ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΑΡΙΘΜΟΙ CATALAN ΚΑΙ STIRLING

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΔΕΔΕ ΓΕΩΡΓΙΑ

Α.Μ.: 09101269

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

Χ. ΚΟΥΚΟΥΒΙΝΟΣ - ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΕΜΠ

ΑΛ. ΠΑΠΑΪΩΑΝΝΟΥ - ΑΝΑΠΛ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΕΜΠ (ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ)

Π. ΣΤΕΦΑΝΕΑΣ – ΛΕΚΤΟΡΑΣ ΕΜΠ

ΑΘΗΝΑ 2013

ΣΥΝΟΨΗ

Αυτή είναι μια διπλωματική εργασία στα Διακριτά Μαθηματικά με τίτλο: «Αριθμοί Catalan και Stirling» όπου εξετάζονται εκτενώς οι αριθμοί Catalan και οι αριθμοί Stirling α’ και β’ είδους. Στόχος είναι η μελέτη του θεωρητικού πλαισίου πάνω στο οποίο βασίζονται, αλλά και των εφαρμογών τους σε σημαντικά προβλήματα, που εμπίπτουν και σε άλλα επιστημονικά πεδία, όπως η Επιστήμη των Υπολογιστών.

Στο εισαγωγικό κεφάλαιο γίνεται μια αναφορά στους διωνυμικούς συντελεστές, δεδομένου ότι είναι δομικοί λίθοι της Συνδυαστικής, και σε άλλες ακολουθίες αριθμών, που σχετίζονται είτε με τους αριθμούς Catalan είτε με τους αριθμούς Stirling, όπως οι αριθμοί Bell, οι Motzkin και οι Fibonacci.

Στο δεύτερο κεφάλαιο εξετάζονται οι αριθμοί Catalan. Εκτός από το θεωρητικό πλαίσιο το σχετικό με αυτούς, παρουσιάζονται και διάφορες εφαρμογές τους σε προβλήματα των Μαθηματικών όπως το πρόβλημα της κάλπης, ο τριγωνισμός ενός πολυγώνου, η τοποθέτηση παρενθέσεων σε ένα γινόμενο και η μέτρηση του πλήθους των δένδρων με προσανατολισμό, ρίζα και n φύλλα.

Στο τρίτο κεφάλαιο εξετάζονται οι αριθμοί Stirling τόσο στο θεωρητικό τους πλαίσιο όσο και σε εφαρμογές στη διαμέριση

συνόλων και στα προβλήματα πληρότητας, όσον αφορά στους αριθμούς Stirling β’ είδους, και στις μεταθέσεις αντικειμένων σε μη διατεταγμένους κύκλους, όσον αφορά στους αριθμούς Stirling α’ είδους.

ABSTRACT

This is a dissertation paper on Discrete Mathematics especially concerning Catalan Numbers and Stirling Numbers of the first and second kind. The objective is to present the theoretical framework as well as their applications on certain mathematical problems that appear on other scientific fields, such as Computer Science.

The first chapter refers to the binomial coefficients, given that they play significant role in Combinatorics. It also refers to other popular numeric sequences, such as the Bell numbers, the Motzkin numbers and the Fibonacci numbers.

The second chapter deals with the Catalan numbers, the related theorems and their applications on The Ballot Problem, the Dyck Paths, the Balanced Parentheses, the Balanced Trees and the Polygon Triangulation.

The third chapter is about the Stirling numbers, their theory and applications in the partitioning of a set of objects or in Occupancy problems (Stirling numbers of the second kind) and the number of cycles in a permutation (Stirling numbers of the first kind).

Περιεχόμενα

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Αντικείμενο της παρούσης εργασίας είναι οι αριθμοί Catalan και οι αριθμοί Stirling α' και β' είδους, ένα πολύ σημαντικό κομμάτι των Διακριτών Μαθηματικών με ποικίλες εφαρμογές σε πολλά πεδία των Μαθηματικών, στις Οικονομικές Επιστήμες, στη Βιολογία, αλλά και στην Επιστήμη των Υπολογιστών όντας πολύ εύχρηστα εργαλεία στην εύρεση κατάλληλων αλγορίθμων προς την επίλυση βασικών προβλημάτων.

Σαφής ορισμός των Διακριτών Μαθηματικών δεν μπορεί να δοθεί, διότι ο συγκεκριμένος κλάδος δημιουργήθηκε κυρίως για να ομαδοποιήσει θέματα που είχαν απασχολήσει τους Μαθηματικούς επί αιώνες και δεν ήταν δυνατό να λυθούν χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της Μαθηματικής Ανάλυσης. Μπορούμε κυρίως να τα περιγράψουμε μέσα από τα αντικείμενα με τα οποία ασχολούνται. Ως Διακριτά Μαθηματικά ορίζουμε καταχρηστικά τον κλάδο εκείνο των Μαθηματικών ο οποίος ασχολείται με τη μελέτη δομών και διαδικασιών που δε μεταβάλλονται με συνεχή τρόπο, όπως συμβαίνει στη Μαθηματική Ανάλυση. Τα Διακριτά Μαθηματικά ασχολούνται με διακριτές δομές, όπως είναι τα σύνολα, οι άλγεβρες Boole, διάφορες κατηγορίες ακεραίων, τα γραφήματα, οι τυπικές γλώσσες και τις μεταξύ αυτών σχέσεις. Εστιάζοντας στη λογική και στην απόδειξη των προτάσεων, εξετάζουν κυρίως το γιατί μια πρόταση είναι αληθής, περισσότερο από την αλήθεια αυτή καθ' αυτή. Μέσα από μια αλληλουχία βημάτων, φτάνουμε σε μαθηματικά μοντέλα που χρησιμεύουν στην επίλυση προβλημάτων, τα οποία αρχικώς μοιάζουν εντελώς ασύνδετα μεταξύ τους.

Έτσι, οι ακολουθίες των αριθμών Catalan και Stirling δεν είναι απλώς κάποια αποτελέσματα θεωρημάτων της Συνδυαστικής, αλλά χρήσιμα συμπεράσματα που βοηθούν στην εύρεση λύσεων σε προβλήματα άλλων επιστημονικών κλάδων. Πριν γίνει εκτενής παρουσίαση των αριθμών Catalan και Stirling απαιτείται η αναφορά στους διωνυμικούς συντελεστές, δεδομένου ότι η χρήση τους είναι ουσιώδης και στους αριθμούς Catalan και Stirling, αλλά και γενικότερα στη Συνδυαστική.

Διωνυμικοί Συντελεστές

Διωνυμικοί συντελεστές ονομάζονται οι συντελεστές που εμφανίζονται στο Διωνυμικό Θεώρημα:

$$(x+y)^n = \binom{n}{o} y^n + \binom{n}{1} x y^{n-1} + \binom{n}{2} x^2 y^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1} x^{n-1} y + \binom{n}{n} x^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

όπου $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ είναι οι συνδυασμοί των n αντικειμένων ανά k, δηλαδή των πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε k αντικείμενα από σύνολο n αντικειμένων χωρίς να λάβουμε υπ’ όψιν τη σειρά. Η σχέση είναι γνωστή και ως **Διώνυμο του Νεύτωνα**.

Ισχύουν τα εξής:

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ και $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$, n,k > 0

επίσης:

$\binom{n}{0} = 1, n \geq 0$, και $\binom{0}{k} = 0$, k>0

Ο συμβολισμός $\binom{n}{k}$ δόθηκε από το Γερμανό Μαθηματικό και Φυσικό Andreas Freiherr von Ettingshausen (1796 – 1878) (Higham, 1998) αν και οι διωνυμικοί συντελεστές ήταν ήδη γνωστοί από το δέκατο αιώνα και τον Ινδό Μαθηματικό Halayudha, ενώ το 1150 ο επίσης Ινδός Μαθηματικός Bhāskara τους αναλύει εκτενώς στο βιβλίο του Livalati (Knuth, 1997).

Αξιοσημείωτη είναι η αναδρομική σχέση:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \text{ , n,k > 0}$$

η οποία ονομάζεται και κανόνας του Pascal, δεδομένου ότι απ’ αυτήν προκύπτει το γνωστό **Τρίγωνο του Pascal** το οποίο πρωτοεμφανίστηκε στο έργο του «Περί του αριθμητικού τριγώνου» (1653) (Παπαϊωάννου, 2003) και φαίνεται στις επόμενες εικόνες:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
 & & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
 & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
 & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \\
\binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6}
\end{array}
$$

ή διαφορετικά:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

Παρατηρούμε ότι κάθε αριθμός στο τρίγωνο προκύπτει ως άθροισμα του πάνω αριστερά και του πάνω δεξιά αριθμού.

π.χ. $10 = 4 + 6$

Προηγούμενη αναφορά του συγκεκριμένου τριγώνου υπάρχει στο βιβλίο του Κινέζου Μαθηματικού Chu Shih – Chieh «Τέλειος καθρέπτης των τεσσάρων στοιχείων» (1303) (Παπαϊωάννου, 2003) μαζί με το θεώρημα:

Για κάθε $r, n, k \in N, n \geq r$ ισχύουν:

α) $\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \cdots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}$

β) $\binom{r}{0} + \binom{r+1}{1} + \cdots + \binom{r+k}{k} = \binom{r+k+1}{k}$

Οι αριθμοί Catalan και οι αριθμοί Stirling, βασίζονται στους διωνυμικούς συντελεστές και μπορούν να τοποθετηθούν σε τρίγωνα παρόμοια με αυτό του Pascal.

Ακολουθίες Αριθμών

Στα Διακριτά Μαθηματικά συναντούμε πολλές ακολουθίες αριθμών, οι οποίες χρησιμοποιούνται στη λύση πολυάριθμων προβλημάτων. Συνήθως, οι ακολουθίες αυτές έχουν πάρει το όνομα του Μαθηματικού που τις ανακάλυψε. Αν και στα επόμενα κεφάλαια γίνεται εκτενής αναφορά των αριθμών Catalan και Stirling και των εφαρμογών τους, θα ήταν χρήσιμη η παρουσίαση και κάποιων άλλων σημαντικών ακολουθιών.

Αριθμοί Bell

Οι αριθμοί Bell πήραν το όνομά τους από τον Eric Temple Bell (1883 – 1960), διάσημο Σκωτσέζο - Αμερικανό Μαθηματικό, ο οποίος υπήρξε και συγγραφέας αστυνομικών μυθιστορημάτων με το ψευδώνυμο John Taine (Conway; Guy, 1996). Εκφράζουν το πλήθος των διαμερίσεων ενός συνόλου n αντικειμένων σε υποσύνολα μη κενά και ξένα μεταξύ τους.

Οι αριθμοί Bell για $1 \leq k \leq n$ ικανοποιούν την αναδρομική σχέση:

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

και συνδέονται με τους αριθμούς Stirling β’ είδους μέσω της σχέσης:

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)$$

όπου S(n,k) είναι ο αριθμός Stirling που εκφράζει το πλήθος των διαμερίσεων ενός συνόλου n αντικειμένων σε k μη κενά υποσύνολα.

Κάποιοι από τους πρώτους όρους της ακολουθίας των αριθμών Bell φαίνονται στον πίνακα:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B_n	1	1	2	5	15	52	203	877	4140	21147	115975

Αριθμοί Motzkin

Οι αριθμοί Motzkin πήραν το όνομά τους από το διάσημο Ισραηλινό – Αμερικανό Μαθηματικό Theodore Samuel Motzkin (1908 – 1970) (Donaghey; Shapiro, 1977). Εκφράζουν το πλήθος των μη τεμνόμενων χορδών που μπορούμε να σχεδιάσουμε μεταξύ n σημείων της περιφέρειας ενός κύκλου και για $0 \leq i \leq n$ ικανοποιούν την αναδρομική σχέση:

$$M_{n+1} = M_n + \sum_{i=0}^{n-1} M_i M_{n-1-i}$$

Οι αριθμοί Motzkin συνδέονται με τους αριθμούς Catalan μέσω της σχέσης:

$$M_n = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2k} C_k$$

και οι πρώτοι όροι της ακολουθίας των αριθμών Motzkin φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M_n	1	1	2	4	9	21	51	127	323	835	2188

Αριθμοί Lucas – Αριθμοί Fibonacci

Η ακολουθία των αριθμών Fibonacci έχει τις ρίζες της στα 1202 όταν ο Ιταλός Μαθηματικός Leonardo Pisano Bigollo (1170 – 1250) (κατά κόσμον Leonardo Fibonacci) στο βιβλίο του Liber Abaci («Περί του Άβακα») έθεσε το πρόβλημα του υπολογισμού των απογόνων που προκύπτουν από ένα ζευγάρι κουνελιών (Conway; Guy, 1996, Παπαϊωάννου, 2003). Υποθέτοντας ότι ένα ζευγάρι κουνελιών δεν αναπαράγει τον πρώτο μήνα της ζωής του και στη συνέχεια γεννά ένα νέο ζευγάρι κουνελιών κάθε μήνα, θέλουμε να υπολογίσουμε τον αριθμό των ζευγαριών μετά από n μήνες.

Οι αριθμοί Fibonacci προκύπτουν από την αναδρομική σχέση:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

με $F_0 = 0$ και $F_1 = F_2 = 1$, και οφείλουν το όνομά τους στο Γάλλο Μαθηματικό François Édouard Anatole Lucas (1842 – 1891) που μελέτησε την ακολουθία Fibonacci, αλλά και την ακολουθία Lucas.

Η ακολουθία Lucas, υπακούει στην αναδρομική σχέση:

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

με $F_0 = 2$ και $F_1 = 1$ και η σχέση που συνδέει τις δύο ακολουθίες είναι:

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1} = F_n + 2F_{n-1}$$

Οι πρώτοι όροι της ακολουθίας Fibonacci φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

και οι πρώτοι όροι της ακολουθίας Lucas στον επόμενο:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123

2. ΑΡΙΘΜΟΙ CATALAN

2.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τους αριθμούς Catalan οι οποίοι συνήθως συμβολίζονται ως $\mathbf{C_n}$ (*Graham, 1994; Stanley 1999b; Pemmaraju & Skiena 2003*) ή ως **c(n)** (*Goulden & Jackson, 1983*) και σπανιότερα ως $\mathbf{u_n}$ (*van Lint & Wilson, 1992*).

Ο γενικός τύπος της ακολουθίας των αριθμών Catalan είναι:

$$\boldsymbol{C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1} = \frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!}}$$

και κάποιοι από τους πρώτους όρους φαίνονται στον πίνακα:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C_n	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796

Η ακολουθία των αριθμών Catalan απαντάται σε πολλά προβλήματα των Μαθηματικών (*Παπαϊωάννου, 2003*) και κάποιες από τις εφαρμογές της θα δούμε σε επόμενη ενότητα.

2.2 Ιστορικά Στοιχεία

Οι αριθμοί Catalan

$$\boldsymbol{C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1} = \frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!}}$$

πήραν το όνομά τους από το διάσημο Βέλγο Μαθηματικό **Eugène Charles Catalan** (Bruges 30/05/1814 – Liège 14/02/1894), ο οποίος ασχολήθηκε με προβλήματα παραστατικής γεωμετρίας, συνεχών κλασμάτων, θεωρίας αριθμών και συνδυαστικής (*Mansion, 1896*). Έδωσε το όνομά του σε μια περιοχή του R^3 και στους αριθμούς Catalan, τους οποίους εισήγαγε για να λύσει προβλήματα Συνδυαστικής. Αξιοσημείωτη είναι και η περίφημη «εικασία του Catalan» σύμφωνα με την οποία η μοναδική λύση στην εξίσωση

$x^a - y^b = 1$, για a,x,b,y>1

είναι x=3, a=2, b=3, y=2.

