Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΙΣ ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ ΚΑΙ ΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ»

Μέτρο Hausdorff και Εφαρμογές

Αλεξίου Μαρία

Τριμελής Επιτροπή

Σπηλιώτης Ι. (Επιβλέπων Καθηγητής)

Αθανασούλης Γ.

Λουλάκης Μ.

Αθήνα, 2013

Επιτροπή : Σπηλιώτης Ι.

Αθανασούλης Γ.

Λουλάκης Μ.

Περιεχόμενα

1 Πρόλογος

Η παρούσα εργασία έχει τίτλο **Μέτρο Hausdorff και Εφαρμογές** και αποτελεί τη διπλωματική μου εργασία στο Διατμηματικό Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών **Μαθηματική Προτυποποίηση στις Νέες Τεχνολογίες και την Οικονομία** της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών (Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.) του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου (Ε.Μ.Π.).

Το αντικείμενο το οποίο διαπραγματεύεται ειναι η εφαρμογή του Μέτρου και της Διάστασης Hausdorff σε ποικίλους τομείς. Η θεωρία του Μέτρου και της Διάστασης Hausdorff εφευρέθηκε προκειμένου να μας παρέχει την αντίληψη μιας διάστασης που δεν είχε συλληφθεί από τις υπάρχουσες θεωρίες όπως αυτή του μέτρου Lebesgue. Το μέτρο Lebesgue μπορεί να μας δώσει μόνο ακέραιες τιμές για την διάσταση και ως εκ τούτου χάνει σε ορισμένες δομές όπως θα δούμε στις εφαρμογές. Η παρούσα εργασία είναι χωρισμένη σε τέσσερα κεφάλαια.

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι βασικές γνώσεις Θεωρίας Μέτρου που απαιτούνται για την κατανόηση των επόμενων κεφαλαίων. Συγκεκριμένα, στις ενότητες 1.1, 1.2 και 1.3 γίνεται παρουσίαση των μέτρων σε αφηρημένους,τοπολογικούς και μετρικούς χώρους, αντίστοιχα. Στην ενότητα 1.4 έχουμε μια συνοπτική παρουσίαση του Μέτρου Lebesgue ενώ στην ενότητα 1.5 παρουσιάζουμε τα σύνολα Souslin.

Στο δεύτερο κεφάλαιο ορίζουμε και αποδεικνύουμε βασικά αποτελέσματα για το Μέτρο Hausdorff. Ειδκότερα, στο 2.1 παρουσιάζουμε τον ορισμό του Μέτρου Hausdorff καθώς και άλλους ισοδύναμους ορισμούς του. Στο 2.2 ασχολούμαστε με απεικονίσεις, ειδικά μέτρα Hausdorff και επιφάνειες. Στα 2.3 και 2.4 παρουσιάζουμε και αποδεικνύουμε βασικά Θεωρήματα Ύπαρξης και Σύγκρισης, αντίστοιχα. Στο 2.5 αποδεικνύουμε το ιδιαίτερα σημαντικό λήμμα αυξανόμενων συνόλων και τις συνέπειές του,ενώ στο 2.6 ορίζουμε τη διάσταση Hausdorff καθώς και τους τρόπους υπολογισμού της οι οποίοι θα είναι απαραίτητοι για την κατανόηση των εφαρμογών του 3ου κεφαλαίου.

Στο τρίτο κεφάλαιο βρίσκονται όλες οι εφαρμογές της διάστασης Hausdorff.Στο 3.1 υπολογίζουμε τη διάσταση Hausdorff του συνόλου Cantor. Στο 3.2 παρουσιάζουμε τον τρόπο κατασκευής της καμπύλης Peano της οποίας η διάσταση Hausdorff είναι ίση με 2. Στο 3.3 και 3.4 ορίζουμε την κίνηση Brown και υπολογίζουμε την διάσταση της εικόνας και του γραφήματός της. Κλείνουμε το κεφάλαιο με το 3.5, στο οποίο παρουσιάζουμε τις συναρτήσεις Weierstrass και υπολογίζουμε τη διάσταση Hausdorff του γραφήματός τους.

Στο επίμετρο παρουσιάζουμε άλλα αποτελέσματα που σχετίζονται με το Μέτρο και τη Διάσταση Hausdorff χωρίς αποδείξεις. Στη βιβλιογραφία βρίσκονται οι σχετικές δημοσιεύσεις από τις οποίες αντλήσαμε τα αποτελέσματα.

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Ιωάννη Σπηλιώτη, Αναπληρωτή Καθηγητή του Ε.Μ.Π., για το εξαιρετικό ενδιαφέρον που έδειξε αφιερώνοντάς μου μέρος από τον χρόνο του και για την καθοδήγησή του που υπήρξε αναγκαία για την εκπόνηση της διπλωματικής αυτής. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Καθηγητή του Ε.Μ.Π. κ. Γ. Αθανασούλη και τον Επίκουρο Καθηγητή του Ε.Μ.Π. κ. Μ.Λουλάκη για τον χρόνο που διέθεσαν. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω το στενό μου περιβάλλον για την υποστήριξη που μου παρείχε.

2 Θεωρία Μέτρου

2.1 Μέτρα σε αφηρημένους χώρους

Ορισμός 1 *Ένα σύνολο $\mathscr{A}$ υποσυνόλων του Ω ονομάζεται* **σ-άλγεβρα** *όταν ι-κανοποιούνται οι παρακάτω απαιτήσεις :*
(α) $\Omega \in \mathscr{A}$
(β) *Αν* $A \in \mathscr{F}$ *τότε* $A^c \in \mathscr{A}$
(γ) *Αν* $(A_n, n \in \mathbb{N}) \subset \mathscr{A}$ *τότε* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$

Το παρακάτω λήμμα μας παρέχει έναν τρόπο να αναγνωρίζουμε αν ένα σύνολο είναι σ-άλγεβρα.

Λήμμα 1 *Έστω $\mathscr{A}$ ένα σύστημα συνόλων με τις παρακάτω ιδιότητες :*
(α) $\emptyset \in \mathscr{A}$
(β) *Αν* $A \in \mathscr{A}$ *τότε* $\Omega \setminus A \in \mathscr{A}$
(γ_1) *Αν* $A_1 \in \mathscr{A}$ *και αν* $A_2 \in \mathscr{A}$ *τότε* $A_1 \cup A_2 \in \mathscr{A}$
(γ_2) *Αν* $A_i \in \mathscr{A}$ *για* $i = 1, 2, ...,$*και* $A_1, A_2, ...,$ *είναι ξένα,τότε* $\bigcup_{i=1}^{i=\infty} A_i \in \mathscr{A}$.
Τότε το $\mathscr{A}$ είναι μια σ-άλγεβρα.

Ορισμός 2 *Ένα ζεύγος $(\Omega, \mathscr{A})$ όπου $\Omega \neq \emptyset$ και $\mathscr{A}$ σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω ονομάζεται μετρήσιμος χώρος. Ένα* **μέτρο** *μ στον $(\Omega, \mathscr{A})$ είναι εξ' ορισμού μια απεικόνιση*

$$\mu : \mathscr{A} \mapsto [0, \infty]$$

που ικανοποιεί τις παρακάτω απαιτήσεις :
(α) $\mu(\emptyset) = 0$
(β) *Αν* $A_n \in \mathscr{A}, n \in \mathbb{N}$ *με* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *για όλα τα* $i \neq j$ *στο* $\mathbb{N}$ *τότε*

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Ορισμός 3 *Μια συνάρτηση μ ορισμένη στα υποσύνολα ενός χώρου Ω λέγεται* **εξωτερικό μέτρο** *στον Ω αν ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες :*
$(\alpha)\mu(E)$ *είναι ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός ή $+\infty$ για κάθε υποσύνολο E του Ω.*
$(\beta)\mu(\emptyset) = 0$

(γ)αν $E_1 \subset E_2$ τότε $\mu(E_1) \leq \mu(E_2)$ και
(δ)αν $\{E_i\}$ είναι μια ακολουθία συνόλων του Ω τότε

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Ορισμός 4 *Αν μ είναι ένα εξωτερικό μέτρο στον Ω, ένα σύνολο F λέγεται* **μ-μετρήσιμο** *αν για όλα τα σύνολα A,B με*

$$A \subset E, \qquad B \subset \Omega \setminus E = E^c \tag{1}$$

έχουμε

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B). \tag{2}$$

Θεώρημα 1 *Αν μ είναι ένα εξωτερικό μέτρο στον Ω, ένα σύνολο E είναι μ-μετρήσιμο αν έχουμε*

$$\mu(A \cup B) \geq \mu(A) + \mu(B) \tag{3}$$

όταν A και B είναι σύνολα πεπερασμένου μ-μέτρου που ικανοποιούν την (1).

Πόρισμα 1 *Αν οι μοναδικές τιμές που παίρνει ένα μέτρο ειναι 0 και ∞, όλα τα σύνολα είναι μ-μετρήσιμα.*

Θεώρημα 2 *Έστω μ ένα εξωτερικό μέτρο στον Ω. Τότε*
(α)αν $\mu(N) = 0$,το N είναι μ-μετρήσιμο
(β)αν E είναι μ-μετρήσιμο είναι μ-μετρήσιμο και το $\Omega \setminus E$
(γ)αν $\{E_i\}$ είναι μια ακολουθία μ-μετρήσιμων συνόλων $\cup_{i=1}^{i=\infty} E_i$ και $\cap_{i=1}^{i=\infty} E_i$ είναι μ-μετρήσιμα.
(δ)αν $\{E_i\}$ είναι μια ακολουθία ξένων μ-μετρήσιμων συνόλων

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Πόρισμα 2 *Έστω T σύνολο στο Ω. Έστω $\{E_i\}$ είναι μια ακολουθία ξένων μ-μετρήσιμων συνόλων. Τότε*

$$\mu(T \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(T \cap E_i).$$

Θεώρημα 3 *Αν μ είναι ένα εξωτερικό μέτρο στον Ω, το σύστημα $\mathscr{M}_\mu$ των μ-μετρήσιμων συνόλων είναι μια σ-άλγεβρα που περιέχει τα μηδενικά σύνολα (δηλαδή, εκείνα τα σύνολα N με $\mu(N) = 0$), και ο περιορισμός του μ στη $\mathscr{M}_\mu$ είναι ένα σ-προσθετικό μέτρο στη $\mathscr{M}_\mu$.*

Στη συνέχεια αναφερόμαστε σε αποτελέσματα κατασκευής μέτρων από ένα «προ-μέτρο» ορισμένο σε δοθείσα κλάση υποσυνόλων του Ω.

Ορισμός 5 *Μία συνάρτηση τ ορισμένη σε μια κλάση $\mathscr{C}$ υποσυνόλων του Ω θα ονομάζεται* **προ-μέτρο** *αν :*
(α) $\emptyset \in \mathscr{C}$
(β) $0 \leq \tau(C) \leq +\infty$, $\forall C \in \mathscr{C}$
(γ) $\tau(\emptyset) = 0$

Θεώρημα 4 *Αν τ είναι ένα προ-μέτρο ορισμένο σε μια κλάση $\mathscr{C}$ υποσυνόλων, η συνολοσυνάρτηση*

$$\mu(E) = \inf_{\substack{C_i \in \mathscr{C} \\ \cup C_i \supset E}} \sum_{i=1}^{\infty} \tau(C_i)$$

είναι ένα εξωτερικό μέτρο στον Ω. Το εξωτερικό μέτρο μ θα ονομάζεται **παραγόμενο από το ζεύγος** $(\tau, \mathscr{C})$.

Θα λέμε το μέτρο μ μέτρο κατασκευασμένο από την **Μέθοδο I** από το προ-μέτρο τ. Ονομάζουμε την ακολουθία $\{C_i\}$ του συνόλου $\mathscr{C}$ με $\bigcup_{i=1}^{i=\infty} C_i \supset E$ κάλυψη του E από σύνολα του $\mathscr{C}$ και το άθροισμα $\sum_{i=1}^{i=\infty} \tau(C_i)$, τ-τιμή της κάλυψης. Τότε το $\mu(E)$ είναι το $infimum$ των τ-τιμών των καλύψεων του E από σύνολα του $\mathscr{C}$. Όπως είναι προφανές, αποκλείουμε την πιθανότητα ενός πεπερασμένου συστήματος συνόλων

$$C_1, C_2, ..., C_n$$

του $\mathscr{C}$ που καλύπτουν το E. Αλλά αν μας δοθεί κάτι τέτοιο το αντικαθιστούμε με την κάλυψη $\{D_i\}$ με

$$D_i = C_i, (i = 1, 2, ..., n),$$

$$D_i = \emptyset, (i = n+1, n+2, ...),$$

και τότε έχουμε

$$\sum_{i=1}^{\infty} \tau(D_i) = \sum_{i=1}^{n} \tau(C_i).$$

(α) Αφού $0 \leq \tau(C) \leq +\infty$ για όλα τα C στο $\mathscr{C}$ προφανώς έχουμε

$$0 \leq \mu(E) \leq +\infty$$

για όλα τα E στο Ω.
(β) Έχουμε

$$\mu(\emptyset) = \inf_{\cup C \supset \emptyset} \sum \tau(\mathscr{C}_i) \leq \sum \tau(\emptyset) = 0.$$

Ως εκ τούτου $\mu(\emptyset) = 0$.
(γ) Αν $E_1 \subset E_2$ οποιαδήποτε κάλυψη του E_2 καλύπτει και το E_1 οπότε

$$\mu(E_1) \leq \mu(E_2).$$

(δ) Έστω $\{E_i\}$ ακολουθία συνόλων του Ω. Αποδεικνύουμε ότι

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Αυτό το αποτέλεσμα είναι τετριμμένο αν

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) = +\infty.$$

Γι' αυτό υποθέτουμε ότι το

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) < +\infty$$

δηλαδή ότι είναι πεπερασμένο. Τότε κάθε $\mu(E_i)$ είναι πεπερασμένο. Αν μας δοθεί $\epsilon > 0$ τότε για κάθε ακέραιο $i > 1$ μπορούμε να δαλέξουμε μια ακολουθία $\{C_j^{(i)}\}_{j=1}^{j=\infty}$ συνόλων στο $\mathscr{C}$ με

$$E_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j^{(i)},$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \tau(C_j^{(i)}) \leq \mu(E_i) + \epsilon 2^{-i}.$$

Έστω $\{D_i\}$ μια ακολουθία από αναδιάταξη των συνόλων $C_j^{(i)}, (i, j = 1, 2, ...)$ σε μια και μόνη ακολουθία Τότε

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i,$$

$$D_i \in \mathscr{C}, (i = 1, 2, ...)$$

και

$$\begin{aligned}
\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \tau(D_i) \\
&= \sum_{i,j=1}^{\infty} \tau(C_j^{(i)}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \{\mu(E_i) + \epsilon 2^{-i}\}
\end{aligned}$$

$$= \{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)\} + \epsilon$$

Αφού το ϵ μπορεί να είναι οποιοσδήποτε θετικός αριθμός αποδεικνύεται αυτό που θέλαμε. Έχουμε αποδείξει και τις τέσσερις βασικές ιδιότητες του εξωτερικού μέτρου.

Θεώρημα 5 *Έστω μ ένα εξωτερικό μέτρο στον Ω. Τότε το μ συμπίπτει με το παραγόμενο από το ζεύγος $(\mu, P(\Omega))$ με την Μέθοδο I.*

Θεώρημα 6 *Έστω ν ένα σ-προσθετικό μέτρο ορισμένο σε μια σ-άλγεβρα συνόλων $\mathscr{A}$. Τότε το ν είναι ένα προ-μέτρο. Έστω λ το εξωτερικό μέτρο,το παραγόμενο από το ζεύγος $(\nu, \mathscr{A})$ με την Μέθοδο I. Τότε ο περιορισμός του λ στα λ-μετρήσιμα σύνολα είναι μια επέκταση του ν.*

Πόρισμα 3 *Για κάθε $E \subset \Omega$ έχουμε $\lambda(E) = \inf_{\substack{A \in \mathscr{A} \\ A \supset E}} \nu(A)$. Το infimum πραγματοποιείται,δηλαδή υπάρχει $A \in \mathscr{A}$ με $A \supset E : \lambda(E) = \nu(A)$.*

Ορισμός 6 *Ένα εξωτερικό μέτρο μ στον Ω λέγεται* **κανονικό** *αν για κάθε E στον Ω υπάρχει ένα μ-μετρήσιμο σύνολο A με*

$$E \subset A, \qquad \mu(E) = \mu(A).$$

Πόρισμα 4 *Το μέτρο λ είναι κανονικό.*

Θεώρημα 7 *Έστω μ ένα εξωτερικό μέτρο στον Ω. Έστω ν ο περιορισμός του μ στην σ-άλγεβρα των μ-μετρήσιμων συνόλων,δηλαδή $\nu = \mu|\mathscr{M}_\mu$. Τότε το ν είναι ένα προ-μέτρο, και το εξωτερικό μέτρο λ, το παραγόμενο από το ζεύγος $(\nu, \mathscr{M}_\mu)$ με την Μέθοδο I,είναι ένα κανονικό εξωτερικό μέτρο. Όλα τα μ-μετρήσιμα σύνολα είναι λ-μετρήσιμα και όλα τα λ-μετρήσιμα σύνολα πεπερασμένου λ-μέτρου είναι μ-μετρήσιμα. Επιπλέον, το λ ταυτίζεται με το μ αν και μόνο αν το μ είναι κανονικό εξωτερικό μέτρο.*

Θεώρημα 8 *Έστω μ ένα εξωτερικό μέτρο στον Ω και έστω $\{A_i\}$ μια ακολουθία μ-μετρήσιμων συνόλων.*
(α) Αν $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset ...$ και X ένα οποιοδήποτε σύνολο,

$$\mu(X \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \sup_i \mu(X \cap A_i)$$

(β) *Αν* $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset ...$ *και* X *ένα οποιοδήποτε σύνολο και το* $\mu(X \cap A_i)$ *είναι πεπερασμένο για κάποια* i,

$$\mu(X \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \inf_i \mu(X \cap A_i).$$

Θεώρημα 9 *Έστω* μ *ένα κανονικό εξωτερικό μέτρο στον* Ω. *Έστω* $\{A_i\}$ *μια αύξουσα ακολουθία συνόλων του* Ω *.Τότε*

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sup_i \mu(A_i).$$

Θεώρημα 10 *Έστω* μ *ένα κανονικό εξωτερικό μέτρο. Έστω* M *ένα* μ*-μετρήσιμο υποσυνόλο του* Ω *με* $\mu(M)$ *πεπερασμένο. Ένα υποσύνολο* E *του* M *είναι* μ*-μετρήσιμο αν και μόνο αν*

$$\mu(M) = \mu(E) + \mu(M \setminus E).$$

Θεώρημα 11 *Έστω* μ *ένα εξωτερικό μέτρο στον* Ω *και έστω* X *ένα οποιοδήποτε σύνολο του* Ω. *Τότε η συνολοσυνάρτηση* μ_X *που ορίζεται από*

$$\mu_X(E) = \mu(E \cap X)$$

είναι ένα εξωτερικό μέτρο στον Ω. *Τα* μ*-μετρήσιμα σύνολα είναι όλα* μ_X *μετρήσιμα.*

Θεώρημα 12 *Έστω* I *ένα αυθαίρετο σύνολο δεικτών, υποθέτουμε ότι για όλα τα* i *στο* I, *το* μ_i *είναι ένα εξωτερικό μέτρο στον* Ω. *Τότε*

$$\mu(E) = \sup_{i \in I} \mu_i(E)$$

είναι ένα εξωτερικό μέτρο στον Ω.

Πόρισμα 5 *Έστω* I *ένα αυθαίρετο σύνολο δεικτών, υποθέτουμε ότι για όλα τα* i *στο* I, *το* μ_i *είναι ένα εξωτερικό μέτρο στον* Ω. *Τότε υπάρχει ένα μοναδικό εξωτερικό μέτρο* μ *στον* Ω *με τις εξής ιδιότητες :*
(α) *για κάθε* E *του* Ω

$$\mu(E) \leq \inf_{i \in I} \mu_i(E)$$

(β)*για κάθε μέτρο* ν *στον* Ω *με*

$$\nu(E) \leq \inf_{i \in I} \mu_i(E)$$

για όλα τα E *του* Ω, *έχουμε*

$$\mu(E) \geq \nu(E)$$

για όλα τα E *του* Ω.

2.2 Μέτρα σε τοπολογικούς χώρους

Λήμμα 2 *Αν $\mathscr{H}$ είναι μια κλάση συνόλων του Ω τότε υπάρχει μοναδική ελάχιστη σ-άλγεβρα που περιέχει την $\mathscr{H}$. Αυτή η σ-άλγεβρα ονομάζεται* **παραγόμενη από την** *$\mathscr{H}$ και γράφεται ως $\sigma(\mathscr{H})$.*

Ορισμός 7 *Ένας χώρος Ω λέγεται τοπολογικός χώρος αν είναι εφοδιασμένος με ένα σύστημα από* **ανοιχτά** *σύνολα που ικανοποιούν τις εξής προυποθέσεις :*
(α) $\emptyset$ και Ω είναι ανοιχτά σύνολα
(β) η τομή δύο ανοιχτών συνόλων είναι ανοιχτό σύνολο
(γ) η ένωση ανοιχτών συνόλων είναι ανοιχτό σύνολο
Το σύνολο όλων των ανοιχτών συνόλων λέγεται τοπολογία.

Ορισμός 8 *Τα σύνολα Borel ενός τοπολογικού χώρου Ω είναι τα σύνολα της ελάχιστης σ-άλγεβρας $\mathscr{B}_\Omega$ των συνόλων του Ω που περιέχει τα ανοιχτά σύνολα του Ω,δηλαδή $\mathscr{B}_\Omega = \sigma(\mathscr{G})$, όπου $\mathscr{G}$ η τοπολογία του Ω.*

Ορισμός 9 *Αν $\mathscr{R}$ είναι μια κλάση συνόλων, ένα εξωτερικό μέτρο μ λέγεται $\mathscr{R}$-κανονικό αν για κάθε E στο Ω υπάρχει ένα σύνολο R στο $\mathscr{R}$ με*

$$E \subset R \quad \text{και} \quad \mu(E) = \mu(R)$$

Ορισμός 10 *Αν $\mathscr{R}$ είναι κλάση συνόλων, οι κλάσεις $\mathscr{R}_\sigma$ και $\mathscr{R}_\delta$ ορίζονται ως εξής*
$\mathscr{R}_\sigma$ θα είναι η κλάση όλων των αριθμήσιμων ενώσεων συνόλων

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \quad \text{με} \quad R_i \in \mathscr{R}$$

$\mathscr{R}_\delta$ θα είναι η κλάση όλων των αριθμήσιμων τομών συνόλων

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} R_i \quad \text{με} \quad R_i \in \mathscr{R}$$

Θεώρημα 13 *Έστω μ το εξωτερικό μέτρο,το παραγόμενο από το ζεύγος $(\tau, \mathscr{C})$, με την Μέθοδο I, με $\Omega \in \mathscr{C}$. Τότε το μ είναι $\mathscr{C}_{\sigma\delta}$-κανονικό.*

Πόρισμα 6 *Αν το τ ορίζεται μόνο σε ανοιχτά σύνολα τότε το μ είναι $\mathscr{C}_\delta$-κανονικό. Αν το τ ορίζεται μόνο σε Borel σύνολα τότε το μ είναι $\mathscr{B}_\Omega$-κανονικό.*

Θεώρημα 14 *Έστω $\mathscr{R}$ ένα σύστημα συνόλων του Ω και έστω μ ένα $\mathscr{R}$-κανονικό εξωτερικό μέτρο. Έστω E ένα μ-μετρήσιμο σύνολο με πεπερασμένο μ-μέτρο. Τότε υπάρχει ένα σύνολο C της μορφής $R_1 \setminus R_2$ με R_1 και R_2 στο $\mathscr{R}$ τέτοια ώστε*

$$C \subset E, \qquad \mu(C) = \mu(E).$$

Πόρισμα 7 *Τα σύνολα R_1 και R_2 μπορούν να επιλεγούν με*

$$\mu(R_1) = \mu(E), \qquad \mu(R_2) = 0.$$

2.3 Μέτρα σε μετρικούς χώρους

Ορισμός 11 *Μια συνάρτηση $\rho(x, y)$ που ορίζεται για όλα τα ζεύγη των σημείων x, y ενός χώρου Ω λέγεται* **μετρική** *αν για όλα τα σημεία x, y, z του Ω :*
(α) $\rho(x, y) \geq 0$ και $\rho(x, y) = 0$ αν και μόνο αν $x = y$
(β) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
(γ) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Ορισμός 12 *Η* **διάμετρος** *ενός συνόλου E ενός μετρικού χώρου Ω με τη μετρική ρ συμβολίζεται με $d(E)$ και ορίζεται*

$$d(E) = \sup_{x,y \in E} \rho(x, y)$$

με τη σύμβαση

$$d(\emptyset) = 0.$$

Θα δούμε τώρα την δεύτερη μέθοδο κατασκευής μέτρου από ένα δοθέν προ-μέτρο.

Θεώρημα 15 *Αν τ το προ-μέτρο που ορίζεται στην κλάση συνόλων $\mathscr{C}$ στον μετρικό χώρο Ω με την μετρική ρ η συνολοσυνάρτηση*

$$\mu(E) = \sup_{\delta > 0} \mu_\delta(E), \qquad (1)$$

όπου

$$\mu_\delta(E) = \inf_{\substack{C_i \in \mathscr{C}, d(C_i) \leq \delta \\ \cup C_i \supset E}} \sum_{i=1}^{\infty} \tau(C_i)$$

είναι εξωτερικό μέτρο στον Ω.

Θα λέμε το εξωτερικό μέτρο μ, μέτρο που παράγεται από το ζεύγος $(\tau, \mathscr{G})$ με την **Μέθοδο II**. Εύκολα διαπιστώνεται ότι για $0 < \delta_1 < \delta_2$ ισχύει $\mu_{\delta_1} \geq \mu_{\delta_2}$ και άρα η (1) γράφεται ως

$$\mu(E) = \lim_{\delta \to 0^+} \mu_\delta(E).$$

Με άλλα λόγια είναι οι «καλές» καλύψεις που ορίζουν το $\mu(E)$, όπως για παράδειγμα εκείνες με σύνολα μικρής διαμέτρου.

Απόδειξη :

Για κάθε δ με $\delta > 0$ έστω $\mathscr{C}_\delta$ το σύστημα όλων των συνόλων C του $\mathscr{C}$ με $d(C) \leq \delta$ (εδώ φυσικά το δ είναι ένα αριθμητικό κατασκεύασμα, όχι ένας τελεστής που υποδεικνύει τις μετρήσιμες τομές). Τότε προκύπτει άμεσα ότι ο περιορισμός του τ_δ του τ στο $\mathscr{C}_\delta$ είναι ένα προ-μέτρο στον Ω. Τότε για κάθε δ με $\delta > 0$ έχουμε :

$$\mu_\delta(E) = \inf_{\substack{C_i \in \mathscr{C}, d(C_i) \leq \delta \\ \cup C_i \supset E}} \sum_{i=1}^{\infty} \tau(C_i) = \inf_{\substack{C_i \in \mathscr{C}_\delta \\ \cup C_i \supset E}} \sum_{i=1}^{\infty} \tau_\delta(C_i)$$

και $\mu_\delta(E)$ είναι το μέτρο που κατασκευάστηκε από την Μέθοδο I από το προ-μέτρο τ_δ. Από το Θεώρημα 4 η συνολοσυνάρτηση $\mu_\delta(E)$ είναι μέτρο. Από το Θεώρημα 12 η συνολοσυνάρτηση

$$\mu(E) = \sup_{\delta > 0} \mu_\delta(E)$$

είναι μέτρο.

Τα κύρια πλεονεκτήματα των μέτρων που κατασκευάζονται από την Μέθοδο II έναντι των μέτρων που κατασκευάζονται από την Μέθοδο I προκύπτουν από το επόμενο θεώρημα που δείχνει ότι τα μέτρα της Μεθόδου II είναι προσθετικά όταν λαμβάνονται στην ένωση ενός ζεύγους συνόλων που έχουν θετική την μεταξύ τους απόσταση.

Ορισμός 13 *Αν A και B είναι ξένα μη κενά σύνολα σε έναν μετρικό χώρο Ω με μετρική την ρ, A και B λέγονται* **θετικά διαχωρίσιμα** *αν η απόσταση*

$$\inf_{a \in A, b \in B} \rho(a.b) > 0.$$

Ορισμός 14 *Ένα εξωτερικό μέτρο μ που ορίζεται στον μετρικό χώρο Ω λέγεται* **μετρικό εξωτερικό μέτρο** *αν*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

για κάθε ζεύγος ξένων μη κενών συνόλων A και B που είναι θετικά διαχωρίσιμα.

Θεώρημα 16 *Έστω μ ένα εξωτερικό μέτρο στον μετρικό χώρο Ω, το παραγόμενο από το ζεύγος $(\tau, \mathscr{C})$ με την Μέθοδο ΙΙ. Αν Α και Β ξένα και μη κενά σύνολα του Ω που είναι θετικά διαχωρίσιμα τότε*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B),$$

δηλαδή το μ είναι ένα μετρικό εξωτερικό μέτρο.

