά ενέργειας μεταξύ συχνοτήτων. Το πρώτο μοντέλο δόθηκε από τον κ. Μπελιμπασάκη γραμμένο σε κώδικα της Matlab, ενώ τα άλλα δύο σε κώδικα Fortran από τους κ. Χονδρό και κ. Μεταλληνό.

Έτσι στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μια γενικόλογη θεωρητική εισαγωγή στις αναφερόμενες προσεγγίσεις. Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι δύο τύποι πυθμένα και οι εννέα εξεταζόμενες περιπτώσεις μονοχρωματικών κυμάτων. Στη συνέχεια στα κεφάλαια 3, 4 και 5 παρουσιάζονται αναλυτικά οι θεωρίες προσομοίωσης και η αριθμητική εφαρμογή τους. Στο κεφάλαιο 6 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για κάθε μοντέλο ξεχωριστά και έπειτα η σύγκριση τους στο κεφάλαιο 7. Τέλος στο παράρτημα παρατίθενται συμπληρωματικά στα κύρια κεφάλαια επεξηγηματικά στοιχεία και οι μετρήσεις που χρησιμοποιούνται στο 7ο κεφάλαιο.

Extended Abstract

Subject of this thesis is the simulation of the wave field over an uneven bottom. The wave propagation takes place on one horizontal dimension (1DH). For that, three wave theories are to be used; Stokes (2nd order) wave theory, a Boussinesq type set of equations and the Navier- Stokes equations resolved as Reynolds Averaged Navier Stokes equations. The three models applied are these of Belibassakis and Athanssoulis (1999, 2002), Chondros and Memos (2012), Lin and Liu (1997, 1998, 1999; Co.Br.A.S.) respectively. Their results of free surface elevation in respect with time are in interest of this thesis, and any conclusions are based on these results.

Introduction; Theoretical Basis

Conservation of mass; In a real but incompressible fluid mass cannot be created or destroyed. That in a Cartesian system of coordinates (x, y, z) can be expressed as,

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0 \qquad or \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

where U is the fluid's velocity vector and (u, v, z) are its components.

Equation of motion; In a steady state flow the momentum conservation principle is expressed by the equation (2). As a result of Newton's second law fluid's acceleration defines the rate at which momentum changes with time. X, Y and Z denotes any body force per unit mass acting in the x, y and z direction.

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\tau_{zx}}{\partial z}\right) + X \\
\frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\tau_{zy}}{\partial z}\right) + Y \\
\frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\tau_{zz}}{\partial z}\right) + Z
\end{aligned} \tag{2}$$

Boundary conditions; Consider a steady, incompressible and irrotational flow. Given the definition of the velocity potential (3) and the equation of continuity (1) the Laplace equation (4) is extracted.

$$-\phi = \oint_l U dl = \oint_l (udx + vdy + wdz) \Rightarrow \vec{U} = \nabla\phi \quad \text{or} \quad \begin{aligned} u &= -\partial\phi/\partial x \\ v &= -\partial\phi/\partial y \\ w &= -\partial\phi/\partial z \end{aligned} \tag{3}$$

Laplace equation $$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \tag{4}$$

Furthermore boundary conditions need to be established. For simplicity a two dimensional system (x, z) is used. Conditions on the water kinematics at bottom and at free surface are applied (5), (6).

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \zeta = w, \qquad z = \zeta(x, y, t) \tag{5}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \qquad \acute{\eta} \qquad w = 0, \qquad z = -d \tag{6}$$

Assuming that pressure on free surface is constant, a dynamic condition on free surface should be applied. Supposing a zero Bernoulli (integration) constant, an expression is given, derived from the Bernoulli equation.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(u^2 + w^2\right) + gz = 0, \qquad z = \zeta(x, y, t) \tag{7}$$

For waves that are periodic in space and time periodicity conditions must be applied. These are expressed as,

$$\phi(x, z, t) = \phi(x + L, z, t) \text{ and } \phi(x, z, t) = \phi(x, z, t + T) \tag{8}$$

A model based on Navier-Stokes equations; *Cornell Breaking Waves And Structures*

Constructing the Navier-Stokes set of equations; Navier- Stokes equations (NSE) are non linear differential expressions of equations of motion and continuity. The non linear nature of NSE arising on temporal and spatial fluctuations of velocity, is what defines turbulence. It is also what makes NSE hard to solve for cases of turbulent flow. Therefore averaging expressions of NSE are used. Such expressions are the Reynolds Averaged Navier Stokes equations (RANS). Due to averaging, a closure model for turbulence should be used supplementary to the basic equations. Continuing from equation (2), stresses are given from the Newtonian shear stress relationship (9), condition that the fluid is incompressible and isotropic (viscosity, μ_v is constant).

$$\tau_{ij} = \mu_v \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \tag{9}$$

Given that, NSE are derived as expressed in (10) combined with conservation of mass (1).

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu_v}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \\
\frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu_v}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \\
\frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu_v}{\rho}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) - g
\end{aligned} \tag{10}$$

A step further, equations (1) and (10) are averaged in time, producing (11) and (12) which are the RANS equations. Hereafter the time averaged quantities are represented as $\langle\ \rangle$.

Conservation of mass;

$$\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_i}=0 \tag{11}$$

Equation of motion;

$$\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial t}+\langle u_j\rangle\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\langle p\rangle}{\partial x_i}+g_i+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\langle\tau_{ij}\rangle}{\partial x_j}-\frac{\partial\langle u_i'u_j'\rangle}{\partial x_j} \tag{12}$$

Reynolds stresses: non linear closure model;

$$\begin{aligned}\langle u_i'u_j'\rangle=&\frac{2}{3}k\delta_{ij}-C_d\frac{k^2}{\varepsilon}\left(\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_j}+\frac{\partial\langle u_j\rangle}{\partial x_i}\right)\\&-\frac{k^3}{\varepsilon^2}\left[\begin{array}{l}C_1\left(\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_l}\frac{\partial\langle u_j\rangle}{\partial x_j}+\frac{\partial\langle u_j\rangle}{\partial x_l}\frac{\partial\langle u_l\rangle}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\frac{\partial\langle u_l\rangle}{\partial x_k}\frac{\partial\langle u_k\rangle}{\partial x_l}\delta_{ij}\right)\\+C_2\left(\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_k}\frac{\partial\langle u_j\rangle}{\partial x_k}-\frac{1}{3}\frac{\partial\langle u_l\rangle}{\partial x_k}\frac{\partial\langle u_l\rangle}{\partial x_k}\delta_{ij}\right)\\+C_3\left(\frac{\partial\langle u_k\rangle}{\partial x_i}\frac{\partial\langle u_k\rangle}{\partial x_j}-\frac{1}{3}\frac{\partial\langle u_l\rangle}{\partial x_k}\frac{\partial\langle u_l\rangle}{\partial x_k}\delta_{ij}\right)\end{array}\right]\end{aligned} \tag{13}$$

Where δ_{ij} is Kronecker's delta, the variables C_1, C_2, C_3 are defined in Lin and Liu, 1998, Liu and Lin, 1997. Alternatively they can have constant values; C_1=0.0054, C_2= -0.0171, C_3=0.0027. Kinetic energy, k and its decrease rate, ε are given through equations (14), (15).

$$k=\frac{1}{2}\langle u_i'u_i'\rangle \tag{14}$$

$$\varepsilon=\nu\left\langle\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\right)^2\right\rangle \tag{15}$$

Turbulent viscosity can be evaluated by,

$$\nu_t=C_d\frac{k^2}{\varepsilon} \tag{16}$$

where C_d is given as $C_d=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{7.4+\sigma_{\max}}\right)$, $\quad\sigma_{\max}=\frac{k}{\varepsilon}\max\left(\left|\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_i}\right|\right)$

Turbulence closure model, k-ε model;

$$\frac{\partial k}{\partial t}+\langle u_j\rangle\frac{\partial k}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}+\nu\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right]-\langle u_i'u_j'\rangle\frac{\partial\langle u_i'\rangle}{\partial x_j}-\varepsilon \tag{17}$$

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\langle u_j\rangle\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}+\nu\right)\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_j}\right]+2C_{1\varepsilon}\frac{\varepsilon}{k}\nu_t\sigma_{ij}\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_j}-C_{2\varepsilon}\frac{\varepsilon^2}{k} \tag{18}$$

Boundary conditions;

Bottom boundary condition: $u_i = U_i$ (19)

Free surface boundary condition: $\frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial t} + \langle u_i \rangle \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial x_i} = 0$ (20)

k-ε model's boundary conditions: $\varepsilon = -\langle u'v' \rangle \frac{d\langle u \rangle}{dy} = \frac{u_*^3}{ky}$ (21)

$$k = \frac{u_*^2}{\sqrt{C_d}} \quad (22)$$

Where u_* can be found by using $\frac{\langle u \rangle}{u_*} = \frac{1}{\kappa}\left(E\frac{u_* y}{\nu}\right)$, for E=9 and κ=0.41 (von Karman's constant)

Numerical modeling

Sponge layer; At open boundaries a sponge layer is applied as described by Larsen and Dancy (1983). A coefficient α(x) is used to reduce velocities' values within a layer of width (x_s). When the sponge layer is inactive α(x) equals unity and when active it decreases from 1 to 0.

$$a(x) = \sqrt{1 - \left(\frac{x - x_1}{x_s}\right)^2} \quad (23)$$

Source function; To introduce an initial oscillation in the computational domain a source term, *s(x, y, t)* is add in the continuity equation:

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_i} = s(x, y, t) \quad (24)$$

With this mass source function linear/ irregular and Stokes wave theory (up to 5th order) can be used to produce an initial wave. In addition cnoidal and solitary waves can be produced. More for these can be found in Lin and Liu, 1999. Regular and irregular waves are inserted with a source term given as,

$$s(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i H_i}{A} \sin(\omega_i t + \theta_i) \quad (25)$$

Where C_i is the phase celerity, A is the source region area, θ_i is the wave phase and ω_i the wave frequencies.

Numerical scheme; The numerical solution of the RANS equations is done using a two step projection method developed by Chorin (1968, 1969). To solve the Poisson equation (average field pressures) this method is assisted by the technique of Cholesky conjugate gradient. The time derivative is differentiated by a forward in time scheme. For the advective terms a hybrid method that combines central in space differences with upwind scheme. The terms containing the pressure gradients and trends differentiated with a central difference method.

Solution starts with the calculation of velocity from the equation of motion. In the second step the boundary conditions of the free surface are applied. Third step includes the calculation of the pressure from the Poisson equation and then the re-evaluation of the velocities values from the pressure gradient. Then the confirmation of the boundary conditions is following. Using a turbulence model the values of the variables k and ε are calculated. Finally the method VOF is used to estimate the free surface level.

The turbulence model k-e equations are treated as transfer-dispersion equations including terms of a source and decline. Additionally, the equations are characterized by periodicity. As in RANS the advective terms are treated with the combination of a central difference scheme and the upwind scheme. For the discretization of the time derivative, a forward in time difference is used.

A model based on a Boussinesq type set of equations; *Chondros & Memos, 2012*

Constructing a Boussinesq type set of equations; For the implementation of the basic equations (1), (2) the stresses of the fluid should be known. An easy solution to this is to assume that the shear stresses are zero. This is reasonable for most problems concerning water waves and results in the Euler equations.

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g \end{aligned} \tag{26}$$

Given the Euler's assumption, Boussinesq equations are derived. Boussinesq (1871, 1872) was the first who worked on that type of equations. Pelegrine's (1967) set of equations is usually referred as typical Boussinesq equations.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla\left[(d+\zeta)\vec{u}\right] = 0 \\ &\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + g\nabla\zeta = \frac{d}{2}\nabla\left[\nabla(d\frac{\partial \vec{u}}{\partial t})\right] - \frac{d^2}{6}\nabla(\nabla\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}) \end{aligned} \tag{27}$$

Where $\vec{u}$ is the velocity's horizontal component, depth averaged. Clearing the basic equations from the vertical component is a substantial issue for a Boussinesq type set of equations. As these first expressions are derived for a uniform horizontal bottom, expansions have been made for an uneven bottom. Furthermore, there have been expansions to improve the dispersion and non linear characteristics, to include wave breaking or to insert shear stresses. An issue for most early Boussinesq models is their limitations due to relative water depth (*kd*). For the needs of this project an alternative form of the Madsen and Schäffer (1998) equations (hereafter MS), is used. Chondros and Memos, 2012 (hereafter CM12) modified the MS to improve dispersion

characteristics and linear shoaling. This is done by introducing a new set of the MS' variables (α_1, β_1, α_2, β_2) as functions of kd.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla\left(\left(d + \in \zeta\right)U\right) = 0 \tag{28}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla\zeta + \frac{1}{2} \in \nabla(U^2) + \mu^2\left(\Lambda_{20}^{III} + \in \Lambda_{21}^{III} + \in^2 \Lambda_{22}^{III} + \in^3 \Lambda_{23}^{III}\right) + \mu^4\left(\Lambda_{40}^{III} + \in \Lambda_{41}^{III}\right) + O\left(\mu^6, \in^2 \mu^4\right) = 0 \tag{29}$$

Concerning the velocity variable a depth averaged velocity is used. Equations (28) and (29) represent the equations of continuity and motion. The Λ^{III} and (α_1, β_1, α_2, β_2) variables can be found in Chondros and Memos, 2012 or here in (3.8) (3.18)-(3.20).

A new approach in handling k is also introduced. For regular waves, since the assumption of a constant period is valid, wave length, L and wave number, k can be explicitly determined. For irregular waves evaluating the wave period is a problem, instead phase celerity, c is evaluated for each spatial and time step through

$$c = -\frac{\partial\zeta/\partial t}{\partial\zeta/\partial x} \tag{30}$$

and then by (31) wave number is calculated.

$$c = \omega/k = \sqrt{(g/k)\tanh(kd)} \tag{31}$$

Numerical modeling

Boundary conditions; Boundary conditions describe flow, the non slip case of bottom and free surface. Applied in a two dimensional system (x-z) are expressed as,

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial z} + \mu^2\nabla^2\phi = 0, \qquad -d < z < \in\zeta \tag{32}$$

$$\frac{1}{\mu^2}\frac{\partial\phi}{\partial z} + \nabla d \cdot \nabla\phi = 0, \qquad z = -d \tag{33}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \zeta + \frac{1}{2} \in \left((\nabla\phi)^2 + \frac{1}{\mu^2}(\frac{\partial\phi}{\partial z})^2\right) = 0, \qquad z = \in\zeta \tag{34}$$

$$-\frac{1}{\mu^2}\frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial t} + \in\nabla\zeta \cdot \nabla\phi = 0, \qquad z = \in\zeta \tag{35}$$

The technique proposed by Larsen and Dancy, 1983 is used to apply a sponge layer at open boundaries. A variable μ(x) is used to reduce velocity's (u) value within sponge layer. Outside of this layer μ(x) becomes inactive by being equal with 1. To initialize wave propagation in computation domain a method proposed by Memos et al., 2005 is used. A source function is included on the right part of continuity equation.

Wave breaking; An extension by Kennedy et al., 2000 of 1D Boussinesq type equations is used to include surf zone phenomena. The extension evolves a

momentum conserving eddy viscosity technique to simulate turbulence and energy reduction due to shoaling.

Numerical scheme; The numerical scheme involves a third order predictor of Adams- Bashforth followed by a fourth order corrector of Adams- Moulton to produce evolution in time.

A model based on Stokes theory; *Belibassakis & Athanassoulis (1999, 2002)*

This is a model of coupled modes system introduced by Belibassakis and Athanassoulis, 1999, 2002 (hereafter C.M.S.). The basis of this approach is linear theory, which solution is expanded by second order terms inserting so, non linear characteristics into wave propagation. Within linear theory phenomena of transmission, reflection, shoaling are simulated, dispersion characteristics are also included. With the second order expansion non wave- bottom interactions (quadratic interactions) are inserted in the model. As result of these interactions harmonic waves could be produced, an issue also considered. To simulate this hydrodynamic field a series of local modes, bottom slope modes and evanescent modes is used.

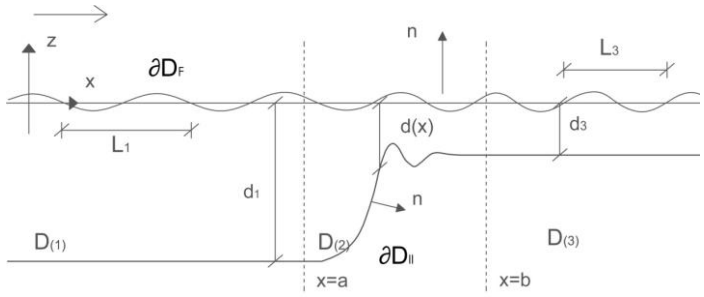


Figure 1. Computational domain

Linear problem; for the linear problem the potential velocity function is given by (36) (Wehausen and Laitone, 1960).

$$\Phi\left(x,y,z;t\right)=\mathrm{Re}\left(-\frac{igH}{2\omega}\varphi\left(x,z\right)\exp\left(-i\omega t\right)\right) \tag{36}$$

While free surface elevation is determined as $\zeta(x)=\frac{i\omega}{g}\Phi(x,z)$, where $i=\sqrt{-1}$ the imaginary unit of the complex number. The computational domain is divided in three subareas $D^{(i=1,2,3)}$, for each of them φ(x;z) can be calculated by using Laplace equation. Hence the first order local modes in these three sub-domains are given as,

$$\varphi_1^{(1)}(x,z)=\left(A_0\exp(ik_0^{(1)}x)+A_R\exp(-ik_0^{(1)}x)\right)Z_0^{(1)}(z)+\sum_{n=1}^{\infty}C_n^{(1)}Z_n^{(1)}(z)\exp(k_n^{(1)}(x-a)) \tag{37}$$

$$\varphi_1^{(2)}(x,z)=\varphi_{-1}(x,z)Z_{-1}^{(2)}(z;x)+\varphi_0(x,z)Z_0^{(2)}(z;x)+\sum_{n=-1}^{\infty}\varphi_n(x)Z_n^{(2)}(z;x) \tag{38}$$

$$\varphi_1^{(3)}(x,z)=A_T\exp(ik_0^{(3)}x)Z_0^{(3)}(z)+\sum_{n=-1}^{\infty}C_n^{(3)}Z_n^{(3)}(z)\exp(k_n^{(3)}(b-x)) \tag{39}$$

Where *0* indicates propagating modes, -1 sloping bottom modes and n evanescent modes. A_0 is an arbitrary parameter which controls the phase of the linear term, A_R, A_T are parameters used due to reflection and transmission phenomena, these with $C_n^{(1)}$ and $C_n^{(3)}$ are calculated form a system of equations set by (37), (39) and the boundary conditions. The latter will be described later on. Wave number is given through linear dispersion equation, (40).

$$\frac{\omega^2 d_i}{g} = kd_i \tanh(kd_i) \tag{40}$$

Eigen functions are given by equations

$$Z_0^{(i)}(z;x) = \frac{\cosh\left(k_0(x)(z+d(x))\right)}{\cosh\left(k_0(x)d(x)\right)},\ i=1,2,3 \tag{41}$$

$$Z_n^{(i)}(z;x) = \frac{\cos\left(k_n(x)(z+d(x))\right)}{\cos\left(k_n(x)d(x)\right)},\ i=1,2,3 \tag{42}$$

$$Z_{-1}(z;x) = d(x)\left[\left(\frac{z}{d(x)}\right)^3 + \left(\frac{z}{d(x)}\right)^2\right] \tag{43}$$

To get from the local modes to those which vary with depth change, equation (44) is constructed by Athanassoulis and Belibassakis, 1999.

$$\sum_{n=-1}^{\infty} a_{mn}(x)\frac{\partial^2\varphi_n(x)}{\partial x^2} + b_{mn}(x)\frac{\partial\varphi_n(x)}{\partial x} + c_{mn}\varphi_n(x) = 0,\ x\in(a,b) \tag{44}$$

Given the a_{mn}, b_{mn} and c_{mn} (*table 1*, Athanassoulis and Belibassakis, 1999 or *table 5.1* of this project) modes $\varphi_n(x)$ can be calculated. So by (36) potential velocity function and free surface elevation are also calculated.

Non linear extension; for the solution of the non linear problem a free harmonic wave with half of the initial frequency and a bound 2nd order wave need to be defined. These, additionally to the linear component produce the velocity potential function (Belibassakis and Athanassoulis, 2002). Given a small nonlinearity parameter, $\varepsilon = \omega^2 H/g$, from Stokes theory it is known that,

$$\Phi(x,z,t;\varepsilon) = \varepsilon\phi_1(x,z;t) + \varepsilon^2\phi_2(x,z;t) \tag{45}$$

Where,

$$\phi_1 = \mathrm{Re}\left(\Xi\varphi_1(x,z;\mu)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\right) \tag{46}$$

$$\phi_2 = \mathrm{Re}\left(\Xi^2\varphi_{20}(x,z;\mu)\right) + \mathrm{Re}\left(\Xi^2\varphi_{22}(x,z;\mu_2)e^{-2i\omega t}\right) \tag{47}$$

The parameter $\Xi = -ig^2/\omega^3$ and $\mu = \omega^2/g$, $\mu = \omega^2/g$. *20* indicates steady state terms and *22* non steady terms of 2ω.

Boundary conditions; As in both previous models, here Laplace equation, free surface and bottom conditions describe the boundary values for *φ(x, z)*. For the linear problem boundary conditions are,

$$\frac{\partial^2\varphi(x,z)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi(x,z)}{\partial z^2}=0 \quad ,-d(x)<z<0 \tag{48}$$

$$\frac{\partial\varphi(x,z)}{\partial z}-\frac{\omega^2}{g}\varphi(x,z)=0 \qquad ,z=0 \tag{49}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{dd}{dx}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0 \qquad ,z=-d(x) \tag{50}$$

For the non linear extension these are modified to,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\partial|u|^2}{\partial t}+\frac{1}{2}u\cdot\nabla|u|^2=0 \quad , \quad z=\zeta(x;t) \tag{51}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}|u|^2+g\eta=0 \quad , \quad z=\zeta(x;t) \tag{52}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{dd}{dx}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0 \quad , \quad z=-\zeta(x) \tag{53}$$

Wave breaking; within this model energy dissipation comes as result of bottom shoaling and friction. Inserted in the above equation, a reduction term, *γ(x)* is defined to control the first order term of (44). This results in,

$$\sum_{n=-1}^{\infty}\left[a_{mn}(x)\frac{\partial^2\varphi_n(x)}{\partial x^2}+b_{mn}(x)\frac{\partial\varphi_n(x)}{\partial x}+\left(c_{mn}(x)+i\gamma(x)k_o(x)\delta_{mn}\right)\varphi_n(x)\right]=0 \tag{54}$$

where δ_{mn} is Kronecker delta. The dissipation coefficient (Massel, 1992) is given as,

$$\gamma(x)=\gamma_f(x)+\gamma_b(x) \tag{55}$$

Dissipation due to friction and shoaling are indicated as *f* and *b* respectively. These are given as presented by Massel and Gourlay, 2000. Energy dissipation is applied when the evaluated *H/d* exceeds a known limit H_m/d as given in Massel and Gourlay, 2000.

Results and Conclusions

A set of tests are done for two bottom types. The first consists of a trapezoid bar with a 1:20 slope at front and 1:10 slope at back. The second type contains a simple beach type bottom, of a uniform 1:20 slope (figure 2). At both cases free surface elevation has been calculated in a number of stations and then has been compared with experimental data. These are known from Beji and Battjes, 1993, 1994 and experiments done in the laboratory facilities HR Wallingford within the year 1998. For the first type five cases for regular waves are simulated; non breaking waves, short and long breaking waves (spilling and plunging breakers for each of them). For the second type four different cases are simulated.

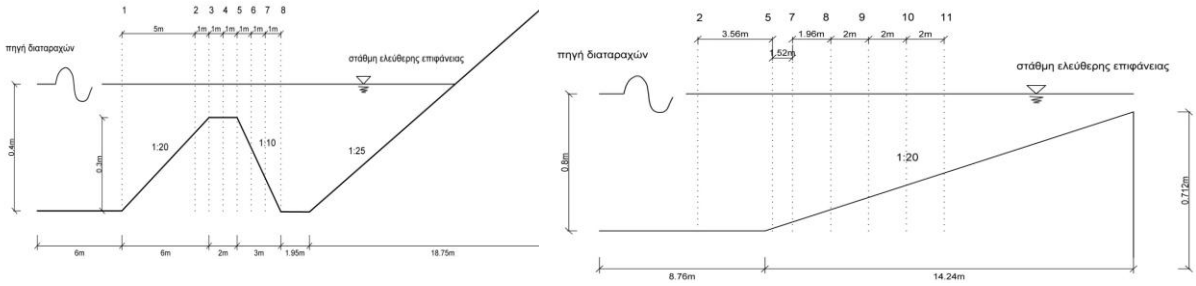


Figure 2. Two cases of bottom profiles

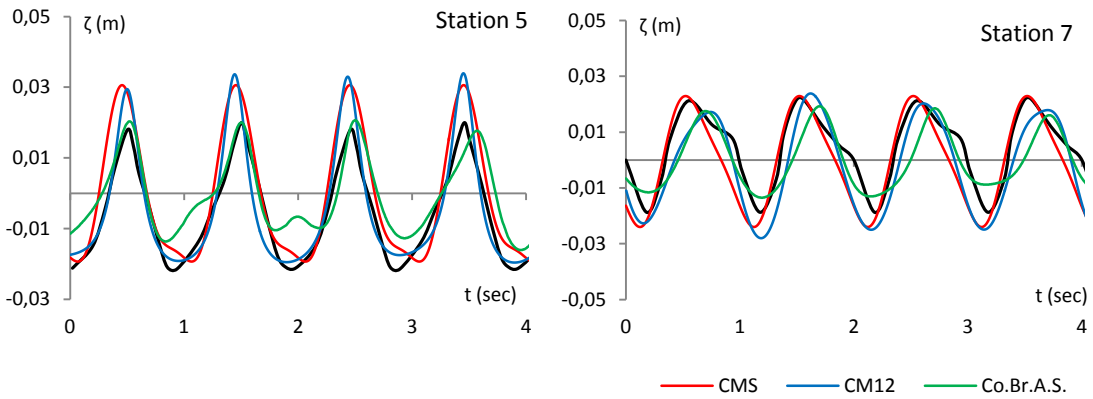


Figure 3. Time series of free surface elevation for short plunging breaking waves at stations 5 and 7 (black: experimental data, Beji & Battjes, 1993)

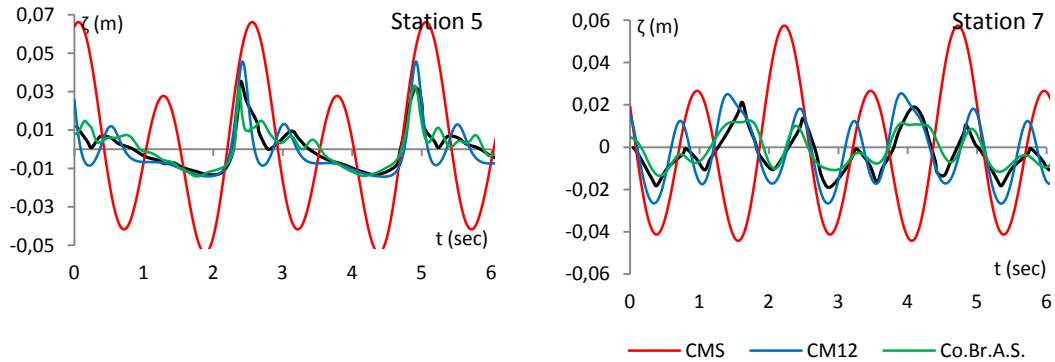


Figure 4. Time series of free surface elevation for long plunging breaking waves at stations 5 and 7 (black: experimental data, Beji & Battjes, 1993)

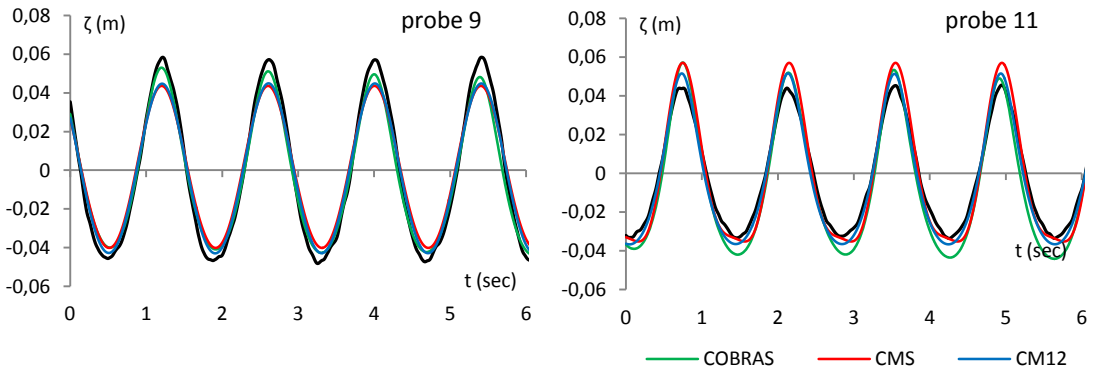


Figure 5. Time series of free surface elevation for case: RE43 at probes 9 and 11 (*RE43*: H_0*=0,075m*, *T=1,4s*, black: experimental data, HR Wallingford)

As it seems and is expected the most difficult cases are those of plunging breakers. Therefore, timeseries of free surface elevation as resulted from the three models is compared with that of experimental data. Results are presented in figures 3, 4 and 5. Stations 5 and 7 are at the top of the bar and at the downstream slope. Probes 9 and 11 of figure 5 are placed at the middle and the end of the slope.

The results for the three models are satisfactory for the most cases. An exception to this is the case of long plunging breaking waves. As it seems from figure 4 *C.M.S.* overestimates both linear and non linear components. The reason for this is probably the breaking criterion which is used. The other two models had very satisfactory results, while the solution of C.M.12 seems to be more stable than that of Co.Br.A.S. (case which is obvious through figure 4, at station 5). Process times for C.M.S. and C.M.12 at all cases are limited to 4 minutes, when for the same cases using Co.Br.A.S. time of computation exceeds 6 hours. Remember that RANS have a numerical solution on two dimensions (x-z) which has a high computational cost.

Ευρετήριο όρων και συμβόλων

Κεφάλαιο 1

α	(m), εύρος κύματος: απόσταση από τη στάθμη ισορροπίας
α_{max}	(m), μέγιστο εύρος κύματος
α_{min}	(m), ελάχιστο ύψος κύματος
a_x,a_y,a_z	(m/s^2), οριζόντια, κάθετη και κατακόρυφη συνιστώσα της επιτάχυνσης σωματιδίου
A_i,B_i,C_i,D_i	παράμετροι πίνακα Fenton (1985)
c	(m/s), ταχύτητα φάσης κύματος
$C(t)$	(m), σταθερά ολοκλήρωσης, σταθερά Bernoulli
d	(m), βάθος πυθμένα
ε	αδιάστατο, μεταβολή του πηλίκου H/L ως προς d/L
ϵ	αδιάστατος συντελεστής μη γραμμικότητας, $\epsilon=H/L=k\alpha$
ζ	(m), στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας
F_i	(i=1,2,3), τριγωνομετρικές συναρτήσεις, θεωρία Stokes ανώτερης τάξης
f	(s^{-1} ή Hz), συχνότητα κύματος
g	(m/s^2), επιτάχυνση βαρύτητας, θεωρείται σταθερή και ίση με 9,81m/sec^2
H	(m), ύψος κύματος
H_b,d_b	ύψος κύματος και βάθος πυθμένα στη ζώνη θραύσης
θ	φάση κύματος, θ=kx-ωt
k	(m^{-1}), αριθμός κύματος
L	(m), μήκος κύματος
μ	αδιάστατος συντελεστής διασποράς, μ=d/L
μ_v	(kg/ms), δυναμική συνεκτικότητα (ιξώδες)
φ	συνάρτηση δυναμικού
p	(Pa ή N/m^2 ή kg/ms^2), πίεση
ρ	(kg/m^3), πυκνότητα μέσου
t	(s), χρόνος
T	(s), περίοδος κύματος
τ_{ij}	(Pa ή N/m^2), διατμητική τάση στο επίπεδο που ορίζεται από τα ij
u,v,w	(m/s), οριζόντια, κάθετη και κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας σωματιδίου
U_p	universal parameter
U_R	παράμετρος Ursell, αδιάστατη, $U_R=L^2H/d^3$
v	(m^2/s), κινηματική συνεκτικότητα
x,y,z	(m), θέση σωματιδίου σε οριζόντιο, κάθετο και κατακόρυφο επίπεδο (καρτεσιανό σύστημα αναφοράς)
X, Y, Z	(N/kg), εξωτερικές στο σύστημα δυνάμεις
ω	(rad/s), γωνιακή ή κυκλική συχνότητα

δείκτες

0	χαρακτηριστικά στη περιοχή μεγάλου σχετικού βάθους ("βαθιά νερά")

i,j,k	άξονες του τρισδιάτατου καρτεσιανού συνστήματος

Κεφάλαιο 3

α_1,β_1	αδιάστατοι συντελεστές ελέγχου χαρακτηριστικών διασποράς, εξισώσεις Madsen & Schäffer
α_2,β_2	αδιάστατοι συντελεστές ελέγχου γραμμικής ρήχωσης
B	B=1/15, σταθερά εξισώσεων Madsen & Schäffer
β_s	συντελεστής κατανομής συνάρτησης πηγής κατά τον άξονα x
Γ	μέγεθος εξισωσεων Madsen & Schäffer, Chondros & Memos
D_s	εύρος της συνάρτησης πηγής, f_s
Δt	(s), χρονικό βήμα (σχήματα χρονικών διαφορών)
Δx	(m), πλάτος κελιού, χωρικό βήμα (σχήματα χωρικών διαφορών)
$F(y,t)$	συνάρτηση χωρικού και χρονικού ελέγχου της συνάστρησης πηγής, f_s
$f_s(x,y,t)$	συνάρτηση πηγής
i	μιγαδικός αριθμός, $i=(-1)^{1/2}$
κ	κ=kd
Λ^{III}	μεγέθη εξισωσεων Madsen & Schäffer, Chondros & Memos
U	(m/s), μεταβλητή της ταχύτητας (συνισταμένη)
x_s	(m), πλάτος απορροφητικής στοιβάδας
u_m, ζ_m	(m/s, m), ταχύτητα και στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας εντός της απορροφητικής στιβάδας
∇	ανάδελτα, ολικό διαφορικό ως προς τον/τους άξονες αναφοράς

δείκτες

t,z	παραγώγιση ως προς t ή z

Κεφάλαιο 4

A	εμβαδόν περιοχής στην οποία εισάγεται ο όρος s(t)
$\alpha(x)$	συντελεστής απορρόφισης εντός της απορροφητικής στοιβάδας ($\alpha(x)\leq 1$)
C_1,C_2,C_3	συντελεστές μοντέλου τύρβης (Lin & Liu, 1998)
$C_{1\varepsilon}$	συντελεστής μοντέλου τανυστή τάσεων, $C_{1\varepsilon}=1{,}44$
$C_{2\varepsilon}$	συντελεστής μοντέλου τανυστή τάσεων, $C_{2\varepsilon}=1{,}92$
δ_{ij}	δελτα του Kroneker
D_{max}	συντελεστής μοντέλου τύρβης (Lin & Liu, 1998)
ε	ρυθμός απόσβεσης τυρβώδους κινητικής ενέργειας
F	συνάρτηση VOF (volume of fluid)
κ	σταθερά von Karman, κ=0,41
k	τυρβώδης κινητική ενέργεια
l	κλίμακα μήκους ανάμιξης
σ_{ij}	(Pa ή N/m^2), ορθή τάση στο επίπεδο που ορίζεται από τα ij
σ_{max}	συντελεστής μοντέλου τύρβης (Lin & Liu, 1998)
$s(t)$	συνάρτηση όρου πηγής
V	(m^3), όγκος ελέγχου

V_f	όγκος ενεργού πορώδους
ν_t	τυρβώδης κινητική συνεκτικότητα
$\langle u_i' u_j' \rangle$	τάσεις Reynolds/ τανυστής Reynolds

Κεφάλαιο 5

A_0	τυχαία παράμετρος που ελέγχει τη φάση του όρου 1ης τάξης
A_R	συντελεστής ανάκλασης (A_R<1)
A_T	συντελεστής μετάδοσης (A_T<1)
$\gamma(x)$	συντελεστής απόσβεσης (<1)
$\gamma_f(x)$	συντελεστής απόσβεσης λόγω τριβής (<1)
$\gamma_b(x)$	συντελεστής απόσβεσης λόγω μείωσης του βάθους (<1)
$C_g(x)$	(m/s), τοπική ταχύτητα ομάδας
δ_{mn}	δελτα του Kronecker
F_{co}	παράμετρος μη γραμμικότητας
f_w	συντελεστής τριβής (<1)
$H_m(x)$	(m), μέγιστη τιμή ύψους κύματος πριν τη θραύση
$u_b(x)$	(m/s), ταχύτητα τροχαϊκού στο πυθμένα
Z	συναρτήσεις eigen, λύσεις του προβλήματος Sturm- Liouville των αντίστοιχων ιδιοτιμών ik

δείκτες

0	όροι διάδοσης
1,2,3,…	όροι απόσβεσης
-1	όρος διόρθωσης λόγω της μεταβολής της βαθυμετρίας
20	όροι δεύτερης τάξης, σταθερών συνθηκών
22	όροι δεύτερης τάξης διπλάσιας κυκλικής συχνότητας, μη σταθερών συνθηκών

εκθέτης

i	αντιστοιχεί στον αριθμό υποπεδίου $D_{i=1,2,3}$

Συντμήσεις

C.M.12	Chondros & Memos, 2012, το μοντέλο τύπου Boussinesq των Chondros & Memos
C.M.S.	coupled modes system, το μοντέλο συζευγμένων ιδιομορφών των Belibassakis & Athanassoulis
Co.Br.A.S.	Cornell Breaking waves And Structures, μοντέλο βασισμένο στις εξισώσεις RANS
LES	Large Eddy Simulation (αριθμητικό ομοίωμα βασιζόμενο στις εξισώσεις N-S)
N-S	Navier- Stokes (εξισώσεις)
RANS	Reynolds Averaged Navier- Stokes (εξισώσεις)
VARANS	Volume Averaged Reynolds Averaged Navier- Stokes (εξισώσεις)
V.O.F.	Volume Of Fluid, μέθοδος ανίχνευσης της διεπιφάνειας μεταξύ δύο ρευστών

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή στις θεωρίες κυματικής μετάδοσης

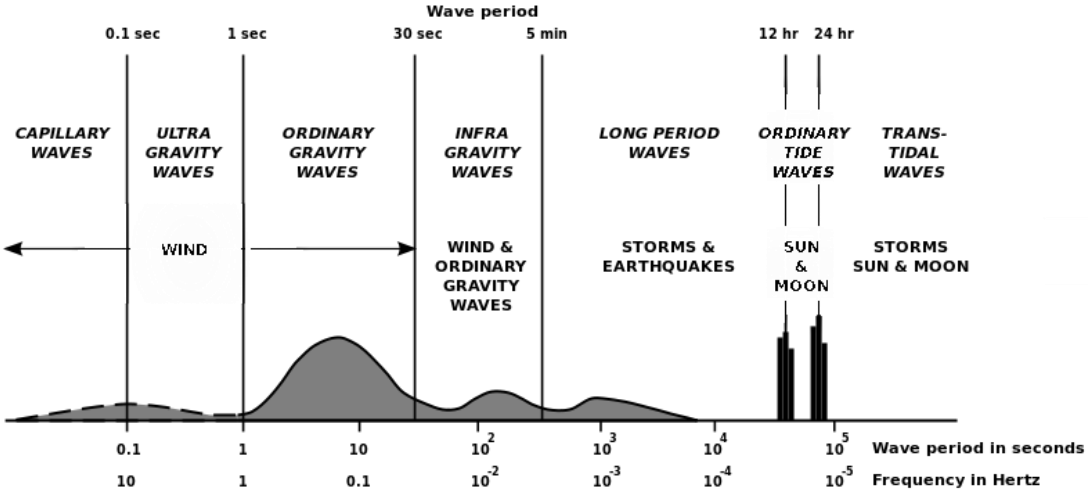
Στα πλαίσια του κεφαλαίου αυτού αρχικά θα παρουσιαστούν τα βασικά χαρακτηριστικά με τα οποία περιγράφεται η φύση ενός κυματισμού. Στη συνέχεια αναφέρονται συνοπτικά θεωρίες με τις οποίες έχει προσεγγιστεί η μετάδοση μιας διαταραχής στην επιφάνεια υδάτινου σώματος. Συμπληρωματικά παρουσιάζεται ένα από τα πιο ενδιαφέροντα φαινόμενα στην υδροδυναμική, η θραύση. Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι να δοθεί στον αναγνώστη μια γενικότερη εικόνα των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορεί να προσεγγιστεί το κυματικό πεδίο.

1.1. Εισαγωγή

Όταν η επιφάνεια ενός υδάτινου σώματος διαταράσσεται κατά την κατακόρυφη διεύθυνση η δύναμη της βαρύτητας θα ενεργήσει για την επαναφορά της στη θέση ισορροπίας. Αφού επιστρέψει στη θέση ισορροπίας, με την αδράνεια του σώματος περνά την θέση αυτή και δημιουργείται ταλάντωση στην υδάτινη επιφάνεια προκαλώντας έτσι την μετάδοση ενέργειας, δηλαδή την σκέδαση ενός κύματος. Αυτό είναι που θα απασχολήσει και την παρούσα εργασία, η διαταραχή της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας και η διάδοση της πάνω από μεταβαλλόμενο βάθος, υπό την επίδραση της βαρύτητας. Πέρα από την αρχική διαταραχή, επιδράσεις σε αυτή ασκούνται από τη μεταβολή του βάθους κάτω από αυτή και από ανακλώμενα κύματα. Οι επιδράσεις αυτές και ο τρόπος που προσεγγίζονται αποτελούν επίσης αντικείμενο της εργασίας αυτής.

Αίτια της αρχικής αυτής ταλάντωσης μπορούν να αποτελούν οι *(α)* απότομες μεταβολές του στερεού φλοιού που βρίσκεται σε επαφή με το υδάτινο σώμα, όπως σεισμοί ή κατολισθήσεις, *(β)* τα μετεωρολογικά φαινόμενα, δηλαδή οι μεταβολές της ατμοσφαιρικής πίεσης και *(γ)* η έλξη που ασκείται στη Γη από άλλα ουράνια σώματα. Σημαντικές για την ταλάντωση αυτή είναι η δύναμη Coriolis (νοητή δύναμη οφειλόμενη στην περιστροφή της Γης) και η βαρύτητα. Ο βαθμός στον οποίο επιδρούν οι δυνάμεις αυτές διαφέρει. Η δύναμη Coriolis καθίσταται σημαντική για μεγάλης κλίμακας συστήματα, ενώ η βαρύτητα χαρακτηρίζει τα περισσότερα προβλήματα που αφορούν τον σχεδιασμό εντός της παράκτιας ζώνης.

Μια συνοπτική κατηγοριοποίηση των θαλάσσιων κυμάτων με βάση την περίοδο γίνεται στο σχήμα 1.1. Οι συνηθέστερες μορφές αυτών, τουλάχιστον εντός της Μεσογείου, είναι τα ανεμογενή κύματα. Αυτά ανάλογα με τη διάρκεια και την απόσταση τους από την πηγή διακρίνονται σε τριχοειδή (*capillary waves*/ *ripples*), μικρά κύματα (*seas*) και αποθαλασσιά (ή ρεστία) *swells*. Το πρώτο είδος (*capillary waves*) αναπτύσσεται σε ατάραχο νερό με αίτιο τον άνεμο και δύναμη επαναφοράς την επιφανειακή τάση. Αποσβένονται πολύ γρήγορα με διακοπή του ανέμου. Το δεύτερο είδος κυμάτων (*seas*) αποτελεί μεγαλύτερης κλίμακας διαταραχή που τείνει να διαρκεί και μετά τη διακοπή της πηγής. Με την απομάκρυνση από το σημείο αναπαραγωγής ομαδοποιούνται ανάλογα με τη διεύθυνση μετάδοσης και το μήκος κύματος. Οι ομάδες αυτές κυμάτων συνιστούν το τρίτο είδος κυμάτων (*swell*).



Σχήμα 1.1 Διάκριση κυμάτων με βάση την περίοδο τους (Munk, 1950)

Τα υδάτινα κύματα βαρύτητας αποτελούν μια κατηγορία μηχανικών κυμάτων, και διακρίνονται σε εγκάρσια και διαμήκη, ανάλογα με το αν οι διαταραχές διαδίδονται κάθετα ή παράλληλα στη διεύθυνση μετάδοσης. Γενικότερα συνηθίζεται η αναφορά στην δεύτερη περίπτωση. Βασικά χαρακτηριστικά για τα κύματα είναι το ύψος (H), το μήκος (L) και η συχνότητα (f) κύματος καθώς και το βάθος (d) πάνω από το οποίο μεταδίδονται. Σε συνέχεια αυτών ορίζονται η περίοδος (T) ο αριθμός κύματος (k),

$$f = 1/T,\ k = 2\pi/L$$

η γωνιακή συχνότητα (ω), ταχύτητα φάσης (c) κύματος,

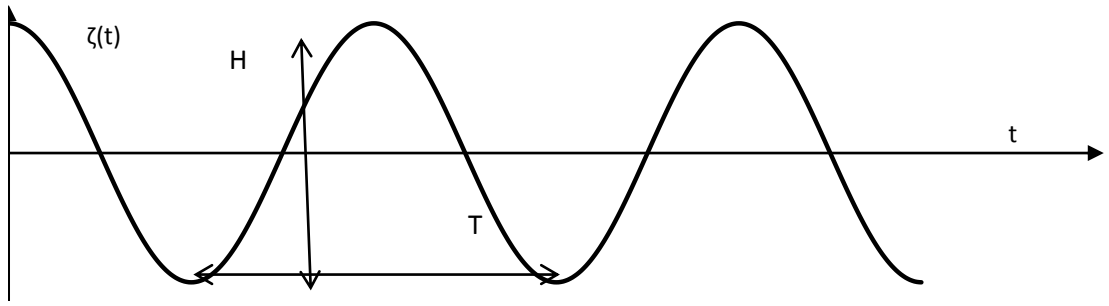
$$\omega = 2\pi/\mathrm{T} = 2\pi f,\ c = L/T = \omega/k$$

Η μεταβολή της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας (ζ) οριοθετείται από το εύρος (a) του κύματος, με βα΄ση το οποίο ορίζεται το ύψος κύματος (H).

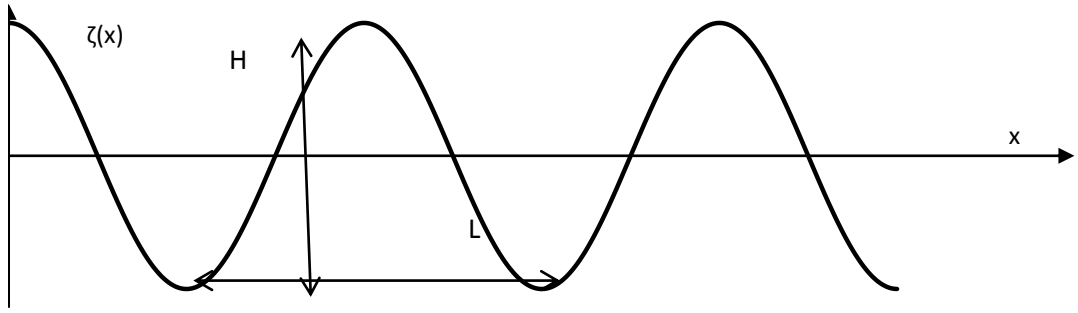
$$a_{\max} = \zeta_{\max} - \zeta_{\text{αρχικό}},\quad a_{\min} = \zeta_{\min} - \zeta_{\text{αρχικό}},\quad |a| = H/2 \text{ (γραμμική θεωρία)}$$

Η κινητική κατάσταση των σωματιδίων της ελεύθερης επιφάνειας περιγράφεται από την ταχύτητα (u,v) και την επιτάχυνση (a_x,a_y). Στις ενότητες 1.3 και 1.4 ακολουθεί εκτενέστερη ανάλυση των χαρακτηριστικών αυτών.

Η απλούστερη θεωρία για τον υπολογισμό των χαρακτηριστικών αυτών είναι η γραμμική θεωρία, ή θεωρία Stokes πρώτης τάξης, ή θεωρία Airy με την οποία το κύμα προσεγγίζεται ως απλή αρμονική ταλάντωση. Η εφαρμογή της είναι εύκολη με περιορισμένο όμως πεδίο εφαρμογής και ακρίβεια πρόγνωσης, που μπορεί όμως, ανά περιπτώσεις, να είναι ικανοποιητική. Παράδειγμα ενός τέτοιου κύματος φαίνεται στο σχήμα *1.2*, που απεικονίζεται η μεταβολή της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας σε σχέση με το χρόνο.



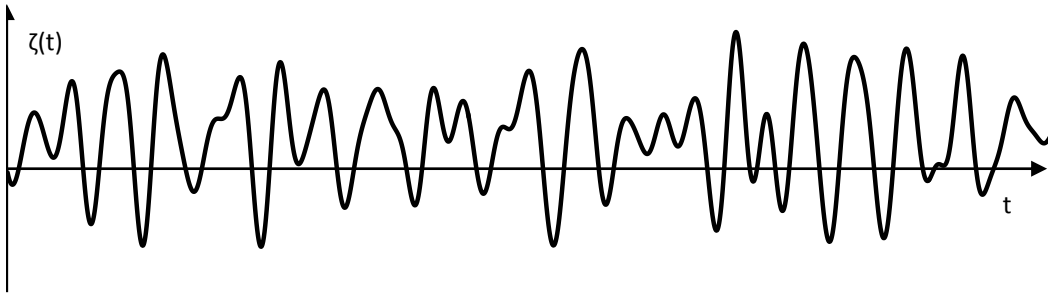
Σχήμα 1.2 Παράδειγμα μονοχρωματικού κύματος ως προς τον χρόνο



Σχήμα 1.3 Παράδειγμα μονοχρωματικού κύματος ως προς τον χώρο

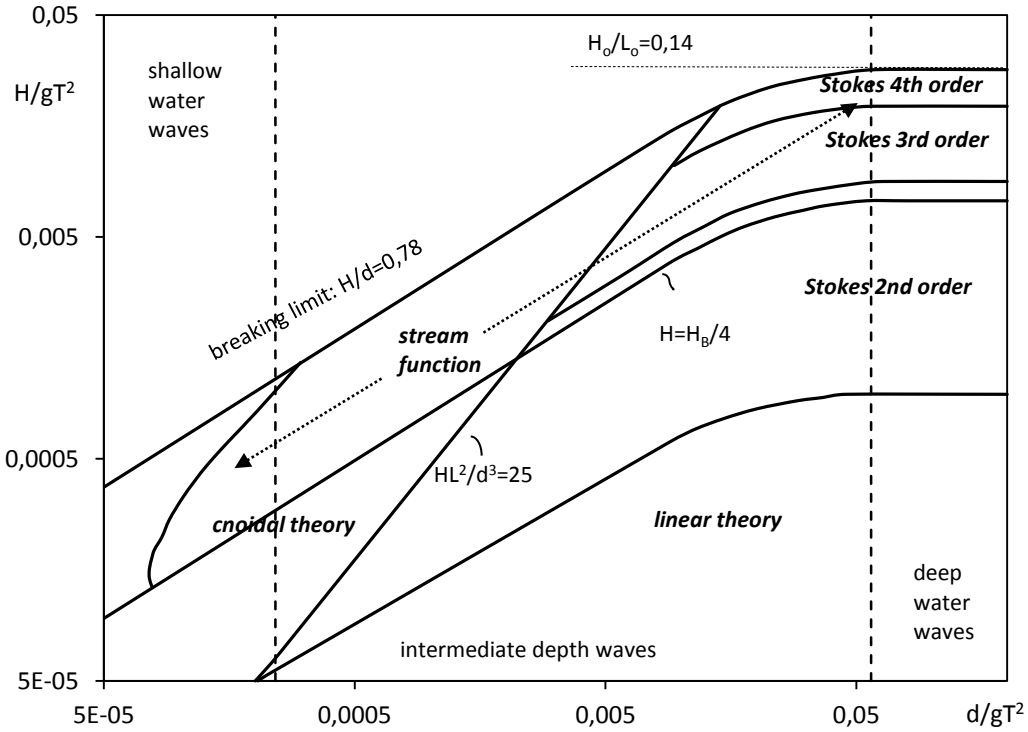
1.2. Διάκριση κυματικών θεωριών

Σε επέκταση της θεωρίας Airy αναπτύχθηκαν θεωρίες για την προσέγγιση μη γραμμικών ιδιοτήτων. Με αυτές στον όρο πρώτης τάξης προστίθενται όροι ανώτερων τάξεων. Με αυτό το σκεπτικό εργάστηκαν οι Skjelbreia & Hendrickson, 1961, Chappelear 1961, Peregrine,1972, Fenton, 1985, 1990. Στις εργασίες αυτές υιοθετείται μια πιο σύνθετη περιγραφή της ελεύθερης επιφάνειας, όπως αυτή διαμορφώνεται μετά τη μείωση του βάθους, την ανάκλαση, τις μη γραμμικές αλληλεπιδράσεις μεταξύ κυμάτων ή μεταξύ κύματος- πυθμένα και τη θραύση του κύματος. Πιο σύνθετες μορφές κυματισμών δεν μπορούν να προσεγγιστούν με ντετερμινιστές μεθόδους αλλά μέσω στατιστικής/ στοχαστικής ανάλυσης προσδοκώντας την αναπαραγωγή μιας περισσότερο «τυχαίας» διαταραχής. Ένα παράδειγμα χρονικής μεταβολής της στάθμης ενός τυχαίου κυματισμού φαίνεται στο σχήμα 1.4.



Σχήμα 1.4 Παράδειγμα τυχαίου κύματος, μεταβολή της ελεύθερης επιφάνειας σε σχέση με το χρόνο

Οι θεωρίες που έχουν προταθεί για την προσομοίωση του κυματικού πεδίου συνοψίζονται στην εργασία του Le Méhauté, εδώ συνοψίζονται στο σχήμα 1.5. Αυτές είναι η θεωρία Stokes (1ης τάξης και επεκτάσεις ανώτερης τάξης), η θεωρία ροϊκής συνάρτησης (*stream function theory*) και η θεωρία ελλειπτικού συνημίτονου (*cnoidal wave theory*). Κριτήρια ενδεικτικά της δυνατότητας εφαρμογής της εκάστοτε θεωρίας επίσης φαίνονται στο σχήμα 1.5. Ο αριθμός Ursell έχει επίσης χρησιμοποιηθεί ως ένδειξη εφαρμογής. Εκτός των κυματικών θεωριών έχει προταθεί η μαθηματική έκφραση των συνθηκών ροής, κατασκευάζοντας ένα σύστημα βασικών εξισώσεων και οριακών συνθηκών. Τέτοιες είναι οι εξισώσεις Navier-Stokes και οι εξισώσεις τύπου Boussinesq, αυτές και οι εφαρμογές τους παρουσιάζονται στη συνέχεια. Δεδομένων κάποιων αρχικών παραδοχών και για αυτές υπάρχουν επίσης περιορισμοί στην εφαρμογή τους. Εκτός από τις προσεγγίσεις της θεωρίας ελλειπτικού συνημίτονου όλες οι θεωρίες ικανοποιούν την μαθηματική έκφραση της οριακής συνθήκης στο πυθμένα και την εξίσωση Laplace (C.E.M.[1]).



Σχήμα 1.5 Περιοχές εφαρμογής κυματικών θεωριών (*Le Méhauté, 1976*)

[1] Coastal Engineering Manual: *βλέπε βιβλιογραφία U.S. Army Corps of Engineers*

Στην εργασία του Le Méhauté (1976) χρησιμοποιούνται ως κριτήρια οι αδιάστατες παράμετροι H/gT^2 και d/gT^2. Η παράμετρος Ursell, U_R συχνά συναντάται στη βιβλιογραφία και ως αριθμός Stokes και χρησιμοποιείται ως κριτήριο για την ταξινόμηση των κυματικών θεωριών. Εναλλακτικά αυτού έχει προταθεί από τον Goda (1983) η παράμετρος U_p (*universal parameter*). Η παράμετρος Ursell δίνεται ως ο λόγος L^2H/d^3 ή σαν ε/μ^2 αν $\varepsilon = H/d$ και $\mu = d/L$. Όπου μ^2 ο συντελεστής διασποράς και ε ο συντελεστής μεταβολής της κλίσης του κύματος (H/L) ως προς το σχετικό βάθος (d/L), μεγέθη χαρακτηριστικά για διασπειρόμενο τύπο κυματισμού. Προκύπτει σύμφωνα με την επέκταση Stokes στην γραμμική θεωρία, ως ανάπτυγμα των μη γραμμικών (περιοδικών) κυμάτων, για τις περιπτώσεις που το μήκος κύματος είναι πολύ μεγαλύτερο του βάθους (μικρό σχετικό βάθος). Πριν τη προσέγγιση του Ursell είχε προηγηθεί μια έκφραση αυτής της παραμέτρου με διαφορετική προσέγγιση από τον Stokes, 1847.

Βραχέα και μακρά κύματα

Η σχέση μήκους κύματος ως προς το βάθος μετάδοσης οριοθετεί τη διάκριση σε βραχέα (*short waves*) ή κύματα Stokes και μακρά (*long waves*). Έκφραση των μακρών κυμάτων αποτελούν αυτά που περιγράφονται από τη θεωρία ελλειπτικού συνημίτονου (*cnoidal waves*). Στο σημείο στο οποίο το μήκος κύματος τείνει στο άπειρο οριοθετούνται τα κύματα μοναχικής θεωρίας (*solitary wave theory*). Τη διάκριση μεταξύ των κυμάτων Stokes και των κυματισμών ελλειπτικού συνημίτονου μελέτησαν και οι Cokelet,1977, Williams, 1981 (C.E.M.).

Μη γραμμικά χαρακτηριστικά

Ο αριθμός Ursell και η κλίση του κύματος έχουν χρησιμοποιηθεί για το χαρακτηρισμό της έντασης (τάξης) των μη γραμμικών ιδιοτήτων.

Διασπορά μεταξύ συχνοτήτων

Το σχετικό βάθος (d/L ή kd) είναι μια επίσης αδιάστατη μεταβλητή, ενδεικτική της επίδρασης του πυθμένα στην ελεύθερη επιφάνεια. Η τιμή της μεταβλητής αυτής, επίσης φαίνεται στο σχήμα 1.5, οριοθετεί τρείς περιοχές βάθους, «ρηχών νερών», «ενδιαμέσων νερών» και βαθιών νερών». Χαρακτηρίζει (ως μ^2) επίσης τη διασπορά ενέργειας από τις απλές αρμονικές ταλαντώσεις σε υψηλότερης τάξης ταλαντώσεις (Beji & Battjes, 1993, Ohyama & Nadaoka, 1992). Η τιμή του σχετικού βάθους καθορίζει και τη σχέση μεταξύ συχνότητας και μήκους κύματος. Σχέση που εκφράζεται με τη σχέση γραμμικής διασποράς,

$$\frac{\omega^2 d}{g} = kd\tan(kd)$$

Για μικρό αριθμό Ursell, $U_R \ll 32\pi^2/3 \approx 100$, ($L \gg d$) μπορεί να εφαρμοστεί η γραμμική θεωρία, ενώ για τιμές $U_R<79$ μπορεί να εφαρμοστεί η θεωρία Stokes και οι επεκτάσεις της. Το όριο του $U_R=79$ ορίζει το διαχωρισμό μεταξύ βραχέων κυμάτων και κυματισμών ελλειπτικού συνημίτονου (Cokelet, 1977). Γενικότερα μεγάλες τιμές της παραμέτρου υποδεικνύουν κυματισμούς με μεγάλο εύρος και μεγάλο σχετικό μήκος κύματος (μακρά κύματα) σε περιοχές «ρηχών νερών». Σε αυτήν την

περίπτωση ίσως χρειάζεται η εφαρμογή μη γραμμικών θεωριών. Στο όριο του $U_R=20$ η θεωρία Stokes προσεγγίζει την θεωρία των κυματισμών ελλειπτικού συνημίτονου . Η θεωρία αυτή μπορεί να εφαρμοστεί για $U_R>20\text{-}25, \left(L>8d\right)$, (C.E.M., Hardy & Kraus, 1987), όταν το μήκος κύματος τείνει στο άπειρο το κύμα εμπίπτει στη θεωρία «μοναχικού» κύματος (*solitary wave theory*). Όπως προαναφέρθηκε υπάρχουν υπολογιστικά αριθμητικά μοντέλα που επιλύουν βασικές διαφορικές εξισώσεις υπερβολικής μορφής. Τέτοια είναι τα μοντέλα μερικών διαφορικών εξισώσεων τύπου Boussinesq. Η εφαρμογή των βασικών εξισώσεων Boussinesq (Boussinesq, 1871, 1872) είναι δυνατή για $L>7d$.

Η παρούσα εργασία εξετάζει τρία ομοιώματα που βασίζονται στην θεωρία Stokes και στην επίλυση των βασικών εξισώσεων που περιγράφουν τις συνθήκες ροής σε υδάτινο σώμα και το κυματικό πεδίο. Για το λόγο στην παρουσίαση που ακολουθεί, επίκεντρο είναι η θεωρία Stokes, η επίλυση των εξισώσεων Navier Stokes και οι εξισώσεις Boussinesq.

1.3. Βασικές εξισώσεις και οριακές συνθήκες

Δύο βασικές αρχές διέπουν τη φυσική του προβλήματος. Είναι η αρχή διατήρησης της μάζας και η αρχή διατήρησης της ορμής. Αυτές οι δύο συνθήκες εκφράζονται μέσα από τις εξισώσεις συνέχειας και κίνησης. Αυτές σε συνδυασμό με οριακές συνθήκες συνθέτουν ένα σύστημα εξισώσεων το οποίο χρησιμοποιούν πολλά υπολογιστικά ομοιώματα για την προσομοίωση της ροής σε ένα ρευστό και εν προκειμένω την προσομοίωση του κυματικού πεδίου.

Η αρχή διατήρησης της μάζας, εφαρμοζόμενη σε ασυμπίεστο ρευστό, εκφράζεται μέσω της εξίσωσης συνέχειας (1.1). Η αρχή διατήρησης της μάζας για ένα δεδομένο όγκο, V ενός ρευστού μάζας, m, πυκνότητας, ρ -χωρικά και χρονικά μεταβαλλόμενης- και με περιβάλλουσα επιφάνεια εμβαδού A εκφράζεται από την εξίσωση 1.1. Η κινητική κατάσταση του ρευστού χαρακτηρίζεται από το διάνυσμα της ταχύτητας $\vec{u}$. Δεδομένου του ότι δεν δημιουργείται ή φθείρεται η μάζα του ρευστού είναι,

$$\frac{dm}{dt}=\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}dV+\iint_A \rho\vec{u}\cdot\vec{n}dA$$

Όπου $\vec{n}$ μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια Α.

Βασικές εξισώσεις

Σε συνέχεια υποθέτοντας ότι το ρευστό είναι ομοιογενές, η ροή του αστρόβιλη, το βάθος του σταθερό και ο πυθμένας κάτω από το ρευστό μη διαπερατός συνεπάγεται η γνωστή έκφραση της εξίσωσης συνέχειας.

$$\nabla\cdot\vec{u}=0 \qquad ή \qquad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \quad (1.1)$$

Από την εξίσωση συνέχειας παράγεται και η εξίσωση *Laplace*. Σε ρευστό ομοιογενές και ασυμπίεστο, το δυναμικό της ταχύτητας πρέπει να ικανοποιεί την

εξίσωση συνέχειας (1.1), καταλήγοντας στη σχέση (1.2) γνωστή ως εξίσωση Laplace. Η ύπαρξη συνάρτησης δυναμικού, ϕ απαιτεί την παραδοχή αστρόβιλης ροής, ορίζεται από την ταχύτητα, $\vec{u}$ ως εξής,

$$-\phi = \oint_l \vec{u} dl = \oint_l (udx + vdy + wdz)$$

και αμφίδρομα ορίζει την ταχύτητα ως,

$$u = -\partial\phi / \partial x, \qquad v = -\partial\phi / \partial y, \qquad w = -\partial\phi / \partial z$$

Έτσι από την εξίσωση (1.1) δεδομένου του άνω ορισμού των συνιστωσών της ταχύτητας $\vec{u}$ προκύπτει η εξίσωση Laplace :

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \tag{1.2}$$

Η αρχή διατήρησης της ορμής εκφράζεται μέσω της εξίσωσης κίνησης, οι γενικές εκφράσεις της οποίας αποτυπώνονται στην εξίσωση (1.4), υποθέτοντας σταθερές συνθήκες ροής. Η εξίσωση αυτή προκύπτει μετά από εφαρμογή του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα. Η επιτάχυνση ενός σωματιδίου στην διεύθυνση x περιγράφεται από την σχέση (1.3). Όμοια εκφράζονται και στους άλλους δύο άξονες y και z.

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} \\
\frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} \\
\frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Έτσι η εξίσωση κίνησης εκφράζεται ως εξής,

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) + X \\
\frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right) + Y \\
\frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right) + Z
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Όπου X μια εξωτερική δύναμη ανά μονάδα μάζας που ασκείται στον εξεταζόμενο όγκο ελέγχου (ή σώμα) στον άξονα x, p η πίεση, ρ η πυκνότητα του ρευστού και τ η διατμητική τάση στο εκάστοτε επίπεδο (Dean & Dalrymple, 1991).

Σε συνέχεια των εξισώσεων αυτών παράγονται οι εξισώσεις Euler και οι εξισώσεις Navier-Stokes. Η διαφορά μεταξύ των δύο έγκειται στη διαφορετική θεώρηση των διατμητικών τάσεων. Για τις εξισώσεις Euler γίνεται υπόθεση μηδενικών διατμητικών τάσεων αγνοώντας την επίδραση της τύρβης, ενώ για τις εξισώσεις Navier- Stokes οι όροι αυτοί διατηρούνται προσεγγίζοντας την επίδραση της τύρβης στη ροή.

Στις εξισώσεις Navier- Stokes βασίζονται πολλά από τα αριθμητικά ομοιώματα που έχουν αναπτυχθεί. Οι δύο υποθέσεις που αναφέρθηκαν, διακρίνουν θεωρητικά - τουλάχιστον αρχικά- τις δύο υπολογιστικές εφαρμογές που εξετάζονται στα πλαίσια της εργασίας αυτής. Στην υπόθεση Euler βασίζονται ομοιώματα που χρησιμοποιούν τις εξισώσεις τύπου Boussinesq, τέτοιο είναι αυτό των Chondros & Memos. Την γενικότερη έκφραση των εξισώσεων κίνησης χρησιμοποιούν εφαρμογές όπως το *CoBrAS, CoBrAS-UC* (*Cornell Breaking Waves and Structures – University of Cantabria*) στην μορφή των εξισώσεων Reynolds.

Ένα βήμα έπειτα, ξεκινώντας από την υπόθεση Euler και την εξίσωση κίνησης, ολοκληρώνοντας την κατά μήκος μιας γραμμής ροής καταλήγει κανείς στην εξίσωση Bernoulli (1.5). Από αυτήν παράγεται η δυναμική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας. Η εξίσωση Bernoulli είναι,

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(u^2+w^2\right)+\frac{p}{\rho}+gz=C(t) \qquad (1.5)$$

Όπου *C(t)* η σταθερά Bernoulli.

Οι περιορισμοί που τίθενται, κινηματικοί και δυναμικοί στην ελεύθερη επιφάνεια και κινηματικοί στον πυθμένα, αντιστοιχούν στις οριακές συνθήκες ελεύθερης επιφάνειας και πυθμένα. Θεωρώντας ότι το πρόβλημα περιορίζεται στο δισδιάστατο επίπεδο x,y οι επιβαλλόμενες συνθήκες είναι:

Οριακές συνθήκες

Κινηματική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\vec{u}\cdot\nabla\zeta=w, \qquad z=\zeta(x,y,t) \qquad (1.6)$$

Δυναμική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(u^2+w^2\right)+gz=0, \qquad z=\zeta(x,y,t) \qquad (1.7)$$

Η οποία ισχύει δεδομένου του ότι η πίεση στην ελεύθερη επιφάνεια είναι σταθερή και εξάγεται από την εξίσωση Bernoulli. Η σταθερά Bernoulli θεωρείται επίσης μηδενική υποθέτοντας την ταύτιση της ελεύθερης επιφάνειας με το επίπεδο z=0, δηλαδή την μέση στάθμη όταν δεν υπάρχει κυματισμός ή ρεύμα.

Κινηματική συνθήκη πυθμένα

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}=0 \quad \text{ή} \quad w=0, \qquad z=-d \qquad (1.8)$$

Στην περίπτωση που η διαδιδόμενη διαταραχή χαρακτηρίζεται από περιοδικότητα, αυτή εκφράζεται από τη σχέση,

$$\phi(x,z,t)=\phi(x+L,z,t)$$
$$\phi(x,z,t)=\phi(x,z,t+T)$$

Όπως φάνηκε και από τα σχήματα 1.2 και 1.3, η περιοδικότητα χαρακτηρίζει την διαταραχή τόσο σε χώρο όσο και σε χρόνο. Μεγέθη που προσδιορίζουν την περιοδικότητα σε χώρο και χρόνο αποτελούν το μήκος και η περίοδος του κύματος. Τα δύο αυτά μεγέθη συνδέονται μέσω της ταχύτητας φάσης, $c = L/T$.

1.4. Θεωρία Stokes

1.4.1. Εισαγωγή - Θεωρία Airy

Η θεωρία Airy, αλλιώς και θεωρία κυματισμών απειροστού πλάτους, εφαρμόζεται με την προϋπόθεση μικρού εύρους κύματος, *α/L«1* και αμελητέου ιξώδους. Με αυτές τις παραδοχές μπορούν να γραμμικοποιηθούν οι εξισώσεις που περιγράφουν τις οριακές συνθήκες ελεύθερης επιφάνειας, (1.6) και (1.7). Αυτές σε συνδυασμό με την οριακή συνθήκη για τον πυθμένα και την εξίσωση Laplace αποτελούν σύστημα διαφορικών εξισώσεων του οποίου η λύση είναι μια χωρικά και χρονικά αρμονική συνάρτηση ημιτονοειδούς μορφής. Η λύση αυτή δίνεται από την εξίσωση (1.9) ως συνάρτηση δυναμικού της ταχύτητας (από εδώ και έπειτα οι εξισώσεις θα αναλύονται σε δύο διαστάσεις x-z),

$$\phi(x,t) = \frac{Hg}{2\omega}\frac{\cosh(k(d+z))}{\cosh(kd)}\sin(kx-\omega t) \tag{1.9}$$

ενώ ως ελεύθερη επιφάνεια δίνεται από την εξίσωση (1.10),

$$\zeta(x,t) = \frac{H}{2}\cos(kx-\omega t) \tag{1.10}$$

Από τις σχέσεις (1.9), (1.10) και (1.6) προκύπτει και η εξίσωση διασποράς (1.12), αρχικά ως,

$$\omega^2 = gk\cdot\tanh(kd) \tag{1.11}$$

και έπειτα αν η ταχύτητα φάσης είναι $c = \omega/k$, είναι

$$c = \frac{gT}{2\pi}\tanh(kd) \tag{1.12}$$

ενώ το αντίστοιχο μήκος κύματος, αν $c = L/T$, είναι

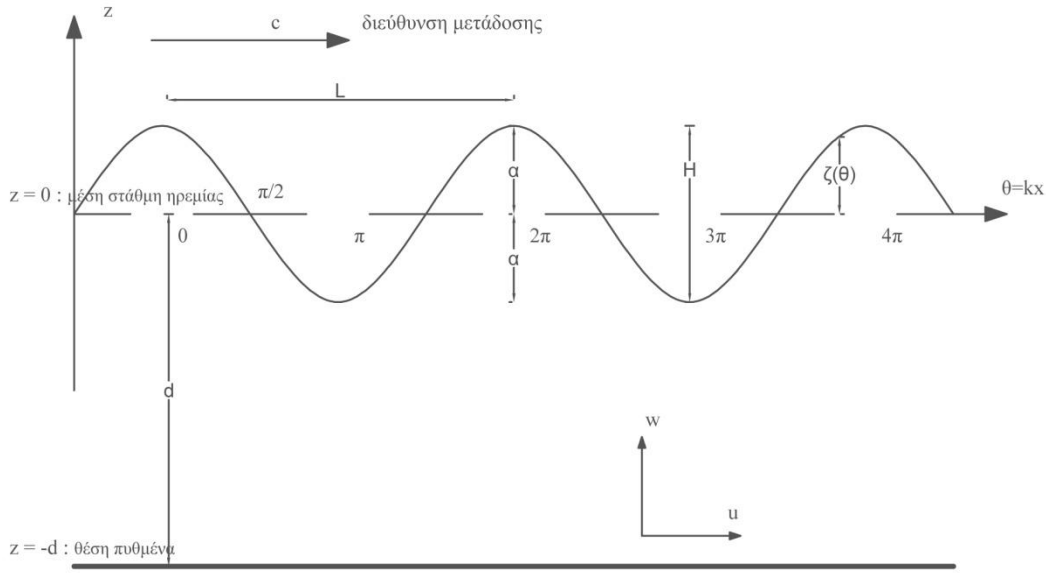
$$L = \frac{gT^2}{2\pi}\tanh(kd) \tag{1.13}$$

Οι συνιστώσες της ταχύτητας ενός σωματιδίου προκύπτουν από την εξίσωση (1.9) δεδομένου του ορισμού της συνάρτησης δυναμικού.

$$u(x,t) = \frac{\pi H}{T}\frac{\cosh(k(d+z))}{\sinh(kd)}\cos(kx-\omega t) \tag{1.14}$$

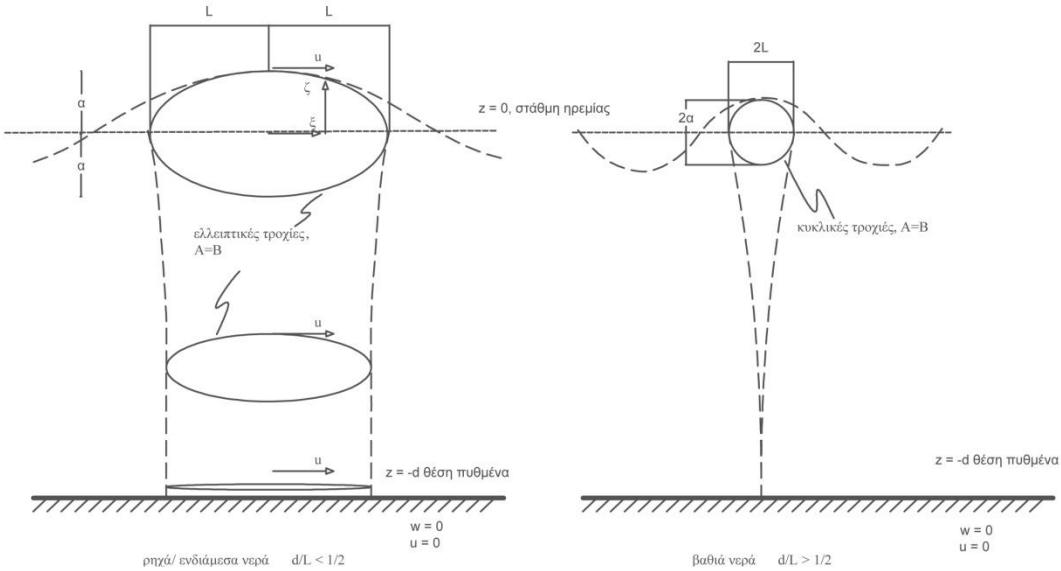
$$w(x,t) = \frac{\pi H}{T}\frac{\sinh(k(d+z))}{\sinh(kd)}\sin(kx-\omega t) \tag{1.15}$$

Από τις εξισώσεις (1.9), (1.14) και (1.15) γίνεται φανερό ότι οι τιμές της μεταβλητής της ταχύτητας μειώνονται όσο μειώνεται το βάθος *d*. Χαρακτηριστικό μέγεθος για την διαφοροποίηση του βάθους είναι ο αδιάστατος λόγος *d/L*. Διακρίνονται 3 περιοχές σχετικού βάθους, αυτή του μεγάλου βάθους (*«βαθιά νερά»*) για *d/L>0.5*, αυτή του μικρού βάθους (*«ρηχά νερά»*) για *d/L<0.05* και η ενδιάμεση αυτών (*«ενδιάμεσα νερά»*). Για τιμές *d/L>0.5* η υπερβολική συνισταμένη τείνει στη μονάδα, ενώ για *d/L<0.05* τείνει στην τιμή *kd*. Η



Σχήμα 1.6 Ορισμός βασικών μεταβλητών σε ένα περιοδεύον κύμα (*Coastal Engineering Manual*)

Συνοψίζοντας οι βασικές μεταβλητές του προβλήματος περιγράφονται στο σχήμα 1.6.