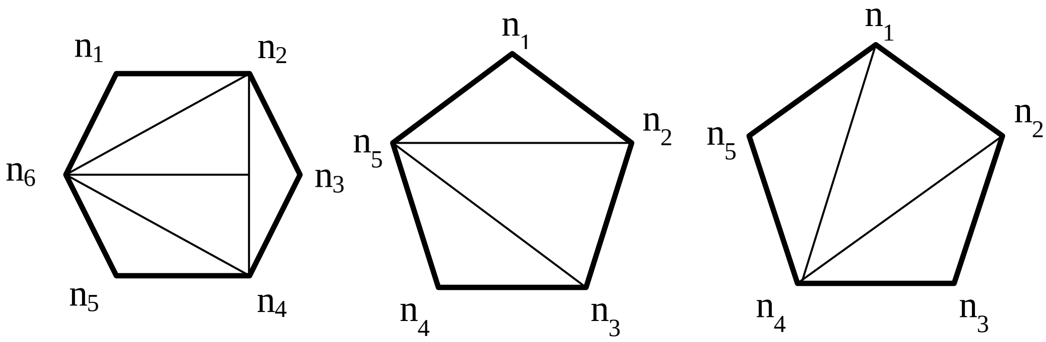
Το πρόβλημα ετέθη το 1844 από τον Catalan, αν και έχει τις ρίζες του στον Levi ben Gershon (Gersonides) στα 1343 που το απέδειξε για την περίπτωση που οι x, y θα ήταν 2 ή 3 (*Simonson, 2009*), και αποδείχθηκε το 2002 από το Ρουμάνο Preda V. Mihăilescu (*Mihăilescu, 2004*).

Ο πρώτος που όρισε και χρησιμοποίησε αυτούς που ονομάζουμε σήμερα «αριθμούς Catalan» ήταν ο Μογγόλος Μαθηματικός, Αστρονόμος και Τοπογράφος Minggatu (Sharabiin Myangat, 1692 – 1793), στην εργασία του The Quick Method for Obtaining the Precise Ratio of Division of a Circle (Ge Yuan Mi Lu Jie Fa) το 1730 (*Luo Jianjin, 2012*). Η πρώτη αναφορά από τον Catalan έγινε το 1838 στην εφημερίδα Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, την οποία εξέδιδε στο Παρίσι ο Joseph Liouville από το 1836. Στην έκδοση του 1838, στη δημοσίευση του Catalan με τίτλο «Note sur une Équation aux différences finies» οι αριθμοί Catalan εμφανίζονται στη επίλυση του προβλήματος τοποθέτησης παρενθέσεων σε ένα γινόμενο (*Cohen, 1978; Παπαϊωάννου, 2003*). Η λύση του συγκεκριμένου προβλήματος είναι παρόμοια με αυτήν του τριγωνισμού ενός πολυγώνου από μη τεμνόμενες διαγωνίους, το οποίο είχε λυθεί στο παρελθόν, το 1751, από το Leonhard Euler (*Hilton & Pedersen, 1991*).

2.3 Θεωρητικό πλαίσιο

Θα ξεκινήσουμε τη μελέτη των αριθμών Catalan εξετάζοντας το πρόβλημα του τριγωνισμού ενός πολυγώνου.

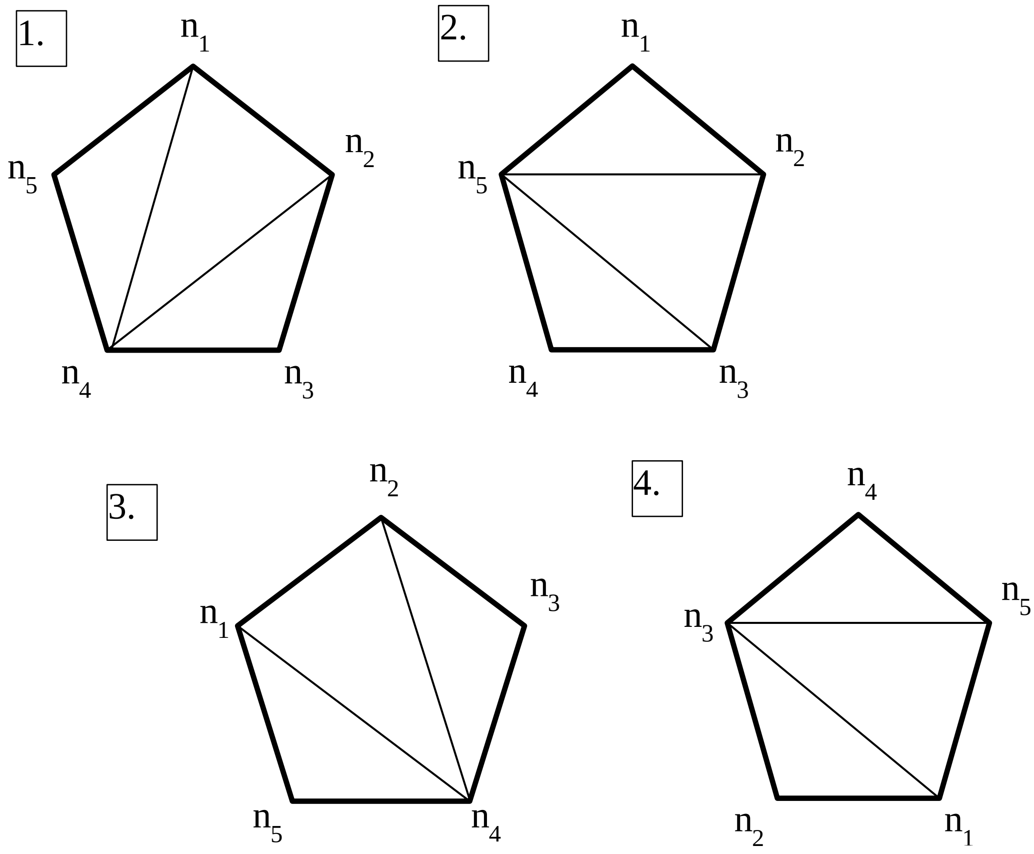
Ένας **τριγωνισμός** ενός κυρτού n-γώνου είναι μια διαμέριση του εσωτερικού του n-γώνου σε τρίγωνα με ευθείες που είναι μη τεμνόμενες διαγώνιοι του n-γώνου.



Σύμφωνα με τον ορισμό, ο τριγωνισμός του εξαγώνου είναι λάθος, αφού χρησιμοποιεί τεμνόμενες διαγωνίους.

Η διαδικασία του τριγωνισμού δεν αυξάνει τον αριθμό των κορυφών του n-γώνου και δύο τριγωνισμοί ενός n-γώνου του οποίου τις κορυφές έχουμε ονομάσει είναι ισοδύναμοι αν περιέχουν ακριβώς τις ίδιες διαγωνίους.

Για παράδειγμα:

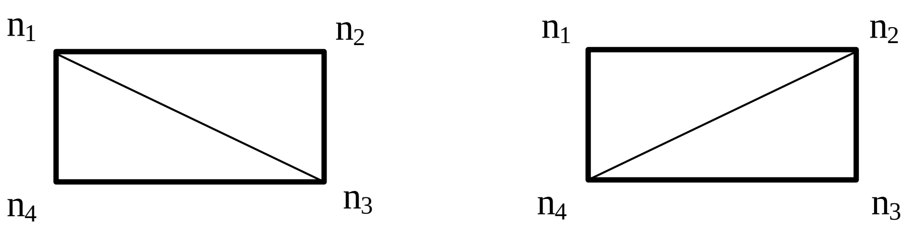


Σύμφωνα με όσα είπαμε παραπάνω, ισοδύναμοι είναι οι τριγωνισμοί των σχημάτων 1 και 3, γιατί περιέχουν τις ίδιες διαγωνίους, ενώ, εκ πρώτης όψεως, φαίνεται ότι είναι οι τριγωνισμοί των σχημάτων 2 και 4.

Θεωρούμε ένα τυχαίο n-γωνο και ενώνουμε μια κορυφή του (έστω τη n_1) με όλες τις υπόλοιπες. Έχουμε κατασκευάσει έτσι έναν τριγωνισμό με n-2 τρίγωνα. Παρατηρούμε, για κάθε τριγωνισμό, ότι το άθροισμα των γωνιών των τριγώνων που σχηματίστηκαν είναι ίσο με (n-2)π, δηλαδή, ίσο με το άθροισμα των γωνιών του n-γώνου, διότι καθεμιά από τις γωνίες του εκάστοτε τριγώνου αποτελεί τμήμα γωνίας του n-γώνου.

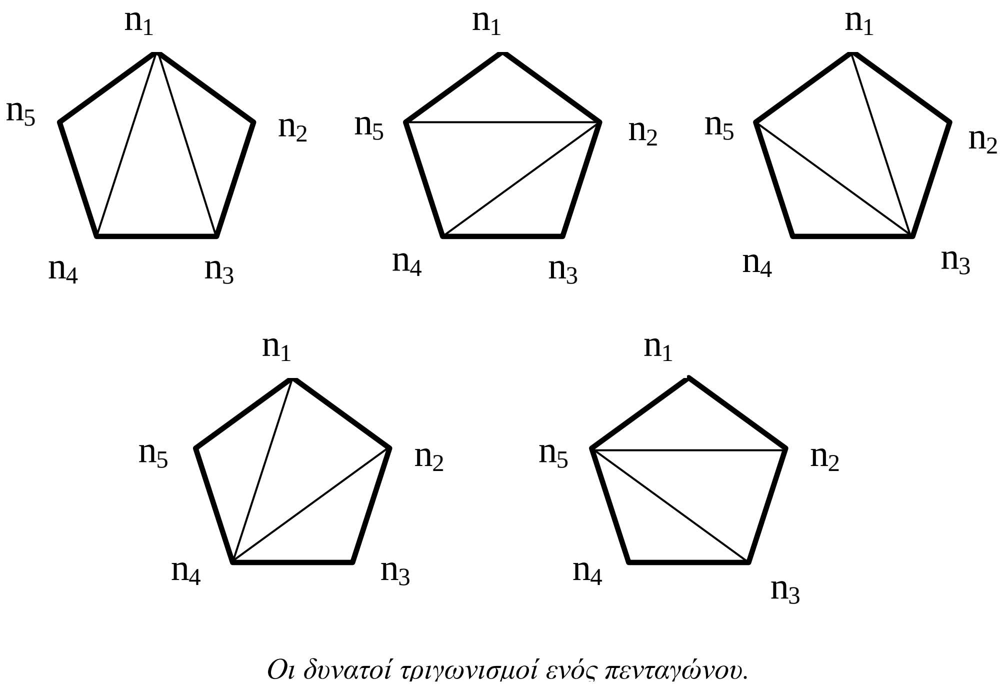
Για το τυχαίο n-γωνο που θεωρήσαμε, το μέγιστο πλήθος των εσωτερικών διαγωνίων από μια οποιαδήποτε κορυφή προς όλες τις υπόλοιπες είναι ίσο με n-3. Αυτό ισχύει προφανώς, αν παρατηρήσουμε ότι από τις n κορυφές του n-γώνου κάθε τυχαία κορυφή (έστω η 1) συνδέεται με όλες τις υπόλοιπες εκτός από τις δύο γειτονικές της (εν προκειμένω τις 2 και n). Άρα, τελικά, κάθε τριγωνισμός χρησιμοποιεί n-3 διαγωνίους.

Συμβολίζουμε με T_n το πλήθος των διαφορετικών τριγωνισμών ενός n-γώνου και ορίζουμε αυθαίρετα $T_1=0$ και $T_2=1$. Το T_3 είναι το πλήθος των τριγωνισμών ενός τριγώνου, χρησιμοποιεί n-3 διαγωνίους και προφανώς ισούται με 1, $T_3=1$. Για τον τριγωνισμό ενός τετραγώνου χρησιμοποιούμε n-3=1 διαγώνιο και σχηματίζονται n-2=2 τρίγωνα. Αυτό επιτυγχάνεται με δύο τρόπους, άρα $T_4=2$.



Οι δύο δυνατοί τριγωνισμοί ενός τετραγώνου.

Για n=5 προκύπτει $T_5=5$.



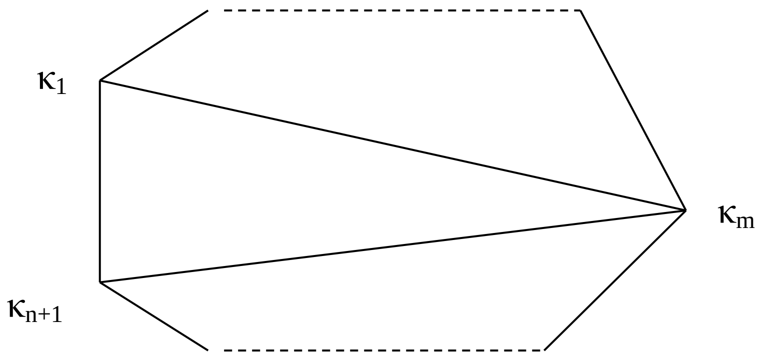
Οι δυνατοί τριγωνισμοί ενός πενταγώνου.

Οι αριθμοί που T_n, που εκφράζουν το πλήθος των τριγωνισμών ενός n-γώνου ικανοποιούν μια μη γραμμική, αναδρομική σχέση, σύμφωνα με τον Johann Andreas von Segner (1704-1777).

Ισχύει το εξής:

Θεώρημα 2.1: $T_{n+1}=T_2T_n+T_3T_{n-1}+\ldots+T_nT_2$

Απόδειξη: Έστω ένα n+1-γωνο με κορυφές $\kappa_1,\kappa_2,\ldots,\kappa_{n+1}$. Η πλευρά $\kappa_{n+1}\kappa_1$ ανήκει μόνο σε ένα τρίγωνο για οποιονδήποτε τριγωνισμό και έστω κ_m η τρίτη κορυφή του τριγώνου, όπου m=2,3,…,n.



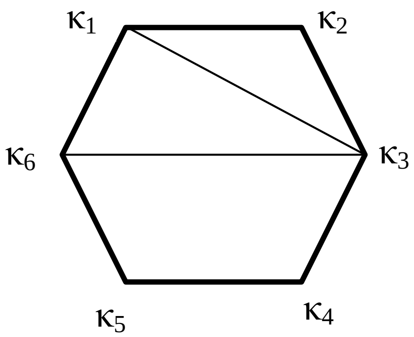
Το τρίγωνο $\kappa_m\ \kappa_1\kappa_{n+1}$ διαμερίζει το n+1-γωνο σε δύο μικρότερα πολύγωνα, επάνω προκύπτει ένα m-γωνο με κορυφές $\kappa_1,\kappa_2,\ldots,\kappa_m$ και κάτω ένα (n+2-m)-γωνο με κορυφές $\kappa_m,\kappa_{m+1},\ldots,\kappa_{n+1}$. Το πλήθος των τριγωνισμών του m-γώνου είναι T_m και του (n+2-m)-γώνου T_{n+2-m} και, από τον κανόνα του γινομένου, το πλήθος των τριγωνισμών του n+1-γώνου στους οποίους εμφανίζεται το τρίγωνο $\kappa_{n+1}\kappa_1\kappa_m$ είναι $T_m \cdot T_{n+2-m}$.