Απόδειξη

Αφού το μ είναι μέτρο ισχύει

$$\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$$

οπότε πρέπει να αποδείξουμε ότι

$$\mu(A \cup B) \geq \mu(A) + \mu(B).$$

Για να το αποδείξουμε, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mu(A \cup B) < +\infty$. Σκοπός μας είναι να εξασφαλίσουμε από μια καλή και «οικονομική» κάλυψη του $A \cup B$ ξένες καλές και «οικονομικές» καλύψεις που καλύπτουν τα Α και Β χωριστά. Αφού τα Α και Β είναι ξένα, μη κενά και θετικά διαχωρίσιμα μπορούμε να διαλέξουμε ένα $\delta > 0$ τόσο μικρό ώστε

$$\underset{a \in A, b \in B}{inf} \rho(a, b) \geq \delta.$$

Έστω $\epsilon > 0$ και δ_1, δ_2 τέτοια ώστε $0 < \delta_1 < d(\Omega), 0 < \delta_2 < d(\Omega)$. Γράφουμε

$$\eta = min\{\delta_1, \delta_2, \frac{1}{2}\delta\}.$$

Αφού

$$\mu(A \cup B) = \underset{d>0}{sup} \underset{\substack{d(C) \leq d \\ \cup C \supset A \cup B}}{inf} \sum \tau(C_i),$$

και

$$\mu(A \cup B) < +\infty$$

έχουμε

$$\underset{d(C) \leq \eta, \cup C \supset A \cup B}{inf} \sum \tau(C_i) \leq (A \cup B),$$

και μπορούμε να διαλέξουμε μια ακολουθία $\{C_i\}$ συνόλων του $\mathscr{C}$ με

$$d(C_i) \leq \eta \qquad (i = 1, 2, ...),$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \supset A \cup B,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \tau(C_i) \leq \mu(A \cup B) + \epsilon.$$

Τώρα αν για κάποια i είχαμε και

$$C_i \cap A \neq \emptyset \qquad \text{και} \qquad C_i \cap B \neq \emptyset,$$

θα υπήρχαν σημεία a_0, b_0 με

$$a_0 \in C_i \cap A, \qquad b_0 \in C_i \cap B$$

έτσι ώστε

$$\rho(a_0, b_0) \leq d(C_i) \leq \eta \leq \frac{1}{2}\delta \leq \inf_{a \in A, b \in B} \rho(a, b) \leq \frac{1}{2}\rho(a_0, b_0),$$

με το αντιφατικό συμπέρασμα $\rho(a_0, b_0) = 0$.
Οπότε για κανένα δεν έχουμε και

$$C_i \cap A \neq \emptyset \qquad \text{και} \qquad C_i \cap B \neq \emptyset. \qquad (1)$$

Για $i = 1, 2, ...$ γράφουμε

$$\begin{aligned} A_i &= C_i, && \text{αν} && C_i \cap A \neq \emptyset, \\ A_i &= \emptyset, && \text{αν} && C_i \cap A = \emptyset, \\ B_i &= C_i, && \text{αν} && C_i \cap B \neq \emptyset, \\ B_i &= \emptyset, && \text{αν} && C_i \cap B = \emptyset. \end{aligned}$$

Τότε προφανώς

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \supset \bigcup_{i=1}^{\infty} \{C_i \cap A\} = \{\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\} \cap A = A,$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \supset \bigcup_{i=1}^{\infty} \{C_i \cap B\} = \{\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\} \cap B = B.$$

Ακόμα κάθε ακολουθία $\{A_i\}$ και $\{B_i\}$ είναι μια ακολουθία συνόλων του $\mathscr{C}$ με διάμετρο όχι μεγαλύτερη από δ. Αφού η πιθανότητα (1) δεν προκύπτει έχουμε είτε

$$\tau(A_i) + \tau(B_i) = \tau(\emptyset) + \tau(\emptyset) = 0,$$

ή

$$\tau(A_i) + \tau(B_i) = \tau(C_i) + \tau(\emptyset) = \tau(C_i)$$

και στις δύο περιπτώσεις όμως

$$\tau(A_i) + \tau(B_i) \leq \tau(C_i).$$

Έτσι
$$\sum_{i=1}^{\infty}\tau(A_i)+\sum_{i=1}^{\infty}\tau(B_i)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\tau(C_i)\leq\mu(A\cup B)+\epsilon.$$
Τώρα
$$\{A_i\}\subset\mathscr{C},\qquad d(A_i)\leq\eta\leq\delta_1,\qquad \bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\supset A,$$
$$\{B_i\}\subset\mathscr{C},\qquad d(B_i)\leq\eta\leq\delta_2,\qquad \bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\supset B.$$
Ως εκ τούτου
$$\mu_{\delta_1}(A)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\tau(A_i),$$
$$\mu_{\delta_2}(A)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\tau(B_i),$$
και
$$\mu_{\delta_1}(A)+\mu_{\delta_2}(B)\leq\mu(A\cup B)+\epsilon.$$
Αφού αυτό ισχύει για όλα τα ζεύγη δ_1,δ_2 με $0<\delta_1<d(\Omega), 0<\delta_2<d(\Omega)$ προκύπτει
$$\mu(A)+\mu(B)\leq\mu(A\cup B)+\epsilon.$$
Και αφού αυτό ισχύει για όλα τα $\epsilon>0$ έχουμε
$$\mu(A)+\mu(B)\leq\mu(A\cup B),$$
όπως απαιτήθηκε.

Θεώρημα 17 *Έστω μ ένα μετρικό εξωτερικό μέτρο στον μετρικό χώρο Ω. Έστω $A_1, A_2, ...$ μια ακολουθία συνόλων με*
$$A_1\subset A_2\subset A_3\subset ...$$
και υποθέτουμε ότι για κάθε $n\geq 1$ τα σύνολα A_n και $\Omega\setminus A_n+1$ είναι θετικά διαχωρίσιμα. Τότε
$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sup_n \mu(A_n).$$

Θεώρημα 18 *Αν μ είναι ένα μετρικό εξωτερικό μέτρο στον μετρικό χώρο Ω όλα τα κλειστά σύνολα του Ω είναι μ-μετρήσιμα.*

Πόρισμα 8 *Αν μ είναι ένα μετρικό εξωτερικό μέτρο στον μετρικό χώρο Ω όλα τα Borel σύνολα του Ω είναι μ-μετρήσιμα,δηλαδή $\mathscr{B}_\Omega \subset \mathscr{M}_\mu$.*

Θεώρημα 19 *Έστω μ ένα εξωτερικό μέτρο στον μετρικό χώρο Ω το παραγόμενο από το ζεύγος $(\tau, \mathscr{C})$ με την Μέθοδο II, με $\Omega \in \mathscr{C}$. Τότε το μ είναι $\mathscr{C}_{\sigma\delta}$-κανονικό.*

Πόρισμα 9 *Αν το τ ορίζεται μόνο σε ανοιχτά σύνολα, τότε το μ είναι $\mathscr{C}_\delta$-κανονικό. Αν το τ ορίζεται μόνο σε Borel σύνολα, τότε το μ είναι $\mathscr{B}_\Omega$-κανονικό.Σε κάθε άλλη περίπτωση το μ είναι κανονικό.*

Θεώρημα 20 *Έστω μ ένα μέτρο στον μετρικό χώρο Ω που παράγεται από το ζεύγος $(\tau, \mathscr{C})$ με την Μέθοδο II, με $\Omega \in \mathscr{C}$. Έστω E ένα μ-μετρήσιμο σύνολο με πεπερασμένο μ-μέτρο. Τότε υπάρχει ένα σύνολο $\mathscr{C}$ της μορφής $C_1 \setminus C_2$ με C_1 και C_2 στο $\mathscr{C}_\sigma\delta$ με :*

$$C \subset E, \qquad \mu(C) = \mu(E)$$

Πόρισμα 10 *Αν το τ ορίζεται μόνο σε ανοιχτά σύνολα τότε το C μπορεί να πάρει τη μορφή $C_1 \setminus C_2$ όπου τα C_1, C_2 είναι $\mathscr{G}_\delta$-σύνολα. Αν το τ ορίζεται μόνο σε Borel σύνολα τότε το C μπορεί να θεωρηθεί ως Borel σύνολο.*

Το παρακάτω Λήμμα είναι γνωστό από τις τοπολογικές ιδιότητες των μετρικών χώρων βλ. [29]

Λήμμα 3 *Σε έναν μετρικό χώρο κάθε ανοιχτό σύνολο είναι ένα $\mathscr{F}_\sigma$-σύνολο και κάθε κλειστό σύνολο είναι ένα $\mathscr{G}_\delta$-σύνολο.*

Θεώρημα 21 *Έστω μ ένα $\mathscr{G}_\delta$-κανονικό μετρικό εξωτερικό μέτρο στον μετρικό χώρο Ω. Αν E ένα μ-μετρήσιμο σύνολο με πεπερασμένο μ-μέτρο, υπάρχει ένα $\mathscr{F}_\sigma$-σύνολο C με*

$$C \subset E, \qquad \mu(C) = \mu(E)$$

και αν $\epsilon \geq 0$, υπάρχει ένα κλειστό σύνολο F με

$$F \subset E, \qquad \mu(F) \geq \mu(E) - \epsilon.$$

Πόρισμα 11 *Έστω μ ένα εξωτερικό μέτρο στον Ω. Έστω $A_{ij}(i,j = 1,2,3,...)$ ένα σύστημα μ-μετρήσιμων συνόλων. Υποθέτουμε ότι τα σύνολα*

$$A_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ij} \quad (i = 1,2,3,...)$$

σχηματίζουν μια φθίνουσα ακολουθία και ότι

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ij}$$

έχει πεπερασμένο μ-μέτρο. Τότε υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία $k(1), k(2), ...$ θετικών ακεραίων που ικανοποιεί το παρακάτω

$$\mu(\bigcap_{i\geq N}\bigcup_{j\leq k(i)} A_{ij}) \geq \mu(A) - 2^{-N+1},$$

για N=1,2,...

Θεώρημα 22 *Έστω τ ένα προ-μέτρο που ορίζεται στην κλάση συνόλων $\mathscr{C}$ σε έναν μετρικό χώρο Ω. Υποθέτουμε ότι κάθε σύνολο του $\mathscr{C}$ είναι ανοιχτό,δηλαδή $\mathscr{C} \subset \mathscr{G}$. Έστω μ η συνολοσυνάρτηση που κατασκευάζεται από το προ-μέτρο τ από τη Μέθοδο II. Τότε το μ είναι ένα κανονικό, $\mathscr{G}_\delta$-κανονικό μετρικό εξωτερικό μέτρο, όλα τα σύνολα Borel είναι μ-μετρήσιμα και κάθε μ-μετρήσιμο σύνολο πεπερασμένου μ-μέτρου περιέχει ένα $\mathscr{F}_\sigma$-σύνολο με το ίδιο μέτρο.*

2.4 Μέτρο Lebesgue στον n-διάστατο Ευκλείδειο χώρο

Σε αυτό το σημείο θα συνδέσουμε τη γενική θεωρία που έχουμε αναπτύξει ως τώρα με το πιο σημαντικό μέτρο, το μέτρο Lebesgue. Εδώ $\Omega = \mathbb{R}^n$ και η μετρική $\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$. Αφού $a_i \leq b_i$ για κάθε $i = 1, 2, ..., n$, το σύνολο των σημείων $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ με $a_i < x_i < b_i$ για κάθε $i = 1, 2, ..., n$, θα λέγεται ανοιχτό ορθογώνιο με γωνίες $x = (a_1, a_2, ..., a_n)$ και $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$ και θα συμβολίζεται με $R(a, b)$. Έστω $\mathscr{R}$ η κλάση όλων αυτών των ορθογωνίων και η συνάρτηση τ στον $\mathscr{R}$

$$\tau(R(a,b)) = \prod_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i).$$

Έτσι το $\tau(R(a, b))$ είναι ο όγκος του ορθογωνίου $R(a, b)$. Προφανώς το τ είναι προ-μέτρο. Έστω λ, ν τα μέτρα που κατασκευάστηκαν από το προ-μέτρο τ με τη Μέθοδο I και τη Μέθοδο II αντίστοιχα. Τότε εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι το λ είναι το μέτρο Lebesgue. Από τη θεωρία φαίνεται πως το μέτρο ν θα έπρεπε να έχει πολλά πλεονεκτήματα έναντι του μέτρου λ, όμως στην πραγματικότητα, το λ έχει όλα τα πλεονεκτήματα του ν όπως φαίνεται στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 23 *Ισχύει $\lambda = \nu$ και $\lambda(R(a, b)) = \nu(R(a, b)) = \tau(R(a, b))$.*

2.5 Η διαδικασία Souslin

Ορισμός 15 *Αν $\mathscr{A}$ είναι μια κλάση συνόλων, τα σύνολα $Souslin - \mathscr{A}$ είναι τα σύνολα της μορφής*

$$A = \bigcup_{i_1, i_2, \dots} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{i_1, i_2, \dots, i_n}$$

όπου $A_{i_1, i_2, \dots, i_n} \in \mathscr{A}$ για κάθε άπειρη ακολουθία $i_1, i_2, \dots$ θετικών ακεραίων. Το σύνολο A λέγεται το αποτέλεσμα της εφαρμογής της διαδικασίας Souslin στο σύστημα των συνόλων $A_{i_1, i_2, \dots, i_n}$.Το σύνολο των συνόλων Souslin- $\mathscr{A}$ θα γράφεται $S(\mathscr{A})$.

Θεώρημα 24 *Έστω μ ένα μέτρο και έστω $\mathscr{M}_\mu$ η κλάση όλων των μ-μετρήσιμων συνόλων. Τότε $S(\mathscr{M}_\mu) \subset \mathscr{M}_\mu$.*

Πόρισμα 12 *Αν μ είναι μέτρο στον $(\Omega, \mathscr{A})$ όπου $\mathscr{A}$ είναι σ- άλγεβρα, τότε τα Souslin- $\mathscr{A}$ ανήκουν στην $\mathscr{M}_{\mu^*}$, όπου μ^* το παραγόμενο από το ζεύγος $(\mu, \mathscr{A})$ και $\mathscr{A} \subset S(\mathscr{A}) \subset \mathscr{M}_{\mu^*}$.*

3 Μέτρο Hausdorff και Διάσταση Hausdorff

3.1 Ορισμός μέτρων Hausdorff και άλλοι ισοδύναμοι ορισμοί

Στο παρόν κεφάλαιο, Ω θα θεωρούμε έναν μετρικό χώρο με τη μετρική ρ. Με $\mathscr{H}$ θα συμβολίζουμε την κλάση όλων των συναρτήσεων h που ορίζονται για όλα τα $t \geq 0$ αλλά ίσως να παίρνουν την τιμή $+\infty$ για κάποιες τιμές του t με αύξουσα μονοτονία για $t \geq 0$, θετικές για $t > 0$ και συνεχείς στα δεξιά για όλα τα $t \geq 0$. Θα χρησιμοποιούμε το $\mathscr{H}_0$ για το υποσύνολο όλων των h του $\mathscr{H}$ με $h(0) = 0$. Τέτοιες συναρτήσεις είναι π.χ. οι συναρτήσεις της μορφής $h(t) = t^{\alpha}, t \geq 0$, με $\alpha > 0$ που θα χρησιμοποιήσουμε αργότερα στον ορισμό της διάστασης Hausdorff. Εύκολα προκύπτει ότι η $\tau^h(G) = h(d(G))$ ορίζει προ- μέτρο στην κλάση $\mathscr{G}$ των ανοιχτών.

Ορισμός 16 *Το εξωτερικό μέτρο το παραγόμενο από το ζεύγος $(\tau^h, \mathscr{G})$ με την Μέθοδο II λέγεται h-**μέτρο Hausdorff** και σημειώνεται με $\mu^h = \sup_{\delta>0} \mu_\delta(E)$ όπου*

$$\mu_\delta(E) = \inf_{\substack{C_i \in \mathscr{C}, d(C_i) \leq \delta \\ \cup C_i \supset E}} \sum_{i=1}^{\infty} \tau^h(C_i).$$

Εξειδικεύοντας το Θεώρημα 22 παίρνουμε άμεσα το παρακάτω

Θεώρημα 25 *Ένα μέτρο Hausdorff μ^h είναι κανονικό, $\mathscr{G}_\delta$-κανονικό μετρικό μέτρο, όλα τα σύνολα Borel είναι μ^h-μετρήσιμα και κάθε μ^h-μετρήσιμο σύνολο πεπερασμένου μ^h-μέτρου περιέχει ένα $\mathscr{F}_\sigma$ σύνολο με το ίδιο μέτρο.*

Θεώρημα 26 *Έστω $h \in \mathscr{H}$ και έστω E ένα σύνολο του Ω. Για κάθε $\delta > 0$ έστω:*

$$\mu_\delta^h(E) = \inf_{\substack{\cup G \supset E \\ G \in \mathscr{G} \\ d(G) \leq \delta}} \sum h(G_i)$$

$$\nu_\delta^h(E) = \inf_{\substack{\cup F \supset E \\ F \in \mathscr{F} \\ d(F) \leq \delta}} \sum h(F_i)$$

$$\sigma_\delta^h(E) = \inf_{\substack{\cup S \supset E \\ d(S) \leq \delta}} \sum h(S_i)$$

$$\tau_\delta^h(E) = \underset{\substack{\cup S = E \\ d(S) \leq \delta}}{inf} \sum h(S_i)$$

τα σύνολα $\{S_i\}$ *στον ορισμό των* $\sigma_\delta^h, \tau_\delta^h$ *να είναι τυχαία υποσύνολα του* Ω. *Τότε για κάθε* ϵ *με* $\epsilon > \delta$ *έχουμε*

$$\mu_\epsilon^h(E) \leq \nu_\delta^h(E) = \sigma_\delta^h(E) = \tau_\delta^h(E) \leq \mu_\delta^h(E) \qquad (1)$$

Ακόμα

$$\mu^h(E) = \underset{\delta>0}{sup}\mu_\delta^h = \underset{\delta>0}{sup}\nu_\delta^h = \underset{\delta>0}{sup}\sigma_\delta^h = \underset{\delta>0}{sup}\tau_\delta^h \qquad (2)$$

Απόδειξη

Η ανισότητα $\mu_\delta^h(E) \leq \nu_\delta^h(E)$ είναι τετριμμένη αν $\nu_\delta^h(E) = +\infty$. Γι' αυτό υποθέτουμε ότι το $\nu_\delta^h(E) = +\infty$ είναι πεπερασμένο. Τότε για κάθε $\eta > 0$ μπορούμε να διαλέξουμε μια ακολουθία κλειστών συνόλων $\{F_i\}$ με

$$\cup F_i \supset E, \qquad d(F_i) \leq \delta, \qquad \sum h(F_i) \leq \nu_\delta^h(E) + \eta.$$

Αν $F_i = \emptyset$ γράφουμε $G_i = \emptyset$ και έχουμε $d(G_i) < \delta, h(G_i) = 0 = h(F_i)$. Αν $F_i \neq \emptyset$ χρησιμοποιούμε τη συνέχεια του h στα δεξιά στο $t = d(F_i)$ για να διαλέξουμε ένα $\eta_i > 0$ τόσο μικρό ώστε

$$h(d(F_i) + 2\eta_i) < h(F_i) + \eta^{2-i},$$

$$\delta + 2\eta_i < \epsilon.$$

Τότε παίρνοντας το G_i ως το σύνολο όλων των σημείων σε απόσταση αυστηρά μικρότερη από η_i από κάποιο σημείο του F_i έχουμε ένα ανοιχτό σύνολο G_i με

$$F_i \subset G_i,$$

$$d(G_i) \leq d(F_i) + 2\eta_i \leq \delta + 2\eta_i < \epsilon$$
$$h(G_i) \leq h(d(F_i) + 2\eta_i) < h(F_i) + \eta^{2-i}$$

Από αυτή την κατασκευή προκύπτει μια ακολουθία ανοιχτών συνόλων $\{G_i\}$ με

$$\cup G_i \supset \cup F_i \supset E, \qquad d(G_i) \leq \epsilon,$$

$$\sum h(G_i) \leq \sum h(F_i) + \sum \eta 2^{-i} \leq \nu_\delta^h(E) + 2\eta.$$

Αφού το η ήταν αυθαίρετο έχουμε ολοκληρώσει την απόδειξη ότι

$$\mu_\delta^h(E) \leq \nu_\delta^h(E).$$

Τώρα οι υποθέσεις

$$\cup S_i \supset E, \qquad S_i \in \mathscr{F}, \qquad d(S_i) \leq \delta$$

περριορίζουν περισσότερο την ακολουθία $\{S_i\}$ απ' ότι οι υποθέσεις

$$\cup S_i \supset E, \qquad d(S_i) \leq \delta.$$

Ως εκ τούτου

$$\sigma_\delta^h(E) = \underset{\substack{\cup S \supset E \\ d(S) \leq \delta}}{inf} \sum h(S_i) \leq \underset{\substack{\cup S \supset E \\ S \in \mathscr{F} \\ d(S) \leq \delta}}{inf} \sum h(S_i) = \nu_\delta^h(E).$$

Από την άλλη πλευρά αν S_i είναι ένα οποιοδήποτε συνολο, μπορούμε να πάρουμε το F_i ως το κλειστό του S_i και θα έχουμε $F_i = \emptyset$ αν και μόνο αν $S_j = \emptyset$ και

$$d(F_i) = d(S_i)$$

έτσι ώστε

$$S_i \subset F_i, \qquad h(F_i) = h(S_i), \qquad d(F_i) = d(S_i).$$

Ως εκ τούτου θα έχουμε

$$\nu_\delta^h(E) = \underset{\substack{\cup F \supset E \\ F \in \mathscr{F} \\ d(F) \leq \delta}}{inf} \sum h(F_i) \leq \underset{\substack{\cup S \supset E \\ d(S) \leq \delta}}{inf} \sum h(S_i) = \sigma_\delta^h(E).$$

Συνεπώς

$$\nu_\delta^h(E) = \sigma_\delta^h(E).$$

όπως απαιτείται.
Όμοια προκύπτει

$$\sigma_\delta^h(E) \leq \tau_\delta^h(E)$$

τετριμμένα και

$$\tau_\delta^h(E) \leq \sigma_\delta^h(E)$$

παρατηρώντας ότι αν η $\{S_i\}$ είναι μια οποιαδήποτε ακολουθία συνόλων με

$$E \subset \cup S_i, \qquad d(S_i) \leq \delta$$

η ακολουθία συνόλων $T_i = E \cap S_i, i = 1, 2, ...,$ έχει τις ιδιότητες

$$E = \cup T_i, \qquad d(T_i) \leq \delta, \qquad \sum h(T_i) \leq \sum h(S_i).$$

Ως εκ τούτου $\sigma_\delta^h(E) = \tau_\delta^h(E)$.
Η ανισότητα

$$\sigma_\delta^h(E) \leq \mu_\delta^h(E)$$

ειναι πάλι τετριμμένη. Άρα έχουμε αποδείξει το (1) και το το αποτέλεσμα (2) προκύπτει άμεσα από το (1).

Παρατηρήσεις: Οι τύποι

$$\mu^h(E) = \underset{\delta>0}{sup} \tau_\delta^h(E)$$

$$\tau_\delta^h(E) = \underset{\substack{\cup S = E \\ d(S)\le\delta}}{inf} \sum h(S_i),$$

δείχνουν ότι το μ^h-μέτρο μπορεί να οριστεί στα πλαίσια των διαμέτρων και ιδιοτήτων κάλυψης των υποσυνόλων του Ε. Έτσι το μ^h-μέτρο ενός συνολου Ε είναι μια εσωτερική ιδιότητα του Ε ως σύνολο πάνω στο οποίο ορίζεται η μετρική συνάρτηση ρ. Οπότε αν το Ε μετακινείται από το Ω και ενσωματώνεται εκ νέου στον μετρικό χώρο Ω' με την μετρική ρ' έτσι ώστε $\rho' = \rho$ στο Ε, αυτό δεν θα αλλάξει το μ^h-μέτρο.

Σημείωση : Τα μέτρα Hausdorff εισήχθησαν αρχικά από τον Hausdorff για συναρτήσεις της μορφής $h(t) = t^\alpha, t \geq 0$ με $\alpha > 0$ και γι' αυτό όταν η h είναι αυτής της μορφής συνηθίζεται να γράφεται $\mu^h = H^\alpha$ και αντίστοιχα $\mu_\delta^h = H_\delta^\alpha$.

3.2 Απεικονίσεις, ειδικά μέτρα Hausdorff και επιφάνειες

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε τη σύνδεση μεταξύ του μέτρου Hausdorff που αντιστοιχεί στη συνάρτηση $h(t) = t^r$ όπου r ένας θετικός ακέραιος και της θεωρίας της περιοχής με r-διάστατες επιφάνειες. Θα ονομάζουμε αυτό το μέτρο (r)-μέτρο και θα το συμβολίζουμε με $\mu^{(r)}$.

Θεώρημα 27 *Έστω f συνάρτηση ορισμένη σε ένα σύνολο E ενός μετρικού χώρου Ω' με τη μετρική ρ'. Έστω ότι η f παίρνει τιμές σε έναν μετρικό χώρο Ω με μετρική ρ. Έστω g μια συνεχής γνησίως αύξουσα συνάρτηση που ορίζεται για $t \geq 0$ και $g(0) = 0$. Υποθέτουμε ότι η f ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz*

$$\rho(f(x), f(y)) \leq g(\rho'(x, y)),$$

για όλα τα x, y στο E. Τότε για όλα τα h στο $\mathscr{H}$ και όλα τα $\delta > 0$,

$$\mu_{g(\delta)}^{hg^{-1}}(f(E)) \leq \mu_\delta^h(E), \quad \mu^{hg^{-1}}(f(E)) \leq \mu^h(E)$$

Απόδειξη

Κατ' αρχάς να σημειώσουμε ότι αφού η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα για $t \geq 0$ και $g(0) = 0$ η αντίστροφη συνάρτηση g^{-1} θα ορίζεται ίσως με την τιμή

$+\infty$, συνεχής, γνησίως αύξουσα με $g^{-1}(0) = 0$. Ως εκ τούτου για όλα τα h στο $\mathscr{H}$ η hg^{-1} είναι επίσης στον $\mathscr{H}$. Τώρα έχουμε την h στο $\mathscr{H}$ και $\delta > 0$. Αν $\{S_i\}$ είναι μια ακολουθία συνόλων του Ω' με

$$\cup S_i \supset E, \quad S_i \subset E, \quad d'(S_i) \leq \delta,$$

για κάθε i χρησιμοποιώντας d' για διαμέτρους στο Ω' τότε

$$\begin{aligned} d((S_i)) &= \underset{x,y \in S_i}{sup}\, \rho(f(x), f(y)) \\ &\leq \underset{x,y \in S_i}{sup}\, g(\rho'(x,y)) \\ &\leq g(d'(S_i)) \leq g(\delta) \end{aligned}$$

και

$$hg^{-1}\{d(f(S_i))\} \leq hg^{-1}g(d'(S_i)) = h(S_i).$$

Προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 28 ότι

$$\mu_{g(\delta)}^{hg^{-1}}(f(E)) \leq \mu_\delta^h(E).$$

Παίρνοντας supremum πάνω σε όλες τις τιμές του δ και στις δυο πλευρές αυτής της ανισότητας καταλήγουμε :

$$\mu^{hg^{-1}}(f(E)) \leq \mu^h(E).$$

Θεώρημα 28 *Για κάθε φυσικό αριθμό n υπάρχει μια πεπερασμένη θετική σταθερά κ_n τέτοια ώστε για κάθε σύνολο E στον Ευκλείδειο Χώρο E_n να έχουμε*

$$\mu^{(n)}(E) = \kappa_n \lambda(E)$$

όπου με λ συμβολίζουμε το μέτρο Lebesgue στον E_n.