Σχήμα 1.7 Μεταβολή της ελεύθερης επιφάνειας στη μετάβαση προς «βαθιά νερά» (*Coastal Engineering Manual*)

Όπως φαίνεται στις περιοχές αυξανόμενου *d/L* οι τροχιές κίνησης των σωματιδίων τείνουν να γίνονται κυκλικές, ενώ προς περιοχές μειωμένου *d/L* ελλειπτικές. Το εύρος της διακύμανσης της ελεύθερης επιφάνειας μειώνεται εκθετικά με το βάθος, ικανοποιώντας έτσι και την αρχική συνθήκη απειροστού εύρους. Τέλος σημαντικό είναι και το γεγονός του μεγάλου οριζόντιου εύρους σε περιοχές μικρού βάθους, καθώς η τύρβη σε συνδυασμό με την δράση των κυμάτων μπορούν να προκαλέσουν διαταραχή του υλικού του πυθμένα.

1.4.2. Μη γραμμικοί κυματισμοί - Θεωρίες Stokes ανώτερης τάξης

Με την θεωρία Stokes έγινε η υπόθεση ότι η μεταβολή των χαρακτηριστικών σε σχέση με την απόσταση x μπορεί να περιγραφεί από τη σειρά Fourier, της οποίας οι συντελεστές μπορούν να εκφραστούν ως διαταραχές πρόσθετες σε μια αρχική μεταβολή. Συνεπάγεται ενός συστήματος βασικών εξισώσεων (εξίσωση Laplace, οριακές (κινηματικές) συνθήκες και η εξίσωση Bernoulli).

Η επέκταση Stokes της αρχικής γραμμικής θεωρίας χρησιμοποιεί την θεωρία μικρών διαταραχών παρακάμπτοντας την αδυναμία εξαγωγής αναλυτικών λύσεων από το αρχικό σύστημα εξισώσεων που περιγράφθηκε στην προηγούμενη ενότητα. Έτσι επεκτείνεται η αρχική θεωρία και γίνεται δυνατή η παραγωγή προσεγγιστικών λύσεων για την προσέγγιση μη γραμμικών κυματισμών. Θεωρητικά η λύση γίνεται ακριβέστερη όσο αυξάνεται ο αριθμός των πρόσθετων όρων και αυξάνεται η τάξη της μη γραμμικότητας. Η εφαρμογή της θεωρείται βάσιμη για τις περιοχές «ενδιάμεσων» και «βαθιών νερών», ή διαφορετικά για αριθμούς Ursell μικρότερους του *79*. Περνώντας σε περιοχές όπου ο λόγος *d/L* παίρνει τιμές μικρότερες του *0.05* είναι δυνατή η εφαρμογή της θεωρίας απειροστού μήκους όπως περιγράφθηκε στην παράγραφο 1.4.1. Μια άλλη θεωρία, αυτή των κυματισμών ελλειπτικού συνημίτονου μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την καλύτερη προσέγγιση σε αυτό το βάθος.

Έτσι με βάση τη θεωρία διαταραχών (*perturbation theory*) και την προϋπόθεση μιας μικρής αδιάστατης παραμέτρου $\in = ka \ll 1$ (*συντελεστής μη γραμμικότητας, wave steepness*), η συνάρτηση δυναμικού και η συνάρτηση ελεύθερης επιφάνειας μπορούν να εκφραστούν ως σειρά,

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_1 + \in \varphi_2 + \in^3 \varphi_3 + \ldots \\ \zeta &= \zeta_1 + \in \zeta_2 + \in^3 \zeta_3 + \ldots \end{aligned} \tag{1.16}$$

Κάθε όρος στη σειρά αυτή είναι μικρότερος του προηγούμενου και ο δείκτης αναφέρεται στην τάξη της θεωρίας που χρησιμοποιείται.

Θεωρία Stokes 2ης τάξης

Από την τάξη αυτή μη γραμμικών όρων και έπειτα τα κυρτά σημεία γίνονται πιο απότομα, ενώ τα κοίλα μακραίνουν, ως αποτέλεσμα της ύπαρξης πρόσθετων, στο αρχικό αρμονικό κύμα, μη αρμονικών συνιστωσών. Οι διαγραφόμενες από τα

σωματίδια τροχιές παύουν να είναι κλειστές ενώ αρχίζει να δημιουργείται ρεύμα (*Stokes drift*) και να συμβαίνει μεταφορά μάζας.

Η συνάρτηση δυναμικού δίνεται από την εξίσωση:

$$\phi(x,z,t)=\frac{Hg}{2\omega}\frac{\cosh(k(d+z))}{\cosh(kd)}\sin(kx-\omega t)+\frac{3\pi H^2}{16T}\frac{\cosh(2k(d+z))}{\sinh^4(kd)}\sin 2(kx-\omega t) \qquad (1.17)$$

Η εξίσωση της ελεύθερης επιφάνειας δίνεται ως:

$$\zeta(x,z,t)=\frac{H}{2}\cos(kx-\omega t)+\frac{\pi H^2}{8L}\frac{\cosh(2k(d+z))}{\sinh^3(kd)}(\cos 2kd+2)\cos 2(kx-\omega t) \qquad (1.18)$$

Η εξίσωση διασποράς ταυτίζεται με την εξίσωση (1.12), ενώ οι συνιστώσες της ταχύτητας στο δισδιάστατο επίπεδο ορίζονται ως,

$$u(x,z,t)=\frac{\pi H}{T}\frac{\cosh(k(d+z))}{\sinh(kd)}\cos(kx-\omega t)+\frac{3\pi^2H^2}{4TL}\frac{\cosh(2k(d+z))}{\sinh^4(kd)}\cos 2(kx-\omega t) \qquad (1.19)$$

$$w(x,z,t)=\frac{\pi H}{T}\frac{\sinh(k(d+z))}{\sinh(kd)}\sin(kx-\omega t)+\frac{3\pi^2H^2}{4TL}\frac{\sinh(2k(d+z))}{\sinh^4(kd)}\sin 2(kx-\omega t) \qquad (1.20)$$

Θεωρία Stokes 3ης τάξης

Αρχικά ας οριστούν οι τιμές:

$$F_1=\frac{\pi H}{L}\frac{1}{\sinh(kd)}$$
$$F_2=\frac{3\pi^2H^2}{4L^2}\frac{1}{\sinh^4(kd)} \qquad (1.21)$$
$$F_3=\frac{3\pi^3H^3}{64L^3}\frac{11-2\cosh(2kd)}{\sinh^7(kd)}$$

και θ, η φάση κάθε συνιστώσας $\theta=kx-\omega t$. Τότε, η συνάρτηση δυναμικού δίνεται από την εξίσωση:

$$\phi(x,z,t)=\frac{cL}{2\pi}\left[F_1\cosh\big(k(z+d)\big)\sin\theta+\frac{1}{2}F_2\cosh\big(2k(z+d)\big)\sin(2\theta)+\frac{1}{3}F_3\cosh\big(3k(z+d)\big)\sin(3\theta)\right] \qquad (1.22)$$

Η εξίσωση της ελεύθερης επιφάνειας δίνεται ως:

$$\zeta(x,z,t)=\frac{\mathrm{H}}{2}\cos\theta+\frac{\pi H^2}{8L}\frac{\cosh(kd)\big(2+\cosh(2kd)\big)}{\sinh^3(kd)}\cos(2\theta)+\frac{3\pi^2H^3}{128L^2}\frac{1+8\cosh^6(kd)}{\sinh^6(kd)}\cos(3\theta) \qquad (1.23)$$

Οι συνιστώσες της ταχύτητας δίνονται από τις εξισώσεις:

$$\frac{u}{c} = F_1 \cosh\big(k(z+d)\big)\cos\theta + F_2 \cosh\big(2k(z+d)\big)\cos(2\theta) + F_3 \cosh\big(3k(z+d)\big)\cos(3\theta) \tag{1.24}$$

$$\frac{w}{c} = F_1 \sinh\big(k(z+d)\big)\sin\theta + F_2 \sinh\big(2k(z+d)\big)\sin(2\theta) + F_3 \sinh\big(3k(z+d)\big)\sin(3\theta) \tag{1.25}$$

Ενώ η εξίσωση διασποράς,

$$\omega^2 = \frac{g}{k}\tanh(kd)\left[1 + \frac{k^2H^2}{4}\frac{14+4\cosh^2(2kd)}{16\sinh^4(kd)}\right] \tag{1.26}$$

Θεωρία Stokes 5ης τάξης

Με την θεωρία Stokes 5ης τάξης εμφανίζονται δεύτερες κορυφές για κυματισμούς μεγάλου εύρους (Peregrine,*1972*, Fenton, *1985 & 1990*) και η κλίση του κύματος πιο απότομη. Η εφαρμογή των παρακάτω γίνεται με την προϋπόθεση ύψος κύματος, περίοδος κύματος και βάθος μετάδοσης να είναι γνωστά. Απαιτεί τον ορισμό της ροής μάζας (*mass flux*) και την εφαρμογή της θεωρίας στάσιμων κυμάτων. Ο αριθμητικός προσδιορισμός των χαρακτηριστικών ενός κύματος είχε γίνει επίσης από τον Chappelear *(1961)*.

$$\phi(x,z) = -\bar{u}x + C_o\sqrt{\frac{g}{k^3}}\sum_{i=1}^{5}\in^i \sum_{j=1}^{i}\Big(A_{ij}\cos(jkz)\sin(jkx)\Big) + O(\in^6) \tag{1.27}$$

όπου $\bar{u}$, η μέση οριζόντια ταχύτητα του ρευστού η οποία δίνεται από τη σχέση,

$$\bar{u}\sqrt{k/g} = C_o + \in^2 C_2 + \in^4 C_4 + O(\in^6) \tag{1.28}$$

Η εξίσωση της ελεύθερης επιφάνειας δίνεται από τη εξίσωση,

$$\begin{aligned} k\zeta(x) = kd &+ \in\cos(kx) + \in^2 B_{22}\cos(2kx) + \in^3 B_{31}\big(\cos(kx) - \cos(3kx)\big) \\ &+ \in^4\big(B_{42}\cos(2kx) + B_{44}\cos(4kx)\big) \\ &+ \in^5\big[-\big(B_{53} - B_{55}\big)\cos(kx) + B_{53}\cos(3kx) + B_{55}\cos(5kx)\big] + O(\in^6) \end{aligned} \tag{1.29}$$

Αν η ταχύτητα διάδοσης, *c* είναι άγνωστη μπορεί να υπολογιστεί από τις σχέσεις της εξίσωσης (*1.30*), ανάλογα με το ποιά ταχύτητα εκ των $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ είναι γνωστή. Η ταχύτητα με δείκτη *1* αποτελεί τη μέση τιμή των οριζόντιων ταχυτήτων από τη θεωρία πρώτης τάξης. Η ταχύτητα με δείκτη *2* αντιπροσωπεύει την κατά βάθος ολοκληρωμένη μέση ταχύτητα του ρευστού, ενίοτε και «ταχύτητα μεταφοράς μάζας». Για τη δεύτερη, αν δε συμβαίνει μεταφορά μάζας, η ταχύτητα διάδοσης υπολογίζεται από την ανηγμένη στο βάθος ροή όγκου (*Q/d*) κάτω από την επιφάνεια της ταλάντωσης (*εξίσωση 1.31*).

$$\bar{u}_1 = c - \bar{u}, \qquad \bar{u}_2 = c - Q/d \tag{1.30}$$

Ο όγκος *Q*, δίνεται ως:

$$Q\sqrt{k^3/g} = C_o kd + \in^2 \left(C_2 kd + D_2\right) + \in^4 (C_4 kd + D_4) + ... \tag{1.31}$$

Υπάρχει επίσης ένας προσεγγιστικός τύπος για τον αριθμό κύματος από τους Fenton and McKee (1989), που χρησιμοποιείται στην εργασία του Fenton, 1990. Αποτελεί ακριβή λύση της σχέσης $\omega^2 / gk = \tanh(kd)$ και η ακρίβεια του φτάνει σε ένα μέγιστο σφάλμα του 1.5%, για τα δεκτά όρια των τιμών του γινομένου *kd* για «βαθιά» και «ρηχά νερά». Αυτός είναι,

$$k \approx \frac{\omega^2}{g}\left(\coth(\omega\sqrt{d/g})^{3/2}\right)^{2/3} \tag{1.32}$$

Τα όρια των τιμών του γινομένου *kd* είναι $kd \to \infty$ για την περιοχή των «βαθιών νερών» και $kd \to 0$ για την περιοχή των «ρηχών νερών». Οι τιμές των παραμέτρων A_i,B_i,C_i,D_i δίνονται από τον πίνακα 1 του Fenton, 1985. Επίσης ως ϵ ορίζεται η τιμή $\in = kH/2$. Η εφαρμογή της μεθόδου του Fenton θεωρείται ακριβής για κύματα με μήκος κύματος μικρότερο του δεκαπλάσιου βάθους (*L/d<10*). Έτσι επιβεβαιώνεται ότι η ισχύς της θεωρίας Stokes περιορίζεται στα βραχέα κύματα.

1.5. Εξισώσεις Navier Stokes

Οι εξισώσεις Navier-Stokes, ονομάστηκαν έτσι από τους Claude-Louis Navier και George Gabriel Stokes, περιγράφουν την κίνηση των σωματιδίων σε ένα ρευστό. Όπως αναφέρθηκε προέρχονται από την εφαρμογή του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα στην ροή ενός ρευστού. Με αυτές περιγράφονται οι μεταβολές της ταχύτητας σε συνάρτηση του χώρου και του χρόνου. Αποτελούν μη γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις με ευρύ φάσμα εφαρμογών. Η μη γραμμικότητα τους είναι αυτή που αποδίδει τη τύρβη και οφείλεται στη χρονική μεταβολή της ταχύτητας σε κάθε σημείο του πεδίου ροής. Με τη γραμμικοποίηση τους, γίνεται ευκολότερη η επίλυση τους, αλλά χάνουν την δυνατότητα να αποδίδουν την τύρβη.

Η αριθμητική επίλυση των εξισώσεων για τυρβώδη ροή είναι εξαιρετικά δύσκολη. Δεδομένων των διαφορετικών κλιμάκων ανάμιξης (*mixing-length scales*, σχετίζονται με τη τυρβώδη ροή) μια σταθερή λύση απαιτεί ένα πολύ πυκνό υπολογιστικό πλέγμα καθιστώντας έτσι ένα μη αποδεκτό -αν όχι ακατόρθωτο- υπολογιστικό χρόνο απαραίτητο για την ανάλυση του πεδίου. Οι εξισώσεις Reynolds Averaged Navier Stokes Equations (R.A.N.S.) αποτελούν μια προσέγγιση χρονικά ολοκληρωμένων εξισώσεων για την ανάλυση τυρβώδους ροής. Οι εξισώσεις ενισχύονται με μοντέλα της τύρβης όπως το (*k*-*ε*) που κλείνουν το σύστημα εξισώσεων που χρησιμοποιούν ομοιώματα όπως το Co.Br.A.S.

Μια άλλη τεχνική επίλυσης των εξισώσεων Navier- Stokes αποτελεί η προσομοίωση Large Eddy Simulation (LES) αλλά απαιτεί πολύ περισσότερο υπολογιστικό χρόνο και υπολογιστική μνήμη (υπολογιστικό κόστος). Κύριο χαρακτηριστικό της LES είναι η απαλοιφή των μικρών κλιμάκων ανάμιξης (*low pass filtering*) από τη λύση μειώνοντας το υπολογιστικό κόστος. Προτάθηκε από τον

Smagorinsky, 1963 για την προσομοίωση αέριων ρευμάτων και μελετήθηκε για ρευστά εντός αγωγών από τον Deardorff, 1970.

Όπως σημειώθηκε και στην εισαγωγική ενότητα, σε πραγματικά ρευστά η στρωτή ροή δεν είναι κανόνας. Οι αναπτυσσόμενες τάσεις δεν είναι αμελητέες, για την παραγωγή των εξισώσεων Navier-Stokes (1.34), αυτές περιγράφονται από μια γραμμική σχέση (*Newtonian shear stress relationship*). Με την υπόθεση ότι το ρευστό είναι ασυμπίεστο και ότι το ιξώδες, μ_v είναι σταθερό, οι διατμητικές τάσεις της εξίσωσης (1.4) μπορούν γενικευμένα να περιγραφούν από τη σχέση (1.33),

$$\tau_{ij} = \mu_v \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \tag{1.33}$$

Όπου x_j ο j χωρικός άξονας, u_i η ταχύτητα του ρευστού κατά τον άξονα i. Οι δείκτες i,j δηλώνονται με βάση τη ζητούμενη τάση, τ και μπορούν να αντιστοιχούν σε ένα εκ των (x,z). Ο πρώτος δείκτης δηλώνει τη διεύθυνση κάθετη προς την έδρα στην οποία ενεργεί η διατμητική τάση, ενώ ο δεύτερος δηλώνει τη διεύθυνση της συνιστώσας της τάσης.

Έτσι η εξίσωση (1.4) διαμορφώνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial z} w = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu_v}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + X \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial z} w = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu_v}{\rho}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + Z \end{aligned} \tag{1.34}$$

Όπου μ_v, η δυναμική συνεκτικότητα του ρευστού και μ_v/ρ η κινηματική συνεκτικότητα του νερού, v_m. Οι X,Z είναι δυνάμεις δρώσες ανά μονάδα μάζας στους άξονες x,z αντίστοιχα. Παράδειγμα τέτοιας δύναμης είναι η βαρύτητα, που για την περίπτωση αυτή η X, (δηλαδή g_x) θα θεωρηθεί ίση με μηδέν και η Z ίση με $(-g)$.

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu_v}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu_v}{\rho}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - g \end{aligned} \tag{1.35}$$

Η γραμμικοποιημένη μορφή των παραπάνω εξισώσεων κίνησης σε δισδιάστατο επίπεδο (x,z) είναι,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + v_m\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + v_m\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - g \end{aligned} \tag{1.36}$$

1.6. Εξισώσεις Boussinesq

Η προσέγγιση Boussinesq παρουσιάστηκε πρώτη φορά σε εργασία του Boussinesq, 1872. Λαμβάνει υπόψη την κατακόρυφη κατανομή της οριζόντιας συνιστώσας της ταχύτητας καταλήγοντας σε μερικές μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις η εφαρμογή των οποίων θεωρείται βάσιμη για ελαφρώς μη γραμμικά, μακρά κύματα με ισχύ σε μια, την οριζόντια, διάσταση.

Η κεντρική ιδέα των εξισώσεων τύπου Boussinesq είναι η απαλοιφή της κατακόρυφης συντεταγμένης από τις εξισώσεις ροής διατηρώντας όμως τις επιδράσεις της στη ροή κάτω από την επιφάνεια της ταλάντωσης. Τα βασικά βήματα για την παραγωγή των αρχικών εξισώσεων Boussinesq είναι *(α)* η ανάπτυξη Taylor για την οριζόντια και κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας ροής για ένα δεδομένο βάθος, *(β)* η ανάπτυξη αυτή περιορίζεται σε ένα πεπερασμένο αριθμό όρων και *(γ)* η εξίσωση συνέχειας χρησιμοποιείται για την αντικατάσταση των κατακόρυφων μερικών παραγώγων με οριζόντιες στην ανάπτυξη Taylor (β). Όλα αυτά ισχύουν με προϋποθέσεις το ασυμπίεστο του ρευστού και την αστρόβιλη ροή του. Η μετάδοση θεωρείται ότι συμβαίνει πάνω από οριζόντιο πυθμένα.

Με βάση την αρχική αυτή προσέγγιση του Boussinesq αναπτύχθηκε ένας μεγάλος αριθμός αριθμητικών υπολογιστικών ομοιωμάτων τα οποία βασίζονται σε εξισώσεις τύπου Boussinesq, επεκτείνοντας την αρχική θεωρία. Οι επεκτάσεις αυτές έγιναν για:

- μεταβαλλόμενη βαθυμετρία,
- βελτιωμένη διασπορά συχνοτήτων,
- βελτιωμένη συμπεριφορά όσο αφορά τις μη γραμμικότητες,
- αναπτύγματα Taylor για διαφορετικές κατακόρυφες μεταβολές,
- διαίρεση του πεδίου σε στρώματα και εφαρμογή της προσέγγισης Boussinesq σε κάθε στρώμα,
- εισαγωγή της θραύσης,
- εισαγωγή των επιφανειακών τάσεων,
- επέκταση με εσωτερικά κύματα στη διεπιφάνεια μεταξύ τμημάτων ρευστού με διαφορετική πυκνότητα.

Σε συνέχεια των αρχικών εξισώσεων, εξάχθηκε μια μορφή εξισώσεων για μεταβλητό βάθος από τους Mei and Le Méhauté (1966) οι οποίοι χρησιμοποίησαν την ταχύτητα του πυθμένα ως εξαρτημένη μεταβλητή. Ακολούθησε τροποποίηση από τον Peregrine (1967) ο οποίος χρησιμοποιεί την ταχύτητα ως συνάρτηση του βάθους. Οι εξισώσεις του Peregrine επικράτησαν ως κλασσικές εξισώσεις Boussinesq, έχοντας όμως δυο βασικούς περιορισμούς. Το μοντέλο μέσου βάθους που χρησιμοποίησε αδυνατεί να προσεγγίσει τα χαρακτηριστικά διασποράς στην περιοχή των «ενδιάμεσων νερών» και η ασθενής θεώρηση των μη γραμμικοτήτων περιορίζει τα μέγιστα υπολογιζόμενα ύψη κύματος. Έτσι η εφαρμογή των εξισώσεων του Peregrine περιορίζεται στην περιοχή των «ρηχών νερών».

Ο Serre (1953) ολοκλήρωσε τις εξισώσεις ροής με την υπόθεση μιας γραμμικά μεταβαλλόμενης κατακόρυφης συνιστώσας της ταχύτητας, εξαρτημένη του βάθους.

Ωστόσο όπως διαπιστώθηκε (Madsen et al, 1991) λόγω της θεώρησης αυτής για την ταχύτητα, τα αποτελέσματα που δίνει δεν είναι πιο ακριβή από αυτά των απλούστερων μορφών των εξισώσεων Boussinesq.

Ο Abbot (1979) ολοκλήρωσε τις εξισώσεις συνέχειας και ορμής χωρίς την θεώρηση συγκεκριμένης τάξης μεγέθους, δίνοντας ένα σύστημα εξισώσεων για την περιγραφή μακρών κυματισμών πάνω από οριζόντιο πυθμένα.

Για την επέκταση της εφαρμογής σε μεγαλύτερα βάθη ακολούθησε η εργασία του Witting (1984). Διαφοροποιήθηκε εκφράζοντας διαφορετικά την εξίσωση της ορμής, εξαρτώμενη από το βάθος. Ως ταχύτητα χρησιμοποιήθηκε η ταχύτητα στην ελεύθερη επιφάνεια. Οι όροι διασποράς που διατήρησε φτάνουν μέχρι και τέταρτη τάξη. Έτσι παρουσίασε βελτιωμένα αποτελέσματα σε περιοχές «βαθιών» και «ρηχών νερών», για σταθερό πυθμένα.

Σε συνέχεια των εργασιών των Witting (1984) και Abbott et al. (1984) οι Madsen et al. (1991) τροποποιήσαν τις εξισώσεις Boussinesq που προτάθηκαν από τους Abbott et al. εισάγοντας ένα όρο τρίτης παραγώγου στην εξίσωση της ορμής. Έτσι επιτυγχάνονται βελτιωμένα χαρακτηριστικά γραμμικής διασποράς στα «βαθιά νερά». Η παραδοχή αμετάβλητου πυθμένα παραμένει.

Οι Madsen και Sorensen (1992) ξεκινώντας από τις αρχικές εξισώσεις του Peregrine χρησιμοποίησαν όρους διασποράς, αγνοώντας τις παραγώγους ανώτερης τάξης, περιορίζοντας έτσι την ισχύ σε πυθμένα ομαλής μεταβολής.

Οι Beji και Battjes (1994) ασχολήθηκαν με ένα ομοίωμα τύπου Boussinesq με βελτιωμένα χαρακτηριστικά γραμμικής διασποράς στα βαθιά νερά. Ο πυθμένας που χρησιμοποίησαν περιλάμβανε τραπεζοειδή διατομή.

Διαφορετικές είναι οι προσεγγίσεις των Wei και Kirby (1994) και των Nadaoka et al (1994). Οι πρώτοι χρησιμοποίησαν τις εξισώσεις του Nwogu (1993). Οι εξισώσεις αυτές αναλύονται σε δύο οριζόντιες διαστάσεις και είναι ανεπτυγμένες σε όρους της οριζόντιας συνιστώσας της ταχύτητας σε τυχαίο βάθος. Οι Wei και Kirby διακριτοποίησαν τις πρώτες παραγώγους των εξισώσεων σε τέταρτη τάξη, χωρικά και χρονικά. Ακολούθησαν βελτιώσεις σε επόμενη εργασία τους, Kirby και Wei (1995), παράγοντας πλήρως μη γραμμικές εξισώσεις.

Οι Nadaoka et al. (1994) ανέπτυξαν ένα σύστημα εξισώσεων σε δύο οριζόντιες διαστάσεις και χρησιμοποίησαν τη μέθοδο Galerkin για την αριθμητική επίλυση τους, βελτιστοποιώντας την κατανομή της οριζόντιας συνιστώσας της ταχύτητας και κατά συνέπεια τα χαρακτηριστικά διασποράς. Η εφαρμογή της και η σύγκριση με πειραματικά αποτελέσματα έδειξε την δυνατότητα του ομοιώματος να αναπαριστά κυματικό πεδίο και πεδίο ροής.

Οι Schäffer και Madsen (1995) χρησιμοποίησαν τις προσεγγίσεις των Nwogou (1993), Madsen και Sörensen (1992). Διατήρησαν τους όρους ανώτερης τάξης στη συχνότητα διασποράς και στη διασπορά εύρους. Σε σύστημα νέων εξισώσεων ανώτερης τάξης κατέληξαν οι Madsen και Schäffer (1998), αναπτύσσοντας αυτές σε

όρους οριζόντιας ταχύτητας : στη στάθμη ηρεμίας, την ολοκληρωμένη κατά βάθος αυτήν σε τυχαίο βάθος.

Οι Wei et al (1995), Madsen και Schäffer (1998), Agnon, Madsen και Schäffer (1999), Gobbi, Kirby και Wei (2000), Madsen et al. (2002, 2003), Lynett et al. (2002), Schäffer (2004), Li (2008) εργάστηκαν με σκοπό την βελτίωση της μη γραμμικής συμπεριφοράς των μοντέλων τύπου Boussinesq τη επέκταση του πεδίου εφαρμογής τους. Τα αρχικά μοντέλα Boussinesq, τα βασιζόμενα στις εξισώσεις του Peregrine περιορίζονται σε σχετικό βάθος, kd<0.75. Τα μοντέλα που ακολούθησαν με βελτιώσεις στα χαρακτηριστικά διασποράς και μη γραμμικότητας επέκτειναν την ισχύ ως kd≤40. Στη συνέχεια θα παρουσιαστούν οι εξισώσεις Euler και οι βασικές εξισώσεις του Peregrine. Στο κεφάλαιο 3 θα παρουσιαστούν οι εξισώσεις των Madsen και Schäffer (1998) και η μετέπειτα τροποποίηση των Chondros και Memos (2012).

Εξισώσεις Euler

Οι σχέσεις Euler βασίζονται στην παραδοχή μηδενικών διατμητικών τάσεων. Υπόθεση που είναι βάσιμη για την περίπτωση ενός ιδανικού ρευστού. Περιγράφουν την κίνηση ενός υγρού σωματιδίου και προκύπτει ως αποτέλεσμα γενικότερων εξισώσεων κίνησης.

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g \end{aligned} \tag{1.37}$$

Εξισώσεις Peregrine (1967)

Συνεχίζοντας από την εξίσωση (1.37) με την παραδοχή του Euler, εξήχθησαν οι εξισώσεις του Peregrine. Υπέθεσε μικρούς συντελεστές μη γραμμικότητας και διασποράς, δηλαδή, O($\varepsilon = H/d$) και O($\mu^2 = (d/L)^2$ « 1 και ολοκληρώνοντας κατά βάθος οδηγήθηκε στις σχέσεις,

$$\begin{aligned} &\zeta_t + \nabla\left[(d+\zeta)\vec{u}\right] = 0 \\ &\vec{u}_t + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + g\nabla\zeta = \frac{d}{2}\nabla\left[\nabla(d\vec{u}_t)\right] - \frac{d^2}{6}\nabla(\nabla\vec{u}_t) \end{aligned} \tag{1.38}$$

όπου $\vec{u}$ το διάνυσμα της ταχύτητας στο οριζόντιο επίπεδο ολοκληρωμένο κατά βάθος, d το οποίο είναι χωρικά (x, y) μεταβαλλόμενο, ενώ ο δείκτης t δηλώνει χρονική παράγωγο της εκάστοτε μεταβλητής.

Οι σχέσεις αυτές (εξίσωση *1.38*) είναι οι εξισώσεις συνέχειας και κίνησης. Μεταφέροντας σε μονοδιάστατη ροή αυτές γίνονται,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[(d+\zeta)u\right]=0$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+g\frac{\partial \zeta}{\partial x}=\frac{d}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\frac{\partial u}{\partial t}d)-\frac{d^6}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \tag{1.39}$$

Οι Madsen και Sorensen (1992) προτείνουν ως όριο εφαρμογής το *d/L=0.22* για πυθμένα σταθερού βάθους και *d/L=0.12* για πυθμένα μεταβλητού βάθους. Από το σημείο αυτό και έπειτα η παράμετρος διασποράς παύει να είναι αμελητέα και οι εξισώσεις (1.38) και (1.39) δεν είναι εφαρμόσιμες.

1.7. Θραύση κυματισμών

Με τον όρο θραύση εννοείται το σημείο εκείνο, ή καλύτερα η περιοχή, στην οποία έχει φτάσει ένας κυματισμός μετά από μια σταδιακή μείωση του ύψους του. Η μείωση αυτή του ύψους σημαίνει μείωση της ενέργειας του κυματισμού. Οι παράγοντες που μπορεί να συναινέσουν σε απόσβεση της ταλάντωσης είναι η μείωση του βάθους, η επίδραση της τριβής του πυθμένα και οι μη γραμμικές αλληλεπιδράσεις μεταξύ κυμάτων. Ο κυριότερος από αυτούς είναι η μείωση του βάθους κάτω από κυματισμό που πλησιάζει την ακτή. Με βάση λοιπόν το σημείο αυτό της θραύσης οριοθετείται η ζώνη θραύσης. Η ζώνη αυτή αποτελεί την πιο ενεργή περιοχή, εντός της οποίας παρατηρείται μεταφορά ιζημάτων, η δημιουργία ρευμάτων, η αναρρίχηση στην ακτή. Για τον ορισμό της περιοχής στην οποία συμβαίνει η θραύση έχουν προταθεί αρκετά κριτήρια. Κύρια παράμετρος στον ορισμό των κριτηρίων αποτελεί η σχέση μεταξύ ύψους κύματος και βάθους. Κάποια από τα μεταγενέστερα κριτήρια εισήγαγαν και την κλίση του πυθμένα. Μερικά από τα βασικότερα κριτήρια θραύσης παρουσιάζονται στη συνέχεια.

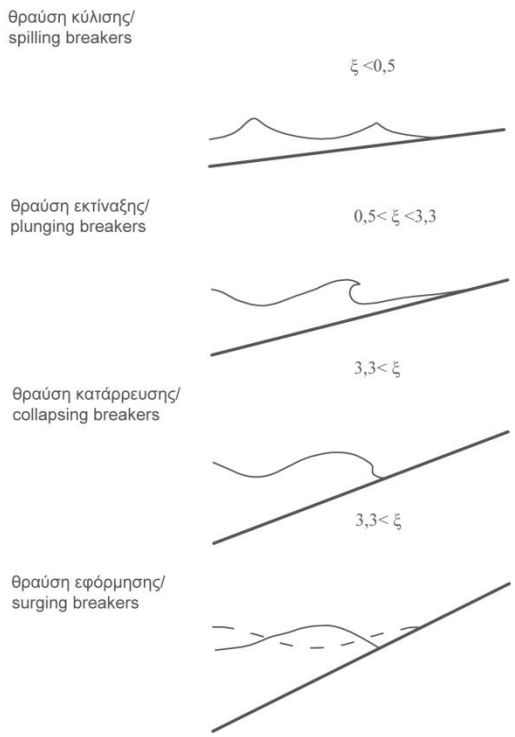
Η θραύση συμβαίνει ως αποτέλεσμα υδροδυναμικής αστάθειας στην τροχιά κίνησης των σωματιδίων. Η αστάθεια αυτή προκαλείται λόγω της σταδιακής αύξησης της οριζόντιας συνιστώσας της ταχύτητας. Αυτό συμβαίνει μέχρι το σημείο που προκαλούνται αλλαγές στην τροχιά αυτή και η κορυφή ανατρέπεται. Έτσι η ενέργεια του κύματος μετατρέπεται σε τυρβώδη κινητική ενέργεια. Αυτή η αλλαγή εκδηλώνεται με αύξηση του ύψους κύματος, μείωση του μήκους κύματος, την εμφάνιση ασυμμετριών και την δημιουργία δεύτερων αρμονικών κυμάτων. Επίσης η δημιουργία τριχοειδών κυμάτων στο κάτω μέρος της διατομής, η δημιουργία ζωνών ανάμιξης νερού και αέρα (αφρισμός) φανερώνουν την ανάπτυξη/ ένταση των φαινομένων τύρβης. Η μεταβολή αυτή στη ροή συνεπάγεται και την αλλαγή στο πεδίο ταχυτήτων μετά τη ζώνη θραύσης. Συνέπεια αυτής είναι η δημιουργία περιοχών εντός της ροής με διαφορετική ταχύτητα, ρευμάτων. Τα ρεύματα (*currents*) αυτά αναλυόμενα σε συνιστώσες, μπορεί να είναι παράλληλα (*long-shore*) ή κάθετα (*cross-shore*) στην ακτή, αποκτούν μέγιστες τιμές ταχύτητας στη ζώνη θραύσης. Παράλληλα εκδηλώνονται και παρόμοιες ροές μεταφοράς ιζήματος. Αποτέλεσμα της θραύσης είναι και η μείωση της ροής της ορμής με κατεύθυνση προς την ακτή.

Μείωση που συνεπάγεται την πτώση της μέσης στάθμης μετά τη ζώνη θραύσης (*wave set-down*) και έπειτα την άνοδο της στην περιοχή κοντά στην ακτή (*wave set-up*) (Dean & Dalrymple, 1991).

Είδη θραύσης

Η θραύση διακρίνεται σε τέσσερεις περιπτώσεις έχοντας ως κριτήριο την τιμή της παραμέτρου ξ (*surf similarity number*, Battjes, 1974). Οι περιπτώσεις αυτές είναι η θραύση κύλισης, εκτίναξης, κατάρρευσης, εφόρμησης (*spilling, plunging, collapsing, surging breakers*). Η θραύση εμφανίζεται όταν η κορυφή του κύματος διαδίδεται με μεγαλύτερη ταχύτητα από το κοίλο τμήμα του. Όσο αυξάνεται ο αριθμός ξ η θραύση εντείνεται. Οι απώλειες ενέργειας αυξάνονται και συμβαίνουν σε μικρότερο χώρο (Battjes, 1974). Η παράμετρος ξ είναι,

$$\xi = \frac{\tan\beta}{\sqrt{\mathrm{H}/L_o}} \tag{1.40}$$

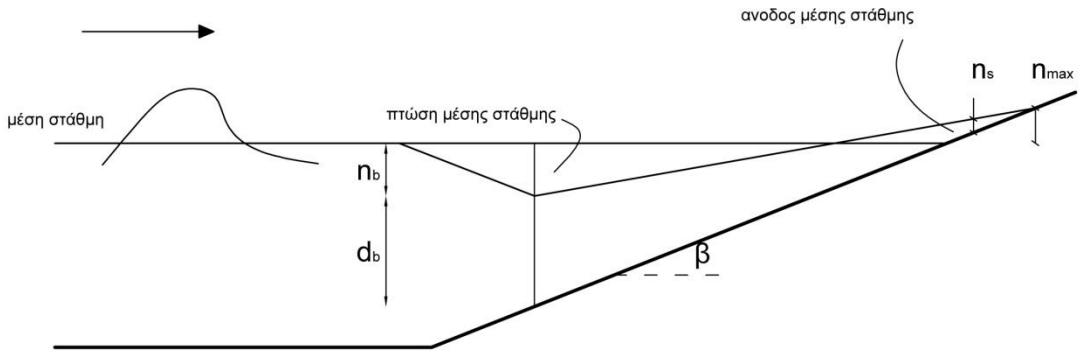


Σχήμα 1.8 Είδη θραύσης, Μέμος, 2007

Η θραύση διακρίνεται σε τέσσερα είδη με κριτήριο τη μορφή του κύματος όταν θραύεται. Αυτά είναι η θραύση κύλισης (*spilling*), εκτίναξης (*plunging*), κατάρρευσης (*collapsing*), εφόρμησης (*surging*) (Galvin, 1968).

- Κατά τη *θραύση κύλισης* η κορυφή γίνεται ασταθής, κυλά στο εμπρόσθιο μέτωπο με ταυτόχρονο σχηματισμό αφρισμού και ολοκληρώνεται σε σχετικά μεγάλο μήκος. Τείνει να συμβαίνει σε ακτές ήπιας κλίσης για κύματα μεγάλης κλίσης.
- Στην *θραύση εκτίναξης* η κορυφή κινούμενη με μεγαλύτερη ταχύτητα από τα υπόλοιπα τμήματα και πέφτει στη βάση του κύματος. Τείνει να συμβαίνει σε πιο απότομες ακτές για κύματα ενδιάμεσης κλίσης.
- Στη *θραύση κατάρρευσης* η κορυφή παραμένει ενώ το χαμηλότερο τμήμα του εμπρόσθιου μετώπου γίνεται πιο απότομο (ε =H/L) και πέφτει στη βάση του κύματος παράγοντας μια τυρβώδη και τυχαία υδάτινη επιφάνεια.
- Στη *θραύση εφόρμησης* η κορυφή παραμένει ενώ το εμπρόσθιο τμήμα συνεχίζει προς τη ακτή με ελάχιστη θραύση. Η επιφάνεια του νερού παραμένει σχεδόν αδιατάρακτη, εκτός από κάποια τριχοειδή κύματα (*ripples*) όταν το νερό επιστρέφει προς τη θάλασσα. (Coastal Engineering Manual, Galvin, 1968).

Οι δύο τελευταίοι τύποι θραύσης εκδηλώνονται σε ακτές με απότομη κλίση για κύματα μικρής κλίσης. Οι πιο έντονες αλλαγές στη ροή εκδηλώνονται κατά τη θραύση εκτίναξης, με ένταση των τυρβωδών διακυμάνσεων της ταχύτητας. Αποτελεί τον ενεργειακά πιο καταστροφικό τύπο θραύσης (Coastal Engineering Manual). Οι τέσσερεις κατηγορίες φαίνονται στο σχήμα 1.8.



Σχήμα 1.9 Άνοδος και πτώση της μέσης στάθμης μετά τη θραύση (*Coastal Engineering Manual*)

Κριτήρια θραύσης

Για την περίπτωση απλών κυματισμών,

McCowan, 1981, $H_b = 0,78 d_b$ (1.41)

Munk, 1949, $H_b = 0.3 H_o \left(\frac{H_o}{L_o} \right)^{-1/3}$ (1.42)

$\frac{H_b}{d_b} = b - a \frac{H_b}{gT^2}$ για $\tan\beta \le 0.1$ και $H_o / L_o \le 0.06$

Weggel, 1972, $a = 43.8\left(1 - e^{-19\tan\beta}\right)$ (1.43)

$b = \frac{1.56}{1 - e^{-19.5\tan\beta}}$

Για την περίπτωση σύνθετων κυματισμών,

Miche, 1951, $H_{mo,b} = 0,14 L \tanh(kd)$ (1.44)

Thornton & Guza, 1983, $H_{mo,b} = 0.6 d$ (1.45)

Όπου με δείκτη *b* σημειώνονται οι μεταβλητές που αναφέρονται στο βάθος θραύσης, με δείκτη 0 σημειώνονται οι μεταβλητές που αναφέρονται σε βάθος μεγαλύτερο του ορίου *d/L>0.5*, β η κλίση του πυθμένα. Τα δύο ύψη με δείκτη m_o βασίζονται σε μια στατιστική ανάλυση της ενέργειας. Αν υποτεθεί ότι η ενέργεια προσομοιάζεται από μια κατανομή τότε το ύψος αυτό αντιστοιχεί στη τετραπλάσια τιμή της τυπικής απόκλισης της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας.

Προσομοίωση θραύσης σε αριθμητικά υπολογιστικά μοντέλα

Τα περισσότερα αριθμητικά μοντέλα για την προσομοίωση της θραύσης, ως αποτέλεσμα της μείωσης του βάθους, βασίζονται σε ολοκληρωμένες στο βάθος εξισώσεις, όπως οι βασικές εξισώσεις Boussinesq, ή οι εξισώσεις Serre. Η θραύση βαθμονομείται με την εισαγωγή ενός όρου απόσβεσης στην ολοκληρωμένη κατά βάθος, εξίσωση διατήρησης της ορμής. Έτσι οι Zelt (1991), Karambas & Koutitas (1992) χρησιμοποίησαν μοντέλο τυρβώδους συνεκτικότητας (*eddy viscosity model*). Οι Brocchini, Drago & Ivoenitti (1992) και οι Schäffer, Madsen & Deigaard (1993) εισήγαγαν το πιο πολύπλοκο μοντέλο του επιφανειακού κυλίνδρου (*surface roller model*) για την αναπαράσταση της κατανομής ταχυτήτων στην περιοχή ανάμιξης νερού- αέρα. Με την βαθμονόμηση σχετικών παραμέτρων του εκάστοτε μοντέλου επιτυγχάνεται μια ικανοποιητική σύγκλιση τους με πειραματικά δεδομένα όσο αφορά τις διακυμάνσεις τις ελεύθερης επιφάνειας. Ωστόσο βελτιώσεις στο πεδίο ταχυτήτων που παράγεται από αυτά θεωρήθηκαν απαραίτητες. Σε απάντηση αυτού οι Johns (1978) και Johns & Jefferson (1980) ανέπτυξαν ένα σύστημα εξισώσεων προσπαθώντας να προσδιορίζουν τις χωρικές κατανομές της τυρβώδους κινητικής ενέργειας. Το μοντέλο που πρότειναν χρησιμοποιεί τις εξισώσεις Reynolds (εξισώσεις *Reynolds Averaged Navier- Stokes, RANS*) για την μέση ταχύτητα και μια εξίσωση- προσθήκη για την ισορροπία της ενέργειας αυτής. Στη συνέχεια οι Deigaard, Fredsoe & Hedegaard (1986) πρότειναν μια απλουστευμένη έκφραση για την κατανομή και εξέλιξη (χωρική) της τύρβης στη περιοχή της ζώνης θραύσης. Αργότερα μελέτες με χαρακτηριστική αυτή του Lemos (1992) κατέστρωσε ένα μοντέλο θραύσης με την προσθήκη ενός μοντέλου τύρβης k-ε. Βασίζεται στην υπόθεση ισοτροπικής τυρβώδους συνεκτικότητας. Οδήγησε σε υψηλή συγκέντρωση ενέργειας στις κορυφές των κυμάτων και σχεδόν μηδενική μεταφορά της τύρβης μέσω των μηχανισμών μετάθεσης και διασποράς. Οι Lin & Liu (1998) συνεχίζοντας αυτή την προσέγγιση χρησιμοποίησαν τις εξισώσεις Reynolds σε συνδυασμό με ένα μη γραμμικό μοντέλο για τις τάσεις Reynolds. Στη συνέχεια χρησιμοποίησαν ένα σύστημα εξισώσεων k-ε για την εξέλιξη της τυρβώδους κινητικής ενέργειας. Βελτιώσεις στην εργασία των Lin & Liu πρότειναν οι Hsu et al (2002) συνυπολογίζοντας την ύπαρξη ροής εντός του όγκου των ενεργών πόρων βυθισμένων υλικών. Η τροποποίηση που πρότειναν συνοψίζεται στην ολοκλήρωση κατά όγκο των εξισώσεων Reynolds (εξισώσεων *Volume Averaged Reynolds Averaged Navier-Stokes, VARANS*). Περισσότερα για τα μοντέλα θραύσης που χρησιμοποιούνται σε συνδυασμό με εξισώσεις τύπου Boussinesq αναλύονται στην εργασία του Κλωνάρης, 2011.

Διαφορετική προσέγγιση στην προσπάθεια προσομοίωσης του πεδίου ταχυτήτων αποτελεί η προσέγγιση των Belibassakis & Athanassoulis. Προτείνεται μια θεωρία συζευγμένων ιδιομορφών η οποία εξάγεται από την θεωρία Stokes μέσω μιας μεταβολικής συνθήκης. Αναπαριστάται έτσι η κατανομή της συνάρτησης δυναμικού ως μια σειρά τοπικών ιδιομορφών με ομοιόμορφη σύγκλιση (εξαρτημένων από το βάθος) σε κάθε σημείο του οριζόντιου άξονα. Η σειρά αυτή αποτελείται από

ιδιοσυναρτήσεις (χαρακτηριστική μεταβλητή το βάθος, z) που σχετίζονται με όρους που περιγράφουν την διάδοση και όρους διόρθωσης. Η επίδραση της μεταβολής του πυθμένα λαμβάνεται υπόψη με την εισαγωγή ενός πρόσθετου όρου διόρθωσης εκεί που η κλίση του βάθους δεν είναι μηδενική. Η θραύση λοιπόν εισάγεται με τη χρήση ενός συντελεστή απόσβεσης που μειώνει την ενέργεια των όρων που σχετίζονται με τη μετάδοση. Η έναρξη της θραύσης καθορίζεται από ένα ελάχιστο σχετικό ύψος. Το ελάχιστο αυτό ύψος εξαρτάται από την κλίση του πυθμένα.

Βιβλιογραφία πρώτου κεφαλαίου

Abbott, M.B., Larsen, J., Madsen, P.A., Tao, J., 1983. "Simulation of wave breaking and runup." *Seminar on Hydrodynamics of waves in coastal areas*, vol. 7, Moscow, 146-149.

Agnon, Y., Madsen, P. A., & Schäffer, H. A., 1999, “A new approach to high-order Boussinesq models.” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 399, 319-333.

Athanassoulis, G.A., Belibassakis, K.A., 1999. “A consistent coupled-mode theory for the propagation of small-amplitude water waves over variable bathymetry regions.” *J. Fluid Mech.*, vol. 389, 275–301.

Athanassoulis, G.A., Belibassakis, K.A., 2007. “A coupled-mode method for non-linear water waves in general bathymetry with application to steady travelling solutions in constant, but arbitrary, depth.” *J. Discrete Cont. Dyn. Syst. DCDS B 75–84 special volume of selected papers from 6th Int. Conference on Dynamical Systems and Differential Equations*, Poitiers Meeting, June 25–28, 2006.

Battjes, J.A., 1974, “Surf similarity”, *Proceedings of 14th Coastal Engineering Conference*, Copenhagen, Denmark, A.S.C.E., New York, 466-480.

Belibassakis, K.A., Athanassoulis, G.A., 2002. “A Nonlinear Coupled-mode Model for Water Waves over a General Bathymetry.” *Proc. 21st Int. Conf. on Offshore Mechanics and Arctic Engineering.* OMAE2002, Oslo, Norway 2002.

Boussinesq, J., 1871. “Théorie de l'intumescence liquide, applelée onde solitaire ou de translation, se propageant dans un canal rectangulaire.” *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences 72*: 755–759.

Boussinesq, J., 1872. “Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond.” *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*. Deuxième Série 17: 55–108.

Brocchini, M., Drago, M., Ivoenitti,. L., 1992, “The modeling of short waves in shallow water: Comparison of numerical model based on Boussinesq and Serre equations.” *Proc. 23rd Intl. Conf. Coastal Eng.*, ASCE, 76-88.

Cokelet E.D. 1977. “Steep gravity waves in water of arbitrary uniform depth.” *Phil. Trans. Roy. Soc. London, Series A*, vol. 286, 183-230.

Chappelear, J.E. 1961. “Direct numerical calculation of wave properties.” *Journal of Geophysical Research*, vol. 66, 501-508.

Dean R.G., Dalrymple R.A. 1991. *Water wave mechanics for engineers and scientists*. World Scientific. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.

Deardorff, J. 1970. “A numerical study of three dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers.” *Journal of fluid Mechanics*, vol. 41 (2) 453-480.

Deigaard, R., Fredsoe, J., Hedegaard, I.B., 1986, “Suspended sediment in surf zone.” *J. Waterway, Port, Coastal Ocean Eng.*, vol. 112, 115-129.

Fenton, J.D. 1985. “A fifth order Stokes theory for steady waves.” *ASCE Jour. Waterw., Port, Coastal and Ocean Engr*. vol. 111, 216-234.

Fenton, J.D. and McKee, W.D. 1989. ”On calculating the lengths of water waves.” *Coastal Engineering*, vol. 14**,** 499-513.

Fenton, J.D. 1990. “Nonlinear wave Theories”, *The Sea, Vol.9: Ocean Engineering Science*, Eds. B. Le Méhauté and D.M. Hanesm Wiley, New York: 1990.

Galvin, C.J. Jr., 1968. “Breaker type classification on three laboratory beaches.” Journal of Geophysical Research, vol. 73(12), 3651-3659.

Gobbi, M.F., Kirby, J.T., Wei, G.E., 2000. "A fully nonlinear Boussinesq model for surface waves. Part 2. Extension to O(kh)4." *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 405, 181-210.

Goda, Y. 1983. “A unified nonlinearity parameter of water waves.” *Rept. Port and Harbor Res. Inst. of Japan*, vol. 22(3), 3-30.

Hardy, T.A. and Kraus, N.C., 1987, ‘‘A Numerical Model for Shoaling and Refraction of Second Order Cnoidal Waves Over an Irregular Bottom.’’ *Miscellaneous Paper CERC 87–9, U.S. Army Waterways Experiment Station*, Vicksburg, MS.

Johns, B., 1978, “The modeling of tidal flow in a channel using a turbulence energy closure scheme.” *J. Phys. Oceanogr.* vol. 8, 1042-1049.

Johns, B., Jefferson, R.J., 1980, “The numerical modeling of surface wave propagation in the surf zone.” *J. Phys. Oceanogr.*, vol. 10, 1061- 1069.

Karambas, Th.V., Koutitas, C., 1992, “A breaking wave propagation model based on the Boussinesq equations.” *Coastal Eng.*, vol. 18, 1-19.

Kirby, J.T., Wei, G., Chen, Q., Kennedy, A.B., Dalrymple, R.A., 1998. "Fully nonlinear Boussinesq wave model; Documentation and user's manual". *Rep. No. CACR-98-06.* Center for Applied Coastal Research, Department of Civil Engineering, University of Delaware

Le Méhauté, B. 1976. *Introduction to hydrodynamics and water waves, Springer-Verlag, New York.*

Lemos, C.M., 1992, *Wave Breaking*, Springer.

Li, B., 2008. "Wave equations for regular and irregular water wave propagation". *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering,* vol. 134, No. 2, 121-142.

Lynett, P.J., Wu, T.R., Liu, P. L.-F., 2002. "Modeling wave runup with depth integrated equations". *Coastal Engineering*, vol. 46 (2), 89-107.

Madsen, P.A., Murray, R., Sørensen, O.R., 1991. "A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics". *Coastal Engineering,* vol. 15 (4), 371-388.

Madsen, P.A., Sørensen, O.R., 1992. "A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics. Part 2. A slowly-varying vathymetry". *Coastal Engineering*, vol. 18(3, 4),183-204.

Madsen, P.A., Bingham, H.B., Hua Liu, 2002. "A new Boussinesq model for fully nonlinear waves from shallow to deep water." *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 462, 1-30.

McGraw Hill Encyclopaedia of Physics (2nd edition). C.B. Parker, 1994

Mei, C.C., Le Méhauté, B., 1966. “Note on the equations of long waves over an uneven bottom,” *J. Geophys. Research*, vol. 71(2), 393-400.

Miche, A., 1951, "Le pouvoir réfléchissant des ouvrages maritimes exposés à l'action de la houle. *Annales des Ponts et Chaussées*, vol. 121, 285-319.

Munk, W.H., 1950, “Origin and generation of waves.” *Proc. 1st International Conf. on Coastal Eng*. Long Beach California, 1-4.

Nadaoka, K., Beji, S., Nakagawa, Y., 1994. “A fully-dispersive nonlinear wave model and its numerical solutions,” *Proceedings of the 24th Coastal Engineering Conference*, Kobe, 427-441.

Nwogu, O., 1993. "Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation." *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering,* vol. 119(6), 618-638.

Ohyama, T. and Nadaoka, K., 1992. “Modeling the transformation of nonlinear waves passing over a submerged dike.” Proc. 23rd Int. Conf. Coastal Eng., Venice, ASCE, New York, Ch. 39, 526- 539.

Peregrine, D.H. 1967. "Long waves on a beach." *J. Fluid Mech.*, vol. 27(4), 815-827.

Peregrine, D.H. 1972. “Equations for water waves and the approximation behind them”, *Waves on beaches and sediment transport*, R.E. Meyer, ed, Academic Press, 95-121.

Serre, F., 1953, "Contribution à l'étude des écoulements permanents et variables dans les canaux". *La Houille Blanche*, (6), 830-872.

Schäffer, H.A., 2004a. "Accurate determination of internal kinematics from numerical wave model results." *Coastal Engineering*, vol. 50 (4), 199-211.

Schäffer, H.A., 2004b. "Another step towards a post-Boussinesq wave model." *Proceedings of the 29th International Conference on Coastal Engineering (ICCE 2004), vol. 1, 132-144, Lisbon.*

Schäffer, H.A., Madsen, P.A., 1995. "Further enhancements of Boussinesq type equations." *Coastal Engineering,* vol. 26 (1, 2), 1-14.

Schäffer, H. A., Madsen, P. A., Deigaard, R., 1993. "A Boussinesq model for waves breaking in shallow water." *J. Coastal Engineering*, vol. 20(3), 185-202.

Skjelbreia, L., Hendrickson, J.A., 1961, "Fifth order gravity wave theory." Proc. 7th Conf. on Coastal Eng., Council on Wave Research, The Engineering Foundation, 184-196.

Smagorinsky, J. 1963. "General circulation experiments with the primitive equations." *American Meteorological Society, Monthly Weather Review*, vol. 91(3), 99-164.

Stokes, G. G., 1847. "On the theory of oscillatory waves." *Transactions of the Cambridge Philosophical Society,* **8**, 441–455 (ή Stokes, G. G. 1880. *Mathematical and Physical Papers, Volume I* Cambridge University Press, 197–229).

Thornton, E. B., & Guza, R. T., 1983, "Transformation of wave height distribution." *Journal of Geophysical Research: Oceans,* vol. 88(C10), 5925-5938.

U.S. Army Corps of Engineers, 2002, *Coastal Engineering Manual*, E.M. 1110-2-1100, U.S. Army Corps of Engineers, Washington, D.C.

Ursell, F., 1953, "The long-wave paradox in the theory of gravity waves." *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society,* vol. 49(4), 685–694.

Weggel, R. J., 1972, "Maximum breaker height." *Journal of the Waterways, Harbors and Coastal Engineering Division*, vol. 98(4), 529-548.

Wei, G., Kirby, J.T., 1994. "A high order time-dependent numerical model for the extended Boussinesq equations." *Proceedings of the International Symposium: Waves-Physical and Numerical Modeling, 544-553, Vancouver.*

Williams J.M. 1981. "Limiting gravity waves in water of finite depth." *Phil. Trans. Roy. Soc. London, Series A*, vol. 302, 139-188.

Witting, J.M., 1984. "A unified model for the evolution nonlinear water waves." *Journal of Computational Physics,* vol. 56(2), 203-236.

Zelt, J.A., 1991, "The run-up of non-breaking and breaking solitary waves." *Coastal Eng*ineering, vol. 15, 205-246.

Κλωνάρης, Γ., 2011. «Συμβολή στην προσομοίωση της θραύσης κυματισμών σε εξελιγμένο μοντέλο Boussinesq» , *Μεταπτυχιακή εργασία Δ.Π.Μ.Σ. «Επιστήμη και Τεχνολογία Υδάτινων Πόρων»,*

Μέμος, Κ.Δ., 2007, *Θαλάσσια Υδροδυναμική*, Πρόχειρες σημειώσεις Δ.Π.Μ.Σ. "Επιστήμη και τεχνολογία υδατικών πόρων", Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Κεφάλαιο 2

Περιγραφή πειραμάτων

2.1. Εισαγωγή

Στον παρόν κεφάλαιο θα παρουσιαστούν δύο περιπτώσεις πυθμένα στις οποίες θα εξεταστεί η συμπεριφορά των αριθμητικών υπολογιστικών ομοιωμάτων. Η σύγκριση αποτελεσμάτων και πειρατικών δεδομένων θα γίνει για μονοχρωματικά κύματα.

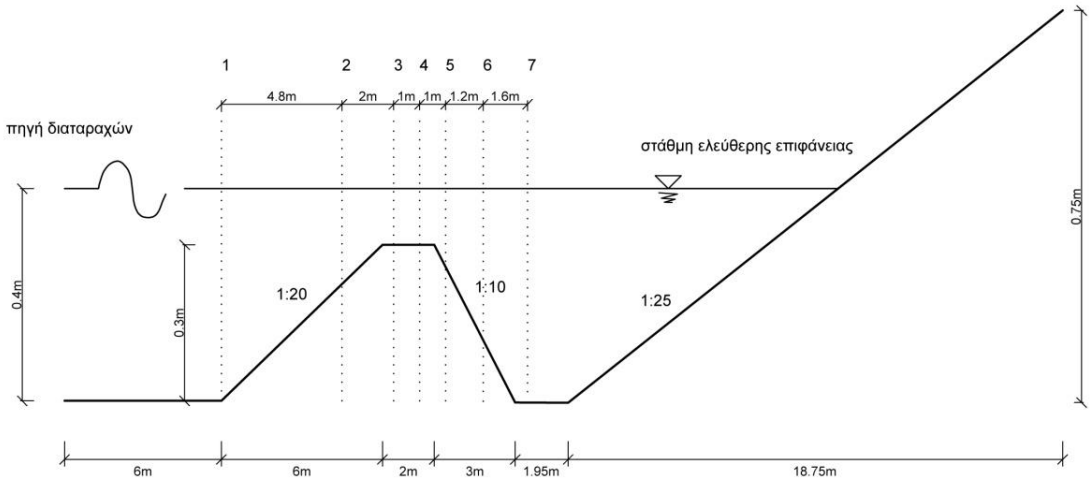
2.2. Πειραματική διάταξη παρουσία υφάλου

Στην περίπτωση αυτή ο πυθμένας περιλαμβάνει ύφαλο τραπεζοειδούς διατομής. Σε συνέχεια αυτού, αρχίζει κεκλιμένο επίπεδο το οποίο χρησιμεύει στην απορρόφηση της προσπίπτουσας από τα κύματα ενέργειας. Η συγκεκριμένη διατομή πυθμένα δίνει τη δυνατότητα αξιολόγησης της συμπεριφοράς των υπολογιστικών ομοιωμάτων απέναντι σε διατάξεις που χαρακτηρίζονται από μεταβολές του βάθους όπως αυτή που εξετάζεται στο κομμάτι αυτό. Σε ένα τέτοιο πυθμένα αναμένεται η ένταση των μη γραμμικοτήτων και η εντονότερη διασπορά συχνοτήτων. Έτσι δίνεται η δυνατότητα να ελεγχθούν οι εξεταζόμενες προσεγγίσεις σε σχέση με τη δυνατότητα τους να περιγράφουν τις αλλαγές αυτές.

Τα πειράματα που έγιναν παρουσιάζονται από τους Beji and Battjes (1993, 1994). Οι μετρήσεις έγιναν στις εγκαταστάσεις του Delft University of Technology. Η δεξαμενή που χρησιμοποιήθηκε έχει μήκος 37,7m και ύψος 0,75m με την στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας του νερού στα 0,4m. Ο ύφαλος στην αριστερή του παρειά έχει κλίση (ανοδική) 1:20 και η δεξιά παρειά έχει (καθοδική) κλίση 1:10. Η στέψη του είναι οριζόντια μήκους 2m σε ύψος 0,3m από το κατώτερο επίπεδο. Κατάντη του ύφαλου υπάρχει επίπεδο κλίσης 1:25, ενώ στα ανάντη τοποθετείται η πηγή των διαταραχών της ελεύθερης στάθμης. Το κεκλιμένο επίπεδο μετά τον ύφαλο είναι υψηλά απορροφητικό, ελαχιστοποιώντας την ανάκλαση από αυτό. Η διάταξη περιγράφεται στα σχήματα (2.1) και (2.2).

Τα κύματα αναπαράγονται μέσω υδραυλικά καθοδηγούμενης κυματογεννήτριας, εμβολοειδούς τύπου. Αναπτύσσονται μονοχρωματικοί κυματισμοί και χρονοσειρές ελεύθερης επιφάνειας, τυχαίας φάσης, αποτέλεσμα του φάσματος JONSWAP. Το

σήμα ελέγχου που παράγεται από υπολογιστή συνδέεται με ένα μετατροπέα DA-AD που μετατρέπει το σήμα σε τάση, οδηγούμενο σε ενισχυτή. Τα σήματα αυτά μετά από επεξεργασία δίνουν τις χρονοσειρές της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας. Οι καταγραφές γίνονται από ένα αριθμό παράλληλων αισθητήρων.



Σχήμα 2.1 Πειραματική διάταξη για την περίπτωση μη θραυόμενων κυμάτων *(Beji and Battjes, 1994)*

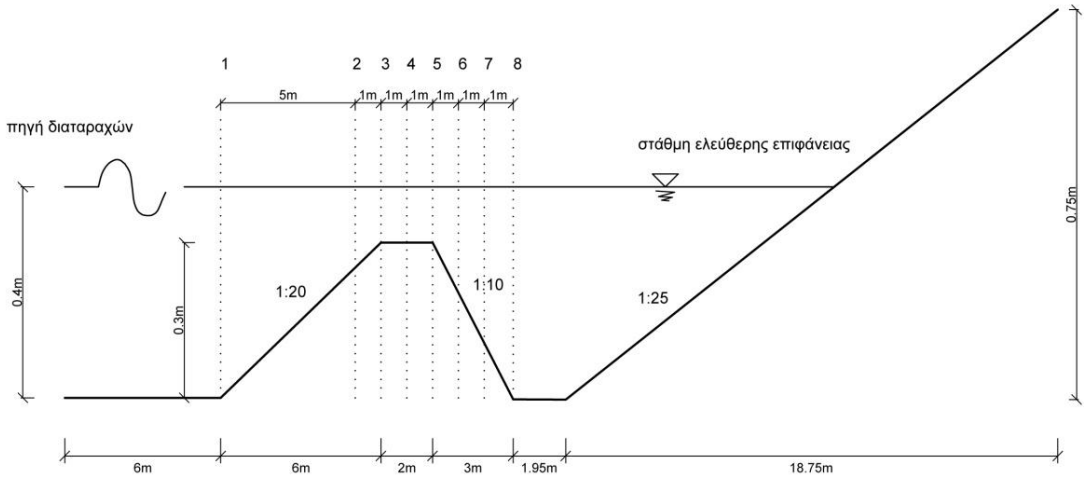
Οι μετρήσεις που εξετάζονται αφορούν την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας σε σχέση με το χρόνο. Ελέγχονται για τους σταθμούς 2 ως 7 για τους μη θραυόμενους και για τους θραυόμενους για τους σταθμούς 1,3,5 και 7. Οι θέσεις τους σημειώνονται στα σχήματα (2.1) και (2.2) και δίνονται στον πίνακα 2.1 .

Σταθμός (α/α)	Θέσεις σταθμών, x(m)	
	Θραυόμενοι κυματισμοί	Μη θραύομενοι κυματισμοί
1	6.0	6.0
2	11.0	10.8
3	12.0	12.8
4	13.0	13.8
5	14.0	14.8
6	15.0	16.0
7	16.0	17.6
8	17.0	-

Πίνακας 2.1 Θέσεις σταθμών πρώτου πειράματος

Η σύγκριση πειραματικών δεδομένων και των αποτελεσμάτων της αριθμητικής επίλυσης γίνεται έχοντας ως σημείο αναφοράς στο σταθμό 2 για την περίπτωση των μη θραυόμενων κυματισμών. Για την περίπτωση των θραυόμενων ως σημείο αναφοράς χρησιμοποιείται ο σταθμός 1.

Οι περιπτώσεις που εξετάζονται, όπως αναφέρθηκε, αρχικά διακρίνονται με βάση το αν συμβαίνει θραύση ή όχι και τον τύπο θραύσης. Οι θραυόμενοι κυματισμοί διακρίνονται σε δύο επιμέρους κατηγορίες ανάλογα με τον τύπο της θραύσης, στην θραύση κύλισης (*spilling*) και θραύση εκτίναξης (*plunging*). Περεταίρω διακρίνονται με βάση την περίοδο (*T*) και το αρχικό ύψος κύματος (*H*). Η κατηγοριοποίηση τους αυτή ισχύει τόσο για μονοχρωματικούς όσο και για τυχαίους κυματισμούς.



Σχήμα 2.2 Πειραματική διάταξη για την περίπτωση θραυόμενων κυμάτων *(Beji and Battjes, 1993)*

Οι επιμέρους περιπτώσεις που εξετάζονται συνοψίζονται ως εξής,

- μονοχρωματικά κύματα (*regular*) :
  - T=2.02sec, H=0.018m (χωρίς θραύση)
  - T=1.0sec, H=0.044m (θραύση κύλισης)
  - T=1.0sec, H=0.054m (θραύση εκτίναξης)
  - T=2.5sec, H=0.059m (θραύση κύλισης)
  - T=2.5sec, H=0.069m (θραύση εκτίναξης)

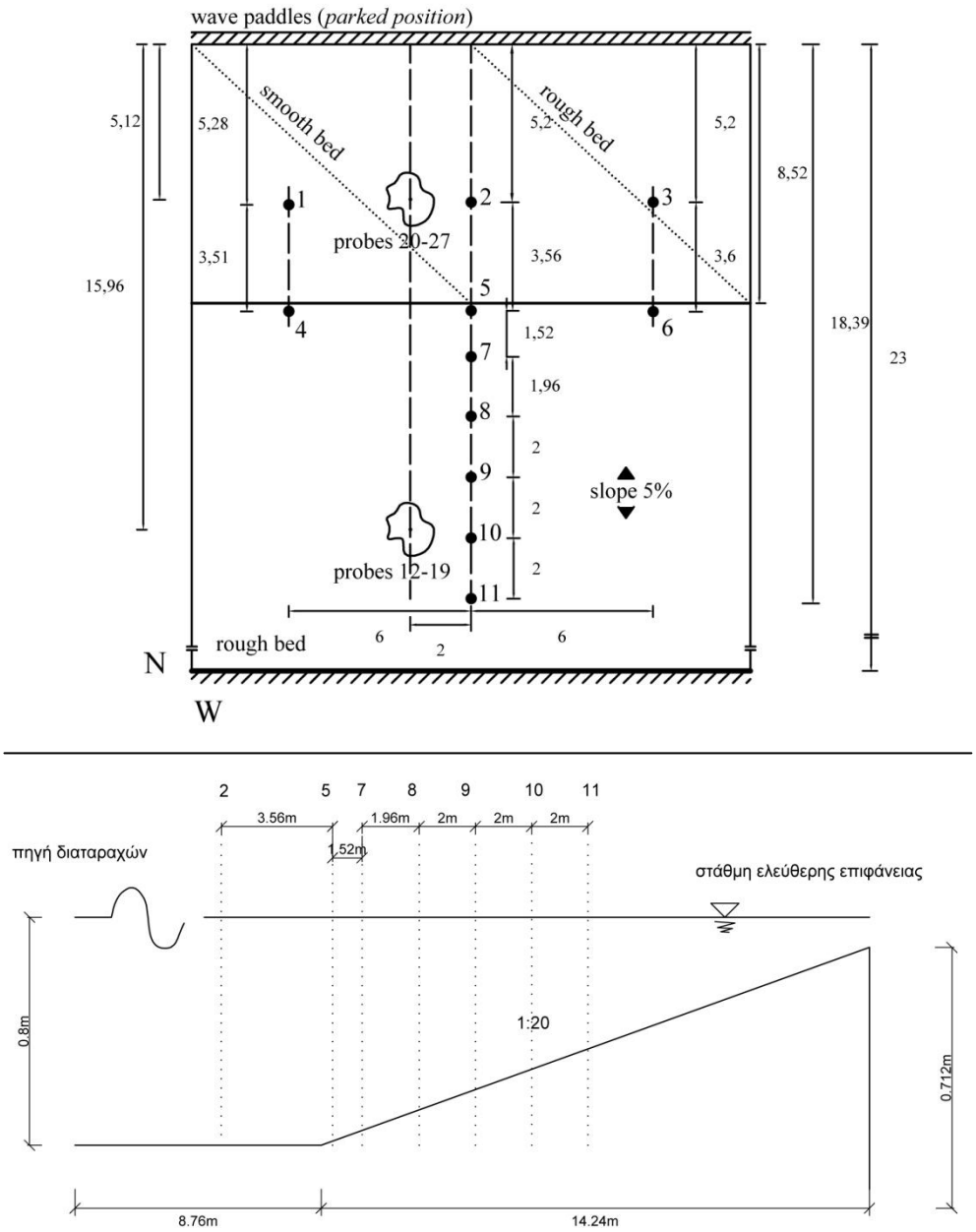
2.3. Πειραματική διάταξη για κεκλιμένη ακτή

Οι μετρήσεις προήλθαν από πειράματα που διεξήχθησαν στις εγκαταστάσεις του ερευνητικού κέντρου HR Wallingford, στο Ηνωμένο Βασίλειο τον Σεπτέμβριο του 1997 και τον Ιανουάριο του 1998. Στην εκτέλεση του πειράματος συμμετείχαν ερευνητές από το Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο και το Τεχνολογικό Ινστιτούτο του Trondheim (*Norwegian Marine Technology Research Institute, Trondheim*).

Οι εγκαταστάσεις περιλαμβάνουν πειραματική δεξαμενή που δίνει τη δυνατότητα προσομοίωσης του υδροδυναμικού πεδίου. Η δεξαμενή του πειράματος έχει διαστάσεις 27m x 54m και περιλαμβάνει οριζόντιο επίπεδο μήκους 8.76m ακολουθούμενο από κεκλιμένο επίπεδο (ανοδικής) κλίσης 1:20. Η πηγή τοποθετείται πριν το οριζόντιο τμήμα. Για την περίπτωση των μονοχρωματικών κυμάτων το βάθος στο σημείο αυτό είναι 0.8m, ενώ στο τέλος ο πυθμένας ανυψώνεται 0.712m από το αρχικό επίπεδο.

Για την παραγωγή των αρχικών επιθυμητών κυματικών συνθηκών χρησιμοποιήθηκαν 72 κυματογεννήτριες πλάτους 0.5m, η κίνηση των οποίων ελεγχόταν μέσω ηλεκτρονικού υπολογιστή. Οι μετρήσεις της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας έγιναν χρησιμοποιώντας 27 αισθητήρες τύπου χωρητικότητας-αντίστασης (capacitance- resistance probes). Τα ηλεκτρικά σήματα που παράγονται

από αυτούς μετατρέπονται μέσω ηλεκτρονικού υπολογιστή σε χρονοσειρές ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας.