Τελικά, από τον κανόνα του αθροίσματος, το συνολικό πλήθος των τριγωνισμών του n+1-γώνου είναι:

$$\sum_{m=2}^{n} T_m \cdot T_{n+2-m} = T_2 \cdot T_n + T_3 \cdot T_{n-1} + \cdots + T_n \cdot T_2$$

■

Παράδειγμα 2.1: Έστω ένα 6-γωνο (n=5, m=3)



Το τρίγωνο $\kappa_6\kappa_1\kappa_3$ χωρίζει το 6-γωνο σε ένα τρίγωνο επάνω και ένα τετράγωνο κάτω.

$T_6 = T_2T_5 + T_3T_4 + T_4T_3 + T_5T_2$

Θεώρημα 2.2: $(n\text{-}3)T_n = \frac{n}{2}\,(T_3T_{n-1} + T_4T_{n-2} + \ldots + T_{n-1}T_3)$

Απόδειξη: Έστω ένα n-γωνο με κορυφές $\kappa_1,\kappa_2,\ldots,\kappa_n$. Θεωρούμε τη διαγώνιο $\kappa_1\kappa_m$ η οποία χωρίζει το n-γωνο σε:

ένα m-γωνο επάνω, με κορυφές $\kappa_1,\kappa_2,\ldots,\kappa_m$ και

ένα (n+2-m)-γωνο κάτω, με κορυφές $\kappa_m,\kappa_{m+1},\ldots,\kappa_n,\kappa_1$.

Όπως αποδείχθηκε στο Θεώρημα 1, το πλήθος των τριγωνισμών που περιέχουν τη διαγώνιο $\kappa_1\kappa_m$ είναι ίσο με $T_m \cdot T_{n+2-m}$.

Εξετάζοντας αναλυτικά, προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

Από την κορυφή κ_1 έχω n-3 διαγωνίους, τις $\kappa_1\kappa_3$, $\kappa_1\kappa_4,\ldots$, $\kappa_1\kappa_{n-1}$ και για καθεμιά απ' αυτές προκύπτουν οι τριγωνισμοί:

Για την $\kappa_1\kappa_3$ (m=3): T_3T_{n-1}

Για την $\kappa_1\kappa_4$ (m=4): T_4T_{n-2}

συνεχίζοντας κατά τον ίδιο τρόπο

Για την $\kappa_1\kappa_{n-1}$ (m=n-1): $T_{n-1}T_3$

Συνεπώς, στην κορυφή κ_1 αντιστοιχεί το άθροισμα:

$$(T_3 T_{n-1} + T_4 T_{n-2} + \cdots + T_{n-1} T_3)$$

και λόγω της συμμετρίας του n-γώνου, το άθροισμα αυτό είναι το ίδιο για κάθε κορυφή του και συνεπώς η παράσταση

$$n(T_3 T_{n-1} + T_4 T_{n-2} + \cdots + T_{n-1} T_3)$$

μετρά, για κάθε δυνατή διαγώνιο, το σύνολο των τριγωνισμών που τη χρησιμοποιούν δύο φορές, μία για κάθε άκρο της διαγωνίου.

Άρα, η παράσταση:

$$\frac{n}{2}(T_3 T_{n-1} + T_4 T_{n-2} + \cdots + T_{n-1} T_3)$$

μετρά τον αριθμό των τριγωνισμών του n-γώνου για κάθε δυνατή διαγώνιο. Βέβαια, κάθε τριγωνισμός χρησιμοποιεί n-3 διαγωνίους, άρα η προηγούμενη παράσταση μετρά τους τριγωνισμούς n-3 φορές.

Τελικά, προκύπτει:

$$(n-3)T_n = \frac{n}{2}(T_3 T_{n-1} + T_4 T_{n-2} + \cdots + T_{n-1} T_3)$$

■

Θεώρημα 2.3: $T_n = \frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2}$

Απόδειξη: Από το Θεώρημα 1 και αφού $T_2=1$, ισχύει:

$$T_{n+1} - 2T_n = T_3 T_{n-1} + T_4 T_{n-2} + \cdots + T_{n-1} T_3$$

ή

$$\frac{n}{2}(T_{n+1} - 2T_n) = \frac{n}{2}(T_3 T_{n-1} + T_4 T_{n-2} + \cdots + T_{n-1} T_3)$$

και σύμφωνα με το Θεώρημα 2:

$$\frac{n}{2}(T_{n+1} - 2T_n) = (n-3)T_n$$

$$\frac{n}{2}T_{n+1} - nT_n = (n-3)T_n$$

$$nT_{n+1} = (4n-6)T_n$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση $nT_{n+1} = E_{n+1}$

(όπου $E_2 = 2T_2 = 2$) η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$E_{n+1} = (4n-6)\frac{E_n}{n-1} \to$$

$$\frac{E_{n+1}}{E_n} = \frac{4n-6}{n-1} = \frac{2(n-3)}{n-1} = \frac{2(n-1)(n-3)}{(n-1)(n-1)} = \frac{(2n-2)(n-3)}{(n-1)(n-1)}$$

και επειδή

$$\begin{aligned} E_{n+1} &= \frac{E_{n+1}}{E_n} \cdot \frac{E_n}{E_{n-1}} \cdot \frac{E_{n-1}}{E_{n-2}} \cdot \dots \cdot \frac{E_3}{E_2} \\ &= \frac{(2n-2)(n-3)}{(n-1)(n-1)} \cdot \frac{(2n-4)(n-5)}{(n-2)(n-2)} \cdot \frac{(2n-6)(n-7)}{(n-3)(n-3)} \cdot \dots \\ &\cdot \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 1} = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!\,(n-1)!} = \binom{2n-2}{n-1} \end{aligned}$$

Άρα,

$$nT_{n+1} = \binom{2n-2}{n-1}$$

ή

$$(n-1)T_n = \binom{2n-4}{n-2}$$

■

Παρατηρούμε ότι:

$$T_n = C_{n-2} = \frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2}$$

Που είναι ο γνωστός μας αριθμός Catalan τάξης (n-2).

Ισχύουν τα εξής:

$C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$ και $C_{n-1} = \frac{\binom{2n-2}{n-1}}{n}$

Διαιρώντας κατά μέλη προκύπτει:

$\frac{C_n}{C_{n-1}} = \frac{n\binom{2n}{n}}{(n+1)\binom{2n-2}{n-1}} = \frac{2(2n-1)}{n+1} \leftrightarrow C_n = \frac{4n-2}{n+1} C_{n-1}$

για $n \geq 1$ και $C_1 = 1$.

Αντίστοιχο τρόπο σκέψης χρησιμοποιούμε στην περίπτωση κανονικού 2n-γώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο, όπως φαίνεται στο επόμενο:

Παράδειγμα 2.2: Θεωρούμε κανονικό 2n-γωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο και αναζητούμε το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να ενώσουμε τις 2n κορυφές με n μη τεμνόμενες διαγωνίους.

Έστω a_n ο ζητούμενος αριθμός. Θεωρούμε τη διαγώνιο $n_k n_l$ η οποία πρέπει να έχει εκατέροθέν της άρτιες το πλήθος κορυφές του 2n-γώνου, π.χ. η διαγώνιος $n_1 n_8$, που έχει από τη μια πλευρά 6 κορυφές και από την άλλη 2n-8. Υπό την προϋπόθεση αυτή, προκύπτει η αναδρομική σχέση:

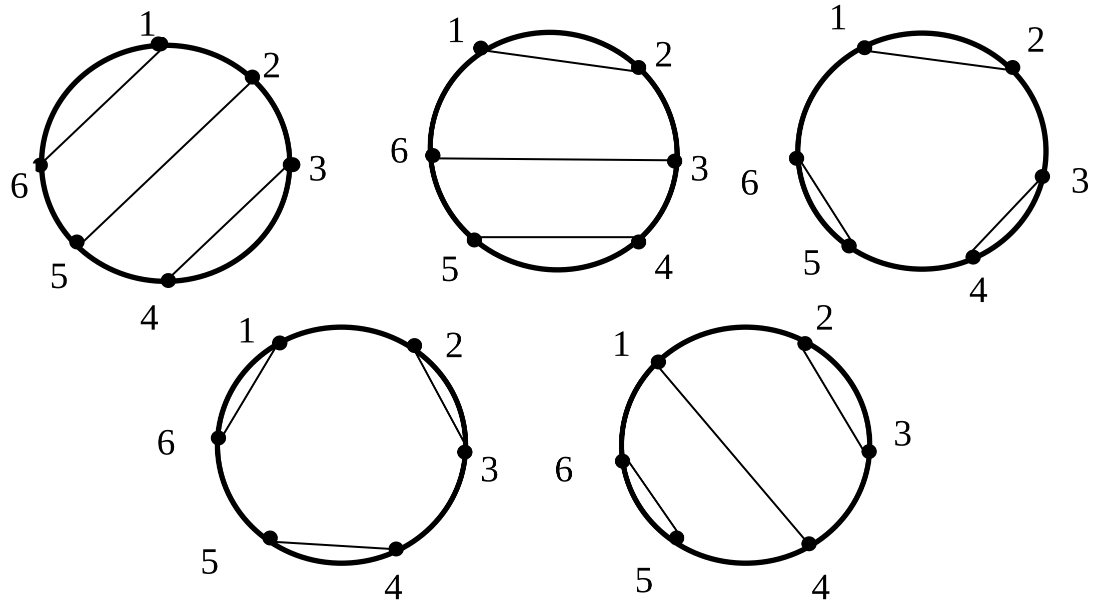
$a_n = a_0 a_{n-1} + a_1 a_{n-2} + \cdots + a_{n-1} a_0,\ a_0 = 1$

και θέτοντας $b_n = a_{n-1}$ για $n \geq 1$, η προηγούμενη σχέση γίνεται: $b_{n+1} = b_1 b_n + b_2 b_{n-1} + \cdots + b_n b_1,\ b_1 = 1.$

Τελικά, καταλήξαμε στην αναδρομική σχέση του Θεωρήματος 2.1 και ο b_{n+1} είναι ο αριθμός Catalan n-τάξης, δηλαδή:

$a_n = b_{n+1} = C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1} n \geq 0.$

Παράδειγμα 2.3: Σε έναν κύκλο το πλήθος των μη τεμνόμενων χορδών μεταξύ 2n σημείων ισούται με τον n-τάξης αριθμό Catalan $C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$.



Για n=3 έχουμε 2n=6 σημεία και το πλήθος των τρόπων να τα ενώσουμε με μη τεμνόμενες χορδές είναι C_3=5.

Οι αριθμοί Catalan προκύπτουν από το τρίγωνο του Pascal, αν από την κεντρική στήλη και για τις σειρές άρτιου αριθμού αφαιρέσουμε τις αντίστοιχες τιμές τις μεθεπόμενης στήλης:

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 120 200 252 200 120 45 10 1

Δηλαδή, έχουμε διαδοχικά:

1

2 – 1 = 1

6 – 4 = 2

20 – 15 = 5

70 – 56 = 14

252 – 200 = 52

κ.ο.κ.

2.4 Εφαρμογές

2.4α Τοποθέτηση παρενθέσεων σε γινόμενο παραγόντων

Θεώρημα 2.4: Αν a_nτο πλήθος των παρενθέσεων σ' ένα γινόμενο με n παράγοντες, τότε $a_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$.

Απόδειξη: Έστω ένα γινόμενο με n παράγοντες $x_1,x_2,\ldots,x_n$

Για n=1 έχουμε (x_1)

Για n=2 έχουμε (x_1x_2)

Για n=3 έχουμε $((x_1x_2)x_3)$ ή $(x_1(x_2x_3))$

Για n=4 έχουμε

$((x_1x_2)(x_3x_4))$ ή

$(((x_1x_2)x_3)x_4)$ ή

$((x_1(x_2x_3))x_4)$ ή

$(x_1((x_2x_3)x_4))$ ή

$(x_1(x_2(x_3x_4)))$

Το εξωτερικό ζεύγος παρενθέσεων πολλαπλασιάζει δύο παράγοντες εκ των ο οποίων ο πρώτος είναι γινόμενο r παραγόντων $1 \leq r < n$ $(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_r)$ και ο δεύτερος ένα γινόμενο n-r παραγόντων $(x_{r+1} \cdot x_{r+2} \cdot \ldots \cdot x_n)$. Στον πρώτο παράγοντα μπορούν να τοποθετηθούν παρενθέσεις κατά a_r τρόπους και στο δεύτερο κατά a_{n-r} τρόπους. Σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου, το πλήθος των τρόπων με τους οποίους το εξωτερικό ζεύγος παρενθέσεων πολλαπλασιάζει τα $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_r$ και $x_{r+1} \cdot x_{r+2} \cdot \ldots \cdot x_n$ είναι $a_r \cdot a_{n-r}$.

Αθροίζοντας για r = 1,2,3,…,n-1 προκύπτει

$$a_n = a_1 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + \cdots + a_{n-1} a_1$$

και παρατηρούμε ότι, θέτοντας $a_n = T_{n+1}$, οι αριθμοί a_nεπαληθεύουν την αναδρομική σχέση του Θεωρήματος 2.1 και αφού είδαμε ότι

$a_1 = T_2 = 1$

$a_2 = T_3 = 1$

$a_3 = T_4 = 2$

$a_4 = T_5 = 5$

οι δύο ακολουθίες συμπίπτουν.

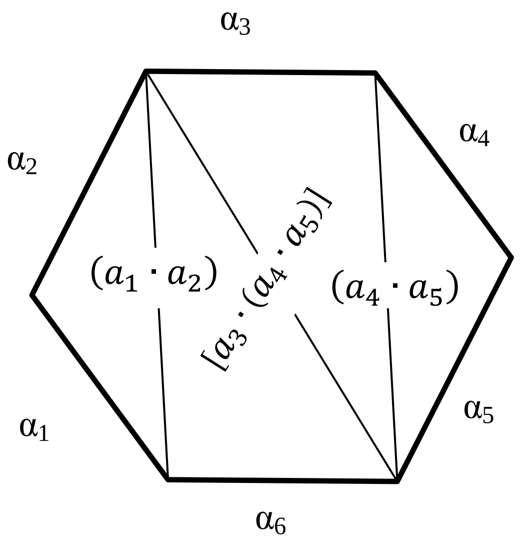
Τελικά, από το Θεώρημα 2.3, προκύπτει:

$$a_n = C_{n-1} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

■

Παράδειγμα 2.3: Έστω το γινόμενο με n=5 όρους

$\{(a_1 \cdot a_2) \cdot [a_3 \cdot (a_4 \cdot a_5)]\}$ στο οποίο θα αντιστοιχίσουμε έναν τριγωνισμό κανονικού εξαγώνου με πλευρές a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 και $a_6 = \{(a_1 \cdot a_2) \cdot [a_3 \cdot (a_4 \cdot a_5)]\}$



Κάθε διαγώνιος αντιστοιχεί σε ένα γινόμενο, ενώ η τελευταία αντιστοιχεί στην $α_6$ πλευρά του εξαγώνου.

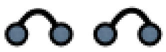
Παρατηρούμε στο σχήμα ότι κάθε διαγώνιος αντιστοιχεί σε ένα γινόμενο, ενώ το τελευταίο γινόμενο αντιστοιχεί σε πλευρά του εξαγώνου.