Απόδειξη

Πρώτα μελετάμε τον κύβο C_0 όλων των σημείων $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ με

$$0 \leq x_1 < 1, \qquad 0 \leq x_2 < 1, ..., \qquad 0 \leq x_n < 1.$$

Αν δίνεται $\delta > 0$, μπορούμε να διαλέξουμε έναν ακέραιο N τόσο μεγάλο ώστε

$$(\sqrt{n})/N < \delta$$

Τώρα ο C_0 καλύπτεται από το σύστημα των N^n κύβων που ορίζονται από τις ανισότητες

$$\frac{r_1 - 1}{N} \leq x_1 < \frac{r_1}{N}, \frac{r_2 - 1}{N} \leq x_2 < \frac{r_2}{N}, ..., \frac{r_n - 1}{N} \leq x_n < \frac{r_n}{N}$$

με $r_1, r_2, ..., r_n$ να παίρνουν όλες τις δυνατές ακέραιες τιμές από το 1 μέχρι το N. Αφού όλοι αυτοί οι κύβοι έχουν διάμετρο $(\sqrt{n})/N$ η οποία είναι μικρότερη από δ , συνεπάγεται ότι

$$\mu_\delta^{(n)}(C_0) \leq \sum_{r_1, r_2, ..., r_n = 1}^{N} (\frac{\sqrt{n}}{N})^n = n^{\frac{1}{2}n}.$$

Ως εκ τούτου

$$\mu^{(n)}(C_0) \leq n^{\frac{1}{2}n}.$$

Τώρα υποθέτουμε ότι η S_i είναι μία ακολουθία συνόλων που καλύπτουν το C_0. Για κάθε i μπορούμε να διαλέξουμε έναν κλειστό κύβο C_i που να περιέχει τη S_i με την κορυφή του C_i να ισούται με το διπλάσιο της διαμέτρου της S_i. Τότε, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες μέτρου του Lebesgue , έχουμε

$$C_0 \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i,$$

και

$$1 = \lambda(C_0) \leq \lambda\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(C_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \{2d(S_i)\}^n,$$

έτσι ώστε

$$\sum_{i=1}^{\infty} \{d(S_i)\}^n \geq 2^{-n}$$

Αφού αυτή η ανισότητα ισχύει για κάθε κάλυψη της S_i του C_0 συμπεραίνουμε ότι

$$\mu^{(n)}(C_0) \geq 2^{-n}$$

Τώρα γράφουμε

$$\kappa_n = \mu^{(n)}(C_0)$$

και έχουμε

$$2^{-n} \leq \kappa_n \leq n^{\frac{1}{2}n}$$

Τότε

$$\mu^{(n)}(C_0) = \kappa_n \lambda(C_0)$$

Από το αναλλοίωτο του $\mu^{(n)}$ και του λ στη μετάφραση και αφού το καθένα είναι ομοιογενές βαθμού n κάτω από μετασχηματισμούς ομοιότητας συμπεραίνουμε ότι

$$\mu^{(n)}(C) = \kappa_n \lambda(C)$$

για όλους τους κύβους C που ορίζονται από ανισότητες της μορφής

$$a_1 \leq x_1 < a_1 + s, a_2 \leq x_2 < a_2 + s, ..., a_n \leq x_n < a_n + s,$$

Τώρα σκεφτόμαστε μία ξεχωριστή κλάση $\mathscr{C}$ όλων των κύβων της μορφής

$$(r_1-1)2^{-k} \leq x_1 < r_1 2^{-k}, (r_2-1)2^{-k} \leq x_2 < r_2 2^{-k}, ..., (r_n-1)2^{-k} \leq x_n < r_n 2^{-k}$$

όπου $k \geq 0, r_1, r_2, ..., r_n$ είναι ακέραιοι. Αυτοί οι κύβοι έχουν την ξεχωριστή ιδιότητα που όταν δύο έχουν κάποιο κοινό σημείο τότε ο ένας κύβος είναι υποσύνολο του άλλου. Τώρα, αν G ένα ανοιχτό σύνολο, κάθε σημείο g του G βρίσκεται σε έναν κύβο C του $\mathscr{C}$ που περιέχεται στο G και έτσι σε έναν κύβο C του $\mathscr{C}$ που είναι με την έννοια ότι είναι ένας κύβος C του $\mathscr{C}$ που περιέχεται στο G αλλά δεν περιέχεται σε κάποιον μεγαλύτερο κύβο C' του $\mathscr{C}$ που περιέχεται στο G. Ως εκ τούτου το G είναι η ένωση των μέγιστων κύβων του $\mathscr{C}$ που περιέχονται στο G. Είναι φανερό ότι, αυτοί οι μέγιστοι κύβοι C στο G είναι ξένοι. Οπότε,

$$G = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$$

όπου έχουμε μία ξένη ένωση κύβων C_i του $\mathscr{C}$. Αφού τα σύνολα Borel είναι μετρήσιμα και για το $\mu^{(n)}$ και για το λ συμπεραίνουμε ότι

$$\mu^{(n)}(G) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^{(n)}(C_i) = \kappa_n \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(C_i) = \kappa_n \lambda(G) \qquad (1)$$

για κάθε ανοιχτό σύνολο G.
Τώρα θεωρούμε ένα $\mathscr{G}_\delta$ -σύνολο H. Αν $\mu^{(n)}(H) = \lambda(H) = +\infty$ έχουμε

$$\mu^{(n)}(H) = \kappa_n \lambda(H)$$

Αν $\mu^{(n)}(H) \leq +\infty$, μπορούμε να καλύψουμε το H με μία ακολουθία G_i ανοιχτών συνόλων με

$$\sum_{i=1}^{\infty} \{d(G_i)\}^n$$

πεπερασμένη. Τότε, όπως σε μία προηγούμενη παράγραφο, μπορούμε να αντικαταστήσουμε τα ανοιχτά σύνολα G_i από ανοιχτούς κύβους C_i με κορυφή διπλάσια της διαμέτρου των G_i και να λάβουμε ένα ανοικτό $\cup_{i=1}^{\infty} C_i$ του H με

$$\lambda\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\big) < +\infty.$$

Από την άλλη, αν $\lambda(H) < +\infty$, είναι άμεσο ότι το H μπορεί να καλυφθεί από ένα ανοιχτό σύνολο πεπερασμένου λ μέτρου. Συμπεραίνουμε από την (1) ότι τέτοια ανοιχτά σύνολα πεπερασμένου λ μέτρου έχουν πεπερασμένο $\mu^{(n)}$ μέτρο. Έτσι, όταν το H είναι ένα $\mathscr{G}_\delta$-σύνολο με είτε $\mu^{(n)}(H) < +\infty$ ή με $\lambda(H) < +\infty$, μπορούμε να εκφράσουμε το H με τη μορφή

$$H = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$$

όπου $G_1, G_2, ...,$ είναι μία μη αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων ανοιχτών συνόλων πεπερασμένου μέτρου, και για το $\mu^{(n)}$ και για το λ. Έτσι χρησιμοποιώντας την (1) και το Θεώρημα 8 έχουμε

$$\mu^{(n)}(H) = \underset{i}{inf}\,\mu^{(n)}(G_i) = \kappa_n \underset{i}{inf}\,\lambda(G_i) = \kappa_n \lambda(H). \qquad (2)$$

Οπότε το αποτέλεσμα (2) ισχύει για όλα τα $\mathscr{G}_\delta$- σύνολα H. Αφού τα $\mu^{(n)}$ και λ είναι $\mathscr{G}_\delta$- κανονικά μέτρα, αν το E είναι κάποιο σύνολο, μπορούμε να διαλέξουμε $\mathscr{G}_\delta$ - σύνολα H_1, H_2 με

$$E \subset H_1, \qquad \mu^{(n)}(E) = \mu^{(n)}(H_1),$$

$$E \subset H_2, \qquad \lambda(E) = \lambda(H_2)$$

Αυτό μας εξασφαλίζει ότι

$$\mu^{(n)}(E) = \mu^{(n)}(H_1 \cap H_2) = \kappa_n \lambda(H_1 \cap H_2) = \kappa_n \lambda(E).$$

όπως ζητήθηκε.

Παρατηρήσεις : Όταν $n = 1$ είναι εύκολο να δούμε και ότι $\kappa_1 = 1$. Ο προσδιορισμός του κ_n όμως για $n \geq 2$ είναι πιο δύσκολος. Χρησιμοποιώντας την θεωρία της συμμετρίας, κάθε κυρτό σύνολο με διάμετρο d στον E_n έχει μέτρο Lebesgue που δεν ξεπερνά το μέτρο Lebesgue μιας σφαίρας διαμέτρου d που είναι :

$$\frac{\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma(1+\frac{1}{2}n)}\Big(\frac{1}{2}d\Big)^n.$$

Έτσι κάθε σύνολο διαμέτρου d στον E_n περιέχεται σε ένα κυρτό σύνολο με μέτρο Lebesgue που δεν ξεπερνά το

$$\frac{(\frac{1}{4}\pi)^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma(1+\frac{1}{2}n)}d^n.$$

Από το επιχείρημα που χρησιμοποιήσαμε στην προηγούμενη απόδειξη προκύπτει ότι αν $\{S_i\}$ είναι οποιαδήποτε ακολουθία συνόλων που καλύπτει τον μοναδιαίο κύβο C_0, έχουμε

$$\sum_{i=1}^{\infty}\{d(S_i)\}^n \frac{(\frac{1}{4}\pi)^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma(1+\frac{1}{2}n)} \geq \lambda(C_0)$$

έτσι ώστε

$$\mu^{(n)}(C_0) \geq \Big(\frac{4}{\pi}\Big)^{\frac{1}{2}n}\Gamma(1+\frac{1}{2}n)\lambda(C_0)$$

και

$$\kappa_n \geq (4/n)^{\frac{1}{2}n}\Gamma(1+\frac{1}{2}n)$$

Από την άλλη, αν μας δίνεται $\delta > 0$ μπορούμε από το Θεώρημα Vitali να βρούμε μια μη άπειρη ακολουθία $\{S_i\}$ ξένων σφαιρών διαμέτρου μικρότερης από δ που να περιέχονται στο C_0 με

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(S_i) = \lambda(C_0) \qquad\qquad \lambda\big(C_0 \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\big) = 0$$

Τότε

$$\mu^{(n)}(C_0 \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i) = 0$$

Ως εκ τούτου

$$\begin{aligned}
\mu^{(n)}(C_0) &\leq \mu_\delta^{(n)}\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\big) + \mu_\delta^{(n)}\big(C_0 \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\big) \\
&= \mu_\delta^{(n)}\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\big) \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \{d(S_i)\}^n \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \Big(\frac{4}{\pi}\Big)^{\frac{1}{2}n} \Gamma(1 + \frac{1}{2}n)\lambda(S_i) \\
&= \Big(\frac{4}{\pi}\Big)^{\frac{1}{2}n} \Gamma(1 + \frac{1}{2}n)\lambda(C_0)
\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\mu^{(n)}(C_0) \leq \Big(\frac{4}{\pi}\Big)^{\frac{1}{2}n} \Gamma(1 + \frac{1}{2}n)$$

έτσι ώστε

$$\kappa_n \leq (4/n)^{\frac{1}{2}n} \Gamma(1 + \frac{1}{2}n)$$

Έτσι

$$\kappa_n = (4/n)^{\frac{1}{2}n} \Gamma(1 + \frac{1}{2}n)$$

όπως απαιτήθηκε.

Θεώρημα 29 *Έστω Ω ένας μετρικός χώρος με τη μετρική ρ. Έστω f μια 1-1 απεικόνιση ενός φραγμένου ανοιχτού συνόλου G στο E_r στο Ω. Υποθέτουμε ότι για κάποιες θετικές σταθερές c, C έχουμε :*

$$c|x_2 - x_1| \leq \rho(f(x_1), f(x_2)) \leq C|x_2 - x_1|,$$

για όλα τα σημεία x_1, x_2 του G. Τότε το $f(G)$ έχει πεπερασμένο θετικό (r)-μέτρο στον Ω.

Απόδειξη

Αφού το G έχει πεπερασμένο θετικό μέτρο *Lebesgue* στο E_r, έχει πεπερασμένο θετικό (r)-μέτρο στον E από το Θεώρημα 28. Τώρα παίρνουμε $g(t) = Ct$ για $t \geq 0$ στο Θεώρημα 27. Αφού το G έχει πεπερασμένο $\mu^{(r)}$-μέτρο προκύπτει από το Θεώρημα 27 ότι το $f(G)$ έχει πεπερασμένο $\mu^{(phi)}$-μέτρο με

$$\phi(t) = (\frac{t}{C})^r.$$

Ως εκ τούτου το $f(G)$ έχει πεπερασμένο $\mu^{(r)}$-μέτρο.
Αν το $f(G)$ είχε μηδενικό πεπερασμένο $\mu^{(r)}$-μέτρο στο Ω θα εφαρμόζαμε το Θεώρημα 27 στην αντίθετη κατεύθυνση και θα συμπεραίναμε ότι το G είχε μηδενικό πεπερασμένο $\mu^{(\psi)}$-μέτρο με

$$\psi(t) = (tc)^r,$$

και μηδενικό $(r)-$ μέτρο. Συνεπώς το $f(G)$ πρέπει να έχει θετικό (r)-μέτρο.

Σημειώνουμε ότι, αν χρησιμοποιήσουμε το (r)-μέτρο στο E_n, τότε έχει πολλές ομοιότητες με την έννοια του r-διάστατου εμβαδού επιφάνειας. Είναι καθαρά αμετάβλητο από τις μεταφράσεις και τις περιστροφές. Έχει κατάληλες ιδιότητες προσθετικότητας. Προσδιορίζει μία πεπερασμένη θετική τιμή για κάθε επαρκώς λεία εικόνα για κάθε φραγμένο ανοιχτό σύνολο στο E_r.

3.3 Θεωρήματα Ύπαρξης

Πριν ξεκινήσουμε με τα Θεωρήματα Ύπαρξης θα παρουσιάσουμε ένα κριτήριο για να έχει ένα σύνολο E μηδενικό h-μέτρο.

Θεώρημα 30 *Ένα σύνολο E έχει μηδενικό h-μέτρο αν και μόνο αν είναι δυνατόν να διαλέξουμε μια ακολουθία συνόλων $\{E_i\}$ με $\sum_{i=1}^{i=\infty} h(E_i) < +\infty$ ώστε κάθε σημείο του E ανήκει σε απείρως πολλά από τα σύνολα E_i.*

Απόδειξη

Έστω $\mu^h(E) = 0$. Τότε από τον ορισμό του μ^h,μπορούμε για κάθε $n \geq 1$ να διαλέξουμε μια ακολουθία συνόλων $\{E_i^{(n)}\}$ με

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^{(n)}, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} h(E_i^{(n)}) < 2^{-n}.$$

Τώρα είναι προφανές ότι αναδατάσσοντας τα σύνολα $E_i^{(n)}(i, n = 1, 2, ...)$ σε μία και μοναδική ακολουθία ικανοποιούμε τις προυποθέσεις του θεωρήματος αφού

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} h\big(E_i^{(n)}\big) < 1$$

και κάθε σημείο του E ανήκει σε απείρως πολλά από τα συνολα $E_i^{(n)}$. Τώρα υποθέτουμε ότι έχουμε τα σύνολα $\{E_i\}$ με $\sum_{i=1}^{i=\infty} h(E_i)$ πεπερασμένο και ότι κάθε σημείο του E ανήκει σε απείρως πολλά από τα σύνολα. Έστω δοθέν $\epsilon > 0$ και $\delta > 0$. Τότε $h(\delta) > 0$. Ως εκ τούτου $d(E_i) \geq \delta$ για το πολύ εναν πεπερασμένο αριθμό τιμών του i. Έτσι μπορούμε να διαλέξουμε έναν ακέραιο N τέτοιο ώστε $d(E_i) < \delta$ για όλα τα $i \geq N$. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι το N είναι τόσο μεγάλο ώστε $\sum_{i=N}^{\infty} h(E_i) < \epsilon$. Τώρα αφού κάθε σημείο του E ανήκει σε απείρως πολλά από τα σύνολα $\{E_i\}$ έχουμε

$$E \subset \bigcup_{i=N}^{\infty} h(E_i), \qquad d(E_i) < \delta \text{ για } i \geq N, \qquad \sum_{i=N}^{\infty} h(E_i) < \epsilon.$$

Ως εκ τούτου

$$\mu_\delta^h(E) < \epsilon.$$

Συνεπώς $\mu^h(E) = 0$ όπως απαιτήθηκε.

Θεώρημα 31 *Έστω E ένα σ−συμπαγές σύνολο σε έναν μετρικό χώρο Ω. Τότε υπάρχει μια h στο $\mathscr{H}$ για την οποία $\mu^h(E) = 0$.*

Απόδειξη

Αφού το E είναι σ−συμπαγές μπορούμε να γράφουμε

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$$

όπου κάθε σύνολο K_i είναι συμπαγές. Γράφουμε

$$F_i = \bigcup_{j=1}^{i} K_j$$

για $i = 1, 2, ...$ Τότε κάθε σύνολο F_i ειναι συμπαγές,

$$F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset ...,$$

και

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i.$$

Για κάθε i, το σύστημα των ανοιχτών σφαιρών

$$S(x, 1/i) \qquad (x \in F_i),$$

όπου ορίζουμε ως $S(x, 1/i)$ την σφαίρα με σημεία y με

$$\rho(x, y) < r,$$

ορίζει ένα ανοιχτό κάλυμμα του συμπαγούς συνόλου F_i. Έστω

$$S(x_{ij}, 1/i) \qquad (j = 1, 2, ..., J_i)$$

ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα των F_i από τέτοιες σφαίρες. Έστω $S_1, S_2, ...$ μια απαρίθμηση από τέτοιες σφαίρες στη φυσική τους σειρά παίρνοντας πρώτα εκείνες που σχετίζονται με το F_1, μετά εκείνες με το F_2 κ.ο.κ. Τότε

$$d(S_k) \leq 2/i,$$

οπότε

$$k > J_1 + J_2 + ... + J_{i-1}.$$

Τώρα μπορούμε να διαλέξουμε μια h συνεχή,μονότονη, αύξουσα συνάρτηση που να ικανοποιεί τα εξής:

$$h(0) = 0$$

$$h(2/i) = \{J_1 + J_2 + ... + J_i\}^{-2} \qquad (i = 1, 2, 3, ...)$$

Τώρα για οποιοδήποτε δοθέν $k > J_1$ θα υπάρχει ένα i με

$$J_1 + J_2 + ... + J_{i-1} < k \leq J_1 + J_2 + ... + J_i$$

και με αυτή την τιμή του i

$$h(S_k) = h(d(S_k)) \leq h(2/i) = \{J_1 + J_2 + ... + J_i\}^{-2} \leq k^{-2}.$$

Ως εκ τούτου η σειρά $\sum_{k=1}^{k=\infty} h(S_k)$ συγκλίνει. Αλλά κάθε σημείο του Ε ανήκει σε όλα τα σύνολα F_i απο κάποιο σημείο και μετά και συνεπώς σε απείρως πολλά S_k. Έτσι το κριτήριο του Θεωρήματος 32 ικανοποιείται και $\mu^h(E) = 0$.

Ορισμός 17 *Μια κλάση $\mathscr{G}^*$ ανοιχτών συνόλων αποτελεί* **βάση για τα ανοιχτά σύνολα** *ενός τοπολογικού χώρου Ω αν κάθε ανοιχτό σύνολο του Ω είναι ένωση από σύνολα του $\mathscr{G}^*$.*

Ορισμός 18 *Ένα σύνολο είναι* **πυκνό στον εαυτό του** *αν καθένα από τα ανοιχτά σύνολά του το συναντά, το συναντά σε κάποιο άπειρο σύνολο.*

Ορισμός 19 *Ένα σύνολο είναι* **τέλειο** *αν είναι κλειστό, μη κενό και πυκνό στον εαυτό του.*

Ορισμός 20 *Ένα σημείο c λέγεται* **σημείο συμπύκνωσης** *ενός συνόλου S αν κάθε ανοιχτό σύνολο που περιέχει το c συναντά το S σε ένα άπειρο σύνολο.*

Θεώρημα 32 *(Cantor-Bendixson) Έστω Ω ένας τοπολογικός χώρος με μια αριθμήσιμη βάση για τα ανοιχτά του σύνολα. Τότε κάθε υπεραριθμήσιμο κλειστό σύνολο στον Ω περιέχει ένα τέλειο υποσύνολο.*

Απόδειξη

Έστω F ένα υπεραριθμήσιμο κλειστό υποσύνολο του Ω. Διαλέγουμε μία αριθμήσιμη βάση για τα ανοιχτά σύνολα του Ω, ονομάζουμε τα σύνολα της βάσης

$$U_1, U_2, ...$$

Έστω $V_1, V_2, ...$ είναι εκείνα από τα σύνολα $U_1, U_2, ...$ που συναντούν το F σε ένα αριθμήσιμο σύνολο. Οπότε η ακολουθία $V_1, V_2, ...$ ίσως είναι πεπερασμένη ή άπειρη. Γράφουμε

$$P = F \setminus \{\bigcup_i V_i\}$$

Οπότε P κλειστό και

$$F = P \cup \{\bigcup_i V_i \cap F\}$$

Αφού F υπεραριθμήσιμο, όσο

$$\bigcup_i V_i \cap F$$

είναι αριθμήσιμο, σημαίνει ότι το P είναι υπεραριθμήσιμο και έτσι σίγουρα όχι κενό. Μένει να δείξουμε ότι το P είναι από μόνο του πυκνό, είναι βολικό να αποδείξουμε ακόμη, ότι κάθε σημείο του P είναι σημείο συμπύκνωσης του P. Έστω p ένα οποιοδήποτε σημείο του P. Έστω G ένα ανοιχτό σύνολο που περιλαμβάνει το p. Τότε το G είναι η ένωση αυτών των στοιχείων της βάσης που περιέχονται εντός του G. Οπότε για κάποια j έχουμε

$$p \in U_j \subset G.$$

Αν είχαμε $U_j = V_i$ για κάποια i, θα είχαμε

$$p \notin F \setminus \{\bigcup_i V_i\} = P.$$

Από την επιλογή των συνόλων V_i συμπεραίνουμε ότι $F \cap U_j$ είναι υπεραριθμήσιμο. Αφού το P διαφέρει από το F μόνο για ένα αριθμήσιμο σύνολο, άρα το $P \cap U_j$ είναι υπεραριθμήσιμο. Αφού $P \cap U_j \subset P \cap G$, συμπεραίνουμε ότι το $P \cap G$ είναι υπεραριθμήσιμο. Έτσι κάθε σημείο p του P είναι σημείο συμπύκνωσης του P. Οπότε το P είναι σίγουρα πυκνό.

Πόρισμα 13 *Τα σημεία συμπύκνωσης του F αποτελούν ένα τέλειο σύνολο P και είναι σημεία συμπύκνωσης του P.*

Απόδειξη

Στην κατασκευή που χρησιμοποιήθηκε για την απόδειξη του Θεωρήματος ένα σημείο συμπύκνωσης f του F δεν ανήκει σε κανένα σύνολο V_i αλλά παραμένει στο P και γίνεται σημείο συμπύκνωσης του P. Κάθε σημείο του P είναι σημείο συμπύκνωσης του P και κατά μείζονα λόγο του F γιάυτό με αυτό τον τρόπο προκύπτει ως σημείο συμπύκνωσης του F.

Πόρισμα 14 *Κάθε άπειρο σύνολο του Ω περιέχει ένα άπειρο υποσύνολο που είναι πυκνό στον εαυτό του.*

Απόδειξη

Έστω F ένα υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του Ω. Ακολουθούμε τη διαδικασία απόδειξης του Θεωρήματος χωρίς την παρατήρηση ότι το P είναι κλειστό και προκύπτει το ζητούμενο.

Ορισμός 21 *Ένας μετρικός χώρος Ω λέγεται* **πλήρης**, *αν κάθε ακολουθία σημείων $\{x_n\}$ που ικανοποιεί την συνθήκη σύγκλισης Cauchy- για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ένας ακέραιος M_ϵ τέτοιος ώστε για κάθε m, n με $m > n \geq M_\epsilon$ έχουμε $\rho(x_m, x_n) < \epsilon$- συγκλίνει σε κάποιο σημείο του χώρου.*

Ορισμός 22 *Ένας μετρικός χώρος λέγεται* **διαχωρίσιμος** *αν τα ανοιχτά του σύνολα έχουν μετρήσιμη βάση.*

Θεώρημα 33 *Έστω Ω ένας υπεραριθμήσιμος πλήρης διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. Τότε υπάρχει ένα συμπαγές τέλειο υποσύνολο C του Ω και μια συνάρτηση h του $\mathscr{H}_0$ με*

$$0 < \mu^h(C) < +\infty. \qquad (1)$$

Απόδειξη

Αφού ένας μετρικός χώρος είναι πάντα ένας τοπολογικός χώρος μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Cantor-Bendixson για να παρέχουμε ένα τέλειο υποσύνολο P του Ω . Στόχος είναι να διαλέξουμε στο τέλειο σύνολο Π ένα τέλειο υποσύνολο C με τρόπο που θα διευκολύνει την κατασκευή μίας συνάρτησης h του $\mathscr{H}_0$ που να ικανοποιεί την (1) . Η κατασκευή έχει πολλά κοινά σημεία με την κατασκευή του τριαδικού συνόλου του Cantor. Αφού το P είναι τέλειο δεν είναι κενό και μπορούμε να διαλέξουμε σημείο $c(0)$ στο P. Διαλέγουμε έναν θετικό αριθμό r_0. Αφού το P είναι πυκνό ως προς τον εαυτό του μπορούμε να διαλέξουμε ένα δεύτερο σημείο $c(1)$ στο P με

$$0 < \rho(c(0), c(1)) < \frac{1}{4} r_0$$

Υποθέτουμε, για κάποιον ακέραιο $k \geq 1$, έχουμε επιλέξει οικογένειες ξεχωριστών σημείων

$$c(i|r) = c(i_1, i_2, ..., i_r) \ \ (i_1, i_2, ..., i_r = 0 \text{ ή } 1)$$

για $r = 1, 2, ..., k$, να ικανοποιούν

$$0 < \rho(c(i_1, i_2, ..., i_r, 1), c((i_1, i_2, ..., i_r, 0)) < \frac{1}{4} r_r$$

για $0 \leq r < k$, με

$$r_r = \min_{i|r \neq j|r} \rho(c(i|r), c(j|r)), \qquad (2)$$

για $1 \leq r \leq k$. Μετά παίρνουμε

$$c(i_1, i_2, ..., i_k, 0) = c(i_1, i_2, ..., i_k),$$

για $i_1, i_2, ..., i_k = 0$ ή 1, και χρησιμοποιώντας την πυκνότητα του P στον εαυτό του, διαλέγουμε ξεχωριστά σημεία

$$c(i_1, i_2, ..., i_k, 1)$$

στο P με

$$0 < \rho(c(i_1, i_2, ..., i_k, 1), c((i_1, i_2, ..., i_k, 0)) < \frac{1}{4} r_k \qquad (3)$$

Έτσι

$$r_{k+1} = \min_{i|k+1 \neq j|k+1} \rho(c(i|k+1), c(j|k+1)) > 0.$$

Από την (3) έχουμε επίσης

$$r_{k+1} < \frac{1}{4} r_k \qquad (4)$$

Είναι πλέον φανερό ότι αυτά τα σημεία

$$c(i|k) \ \ (i_1, i_2, ..., i_k = 0 \text{ ή } 1)$$

μπορούν να επιλεχθούν επαγωγικά με αυτό τον τρόπο για $k = 1, 2, 3, \ldots$. Για κάθε άπειρη ακολουθία $i = i_1, i_2, \ldots$ των 0 και των 1 μελατάμε την ακολουθία

$$c(i|1), c(i|2), c(i|3), \ldots$$

Αν $t > k$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\rho(c(i|k), c(i|t) &\leq \sum_{r=0}^{t-k-1} \rho(c(i|k+r), c(i|k+r+1)) \\
&= \sum_{r=0}^{t-k-1} \rho(c(i|k+r,0), c(i|k+r+1)) \\
&\leq \sum_{r=0}^{t-k-1} \frac{1}{4} r_{k+r} \\
&\leq \sum_{r=0}^{t-k-1} \frac{1}{4} (\frac{1}{4})^r r_k \\
&< \frac{1}{3} r_k \leq \frac{1}{3} (\frac{1}{4})^{k-1} r_1 \qquad (5)
\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας την (4). Οπότε η ακολουθία είναι μια ακολουθία Cauchy και επομένως συγκλίνει σε ένα σημείο $c(i)$ ας πούμε του Ω. Επιπλέον, αφήνοντας το $t \to \infty$ στην (5) βρίσκουμε

$$\rho(c(i|k), c(i)) \leq \frac{1}{3} r_k. \qquad (6)$$

Παίρνουμε το C να είναι το σύνολο όλων αυτών των σημείων $c(i)$.