Σχήμα 2.3 Πειραματική διάταξη για την περίπτωση κεκλιμένου επιπέδου *(I.A.H.R.)*

Εκτός της μεταβολής της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας χρησιμοποιήθηκε μετρητής τύπου Nortek- 3D ADV για την συλλογή μετρήσεων των ταχυτήτων τροχιακού (u,v,w). Για τις περιπτώσεις που περιέχεται κατευθυντικότητα στους διαδιδόμεμενους κυματισμούς οι αισθητήρες 12-19 και 20-27 έχουν τοποθετηθεί κυκλικά.

Από το σύνολο των 212 πειραμάτων που διεξήχθησαν, οι καταγραφές που χρησιμοποιούνται από την παρούσα εργασία περιλαμβάνουν την κατηγορία μονοχρωματικών κυματισμών κάθετων στο μέτωπο της ακτής, πρόσπτωσης (*regular, normal incidence*).

Για τις ανάγκες της εργασίας αυτής χρησιμοποιούνται οι μετρήσεις των σταθμών 2,5,7,8,9,10 και 11. Οι αισθητήρες των σταθμών αυτών είναι τοποθετημένοι παράλληλα κατά μήκος της δεξαμενής, καλύπτοντας τις περιοχές «βαθιών» μέχρι «ρηχών νερών». Οι θέσεις τους σε σχέση με τη θέση της κυματογεννήτριας φαίνονται στο σχήμα 2.3 και τον πίνακα 2.2.

Σταθμός (α/α)	Θέσεις σταθμών, x(m)	Βάθος νερού, d(m) (στάθμη ηρεμίας)
2	5.2	0,8
5	8.76	0,788
7	10.28	0,712
8	12.24	0,614
9	14.24	0,514
10	16.24	0,414
11	18.24	0,314

Πίνακας 2.2 Θέσεις σταθμών δεύτερου πειράματος

Κωδικός πειράματος	T (sec) *	H (m) **	Αρχικό βάθος (m)	Συχνότητα λήψης μετρήσεων (sec)
μονοχρωματικοί κυματισμοί				
RE (ή NE)-08	1.0	0.1	0.8	0.02
RE (ή NE)-29	1.2	0.075	0.8	0.02
RE (ή NE)-36	1.2	0.12	0.8	0.02
RE (ή NE)-43	1.4	0.1	0.8	0.02

Πίνακας 2.3 Συνοπτική παρουσίαση των χρησιμοποιούμενων πειραμάτων που έγιναν στο εργαστήριο HR Wallingford

Γενικότερα όμως, στο πείραμα εξετάστηκε ένα πλήθος περιπτώσεων: (*α*) διάδοση απλών μονοχρωματικών (*regular*) κυματισμών κάθετη και υπό γωνία προς την ακτή, (*β*) διάδοση μονοκατευθυντικών (*long- crested*) και πολυκατευθυντικών (short-crested) σύνθετων κυματισμών κάθετη και υπό γωνία προς την ακτή χωρίς/ με (*γ*) παρουσία ρεύματος, (*δ*) πλάγια πρόσπτωση διχρωματικών (*bichromatic*) κυματισμών, (*ε*) πλάγια πρόσπτωση μονοκατευθυντικών σύνθετων κυματισμών, (*στ*) πλάγια πρόσπτωση απλών και σύνθετων κυματισμών παρουσία εγκάρσιου ρεύματος. Οι εξεταζόμενες περιπτώσεις για αυτήν την πειραματική διάταξη συνοψίζονται στον πίνακα 2.3.

Βιβλιογραφία δεύτερου κεφαλαίου

Αυγέρης, Ι.Φ., 2001. “Διάδοση των κυματισμών στην παράκτια ζώνη- Θεωρητική και πειραματική διερεύνηση”, *Μεταπτυχιακή εργασία Δ.Π.Μ.Σ. «Επιστήμη και Τεχνολογία Υδάτινων Πόρων»*, Βιβλιοθήκη Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου

Beji, S. and Battjes, J.A., 1993. “Experimental investigation of wave propagation over a bar.” *Coastal Engineering*, vol. 19: 151-162.

Beji, S. and Battjes, J.A., 1994. “Numerical simulation of nonlinear wave propagation over a bar.” *Coastal Engineering*, vol. 23: 1-16.

International Association for Hydro- Environment Engineering and Research (I.A.H.R.), 1997. “Random wave propagation in shoaling water.” contributed by C.D. Memos.

Κεφάλαιο 3

Εξισώσεις τύπου Boussinesq - Chondros & Memos, 2012

3.1. Εξισώσεις *Madsen και Schäffer, 1998*

Όπως έγινε φανερό από το πρώτο κεφάλαιο μια πρώτη διάκριση ανάμεσα στις εναλλακτικές μορφές των εξισώσεων τύπου Boussinesq αποτελεί η διαφορετική θεώρηση για την μεταβλητή της ταχύτητας. Περεταίρω, πάντα ήταν επιθυμητή η επέκταση της ισχύος των εξισώσεων Boussinesq, βελτιώνοντας την απόδοση των μη γραμμικών χαρακτηριστικών και της γραμμικής διασποράς. Σε αυτή την κατεύθυνση κινείται και η εργασία των Madsen και Schäffer.

Οι εξισώσεις τύπου Boussinesq, ανώτερης τάξης ($O(\mu^4,\epsilon\mu^4)$) σε διασπορά και μη γραμμικά χαρακτηριστικά, δημιουργήθηκαν για την περιγραφή κυμάτων, συμπεριλαμβανομένης και της αλληλεπίδρασης με ρεύματα για μεταβλητό πυθμένα. Οι τροποποιήσεις που γίνονται, δίνονται με διάφορες εκφράσεις της ταχύτητας. Αυτές βελτιώνονται και αναλύονται με έμφαση τα μη γραμμικά χαρακτηριστικά, τη γραμμική διασπορά και τη γραμμική ρήχωση για μεγάλους αριθμούς κύματος.

Η εξίσωση Laplace εκφράζεται σε όρους συνάρτησης δυναμικού με μη γραμμικές οριακές συνθήκες. Η γραμμική διασπορά και οι μη γραμμικές ιδιότητες εκφράζονται μέσω δύο παραμέτρων κλίμακας, μ και ϵ αντίστοιχα. Ορίζονται ως $\in = (H_0 / 2) / d_0$ και $\mu = d_0 / L_0$. Για αρχική υπόθεση η παράμετρος μ θεωρείται μικρή και η παράμετρος ϵ τυχαία. Πριν τις όποιες τροποποιήσεις η συνάρτηση δυναμικού εκφράζεται μέσω μιας σειράς εκθετικής μορφής κατά τον κατακόρυφο άξονα. Μέσω αυτού του εκθετικού αναπτύγματος οι εξισώσεις διατήρησης και οι εξισώσεις οριακών συνθηκών ορίζονται σε όρους ταχύτητας, οριζόντιας και κάθετης. Χαρακτηριστικό αυτής της έκφρασης η δύναμη στην οποία υψώνεται η παράμετρος μ. Κρατώντας τους όρους ως $O(\mu^6)$ εξάγονται οι εξισώσεις τύπου Boussinesq αρχικά χρησιμοποιώντας ταχύτητα εκφρασμένη στη στάθμη ηρεμίας.

Αυτές οι εξισώσεις αναδιατυπώνονται χρησιμοποιώντας την ταχύτητα ολοκληρωμένη στο βάθος. Χάριν απλότητας οι όροι $O(\epsilon^2\mu^4)$ απαλείφονται. Οι εξισώσεις που προκύπτουν περιέχουν όρους πέμπτης τάξης στην εξίσωση κίνησης, και πρώτης τάξης στην εξίσωση συνέχειας. Σε αυτές, όπως διαπιστώνεται περιέχεται μια ιδιομορφία όσον αφορά τη περιεχόμενη διασπορά που προκαλεί ασυμφωνία στις φάσεις των υψηλότερων αρμονικών. Η ιδιομορφία αυτή παρατηρήθηκε για $k'd' \approx 4.2$

και καθιστά τις συγκεκριμένες εξισώσεις ανεφάρμοστες προκαλώντας αστάθειες μετά από αριθμητική ολοκλήρωση ως προς το χρόνο.

Οι εξισώσεις βελτιώνονται χρησιμοποιώντας όρους ανώτερης τάξης, σε σχέση με αυτούς που διατηρήθηκαν αρχικά. Έτσι η ιδιομορφία αυτή αναιρείται, έχοντας ως αποτέλεσμα χαρακτηριστικά διασποράς σε συμφωνία με επέκταση Padé [4,4], προσδίδοντας ακρίβεια στα χαρακτηριστικά διασποράς τόσο για την εξίσωση συνέχειας όσο και για την εξίσωση κίνησης ($k'd' = 6$).

Στη συνέχεια οι μη γραμμικές ιδιότητες αναλύονται για δεύτερης και τρίτης τάξης αλληλεπιδράσεις. Γίνεται νέα υπόθεση μικρής παραμέτρου ϵ, και τυχαίας παραμέτρου μ με τα αποτελέσματα να συγκρίνονται με αυτά της θεωρίας Stokes ανώτερης τάξης (μέχρι τρίτης τάξης). Έτσι συμπέραναν ότι με την τεχνική βελτίωσης που χρησιμοποιείται βελτιώνονται και τα αποτελέσματα των μη γραμμικών αλληλεπιδράσεων, δεδομένου ότι διατηρείται η διασπορά στους μη γραμμικούς όρους. Για παράδειγμα συμπίπτουν η βελτιωμένη εξίσωση κίνησης με όρους (μ^4, $\epsilon\mu^4$) με την λύση της θεωρίας Stokes δεύτερης τάξης, κάτι που όπως αναφέρεται θα αναμενόταν να γίνει με όρους τάξης (μ^6,$\epsilon\mu^4$).

Έπειτα οι βασικές εξισώσεις εκφράζονται χρησιμοποιώντας ταχύτητα σε τυχαίο σημείο κατά την κατακόρυφο. Υποθέτεται ότι $\epsilon = O(1)$ και ότι διατηρούνται οι όροι τάξης (μ^4,$\epsilon^5\mu^4$).

Οι εξισώσεις συνέχειας και κίνησης εκφράζονται χρησιμοποιώντας παραγώγους μέχρι την πέμπτη τάξη. Η περίπτωση αυτή όμως δεν χαρακτηρίζεται από τον ίδιο βαθμό συμφωνίας σε σχέση με το ανάπτυγμα Padé [4,4] ή ακρίβειας όσο αφορά τα χαρακτηριστικά διασποράς. Σε παρόμοια αποτελέσματα, αναφορικά με την ακρίβεια, οδηγούνται και για τα μη γραμμικά χαρακτηριστικά.

Με την ίδια τεχνική βελτίωσης κατασκευάζονται οι τροποποιημένες εξισώσεις εκφρασμένες με όρους παραγώγων τρίτης τάξης. Αυτή τη φορά παραλείπονται οι όροι $O(\mu^4)$ και χρησιμοποιούνται οι όροι μέχρι $O(\mu^2,\epsilon^3\mu^2)$. Έτσι τελικά επιτυγχάνεται η επιθυμητή ακρίβεια σε χαρακτηριστικά γραμμικής διασποράς και ρήχωσης. Αναφορικά με χαρακτηριστικά διασποράς σε σχέση με ρεύματα διαπιστώνεται ότι παράγονται αποτελέσματα με ικανοποιητική ακρίβεια (Padé [4,4]).

Σε σχέση με την επιλογή της μεταβλητής της ταχύτητας, παρατηρείται ότι οι μη γραμμικές ιδιότητες των εξισώσεων επηρεάζονται από αυτή. Για παράδειγμα, η χρήση της ολοκληρωμένης στο βάθος ταχύτητας οδηγεί σε υπερεκτιμήσεις των δεύτερων αρμονικών για τιμές $k'd'$ στο διάστημα 0.25-1.5. Η βελτίωση των μη γραμμικών ιδιοτήτων απαιτεί τη χρήση των όρων που συνδυάζουν τις επιδράσεις μη γραμμικών φαινομένων και διασποράς (όπως για παράδειγμα οι όροι $\epsilon\mu^2$, $\epsilon^2\mu^2$, $\epsilon\mu^4$). Στη συνέχεια θα παρουσιαστεί η προτεινόμενη εναλλακτική που χρησιμοποιεί την ταχύτητα ολοκληρωμένη στο βάθος.

Οι εξισώσεις συνέχειας και κίνησης για την περίπτωση ομαλά μεταβλητού πυθμένα είναι:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla\left(\left(d + \in \zeta\right)U\right) = 0 \qquad (3.1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla\zeta + \frac{1}{2}\in\nabla(U^2) + \mu^2\left(\Lambda_{20}^{II} + \in\Lambda_{21}^{II} + \in^2\Lambda_{22}^{II} + \in^3\Lambda_{23}^{II}\right) + \mu^4\left(\Lambda_{40}^{II} + \in\Lambda_{41}^{II}\right) = O\left(\mu^6, \in^2\mu^4\right) \qquad (3.2)$$

Η παραδοχή ήπιας κλίσης για τον πυθμένα έγινε για την παράληψη των χωρικών μεταβολών του βάθους στον όρο Λ_{41}^{II} και είναι,

$$\left|\nabla^n d\right| = O(\mu^n), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, \qquad (3.3)$$

Οι όροι Λ^{II} δίνονται από τις σχέσεις της εξίσωσης *(3.4)*

$$\Lambda_{20}^{II} = d\Gamma_t \qquad (3.4.\alpha)$$

$$\Lambda_{21}^{II} = -\zeta\cdot\Gamma_t + \nabla\cdot(dU)\Gamma + \nabla\left[U\cdot(d\Gamma) - \zeta\nabla\cdot(dU_t) + \frac{1}{2}\left(\nabla\cdot(dU)\right)^2\right] \qquad (3.4.\beta)$$

$$\Lambda_{22}^{II} = \frac{1}{6}\zeta^2\nabla(\nabla\cdot U_t) - \frac{1}{3}\zeta\nabla\cdot(dU)\nabla(\nabla\cdot U) + \nabla\cdot(\zeta U)\Gamma$$
$$+\nabla\left[-\zeta U\cdot\Gamma - \frac{1}{2}\zeta^2\nabla\cdot U_t + \zeta(\nabla\cdot U)\nabla\cdot(dU) - \zeta U\cdot\nabla\left(\nabla\cdot(dU)\right)\right] \qquad (3.4.\gamma)$$

$$\Lambda_{23}^{II} = -\frac{1}{3}\zeta\nabla\cdot(\zeta U)\nabla(\nabla\cdot U) + \nabla\left(-\frac{1}{3}\zeta^2 U\cdot\nabla(\nabla\cdot U) + \frac{1}{2}\zeta^2(\nabla\cdot U)^2\right) \qquad (3.4.\delta)$$

$$\Lambda_{40}^{II} = \frac{1}{24}d^3\nabla\left[\nabla^2\left(\nabla\cdot(dU_t)\right)\right] - \frac{1}{120}d^4\nabla\left[\nabla^2(\nabla\cdot U_t)\right] + \frac{1}{6}d^2\nabla\left[\nabla\cdot(d\Gamma_t)\right] \qquad (3.4.\varepsilon)$$

$$\Lambda_{41}^{II} = \frac{1}{45}d^3\zeta\nabla\left(\nabla^2(\nabla\cdot U_t)\right) - \frac{1}{9}d^3\nabla\left[\nabla\cdot\left(\zeta\nabla(\nabla\cdot U_t)\right)\right]$$
$$-\frac{1}{45}d^4\nabla\cdot U\nabla\left(\nabla^2(\nabla\cdot U)\right) + \frac{1}{9}d^4\nabla\left[\nabla\cdot\left(\nabla\cdot U\left(\nabla(\nabla\cdot U)\right)\right)\right] \qquad (3.4.\zeta)$$
$$+\frac{1}{18}d^4\nabla\left(\nabla(\nabla\cdot U)\right)^2 - \frac{1}{45}d^4\nabla\left[U\cdot\nabla\left(\nabla^2(\nabla\cdot U)\right)\right] + O(\mu)$$

$$\Gamma = \frac{1}{6}d\nabla(\nabla\cdot U) - \frac{1}{2}\nabla\left(\nabla\cdot(dU)\right) \qquad (3.4.\sigma\tau)$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τεχνικές που περιγράφονται στις εργασίες των *Madsen et al. (1991)* και Schäffer & Madsen *(1995a)* προσπάθησαν να βελτιώσουν τις εξισώσεις (3.1) και (3.2) σε σχέση με τη γραμμική διασπορά και τα μη γραμμικά χαρακτηριστικά. Η βελτίωση αυτή έγινε εφαρμόζοντας ένα γραμμικό συντελεστή, *L* στις εξισώσεις που περιέχουν υπόλοιπο τάξης $O(\mu^{2M})$.

$$L = 1 + \sum_{n=1}^{M} v_n \mu^{2n} d^{2n}\nabla^{2n}, \qquad v_n = O(1) \quad (3.5)$$

Η παράμετρος v_n αποτελεί ελεύθερη παράμετρο. Εδώ εφαρμόζεται για *n=M=1*. Έτσι η εξίσωση (*3.5*) εκφράζεται ως,

$$L = 1 + B\mu^2 d^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \qquad B = 1/15 \qquad (3.6)$$

Αποτέλεσμα είναι τα βελτιωμένα χαρακτηριστικά γραμμικής διασποράς, με τη μεταφορά προς τις *υπό-* και *υπέρ-* αρμονικές. Αυτό γίνεται εισάγοντας τελικά δύο ζεύγη συντελεστών (α_1, β_1, α_2, β_2). Το πρώτο ελέγχει τη σχέση γραμμικής διασποράς και το δεύτερο την τροποποίηση του τελεστή γραμμικής ρήχωσης. Οι συντελεστές αυτοί είναι της τάξης *O(1)*.

Η εξίσωση συνέχειας (*3.1*) παραμένει αμετάβλητη. Η εξίσωση κίνησης γίνεται

$$U_t + \nabla\zeta + \frac{1}{2}\in\nabla(U^2) + \mu^2\left(\Lambda_{20}^{III} + \in\Lambda_{21}^{III} + \in^2\Lambda_{22}^{III} + \in^3\Lambda_{23}^{III}\right) + \mu^4\left(\Lambda_{40}^{III} + \in\Lambda_{41}^{III}\right) = O\left(\in^2\mu^4, \mu^6\right) \qquad (3.7)$$

Οι όροι Λ^{III} δίνονται από τις σχέσεις της εξίσωσης (*3.8*) :

$$\begin{aligned}\Lambda_{20}^{III} &= d^2(\frac{1}{6} + a_2 - a_1)\nabla(\nabla\cdot U_t) - d(\frac{1}{2} + a_2)\nabla\left(\nabla\cdot(dU_t)\right)\\ &+ d^2(a_2 - a_1)\nabla(\nabla^2\zeta) - da_2\nabla\left(\nabla\cdot(d\nabla\zeta)\right)\end{aligned} \qquad (3.8.\alpha)$$

$$\begin{aligned}\Lambda_{21}^{III} &= \frac{1}{2}d^2(a_2 - a_1)\nabla\left(\nabla^2(U^2)\right) - \frac{1}{2}da_2\nabla\left[\nabla\cdot\left(d\nabla(U^2)\right)\right] - \zeta\Gamma_t\\ &+ \nabla\cdot(dU)\Gamma + \nabla\left(U\cdot(d\Gamma) - \zeta\nabla\cdot(dU_t) + \frac{1}{2}\left(\nabla\cdot(dU)\right)^2\right)\end{aligned} \qquad (3.8.\beta)$$

$$\begin{aligned}\Lambda_{22}^{III} &= \frac{1}{6}\zeta^2\nabla(\nabla\cdot U_t) - \frac{1}{3}\zeta\nabla\cdot(dU)\nabla(\nabla\cdot U) + \nabla\cdot(\zeta U)\Gamma\\ &+ \nabla\left[-\zeta U\cdot\Gamma - \frac{1}{2}\zeta^2\nabla\cdot U_t + \zeta(\nabla\cdot U)\nabla\cdot(dU) - \zeta U\cdot\nabla\left(\nabla\cdot(dU)\right)\right]\end{aligned} \qquad (3.8.\gamma)$$

$$\Lambda_{23}^{III} = -\frac{1}{3}\zeta\nabla\cdot(\zeta U)\nabla(\nabla\cdot U) + \nabla\left(-\frac{1}{3}\zeta^2 U\cdot\nabla(\nabla\cdot U) + \frac{1}{2}\zeta^2(\nabla\cdot U)^2\right) \qquad (3.8.\delta)$$

$$\begin{aligned}\Lambda_{40}^{III} &= \beta_1 d^4\nabla(\nabla^4\zeta) + d^4(\beta_1 + \frac{1}{3}a_1 - \frac{1}{45})\nabla\left(\nabla^2(\nabla\cdot U_t)\right) + \beta_2 d^3\nabla d\nabla^4\zeta\\ &+ (\beta_2 + \frac{7}{3}\alpha_1 + \frac{2}{3}\alpha_2 - \frac{2}{9})d^3\nabla d\nabla^2(\nabla\cdot U_t) + O(\mu^2)\end{aligned} \qquad (3.8.\varepsilon)$$

$$\begin{aligned}\Lambda_{41}^{III} &= \frac{1}{45}d^3\zeta\nabla\left(\nabla^2(\nabla\cdot U_t)\right) + a_1 d^3\nabla\left(\nabla\cdot(\nabla\zeta\nabla\cdot U_t)\right)\\ &+ (\frac{2}{3}a_1 - \frac{1}{9})d^3\nabla\left[\nabla\cdot\left(\zeta\nabla(\nabla\cdot U_t)\right)\right] + (\frac{1}{9} - \frac{2}{3}\alpha_1)d^4\nabla\left[\nabla\cdot\left(\nabla\cdot U\left(\nabla(\nabla\cdot U)\right)\right)\right]\\ &- \frac{1}{45}d^4\nabla\cdot U\nabla\left(\nabla^2(\nabla\cdot U)\right) + \frac{1}{18}d^4\nabla\left(\nabla(\nabla\cdot U)\right)^2 - \frac{1}{45}d^4\nabla\left[U\cdot\nabla\left(\nabla^2(\nabla\cdot U)\right)\right]\\ &+ \frac{1}{3}a_1 d^4\nabla\left[\nabla^2\left(U\cdot\left(\nabla(\nabla\cdot U)\right)\right)\right] + \frac{1}{2}\beta_1 d^4\nabla\left(\nabla^4(U^2)\right) + O(\mu)\end{aligned} \qquad (3.8.\sigma\tau)$$

Έπειτα για την βελτιστοποίηση της επιλογής των συντελεστών (α_1,β_1) υπέθεσαν οριζόντιο πυθμένα, μην λαμβάνοντας υπόψη τους συντελεστές (α_2,β_2) και εφάρμοσαν μια ανάλυση Fourier τύπου Stokes (*εξίσωση* 3.9*)*. Στόχος της διαδικασίας αυτής είναι

η ποσοτικοποίηση των νέων χαρακτηριστικών της εξίσωσης της ορμής, σχετιζόμενων με τα μη γραμμικά χαρακτηριστικά και τη γραμμική διασπορά.

$$\begin{aligned} \zeta &= \alpha_1 \cos\theta + \in \alpha_2 \cos 2\theta + \in^2 \alpha_3 \cos 3\theta, \\ U &= U_1 \cos\theta + \in U_2 \cos 2\theta + \in^2 U_3 \cos 3\theta \end{aligned} \tag{3.9}$$

όπου θ, $\theta = kx - \omega t$.

Με βάση τη λύση πρώτης τάξης η εξίσωση διασποράς διατηρώντας τους όρους της τάξης $O(\epsilon^0)$ είναι, αν $\kappa = kd$,

$$\frac{\omega^2}{k^2 d} = \frac{1 + \alpha_1 \kappa^2 + \beta_1 \kappa^4}{1 + (\alpha_1 + \frac{1}{3})\kappa^2 + (\beta_1 + \frac{1}{3}\alpha_1 - \frac{1}{45})\kappa^4} \tag{3.10}$$

Έχοντας ως λύση αναφοράς την εξίσωση γραμμικής διασποράς,

$$\left(\frac{\omega^2}{k^2 d}\right)^{Stokes} = \frac{\tanh(\kappa)}{\kappa} \tag{3.11}$$

προκύπτουν οι προτεινόμενες τιμές των $(\alpha_1, \beta_1) = (1/9, 1/945)$ για σταθερό $\kappa \approx 4.2$.
Προχωρώντας στην λύση δεύτερης τάξης η λύση Stokes είναι,

$$\alpha_2^{Stokes} = \frac{1}{4}\left(\frac{a_1^2}{d}\right)\kappa \coth(\kappa)\left(3\coth^2(\kappa) - 1\right) \tag{3.12.α}$$

ή διαφορετικά από $\kappa=0$,

$$\alpha_2^{Stokes} = \frac{3}{4}\left(\frac{a_1^2}{d}\frac{1}{\kappa^2}\right)\left(1 + \frac{2}{3}\kappa^2 + \frac{7}{45}\kappa^4 + \frac{2}{315}\kappa^6 + \mathrm{O}(\kappa^8)\right) \tag{3.12.β}$$

Η αντίστοιχη λύση δεύτερης τάξης, διατηρώντας τους όρους της τάξης $O(\epsilon)$, είναι,

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{3}{4}\frac{a_1^2}{d}\frac{1}{\kappa^2}\left(1 + c_2\kappa^2 + c_4\kappa^4 + O(\kappa^6)\right), \quad \alpha\nu \\ c_2 &= 2/3 \\ c_4 &= 1/45\left(13 - 63a_1 + 945\beta_1\right) \end{aligned} \tag{3.13}$$

Όπου για τις προτεινόμενες τιμές των (α_1,β_1) δίνει λύση για τον συντελεστή c_2, $c_4=7/45$, όπως προτείνεται και από την εξίσωση (3.12.β).

Για την εξαγωγή ενός συντελεστή ρήχωσης προτάθηκε η διαδικασία που ακολουθείται στην εργασία Schäffer & Madsen *(1995a)* κατά την οποία χρησιμοποιούνται δύο τύποι λύσεων για την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας και την ταχύτητα. Αυτοί σε συνδυασμό με τις εξισώσεις (3.1) και (3.7) καταλήγουν στον συντελεστή ανεπτυγμένο κατά Taylor όπως δίνεται από την εξίσωση (3.14).

$$\gamma_o = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\kappa^2 + \frac{1}{18}\kappa^4 + \frac{1}{540}\left(\frac{43}{21} - 12\alpha_2 + 90\beta_2\right)\kappa^6 + \frac{1}{3150}\left(-\frac{1006}{81} + \frac{130}{9}\alpha_2 - \frac{280}{3}\beta_2\right)\kappa^8 + \mathrm{O}(\kappa^{10}) \tag{3.14}$$

Ο ίδιος συντελεστής από τη γραμμική θεωρία (θεωρία Stokes πρώτης τάξης) είναι (Madsen & Sørensen, *1992*),

$$\gamma_o^{Stokes} = \frac{2\kappa\sinh(2\kappa) + 2\kappa^2\left(1 - \cosh(2\kappa)\right)}{\left(2\kappa + \sinh(2\kappa)\right)^2} \tag{3.15}$$

και αναπτύσσοντας κατά Taylor την εξίσωση (3.15) από $\kappa=0$ οδηγείται στην εξίσωση (3.16).

$$\gamma_o^{Stokes} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\kappa^2 + \frac{1}{18}\kappa^4 + \frac{1}{540}\kappa^6 - \frac{11}{3150}\kappa^6 + O(\kappa^{10}) \tag{3.16}$$

Με βάση το σφάλμα μεταξύ των δυο συντελεστών ($\gamma_o, \gamma_o^{Stokes}$ των εξισώσεων (3.14) και (3.16)), όπως δίνεται στην εξίσωση (3.17) υπολογίζονται οι τιμές των συντελεστών (α_2,β_2). Αυτοί για ένα σφάλμα ίσο με $3.5\cdot10^{-6}$ είναι ίσοι με (*0.146488, 0.00798359*) με το κ να παίρνει τιμές στο διάστημα [0,6] και $\kappa_o=6$. Σημειώνεται ότι για $\kappa=6$ το γινόμενο *kd* είναι διπλάσιο του ορίου των βαθιών νερών.

$$\frac{1}{\kappa_o}\int_0^{\kappa_o}\left(\gamma_o^{Stokes} - \gamma_o\right)^2 d\kappa \tag{3.17}$$

Εξετάζοντας στο σύνολο της εργασίας αυτής, οι Madsen και Schäffer συμπεραίνουν ότι με τις τροποποιημένες εκφράσεις Boussinesq αναιρείται ο περιορισμός εφαρμογής των κλασσικών εξισώσεων διευρύνοντας σε σημαντικό βαθμό το βάθος στο οποίο είναι εφαρμόσιμη αυτή η θεωρητική προσέγγιση (από βαθιά μέχρι ζώνη θραύσης).

3.2. Εξισώσεις Chondros και Memos, 2012

3.2.1. Βασικές εξισώσεις

Στηριζόμενοι στις εξισώσεις τύπου Boussinesq των Madsen και Schäffer (1998) οι Χονδρός και Μέμος πρότειναν μια τροποποιημένη μορφή αυτών των εξισώσεων. Η διαφορά τους εντοπίζεται στη διαφορετική θεώρηση των συντελεστών (α_1,β_1) και (α_2,β_2) με τους οποίους ελέγχονται η σχέση γραμμικής διασποράς και ο συντελεστής (γραμμικής) ρήχωσης. Στην προσέγγιση των τελευταίων οι δύο αυτοί συντελεστές δίνονται ως συναρτήσεις του γινομένου *kd*. Αναφορικά με τη μεταβλητή της ταχύτητας, χρησιμοποιείται η ταχύτητα ολοκληρωμένη στο βάθος, *U*.

Έτσι οι εξισώσεις διατήρησης της μάζας και της ορμής δίνονται από τις εξισώσεις (3.1) και (3.7), ενώ οι όροι Λ^{III} από τις σχέσεις της εξίσωσης (3.8). Αντιγράφοντας εδώ, είναι:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\nabla\left(\left(d+\in\zeta\right)U\right)=0$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\nabla\zeta+\frac{1}{2}\in\nabla(U^2)+\mu^2\left(\Lambda_{20}^{III}+\in\Lambda_{21}^{III}+\in^2\Lambda_{22}^{III}+\in^3\Lambda_{23}^{III}\right)$$
$$+\mu^4\left(\Lambda_{40}^{III}+\in\Lambda_{41}^{III}\right)+O\left(\mu^6,\in^2\mu^4\right)=0$$

Στη συνέχεια από τις εξισώσεις (3.10), (3.11), (3.12.α) και (3.13) λύνεται το σύστημα ως προς τις μεταβλητές α_1 και β_1 (*Chondros & Memos, 2012*). Αυτές δίνονται από τις σχέσεις (3.18) και (3.19).

$$a_1=\frac{\begin{array}{c}6\kappa\left(75-1115\kappa^2\right)\cosh(\kappa)-9\kappa\left(-75+395\kappa^2\right)\cosh(3\kappa)+10800\sinh^5(\kappa)\\+\kappa\left(\begin{array}{c}3\left(-375-185\kappa^2+\kappa^4\right)\cosh(5\kappa)+10\kappa\left(585+29\kappa^2\right)\sinh(\kappa)\\+5\kappa(675+139\kappa^2)\sinh(3\kappa)+\kappa(1125+101\kappa^2)\sinh(5\kappa)\end{array}\right)\end{array}}{60\kappa^2\left(\begin{array}{c}2\kappa(-3+47\kappa^2)\cosh(\kappa)+9\kappa(-1+5\kappa^2)\cosh(3\kappa)-144\sinh^5(\kappa)\\+\kappa\left(5(3+\kappa^2)\cosh(5\kappa)-3\kappa(26\sinh(\kappa)+15\sinh(3\kappa)+5\sinh(5\kappa))\right)\end{array}\right)} \tag{3.18}$$

$$\beta_1=\frac{\begin{array}{c}-18\kappa\left(15-155\kappa^2+33\kappa^4\right)\cosh(\kappa)\\+27\kappa(-15+105\kappa^2+17\kappa^4)\cosh(3\kappa)-6480\sinh^5(\kappa)\\+\kappa\left(\begin{array}{c}45\left(15+19\kappa^2+3\kappa^4\right)\cosh(5\kappa)\\-2\kappa(2340+1020\kappa^2+13\kappa^4)\\\sinh(\kappa)-5\kappa(270+426\kappa^2+31\kappa^4)\sinh(3\kappa)\\-\kappa(810+474\kappa^2+17\kappa^4)\sinh(5\kappa)\end{array}\right)\end{array}}{180\kappa^4\left(\begin{array}{c}2\kappa(-3+47\kappa^2)\cosh(\kappa)+9\kappa(-1+5\kappa^2)\cosh(3\kappa)-144\sinh^5(\kappa)+\\\kappa\left(5(3+\kappa^2)\cosh(5\kappa)-3\kappa(26\sinh(\kappa)+15\sinh(3\kappa)+5\sinh(5\kappa))\right)\end{array}\right)} \tag{3.19}$$

$$a_2=\frac{\begin{array}{c}(2(-17010+175905\kappa^2+234867\kappa^4+299909\kappa^6+6696\kappa^8)\cosh(2\kappa)-\\8(2430+40365\kappa^2+47949\kappa^4+12007\kappa^6+13854\kappa^8)\cosh(4\kappa)+\\2(17010-79245\kappa^2+46023\kappa^4+262957\kappa^6+52462\kappa^8+15795\cosh(6\kappa)-\\7290\cosh(8\kappa)+1215\cosh(10\kappa))+\kappa(-25920(48\cosh(\kappa)-5\cosh(3\kappa)+\\5\cosh(5\kappa))\sinh(\kappa)^5+\kappa(-(-164565+120153\kappa^2+13103\kappa^4+10064\kappa^6)\cosh(6\kappa)+\\6(-6165-9009\kappa^2+3493\kappa^4+430\kappa^6)\cosh(8\kappa)+(2025-3981\kappa^2-731\kappa^4)\cosh(10\kappa)+\\2\kappa(-299295-61665\kappa^2+255139\kappa^4+19944\kappa^6)\sinh(2\kappa)+\\16\kappa(15525+5007\kappa^2+19267\kappa^4+2273\kappa^6)\sinh(4\kappa)+\\\kappa(-58185+55737\kappa^2+30597\kappa^4+2576\kappa^6)\sinh(6\kappa)-\\8\kappa(-8235+255\kappa^2+1379\kappa^4+17\kappa^6)\sinh(8\kappa)+\\3\kappa(855+761\kappa^2+37\kappa^4)\sinh(10\kappa))))\end{array}}{\begin{array}{c}(960\kappa^2(-3\kappa\cosh(\kappa)+(3+\kappa^2)\sinh(\kappa))(2\kappa+\sinh(2\kappa))^2\\(2\kappa(-3+47\kappa^2)\cosh(\kappa)+9\kappa(-1+5\kappa^2)\cosh(3\kappa)-144\sinh(\kappa)^5\\+\kappa(5(3+\kappa^2)\cosh(5\kappa)-3\kappa(26\sinh(\kappa)+15\sinh(3\kappa)+5\sinh(5\kappa)))))\end{array}}$$

$$\beta_2=0 \tag{3.20}$$

Με τον ίδιο τρόπο παράγονται και οι συναρτήσεις, ως προς *kd*, των μεταβλητών (α_2,β_2).

Δεδομένης της εξάρτησης μεταξύ των συντελεστών από τον αριθμό κύματος, k, προτείνεται ο τρόπος υπολογισμού του τόσο για μονοχρωματικούς όσο και για τυχαίους κυματισμούς. Για μονοχρωματικούς ο αριθμός κύματος μπορεί να βρεθεί αφού η αρχική περίοδος παραμένει σταθερή (δεδομένης της εξίσωσης 1.13). Στην περίπτωση τυχαίων κυματισμών η υπόθεση σταθερής περιόδου όμως δεν ισχύει. Υπολογίζεται μέσω της ταχύτητας φάσης, εξισώνοντας τις εξισώσεις (3.21) και (3.22).

$$c = -\frac{\partial\zeta/\partial t}{\partial\zeta/\partial x} \tag{3.21}$$

$$c = \omega/k = \sqrt{(g/k)\tanh(kd)} \tag{3.22}$$

3.2.2. Οριακές συνθήκες

Εισαγωγή απορροφητικών ορίων στα ανοιχτά όρια/ όρια ακτινοβολίας

Στην προσομοίωση των κυματικών συνθηκών η περιοχή μελέτης μπορεί να είναι θεωρητικά πολύ μεγάλη, δηλαδή το υπολογιστικό πεδίο να είναι πολύ μεγάλο. Εξαιτίας του αυξημένου υπολογιστικού κόστους εξελιγμένων υπολογιστικών μοντέλων απαιτείται ο περιορισμός του. Αυτό επιτυγχάνεται με τη χρήση ανοικτών ή απορροφητικών ορίων συνδέοντας έτσι το πεδίο με το υπόλοιπο περιβάλλον. Στο ομοίωμα των Chondros & Memos (2012) η περιγραφή των απορροφητικών ορίων γίνεται χρησιμοποιώντας την τεχνική των Larsen & Dancy (1983). Σύμφωνα με την εργασία αυτή τα απορροφητικά όρια εισάγονται ελέγχοντας τις μεταβλητές της ταχύτητας και της ανύψωσης της ελεύθερης στάθμης στα όρια του υπολογιστικού πεδίου. Έτσι κατασκευάζεται η συνάρτηση *μ(x)*:

$$\mu(x) = \begin{cases} e^{\left(2^{-x/\Delta x} - 2^{-x_s/\Delta x}\right)\ln a} & 0 \le x \le x_s \\ 1 & x_s < x \end{cases} \tag{3.23}$$

Όπου x_s το πλάτος της απορροφητικής στιβάδας, *α* μια σταθερά που εξαρτάται από τον αριθμό των υπολογιστικών διαστημάτων *Δx* εντός της στοιβάδας, $x_s/\Delta x$. Εδώ επιλέγεται ότι το πλάτος της απορροφητικής στοιβάδας θα είναι ίσο με ένα μήκος κύματος και ότι *α*=2. Ο έλεγχος ταχύτητας, *u* και ελεύθερης επιφάνειας, *ζ* γίνεται διαιρώντας με *μ(x)*:

$$u_m(x) = u(x)/\mu(x), \qquad \zeta_m(x) = \zeta(x)/\mu(x) \tag{3.24}$$

Με δείκτη *m* υποσημειώνονται οι μεταβλητές που βρίσκονται εντός του απορροφητικού ορίου. Η μείωση αυτή, ταχύτητας και στάθμης ελεύθερης επιφάνειας,

εφαρμόζεται για τις μεταβλητές εντός του υπολογιστικού πεδίου που ορίζει το απορροφητικό όριο. Χρονικά εφαρμόζεται σε κάθε χρονικό βήμα του χρόνου υπολογισμού.

Αναπαραγωγή αρχικού κύματος

Η εισαγωγή της αρχικής διαταραχής στο υπολογιστικό πεδίο γίνεται με μια μέθοδο που προτάθηκε από τους Memos et al. (2005). Ο τρόπος εισαγωγής προτάθηκε από τους Wei et al., 1999. Ένας όρος πηγή $f(x)$ προστίθεται στο δεξί σκέλος της εξίσωσης συνέχειας (3.1).

Η συνάρτηση πηγής που χρησιμοποιείται είναι,

$$f_s(x,y,t) = F(y,t)\exp\left[-\beta_s\left(x-x_s\right)^2\right] \tag{3.25}$$

όπου β_s συντελεστής που καθορίζει την κατανομή της συνάρτησης $f(x)$ κατά τον άξονα x, εντός του διαστήματος x-x_s. Η τιμή του συντελεστή β_s όπως προτάθηκε από τους Memos et al., 2005, δίνεται ως, $\beta_s \approx 80/L^2$. Η θέση στην οποία εισάγεται η συνάρτηση πηγής είναι η $x=x_s$.

Η συνάρτηση *F(y,t)* ελέγχει χρονικά και χωρικά στη δεύτερη οριζόντια διάσταση την συνάρτηση f_s και δίνεται ως εξής,

$$F(y,t) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} D_{si,j}\cos\left(\omega_i t - k_i y\sin(\theta_j) + \varepsilon_{ij}\right) \tag{3.26}$$

Όπου D_s το εύρος της συνάρτησης πηγής, k ο αριθμός κύματος, θ η γωνία μετάδοσης σε σχέση με τη διεύθυνση του άξονα x, ε η φάση του κύματος που αντιστοιχεί σε τυχαίο αριθμό αρκεί να ισχύει ε ϵ(0,2π). Ο δεύτερος όρος του δεξιού σκέλους στην εξίσωση (3.25) εισάγεται για να αποφευχθούν τυχόν αστάθειες, παραγόμενες από την συνάρτηση *F*.

Στην περίπτωση τυχαίων κυματισμών οι Wei et al. 1999, αναλύουν το δισδιάστατο φάσμα σε m συνιστώσες διαδιδόμενες σε n διευθύνσεις. Το εύρος της πηγής υπολογίζεται από τη σχέση $\zeta_{oi,j} = \sqrt{2S(\omega_i)D(\omega_i,\theta_j)\Delta\omega_i,\Delta\theta_j}$ με S την πυκνότητα ενέργειας και D την κατευθυντική συνάρτηση διάχυσης.

Απομένει μόνο ο υπολογισμός του εύρους D_s της συνάρτησης πηγής. Οι Wei et al., 1999 παρήγαγαν τη συνάρτηση D_s για τις εξισώσεις τύπου Boussinesq του Nwogu, 1993. Ακλουθώντας παρόμοια διαδικασία οι Memos et al. παρήγαγαν τη συνάρτηση D_s για τις εξισώσεις τύπου Boussinesq των Zou, 1999, Madsen et al., 1999. Το εύρος D_s της f δίνεται,

$$D_s = \frac{2\zeta_o\left(1+B(kd)^2\right)\left(\omega^2+\mathrm{B}gk^4d^3\right)\cos\theta}{\omega I_1 k\left[1+\left(B+\tfrac{1}{3}\right)(kd)^2\right]} \tag{3.27}$$

όπου I_1 είναι,

$$I_1 = \sqrt{\frac{\pi}{\beta_s} e^{-\frac{(k\cos\theta)^2}{4\beta_s}}} \tag{3.28}$$

Το εύρος της ελεύθερης επιφάνειας, από την ίδια εργασία, για δεδομένη συνάρτηση δυναμικού είναι,

$$\zeta_o = \frac{i\omega}{g} \frac{1+\left(B+\tfrac{1}{3}\right)(kd)^2}{1+B(kd)^2} \phi_o \tag{3.29}$$

Στην περίπτωση σύνθετων (τυχαίων) κυματισμών εισάγεται η χρονοσειρά δεδομένης στάθμης ελεύθερης επιφάνειας $\zeta_o(t)$. Η εξίσωση γραμμικής διασποράς που αντιστοιχεί στις εξισώσεις διατήρησης της μάζας και ορμής είναι,

$$\omega^2 = gk^2 \frac{1+B(kd)^2}{1+(B+\tfrac{1}{3})(kd)^2} \tag{3.30}$$

Ο συντελεστής B για τις εξισώσεις (3.27), (3.29), (3.30) θεωρείται ίσος με *1/15* ($B=1/15$).

Για τη συγκεκριμένη εφαρμογή μονοδιάστατης μετάδοσης του ομοιώματος των Chondros & Memos (2012) η γωνία μετάδοσης θ είναι μηδενική, κατά συνέπεια η συνάρτηση F εισάγει μόνο χρονική εξάρτηση στη αρχική συνάρτηση f. Τέλος προσεγγίζεται διαφορετικά ο συντελεστής β_s. Αυτός δίνεται ίσος με $0.8/\left(0.3L\right)^2$. Για την περίπτωση μονοχρωματικών κυμάτων το εύρος ζ_0 της εξίσωσης (3.27) λαμβάνεται ως $H_o/2$ ενώ στην περίπτωση τυχαίων κυματισμών εισάγεται η επιθυμητή χρονοσειρά της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας.

Οριακές συνθήκες

Οι οριακές συνθήκες που περιγράφουν την ροή, την συνθήκη μη ολίσθησης του πυθμένα τις συνθήκες (κινητική, δυναμική) ελεύθερης επιφάνειας ισχύουν και στην περίπτωση αυτή. Η αρχική υπόθεση αστρόβιλης ροής παραμένει. Έτσι οι οριακές συνθήκες εκφρασμένες στο δισδιάστατο πεδίο (x-z) σε όρους συνάρτησης δυναμικού εκφράζονται από τις εξισώσεις (3.31) ως (3.34). (Madsen & Schäffer, 1998)

$$\frac{\partial \phi_z}{\partial z} + \mu^2 \nabla^2 \phi = 0, \qquad -d < z < \in \zeta \tag{3.31}$$

$$\frac{1}{\mu^2}\phi_z + \nabla d \cdot \nabla \phi = 0, \qquad z = -d \tag{3.32}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \zeta + \frac{1}{2} \in \left((\nabla \phi)^2 + \frac{1}{\mu^2}(\phi_z)^2 \right) = 0, \qquad z = \in \zeta \tag{3.33}$$

$$-\frac{1}{\mu^2}\phi_z + \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \in \nabla \zeta \cdot \nabla \phi = 0, \qquad z = \in \zeta \tag{3.34}$$

Η συνάρτηση δυναμικού ορίζεται μέσων της σχέσης, $U = \nabla \phi$ με τη βαθμίδα κλίσης να αναφέρεται στις δύο διαστάσεις. Επίσης ως ϕ_z σημειώνεται η ταχύτητα στον άξονα z, $\phi_z = \partial \phi / \partial z = w$.

3.2.3. Εισαγωγή Θραύσης

Η θραύση αποτελεί βασική συνιστώσα στη διαμόρφωση του κυματικού πεδίου και του πεδίου ροής, κατά συνέπεια και της μεταφοράς στερεάς ύλης σε κάθε παράκτια ζώνη. Για την προσομοίωση της έχουν προταθεί διαφορετικές προσεγγίσεις όπως αυτές των Schäffer, Madsen, Zelt, Kennedy, Veeramony & Svendsen, Karampas & Koutitas. Η εφαρμογή των ομοιωμάτων βασισμένων σε εξισώσεις τύπου Boussinesq στην περιοχή της ζώνης θραύσης είναι ιδιαίτερη. Η ιδιαιτερότητα αυτή έγκειται στην ενίσχυση των μη γραμμικών χαρακτηριστικών ($\in \to O(1)$), ενώ οι όροι διασποράς μειώνονται σημαντικά ($\mu^2 \to 0$).

Οι Kennedy et al. (2000) χρησιμοποίησαν ένα μοντέλο τυρβώδους συνεκτικότητας για την εκτίμηση της ανύψωσης της μέσης στάθμης, του ύψους κύματος μονοχρωματικών κυματισμών. Το μοντέλο αυτό έρχεται σε συνέχεια των εργασιών των Heitner & Housner (1970), ή του Zelt (1991). Η διαφοροποίηση τους έγκειται στην καλύτερη περιγραφή της έναρξης και του τερματισμού της θραύσης του κυματισμού από το μοντέλο των Kennedy et al. (2000). Προσομοιώνονται με αυτό φαινόμενα τύρβης και η απόσβεση ενέργειας που συμβαίνει λόγω της θραύσης. Η θραύση γίνεται σε μια διάσταση περιλαμβάνοντας έτσι μόνο το φαινόμενο της ρήχωσης.

Οι Kennedy et al. χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις τύπου Boussinesq των Nwogu (1993), Wei et al. (1995) στο δεξί μέλος της εξίσωσης ορμής προσέθεσε ένα όρο R_b που εισάγει την επίδραση της τύρβης. Εντός του συντελεστή τυρβώδους συνεκτικότητας, ν, εισάγεται ο συντελεστής, ζ_t^* που ελέγχει την έναρξη και λήξη της θραύσης. Τα όρια της θραύσης τοποθετούνται ανάμεσα σε δύο τιμές $\zeta_t^{(I)}, \zeta_t^{(F)}$ (αρχική, τελική). Χρονικά χρησιμοποιείται ένα όριο T^*, ο χρόνος μετάβασης. Τα όρια αυτά συνοψίζοντας είναι,

$$\zeta_t^{(I)} = \begin{cases} 0.35\sqrt{gd} & \text{για ακτή που περιλαμβάνει εμπόδια} \\ 0.65\sqrt{gd} & \text{για ακτή που χαρακτηρίζεται από μια ενιαία κλίση} \end{cases}$$
$$\zeta_t^{(F)} = 0.15\sqrt{gd} \qquad (3.35)$$
$$T^* = 5\sqrt{d/g}$$

Οι εκφράσεις της εξίσωσης (3.35) έχουν προκύψει μετά από τη βαθμονόμηση των αποτελεσμάτων των εξισώσεων των Wei et al. και Nwogu σε σύγκριση με πειραματικά δεδομένα. Η βαθμονόμηση αυτή γίνεται μετά από διαφορετική επιλογή των παραμέτρων των βασικών εξισώσεων ώστε να προσεγγίζουν τα πειραματικά δεδομένα. Όπως αναφέρουν οι Kennedy et al., προτείνεται η νέα επιλογή τους, όταν χρησιμοποιούνται σε άλλα μοντέλα Boussinesq.

Οι συνιστώσες του πρόσθετου όρου όπως παρήχθησαν για την περίπτωση των εξισώσεων Wei et al. και Nwogu είναι,

$$R_{bx} = \frac{1}{d+\zeta}\left(\left[\nu\left((d+\zeta)u_a\right)_x\right]_x + \frac{1}{2}\left[\nu\left((d+\zeta)u_a\right)_x + \nu\left((d+\zeta)v_a\right)_x\right]_y\right) \qquad (3.36)$$

$$R_{by} = \frac{1}{d+\zeta}\left(\left[v\left((d+\zeta)v_a\right)_y\right]_y + \frac{1}{2}\left[v\left((d+\zeta)u_a\right)_y + v\left((d+\zeta)v_a\right)_x\right]_x\right) \tag{3.37}$$

Όπου $\vec{u}_a = (u_a, v_a)$ το διάνυσμα της ταχύτητας το οποίο στην εργασία των Kennedy et al. αναφέρεται σε ένα τυχαίο βάθος z της ροής.

Για το μοντέλο των Chondros & Memos (2012) περιορίζεται στη διάσταση x, στη συνιστώσα R_{bx}. Εν προκειμένω είναι,

$$R_{bx} = \frac{1}{d+\zeta}\left(\left[v\left((d+\zeta)U\right)_x\right]_x\right) \tag{3.38}$$

Ο συντελεστής τυρβώδους συνεκτικότητας δίνεται από τη σχέση,

$$v = B\delta_b^2(d+\zeta)\zeta_t \tag{3.39}$$

Όπου ο συντελεστής δ_b συντελεστής μήκους ανάμιξης, $\delta_b=1.2$, ο συντελεστής B παρουσιάζει τιμές στο διάστημα [0,1] σύμφωνα με τη σχέση,

$$B = \begin{cases} 1, & \zeta_t \geq \zeta_t^* \\ (\zeta_t / \zeta_t^*) - 1, & \zeta_t^* < \zeta_t \leq \zeta_t \\ 0, & \zeta_t \leq \zeta_t^* \end{cases} \tag{3.40}$$

Η παράμετρος ζ_t^* ορίζεται ως εξής,

$$\zeta_t^* = \begin{cases} \zeta_t^{(F)}, & t \geq T^* \\ \zeta_t^{(I)} + \dfrac{t-t_o}{T^*}(\zeta_t^{(F)} - \zeta_t^{(I)}), & 0 \leq t - t_o < T^* \end{cases} \tag{3.41}$$

Όπου t_0 η χρονική στιγμή στην οποία αρχίζει η θραύση.

3.2.4. Αριθμητική επίλυση

Μια χαρακτηριστική ιδιότητα της διακριτοποίησης των εξισώσεων τύπου Boussinesq είναι η παραγωγή σφαλμάτων αποκοπής. Η χρήση πεπερασμένων διαφορών για την ανάλυση χωρικών παραγώγων πρώτης τάξης με ακρίβεια δεύτερης τάξης αναπαράγει σφάλματα αποκοπής μαθηματικά όμοια με τους όρους διασποράς που εμπεριέχονται στις βασικές εξισώσεις. Τα σφάλματα αυτά μειώνονται όσο πιο λεπτομερές γίνεται το υπολογιστικό πλέγμα (μείωση των Δx, Δy, Δt). Ωστόσο παραμένουν αρκετά μεγάλα ώστε να επηρεάζουν την τελική λύση.

Η ανάλυση των χρονικών παραγώγων γίνεται με το σχήμα διαφορών τρίτης τάξης Adams- Bashforth σε πρώτο βήμα. Ακολουθεί η εφαρμογή του σχήματος διόρθωσης τέταρτης τάξης, Adams- Moulton.

Αρχικά ας οριστούν οι σχέσεις

$$\zeta_t = E(\zeta, u, v) \tag{3.42}$$

$$U_t = F(\zeta, u, v) + \left[F_1(v)\right]_t \tag{3.43}$$

$$V_t = G(\zeta, u, v) + \left[G_1(u)\right]_t \tag{3.44}$$

$$U(u) = u + d\left(b_1 du_{xx} + b_2 (du)_{xx}\right) \tag{3.45}$$

$$V(v) = v + d\left(b_1 dv_{yy} + b_2 (dv)_{yy}\right) \tag{3.46}$$

$$\begin{aligned} E(\zeta,u,v) = &-\left[(d+\zeta)u\right]_x - \left[(d+\zeta)v\right]_y - \left[a_1 d^3 (u_{xx} + v_{xy}) + a_2 d^2 ((hu)_{xx} + (hv)_{xy})\right]_x \\ &-\left[a_1 d^3 (v_{yy} + u_{xy}) + a_2 d^2 ((hv)_{yy} + (hu)_{xy})\right]_y \end{aligned} \tag{3.47}$$

$$F(\zeta,u,v) = -g\zeta_x - (uu_x + vu_y) \tag{3.48}$$

$$G(\zeta,u,v) = -g\zeta_y - (vv_x + uv_y) \tag{3.49}$$

$$F_1(v) = -d(b_1 dv_{xy} + b_2 (dv)_{xy}) \tag{3.50}$$

$$G_1(v) = -d(b_1 du_{xy} + b_2 (du)_{xy}) \tag{3.51}$$

Το σύνολο εξισώσεων (3.42) - (3.51) είναι εφαρμόσιμο σε δισδιάστατα μοντέλα εξισώσεων τύπου Boussinesq. Οι μεταβλητές a_1, a_2, b_1, b_2 καθορίζονται με βάση τον τύπο των τροποποιημένων εξισώσεων Boussinesq που χρησιμοποιούνται. Για το εξεταζόμενο μονοδιάστατο μοντέλο των Chondros & Memos, 2012 οι όροι της διάστασης y απαλείφονται. Επίσης δεν χρησιμοποιούνται οι μεταβλητές της ταχύτητας *v*. Οι τιμές των παραμέτρων αυτών δίνονται συναρτήσει της μεταβλητής *β*.

$\alpha_1 = \beta^2 - 1/6,$

$\alpha_2 = \beta + 1/2,$

$b_1 = \beta^2 / 2,$

$b_2 = \beta,$

$\beta = z_a / d$ (z_a, το βάθος στο οποίο αναφέρεται η μεταβλητή της ταχύτητας)

Με δείκτη *t* δηλώνονται οι διαφορές των χρονικών παραγώγων πρώτης τάξης, ενώ με f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} δηλώνονται οι διαφορές των χωρικών παραγώγων δεύτερης τάξης. Αντίστοιχα με f_x, f_y δηλώνονται οι διαφορές των χωρικών παραγώγων πρώτης τάξης.

Το πρώτο βήμα με το σχήμα Adams- Bashforth είναι,

$$\zeta_{i,j}^{n+1} = \zeta_{i,j}^{n} + \frac{\Delta t}{12}\left(23E_{i,j}^{n} - 16E_{i,j}^{n-1} + 5E_{i,j}^{n-2}\right) \tag{3.52}$$

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^{n} + \frac{\Delta t}{12}\left(23F_{i,j}^{n} - 16F_{i,j}^{n-1} + 5F_{i,j}^{n-2}\right) + 2F_1^{n} - 3F_1^{n-1} + F_1^{n-2} \tag{3.53}$$

$$V_{i,j}^{n+1} = V_{i,j}^{n} + \frac{\Delta t}{12}\left(23G_{i,j}^{n} - 16G_{i,j}^{n-1} + 5G_{i,j}^{n-2}\right) + 2G_1^{n} - 3G_1^{n-1} + G_1^{n-2} \tag{3.54}$$

Όπου *i,j* οι δείκτες θέσης εντός του υπολογιστικού πεδίου και με *n* δηλώνεται ο χρόνος $t=n\Delta t$ θεωρώντας ότι αντιπροσωπεύει το παρόν χρονικό βήμα, *(n+1)* ο χρόνος $t=(n+1)\Delta t$ και αντιπροσωπεύει το επόμενο χρονικό βήμα, αντίστοιχα και για *n-1*, *n-2*. Η επίλυση ως προς την μεταβλητή $\zeta_{i,j}^{n+1}$ είναι ευθεία ($n \to n+1 \to n+2...$). Ο υπολογισμός των ταχυτήτων στο επόμενο χρονικό βήμα γίνεται λύνοντας το τρισδιαγώνιο σύστημα όπως περιγράφεται από τους Skotner & Apelt (1999a). Μετά

την εκτίμηση των μεταβλητών στο επόμενο χρονικό βήμα υπολογίζονται οι τιμές των χωρικών παραγώγων.

Στο δεύτερο βήμα εφαρμόζεται το σχήμα διόρθωσης Adams- Moulton:

$$\zeta_{i,j}^{n+1} = \zeta_{i,j}^{n} + \frac{\Delta t}{24}\left(9E_{i,j}^{n+1} + 19E_{i,j}^{n} - 5E_{i,j}^{n-1} + E_{i,j}^{n-2}\right) \tag{3.55}$$

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^{n} + \frac{\Delta t}{24}\left(9F_{i,j}^{n+1} + 19F_{i,j}^{n} - 5F_{i,j}^{n-1} + F_{i,j}^{n-2}\right) + F_{1}^{n+1} - F_{1}^{n} \tag{3.56}$$

$$V_{i,j}^{n+1} = V_{i,j}^{n} + \frac{\Delta t}{24}\left(9G_{i,j}^{n+1} + 19G_{i,j}^{n} - 5G_{i,j}^{n-1} + G_{i,j}^{n-2}\right) + G_{1}^{n+1} - G_{1}^{n} \tag{3.57}$$

Το σχήμα διόρθωσης επαναλαμβάνεται μέχρι το σχετικό σφάλμα δύο διαδοχικών προσεγγίσεων να πάρει τιμή κάτω από ένα αποδεκτό όριο. Το σφάλμα αυτό υπολογίζεται για κάθε μεταβλητή και είναι,

$$\Delta f = \frac{\sum_{i,j}\left| f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^{(n+1)^*} \right|}{\sum_{i,j}\left| f_{i,j}^{n+1} \right|},\ f = \{\zeta, U, V\} \tag{3.58}$$

Με αστερίσκο σημειώνεται η τιμή της προηγούμενης εκτίμησης.

Με την τεχνική αυτή επιδιώκεται η μείωση των σφαλμάτων που προκύπτουν από τη διακριτοποίηση των βασικών εξισώσεων σε μια τάξη μεγέθους μικρότερη των όρων που διατηρούνται. Οι χωρικές παραγωγοί πρώτης τάξης διακριτοποιούνται διατηρώντας ακρίβεια τέταρτης τάξης, αναπαράγοντας σφάλματα αποκοπής τάξης $O(\Delta x^4/\mu^2)$ που αντιστοιχούν σε όρους διασποράς τάξης $O(\mu^2)$. Οι όροι διασποράς διακριτοποιούνται με ακρίβεια δεύτερης τάξης, αναπαράγοντας σφάλματα της τάξης $O(\Delta x^2)$, μεγέθους σχετικού των αρχικών όρων.

Οι χρονικές μερικές παράγωγοι των εξισώσεων (3.42), (3.43), (3.44), και οι χωρικές μερικές παράγωγοι των εξισώσεων (3.45) ως (3.51) διακριτοποιούνται χρησιμοποιώντας τη μέθοδο κεντρικών διαφορών. Αν η f αντιπροσωπεύει τις μεταβλητές αυτές, τότε οι διαφορές τους ως προς το χρόνο και το χώρο είναι,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_i^n &= \frac{f_i^{n+1} - f_i^{n-1}}{2\Delta t} \\ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i^n &= \frac{f_{i+1}^{n} - f_{i-1}^{n}}{2\Delta x} \end{aligned} \tag{3.59}$$

Τα σφάλματα αποκοπής που αναπαράγονται από τις διαφορές της εξίσωσης (3.59) υπολογίζονται με αναπτύγματα Taylor. Ως προς χρόνο και χώρο αντίστοιχα είναι $-\left(\Delta t^2/6\ \partial^3 f/\partial t^3\right), -\left(\Delta x^2/6\ \partial^3 f/\partial x^3\right)$. Οι παράγωγοι τρίτης τάξης μετασχηματίζονται σε (Abbot et al. (1984)):

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x^3} = -\frac{1}{g}\frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t},$$
$$\frac{\partial \zeta}{\partial t^3} = -dg\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^2 \partial t} \tag{3.60}$$

Έτσι προκύπτουν οι διορθώσεις των σφαλμάτων αποκοπής που προστίθενται στις εξισώσεις ορμής και συνέχειας.

$$\left(-\frac{\Delta x^2}{6} + dg\frac{\Delta t^2}{6}\right)\frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t},$$
$$\left(-\frac{\Delta x^2}{6} + dg\frac{\Delta t^2}{6}\right)\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^2 \partial t} \tag{3.61}$$

Οι παράγωγοι τρίτης τάξης των εκφράσεων της (3.61) δίνονται σε σχήματα διαφορών ως εξής,

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial t}\right)_i^n = \frac{\left(f_{i+1}^{n+1} - 2f_i^{n+1} + f_{i-1}^{n+1}\right) - \left(f_{i+1}^{n-1} - 2f_i^{n-1} + f_{i-1}^{n-1}\right)}{\Delta x^2 2\Delta t} \tag{3.62}$$

Οι μη γραμμικοί όροι προσεγγίζονται μέσω των σχημάτων,

$$\left(U\frac{\partial U}{\partial x}\right)_i^n = \frac{U_i^n\left(U_{i+1}^n - U_i^n\right)}{2\Delta x} \tag{3.63}$$

$$\left(\frac{\partial (d+\zeta)U}{\partial x}\right)_i^n = \frac{U_{i+1}^n (d+\zeta)_{i+1}^n - U_{i-1}^n (d+\zeta)_{i-1}^n}{2\Delta x} \tag{3.64}$$

Για μικρές τιμές των *Δx, Δt* και μεγάλες τιμές της περιόδου κύματος εμφανίζονται προβλήματα αστάθειας. Για το λόγο αυτό οι μη γραμμικοί όροι προσεγγίζονται με πεπλεγμένες διαφορές σε τρία διαφορετικά χρονικά βήματα τα οποία πολλαπλασιάζονται με ένα συντελεστή βαρύτητας. Έτσι είναι,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i^n = a\frac{f_{i+1}^{n+1} - f_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} + (1-2a)\frac{f_{i+1}^{n} - f_{i-1}^{n}}{2\Delta x} + a\frac{f_{i+1}^{n-1} - f_{i-1}^{n-1}}{2\Delta x} \tag{3.65}$$

Ο συντελεστής *α* παίρνει τιμές μικρότερες του 0.25. Με την εισαγωγή της εξίσωσης (3.65) δημιουργείται ένα δι-τριδιαγώνιο σύστημα το οποίο λύνεται όπως περιγράφεται από τον Rosenberg (1969).

Βιβλιογραφία τρίτου κεφαλαίου

Abbot, M.B., McCowan, A.D., Warren, I.R., 1984, “Accuracy of short wave numerical model.” *J. Hydr. Engineering*, vol. 110(10), 1287-1301.

Chondros, M.K., Koutsourelakis, I.G., Memos, C.D., 2011, “A Boussinesq- type model incorporating random wave breaking.” *J. Hydraulic Research*, vol. 49(4), 529-538.

Chondros, M.K., Memos, C.D., 2012, “A highly non linear Boussinesq wave model of improved dispersion characteristics.” *Proceedings of the 22nd (2012) International Offshore and Polar Engineering Conference* (*ISOPE*), Rhodes, Greece

Heitner, K. L., Housner, G.W. 1970. ‘‘Numerical model for tsunami run-up.’’ *J. Waterway, Port, Coast. and Oc. Engrg.*, ASCE, (96), 701–719.

Karambas, Th.V., Koutitas, C. (1992). “A breaking wave propagation model based on the Boussinesq equations.” *Coastal Eng.*, vol. 18(1-2), 1-19.

Kennedy, A.B., Chen, Q., Kirby, J.T., Dalrymple, R.A. 2000. “Boussinesq modeling of wave transformation, breaking, and run-up 1: 1D.” *J. Waterway., Port, Coastal, and Ocean Eng.*, vol. 126(1), 39-47.

Larsen, J. Dancy, H., 1983. “Open boundaries in short wave simulations: a new approach.”*J. Coastal Engineering*, vol. 7(3), 285-297.

Madsen, P.A., Murray, R., Sorensen, O.R. 1991. "A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics." *J. Coastal Engineering*, vol. 15, 371-388.

Madsen, P.A., Schäffer, H.A. 1998. "Higher-order Boussinesq-type equations for surface gravity waves: derivation and analysis." *Phil. Trans. R. Soc. London*, vol. 356, 3123-3184.

Madsen, P.A., Sorensen, O.R., 1992. “A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics. Part 2: A slowly varying bathymetry.” *J. Coastal Engineering*, vol. 18, 183–204.

Memos, C.D., Karambas, Th.V., Avgeris, I., 2005. “Irregular wave transformation in the nearshore zone: experimental investigations and comparison with a higher order Boussinesq model.” *J. Ocean Engineering*, vol. 32, 1465-1485.

Nwogu, O., 1993. "Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation." *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering,* vol. 119(6), 618-638.

Von Rosenberg, D. U., 1969, *Methods for the numerical solution of partial differential equations*, American Elsevier Pub. Co., New York.

Schäffer, H. A., Madsen, P. A., 1995*a* “Further enhancements of Boussinesq-type equations.” *J. Coastal Engineering, vol.* 26, 1-15.

Skotner, C., Apelt, C.J. 1999. “Application of a Boussinesq model for the computation of breaking waves, Part 1: Development and verification.” *J. Ocean Engineering*, vol. 26, 905-925.

Veeramony, J., Svendsen, I.A., 1998. “A Boussinesq model for breaking waves: comparisons with experiments.” *Proceedings of 26th Conference on Coastal Engineering* (*ICCE*), Copenhagen, Danmark.

Wei, G., Kirby, J.T., Grilli, S.T., Subramanya, R., 1995. "A fully non-linear Boussinesq model for surface waves: Part I. Highly nonlinear unsteady waves." *J. Fluid Mechanics*, vol. 294, 71-92.

Zelt, J. A. (1991). ‘‘The run-up of non breaking and breaking solitary waves.’’ *J. Coastal Engineering*, vol. 15, 205–246.

Κεφάλαιο 4

Εξισώσεις Navier- Stokes - μοντέλο Cornell Breaking Waves And Structures

Εντός του κεφαλαίου αυτού περιγράφεται η χρήση των εξισώσεων Navier- Stokes για την προσομοίωση μέσω ενός μοντέλου επίλυσης φάσεων (phase resolving model). Οι εξισώσεις που χρησιμοποιούνται (*Reynolds Averaged Navier Stokes*) αποτελούν μια ολοκληρωμένη στο χρόνο έκφραση των αρχικών εξισώσεων. Με τις εξισώσεις RANS στόχος είναι η μείωση του υπολογιστικού κόστους που απαιτείται για την επίλυση των εξισώσεων Navier Stokes. Επίσης στην προσομοίωση του πεδίου ροής είναι επιθυμητή η δυνατότητα των αρχικών εξισώσεων να περιγράφουν την τύρβη. Κάτι που δεν έχουν στον ίδιο βαθμό οι ολοκληρωμένες εξισώσεις RANS. Για το λόγο αυτό και για το κλείσιμο του συστήματος εξισώσεων (ανάγκη εκτίμησης των τάσεων Reynolds) χρησιμοποιούνται μοντέλα που αποδίδουν την τύρβη προστιθέμενα στις αρχικές εξισώσεις διατήρησης μάζας, ορμής και οριακών συνθηκών. Έπειτα οι εξισώσεις RANS ολοκληρώνονται ως προς τον όγκο για να γίνει εφικτή η επίλυση τους στην προσομοίωση του πεδίου εντός υλικών με πορώδες. Η εφαρμογή αυτής της θεωρητικής προσέγγισης γίνεται μέσω του μοντέλου Co.Br.A.S. (Cornell Breaking And Structures). Το μοντέλο αυτό αποτελεί συνέχεια του μοντέλου RIPLLE των Kothe et al. (1991). Αναπτύχθηκε σε ένα πλήθος δημοσιεύσεων των Lin και Liu. Η εφαρμογή του εντός πορώδους υλικού εξετάστηκε από τους Hsu et al. (2002) και από τους Liu & Losada, 2002, Gaunche, Losada & Lara, 2009, Losada et al., 2009. Τα αποτελέσματα της εφαρμογής αυτής θα παρουσιαστούν και στα επόμενα δύο κεφάλαια.

4.1. Εισαγωγή

Η ανάπτυξη μοντέλων όπως το Co.Br.A.S. επικεντρώθηκε, όπως και άλλα μοντέλα, στην προσομοίωση των μηχανισμών θραύσης με αντικείμενο το κυματικό πεδίο, το πεδίο ροής και άλλους σχετικούς μηχανισμούς της παράκτιας ζώνης (όπως η ανάμιξη, η μεταφορά υλικού). Στη συνέχεια διερευνήθηκαν τα φαινόμενα τύρβης που αναπτύσσονται στο πεδίο ροής κάτω από θραυόμενους κυματισμούς και στο πεδίο ροής εντός βυθισμένων όγκων, όπως ο οπλισμός για την προστασία ύφαλων έργων

(όπως κυματοθραύστες). Έτσι στο επίκεντρο μελέτης του βρίσκεται η προσομοίωση της τύρβης κάτω από την επιφάνεια των θραυόμενων κυματισμών. Σε επέκταση αυτού δύνανται να μελετηθούν η ευστάθεια τέτοιων έργων, η εκτίμηση του ρυθμού μεταφοράς ιζημάτων.

Δεδομένης της αλληλεπίδρασης μεταξύ των κυμάτων και των παράκτιων κατασκευών μελετώνται τρεις μηχανισμοί δημιουργίας και έντασης της τύρβης. Ο πρώτος είναι η διεργασία της θραύσης που συμβαίνει ως αποτέλεσμα της μείωσης του βάθους (ρήχωσης). Ο δεύτερος αφορά το οριακό στρώμα μεταξύ νερού και πυθμένα ή μεταξύ νερού και κατασκευής. Ο τρίτος αφορά την ροή εντός πορώδους μέσου. Έτσι ενώ η ροή μπορεί να αγνοηθεί για μικρού πορώδους υλικά (όπως η άμμος), υπάρχουν πειραματικά δεδομένα που συνιστούν την ανάπτυξη ροής εντός υλικών μεγαλύτερου πορώδους. Για την προσομοίωση των φαινομένων αυτών χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις Navier- Stokes εκφρασμένες ως RANS ή VARANS (*Volume Averaged Reynolds Averaged Navier Stokes*), εξισώσεις που θα αναλυθούν στη συνέχεια του παρόντος κεφαλαίου.

Για την προσομοίωση των περιοχών τυρβώδους ροής αναπτύχθηκαν μοντέλα όπως το k-ε. Με αυτά επιτυγχάνεται η αριθμητική επίλυση εξισώσεων στην προσέγγιση συνδυασμένης τύρβης και θραύσης.

Σε σύνδεση με την παρούσα εργασία εξετάζεται η ικανότητα της συγκεκριμένης θεώρησης, μέσω του αριθμητικού υπολογιστικού μοντέλου Co.Br.A.S. να προσομοιώνει το κυματικό πεδίο σε περιοχές μεταβαλλόμενου βάθους. Όπως και στα άλλα δύο ομοιώματα εξετάζεται η μεταβλητή της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας.

Όπως προαναφέρθηκε, στις εξισώσεις Navier-Stokes γίνεται αποδεκτή η ανάπτυξη τυρβώδους ροής με συνέπεια την αντίστοιχη θεώρηση για τις διατμητικές τάσεις. Για την καλύτερη κατανόηση της τυρβώδους ροής ας γίνουν αντιληπτές οι επιδράσεις της τύρβης στις βασικές εξεταζόμενες μεταβλητές. Οι μεταβλητές της ταχύτητας, της πίεσης και της πυκνότητας αποτελούνται από δύο συνιστώσες: τη μέση τιμή και την διακύμανση της (τυρβώδες συστατικό). Έτσι μπορούν να εκφραστούν ως,

$$\begin{aligned} u_i &= \langle u_i \rangle + u_i' \\ p &= \langle p \rangle + p', \\ 1/\rho &= 1/\langle \rho \rangle + 1/\rho' \end{aligned} \tag{4.1}$$

Όπου $\langle u \rangle$ η μέση τιμή της συνιστώσας της ταχύτητας κατά τον άξονα x_i και u' η τυρβώδης ταχύτητα για τον άξονα x_i, για $i=1,2,3$ με $x_i=x,y,z$.