Παρατήρηση: Το πρόβλημα της τοποθέτησης παρενθέσεων σε ένα γινόμενο της μορφής $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ αφορά σε συγκεκριμένη διάταξη των όρων του γινομένου. Αν η σειρά των παραγόντων του γινομένου δεν είναι συγκεκριμένη, τότε το πλήθος των διαφορετικών τρόπων τοποθέτησης παρενθέσεων προκύπτει από τη σχέση:

$$b_n = n!\, a_n = n!\, C_{n-1} = n! \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} = (n-1)! \binom{2n-2}{n-1}$$

Αντίστοιχο με το πρόβλημα της τοποθέτησης παρενθέσεων σε ένα γινόμενο είναι το εξής:

Παράδειγμα 2.4: Ας υποθέσουμε ότι έχουμε 2n σημεία κατά μήκος μιας οριζόντιας ευθείας. Με πόσους τρόπους μπορούμε να ενώσουμε αυτά τα σημεία ανά δύο, χρησιμοποιώντας μη τεμνόμενα τόξα;

 ή  για n=2 έχουμε $C_2 = 2$ τρόπους

για n=3 έχουμε $C_3 = 5$ τρόπους

Παρατηρούμε ότι η λύση στο πρόβλημά μας είναι ο n-τάξης αριθμός $C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$ της ακολουθίας Catalan για $n \geq 0$.

Παράδειγμα 2.5: Με πόσους τρόπους μπορούμε να σχεδιάσουμε οροσειρές που να αποτελούνται από n το πλήθος ανοδικές πλευρές (/) και n το πλήθος καθοδικές πλευρές (\) έτσι ώστε για κάθε άνοδο να υπάρχει αντίστοιχα κάθοδος με μια λογική σειρά και να μην υπάρχει κάθοδος κάτω από το αρχικό σημείο;

Το συγκεκριμένο πρόβλημα μοιάζει με το πρόβλημα της τοποθέτησης παρενθέσεων κατά ζεύγη και προφανώς έχει λύση τον αριθμό Catalan n-τάξης $C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}, n \geq 0$.

n=0		1 τρόπος
n=1	/\	1 τρόπος
n=2	/\ / \ ή /\/\	2 τρόποι
n=3	/\ / \ /\/\ /\ /\ / \ ή / \ ή / \/\ ή /\/ \ ή /\/\/\	5 τρόποι

2.4β Το πρόβλημα της κάλπης

Άλλη μια εφαρμογή των αριθμών Catalan είναι στην επίλυση του προβλήματος της κάλπης (ballot problem) που απασχόλησε τους Μαθηματικούς του 19ου αιώνα(*Hilton & Pedersen, 1991*).

Ας ξεκινήσουμε τη μελέτη του με το εξής:

Θεώρημα 2.5: Το πλήθος των ακολουθιών με 2n όρους $a_1,a_2,\ldots,a_{2n}$ που σχηματίζονται από n το πλήθος +1 και n το πλήθος -1 και των οποίων τα μερικά αθροίσματα είναι θετικά για κάθε k ($\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k \geq 0, k = 1,2,\ldots,2n$) ισούται με το n-τάξης αριθμό Catalan $C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1} n \geq 0$.

Απόδειξη: Ονομάζουμε μια ακολουθία με n όρους +1 και n όρους -1 παραδεκτή, αν ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος, δηλαδή αν $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k \geq 0, k = 1,2,\ldots,2n$ και απαράδεκτη αν δεν τις ικανοποιεί και έστω A_n το σύνολο των παραδεκτών ακολουθιών και B_n το σύνολο των απαράδεκτων. Το συνολικό πλήθος των ακολουθιών με n όρους +1 και n όρους -1 ισούται με $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$ και συνεπώς

$A_n + B_n = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!} \rightarrow A_n = \binom{2n}{n} - B_n$.

Θέλουμε να υπολογίσουμε το B_n.

Θεωρούμε ότι έχουμε μια απαράδεκτη ακολουθία με n το πλήθος όρους +1 και n το πλήθος όρους -1. Αφού είναι απαράδεκτη, υπάρχει k τέτοιο ώστε $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k < 0$.

Αφού ο k είναι ο μικρότερος τέτοιος δείκτης, πριν τον όρο α_k το πλήθος των +1 και το πλήθος των -1 θα είναι ίσα, οπότε, θα ισχύει $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{k-1} = 0, \alpha_k = -1$.

Αλλάζοντας τα πρόσημα των αριθμών $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, δηλαδή αντικαθιστώντας τους με τους $-\alpha_1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_k$ και αφήνοντας αμετάβλητους τους $\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \dots, \alpha_{2n}$, προκύπτει μια νέα ακολουθία με n+1 το πλήθος όρους +1 και n-1 το πλήθος όρους -1 και στην οποία ισχύει $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k \geq 0, k = 1,2, \dots ,2n$.

Αντίστροφα, αν έχουμε μια ακολουθία με n+1 όρους +1 και n-1 όρους -1, μπορούμε να αντιστρέψουμε τα πρόσημα από τον πρώτο όρο της ακολουθίας ως εκείνον τον όρο για τον οποίο τα +1 είναι περισσότερα από τα -1, δημιουργώντας έτσι μια απαράδεκτη ακολουθία. Καταλήγουμε, λοιπόν, στο συμπέρασμα ότι υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των απαράδεκτων ακολουθιών και των ακολουθιών με n+1 όρους +1 και n-1 όρους -1. Συνεπώς, το πλήθος των ακολουθιών με 2n όρους που είναι απαράδεκτες ισούται με το πλήθος των ακολουθιών που έχουν n+1 όρους +1 και n-1 όρους -1 που το πλήθος τους προκύπτει από τη σχέση:

$$B_n = \binom{2n}{n+1} = \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}$$

και τελικά

$$A_n = \binom{2n}{n} - B_n = \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = \frac{(2n)!}{n!(n-1)!}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{(2n)!}{n!(n-1)!}\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = C_n$$

■

Με βάση το προηγούμενο θεώρημα λύνεται το ακόλουθο:

Πρόβλημα της κάλπης

Ας υποθέσουμε ότι γίνονται εκλογές και υπάρχουν δύο υποψήφιοι, οι Α και Β και 2n ψηφοφόροι. Οι υποψήφιοι τελικώς ισοψηφούν, ενώ δεν υπάρχουν άκυρα ή λευκά ψηφοδέλτια. Με πόσους τρόπους μπορούμε να μετρήσουμε τις ψήφους των Α και Β, έτσι ώστε ανά πάσα στιγμή κατά τη διάρκεια της καταμέτρησης να υπερτερεί πάντα ο ίδιος υποψήφιος ή να είναι ισόπαλοι.

Η λύση του προβλήματος βασίζεται στο Θεώρημα 2.5, αν θεωρήσουμε ότι έχουμε μια ακολουθία 2n όρων-ψήφων και οι ψήφοι του ενός υποψηφίου (έστω του Α) αντιστοιχούν στους όρους +1, ενώ του άλλου στους όρους -1. Τελικά, η λύση είναι ο αριθμός Catalan n-τάξης $C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}, n \geq 0$.

Παράδειγμα 2.6: 2n θεατές θέλουν να παρακολουθήσουν μια παράσταση και το εισιτήριο κοστίζει 10€. Όταν ανοίγει το ταμείο του θεάτρου, δεν έχει καθόλου χρήματα μέσα και οι θεατές έχουν μόνο χαρτονομίσματα των 10€ και των 20€. Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε τους θεατές στην ουρά έτσι ώστε καθένας να αγοράζει μόνο το δικό του εισιτήριο κι ο ταμίας να έχει πάντα ρέστα να δώσει. Τι γίνεται στην περίπτωση που πρέπει να τηρηθεί σειρά προτεραιότητας ανάλογα με την ώρα που έφτασε κάθε θεατής στο θέατρο, ώστε να μην υπάρχουν προβλήματα στη δημιουργία της ουράς;

Για να λύσουμε το πρόβλημα αρκεί να σκεφτούμε ότι οι 2n θεατές είναι οι 2n όροι της ακολουθίας του Θεωρήματος 2.5. Όσοι έχουν χαρτονόμισμα των 20€ αντιστοιχούν στους όρους +1 και οι άλλοι στους -1. Η λύση είναι ο αριθμός Catalan n-τάξης $C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}, n \geq 0$.

Αν τηρηθεί σειρά προτεραιότητας ανάλογα με την ώρα άφιξης στο θέατρο, τότε οι θεατές είναι διακεκριμένοι και, συνεπώς, το προηγούμενο αποτέλεσμα θα πρέπει να πολλαπλασιαστεί επί τον αριθμό των μεταθέσεων των θεατών με χαρτονόμισμα των 10€ και επί τον αριθμό των μεταθέσεων των θεατών με χαρτονόμισμα των 20€, ήτοι

$$n!\,n!\,C_n = n!\,n!\frac{\binom{2n}{n}}{n+1} = \frac{(2n)!}{n+1},\ n \geq 0.$$

Παράδειγμα 2.7: Στο Καρτεσιανό επίπεδο με πόσους τρόπους μπορούμε να πάμε από το (0,0) στο (n,n) κατά τέτοιον τρόπο ώστε να κινούμαστε μόνο Βόρεια ή Ανατολικά και κάτω από τη διαγώνιο x=y (Dyck Paths).

Το πρόβλημα μπορεί να λυθεί αν βασιστούμε στο Θεώρημα 2.5, διότι κάθε δυνατή διαδρομή είναι μια ακολουθία από n τετράγωνα προς την Ανατολή (αντιστοιχούν στους όρους +1) και n τετράγωνα προς το Βορρά (αντιστοιχούν στους όρους -1). Κατ' αναλογία με το πρόβλημα της κάλπης, ο περιορισμός που δίνεται ότι δεν επιτρέπεται να περάσουμε πάνω από τη διαγώνιο είναι το ίδιο με τον περιορισμό να υπερτερεί πάντα ο ίδιος υποψήφιος. Τελικά, η λύση είναι ο αριθμός Catalan n-τάξης $C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}, n \geq 0$.

2.4γ Μεταθέσεις

Μια πολύ χρήσιμη εφαρμογή των αριθμών Catalan είναι στον υπολογισμό του πλήθους των μεταθέσεων n αριθμών ή γραμμάτων του αλφαβήτου με τον περιορισμό να μην υπάρχουν υπακολουθίες τριών συνεχόμενων όρων, π.χ. 3,4,5 ή β,γ,δ.

Παράδειγμα 2.8: Με πόσους τρόπους μπορούμε να βάλουμε n αριθμούς σε σειρά έτσι ώστε να μην έχουμε 3 ή περισσότερους αριθμούς που να είναι διαδοχικοί στη φυσική τους σειρά.

n=0	-	1 τρόπος
n=1	{1}	1 τρόπος
n=2	{1,2} ή {2,1}	2 τρόποι
n=3	{1,3,2} ή {2,1,3} ή {2,3,1} ή {3,1,2} ή {3,2,1}	5 τρόποι

Τελικά, η λύση είναι ο αριθμός Catalan n-τάξης $C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}, n \geq 0$.

2.4δ Δένδρα με προσανατολισμό και ρίζα

Ένα **γράφημα** G είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος δύο ξένων μεταξύ τους συνόλων $V \neq \emptyset$ και E, όπου το E είναι ένα υποσύνολο του συνόλου των μη διατεταγμένων ζευγών του V.

Βαθμός μιας κορυφής ονομάζεται ο αριθμός των προσκείμενων σ' αυτήν πλευρών.

Ως **δένδρο** ορίζουμε ένα συνεκτικό και ακυκλικό γράφημα. Δηλαδή, ένα γράφημα για το οποίο ισχύουν τα εξής:

Για δύο οποιεσδήποτε κορυφές x, y του γραφήματος υπάρχει πάντα μια πεπερασμένη ακολουθία από κορυφές και πλευρές του γραφήματος που δεν επαναλαμβάνονται (μονοπάτι) και η οποία ξεκινά από τη x και καταλήγει στην y ή αντίστροφα.

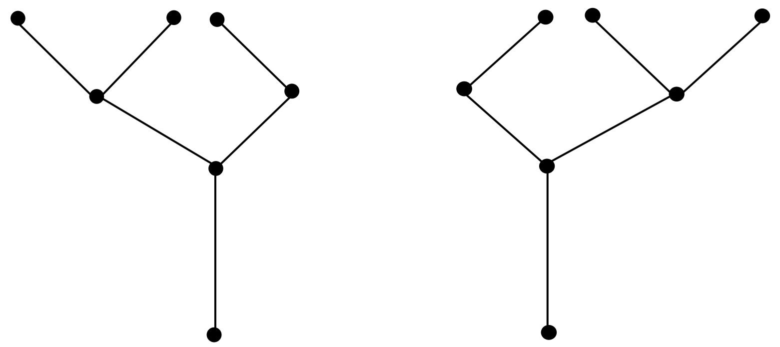
Δεν υπάρχει ακολουθία από κορυφές και πλευρές του γραφήματος (μονοπάτι) στην οποία να συμπίπτουν η αρχική και η τελική κορυφή.

Ρίζα ενός δένδρου ονομάζεται μια κορυφή διακεκριμένη από τις υπόλοιπες, βρίσκεται συνήθως στο τελευταίο επίπεδο του δένδρου και δεν έχει γονείς.

Φύλλα ενός δένδρου ονομάζονται οι κορυφές που βρίσκονται συνήθως στο ανώτερο επίπεδο και δεν έχουν παιδιά.

Τα δένδρα με ρίζα έχουν κάποιο είδος «ιεραρχίας». Ουσιαστικά, το δένδρο αποκτά ένα συγκεκριμένο προσανατολισμό έτσι ώστε κάθε πλευρά του δένδρου να απομακρύνεται από τη ρίζα. Για κάθε κορυφή x του δένδρου λέμε ότι ο γονέας του είναι η κορυφή y που βρίσκεται ακριβώς πριν τον στη διαδρομή από τη ρίζα προς το x.

Επίσης, ο **προσανατολισμός** διαχωρίζει δένδρα όπως τα παρακάτω, που, ενώ είναι συμμετρικά, δεν είναι όμοια.



Συμμετρικά, αλλά όχι όμοια δένδρα.

Θεώρημα 2.6: Το πλήθος των δένδρων με προσανατολισμό και ρίζα και βαθμούς κορυφών 1 ή 3 και n φύλλα ισούται με τον αριθμό Catalan (n-1)-τάξης $C_{n-1} = \frac{\binom{2n-2}{n-1}}{n}$.

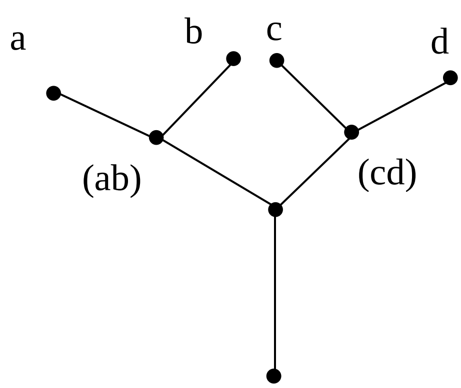
Απόδειξη 1: Η πρώτη απόδειξη βασίζεται στην κατασκευή μιας 1-1 αντιστοιχίας μεταξύ της τοποθέτησης παρενθέσεων σε γινόμενο n παραγόντων και των δένδρων με ρίζα, προσανατολισμό, βαθμό κορυφών 1 ή 3 και n φύλλα. Θεωρούμε ένα τέτοιο δένδρο και αριθμούμε τα φύλλα του $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Αν δύο φύλλα a_m, a_k συνδέονται με την ίδια κορυφή βαθμού 3, η κορυφή αυτή ονομάζεται (a_m, a_k). Συνεχίζοντας αυτήν τη διαδικασία, παρατηρούμε ότι, όσο προχωράμε προς τη ρίζα, κάθε κορυφή παίρνει το όνομά της με βάση τους απογόνους της. Συνεπώς, φτάνοντας στη ρίζα έχουμε ένα πλήρες παρενθετικοποιημένο γινόμενο, του οποίου οι όροι είναι όλες οι κορυφές του αρχικού δένδρου και, άρα, κατορθώσαμε να φτιάξουμε τη ζητούμενη 1-1 αντιστοιχία.