Τώρα ας σκεφτούμε δύο διαφορετικές ακολουθίες i, j από 0 και 1. Θα υπάρχει ένας μοναδικός ακέραιος k με

$$i|k-1 = j|k-1, \qquad i_k \neq j_k. \qquad (7)$$

Έπειτα, χρησιμοποιώντας την (2) και την (6),

$$\begin{aligned}
\rho(c(i), c(j)) &\geq \rho(c(i), c(j|k)) - \rho(c(i), (i|k)) - \rho(c(j), c(j|k)) \\
&\geq r_k - \frac{1}{3} r_k - \frac{1}{3} r_k = \frac{1}{3} r_k \qquad (8)
\end{aligned}$$

Αλλά, χρησιμοποιώντας επίσης τις (6) και (7)

$$\rho(c(i), c(j)) \leq \rho(c(i), c(i|k-1)) + \rho(c(j), c(j|k-1))$$

$$\leq \frac{1}{3}r_{k-1} + \frac{1}{3}r_{k-1} = \frac{2}{3}r_{k-1} \qquad (9)$$

Οι ανισότητες (8) και (9) δείχνουν ότι έχουμε κάποιον έλεγχο πάνω στις αποστάσεις μεταξύ τέτοιων σημείων του C . Είναι εύκολο να δείξουμε ότι το C είναι τέλειο. Αν $c \in C$, έχουμε $c = c(i)$ για κάποια ακολουθία i. Παίρνοντας

$$i_t^{(k)} = i_t \ \ (t \neq k)$$

$$i_k^{(k)} = 1 - i_k$$

βρίσκουμε μία ακολουθία διακριτών διανυσμάτων

$$i^{(k)} = i_1^{(k)}, i_2^{(k)}, ... \ (k = 1, 2, ...)$$

Τα αντίστοιχα σημεία

$$c(i^{(k)}) \ \ (k = 1, 2, ...)$$

σχηματίζουν μία ακολουθία από ξεχωριστά σημεία που συγκλίνουν στο $c = c(i)$. Οπότε το C είναι πυκνό στον εαυτό του. Για να αποδείξουμε ότι το C είναι συμπαγές σκεφτόμαστε κάποια ακολουθία $c_1, c_2, ...$, από σημεία του C. Υποθέτουμε ότι

$$c_k = c(i^{(k)})$$

για μία ακολουθία $i^{(k)}$ από 0 και 1 για $k = 1, 2, ...$ Τώρα μπορούμε να διαλέξουμε μία ακολουθία $j = j_1, j_2, ...$ από 0 και 1 και μία ακολουθία από άπειρες υποακολουθίες $R_1, R_2, ...$ των φυσικών αριθμών , επαγωγικά, τέτοιες ώστε

$$R_1 \supset R_2 \supset R_3 \supset ...,$$

$$i_s^{(k)} = j_s \qquad (\text{ για } k \in R_s, s = 1, 2, ...)$$

Το j_1 επιλέγεται ώστε

$$i_1^{(k)} = j_1$$

για απείρως πολλές τιμές του k και το R_1 επιλέγεται για να είναι το σύνολο των ακεραίων k που ικανοποιούν την υπόθεση. Έπειτα όταν το R_s έχει επιλεχθεί, το j_{s+1} επιλέγεται έτσι ώστε

$$i_{s+1}^{(k)} = j_{s+1}$$

για απείρως πολλούς ακέραιους k στο R_s και το R_{s+1} επιλέγεται να είναι το σύνολο αυτών των ακεραίων. Τώρα παίρνουμε την R ώστε είναι η διαγώνια ακολουθία της οποίας το πρώτο στοιχείο n_1 του R_1 και του οποίου το $(s+1)$-ο στοιχείο n_{s+1} είναι το πρώτο στοιχείο στη R_{s+1} που υπερβαίνει το n_s για $s = 1, 2, ...$. Τότε για k στο R που υπερβαίνει το n_s έχουμε

$$k \in R_s \subset R_{s-1} \subset ... \subset R_2 \subset R_1$$

και
$$i^{(k)}|s = j|s$$
έτσι ώστε, χρησιμοποιώντας την (9),
$$\rho(c_k, c(j)) = \rho(c(i^{(k)}), c(j)) \leq \frac{2}{3} r_s.$$
Ως εκ τούτου, το c_k συγκλίνει στο σημείο $c(j)$ του C όσο το k τείνει στο άπειρο μέσω της υπακολουθίας R . Έτσι το C είναι ακολουθιακά συμπαγής και κατά μείζονα λόγο κλειστό. Αφού ο χώρος είναι διαχωρίσιμος, προκύπτει ότι το C είναι συμπαγές. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη ότι το C είναι ένα συμπαγές τέλειο σύνολο. Τώρα επιλέγουμε μία συνάρτηση h του $\mathscr{H}_0$ και θα δείξουμε ότι το $\mu^h(C)$ είναι πεπερασμένο και θετικό. Υπενθυμίζουμε ότι η ακολουθία $r_1, r_2, \ldots$ θετικών αριθμών ικανοποιεί την προυπόθεση
$$r_{k+1} < \frac{1}{4} r_k \ \ (k = 1, 2, \ldots)$$
Οπότε υπάρχουν σίγουρα συναρτήσεις h στο $\mathscr{H}_0$ που ικανοποιούν τις προυποθέσεις
$$h(0) = 0$$
$$h(t) = 2^{-k} (\text{ για } \frac{1}{3} r_k \leq t \leq \frac{2}{3} r_k, k = 1, 2, \ldots)$$
Διαλέγουμε οποιαδήποτε τέτοια συνάρτηση. Έστω $\sum(i|k)$ η κλειστή σφαίρα όλων των σημείων x με
$$\rho(x, c(i|k)) \leq \frac{1}{3} r_k$$
Τότε
$$d(\sum(i|k)) \leq \frac{2}{3} r_k$$
και
$$h(\sum(i|k)) \leq h(\frac{2}{3} r_k) = 2^{-k}$$
Αλλά, από την (6), κάθε σημείο $c(i)$ του C έγκειται στην αντίστοιχη σφαίρα
$$\sum(i|k)$$
Αφού υπάρχουν μόνο 2^k από αυτές τις σφαίρες, έχουμε
$$\mu^h_\delta(C) \leq \sum_{i|k} h(\sum(i|k)) \leq 1$$
για $\delta > \frac{2}{3} r_k$. Άρα
$$\mu^h(C) \leq 1$$

Τώρα υποθέτουμε ότι $/G_i/$ είναι μία ακολουθία από ανοιχτά σύνολα που καλύπτουν το C . Αφού το C είναι συμπαγές μπορούμε να διαλέξουμε έναν ακέραιο N τόσο μεγάλο ώστε

$$C \subset \bigcup_{i=1}^{N} G_i$$

Αφού μετονομάσουμε τα σύνολα και αλλάξουμε το N , μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$G_i \cap C \neq \emptyset \ \ (i = 1, 2, ..., N).$$

Αφού κάθε σημείο του C είναι ένα περιορισμένο σημείο των σημείων που σχηματίζουν $c(i|k)$, μπορούμε να διαλέξουμε έναν ακέραιο k^* τόσο μεγάλο που κάθε σύνολο $G_i, i = 1, 2, ..., N$ θα περιέχει τουλάχιστον δύο από τα σημεία

$$c(i|k^*).$$

Έστω g_i ο αριθμός αυτών των σημείων στο G_i και διαλέγουμε h_i να είναι ο ακέραιος με

$$2^{h_i} < g_i \leq 2^{h_i+1} \ \ (i = 1, 2, ..., N).$$

Τότε υπάρχουν περισσότερα από 2^{h_i} από τα σημεία $c(i|k)$ στο G_i , αλλά το πολύ 2^{h_i} από αυτά τα k^* -διανύσματα $i|k^*$ μπορούν να συμφωνήσουν στις πρώτες τους $k^* - h_i$ συνιστώσες. Ως εκ τούτου μπορούμε να διαλέξουμε i και j με

$$c(i|k^*) \in G_i, \qquad c(j|k^*) \in G_i$$

$$i|(k^* - h_i) \neq j|(k^* - h_i)$$

Από την (8) συμπεραίνουμε ότι

$$d(G_i) \geq \frac{1}{3} r_{k^*-h_i}$$

έτσι ώστε

$$h(G_i) \geq h(\frac{1}{3} r_{k^*-h_i}) = 2^{-k^*+h_i} \geq \frac{1}{2} g_i 2^{-k^*}.$$

Αφού όλος ο αριθμός των σημείων $c(i|k^*)$ που καλύπτεται από τα σύνολα G_i είναι 2^{k^*} συμπεραίνουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{\infty} h(G_i) \geq \sum_{i=1}^{N} h(G_i) \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} g_i 2^{-k^*} \geq \frac{1}{2}.$$

Συμπερασματικά

$$\mu^h(C) \geq \frac{1}{2}$$

και

$$\frac{1}{2} \leq \mu^h(C) \leq 1$$

όπως απαιτήθηκε.

Πόρισμα 15 *Έστω K ένα υπεραριθμήσιμο συμπαγές σύνολο στον μετρικό χώρο Ω. Τότε υπάρχει τέλειο υποσύνολο C του K και μια συνάρτηση h του $\mathscr{H}_0$ με*

$$0 < \mu^h(C) < +\infty.$$

Απόδειξη

Αφού το K είναι πλήρης διαχωρίσιμος μετρικός χώρος με τη μετρική του Ω έχουμε το ζητούμενο.

Πόρισμα 16 *Αν ο Ω είναι πλήρης διαχωρίσιμος μετρικός χώρος με $\mu^h(K) = 0$ για κάθε h στο $\mathscr{H}_0$ και κάθε συμπαγές K στο Ω, τότε το Ω είναι αριθμήσιμο.*

Πόρισμα 17 *Αν το K είναι ένα συμπαγές σύνολο σε έναν μετρικό χώρο και $\mu^h(K) = 0$ για όλα τα h στο $\mathscr{H}_0$ τότε το K είναι αριθμήσιμο.*

Πόρισμα 18 *Αν το A είναι ένα αναλυτικό σύνολο σε έναν μετρικό χώρο και $\mu^h(A) = 0$ για όλα τα h στο $\mathscr{H}_0$ τότε το A είναι αριθμήσιμο.*

Πόρισμα 19 *Έστω Ω ένας πλήρης διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. Τότε υπάρχει ένα Borel κανονικό μετρικό μέτρο μ στον Ω που αποδίδει μηδενικό μέτρο σε κάθε σημείο του Ω, θετικό μέτρο σε κάθε υπεραριθμήσιμο ανοιχτό σύνολο του Ω και πεπερασμένο μέτρο στο Ω.*

Απόδειξη

Διαλέγουμε μια κλειστή βάση $\{V_i\}_{i=1}^{i=\infty}$ για τα ανοιχτά σύνολα του Ω Για κάθε μη μετρήσιμο V_i διαλέγουμε ένα h_i στο $\mathscr{H}_0$ και ένα τέλειο συνολο C_i στο V_i με $\mu^{h_i}(C_i) = 2^{-i}$. Ορίζουμε το μ ως εξής :

$$\mu(E) = \sum \mu^{h_i}(C_i \cap E)$$

το άθροισμα το υπολογίζουμε για τους ακεραίους i για τους οποίους τα V_i είναι μη μετρήσιμα.

Θεώρημα 34 *Έστω h συνάρτηση του $\mathscr{H}_0$. Τότε υπάρχει ένας συμπαγής μετρικός χώρος με*

$$0 < \mu^h(\Omega) < +\infty$$

Απόδειξη

Θα ήταν βολικό να πάρουμε τα σημεία του Ω σαν σημεία ενός συμπαγούς υποσυνόλου ενός κλειστού διαστήματος $I_0 = [0,1]$ της γραμμής των πραγματικών , θα είναι αναγκαίο να ορίσουμε την μετρική στον Ω έτσι ώστε να είναι λίγο διαφορετική από τον συνηθισμένο μετρική της γραμμής των πραγματικών. Για ευκολία, γράφουμε

$$\nu(t) = \left[\frac{1}{h(t)}\right] \ \ (t > 0)$$

η τετράγωνη αγκύλη είναι η «ακέραια» συνάρτηση που χρησιμοποιείται στη θεωρία των αριθμών. Επειδή

$$h(t) \to 0 \ \text{καθώς} \ t \to 0$$

μπορούμε να διαλέξουμε $t_0 > 0$ έτσι ώστε

$$\nu(t_0 \geq 2$$

και μπορούμε να διαλέξουμε έπειτα $t_1, t_2, ...$ επαγωγικά έτσι ώστε

$$h(t_r \leq r{-}s \qquad (r = 1, 2, ...) \qquad (10)$$

$$\nu(t_r) \geq (r^2 + 1)\nu(t_{r-1}) \qquad (r = 1, 2, ...) \qquad (11)$$

Γράφουμε $n(r) = \nu(t_r)$ και

$$\lambda_r = \left[\frac{\nu(t_r)}{\nu(t_{r-1})}\right] = \left[\frac{n(r)}{n(r-1)}\right] \ \ (r = 1, 2, ...)$$

τότε

$$\lambda_r \geq r^2 + 1 \qquad (12)$$

και

$$n(r) = \lambda_r n(r-1) + \mu_r \qquad (r = 1, 2, ...) \qquad (13)$$

όπου $0 \leq \mu_r < n(r-1)$ Κάνουμε μία επαγωγική επιλογή από συστήματα των κλειστών υπο-διαστημάτων του I_0 . Για $r = 1, 2, ...,$ θα υπάρχει $n(r)$ ξένων υποδιαστημάτων

$$J_i^r \qquad (i = 1, 2, ..., n(1)) \qquad (14)$$

Το σύστημα $J_i^{(1)}(i = 1, 2, ..., n(1))$ των ξένων υπο-διαστημάτων ίδιου μήκους επιλέγονται αυθαίρετα. Όταν το σύστημα (14) έχει επιλεχθεί για ένα συγκεκριμένο θετικό ακέραιο r , το σύστημα των ξένων κλειστών υπο-διαστημάτων ίδιου μήκους

$$J_i^{(r+1)} \qquad (i = 1, 2, ..., n(r+1))$$

επιλέγεται αυθαίρετα ανάλογα με τις συνθήκες ότι μ_{r+1} των διαστημάτων $J_i^{(r)}$ περιέχουν ακριβώς $\lambda_{r+1}{+}1$ από τα διαστήματα $J_i^{(r+1)}$ και ότι τα εναπομείναντα $n(r){-}\mu_{r+1}$

των διαστημάτων $J_i^{(r)}$ περιέχουν ακριβώς λ_{r+1} διαστήματα $J_i^{(r+1)}$. Από την (13), αυτό υπολογίζει για όλα τα διαστήματα $J_i^{(r+1)}$, έτσι ώστε καθένα από αυτά τα διαστήματα να βρίσκεται σε ένα από τα διαστήματα $J_i^{(r)}$. Έχοντας κάνει τέτοια επιλογή απο συστήματα διαστημάτων, παίρνουμε το Ω να είναι το σύνολο

$$\bigcap_{r=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{n(r)} J_i^{(r)}$$

πραγματικών αριθμών. Ως σύνολο πραγματικών αριθμών, το Ω είναι συμπαγές και τέλειο.

Ορίζουμε τώρα μια μετρική ρ στο Ω . Παίρνουμε $\rho(x,x) = 0$, όπως πρέπει, για όλα τα x στο Ω . Αν x, y ξεχωριστά σημεία του Ω ,τότε είναι πραγματικοί αριθμοί με θετική απόσταση μεταξύ τους. Για κάθε r , και το x και το y ανήκουν στο

$$\bigcup_{i=1}^{n(r)} J_i^{(r)}$$

Αυτά τα υπο-διαστήματα έχουν όλα το ίδιο μήκος, και τείνουν στο μηδέν όταν το r τείνει στο άπειρο. Έτσι όταν το r είναι αρκετά μεγάλο το x και το y ανήκουν σε διαφορετικά διαστήματα $J_i^{(r)}$. Έστω $r(x,y)$ ο μεγαλύτερος ακέραιος r για τον οποίο τα x και y βρίσκονται στο ίδιο υπο-διάστημα $J_i^{(r)}$, με την σύμβαση ότι υπάρχει μόνο ένα υπο-διάστημα $J_1^{(0)} = I_0$ μηδενικής τάξης , και ορίζουμε

$$\rho(x,y) = t_{r(x,y)}$$

Είναι εύκολο να επαληθεύσουμε ότι η συνάρτηση $\rho(x,y)$ ορίζεται στο Ω με τρόπο που ικανοποιεί τις προυποθέσεις για μια μετρική. Τώρα το Ω έχει δύο τοπολογίες, τη σχετική τοπολογία ως ένα υποσύνολο της γραμμής των πραγματικών, και τη μετρική τοπολογία που ορίζεται από τη μετρική ρ . Θα δείξουμε ότι αυτές οι δύο τοπολογίες συμπίπτουν. Πρώτα υποθέτουμε ότι το G είναι ένα υποσύνολο του Ω που είναι ανοιχτό κάτω απο τη σχετική τοπολογία. Τότε $G = \Omega \cap H$ όπου το H είναι κάποιο ανοιχτό υποσύνολο του $[0,1]$. Έστω x ένα σημείο του G . Τότε $x \in G \subset H$. Οπότε για κάποια $\delta > 0$, όλα τα σημεία y του $[0,1]$ με $|x-y| < \delta$ ανήκουν στο H και συνεπώς όλα τα σημεία y του Ω με $|x-y| < \delta$ θα ανήκουν στο G . Τώρα μπορούμε να διαλέξουμε τόσο μεγάλο r που όλα τα διαστήματα $J_i^{(r)}$ θα έχουν μήκος μικρότερο από δ . Τότε όλα τα σημεία y του Ω με

$$\rho(x,y) \leq t_r$$

θα βρίσκονται στο ίδιο διάστημα $J_i^{(r)}$ όπως το x , και επομένως θα ικανοποιούν το $|x-y| < \delta$ και θα ανήκουν στο G . Έτσι κάθε σημείο του G είναι εσωτερικό σημείο του G υπό τη μετρική ρ και επομένως το G είναι ανοιχτό κάτω από τη ρ . Τώρα υποθέτουμε ότι το G είναι ένα σύνολο του Ω που είναι ανοιχτό κάτω από τη μετρική τοπολογία. Γράφουμε

$$H = G \cup \{[0,1] \setminus \Omega\}.$$

Τότε $G = \Omega \cap H$ και το G θα είναι ανοιχτό στη σχετική τοπολογία αφού το H είναι ανοιχτό σαν υποσύνολο του $[0,1]$. Θεωρούμε οποιοδήποτε σημείο x του H . Αν

$$x \in \{[0,1] \setminus \Omega\}$$

τότε το x είναι ένα εσωτερικό σημείο του H , αφού το Ω είναι κλειστό υποσύνολο του $[0,1]$. Αν $x \in G$, μπορούμε να διαλέξουμε r τόσο μεγάλο που όλα τα σημεία y του Ω με

$$\rho(x,y) \leq t_r$$

θα βρίσκονται στο G . Έστω ότι το x βρίσκεται σε συγκεγκριμένο διάστημα $J_{i^*}^{(r)}$ τάξης r . Τότε όλα τα σημεία y του $[0,1]$ είναι επαρκώς κοντά στο x και βρίσκονται είτε στο $[0,1] \setminus \Omega$ ή στο $J_{i^*}^{(r)}$. Στην πρώτη περίπτωση

$$y \in [0,1] \setminus \Omega \subset H$$

και στη δεύτερη περίπτωση $\rho(x,y) \leq t_r$ και

$$y \in G \subset H$$

Ως εκ τούτου το H είναι ανοιχτό. Αυτό φανερώνει ότι οι δύο τοπολογίες στο Ω συμπίπτουν.

Τώρα αφού το Ω ένα κλειστό υποσύνολο του $[0,1]$ θα είναι ένας συμπαγής μετρικός χώρος κάτω από τη σχετική του τοπολογία. Συνεπώς το Ω είναι ένας συμπαγής μετρικός χώρος κάτω από τη μετρική του ρ.

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι το Ω έχει πεπερασμένο μ^h - μέτρο. Το Ω καλύπτεται από το πεπερασμένο σύστημα των συνόλων

$$\Omega \cap J_i^{(r)} \qquad (i = 1, 2, ..., n(r))$$

για κάθε r . Αλλά η διάμετρος του $\Omega \cap J_i^{(r)}$ είναι t_r αφού υπάρχουν σημεία αυτού του συνόλου σε διαφορετικά διαστήματα $J_i^{(r+1)}$. Οπότε, δεδομένου ότι $0 < t_r \leq \delta$, έχουμε

$$\mu_\delta^h(\Omega) \leq \sum_{i=1}^{n(r)} h(\Omega \cap J_i^{(r)}) = n(r)h(t_r) \leq \nu(t_r)h(t_r) = \left[\frac{1}{h(t_r)}\right] h(t_r) \leq 1.$$

Για $\delta > 0$ που μας έχει δοθεί, η συνθήκη $0 < t_r \leq \delta$ ικανοποιείται όσο το r είναι επαρκώς μεγάλο. Ως εκ τούτου $\mu_\delta^h(\Omega) \leq 1$, για όλα τα $\delta > 0$, και έτσι

$\mu^h(\Omega) \leq 1$. Για να αποδείξουμε ότι το Ω έχει θετικό μ^h -μέτρο χρησιμοποιούμε μία συνηθισμένη μέθοδο. Υποθέτουμε ότι μας δίνεται ένας θετικός ακέραιος R. Διαλέγουμε $\delta = \delta(R)$ τόσο μικρό ώστε $0 < \delta < t_R$. Θεωρούμε μία κάλυψη του Ω από μία ακολουθία $\{G_j\}$ ανοιχτών συνόλων με

$$\Omega \subset \cup G_j \qquad d(G_j) \leq \delta.$$

Αναζητούμε ένα μικρότερο φράγμα για το άθροισμα

$$\sum_{j=1}^{\infty} h(G_j).$$

Αφού το Ω είναι συμπαγές μπορούμε να εστιάσουμε την προσοχή μας σε ένα πεπερασμένο σύστημα συνόλων , ας πούμε τα σύνολα $G_1, G_2, ..., G_N$ με

$$\Omega \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} G_j \qquad d(G_j) \leq \delta.$$

Αφού οι μόνες πιθανές θετικές αποστάσεις μεταξύ των σημείων του Ω είναι οι αριθμοί στη γνησίως φθίνουσα ακολουθία

$$t_1, t_2, ...,$$

η διάμετρος του κάθε συνόλου στο Ω είναι μία επιτυχημένη απόσταση μεταξύ δύο σημείων του συνόλου. Αφού το Ω είναι ένα τέλειο υποσύνολο του $[0,1]$ και G_j ανοιχτό στο Ω , το G_j έχει θετική διάμετρο. Υποθέτουμε ότι το G_j έχει διάμετρο $t_{r(j)}$. Τότε θα υπάρχουν δύο σημεία του G_j στο ίδιο διάστημα $J_i^{(r(j))}$ που θα βρίσκονται σε διαφορετικά διαστήματα $J_i^{(r(j)+1)}$. Επιπλέον όλα τα σημεία του G_j πρέπει να βρίσκονται στο μοναδικό διάστημα $J_{i(j)}^{(r(j))}$. Έτσι

$$G_j \subset J_{i(j)}^{(r(j))} \text{ και } d(G_j) = d(J_{i(j)}^{(r(j))}).$$

Έτσι θα ικανοποιήσει τον σκοπό μας να εξασφαλίσουμε ένα μικρότερο φράγμα για

$$\sum_{i=1}^{N} h(J_{i(j)}^{(r(j))})$$

για όλες τις ακολουθίες

$$J_{i(j)}^{(r(j))} \ (j = 1, 2, ..., N)$$

υπό την προϋπόθεση

$$\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{N} J_{i(j)}^{(r(j))} \qquad (d(J_{i(j)}^{(r(j))}) \leq \delta)$$

Την υπόθεση $d(J_{i(j)}^{(r(j))}) \leq \delta$ την αντικαθιστούμε με την πιο αδύναμη υπόθεση

$$d(J_{i(j)}^{(r(j))}) \leq t_R,$$

που είναι ισοδύναμη με

$$t_{r(j)} \leq t_R$$

ή την

$$r(j) \geq R$$

Αλλά, αν δύο από τα διαστήματα $J_{i(j)}^{(r(j))}$ συναντιούνται, τότε το ένα θα πρέπει να περιέχεται στο άλλο και έτσι θα είναι περριτό για την κάλυψη. Οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι όλα τα σύνολα $J_{i(j)}^{(r(j))}$ είναι ξένα. Γράφουμε

$$r = \underset{1 \leq j \leq N}{max}\, r(j),$$

και έστω $I_1, I_2, ..., I_S$ τα διαστήματα τάξης r μεταξύ των διαστημάτων $J_{i(j)}^{(r(j))}, j = 1, 2, ..., N$. Προφανώς αυτά τα διαστήματα $I_1, I_2, ..., I_S$ πρέπει να είναι τα σύνολα τάξης r που βρίσκονται σε κάποιο σύνολο $K_1, K_2, ..., K_t$ από διαστήματα τάξης $r-1$. Αφού κάθε διάστημα τάξης $r-1$ περιέχει είτε λ_r είτε λ_r+1 διαστήματα τάξης r συμπεραινουμε ότι $s \geq \lambda_r t$ και

$$\sum_{i=1}^{\infty} \geq sh(t_r) \geq \lambda_r h(t_r)t = \lambda_r \frac{h(t_r)}{h(t_{r-1})} \sum_{i=1}^{t} h(K_i).$$

Αλλά

$$\begin{aligned}
\lambda_r \frac{h(t_r)}{h(t_{r-1})} &= (\lambda_r + 1)\frac{1}{1+(\lambda_r)^{-1}} \frac{h(t_r)}{h(t_{r-1})} \\
&\geq \frac{\nu(t_r)}{\nu(t_{r-1})} \frac{1}{1+r^{-2}} \frac{h(t_r)}{h(t_{r-1})} \\
&= \frac{h(t_r)[1/h(t_r)]}{h(t_{r-1})[1/h(t_{r-1})]} \frac{1}{1+r^{-2}} \\
&\geq h(t_r)\{\frac{1}{h(t_r)} - 1\}\frac{1}{1+r^{-2}} \\
&= (1-h(t_r))/(1+r^{-2}) \\
&\geq (1-r^{-2})/(1+r^{-2}) \\
&> (1-r^{-2})^2
\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας τις (12) και (10). Ως εκ τούτου

$$\sum_{i=1}^{\infty} \geq (1-r^{-2})^2 \sum_{i=1}^{t} h(K_i).$$

Αντικαθιστώντας τα διαστήματα $I_1, ..., I_s$ από τα διαστήματα $K_1, ..., K_t$, αντικαθιστούμε το σύστημα $J_{i(j)}^{(r(j))}$ $j = 1, 2, ..., N$ ξένων διαστημάτων που καλύπτουν το Ω και έχουν τάξεις μεταξύ R και r, με ένα όμοιο σύνολο διαστημάτων με τάξεις R και $r-1$, και το άθροισμα των h-τιμών του αρχικού συστήματος θα είναι τουλάχιστον $(1-r^{-2})^2$ φορές το άθροισμα h-τιμών του νέου συστήματος. Μετά από $R-r$ αντικαταστάσεις αυτού του τύπου παίρνουμε το σύστημα διαστημάτων $J_i^{(R)}$ $(i = 1, 2, ..., n(R))$. Ως εκ τούτου

$$\sum_{j=1}^{N} h(J_{i(j)}^{(r(j))}) \geq \{ \prod_{s=R+1}^{r} (1-s^{-2})^2 \} \sum_{i=1}^{n(R)} h(J_i^{(R)})$$

$$= \{ \prod_{s=R+1}^{r} (1-s^{-2})^2 \} n(R) h(t_R)$$

$$= \{ \prod_{s=R+1}^{r} (1-s^{-2})^2 \} [1/h(t_R)] h(t_R)$$

$$\geq \prod_{s=R}^{\infty} (1-s^{-2})^2$$

Συμπερασματικά

$$\mu^h(\Omega) \geq \prod_{s=R}^{\infty} (1-s^{-2})^2$$

Αφού αυτό ισχύει για κάθε $R \geq 2$ συμπεραίνουμε ότι $\mu^h(\Omega) \geq 1$. Έτσι $\mu^h(\Omega) = 1$ όπως απαιτήθηκε.

Τα επόμενα θεωρήματα βασίζονται σε κάποιους ορισμούς.

Ορισμός 23 *Ένα σημείο a σε έναν χώρο Ω λέγεται* **μεμονωμένο** *αν το σύνολο $\{a\}$ είναι ανοιχτό.*

Ορισμός 24 *Ένα σύνολο N σε έναν χώρο Ω λέγεται* **πουθενά πυκνό** *αν κάθε μη κενό ανοιχτό σύνολο G του Ω περιέχει ένα μη κενό ανοιχτό υποσύνολο που δεν συναντά το N.*

Ορισμός 25 *Ένα σύνολο N σε έναν χώρο Ω λέγεται* **πρώτης κατηγορίας** *αν είναι μια μετρήσιμη ένωση πουθενά πυκνών συνόλων,διαφορετικά λέγεται δεύτερης κατηγορίας.*

Ορισμός 26 *Ένα σύνολο C λέγεται πως είναι* **συγκεντρωμένο σε ένα σύνολο** *D αν κάθε ανοιχτό σύνολο που περιέχει το D περιέχει όλα τα σημεία του C με το πολύ εναν μετρήσιμο αριθμό εξαιρέσεων.*

Θεώρημα 35 *Έστω Ω ένας πλήρης διαχωρίσιμος μετρικός χώρος χωρίς μεμονωμένο σημείο. Από την υπόθεση του συνεχούς υπάρχει ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο C στο Ω που είναι συγκεντρωμένο σε ένα αριθμήσιμο σύνολο D του Ω.*

Απόδειξη

Αφού ο Ω είναι διαχωρίσιμος, προκύπτει άμεσα από τον ορισμό 22 ότι μπορούμε να διαλέξουμε μια μετρήσιμη βάση $V_1, V_2, ...$ για τα ανοιχτά σύνολα.Μπορούμε να υποθέσουμε ότι για κάθε i $V_i \neq \emptyset$ και μπορούμε να διαλέξουμε ένα σημείο d_i στο V_i για κάθε i. Παίρνουμε το D ως το μετρήσιμο συνολο όλων των σημείων

$$d_i \ \ (i = 1, 2, ...)$$

Αρχικά σημειώνουμε ότι αν ένα σύνολο Α του Ω περιέχει ένα μοναδικό σημείο α του Ω, τότε το Α είναι πουθενά πυκνό στον Ω. Θεωρούμε ένα μη κενό ανοιχτό σύνολο G στον Ω. Αν $\alpha \notin G$ το μη κενό ανοιχτό υποσύνολο G του G συναντά το Α. Αν $\alpha \in G$, αφού το α δεν είναι απομονωμένο σημείο του Ω, υπάρχει ένα σημείο b στο G διαφορετικό του α. Τότε για όλα τα αρκετά μικρά θετικά ϵ η σφαίρα $S(b, \epsilon)$ των σημείων x με $\rho(x, b) < \epsilon$ είναι ένα μη κενό ανοιχτό υποσύνολο του G που δεν συναντά το Α. Έτσι το Α είναι πουθενά πυκνό στο Ω.