Τέλος να σημειωθεί ότι η ολοκλήρωση μιας εξαρτημένης μεταβλητής α ως προς έναν όγκο ελέγχου V περιγράφεται από την σχέση (4.2) (*Darcy volume averaging operator*), με V_f, μια ποσότητα της V για την οποία ολοκληρώνεται η α.

$$\langle a \rangle = \frac{1}{V}\int_{V_f} a dV \tag{4.2}$$

Η ολοκλήρωση της *α* ως προς ένα εγγενή όγκο V_f γράφεται,

$$\langle a \rangle^f = \frac{1}{V_f}\int_{V_f} a dV \tag{4.3}$$

Πιο συγκεκριμένα αν *V* είναι η μεταβλητή του όγκου και V_f ο όγκος του ενεργού πορώδους, τότε η ολοκλήρωση ως προς ένα εγγενή όγκο V_f της χωρικής βαθμίδας της μεταβλητής *B* περιγράφεται από την εξίσωση (4.4).

$$\langle \nabla B \rangle^f = \frac{1}{V_f}\int_{V_f} \nabla B dV = \nabla\left[\frac{1}{V_f}\int_{V_f} B dV\right] + \frac{1}{V_f}\int_{A_{\text{int}}} B\vec{n} dA \tag{4.4}$$

Όπου *B*, μπορεί να είναι βαθμωτό μέγεθος, διάνυσμα ή τανυστής δεύτερης τάξης, A_{int} η διεπιφάνεια επαφής ρευστού- στερεού και *n* ένα μοναδιαίο διάνυσμα με κατεύθυνση από το ρευστό προς το στερεό. Με τη μέθοδο αυτή ολοκληρώνονται οι εξισώσεις RANS σε VARANS.

4.2. Εξισώσεις Reynolds Averaged Navier- Stokes

4.2.1. Βασικές εξισώσεις

Αρχικά, ας σημειωθούν και πάλι οι εξισώσεις Navier Stokes όπως αναλύθηκαν στο πρώτο κεφάλαιο.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \\ &\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \end{aligned} \tag{4.5}$$

Στην περίπτωση τρισδιάστατης ροής η μέση ροή περιγράφεται από τις εξισώσεις Reynolds (*RANS*), που αντιπροσωπεύουν την αρχή διατήρησης της μάζας και της ορμής αντίστοιχα. Αυτές προκύπτουν μετά από την ολοκλήρωση των σχέσεων της (4.5) ως προς ένα χρόνο T, δεδομένης της ανάλυσης Reynolds (*Reynolds decomposition*) για τις τυρβώδεις ιδιότητες της ροής. Οι όροι που εμπεριέχουν τις αποκλίσεις από τη μέση πυκνότητα, επιλέγεται να αμεληθούν (στην περιοχή της ελεύθερης επιφάνειας) και δεν περιέχονται στις εξισώσεις Reynolds που παρουσιάζονται εδώ. Κατά συνέπεια η πυκνότητα *ρ* από δω και έπειτα θα αντιστοιχεί στη μέση πυκνότητα $\langle \rho \rangle$.

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_i} = 0 \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial t}+\langle u_j\rangle\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\langle p\rangle}{\partial x_i}+g_i+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\langle\tau_{ij}\rangle}{\partial x_j}-\frac{\partial\langle u_i'u_j'\rangle}{\partial x_j} \tag{4.7}$$

Όπου *i,j=1,2,3* αντιστοιχεί σε κάθε μια από τις τρεις διαστάσεις του ρευστού, *u* η εκάστοτε συνιστώσα της ταχύτητας και τ_{ij} οι διατμητικές τάσεις, ρ η πυκνότητα, *p* η πίεση και g_i η εκάστοτε συνιστώσα της επιτάχυνσης της βαρύτητας. Με το συμβολισμό $\langle\ \rangle$ σημειώνονται οι μεταβλητές που είναι ολοκληρωμένες ως προς το χρόνο (χρονικός μέσος).

Κοιτώντας το δεύτερο σκέλος της εξίσωσης (4.7), ο πρώτος όρος περιγράφει τις συνθήκες πίεσης, ο δεύτερος όρος αντιπροσωπεύει την επίδραση της βαρύτητας, ο τρίτος τις διατμητικές τάσεις της ροής (viscous stress tensor). Για την υπόθεση Νευτώνειου (ιδανικού) ρευστού οι διατμητικές τάσεις περιγράφονται από την εξίσωση (4.8).

$$\langle\tau_{ij}\rangle=2\mu\sigma_{ij} \tag{4.8}$$

Όπου μ, το μοριακό (δυναμικό) ιξώδες, το οποίο σε σχέση με το κινηματικό ιξώδες, *ν* δίνεται ως $\mu=\nu\rho$. Επίσης, σ_{ij} οι ορθές τάσεις της μέσης ροής δίνονται από την εξίσωση (4.9).

$$\sigma_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_j}+\frac{\partial\langle u_j\rangle}{\partial x_i}\right) \tag{4.9}$$

Ο τελευταίος όρος της εξίσωσης (4.7) εισάγει τη χωρική μεταβολή του τανυστή τάσεων Reynolds $\rho\langle u_i'u_j'\rangle$. Με τον όρο αυτό εισάγεται η επίδραση των διακυμάνσεων της τύρβης στη μέση ροή.

4.2.2. Προσθήκες μοντέλου τύρβης στις εξισώσεις RANS

Η εξίσωση μετάθεσης των τάσεων Reynolds μπορεί θεωρητικά να παραχθεί από τις εξισώσεις Navier Stokes. Η παραγόμενη εξίσωση περιέχει υψηλής τάξης όρους συσχέτισης της τυρβώδους ταχύτητας με την πίεση. Για την λύση αυτού του συστήματος εξισώσεων Reynolds είναι απαραίτητος ο συσχετισμός των όρων αυτών με τη μέση ροή. Τούτο επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας το μοντέλο τύρβης k-ε. Σε συνδυασμό με το μοντέλο αυτό χρησιμοποιείται και μια από τις ακόλουθες εκτιμήσεις για τον προσδιορισμό του όρου $\rho\langle u_i'u_j'\rangle$. Με τις προσεγγίσεις αυτές συσχετίζονται οι τάσεις Reynolds με τον ρυθμό μεταβολής των ορθών τάσεων της μέσης ροής.

Μοντέλο τύρβης k-ε

Το μοντέλο μετάθεσης της τυρβώδους κινητικής ενέργειας προκύπτει από το γενικό μέσο όρο (*ensemble average*) του γινομένου της εξίσωσης (4.5) με την τυρβώδη συνιστώσα της ταχύτητας.

$$\frac{\partial k}{\partial t}+\langle u_j\rangle\frac{\partial k}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}+\nu\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right]-\langle u_i'u_j'\rangle\frac{\partial\langle u_i'\rangle}{\partial x_j}-\varepsilon \tag{4.10}$$

Με τη σχέση αυτή εξισώνεται ο ρυθμός μεταβολής της τυρβώδους κινητικής ενέργειας της μέσης ροής (αριστερό μέλος) με την τυρβώδη διάχυση της *k*, την μοριακή διασπορά της *k*, το ρυθμό μεταβολής της *k* εξαιτίας της επίδρασης των τάσεων Reynolds στη μέση ροή (πρώτος, δεύτερος και τρίτος όρος του δεξιού μέλους) και το ρυθμό απόσβεσης της *k*.

Η επίλυση της απαιτεί να είναι γνωστά το πεδίο ροής (ταχύτητες, u) και ο ρυθμός απόσβεσης ε. Αυτός δίνεται από την σχέση (4.11). Για την εξαγωγή της πολλαπλασιάζεται η παράγωγος της (4.5), ορισμένης κατά x, με $\nu\partial u'/\partial x$. Ο γενικός μέσος όρος (*ensemble average*) δίνει το τελικό αποτέλεσμα.

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\langle u_j\rangle\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}+\nu\right)\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_j}\right]+2C_{1\varepsilon}\frac{\varepsilon}{k}\nu_t\sigma_{ij}\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_j}-C_{2\varepsilon}\frac{\varepsilon^2}{k} \tag{4.11}$$

Ως *k*, ορίζεται η τυρβώδης κινητική ενέργεια, *ε*, ο ρυθμός απόσβεσης της τυρβώδους κινητικής ενέργειας και *ν* το τυρβώδες κινηματικό ιξώδες

$$k=\frac{1}{2}\langle u_i'u_i'\rangle \tag{4.12}$$

$$\varepsilon=\nu\left\langle\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\right)^2\right\rangle \tag{4.13}$$

$$\nu_t=C_d\frac{k^2}{\varepsilon} \tag{4.14}$$

Όπου, $\sigma_k=1.0$, $\sigma_\varepsilon=1.3$, $C_{1\varepsilon}=1.44$, $C_{2\varepsilon}=1.92$ εμπειρικοί συντελεστές. Ο συντελεστής C_d αποτελεί επίσης εμπειρική έκφραση και δίνεται από τη σχέση (4.18). Η χρήση του μοντέλου k-ε από τους Lin & Liu, 1998 έγινε σε συνδυασμό με την υπόθεση ανισοτροπικού συντελεστή τυρβώδους διάχυσης και τις οριακές συνθήκες που περιγράφονται στην ενότητα 4.2.3. Η προσομοίωση της θραύσης στις εξισώσεις RANS γίνεται με τη χρήση του μοντέλου τύρβης k-ε. Προσεγγίζεται μέσω ενός μοντέλου δημιουργίας, μείωσης και μεταφοράς της τυρβώδους κινητικής ενέργειας. Το μοντέλο που προτάθηκε από τους Lin & Liu, 1998 αποτελεί μια τέτοια προσέγγιση με βελτιώσεις στο πεδίο ταχυτήτων, τυρβώδους συνιστώσας και μέσης ροής. Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι εναλλακτικές προσεγγίσεις των τάσεων Reynolds που προσφέρονται από το μοντέλο. Από αυτές εδώ χρησιμοποιείται η χρήση του μη γραμμικού μοντέλου (B).

Μοντέλα τάσεων Reynolds

A. Υπόθεση ισοτροπικού συντελεστή τυρβώδους διάχυσης - Γραμμικό μοντέλο *(linear closure model)*

Χαρακτηριστικά, η τυρβώδης συνεκτικότητα, ν_t αποτελεί σταθερή και γνωστή παράμετρο.

$$\left\langle u_i' u_j' \right\rangle = -2\nu_t \sigma_{ij} + \frac{2}{3} k \delta_{ij} \tag{4.15}$$

Όπου δ_{ij} το δέλτα του Kronecker.

B. Υπόθεση μη ισοτροπικού συντελεστή τυρβώδους διάχυσης - Μη γραμμικό μοντέλο *(non linear closure model)*

Η συγκεκριμένη προσέγγιση αναλύεται από τους Lin & Liu, 1998 και αναπτύχθηκε από τους Shih, Zhu & Lumley, 1996. Με αυτή παύει η άμεση συνάρτηση των τάσεων Reynolds από την τυρβώδη συνεκτικότητα και προστίθενται όροι (k/ε) ανώτερης τάξης.

$$\begin{aligned}\left\langle u_i' u_j' \right\rangle = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - C_d \frac{k^2}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right) \\ - \frac{k^3}{\varepsilon^2} \left[\begin{array}{l} C_1 \left(\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_l} \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_l} \frac{\partial \langle u_l \rangle}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \langle u_l \rangle}{\partial x_k} \frac{\partial \langle u_k \rangle}{\partial x_l} \delta_{ij} \right) \\ + C_2 \left(\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_k} \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_k} - \frac{1}{3} \frac{\partial \langle u_l \rangle}{\partial x_k} \frac{\partial \langle u_l \rangle}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \\ + C_3 \left(\frac{\partial \langle u_k \rangle}{\partial x_i} \frac{\partial \langle u_k \rangle}{\partial x_j} - \frac{1}{3} \frac{\partial \langle u_l \rangle}{\partial x_k} \frac{\partial \langle u_l \rangle}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \end{array} \right]\end{aligned} \tag{4.16}$$

Όπου δ_{ij} το δέλτα του Kronecker και οι συντελεστές C_1, C_2, C_3 ορίζονται σύμφωνα με τους Lin & Liu, 1998 από τη σχέση (4.17). Εναλλακτικά, παίρνουν τιμές C_1=0.0054, C_2= -0.0171, C_3=0.0027. Γενικότερα όμως δεν προτείνεται η διατήρηση σταθερών συντελεστών αλλά η χρήση των παρακάτω σχέσεων. Περισσότερα για την εκτίμηση των συντελεστών αυτών υπάρχουν στις εργασίες των Liu & Lin, 1997, Lin & Liu 1998. Εν συντομία η τροποποίηση των εμπειρικών συντελεστών εξασφαλίζει το μη αρνητικό πρόσημο της τυρβώδους συνιστώσας της ταχύτητας και της δεσμευμένης τάσης Reynolds (Lin, 1998).

$$\begin{gathered} C_1 = \frac{1}{185.2 + D_{\max}^2}, C_2 = -\frac{1}{58.5 + D_{\max}^2}, C_3 = \frac{1}{370.4 + D_{\max}^2} \\ D_{\max} = \frac{k}{\varepsilon} \max\left(\left| \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_i} \right| \right) \end{gathered} \tag{4.17}$$

$$C_d = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{7.4 + \sigma_{\max}} \right), \qquad \sigma_{\max} = \frac{k}{\varepsilon} \max\left(\left| \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_i} \right| \right) \tag{4.18}$$

Για $C_1=C_2=C_3=0$ το μη γραμμικό μοντέλο συμπίπτει με το γραμμικό και η τυρβώδης συνεκτικότητα εκφράζεται από την σχέση (4.14).

Γ. Μοντέλο k-l *(mixing length model)*

Η κεντρική ιδέα του μοντέλου αυτού εστιάζεται στην υπόθεση ότι η διασπορά της τυρβώδους κινητικής ενέργειας γίνεται κατά παρόμοιο τρόπο με τη μοριακή διασπορά. Η κλίμακα μήκους αποτελεί συνάρτηση του γινομένου κy. Ο τρόπος αυτός προσέγγισης αποτελεί πρόταση του Prandtl, 1925, αν και ο ίδιος εμφανιζόταν επιφυλακτικός στη χρήση του. Η παρεμφερής προσέγγιση του Rodi, 1980 παρουσιάζεται παρακάτω, για τη χρήση της στις RANS. Το μοντέλο αυτό παρουσιάζεται ως αποτελεσματικό σε απλές περιπτώσεις ροής. Ωστόσο δεν έχει δυνατότητα προσομοίωσης των φαινομένων μετάθεσης της τύρβης, που συμβαίνουν σε εντονότερα τυρβώδεις ροές.

$$l = \kappa y\left[1-\exp\left(-\frac{y\sqrt{\tau_w/\rho}}{26\nu}\right)\right] \tag{4.19}$$

$$\frac{\partial k}{\partial t}+\langle u_j\rangle\frac{\partial k}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\nu_t}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial x_j}\right]+2\sigma_{ij}\nu_t\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_j}-C_d\frac{k^{3/2}}{l} \tag{4.20}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+\langle u_j\rangle\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}+\nu\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right]+2C_{1\varepsilon}\frac{\varepsilon}{k}\nu_t\sigma_{ij}\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_j}-C_{2\varepsilon}\frac{\varepsilon^2}{k} \tag{4.21}$$

Όπου l, η κλίμακα μήκους ανάμιξης, $\kappa=0,41$ η σταθερά του von Karman, y η συντεταγμένη του κάθετου άξονα και τ_w η διατμητική τάση $\tau_w=\rho u_*^2$, για την οποία η ταχύτητα μπορεί να εκτιμηθεί είτε υποθέτοντας λογαριθμική κατανομή είτε από τη σχέση $k=u_*^2/\sqrt{C_d}$.

Δ. Μοντέλο τανυστή Reynolds *(Reynolds tensor model)*

Κατά παρόμοιο τρόπο με την παραγωγή των σχέσεων του μοντέλου k-ε, παράγεται και η σχέση (4.22), με σημείο εκκίνησης την εξίσωση κίνησης. Στο αριστερό μέλος της σχέσης (4.22) βρίσκονται ο ρυθμός μεταβολής και ο όρος μετάθεσης (*convective transport*) των τάσεων Reynolds. Αυτά εξισώνονται τον όρο διάχυσης (*diffusive transport*) των τάσεων (πρώτος και δεύτερος όρος δεξιού μέλους), την παραγωγή τάσεων (*stress production*, τρίτος και τέταρτος όρος), την πίεση λόγω τάσεων (*pressure strain*, πέμπτος όρος) και την απόσβεση τυρβώδους κινητικής ενέργειας (*viscous dissipation*, έκτος όρος).

$$\begin{aligned}\frac{\partial\langle u_i'u_j'\rangle}{\partial t}+\langle u_l\rangle\frac{\partial\langle u_i'u_j'\rangle}{\partial x_l}&=-\frac{\partial}{\partial x_l}\langle u_l'u_i'u_j'\rangle-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\langle u_j'p\rangle}{\partial x_i}+\frac{\partial\langle u_i'p\rangle}{\partial x_j}\right)\\&-\langle u_i'u_l'\rangle\frac{\partial\langle u_j\rangle}{\partial x_l}-\langle u_j'u_l'\rangle\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_l}+\left\langle\frac{p\sigma_{ij}}{\rho}\right\rangle\\&-2\nu\left\langle\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\frac{\partial u_j}{\partial x_l}\right\rangle\end{aligned} \tag{4.22}$$

Το μοντέλο αυτό, όπως και το προηγούμενο, αναπτύχθηκαν σε εργασία του Rodi, 1980.

4.2.3. Οριακές συνθήκες

Οριακή συνθήκη στερεού ορίου

Η πρώτη συνθήκη που χαρακτηρίζει τη μέση ροή είναι η κινηματική συνθήκη μη ολίσθησης του στερεού ορίου και ισχύει τόσο για τις μέσες τιμές όσο για τις αποκλίσεις της ταχύτητας. Αν U_i η ταχύτητα του στερεού ορίου

$$u_i = U_i \tag{4.23}$$

Ουσιαστικά συμπίπτει με την οριακή συνθήκη πυθμένα που αναλύθηκε στο κεφάλαιο των εξισώσεων τύπου Boussinesq.

Οριακές συνθήκες ελεύθερης επιφάνειας

Αναφορικά με τη μέση στάθμη στις περιπτώσεις τυρβώδους ροής στο οριακό στρώμα μεταξύ νερού και αέρα δημιουργείται μια διεπιφάνεια η οποία χαρακτηρίζεται από μια μέση πυκνότητα που παίρνει τιμές από αυτή του νερού μέχρι αυτή του αέρα. Η δυσκολία ορισμού των ιδιοτήτων αυτού του στρώματος αναγκάζει τη θεώρηση αυτής της διεπιφάνειας ως γραμμή και οι οριακές συνθήκες σε αυτή αντιστοιχούν στις οριακές συνθήκες της στρωτής ροής.

Στο οριακό στρώμα νερού - στερεού ορίου η εφαπτομενική ταχύτητα αποκτά μια λογαριθμική κατανομή, όπου οι μεταβλητές k,ε είναι ουσιαστικά συναρτήσεις της απόστασης από το στερεό όριο. Στην ελεύθερη επιφάνεια για τις k,ε ισχύει η συνθήκη μηδενικής βαθμίδας και θα αναλυθεί περεταίρω στη συνέχεια αυτής της ενότητας.

Μια πρώτη συνθήκη για την ελεύθερη επιφάνεια εκφράζει την συνέχεια των διατμητικών τάσεων,

$$p - \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) n_i n_j = \tau_n \tag{4.24}$$

Όπου τ_n η τάση που ασκείται στην ελεύθερη επιφάνεια.

Οριακή συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας

Η κινηματική συνθήκη για την ελεύθερη επιφάνεια εκφράζεται από την εξίσωση,

$$\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial t} + \langle u_i\rangle\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial x_i} = 0 \tag{4.25}$$

Από τη την (4.25) γίνεται αντιληπτό ότι η συνάρτηση ρ εξαλείφεται στο επίπεδο της ελεύθερης στάθμης. Με την επίδραση της τύρβης αυτή τροποποιείται με την εισαγωγή ενός όρου που συσχετίζει διακυμάνσεις ταχύτητας και πυκνότητας (Liu & Lin, 1997).

$$\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial t}+\langle u_i\rangle\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial x_i}=-\frac{\partial\langle u_i'\rho'\rangle}{\partial x_i} \tag{4.26}$$

Ωστόσο επειδή επιλέχθηκε να αμεληθούν οι όροι ρ', ισχύει η εξίσωση (4.25).

Οριακές συνθήκες για τις μοντέλου k,ε

Θεωρώντας ότι δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις στην ελεύθερη επιφάνεια, συνθήκη για τις τιμές των k, ε αποτελεί η μηδενική διασπορά της τύρβης εκτός του υδάτινου σώματος. Συνεπώς, θεωρητικά, έπεται ο μηδενισμός τους στην ελεύθερη επιφάνεια.

$$\frac{\partial k}{\partial x_i}n_i=0,\qquad \frac{\partial\varepsilon}{\partial x_i}n_i=0 \tag{4.27}$$

Όπου n_i μοναδιαίο διάνυσμα με διεύθυνση κάθετη στην x_i, φορά προς τα έξω. Πρακτικά όμως οι οριακές συνθήκες αναδιατυπώνονται για την αποτελεσματική επίλυση του συστήματος. Αυτές προκύπτουν θεωρώντας ότι οι τάσεις κάθετες στη ροή παραμένουν σταθερές. Η οριακή συνθήκη διαφορική εξίσωση εκφράζεται ως,

$$-\frac{\langle u'v'\rangle}{\partial y}+\nu\frac{\partial^2\langle u\rangle}{\partial y^2}=0 \tag{4.28}$$

Σε συνέχεια αυτής προκύπτουν,

$$\varepsilon=-\langle u'v'\rangle\frac{d\langle u\rangle}{dy}=\frac{u_*^3}{ky} \tag{4.29}$$

$$k=\frac{u_*^2}{\sqrt{C_d}} \tag{4.30}$$

Η ταχύτητα u_* αντιστοιχεί σε μια ταχύτητα τριβής που για γνωστό πεδίο ταχυτήτων μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση, (για λείο στερεό όριο: $E=9.0$, κ - σταθερά von Karman)

$$\frac{\langle u\rangle}{u_*}=\frac{1}{\kappa}\left(E\frac{u_*y}{\nu}\right) \tag{4.31}$$

Αρχικές συνθήκες

Στις περισσότερες των περιπτώσεων χρησιμοποιείται η υπόθεση ότι το σύστημα αρχικά βρίσκεται σε κατάσταση ηρεμίας, με την μέση ταχύτητα σε κάθε σημείο της ροής να είναι ίση με μηδέν και την πίεση ίση με την υδροστατική. Στην περίπτωση της τυρβώδους ροής τούτο αλλάζει. Με μια σειρά αριθμητικών πειραμάτων οι Lin, 1998, Lin & Liu, 1998, διερεύνησαν τις αρχικές τιμές των k-ε για μια τέτοια περίπτωση. Δεδομένης μιας ταχύτητας φάσης c_i είναι,

$$k = \frac{1}{2}u'^2, \qquad u' = \delta c_i$$
$$\varepsilon = C_d \frac{k^2}{\nu_t}, \qquad \nu_t = \xi \nu \tag{4.32}$$

Όπου δ=0,0025 και ξ=0,1.

4.3. Εξισώσεις Volume Averaged Reynolds Averaged Navier-Stokes

Η εισαγωγή των εξισώσεων ροής ολοκληρωμένων ως προς ένα όγκο έγινε για την επίλυση του πεδίου ροής εντός ενός πορώδους που χαρακτηρίζεται από τυχαία γεωμετρικά χαρακτηριστικά. Ο όγκος στον οποίο ολοκληρώνονται οι εξισώσεις απαιτείται να είναι μεγαλύτερος του χαρακτηριστικού μεγέθους των πόρων και πολύ μικρότερος της κλίμακας των χωρικών διακυμάνσεων που παρουσιάζουν οι φυσικές μεταβλητές του προβλήματος. Οι εξισώσεις RANS και το μοντέλο τύρβης *k-ε* που παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη ενότητα ολοκληρώνονται ως τον όγκο του ενεργού πορώδους, V_f. Χρησιμοποιώντας την αρχή των εξισώσεων (4.3) και (4.4) οι εξισώσεις (4.6) και (4.7) τροποποιούνται, ενώ για την εξίσωση ορμής ακολουθεί ένας ακόμη μετασχηματισμός δεδομένης της σχέσης (4.2). Τελικά προκύπτουν οι εξισώσεις (4.34) και (4.37) που αποτελούν και τις εξισώσεις VARANS. Δεδομένης λοιπόν της ύπαρξης του πορώδους, n αρχικά ας θεωρηθεί η σχέση μεταξύ ολοκλήρωσης ως προς τον όγκο και αυτής ως προς τον εγγενή όγκο.

$$\langle a \rangle = n \langle a \rangle^f$$
$$n = V_f / V \tag{4.33}$$

Έπειτα οι εξισώσεις συνέχειας και ορμής αντίστοιχα είναι,

$$\frac{\partial \langle \bar{u} \rangle_i}{\partial x_i} = 0 \tag{4.34}$$

$$\frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle}{\partial t} + \frac{1}{n}\frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle \langle \bar{u}_j \rangle}{\partial x_j} = -\frac{n}{\rho}\frac{\partial \langle \bar{p} \rangle^f}{\partial x_i} - \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \langle \bar{\tau}_{ij} \rangle}{\partial x_j} + n g_i$$
$$- \frac{\partial \overline{u_i'' u_j''}}{\partial x_j} + \frac{1}{V}\int_{A_{\text{int}}} \left[\frac{\bar{P}}{\rho}\delta_{ij} + \frac{\bar{\tau}_{ij}}{\rho} \right] n_j dA \tag{4.35}$$

Οι δύο τελευταίοι όροι της εξίσωσης (4.35) δίνονται από τη σχέση (*van Gent, 1994, Liu et al., 1999*),

$$-\frac{\partial \overline{u_i'' u_j''}}{\partial x_j}+\frac{1}{V}\int_{A_{\text{int}}}\left[\frac{\overline{P}}{\rho}\delta_{ij}+\frac{\overline{\tau}_{ij}}{\rho}\right]n_j dA=-\left[\begin{array}{l}\frac{\alpha v(1-n)^2}{n^2 D_{50}^2}\langle\overline{u}_i\rangle+\\ \frac{\beta(1-n)}{n^2 D_{50}}\langle\overline{u}_i\rangle\sqrt{\langle\overline{u}_1\rangle^2+\langle\overline{u}_2\rangle^2}+\\ c_A\frac{\partial\langle\overline{u}_i\rangle}{\partial t}\end{array}\right] \quad (4.36)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (4.35) και (4.36) προκύπτει η τελική εξίσωση ορμής,

$$\frac{\partial\langle\overline{u}_i\rangle}{\partial t}+\frac{1}{n(1+c_A)}\frac{\partial\langle\overline{u}_i\rangle\langle\overline{u}_j\rangle}{\partial x_j}=\frac{1}{(1+c_A)}\left[-\frac{n}{\rho}\frac{\partial\langle\overline{p}\rangle^f}{\partial x_i}-\frac{\partial\langle\overline{u_i' u_j'}\rangle}{\partial x_j}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\langle\overline{\tau}_{ij}\rangle}{\partial x_j}+ng_i\right]$$
$$-\frac{1}{(1+c_A)}\left[\frac{\alpha v(1-n)^2}{n^2 D_{50}^2}\langle\overline{u}_i\rangle+\frac{\beta(1-n)}{n^2 D_{50}}\langle\overline{u}_i\rangle\sqrt{\langle\overline{u}_1\rangle^2+\langle\overline{u}_2\rangle^2}\right] \quad (4.37)$$

Όπου c_A, ένας συντελεστής προσθήκης μάζας, n το ενεργό πορώδες το οποίο θεωρείται σταθερό για το σύστημα εξισώσεων που παρουσιάζεται εδώ, D_{50} η μέση διάμετρος πόρων του υλικού, u_i'' η χωρική διακύμανση της i συνιστώσας της ταχύτητας και με παύλα δηλώνεται η ολοκλήρωση ως προς το χώρο (χωρικός μέσος). Οι μεταβλητές α και β αποτελούν εμπειρικές παραμέτρους που αναφέρονται σε μια γραμμική και μια μη γραμμική δρώσα δύναμη αντίστοιχα. Η χρήση τους εδώ βασίζεται στις εργασίες των *van Gent, 1999*, Liu et al., 1999. Ένα από τα συμπεράσματα των *Hsu et al. 2002* αφορά τη χρήση των παραμέτρων αυτών, προτείνοντας την περεταίρω διερεύνηση τους για την περίπτωση σχετικά μεγάλης διαμέτρου πόρων.

$$c_A=\gamma_p\frac{1-n}{n},\gamma_p=0.34$$
$$\alpha=200$$
$$\beta=1.1$$

Η εξίσωση ορμής κλείνει με την προσθήκη του μη γραμμικού μοντέλου για τον τανυστή τάσεων Reynolds (εξίσωση (4.16)) ολοκληρωμένου ως προς τον όγκο.

$$\left\langle \overline{u_i' u_j'} \right\rangle = \frac{2}{3}\langle k \rangle \delta_{ij} - C_d \frac{\langle k \rangle^2}{n\langle \varepsilon \rangle}\left(\frac{\partial \langle \overline{u_i} \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \overline{u_j} \rangle}{\partial x_i} \right)$$
$$-\frac{\langle k \rangle^3}{n^2 \langle \varepsilon \rangle^2}\left[\begin{array}{l} C_1\left(\frac{\partial \langle \overline{u}_i \rangle}{\partial x_l}\frac{\partial \langle \overline{u}_j \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \overline{u}_j \rangle}{\partial x_l}\frac{\partial \langle \overline{u}_l \rangle}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial \langle \overline{u}_l \rangle}{\partial x_k}\frac{\partial \langle \overline{u}_k \rangle}{\partial x_l}\delta_{ij} \right) \\ +C_2\left(\frac{\partial \langle \overline{u}_i \rangle}{\partial x_k}\frac{\partial \langle \overline{u}_j \rangle}{\partial x_k} - \frac{1}{3}\frac{\partial \langle \overline{u}_l \rangle}{\partial x_k}\frac{\partial \langle \overline{u}_l \rangle}{\partial x_k}\delta_{ij} \right) \\ +C_3\left(\frac{\partial \langle \overline{u}_k \rangle}{\partial x_i}\frac{\partial \langle \overline{u}_k \rangle}{\partial x_j} - \frac{1}{3}\frac{\partial \langle \overline{u}_l \rangle}{\partial x_k}\frac{\partial \langle \overline{u}_l \rangle}{\partial x_k}\delta_{ij} \right) \end{array} \right] \quad (4.38)$$

Όπου οι συντελεστές C_d, C_1, C_2, C_3 ορίζονται από τις εξισώσεις (4.18), (4.17) και $\sigma_k=1.0$, $\sigma_\varepsilon=1.3$, $C_{1\varepsilon}=1.44$, $C_{2\varepsilon}=1.92$ Επίσης και εδώ, αντιστοίχως ορίζονται,

$$\sigma_{\max} = \frac{\langle k \rangle}{\langle \varepsilon \rangle}\max\left\{ \left| \frac{\partial \langle \overline{u}_i \rangle}{\partial x_i} \right| \right\}$$
$$D_{\max} = \frac{\langle k \rangle}{\langle \varepsilon \rangle}\max\left\{ \left| \frac{\partial \langle \overline{u}_i \rangle}{\partial x_j} \right| \right\} \quad (4.39)$$

Το τυρβώδες κινηματικό ιξώδες της εξίσωσης (4.14) ολοκληρωμένο ως προς τον όγκο είναι,

$$\langle \nu_t \rangle = C_d \frac{\langle k \rangle^2}{n\langle \varepsilon \rangle} \quad (4.40)$$

Ακολουθώντας τον ορισμό της εξίσωσης (4.2) ορίζονται οι ολοκληρωμένες κατά όγκο μεταβλητές της τυρβώδους κινητικής ενέργειας, k και του ρυθμού απόσβεσης της, ε. Το ενεργειακό ισοζύγιο κατά αντιστοιχία με αυτό των εξισώσεων RANS καθορίζει τις τιμές των $\langle k \rangle, \langle \varepsilon \rangle$. Η ανάπτυξη της εξίσωσης ισορροπίας του ρυθμού απόσβεσης (ε) αποτελεί πρόταση με βάση εμπειρική εφαρμογή (*Hsu et al., 2002, Pope, 2000*) και οι συντελεστές που περιέχονται στην εξίσωση (4.42) έχουν αξιολογηθεί μόνο για την περίπτωση απλών συνθηκών ροής. Σε περιπτώσεις υψηλά ασταθούς και ανομοιογενούς πεδίου ροής το μοντέλο τύρβης που χρησιμοποιείται παρουσιάζει την τάση να υπερεκτιμά την τύρβη σε περιοχές που αναμένονται χαμηλότερες εκδηλώσεις τύρβης μετά από μεγάλες υπολογιστικές περιόδους (*Hsu et al.*). Όπως εικάζεται από την ίδια εργασία των Hsu et al. αυτό μπορεί να οφείλεται στους μηχανισμούς μετάθεσης και διασποράς του μοντέλου. Προτάσεις για περεταίρω διερεύνηση του προβλήματος αυτού μπορεί να βρει κανείς στο παράρτημα των *Hsu et al., 2002*.

$$\frac{\partial\langle k\rangle}{\partial t}+\frac{\langle u_j\rangle}{n}\frac{\partial\langle k\rangle}{\partial x_j}=-\frac{\langle\overline{u_i'u_j'}\rangle}{n}\frac{\partial\langle\bar{u}_i\rangle}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\nu+\frac{\langle\nu_t\rangle}{\sigma_k}\right)\frac{\partial\langle k\rangle}{\partial x_j}\right]-\langle\varepsilon\rangle+n\varepsilon_\infty \tag{4.41}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\langle\varepsilon\rangle}{\partial t}+\frac{\langle\bar{u}_j\rangle}{n}\frac{\partial\langle\varepsilon\rangle}{\partial x_j}&=-C_{1\varepsilon}\frac{\langle\varepsilon\rangle}{n\langle k\rangle}\langle\overline{u_i'u_j'}\rangle\frac{\partial\langle\bar{u}_i\rangle}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\frac{\langle\nu_t\rangle}{\sigma_k}+\nu\right)\frac{\partial\langle\varepsilon\rangle}{\partial x_j}\right]\\&\quad-C_{2\varepsilon}\frac{\langle\varepsilon\rangle^2}{\langle k\rangle}+nC_{2\varepsilon}\frac{\varepsilon_\infty^2}{k_\infty}\end{aligned} \tag{4.42}$$

Οι όροι k_∞ και ε_∞ αποτελούν πρόσθετες πήγες τύρβης οφειλόμενες στην παρουσία πορώδους υλικού. Αντιπροσωπεύουν την τύρβη μικρής κλίμακας (μικρότερης του όγκου ολοκλήρωσης). Η εκτίμηση τους γίνεται με βάση τους Nakayama & Kuwahara (1999) από τις σχέσεις,

$$\varepsilon_\infty=39\frac{(1-n)^{5/2}}{n}\left(\langle\bar{u}_1\rangle^2+\langle\bar{u}_2\rangle^2\right)^{3/2}\frac{1}{D_{50}} \tag{4.43}$$

$$k_\infty=3.7\frac{(1-n)}{\sqrt{n}}\left(\langle\bar{u}_1\rangle^2+\langle\bar{u}_2\rangle^2\right) \tag{4.44}$$

Οι τιμές των δύο αυτών όρων γίνονται υπολογίσιμες για αριθμούς Reynolds που αντιστοιχούν σε υψηλό ενεργό πορώδες, ενώ είναι αμελητέες για αριθμούς Reynolds που αντιστοιχούν σε μικρό ενεργό πορώδες. Για την ποσοτικοποίηση της ροής ο αριθμός Reynolds ως προς το πορώδες (Re_p) ορίζεται ως,

$$\mathrm{Re}_p=\frac{D_{50}|U|}{\nu} \tag{4.45}$$

Όπου $|U|$ μια τυπική κλίμακα ταχύτητας. Το σύστημα εξισώσεων VARANS που αναπτύχθηκε στην ενότητα αυτή έχει αξιολογηθεί με αναφορά σε πειράματα των Nakayama και Kuwaharam για την περίπτωση μεγάλων Re_p ενώ η εφαρμογή του στις περιπτώσεις μικρών Re_p γίνεται χωρίς διορθώσεις και κρίνεται ως ικανοποιητική (Hsu et al., 2002).

4.4. Μεταφορά μάζας

Στην περίπτωση που υπάρχει εισαγωγή μιας ουσίας στο πεδίο το ομοίωμα, η τύχη αυτής στο πεδίο εξαρτάται από τους μηχανισμούς μετάθεσης, διασποράς και το βαθμό στον οποίο μεταβάλλεται η ποσότητα της ουσίας ως αποτέλεσμα της χημικής μεταβολής της. Συνήθως η περιγραφή της κινητικής της αντίδρασης σε τέτοιες περιπτώσεις αρκείται στο αν υπάρχει φθορά της ουσίας κατά ένα ρυθμό $C\cdot e^{-kt}$ (*k: σταθερά*). Στην περίπτωση του συγκεκριμένου υπολογιστικού ομοιώματος θεωρείται ότι η συγκέντρωση της ουσίας δε μεταβάλλεται (συντηρητική).

$$\frac{\partial\langle c\rangle}{\partial t}+\langle u_j\rangle\frac{\partial\langle c\rangle}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\nu_c\frac{\partial\langle c\rangle}{\partial x_j}\right]-\frac{\partial}{\partial x_j}\langle u_j'c'\rangle \tag{4.46}$$

Όπου *c*, συγκέντρωση της υπό εξέταση ουσίας, v_c, το τυρβώδες ιξώδες και u_j' η διακύμανση της j συνιστώσας της ταχύτητας και *c'* η απόκλιση από την μέση συγκέντρωση. Ο τέταρτος όρος της εξίσωσης (4.46) δίνεται ως εξής,

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left\langle u_j' c' \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[v_{tc} \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial x_j} \right] \tag{4.47}$$

Όπου $v_{tc}=c_{tc}v_t$, $c_{tc}\approx 1$

Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας δεν θα απασχολήσει το συγκεκριμένο εδάφιο μιας και δεν εξετάζονται ποιοτικά χαρακτηριστικά του νερού. Για τον λόγο αυτό δεν θα γίνει περεταίρω αναφορά σε τέτοια φαινόμενα μεταφοράς.

4.5. Εισαγωγή αρχικής διαταραχής

Για την αναπαραγωγή ενός αρχικού επιθυμητών χαρακτηριστικών κυματισμού εισάγεται ένας όρος μάζας, *s(x,y,t)* στην εξίσωση διατήρησης της μάζας (4.6). Δηλαδή η εξίσωση συνέχειας αναδιατυπώνεται ως εξής,

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_i} = s(x, y, t) \tag{4.48}$$

Ο όρος αυτός της συνάρτησης πηγής είναι μη μηδενικός για μια υποπεριοχή (Ω) εντός της γενικότερης περιοχής για την οποία ορίζονται οι βασικές εξισώσεις συνέχειας και κίνησης. Στην αριθμητική επίλυση των RANS, η περιοχή της συνάρτησης πηγής ορίζεται ως ένα ορθογώνιο πλέγμα (kxl) εντός του υπολογιστικού πεδίου (mxn). Η σχέση μεταξύ του όρου μάζας και της ανύψωσης ελεύθερης επιφάνειας δίνεται (Lin & Liu, 1999),

$$\int_0^t \int_\Omega s(x, y, t) d\Omega dt = 2\int_0^t c_0 \zeta(t) dt \tag{4.49}$$

Όπου C_0 η ταχύτητα φάσης του κύματος στην περιοχή αναπαραγωγής. Ο όρος μάζας ορίζεται με διαφορετικό τρόπο για μονοχρωματικά κύματα, κυματισμούς Stokes (2ης και 5ης τάξης), κύματα ελλειπτικού συνημίτονου, «μοναχικά» κύματα και τυχαίους κυματισμούς. Σε κάθε περίπτωση προκύπτει ως αποτέλεσμα της εξίσωσης (4.49) για δεδομένη συνάρτηση *ζ(t)*. Η παραγόμενη διαταραχή μεταδίδεται από τη θέση της πηγής προς τις δύο κατευθύνσεις (δεξιά και αριστερά της πηγής).

Αρχική διαταραχή βάσει της γραμμικής θεωρίας

Σύμφωνα με την γραμμική θεωρία η εξίσωση ελεύθερης επιφάνειας ορίζεται από την εξίσωση (1.10). Η μορφή αυτής με μόνη εξαρτημένη μεταβλητή το χρόνο είναι,

$$\zeta(t) = \frac{H}{2}\sin(\omega t) \tag{4.50}$$

Συνακόλουθα όρος πηγής δίνεται ως,

$$s(t) = \frac{cH}{A}\sin(\omega t) \tag{4.51}$$

Όπου *A* η περιοχή στην οποία εισάγεται η συνάρτηση πηγής (δηλαδή kxl).

Αρχική διαταραχή βάσει των επεκτάσεων της θεωρίας Stokes

Η εξίσωση ελεύθερης επιφάνειας περιγράφεται από τους Skjelbreia & Hendrickson, 1961. Σύμφωνα με αυτούς μπορεί να αναλυθεί σε *n* όρους τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Όπου *n* η τάξη της επέκτασης της θεωρίας Stokes που χρησιμοποιείται.

$$\zeta(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cos\left(i(\tfrac{\pi}{2} - \omega t - \theta_i)\right) \tag{4.52}$$

Συνεπώς η συνάρτηση πηγής δίνεται ως,

$$s(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{2c}{A} a_i \cos\left(i(\tfrac{\pi}{2} - \omega t - \theta_i)\right) \tag{4.53}$$

Αρχική διαταραχή κυμάτων ελλειπτικού συνημίτονου

Όπως αναφέρθηκε και στο πρώτο κεφάλαιο τα κύματα ελλειπτικού συνημίτονου και τα μοναχικά κύματα αποτελούν περιπτώσεις μακρών κυμάτων. Τα πρώτα εφαρμόζονται για μια τάξη σχετικού βάθους, *kd < O(1)*. Σύμφωνα με τον Wiegel, 1960 η συνάρτηση ελεύθερης επιφάνειας δίνεται από την εξίσωση (4.54), ενώ η αντίστοιχη συνάρτηση πηγής από την εξίσωση (4.55).

$$\zeta(t) = y_t + Hcn^2\left[2K(m)(-\tfrac{t}{T} + \theta_i)\right] \tag{4.54}$$

$$s(t) = \frac{2cH}{A}\left(\frac{y_t}{H} + cn^2\left[2K(m)(-\tfrac{t}{T} + \theta_i),\ m\right]\right) \tag{4.55}$$

Όπου y_t η απόσταση της μέσης στάθμης της θάλασσας από τη μέση στάθμη ηρεμίας, *K(m)* το ελλειπτικό πρώτο ολοκλήρωμα με μέτρο m και *cn* η Ιακωβιανή (*Jacobian elliptic function*) ελλειπτική συνάρτηση.

Αρχική διαταραχή βάσει της θεωρίας «μοναχικού κύματος»

Η εξίσωση ελεύθερης επιφάνειας σε αυτή την περίπτωση είναι,

$$\zeta(t) = H\sec h^2\left(\sqrt{\frac{3H}{4d^3}}(x_s - ct)\right) \tag{4.56}$$

Η αντίστοιχη συνάρτηση πηγής είναι,

$$s(t) = \frac{cH}{A}\sec h^2\left(\sqrt{\frac{3H}{4d^3}}(x_s - ct)\right) \tag{4.57}$$

Όπου x_s η θέση στην περιοχή της πηγής της διαταραχής. Χρησιμοποιείται έτσι ώστε $s(t) \to 0$ όταν *t=0*.

Αρχική διαταραχή τυχαίων κυματισμών

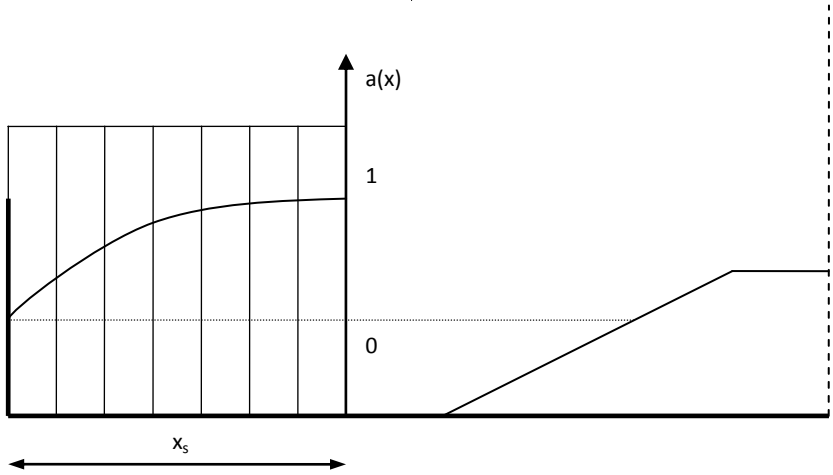
Για την αναπαραγωγή τυχαίων κυματισμών θεωρείται ότι αυτοί συνίστανται μιας σειράς γραμμικών κυμάτων με χαρακτηριστικά την συχνότητα, το ύψος κύματος και τη γωνία φάσης. Ξεκινώντας από ένα δεδομένο ενεργειακό φάσμα με ανάλυση Fourier μπορεί να παραχθεί η σύνθεση των κυμάτων αυτών. Αν *n* ο αριθμός των γραμμικών συνιστωσών η συνάρτηση πηγής είναι,

$$s(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i H_i}{A} \sin(\omega_i t + \theta_i) \tag{4.58}$$

4.6. Απορροφητικό όριο

Στο ανοικτό όριο εφαρμόζεται ένα απορροφητικό στρώμα. Στόχος η έξοδος από το υπολογιστικό πεδίο των παραγόμενων αρχικών διαταραχών (με κατεύθυνση προς τα αριστερά) και των ανακλώμενων κυμάτων. Η εφαρμογή του απορροφητικού ορίου περιγράφεται από τους Larsen & Dancy (1983). Συνίσταται στην δημιουργία ενός συντελεστή a(x), εντός ενός στρώματος με μήκος, x_s για κάθε χρονικό βήμα. Ο συντελεστής αυτός ξεκινώντας από την τιμή 1 μειώνεται προς το 0 όσο πλησιάζει προς το τέλος του στρώματος. Το μήκος του απορροφητικού στρώματος για μονοχρωματικούς κυματισμούς προτείνεται ίσο με τουλάχιστον 2L (μήκος κύματος). Ο συντελεστής απορρόφησης περιγράφεται από την εξίσωση (4.59).

$$a(x) = \sqrt{1 - \left(\frac{x - x_1}{x_s} \right)^2} \tag{4.59}$$



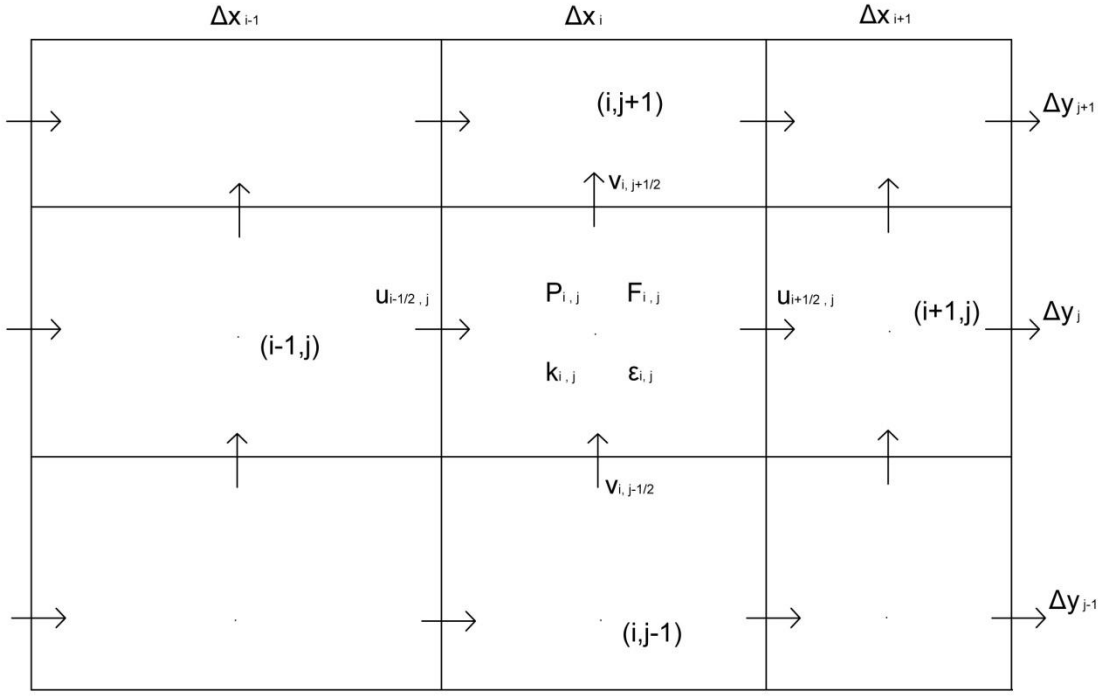
Σχήμα 4.1 Εφαρμογή απορροφητικού ορίου, μεταβολή του συντελεστή a(x)

4.7. Αριθμητικό σχήμα επίλυσης εξισώσεων RANS και VARANS

Η επίλυση του προβλήματος περιορίζεται στο δισδιάστατο επίπεδο. Το υπολογιστικό πεδίο περιγράφεται από έκκεντρο πλέγμα διαστάσεων (*mxn*). Στο

κέντρο κάθε κελιού αναφέρονται τα βαθμωτά μεγέθη. Στα όρια κάθε κελιού αναφέρονται τα διανυσματικά μεγέθη. Η αριθμητική επίλυση των εξισώσεων RANS γίνεται χρησιμοποιώντας μια μέθοδο προβολής δύο βημάτων (*two step projection method*) όπως αναπτύχθηκε και παρουσιάστηκε στις εργασίες του Chorin (1968, 1969). Για την επίλυση της εξίσωσης Poisson (πεδίο μέσων πιέσεων) η μέθοδος αυτή υποβοηθείται από την τεχνική Cholesky της συζυγούς βαθμίδας (*Cholesky conjugate gradient technique*). Οι χρονικές παράγωγοι διακριτοποιούνται με μέθοδο εμπρόσθιας (στο χρόνο) διαφοράς, οι όροι μετάθεσης με μια υβριδική μέθοδο που συνδυάζει αυτές των κεντρικών διαφορών και του σχήματος upwind. Οι όροι που περιέχουν τις βαθμίδες πίεσης και τάσεων διακριτοποιούνται με μια μέθοδο κεντρικών διαφορών.

Η ροή της επίλυσης περιλαμβάνει αρχικά τον υπολογισμό των ταχυτήτων από την εξίσωση (4.60). Έπειτα εφαρμόζονται οι οριακές συνθήκες ελεύθερης επιφάνειας. Τρίτο βήμα αποτελεί ο υπολογισμός των πιέσεων από την εξίσωση (4.63) και στη συνέχεια επανεκτίμηση των ταχυτήτων από την εξίσωση (4.61) και η επιβεβαίωση των οριακών συνθηκών. Χρησιμοποιώντας το μοντέλο τύρβης υπολογίζονται οι τιμές των μεταβλητών *k* και *ε*. Τέλος εφαρμόζεται η μέθοδος VOF για την εκτίμηση της ελεύθερης στάθμης.



Σχήμα 4.2 Στοιχεία υπολογιστικού πλέγματος *(Liu & Lin, 1997)*

Μέθοδος προβολής δύο βημάτων, Chorin, 1968, 1969

Το πρώτο βήμα απαιτεί τον ορισμό μιας ενδιάμεσης ταχύτητας, $\tilde{u}_i$ μέσω της εξίσωσης ορμής των εξισώσεων Reynolds.

$$\frac{\tilde{u}_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} + g_i + \frac{\partial \tau_{ij}^n}{\partial x_j} \tag{4.60}$$

Στη θέση του εκθέτη δίνεται ο χρόνος στον οποίο αναφέρεται η εκάστοτε μεταβλητή. Έτσι αν *n=1* με *t=Δt* τότε για *n=n+1, t=(n+1)Δt*. Αν οι υπόλοιπες μεταβλητές της εξίσωσης (4.60) είναι γνωστές τότε είναι δυνατό να υπολογιστεί η $\tilde{u}_i$.

Στο δεύτερο βήμα η τελική ταχύτητα είναι,

$$\frac{u_i^{n+1} - \tilde{u}_i^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho^n} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} \tag{4.61}$$

$$\frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial x_i} = 0 \tag{4.62}$$

Ο συνδυασμός των εξισώσεων (4.60), (4.61) και της (4.62) ικανοποιούν τις εξισώσεις Reynolds. Η βαθμίδα της πίεσης υπολογίζεται σε κάθε (*n+1*) βήμα. Ο συνδυασμός των εξισώσεων (4.61), (4.62) δίνει την εξίσωση Poisson για τις πιέσεις.

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{\rho^n}\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{\Delta t}\frac{\partial \tilde{u}_i^{n+1}}{\partial x_i} \tag{4.63}$$

Διακριτοποίηση μεταθετικών όρων

Ας δοθούν αρχικά δυο ορισμοί για την διακριτοποίηση των χωρικών παραγώγων των ταχυτήτων, αναφερόμενες στα όρια κάθε κελιού.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x_i} \tag{4.64}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i+1,j} = \frac{u_{i+\frac{3}{2},j} - u_{i+\frac{1}{2},j}}{\Delta x_{i+1}} \tag{4.65}$$

Όπου

$$\begin{aligned} u_{i,j} &= \frac{u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j}}{2} \\ u_{i,j+\frac{1}{2}} &= \frac{u_{i,j+1}\Delta y_j + u_{i,j}\Delta y_{j+1}}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} \\ \Delta x_{i+\frac{1}{2}} &= \frac{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}}{2} \end{aligned} \tag{4.66}$$

Ανάλογοι είναι οι ορισμοί και για τα μεγέθη του οριζόντιου άξονα, *v*, *Δy*. Συνεχίζοντας, παραθέτονται το σχήμα upwind και αυτό των κεντρικών διαφορών για τον ορισμό της χωρικής παραγώγου της ταχύτητας στο κέντρο κάθε κελιού.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i+\frac{1}{2},j} = \begin{cases} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j}, & \alpha\nu\ u_{i+\frac{1}{2},j} > 0 \\ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i+1,j}, & \alpha\nu\ u_{i+\frac{1}{2},j} > 0 \end{cases} \tag{4.67}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{\Delta x_{i+1}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} + \Delta x_i\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i+1,j}}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} \tag{4.68}$$

Δεδομένων λοιπόν των παραπάνω είναι δυνατή η διακριτοποίηση των μεταθετικών όρων της εξίσωσης της ορμής. Τα μεγέθη του άξονα x υπολογίζονται στο δεξί όριο κάθε κελιού και τα μεγέθη του άξονα y στο πάνω όριο κάθε κελιού. Χρονικά όλα τα μεγέθη των μεταθετικών όρων αλλά και αυτών της διασποράς υπολογίζονται στο χρονικό βήμα *n*. Συνεπώς,

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = u_{i+\frac{1}{2},j}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i+\frac{1}{2},j} + v_{i+\frac{1}{2},j}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i+\frac{1}{2},j} \tag{4.69}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = u_{i,j+\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i,j+\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{i,j+\frac{1}{2}} \tag{4.70}$$

Ο συνδυασμός των δύο σχημάτων (upwind , κεντρικών διαφορών) γίνεται με εισαγωγή ενός συντελεστή βαρύτητας, *α*. Όταν *α=0* τότε η εξίσωση προσεγγίζει την έκφραση κεντρικής διαφοράς, ενώ όταν *α=1*, το σχήμα upwind. Στην πράξη υιοθετούνται τιμές στο εύρος 0.3-0.5 για την παραγωγή ευσταθών και ακριβών αποτελεσμάτων. Γενικότερα αυτός είναι και ο λόγος που χρησιμοποιείται ο συνδυασμός αυτός. Αφού το σχήμα upwind έχει την τάση να εισάγει αριθμητική απόσβεση, ενώ το σχήμα κεντρικών διαφορών να παράγει ασταθείς λύσεις.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{\Delta x_a}\left(\left[1 + a\,\mathrm{sgn}(u_{i+\frac{1}{2},j})\right]\Delta x_{i+1}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} + \left[1 - a\,\mathrm{sgn}(u_{i+\frac{1}{2},j})\right]\Delta x_i\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i+1,j}\right) \tag{4.71}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{\Delta y_a}\left(\left[1 + a\,\mathrm{sgn}(v_{i+\frac{1}{2},j})\right]\Delta y_{j+\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + \left[1 - a\,\mathrm{sgn}(v_{i+\frac{1}{2},j})\right]\Delta y_{j-\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\right) \tag{4.72}$$

Όπου,

$$\Delta x_a = \Delta x_{i+1} + \Delta x_i + a\,\mathrm{sgn}(u_{i+\frac{1}{2},j})\left(\Delta x_{i+1} - \Delta x_i\right) \tag{4.73}$$

$$\Delta y_a = \Delta y_{j+\frac{1}{2}} + \Delta y_{j-\frac{1}{2}} + a\,\mathrm{sgn}(v_{i+\frac{1}{2},j})\left(\Delta y_{j+\frac{1}{2}} - \Delta y_{j-\frac{1}{2}}\right) \tag{4.74}$$

ενώ η συνάρτηση *sgn(x)* ορίζεται ως

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \alpha\nu\ \mathrm{x<0} \\ 0, & \alpha\nu\ \mathrm{x=0},\ x \in R \\ 1, & \alpha\nu\ \mathrm{x>0} \end{cases}$$

Διακριτοποίηση όρων διασποράς

Ακολουθεί η διακριτοποίηση των τάσεων ακολουθώντας την απλούστερη υπόθεση του ισοτροπικού συντελεστή τυρβώδους διάχυσης (γραμμικό μοντέλο τάσεων Reynolds). Οι ολικές τάσεις, τ_{ij} ορίζονται ως εξής,

$$\tau_{ij} = 2\left(\nu + C_d \frac{k^2}{\varepsilon}\right)\sigma_{ij} - \frac{2}{3}k\delta_{ij} \tag{4.75}$$

Αμελώντας τον όρο $\frac{2}{3}k\delta_{ij}$ οι ολικές τάσεις αντιμετωπίζονται όπως μια εξίσωση διασποράς και γράφονται,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[2(\nu+\nu_t)\frac{\partial u}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[(\nu+\nu_t)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] \tag{4.76}$$

για την εξίσωση ορμής όπως αναλύθηκε για τον άξονα των x, για τον άξονα των y είναι,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(\nu+\nu_t)\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[2(\nu+\nu_t)\frac{\partial v}{\partial y}\right] \tag{4.77}$$

Πριν παρουσιαστεί ο τρόπος με τον οποίο αναλύονται σε διαφορές οι δύο τελευταίες εξισώσεις, ας οριστούν οι δύο ακόλουθοι όροι,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1}-u_{i+\frac{1}{2},j}}{\Delta y_{j+\frac{1}{2}}} + \frac{v_{i+1,j+\frac{1}{2}}-v_{i,j+\frac{1}{2}}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} \tag{4.78}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = \frac{u_{i+\frac{1}{2},j}-u_{i+\frac{1}{2},j-1}}{\Delta y_{j-\frac{1}{2}}} + \frac{v_{i+1,j-\frac{1}{2}}-v_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} \tag{4.79}$$

Επιστρέφοντας στην εξίσωση (4.76), χρησιμοποιείται μέθοδος κεντρικών διαφορών. Όπως και με τους μεταθετικούς όρους, οι συνιστώσες του άξονα x αναφέρονται στο δεξί άκρο του κελιού και οι συνιστώσες του άξονα y αναφέρονται στο επάνω όριο του κελιού. Έτσι τα δύο μέλη της εξίσωσης αναλύονται

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(2(\nu+\nu_t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]_{i+\frac{1}{2},j} &= 2\frac{(\nu+\nu_t)_{i+1,j}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i+1,j} - (\nu+\nu_t)_{i,j}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} = \\ &= \frac{2}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}}\left[(\nu+\nu_t)_{i+1,j}\frac{u_{i+\frac{3}{2},j}-u_{i+\frac{1}{2},j}}{\Delta x_{i+1}} - (\nu+\nu_t)_{i,j}\frac{u_{i+\frac{1}{2},j}-u_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x_i}\right]\end{aligned} \tag{4.80}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial y}\left((\nu+\nu_t)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)\right]_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{\Delta y_j}\left[(\nu+\nu_t)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - (\nu+\nu_t)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}\right] \tag{4.81}$$

Ανάλογη είναι η διαδικασία για την εξίσωση ορμής στον άξονα y.

Διακριτοποίηση όρων πίεσης

Η εξίσωση (4.63) αναλυόμενη στις δύο διαστάσεις είναι,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho^n}\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\rho^n}\frac{\partial p^{n+1}}{\partial y}\right)=\frac{1}{\Delta t}\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}+\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}\right) \tag{4.82}$$

Η μεταβλητή της πίεσης προσδιορίζεται στο κέντρο κάθε κελιού, έτσι οι δύο όροι του αριστερού μέλους αναλύονται ως εξής (δεύτερο βήμα μεθόδου Chorin, μέθοδος δύο βημάτων):

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho^n}\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x}\right)\right]_{i,j}=\frac{1}{\Delta x_i}\left[\frac{1}{\rho^n_{i+\frac{1}{2},j}}\left(\frac{p^{n+1}_{i+1,j}-p^{n+1}_{i,j}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}}\right)-\frac{1}{\rho^n_{i-\frac{1}{2},j}}\left(\frac{p^{n+1}_{i,j}-p^{n+1}_{i-1,j}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}}\right)\right] \tag{4.83}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\rho^n}\frac{\partial p^{n+1}}{\partial y}\right)\right]_{i,j}=\frac{1}{\Delta y_i}\left[\frac{1}{\rho^n_{i,j+\frac{1}{2}}}\left(\frac{p^{n+1}_{i,j+1}-p^{n+1}_{i,j}}{\Delta y_{i+\frac{1}{2}}}\right)-\frac{1}{\rho^n_{i,j-\frac{1}{2}}}\left(\frac{p^{n+1}_{i,j}-p^{n+1}_{i,j-1}}{\Delta y_{i-\frac{1}{2}}}\right)\right] \tag{4.84}$$

Όπως έγινε αντιληπτό η πυκνότητα δεν θεωρείται σταθερή σε κάθε κελί. Η εκτίμηση της γίνεται με τη μέθοδο της γραμμικής παλινδρόμησης. Δίνεται λοιπόν ότι,

$$\rho^n_{i+\frac{1}{2},j}=\frac{\rho^n_{i,j}\Delta x_{i+1}+\rho^n_{i+1,j}\Delta x_i}{\Delta x_i+\Delta x_{i+1}} \tag{4.85}$$

Ευστάθεια σχήματος

Η αριθμητική ευστάθεια του σχήματος των βασικών εξισώσεων δεν μπορεί να περιγραφεί από μια γενικευμένη συνθήκη ευστάθειας όπως για παράδειγμα αυτή του von Neumann. Ο λόγος αυτού είναι η μη γραμμικότητα που χαρακτηρίζει τις βασικές εξισώσεις Έτσι για τη διερεύνηση των συνθηκών ευστάθειας γραμμικοποιούνται οι αρχικές εξισώσεις ορμής και συνέχειας. Έπειτα χρησιμοποιούνται οι συνθήκες ευστάθειας της μεθόδου von Neumann. Σε αυτές εισάγονται δύο εμπειρικοί συντελεστές για να διασφαλιστεί η συνθήκη ευστάθειας, που έτσι περιορίζεται περεταίρω λόγω της συνδυασμένης επίδρασης της ύπαρξης μη γραμμικοτήτων και του σχήματος κεντρικών διαφορών που χρησιμοποιείται. Η συνθήκη ευστάθειας είναι,

$$\Delta t \le a\min\left\{\frac{u}{\Delta x},\frac{v}{\Delta y}\right\},\ a=3/10 \tag{4.86}$$

$$\Delta t \le b\min\left\{\frac{1}{2\left(\nu+\nu_t\right)},\frac{\Delta x^2\Delta y^2}{\Delta x^2+\Delta y^2}\right\},\ b=2/3 \tag{4.87}$$

Αριθμητικό σχήμα επίλυσης εξισώσεων VARANS

Η αριθμητική ολοκλήρωση των εξισώσεων VARANS βασίζεται στη μέθοδο που περιγράφηκε παραπάνω και παρουσιάζεται από τους Liu et al. 1999. Αποτελεί

τροποποίηση της μεθόδου που παρουσιάστηκε από τους Lin et al. 1998, με στόχο την καλύτερη προσέγγιση της αριθμητικής ολοκλήρωσης των μέσων, ως προς τον όγκο, μεταβλητών. Έτσι επιτυγχάνεται η χρήση ενός καταλληλότερου μοντέλου τύρβης για την ροή εντός και εκτός του πορώδους υλικού. Η ανάλυση των εξισώσεων σε διακριτούς όρους VARANS ακολουθεί την ίδια λογική με αυτήν που παρουσιάστηκε για τις εξισώσεις RANS και για τον λόγο αυτό δεν παρουσιάζεται από την παρούσα εργασία. Συνεπώς και η αριθμητική ολοκλήρωση του μοντέλου τύρβης k-ε και η μέθοδος VOF που θα ακολουθήσουν παρουσιάζονται για την ανάλυση των εξισώσεων RANS.

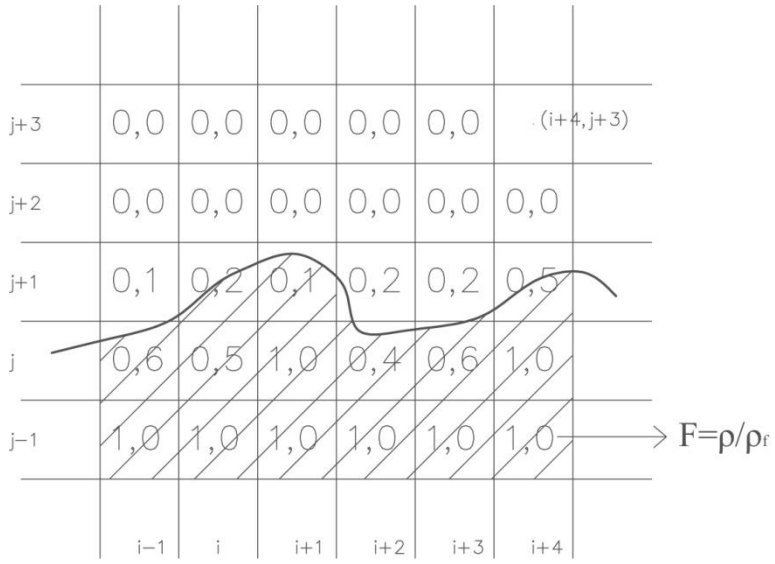
4.8. Ανίχνευση της ελεύθερης επιφάνειας - μέθοδος VOF

Η στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας καθορίζεται με την μέθοδο volume of fluid (VOF). Η μέθοδος VOF αναπτύχθηκε αρχικά από τους Hirt & Nichols (1981) για την ανίχνευση της ελεύθερης επιφάνειας και τροποποιήθηκε από τους Kothe et al. (1991). Η τροποποίηση αυτή ακολουθείται και από το μοντέλο Co.Br.A.S. Η μέθοδος αυτή δεν εντοπίζει άμεσα την ελεύθερη επιφάνεια αλλά ανιχνεύει τις αλλαγές της πυκνότητας σε κάθε κελί του υπολογιστικού πεδίου.

Ορίζεται η συνάρτηση VOF, για την οποία ισχύει

$$F = \rho / \rho_f \, , \rho = \rho_f \frac{\rho_f V_f}{V_f + V_a} \tag{4.88}$$

Όπου ρ, η μέση πυκνότητα κάθε κελιού, ρ_f, η σταθερή πυκνότητα του ρευστού, V_f , ο όγκος που καταλαμβάνει το ρευστό σε κάθε κελί και V_a, ο όγκος που καταλαμβάνει ο αέρας σε κάθε κελί.



Σχήμα 4.3 Συνάρτηση VOF (F=0: απουσία ρευστού (f), F=1: εσωτερικό ρευστού, F<1: επιφανειακά στρώματα)

Δεδομένων λοιπόν, του ορισμού της συνάρτησης F και της οριακής συνθήκης για την πυκνότητα (4.25) είναι,

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(uF)+\frac{\partial}{\partial y}(vF)=0 \tag{4.89}$$

Εκφρασμένη σε διακριτούς όρους η παραπάνω εξίσωση είναι,

$$F_{i,j}^{n+1}=F_{i,j}^{n}-\frac{\Delta t}{\Delta x_i}\left(u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}F_R^n-u_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1}F_L^n\right)-\frac{\Delta t}{\Delta y_i}\left(v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1}F_T^n-v_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1}F_B^n\right) \tag{4.90}$$

Όπου F_R, F_L, F_T, F_B οι τιμές της συνάρτησης F στο δεξί, αριστερό, επάνω και κάτω όριο κάθε κελιού. Για τον καθορισμό της θέσης της ελεύθερης επιφάνειας χρησιμοποιείται ο αλγόριθμος των Hirt-Nichols. Σύμφωνα με αυτόν η στάθμη ανακατασκευάζεται οριζόντια ή κάθετα (σε κάθε κελί) με βάση τις τιμές της συνάρτησης F στο χρονικό βήμα $t=n\Delta t$. Συνοπτικά ο γενικός κανόνας είναι,

$\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right|>\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|$ και $\frac{\partial F}{\partial x}<0$ $\Rightarrow$ κατακόρυφη ελεύθερη επιφάνεια στο αριστερό όριο

$\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|>\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right|$ και $\frac{\partial F}{\partial x}>0$ $\Rightarrow$ κατακόρυφη ελεύθερη επιφάνεια στο δεξί όριο

$\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|<\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right|$ και $\frac{\partial F}{\partial y}<0$ $\Rightarrow$ οριζόντια ελεύθερη επιφάνεια στο κάτω όριο

$\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|<\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right|$ και $\frac{\partial F}{\partial y}>0$ $\Rightarrow$ κατακόρυφη ελεύθερη επιφάνεια στο επάνω όριο

Οι τιμές της συνάρτησης F υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τη μέθοδο κεντρικών πεπερασμένων διαφορών, με τον ακόλουθο τρόπο,

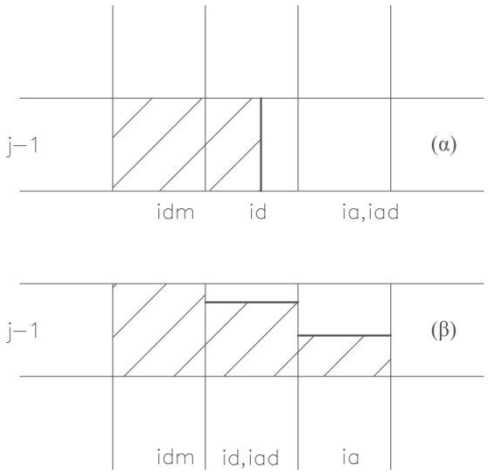
$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{i,j}^{n}=\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{i+\frac{1}{2},j}^{n}\Delta x_{i-\frac{1}{2}}+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{i-\frac{1}{2},j}^{n}\Delta x_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}+\Delta x_{i+\frac{1}{2}}}=\frac{\left(\tilde{F}_{i+1,j}^{n}-\tilde{F}_{i,j}^{n}\right)\frac{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}}+\left(\tilde{F}_{i,j}^{n}-\tilde{F}_{i-1,j}^{n}\right)\frac{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}+\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} \tag{4.91}$$

Όπου $\tilde{F}_{i+1,j}^{n}$ η μέση τιμή της συνάρτησης F σε τρία γειτονικά κελιά. Για παράδειγμα η τιμή αυτή υπολογίζεται,

$$\tilde{F}_{i+1,j}^{n}=\frac{\tilde{F}_{i+1,j+1}^{n}\Delta y_{i+1}+\tilde{F}_{i+1,j}^{n}\Delta y_i+\tilde{F}_{i+1,j-1}^{n}\Delta y_{i-1}}{\Delta y_{i-1}+\Delta y_i+\Delta y_{i+1}} \tag{4.92}$$

Έστω τώρα ότι έχουν εκτιμηθεί οι τιμές της συνάρτησης F, όπως περιγράφηκε παραπάνω. Στη συνέχεια εφαρμόζεται η μέθοδος *donor- acceptor*. Για λόγους απλούστευσης τώρα θα εξεταστεί η ακολουθία υπολογισμών στο οριζόντιο άξονα. Ας υποτεθεί ότι η ταχύτητα στο αριστερό άκρο ($u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}$) του εξεταζόμενου κελιού (i,j) είναι θετική. Τότε το κελί *(i,j)* είναι το κελί «δωρητής» (*donor*) και το κελί *(i+1,j)* είναι το κελί «αποδέκτης» (*acceptor*) (αν η ταχύτητα είναι αρνητική ορίζονται

αντίθετα). Όταν η επιφάνεια ορίζεται στο οριζόντιο επίπεδο η τιμή της F_R ορίζεται ίση με αυτή του κελιού «δωρητή», ενώ όταν ορίζεται στο κατακόρυφο επίπεδο ορίζεται από την τιμή του κελιού «αποδέκτη». Για την δεύτερη περίπτωση έχει παρατηρηθεί σε ορισμένες περιπτώσεις η υπερεκτίμηση της τιμής της F_R. Οπότε εισάγεται ένας συντελεστής ΔF. Έτσι ισχύει,



Σχήμα 4. 4 Οι δύο περιπτώσεις ανακατασκευής της ελεύθερης επιφάνειας (Liu & Lin, 1997)

$$F_R^n = F_{i\_acceptor}^n + \Delta F^n \quad \text{και}$$

$$\Delta F = \max\left\{\left(\left(F_{dm}^n - F_{i\_acceptor}^n\right) - \frac{\Delta x_{i\_donor}}{u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}\Delta t}\left(F_{dm}^n - F_{i\_donor}^n\right)\right), 0\right\} \tag{4.93}$$

$$F_{dm}^n = \max\left\{F_{i\_donor}^n, F_{dm}^n, K\right\}$$

Όπου F_{dm}^n, η τιμή της F στο κελί που ακολουθεί το κελί «δωρητή», K συντελεστής ($K=0.1$).

4.9. Αριθμητικό σχήμα επίλυσης εξισώσεων k-ε

Οι εξισώσεις του μοντέλου τύρβης k-ε αντιμετωπίζονται ως εξισώσεις μετάθεσης-διασποράς που συμπεριλαμβάνουν όρους αναπαραγωγής (πηγής) και φθοράς. Πρόσθετα, οι εξισώσεις αυτές χαρακτηρίζονται από περιοδικότητα. Όπως και στις εξισώσεις Reynolds, οι μεταθετικοί όροι αντιμετωπίζονται με το συνδυασμό κεντρικών διαφορών και σχήματος upwind. Για την διακριτοποίηση των χρονικών παράγωγων χρησιμοποιείται η μέθοδος εμπρόσθιας, ως προς το χρόνο, διαφοράς.