Τελικά, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.4, το πλήθος των δένδρων με ρίζα και προσανατολισμό, που έχουν κορυφές βαθμού 1ή 3 προκύπτει από τον (n-1)-τάξης αριθμό Catalan:

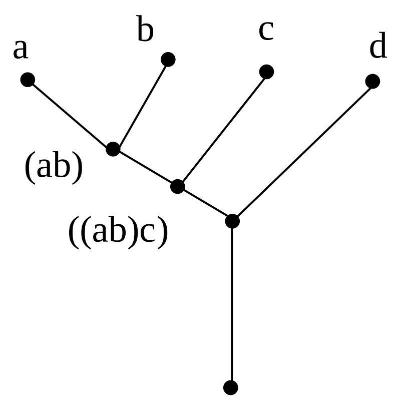
$$a_n = C_{n-1} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

■

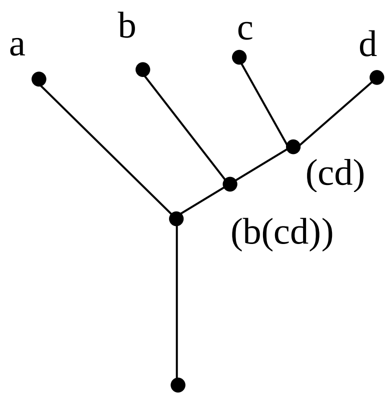
Παράδειγμα 2.9:



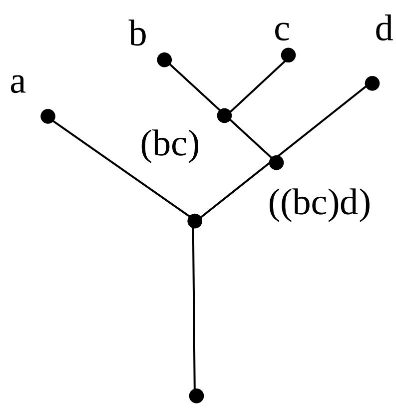
((ab)(cd))



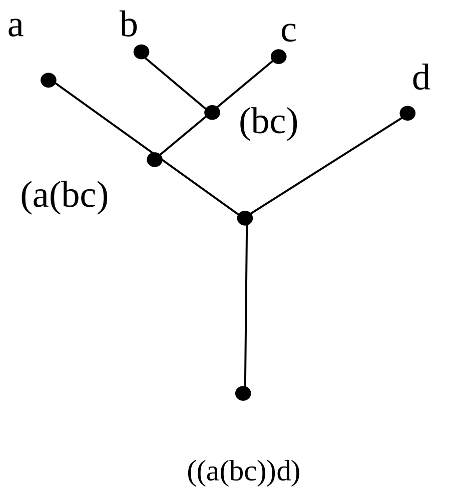
(((ab)c)d)



(a(b(cd)))



(a((bc)d))



Τα δένδρα βαθμού 1 ή 3, προσανατολισμό, ρίζα και 4 φύλλα είναι: $C_3 = \frac{1}{4}\binom{6}{3} = 5.$

Απόδειξη 2: Η δεύτερη απόδειξη βασίζεται στην κατασκευή μιας 1-1 αντιστοιχίας μεταξύ των τριγωνισμών ενός n-γώνου και των δένδρων με ρίζα, προσανατολισμό, βαθμό κορυφών 1 ή 3 και n-1 φύλλα. Θεωρούμε n-γωνο πλήρως διαμερισμένο σε τρίγωνα με μη τεμνόμενες διαγωνίους.

τοποθετούμε μια κορυφή στο εσωτερικό κάθε τριγώνου και έξω από κάθε πλευρά του n-γώνου

συνδέουμε τις εσωτερικές κορυφές έτσι ώστε να ενώνονται μόνο όσες έχουν πλευρά τριγώνου ανάμεσά τους.

Η διαδικασία αυτή μας δίνει ένα γράφημα στο οποίο κάθε εσωτερική στο n-γωνο κορυφή έχει βαθμό 3 και κάθε εξωτερική βαθμό 1. Επίσης, παρατηρούμε ότι είναι συνεκτικό και ακυκλικό και οποιαδήποτε κορυφή βαθμού 1 μπορεί να θεωρηθεί ρίζα, άρα είναι δένδρο που ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 2.6.

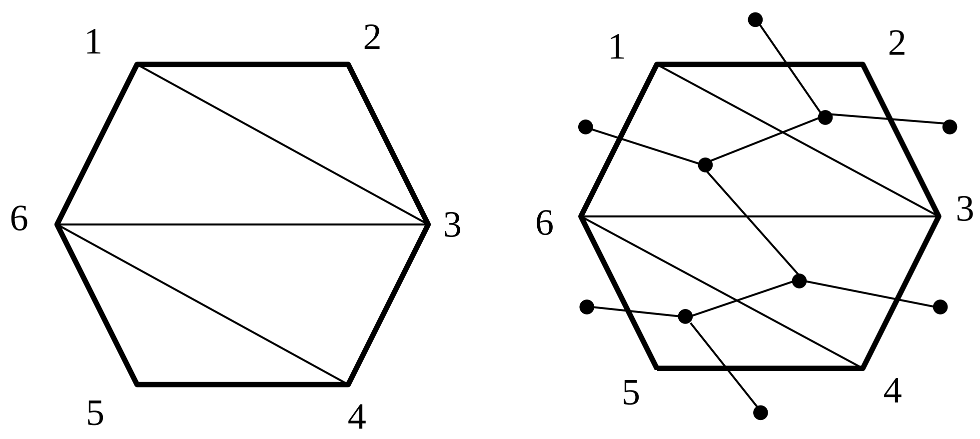
Αντιστρέφουμε τη διαδικασία:

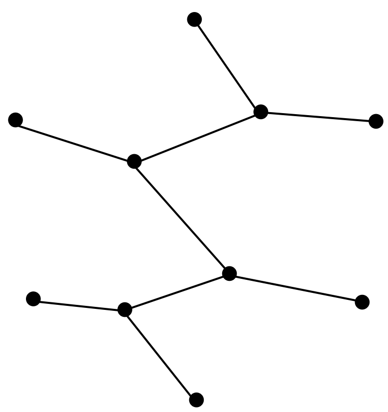
- δημιουργούμε n νέες κορυφές, καθεμιά μεταξύ δύο διαδοχικών φύλλων του δένδρου
- ενώνουμε όλες τις νέες κορυφές με πλευρές έτσι ώστε να τέμνουν τις αντίστοιχες πλευρές του δένδρου.

Έτσι καταφέραμε να κατασκευάσουμε ένα πλήρως τριγωνισμένο n-γωνο και, συνεπώς, έχουμε μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των τριγωνισμών ενός n-γώνου και των δένδρων με ρίζα, προσανατολισμό, βαθμό κορυφών 1 ή 3 και n-1 φύλλα.

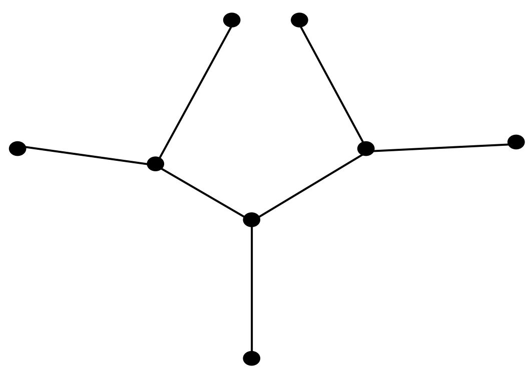
■

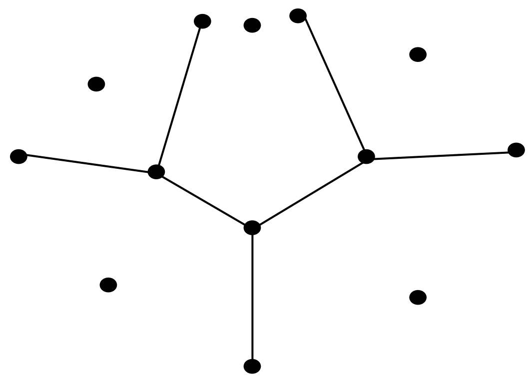
Παράδειγμα 2.10:

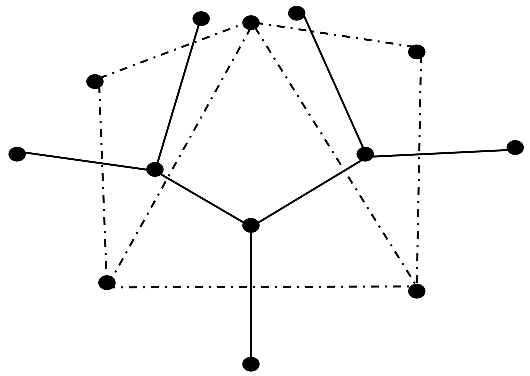




Από τον τριγωνισμό του εξαγώνου φτάσαμε στο αντίστοιχο δένδρο βαθμού 1 ή 3. Από τις κορυφές βαθμού 1 επιλέγουμε τη μια ως ρίζα και μένουν 5 φύλλα.







Από ένα δένδρο με 8 κορυφές βαθμού 1 ή 3, με ρίζα και προσανατολισμό, καταλήξαμε στο τριγωνισμένο πεντάγωνο που φαίνεται με διακεκομμένες γραμμές στο τελευταίο σχήμα.

Θεώρημα 2.7: Το πλήθος των δένδρων με προσανατολισμό, ρίζα και n φύλλα δίνεται από τον αριθμό Catalan n-2 τάξης, $C_{n-2} = \frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2}$.

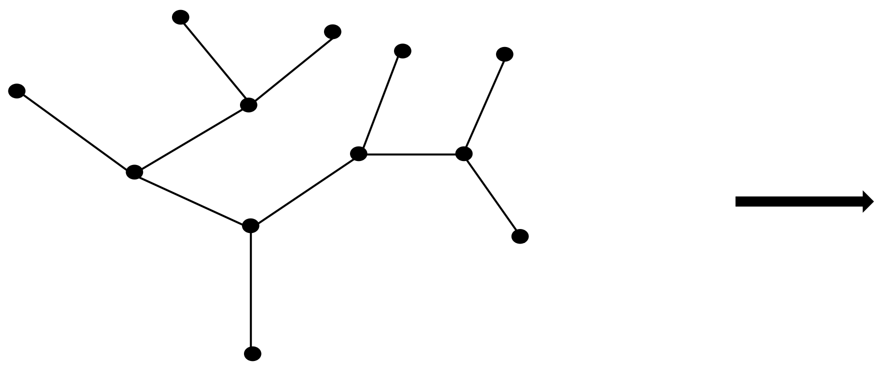
Απόδειξη: Θα αποδείξουμε το θεώρημα κατασκευάζοντας μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των δένδρων με προσανατολισμό, ρίζα, n-1 φύλλα και βαθμό κορυφών 1 ή 3 και των δένδρων με προσανατολισμό, ρίζα και n φύλλα.

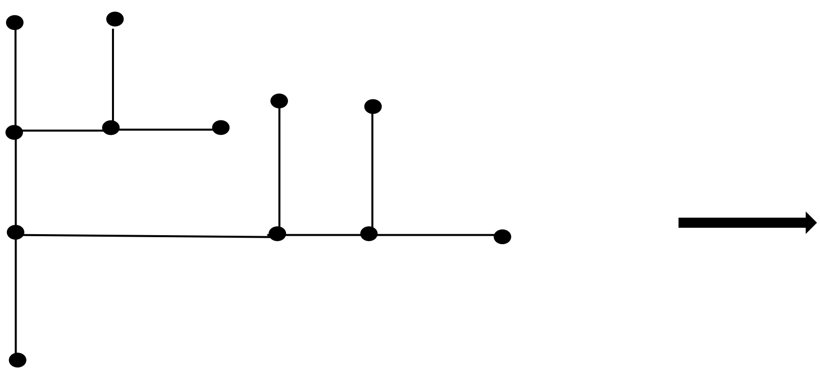
Θεωρούμε ένα δένδρο με προσανατολισμό, ρίζα, n-1 φύλλα και βαθμό κορυφών 1 ή 3 και το σχεδιάζουμε κατά τρόπον ώστε σε κάθε κορυφή βαθμού 3, οι πλευρές που διέρχονται απ’ αυτήν να έχουν κατεύθυνση προς το Βορρά ή προς την Ανατολή. Στη συνέχεια, συμπτύσσουμε όλες τις κορυφές με κατεύθυνση προς την Ανατολή, αφήνοντας μόνο όσες έχουν κατεύθυνση προς το Βορρά. Κατά τη διαδικασία της σύμπτυξης, τα άκρα μιας πλευράς ταυτίζονται και η πλευρά εξαφανίζεται. Τελικά, οι κορυφές βαθμού 3 εξαφανίζονται και μένουν μόνο τα n-1 φύλλα ως κορυφές του νέου δένδρου.

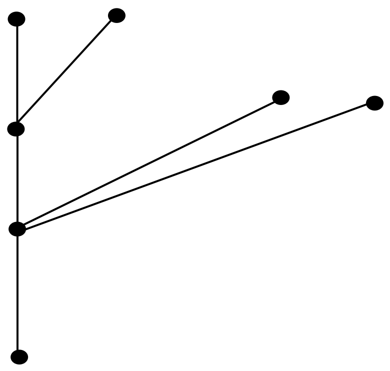
Αντίστροφα, κάθε κορυφή βαθμού n σπάει σε n φύλλα και n-1 κορυφές βαθμού 3.

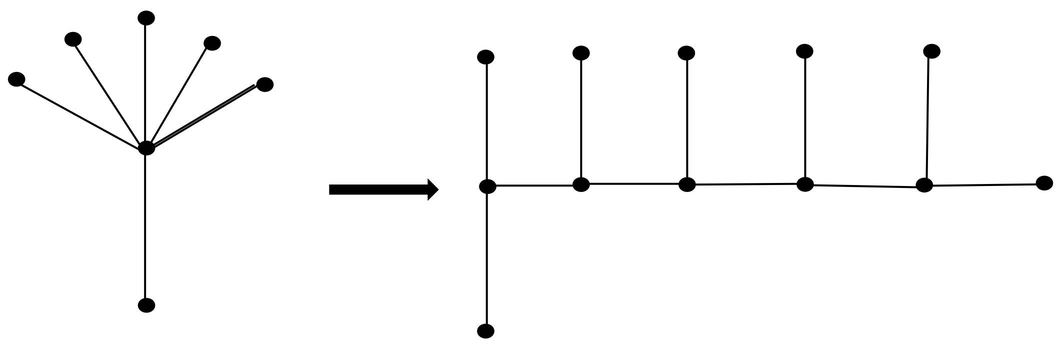
■

Παράδειγμα 2.11:









Η κορυφή βαθμού 6 του αρχικού δένδρου έσπασε σε 5 κορυφές βαθμού 3 και 6 φύλλα στο νέο δένδρο.