Τώρα θεωρούμε την κλάση $\mathscr{R}$ όλων των ανοιχτών συνόλων που περιέχουν το μετρήσιμο σύνολο D. Θα δείξουμε ότι αν $R \in \mathscr{R}$ τότε το $\Omega \setminus R$ είναι πουθενά πυκνό στο Ω. Υποθέτουμε ότι $R \in \mathscr{R}$ και ότι το G είναι ένα μη κενό ανοιχτό συνολο του Ω. Τότε για κάποιον ακέραιο i έχουμε

$$d_i \in V_i \subset G.$$

Τότε

$$d_i \in D \subset R.$$

Άρα το $G \cap R$ είναι ένα μη κενό ανοιχτό υποσύνολο του G που δεν συναντά το $\Omega \setminus R$. Έτσι το $\Omega \setminus R$ είναι πουθενά πυκνό στον Ω.

Κάθε ανοιχτό σύνολο G του Ω είναι της μορφής

$$G = \bigcup_{V_i \subset G} V_i$$

και συνεπώς είναι της μορφής

$$G = \bigcup_{j} V_{i(j)},$$

όπου $i(1), i(2), ...$ είναι η πεπερασμένη ή άπειρη ακολουθία εκείνων των ακεραίων i με $V_i \subset G$. Έτσι το ανοιχτό σύνολο G προσδιορίζεται από την ακολουθία $i(1), i(2), ...$ Ως εκ τούτου, ο πληθάριθμος της κλάσης $\mathscr{G}$ των ανοιχτών συνόλων και κατά μείζονα λόγο ο πληθάριθμος της κλάσης $\mathscr{R}$ είναι το πολύ ο πληθάριθμος c του συνεχούς.

Έστω ω ο ελάχιστος αριθμός με πληθάριθμο ίσο με εκείνον του $\mathscr{R}$. Τότε τα σύνολα του $\mathscr{R}$ μπορούν να οργανωθούν μέσω μιας υπερπεπερασμένης ακολουθίας

$$R_\tau \ \ (\tau < \omega)$$

Αφού λαμβάνουμε τη υπόθεση του συνεχούς, κάθε αριθμός τ μικρότερος από ω έχει πληθάριθμο μικρότερο από c και έτσι έχει έναν πεπερασμένο πληθάριθμο ή τον πληθάριθμο $\mathscr{N}_0$ των ακεραίων. Έτσι για κάθε $\tau < \omega$, ο αριθμός των συνόλων R_σ, με $\sigma < \tau$ είναι μετρήσιμος.

Τώρα διαλέγουμε μια υπερπεπερασμένη ακολουθία

$$x_\tau \ \ (\tau < \omega)$$

σημείων.Παίρνουμε το x_1 ως ένα οποιοδήποτε σημείο του R_1. Υποθέτουμε ότι το τ είναι οποιοσδηποτε αριθμός μικρότερος από ω και ότι το x_σ έχει επιλεχθεί για όλους τους αριθμούς σ που είναι μικρότεροι του τ με τέτοιο τρόπο ώστε να εξασφαλίζεται ότι :

$$(a)\ x_\sigma \in \bigcap_{\kappa \leq \sigma} R_\kappa \ \ (\text{ για } \sigma < \tau),$$

$$(b)\ x_\kappa \neq x_\sigma \ \ (\text{ για } \kappa < \sigma < \tau).$$

Θα περιγράψουμε πως επιλέγεται ένα κατάλληλο σημείο x_τ.Θεωρούμε το σύνολο

$$E_\tau = (\cup_{\sigma<\tau}\{x_\sigma\}) \cup (\bigcup_{\sigma \leq \tau}(\Omega \setminus R_\sigma))$$

εκείνων των σημείων που πρέπει να αποφύγουμε όταν διαλέγουμε το x_τ. Αφού έχουμε δείξει ότι κάθε μονοσύνολο και κάθε σύνολο $\Omega \setminus R$ με $R \in \mathscr{R}$ είναι πουθενά πυκνά σύνολα και αφού το τ είναι μικρότερο από ω και είναι μετρήσιμος αριθμός, προκύπτει ότι το E_τ είναι μια μετρήσιμη ένωση πουθενά πυκνών συνόλων. Ως εκ τούτου από το Θεώρημα κατηγορίας του Baire, το E_τ δεν εξαντλεί ολόκληρο τον χώρο Ω και μπορούμε να διαλέξουμε ένα σημείο x_τ όχι όμως στον E_τ.

Με αυτή την επιλογή

$$(a)\ x_r \in \bigcap_{\kappa \leq \tau} R_\kappa \ \ (\text{ για } \sigma \leq \tau),$$

$$(b)\ x_\kappa \neq x_\sigma \ \ (\text{ για } \kappa < \sigma \leq \tau).$$

Με αυτόν τον τρόπο ολόκληρη η υπερπεπερασμένη ακολουθία

$$x_\tau \quad (\tau < \omega)$$

μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε

$$(a)\; x_r \in \bigcap_{\sigma \leq \tau} R_\sigma \;\text{ (για } \tau < \omega),$$

$$(b)\; x_\sigma \neq x_\tau \;\text{ (για } \sigma < \tau < \omega).$$

Τώρα παίρνουμε

$$C = \bigcup_{\tau < \omega} \{x_\tau\}$$

και αποδεικνύουμε ότι το C ικανοποιεί τις απαιτήσεις μας. Για να αποδείξουμε ότι το C είναι μη μετρήσιμο αρκεί να αποδείξουμε ότι το ω είναι μη μετρήσιμο,για παράδειγμα ότι η κλάση $\mathscr{R}$ είναι μη μετρήσιμη. Τώρα αφού το x δεν είναι στο μετρήσιμο σύνολο D, το σύνολο $\Omega \setminus \{x\}$ είναι στο $\mathscr{R}$ και διαφορετικά σημεία x που δεν είναι στο D οδηγούν σε διαφορετικά σύνολα $\Omega \setminus \{x\}$ στο $\mathscr{R}$. Οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι το $\Omega \setminus D$ είναι μη μετρήσιμο ή ότι το Ω είναι μη μετρήσιμο. Αλλά αν το Ω ήταν μετρήσιμο, θα ήταν μια μετρήσιμη ένωση μονοσυνόλων και συνεπώς μια μετρήσιμη ένωση πουθενά πυκνών συνόλων σε αντίθεση με το Θεώρημα κατηγορίας του Baire. Ως εκ τούτου, το C είναι μη μετρήσιμο.
Τώρα υποθέτουμε ότο R είναι ένα οποιοδήποτε ανοιχτό συνολο που περιέχει το D. Τότε $R = R_\sigma$ για κάποιον τακτικό σ μικρότερο από ω. Τότε από την επιλογή μας από σημεία x_τ με $\sigma \leq \tau < \omega$ έχουμε

$$x_\tau \in R_\sigma \;\text{ (για } \sigma \leq \tau \leq \omega)$$

Οπότε τα μόνα σημεία του C που δεν είναι στο $R = R_\sigma$ ανήκουν στο μετρήσιμο σύνολο των σημείων x_κ με $1 \leq \kappa < \sigma$. Έτσι το C είναι συγκεντρωμένο στο μετρήσιμο σύνολο D όπως απαιτήθηκε.

Εδώ θα παρουσιάσουμε συνοπτικά την απόδειξη του Θεωρήματος κατηγορίας του Baire που χρησιμοποιήσαμε στην παραπάνω απόδειξη. Αυτό το διάσημο θεώρημα υποστηρίζει πως ένας μη κενός πλήρης μετρικός χώρος ειναι δεύτερης κατηγορίας. Υποθέτουμε ότι ο Ω ήταν ένας μη κενός πλήρης μετρικός χώρος που ήταν μια μετρήσιμη ένωση

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$$

πουθενά πυκνών συνόλων $N_n, n = 1, 2, ...$ ίσως κάποιο σύνολο να επαναλαμβάνεται απείρως συχνά στην ένωση. Αφού το N_1 είναι πουθενά πυκνό στον Ω υπάρχει ένα μη κενό ανοιχτό συνολο G_1 που δεν συναντά το N_1. Οπότε για κάποιες ακτίνες $r1$ μικρότερες από 1 και για κάποιο σημείο x_1 η κλειστή σφαίρα $\sum(x_1, r_1)$ σημείων x με $\rho(x, x_1) \leq r_1$ δεν συναντά το N_1. Αφού η σφαίρα $\sum(x_1, r_1)$ σημείων x με $\rho(x, x_1) < r_1$ είναι μη κενή και ανοιχτή και το N_2 είναι πουθενά πυκνό, υπάρχει ακτίνα r_2 μικρότερη από $\frac{1}{2}$ και ένα σημείο x_2 έτσι ώστε η κλειστή σφαίρα $\sum(x_2, r_2)$ να περιέχεται στην $\sum(x_1, r_1)$ αλλά να μην συναντά το N_2.Ακολουθώντας τη διαδικασία επαγωγικά κατασκευάζουμε μια ακολουθία απο σημεία $x_1, x_2, ...$ μια ακολουθία θετικών αριθμών $r_1, r_2, ...$ που τείνει στο 0 ορίζοντας μια εμφωλευμένη ακολουθία

$$\sum(x_1, r_1), \ \sum(x_2, r_2), ...$$

κλειστών σφαιρών με

$$\sum(x_1, r_1) \supset \sum(x_2, r_2) \supset ...$$
$$\sum(x_i, r_i) \cap N_i = \emptyset \ \ (i = 1, 2, ...)$$

Αφού ο Ω είναι πλήρης υπάρχει ένα σημείο x κοινό σε όλες τις σφαίρες

$$\sum(x_i, r_i) \ \ (i = 1, 2, ...)$$

το οποίο δεν βρίσκεται σε κανένα από τα σύνολα N_i $(i = 1, 2, ...)$ και συνεπώς δεν ανήκει στο Ω. Αυτή η αντίφαση αποδεικνύει το Θεώρημα.

Θεώρημα 36 *Έστω C ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο σε έναν μετρικό χώρο Ω που είναι συγκεντρωμένο σε ένα αριθμήσιμο σύνολο. Τότε $\mu^h(C) = 0$ για όλα τα h του $\mathscr{H}_0$.*

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι το C είναι συγκεντρωμένο στο αριθμήσιμο σύνολο D. Έστω $d_1, d_2, ...$ μια απαρίθμηση σημείων του D. Έστω h μια συνάρτηση του $\mathscr{H}_0$ και έστω ότι μας δίνονται $\epsilon > 0, \delta > 0$.Το $h(t) \to 0$ καθώς το $t \to 0$, διαλέγουμε μια ακολουθία $r_1, r_2, ...$ ακτίνων ώστε

$$2r_i < \delta \qquad (i = 1, 2, ...)$$
$$\sum_{i=1}^{\infty} h(2r_i) < \frac{1}{2}\epsilon.$$

Θεώρημα 37 *Έστω Ω ένας πλήρης διαχωρίσιμος μετρικός χώρος χωρίς μεμονωμένο σημείο. Από την υπόθεση του συνεχούς υπάρχει ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο C στο Ω με $\mu^h(C) = 0$ για όλα τα h στο $\mathscr{H}_0$.*

Απόδειξη του Θεωρήματος 37

Το αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα από τον συνδυασμό των Θεωρημάτων 35 και 36.

3.4 Θεωρήματα Σύγκρισης

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε θεωρήματα που συγκρίνουν τα μέτρα Hausdorff που αντιστοιχούν σε διαφορετικές συναρτήσεις στον $\mathscr{H}$. Παρουσιάζουμε μια μερική διάταξη στην οικογένεια $\mathscr{H}$ γράφοντας

$$g \prec h$$

και λέγοντας ότι η g αντιστοιχεί σε μια μικρότερη γενικευμένη διάσταση από την h αν

$$h(t)/g(t) \to 0 \text{ καθώς } t \to 0.$$

Αυτή η μερική διάταξη δεν είναι ολική αφού υπάρχουν συναρτήσεις g, h στον $\mathscr{H}$ για τις οποίες και οι δύο λόγοι $h(t)/g(t), g(t)/h(t)$ ταλαντεύονται καθώς το t τείνει στο μηδέν. Όντως υπάρχουν τέτοιες συναρτήσεις με

$$\underset{t\to 0}{liminf} h(t)/g(t) = 0, \qquad \underset{t\to 0}{limsup} h(t)/g(t) = +\infty.$$

Αν και δεν θα οδηγούσαν στα ίδια μέτρα οι συναρτήσεις h, g με την ιδιότητα

$$0 < \underset{t\to 0}{liminf} h(t)/g(t) \le \underset{t\to 0}{limsup} h(t)/g(t) < +\infty,$$

θα θεωρούνται ουσιαστικά ισοδύναμες.

Ορισμός 27 *Αν ένα μέτρο ορίζεται στον μετρικό χώρο Ω, τότε το σύνολο στο Ω λέγεται πως είναι σ-πεπερασμένο μέτρο αν μπορεί να εκφραστεί κατα κάποιον τρόπο ως ένωση συνόλων με πεπερασμένο μέτρο, διαφορετικά λέγεται πως είναι σ- μη πεπερασμένο μέτρο.*

Θεώρημα 38 *Έστω g, h είναι συναρτήσεις στο$\mathscr{H}$ με $g \prec h$. Αν ένα σύνολο E σε έναν μετρικό χώρο Ω έχει σ-πεπερασμένο μ^g-μέτρο , έχει μηδενικό μ^h-μέτρο.*

Απόδειξη

Πρώτα υποθέτουμε ότι το E είναι ένα σύνολο στον Ω με μ^g- μέτρο. Έστω $\mu^g(E) = M$. Έστω ότι μας δίνονται $\epsilon > 0$ και $\delta > 0$.Το

$$h(t)/g(t) \to 0 \qquad \text{καθώς} \qquad t \to 0,$$

διαλέγουμε t_0 χωρίς $0 < t_0 < \delta$ έτσι ώστε

$$\frac{h(t)}{g(t)} < \frac{\epsilon}{M+1} \qquad \text{για} \qquad 0 < t \le t_0.$$

Διαλέγουμε μια κάλυψη $\{S_i\}$ του E που να ικανοποιεί

$$E \subset \bigcup S_i, \qquad d(S_i) \leq t_0, \qquad \sum g(S_i) < M + 1.$$

Τώρα από την υπόθεση $g \prec h$ συνεπάγεται ότι $h(0) = 0$. Οπότε

$$h(t) \leq \frac{\epsilon}{M+1} g(t) \qquad (\text{για } 0 \leq t \leq t_0)$$

και

$$h(t) \leq \frac{\epsilon}{M+1} g(S_i) \qquad (\text{για } i = 1, 2, ...),$$

αφού $d(S_i) \leq t_0$ για $i = 1, 2, ...$. Ως εκ τούτου

$$\sum_{i=1}^{\infty} h(S_i) \leq \frac{\epsilon}{M+1} \sum_{i=1}^{\infty} g(S_i) < \epsilon,$$

και

$$E \subset \bigcup S_i, \qquad d(S_i) \leq \delta.$$

Έτσι

$$\mu_{\delta}^{h}(E) < \epsilon.$$

Αφού τα ϵ, δ είναι τυχαίοι θετικοί αριθμοί συνεπάγεται ότι $\mu^h(E) = 0$. Τώρα αν το E έχει σ-πεπερασμένο μ^g-μέτρο, $E = \bigcup_{i=1}^{i=\infty} E_i$, για κάποια ακολουθία $\{E_i\}$ συνόλων πεπερασμένου μ^g-μέτρου. Από την τελευταία παράγραφο κάθε σύνολο E_i είναι μηδενικού μ^h- μέτρου. Ως εκ τούτου

$$\mu^h(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^h(E_i) = 0$$

και $\mu^h(E) = 0$ όπως ζητήθηκε.

Πόρισμα 20 *Έστω f, g, h συναρτήσεις στο $\mathscr{H}$ με $f \prec g \prec h$. Αν ένα σύνολο E σε έναν μετρικό χώρο Ω έχει σ-πεπερασμένο θετικό μ^g-μέτρο,τότε το E έχει μηδενικό μ^h-μέτρο και σ-μη πεπερασμένο μ^f-μέτρο.*

Απόδειξη

Αφού το E έχει σ-πεπερασμένο μ^g-μέτρο, προκύπτει από το θεώρημα ότι το E έχει μηδενικό μ^h-μέτρο. Αν το E είχε σ-πεπερασμένο μ^f-μέτρο, θα προέκυπτε από το θεώρημα ότι το E θα είχε μηδενικό μ^g-μέτρο, ως εκ τούτου το E πρέπει να έχει σ-μη πεπερασμένο μ^f-μέτρο.

Η θεωρία των μέτρων Hausdorff θα ήταν πιο ικανοποιητική αν μπορούσαμε πάντα να συγκρίνουμε δύο σύνολα στον ίδιο χώρο και να πούμε ότι το ένα πρέπει να είναι μικρότερο από το άλλο από την οπτική γωνία των μέτρων Hausdorff. Η έλλειψη απόλυτης ταξινόμησης μεταξύ των συναρτήσεων του $\mathscr{H}$ αντικατοπτρίζεται από την έλλειψη ταξινόμησης μεταξύ των συνόλων. Αυτό πρωτοπαρουσιάστηκε από τον H.G.Eggleston(1950 - 1951). Ο Eggleston εργάστηκε στον Ευκλείδειο χώρο και χρειαζόταν να υπαγορεύσει κατάλληλες συνθήκες για τις μη συγκρίσιμες συναρτήσεις f, h του $\mathscr{H}$. Το αποτέλεσμα μας θα είναι πιο εύκολο να το αποδείξουμε καθώς θα έχουμε την ελευθερία να διαλέξουμε τον χώρο μας ώστε να ταιριάζει στο πρόβλημά μας.

Θεώρημα 39 *Έστω f και h συναρτήσεις στο $\mathscr{H}_0$ με*

$$0 = \lim_{t\to 0} inf \frac{h(t)}{f(t)} < \lim_{t\to 0} sup \frac{h(t)}{f(t)} = +\infty \qquad (1)$$

Τότε υπάρχει ένας συμπαγής μετρικός χώρος Ω με συμπαγή υποσύνολα A και B με A μηδενικού μ^h-μέτρου και σ-μη πεπερασμένο μ^f-μέτρο και με B σ-μη πεπερασμένο μ^h-μέτρου και μηδενικού μ^f-μέτρου.

Απόδειξη

Γράφουμε

$$g(t) = \sqrt{\{f(t)h(t)\}}.$$

Είναι πολύ εύκολο να επαληθεύσουμε ότι το g ανήκει στο $\mathscr{H}_0$. Χρησιμοποιώντας την (1) διαλέγουμε φθίνουσες ακολουθίες θετικών αριθμών $\{a_r\}, \{b_r\}$ με όριο μηδέν που ικανοποιούν

$$\lim_{r\to\infty} h(a_r)/f(a_r) = 0, \qquad (2)$$

$$\lim_{r\to\infty} h(b_r)/f(b_r) = 0, \qquad (3)$$

Χρησιμοποιούμε το αποτέλεσμα και κάποιες από τις λεπτομέρειες της απόδειξης του θεωρήματος 34. Σε εκείνη την απόδειξη η επιλογή της ακολουθίας $\{t_r\}$ έγινε κατά κύριο λόγο με βάση την επιθυμία μας, είχαμε μόνο να σιγουρευτούμε ότι συνέκλινε στο 0 τόσο άμεσα ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες (10) και (11). Αντικαθιστώντας την $\{a_r\}$ με μια κατάλληλη υπακολουθία της ίδιας και παίρνοντας αυτή ως την ακολουθία $\{t_r\}$ μπορούμε να ικανοποιήσουμε αυτές τις συνθήκες με τη συνάρτηση h του θεωρήματος 34 αντικατεστημένη από την συνάρτηση g αυτού του θεωρήματος. Έστω Ω_A ο αντίστοιχος συμπαγής μετρικός χώρος με $\mu^g(\Omega_A) = 1$. Γράφουμε $a_0 = +\infty$ και ορίζουμε τις νέες συναρτήσεις f^A, g^A, h^A του $\mathscr{H}_0$ γράφοντας

$$f^A(t) = f(a_r), \;\; g^A(t) = g(a_r), \;\; h^A(t) = h(a_r),$$

για

$$a_r \le t < a_{r-1} \qquad (r = 1, 2, ...).$$

Αφού οι μόνες θετικές διάμετροι στο Ω_A είναι αριθμοί της ακολουθίας $\{a_r\}$ είναι φανερό ότι τα ζευγάρια f, f^A και g, g^A και h, h^A παράγουν τα ίδια μέτρα Hausdorff στον Ω_A. Ειδικά

$$\mu^{g^A}(\Omega^A) = 1.$$

Αλλά

$$g^A(t)/f^A(t) = \sqrt{\{h^A(t)/f^A(t)\}} = \sqrt{\{h(a_r)/f(a_r)\}} \to 0,$$

καθώς $t \to 0$ και

$$h^A(t)/g^A(t) = \sqrt{\{h^A(t)/f^A(t)\}} = \sqrt{\{h(a_r)/f(a_r)\}} \to 0,$$

καθώς $t \to 0$. Οπότε

$$f^A \prec g^A \prec h^A.$$

Συνεπώς από το πόρισμα του θεωρήματος 36 ο Ω^A έχει μηδενικό μ^{h^A}-μέτρο και σ-μη πεπερασμένο μ^{f^A}-μέτρο. Ως εκ τούτου ο Ω^A έχει μηδενικό μ^h-μέτρο και σ-μη πεπερασμένο μ^f-μέτρο.
Τώρα δουλεύοντας όμοια με την ακολουθία $\{b_r\}$ μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν συμπαγή μετρικό χώρο Ω_B τον οποίο μπορούμε να τον πάρουμε έτσι ώστε να είναι υποσύνολο του διαστήματος $[2, 3]$ με τον Ω_B, σ-μη πεπερασμένου μ^h-μέτρου και μηδενικού μ^f-μέτρου. Φτιάχνουμε το $\Omega_A \cup \Omega_B$ σε έναν συμπαγή μετρικό χώρο επεκτείνωντας την μετρική ρ που ορίζεται χωριστά στον Ω_A και Ω_B παίρνοντας

$$\rho(a, b) = d(\Omega_A) + d(\Omega_B)$$

για όλα τα ζευγάρια a, b με $a \in \Omega_A$ και $b \in \Omega_B$. Τότε γράφοντας

$$A = \Omega_A, \qquad B = \Omega_B$$

παίρνουμε τα αποτελέσματα που απαιτούμε.

Το παρακάτω αποτέλεσμα οφείλεται στον A.S.Besicovitch (1956).

Θεώρημα 40 *Έστω E ένα σύνολο σε ένα μετρικό χώρο Ω με $\mu^h(E) = 0$, για κάποια h στο $\mathscr{H}_0$. Τότε υπάρχει συνάρτηση g στο $\mathscr{H}_0$ με $g \prec h$ και $\mu^g(E) = 0$.*

Απόδειξη

Χρησιμοποιούμε το κριτήριο που καθιερώθηκε στο θεώρημα 30 ώστε ένα σύνολο να έχει μηδενικό μέτρο Hausdorff. Αφού $\mu^h(E) = 0$ μπορούμε να διαλέξουμε ακολουθία συνόλων $\{S_i\}$ τέτοια ώστε

$$E \subset \bigcup_{i=j}^{\infty} S_i \qquad (j = 1, 2, ...),$$

και
$$\sum_{i=1}^{\infty} h(S_i) < +\infty$$
Επιλέγουμε μια γνησίως αύξουσα ακολουθία $J(1), J(2)$ θετικών ακεραίων τόσο μεγάλων ώστε
$$\sum_{i=J(j)}^{\infty} h(S_i) < 4^{-j} \qquad (j = 1, 2, ...)$$
Διαλέγουμε μια φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών $t_1, t_2, ...$ έτσι ώστε για $j = 1, 2, ..., t_j$ να είναι μικρότερη από το ελάχιστο μη μηδενικό στοιχείο του συνόλου
$$\{d(S_1), d(S_2), ..., d(S_{J(j)})\}$$
Την ίδια στιγμή διαλέγουμε την ακολουθία $t_1, t_2, ...$ να τείνει στο 0 και να ικανοποιεί τη συνθήκη
$$h(t_j) < \frac{1}{4} h(t_{j-1}) \qquad (j = 2, 3, ...).$$
Τότε
$$h(t_j) = \Big(\frac{1}{4}\Big)^{j-1} h(t_1) \qquad (j = 1, 2, ...).$$
Τώρα αυτή η επιλογή μας διασφαλίζει ότι όλα τα σύνολα S_i με $d(S_i) < t_j$ είτε έχουν μηδενική διάμετρο είτε έχουν $i > J(j)$. Ωστόσο
$$\sum_{d(S_i)<t_j} h(S_i) \leq \sum_{i=J(j)+1}^{\infty} h(S_i) < 4^{-j} \qquad (j = 1, 2, ...). \qquad (4)$$
Η συνάρτηση g που ψάχνουμε μπορεί να εξασφαλιστεί παίρνοντας
$$g(0) = 0$$
$$g(t) = min\{2^j h(t), 2^{j-1} h(t_j)\} \qquad (\text{ για } t_{j+1} \leq t < t_j);$$
$$g(t) = h(t)(\text{ για } t_1 \leq t)$$
Είναι εύκολο να επαληθεύσουμε ότι η συνάρτηση g που ορίστηκε με αυτό τον τρόπο είναι θετική για $t > 0$, μονότονα αύξουσα και συνεχής στα δεξιά για $t > 0$(στην πραγματικότητα είναι συνεχής αν η h είναι συνεχής). Ακόμα
$$g(t_{j+1}) = min\{2^j h(t_{j+1}), 2^{j-1} h(t_j)\} = 2^j h(t_{j+1}) < 2^j (\frac{1}{4})^j h(t_1),$$
έτσι ώστε $g(t_j) \to 0$ καθώς $j \to \infty$. Ως εκ τούτου $g(t) \to 0$ καθώς $t \to 0$. Ωστόσο $g \in H_0$ όπως απαιτήθηκε. Για $t_{j+1} \leq t < t_j$, έχουμε
$$g(t) = min\{2^j h(t), 2^{j-1} h(t_j)\} \geq min\{2^j h(t), 2^{j-1} h(t)\} = 2^{j-1} h(t).$$

Ωστόσο
$$h(t)/g(t) \to 0 \text{ καθώς } t \to 0$$
και $g \prec h$. Επίσης
$$\sum_{i=1}^{\infty} g(S_i) = \sum_{d(S_i)\neq 0} g(S_i) \leq \sum_{d(S_i)\neq 0} 2^{j(i)} h(S_i).$$
όπου ορίζουμε το $j(i)$ έτσι ώστε
$$t_{j(i)+1} \leq d(S_i) < t_{j(i)},$$
με τη σύμβαση $t_0 = +\infty$. Άρα
$$\sum_{i=1}^{\infty} g(S_i) \leq \sum_{j=0}^{\infty} 2^j \{ \sum_{t_j+1 \leq d(S_i) < t_j} h(S_i) \}$$
$$\leq \sum_{t_1 \leq d(S_i)} h(S_i) + \sum_{j=1}^{\infty} 2^j \{ \sum_{d(S_i) < t_j} h(S_i) \}$$
$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} h(S_j) + \sum_{j=1}^{\infty} 2^j \big(\frac{1}{4}\big)^j$$
$$= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} h(S_i) < +\infty$$
χρησιμοποιώντας το (4). Έτσι το κριτήριο του Θεωρήματος 30 ικανοποιείται και $\mu^g(E) = 0$.

3.5 Το λήμμα αυξανόμενων συνόλων και οι συνέπειες του

Θεώρημα 41 *Έστω Ω ένας συμπαγής μετρικός χώρος. Έστω $\{E_n\}$ μία αύξουσα ακολουθία συνόλων. Υποθέτουμε ότι η h είναι μία συνεχής συνάρτηση στο $\mathscr{H}_0$. Τότε, για όλα τα δ, η με $0 < \delta < \eta$*
$$\mu^h_\eta\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\big) \leq \sup_n \mu^h_\delta(E_n) \leq \mu^h_\delta\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\big) \qquad (1)$$
Παρατηρήσεις : Οι Davies, Sion και Sjerve στην ουσία αποδεικνύουν την οριακή περίπτωση αυτού του αποτελέσματος στην οποία $\delta = \eta$ έτσι ώστε να ισχύει η ισότητα στην (1). Η απόδειξη θα βασιστεί σε έναν ορισμό και σε μια μορφή του Blaschke Θεωρήματος Επιλογής.