Για την καλύτερη παρουσίαση ας διαχωριστούν οι όροι των εξισώσεων (4.10), (4.11) σε όρους μετάθεσης (*Fkx, Fky, Fεx, Fεy*), τους όρους διασποράς (*Visk, Visε*) και τις χωρικές μεταβλητές $P_{i,j}$ οι οποίες θα αναλυθούν στη συνέχεια (Liu & Lin,1997). Οι δύο εξισώσεις γράφονται ως:

$$\frac{k_{i,j}^{n+1}-k_{i,j}^{n}}{\Delta t}+Fkx-Fky=Visk+\frac{1}{2}\left(P_{i,j}^{n+1}+P_{i,j}^{n}-\varepsilon_{i,j}^{n+1}-\varepsilon_{i,j}^{n}\right) \tag{4.94}$$

$$\frac{\varepsilon_{i,j}^{n+1}-\varepsilon_{i,j}^{n}}{\Delta t}+F\varepsilon x+F\varepsilon y=Vis\varepsilon+C_{1\varepsilon}\frac{\varepsilon_{i,j}^{n}}{k_{i,j}^{n}}P_{i,j}^{n+1}-C_{2\varepsilon}\frac{\varepsilon_{i,j}^{n}}{k_{i,j}^{n}}\varepsilon_{i,j}^{n+1} \tag{4.95}$$

$$\begin{aligned} Fkx &= u_{i,j}^{n+1}\left(\frac{\partial k}{\partial x}\right)_{i,j}^{n} \\ Fky &= v_{i,j}^{n+1}\left(\frac{\partial k}{\partial y}\right)_{i,j}^{n} \end{aligned} \tag{4.96}$$

Όπου,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial k}{\partial x}\right)_{i,j}^{n} &= \left[\left(1+\gamma\,\mathrm{sgn}(u_{i,j}^{n+1})\right)\Delta x_{i+\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial k}{\partial x}\right)_{i-\frac{1}{2},j}^{n}+\left(1-\gamma\,\mathrm{sgn}(u_{i,j}^{n+1})\right)\Delta x_{i-\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial k}{\partial x}\right)_{i+\frac{1}{2},j}^{n}\right] \\ &\quad /\left[\Delta x_{i+\frac{1}{2}}+\Delta x_{i-\frac{1}{2}}+\gamma\left(\Delta x_{i+\frac{1}{2}}+\Delta x_{i-\frac{1}{2}}\right)\right] \end{aligned} \tag{4.97}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial k}{\partial y}\right)_{i,j}^{n} &= \left[\left(1+\gamma\,\mathrm{sgn}(v_{i,j}^{n+1})\right)\Delta y_{i+\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial k}{\partial x}\right)_{i,j-\frac{1}{2}}^{n}+\left(1-\gamma\,\mathrm{sgn}(v_{i,j}^{n+1})\right)\Delta y_{i-\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial k}{\partial x}\right)_{i,j+\frac{1}{2}}^{n}\right] \\ &\quad /\left[\Delta y_{i+\frac{1}{2}}+\Delta y_{i-\frac{1}{2}}+\gamma\left(\Delta y_{i+\frac{1}{2}}+\Delta y_{i-\frac{1}{2}}\right)\right] \end{aligned} \tag{4.98}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial k}{\partial x}\right)_{i-\frac{1}{2},j}^{n} &= \frac{k_{i,j}^{n}-k_{i-1,j}^{n}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} \\ \left(\frac{\partial k}{\partial x}\right)_{i+\frac{1}{2},j}^{n} &= \frac{k_{i+1,j}^{n}-k_{i,j}^{n}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} \end{aligned} \tag{4.99}$$

και

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial k}{\partial y}\right)_{i,j-\frac{1}{2}}^{n} &= \frac{k_{i,j}^{n}-k_{i,j-1}^{n}}{\Delta y_{i-\frac{1}{2}}} \\ \left(\frac{\partial k}{\partial y}\right)_{i,j+\frac{1}{2}}^{n} &= \frac{k_{i,j+1}^{n}-k_{i,j}^{n}}{\Delta y_{i+\frac{1}{2}}} \end{aligned} \tag{4.100}$$

Όμοια ορίζονται και οι αντίστοιχοι όροι ως προς *ε*. Για την ανάλυση των όρων διασποράς παρουσιάζεται ο όρος ως προς *k*. Η ανάλυση ως προς *ε* είναι παρόμοια.

$$Visk=\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}+\nu\right)\frac{\partial k}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}+\nu\right)\frac{\partial k}{\partial y}\right)\right]_{i,j}^{n} \tag{4.101}$$

Όπου,

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}+\nu\right)\frac{\partial k}{\partial x}\right)\right]_{i,j}^{n} &= \frac{1}{\Delta x_i}\left[\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}+\nu\right)_{i+\frac{1}{2},j}^{n}\frac{k_{i+1,j}^{n}-k_{i,j}^{n}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}^{n}}-\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}+\nu\right)_{i-\frac{1}{2},j}^{n}\frac{k_{i,j}^{n}-k_{i-1,j}^{n}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}^{n}}\right] \\ \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}+\nu\right)\frac{\partial k}{\partial x}y\right)\right]_{i,j}^{n} &= \frac{1}{\Delta y_i}\left[\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}+\nu\right)_{i,j+\frac{1}{2}}^{n}\frac{k_{i,j+1}^{n}-k_{i,j}^{n}}{\Delta y_{i+\frac{1}{2}}^{n}}-\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}+\nu\right)_{i,j-\frac{1}{2}}^{n}\frac{k_{i,j}^{n}-k_{i,j-1}^{n}}{\Delta y_{i-\frac{1}{2}}^{n}}\right] \end{aligned}$$

(4.102)

έχοντας προσεγγίσει τις χωρικές παραγώγους της *k* κατά παρόμοιο τρόπο με τις ταχύτητες στην εξίσωση ορμής. Εδώ αντί του συντελεστή *α* χρησιμοποιείται ένας συντελεστής *γ*, συνήθως ίσος με τη μονάδα (για *γ=1* το σχήμα αυτό ταυτίζεται με το σχήμα upwind). Η ευστάθεια της λύσης του *k* ισχύει για τιμές *γ>0.5*. Επίσης οι όροι $\nu_t/\sigma_k + \nu$ υπολογίζονται στα όρια κάθε κελιού χρησιμοποιώντας τη μέθοδο γραμμικής παλινδρόμησης.

$$\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}+\nu\right)^n_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{\Delta x_i\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}+\nu\right)^n_{i+1,j} + \Delta x_{i+1}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}+\nu\right)^n_{i,j}}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} \tag{4.103}$$

Οι όροι $P_{i,j}$ υπολογίζονται στους χρόνους $t=n\Delta t$ και $t=(n+1)\Delta t$. Σε χρόνο $t=n\Delta t$ ορίζονται ως,

$$P^n_{i,j} = \nu_t\left[2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2_{i,j} + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2_{i,j} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2_{i,j}\right]^n \tag{4.104}$$

Όπου

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^n_{i,j} = \frac{u^n_{i+\frac{1}{2},j} - u^n_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x_i}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^n_{i,j} = \frac{u^n_{i,j+\frac{1}{2}} - u^n_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta y_i}$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^n_{i,j} = \frac{v^n_{i,j+\frac{1}{2}} - v^n_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta y_i}, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^n_{i,j} = \frac{v^n_{i+\frac{1}{2},j} - v^n_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x_i} \tag{4.105}$$

Βιβλιογραφία τέταρτου κεφαλαίου

Chorin, A.J., 1968, “Numerical solution of the Navier- Stokes equations.” *Mathematics of Computation*, vol. 22, 745-762.

Chorin, A.J., 1969, “On the convergence of discrete approximations of the Navier-Stokes equations.” *Mathematics of Computation*, vol. 232, 341-353.

Gaunche R., Losada, I.J., Lara, J.L., 2009. “Numerical analysis of wave loads for coastal structure stability.” *J. Coastal Engineering*, vol. 56(5), 543-558.

Hirt, C. W. and Nichols, B. D. 1981 “Volume of fluid (VOF) method for dynamics of free boundaries.” *J. Computational. Physics*, vol. 39, 201-225.

Hsu, T.-J., Sakakiyama, T., Liu, P.L.-F., 2002. “A numerical model for wave motions and turbulence flows in front of a composite breakwater.” *J. Coastal Engineering*, vol. 46, 25-50.

Kothe, D. B., Mjolsness, R. C, and Torrey, M. D. 1991 "RIPPLE: A computer program for incompressible flows with free surfaces." *Los Alamos National Laboratory, LA-12007-MS*

Lin, P., 1998. *Numerical modeling of breaking waves*, Cornell University, U.S.A.

Lin, P., Liu, P.L.-F., 1998. "A numerical study of breaking waves in the surf zone." *J. Fluid Mech.*, vol. 359, 239–264.

Lin, P., Liu, P.L.-F., 1999. "Internal wave maker for Navier- Stokes equations models." *J.Waterw., Port, Coast. and Ocean Eng.*, ASCE 125 (4), 207-215.

Liu, P. L.-F. & Lin, P. 1997. "A numerical model for breaking wave: the volume of fluid method." *Research Rep. CACR-97-02. Center for Applied Coastal Research, Ocean Eng. Lab.*, Univ. of Delaware, Newark, Delaware 19716.

Liu, P.L.-F., Lin, P., Chang, K.A., Sakakiyama, T., 1999. "Numerical modeling of wave interaction with porous structures," *J.Waterw., Port, Coast. and Ocean Eng.*, ASCE 125 (6), 322-330.

Liu, P.L.-F., Losada, I.J., 2002. "Wave propagation modeling in coastal engineering." *J. Hydraulic Research*, vol. 40(3), 229-240.

Losada, I. J., Lara, J. L., Guanche, R., & Gonzalez-Ondina, J. M., 2008. "Numerical analysis of wave overtopping of rubble mound breakwaters." *J. Coastal Engineering*, vol. 55(1), 47-62.

Nakayama, A., Kuwahara, F.,1999. *Convection in porous media*, 2nd edition Springer-Verlag, New York, U.S.A.

Pope, S.B., 2000. *Turbulent flows*, 1st edition Cambridge University Press, Cambridge, UK.

Rodi, W. 1980 *Turbulence Models and Their Application in Hydraulics- A State-of-the-Art Review.* I.A.H.R. publication.

Shih, T.-H., Zhu, J., Lumley, J.L., 1996. "Calculation of wall- bounded complex flows and free shear flows." *Int. J. Numer. Methods Fluids*, vol. 23, 1133–1144.

Skjelbreia, L., Hendriskon, J.A., 1961. "Fifth order gravity wave theory." *Proc. 7th Conf. on Coastal Eng.*, Council on Wave Research, The Engineering Foundation, 184-196.

Wiegel, R.L., 1960. "A presentation of cnoidal wave theory for practicl application." *J. Fluid Mech.*, Cambridge, U.K., vol. 7, 273-286.

van Gent, M.R.A., 1994. "The modeling of wave interaction on and in coastal structures." *Coastal Engineering*, vol. 22, 311-339.

Κεφάλαιο 5

Θεωρία Stokes - Αριθμητικό υπολογιστικό ομοίωμα των Belibassakis - Athanassoulis

5.1. Εισαγωγή

Το μοντέλο συζευγμένων ιδιομορφών (*coupled modes system*) αναπτύχθηκε στις εργασίες των Athanassoulis & Belibassakis (1999) και Belibassakis & Athanassoulis (2002). Στην πρώτη περιγράφεται η εφαρμογή της γραμμικής θεωρίας για την προσομοίωση του κυματικού πεδίου λαμβάνοντας υπόψη φαινόμενα διάδοσης, ανάκλασης και διασποράς. Χαρακτηριστικό του μοντέλου είναι ο χειρισμός της οριακής συνθήκης του πυθμένα χωρίς υποθέσεις ήπιας κλίσης. Στις περιπτώσεις ήπιας μεταβολής του βάθους το πρόβλημα ανάγεται σε πρόβλημα ήπιας κλίσης. Σε επέκταση της τροποποιημένης εξίσωσης ήπιας κλίσης, όπως αυτή περιγράφεται από τους Massel (1993) και Champerlain & Porter (1995), βελτιώνονται (α) η αναπαράσταση του πεδίου ταχυτήτων στο οριακό στρώμα πάνω από τον πυθμένα και (β) η διατήρηση της κυματικής ενέργειας. Εντός της ίδιας εργασίας, ως επόμενο βήμα, συμπεριλαμβάνονται οι επιδράσεις της τριβής, μεταξύ πυθμένα-κύματος, και της θραύσης, λόγω μείωσης του βάθους, στην κυματική ενέργεια (*extended mild slope models* Digemans (1997) και Massel (1993), Massel and Gourlay (2000), Singamsetti & Wind (1980)). Καθ' επέκταση συνυπολογίζονται οι τάσεις ακτινοβολίας και η μεταβολή της μέσης στάθμης ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας στην ακτή εξαιτίας προσπίπτοντος κύματος (radiation stresses, wave setup). Η μέθοδος υπολογισμού είναι παρόμοια με αυτή που περιγράφεται στην εργασία των Massel and Gourley (2000), σε συνδυασμό με το τροποποιημένο μοντέλο ήπιας κλίσης. Οι τάσεις ακτινοβολίας υπολογίζονται χρησιμοποιώντας την

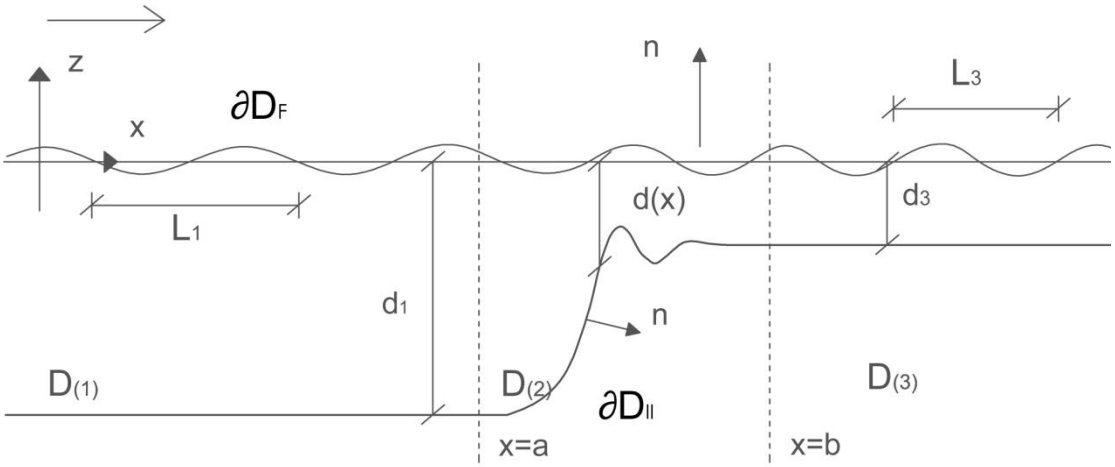
πλήρη αναπαράσταση του κυματικού πεδίου σε σειρά τοπικών ιδιομορφών (Athanassoulis & Belibassakis (1999)).

Στα πλαίσια της εργασίας Belibassakis & Athanassoulis (2002) επεκτείνεται η αρχική γραμμική θεωρία με την προσθήκη όρων δεύτερης τάξης, περιλαμβάνοντας έτσι τις μη γραμμικές αλληλεπιδράσεις μεταξύ κύματος και πυθμένα. Μελετάται η μετάδοση μη γραμμικών κυματισμών βαρύτητας (*weakly nonlinear gravity waves*) αναπτυσσόμενων πάνω από ύφαλο, ομαλών ή έντονων κλίσεων. Εξετάζεται επίσης η δημιουργία αρμονικών κυμάτων εξαιτίας των μη γραμμικών αλληλεπιδράσεων μεταξύ κύματος και πυθμένα. Το φαινόμενο αυτό παρατηρείται στις περιπτώσεις σκέδασης του κύματος από περιοχές μεγάλου σχετικού βάθους προς ύφαλες περιοχές ρηχού βάθους καθώς και για βυθισμένες κατασκευές εντός εργαστηρίου.

Για την προσομοίωση των υδροδυναμικών συνθηκών χρησιμοποιείται σειρά τοπικών ιδιομορφών (*local modes*) στην οποία προστίθεται όρος για την αντιμετώπιση έντονων μεταβολών του βάθους (*bottom slope mode*) και οι όροι απόσβεσης (*evanescent modes*).

5.2. Βασικές εξισώσεις

Η προσέγγιση της σκέδασης μη γραμμικών κυματισμών από το συγκεκριμένο μοντέλο, βασίζεται στην γραμμική θεωρία. Η λύση αυτής αποτελεί προϋπόθεση για την εφαρμογή της επέκτασης της, δηλαδή του υπολογισμού των όρων που προσδίδουν μη γραμμικά χαρακτηριστικά στο πρόβλημα. Έτσι αρχικά στην ενότητα αυτή θα περιγραφεί ο τρόπος προσέγγισης σύμφωνα με τη γραμμική θεωρία.



Σχήμα 5.1 Αναπαράσταση του κυματικού πεδίου, παρουσίαση των βασικών μεταβλητών (*εικόνα από Belibassakis & Athanassoulis, 2002*)

Βασικό χαρακτηριστικό της επίλυσης του προβλήματος αποτελεί ο διαχωρισμός του πεδίου σε τρία επιμέρους τμήματα 1,2 και 3. Στα άκρα του υπολογιστικού πεδίου

(1, 3) το βάθος μένει σταθερό ενώ στο ενδιάμεσο τμήμα το βάθος μεταβάλλεται χωρικά.

Στην περίπτωση γραμμικού κύματος η συνάρτηση δυναμικού δίνεται (Wehausen & Laitone, 1960),

$$\Phi\left(x,z;t\right)=\mathrm{Re}\left\{-\frac{igH}{2\omega}\varphi\left(x,z\right)\mathrm{e}^{-i\omega t}\right\} \qquad (5.1)$$

Όπου i το μιγαδικό στοιχείο (για το οποίο ισχύει $i=\sqrt{-1}$). Για τη δεδομένη συνάρτηση Φ(x,z) η στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας προκύπτει από την εξίσωση (5.2) με την υπόθεση z=0.

$$\zeta(x)=\frac{i\omega}{g}\Phi(x,z) \qquad (5.2)$$

Η συνάρτηση *φ(x,z)* της εξίσωσης (5.1) υπολογίζεται από την εξίσωση Laplace (5.46) ξεχωριστά για κάθε ένα από τους τρεις τομείς. Η επίλυση ξεκινά με τους δύο ακραίους. Η γενική μορφή της συνάρτησης ιδιομορφής για τις περιοχές σταθερού πυθμένα δίνεται από τις σχέσεις (*normal mode expansions*),

$$\varphi_1^{(1)}(x,z)=\left(A_0\exp(ik_0^{(1)}x)+A_R\exp(-ik_0^{(1)}x)\right)Z_0^{(1)}(z)+\sum_{n=1}^{\infty}C_n^{(1)}Z_n^{(1)}(z)\exp(k_n^{(1)}(x-a)) \qquad (5.3)$$

$$\varphi_1^{(3)}(x,z)=A_T\exp(ik_0^{(3)}x)Z_0^{(3)}(z)+\sum_{n=-1}^{\infty}C_n^{(3)}Z_n^{(3)}(z)\exp(k_n^{(3)}(b-x)) \qquad (5.4)$$

Όπου οι όροι $\varphi_1^{(i)}(x,z)$ αναφέρονται στις ιδιομορφές πρώτης τάξης των πεδίων *i=1,3,* A_o μια τυχαία παράμετρος που ελέγχει τη φάση της γραμμικής συνιστώσας, $A_0=e^{i\theta_0}$ (για το γραμμικό πρόβλημα είναι $A_o=1$). Με δείκτη $_0$ επισημαίνονται οι όροι διάδοσης (*propagating modes*), με δείκτη *n=1,2,3,…* οι όροι απόσβεσης, ενώ με δείκτη *-1* ο όρος κεκλιμένου πυθμένα. Ο τελευταίος αποτελεί ένα δείκτη διόρθωσης. Από το σύστημα των εξισώσεων (5.3), (5.4) και των οριακών συνθηκών για το γραμμικό πρόβλημα υπολογίζονται οι τιμές των συντελεστών A_R, A_T, $\left\{C_n^{(1)}\right\}_{n\in N}$, $\left\{C_n^{(3)}\right\}_{n\in N}$ Οι οριακές συνθήκες περιγράφονται αναλυτικά στην ενότητα 5.3. Ο αριθμός κύματος δίνεται από την εξίσωση γραμμικής διασποράς (5.5)

$$\frac{\omega^2 d_i}{g}=kd_i\tanh(kd_i) \qquad (5.5)$$

Οι συναρτήσεις *eigen* για n=0 δίνονται από την εξίσωση (5.6), για n=1,2,3,… από την εξίσωση (5.7), για n= -1 από την εξίσωση (5.9). Αυτές προκύπτουν ως λύσεις του προβλήματος Sturm- Liouville με ιδιοτιμές τους μιγαδικούς $ik_o(x), k_n(x)$ και εξαρτημένη χωρική μεταβλητή την z. Οι ιδιοτιμές για την περίπτωση μεταβλητού πυθμένα ορίζονται μέσω της εξίσωσης (5.8).

$$Z_0^{(i)}(z;x) = \frac{\cosh\left(k_0(x)(z+d(x))\right)}{\cosh\left(k_0(x)d(x)\right)},\ i=1,2,3 \tag{5.6}$$

$$Z_n^{(i)}(z;x) = \frac{\cos\left(k_n(x)(z+d(x))\right)}{\cos\left(k_n(x)d(x)\right)},\ i=1,2,3 \tag{5.7}$$

$$\frac{\omega^2}{g}d(x) = -k(x)d(x)\tan\left(k(x)d(x)\right),\ \text{για } x\in[a,b] \tag{5.8}$$

Ενώ για n= -1 μια μορφή της $Z_{-1}(z;x)$ δίνεται από την εξίσωση, (Athanassoulis & Belibassakis, 1999).

$$Z_{-1}(z;x) = d(x)\left[\left(\frac{z}{d(x)}\right)^3 + \left(\frac{z}{d(x)}\right)^2\right] \tag{5.9}$$

Εν συντομία ακολουθεί μια αναφορά στο πρόβλημα Sturm- Liouville εφαρμοσμένο στη ροή ενός ρευστού. Η εξεταζόμενη συνάρτηση είναι η ταχύτητα, εξαρτώμενη χωρικά κατά z. Έστω ότι το πεδίο που ενδιαφέρει ορίζεται σε ένα διάστημα $z\in\left(d,\zeta\right)$. Στο εσωτερικό του διαστήματος αυτού ισχύει η εξίσωση,

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right) + k^2(z)\phi = \lambda\phi$$

ενώ στα άκρα ($x=0, x=x_L$) ισχύουν οι σχέσεις,

$$\phi(d)=0,\ \phi(\zeta)=0$$

Όπου λ μια σταθερά οι τιμές της οποίας καθορίζονται από τους συντελεστές της διαφορικής εξίσωσης για ($x=0, x=x_L$). Προς χάριν απλούστευσης έγινε παραδοχή σταθερής πυκνότητας. Για περισσότερες πληροφορίες υπάρχει διαθέσιμη βιβλιογραφία (Hazewinkel, Michiel, ed., 2001).

Περνώντας στο τμήμα 2, όπου ο πυθμένας μεταβάλλεται χωρικά, η συνάρτηση δυναμικού δίνεται,

$$\varphi_1^{(2)}(x,z) = \varphi_{-1}(x,z)Z_{-1}^{(2)}(z;x) + \varphi_0(x,z)Z_0^{(2)}(z;x) + \sum_{n=-1}^{\infty}\varphi_n(x)Z_n^{(2)}(z;x) \tag{5.10}$$

Για να περάσουν από τις τοπικές εκφράσεις της συνάρτησης δυναμικού στις χωρικά μεταβαλλόμενες οι Athanassoulis & Belibassakis, 1999 κατασκεύασαν μια μεταβολική συνθήκη,

$$-\int_{D^{(2)}}(\nabla^2\varphi^{(2)})\delta\varphi^{(2)}dV + \int_{\partial D_\Pi^{(2)}}\frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial n^{(2)}}\delta\varphi^{(2)}dS = 0 \tag{5.11}$$

από την οποία, δεδομένης της εξίσωσης (5.10) και της γεωμετρικής σχέσης,

$$\left(n_x^{(2)}, n_z^{(2)}\right) = -\left(\partial d(x)/\partial x, 1\right)/\sqrt{1+\left(\partial d(x)/\partial x\right)^2}\ \text{για (x,z)} \in \partial D_\Pi^{(2)} \tag{5.12}$$

οδηγούνται στην εξίσωση (5.13) από την οποία μπορούν να υπολογιστούν οι τιμές των $\varphi_n(x)$ (Athanassoulis & Belibassakis, 1999).

$$\sum_{n=-1}^{\infty} a_{mn}(x)\frac{\partial^2\varphi_n(x)}{\partial x^2}+b_{mn}(x)\frac{\partial\varphi_n(x)}{\partial x}+c_{mn}\varphi_n(x)=0,\ x\in(a,b) \qquad (5.13)$$

Όπου οι συντελεστές a_{mn},b_{mn},c_{mn} δίνονται από τον πίνακα 1 της ίδιας εργασίας. Παραθέτοντας εδώ οι τιμές των συντελεστών δίνονται στον πίνακα 5.1.

	m= -1 n= -1,0,1,2,…	m= 0,1,2,… n= -1	m= 0,1,2,… n= 0,1,2,…
$a_{mn}(x)$	$\langle Z_{-1},Z_n\rangle$	$\langle Z_m,Z_{-1}\rangle$	$\delta_{mn}\lVert Z_m\rVert^2$
$b_{mn}(x)$	$2\langle Z_{-1},\partial Z_n/\partial x\rangle$	$2\langle Z_m,\partial Z_{-1}/\partial x\rangle$	$2\langle Z_m,{}^{\partial Z_n}\!/_{\partial x}\rangle$ $+{}^{\partial d(x)}\!/_{\partial x}Z_m(-d)Z_n(-d)$
$c_{mn}(x)$	$\langle Z_{-1},\Delta Z_n\rangle$	$\langle Z_m,\Delta Z_{-1}\rangle$ $+\left(1+{}^{\partial d(x)}\!/_{\partial x}\,{}^{\partial Z_{-1}(-d)}\!/_{\partial x}\right)Z_m(-d)$	$\langle Z_m,\Delta Z_n\rangle$ $+{}^{\partial d(x)}\!/_{\partial x}Z_m(-d)\,{}^{\partial Z_n(-d)}\!/_{\partial x}$

$\Delta={}^{\partial^2}\!/_{\partial z^2}+{}^{\partial^2}\!/_{\partial x^2}$ για n= 0,1,… : $\Delta Z_n={}^{\partial^2 Z_n}\!/_{\partial x^2}-(k_n)^2 Z_n$

$$\langle f,g\rangle=\int_{-d(x)}^{0} f(z)g(z)dz$$

$$\lVert f\rVert^2=\langle f,f\rangle$$

Πίνακας 5.1 Συντελεστές α_{mn}, b_{mn}, c_{mn} *(Athanassoulis & Belibassakis, 1999)*

Κατά τους Athanassoulis & Belibassakis (1999) μια σημαντική ιδιότητα του συστήματος (5.13) είναι ότι η λύση του παρουσιάζει πολύ γρήγορη εξασθένηση $|\varphi_n|\sim O\left(n^{-4}\right)$. Αυτό συνεπάγεται τη πολύ γρήγορη σύγκλιση της σειράς (5.10), πράγμα που σημαίνει ότι μπορεί να περικοπεί κρατώντας μόνο τους πρώτους όρους και να δίνει καλή ακρίβεια. Σε πρακτικές εφαρμογές με τοπικές κλίσεις πυθμένα που ξεπερνούν και το 100% έχει προκύψει ότι 4-5 πρώτοι όροι της σειράς τοπικών ιδιομορφών είναι αρκετοί για την προσέγγιση του πεδίου. Περαιτέρω, αγνοώντας όλους τους όρους της σειράς (5.10) εκτός από τον όρο n=0, το σύστημα (5.13) απλουστεύεται σε μια διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης ως προς το $\varphi_0(x)$ που είναι η τροποποιημένη εξίσωση ήπιας κλίσης (Massel 1993, Chamberlain & Porter 1995), η οποία γενικεύει την εξίσωση του Berkhoff (1972) και επεκτείνει την δυνατότητα εφαρμογής της, καλύπτοντας περιπτώσεις διάδοσης πάνω από πυθμένα με μεταβολές εντονότερες της ήπιας κλίσης.

5.3. Επέκταση θεωρίας Stokes δεύτερης τάξης

Σε συνέχεια της προηγούμενης ενότητας εδώ θα παρουσιαστεί η επέκταση του αρχικού γραμμικού μοντέλου με τη θεωρία Stokes δεύτερης τάξης. Η διαίρεση του

πεδίου σε τρείς τομείς με τη βαθυμετρία που περιγράφηκε διατηρείται. Ο υπολογισμός των μη γραμμικών όρων γίνεται το δεύτερο τμήμα μεταβαλλόμενης βαθυμετρίας. Για τη λύση του μη γραμμικού προβλήματος χρειάζεται να ορισθούν ένα κύμα και οι συνθήκες που καθορίζουν τη συμπεριφορά της εξίσωσης δυναμικού 2ης τάξης στο άπειρο, τα ανοικτά όρια του πεδίου. Ο αναπαραγόμενος κυματισμός θεωρείται σύνθεση ενός ελεύθερου αρμονικού κύματος διπλάσιας κυκλικής συχνότητας και του δεσμευμένου κύματος 2ης τάξης, τυχαίου εύρους (Molin 1979, Massel 1983, Rhee, 1997).

Η εξίσωση της συνάρτησης δυναμικού που περιγράφει το κύμα αποτελείται από τη γραμμική συνιστώσα ($\Phi_{(1)}(x,z;t)$), από την επέκταση 2ης τάξης της γραμμικής συνιστώσας ($\Phi_{(2b)}(x,z;t)$) και του δεσμευμένου, στην επέκταση 2ης τάξης, κύματος ($\Phi_{(2f)}(x,z;t)$). Το τελευταίο στοιχείο δίνει τη δυνατότητα προσομοίωσης φαινομένων μετάδοσης, διάθλασης, ανάκλασης μη γραμμικών κυματισμών πάνω από πυθμένα μεταβλητού βάθους. Στην εξίσωση αυτή του δυναμικού αντιστοιχεί η εξίσωση ελεύθερης επιφάνειας ($\zeta(x,z;t)$) και μια μέση, στο χρόνο, ροή μάζας (M_{av}^{w}). Έτσι για την περίπτωση περιοδικού συστήματος 2ης τάξης η εξίσωση δυναμικού είναι,

Γενικευμένη έκφραση της συνάρτησης δυναμικού :

$$\begin{aligned}\Phi(x,z;t) &= \Phi_{(1)}(x,z;t)+\Phi_{(2b)}(x,z;t)+\Phi_{(2f)}(x,z;t)= \\ &= -\frac{gH}{2\omega}\frac{\cosh\left(k_0^{(1)}(z+d_1)\right)}{\cosh\left(k_0^{(1)}d_1\right)}\mathrm{Re}\left(iA_0\,\mathrm{e}^{i\left(k_0^{(1)}x-\omega t\right)}\right) \\ &\quad -\frac{3H^2\omega}{32}\frac{\cosh\left(2k_0^{(1)}(z+d_1)\right)}{\sinh^4\left(k_0^{(1)}d_1\right)}\mathrm{Re}\left(iA_0^{\,2}\,\mathrm{e}^{2i\left(k_0^{(1)}x-\omega t\right)}\right) \\ &\quad -\frac{H^2\omega}{4}\frac{\cosh\left(\kappa_0^{(1)}(z+d_1)\right)}{\cosh\left(\kappa_0^{(1)}d_1\right)}\mathrm{Re}\left(\Lambda_0\,\mathrm{e}^{i\left(\kappa_0^{(1)}x-2\omega t\right)}\right)\end{aligned} \tag{5.14}$$

Εξίσωση ελεύθερης επιφάνειας, ζ

$$\begin{aligned}\zeta\ (x;t) &= -\frac{H}{8}\frac{1}{\sinh\left(2k_0^{(1)}h_1\right)}+\frac{H}{2}\mathrm{Re}\left(A_0\exp\left(i\left(k_0^{(1)}x-\omega t\right)\right)\right) \\ &\quad +\frac{H^2k_0^{(1)}}{16}\frac{\cosh\left(k_0^{(1)}h_1\right)\left(2+\cosh\left(2k_0^{(1)}h_1\right)\right)}{\sinh^3\left(k_0^{(1)}h_1\right)}\mathrm{Re}\left(A_0^{\,2}\exp\left(2i\left(k_0^{(1)}x-\omega t\right)\right)\right) \\ &\quad -\frac{H^2\omega^2}{2g}\mathrm{Re}\left(i\Lambda_0\exp\left(i\left(\kappa_0^{(1)}x-2\omega t\right)\right)\right)\end{aligned} \tag{5.15}$$

Όπου Λ_0, τυχαία παράμετρος που ελέγχει τη φάση και το εύρος της συνιστώσας $\Phi_{(2f)}$ $|\Lambda_0| = O(1)$. Οι μεταβλητές $k_0^{(1)}$, $\kappa_0^{(1)}$ αποτελούν την έκφραση του αριθμού κύματος, υπολογίζονται δε ως λύσεις των σχέσεων διασποράς,

$$\frac{\omega^2 d_1}{g} = k_0^{(1)} d_1 \tanh(k_0^{(1)} d_1) \tag{5.16}$$

$$\frac{4\omega^2 d_1}{g} = \kappa_0^{(1)} d_1 \tanh(\kappa_0^{(1)} d_1) \tag{5.17}$$

Δεδομένου ενός μικρού συντελεστή μη γραμμικότητας, ε (*nonlinearity parameter*) για το δυναμικό της ταχύτητας ισχύει η εξίσωση (5.18). Όπως φαίνεται, συντίθεται από τον όρο πρώτης τάξης και την επέκταση 2ης τάξης. Ανάλογη έκφραση ισχύει και για την περιγραφή της ελεύθερης επιφάνειας.

$$\Phi(x,z,t;\varepsilon) = \varepsilon\phi_1(x,z;t) + \varepsilon^2\phi_2(x,z;t) \tag{5.18}$$

$$\zeta(x,t;\varepsilon) = \varepsilon\zeta_1(x;t) + \varepsilon^2\zeta_2(x;t) \tag{5.19}$$

Όπου η παράμετρος μη γραμμικότητας δίνεται από τη σχέση $\varepsilon = \omega^2 H/g$. Η χρονική εξάρτηση των όρων ϕ_1, ϕ_2 της εξίσωσης (5.18) φαίνεται στις σχέσεις (5.20), (5.21) ενώ των όρων ζ_1,ζ_2 στις σχέσεις (5.22), (5.23).

$$\phi_1 = \mathrm{Re}\left(\Xi\varphi_1(x,z;\mu)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\right) \tag{5.20}$$

$$\phi_2 = \mathrm{Re}\left(\Xi^2\varphi_{20}(x,z;\mu)\right) + \mathrm{Re}\left(\Xi^2\varphi_{22}(x,z;\mu_2)e^{-2i\omega t}\right) \tag{5.21}$$

$$\varepsilon\zeta_1(x,z;t) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}H\varphi_1(x,z=0;\mu)e^{-i\omega t}\right) \tag{5.22}$$

$$\varepsilon^2\zeta_2(x;t) = \varepsilon^2\left[\zeta_{20}(x) + \mathrm{Re}\left(\zeta_{22}(x)e^{-2i\omega t}\right)\right] \tag{5.23}$$

Όπου ο συντελεστής Ξ δίνεται ως $\Xi = -i\dfrac{g^2}{\omega^3}$, $\mu = \omega^2/g$, $\mu_2 = (2\omega)^2/g$. Με δείκτη *20* επισημαίνονται οι όροι που αναφέρονται σε σταθερές συνθήκες και με *22* οι όροι που αναφέρονται σε μη σταθερές συνθήκες, των συνιστωσών διπλάσιας συχνότητας (*2ω*). Ως συνθήκες εισάγονται οι επιδράσεις ανάκλασης και διάθλασης/περίθλασης στη μετάδοση. Η ανάκλαση και η διάδοση εκφράζονται με τους συντελεστές A_R, A_T. Ορίζονται οι συντελεστές $G_{20}(x)$, $G_{22}(x)$ ως συναρτήσεις του όρου φ_1.

$$G_{20}(x) = \frac{1}{4}\left|\nabla\varphi_1(x,z=0)\right|^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\omega^2}{g}\right)^2\left|\nabla\varphi_1(x,z=0)\right|^2 \tag{5.24}$$

$$G_{22}(x) = -\frac{1}{4}\left(\nabla\varphi_1(x,z=0)\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\omega^2}{g}\right)^2\left(\nabla\varphi_1(x,z=0)\right)^2 \tag{5.25}$$

Η εξίσωση (5.23) γίνεται,

$$\varepsilon^2\zeta_2(x;t) = \left(\varepsilon\Xi\right)^2\left[\frac{G_{20}}{g} + \mathrm{Re}\left[\left(\frac{2i\omega}{g}\varphi_{22}(x,z=0) + \frac{G_{22}}{g}\right)e^{-2i\omega t}\right]\right] \tag{5.26}$$

Για τον υπολογισμό των όρων δεύτερης τάξης ας οριστούν αρχικά οι όροι (*forcing terms*) $F_{22}(x)$, $F_{20}(x)$, $\tilde{F}_{20}(x)$ στην περιοχή των συχνοτήτων.

$$F_{22}(x) = \frac{i\omega}{g}\left[\left(\nabla\varphi_1(x,0)\right)^2 - \frac{\varphi_1(x,0)}{2g}\left(-\omega^2\frac{\partial\varphi_1(x,0)}{\partial z} + g\frac{\partial^2\varphi_1(x,0)}{\partial z^2}\right)\right] \tag{5.27}$$

$$\tilde{F}_{20}(x) = -\frac{i\omega}{2g^2}\tilde{\varphi}_1(x,0)\left[-\omega^2\frac{\partial\varphi_1(x,0)}{\partial z} + g\frac{\partial^2\varphi_1(x,0)}{\partial z^2}\right] \tag{5.28}$$

$$F_{20}(x) = \mathrm{Re}\left(\tilde{F}_{20}(x)\right) = -\mathrm{Re}\left(\frac{i\omega}{2g}\tilde{\varphi}_1(x,0)\frac{\partial^2\varphi_1(x,0)}{\partial z^2}\right) \tag{5.29}$$

Όπου με ~ σημειώνονται οι συζυγείς μιγαδικοί. Οι εξισώσεις (5.27), (5.28), (5.29) ορίζονται για $x \in (-\infty, +\infty)$. Ο όρος $\tilde{\varphi}_1(x,0)$ δίνεται από τη σχέση,

$$\mathrm{Re}\left(i\tilde{\varphi}_1 \partial\varphi_1 / \partial z\right) = \mathrm{Re}\left(i\frac{\omega^2}{g}|\varphi_1|^2\right) \tag{5.30}$$

5.3.1. Όροι δεύτερης τάξης στις περιοχές σταθερού βάθους

Έχοντας την λύση του γραμμικού προβλήματος και δεδομένης της ανάλυσης των εξισώσεων (5.3), (5.4) υπολογίζονται οι όροι 2ης τάξης στους τομείς σταθερού βάθους. Αυτοί είναι οι $\varphi_{20}^{(i)}$ και $\varphi_{22}^{(i)}$ (*i=1,3*) δίνονται ως άθροισμα της δεσμευμένης και ελεύθερης συνιστώσας $S_{20,22}^{(i)}$ και $f_{20,22}^{(i)}$ αντίστοιχα.

$$\varphi_{22}^{(i)}(x,z) = S_{22}^{(i)}(x,z) + f_{22}^{(i)}(x,z) = \left(p_{22}^{(i)}(x,z) + e_{22}^{(i)}(x,z)\right) + f_{22}^{(i)}(x,z) \tag{5.31}$$

$$\varphi_{20}^{(i)}(x,z) = S_{20}^{(i)}(x,z) + f_{20}^{(i)}(x,z) = e_{20}^{(i)}(x,z) + f_{20}^{(i)}(x,z) \tag{5.32}$$

Οι όροι του δεύτερου και τελικά του τρίτου σκέλους δίνονται στην εργασία (*§4.2*) των Belibassakis &Athanassoulis (2002). Εν συντομία, οι όροι $S_{20,22}^{(i)}$ αντιστοιχούν στην ειδική λύση της μη ομογενούς συνθήκης ελεύθερης επιφάνειας, ενώ οι όροι $f_{20,22}^{(i)}$ στην γενική λύση του ομογενούς προβλήματος στους τομείς $D^{(1)}$, $D^{(3)}$. Οι όροι $S_{20,22}^{(i)}$ δίνονται από το άθροισμα όρων μετάδοσης $p_{20,22}^{(i)}$ και όρων απόσβεσης $e_{20,22}^{(i)}$. Οι μεταβλητές e, p, f υπολογίζονται αφού αποτελούν συναρτήσεις του αριθμού κύματος, του βάθους και της μεταβολής του.

5.3.2. Όροι δεύτερης τάξης στην περιοχή μεταβλητού βάθους

Κατά ανάλογο τρόπο ορίζονται και οι όροι $\varphi_{20}^{(2)}$ και $\varphi_{22}^{(2)}$ στο δεύτερο τμήμα.

$$\varphi_{22}^{(2)}(x,z) = S_{22}^{(2)}(x,z) + f_{22}^{(2)}(x,z) \tag{5.33}$$

$$\varphi_{20}^{(2)}(x,z) = S_{20}^{(2)}(x,z) + f_{20}^{(2)}(x,z) \tag{5.34}$$

Εδώ όμως η συνάρτηση $f_{22}^{(2)}(x,z)$ αποτελεί άγνωστο. Τοποθετείται στο άθροισμα $S_{22}^{(2)}(x,z) + f_{22}^{(2)}(x,z)$ ώστε αυτό να ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες που ορίζουν το πρόβλημα δεύτερης τάξης.

Επαναλαμβάνοντας την ανάλυση των εξισώσεων (5.3) και (5.13) προκύπτει ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων με άγνωστο τα πλάτη των ιδιομορφών, $\varphi_n(x)$. Η εξίσωση (5.13) συμπληρώνεται από τις συνθήκες των σχέσεων της εξίσωσης (5.55).

Οι συναρτήσεις των όρων δυναμικού δεύτερης τάξης δίνονται από τις εξισώσεις,

$$\varphi_{22}^{(2)}(x,z) = f_{-2,2}(x) z_{-2}^{(2)}(z;x) + f_{22}^{(2)}(x,z) = \sum_{n=-2}^{\infty} f_{n,2}(x) z_n^{(2)}(z;x) \tag{5.35}$$

$$\varphi_{20}^{(2)}(x,z) = f_{-2,0}(x) T_{-2}^{(2)}(z;x) + f_{20}^{(2)}(x,z) = \sum_{n=-2}^{\infty} f_{n,0}(x) T_n^{(2)}(z;x) \tag{5.36}$$

για $z \in \left[-d_2(x), 0\right]$, $x \in \left[a,b\right]$. Όπου,

$$\underset{n=0,1,2,...}{z_n^{(2)}}(z;x) = \frac{\cosh\left[\kappa_n^{(2)}(z+d_2(x))\right]}{\cosh\left(\kappa_n^{(2)} d_2(x)\right)} \tag{5.37}$$

$$z_{-2}^{(2)}(z;x) = \frac{\cosh\left[2k_0^{(2)}(z+d_2(x))\right]}{2k_0^{(2)}\sinh\left(k_0^{(2)} d_2(x)\right) - \mu_2 \cosh\left(2k_0^{(2)} d_2(x)\right)} \tag{5.38}$$

Η μεταβλητή $T_{-2}^{(2)}(z;x)$ καθορίζει την κατακόρυφη κατανομή της συνάρτησης στην ελεύθερη επιφάνεια και επιλέγεται ως τυχαία συνάρτηση των *(x, z)* αρκεί να ικανοποιεί τις συνθήκες της εξίσωσης (5.39).

$$\frac{\partial T_{-2}^{(2)}(z=0;x)}{\partial z} = 1, \quad \frac{\partial T_{-2}^{(2)}(z=-d_2(x);x)}{\partial z} = 0 \tag{5.39}$$

Οι συναρτήσεις $f_{-2,2}(x)$ $f_{-2,0}(x)$

$$f_{-2,2}(x) = F_{22}(x) \tag{5.40}$$

$$f_{-2,0}(x) = F_{20}(x) \tag{5.41}$$

Οι όροι $f_{22}^{(2)}(x)$, $f_{20}^{(2)}(x)$ δίνονται από τις σχέσεις,

$$f_{22}^{(2)}(x) = f_{-1,2}(x) z_{-1}^{(2)}(z;x) + \sum_{n=0}^{\infty} f_{n,2}(x) z_n^{(2)}(z;x) \tag{5.42}$$

$$f_{20}^{(2)}(x) = f_{-1,0}(x) T_{-1}^{(2)}(z;x) + \sum_{n=0}^{\infty} f_{n,0}(x) T_n^{(2)}(z;x) \tag{5.43}$$

Όπου,

$$\begin{aligned} T_n^{(2)}(z;x) &= \cos\left(n\pi z \big/ d_2(x) \right), \\ T_{-1}^{(2)}(z;x) &= Z_{-1}^{(2)}(z;x) \end{aligned} \tag{5.44}$$

Τέλος τα εύρη $f_{-1,r}(x)$ των τοπικών ιδιομορφών $f_{-1,r}(x) z_{-1}^{(2)}(z;x)$ *(r=0,2)* που ορίζουν την διόρθωση λόγω μεταβολής του πυθμένα, ορίζονται από τις σχέσεις,

$$f_{-1,r}(x) = \frac{\partial \varphi_{2r}^{(2)}(x, z=-d_2(x))}{\partial z} = \frac{\partial f_{2r}^{(2)}(x, z=-d_2(x))}{\partial z} \quad (r=0,2) \tag{5.45}$$

5.4. Οριακές συνθήκες

Οι οριακές συνθήκες για τον υδάτινο όγκο μεταξύ πυθμένα και ελεύθερης επιφάνειας περιγράφονται από τις συνθήκες ελεύθερης επιφάνειας και πυθμένα. Η

ροή εντός του όγκου αυτού περιγράφεται από την εξίσωση Laplace. Στους τομείς 1 και 3 το βάθος θεωρείται σταθερό και μεταβάλλεται στον δεύτερο. Το ρευστό θεωρείται ιδεατό και η ροή αστρόβιλη.

Στην απλή περίπτωση της γραμμικής θεωρίας η εξίσωση Laplace, εκφρασμένη σε όρους συνάρτησης δυναμικού σε επίπεδο δύο διαστάσεων είναι,

$$\frac{\partial^2\varphi(x,z)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi(x,z)}{\partial z^2}=0 \quad ,-d(x)<z<0 \text{ για } 0<x<\infty \tag{5.46}$$

Η συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας και μη ολίσθησης του αδιαπέρατου πυθμένα, επίσης εκφρασμένες σε όρους συνάρτησης δυναμικού, είναι,

$$\frac{\partial\varphi(x,z)}{\partial z}-\frac{\omega^2}{g}\varphi(x,z)=0 \qquad ,z=0 \text{ για } 0<x<\infty \tag{5.47}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{dd}{dx}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0 \qquad ,z=-d(x) \tag{5.48}$$

Οι συνθήκες που ορίζουν τη συνάρτηση δυναμικού στα ανοικτά όρια του υπολογιστικού πεδίου είναι,

$$\begin{aligned}\varphi(x,z)&\approx\left(\mathrm{e}^{ik_o^{(1)}x}+A_R e^{-ik_o^{(1)}x}\right)\frac{\cosh\left(k_0^{(1)}(z+d_1)\right)}{\cosh\left(k_0^{(1)}d_1\right)}\\ \varphi(x,z)&\approx A_T e^{-ik_o^{(3)}x}\frac{\cosh\left(k_0^{(3)}(z+d_3)\right)}{\cosh\left(k_0^{(3)}d_3\right)}\end{aligned} \tag{5.49}$$

Όπου A_R και A_T οι συντελεστές ανάκλασης και διάδοσης αντίστοιχα, $k_o^{(i)}$ $(i=1,3)$ οι αριθμοί κύματος για τα υποπεδία 1 και 3. Οι τιμές τους για την περίπτωση του γραμμικού προβλήματος δίνονται από την εξίσωση διασποράς (5.5). Οι οριακές συνθήκες ολοκληρώνονται εφαρμόζοντας τη συνέχεια της ταχύτητας και πίεσης στις δύο διεπιφάνειες.

$$\varphi^{(2)}=\varphi^{(1)},\ \frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial x}=\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial x} \text{ για } x=a \tag{5.50}$$

$$\varphi^{(2)}=\varphi^{(3)},\ \frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial x}=\frac{\partial\varphi^{(3)}}{\partial x} \text{ για } x=b \tag{5.51}$$

Προχωρώντας ένα βήμα έπειτα και επεκτείνοντας το αρχικά γραμμικό πρόβλημα με τη θεωρίας Stokes δεύτερης τάξης, τροποποιούνται οι οριακές συνθήκες όπως δίνονται από τις εξισώσεις (5.47), (5.48). Το νέο σύστημα οριακών συνθηκών που προκύπτει (Belibassakis & Athanassoulis, (2002)) είναι,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\partial|u|^2}{\partial t}+\frac{1}{2}u\cdot\nabla|u|^2=0,\quad z=\zeta(x;t) \text{ και} \tag{5.52}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}|u|^2+g\eta=0 \qquad ,\quad z=\zeta(x;t) \text{ συνθήκες ελεύθερης επιφάνειας} \tag{5.53}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{dd}{dx}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0 \qquad , \; z=-\zeta(x) \;\; \textit{συνθήκη πυθμένα} \qquad (5.54)$$

Ενώ οι οριακές συνθήκες στα ανοικτά όρια δίνονται από τις σχέσεις της εξίσωσης (5.49), εισάγονται νέες οριακές συνθήκες για τους όρους επέκτασης σε δεύτερη τάξη. Αυτές αφορούν το πρόβλημα σε σταθερές συνθήκες και εφαρμόζονται ως απόρροια της ισχύος της αρχής διατήρησης της μάζας. Δίνονται ως εξής,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi_{20}(x,z)}{\partial x}&\to u_{20}^{-\infty} \quad ,x\to-\infty\\ \frac{\partial\varphi_{20}(x,z)}{\partial x}&\to u_{20}^{+\infty} \quad ,x\to+\infty\end{aligned} \qquad (5.55)$$

Στον πρώτο τομέα ($D^{(1)}$) υφίστανται ***(α)*** το βασικό αρμονικό κύμα (1ης τάξης) με το συνδυασμένο αναπαραγόμενο (*incident*) κύμα γνωστής συχνότητας και φάσης, ***(β)*** το ανακλώμενο αρμονικό κύμα 1ης τάξης άγνωστης φάσης και εύρους, ***(γ)*** το αρμονικό κύμα 2ης τάξης, διπλής συχνότητας, σχετιζόμενο με το (α), ***(δ)*** το αρμονικό κύμα 2ης τάξης, διπλής συχνότητας, σχετιζόμενο με το (β), ***(ε)*** το αναπαραγόμενο (*incident*) ελεύθερο αρμονικό κύμα 2ης τάξης, διπλής συχνότητας, γνωστού εύρους και φάσης και ***(στ)*** το συντιθέμενο ελεύθερο αρμονικό κύμα 2ης τάξης, διπλής συχνότητας με άγνωστο εύρος και φάση.

Στον τρίτο τομέα ($D^{(3)}$) αναπτύσσονται ***(ζ)*** το διαδιδόμενο (*transmitted*) αρμονικό κύμα 1ης τάξης άγνωστου εύρους και φάσης, ***(η)*** το διαδιδόμενο αρμονικό κύμα 2ης τάξης, διπλής συχνότητας, σχετιζόμενο με το (ζ) και το συντιθέμενο ελεύθερο αρμονικό 2ης τάξης άγνωστου εύρους και φάσης.

Συνοψίζοντας από τις ενότητες 5.1, 5.2, 5.3 και 5.4, οι εξισώσεις που ορίζουν τις συναρτήσεις δυναμικού περιγράφονται στον πίνακα 5.2 (μεταφορά από την εργασία των Belibassakis & Athanassoulis, 2002).

$-\infty < x < +\infty$	γραμμικό πρόβλημα (*συχνότητας ω*)	πρόβλημα 2ης τάξης σε μη σταθερές συνθήκες (*συχνότητας 2ω*)	πρόβλημα 2ης τάξης σε σταθερές συνθήκες (*συχνότητας ω*)
$d < z < 0$	$\Delta\varphi_1 = 0$	$\Delta\varphi_{22} = 0$	$\Delta\varphi_{20} = 0$
$z = 0$	$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}-\frac{\omega^2}{g}\varphi_1 = 0$	$\frac{\partial\varphi_{22}}{\partial z}-\left(\frac{\omega^2}{g}\right)^2\varphi_{22} = F_{22}$	$\frac{\partial\varphi_{20}}{\partial z} = \tilde{F}_{20}$
$z = -d(x)$	$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}-\frac{dd(x)}{dx}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial\varphi_{22}}{\partial z}-\frac{dd(x)}{dx}\frac{\partial\varphi_{22}}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial\varphi_{20}}{\partial z}-\frac{dd(x)}{dx}\frac{\partial\varphi_{20}}{\partial x} = 0$

Πίνακας 5.2 Το γραμμικό πρόβλημα και οι όροι επέκτασης (επίλυση στο πεδίο των συχνοτήτων, phase average model) (*Belibassakis & Athanassoulis, 2002*)

5.5. Εισαγωγή θραύσης

Στο εξεταζόμενο υπολογιστικό μοντέλο συμπεριλαμβάνονται, όπως αναφέρθηκε, επιδράσεις που μειώνουν την κυματική ενέργεια. Τέτοιες είναι η τριβή μεταξύ πυθμένα και του υδάτινου σώματος (κύματος) και η μείωση του βάθους, κατά

συνέπεια η θραύση κυματισμών. Οι μεταβολές αυτές της κυματικής ενέργειας εισάγονται ως πρόσθετοι όροι στην σχέση (5.13) και αφορούν τον όρο $\varphi_o(x)$, αφού αυτός είναι που περιγράφει την σκέδαση του κύματος. Έτσι η αρχική σχέση διαμορφώνεται ως εξής,

$$\sum_{n=-1}^{\infty}\left[a_{mn}(x)\frac{\partial^2\varphi_n(x)}{\partial x^2}+b_{mn}(x)\frac{\partial\varphi_n(x)}{\partial x}+\left(c_{mn}(x)+i\gamma(x)k_o(x)\delta_{mn}\right)\varphi_n(x)\right]=0 \qquad (5.56)$$

$$m=-1,0,1,...,x\in(a,b)$$

Όπου δ_{mn} είναι το δέλτα του *Kronecker* και γ είναι ο συντελεστής απόσβεσης. Ειδικότερα για το συντελεστή απόσβεσης, κατά τον Massel (1992) συμπεριλαμβάνει την τριβή του πυθμένα και τη θραύση του κύματος κατά τη διάδοση του, εκφραζόμενα με τους συντελεστές $\gamma_f(x)$ $\gamma_b(x)$ αντίστοιχα. Η ανάλογη σχέση είναι,

$$\gamma(x)=\gamma_f(x)+\gamma_b(x) \qquad (5.57)$$

Αν $u_b(x)$ είναι η ταχύτητα τροχαϊκού του κύματος στον πυθμένα, πάνω από το οριακό στρώμα, ο συντελεστής απόσβεσης λόγω τριβής, $\gamma_f(x)$ εκφράζεται από τη σχέση,

$$\gamma_f(x)=\frac{16f_w}{3\pi}\frac{|u_b(x)|^3}{gC_g(x)H^2(x)} \qquad (5.58)$$

όπου $H(x)$ το τοπικό ύψος κύματος, $C_g(x)$ η τοπική ταχύτητα ομάδας και f_w ο συντελεστής τριβής. Ο συντελεστής τριβής σε συνθήκες τυρβώδους ροής εξαρτάται από την τραχύτητα του πυθμένα και είναι,

- σε φυσικές συνθήκες, $0.1<f_w<0.2$ (*Nelson, 1996*)
- για αμμώδη πυθμένα, $f_w=0.01$ (*Longuet-Higgins (1970), Dingemans (1997)*)

Για τις ανάγκες της παρούσας εργασίας δεν λαμβάνεται υπόψη η επίδραση της τριβής στο οριακό στρώμα μεταξύ πυθμένα και υδάτινης μάζας. Έτσι απαλείφεται ο σχετικός όρος από την εξίσωση (5.57).

Ο συντελεστής απόσβεσης λόγω θραύσης κατά τους Massel and Gourlay (2000) δίνεται ως,

$$\gamma_b(x)=\frac{a\omega}{\pi}\frac{\sqrt{gd(x)}H(x)}{C(x)C_g(x)d(x)} \qquad (5.59)$$

Σχέση που ισχύει όταν ισχύει η ανισότητα $\frac{H(x)}{d(x)}>\frac{H_m(x)}{d(x)}$ (κριτήριο θραύσης), διαφορετικά ο συντελεστής $\gamma_b(x)$ είναι ίσος με το μηδέν. Όπου $C(x)$ είναι τοπική ταχύτητα φάσης, για την οποία ισχύει ότι $C(x)=\omega / k(x)$, $H_m(x)$ η μέγιστη τιμή του ύψους κύματος πριν τη θραύση του και a εμπειρική σταθερά, μεταβλητές οριζόμενες στην εργασία των Massel and Gourlay (2000). Η εκτίμηση του λόγου $H_m(x)/d(x)$ γίνεται βάσει της κλίσης του πυθμένα, συγκεκριμένα είναι,

$$\frac{H_m(x)}{d(x)} = \begin{cases} 0,937\left|\frac{dd(x)}{dx}\right|^{0.155}\left(\frac{H}{L}\right)^{-0.13}, & \alpha\nu \quad \left|\frac{dd(x)}{dx}\right| > 0,025 \\ \frac{-1+\sqrt{1+0.015d_*^{-2,5}}}{0.01654d_*^{-1,25}}, & \alpha\nu \quad \left|\frac{dd(x)}{dx}\right| \le 0,025 \end{cases} \tag{5.60}$$

όπου $d_* = d / gT^2$. Ο εμπειρικός συντελεστής *α* αποτελεί συνάρτηση της κλίσης πυθμένα (*dh/dx*) και της παραμέτρου μη γραμμικότητας, F_{co}. Υπολογίζεται από τη σχέση,

$$a = \left(0,45 + 0,1\frac{dd(x)}{dx}\right)\sqrt{\frac{F_{co}-100}{380}} \text{ , αν } F_{co}>100 \tag{5.61}$$

διαφορετικά *α=0*, ενώ για την παράμετρο μη γραμμικότητας F_{co} ισχύει,

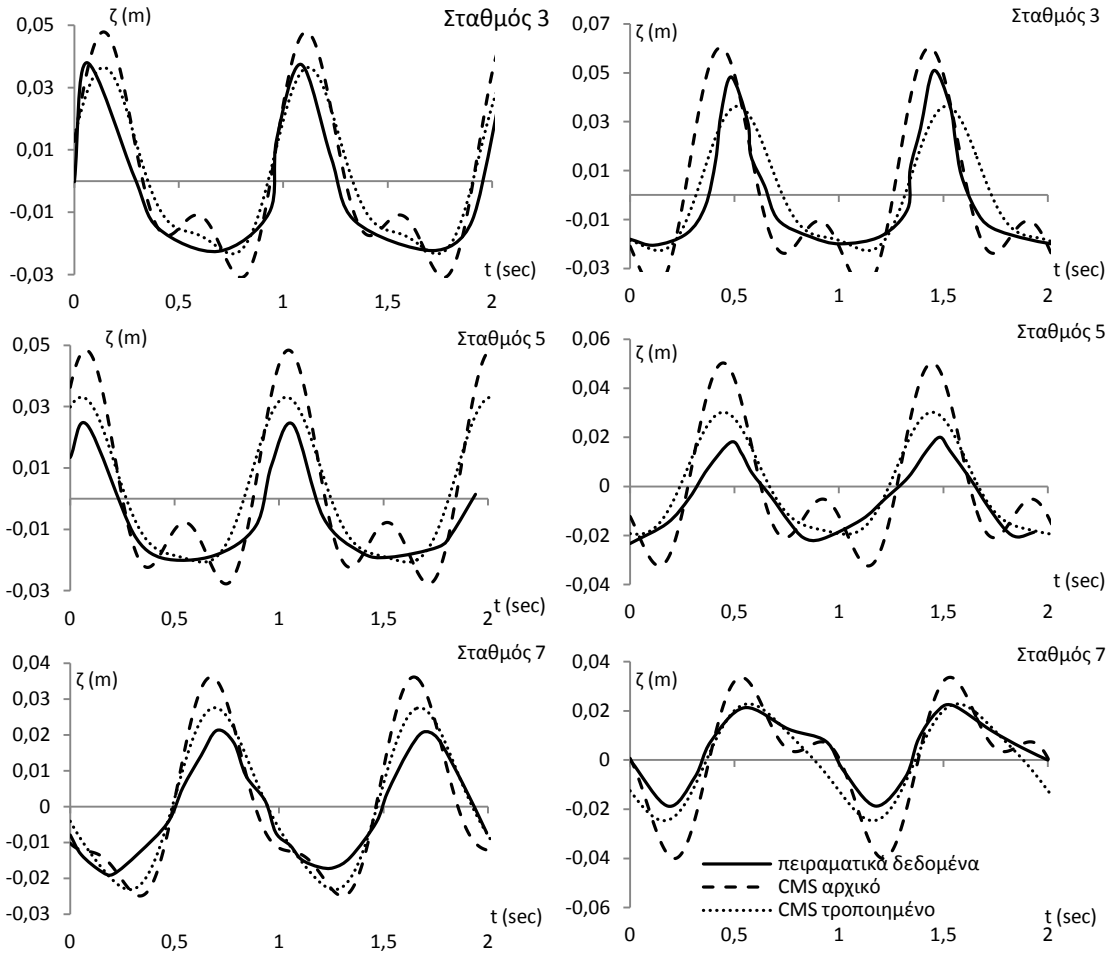
$$F_{c0} = \sqrt{\frac{H}{d_{\min}}}\left(T\sqrt{g / d_{\min}}\right)^{5/2} \tag{5.62}$$

5.6. Τροποποίηση θραύσης στο μοντέλο των Belibassakis & Athanassoulis

Η χρήση του κριτηρίου θραύσης όπως αναλύθηκε στην προηγούμενη ενότητα είχε ως αποτέλεσμα την υπερεκτίμηση του ύψους κύματος στις περιπτώσεις θραύσης της πρώτης διάταξης, όπου στον πυθμένα υπάρχει εμπόδιο. Ωστόσο τα αποτελέσματα για μη θραυόμενα κύματα και αυτά της δεύτερης διάταξης τα αποτελέσματα ήταν ικανοποιητικά (παρουσιάζονται στο κεφάλαιο 6).

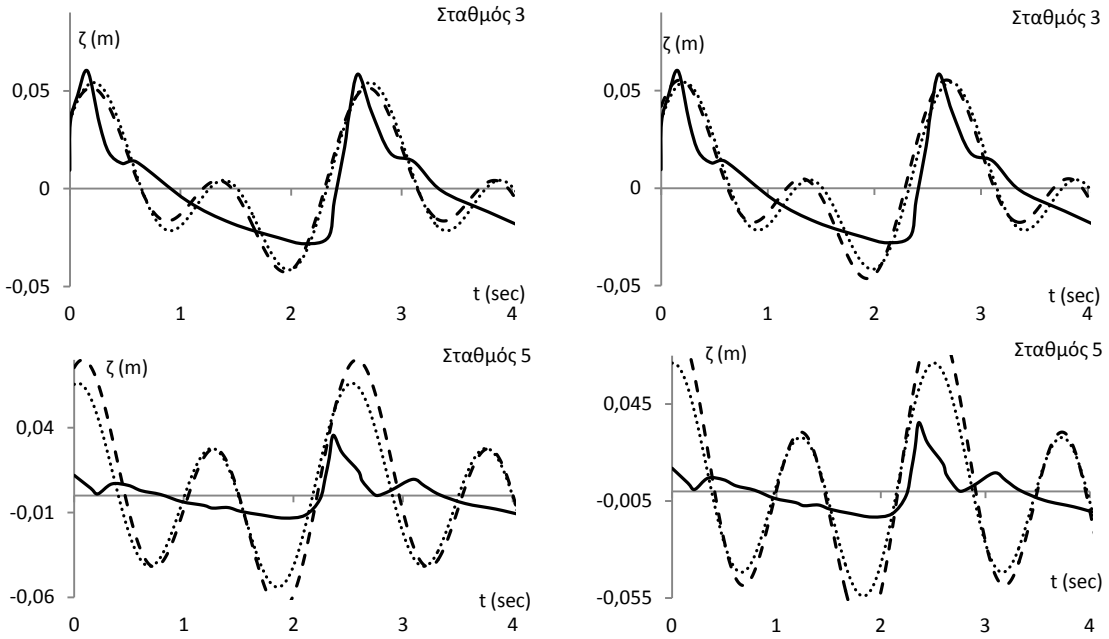
Η υπερεκτίμηση αυτή αφορά τόσο την γραμμική συνιστώσα όσο και την αρμονική συνιστώσα δεύτερης τάξης. Για το λόγο αυτό επιχειρήθηκε η τροποποίηση του κριτηρίου θραύσης στοχεύοντας σε μια πιο έντονη εκδήλωση της θραύσης. Η τροποποίηση αυτή έγινε μεταβάλλοντας τον λόγο $H_{min}(x)/d(x)$ με την εισαγωγή ενός σταθερού συντελεστή *α*. Το ίδιο έγινε και στον συντελεστή απόσβεσης γ(x) με την εισαγωγή ενός συντελεστή *β*. Διερεύνηση έγινε αλλάζοντας, αρχικά, μία από τις δύο παραμέτρους με την άλλη να μένει σταθερή. Έπειτα μελετήθηκαν τα αποτελέσματα της ταυτόχρονης μεταβολής των δύο παραμέτρων.

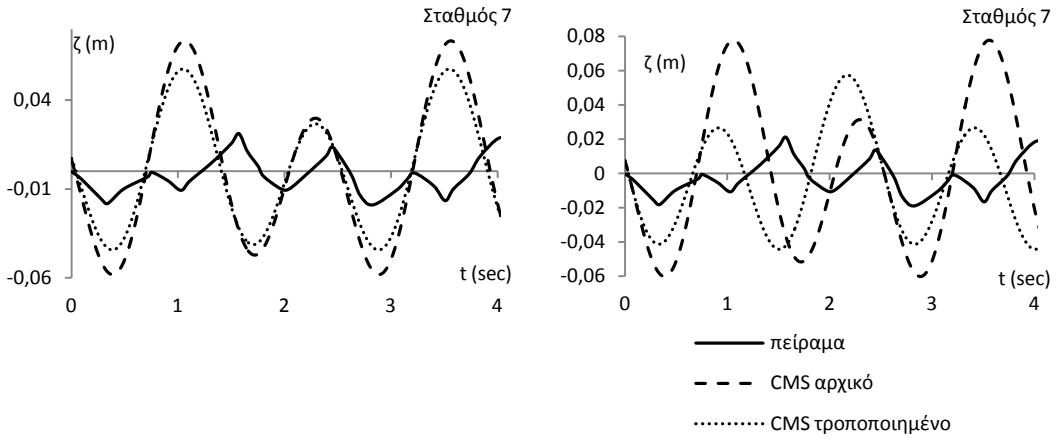
Διαπιστώθηκε ότι η μείωση του λόγου $H_{min}(x)/d(x)$ είχε σαν αποτέλεσμα την μείωση του συντιθέμενου κυματισμού, ενώ ένας μεγαλύτερος συντελεστής απόσβεσης *γ(x)* οδηγούσε στην μείωση της γραμμικής συνιστώσας. Επίσης διαπιστώθηκε ότι η παράμετρος $H_{min}(x)/d(x)$ είναι πιο ευαίσθητη σε μεταβολές και συνεπάγεται μεγαλύτερη απόσβεση ενέργειας. Το αντίθετο παρατηρήθηκε για τον συντελεστή απόσβεσης. Έτσι τελικά προτείνεται και χρησιμοποιούνται οι τιμές (0,3, 1) για τις τιμές των (*α*, *β*). Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στα ακόλουθα διαγράμματα *ζ(t)*.



Σχήμα 5.2 Στάθμη ελεύθερης επιφάνειας, ζ(t) για βραχέα κύματα - τροποποίηση κριτηρίου θραύσης του C.M.S (διάταξη 1, θραύση κύλισης αριστερά, θράση εκτίναξης δεξιά, Beji & Battjes, 1993, 1994)

Αν και η εισαγωγή συντελεστών μεταβολής οδήγησε σε αισθητή βελτίωση, προτείνεται η χρήση διαφορετικού τρόπου προσέγγισης, αφού η χρήση συντελεστών υστερεί θεωρητικής τεκμηρίωσης.





Σχήμα 5.3 Στάθμη ελεύθερης επιφάνειας, ζ(t) για μακρά κύματα - τροποποίηση κριτηρίου θραύσης του C.M.S (διάταξη 1, θραύση κύλισης αριστερά, θράση εκτίναξης δεξιά, Beji & Battjes, 1993, 1994)

Βιβλιογραφία πέμπτου κεφαλαίου

Athanassoulis, G.A. & Belibassakis, K.A., 1999, "A consistent coupled-mode theory for the propagation of small-amplitude water waves over variable bathymetry regions," *J. Fluid Mech*. vol. 389, 275-301.

Belibassakis, K.A. Athanassoulis, G.A., 2002, "Extension of second-order Stokes theory to variable bathymetry,*" Journal of Fluid Mechanics*, vol. 464, 35-80.

Belibassakis K.A., Th.P. Gerostathis and Athanassoulis G.A., 2007, "A coupled-mode technique for the prediction of wave-induced set-up and mean flow in variable bathymetry domains*." 26th Int. Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, OMAE2007*, San Diego, USA.

Berkhoff, J.C.W., 1972, "Computation of combined refraction-diffraction*." Proc. 13th Conf. Coastal Engng, Vancouver*, ASCE, vol.2, 471-490.

Chamberlain P.G. and Porter D., 1995, "The modified mild-slope equation*." J. Fluid Mech.* vol. 291, 393-407.

Dingemans, M., 1997, *Water wave propagation over uneven bottoms*. World Scientific.

Gourlay, M.R. , 1996, "Wave set-up on coral reefs. 1. Set-up and wave generated flow on an idealised two-dimensional horizontal reef." *J. Coastal Engineering*, vol. 27, 161-193

Gourlay, M.R. , 1996, "Wave set-up on coral reefs. 2. Set-up on reefs with various profiles." *J. Coastal Engineering*, vol. 28, 17-55.

Hazewinkel, Michiel, ed., 2001, Sturm-Liouville theory, *Encyclopedia of Mathematics*, Springer (και ηλεκτρονικά στην διεύθυνση: *http://www.encyclopediaofmath.org/index.php/Sturm%E2%80%93Liouville_theory*)

Longuet-Higgins, M.S., 1970, "Longshore currents generated by obliquely incident sea waves." *J. Geoph. Research*, vol. 75, 6790-6801.

Massel, S., 1992, "Inclusion of wave breaking mechanism in a modified mild-slope model," *Proc. IUTAM Symposium on Breaking Waves*, Sydney, 319-324.

Massel, S, 1993, "Extended refraction-diffraction equations for surface waves." *J. Coastal Engineering*, vol. 19, 97-126.

Massel, S., Brinkman R.M., 2001, "Wave-induced set-up and flow over shoals and coral reefs Part 1. A simplified bottom geometry," *Oceanologia* vol. 43(4), 373-388.

Massel, S., Gourlay, M.R. , 2000, "On the modeling of wave breaking and set-up on coral reefs." *J. Coastal Engineering*, vol. 39, 1-27.

Molin, B., 1979, "Second-order diffraction loads upon three-dimensional bodies." *Appl. Ocean Research*, vol. 1, 197-202.

Mei, C.C., 1983, *The applied dynamics of ocean surface waves*. (second edition, 1996), World Scientific.

Nelson, R.C. , 1996, "Hydraulic roughness of coral reef platforms," *Appl. Ocean Research*, vol. 18, 265-274.

Rhee, J. P., 1997, "On the transmission of water waves over a shelf." *Appl. Ocean Research*, vol. 19, 161-169.

Wehausen, J. and Laitone, E., 1960, *Surface Waves*. Encyclopedia of Physics, *FD III 9, Springer-Verlag.*

Κεφάλαιο 6

Παρουσίαση αποτελεσμάτων

Στα κεφάλαια 3, 4 και 5 συζητήθηκε η εφαρμογή των τριών αριθμητικών υπολογιστικών ομοιωμάτων που εξετάζονται στα πλαίσια αυτής της εργασίας. Τα δύο πρώτα (Chondros & Memos, 2012 και Co.Br.A.S.) λειτουργούν με ορισμένες παραδοχές, δίνοντας λύση στις αρχικές υπερβολικές διαφορικές εξισώσεις. Το τρίτο (των Belibassakis & Athanassoulis) αποτελεί εφαρμογή της θεωρίας Stokes, περιορίζεται όμως στη επέκταση 2ης τάξης. Η επίλυση αυτού γίνεται στην περιοχή των συχνοτήτων. Στο κεφάλαιο αυτό λοιπόν θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα της εφαρμογής τους για τις πειραματικές διατάξεις που περιγράφηκαν στο κεφάλαιο 2. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται αρχικά σε σύγκριση με πειραματικά δεδομένα και ακολουθεί η μεταξύ τους σύγκριση. Οι συγκρίσεις γίνονται ξεχωριστά επιδιώκοντας την ευκρινέστερη παρουσίαση τους.