Το πρόβλημα μπορεί να γενικευθεί για την περίπτωση στην οποία η ρίζα δεν έχει βαθμό 1 και το δένδρο δεν έχει προσανατολισμό. Τότε, αν συμβολίσουμε με r_n το πλήθος των δένδρων με ρίζα και n κορυφές, η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας έχει τη μορφή:

$$R(x) = x + x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 9x^5 + 20x^6 + 48x^7 + \cdots$$

και αν συμβολίσουμε με t_n το πλήθος των δένδρων με n κορυφές, η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας έχει τη μορφή:

$$T(x) = x + x^2 + x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 6x^6 + 11x^7 + 23x^8 + \cdots$$

Οι δύο σχέσεις συνδέονται, όπως απέδειξαν οι Polya και Otter σύμφωνα με :

$$T(x) = R(x) - \frac{1}{2}R(x)^2 + \frac{1}{2}R(x^2)$$

3. ΑΡΙΘΜΟΙ STIRLING

3.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τους αριθμούς Stirling α’ και β’ είδους. Οι αριθμοί Stirling α’ είδους συμβολίζονται ως **s(n, m)** (*Riordan 1980; Roman 1984*), $\boldsymbol{S_n^m}$ (*Jordan 1950*), $\boldsymbol{S_n^{(m)}}$ (*Fort 1948; Abramowitz & Stegun 1972*), ενώ οι αριθμοί Stirling β’ είδους συμβολίζονται ως **S(n, m)** (*Riordan 1980; Roman 1984*), $\boldsymbol{S_n^{(m)}}$ (*Fort 1948; Abramowitz & Stegun 1972*), $\boldsymbol{s_n^{(m)}}$, $S_2(n, m)$ ή με το συμβολισμό του Knuth $\left\{ \begin{matrix} \boldsymbol{m} \\ \boldsymbol{n} \end{matrix} \right\}$ (*Graha, Knuth & Patashnik 1994; Knuth 1997*).

Η γεννήτρια συνάρτηση των αριθμών Stirling α’ είδους είναι:

$$\sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k = (-1)^n n! \binom{n-x-1}{n}$$

και ικανοποιούν τον αναδρομικό τύπο:

$$s(n+1,m) = s(n,m-1) - ns(n,m)$$

Αντίστοιχα, οι αριθμοί Stirling β’ είδους δίνονται από τη σχέση:

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i \binom{k}{i}(k-i)^n$$

Οι αριθμοί Stirling αποτελούν πολύ σημαντικό κομμάτι των Μαθηματικών και βοηθούν στην επίλυση πολλών προβλημάτων. Στις επόμενες ενότητες θα μελετήσουμε εκτενώς το θεωρητικό τους πλαίσιο και τη χρήση τους στα προβλήματα απαρίθμησης.

3.2 Ιστορικά στοιχεία

Οι αριθμοί Stirling οφείλουν το όνομά τους στο Δανό Μαθηματικό N. Nielsen (*Nielsen, 1906*). Ο Nielsen τους ονόμασε έτσι προς τιμήν του διάσημου Σκωτσέζου Μαθηματικού James Stirling (Stirlingshire 1692 – Edinburgh 1770), που ήταν ο πρώτος που τους εισήγαγε στο έργο του *«Methodus differentialis, sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum»* το έτος 1730 (*Chisholm, 1911*).

Ο James Stirling είχε μεγάλη συμβολή στην εξέλιξη των Μαθηματικών μελετώντας διάφορα πεδία όπως οι σειρές, οι διαφορικές εξισώσεις, η Συνδυαστική. Υπήρξε πρωτοπόρος στη θεωρία των γεννητριών συναρτήσεων (Cohen, 1978), ασχολήθηκε με την ταχύτητα σύγκλισης σειρών καθώς και με επίπεδες καμπύλες τρίτου βαθμού επεκτείνοντας τα αποτελέσματα του Isaac Newton (Tweddle, 1992), έλυσε το πρόβλημα των ορθογωνίων τροχιών το 1716 (Tweedie, 1922) που είχε τεθεί από τον Gottfried Wilhelm von Leibniz και με το οποίο είχαν ασχοληθεί επίσης ο Leonard Euler, ο Johann Bernoulli, και ο Nicolaus Bernoulli. Εκτός από τα Μαθηματικά, ασχολήθηκε επίσης με Μηχανική, Οπτική, Υδροδυναμική και Αστρονομία, τα οποία δίδαξε στην Ακαδημία William Watt στο Λονδίνο.

Αν και η προσφορά του Stirling στις επιστήμες ήταν μεγάλη, εντούτοις, οι πολιτικές του πεποιθήσεις δυσκόλεψαν αρκετά τη ζωή του, ιδίως την περίοδο των φοιτητικών του χρόνων. Η ένταξή του στο κίνημα των Ιακωβιτών για την αυτονομία της Σκωτίας, όπως όλη η οικογένειά του, καθόρισε πολλές από τις δραστηριότητές του. Μερικές από τις συνέπειες της υποστήριξης των Ιακωβιτών ήταν να κατηγορηθεί για συμμετοχή σε εξέγερση και βλασφημία εναντίον του βασιλιά, να χάσει ως φοιτητής την υποτροφία του λόγω της άρνησής του να προχωρήσει σε πράξη ορκωμοσίας, αλλά και αργότερα, να χάσει τη θέση του καθηγητή για την οποία είχε προταθεί μετά το θάνατο του Colin Maclaurin (Tweedie, 1922), τέλος, δε, να εξορισθεί από τη γενέτειρα του.

Ανεξάρτητα από τις πολιτικές του πεποιθήσεις, το όνομά του ήταν σεβαστό στον επιστημονικό κόσμο της εποχής. Διατηρούσε αλληλογραφία με τον Gabriel Cramer, τον Abraham de Moivre, τον Leonard Euler, τον Colin Maclaurin. Καθοριστική για την πορεία του υπήρξε η φιλία του με τον Nicolaus Bernoulli, αλλά περισσότερο η στενή του σχέση με τον Isaac Newton, από τον οποίο προτάθηκε να γίνει μέλος της Βασιλικής Ακαδημίας του Λονδίνου στην οποία ήταν μέλος για 20 χρόνια και διαγράφηκε το 1746 όταν έγινε μέλος της Βασιλικής Ακαδημίας του Βερολίνου (Tweedie, 1922).

3.3 Θεωρητικό πλαίσιο

I. Αριθμοί Stirling β' είδους

Οι αριθμοί Stirling β' είδους $S(n,k) = \left\{ {n \atop k} \right\}$ υπολογίζουν με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε n διακεκριμένα αντικείμενα σε ακριβώς k μη διακεκριμένες θέσεις ώστε καμία θέση να μην είναι άδεια. Προφανώς, το πλήθος των τρόπων για να τοποθετήσουμε n διακεκριμένα αντικείμενα σε k ακριβώς διακεκριμένες θέσεις ώστε καμία να μην είναι κενή, σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου, ισούται με $S(n,k)$ επί το πλήθος των μεταθέσεων των k θέσεων, δηλαδή,

$$k!\,S(n,k) = k!\left\{ {\boldsymbol{n} \atop \boldsymbol{k}} \right\}$$

Ισοδύναμα, οι αριθμοί Stirling β' είδους $S(n,k) = \left\{ {n \atop k} \right\}$ υπολογίζουν με πόσους τρόπους μπορούμε να διαμερίσουμε ένα σύνολο n στοιχείων σε k μη κενά υποσύνολα.

Μια **διαμέριση** ενός συνόλου Α είναι μια οικογένεια Α={A_i, i ∈ I} μη κενών και ξένων ανά δύο υποσυνόλων του Α, δηλαδή:

1) $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ και 2) $A_i \cap A_j = \emptyset, αν\ i \neq j$

Το I είναι το σύνολο των δεικτών και τα υποσύνολα A_i είναι τα μέρη της διαμέρισης.

Θεώρημα 3.1: Έστω $S(n,k)$ το σύνολο των διαμερίσεων ενός n-συνόλου Α σε k μέρη, όπου $1 \leq k \leq n$. Ισχύουν τα εξής:

1) $S(n,1) = 1$
2) $S(n,n) = 1$

3) $S(n, 0) = 0$

4) $S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$

5) $S(n, n-1) = \binom{n}{2}$

6) $S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k), 2 \leq k \leq n-1$

Απόδειξη:

1) Τα n στοιχεία του συνόλου Α μπορούν να διαμερισθούν σε 1 υποσύνολο κατά μοναδικό τρόπο, άρα, $S(n, 1) = 1$
2) Τα n στοιχεία του συνόλου Α μπορούν να διαμερισθούν σε n υποσύνολα κατά μοναδικό τρόπο, άρα, $S(n, n) = 1$
3) Δεν είναι δυνατό τα n στοιχεία να διαμερισθούν σε 0 υποσύνολα, άρα, $S(n, 0) = 0$
4) Έστω n-σύνολο $A=\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ το οποίο θέλουμε να διαμερίσουμε σε δύο υποσύνολα. Αν P(A) το δυναμοσύνολο του Α, γνωρίζουμε ότι ο πληθάριθμός του είναι $|P(A)| = 2^n$ κι ότι το πλήθος των υποσυνόλων του Α που περιέχουν το α_1 είναι 2^{n-1}. Θεωρούμε A_1 υποσύνολο του Α που περιέχει το α_1 και το αντιστοιχίζουμε με το συμπλήρωμά του ως προς Α. Καταφέραμε έτσι να διαμερίσουμε το σύνολο Α σε δύο μη κενά υποσύνολα. Η μόνη περίπτωση που δε μπορεί να γίνει αυτή η διαμέριση είναι όταν αντιστοιχίσουμε το ίδιο το σύνολο Α με το $\emptyset$, γιατί δεν επιτρέπεται να έχουμε κενό υποσύνολο. Κατά συνέπεια, έχουμε:
$$S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$$
5) Προφανώς, θα έχουμε n-2 σύνολα με ένα στοιχείο και ένα σύνολο με δύο στοιχεία. Δηλαδή, ψάχνουμε με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε ένα 2-σύνολο από το αρχικό n-σύνολο:
$$S(n, n-1) = \binom{n}{2}$$

6) Έστω το στοιχείο α_k που ανήκει στο n-σύνολο A. Για κάθε διαμέριση του A ισχύει αποκλειστικά ένα από τα παρακάτω:
   1) το α_k είναι μέρος της διαμέρισης
   2) το α_k ανήκει σε κάποιο μέρος της διαμέρισης που περιέχει κι άλλα στοιχεία του A

   Για την πρώτη περίπτωση, αν αφαιρέσουμε το μονοσύνολο $\{\alpha_k\}$, προκύπτει μια διαμέριση του (n-1)-συνόλου $A\setminus\{\alpha_k\}$ σε k-1 μέρη που γίνεται με $S(n-1, k-1)$ τρόπους. Αντίστροφα, αν $\alpha_k \notin B$ και σε κάθε διαμέριση του (n-1)-συνόλου B σε k-1 μέρη επαναφέρουμε το μονοσύνολο $\{\alpha_k\}$, θα έχουμε μια διαμέριση του n-συνόλου $B \cup \{\alpha_k\}$ σε k μέρη. Άρα, η αντιστοιχία είναι 1-1.

   Για τη δεύτερη περίπτωση, θεωρούμε μια διαμέριση του n-συνόλου A σε k μέρη $A_1, A_2, \ldots, A_k$ και αντιστοιχούμε το ζεύγος (i, A_0) για το οποίο ισχύει $\alpha_n \in A_i$ και A_0 μια διαμέριση του (n-1)-συνόλου $A\setminus\{\alpha_n\}$ σε k-1 μη κενά μέρη $A_1, A_2, \ldots, A_i\setminus\{\alpha_n\}, \ldots, A_k$. Για κάθε $i \in (1, 2, \ldots, k)$ υπάρχουν k δυνατές τιμές και $S(n-1, k)$ δυνατές διαμερίσεις A_0, άρα, υπάρχουν k $S(n-1, k)$ δυνατά ζεύγη (i, A_0). Αντίστροφα, αν θεωρήσουμε ένα ζεύγος της μορφής (i, A_0), μπορούμε να επαναφέρουμε το $\alpha_n \notin A\setminus\{\alpha_n\}$ στο μέρος $A_i\setminus\{\alpha_n\}$ και προκύπτει μια διαμέριση του n-συνόλου A σε k μέρη. Άρα, η αντιστοιχία είναι 1-1.

   Δεδομένου ότι κάθε διαμέριση είναι είτε της μορφής 1 είτε της 2, χρησιμοποιούμε τον κανόνα του αθροίσματος και έχουμε, τελικά:

$$S(n,k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k)$$

■

Παράδειγμα 3.1:

$$\left\{ {4 \atop 1} \right\} = 4 \quad \left\{ {4 \atop 4} \right\} = 1 \quad \left\{ {4 \atop 0} \right\} = 0 \quad \left\{ {4 \atop 2} \right\} = 2^{4-1} - 1 = 2^3 - 1 = 7$$

$$\left\{ {4 \atop 3} \right\} = \binom{4}{2} = 6$$

$$\left\{ {5 \atop 3} \right\} = \left\{ {4 \atop 2} \right\} + 3\left\{ {4 \atop 3} \right\} = 7 + 3 * 6 = 7 + 18 = 25$$

Στον επόμενο πίνακα φαίνονται οι αριθμοί Stirling β’ είδους για

$1 \leq k \leq n \leq 6$:

n \ k	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	1	1				
3	1	3	1			
4	1	7	6	1		
5	1	15	25	10	1	
6	1	31	90	65	15	1

Οι αριθμοί Stirling β’ είδους μπορούν να τοποθετηθούν σε ένα τρίγωνο περίπου όπως αυτό του Pascal:

1^{η} γραμμή					$\left\{{1 \atop 1}\right\}$				
2^{η} γραμμή				$\left\{{2 \atop 1}\right\}$		$\left\{{2 \atop 2}\right\}$			
3^{η} γραμμή			$\left\{{3 \atop 1}\right\}$		$\left\{{3 \atop 2}\right\}$		$\left\{{3 \atop 3}\right\}$		
4^{η} γραμμή		$\left\{{4 \atop 1}\right\}$		$\left\{{4 \atop 2}\right\}$		$\left\{{4 \atop 3}\right\}$		$\left\{{4 \atop 4}\right\}$	
5^{η} γραμμή	$\left\{{5 \atop 1}\right\}$		$\left\{{5 \atop 2}\right\}$		$\left\{{5 \atop 3}\right\}$		$\left\{{5 \atop 4}\right\}$		$\left\{{5 \atop 5}\right\}$

1^{η} γραμμή					1				
2^{η} γραμμή				1		1			
3^{η} γραμμή			1		3		1		
4^{η} γραμμή		1		7		6		1	
5^{η} γραμμή	1		15		25		10		1

Κάθε αριθμός στο τρίγωνο προκύπτει αν προσθέσουμε τον πάνω αριστερά με τον πάνω δεξιά πολλαπλασιασμένο επί την τάξη του στη γραμμή που βρίσκεται, όπως λέει η σχέση 6 του θεωρήματος 3.1.