Ορισμός 28 *Η απόσταση $d_H(X,Y)$, γνωστή και ως μετρική Hausdorff, μεταξύ δύο μη κενών κλειστών υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου Ω ορίζεται ως εξής :*

$$d_H(X,Y) = max\{\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} \rho(x,y), \sup_{y\in Y}\inf_{x\in X} \rho(x,y)\}$$

όπου $\rho(x,y)$ η συνήθης μετρική.

Λήμμα 4 *Blaschke's Selection Theorem Έστω $\{F_n\}$ μια ακολουθία μη κενών κλειστών υποσυνόλων ενός συμπαγούς μετρικού χώρου Ω, τότε υπάρχει ένα μη κενό κλειστό σύνολο F^* και μια υπακολουθία N φυσικών αριθμών τέτοια ώστε*

$$d_H(F_n, F^*) \to 0 \;\; \textit{καθώς} \;\; n \to \infty \;\; \textit{στο} \;\; N.$$

Απόδειξη

Έστω $\mathscr{H}$ ένας χώρος μη κενών κλειστών συνόλων του Ω με την μετρική Hausdorff ρ. Στην ουσία έχουμε να αποδείξουμε ότι ο $\mathscr{H}$ είναι συμπαγής υπό την d_H, ξεκινάμε αποδεικνύοντας ότι ο $\mathscr{H}$ είναι πλήρης υπό την d_H. Έστω $F_1, F_2, ...$ μια ακολουθία σημείων του $\mathscr{H}$ π.χ. μια ακολουθία μη κενών κλειστών συνόλων του Ω και υποθέτουμε ότι

$$d_H(F_n, F_m) \to 0 \;\; \text{καθώς} \;\; n, m \to \infty.$$

Έχουμε να αποδείξουμε ότι υπάρχει ένα σημείο F_0 του $\mathscr{H}$ τέτοιο ώστε

$$d_H(F_0, F_n) \to 0 \;\; \text{καθώς} \;\; n \to \infty$$

Έστω F_0 το σύνολο όλων των σημείων f του Ω με την ιδιότητα ότι το f είναι οριακό σημείο κάποιας ακολουθίας $f_1, f_2, ...$ με $f_i \in F_i$ για $i = 1, 2, ...$ Αφού τα σύνολα $F_1, F_2, ...$ είναι μη κενά μπορούμε να διαλέξουμε μια ακολουθία $f_1, f_2, ...$ με $f_i \in F_i$ για $i = 1, 2, ...$ αφού ο Ω είναι συμπαγής αυτή η ακολουθία έχει τουλάχιστον ένα οριακό σημείο. Ως εκ τούτου το F_0 είναι μη κενό. Όταν $f^{(0)}$ είναι το όριο μιας ακολουθίας σημείων $\{f^{(n)}\}$ του F_0 υπάρχουν ακολουθίες $\{f_i^{(n)}\}_{i=1}^{i=\infty}, n = 1, 2, ...$ που συγκλίνουν στα σημεία $f^(n), n = 1, 2, ...$ και με

$$f_i^{(n)} \in F_i \qquad (i, n = 1, 2, ...).$$

Για κάθε n μπορούμε να διαλέξουμε εναν ακέραιο $i(n)$ με

$$d_H(f_{i(n)}^{(n)}), f^{(n)}) < 1/n$$

και μπορούμε να τα διατάξουμε έτσι ώστε $i(1) < i(2) < ...$ Γράφουμε

$$f_{i(n)}^{(0)} = f_{i(n)}^{(n)} \qquad (n = 1, 2, ...)$$

και
$$f_i^{(0)} = f_i^{(1)}(\text{ αν το i δεν είναι κάποιο από τα } i(1), i(2), ...)$$

Τότε $f_i^{(0)} \in F_i$ για $i = 1, 2, ...$ και η $\{f_i^{(0)}\}$ έχει υπακολουθία $\{f_{i(n)}^{(0)}\}$ που συγκλίνει στο $f^{(0)}$. Έτσι $f^{(0)} \in F_0$. Άρα το F_0 είναι κλειστό. Έστω ότι μας δίνεται $\epsilon > 0$. Διαλέγουμε p τόσο μεγάλο ώστε

$$d_H(F_n, F_m) < \frac{1}{2}\epsilon \text{ (για } n, m \geq p) \qquad (2)$$

Θεωρούμε κάποιο σημείο f_0 του F_0. Τότε για κάποια $m \geq p$ και f_m του F_m έχουμε $d_H(f_m, f_0) < \frac{1}{2}\epsilon$. Από την (2) για κάθε $n \geq p$ θα υπάρχει ένα σημείο f_n του F_n με $d_H(f_n, f_m) < \frac{1}{2}\epsilon$. Έτσι $f_n \in F_n$ και $d_H(f_n, f_0) < \epsilon$. Αφού αυτό ισχύει για όλα τα f_0 του F_0 προκύπτει ότι
$$\epsilon(F_n, F_0) \leq \epsilon \qquad (3)$$

για $n \geq p$. Από την άλλη πλευρά, αν $n \geq p$ και $f_n \in F_n$ τότε από την (2) υπάρχει μια ακολουθία σημείων $\{g_i\}$ με

$$g_i \in F_i \qquad (i = 1, 2, ...)$$

$$d_H(g_i, f_n) \leq \frac{1}{2}\epsilon \qquad (i \geq p).$$

Αφού ο Ω είναι συμπαγής η $\{g_i\}$ έχει κάποιο οριακό σημείο g. Τότε $g \in F_0$ και

$$d_H(g, f_n) \leq \frac{1}{2}\epsilon.$$

Ως εκ τούτου

$$\epsilon(F_0, F_n) \leq \frac{1}{2}\epsilon.$$

Συνδυάζοντας αυτό με την (3) έχουμε

$$d_H(F_n, F_0) \leq \epsilon \qquad (n \geq p)$$

Έτσι η $\{F_n\}$ συγκλίνει στο F_0 όπως ζητήθηκε για να αποδειξουμε ότι ο $\mathscr{H}$ είναι ένας πλήρης χώρος.

Το επόμενο βήμα είναι να δείξουμε ότι αν $\delta > 0$ τότε ο $\mathscr{H}$ μπορεί να καλυφθεί από μια πεπερασμένη συλλογή συνόλων διαμέτρου μικρότερης από δ. Αφού ο Ω είναι συμπαγής, καλύπτεται από κάποια πεπερασμένη συλλογή ανοιχτών σφαιρών ακτίνας $\frac{1}{2}\delta$. Έστω $S(1), S(2), ...S(n)$ μια τέτοια επιλογή ανοιχτών σφαιρών ακτίνας $\frac{1}{2}\delta$. Έστω ότι με $\mathscr{P}$ συμβολίζουμε το πεπερασμένο σύστημα όλων των διαμερισμών $P = (R, S)$ των ακεραίων $1, 2, ..., n$ σε δύο ξένα σύνολα R, S όπου το πρώτο R είναι μη κενό. Για κάθε P στο $\mathscr{P}$ έστω $\mathscr{H}(P)$ το συνολο εκείνων των μη κενών κλειστών συνόλων του Ω που συναντούν τις σφαίρες $S(r), r \in R$ αλλά που δεν συναντούν

τις σφαίρες $S(s), s \in S$. Δείχνουμε ότι αν F και H δύο συνολα του $\mathscr{H}(P)$ για κάποια P στο $\mathscr{P}$ έχουμε $d_H(F, H) \leq \delta$. Αν $f \in F$ τότε το f βρίσκεται σε κάποια από τις σφαίρες $S(1), S(2), ...S(n)$ αφού αυτές καλύπτουν τον Ω αλλά δεν βρίσκεται σε καμία από τις σφαίρες $S(s)$, με $s \in S$ αφού αυτές δεν συναντούν το F.Άρα το f βρίσκεται σε μια από τις σφαίρες $S(r)$, με $r \in R$. Αφού κάθε μία από αυτές τις σφαίρες $S(r), r \in R$ συναντά το H, θα υπάρχει κάποιο σημείο h του H στη σφαίρα $S(r), r \in R$ που θα περιέχει f. Άρα $d_H(h, f) \leq \delta$. Έτσι $\epsilon(H, F) \leq \delta$. Όμοια $d_H(H, F) \leq \delta$. Αφού το F και το H μπορεί είναι σύνολα του $\mathscr{H}(P)$, προκύπτει ότι $d(\mathscr{H}(P)) \leq \delta$. Δείχνουμε ότι τα σύνολα $\mathscr{H}(P), P \in \mathscr{P}$ καλύπτουν το $\mathscr{H}$. Αν το F είναι κάποιο μη κενό κλειστό σύνολο του Ω , μπορούμε να πάρουμε ως R το σύνολο των ακεραίων r με $1 \leq r \leq n$ και $F \cap S(r) \neq \emptyset$ και ως S το συμπληρωματικό σύνολο των ακεραίων s με $1 \leq s \leq n$ και $F \cap S(r) = \emptyset$. Τότε το R είναι μη κενό και το $P = (R, S)$ είναι ένας διαμερισμός στο $\mathscr{P}$ και $F \in \mathscr{H}(P)$. Έτσι το πεπερασμένο σύστημα $\mathscr{H}(P), P \in \mathscr{P}$ ικανοποιεί τις απαιτήσεις μας.
Τώρα μπορούμε να ολοκληρώσουμε την απόδειξη της συμπάγειας του $\mathscr{H}$ με γενικά επιχειρήματα που λειτουργούν στον $\mathscr{H}$.Έστω $\{F_n\}$ μια ακολουθία σημείων του $\mathscr{H}$. Κάνουμε μια επαγωγική επιλογή άπειρων υπακολουθιών φυσικών αριθμών

$$N_0, N_1, N_2, ...$$

με

$$N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset ...$$

Παίρνουμε $N_0 = \{1, 2, ..., i, ...\}$. Όταν το N_{n-1} επιλεγεί για κάποια $n \geq 1$, διαλέγουμε μια πεπερασμένη συλλογή συνόλων του $\mathscr{H}$ όπου το καθένα θα έχει διάμετρο μικρότερη από $1/n$ και όλη η συλλογή θα καλύπτει τον $\mathscr{H}$. Τότε τουλάχιστον ένα από αυτά τα σύνολα στον $\mathscr{H}$ πρέπει να περιέχει έναν άπειρο αριθμό σημείων της ακολουθίας

$$F_i \qquad (i \in N_{n-1}). \qquad (4)$$

Έστω ότι με $\mathscr{H}_n$ συμβολίζουμε ένα από αυτά τα συνολα που περιέχουν απείρως πολλά από τα σημεία του (4) και έστω N_n η αντίστοιχη άπειρη υπακολουθία του N_{n-1}. Με αυτό τον τρόπο δεν έχουμε διαλέξει μόνο μια ακολουθία υπακολουθιών $N_0, N_1, N_2, ...$ αλλά έχουμε διαλέξει και μια ακολουθία συνόλων $\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2, ...$ του $\mathscr{H}$ με

$$d(\mathscr{H}_n) \leq 1/n \qquad (n = 1, 2, 3, ...),$$

$$F_i \in \mathscr{H}_n \qquad (i \in N_n, n = 1, 2, ...)$$

Έτσι έχουμε

$$d_H(F_i, F_j) \leq d(\mathscr{H}_n) \leq 1/n,$$

αν τα i, j ανήκουν στο N_n. Τώρα σχηματίζουμε μια διαγώνια ακολουθία N παίρνοντας το πρώτο στοιχείο, ας πούμε $i(1)$ του N_1 ως το πρώτο στοιχείο του N. Όταν το n-οστό στοιχείο $i(n)$ του N έχει επιλεγεί, έστω ότι το $i(n+1)$ είναι το πρώτο στοιχείο της άπειρης ακολουθίας N_{n+1} που ξεπερνά το $i(n)$. Τότε το N είναι μια άπειρη γνησίως αύξουσα ακολουθία.

$$i(1), i(2), ...$$

και $i(r) \in N_s$ όταν $r \geq s$.Έτσι αν $r \geq s \geq n, i(r), i(s)$ ανήκουν στο N_n έτσι ώστε τα $F_{i(r)}, F_{i(s)}$ να ανήκουν στο $\mathscr{H}_n$ και

$$d_H(F_{i(r)}, F_{i(s)}) \leq 1/n$$

Έτσι η ακολουθία $\{F_{i(r)}\}_{r=1}^{r=\infty}$ ικανοποιεί τη συνθήκη σύγκλισης $Cauchy$. Αφού ο $\mathscr{H}$ είναι πλήρης υπάρχει ένα σημείο, ας πούμε, F^* του $\mathscr{H}$ τέτοιο ώστε

$$d_H(F_n, F^*) \to 0 \text{ καθώς } n \to \infty \text{ στο } N,$$

όπως ζητήθηκε.

Απόδειξη θεωρήματος 41

Αφού ο Ω είναι συμπαγής έχει το πολύ έναν πεπερασμένο αριθμό μεμονωμένων σημείων. Ακόμα αυτά τα σημεία δεν μπορούν να συνεισφέρουν στο μ_η^h ή στο μ_δ^h - μέτρο κανενός συνόλου. Γιαύτό μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο Ω δεν έχει κανένα μεμονωμένο σημείο. Γράφουμε

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Αφού $E_n \subset E$, για κάθε n, έχουμε

$$\underset{n}{sup} \mu_\delta^h(E_n) \leq \mu_\delta^h(E) = \mu_\delta^h\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big).$$

Έτσι έχουμε να αποδείξουμε ότι

$$\mu_\eta^h(E) \leq \underset{n}{sup} \mu_\delta^h(E_n),$$

και γιαύτό μπορούμε να υποθέσουμε ότι το *supremum* έχει μια πεπερασμένη τιμή ας πούμε

$$\underset{n}{sup} \mu_\delta^h(E_n) = \lambda < +\infty.$$

Έστω ότι μας δίνεται $\epsilon > 0$. Τότε για κάθε θετικό ακέραιο n μπορύμε να διαλέξουμε μια ακολουθία κλειστών συνόλων $\{F_i^{(n)}\}_{i=1}^{i=\infty}$ με

$$E_n \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i^{(n)}, \qquad d(F_i^{(n)}) \leq \delta, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} h(F_i^{(n)}) > \lambda + \epsilon.$$

Αν κάποια από τα σύνολα $F_i^{(n)}$ έχουν μηδενική διάμετρο(το οποίο συμβαίνει όταν το $F_i^{(n)}$ είναι κενό ή περιέχει ένα μοναδικό σημείο) τα αντικαθιστούμε με μεγαλύτερα σύνολα θετικής διαμέτρου μικρότερης από δ , χωρίς να επιτρέπουμε στο άθροισμα $\sum h(F_i^{(n)})$ να ξεπερνάει το $\lambda+\epsilon$ αυτό είναι εφικτό αφού η h είναι συνεχής και κανένα σημείο του Ω δεν είναι μεμονωμένο.
Για κάθε n υποθέτουμε ότι τα σύνολα είναι αναδιατεταγμένα και μετονομασμένα έτσι ώστε

$$\delta \geq d(F_1^{(n)}) \geq d(F_2^{(n)}) \geq ... \geq d(F_i^{(n)}) \geq ... \qquad (5)$$

Αυτή η διαδικασία είναι πάντα εφικτή αφού η συνθήκη

$$\sum_{i=1}^{\infty} h(F_i^{(n)}) \leq \lambda + \epsilon < +\infty \qquad (6)$$

μας εξασφαλίζει ότι μόνο ένας πεπερασμένος αριθμός συνόλων $F_i^{(n)}$ μπορούν να έχουν διάμετρο που ξεπερνά οποιαδήποτε τιμή μας δίνεται.

Από το Θεώρημα Επιλογής του *Blaschke* μπορούμε να διαλέξουμε ένα μη κενό κλειστό σύνολο F_1^* και μια υπακολουθία θετικών ακεραίων N_1 έτσι ώστε

$$d_H(F_1^{(n)}, F_1^*) \to 0 \text{ καθώς } n \to \infty \text{ μέσα στο } N_1.$$

Τότε μπορούμε να διαλέξουμε ένα μη κενό κλειστό σύνολο F^* και μια υπακολουθία N_2 του N_1 έτσι ώστε

$$d_H(F_2^{(n)}, F_2^*) \to 0 \text{ καθώς } n \to \infty \text{ μέσα στο } N_2.$$

Προχωρώντας επαγωγικά με αυτό τον τρόπο και επιλέγοντας στη συνέχεια μια διαγώνια ακολουθία εξασφαλίζουμε μια άπειρη ακολουθία μη κενών κλειστών συνόλων $\{F_i^*\}$ και μια ακολουθία θετικών ακεραίων N με την ιδιότητα για κάθε i,

$$d_H(F_i^{(n)}, F_i^*) \to 0 \text{ καθώς } n \to \infty \text{ μέσα στο } N. \qquad (7)$$

Γράφουμε

$$d_i = d(F_i^*) \qquad (i = 1, 2, ...).$$

Από την (5) και τη σύγκλιση της (7) έχουμε

$$\delta \geq d_1 \geq d_2 \geq ... \geq d_i \geq ...$$

Από την (6), τη σύγκλιση της (7) και τη συνέχεια της h έχουμε

$$\sum_{i=1}^{\infty} h(d_i) \leq \lambda + \epsilon < +\infty.$$

Γράφουμε
$$\sum_{i=1}^{\infty} h(d_i) = l.$$
Αφού το l είναι πεπερασμένο
$$d_i \to 0 \text{ καθώς } i \to \infty \qquad (8)$$
Αφού η h είναι συνεχής,για κάθε i, επιλέγουμε δ_i, με $d_i < \delta_i < \eta$ τόσο κοντά στο d_i ώστε
$$h(\delta_i) < h(d_i) + \epsilon.2^{-i}.$$
Έστω V_i το κλειστό σύνολο όλων των σημείων v του Ω με
$$d_H(v, f) \leq \frac{1}{2}(\delta_i - d_i),$$
για κάποιο σημείο f του F_i^*. Τότε
$$d(V_i) \leq d_i + 2\Big[\frac{1}{2}(\delta_i - d_i)\Big] = \delta_i,$$
έτσι ώστε
$$h(V_i) \leq h(\delta_i) < h(d_i) + \epsilon.2^{-i},$$
και
$$\sum_{i=1}^{\infty} h(V_i) < \sum_{i=1}^{\infty} h(d_i) + \epsilon = l + \epsilon.$$
Ακόμα η σύγκλιση της (7) μας εξασφαλίζει ότι για κάθε i
$$F_i^{(n)} \subset V_i \text{ (για όλα τα αρκετά μεγάλα n στο } N). \qquad (9)$$
Γράφουμε
$$V = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$$
και μελετάμε τα σύνολα $E_n \setminus V$ αποδεικνύοντας ότι για κάθε n
$$\mu^h(E_n \setminus V) \leq \lambda - l + 3\epsilon.$$
Έστω ότι μας δίνεται n. Έστω ότι μας δίνεται $\delta^* > 0$. Από την (8) μπορούμε να διαλέξουμε i^* έτσι ώστε
$$d_{i^*} < \delta^*,$$
και
$$\sum_{i=i^*+1}^{\infty} h(d_i) < \epsilon.$$

Τότε μπορούμε να διαλέξουμε n^* στο N με $n < n^*$ έτσι ώστε

$$F_i^{(n^*)} \subset V_i \qquad (i = 1, 2, ..., i^*),$$

$$h(F_i^{(n^*)}) \geq h(d_i) - \epsilon.2^{-i} \qquad (i = 1, 2, ..., i^*),$$

$$d(F_{i^*}^{(n^*)}) < \delta^*.$$

Αυτές οι υποθέσεις εξασφαλίζουν ότι

$$E_n \subset E_{n^*} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i^{(n^*)},$$

$$\bigcup_{i=1}^{i^*} F_i^{(n^*)} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i = V,$$

έτσι ώστε

$$E_n \setminus V \subset \bigcup_{i=i^*+1}^{\infty} F_i^{(n^*)}.$$

Ακόμα για $i \geq i^* + 1$,

$$d(F_i^{(n^*)}) \leq d(F_{i^*}^{(n^*)}) < \delta^*.$$

Τελικά

$$\begin{aligned}
\sum_{i=i^*+1}^{\infty} h(F_i^{(n^*)}) &= \{\sum_{i=1}^{\infty} h(F_i^{(n^*)})\} - \{\sum_{i=1}^{i^*} h(F_i^{(n^*)})\} \\
&\leq \lambda + \epsilon - \sum_{i=1}^{i^*} [h(d_i) - \epsilon.2^{-i}] \\
&< \lambda + 2\epsilon - \sum_{i=1}^{i^*} h(d_i) \\
&< \lambda - l + 3\epsilon.
\end{aligned}$$

Ως εκ τούτου

$$\mu_{\delta^*}^h(E_n \setminus V) \leq \lambda - l + \epsilon,$$

Αφού το δ μπορεί να είναι αυθαίρετα μικρό συμπεραίνουμε ότι

$$\mu^h(E_n \setminus V) \leq \lambda - l + \epsilon,$$

για όλα τα n. Έτσι

$$\begin{aligned}
\mu^h(E \setminus V) &= \mu^h(\cup_{n=1}^{\infty}\{E_n \setminus V\}) \\
&= \sup_n \mu^h(E_n \setminus V) \\
&\leq \lambda - l + 3\epsilon
\end{aligned}$$

Αφού το V είναι καλυμμένο από την ακολουθία συνόλων $\{V_i\}$ με διάμετρο μικρότερη από η συμπεραίνουμε ότι

$$\mu_\eta^h(V) \leq \sum_{i=1}^{\infty} h(V_i) < l + \epsilon.$$

Έτσι

$$\mu_\eta^h(E) \leq \mu_\eta^h(V) + \mu_\eta^h(E \setminus V) \leq l + \epsilon + \lambda - l + 3\epsilon = \lambda + 4\epsilon$$

Αφού το ϵ ήταν ένας αυθαίρετος θετικός αριθμός προκύπτει ότι

$$\mu_\eta^h(E) < \lambda,$$

έτσι ώστε

$$\mu_\eta^h(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_n) \leq \sup_n \mu_\delta^h(E_n).$$

Έτσι προκύπτει η (1).

3.6 Διάσταση Hausdorff

Η διάσταση και το μέτρο Hausdorff εισήχθησαν από τον Felix Hausdorff το 1919. Η διάσταση Hausdorff βασίζεται στην ιδέα της κάλυψης ενός μετρικού χώρου E.

Πρόταση 1 *1. Αν $H^a(E) < \infty$ και $\beta > a$ τότε $H^\beta(E) = 0$.*

2. Αν $H^a(E) > 0$ και $\beta < a$ τότε $H^\beta(E) = \infty$.

Απόδειξη

Έστω $\{F_i\}$ μια κάλυψη του E με $diam(F_i) < \delta$. Έχουμε

$$\sum diam(F_i)^\beta = \sum diam(F_i)^{\beta-a} diam(F_i)^a \leq \delta^{\beta-a} \sum diam(F_i)^a$$

έτσι $H_\delta^\beta(E) \leq \delta^{\beta-a} H_\delta^a(E)$. Αφήνοντας το $\delta \to 0$ προκύπτει το πρώτο αποτέλεσμα, ενώ εναλλάσοντας τα α και β προκύπτει το δεύτερο.

Η παραπάνω πρόταση μας δείχνει ότι το α στον ορισμό του μέτρου Hausdorff που έχουμε δει νωρίτερα είναι μοναδικό και συνεπώς ότι η διάσταση Hausdorff είναι καλά ορισμένη.

Ορισμός 29 *Για κάθε μετρικό χώρο A ορίζουμε την διάσταση Hausdorff του A και συμβολίζεται με $dim_H(A)$*

$$dim_H(A) = inf\{\alpha > 0 : H^\alpha(A) = 0\} = sup\{\alpha > 0 : H^\alpha(A) > 0\}$$

Διαισθητικά αυτός ο ορισμός εκφράζει το ότι ένα σύνολο είναι μεγάλο σε σχέση με σύνολα μικρότερης διάστασης και μικρό και σχέση με σύνολα μεγαλύτερης διάστασης.

Εύκολα αποδεικνύεται όμοια με την απόδειξη της παραπάνω πρότασης ότι

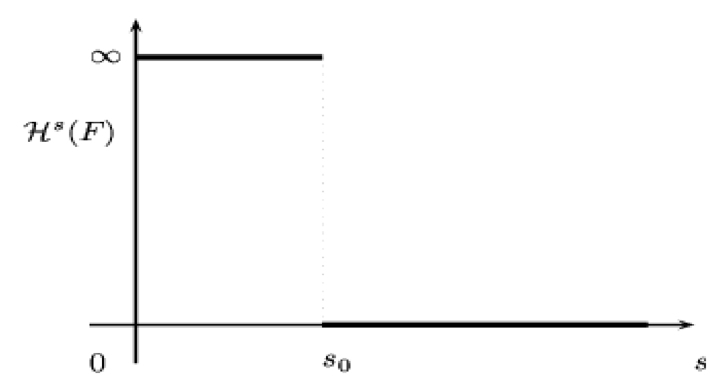
$$dim_H(A) = inf\{\alpha > 0 : H^\alpha(A) = 0\} = inf\{\alpha > 0 : H^\alpha(A) < \infty\}$$

$$= sup\{\alpha > 0 : H^\alpha(A) > 0\} = sup\{\alpha > 0 : H^\alpha(A) = \infty\}.$$

Ακολουθεί ένας ισοδύναμος ορισμός :

Ορισμός 30 *Έστω (X, d) μετρικός χώρος, τότε για ένα σύνολο $F \subset X$ ορίζουμε τη διάσταση Hausdorff του συνόλου F, $dim_H(F)$ να είναι ο αριθμός $s_0 \in [0, \infty]$, τέτοιος ώστε για $s \in [0, \infty]$ να ισχύει ότι :*
1. Αν $H^s(F) = \infty$ τότε $s < s_0$
2. Αν $H^s(F) = 0$ τότε $s > s_0$

Στην περίπτωση που $H^s(F) = 0, \forall s \in [0, \infty]$ έχουμε ότι η $dim_H(F) = 0$, ενώ αν $H^s(F) = \infty$ έχουμε ότι η $dim_H(F) = \infty$. Μιλώντας μη αυστηρά η διάσταση Hausdorff ενός συνόλου F είναι το σημείο όπου η γραφική παράσταση του $H^s(F)$, συναρτήσει του s και όχι του F, κάνει το άλμα από το άπειρο στο μηδέν.



Προς το παρόν μπορούμε να υπολογίσουμε τη διάσταση Hausdorff μιας σημαντικής κλάσης συνόλων του $\mathbb{R}^d$, εκείνων που έχουν θετικό μέτρο Lebesgue. Η δύναμη της διάστασης Hausdorff έγκειται στην ικανότητά της να διακρίνει μεταξύ εκείνων των συνόλων που έχουν μηδενικό μέτρο *Lebesgue*, τα οποία δεν θα έπρεπε να έ-χουν ίδιο «μέγεθος». Για παράδειγμα το $\mathbb{R}^2$ μέτρο Lebesgue της κίνησης Brown στο επίπεδο είναι σχεδόν βέβαια μηδενικό ενώ η κίνηση Brown στο επίπεδο είναι γειτονικά περιοδική. Μια καμπύλη που γεμίζει το χώρο είναι ίδια με ένα σημείο με την οπτική γωνία του μέτρου Lebesgue. Τώρα θα παρουσιάσουμε μερικές τεχνικές υπολογισμού της διάστασης Hausdorff πιο γενικών συνόλων.

Σημείωση: Στη συνέχεια θα συμβολίζουμε με $|A|$ την διάμετρο του συνόλου A και θα ονομάζουμε ένα μέτρο σε σύνολα Borel του μετρικού χώρου E, **κατανομή μάζας στον E** αν $0 < \mu(E) < \infty$.

Θεώρημα 42 *(Αρχή κατανομής της μάζας) Έστω ότι E είναι ένας μετρικός χώ-ρος και $a \geq 0$. Αν υπάρχει μια κατανομή μάζας μ στο E και σταθερές $C, \delta > 0$ τέτοιες ώστε*

$$\mu(V) \leq C|V|^a,$$

για όλα τα κλειστά σύνολα V με $|V| \leq \delta$ τότε

$$H^a(E) \geq \frac{\mu(E)}{C} > 0,$$

και ως εκ τούτου $dim_H E \geq a$.

Απόδειξη

Έστω $\{U_i\}$ μια κάλυψη του E από τυχαία σύνολα με $|U_i| \leq \delta$. Έστω ότι το V_i είναι η κλειστότητα του U_i και $|U_i| = |V_i|$. Έχουμε

$$0 < \mu(E) \leq \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\Big) \leq \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(V_i) \leq C \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^a.$$

παίρνοντας infimum σε όλες αυτές τις καλύψεις και αφήνοντας $\delta \to 0$ προκύπτει το αποτέλεσμα.