6.1. Αποτελέσματα προσομοίωσης του ομοιώματος των Belibassakis & Athanassoulis

6.1.1. Αποτελέσματα για το πείραμα των Beji & Battjes, 1993, 1994

Στα διαγράμματα που ακολουθούν παρουσιάζεται η χρονοσειρά της στάθμης ελεύθερης επιφάνειας, *ζ(t)* για την περίπτωση των μονοχρωματικών κυμάτων από τα πειραματικά δεδομένα και όπως προέκυψε από την εφαρμογή του υπολογιστικού ομοιώματος των Belibassakis & Athanassoulis (εντός των επόμενων κεφαλαίων θα αναφέρεται ως C.M.S.: coupled modes system).

Αρχίζοντας παραθέτονται τα διαγράμματα της *ζ(t)* για το πείραμα των Beji & Battjes (1993, 1994). Τα δεδομένα του πειράματος έχουν αναλυθεί στο κεφάλαιο 2. Τα δεδομένα εισόδου για το μοντέλο C.M.S. συνοψίζονται στον πίνακα *6.1*. Οι

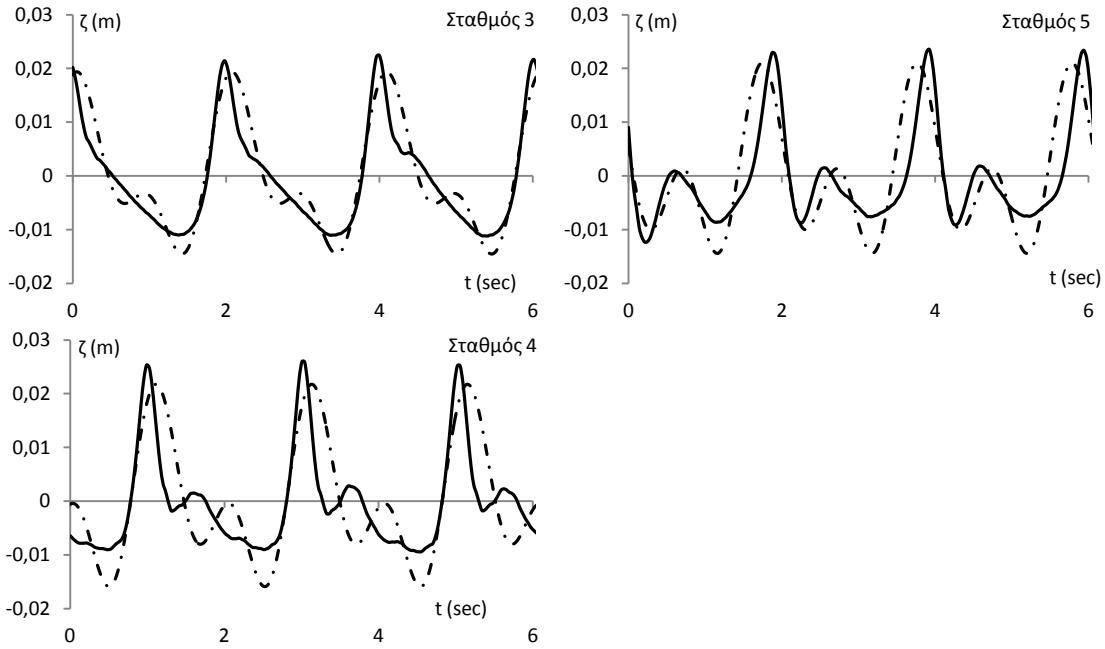
σταθμοί που εξετάζονται για την περίπτωση των μη θραυόμενων μονοχρωματικών κυμάτων είναι οι σταθμοί 2 ως 7. Για τα θραυόμενα μονοχρωματικά κύματα εξετάζονται τα αποτελέσματα των σταθμών 1,3,5 και 7. Ο λόγος που χρησιμοποιούνται οι μετρήσεις μόνο αυτών των σταθμών είναι διπλός. Πρώτον οι μετρήσεις που αναφέρονται ως πειραματικά δεδομένα λαμβάνονται μετά από ψηφιοποίηση των αντίστοιχων διαγραμμάτων των δύο εργασιών (Beji & Battjes, 1993, 1994). Τα διαγράμματα αυτά περιορίζονται στους προαναφερόμενους σταθμούς. Δεύτερον, όπως γίνεται αντιληπτό οι μετρήσεις αυτές αφορούν σημεία στα οποία επικεντρώνεται το ενδιαφέρον. Δηλαδή αυτά είναι η αρχή και το τέλος της κατάντη και ανάντη παρειάς της τραπεζοειδούς διατομής (σταθμοί 1 και 7) και η αρχή και το τέλος της στέψης (σταθμοί 3 και 5). Οι μετρήσεις του σταθμού 1 και του σταθμού 2, για θραυόμενα και μη μονοχρωματικά κύματα αντίστοιχα, ταυτίζονται σε κάθε περίπτωση. Αυτό γιατί χρησιμοποιούνται ως σημείο αναφοράς, ώστε να είναι συγκρίσιμες οι μετρήσεις πειράματος και μοντέλου. Χρησιμοποιήθηκε χωρικό βήμα, Δx=0,025m και χρονικό βήμα, Δt=0,0025s ενώ ο χρόνος προσομοίωσης είναι 10s.

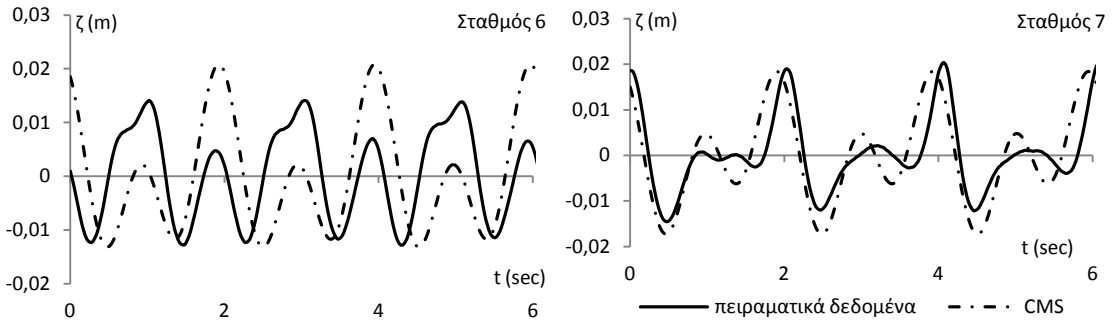
Περίπτωση	H (m)	T(sec)
μη θραυόμενα μονοχρωματικά κύματα	0.02	2.02
“short spilling breakers”	0.058	1.01
“short plunging breakers”	0.068	0.999
“long spilling breakers”	0.042	2,5
“long plunging breakers”	0.05	2.5

Πίνακας 6.1 Δεδομένα εισόδου για το μοντέλο C.M.S. για το πείραμα των Beji & Battjes, 1993, 1994

Αρχικά για την περίπτωση των μη θραυόμενων μονοχρωματικών κυμάτων η στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας φαίνεται στα σχήματα 6.1(α) και (β).

Μη θραυόμενα κύματα

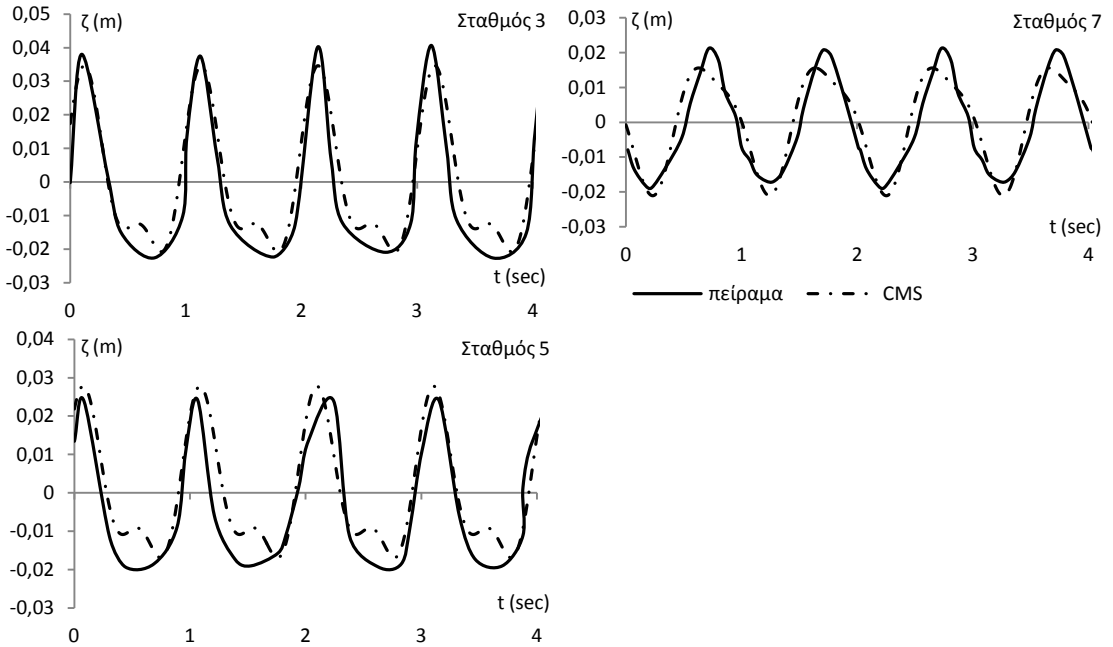




Σχήμα 6.1 Διακύμανση της ελεύθερης επιφάνειας, ζ ως προς το χρόνο, t: κύματα χωρίς θραύση (πείραμα και C.M.S.)

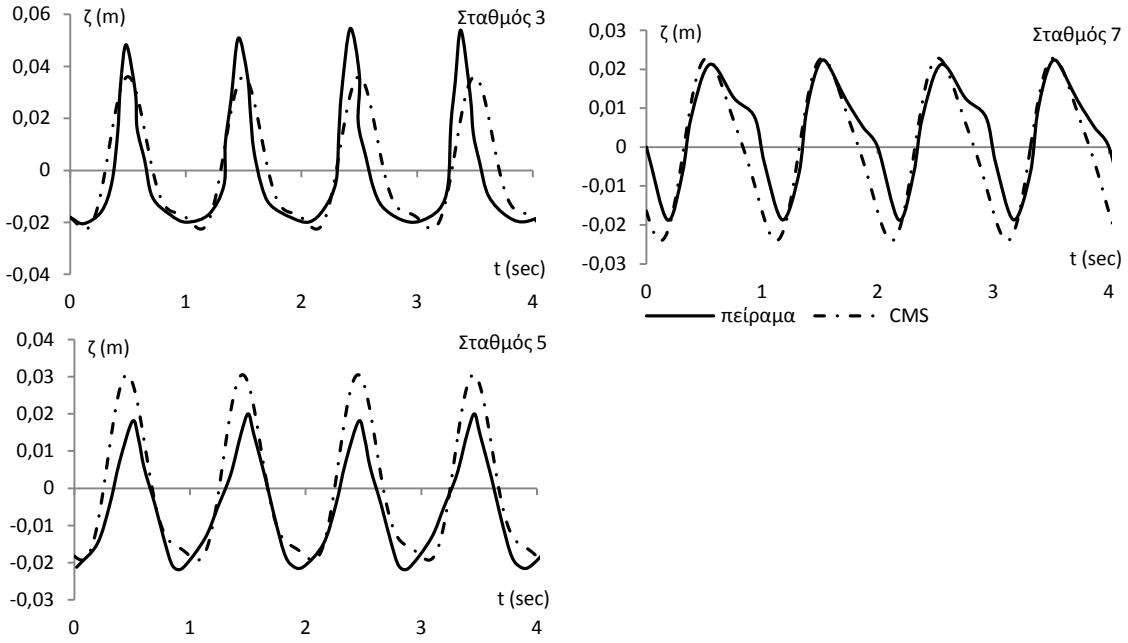
Έπειτα παρουσιάζεται η περίπτωση των μονοχρωματικών κυμάτων που υπόκεινται σε θραύση. Όπως έχει γίνει αντιληπτό διακρίνονται σε δύο κατηγορίες θραύσης και δύο κατηγορίες βραχέων και μακρών ανάλογα με τη σχέση μήκους και ύψους κύματος. Οι δύο κατηγορίες θραύσης είναι η θραύση κύλισης (*spilling breakers*) και θραύση εκτίναξης (*plunging breakers*). Στα σχήματα 6.2 και 6.3 φαίνεται η χρονική εξέλιξη της ελεύθερης επιφάνειας για τα βραχέα κύματα. Στα σχήματα 6.4 και 6.5 η χρονοσειρά της ζ(t) για τα μακρά κύματα.

Βραχέα κύματα - Θραύση κύλισης



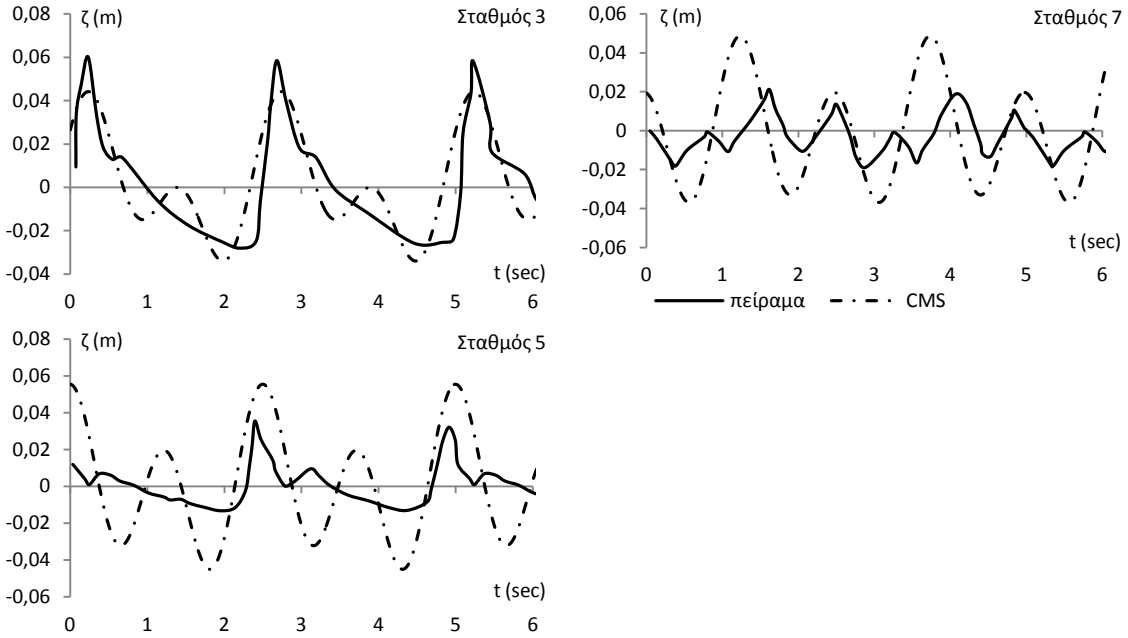
Σχήμα 6.2 Διακύμανση της ελεύθερης επιφάνειας, ζ ως προς το χρόνο, t: βραχέα κύματα, θραύση κύλισης (*short spilling breakers*- πείραμα και C.M.S.)

Βραχέα κύματα - Θραύση εκτίναξης



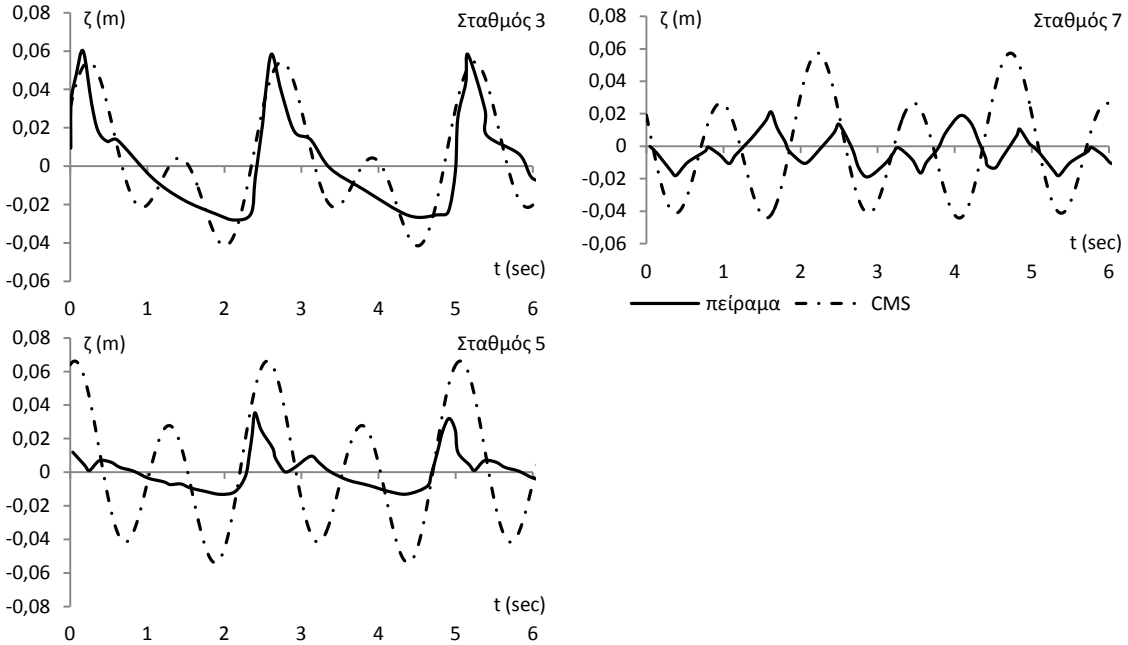
Σχήμα 6.3 Διακύμανση της ελεύθερης επιφάνειας, ζ ως προς το χρόνο, t: βραχέα κύματα, θραύση εκτίναξης (*short plunging breakers*- πείραμα και C.M.S.)

Μακρά κύματα - Θραύση κύλισης



Σχήμα 6.4 Διακύμανση της ελεύθερης επιφάνειας, ζ ως προς το χρόνο, t: μακρά κύματα, θραύση κύλισης (*long spilling breakers*- πείραμα και C.M.S.)

Μακρά κύματα - Θραύση εκτίναξης



Σχήμα 6.5 Διακύμανση της ελεύθερης επιφάνειας, ζ ως προς το χρόνο, t: μακρά κύματα, θραύση εκτίναξης (*long plunging breakers*- πείραμα και C.M.S.)

6.1.2. Αποτελέσματα για το πείραμα της διάταξης του εργαστηρίου HR Wallingford

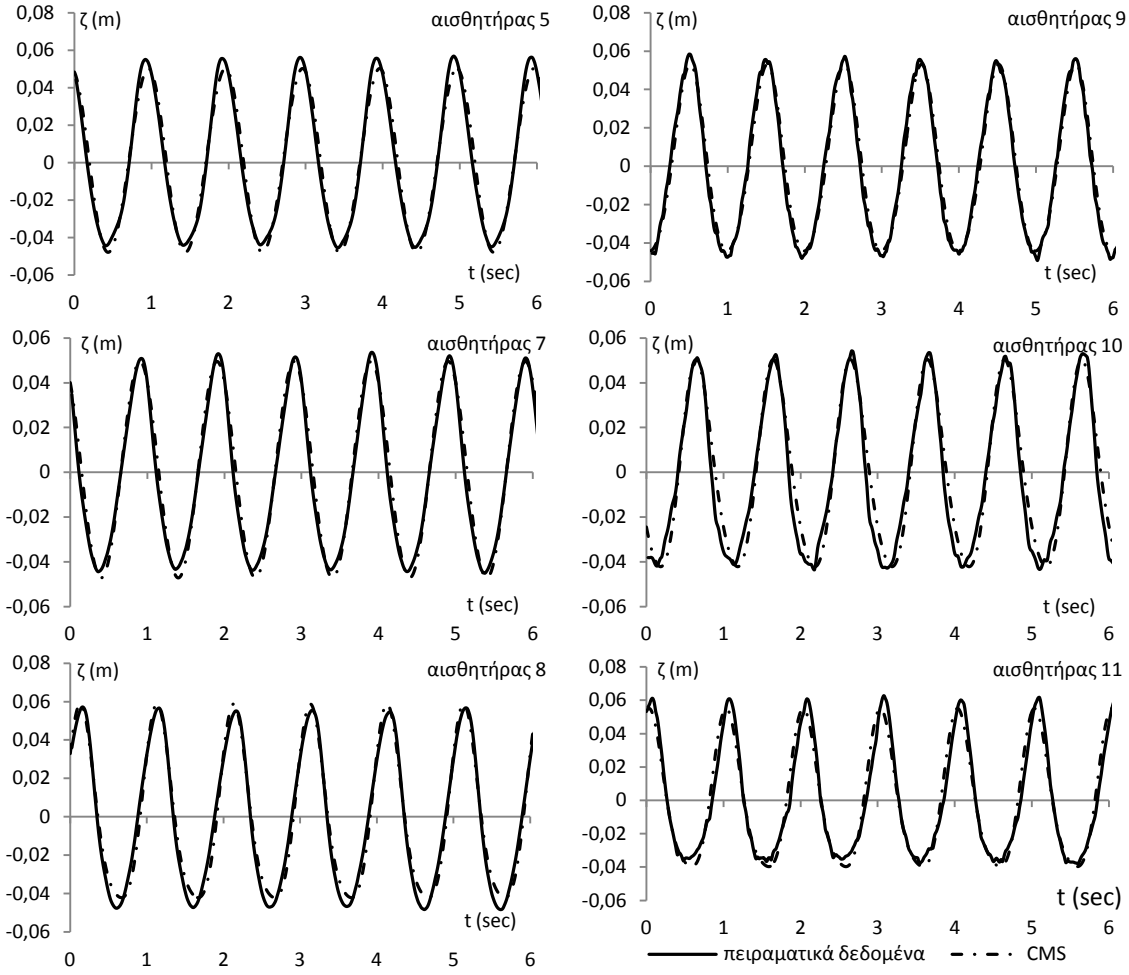
Στην ενότητα αυτή όπως και στην προηγούμενη παραθέτονται οι γραφικές παραστάσεις της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας, *ζ(t)*. Εφαρμόζεται το ομοίωμα C.M.S. για την περίπτωση των μονοχρωματικών κυμάτων και συγκρίνεται με πειραματικά δεδομένα τεσσάρων δοκιμών στο εργαστήριο HR Wallingford. Τα δεδομένα του πειράματος έχουν αναλυθεί στο κεφάλαιο 2. Τα δεδομένα εισόδου για το μοντέλο C.M.S. συνοψίζονται στον πίνακα *6.2*. Οι μετρήσεις που εξετάζονται αφορούν τους αισθητήρες 2, 5, 7, 8, 9, 10 και 11. Οι μετρήσεις του αισθητήρα 2 ταυτίζονται σε κάθε περίπτωση με τα αποτελέσματα των μοντέλων. Όπως και πριν χρησιμοποιούνται ως σημείο αναφοράς, ώστε να είναι συγκρίσιμες οι μετρήσεις πειράματος και μοντέλου και δεν παρουσιάζονται. Για αυτήν την περίπτωση το χωρικό βήμα είναι Δx=0,01m και το χρονικό βήμα Δt=0,0025s.

Περίπτωση	H (m)	T(sec)
“RE-08”	0.1	1.0
“RE-29”	0.065	1.2
“RE-36”	0.18	1.2
“RE-43”	0.1	1.4

Πίνακας 6.2 Δεδομένα εισόδου για το μοντέλο C.M.S. για τις πειραματικές δοκιμές στο εργαστήριο HR Wallingford

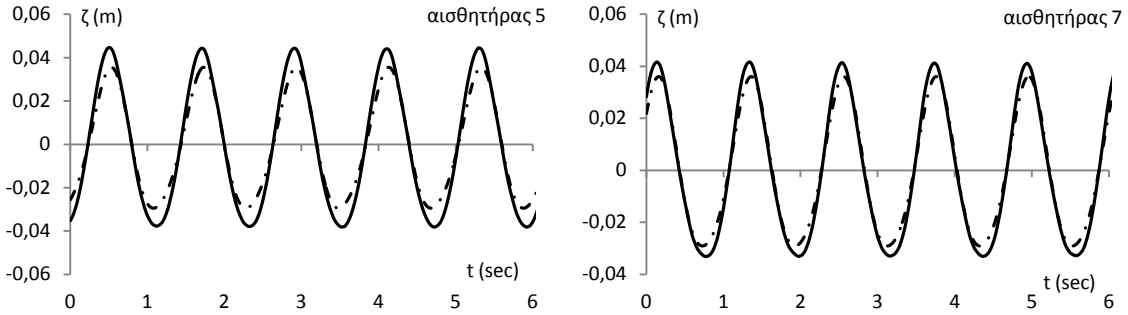
Οι τέσσερεις εξεταζόμενες περιπτώσεις έχουν αναλυθεί στο κεφάλαιο 2. Η δοκιμές "*RE-08*", "*RE-29*", "*RE-36*" και "*RE-43*" δίνονται στα σχήματα 6.6, 6.7, 6.8 και 6.9 αντίστοιχα.

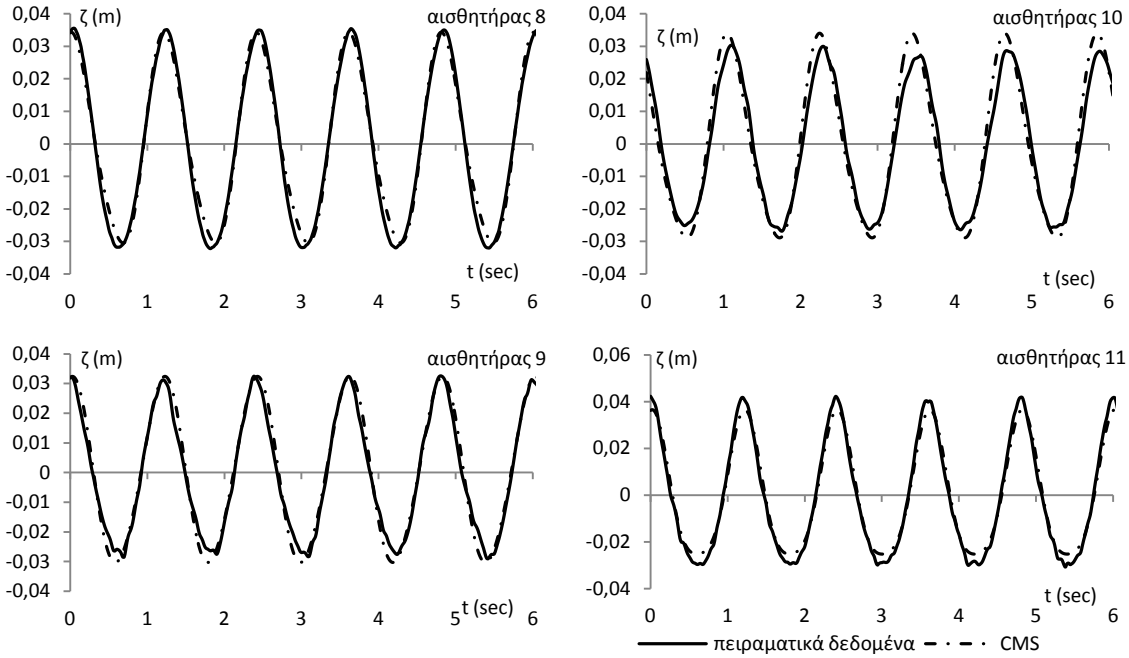
Δοκιμή "*RE-08*"



Σχήμα 6.6 Διακύμανση της ελεύθερης επιφάνειας, ζ ως προς το χρόνο, t: δοκιμή "RE-08" (πείραμα και C.M.S.)

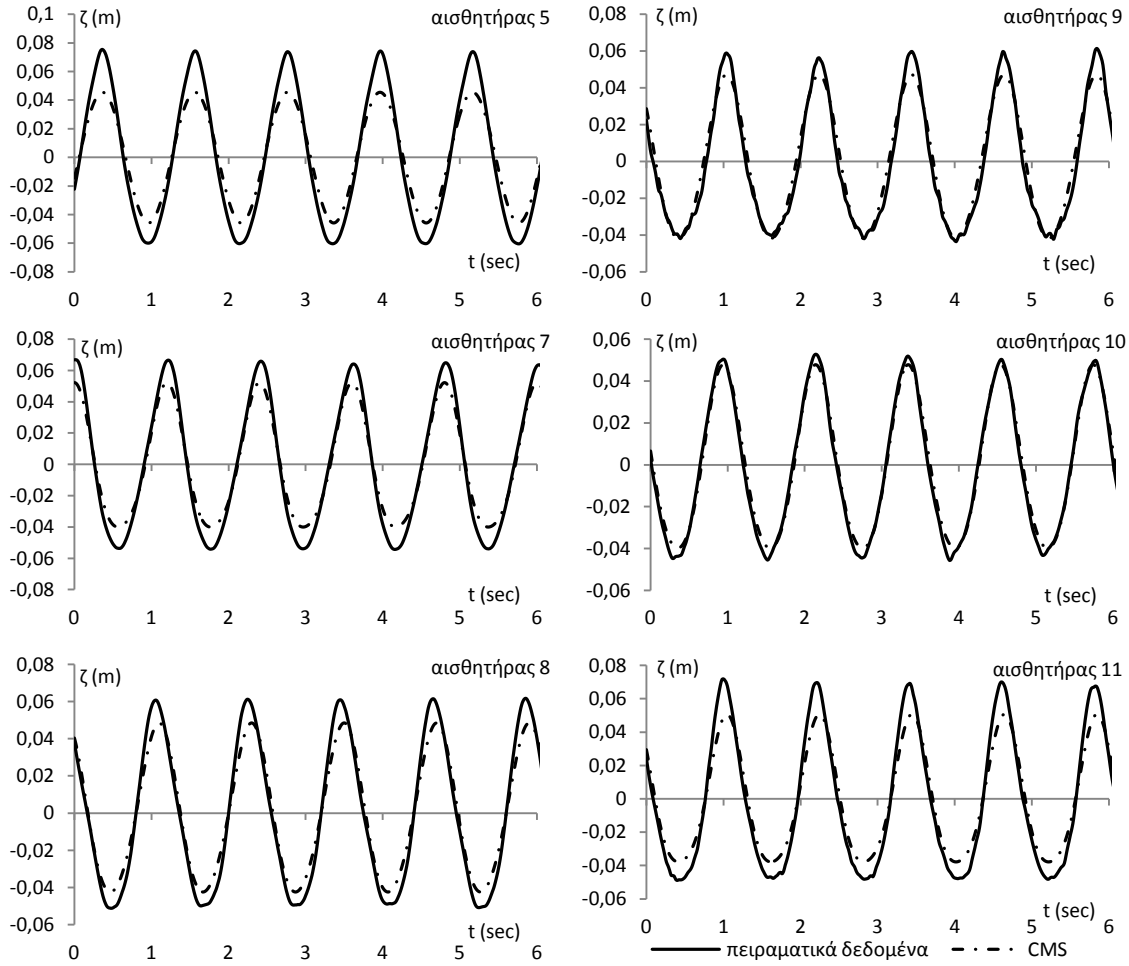
Δοκιμή "*RE-29*"





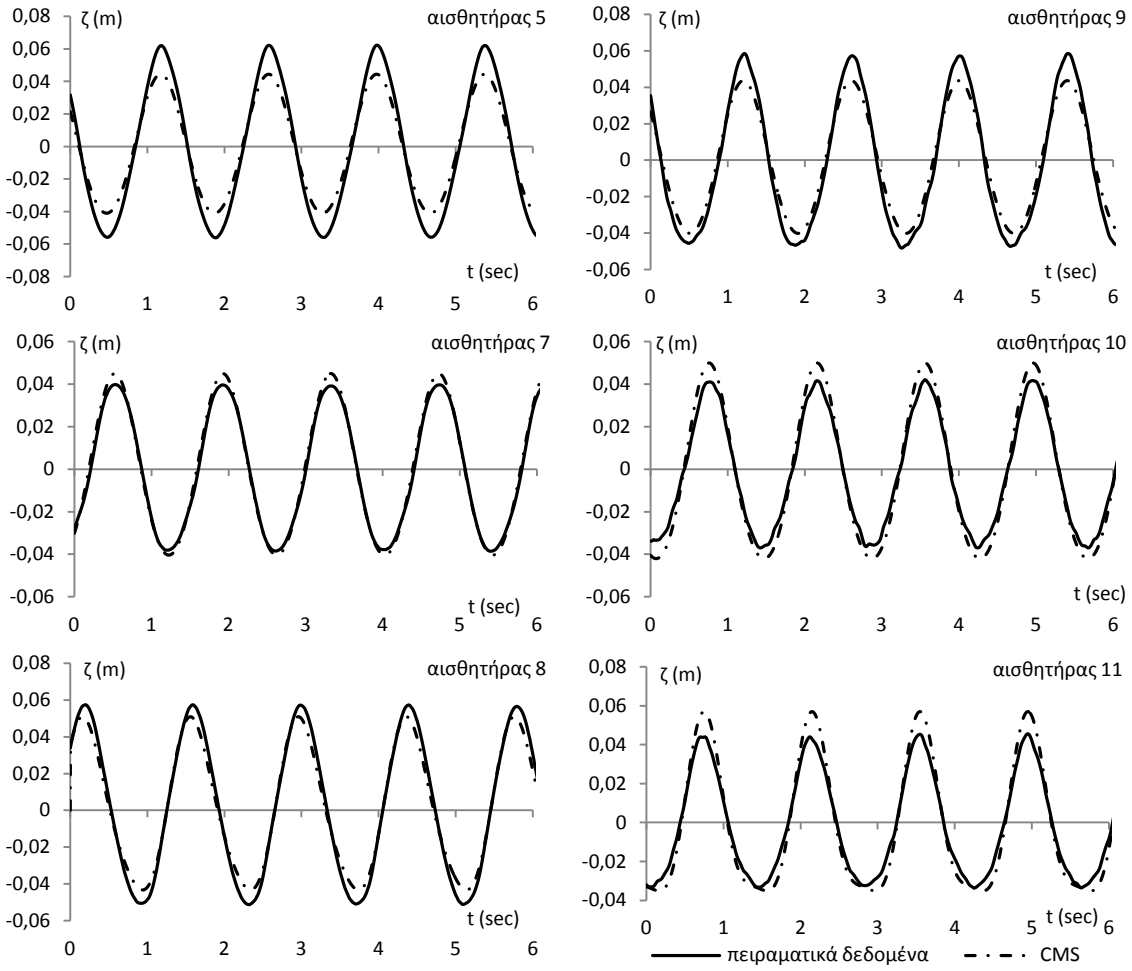
Σχήμα 6.7 Διακύμανση της ελεύθερης επιφάνειας, ζ ως προς το χρόνο, t: δοκιμή "RE-29" (πείραμα και C.M.S.)

Δοκιμή "*RE-36*"



Σχήμα 6.8 Διακύμανση της ελεύθερης επιφάνειας, ζ ως προς το χρόνο, t: δοκιμή "RE-36" (πείραμα και C.M.S.)

Δοκιμή "*RE-43*"



Σχήμα 6.9 Διακύμανση της ελεύθερης επιφάνειας, ζ ως προς το χρόνο, t: δοκιμή "*RE-43*" (πείραμα και C.M.S.)

6.2. Αποτελέσματα προσομοίωσης του ομοιώματος των Chondros & Memos, 2012

6.2.1. Αποτελέσματα για το πείραμα των Beji & Battjes, 1993, 1994

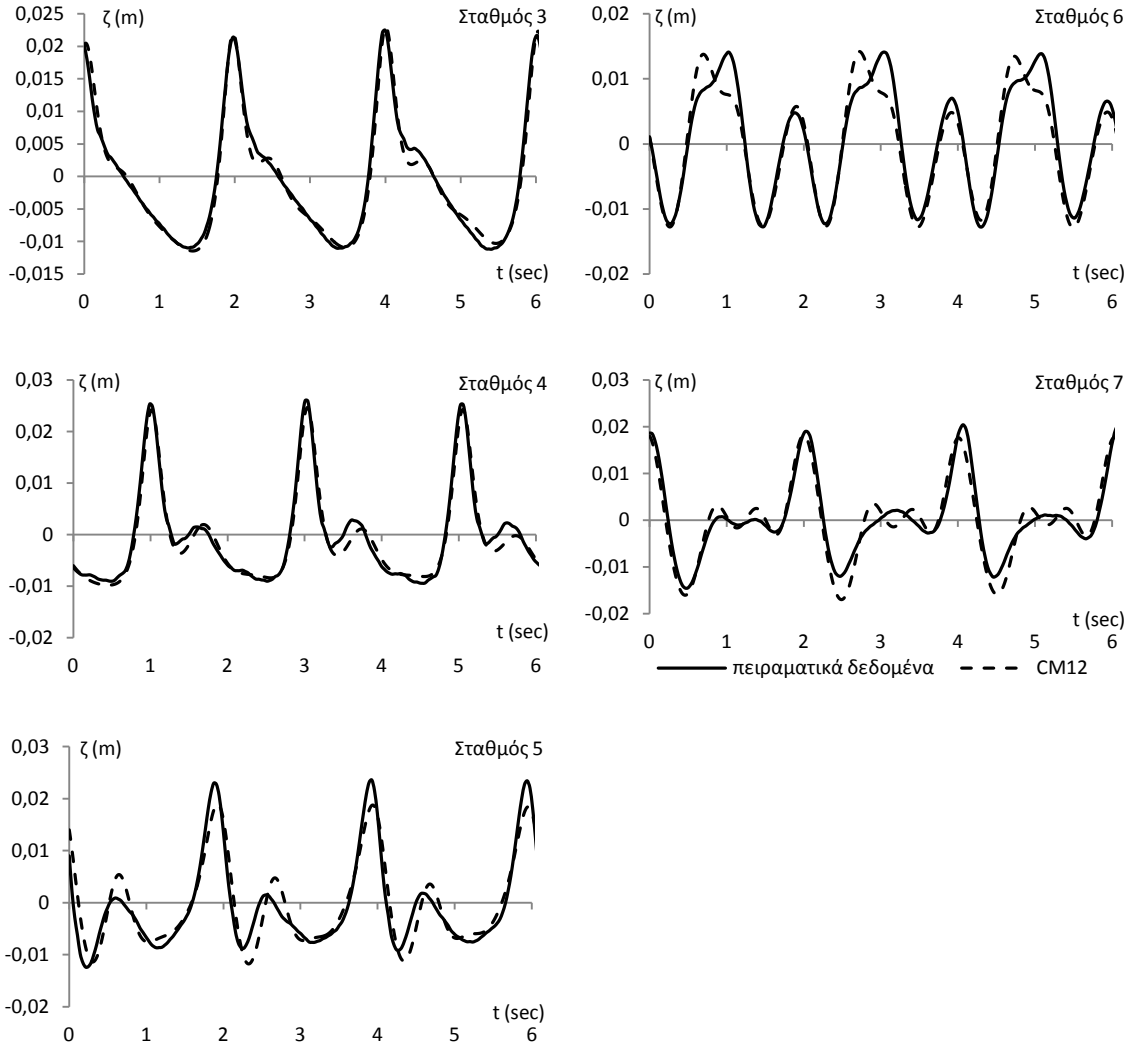
Συνεχίζοντας στο ίδιο μοτίβο με την προηγούμενη ενότητα παρουσιάζεται η χρονοσειρά της *ζ(t)* για την περίπτωση των μονοχρωματικών κυμάτων από την εφαρμογή του υπολογιστικού ομοιώματος των Chondros & Memos, 2012 (εντός των επόμενων κεφαλαίων θα αναφέρεται ως C.M.12).

Αρχίζοντας παραθέτονται τα διαγράμματα της *ζ(t)* για το πείραμα των Beji & Battjes (1993, 1994). Τα δεδομένα εισόδου για το μοντέλο C.M.12 συνοψίζονται στον πίνακα *6.3*. Οι σταθμοί που εξετάζονται είναι οι ίδιοι. Αναφορικά με το υπολογιστικό πλέγμα, το χωρικό βήμα είναι Δx=0,025m, το χρονικό βήμα, Δt=0,0025s και ο χρόνος προσομοίωσης 50s.

Περίπτωση	H (m)	T(sec)
μη θραυόμενα μονοχρωματικά κύματα	0.02	2.02
“short spilling breakers”	0.049	0.975
“short plunging breakers”	0.058	0.999
“long spilling breakers”	0.041	2,5
“long plunging breakers”	0.05	2.5

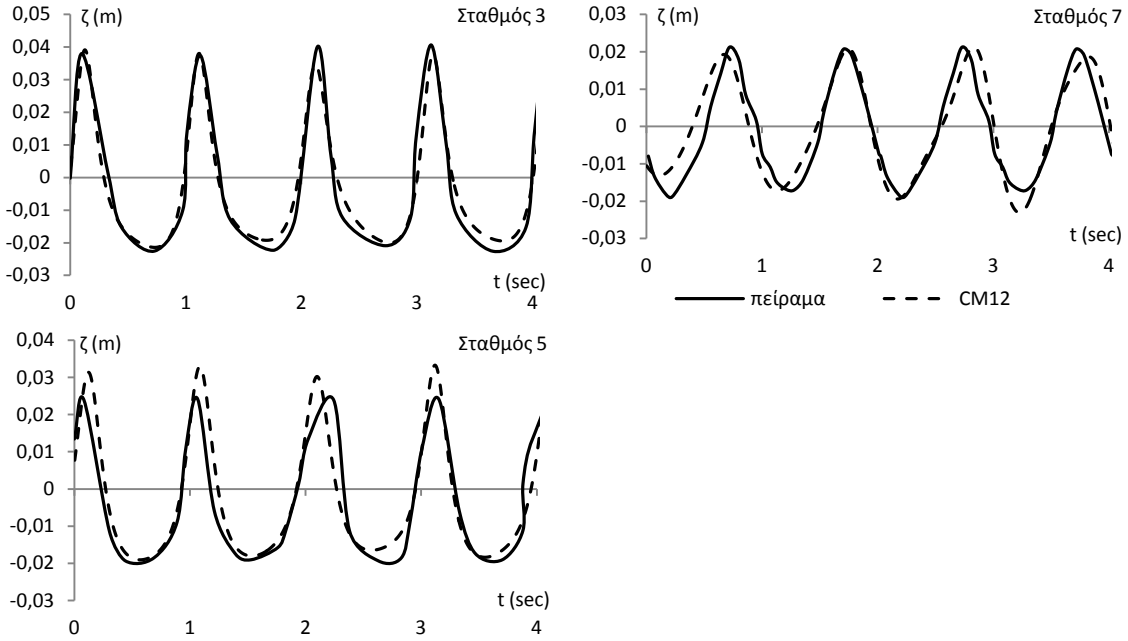
Πίνακας 6.3 Δεδομένα εισόδου για το μοντέλο C.M.12 για το πείραμα των Beji & Battjes, 1993, 1994

Μη θραυόμενα κύματα



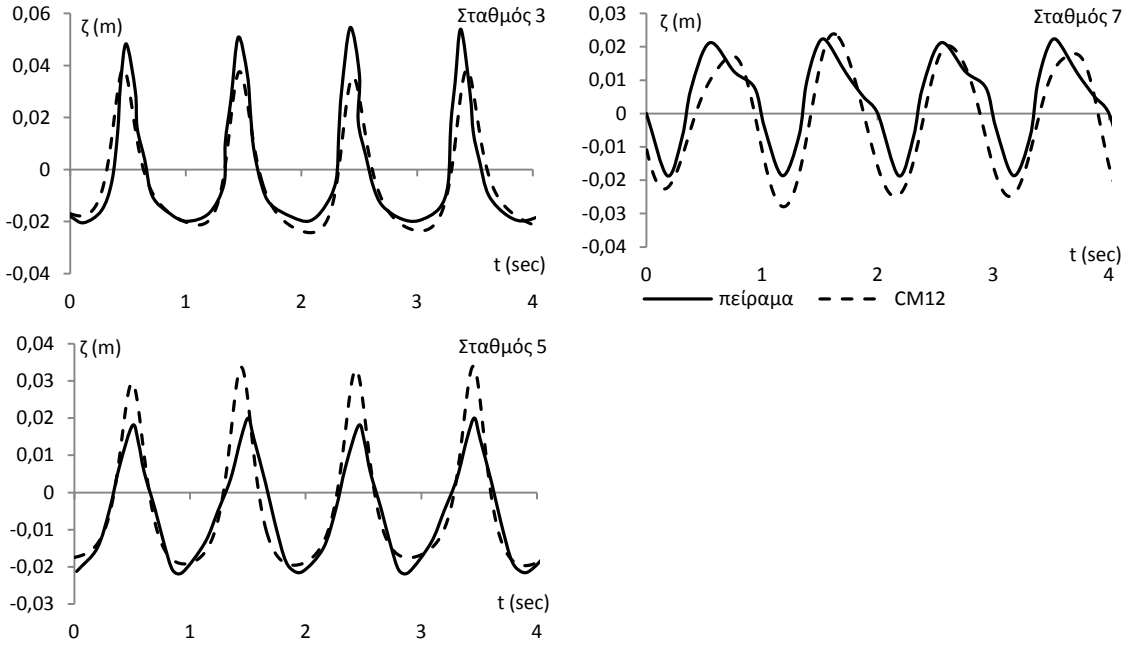
Σχήμα 6.10 Διακύμανση της ελεύθερης επιφάνειας, ζ ως προς το χρόνο, t: κύματα χωρίς θραύση (πείραμα και C.M.12)

Βραχέα κύματα - Θραύση κύλισης



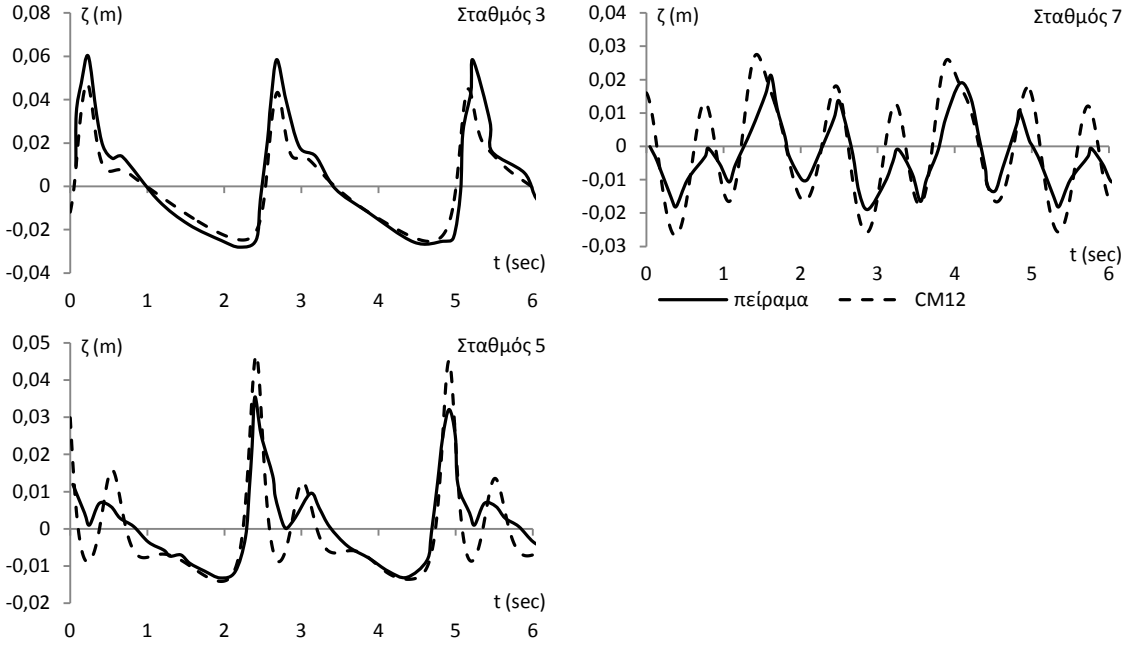
Σχήμα 6.11 Διακύμανση της ελεύθερης επιφάνειας, ζ ως προς το χρόνο, t: βραχέα κύματα, θραύση κύλισης (*short spilling*, πείραμα και C.M.12)

Βραχέα κύματα - Θραύση εκτίναξης



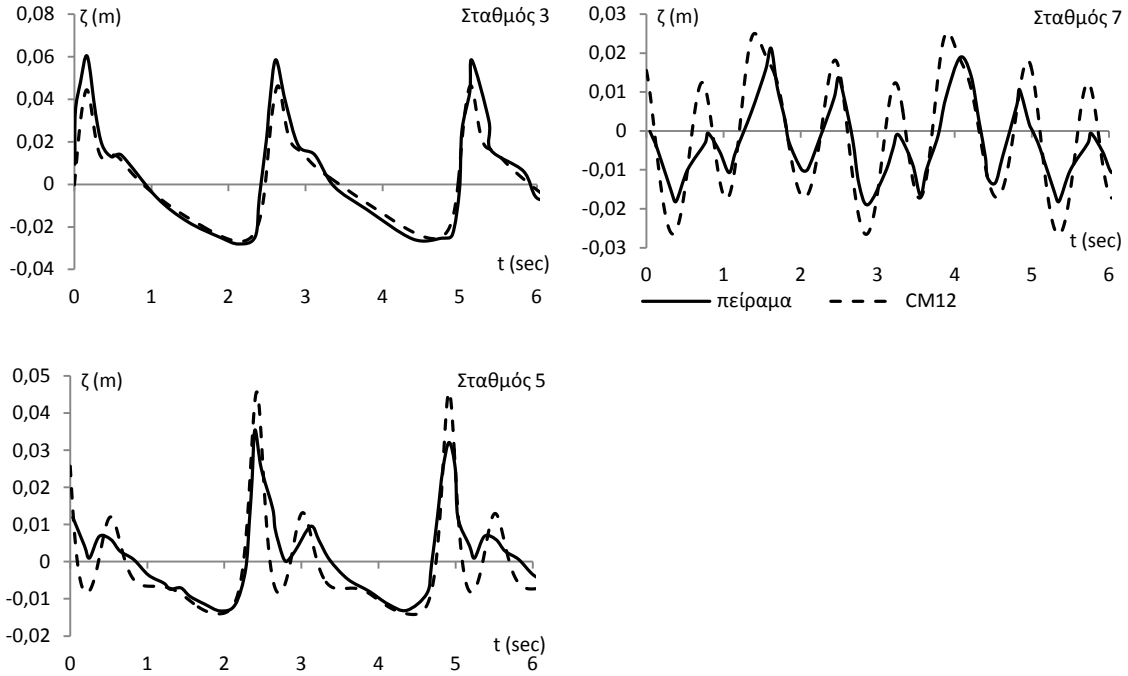
Σχήμα 6.12 Διακύμανση της ελεύθερης επιφάνειας, ζ ως προς το χρόνο, t: βραχέα κύματα, θραύση εκτίναξης (*short plunging*, πείραμα και C.M.12)

Μακρά κύματα - Θραύση κύλισης



Σχήμα 6.13 Διακύμανση της ελεύθερης επιφάνειας, ζ ως προς το χρόνο, t: μακρά κύματα, θραύση κύλισης (*long spilling*, πείραμα και C.M.12)

Βραχέα κύματα - Θραύση εκτίναξης



Σχήμα 6.14 Διακύμανση της ελεύθερης επιφάνειας, ζ ως προς το χρόνο, t: μακρά κύματα, θραύση εκτίναξης (*long plunging*, πείραμα και C.M.12)

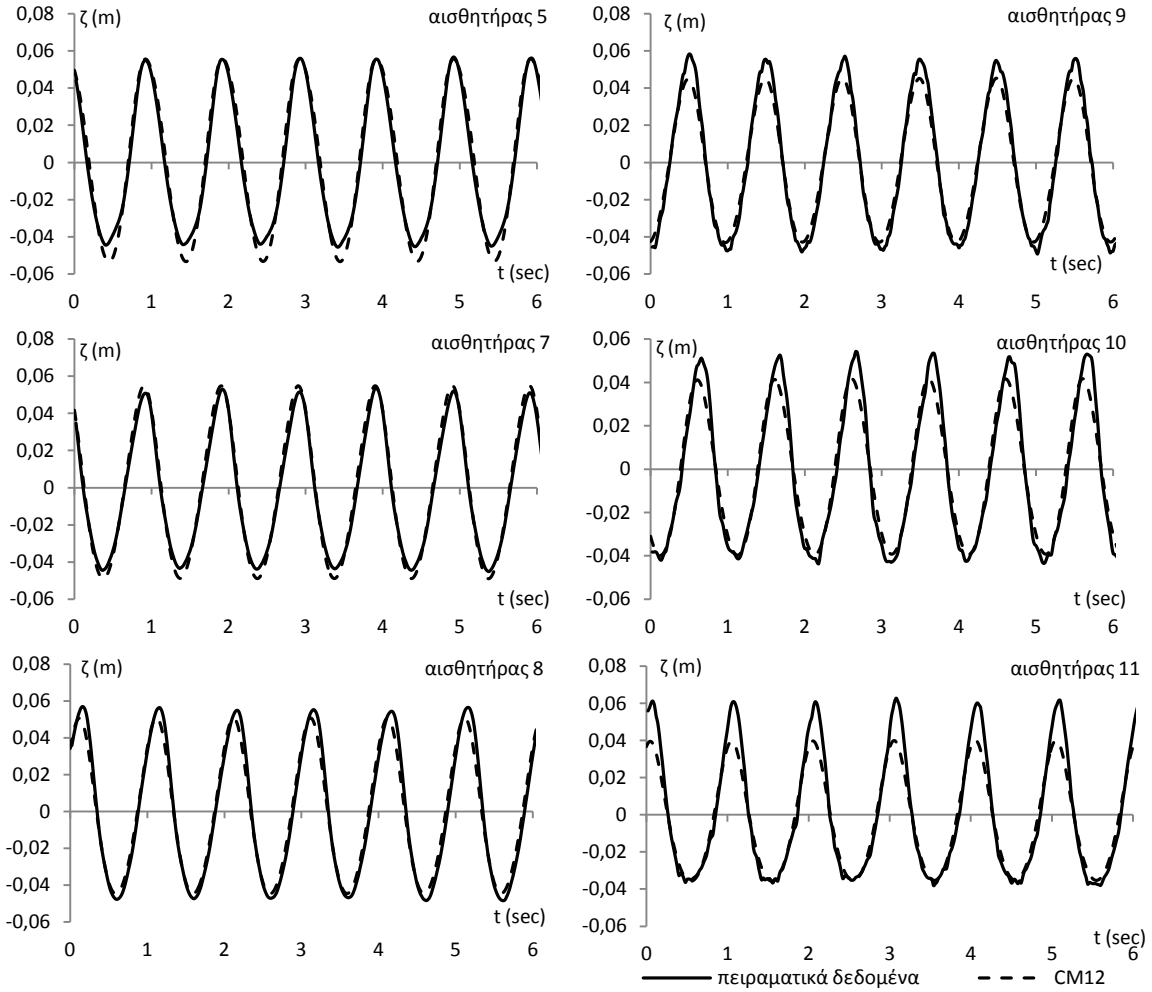
6.2.2. Αποτελέσματα για το πείραμα του εργαστηρίου HR Wallingford

Ακολουθούν οι γραφικές παραστάσεις της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας, *ζ(t)* όπως προκύπτουν μετά από εφαρμογή του μοντέλου C.M.12 για την περίπτωση των μονοχρωματικών κυμάτων. Η πειραματική διάταξη είναι αυτή του εργαστήριου HR Wallingford. Τα δεδομένα εισόδου για το μοντέλο συνοψίζονται στον πίνακα 6.4 Οι μετρήσεις που παρουσιάζονται αφορούν τους αισθητήρες 5, 7, 8, 9, 10 και 11. Χρησιμοποιήθηκαν χωρικό βήμα, Δx=0,02m, χρονικό βήμα, Δt=0,0025s και ο χρόνος προσομοίωσης 50s.

Περίπτωση	H (m)	T(sec)
"RE-08"	0.066	1.0
"RE-29"	0.05	1.2
"RE-36"	0.08	1.2
"RE-43"	0.085	1.4

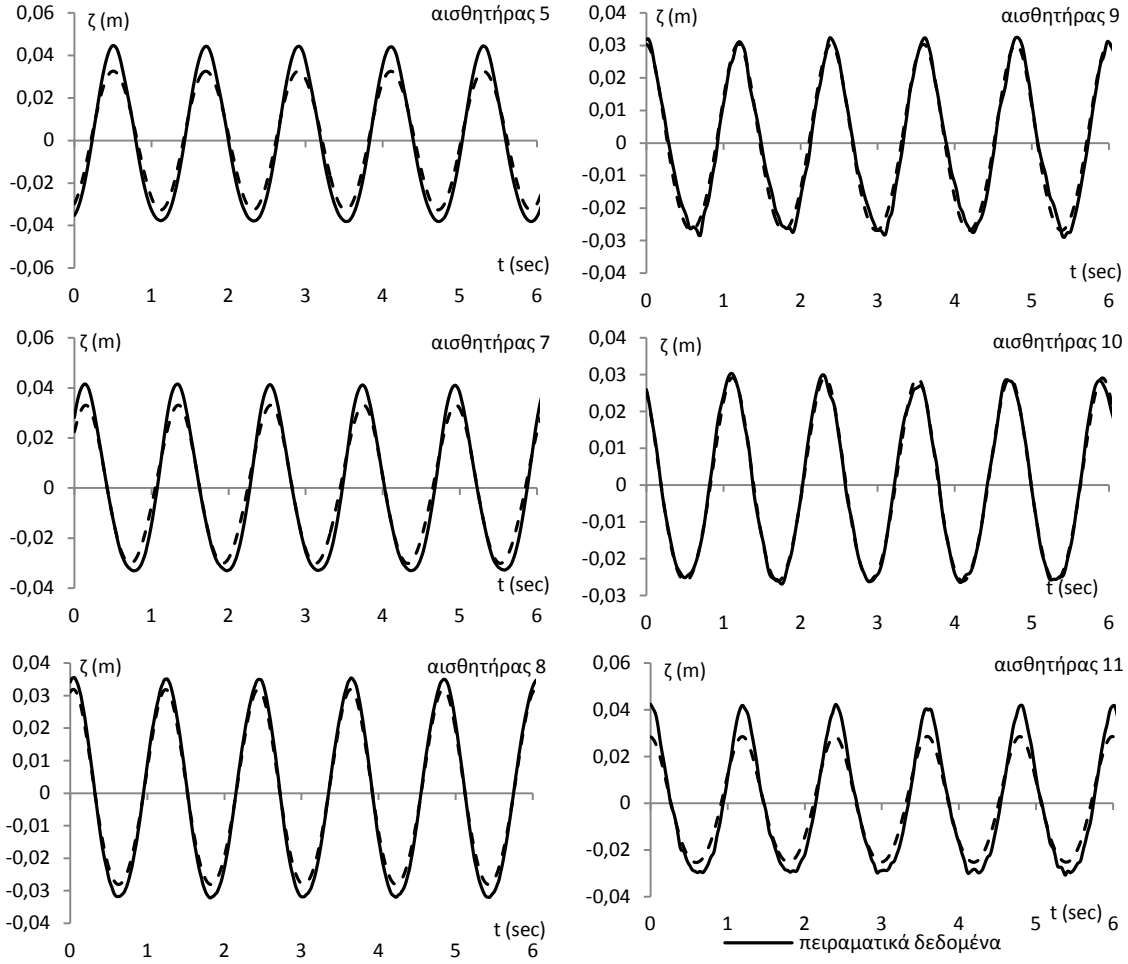
Πίνακας 6.4 Δεδομένα εισόδου για το μοντέλο C.M.12 για την πειραματική διάταξη HR Wallingford

Δοκιμή "*RE-08*"



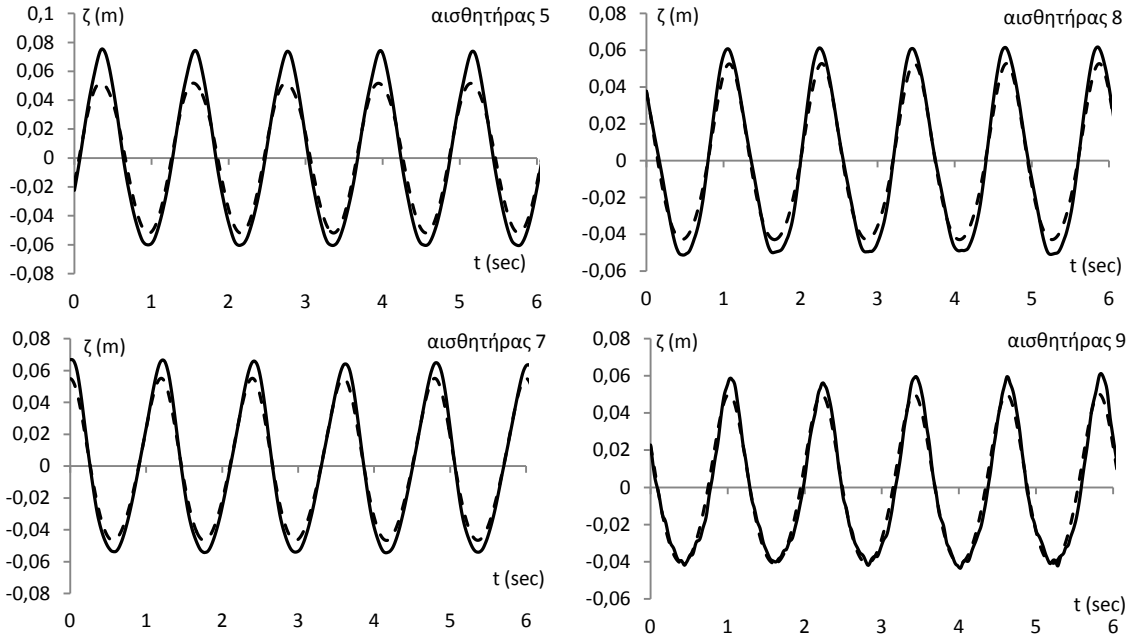
Σχήμα 6.15 Διακύμανση της ελεύθερης επιφάνειας, ζ ως προς το χρόνο, t: δοκιμή "*RE-08*" (πείραμα και C.M.12)

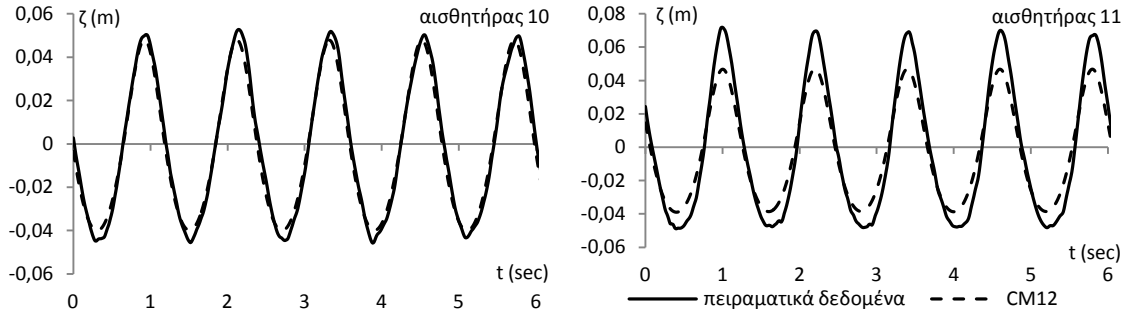
Δοκιμή "*RE-29*"



Σχήμα 6.16 Διακύμανση της ελεύθερης επιφάνειας, ζ ως προς το χρόνο, t: δοκιμή "*RE-29*" (πείραμα και C.M.12)

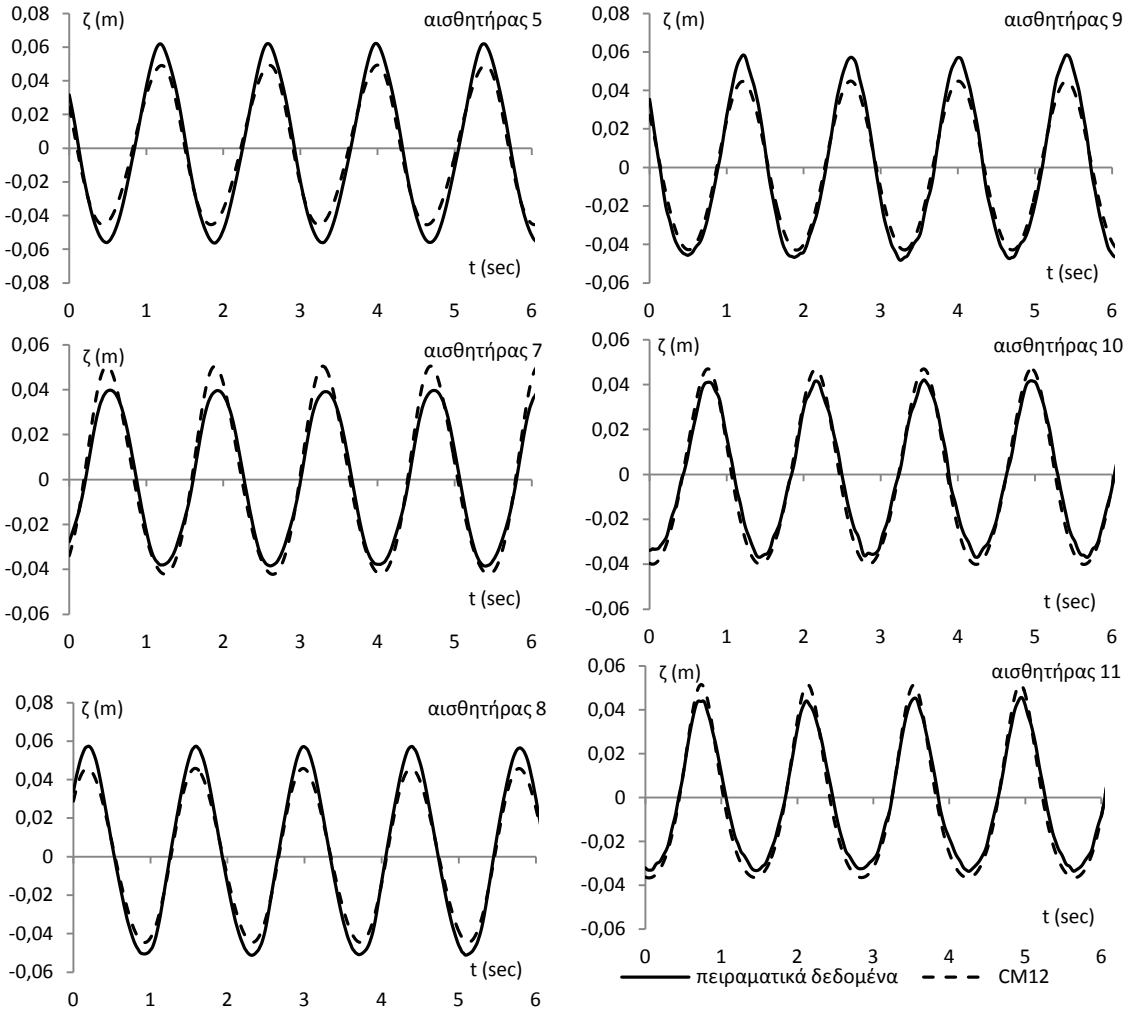
Δοκιμή "*RE-36*"





Σχήμα 6.17 Διακύμανση της ελεύθερης επιφάνειας, ζ ως προς το χρόνο, t: δοκιμή "*RE-36*" (πείραμα και C.M.12)

Δοκιμή "*RE-43*"

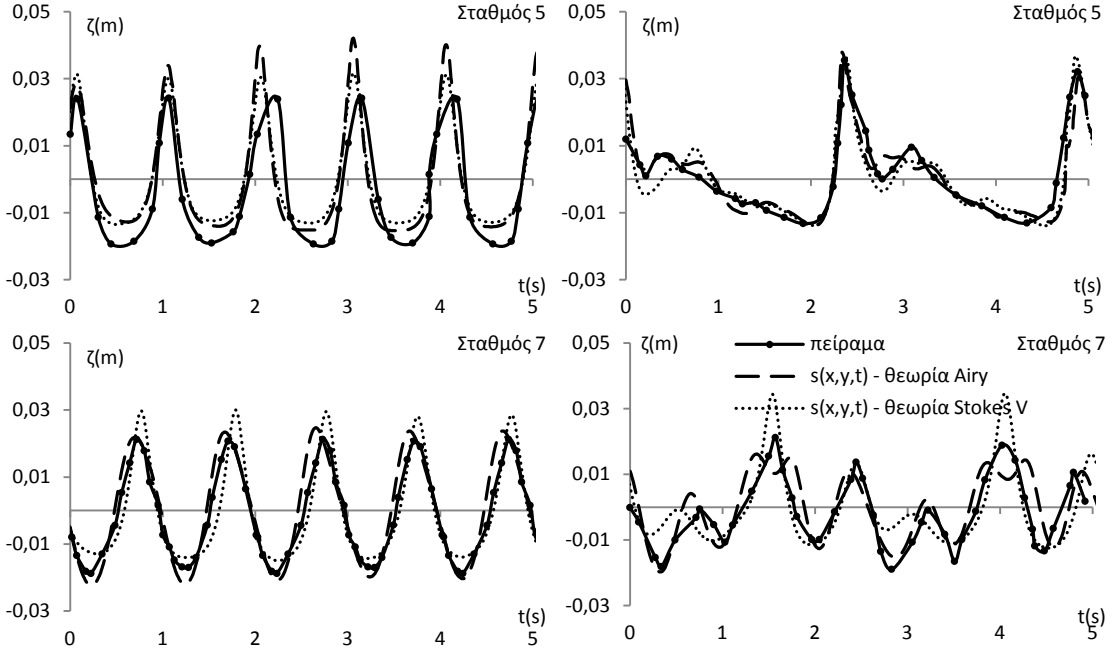


Σχήμα 6.18 Διακύμανση της ελεύθερης επιφάνειας, ζ ως προς το χρόνο, t: δοκιμή "*RE-43*" (πείραμα και C.M.12)

6.3. Αποτελέσματα προσομοίωσης του Co.Br.A.S.

6.3.1. Διερεύνηση συνάρτησης πηγής

Πριν την παρουσίαση των αποτελεσμάτων θεωρείται σκόπιμο να προηγηθεί μια διερεύνηση για το πώς εισάγεται η αρχική διαταραχή. Όπως διαπιστώνεται από το τέταρτο κεφάλαιο το μοντέλο Cornell Breaking And Structures (από εδώ και έπειτα Co.Br.A.S.) δίνει την δυνατότητα επιλογής του τρόπου προσέγγισης της συνάρτησης πηγής, *s(x,y,t)*. Στο σημείο αυτό εξετάζεται το κατά πόσο το ο τύπος του όρου αυτού επηρεάζει τα τελικά αποτελέσματα. Για την αναπαραγωγή της αρχικής διαταραχής για τις εξεταζόμενες περιπτώσεις είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί η γραμμική θεωρία και η θεωρία Stokes ανώτερης τάξης (πέμπτης). Διαπιστώνεται λοιπόν ότι η καλύτερη απόδοση του μοντέλου επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας την γραμμική θεωρία. Κάτι που φαίνεται από το σχήμα 6.19, με τα διαγράμματα *ζ(t)* για την θραύση κύλισης βραχέων και μακρών κυμάτων της πρώτης διάταξης. Συνεπώς, ο όρος πηγής που αναπαράγεται χρησιμοποιώντας την θεωρία Airy είναι αυτός που θα χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια.



Σχήμα 6.19 Στάθμη ελεύθερης επιφάνειας, ζ(t) - διερεύνηση συνάρτησης πηγής του Co.Br.A.S. (Beji & Battjes, 1993, θραύση κύλισης, βραχέα κύματα: αριστερά, μακρά κύματα: δεξιά)

6.3.2. Αποτελέσματα για το πείραμα των Beji & Battjes, 1993, 1994

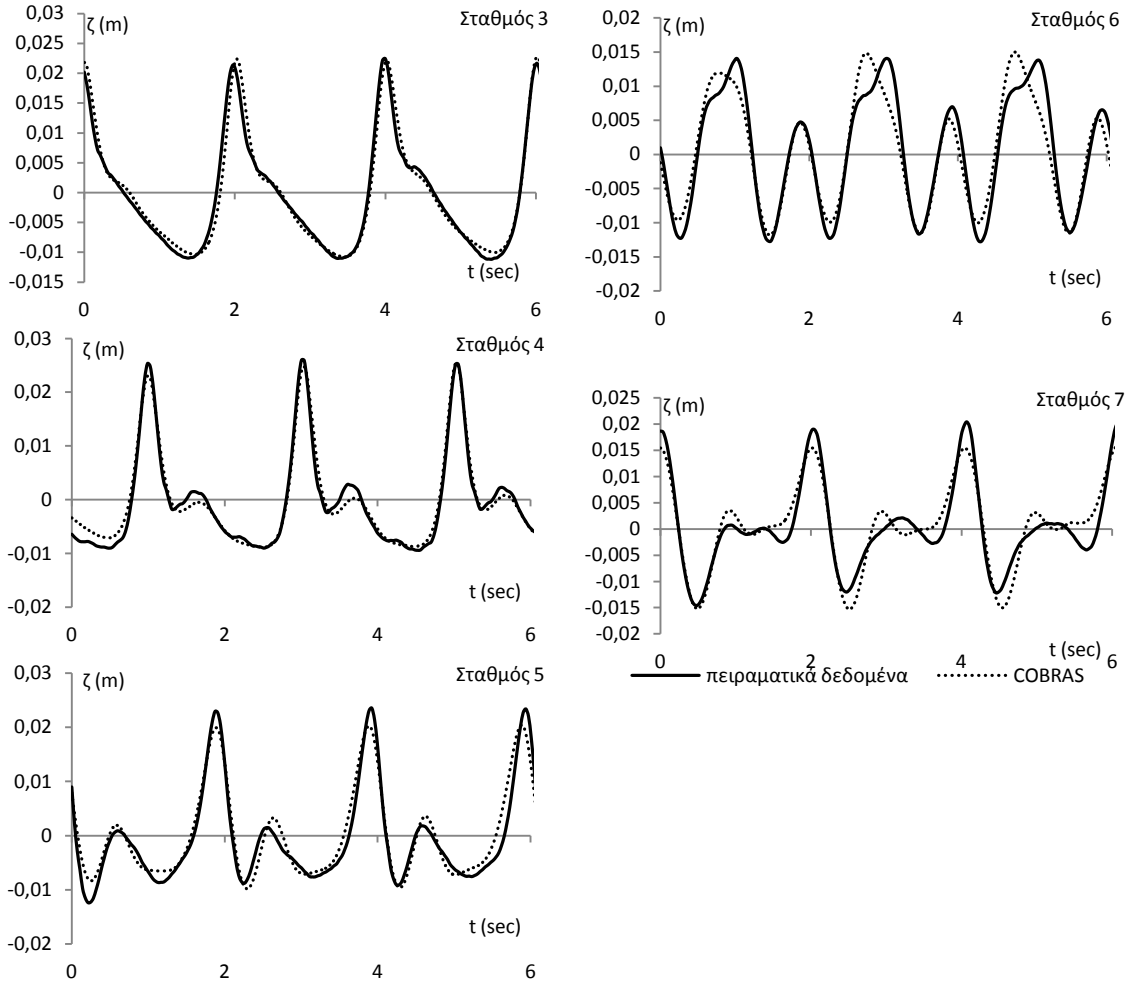
Κλείνοντας τη σειρά εξεταζόμενων περιπτώσεων για μονοχρωματικά κύματα παρουσιάζεται η χρονοσειρά της *ζ(t)* όπως προέκυψαν από την εφαρμογή του μοντέλου Co.Br.A.S.