π.χ. 25 = 7 + 6*3

Το θεώρημα 3.1 αφορούσε στις περιπτώσεις που καμιά θέση δεν επιτρέπεται να είναι κενή. Στις περιπτώσεις που υπάρχουν κενές θέσεις ισχύει το επόμενο:

Θεώρημα 3.2: Αν $m \leq n$, το πλήθος των τρόπων για να τοποθετήσουμε n διακεκριμένα αντικείμενα σε m ή λιγότερες διακεκριμένες θέσεις δίνεται από τη σχέση:

$$m^n = \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} k!\, S(n,k) = \binom{m}{1} 1!\, S(n,1) + \binom{m}{2} 2!\, S(n,2) + \cdots$$
$$+ \binom{m}{m} m!\, S(n,m)$$

Απόδειξη: Αποδεικνύουμε πρώτα το αριστερό μέλος της ισότητας: Έστω {1,2,…,m} οι διακεκριμένες θέσεις και έστω το n-σύνολο $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ που θέλουμε να διαμερίσουμε. Κάθε στοιχείο α_k του συνόλου μπορεί να τοποθετηθεί σε οποιαδήποτε από τις m διακεκριμένες θέσεις, οπότε, από τον κανόνα του γινομένου, το πλήθος των διαμερίσεων του n-συνόλου σε m ή λιγότερες διακεκριμένες θέσεις είναι m^n.

Για το δεξί μέλος της ισότητας: Το πλήθος των τρόπων για να διαμερίσουμε τα n στοιχεία του συνόλου σε ακριβώς k διακεκριμένες θέσεις είναι S(n,k) και το πλήθος των τρόπων για να ονομάσουμε αυτές τις θέσεις με στοιχεία από το σύνολο {1,2,…,m} ισούται με τις k-διατάξεις του {1,2,…,m}, δηλαδή: m(m-1)(m-2)…(m-k-1)=$\binom{m}{k}k!$.

Άρα, το πλήθος των διαμερίσεων του n-συνόλου σε k διακεκριμένες θέσεις είναι $\binom{m}{k}k!\, S(n,k)$ και αθροίζοντας για όλα τα k, $1 \leq k \leq m$, έχουμε:

$$m^n = \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} k!\, S(n,k)$$

Στην παραπάνω απόδειξη χρησιμοποιήσαμε το εξής:

Θεώρημα 3.3: Το πλήθος των τρόπων για να τοποθετήσουμε n διακεκριμένα αντικείμενα σε ακριβώς m διακεκριμένες θέσεις είναι $\binom{n}{m}m!$.

Απόδειξη: Όπως έχουμε ήδη αποδείξει, το πλήθος των τρόπων για να τοποθετήσουμε n διακεκριμένα αντικείμενα σε m μη διακεκριμένες θέσεις είναι S(n,m) και το πλήθος των τρόπων για να ονομάσουμε αυτές τις θέσεις από το σύνολο {1,2,…,m} είναι m!. Το ζητούμενο προκύπτει από τον κανόνα του γινομένου.

■

Παράδειγμα 3.3: Έστω το σύνολο {α, β, γ} το οποίο θέλουμε να διαμερίσουμε στις διακεκριμένες θέσεις I, II και III λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι κάποιες πιθανώς θα είναι κενές. Έχουμε:

$3^3 = 27$

$$\binom{3}{1}1!\,S(3,1)+\binom{3}{2}2!\,S(3,2)+\binom{3}{3}3!\,S(3,3)=3+18+6=27$$

	I	II	III
1	αβ	γ	-
2	αβ	-	γ
3	γ	αβ	-
4	-	αβ	γ
5	γ	-	αβ
6	-	γ	αβ
7	αγ	β	-
8	αγ	-	β
9	β	αγ	-
10	-	αγ	β
11	β	-	αγ
12	-	β	αγ

	I	II	III
13	βγ	α	-
14	βγ	-	α
15	α	βγ	-
16	-	βγ	α
17	α	-	βγ
18	-	α	βγ
19	α	β	γ
20	α	γ	β
21	β	α	γ
22	β	γ	α
23	γ	α	β
24	γ	β	α
25	αβγ	-	-
26	-	αβγ	-
27	-	-	αβγ

Παράδειγμα 3.4: Έστω το σύνολο {α, β, γ} το οποίο θέλουμε να διαμερίσουμε στις διακεκριμένες θέσεις I, II και III ακριβώς.

$3!S(3,3) = 6$

Από το προηγούμενο παράδειγμα βλέπουμε ότι δεκτές είναι μόνο οι περιπτώσεις 19 – 24 γιατί μόνο σ’ αυτές δεν έχουμε κενές θέσεις.

Πόρισμα 3.1: Το πλήθος των τρόπων για να διαμερίσουμε ένα σύνολο n διακεκριμένων στοιχείων σε m ή λιγότερες μη διακεκριμένες θέσεις είναι:

S(n,1) + S(n,2) + …+ S(n,m)

Απόδειξη: Για κάθε k, $1 \leq k \leq m$, που εκφράζει το πλήθος των κατειλημμένων θέσεων, ο αριθμός που ψάχνουμε είναι το άθροισμα όλων των δυνατών τρόπων να τοποθετήσουμε n διακεκριμένα αντικείμενα σε ακριβώς k μη διακεκριμένες θέσεις, δηλαδή S(n,k). Αν αθροίσουμε για όλες τις τιμές του k, έχουμε:

$$\sum_{k=1}^{m} S(n,k) = S(n,1) + S(n,2) + \ldots + S(n,m)$$

■

Παράδειγμα 3.5: Έστω το σύνολο {α, β, γ, δ} το οποίο θέλουμε να τοποθετήσουμε σε τρεις ή λιγότερες μη διακεκριμένες θέσεις.

S(4,1) + S(4,2) + S(4,3) = 1 + 7 + 6 + 1 = 14

1) (1 τρόπος)

   α,β,γ,δ - -

2) (4 τρόποι)

   α,β,γ δ -

   α,γ,δ β -

   α,β,δ γ -

   β,γ,δ α -

3) (3 τρόποι)

α,β γ,δ -

α,γ β,δ -

α,δ β,γ -

4) (6 τρόποι)

α,β γ δ

α,γ β δ

α,δ β γ

β,γ α δ

β,δ α γ

γ,δ α β

Στον ακόλουθο πίνακα φαίνονται οι διάφορες περιπτώσεις διαμέρισης συνόλων:

διακεκριμένα αντικείμενα n	διακεκριμένες θέσεις m	κενές θέσεις	πλήθος τρόπων
όχι	όχι	όχι	$p_m(n) - p_{m-1}(n)$
όχι	όχι	ναι	$p_m(n)$
όχι	ναι	όχι	$\binom{n-1}{m-1}$
όχι	ναι	ναι	$\binom{n+m-1}{n}$
ναι	όχι	όχι	S(n,m)
ναι	όχι	ναι	S(n,1) +…+ S(n,m)
ναι	ναι	όχι	m!S(n,m)
ναι	ναι	ναι	m^n

όπου το σύμβολο $p_m(n)$ εκφράζει το πλήθος των διαμερίσεων του φυσικού n σε m προσθετέους, κάποιοι από τους οποίους μπορεί να είναι 0.

Θεώρημα 3.4: α) Το πλήθος των τρόπων με τους οποίους n μη διακεκριμένα αντικείμενα μπορούν να τοποθετηθούν σε m ή λιγότερες διακεκριμένες θέσεις είναι $\binom{n+m-1}{n}$.

β) Το πλήθος των τρόπων με τους οποίους n μη διακεκριμένα αντικείμενα μπορούν να τοποθετηθούν σε m διακεκριμένες θέσεις ακριβώς είναι $\binom{n-1}{m-1}$.

Απόδειξη: α) Έστω A_1, A_2,…,A_m οι διακεκριμένες θέσεις. Κάθε τοποθέτηση των n αντικειμένων στις θέσεις αυτές μπορεί να προσδιοριστεί από μία λίστα n ονομάτων των θέσεων στις οποίες τοποθετείται κάθε αντικείμενο. Για παράδειγμα, αν ένα αντικείμενο πάει στη θέση A_1, τρία αντικείμενα στη θέση A_2 και δύο στη θέση A_4, γράφουμε A_1 A_2 A_2 A_2 A_4 A_4. Το πλήθος των τρόπων για να τοποθετήσουμε τα n όμοια αντικείμενα σε m ή λιγότερες διακεκριμένες θέσεις ισούται με το πλήθος των τρόπων εκλογής ενός πολυσυνόλου με n στοιχεία από το m-σύνολο A_1, A_2,…,A_m και δίνεται από τον τύπο των συνδυασμών με επανάληψη, οπότε είναι $\binom{n+m-1}{n}$.

β) Αφού τα αντικείμενα είναι μη διακεκριμένα, μπορούμε να τα παραστήσουμε με x. Έτσι, έχουμε μια ακολουθία n στοιχείων της μορφής xxx…xx που χωρίζονται μεταξύ τους από m+1 γραμμές κατά τέτοιον τρόπο ώστε η πρώτη γραμμή μπαίνει στην αρχή, η τελευταία στο τέλος και το διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών γραμμών είναι μία θέση. Τα x που μεσολαβούν μεταξύ δύο διαδοχικών γραμμών αντιστοιχούν στο πλήθος των στοιχείων που τοποθετήσαμε στη θέση αυτή. Η συνθήκη ότι δεν υπάρχουν κενές θέσεις ικανοποιείται δεδομένου ότι κάθε γραμμή, εκτός από την πρώτη και την τελευταία, βρίσκεται μεταξύ δύο x. Για παράδειγμα, η ακολουθία |xx|x|xxxx|x| δείχνει ότι έχουμε δύο αντικείμενα στην πρώτη θέση, ένα στη δεύτερη, τέσσερα στην τρίτη και ένα στην τέταρτη. Συνεπώς, μεταξύ των n το πλήθος x υπάρχουν n-1 διαστήματα στα οποία πρέπει να τοποθετήσουμε m+1-2=m-1 γραμμές και αυτό γίνεται με $\binom{n-1}{m-1}$ τρόπους.

■

<u>Σημείωση</u>: O τύπος $\binom{n-1}{m-1}$ μετρά επίσης τις διαφορετικές διατεταγμένες διαμερίσεις του αριθμού n σε m μη μηδενικά μέρη.

Παράδειγμα 3.6: Το πλήθος των τρόπων για να τοποθετήσουμε n=4 αντικείμενα σε m=3 ή λιγότερες θέσεις είναι

$\binom{n+m-1}{n} = \binom{4+3-1}{4} = \binom{6}{4} = 15.$

	I	II	III
1	4	0	0
2	0	4	0
3	0	0	4
4	3	1	0
5	3	0	1
6	0	3	1
7	1	3	0
8	1	0	3
9	0	1	3
10	2	2	0
11	2	0	2

	I	II	III
12	2	1	1
13	0	2	2
14	1	2	1
15	1	1	2

Παράδειγμα 3.7: Το πλήθος των τρόπων για να τοποθετήσουμε n=5 αντικείμενα σε ακριβώς m=3 θέσεις είναι $\binom{n-1}{m-1} = \binom{4}{2} = 6$.

Συμβολίζοντας με x τα αντικείμενα έχουμε τις ακολουθίες:

1	|xxx|x|x|
2	|xx|xx|x|
3	|x|xx|xx|
4	|x|xxx|x|
5	|xx|x|xx|
6	|x|x|xxx|

Όπως είδαμε στην προηγούμενη σημείωση, ο τύπος $\binom{n-1}{m-1}$ μετρά επίσης τις διαφορετικές διατεταγμένες διαμερίσεις του αριθμού n σε m μη μηδενικά μέρη. Το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να τοποθετήσουμε n διακεκριμένα αντικείμενα σε m διακεκριμένες θέσεις ώστε n_k αντικείμενα τοποθετούνται στην θέση k, $1 \leq k \leq m$, και ορισμένα n_k μπορεί να είναι μηδέν, δίνεται από τον πολυωνυμικό συντελεστή $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_m}$, όπου $n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$ και $n_k \geq 0$.

Ισχύει ότι $\sum\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_m} = m^n$, όπου η άθροιση γίνεται σε όλες τις διατεταγμένες διαμερίσεις του αριθμού n σε m το πολύ μέρη κι αυτό αποδεικνύεται αν θέσουμε στο πολυωνυμικό θεώρημα

$x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 1$.

Θεωρώντας το πλήθος των διαφορετικών τρόπων τοποθέτησης n διακεκριμένων αντικειμένων σε m διακεκριμένες, μη κενές θέσεις έχουμε

$\sum\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_m}$, όπου $n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$ και $n_k \geq 0$.

Η άθροιση γίνεται πάνω σε όλες τις διαμερίσεις με διάταξη του αριθμού n σε ακριβώς m μέρη και το πλήθος αυτό ισούται με m!S(n,m).

Παράδειγμα 3.8: Για το παράδειγμα 3.7 υπολογίζω τα αθροίσματα των πολυωνυμικών συντελεστών:

$$\binom{5}{3\ 1\ 1} + \binom{5}{2\ 2\ 1} + \binom{5}{1\ 2\ 2} + \binom{5}{1\ 3\ 1} + \binom{5}{2\ 1\ 2} + \binom{5}{1\ 1\ 3} = 150$$

$$3!\,S(5,3) = 6 \cdot 25 = 150$$

Λήμμα 3.1: $(e^x - 1)^m = \sum_{i=1}^{m} S(i,m)\frac{m!}{i!}x^i$

Απόδειξη: Θεωρούμε την παράσταση:

$$\left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^m =$$

$$= \left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)\left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) \ldots \left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)$$

Ο όρος x^n , $n \geq m$, αποτελείται από ένα άθροισμα προσθετέων της μορφής:

$\frac{1}{n_1!n_2!\dots n_m!}x^{n_1}x^{n_2}\dots x^{n_m}$,όπου

$n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n, n_k > 0,\ 1 \leq k \leq m$

και συνεπώς $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_m!}\frac{1}{n!}x^n = \binom{n}{n_1,n_2,\dots,n_m}\frac{1}{n!}x^n$

Άρα, ο συντελεστής του x^n είναι ένα άθροισμα της μορφής $\sum\binom{n}{n_1,n_2,\dots,n_m}\frac{1}{n!}$ και η άθροιση γίνεται σε όλες τις διαμερίσεις του n σε ακριβώς m το πλήθος μη μηδενικά μέρη, το οποίο είδαμε πως ισούται με:

$$\sum\binom{n}{n_1,n_2,\dots,n_m}\frac{1}{n!} = m!\,S(n,m)\frac{1}{n!} = \frac{m!}{n!}S(n,m)$$

Σύμφωνα με τον τύπο του Taylor για τη συνάρτηση e^x, ισχύει:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

και συνεπώς: $(e^x - 1)^m = (x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots)^m$

■

Θεώρημα 3.5:

$m!\,S(n,m) = \binom{m}{m}m^n - \binom{m}{m-1}(m-1)^n + \binom{m}{m-2}(m-2)^n - \cdots$

Απόδειξη: Από το διωνυμικό θεώρημα ισχύει:

$$(e^x - 1)^m = \binom{m}{m}e^{mx} - \binom{m}{m-1}e^{(m-1)x} + \binom{m}{m-2}e^{(m-2)x} - \cdots$$

Αναπτύσσοντας την παράσταση e^{kx} σε σειρά Taylor προκύπτει:

$$e^{kx} = 1 + kx + \frac{(kx)^2}{2!} + \frac{(kx)^3}{3!} + \cdots$$

και αντικαθιστώντας στην προηγούμενη σχέση θα πάρουμε:

$$\begin{aligned}(e^x - 1)^m = \binom{m}{m}\left(1 + mx + \frac{(mx)^2}{2!} + \frac{(mx)^3}{3!} + \cdots\right) - \binom{m}{m-1}\Big(1 \\ + (m-1)x + \frac{[(m-1)x]^2}{2!} + \frac{[(m-1)x]^3}{3!} + \cdots\Big) \\ + \binom{m}{m-2}\Big(1 + (m-2)x + \frac{[(m-2)x]^2}{2!} + \frac{[(m-2)x]^3}{3!} \\ + \cdots\Big) - \cdots\end{aligned}$$

Ο όρος x^n θα αποτελείται από τους προσθετέους:

$\binom{m}{m}\frac{m^n x^n}{n!}$ από τον πρώτο προσθετέο

$\binom{m}{m-1}\frac{(m-1)^n x^n}{n!}$ από το δεύτερο προσθετέο

$\binom{m}{m-2}\frac{(m-2)^n x^n}{n!}$ από τον τρίτο προσθετέο κ.ο.κ.