Ορισμός 31 *Έστω μ μια κατανομή μάζας σε έναν μετρικό χώρο (E,ρ) και $a \geq 0$. Το a-δυναμικό ένος σημείου $x \in E$ με βάση το μ ορίζεται ως εξής :*

$$\phi_a(x) := \int \frac{d\mu(y)}{\rho(x,y)^a}.$$

Στην περίπτωση που $E = \mathbb{R}^3$ και $a = 1$ αυτό είναι το Newton βαρυτικό δυναμικό της μάζας μ. Η a - ενέργεια του μ είναι

$$I_a(\mu) := \int \phi_a(x) d\mu(x) = \int \int \frac{d\mu(x) d\mu(y)}{\rho(x,y)^a}.$$

Θεώρημα 43 *(Ενεργειακή Μέθοδος) Έστω $a \geq 0$ και μ κατανομή μάζας στον μετρικό χώρο E. Τότε $\forall \delta > 0$,*

$$H^a_\delta(E) \geq \frac{\mu(E)}{\int\int_{\rho(x,y)<\delta} \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{\rho(x,y)^a}},$$

ως εκ τούτου αν $I_a(\mu) < \infty$ τότε $H^a(E) = \infty$ και ειδικότερα $dim_H E \geq a$.

Απόδειξη

Έστω $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μια κάλυψη του E από ξένα ανά δύο σύνολα με $|F_n| < \delta$. Τότε :

$$\int\int_{\rho(x,y)<\delta} \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{\rho(x,y)^a} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int\int_{A_n\times A_n} \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{\rho(x,y)^a} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(A_n)^2}{|A_n|^a}.$$

Επίσης από την ανισότητα Cauchy-Schwarz,

$$\mu(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^{a/2} \frac{\mu(A_n)}{|A_n|^{a/2}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(A_n)^2}{|A_n|^a}$$

$$\leq H^a_\delta(E) \int\int_{\rho(x,y)<\delta} \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{\rho(x,y)^a}.$$

Διαιρώντας και τις δύο πλευρές με το ολοκλήρωμα μας δίνει τη ζητούμενη ανισότητα.

4 Εφαρμογές του μέτρου Hausdorff

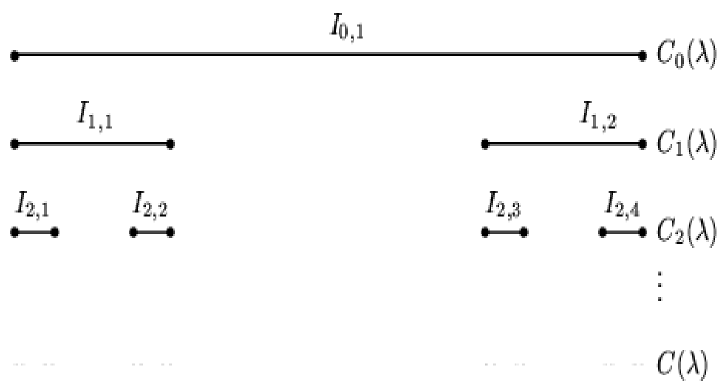
4.1 Σύνολο Cantor

Θα μελετήσουμε τώρα την διάσταση Hausdorff του συνόλου Cantor $C(\lambda)$. Τα σύνολα Cantor $C(\lambda)$ είναι σύνολα κλασματικής διάστασης. Ας τα ορίσουμε :

Έστω $0 < \lambda < 1/2$. Ορίζουμε $I_{0,1} = [0,1]$ και έστω $I_{1,1} = [0,\lambda]$ και $I_{1,2} = [1-\lambda, 1]$. Συνεχίζουμε την διαδικασία διαλέγοντας υποδιαστήματα από κάθε διάστημα που έχουμε ήδη φτιάξει. Για παράδειγμα, αν έχουμε ορίσει τα διαστήματα $I_{k-1,1}, I_{k-1,2}, \ldots, I_{k-1,2^{k-1}}$, τότε στο επόμενο βήμα ορίζουμε $I_{k,1}, I_{k,2}, \ldots, I_{k,2^k}$, διαγράφοντας από την μέση κάθε διαστήματος $I_{k-1,j}$ ένα διάστημα μήκους

$$(1-2\lambda) diam I_{k-1,j} = (1-2\lambda)\lambda_{k-1}.$$

Έτσι κάθε διάστημα $I_{k,j}$ που παράγεται έχει μήκος λ^k.



Η οριακή κατάσταση της παραπάνω κατασκευής είναι το σύνολο Cantor με λόγο λ

$$C(\lambda) = \bigcap_{k=0}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^k} I_{k,j} \qquad (1)$$

Βάσει του ορισμού του μέτρου Hausdorff , είναι σχετικά πιο εύκολο να βρούμε το άνω φράγμα του, παρά το κάτω. Μια «καλή» κάλυψη του συνόλου θα μας δώσει μια εκτίμηση του άνω φράγματος. Για κάθε $k = 1, 2, ...$ ισχύει ότι $C(\lambda) \subseteq \cup_{j=1}^{2^k} I_{k,j}$. Αφού το μέτρο είναι μονότονη συνάρτηση έχουμε ότι

$$\mathcal{H}^s_{\lambda^k}(C(\lambda)) \leq \sum_{j=1}^{2^k} (diam I_{k,j})^s = 2^k \lambda^{ks} = (2\lambda^s)^k.$$

Θέλουμε $\varepsilon = \lambda^k \to 0$ και επειδή $0 < \lambda < 1/2$, στην ουσία ζητάμε $k \to \infty$ και παράλληλα το $(2\lambda^s)^k$ να παραμένει φραγμένο και όχι μηδέν. Η μόνη περίπτωση για να ισχύει αυτό είναι αν έχουμε $2\lambda^s = 1 \Rightarrow \log \lambda^s = \log 1/2 \Rightarrow$

$$s = \frac{\log 1/2}{\log \lambda}$$

Άρα για $s = \log(1/2)/\log\lambda$ έχουμε

$$\mathcal{H}^s(C(\lambda)) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{H}^s_{\lambda^k}(C(\lambda)) \leq 1$$

Στην συνέχεια θα δείξουμε ότι για $s = \log(1/2)/\log\lambda$, ισχύει

$$\mathcal{H}^s(C(\lambda)) \geq \frac{1}{4} \qquad (2)$$

το οποίο μας λεεί ότι η $\dim_{\mathcal{H}} C(\lambda) = \log(1/2)/\log\lambda$. Για να το δείξουμε, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\sum_{j=1}^{\infty} (diam I_j)^s \geq \frac{1}{4} \qquad (3)$$

όπου τα $I_1, I_2, ...$ είναι οποιαδήποτε ανοικτά διαστήματα, η ένωση των οποίων καλύπτει το $C(\lambda)$. Από την στιγμή που το $C(\lambda)$ είναι συμπαγές, υπάχει πεπερασμένη υποκάλυψη. Υποθέτουμε ότι $I_1, I_2, ..., I_n$ είναι μια ανοιχτή κάλυψη του $C(\lambda)$. Αφού $C(\lambda)$ δεν έχει κανένα εσωτερικό σημείο, μπορούμε, κάνοντας εν' ανάγκη τα I_j λίγο μεγαλύτερα, να υποθέσουμε ότι τα άκρα κάθε I_j δεν ανήκουν στο $C(\lambda)$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε η απόσταση από τα άκρα των διαστημάτων I_j και τα σημεία του $C(\lambda)$ να είναι τουλάχιστον δ. Διαλέγοντας k τόσο μεγάλο ώστε $\delta > \lambda^k = diam I_{k,i}$, έπεται ότι κάθε διάστημα $I_{k,i}$ περιέχεται σε κάποιο I_j.
Υπενθυμίζουμε ότι ο συμβολισμός των διαστημάτων $I_{k,i}$ προέρχεται από την κατασκευή του συνόλου Cantor στον ορισμό (1).
Θα δείξουμε τώρα ότι για οποιοδήποτε ανοιχτό διάστημα I και δοσμένο l ισχύει

$$\sum_{I_{l,i}\subset I} (diam I_{l,i})^s \leq 4(diam I)^s \qquad (4)$$

Αυτό αρκεί διότι

$$4\sum_j (diam I_j)^s \geq \sum_j \sum_{I_{k,i}\subset I_j} (diam I_{k,i})^s \geq \sum_{i=1}^{2^k} (diam I_{k,i})^s = 1$$

Τώρα όσον αφορά την (4), υποθέτουμε ότι υπάρχουν κάποια $I_{l,i}$ υποσύνολα του I. Έστω n είναι εκείνο το βήμα για το οποίο κάποια από τα διαστήματα $I_{n,i}$ περιέχονται στο I. Τότε $n \leq l$ και τα διαστήματα $I_{n,i}$ που τέμνουν το I (προσοχή όχι μόνο εκείνα που περιέχονται εξ' ολοκλήρου στο I) είναι το πολύ 4, ειδάλλως το I θα περιείχε κάποια από τα διαστήματα του προηγουμένου βήματος $n-1$. Έτσι για $0 < r \leq 4$ έχουμε

$$\begin{aligned} diamI &\geq diamI_{n,j} \\ (diamI)^s &\geq (diamI_{n,j})^s \\ 4(diamI)^s &\geq \sum_{m=1}^{r}(diamI_{n,j_m})^s. \end{aligned}$$

Όμως,

$$\sum_{m=1}^{r}(diamI_{n,j_m})^s = \sum_{m=1}^{r}\sum_{I_{l,i}\subset I_{n,j_m}}(diamI_{l,i})^s$$

$$r(\lambda^n)^s = r2^{l-n}(\lambda^l)^s$$

$$ns\log\lambda = (l-n)\log 2 + ls\log\lambda$$

$$n\frac{\log\frac{1}{2}}{\log\lambda}\log\lambda = (l-n)\log 2 + l\frac{\log\frac{1}{2}}{\log\lambda}\log\lambda$$

$$n\log\frac{1}{2} = (l-n)\log 2 + l\log\frac{1}{2}$$

$$-n\log 2 = -n\log 2$$

Ενδεχομένως τα $I_{l,i}$ που είναι υποσύνολα του I να μην είναι όλα υποσύνολα της $\cup_{m=1}^{r} I_{n,j_m}$, άρα

$$\sum_{m=1}^{r}\sum_{I_{l,i}\subset I_{n,j_m}}(diamI_{l,i})^s \geq \sum_{I_{l,i}\subset I}(diamI_{l,i})^s$$

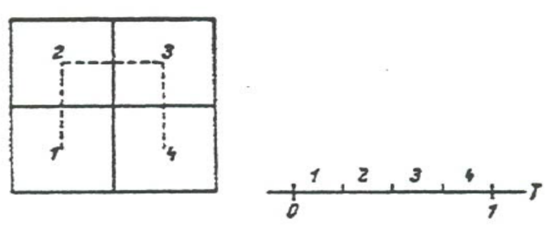
οπότε και δείξαμε την (4).
Παρατηρούμε ότι η διάσταση Hausdorff των συνόλων Cantor, $C(\lambda)$, «μετράει» με φυσικό τρόπο τα μεγέθη τους. Όταν το λ αυξάνεται, το μήκος των διαγραμμένων διαστημάτων μειώνεται και το σύνολο Cantor «μεγαλώνει» και παράλληλα μεγαλώνει η $\dim_H C(\lambda)$. Επίσης αν αφήσουμε το λ να διατρέξει από 0 ως το $1/2$, η $\dim_H C(\lambda)$ θα πάρει τις τιμές από 0 ως το 1.. Όπως είναι προφανές, η διάσταση του γνωστού συνόλου Cantor όπου $\lambda = 1/3$ θα είναι $\dim_H C(1/3) = log2/log3 = 0.63$.

4.2 Καμπύλη Peano

Το 1890 ο Ιταλός μαθηματικός Giuseppe Peano κατασκεύασε παράδειγμα γραμμής, που περνούσε από όλα τα σημεία ενός τετραγώνου δηλαδή «καμπύλης που γεμίζει ένα τετράγωνο». Η ανακάλυψη αυτή προκάλεσε αναταραχή στους μαθηματικούς και τους ανάγκασε να ξαναμελετήσουν τη διαίσθηση στα θεμέλια της έννοιας της καμπύλης, αφού δεν μπορούμε να δεχθούμε ότι ένα (πλήρες) τετράγωνο είναι μια καμπύλη. Αργότερα κι άλλοι μαθηματικοί ανακάλυψαν τέτοιες γραμμές που σήμερα ονομάζονται γραμμές Peano. Αυτό πάντως που μπορούμε να πούμε χωρίς ιδιαίτερη αυστηρότητα είναι ότι μια τέτοια καμπύλη αντιστοιχεί ένα (μονοδιάστατο) διάστημα σε μια (δισδιάστατη) περιοχή του επιπέδου, έτσι ώστε να διέρχεται από κάθε σημείο της περιοχής αυτής. Η διάσταση Hausdorff της γραμμής του $\mathbb{R}$ είναι ίση με 1 ενώ η διάσταση Hausdorff του διδιάστατου Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^2$ ειναι ίση με 2. Η καμπύλη Peano απεικονίζει το μοναδιαίο διάστημα [0,1] στο μοναδιαίο τετράγωνο $[0,1] \times [0,1]$ και προφανώς θα έχει διάσταση Hausdorff ακριβώς 2.

Για να καταλάβουμε πως κατασκευάζεται μια καμπύλη του Peano θα πρέπει να δείξουμε ότι ένα (ευθύγραμμο) τμήμα T μπορεί να απεικονιστεί συνεχώς επί ενός τετραγώνου Q. Θα εξηγήσουμε τώρα τι σημαίνει αυτό.

Έστω ότι μας έχουν δοθεί ένα τυχαίο τμήμα T και ένα τυχαίο τετράγωνο Q. Ο σκοπός μας είναι τώρα το να απεικονίσουμε κάθε σημείο του (ευθύγραμμου) τμήματος σ΄ ένα σημείο του τετραγώνου και μάλιστα με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε σημείο του τετραγώνου να αντιστοιχεί σε ένα σημείο τουλάχιστον του τμήματος. Η απεικόνιση που μας ενδιαφέρει πρέπει επιπλέον να είναι συνεχής δηλαδή, πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη: σημεία του τετραγώνου που αντιστοιχούν σε κοντινά σημεία του τμήματος να είναι τα ίδια κοντινά μεταξύ τους. Μια τέτοια απεικόνιση κατασκευάζεται με τον ακόλουθο τρόπο: Διαμερίζουμε το τμήμα T σε τέσσερα ίσα μέρη που συμβολίζουμε από αριστερά προς τα δεξιά με $T_1^1, T_2^1, T_3^1, T_4^1$.Χωρίζουμε αντίστοιχα το τετράγωνο σε τέσσερα ίσα υποτετράγωνα $Q_1^1, Q_2^1, Q_3^1, Q_4^1$.

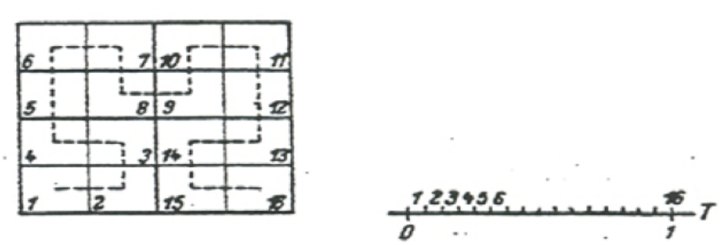


Σχήμα 1

Τα τμήματα $T_1^1, T_2^1, T_3^1, T_4^1$ και τα αντίστοιχα τετράγωνα $Q_1^1, Q_2^1, Q_3^1, Q_4^1$ τα ονομάζουμε, τμήματα και τετράγωνα πρώτης τάξης. Τώρα χωρίζουμε κάθε τμήμα σε τέσσερα ίσα μέρη και συμβολίζουμε τα τμήματα που προέρχονται από το T_1^1 με $T_1^2, T_2^2, T_3^2, T_4^2$ αυτά που προέρχονται από τη διαίρεση του T_2^1 με $T_5^2, T_6^2, T_7^2, T_8^2$, αυτά στα οποία διαιρείται και τέλος αυτά που προέρχονται από το T_3^1 με $T_9^2, T_{10}^2, T_{11}^2, T_{12}^2$.

Αυτά τα 16 τμήματα T_1^2 μέχρι T_{16}^2 που παίρνουμε από αυτή τη δεύτερη ανάλυση τα ονομάζουμε τμήματα δεύτερης τάξης. Στη συνέχεια διαιρούμε κάθε ένα από τα τέσσερα τετράγωνα $Q_1^1, Q_2^1, Q_3^1, Q_4^1$ σε τέσσερα ίσα υποτετράγωνα. Έτσι παίρνουμε 16 τετράγωνα δεύτερης τάξης. Τα τετράγωνα στα οποία αναλύεται το Q_1^1 συμβολίζουμε με $Q_1^2, Q_2^2, Q_3^2, Q_4^2$, αυτά που προκύπτουν από το Q_2^1 με $Q_5^2, Q_6^2, Q_7^2, Q_8^2$, αυτά που προέρχονται από το Q_3^1 με $Q_9^2, Q_{10}^2, Q_{11}^2, Q_{12}^2$, και τέλος αυτά που προκύπτουν από το Q_4^1 με $Q_{13}^2, Q_{14}^2, Q_{15}^2, Q_{16}^2$ Οι συμβολισμοί πρέπει να είναι επιλεγμένοι έτσι ώστε τα τετράγωνα των οποίων οι κάτω δείκτες διαφέρουν κατά ένα να έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο. Επειδή όμως, τα τέσσερα τετράγωνα που προκύπτουν κατά την διαμέριση πρώτου βαθμού ενός τετραγώνου πάντα έχουν ένα κοινό σημείο - το μέσο αυτού του τετραγώνου - αρκεί κανείς κατά την επιλογή των συμβολισμών να προσέξει μόνο να έχουν κοινό σημείο κάθε δύο από τα τετράγωνα Q_4^2 και Q_5^2, Q_8^2 και Q_9^2, Q_{12}^2 και Q_{13}^2 δηλαδή το τελευταίο και το πρώτο τετράγωνο δεύτερης τάξης που προκύπτουν από την διαμέριση γειτονικών τετραγώνων πρώτης τάξης.

Η διακεκομμένη γραμμή δείχνει τη σειρά των τετραγώνων, όταν τα αντίστοιχα τμήματα διατρέχονται από αριστερά προς τα δεξιά. Αν χωρίσουμε τώρα κάθε ένα από τα τμήματα δεύτερης τάξης σε τέσσερα ίσα τμήματα, παίρνουμε 64 τμήματα τρίτης τάξης που στη συνέχεια συμβολίζουμε (από αριστερά προς δεξιά) με $T_1^3, T_2^3, T_3^3, ..., T_{64}^3$ Με τον ίδιο τρόπο χωρίζουμε κάθε τετράγωνο δεύτερης τάξης σε τέσσερα ίσα τετράγωνα και παίρνουμε 64 τετράγωνα τρίτης τάξης που συμβολίζουμε με $Q_1^3, Q_2^3, Q_3^3, ..., Q_{64}^3$ όπου τα $Q_1^3, Q_2^3, Q_3^3, ..., Q_{64}^3$ έχουν προκύψει από την ανάλυση του Q_1^2 τα τετράγωνα$Q_5^3, Q_6^3, Q_7^3, Q_8^3$ από την ανάλυση του Q_2^2 κ.ο.κ.



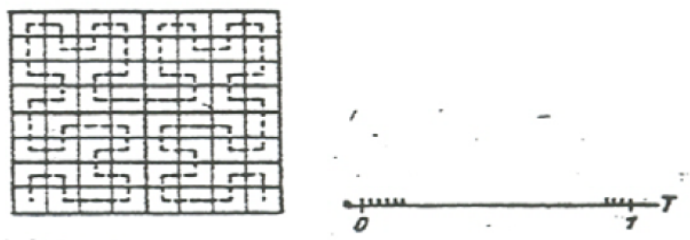
Σχήμα 2

Στον συμβολισμό πρέπει να προσέξουμε κάθε δύο γειτονικά τετράγωνα τρίτης τάξης (των οποίων οι κάτω δείκτες διαφέρουν κατά ένα) να έχουν ένα κοινό σημείο.

Όμως, και τα τέσσερα τετράγωνα τρίτης τάξης που προκύπτουν από την ανάλυση ενός τετραγώνου δεύτερης τάξης έχουν πάντα ένα κοινό σημείο (το μέσον αυτού του τετραγώνου). Επομένως, αρκεί κανείς κατά την επιλογή του συμβολισμού να προσέξει ώστε κάθε τετράγωνο τρίτης τάξης που εμφανίζεται τελευταίο στην διαμέριση ενός τετραγώνου δεύτερης τάξης να έχει κοινό σημείο με το πρώτο τετράγωνο τρίτης τάξης που προκύπτει από την διαμέριση ενός γειτονικού τετραγώνου δεύτερης τάξης. Η διακεκομμένη γραμμή μας δίνει τη σειρά των τετραγώνων, όταν τα αντίστοιχα τμήματα διατρέχονται από αριστερά προς τα δεξιά.

Αυτή τη διαδικασία ανάλυσης των τμημάτων και των τετραγώνων μπορούμε να την φανταστούμε να συνεχίζεται απεριόριστα. Τόσο το μήκος των τμημάτων όσο και το μήκος των πλευρών των τετραγώνων συγκλίνουν στο μηδέν καθώς αυξάνει η τάξη, διότι κατά την ν-ιοστή διαμέριση το μήκος των τμημάτων είναι $(\frac{1}{4})^n$ και το μήκος των πλευρών των τετραγώνων είναι $(\frac{1}{2})^n$. Τώρα αντιστοιχούμε σε κάθε τμήμα T_k^n τάξης n το τετράγωνο Q_k^n της ίδιας τάξης, (αυτό έχει τον ίδιο δείκτη k όπως και το τμήμα). Μ΄ αυτό τον τρόπο παίρνουμε για κάθε τάξη n μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στα τμήματα και στα τετράγωνα της ανάλυσης αυτής της τάξης. Αυτή η αντιστοιχία ανάμεσα στα τμήματα και στα τετράγωνα μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε την απεικόνιση που μας ενδιαφέρει από το τμήμα Τ επί του τετραγώνου Q. Έστω t_0 ένα τυχαίο σημείο του τμήματος Τ. Το σημείο αυτό ανήκει σε τουλάχιστον ένα (και το πολύ σε δύο) τμήματα πρώτης τάξης, τουλάχιστον σε ένα τμήμα δεύτερης τάξης κ.ο.κ. Αν πάρουμε τα τετράγωνα που αντιστοιχούν στα τμήματα που περιέχουν το σημείο t_0 , παίρνουμε μια άπειρη ακολουθία τετραγώνων. Επειδή κάθε τετράγωνο τάξης n ανήκει σε ένα συγκεκριμένο τετράγωνο προηγούμενης τάξης και επειδή η τάξη n αυξάνει το μήκος των πλευρών τείνει στο μηδέν, αυτά τα τετράγωνα έχουν μόνο ένα κοινό σημείο m_0 , το οποίο αντιστοιχούμε στο t_0 . Έτσι έχουμε δείξει ότι σε κάθε σημείο του τμήματος αντιστοιχεί ένα καλά ορισμένο σημείο του τετραγώνου Q.

Μπορεί όμως ένα σημείο του τετραγώνου να αντιστοιχεί σε πολλά σημεία του τμήματος. Η απεικόνιση μας, επομένως, δεν είναι αμφιμονοσήμαντη. Τέτοια σημεία του τετραγώνου που αντιστοιχούν σε πολλά σημεία του τμήματος είναι για παράδειγμα οι εσωτερικές γωνίες των τετραγώνων των διαχωρισμών όλων των τάξεων. Σημεία που είναι εσωτερικά τετραγώνων κάθε τάξης αντιστοιχούν σε ένα μοναδικό σημείο του τμήματος.



Σχήμα 3

Τώρα πρέπει να δείξουμε ότι με αυτή την αντιστοιχία κάθε σημείο του τετραγώνου αντιστοιχεί σε τουλάχιστον ένα σημείο του τμήματος. Έστω m_0 ένα οποιοδήποτε σημείο του Q. Αυτό θα ανήκει τουλάχιστον σε ένα τετράγωνο Q_i^1 πρώτης τάξης, τουλάχιστον σε ένα τετράγωνο Q_k^2 δεύτερης τάξης, το οποίο θα περιέχεται στο Q_i^1 , τουλάχιστον σε ένα τετράγωνο Q_l^3 τρίτης τάξης, το οποίο με τη σειρά του θα περιέχεται στο Q_k^2 κ.ο.κ. Θεωρούμε τα τμήματα που αντιστοιχούν σ΄ αυτά τα τετράγωνα. Έστω ότι αυτά είναι τα T_i^1, T_k^2, T_l^3 κ.ο.κ. Καθένα απ΄ αυτά τα τμήματα περιέχει στα προηγούμενα όπου το μήκος των τμημάτων τείνει στο μηδέν με την αύξηση της τάξης. Συνεπώς, όλα αυτά τα τμήματα έχουν μόνο ένα κοινό σημείο t_0 . Στο σημείο αυτό του τμήματος Τ αντιστοιχεί ακριβώς το σημείο m_0 του τετραγώνου Q. Πρέπει ακόμα να δείξουμε τη συνέχεια της απεικόνισης που κατασκευάσαμε. Αν t_0 είναι κάποιο σημείο του τμήματος, τότε για οποιοδήποτε n κάθε σημείο t αρκετά κοντινό στο t_0 θα βρίσκεται, στο ίδιο τμήμα τάξης n ή σε ένα γειτονικό τμήμα της τάξης αυτής. Τότε όμως τα σημεία m_0 και m του Q στα οποία αντιστοιχούνται τα t_0 και t, θα ανήκουν στο ίδιο τετράγωνο ή σε γειτονικά τετράγωνα. Αν, επομένως, επιλέξει κανείς τα σημεία t αρκετά κοντά στο t_0, τότε τα σημεία m, στα οποία αυτά αντιστοιχούνται, θα βρίσκονται επαρκώς κοντά στο m_0 , απ΄ όπου προκύπτει η συνέχεια της απεικόνισης. Η απεικόνιση αυτή ενός τμήματος επί ενός τετραγώνου μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε μια καμπύλη του Peano. Αν πάρουμε ως τμήμα Τ το διάστημα [0,1] της ευθείας των πραγματικών αριθμών και ως τετράγωνο Q το μοναδιαίο τετράγωνο του xy-επιπέδου (του οποίου τα σημεία έχουν συντεταγμένες που χαρακτηρίζονται από τις ανισότητες $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, η απεικόνιση του τμήματος επί του τετραγώνου που κατασκευάστηκε παραπάνω παράγει δυο συνεχείς συναρτήσεις $x = \phi(t), y = \psi(t)$, τις οποίες παίρνουμε, αν σε κάθε τιμή t αντιστοιχίσουμε τις συντεταγμένες του σημείου m που αντιστοιχεί στο t, μέσω της δοθείσης συνεχούς απεικόνισης.

Η συνέχεια των συναρτήσεων ϕ και ψ προκύπτει από το γεγονός ότι για κοντινά σημεία t και t_0 του τμήματος Τ τα σημεία m_0 και m του Q στα οποία αυτά αντιστοιχούνται είναι και πάλι κοντινά. Από αυτό έπεται ότι και οι συντεταγμένες τους θα διαφέρουν κατά λίγο. Έτσι παίρνουμε το παράδειγμα μιας καμπύλης που δίνεται από παραμετρικές εξισώσεις και διατρέχει όλα τα σημεία του τετραγώνου. Όπως παρατηρήσαμε ήδη, η συνεχής απεικόνιση από ένα τμήμα επί ενός τετραγώνου που μελετήσαμε δεν είναι αμφιμονοσήμαντη. Υπάρχει ένα άπειρο σύνολο σημείων του τετραγώνου, καθένα από τα οποία αντιστοιχεί σε περισσότερα από ένα (δύο, τρία ή τέσσερα) σημεία του τμήματος. Θα μπορούσε κανείς να δείξει ότι αυτή η συμπεριφορά δεν εξαρτάται από τον τρόπο που κατασκευάστηκε η συνεχής απεικόνιση του τμήματος επί του τετραγώνου: Για κάθε τέτοια απεικόνιση υπάρχουν σημεία του τετραγώνου που αντιστοιχούν σε περισσότερα από ένα σημεία του τμήματος.

4.3 Γράφημα και Εικόνα κίνησης Brown

Ορισμός 32 *Μια στοχαστική διαδικασία πραγματικών τιμών $\{B(t) : t \geq 0\}$ λέγεται γραμμική ή μονοδιάστατη κίνηση Brown με αρχή στο $x \in \mathbb{R}$ αν ισχύουν τα παρακάτω :*
1. $B(0) = x$
2. Η διαδικασία έχει ανεξάρτητες αυξήσεις. Για παράδειγμα $\forall 0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$ οι αυξήσεις $\{B(t_k) - B(t_{k-1})\}_{k=2}^{n}$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές
3. $\forall t, h \geq 0$ οι αυξήσεις $B(t+h) - B(t)$ είναι κανονικά κατανεμημένες με μέση τιμή 0 και διακύμανση h
4. σχεδόν βέβαια η συνάρτηση $t \mapsto B(t)$ είναι συνεχής

Λέμε ότι η $\{B(t) : t \geq 0\}$ είναι τυποποιημένη κίνηση Brown αν $x = 0$.

Παρατήρηση : Είναι τετριμμένο το θεώρημα ότι η κίνηση Brown υπάρχει. Θα είμαστε ικανοποιημένοι με αυτή την παραδοχή.