Αρχίζοντας παραθέτονται τα διαγράμματα της *ζ(t)* για το πείραμα των Beji & Battjes (1993, 1994). Τα δεδομένα εισόδου για το μοντέλο Co.Br.A.S. συνοψίζονται στον πίνακα *6.5*. Οι σταθμοί που εξετάζονται είναι οι ίδιοι. Σε αυτήν την περίπτωση και στην επόμενη το υπολογιστικό πλέγμα αναλύεται με Δx=0,02m, Δy=0,01m, το χρονικό βήμα είναι Δt=0,0025s και ο χρόνος προσομοίωσης 50s.

Περίπτωση	H (m)	T(sec)
μη θραυόμενα μονοχρωματικά κύματα	0.02	2.02
“short spilling breakers”	0.092	1.0
“short plunging breakers”	0.11	0.99
“long spilling breakers”	0.043	2,485
“long plunging breakers”	0.048	2.45

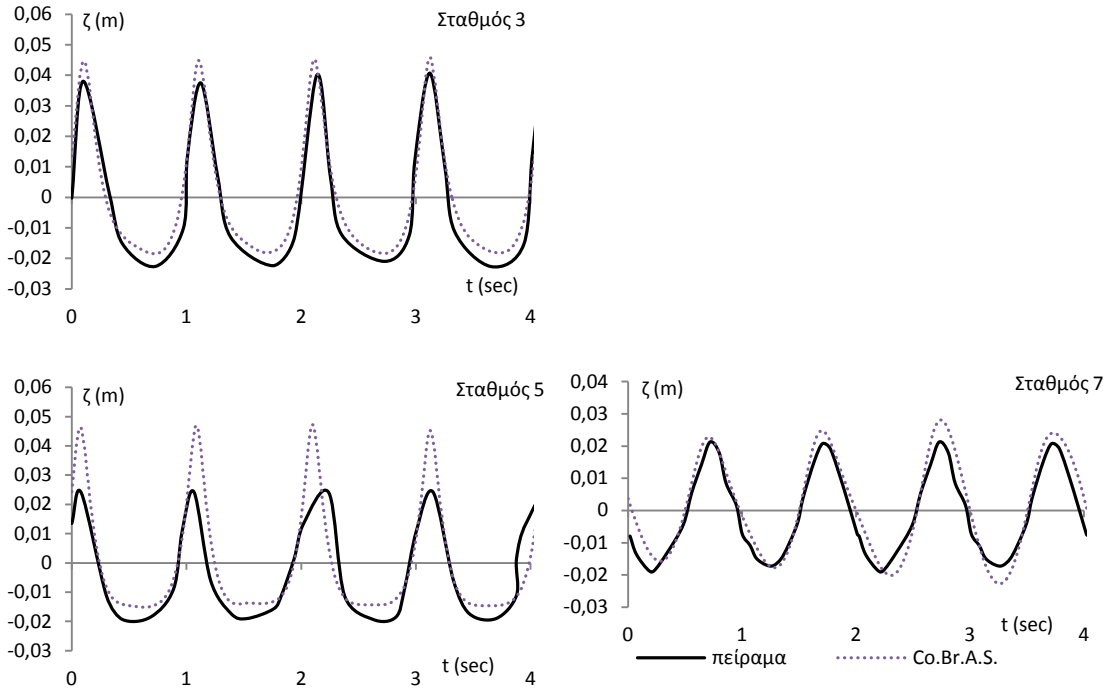
Πίνακας 6.5 Δεδομένα εισόδου για το μοντέλο Co.Br.A.S. για το πείραμα των Beji & Battjes, 1993, 1994

Μη θραυόμενα κύματα



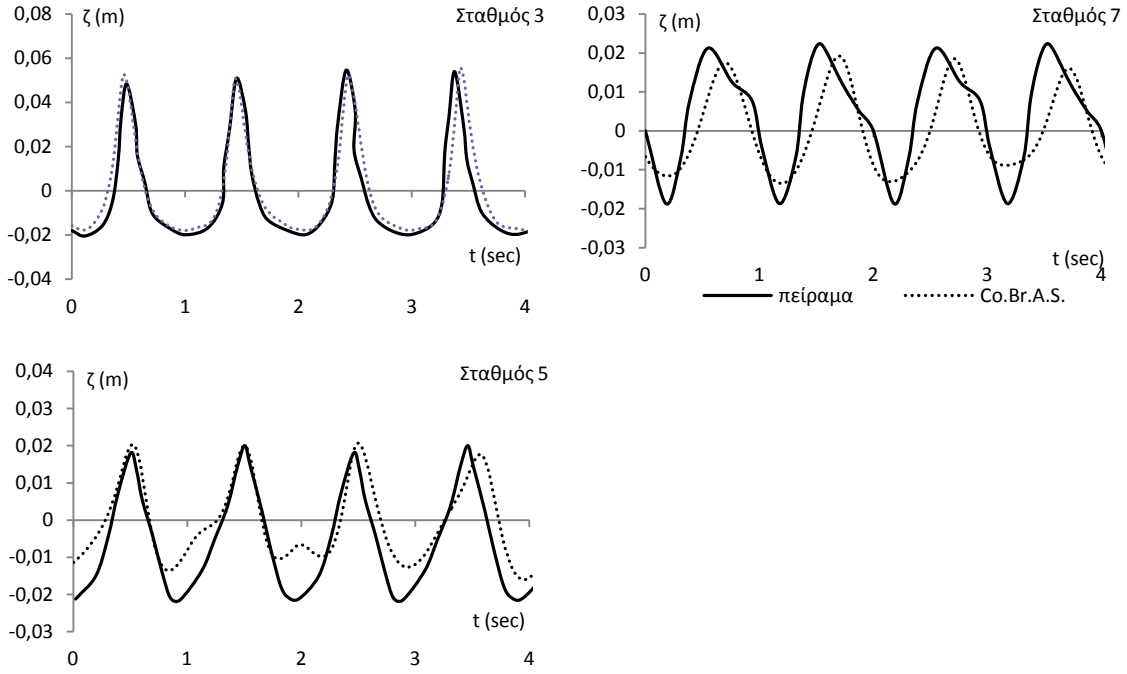
Σχήμα 6.20 Διακύμανση της ελεύθερης επιφάνειας, ζ ως προς το χρόνο, t: κύματα χωρίς θραύση (πείραμα και Co.Br.A.S.)

Βραχέα κύματα - Θραύση κύλισης



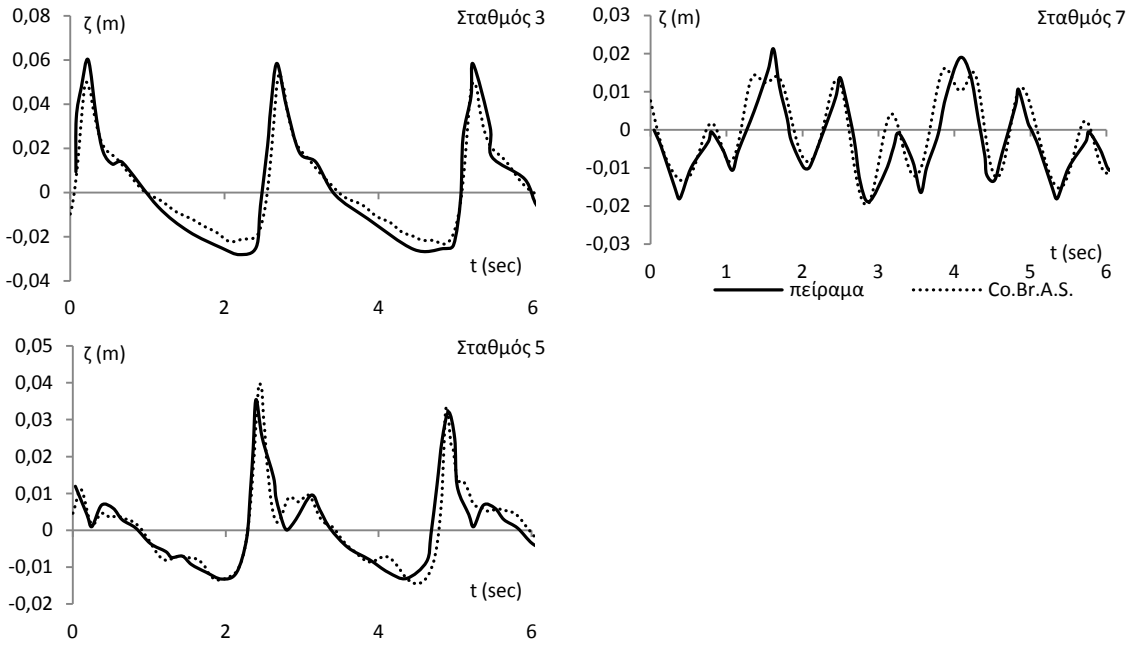
Σχήμα 6.21 Διακύμανση της ελεύθερης επιφάνειας, ζ ως προς το χρόνο, t: βραχέα κύματα, θραύση κύλισης (*short spilling*, πείραμα και Co.Br.A.S.)

Βραχέα κύματα - Θραύση εκτίναξης



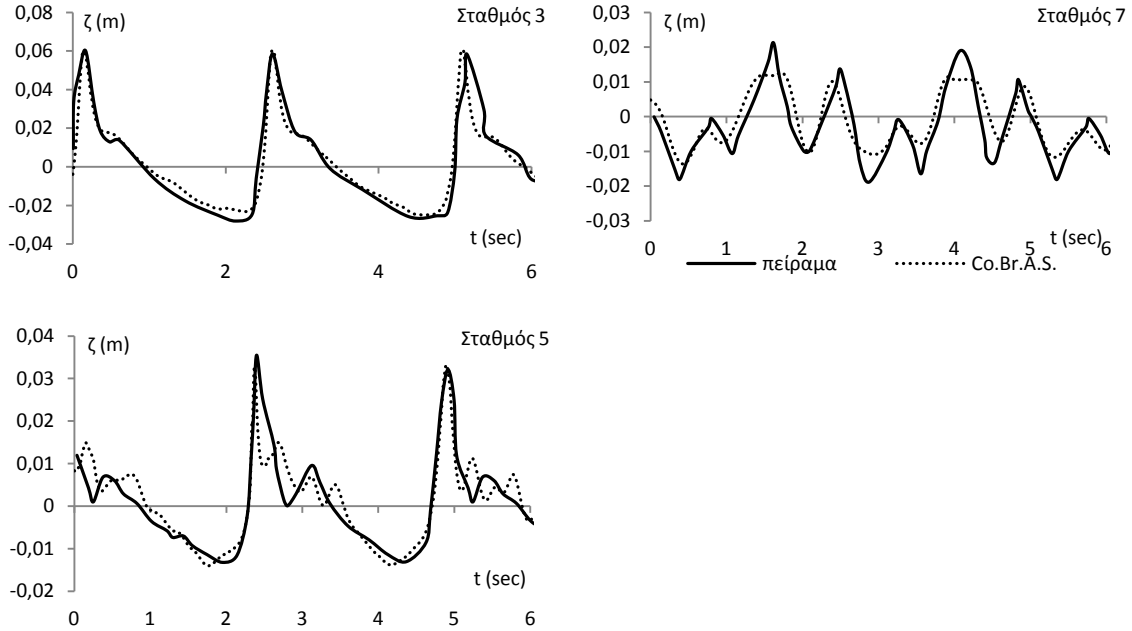
Σχήμα 6.22 Διακύμανση της ελεύθερης επιφάνειας, ζ ως προς το χρόνο, t: βραχέα κύματα, θραύση εκτίναξης (*short plunging*, πείραμα και Co.Br.A.S.)

Μακρά κύματα - Θραύση κύλισης



Σχήμα 6.23 Διακύμανση της ελεύθερης επιφάνειας, ζ ως προς το χρόνο, t: μακρά κύματα, θραύση κύλισης (*long spilling*, πείραμα και Co.Br.A.S.)

Μακρά κύματα - Θραύση εκτίναξης



Σχήμα 6.24 Διακύμανση της ελεύθερης επιφάνειας, ζ ως προς το χρόνο, t: μακρά κύματα, θραύση κύλισης (*long plunging*, πείραμα και Co.Br.A.S.)

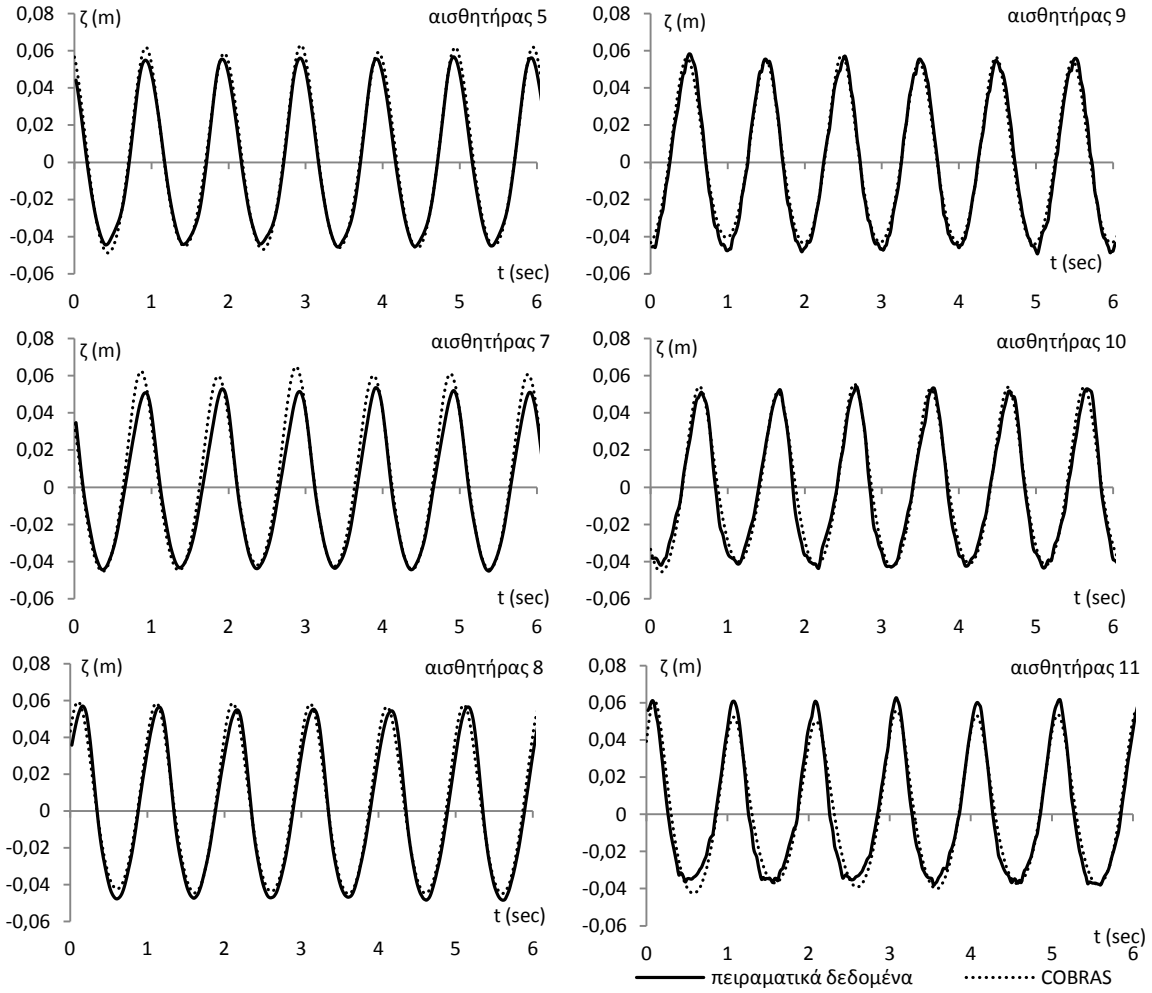
6.3.3. Αποτελέσματα για το πείραμα του εργαστηρίου HR Wallingford

Ακολουθούν οι γραφικές παραστάσεις της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας, *ζ(t)* όπως προκύπτουν μετά από εφαρμογή του μοντέλου C.M.12 για την περίπτωση των μονοχρωματικών κυμάτων. Η πειραματική διάταξη είναι αυτή του εργαστήριου HR Wallingford. Τα δεδομένα εισόδου για το μοντέλο συνοψίζονται στον πίνακα 6.6 Οι μετρήσεις που παρουσιάζονται αφορούν τους αισθητήρες 5, 7, 8, 9, 10 και 11.

Περίπτωση	H (m)	T(sec)
"RE-08"	0.1	1.0
"RE-29"	0.075	1.2
"RE-36"	0.12	1.2
"RE-43"	0.1	1.4

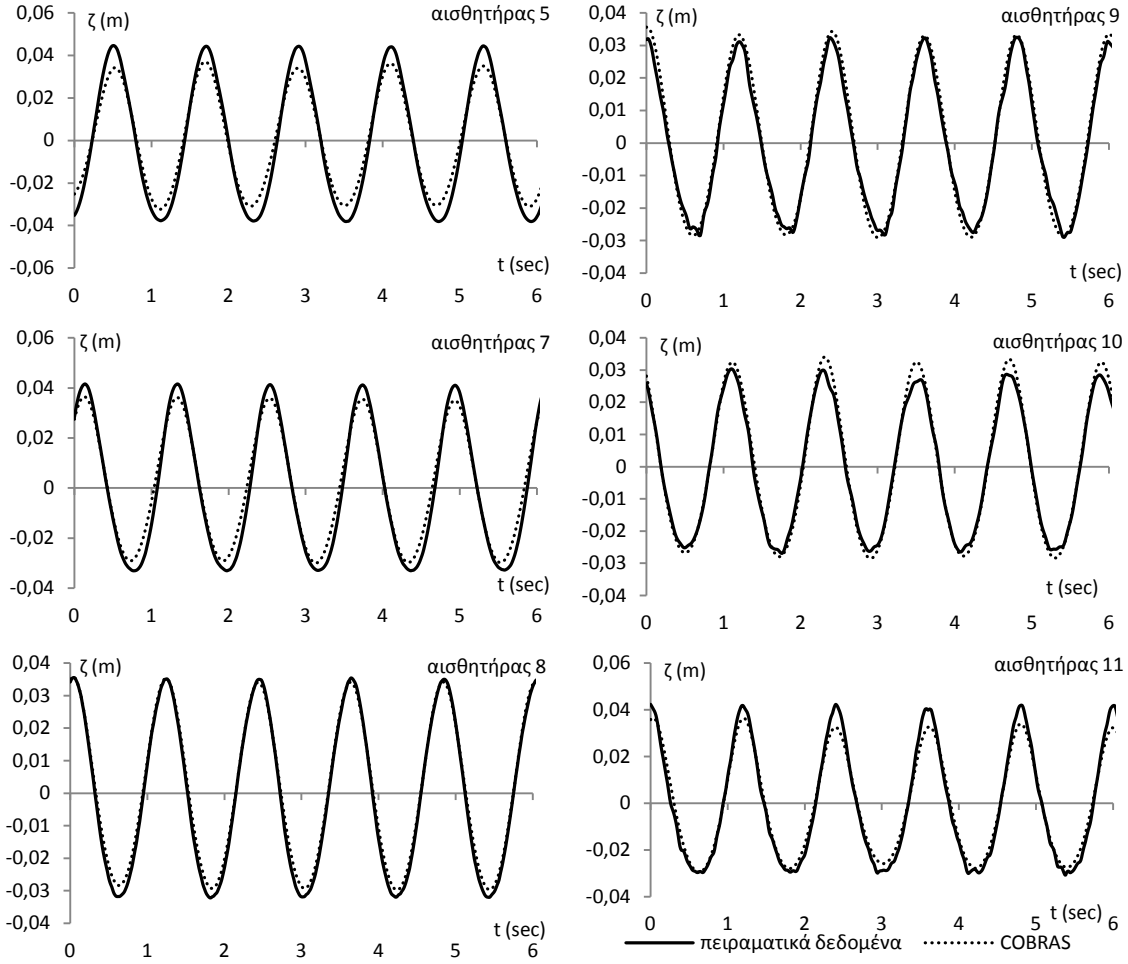
Πίνακας 6.6 Δεδομένα εισόδου για το μοντέλο Co.Br.A.S. για την πειραματική διάταξη HR Wallingford

Δοκιμή "*RE-08*"



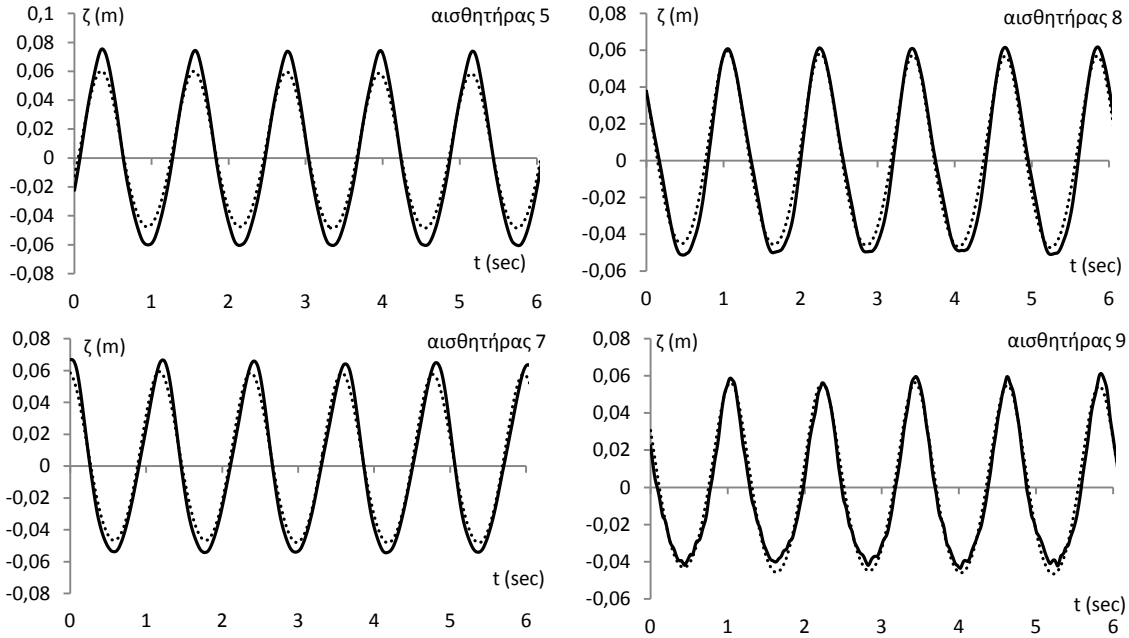
Σχήμα 6.25 Διακύμανση της ελεύθερης επιφάνειας, ζ ως προς το χρόνο, t: δοκιμή "*RE-08*" (πείραμα και Co.Br.A.S)

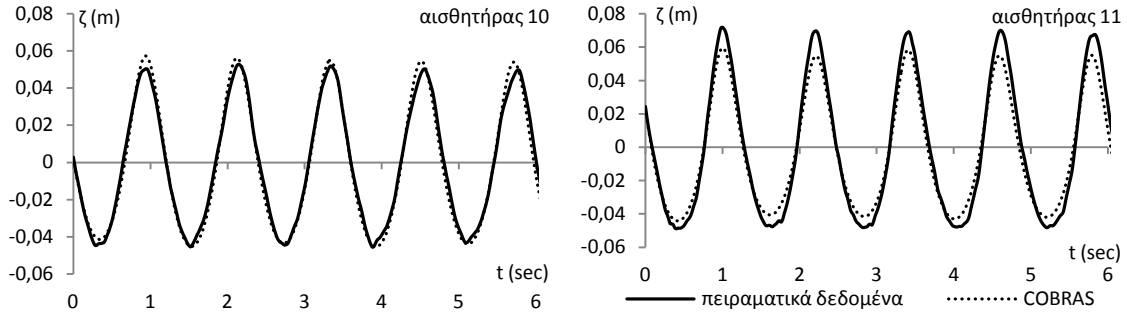
Δοκιμή "*RE-29*"



Σχήμα 6.26 Διακύμανση της ελεύθερης επιφάνειας, ζ ως προς το χρόνο, t: δοκιμή "*RE-29*" (πείραμα και Co.Br.A.S)

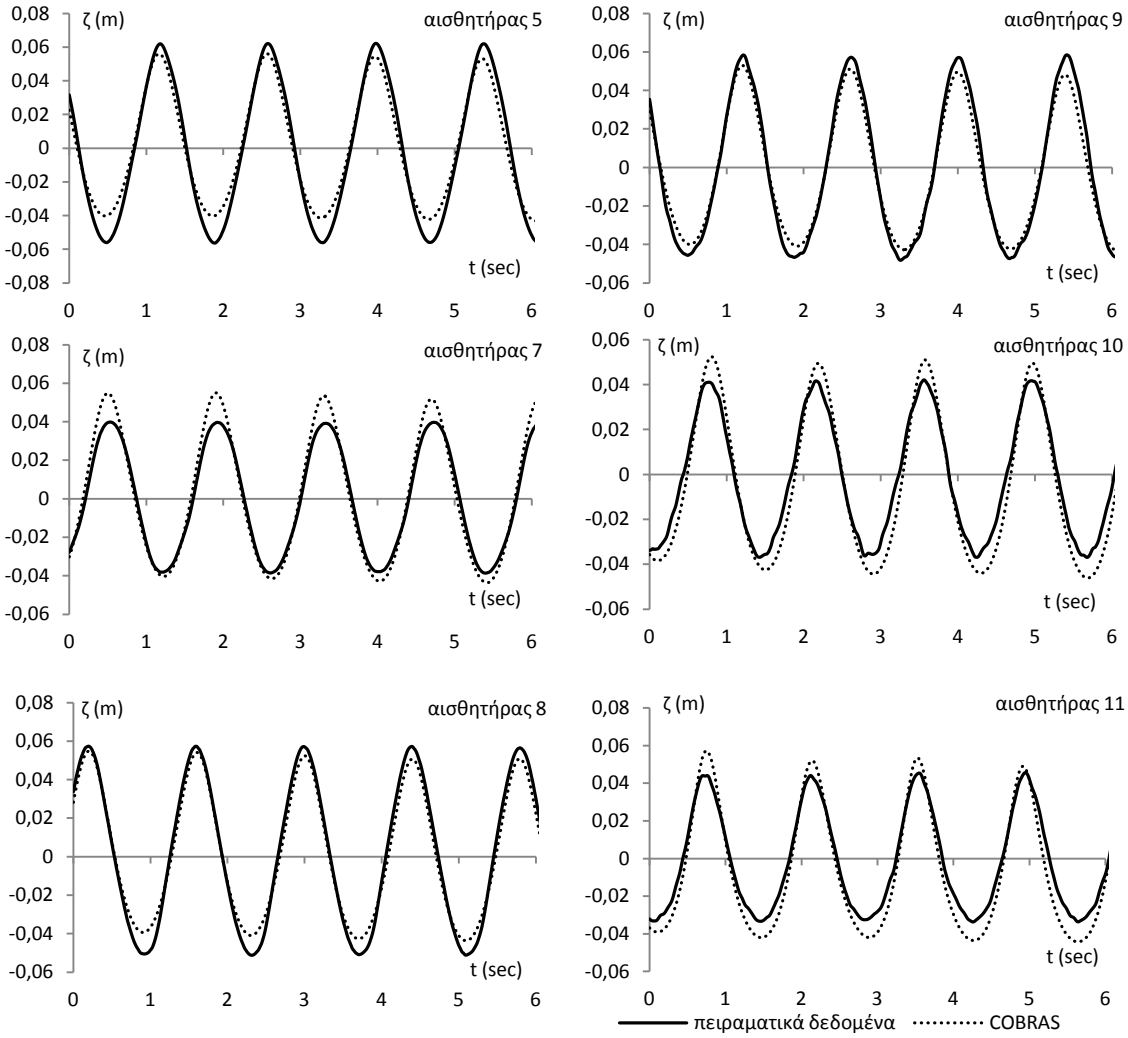
Δοκιμή "*RE-36*"





Σχήμα 6.27 Διακύμανση της ελεύθερης επιφάνειας, ζ ως προς το χρόνο, t: δοκιμή "*RE-36*" (πείραμα και Co.Br.A.S)

Δοκιμή "*RE-43*"

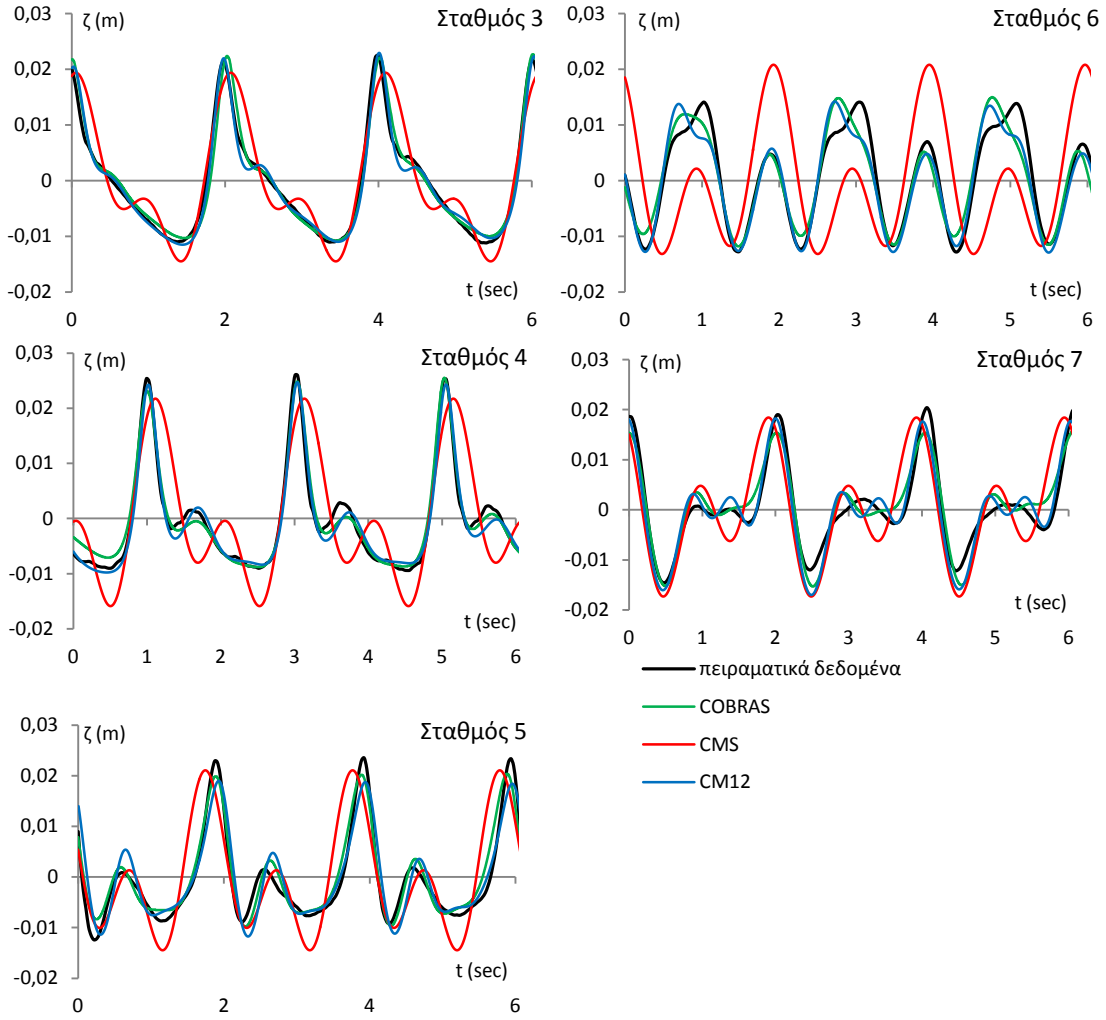


Σχήμα 6.28 Διακύμανση της ελεύθερης επιφάνειας, ζ ως προς το χρόνο, t: δοκιμή "*RE-43*" (πείραμα και Co.Br.A.S)

6.4. Σύγκριση αποτελεσμάτων, ζ(t)

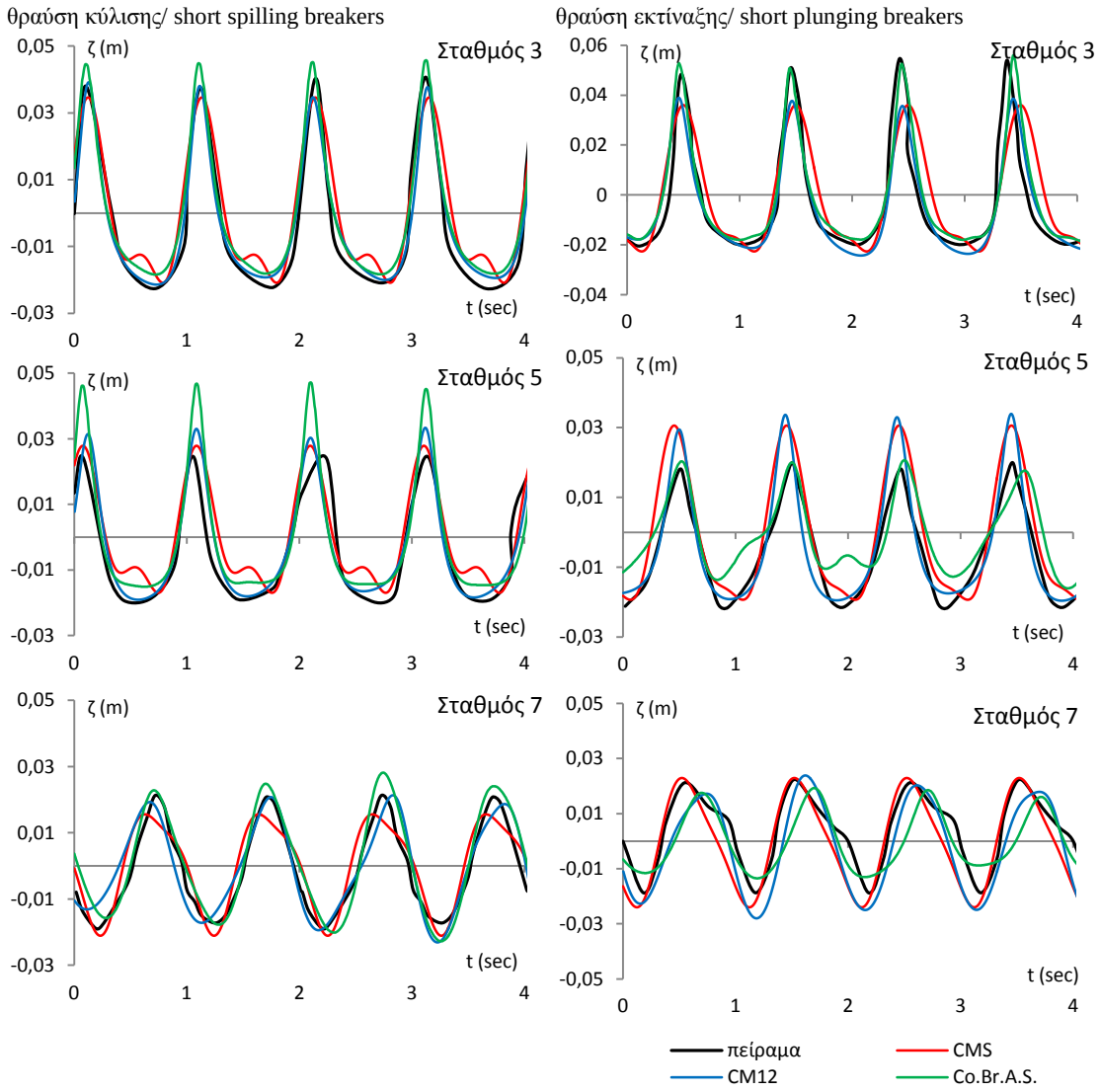
6.4.1. Περιπτώσεις γραμμικών κυμάτων - πρώτη πειραματική διάταξη (Beji & Battjes, 1993, 1994)

Στην πρώτη αυτή ενότητα παρουσιάζονται συγκρινόμενα μεταξύ τους και με τα δεδομένα των πειραμάτων. Αρχικά παρατίθενται τα αποτελέσματα για την πειραματική διάταξη που περιγράφηκε στην εργασία των Beji & Battjes (1993, 1994). Στο σχήμα 6.29 φαίνονται οι χρονοσειρές στάθμης ελεύθερης επιφάνειας για την περίπτωση κυμάτων χωρίς θραύση. Στο σχήμα 6.30 ακολουθούν οι δύο περιπτώσεις θραύσης βραχέων κυμάτων και στο σχήμα 6.31 οι ίδιες δύο περιπτώσεις θραύσης μακρών κυμάτων.

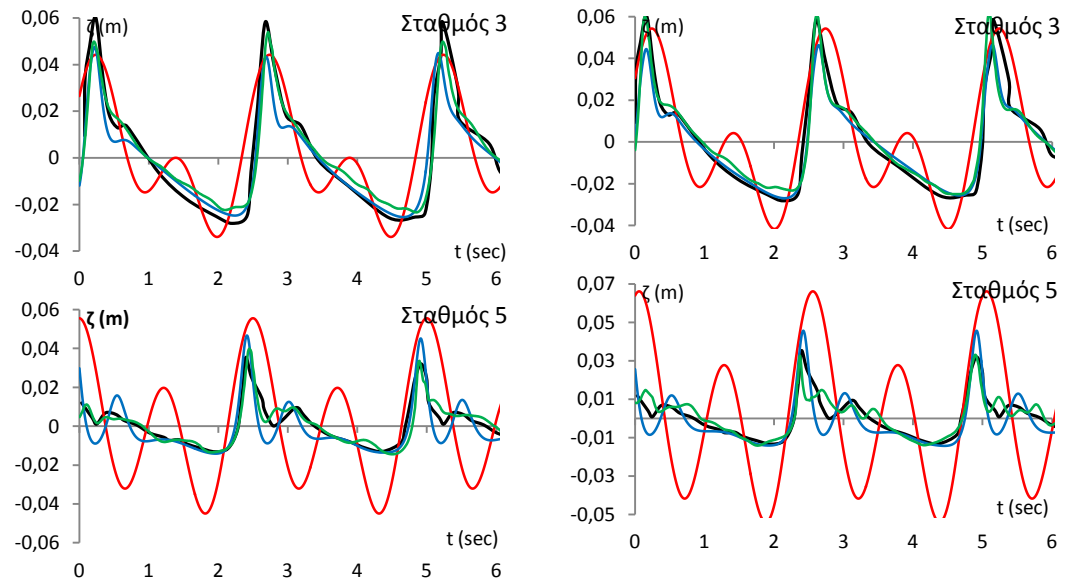


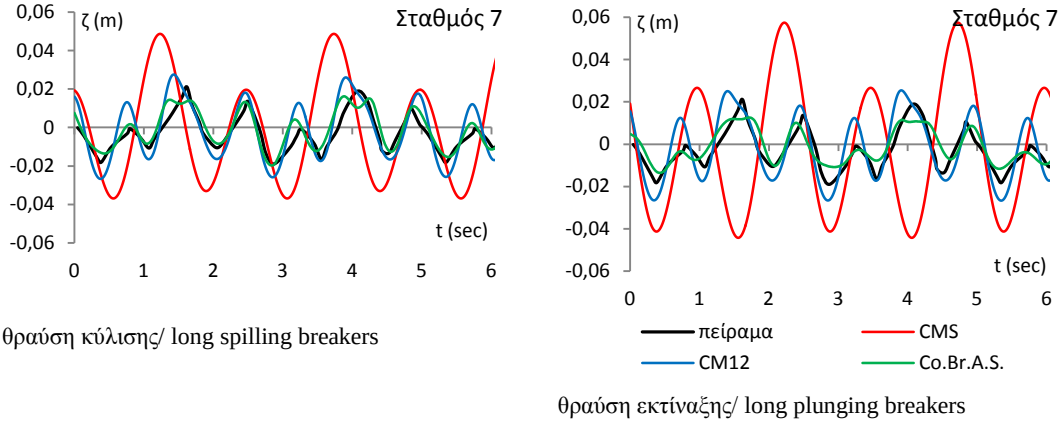
Σχήμα 6.29 Στάθμη ελεύθερης επιφάνειας, ζ(t): περίπτωση μη θραυόμενων κυματισμών (H_0=0,019m, T=2,02s, *C.M.S.: Belibassakis & Athanassulis, C.M.12: Chondros & Memos, 2012*).

Ακολουθούν οι δύο τύποι θραύσης, κύλισης και εκτίναξης (*spilling, plunging breakers*) για βραχέα και μακρά κύματα.



Σχήμα 6.30 Στάθμη ελεύθερης επιφάνειας, ζ(t): δύο περιπτώσεις θραύσης βραχέων κυματισμών (H_0=0,059m & H_0=0,069m, T=1,0s).





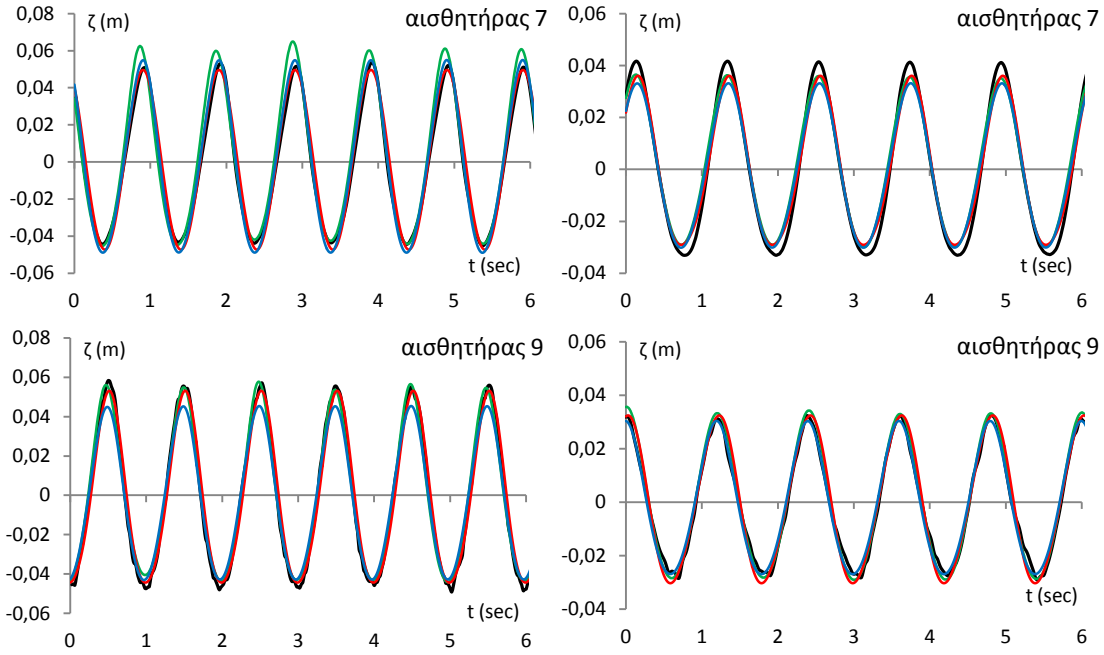
θραύση κύλισης/ long spilling breakers

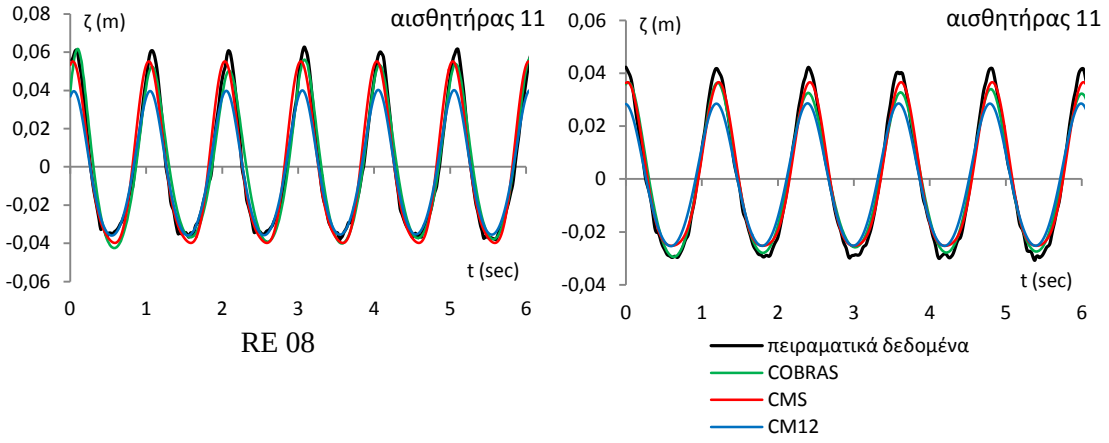
θραύση εκτίναξης/ long plunging breakers

Σχήμα 6.31 Στάθμη ελεύθερης επιφάνειας, ζ(t): δύο περιπτώσεις θραύσης μακρών κυματισμών (H_0=0,044m & H_0=0,054m, T=2,5s).

6.4.2. Περιπτώσεις γραμμικών κυμάτων - δεύτερη πειραματική διάταξη (HR Wallingford)

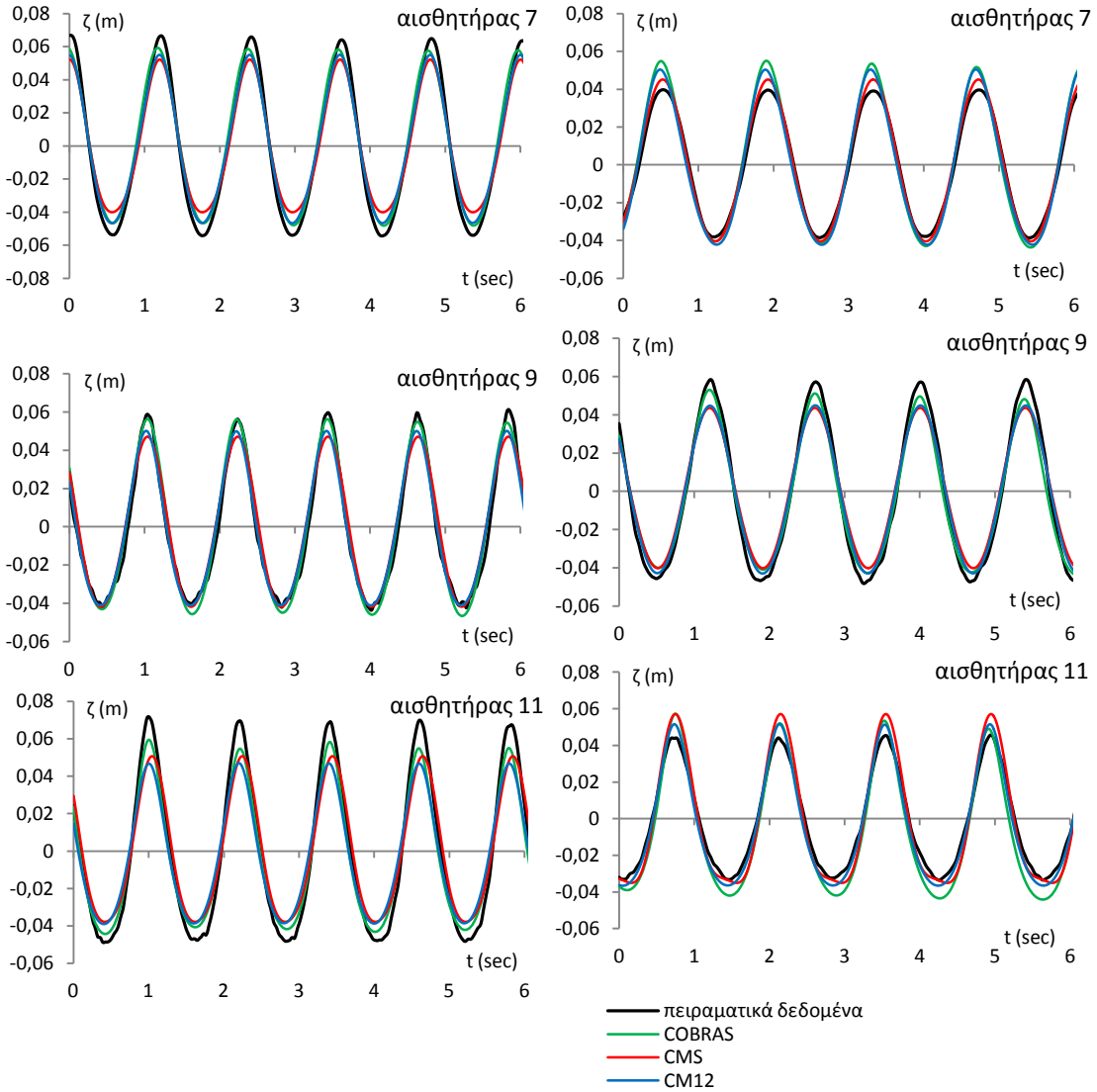
Έπειτα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων για την περίπτωση κεκλιμένης ακτής στις θέσεις των αισθητήρων 7,9 και 11. Οι τρείς αισθητήρες αντιστοιχούν στην αρχή, στη μέση και στο τέλος του κεκλιμένου επίπεδου. Οι χρονοσειρές της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας φαίνονται στα σχήματα 6.32 και 6.33.





RE 08 RE 29

Σχήμα 6.32 Στάθμη ελεύθερης επιφάνειας, ζ(t): RE08: H_0=0,1m, T=1,0s, RE29: H_0=0,075m, T=1,2s



RE36 RE43

Σχήμα 6.33 Στάθμη ελεύθερης επιφάνειας, ζ(t): RE36: H_0=0,12m, T=1,2s, RE43: H_0=0,075m, T=1,4s

6.5. Μεταβολή του ύψους κύματος

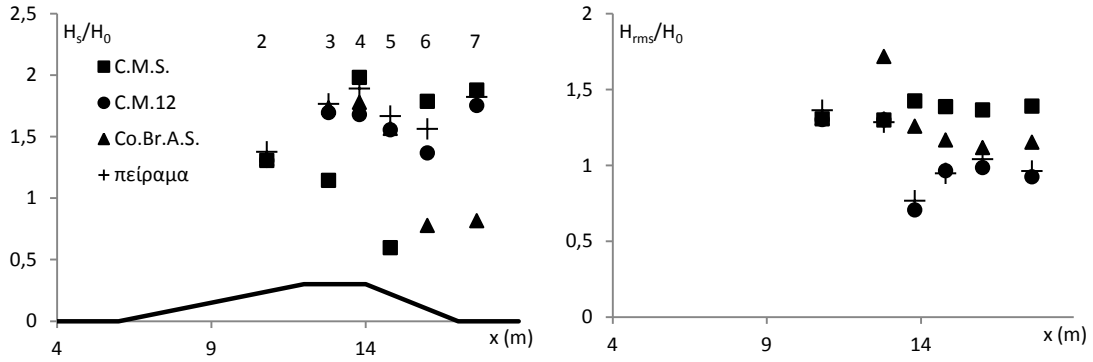
Για την παρουσίαση της μεταβολής του ύψους επιλέγεται η χρήση του λόγου του ύψους κύματος στην εκάστοτε θέση (H_{inc}, inc: *incident*) ως προς το αντίστοιχο ύψος κύματος στα βαθιά (H_0). Ο λόγος αυτός αντιπροσωπεύει την επίδραση της μεταβολής του βάθους στην περιοχή μετάδοσης. Υπολογίζεται για τα ύψη κύματος που αντιστοιχούν στις θέσεις των σταθμών 3,5 και 7 της πρώτης διάταξης για τις περιπτώσεις θραυόμενων κυμάτων. Το ίδιο γίνεται για τις περιπτώσεις που δεν συμβαίνει θραύση, για τις θέσεις των σταθμών 2 ως 7.Οι μετρήσεις που εξετάζονται στη δεύτερη διάταξη αντιστοιχούν στις θέσεις των αισθητήρων 5 ως 11.

Ένα σύνολο υψών κύματος ορίζεται από την χρονοσειρά της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας ($\zeta(t)$). Ο συνολικός εξεταζόμενος χρόνος αφορά ένα διάστημα δέκα περιόδων ($t=10T$) σε κάθε περίπτωση. Το ύψος κύματος μετράται ως η κατακόρυφη απόσταση από το κατώτερο άκρο (κοίλο σημείο) μέχρι το αμέσως επόμενο ανώτερο άκρο (κυρτό σημείο). Για τον ορισμό του ύψους του μονοχρωματικού κύματος, H_{inc} χρησιμοποιούνται οι εκφράσεις του σημαντικού ύψους κύματος, H_s (s: *significant*) και του ύψους μέσης τετραγωνικής τιμής, H_{rms} (rms: *root mean square*). Οι δύο αυτές μεταβλητές ορίζονται ως,

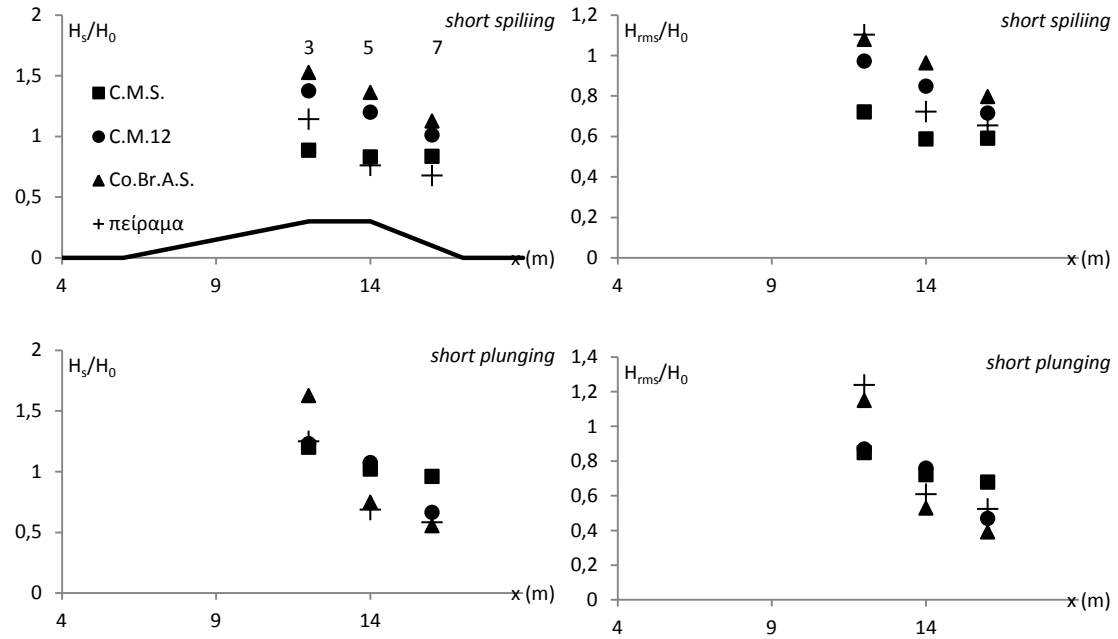
$$H_s = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} H_i$$

$$H_{rms} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} H_i^2}$$

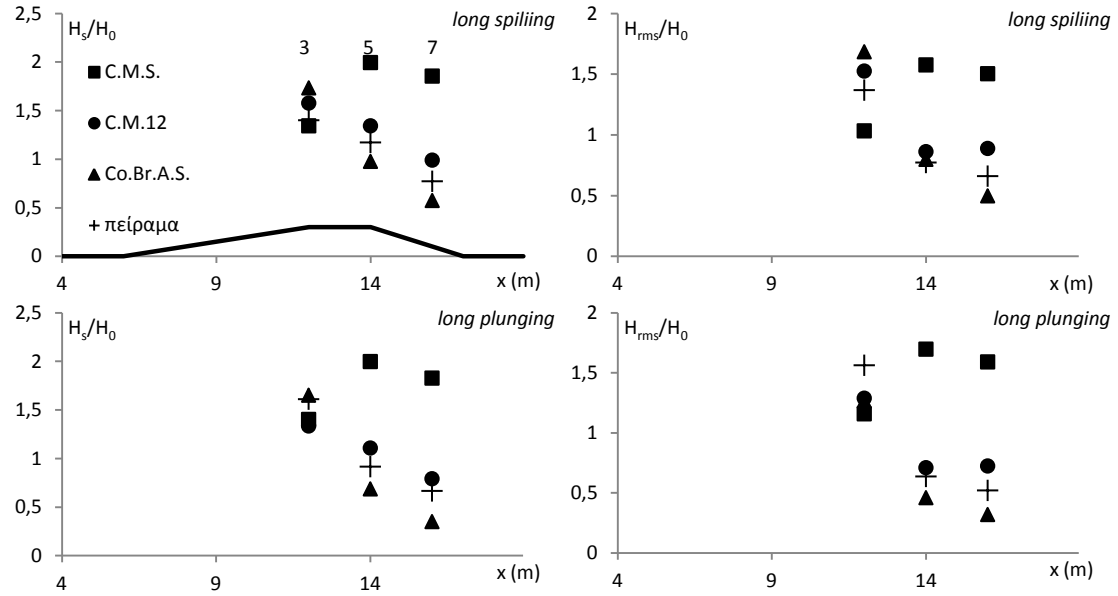
Για τον υπολογισμό του H_s χρησιμοποιείται το 1/3 των μεγαλύτερων τιμών των μετρήσεων. Για τη μεταβλητή H_{rms} χρησιμοποιείται το σύνολο των τιμών. Στα σχήματα 6.34 ως 6.36 φαίνεται ο λόγος H_{inc}/H_0 και οι θέσεις των σταθμών σε σχέση με το πυθμένα για τις εξεταζόμενες περιπτώσεις της πρώτης διάταξης.



Σχήμα 6.34 Αδιάστατος λόγος H_s/H_0 και H_{rms}/H_0 στις θέσεις 2 ως 7 της πρώτης διάταξης για την περίπτωση μη θραυόμενων κυμάτων

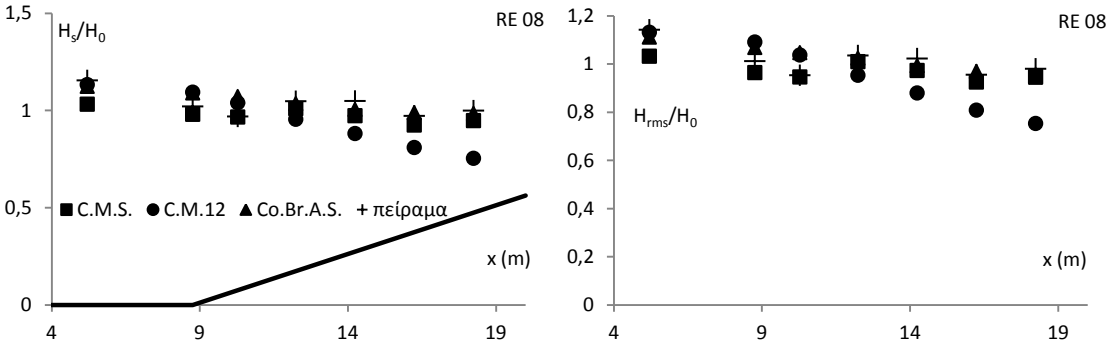


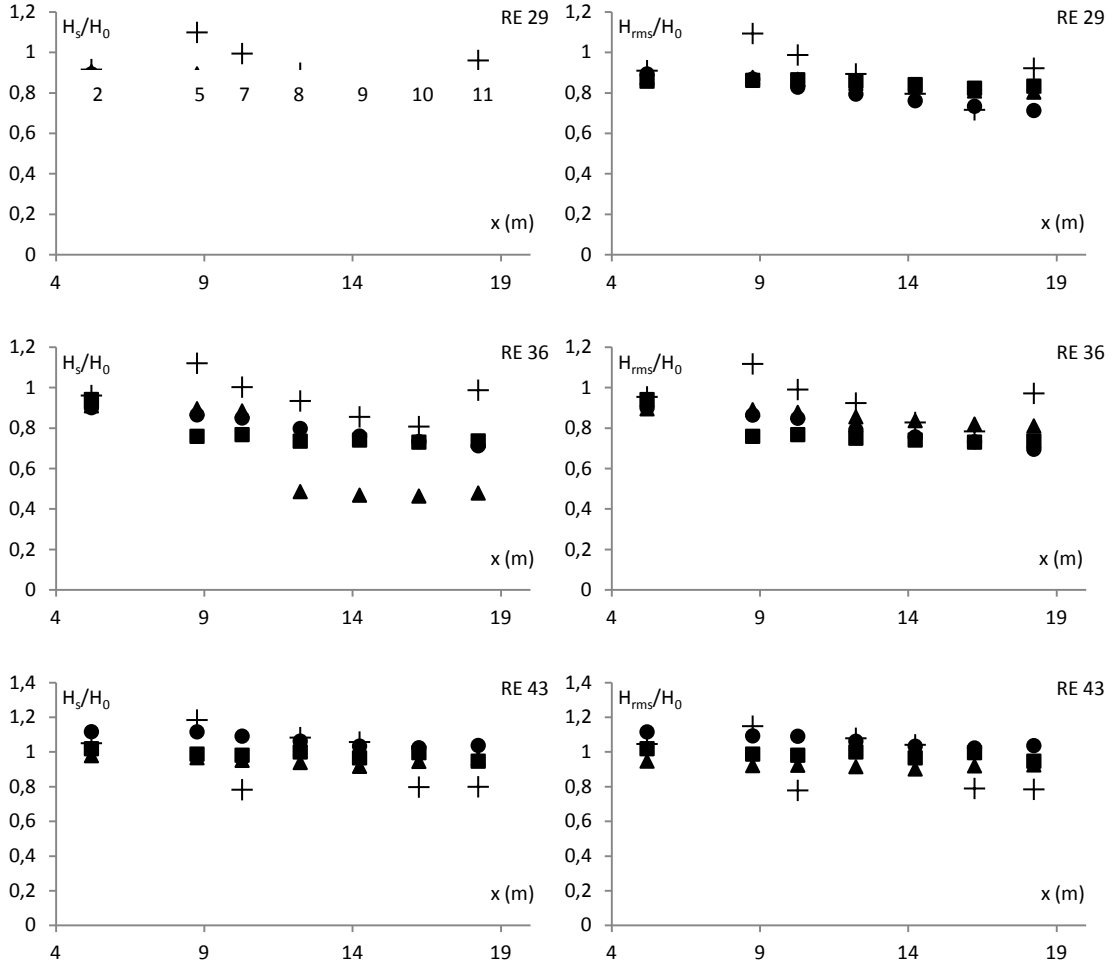
Σχήμα 6.35 Αδιάστατος λόγος H_s/H_0 και H_{rms}/H_0 στις θέσεις 3,5 και 7 της πρώτης διάταξης βραχέα κύματα θραύσης



Σχήμα 6.36 Αδιάστατος λόγος H_s/H_0 και H_{rms}/H_0 στις θέσεις 3,5 και 7 της πρώτης διάταξης μακρά κύματα θραύσης

Στο σχήμα 6.37 φαίνεται ο λόγος H_{inc}/H_0 και οι θέσεις των αισθητήρων σε σχέση με το πυθμένα για τις εξεταζόμενες περιπτώσεις της δεύτερης διάταξης.





Σχήμα 6.37 Αδιάστατος λόγος H_s/H_0 και H_{rms}/H_0 στις θέσεις 2,5,7,8,9,10,11 της δεύτερης διάταξης

Στόχος των παραπάνω διαγραμμάτων είναι η απεικόνιση της μείωσης του ύψους κύματος σε κάθε θέση ως προς το αρχικό ύψος κύματος στην περιοχή «βαθιών νερών». Χρησιμοποιώντας μετρήσεις που προέρχονται από μεγαλύτερες χρονοσειρές επιχειρείται μια πιο αντικειμενική απεικόνιση των παραγόμενων αποτελεσμάτων.

Ένα πρώτο συμπέρασμα είναι η επιβεβαίωση των μεγάλων τιμών του ύψους κύματος στις θέσεις μετά το εμπόδιο για το μοντέλο C.M.S. Αντίστοιχα εδώ παρατηρείται η μικρή μείωση στις ανάντη θέσεις. Αν στην ενότητα 6.4 διαπιστώθηκε η πολύ καλή σύγκλιση Co.Br.A.S. και πειραματικών δεδομένων στην ενότητα αυτή παρατηρούνται αποκλίσεις. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι λύσεις που παράγει δεν διατηρούν μια περιοδική ομοιομορφία. Δεν υπάρχει δηλαδή η περιοδική εμφάνιση μιας σταθεροποιημένης μορφής στον εξεταζόμενο χρόνο προσομοίωσης. Γενικότερα, όσο μεγαλύτερος ο χρόνος προσομοίωσης τόσο αυξάνεται η δυνατότητα παραγωγής αυτής της επιθυμητής περιοδικότητας στο τέλος του χρόνου αυτού. Ωστόσο κάτι τέτοιο δεν παρατηρήθηκε στην περίπτωση αυτή. Αναφορικά με το μοντέλο τύπου Boussinesq παρατηρείται η καλή σύγκλιση του με τα δεδομένα. Χαρακτηριστικό που φαίνεται ιδιαίτερα στις περιπτώσεις θραύσης εκτίναξης (*long & short plunging breakers*).

Θεωρητικά ο τύπος αυτός θραύσης προσεγγίζεται δυσκολότερα, πολύ περισσότερο δε για τα μακρά κύματα.

Παρατηρώντας τις δύο τελευταίες περιπτώσεις (*RE36* και *RE43*) επιβεβαιώνεται η δυσκολία των τριών μοντέλων να προσεγγίζουν το πείραμα (με εξαίρεση τις θέσεις 7,9). Η διάταξη του πειράματος περιέχει ακτή που ένα τμήμα της βρίσκεται πάνω από τη μέση στάθμη. Έτσι φυσικά σε αυτή τη θέση συμβαίνει αναρρίχηση/ καταρρίχηση του κύματος στην ακτή. Θέση η οποία είναι μερικά μέτρα μετά τη θέση του αισθητήρα 11. Αντί αυτής της διάταξης, επειδή τα μοντέλα C.M.S. και C.M.12 δεν περιλαμβάνουν την προσομοίωση του φαινομένου αυτού, η ακτή διακόπτεται 1m μετά τον αισθητήρα 11 και τοποθετείται ανοιχτό όριο. Η διπλή αυτή διαφορά ίσως αποτελεί και την ερμηνεία της δυσκολίας αυτής. Η ίδια διάταξη χρησιμοποιείται και για το Co.Br.A.S. αν και έχει δυνατότητα προσομοίωσης της αναρρίχησης κύματος. Ενδιαφέρον θα είχε η εφαρμογή του Co.Br.A.S. στην πραγματική διάταξη και η σύγκριση με τα παραπάνω αποτελέσματα. Να σημειωθεί ότι στη διάταξη αυτή το βάθος στο αριστερό ανοικτό όριο είναι 0,8m, στο δεξί 0,08m και στη θέση του τελευταίου αισθητήρα 0,075m.

6.6. Υπολογιστικός χρόνος

Στον πίνακα 7.1 αναλύονται τα στοιχεία που συνθέτουν το υπολογιστικό πεδίο. Οι παράμετροι που παρουσιάζονται είναι το χωρικό (Δx, Δy) και το χρονικό βήμα (Δt), ο αριθμός των κελιών και ο χρόνος προσομοίωσης. Όπως φαίνεται και για την πρώτη διάταξη το χωρικό βήμα Δx διαφέρει για τα C.M.S., C.M. 12 και Co.Br.A.S.. Εδώ πρέπει να αναφερθεί ότι η μείωση του Δx από 0,025 σε 0,02 καταλήγει σε ίδιους χρόνους υπολογισμού για τα μοντέλα C.M.S. και C.M.12. Στη δεύτερη διάταξη χρησιμοποιείται βήμα Δx=0,01m επειδή για το βήμα αυτό προκύπτουν καλύτερα αποτελέσματα σε σχέση με τη χρήση του Δx=0,02m. Το ίδιο δεν παρατηρήθηκε για τα άλλα δύο μοντέλα. Το χρονικό βήμα που φαίνεται χρησιμοποιείται σε κάθε περίπτωση. Την χρήση του περιορίζει η συνθήκη (ή συνθήκες) ευστάθειας που πρέπει να ικανοποιούνται στα μοντέλα Co.Br.A.S. και C.M.12. Οι συνθήκες αυτές περιγράφηκαν στα κεφάλαια 3 και 4. Ο χρόνος προσομοίωσης πρέπει να είναι τέτοιος ώστε να δίνεται η δυνατότητα αρχικά σταθεροποίησης των χρονικών συναρτήσεων ($\zeta(t)$) και η εξαγωγή δείγματος σε ένα ικανοποιητικό εύρος χρόνου. Η απαίτηση αυτή ισχύει για τα μοντέλα Co.Br.A.S. αυτό των Chondros & Memos (2012), καθώς η επίλυση είναι χρονικά εξαρτώμενη. Αυτό δεν ισχύει για το μοντέλο των Belibassakis & Athanassoulis (1999, 2002), που η επίλυση γίνεται στην περιοχή των συχνοτήτων, σταθερές επομένως ως προς το χρόνο. Πρέπει να σημειωθεί ότι η χρήση διαφορετικού αριθμού κελιών οφείλεται στις διαφορετικές απαιτήσεις κάθε μοντέλου (πλάτος απορροφητικού ορίου, πλάτος περιοχής πηγής). Τέλος, όπως φαίνεται στο μοντέλο Co.Br.A.S. η επίλυση γίνεται σε δύο διαστάσεις. Έτσι αναμένεται ο υπολογιστικός χρόνος για το μοντέλο αυτό να είναι μεγαλύτερος των άλλων δύο. Γεγονός που επιβεβαιώνεται από τους πίνακες 6.8 και 6.9. Μια παράμετρος που καθορίζει σε ένα πολύ σημαντικό βαθμό τον χρόνο υπολογισμού είναι η δυνατότητα του υπολογιστικού

συστήματος. Έτσι παρατίθενται και τα χαρακτηριστικά του χρησιμοποιούμενου ηλεκτρονικού υπολογιστή.

Intel(R) Pentium(R) D CPU 2,80GHz 2.79Hz, 32-bit operating system (RAM, 2GB)									
Υπολογιστικό πεδίο									
	Αριθμός κελιών		Δx	Δy	Δx	Δy	Χρόνος προσομοίωσης		Δt (s)
μοντέλο	Διάταξη 1	Διάταξη 2	Διάταξη 1		Διάταξη 2		Διάταξη 1	Διάταξη 2	
C.M.S.	1159	2301	0,025	-	0,01	-	10s	10s	0,0025
Co.Br.A.S.	1452x82	1301x102	0,02	0,01	0,02	0,01	50s	50s	0,0025
C.M. 12	2400	1800	0,025	-	0,02	-	50s	50s	0,0025

διάταξη 1: Beji & Battjes, 1993, 1994
διάταξη 2: πειράματα HR Wallingford

Πίνακας 6.7 Στοιχεία υπολογιστικού πλέγματος

Στους πίνακες 6.8 και 6.9 δίνεται ο υπολογιστικός χρόνος για τις εξεταζόμενες περιπτώσεις μονοχρωματικών κυμάτων. Στον πίνακα 6.9 φαίνεται ο χρόνος που απαιτήθηκε για τις πέντε περιπτώσεις των Beji & Battjes, 1993, 1994.

Υπολογιστικός χρόνος (min)					
μοντέλο	μη θραυόμενα, γραμμικά κύματα	βραχέα, γραμμικά κύματα θραύση κύλισης	θραύση εκτίναξης	μακρά, γραμμικά κύματα θραύση κύλισης	θραύση εκτίναξης
C.M.S.	4	4	4	4	4
Co.Br.A.S.	439	393	488	386	505
C.M. 12	5	4	5	4	4

Πίνακας 6.8 Υπολογιστικός χρόνος για την διάταξη 1

Όπως φαίνεται και από τους χρόνους του πίνακα 6.8 επιβεβαιώνεται η δυσκολότερη προσομοίωση της θραύσης τύπου εκτίναξης από αυτήν τύπου κύλισης. Στον πίνακα 6.9 φαίνεται ο απαιτούμενος χρόνος υπολογισμών για τις τέσσερεις περιπτώσεις πειραμάτων της διάταξης του εργαστηρίου HR Wallingford.