Ορισμός 33 *Αν $B_1, ..., B_n$ είναι ανεξάρτητες γραμμικές κινήσεις Brown που ξεκινάνε από $x_1, ..., x_n$ τότε η στοχαστική διαδικασία $\{B(t) : t \geq 0\}$ που δίνεται από $B(t) = (B_1(t), ..., B_n(t))$ λέγεται n-διάστατη κίνηση Brown που ξεκινά στο $(x_1, ..., x_n)$.*

Ορισμός 34 *Μια συνάρτηση $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ λέγεται τοπικά $\alpha-$Hölder συνεχής στο $x \geq 0$ αν υπάρχει ένα $\delta > 0$ και ένα $c > 0$ τέτοια ώστε*

$$|f(y) - f(x)| \leq c|y - x|^{\alpha}, \text{ για όλα τα } y \geq 0 \text{ με } |y - x| \leq \delta.$$

Αν $\alpha = 1$ τότε η f λέγεται τοπικά Lipschitz συνεχής στο x. Να σημειώσουμε ότι η συνέχεια *Hölder* γίνεται πιο ισχυρή όσο μεγαλώνει το α.

Παρατηρούμε ότι αν $f : (E_1, \rho_1) \to (E_2, \rho_2)$ είναι επί και $\alpha - Hölder$ συνεχής με σταθερά c, τότε για $\beta \geq 0$,

$$H^{\beta}(E_2) \leq c^{\beta} H^{\alpha\beta}(E_1)$$

και συνεπώς

$$dim_H(E_2) \leq \frac{1}{2} dim_H(E_1).$$

Θεώρημα 44 *Αν $\alpha < 1/2$, τότε σχεδόν βέβαια, η κίνηση Brown είναι παντού τοπικά $\alpha - Hölder$ συνεχής .*

Απόδειξη

Η απόδειξη βασίζεται σε λεπτομέρειες σχετικές με την κατασκευή της κίνησης Brown γι' αυτό και παραλείπεται.

Ορισμός 35 *Για μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}^d$ για $A \subset [0, \infty)$ ορίζουμε το γράφημα ως εξής :*

$$Graph_f = \{(t, f(t)) : t \in A\} \subset \mathbb{R}^{d+1},$$

και το Range ή τροχιά

$$Range_f = f(A) = \{f(t) : t \in A\} \subset \mathbb{R}^d.$$

Πρόταση 2 *Έστω $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^d$ μια $\alpha - Hölder$ συνάρτηση. Τότε*

$$(a) dim_H(Graph_f) \leq 1 + (1 - a) min\{d, 1/a\}.$$

$$(\beta) \text{ για κάθε } A \subset [0, 1], \text{ έχουμε } dim_H f(A) \leq \frac{dim_H(A)}{\alpha}.$$

Απόδειξη

(α) Αφού η f είναι $\alpha - Hölder$ συνεχής υπάρχει μια σταθερά C τέτοια ώστε αν $s, t \in [0, 1]$ με $|t - s| \leq \epsilon$ τότε $|f(t) - f(s)| \leq C\epsilon^a$. Τώρα καλύπτουμε το [0,1] με διαστήματα μήκους ϵ που δεν είναι περισσότερα από $[1/\epsilon]$. Η εικόνα κάθε τέτοιου διαστήματος περιέχεται σε μια μπάλα διαμέτρου $C\epsilon^a$.

Μπορούμε τώρα είτε να καλύψουμε κάθε μπάλα με ένα σταθερό πολλαπλάσιο ϵ^{da-d} από μπάλες διαμέτρου ϵ, ή να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι τα υποδιαστήματα μήκους $(\epsilon/C)^{1/a}$ στο χώρο απεικονίζονται σε μπάλες διαμέτρου ϵ για να καλύψουμε την εικόνα μέσα στη μπάλα με ένα σταθερό πολλαπλάσιο $\epsilon^{1-1/a}$ από μπάλες ακτίνας ϵ.

Και στις δύο περιπτώσεις εξετάζουμε την κάλυψη του γραφήματος που αποτελείται από το προιόν των διαστημάτων και των αντίστοιχων μπαλών στο $[0,1] \times \mathbb{R}^d$ διαμέτρου ϵ. Η πρώτη κατασκευή απαιτεί ένα σταθερό πολλαπλάσιο ϵ^{da-d-1} συνόλων, ενώ το δεύτερο χρησιμοποιεί $\epsilon^{-1/a}$ σύνολα, τα οποία έχουν διάμετρο της τάξης του ϵ. Αυτές οι καλύψεις δίνουν τα επιθυμητά άνω φράγματα.

(β) Έστω ότι $dim_H(A) < \beta < \infty$. Τότε υπάρχει κάλυψη $A_1, A_2 ...$ έτσι ώστε $A \subset \cup_j A_j$ και $\sum_j |A_j|^\beta < \epsilon$. Τότε τα $f(A_1), f(A_2)....$ είναι κάλυψη του $f(A)$ και $|f(A_j)| \leq C|A_j|^a$ όπου το C είναι η σταθερά $H\ddot{o}lder$. Έτσι

$$\sum_j |f(A_j)|^{\beta/a} \leq C^{\beta/a} \sum_j |A_j|^\beta < C^{\beta/a}\epsilon \to 0 \text{ καθώς } \epsilon \to 0$$

Ως εκ τούτου $dim_H f(A) \leq \beta/a$ κι έτσι προκύπτει η επιθυμητή ανισότητα.

Πόρισμα 21 *Το γράφημα μιας d-διάστατης κίνησης Brown ικανοποιεί σχεδόν βέβαια το εξής :*

$$dim_H(Graph) \leq \begin{cases} 3/2 & \text{αν } d = 1 \\ 2 & \text{αν } d \geq 2 \end{cases}$$

για για κάθε σύνολο $A \subset [0,\infty)$, σχεδόν βέβαια

$$dim_H B(A) \leq min\{2dim_H(A), d\}.$$

Θεώρημα 45 *(Taylor 1953) Έστω $\{B(t) : t \geq 0\}$ μια d-διάστατη κίνηση Brown.*

$$\text{(a) αν } d = 1 \text{ τότε } dim_H Graph = \frac{3}{2} \text{ σχεδόν βέβαια.}$$

$$\text{(β) αν } d \geq 2 \text{ τότε } dim_H Range = dim_H Graph = 2 \text{ σχεδόν βέβαια.}$$

Απόδειξη

Γνωρίζουμε ήδη τα άνω φράγματα από το παραπάνω πόρισμα, οπότε μένει να δούμε τα κάτω φράγματα για την τροχιά της κίνησης Brown με $d \geq 2$.

(β) Ένα φυσικό μέτρο πάνω στην τροχιά είναι το μέτρο που ορίζεται με βάση το μέτρο Lebesgue ως εξής : $\mu_B(A) = \lambda(B^{-1}(A) \cap [0,1])$ για όλα τα σύνολα Borel $A \subset \mathbb{R}^d$ ή ισοδύναμα

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_B(x) = \int_0^1 f(B(t))dt$$

Για όλες τις φραγμένες μετρήσιμες συναρτήσεις f. Θέλουμε να δείξουμε ότι για κάθε $0 < a < 2$

$$\mathbb{E}[I_a(\mu_B)] = \mathbb{E} \int \int \frac{d\mu_B(x) d\mu_B(y)}{|x-y|^a} = \mathbb{E} \int_0^1 \int_0^1 \frac{ds\, dt}{|B(t) - B(s)|^a} < \infty. \qquad (1)$$

Για να το κάνουμε αυτό ξεκινάμε με την μέση τιμή

$$\mathbb{E}|B(t) - B(s)|^{-a} = \mathbb{E}[(|t-s|^{1/2}|B(1)|)^{-a}] = |t-s|^{-a/2} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{c_d}{|z|^a} e^{-|z|^2/2} dz.$$

Το ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί με τη χρήση πολικών συντεταγμένων, αλλά αυτό που χρειαζόμαστε είναι μια πεπερασμένη σταθερά c που εξαρτάται μόνο από το d και το a. Αντικαθιστώντας αυτή την έκφραση στην (1) και εφαρμόζοντας το Θεώρημα Fubini έχουμε :

$$\mathbb{E}[I_a(\mu_B)] = c \int_0^1 \int_0^1 \frac{dsdt}{|t-s|^{a/2}} \leq 2c \int_0^1 \frac{du}{u^{a/2}} < \infty$$

Επομένως $I_a(\mu_B) < \infty$ και ως εκ τούτου $dim_H Range > a$ σχεδόν βέβαια. Το κάτω φράγμα της τροχιάς προκύπτει αφήνοντας $a \to 2$. Μπορούμε επίσης να βρούμε και ένα κάτω φράγμα για τη διάσταση του γραφήματος : καθώς το γράφημα μιας συνάρτησης μπορεί να προβληθεί στην τροχιά, η διάσταση του γραφήματος είναι τουλάχιστον η διάσταση της τροχιάς. Ως εκ τούτου, αν $d \geq 2$ σχεδόν βέβαια $dim_H Graph \geq 2$.

Τώρα θα επιστρέψουμε στη γραμμική κίνηση Brown και θα αποδείξουμε το πρώτο μέρος (α) του θεωρήματος του Taylor.

(α) Χρησιμοποιούμε την ενεργειακή μέθοδο για την εύρεση ενός κατώτατου φράγματος. Στο παραπάνω πόρισμα είδαμε ότι $dim_H(Graph) \leq 3/2$. Έστω $a > 3/2$, ορίζουμε ένα μέτρο στο γράφημα ως εξής:

$$\mu(A) = \lambda_1(\{0 \leq t \leq 1 : (t, B(t)) \in A\}) \text{ για } A \subset [0, \infty) \times \mathbb{R} Borel.$$

Αλλάζοντας μεταβλητές η α-ενέργεια του μ μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$\int \int \frac{d\mu(x) d\mu(y)}{|x-y|^a} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{ds\ dt}{(|t-s|^2 + |B(t) - B(s)|^2)^{a/2}}.$$

Φράσσοντας το $\frac{ds\ dt}{(|t-s|^2 + |B(t)-B(s)|^2)^{a/2}}$, παίρνοντας μέσες τιμές και εφαρμόζοντας το Θεώρημα Fubini προκύπτει

$$\mathbb{E} I_a(\mu) \leq \int_0^1 \mathbb{E}((t^2 + B(t)^2)^{-a/2}) dt. \qquad (1)$$

Έστω $p(z) = \sqrt{2\pi}^{-1} e^{(-z^2/2)}$ η τυποποιημένη κανονική πυκνότητα. Η παραπάνω μέση τιμή μπορεί να γραφτεί

$$2\int_0^{+\infty} (t^2 + tz^2)^{-a/2} p(z)dz. \qquad (2)$$

Συγκρίνοντας το μέγεθος των προσθετέων στην ολοκλήρωση,χωρίζουμε σε $z \leq \sqrt{t}$ και $z > \sqrt{t}$.Μπορούμε να φράξουμε την (2) από πάνω

$$\int_0^{\sqrt{t}} (t^2)^{-a/2} dz + \int_{\sqrt{t}}^{\infty} (tz^2)^{-a/2} p(z)dz = t^{\frac{1}{2}-a} + t^{-a/2} \int_{\sqrt{t}}^{\infty} z^{-a} p(z)dz.$$

Ακόμα σπάμε το ολοκλήρωμα στο 1 και έχουμε

$$\int_{\sqrt{t}}^{\infty} z^{-a} p(z)dz \leq 1 + \int_{\sqrt{t}}^{1} z^{-a} dz.$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι τάξης $t^{(1-a)/2}$. Αντικαθιστώντας αυτά τα αποτελέσματα στην 1 βλέπουμε ότι η μέση τιμή της ενέργειας είναι πεπερασμένη για $a > 3/2$. Ο ισχυρισμός προκύπτει από την ενεργειακή μέθοδο.

4.4 Συναρτήσεις Weierstrass

Ίσως το πιο διάσημο παράδειγμα μιας συνεχούς αλλά πουθενά διαφόρισιμης συνάρτησης είναι η συνάρτηση Weierstrass

$$w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k cos(2\pi b^k x),$$

όπου $0 < a < 1 < b$ με $ab \geq 1$. Εδώ θα εξετάσουμε την συνάρτηση Weierstrass με τυχαία φάση που προστίθεται σε κάθε όρο

$$w_\Theta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n cos(2\pi(b^n x + \theta_n)),$$

όπου $\Theta = \{\theta_0, \theta_1, ...\}$.

Θα αποδείξουμε το ακόλουθο Θεώρημα :

Θεώρημα 46 *Αν κάθε θ_n επιλέγεται ανεξάρτητα με βάση το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας στο [0,1], τότε με πιθανότητα ίση με 1 η διάσταση Hausdorff του γραφήματος της w_Θ είναι ίση με $D = 2 + \frac{loga}{logb}$.*

Απόδειξη

Έστω $H = [0,1]^\infty$ με το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας και έστω $\Theta = \{\theta_0, \theta_1, ...\}$ ένα σημείο στον Η. Αφού $D = 2 + \frac{loga}{logb}$ θα έχουμε ότι $a = b^{D-2}$ οπότε :

$$w_\Theta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^{(D-2)n} cos(2\pi(b^n x + \theta_n)),$$

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι σχεδόν για κάθε $\Theta \in H$ η διάσταση Hausdorff του γραφήματος της w_Θ είναι ίση με D. Το γεγονός ότι η διάσταση Hausdorff του γραφήματος είναι το πολύ D για όλα τα $\Theta \in H$ είναι γνωστό αλλά θα το αποδείξουμε για να έχουμε μια ολοκληρωμένη απόδειξη.

Θεωρούμε το γράφημα της w_Θ πάνω σε ένα πεπερασμένο διάστημα J. Ξεκινάμε με μια εκτίμηση που δείχνει ότι η w_Θ είναι $Hölder$ συνεχής στο J με εκθέτη $2 - D$. Για κάθε $x, y \in J$

$$|w_\Theta(x) - w_\Theta(y)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} b^{(D-2)n} |cos(2\pi(b^n x + \theta_n)) - cos(2\pi(b^n y + \theta_n))|$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} b^{(D-2)n} min(2, 2\pi b^n |x - y|)$$

$$\leq \sum_{n=0}^{m-1} 2\pi b^{(D-1)n} |x - y| + \sum_{n=m}^{\infty} 2b^{(D-2)n}$$

$$= 2\pi \frac{b^{(D-1)m} - 1}{b^{D-1} - 1} |x - y| + 2\frac{b^{(D-2)m}}{1 - b^{D-2}}$$

για όλα τα $m > 0$. Αν $|x - y| \leq 1$ έστω m ο θετικός ακέραιος με $b^{-m} < |x - y| \leq b^{-(m-1)}$ Αφού $1 < D < 2$ προκύπτει ότι

$$|w_\Theta(x) - w_\Theta(y)| \leq 2\pi \frac{(b/|x - y|)^{(D-1)}}{b^{D-1} - 1} |x - y| + 2\frac{|x - y|^{2-D}}{1 - b^{D-2}}$$

$$\leq \Big(\frac{2\pi b^{D-1}}{b^{D-1} - 1} + \frac{2}{1 - b^{D-2}}\Big) |x - y|^{2-D}.$$

Έστω L το μήκος του J και έστω $N > L$ ένας θετικός ακέραιος.Χωρίζουμε το J σε N διαστήματα ίσου μήκους. Από την παραπάνω εκτίμηση, σε ένα διάστημα μήκους L/N οι τιμές της $w_t h$ ποικίλουν το πολύ από $C(L/N)^{2-D}$ εώς C ανεξάρτητα του N.Έτσι το γράφημα της $w_t h$ σε αυτό το διάστημα μπορεί να καλυφθεί από το πολύ $C(L/N)^{1-D} + 1$ τετράγωνα μήκους L/N. Τότε το γράφημα της w_Θ σε όλο το J μπορεί να καλυφθεί από το πολύ $N(C(L/N)^{1-D} + 1) = CL^{1-D}N^D + N$ τετράγωνα μήκους L/N.Προκύπτει ότι το $D-$ διάστατο μέτρο Hausdorff του γραφήματος της w_Θ στο J είναι πεπερασμένο και η διάσταση Hausdorff του γραφήματος είναι το πολύ D.

Επιστρέφουμε τώρα στην απόδειξη ότι η διάσταση Hausdorff του γραφήματος της w_Θ στο J είναι τουλάχιστον D σχεδόν για κάθε $\Theta \in H$. Έστω μ_Θ το μέτρο που έχει ως στήριγμα το γράφημα της w_Θ και που επάγεται από το μέτρο Lebesgue στο J. Για $S \subset \mathbb{R}^2$,

$$\mu_\Theta(S) = \nu(\{x \in J : (x, w_\Theta(x)) \in S\})$$

Τότε η t- ενέργεια του μ_Θ είναι

$$I_t(\mu_\Theta) = \int_J \int_J \frac{dx\, dy}{((x-y)^2 + (w_\Theta(x) - w_\Theta(y))^2)^{t/2}}$$

Θα αποδείξουμε ότι για κάθε $t < D$ το $I_t(\mu_\Theta)$ είναι πεπερασμένο σχεδόν για κάθε $\Theta \in H$, από το οποίο συνεπάγεται ότι η διάσταση Hausdorff του γραφήματος της w_Θ είναι τουλάχιστον t. Επιλέγοντας μια ακολουθία τιμών του t πλησιάζοντας το D συμπεραίνουμε ότι σχεδόν για κάθε $\Theta \in H$ η διάσταση Hausdorff του γραφήματος της w_Θ είναι τουλάχιστον D.Για $t \in (1, D)$ θα δείξουμε ότι το ολοκλήρωμα

$$E_t = \int_H I_t(\mu_\Theta) d\Theta$$

είναι πεπερασμένο. Προκύπτει ότι το $I_t(\mu_\Theta)$ είναι πεπερασμένο για σχεδόν κάθε Θ. Από το Θεώρημα Tonelli :

$$E_t = \int_J \int_J \int_H \frac{d\Theta}{((x-y)^2 + (w_\Theta(x) - w_\Theta(y))^2)^{t/2}} dx\, dy.$$

Υποστηρίζουμε ότι υπάρχει $C > 0$ τέτοιο ώστε για $0 < |x-y| \leq 1/(2b^2)$,

$$\int_H \frac{d\Theta}{((x-y)^2 + (w_\Theta(x) - w_\Theta(y))^2)^{t/2}} \leq C|x-y|^{D-t-1}.$$

Αφού $t < D$, έχουμε ότι $E_t < \infty$.Ορίζουμε το x και το y με $0 < |x-y| \leq 1/(2b^2)$, και έστω $z = w_e(x), w_e(y)$. Θεωρώντας τη z ως συνάρτηση της τυχαίας ακολουθίας Θ, θα δείξουμε ότι το z έχει μία φραγμένη συνάρτηση πυκνότητας $h(z)$. (Φυσικά το h εξαρτάται από το x και το y). Έχουμε ότι

$$\int_H \frac{d\Theta}{((x-y)^2 + (w_\Theta(x) - w_\Theta(y))^2)^{t/2}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(z)dz}{((x-y)^2 + z^2)^{t/2}}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(|x-y|w)|x-y|dw}{|x-y|^t(1+w^2)^{t/2}}$$

$$\leq (sup_z h(z))|x-y|^{1-t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dw}{(1+w^2)^{t/2}}.$$

Οπότε για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη χρειάζεται μόνο να δείξουμε ότι $h(z) \leq C'A|x-y|^{D-2}$ για κάποια $C'A > 0$ που είναι ανεξάρτητα από τα x και y.Τώρα

$$z = w_\Theta(x) - w_\Theta(y)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} b^{(D-2)n}(cos(2\pi(b^n x + \theta_n)) - cos(2\pi(b^n y + \theta_n)))$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 2b^{(D-2)n} sin(2\pi b^n (y-x)/2) sin(2\pi(b^n(x+y)/2 + \theta_n))$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q_n sin(r_n + 2\pi\theta_n),$$

όπου q_n και r_n δεν εξαρτώνται από το Θ για όλα τα n. Έστω $z_n = q_n sin(r_n + 2\pi\theta_n)$, τότε $z_0, z_1, ...$ είναι τυχαίες ανεξάρτητες μεταβλητές (αφού $\theta_0, \theta_1, ...$ είναι αναξάρτητα) με συναρτήσεις πυκνότητας

$$h_n(z_n) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{q_n^2 - z_n^2}} & |z_n| < |q_n| \\ 0 & |z_n| \geq |q_n| \end{cases}$$

(αφού $r_n + 2\pi\theta_n$ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη σε ένα διάστημα μήκους 2π). Προκύπτει ότι η συνάρτηση πυκνότητας $h(z)$ για $z = z_0 + z_1 + ...$ είναι η άπειρη συνέλιξη $h_0 * h_1 * ...$. Αφού η μέγιστη τιμή μίας πυκνότητας πιθανότητας δεν μπορεί να αυξηθεί υπό συνέλιξη με άλλη πυκνότητα πιθανότητας, οποιοδήποτε άνω φράγμα σε μία άπειρη συνέλιξη $h_j * ... * h_k$ είναι επίσης ένα άνω φράγμα του h_z. Έπειτα,

$$q_n = 2b^{(D-2)n} sin(2\pi b^n (y-x)/2)$$

και ότι $0 < |x-y| < 1/(2b^2)$. Έστω ότι $k \geq 2$ είναι ο ακέραιος για τον οποίο $(1/2)b^{-k-1} < |x-y| \leq (1/2)b^{-k}$. Τότε

$$\frac{\pi}{2b^3} < |2\pi b^{k-2}\frac{y-x}{2}| < |2\pi b^k \frac{y-x}{2}| \leq \frac{\pi}{2}$$

και ως εκ τούτου

$$|q_n| > 2sin(\frac{\pi}{2b^3})b^(D-2)k > 2sin(\frac{\pi}{2b^3})|x-y|^{2-D}$$

για $n = k-2, k-1, k$. Έστω $||\cdot||_p$ η νόρμα L^p, και παρατηρούμε ότι $h_n \in L^p$ για $p < 2$. Αυτό προκύπτει για $n = k-2, k-1, k$

$$||h_n||_{3/2} = K|q_n|^{-1/3} \leq K'A|x-y|^{(D-2)/3},$$

όπου το K είναι μια απόλυτη σταθερά και το K' εξαρτάται μόνο από το b. Από την ανισότητα του Young

$$||h_{k-1} * h_k||_3 \leq ||h_{k-1}||_{3/2}||h_k||_{3/2},$$

και από την ανισότητα του $Hölder$,

$$h_{k-2} * h_{k-1} * h_k(z) \leq ||h_{k-2}||_{3/2}||h_{k-1} * h_k||_3,$$

$$\leq ||h_{k-2}||_{3/2}||h_{k-1}||_{3/2}||h||_{3/2} \leq K^{'3}|x-y|^{D-2}.$$

Το ίδιο φράγμα εφαρμόζεται στο $h(z)$, και η απόδειξη ολοκληρώνεται.

5 Επίμετρο

Οι εφαρμογές του μέτρου και της διάστασης Hausdorff σε διάφορους τομείς είναι αρκετές και σημαντικές. Από τη Γεωμετρία Finsler [2] και τις διοφαντικές γεωδαισιακές [21] εώς τα fractals [23],την πολεοδομία [3] και τα πεδία Gauss [6], [8] . Περισσότερες λεπτομέρειες υπάρχουν στην βιβλιογραφία. Θα κλείσουμε παρουσιάζοντας συνοπτικά δύο σημαντικά αποτελέσματα

Το μέτρο Hausdorff του γραφήματος της κλασματικής κίνησης Brown

Η κλασματική κίνηση Brown $X_\gamma(t)$ στο [0,T] είναι μια γενίκευση της κίνησης Brown χωρίς ανεξάρτητες αυξήσεις. Ξεκινά από το μηδέν,έχει μέση τιμή μηδέν για όλα τα $t \in [0, T]$ και έχει την παρακάτω συνάρτηση συνδιακύμανσης

$$E[X_\gamma(t)X_\gamma(s)] = \frac{1}{2}(|t|^{2\gamma} + |s|^{2\gamma} - |t-s|^{2\gamma}),$$

όπου γ είναι πραγματικός αριθμός και ονομάζεται συντελεστής της Hurst.

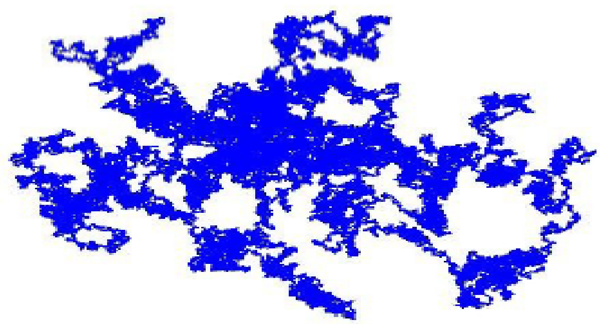
Έστω $X_\gamma(t)$ $(t \in \mathbb{R}^d)$ η κλασματική κίνηση Brown στον $\mathbb{R}^d$ με συντελεστή Hurst γ. Έστω $GrX_\gamma([0,1]^N)$ το γράφημα της X_γ, τότε η διάσταση Hausdorff του γραφήματος της κλασματικής κίνησης Brown είναι

$$dim_H GrX_\gamma([0,1]^N) = \begin{cases} N/\gamma & \text{αν } N \leq \gamma d \\ N + (1-\gamma)d & \text{αν } N > \gamma d \end{cases}$$

Για περισσότερες λεπτομέρειες σας παραπέμπουμε εδώ [8]. Για γ=1/2 έχουμε την κλασσική κίνηση Brown.

Η διάσταση Hausdorff του συνόρου του «νησιού» του B[0,1]

Το 2006 ο W.Werner βραβεύθηκε με το μετάλλιο Fields για την προσφορά του σε διάφορους τομείς των μαθηματικών. Σημαντικό του επίτευγμα ήταν ότι απέδειξε μαζί με τον Lawler και τον Schramm την εικασία του Mandelbrot ότι η διάσταση Hausdorff του συνόρου του «νησιού» που δημιουργείται από την τροχιά της κίνησης Brown είναι $\frac{4}{3}$ με πιθανότητα ίση με 1.



Για περισσότερες λεπτομέρειες σας παραπέμπουμε εδώ [10].

6 Βιβλιογραφία

Αναφορές

[1] C.A.Rogers *Hausdorff measures* Cambridge University Press 1970

[2] J.C.Alvarez Paiva and G.Berck *What is wrong with the Hausdorff measure in Finsler spaces.*

[3] Ε.Παππά, Α.Σπυρόπουλος, Β. Παπαδόπουλος *Εφαρμογή της κλασματικής γεωμετρίας στην επέκταση πόλεων*

[4] B.B.Mandelbrot *How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension*

[5] Y.Xiao *Hausdorff measure of the graph of fractional Brownian motion*

[6] Y.Xiao *Hausdorff measure of the sample paths of gaussian random fields*

[7] A.S.Parchomenko *Τι είναι καμπύλη·*

[8] Robert J.Adler *Hausdorff dimension and gaussian fields*

[9] Peter Hansen *Brownian motion and Hausdorff dimension*

[10] Michael J.Kozdron *A Random Look at the Schramm-Loewner Evolution*

[11] Z.Ciesielski,S.J.Taylor *First passage times and sojourn times for brownian motion in space and the exact Hausdorff measure of the sample path*

[12] S.J.Taylor *The Hausdorff a-dimensional measure of Brownian paths in n-space*

[13] Daniel Ray *Sojourn times and the exact Hausdorff measure of the sample path for planar brownian motion*

[14] Λεώνη Δάλλα *The n-dimensional Hausdorff measure of the n-skeleton of a convex W-compact set (Body)*

[15] Ρουμελιώτη Ε. Ελένη *Εισαγωγή στα σύνολα Julia και στο σύνολο Mandelbrot*

[16] Yyval Peres *An invitation to sample paths of brownian motion*

[17] Edwin Perkins *The exact Hausdorff measure of the level sets of a brownian motion*

[18] Β.Δρακόπουλος *On the computation of the hausdorff metric between digitised images in three dimensions*

[19] Wendelin Werner *For his contributions to the development of stochastic Loewner evolution,the geometry of two dimensonal brownian motion and conformal field theory*

[20] David C.Seal *An introduction to fractals and hausdorff measures*

[21] Sa'ar Hersonsky,Frederic Paulin *Hausdorff dimension of diophantine geodesics in negatively curved manifolds*

[22] J.D.Howroyd *On the theory of hausdorff measures in metric spaces*

[23] Gerald Edgar *Measure,topology and fractal geometry* Springer 2008

[24] M.Mursaleen,Abdullah K.Noman *Applications of hausdorff measure of noncompactness in the spaces of generalized means*

[25] Brian R.Hunt *The hausdorff dimension of graphs of Weierstrass functions*

[26] Naotaka Kajino *Analysis and geometry of the measurable Riemannian structure of the Sierpinski gasket*

[27] Jay Shah *Hausdorff dimension and its applications*

[28] Ι.Σπηλιώτης *Σημειώσεις* 2010

[29] Σ. Νεγρεπόντης *Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση*

[30] Α.Χουσαϊνοβ *Θεωρία Θραυσμάτων* Πανεπιστήμιο Αιγαίου 2002

[31] C.J. Bishop, Yuval Peres *Fractal sets in Probability and Analysis*

[32] P. Morters, Yuval Peres *Brownian Motion* May 25,2008

[33] P.Billingsley *Probability and Measure*