Υπολογιστικός χρόνος (min)				
μοντέλο	RE 08	RE 29	RE 36	RE 43
C.M.S.	4	4	4	4
Co.Br.A.S.	416	387	376	399
C.M. 12	5	5	4	4

Πίνακας 6.9 Υπολογιστικός χρόνος για την διάταξη 2

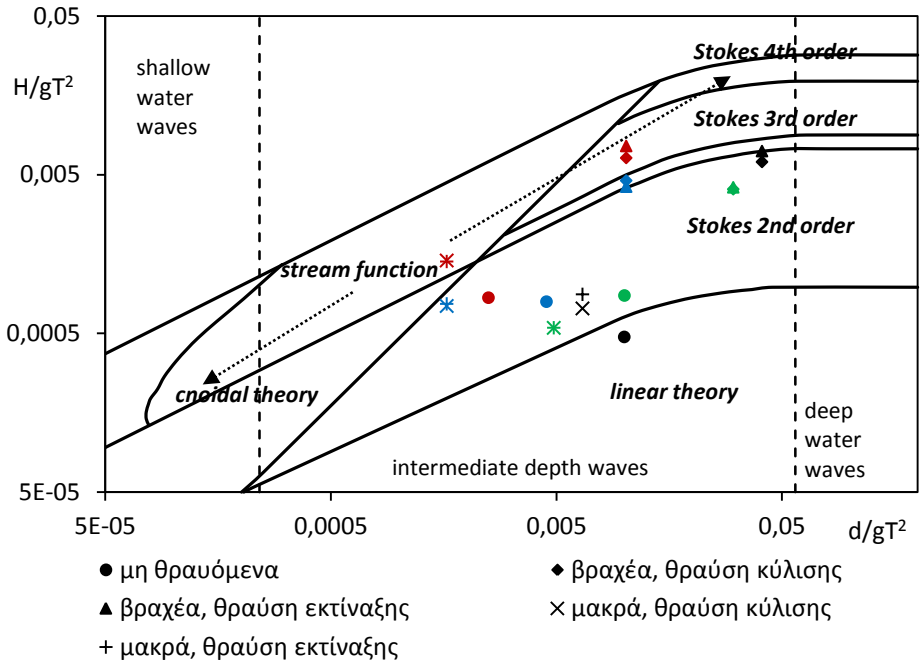
Η απόδοση αυτή είναι και η αναμενόμενη, αφού το μοντέλο που βασίζεται στις εξισώσεις RANS υπολογίζει μεταβλητές σε δισδιάστατο πεδίο (2DV: μία οριζόντια διάσταση, μία κατακόρυφη διάσταση). Αυτό επιβαρύνει το υπολογιστικό κόστος της επίλυσης των αρχικών εξισώσεων εκφρασμένων σε στοιχεία πεπερασμένων διαφορών.

Όμως εξαρχής κρίνεται ότι επίλυση των N-S (αν και ολοκληρωμένων κατά χρόνο, RANS) έχει μεγαλύτερο υπολογιστικό κόστος των άλλων δύο. Βέβαια αυτό ισχύει για την απλή περίπτωση που στόχος είναι η διερεύνηση του κυματικού πεδίου (H, L, T = f(d)).

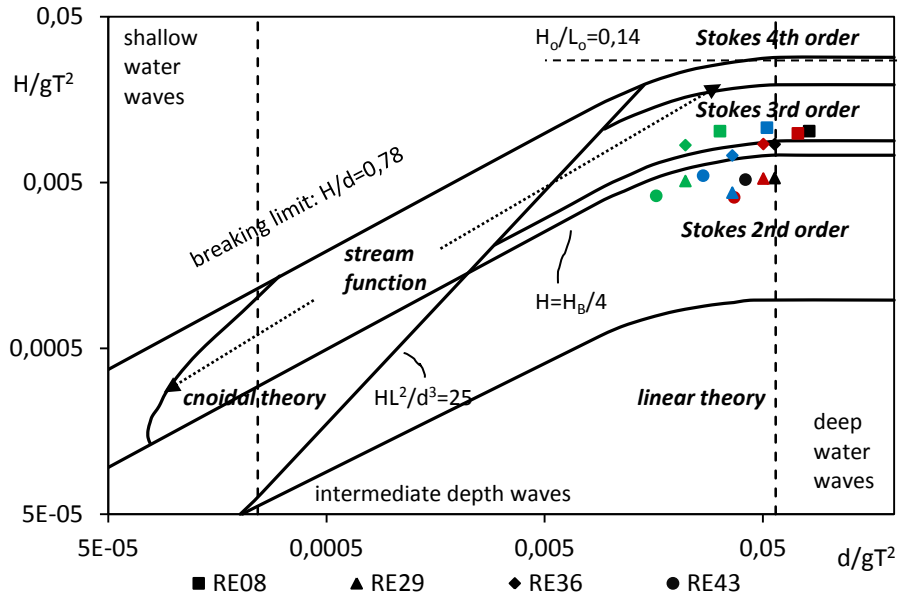
6.7. Περιοχή εφαρμογής

Στο πρώτο κεφάλαιο αναλύθηκε η περιοχή ισχύος διάφορων κυματικών θεωριών με κριτήρια αδιάστατες μεταβλητές. Προτάθηκε η χρήση του διαγράμματος του Le Méhauté (1976) στο οποίο περιέχονται η αδιάστατη έκφραση του ύψους κύματος, H/gT^2, ως προς την αδιάστατη έκφραση του βάθους, d/gT^2. Στα πλαίσια της λογικής αυτής υπολογίστηκαν οι δύο λόγοι με δεδομένα τα (H, T, d) για κάθε μία από τις εννέα περιπτώσεις που παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 2.

Τα αποτελέσματα εντασσόμενα στο διάγραμμα αποτελούν ένδειξη για την ισχύ των ανώτερης τάξης, μη γραμμικών, όρων Stokes. Έτσι κατασκευάζονται τα σχήματα 6.38 και 6.39. Στο σχήμα 6.38 φαίνονται οι πέντε περιπτώσεις της πρώτης διάταξης (Beji & Battjes, 1993, 1994). Οι τέσσερεις περιπτώσεις της δεύτερης διάταξης (πειραματική διάταξη HR Wallingford) φαίνονται στο σχήμα 6.39.



Σχήμα 6.38 Κατηγοριοποίηση των περιπτώσεων από Beji & Battjes (1993, 1994, *το σχήμα υποδηλώνει το είδος θραύσης, μαύρο: θέση σταθμού 1, κόκκινο: θέση σταθμού 3, μπλε: θέση σταθμού 5, πράσινο: θέση σταθμού 7*)



Σχήμα 6.39 Κατηγοριοποίηση των περιπτώσεων της διάταξης του εργαστηρίου HR Wallingford (*το σχήμα υποδηλώνει το είδος θραύσης, μαύρο: θέση βαθιών νερών, κόκκινο: θέση σταθμού 7, μπλε: θέση σταθμού 9, πράσινο: θέση σταθμού 11*)

Από τα σχήματα 6.38 και 6.39 γίνεται αντιληπτή η ασθενής μη γραμμικότητα που χαρακτηρίζει το σύνολο των περιπτώσεων στη περιοχή του πρώτου σταθμού (μαύρο χρώμα). Για τις περιπτώσεις της πρώτης διάταξης, αυτές τοποθετούνται στο εύρος της θεωρίας Stokes 2ης τάξης. Εξαίρεση αποτελεί η περίπτωση που δε συμβαίνει θραύση. Όσο αφορά το σχετικό βάθος τοποθετούνται στην περιοχή ενδιάμεσου βάθους, προς την περιοχή μεγάλου βάθους. Ωστόσο θα ήταν λογικό να τοποθετούνται στην περιοχή «βαθιών νερών», έχοντας ως κριτήριο τη τιμή του γινομένου *kd* που τοποθετείται κοντά στη τιμή του ορίου ενδιαμέσων και βαθιών «νερών». Προχωρώντας προς τους επόμενους σταθμούς οι ενδείξεις τοποθετούνται σε περιοχές μικρότερου σχετικού βάθους και εντείνεται η ενίσχυση των μη γραμμικών όρων. Επίσης παρατηρείται ότι οι περιπτώσεις θραύσης εκτίναξης παρουσιάζονται υψηλότερα αυτών της θραύσης κύλισης. Πρόσθετα παρατηρείται ότι τα μακρά κύματα είναι λιγότερο μη γραμμικά των βραχέων.

Παρόμοιες τάσεις σημειώνονται για τις περιπτώσεις της δεύτερης διάταξης. Εδώ το σύνολο των περιπτώσεων συγκεντρώνεται κοντά στην οριακή γραμμή θεωρίας Stokes δεύτερης και τρίτης τάξης.

Ένα δεύτερο κριτήριο της ισχύος εφαρμογής της εκάστοτε θεωρίας και κατά συνέπεια της μη γραμμικότητας, είναι ο αριθμός Ursell. Η χρήση του αναλύθηκε στο πρώτο κεφάλαιο.

Beji & Battjes (1993, 1994) $\xi = \tan\alpha / \sqrt{H/L}$		$U_R = L^2 H / d^3$	HR Wallingford	ξ	U_R
short plunging			RE 08		
Στ. 1	-	2,302182	πηγή	0,197400	0,476111
Στ. 3	0,22901	62,93148	αισθ. 7	0,199836	0,652101
Στ. 5	0,61870	35,10742	αισθ. 9	0,189958	1,79902
Στ. 7	-	2,879947	αισθ. 11	0,186055	6,331987
short spilling			RE 29		
Στ. 1	-	2,040105	πηγή	0,273526	0,740448
Στ. 3	0,24969	54,27048	αισθ. 7	0,269851	0,985556
Στ. 5	0,59200	39,24939	αισθ. 9	0,289588	1,93602
Στ. 7	-	2,893818	αισθ. 11	0,249313	7,630961
long plunging			RE 36		
Στ. 1	-	18,94547	πηγή	0,216242	1,184717
Στ. 3	0,52939	525,3801	αισθ. 7	0,212412	1,590639
Στ. 5	1,44817	281,8983	αισθ. 9	0,223705	3,244287
Στ. 7	-	21,29247	αισθ. 11	0,194363	12,5558
long spilling			RE 43		
Στ. 1	-	15,43705	πηγή	0,276361	1,829028
Στ. 3	0,52548	526,7704	αισθ. 7	0,299728	1,729318
Στ. 5	1,47023	273,5013	αισθ. 9	0,247312	5,277443
Στ. 7	-	21,43727	αισθ. 11	0,261466	12,57649
non breaking waves					
Στ. 1	-	12,04918			
Στ. 3	-	130,0682			
Στ. 5	-	36,55092			
Στ. 7	-	7,53108			

Πίνακας 6.10 Αριθμός Iribarren και Ursell για τα πειραματικά δεδομένα

Σύμφωνα με τον ορισμό που δόθηκε, ο αριθμός Ursell, U_R υπολογίστηκε για τα δεδομένα των δύο πειραμάτων. Τα αποτελέσματα συνθέτουν τον πίνακα 6.10. Όπως φαίνεται η γραμμική θεωρία και οι επεκτάσεις της θεωρίας Stokes αρκούν για την προσέγγιση του συνόλου των περιπτώσεων της δεύτερης διάταξης (U_R<79). Αξίζει να σημειωθεί ότι η γραμμική θεωρία θεωρείται ότι επαρκεί για περιπτώσεις τιμών $U_R \ll 100$ (Coastal Engineering Manual). Παρατηρώντας τις τιμές της πρώτης διάταξης, η ίδια διαπίστωση γίνεται για τους σταθμούς 1 και 7 που βρίσκονται πριν και μετά το εμπόδιο τραπεζοειδούς διατομής. Για τις περιπτώσεις των βραχέων κυμάτων (*"short spilling, plunging"*) η εφαρμογή της θεωρίας Stokes είναι δυνατή και για τους σταθμούς 3 και 5. Οι περιπτώσεις μακρών κυμάτων (*"long spilling, plunging"*) εμφανίζουν τιμές U_R μεγαλύτερες από τις υπόλοιπες περιπτώσεις. Η θεωρία Stokes δεν επαρκεί για την προσέγγιση του κυματικού πεδίου στις θέσεις των σταθμών 3 και 5. Υψηλή τιμή υπολογίζεται και για την περίπτωση των μη θραυόμενων κυμάτων στο σταθμό 3. Μια γενικότερη τάση που παρατηρείται είναι η αύξηση των τιμών της παραμέτρου, U_R όσο μειώνεται το βάθος. Αυτά αναμένονται θεωρητικά.

Η κατάταξη των θραυόμενων κυμάτων έχει γίνει ήδη για τις περιπτώσεις της πρώτης διάταξης. Το ίδιο γίνεται εδώ για τις περιπτώσεις της δεύτερης διάταξης. Κριτήριο η παράμετρος ξ (*Iribarren number*). Αυτή παίρνει τιμές μικρότερες του ορίου $\xi < 0,5$, συνεπώς στις περιπτώσεις που συμβαίνει θραύση αυτή είναι θραύση κύλισης (*spilling*).

Κεφάλαιο 7

Συμπεράσματα

Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης των μοντέλων σε σύγκριση με τα πειραματικά δεδομένα και η μεταξύ τους σύγκριση παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο. Στο παρόν κεφάλαιο με βάση τη σύγκριση αυτή αξιολογείται η πρακτική χρησιμότητα κάθε μοντέλου.

7.1. Συμπεράσματα

Θεωρητικά αναμένεται η υπεροχή του μοντέλου που εφαρμόζει τις εξισώσεις RANS σε σχέση με τα άλλα δύο. Ο λόγος αυτού είναι η εκμετάλλευση των αρχικών εξισώσεων μάζας και κίνησης χωρίς απλουστεύσεις, όπως η παραδοχή μηδενικών διατμητικών τάσεων από τα μοντέλα τύπου Boussinesq. Το μοντέλο συζευγμένων ιδιομορφών επίσης αναμένεται να συγκλίνει για περιπτώσεις με μικρής τάξης μη γραμμικά χαρακτηριστικά.

Παρατηρώντας τα διαγράμματα της ελεύθερης επιφάνειας, ζ(t) του Co.Br.A.S. διαπιστώνεται η πολύ καλή σύγκλιση των αποτελεσμάτων του με τα πειραματικά δεδομένα για κάθε εξεταζόμενη περίπτωση. Ωστόσο διαπιστώνεται η παραγωγή ασταθούς λύσης για την περίπτωση της θραύσης εκτίναξης, τόσο σε βραχέα όσο και στα μακρά κύματα. Γεγονός που διαπιστώνεται και από τις αποκλίσεις που σημειώνονται όσον αφορά τα αδιάστατα ύψη κύματος H_i/H_o. Καθώς σε αυτά χρησιμοποιούνται μετρήσεις χρόνου ίσου με 10 περιόδους. Ένας πιθανός λόγος για την αστάθεια αυτή θα μπορούσε να είναι η χρήση γραμμικού κύματος στην πηγή αναπαραγωγής του πεδίου. Γενικά αναμένεται και διαπιστώνεται η παραγωγή σταθερότερων κυμάτων χρησιμοποιώντας κύματα στα οποία συμμετέχουν όροι Stokes ανώτερης τάξης. Όμως όπως φάνηκε από τη σύγκριση των δύο η χρήση γραμμικών κυμάτων ως πηγή δίνει καλύτερα αποτελέσματα. Αδυναμία επίσης διαπιστώνεται στην περίπτωση RE-43 αν και οι αποκλίσεις που σημειώνονται είναι μικρές. Να σημειωθεί ότι με τον όρο σταθερότητα εδώ γίνεται αναφορά στην περιοδικότητα που χαρακτηρίζει την χρονική μεταβολή ελεύθερης επιφάνειας.

Η εφαρμογή του μοντέλου συζευγμένων ιδιομορφών για την περίπτωση μη θραυόμενων κυμάτων της πρώτης διάταξης οδηγεί σε αποτελέσματα που συγκλίνουν με τα πειραματικά δεδομένα. Προχωρώντας στις περιπτώσεις που υπάρχει θραύση διαπιστώνεται αδυναμία του μοντέλου για τις περιπτώσεις θραύσης εκτίναξης. Δείχνει να υπερεκτιμά γραμμικές και μη γραμμικές συνιστώσες στην περιοχή πάνω και μετά τη στέψη (σταθμοί 5 και 7). Στην τέταρτη περίπτωση της δεύτερης διάταξης (RE-43) υπερεκτιμά το ύψος κύματος στις θέσεις στη μέση του κεκλιμένου επιπέδου (αισθητήρες 7 και 10). Γενικότερα για τις υπόλοιπες περιπτώσεις της δεύτερης διάταξης τα αποτελέσματα είναι πολύ καλά. Συμπερασματικά διαπιστώνεται αδυναμία στην προσέγγιση της θραύσης λόγω μείωσης του βάθους και της προσέγγισης των μη γραμμικών χαρακτηριστικών σε ακραίες για το μοντέλο περιπτώσεις. Είναι πολύ πιθανή η βελτίωση των αποτελεσμάτων με τη χρήση μιας διαφορετικής προσέγγισης για την απόσβεση ενέργειας, τη χρήση ενός διαφορετικού συντελεστή απόσβεσης και κριτηρίου θραύσης.

Στην περίπτωση του τραπεζοειδούς εμποδίου εξετάζονται περιπτώσεις βραχέων και μακρών κυμάτων. Έχει δοκιμαστεί για περιπτώσεις ενδιάμεσων κυμάτων (Belibassakis & Athanassoulis, 2002, Belibassakis & Athanassoulis, 2011, Katsardi et al. 2012) δίνοντας πολύ καλά αποτελέσματα. Οι εξεταζόμενες από αυτή την εργασία περιπτώσεις κυμάτων αποτελούν ακραίες περιπτώσεις (κατά τους Beji & Battjes, 1993) βραχέων και μακρών κυμάτων. Έτσι ίσως οι περιπτώσεις που εξετάζονται δεν ικανοποιούν τις προϋποθέσεις εφαρμογής της θεωρίας μικρών διαταραχών (θεωρία Stokes). Οι προϋποθέσεις μικρού εύρους για την εφαρμογή της θεωρίας μικρών διαταραχών και τις επεκτάσεις της θεωρίας Stokes διατυπώνονται ως $a/L \ll 1$ ή $\varepsilon = ka = H/L \ll 1$. Κατά τα δεδομένα για τις περιπτώσεις θραυόμενων βραχέων κυμάτων ο λόγος *H/L* κυμαίνεται μεταξύ 0,03 και 0,065. Για τις περιπτώσεις θραυόμενων μακρών κυμάτων μεταξύ 0,003 και 0,03. Οι μεγαλύτερες τιμές του λόγου *H/L* αντιστοιχούν στην θέση του σταθμού 3. Θέση που βρίσκεται στην αρχή της στέψης. Για τις περιπτώσεις μη θραυόμενων κυμάτων - που τα αποτελέσματα του C.M.S. δείχνουν να συγκλίνουν περισσότερο με τα πειραματικά - ο λόγος *H/L* βρίσκεται μεταξύ 0,002 και 0,019. Αξιοσημείωτο επίσης είναι το γεγονός ότι για τους ίδιους τύπους κυμάτων (βραχέα ή μακρά) ο λόγος *H/L* για την θραύση εκτίναξης είναι μεγαλύτερος (περίπου διπλάσιος) από αυτόν της θραύσης κύλισης. Γενικότερα διαπιστώνεται ότι ικανοποιείται η προϋπόθεση μικρού εύρους.

Στοιχείο που καταδεικνύει την αδυναμία αυτή σε περιπτώσεις που αναμένεται έντονη μη γραμμικότητα, αποτελεί ο αριθμός Ursell. Όπως φαίνεται οι αριθμοί Ursell των εν λόγω περιπτώσεων (για τις θέσεις πάνω από τη στέψη) ξεπερνούν κατά πολύ τα αναμενόμενα όρια ισχύος της θεωρίας Stokes 2ης τάξης. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγει κανείς χρησιμοποιώντας ως κριτήριο το διάγραμμα Le Méhauté. Θυμίζοντας όσα προαναφέρθηκαν στο πρώτο κεφάλαιο, στο διάγραμμα αυτό εξετάζεται η σχέση του αδιάστατου λόγου που εμπεριέχει ύψος κύματος και περίοδο ως προς τον αδιάστατο λόγο βάθους και περιόδου.

Τέλος το ομοίωμα που βασίζεται σε εξισώσεις τύπου Boussinesq παράγει λύσεις που συγκλίνουν με τα πειραματικά δεδομένα. Αν και τείνει να υπερεκτιμά το ύψος κύματος στο τέλος της στέψης στην περίπτωση βραχέων κυματισμών. Όπως και στα δύο προηγούμενα μοντέλα έτσι και εδώ διαπιστώνεται μια μικρή απόκλιση στην περίπτωση RE-43 της δεύτερης διάταξης. Γενικότερα για τις περιπτώσεις της δεύτερης διάταξης η σύγκλιση είναι επίσης πολύ καλή.

Όπως σε κάθε άλλη περίπτωση αντικείμενο άξιο διερεύνησης αποτελεί η πρακτική αξία του εκάστοτε εργαλείου. Αυτή καθορίζεται κατά βάση από τις ανάγκες του χρήστη. Στα πλαίσια αυτής της εργασίας οι ανάγκες του χρήστη συνίστανται τριών παραγόντων. Πρώτος είναι ο σκοπός, που εν προκειμένω είναι το κυματικό πεδίο της διάδοσης σε μία διάσταση. Δεύτερος παράγοντας η σύγκλιση των αποτελεσμάτων με την πραγματικότητα. Τρίτος οι απαιτήσεις που έχει κάθε ομοίωμα για μια προσομοίωση μιας υπόθεσης, δηλαδή το υπολογιστικός κόστος. Αναφορικά με το δεύτερο σημείο, παρατηρείται ότι στην περίπτωση πυθμένα με τραπεζοειδές εμπόδιο το μοντέλο που επιλύει εξισώσεις τύπου Boussinesq οδηγεί σε καλύτερα αποτελέσματα. Στην δεύτερη περίπτωση με πυθμένα ήπιας και ομοιόμορφης κλίσης το μοντέλο των Belibassakis & Athanassoulis (1992, 2002) προσεγγίζει καλύτερα τα πειραματικά δεδομένα. Η επίλυση των εξισώσεων RANS για την περίπτωση που ζητούμενο αποτελεί η μεταβλητή της ανύψωσης της ελεύθερης στάθμης, ζ(t) αποδείχτηκε εξαιρετικά χρονοβόρα, με την προσομοίωση από τα άλλα δύο μοντέλα να γίνεται σε σημαντικά μικρότερο χρόνο.

Στην αρχή αυτής της ενότητας αναφέρθηκε ότι αναμενόμενη ήταν η καλύτερη σύγκλιση των αποτελεσμάτων του μοντέλου που βασίζεται στις εξισώσεις RANS. Κάτι τέτοιο ωστόσο εδώ δε διαπιστώνεται, αν και αυτές αποτελούν ιδιαίτερα δημοφιλή μέθοδο με πολύ καλά αποτελέσματα και εύρος εφαρμογής (σε τομείς υδραυλικής και αεροδυναμικής). Όπως αναφέρθηκε και στο πρώτο κεφάλαιο οι εξισώσεις αυτές προκύπτουν ως αποτέλεσμα ολοκλήρωσης των εξισώσεων N-S ως προς ένα χαρακτηριστικό χρόνο (μέθοδος που συναντάται και ως Reynolds averaging). Έτσι οι εξισώσεις RANS περιγράφουν τη μέση ροή με το σύστημα εξισώσεων να κλείνει με την προσθήκη μιας προσέγγισης για την εκτίμηση των τάσεων Reynolds. Εκτίμηση που απαιτεί εμπειρικές παραμέτρους ως δεδομένα, στοιχείο που εμπεριέχει ανασφάλεια. Έτσι ουσιαστικά ο υπολογισμός των τυρβωδών συνιστωσών δεν προκύπτει από την άμεση επίλυση των βασικών εξισώσεων, αλλά αποτελεί προσεγγιστική λύση παραγόμενη από αυτές με ορισμένες παραδοχές.

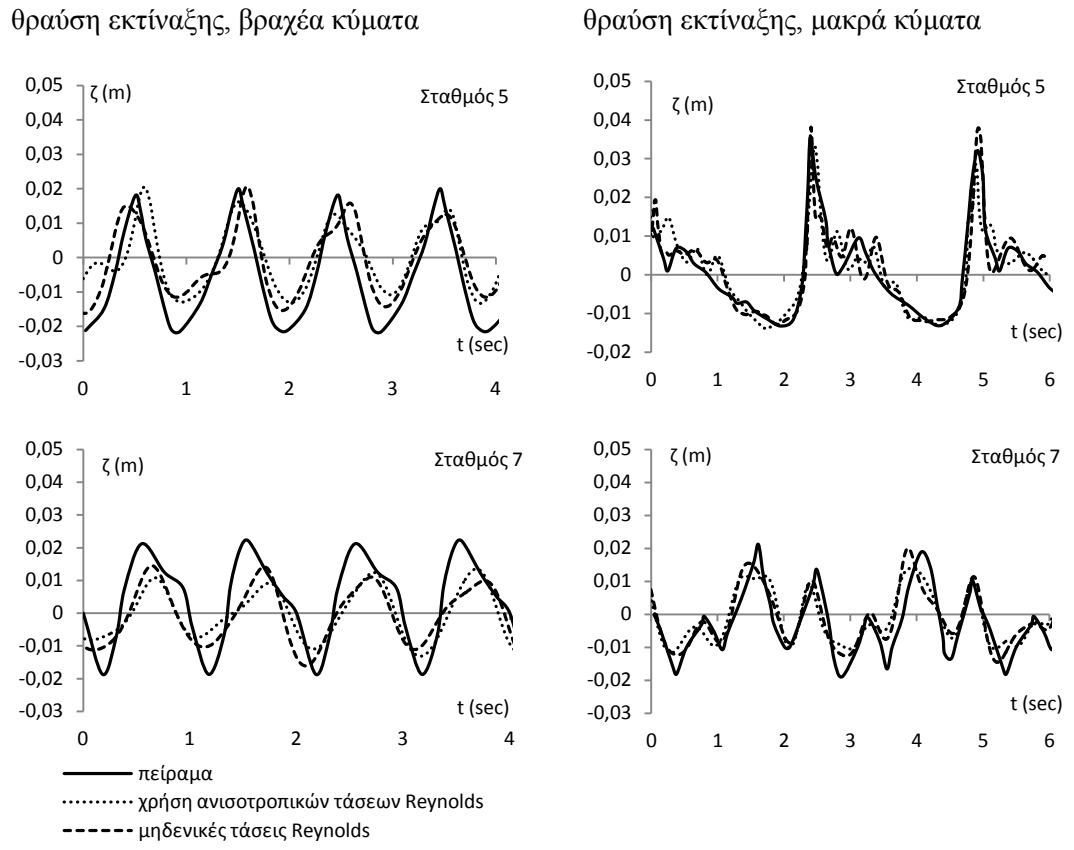
Σημαντικό στοιχείο για την εκτίμηση της τύρβης είναι η εξεταζόμενη κλίμακα δηλαδή και η ανάλυση του υπολογιστικού πεδίου, η οποία για τις εξισώσεις RANS μένει στην τάξη μεγέθους της μέσης ροής και όχι της τύρβης που συνήθως είναι 10^{-3} φορές μικρότερη (Rodi, 1980). Μειώνεται έτσι σημαντικά το υπολογιστικό κόστος, καθιστώντας τα μοντέλα RANS ανταγωνιστικά απέναντι σε μοντέλα που επιλύουν αναλυτικά τις N-S, όπως τα LES. Όμως αφού η κλίμακα ολοκλήρωσης είναι σημαντικά μεγαλύτερη των μεταβολών που μπορεί να περιλαμβάνει η τύρβη, δεν

συμπεριλαμβάνονται λεπτομέρειες της τυρβώδους ροής ανεξάρτητα της ανάλυσης του υπολογιστικού πλέγματος.

Υπάρχουν αναφορές σύγκρισης μοντέλων που χρησιμοποιούν τις εξισώσεις RANS και άλλων που χρησιμοποιούν τις εξισώσεις N-S. Ο Rodi, 1997 για περιπτώσεις υψηλών αριθμών Reynolds συγκρίνει εφαρμογές των RANS και LES με πειραματικά δεδομένα. Κριτήριο σύγκρισης αποτελούν το προφίλ της ταχύτητας και η κατανομή της τυρβώδους κινητικής ενέργειας. Διαπιστώνει ότι η αριθμητική επίλυση των εξισώσεων RANS σε συνδυασμό με ένα μοντέλο τύρβης k-ε δε δύναται να προσομοιώσει σύνθετες περιπτώσεις ροής με απότομες μεταβολές στο ρυθμό μεταβολής της τυρβώδους κινητικής ενέργειας (δευτερεύουσα ροή, περιδίνηση, απόσπαση από τη ροή). Ο Nallasamy, 1987 επίσης διαπιστώνει ότι για τις περιπτώσεις που αναπτύσσεται έντονος στροβιλισμός το μοντέλο τύρβης k-ε δεν αποδίδει ικανοποιητικά. Μένει να διερευνηθεί το αν οι αποκλίσεις που διαπιστώνονται εξετάζοντας τη μεταβολή της ελεύθερης επιφάνειας συνεπάγονται αποκλίσεις στο πεδίο ταχυτήτων και το αντίστροφο. Βέβαια η απόκλιση των αποτελεσμάτων του Co.Br.A.S από τα πειραματικά δεν μπορεί άμεσα να δικαιολογηθεί από τις παραπάνω αναφορές. Αυτό γιατί εξετάζονται εντελώς διαφορετικές περιπτώσεις ροής.

Η ελεύθερη επιφάνεια απαιτεί μια πιο σύνθετη αντιμετώπιση μιας και αποτελεί όριο του ρευστού σώματος και διεπιφάνεια μεταξύ νερού και αέρα. Στο σημείο αυτό εμπλέκεται και η μέθοδος ανίχνευσης της ελεύθερης επιφάνειας. Πρέπει να σημειωθεί ότι η χρήση της μεθόδου V.O.F. κρίνεται ιδιαίτερα επιτυχής δεδομένων των αποτελεσμάτων για το σύνολο των περιπτώσεων. Βάσει των προαναφερθέντων αναφορών μπορεί να θεωρηθεί βάσιμη η αρχική υπόθεση ότι μετά την ολοκλήρωση των N-S, δεν συμπεριλαμβάνονται λεπτομέρειες των τυρβωδών μεταβολών που επηρεάζουν την ακρίβεια του ομοιώματος. Επίσης να επισημανθεί ότι οι περιπτώσεις που το Co.Br.A.S. δεν αποδίδει τα αναμενόμενα αφορούν κυματισμούς υπό θραύση εκτίναξης (*plunging breakers*). Θεωρητικά αναμένεται ένταση της τύρβης τόσο στην διεπιφάνεια νερού- αέρα όσο και στο υπόλοιπο όγκο του νερού. Ενδιαφέρον θα είχε η αξιολόγηση του πεδίου των ταχυτήτων και συγκεκριμένα στη θέση του έβδομου σταθμού, όπου παρατηρούνται οι αποκλίσεις.

Διακρίνοντας αυτό το μειονέκτημα των μοντέλων (βασισμένων στις εξισώσεις RANS) διερευνήθηκε η απόδοση του Co.Br.A.S. χωρίς την επίδραση της τύρβης. Στόχος είναι να διαπιστωθεί αν οι αναφερόμενες αδυναμίες προσομοίωσης δεν εξαρτώνται από το μοντέλο τύρβης, αλλά πηγάζουν στην επίλυση των βασικών εξισώσεων. Οι δύο χρήσεις του μοντέλου που συγκρίνονται είναι η χρήση της μη γραμμικής έκφρασης για τις τάσεις Reynolds και η χρήση μηδενικών τάσεων. Ωστόσο αυτή η διαπίστωση δεν είναι εμφανής από μια τέτοια σύγκριση καθώς οι δύο εκφράσεις δίνουν τα ίδια περίπου αποτελέσματα για την εξεταζόμενη $\zeta(t)$.



Σχήμα 7.1 Σύγκριση αποτελεσμάτων του μοντέλου Co.Br.A.S. χρησιμοποιώντας μη γραμμικό συντελεστή τυρβώδους διάχυσης για τις τάσεις Reynolds και μηδενικές τάσεις Reynolds (μηδενίζοντας έτσι την τυρβώδη κινητική ενέργεια)

Ένα στοιχείο που πρέπει επίσης να ληφθεί υπόψη είναι το γεγονός ότι με το συγκεκριμένο μοντέλο η στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας εκτιμάται μέσω των μεταβολών στην τιμή της πυκνότητας κάθε κελιού. Ανιχνεύοντας τις αλλαγές που συμβαίνουν στην τιμή της πυκνότητας ανιχνεύει και τη θέση της ελεύθερης επιφάνειας. Επαναφέροντας όσα ειπώθηκαν στο πρώτο κεφάλαιο για τη θραύση, πρέπει εδώ να σημειωθεί ότι λόγω της έντασης της καταστροφής ενέργειας σε μια θραύση εκτίναξης, αναμένεται έντονη μίξη αέρα- νερού στην διεπιφάνεια των δύο ρευστών. Αυτός είναι ένας ακόμα πιθανός λόγος που σημειώνονται αποκλίσεις από τα πειραματικά δεδομένα. Αυτό το στρώμα ανάμιξης διευρύνει το πλάτος της διεπιφάνειας μεταξύ αέρα- νερού, καθιστώντας δυσκολότερη δηλαδή την ανίχνευση της ελεύθερης επιφάνειας.

Τέλος πρέπει να σημειωθούν οι διαφορετικές δυνατότητες των τριών εξεταζόμενων μοντέλων. Η επίλυση των εξισώσεων RANS όπως έχει γίνει στο μοντέλο Co.Br.A.S. δίνει πλήθος δυνατοτήτων. Εξαιρετικά σημαντική ιδιότητα του είναι η προσομοίωση της τύρβης, με την οποία στη συνέχεια το μοντέλο προσεγγίζει το πεδίο πιέσεων, ταχυτήτων έτσι και του κυματικού πεδίου και των ποιοτικών χαρακτηριστικών του υδάτινου σώματος. Πρόσθετη δυνατότητα του μοντέλου είναι η δυνατότητα προσομοίωσης φαινομένων υπερπήδησης, ενώ με την εισαγωγή των εξισώσεων VARANS προσεγγίζεται και το πεδίο πιέσεων και ταχυτήτων εντός του

πορώδους των εμποδίων του πυθμένα. Το μοντέλο συζευγμένων ιδιομορφών επίσης μπορεί να προσεγγίσει το πεδίο ροής εντός του υδάτινου σώματος. Βασική ιδιότητα του μοντέλου είναι η εκτίμηση, αρχικά, της συνάρτησης δυναμικού και με αφετηρία αυτή προσομοιώνονται πεδίο ταχυτήτων και κυματικό πεδίο. Τα μοντέλα τύπου Boussinesq ωστόσο θεωρητικά υστερούν αφού ξεκινούν με τη παραδοχή υδροστατικής πίεσης και υιοθετούν μια γενικά ομοιόμορφη κατακόρυφη κατανομή ταχυτήτων (αφού η κάθετη συνιστώσα απαλείφεται). Τα εξαγόμενα αποτελέσματα περιορίζονται στην μία διάσταση ενώ υπάρχει η δυνατότητα προσομοίωσης του κυματικού πεδίου μόνο. Όμως η παραδοχή αυτή αποτελεί ταυτόχρονα και πλεονέκτημα αφού απλουστεύει σημαντικά την επίλυση των βασικών εξισώσεων, ενώ τα σφάλματα αποκοπής (όροι ανώτερης τάξης) προσομοιάζουν μη γραμμικά χαρακτηριστικά, όπως προαναφέρθηκε στο τρίτο κεφάλαιο.

7.2. Προτάσεις

Με βάση τα όσα μελετήθηκαν στην παρούσα εργασία θεωρήθηκε σκόπιμο να προταθούν μερικά σημεία περεταίρω μελέτης. Αυτά είναι,

- Η μελέτη εφαρμογής ενός διαφορετικού τρόπου για την εκτίμηση της απόσβεσης ενέργειας για το μοντέλο των Belibassakis & Athanassoulis. Είναι πιθανόν ότι μια διαφορετική προσέγγιση θα δώσει καλύτερα αποτελέσματα. Ωστόσο δεν αναιρείται το γεγονός ότι η συγκεκριμένη μορφή περιορίζεται στις επεκτάσεις όρων Stokes 2ης τάξης.

- Η προσομοίωση απωλειών ενέργειας λόγω της τριβής στο οριακό στρώμα πυθμένα από το μοντέλο των Chondros & Memos, 2012. Κάτι τέτοιο θα μπορούσε να γίνει κατά παρόμοιο τρόπο με την εισαγωγή της θραύσης (λόγω ρήχωσης). Δηλαδή εισάγοντας έναν συντελεστή R_f στο αριστερό μέλος της εξίσωσης ορμής. Ο συντελεστής αυτός δίνεται από τον κανόνα τετράδας για την τριβή (*quadratic friction equation*),

$$R_f = \frac{f}{d+\zeta}\boldsymbol{u}|\boldsymbol{u}| \tag{7.1}$$

  Όπου $\boldsymbol{u}$ το διάνυσμα της ταχύτητας και f ο συντελεστής τριβής (συνάρτηση της κλίσης του πυθμένα). Η προσέγγιση αυτή έχει εφαρμοστεί σε εξισώσεις τύπου Boussinesq από τους Chen et al. 2000 και Lynett, 2006. Για την μεταβλητή της ταχύτητας οι Chen et al. χρησιμοποίησαν την ταχύτητα σε τυχαίο βάθος, ενώ ο Lynett, 2006 υπολογίζει την ταχύτητα στο βάθος του πυθμένα.

- Η προσθήκη της αναρρίχησης (*run-up*) και καταρρίχησης (*run-down*) στο μοντέλο των Chondros & Memos, 2012. Παραδείγματα ενός μοντέλου αναρρίχησης/

καταρρίχησης μπορούν να βρεθούν στις εργασίες των Kennedy et al., 2000, Chen et al., 2000, Lynett, Wu & Liu, 2002, Lynett, 2006.

- Η προσθήκη ενός μοντέλου που να δίνει τη δυνατότητα προσομοίωσης της υπερπήδησης του εμποδίου από το υδάτινο σώμα.

- Η εφαρμογή των μοντέλων των Chondros & Memos και του Co.Br.A.S. για περιπτώσεις θραυόμενων τυχαίων κυματισμών. Στοιχείο που ήταν και στις προθέσεις της εργασίας αυτής εξ αρχής. (*Η εφαρμογή όμως τυχαίων κυματισμών από το Co.Br.A.S. - με τον κώδικα όπως δόθηκε σε Fortran, ήταν ανεπιτυχής, γεγονός που οφείλεται στα μη ρεαλιστικά αποτελέσματα του και το υψηλό υπολογιστικό κόστος*).

- Η ανάπτυξη, εφαρμογή και σύγκριση των τριών θεωριών για την περίπτωση δύο οριζόντιων διαστάσεων.

- Εξαιρετικά χρήσιμη θα ήταν η επέκταση των μοντέλων με κάποιο μοντέλο παράκτιας στερεομεταφοράς. Αντικειμενικός στόχος από μια τέτοια προσπάθεια θα ήταν η εκτίμηση της εγκάρσιας και της κατά μήκος στερεομεταφοράς (*cross shore, long shore sediment transport*). Δίνεται έτσι η δυνατότητα προσομοίωσης της μορφολογίας του πυθμένα και της εξέλιξης του, συνεπώς και η προσέγγιση φαινομένων όπως η διάβρωση και η πρόσχωση της ακτής. Ένα τέτοιο μοντέλο θα μπορούσε να αποτελέσει ένα χρήσιμο εργαλείο για τη μελέτη των αλληλεπιδράσεων μεταξύ παράκτιας ζώνης και πιθανών τεχνικών έργων εντός αυτής. Επίσης θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί στη μελέτη του ισοζυγίου στερεομεταφοράς που καθορίζει τον τρόπο και ένταση της διάβρωσης ενός παράκτιου συστήματος, συνεπώς και για την αντιμετώπιση της. Βέβαια στη δεύτερη περίπτωση υπάρχουν και παράγοντες εκτός της παράκτιας ζώνης που συμβάλουν στις αλλαγές που συντελούνται εντός αυτής και θα έπρεπε να μελετηθούν επίσης.

- Ενδιαφέρουσα θα ήταν η ικανότητα προσδιορισμού των ποιοτικών χαρακτηριστικών του νερού. Αυτό θα μπορούσε να γίνει με μια προσθήκη ενός μοντέλου μετάθεσης- διασποράς/ διάχυσης της συγκέντρωσης μιας ουσίας. Σε ένα τέτοιο μοντέλο θα πρέπει να συνυπολογιστεί η επίδραση της μορφολογικής εξέλιξης του πυθμένα και της έντονης τύρβης (λόγω θραύσης εντός του υδάτινου σώματος και στην διεπιφάνεια αέρα - νερού) στη μεταβολή της συγκέντρωσης μιας ουσίας (π.χ. οξυγόνο).

Βιβλιογραφία εβδόμου κεφαλαίου

Belibassakis, K.A., Athanassoulis, G.A., 2011, “A coupled mode system with application to nonlinear water waves propagating in finite water depth and in variable bathymetry regions.” *J. Coastal Engineering*, vol. 58(4), 337-350.

Chen, Q., Kirby, J.T., Darymple, R.A., Kennedy, A.B., Chawla, A., 2000, "Boussinesq modeling of wave transformation, breaking and runup II: 2D." *J. Waterway., Port, Coastal, and Ocean Eng.*, vol. 126 (1), 48-56.

Katsardi, V., Boundris, G., Tsoukala, V.K., Belibassakis, K.A., 2012. "Study of wave transformation due to flushing culverts in coastal structures." *Proceedings of the 22nd (2012) International Offshore and Polar Engineering Conference*, Rhodes, Greece, 1356-1363.

Lynett, P.J., 2006, "Nearshore wave modeling with high order Boussinesq- type equations." *J. Waterway., Port, Coastal, and Ocean Eng.*, vol. 132 (5), 348-357.

Lynett, P.J., Wu, T.-R., Liu, P.L.-F., 2002, "Modeling wave runup with depth-integrated equations." *J. Coastal Engineering*, vol. 46 (2), 89-107.

Nallasamy, M., 1987, "Turbulence models and their applications to the prediction of internal flows." *Computers & Fluids*, vol. 15(2), 151-194.

Rodi, W., 1997, "Comparison of LES and RANS calculations of the flow around bluff bodies." *J. Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, vol. 69, 55-75.

Παράρτημα

Παράρτημα I

Στην πρώτη αυτή ενότητα του παραρτήματος δίνονται πρόσθετες πληροφορίες για την βασική χρήση συναρτήσεων και μεθόδων που αναφέρθηκαν και πιθανώς είναι ανοίκειες στον αναγνώστη.

Ελλειπτικό ολοκλήρωμα

Στη θεωρία ολοκληρωτικού λογισμού, τα ελλειπτικά ολοκληρώματα χρησιμοποιούνται τον ορισμό του μήκους του τόξου εγγεγραμμένου στην περίμετρο μιας έλλειψης. Μελετήθηκε από τον Leonhard Euler. Έτσι για μια οποιαδήποτε συνάρτηση $f(x)$ ορίζεται το ολοκλήρωμα,

$$f(x) = \int_c^x g\left(t, \sqrt{p(t)}\right) dt \tag{I.1}$$

όπου g είναι η κλασματική συνάρτηση της εξαρτημένης μεταβλητής *t* για το πολυώνυμο *p*. Το πολυώνυμο *p* είναι τρίτου ή τέταρτου βαθμού με μοναδικές ρίζες.

Ιακωβιανές Ελλειπτικές συναρτήσεις (Jacobi elliptic functions)

Ελλειπτικές συναρτήσεις ορίζονται οι αντίστροφες εκφράσεις του ατελούς πρώτου ελλειπτικού ολοκληρώματος. Αποτελούν συναρτήσεις δύο μεταβλητών, της *φ* και *m*. Το ατελές ελλειπτικό ολοκλήρωμα πρώτου είδους ορίζεται ως,

$$K(m) = \int_o^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m\sin^2\theta}} \tag{I.2}$$

Όπου η γωνία *φ* καλείται εύρος. Η τιμή της παραμέτρου *m* είναι τυχαία και πραγματική οριζόμενη στο διάστημα $m \in [0,1]$. Για την συνάρτηση της εξίσωσης (I.2) ορίζονται και οι ελλειπτικές συναρτήσεις Jacobi, ώστε να ικανοποιούνται οι σχέσεις,

$$\begin{aligned} sn(K(m)) &= \sin\phi \\ cn(K(m)) &= \cos\phi \\ dn(K(m)) &= \sqrt{1 - m\sin^2\phi} \end{aligned} \tag{I.3}$$

Τέλος αξίζει να σημειωθεί ότι ο τρόπος συμβολισμού των παραπάνω ποικίλει. Αντί της παραμέτρου *m*, μπορεί κανείς να συναντήσει τον ελλειπτικό όρο *k* (*elliptic modulus, k*), για τον οποίο ισχύει $k^2 = m$, ή την αντίστοιχη του γωνία (*modular angle*, α) η οποία ορίζεται ώστε να ικανοποιεί τη σχέση $m = \sin^2 a$. Συνεπώς ισχύει και $k = \sin a$ (Abramowitz & Stegun, 1965).

Υπερβολικές συναρτήσεις

Οι υπερβολικές συναρτήσεις ημιτόνου και συνημίτονου μιας μη εξαρτημένης μεταβλητής *x* ως γνωστόν, ορίζονται ως:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x} = \frac{1 - e^{-2x}}{2e^{-x}}$$
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x} = \frac{1 + e^{-2x}}{2e^{-x}} \qquad \text{(I.4)}$$

Σε συνέχεια αυτών ορίζονται οι υπερβολικές συναρτήσεις εφαπτομένης και συνεφαπτομένης ως προς τη μεταβλητή x:

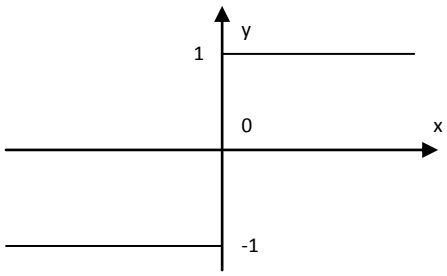
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$
$$\cot x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \qquad \text{(I.5)}$$

Έτσι δεδομένων των ορισμών των σχέσεων της (I.4) ορίζονται οι συναρτήσεις υπερβολικής τέμνουσας (*hyperbolic secant*) και υπερβολικής συντέμνουσας (*hyperbolic cosecant*). Αυτές είναι,

$$\operatorname{sech} x = (\cosh x)^{-1} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$
$$\operatorname{csch} x = (\sinh x)^{-1} = \frac{2}{e^x - e^{-x}} \qquad \text{(I.6)}$$

Συνάρτηση sign(x) ή signum(x)

Αποτελεί συνάρτηση με πεδίο τιμών μεταξύ των {-1,0,1}, ανάλογα με την τιμή του x. Ορίζεται μέσω της εξίσωσης (I.7).



$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \alpha\nu \text{ x<0} \\ 0, & \alpha\nu \text{ x=0}, \ x \in R \\ 1, & \alpha\nu \text{ x>0} \end{cases} \qquad \text{(I.7)}$$

Σχήμα I.1 Συνάρτηση *sgn(x)*

Μέθοδος ολοκλήρωσης Reynolds, ολοκλήρωση των εξισώσεων NS

Οι μεταβλητές του πεδίου ροής αναλύονται στην μέση κατάσταση (με χαμηλό ρυθμό μεταβολής αν όχι σταθερό) και στην τυρβώδης συνιστώσα (υψηλού ρυθμού μεταβολής). Για παράδειγμα η στιγμιαία τιμή της μεταβλητή *α*,

$$a = \langle a \rangle + a' \tag{I.8}$$

Χρονικός μέσος

Η μέση χρονικά τιμή της *α* σε ένα διάστημα *T* ορίζεται ως,

$$\langle \alpha \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} a dt \tag{I.9}$$

Το όριο της μέσης τιμής είναι ανεξάρτητο των αρχικών συνθηκών (για t_o). Δεδομένου ότι το όριο υπάρχει (για ένα καλά ορισμένο σύστημα), υπάρχει *T* τέτοιο ώστε η ολοκλήρωση από t_o σε *T* δίνει τιμή σχετικά κοντά στη μέση. Αν τα δεδομένα σε ένα χρόνο *t* (*t*>>*T*) παρουσιάζονται με μια περιοδικότητα *T*, τότε είναι εφικτή η αριθμητική εκτίμηση της μέσης τιμής εμπεριέχοντας ένα αποδεκτό σφάλμα. Το διάστημα *T* πρέπει να είναι αρκετά μεγαλύτερο του χρόνου που χαρακτηρίζει τη μεταβολή των τυρβωδών συνιστωσών.

Κατά την διάρκεια του χρόνου, Τ η μέση τιμή παραμένει σταθερή, ενώ η μέση τιμή της απόκλισης ισούται με μηδέν. Δεδομένων αυτών ορίζονται οι παρακάτω ιδιότητες.

$$\langle a' \rangle = 0,\ \langle \langle a \rangle \rangle = \langle a \rangle,\ \langle \langle a \rangle + a' \rangle = \langle a \rangle,\ \langle \langle a \rangle a' \rangle = 0 \tag{I.10}$$

Επίσης για την παράγωγο της $\langle a \rangle$ ως προς x είναι,

$$\langle \partial a / \partial x \rangle = \partial \langle a \rangle / \partial x \tag{I.11}$$

Η μέση τιμή δύο τέτοιων μεταβλητών (α, β) είναι,

$$\begin{aligned} \langle a\beta \rangle &= \langle (\langle a \rangle + a')(\langle \beta \rangle + \beta') \rangle = \\ &= \langle \langle a \rangle \langle \beta \rangle + a' \langle \beta \rangle + \beta' \langle \alpha \rangle + \alpha'\beta' \rangle = \\ &= \langle \alpha \rangle \langle \beta \rangle + \langle \alpha'\beta' \rangle \end{aligned} \tag{I.12}$$

Εφαρμόζοντας τα παραπάνω στις εξισώσεις NS προκύπτουν οι εξισώσεις RANS. Οι εξισώσεις NS (με στιγμιαίες μεταβλητές)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \\ &\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την τιμή της στιγμιαίας μεταβλητής είναι

$$\begin{aligned} &\frac{\partial(\langle u_i \rangle + u_i')}{\partial x_i} = 0 \\ &\frac{\partial(\langle u_i \rangle + u_i')}{\partial t} + (\langle u_j \rangle + u_j')\frac{\partial(\langle u_i \rangle + u_i')}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\langle p_i \rangle + p_i')}{\partial x_i} + g_i + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \langle \tau_{ij} \rangle}{\partial x_j} \end{aligned} \tag{I.13}$$

Οι μέσες τιμές αυτών είναι,

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial\left\langle\langle u_i\rangle+u_i'\right\rangle}{\partial x_i}=0\\[2ex]\dfrac{\partial\left\langle\langle u_i\rangle+u_i'\right\rangle}{\partial t}+\dfrac{\partial\left\langle(\langle u_j\rangle+u_j')(\langle u_i\rangle+u_i')\right\rangle}{\partial x_j}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial\left\langle\langle p_i\rangle+p_i'\right\rangle}{\partial x_i}+g_i+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial\left\langle\tau_{ij}\right\rangle}{\partial x_j}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_i}=0\\[2ex]\dfrac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial t}+\langle u_j\rangle\dfrac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_j}+\dfrac{\partial\left\langle u_i'u_j'\right\rangle}{\partial x_j}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial\langle p_i\rangle}{\partial x_i}+g_i+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial\left\langle\tau_{ij}\right\rangle}{\partial x_j}\end{array}\right\} \tag{I.14}$$

Σχέσεις που αντιστοιχούν στις εξισώσεις (4.6), (4.7). Όμοια για τις διατμητικές τάσεις προκύπτει η αντίστοιχη των εξισώσεων (4.8), (4.9).

$$\tau_{ij}=\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\Rightarrow\tau_{ij}=\mu\left(\frac{\partial\left(\langle u_i\rangle+u_i'\right)}{\partial x_j}+\frac{\partial\left(\langle u_j\rangle+u_j'\right)}{\partial x_i}\right)$$

$$\left\langle\tau_{ij}\right\rangle=\mu\left(\frac{\partial\left\langle\langle u_i\rangle+u'\right\rangle_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\left\langle\langle u_j\rangle+u_j'\right\rangle}{\partial x_i}\right)=\mu\left(\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_j}+\frac{\partial\langle u_j\rangle}{\partial x_i}\right) \tag{I.15}$$

Δεδομένης της ομοιογένειας του ρευστού η πυκνότητα, ρ και το δυναμικό ιξώδες, μ παραμένουν σταθερές.

Βιβλιογραφία

Abramowitz, M., Stegun, I.A., 1965, *Handbook of Mathematical Functions with formulas, graphs and mathematical tables*, New York, Dover, (c. 17).

Becker, G.F., Van Orstrand, C.E., 1942, *Hyperbolic functions*, Washington, Smithsonian Institution (σ.48 (*xlviii*)).

Bracewell, R.N., 2000, *The Fourier Transform and its applications*, Boston: McGraw- Hill 3η έκδοση (61-62).

Tennekes, H., 1972, *A first course in Turbulence*/ H. Tennekes & J.L. Lumley, Cambridge, MA The MIT Press.

Παράρτημα ΙΙ. Μετρήσεις - Επεξεργασμένα αποτελέσματα

Παράρτημα ΙΙ.Α. Αδιάστατα ύψη κύματος

		H_0	H_{rms}				H_s			
	x (m)		6	12	14	16	6	12	14	16
	Σταθμός		1	3	5	7	1	3	5	7
short spilling breakers	C.M.S.	0,059	0,057956	0,042562	0,034681	0,034889	0,081962	0,052312	0,049047	0,049341
	C.M.12	0,059	0,058254	0,057394	0,050072	0,042235	0,082383	0,081167	0,070813	0,05973
	Co.Br.A.S.	0,059	0,057655	0,063721	0,056862	0,047034	0,081537	0,090114	0,080415	0,066516
	πειραμα	0,059	0,066965	0,065101	0,04265	0,038625	0,069536	0,067429	0,044952	0,040036
short plunging breakers	C.M.S.	0,069	0,06552	0,058614	0,049848	0,046892	0,092659	0,082893	0,070495	0,066316
	C.M.12	0,069	0,068422	0,060057	0,052441	0,032435	0,096763	0,084933	0,074163	0,04587
	Co.Br.A.S.	0,069	0,066298	0,079374	0,036557	0,027072	0,09376	0,112252	0,051699	0,038285
	πειραμα	0,069	0,076612	0,085546	0,042085	0,036222	0,0736	0,08625	0,047438	0,04025
long spilling breakers	C.M.S.	0,044	0,042509	0,045432	0,069324	0,06614	0,042509	0,059066	0,087728	0,081601
	C.M.12	0,044	0,04396	0,067099	0,037898	0,039062	0,044461	0,069378	0,059071	0,04353
	Co.Br.A.S.	0,044	0,043975	0,074095	0,0351	0,021877	0,04458	0,07625	0,042963	0,02525
	πειραμα	0,044	0,043474	0,060192	0,033949	0,029026	0,044	0,0616	0,051543	0,033943
long plunging breakers	C.M.S.	0,054	0,051386	0,062595	0,091664	0,085929	0,051387	0,075748	0,107908	0,098714
	C.M.12	0,054	0,046858	0,069618	0,038367	0,03914	0,047289	0,072092	0,059843	0,042777
	Co.Br.A.S.	0,054	0,048332	0,068392	0,024881	0,017307	0,04914	0,089213	0,037133	0,01895
	πειραμα	0,054	0,052358	0,084427	0,034418	0,028147	0,054	0,087	0,0495	0,036

Πίνακας ΙΙ.1 Μετρήσεις υψών κύματος, H_{rms}, H_s (Beji & Battjes, 1993, 1994).

		H_{rms}/H_0				H_s/H_0			
	x(m)	6	12	14	16	6	12	14	16
	Σταθμός	1	3	5	7	1	3	5	7
short spilling breakers	C.M.S.	0,982297	0,72139	0,587816	0,591342	1,389178	0,886644	0,831298	0,836284
	C.M.12	0,98735	0,972781	0,848683	0,71585	1,396323	1,375719	1,200219	1,012365
	Co.Br.A.S.	0,977206	1,080009	0,963761	0,797182	1,381977	1,527363	1,362963	1,127386
	πειραμα	1,135001	1,103403	0,722881	0,654654	1,178571	1,142857	0,761905	0,678571
short plunging breakers	C.M.S.	0,949564	0,84948	0,722431	0,6796	1,342886	1,201347	1,021672	0,9611
	C.M.12	0,991624	0,870388	0,760012	0,470075	1,402368	1,230914	1,07482	0,664786
	Co.Br.A.S.	0,960844	1,150353	0,529811	0,392343	1,358839	1,626845	0,749266	0,554857
	πειραμα	1,110317	1,239802	0,609923	0,524963	1,066667	1,25	0,6875	0,583333
long spilling breakers	C.M.S.	0,96612	1,032539	1,575541	1,503186	0,96612	1,342408	1,99381	1,854573
	C.M.12	0,999089	1,524987	0,861329	0,887764	1,010476	1,57677	1,342526	0,989308
	Co.Br.A.S.	0,999436	1,683975	0,797732	0,497199	1,013182	1,732955	0,97642	0,573864
	πειραμα	0,988054	1,36801	0,77157	0,659682	1	1,4	1,171429	0,771429
long	C.M.S.	0,951584	1,15917	1,697482	1,591274	0,951607	1,402736	1,998291	1,828041

plunging breakers	C.M.12	0,867733	1,289227	0,710508	0,724812	0,875725	1,335034	1,108212	0,79216
	Co.Br.A.S.	0,895031	1,266514	0,460753	0,320492	0,91	1,652083	0,687654	0,350926
	πειραμα	0,96959	1,563472	0,637377	0,52125	1	1,611111	0,916667	0,666667

Πίνακας II.2 Αδιάστατοι λόγοι H_{rms}/H_o, H_s/H_o (Beji & Battjes, 1993, 1994).

		H_0	H_{rms}						
	x(m)		5,2	8,76	10,28	12,24	14,24	16,24	18,24
	αισθητήρας		2	5	7	8	9	10	11
RE-08	C.M.S.	0,1	0,1033	0,0965	0,0947	0,1010	0,0973	0,0926	0,0948
	C.M.12	0,1	0,1132	0,1092	0,1038	0,0954	0,0880	0,0809	0,0754
	Co.Br.A.S.	0,1	0,1112	0,1069	0,1048	0,1025	0,0993	0,0970	0,0946
	πείραμα		0,1143	0,1012	0,0954	0,1036	0,1023	0,0956	0,0981
RE-29	C.M.S.	0,075	0,0643	0,0646	0,0649	0,0643	0,0631	0,0617	0,0625
	C.M.12	0,075	0,0670	0,0651	0,0621	0,0595	0,0571	0,0550	0,0535
	Co.Br.A.S.	0,075	0,0656	0,0657	0,0650	0,0635	0,0623	0,0607	0,0603
	πείραμα		0,0682	0,0820	0,0740	0,0670	0,0597	0,0537	0,0691
RE-36	C.M.S.	0,12	0,1130	0,0912	0,0922	0,0900	0,0889	0,0877	0,0884
	C.M.12	0,12	0,1081	0,1037	0,1018	0,0950	0,0908	0,0879	0,0835
	Co.Br.A.S.	0,12	0,1075	0,1069	0,1054	0,1027	0,1004	0,0984	0,0973
	πείραμα		0,1145	0,1341	0,1189	0,1109	0,0994	0,0941	0,1166
RE-43	C.M.S.	0,1	0,1018	0,0987	0,0981	0,0999	0,0965	0,0995	0,0946
	C.M.12	0,1	0,0948	0,0928	0,0926	0,0902	0,0878	0,0869	0,0881
	Co.Br.A.S.	0,1	0,0928	0,0921	0,0923	0,0915	0,0901	0,0919	0,0925
	πείραμα		0,0926	0,1148	0,0778	0,1078	0,1041	0,0789	0,0784
			H_s						
	x(m)		5,2	8,76	10,28	12,24	14,24	16,24	18,24
	αισθητήρας		2	5	7	8	9	10	11
RE-08	C.M.S.		0,1033	0,0981	0,0967	0,1010	0,0974	0,0926	0,0948
	C.M.12		0,1133	0,1095	0,1040	0,0955	0,0882	0,0810	0,0754
	Co.Br.A.S.		0,1125	0,1091	0,1072	0,1036	0,1006	0,0989	0,0986
	πείραμα		0,1155	0,1021	0,0970	0,1048	0,1049	0,0973	0,1000
RE29	C.M.S.		0,0644	0,0650	0,0649	0,0643	0,0631	0,0626	0,0625
	C.M.12		0,0670	0,0653	0,0633	0,0600	0,0573	0,0553	0,0540
	Co.Br.A.S.		0,0679	0,0671	0,0656	0,0641	0,0630	0,0618	0,0635
	πείραμα		0,0686	0,0824	0,0746	0,0673	0,0613	0,0563	0,0720
RE-36	C.M.S.		0,1130	0,0912	0,0922	0,0883	0,0889	0,0877	0,0884
	C.M.12		0,1081	0,1039	0,1020	0,0958	0,0913	0,0880	0,0856
	Co.Br.A.S.		0,1092	0,1075	0,1062	0,0584	0,0563	0,0557	0,0575
	πείραμα		0,1153	0,1345	0,1203	0,1121	0,1027	0,0969	0,1185
RE-43	C.M.S.		0,1018	0,0987	0,0981	0,0999	0,0965	0,0995	0,0946
	C.M.12		0,0949	0,0948	0,0927	0,0903	0,0878	0,0870	0,0881
	Co.Br.A.S.		0,0978	0,0966	0,0951	0,0939	0,0917	0,0945	0,0962
	πείραμα		0,1050	0,1184	0,0782	0,1082	0,1056	0,0797	0,0798

Πίνακας II.3 Μετρήσεις υψών κύματος, H_{rms}, H_s (HR Wallingford).

		H_{rms}/H_0						
	x(m)	5,2	8,76	10,28	12,24	14,24	16,24	18,24
	αισθητήρας	2	5	7	8	9	10	11
RE08	C.M.S.	1,0327	0,9648	0,9465	1,0101	0,9735	0,9255	0,9483
	C.M.12	1,1322	1,0916	1,0378	0,9536	0,8801	0,8089	0,7536
	Co.Br.A.S.	1,1121	1,0690	1,0476	1,0250	0,9935	0,9698	0,9455
	πείραμα	1,1425	1,0123	0,9538	1,0357	1,0230	0,9559	0,9805
RE29	C.M.S.	0,8578	0,8618	0,8647	0,8578	0,8409	0,8229	0,8331
	C.M.12	0,8935	0,8683	0,8281	0,7938	0,7611	0,7338	0,7127
	Co.Br.A.S.	0,8751	0,8766	0,8671	0,8466	0,8307	0,8093	0,8036
	πείραμα	0,9096	1,0933	0,9871	0,8935	0,7954	0,7162	0,9218
RE36	C.M.S.	0,9413	0,7596	0,7680	0,7502	0,7412	0,7308	0,7369
	C.M.12	0,9008	0,8645	0,8487	0,7914	0,7566	0,7325	0,6956
	Co.Br.A.S.	0,8956	0,8912	0,8781	0,8559	0,8369	0,8201	0,8109
	πείραμα	0,9545	1,1173	0,9907	0,9239	0,8282	0,7840	0,9717
RE43	C.M.S.	1,0180	0,9870	0,9805	0,9994	0,9654	0,9954	0,9463
	C.M.12	1,1151	1,0920	1,0899	1,0611	1,0324	1,0224	1,0360
	Co.Br.A.S.	0,9467	0,9208	0,9229	0,9146	0,9014	0,9194	0,9248
	πείραμα	1,0453	1,1480	0,7778	1,0782	1,0406	0,7887	0,7837
		H_s/H_0						
	x(m)	5,2	8,76	10,28	12,24	14,24	16,24	18,24
	αισθητήρας	2	5	7	8	9	10	11
RE08	C.M.S.	1,0327	0,9807	0,9668	1,0101	0,9735	0,9255	0,9483
	C.M.12	1,1333	1,0945	1,0400	0,9551	0,8819	0,8100	0,7545
	Co.Br.A.S.	1,1245	1,0908	1,0720	1,0360	1,0060	0,9893	0,9857
	πείραμα	1,1552	1,0213	0,9696	1,0480	1,0492	0,9725	0,9998
RE29	C.M.S.	0,8586	0,8664	0,8647	0,8578	0,8413	0,8350	0,8331
	C.M.12	0,8936	0,8701	0,8435	0,8006	0,7645	0,7368	0,7195
	Co.Br.A.S.	0,9056	0,8940	0,8747	0,8547	0,8396	0,8244	0,8462
	πείραμα	0,9151	1,0988	0,9940	0,8973	0,8170	0,7503	0,9602
RE36	C.M.S.	0,9416	0,7596	0,7680	0,7357	0,7412	0,7308	0,7369
	C.M.12	0,9012	0,8656	0,8502	0,7984	0,7606	0,7337	0,7129
	Co.Br.A.S.	0,9103	0,8961	0,8850	0,4864	0,4689	0,4644	0,4794
	πείραμα	0,9611	1,1207	1,0027	0,9342	0,8557	0,8076	0,9875
RE43	C.M.S.	1,0180	0,9870	0,9805	0,9994	0,9654	0,9954	0,9463
	C.M.12	1,1162	1,1153	1,0905	1,0620	1,0332	1,0236	1,0368
	Co.Br.A.S.	0,9780	0,9663	0,9510	0,9387	0,9167	0,9450	0,9617
	πείραμα	1,0497	1,1835	0,7817	1,0822	1,0565	0,7969	0,7984

Πίνακας ΙΙ.4 Αδιάστατοι λόγοι H_{rms}/H_o, H_s/H_o (HR Wallingford).

Παράρτημα ΙΙ.Β. Διάγραμμα Le Méhauté

Πειραματικά δεδομένα		Beji & Battjes (1993, 1994)									HR Wallingford
	d (m)	H(m) (ή H_s)	T(s)	d/gT^2	H/gT^2		d (m)	H(m) (ή H_s)	T(s)	d/gT^2	H/gT^2
short plunging						RE 08					
Σταθμός 1	0,4	0,06900	1	0,04077	0,00703	πηγή	0,8	0,1	1	0,081549	0,010194
Σταθμός 3	0,1	0,07430	1	0,01019	0,00757	αισθ. 7	0,709981	0,09696	1	0,072373	0,009884
Σταθμός 5	0,1	0,04120	1	0,01019	0,00420	αισθ. 9	0,511976	0,10492	1	0,052189	0,010695
Σταθμός 7	0,29829	0,04080	1	0,03041	0,00416	αισθ. 11	0,311972	0,09998	1	0,031801	0,010192
short spilling						RE 29					
Σταθμός 1	0,4	0,05900	1	0,04077	0,00601	πηγή	0,8	0,075	1,2	0,056632	0,005309
Σταθμός 3	0,1	0,06250	1	0,01019	0,00637	αισθ. 7	0,709981	0,07455	1,2	0,050259	0,005277
Σταθμός 5	0,1	0,04500	1	0,01019	0,00459	αισθ. 9	0,511976	0,06128	1,2	0,036242	0,004338
Σταθμός 7	0,29829	0,03970	1	0,03041	0,00405	αισθ. 11	0,311972	0,07202	1,2	0,022084	0,005098
long plunging						RE 36					
Σταθμός 1	0,4	0,05400	2,5	0,00652	0,00088	πηγή	0,8	0,12	1,2	0,056632	0,008495
Σταθμός 3	0,1	0,08690	2,5	0,00163	0,00142	αισθ. 7	0,709981	0,12032	1,2	0,050259	0,008517
Σταθμός 5	0,1	0,04700	2,5	0,00163	0,00077	αισθ. 9	0,511976	0,10269	1,2	0,036242	0,007269
Σταθμός 7	0,29829	0,03325	2,5	0,00487	0,00054	αισθ. 11	0,311972	0,1185	1,2	0,022084	0,008389
long spilling						RE 43					
Σταθμός 1	0,4	0,04400	2,5	0,00652	0,00072	πηγή	0,8	0,1	1,4	0,041607	0,005201
Σταθμός 3	0,1	0,08820	2,5	0,00163	0,00144	αισθ. 7	0,709981	0,07817	1,4	0,036925	0,004066
Σταθμός 5	0,1	0,04560	2,5	0,00163	0,00074	αισθ. 9	0,511976	0,10565	1,4	0,026627	0,005495
Σταθμός 7	0,29829	0,03320	2,5	0,00487	0,00054	αισθ. 11	0,311972	0,07984	1,4	0,016225	0,004152
non breaking waves											
Σταθμός 1	0,4	0,01900	2,02	0,00999	0,00047						
Σταθμός 3	0,1	0,03358	2,02	0,00250	0,00084						
Σταθμός 5	0,18078	0,03169	2,02	0,00452	0,00079						
Σταθμός 7	0,40080	0,03465	2,02	0,01001	0,00087						

Πίνακας ΙΙ.5 Αδιάστατοι λόγοι d/gT^2, H/gT^2.

Παράρτημα ΙΙ.C. Αριθμός Iribarren, αριθμός Ursell

	d (m)	L(m)	H(m)	T(s)	H/L	$\xi=\tan\alpha/(H/L)^{1/2}$	$U_R=L^2H/d^3$
	tanα=	0,049958		tanβ=	0,100504		
short plunging							
Σταθμός 1	0,4	1,46129	0,06900	1	0,04722	0,00000	2,30218
Σταθμός 3	0,1	0,92032	0,07430	1	0,08073	0,17582	62,93148
Σταθμός 5	0,1	0,92310	0,04120	1	0,04463	0,47573	35,10742
Σταθμός 7	0,298289	1,36873	0,04080	1	0,02981	0,00000	2,87995
short spilling							
Σταθμός 1	0,4	1,48761	0,05900	1	0,03966	0,00000	2,04011
Σταθμός 3	0,1	0,93184	0,06250	1	0,06707	0,19290	54,27048
Σταθμός 5	0,1	0,93392	0,04500	1	0,04818	0,45786	39,24939
Σταθμός 7	0,298289	1,39090	0,03970	1	0,02854	0,00000	2,89382
long plunging							
Σταθμός 1	0,4	4,73855	0,05400	2,5	0,01140	0,00000	18,94547
Σταθμός 3	0,1	2,45882	0,08690	2,5	0,03534	0,26574	525,38009
Σταθμός 5	0,1	2,44905	0,04700	2,5	0,01919	0,72549	281,89825
Σταθμός 7	0,298289	4,12263	0,03325	2,5	0,00807	0,00000	21,29247
long spilling							
Σταθμός 1	0,4	4,73855	0,04400	2,5	0,00929	0,00000	15,43705
Σταθμός 3	0,1	2,44386	0,08820	2,5	0,03609	0,26297	526,77043
Σταθμός 5	0,1	2,44905	0,04560	2,5	0,01862	0,73654	273,50128
Σταθμός 7	0,298289	4,13973	0,03320	2,5	0,00802	0,00000	21,43727
non breaking waves							
Σταθμός 1	0,4	6,37077	0,01900	2,02	0,00298	0,00000	12,04918
Σταθμός 3	0,1	1,96824	0,03358	2,02	0,01706	0,38250	130,06819
Σταθμός 5	0,180782	2,61037	0,03169	2,02	0,01214	0,91212	36,55092
Σταθμός 7	0,400796	3,74077	0,03465	2,02	0,00926	0,00000	7,53108

Πίνακας ΙΙ.6 Τιμές των ξ, U_R με βάση τα πειραματικά δεδομένα (Beji & Battjes, 1993, 1994)

	d (m)	L(m)	H(m)	T(s)	H/L	$\xi=\tan\alpha/(H/L)^{1/2}$	$U_R=L^2H/d^3$
	tanα=	0,049958					
RE- 08							
πηγή	0,8	1,56131	0,1	1	0,064049	-	0,476111111
αισθ. 2	0,8	1,556429	0,115318	1	0,074091	-	0,545614106
αισθ. 5	0,785982	1,555858	0,101623	1	0,065316	0,195476233	0,506631839
αισθ. 7	0,709981	1,551424	0,09696	1	0,062497	0,19983581	0,652100551
αισθ. 8	0,611978	1,540256	0,104879	1	0,068092	0,191450357	1,085592293
αισθ. 9	0,511976	1,516922	0,10492	1	0,069166	0,189957667	1,799020403
ασιθ. 10	0,411974	1,471365	0,10845	1	0,073707	0,184013138	3,357869319
αισθ. 11	0,311972	1,386711	0,09998	1	0,072099	0,186054705	6,331986838
RE -29							
πηγή	0,8	2,248286	0,075	1,2	0,033359	-	0,740448
αισθ. 2	0,8	2,201941	0,068807	1,2	0,031248	-	0,651592499

αισθ. 5	0,785982	2,198466	0,082757	1,2	0,037643	0,257490144	0,823774202
αισθ. 7	0,709981	2,175137	0,07455	1,2	0,034274	0,269850836	0,985556437
αισθ. 8	0,611978	2,129887	0,067699	1,2	0,031785	0,280214671	1,339949939
αισθ. 9	0,511976	2,059065	0,06128	1,2	0,029761	0,289587571	1,936020164
ασιθ. 10	0,411974	1,952235	0,0643	1,2	0,032937	0,275273765	3,504826145
αισθ. 11	0,311972	1,793641	0,07202	1,2	0,040153	0,24931332	7,630961444
RE- 36							
πηγή	0,8	2,248286	0,12	1,2	0,053374	-	1,184716801
αισθ. 2	0,8	2,201941	0,116137	1,2	0,052743	-	1,099797614
αισθ. 5	0,785982	2,198466	0,135581	1,2	0,061671	0,201170441	1,34958758
αισθ. 7	0,709981	2,175137	0,12032	1,2	0,055316	0,21241182	1,590639175
αισθ. 8	0,611978	2,129887	0,112034	1,2	0,052601	0,217824796	2,217459413
αισθ. 9	0,511976	2,059065	0,10269	1,2	0,049872	0,223704757	3,244287053
ασιθ. 10	0,411974	1,952235	0,100413	1,2	0,051435	0,220279918	5,473262965
αισθ. 11	0,311972	1,793641	0,1185	1,2	0,066067	0,194362674	12,55580299
RE- 43							
πηγή	0,8	3,060168	0,1	1,4	0,032678	-	1,829028445
αισθ. 2	0,8	2,879204	0,104974	1,4	0,036459	-	1,69963692
αισθ. 5	0,785982	2,87013	0,118476	1,4	0,041279	0,245888981	2,010004509
αισθ. 7	0,709981	2,813759	0,07817	1,4	0,027781	0,299728295	1,72931771
αισθ. 8	0,611978	2,718528	0,108501	1,4	0,039912	0,250065778	3,498594953
αισθ. 9	0,511976	2,589115	0,10565	1,4	0,040805	0,247312048	5,27744284
ασιθ. 10	0,411974	2,417181	0,085893	1,4	0,035535	0,265020256	7,177435909
αισθ. 11	0,311972	2,186965	0,07984	1,4	0,036507	0,261465831	12,57648664

Πίνακας ΙΙ.7 Τιμές των ξ, U_R με βάση τα πειραματικά δεδομένα (HR Wallingford)

Ευρετήριο σχημάτων

Ευρετήριο πινάκων