Αν απλοποιήσουμε με $\frac{x^n}{n!}$, θα πάρουμε:

$$m!\,S(n,m) = \binom{m}{m} m^n - \binom{m}{m-1}(m-1)^n + \binom{m}{m-2}(m-2)^n - \cdots$$

■

Παράδειγμα 3.9: Για n=5 και m=3 έχουμε:

$$3!\,S(5,3) = \binom{3}{3}3^5 - \binom{3}{2}2^5 + \binom{3}{1}1^5 - 0 = 153$$

II. Αριθμοί Stirling α’ είδους

Οι αριθμοί Stirling α’ είδους s(n,m) = $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$ μετρούν το πλήθος των μεταθέσεων n αντικειμένων σε m μη διατεταγμένους κύκλους και ικανοποιούν την αναδρομική σχέση

$$(n+1,m) = s(n,m-1) - ns(n,m)$$

Γνωρίζουμε ότι το πλήθος των n-διατάξεων ενός m-συνόλου είναι ίσο με:

$$m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Αν στο αριστερό μέλος αντικαταστήσουμε το m με τη μεταβλητή x, προκύπτει το γινόμενο n παραγόντων: $x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)$. Από κάθε παράγοντα του γινομένου επιλέγουμε είτε ένα x είτε έναν αρνητικό ακέραιο. Επιλέγοντας ένα x περισσότερο, επιλέγουμε έναν αρνητικό ακέραιο λιγότερο. Αν συμβολίσουμε με s(n,m) το συντελεστή του x^m και πολλαπλασιάσουμε, προκύπτει ένα πολυώνυμο βαθμού n χωρίς σταθερό όρο, στο οποίο τα πρόσημα των συντελεστών εναλλάσσονται: ( )x^n – ( )x^{n-1} + ( )x^{n-2} – ( )x^{n-3} + …

Ισχύει, τελικά, η σχέση:

$$x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1) =$$

$$= s(n,n)x^n - s(n,n-1)x^{n-1} + s(n,n-2)x^{n-2} + \dots \pm s(n,0)$$

φτάνοντας, έτσι, στους αριθμούς Stirling α’ είδους.

Θεώρημα 3.6:

1) s(n,0) = 0
2) s(n,n) = 1
3) s(n,1) = (n-1)!
4) s(n,n-1) = $\binom{n}{2}$
5) s(n,m) = (n-1)s(n-1,m) + s(n-1,m-1)

Απόδειξη:

1) Ισχύει προφανώς αφού το γινόμενο $x(x-1)\ldots(x-n+1)$ δεν έχει σταθερό όρο.
2) Αφού στο γινόμενο $x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)$ ο συντελεστής του x^n είναι 1, ισχύει s(n,n) = 1.
3) Ο συντελεστής s(n,1) του x προκύπτει αν από το αρχικό γινόμενο επιλέξουμε το x από τον πρώτο παράγοντα και τους σταθερούς όρους από τους υπόλοιπους n-1 παράγοντες, δηλαδή:

$$\pm 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots\cdot (n-1) = \pm(n-1)!$$

άρα, s(n,1) = (n-1)!

4) Ο συντελεστής s(n,n-1) του όρου x^{n-1} προκύπτει αν επιλέγουμε κάθε φορά το σταθερό όρο από έναν μόνο παράγοντα, δηλαδή είναι το άθροισμα των n-1 γινομένων:

α) από τα n-1 πρώτα γινόμενα παίρνω το x κι από το τελευταίο το σταθερό όρο, δηλαδή $(n-1)x^{n-1}$

β) από όλα τα γινόμενα παίρνω το x εκτός από το προτελευταίο από το οποίο παίρνω το σταθερό όρο, δηλαδή $(n-2)x^{n-1}$ κ.ο.κ.

Προσθέτοντάς τα έχουμε:

$$[(-1)+(-2)+\cdots+(-n+1)]x^{n-1} = -\frac{(n-1)n}{2}x^{n-1}$$

$$= -\binom{n}{2}x^{n-1}$$

Άρα, (n,n-1) = $\binom{n}{2}$

5) Ισχύει η σχέση:

$$x(x-1)(x-2)\dots(x-n+2)$$
$$= s(n-1,n-1)x^{n-1} - s(n-1,n-2)x^{n-2}$$
$$+ s(n-1,n-3)x^{n-3} - \cdots$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με $(x-n+1)$ παίρνουμε:

$$x(x-1)(x-2)\dots(x-n+2)(x-n+1)$$
$$= s(n-1,n-1)x^{n} - (n-1)s(n-1,n-1)x^{n-1}$$
$$- s(n-1,n-2)x^{n-1}$$
$$+ (n-1)s(n-1,n-2)x^{n-2}$$
$$+ s(n-1,n-3)x^{n-2}$$
$$- (n-1)s(n-1,n-3)x^{n-3} - \cdots$$

η οποία σε συνδυασμό με τη σχέση

$$x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)$$
$$= s(n,n)x^{n} - s(n,n-1)x^{n-1} + s(n,n-2)x^{n-2}$$
$$- \cdots$$

και την ισότητα s(n,n) = s(n-1,n-1) = 1

δίνει τη ζητούμενη αναδρομική σχέση.

■

Παράδειγμα 3.10: Για n = 5 έχουμε:

$$x(x-1)(x-2)\dots(x-4)$$
$$= s(5,5)x^{5} - s(5,4)x^{4} + s(5,3)x^{3} - s(5,2)x^{2}$$
$$+ s(5,1)x = x^{5} - 10x^{4} + 35x^{3} - 50x^{2} + 24x$$

Στον επόμενο πίνακα φαίνονται οι αριθμοί Stirling α’ είδους για

$1 \le k \le n \le 6$:

n \ k	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	-1	1				
3	2	-3	1			
4	-6	11	-6	1		
5	24	-50	35	-10	1	
6	-120	274	-225	85	-15	1

Από την αναδρομική σχέση του θεωρήματος 3.6 προκύπτει τρίγωνο παρόμοιο με αυτό του Pascal:

1^{η} γραμμή $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

2^{η} γραμμή $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$

3^{η} γραμμή $\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}$

4^{η} γραμμή $\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix}$

5^{η} γραμμή $\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix}$

1^{η} γραμμή 1

2^{η} γραμμή 1 1

3^{η} γραμμή 2 3 1

4^{η} γραμμή 6 11 6 1

5^{η} γραμμή 24 50 35 10 1

Κάθε αριθμός στο τρίγωνο προκύπτει αν προσθέσουμε τον πάνω αριστερά με τον πάνω δεξιά πολλαπλασιασμένο επί τον αριθμό της γραμμής, δηλαδή με χρήση της αναδρομικής σχέσης που αποδείξαμε στο θεώρημα 3.6 s(n,m) = (n-1)s(n-1,m) + s(n-1,m-1)

π.χ. $11 = 2 + 3 \cdot 3$

Θεώρημα 3.7: Οι αριθμοί Stirling α’ είδους s(n,m) = $\left[{n \atop m}\right]$ μετρούν το πλήθος των τοποθετήσεων n αντικειμένων σε m μη κενές κυκλικές μεταθέσεις.

Απόδειξη: Έστω s’(n,m) το πλήθος των τρόπων τοποθέτησης n αντικειμένων σε m κύκλους. Για n≥1 θα ισχύει s’(n,n) = 1 διότι υπάρχει ένας μόνο τρόπος να τοποθετήσουμε n αντικείμενα σε n μη τεμνόμενους κύκλους, βάζοντας ένα αντικείμενο σε κάθε κύκλο. Επίσης, s’(n,0) = 0, διότι δεν είναι δυνατό να τοποθετήσουμε n αντικείμενα σε 0 κύκλους.

Παρατηρούμε ότι οι s(n,m) και s’(n,m) ικανοποιούν τις ίδιες αρχικές συνθήκες και θα αποδείξουμε ότι και για τους δύο ισχύει η ίδια αναδρομική σχέση.

Θεωρούμε τα n αντικείμενα 1, 2, 3,…, n τα οποία θέλουμε να τοποθετήσουμε σε κύκλους. Κάθε αντικείμενο i, $1 \leq i \leq n$, είτε βρίσκεται μόνο του σε ένα κύκλο είτε βρίσκεται στον ίδιο κύκλο με τουλάχιστον άλλο ένα αντικείμενο.

Όταν το αντικείμενο είναι μόνο του στον κύκλο οι τοποθετήσεις είναι της μορφής s’(n-1,m-1).

Όταν το αντικείμενο δεν είναι μόνο του στον κύκλο, οι τοποθετήσεις προκύπτουν αν βάλουμε τα 1, 2, 3,…, n-1 σε m κύκλους και το αντικείμενο n στα αριστερά καθενός από τα 1, 2, 3,…, n-1. Συνεπώς, κάθε τοποθέτηση των 1, 2, 3,…, n-1 αντικειμένων δίνει n-1 τοποθετήσεις των 1, 2, 3,…, n αντικειμένων, δηλαδή συνολικά (n-1)s'(n-1,m) τοποθετήσεις.

Από τον κανόνα του αθροίσματος για τις τοποθετήσεις του πρώτου ή του δεύτερου τύπου έχουμε:

s'(n,m) = s'(n-1,m-1) + (n-1)s'(n-1,m)

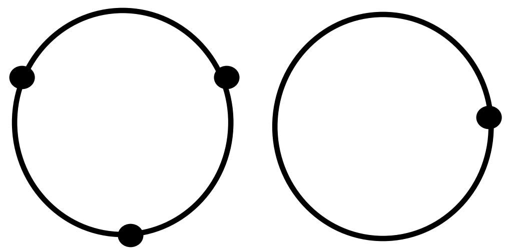
η οποία είναι η αναδρομική σχέση που αποδείξαμε στο θεώρημα 3.6.

■

Παράδειγμα 3.11: Για n = 4 {1, 2, 3, 4}έχουμε τις τοποθετήσεις σε m = 2 κύκλους:

$$s(4,2) = 11$$

α) ο ένας κύκλος έχει 3 στοιχεία κι ο άλλος 1

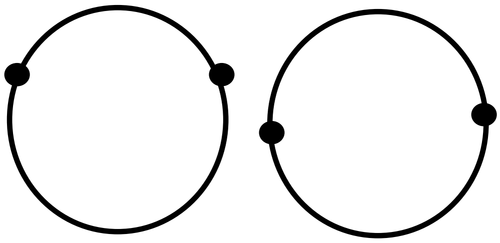


Οι δυνατές τοποθετήσεις είναι:

- *1,2,3 και 4*
- *1,2,4 και 3*
- *1,3,4 και 2*
- *2,3,4 και 1*

*και αφού έχουμε 2 κυκλικές μεταθέσεις, από τον κανόνα του γινομένου προκύπτει: 2*4=8*

β) κάθε κύκλος έχει 2 στοιχεία



Οι δυνατές τοποθετήσεις είναι:

- *1,2 και 3,4*
- *1,4 και 2,3*
- *1,3 και 2,4*

Παρατηρούμε ότι επειδή οι κύλοι δεν είναι διατεταγμένοι, οι τοποθετήσεις που έχουν 3 αντικείμενα στον ένα κύκλο και 1 στον άλλο, π.χ. (1,2,3 / 4) και (4 / 1,2,3) συμπίπτουν και το ίδιο ισχύει γι' αυτές που έχουν 2 αντικείμενα σε κάθε κύκλο, π.χ. (1,2 / 3,4) και (3,4 / 1,2).

<u>Παρατήρηση</u>: $\sum_{m=1}^{n} s(n,m) = n!$ κι αυτό αποδεικνύεται εύκολα διότι $s(n,m)$ είναι το πλήθος των μεταθέσεων n αντικειμένων που περιέχουν ακριβώς m κύκλους, οπότε, το άθροισμα για $1 \leq m \leq n$ δίνει το πλήθος όλων των δυνατών μεταθέσεων.

Η σύνδεση μεταξύ των αριθμών Stirling α' και β' είδους φαίνεται στις παρακάτω σχέσεις:

$$s(n,i) = \sum_{k=i}^{n} \sum_{j=0}^{k} s(n,k)s(k,j)S(j,i)$$

ή

$$S(n,i) = \sum_{k=i}^{n} \sum_{j=0}^{k} S(n,k)S(k,j)s(j,i)$$

(Roman, 1984)

$$S(n,m) = \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k \binom{k+n-1}{k+n-m} \binom{2n-m}{n-k-m} s(k+n-m,k)$$

ή

$$s(n,m) = \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k \binom{k+n-1}{k+n-m} \binom{2n-m}{n-k-m} S(k+n-m,k)$$

(Graham; Knuth; Patashnik, 1994)

3.4 Εφαρμογές στα προβλήματα πληρότητας

Πολλά προβλήματα απαρίθμησης αντικειμένων είναι δυνατό να τα διατυπώσουμε σα να είχαμε να τοποθετήσουμε μπάλες σε κελιά ή δοχεία. Έχουμε αντιστοιχίσει, λοιπόν, τις μπάλες στα προς απαρίθμηση αντικείμενα και τα κελιά στις στάθμες απαρίθμησης. Το ερώτημα που τίθεται σε τέτοιου είδους προβλήματα είναι με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε n μπάλες σε m κελιά, δεδομένου ότι σε κάθε κελί μπορούν να χωρέσουν και όλες οι μπάλες.

Οι λύσεις εξαρτώνται από τις ακριβείς συνθήκες του προβλήματος, δηλαδή, αν οι μπάλες είναι διαφορετικές ή όμοιες μεταξύ τους, αν τα κελιά είναι διακεκριμένα, αν έχει σημασία η σειρά τοποθέτησης ή αν μπορούν να υπάρχουν κελιά χωρίς καμία μπάλα.

- Αν και οι μπάλες και τα δοχεία είναι διακεκριμένα, τότε οι μπάλες αντιστοιχούν σε ένα n-σύνολο N και τα κελιά σε ένα m-σύνολο M. Η τοποθέτηση των μπαλών στα δοχεία αντιστοιχεί σε μια συνάρτηση $f:N\rightarrow M$ και το πλήθος των τρόπων τοποθέτησης είναι m^n.
- Αν οι μπάλες είναι μη διακεκριμένες ενώ τα κελιά είναι διακεκριμένα, τότε το πλήθος των τρόπων τοποθέτησης είναι ένας n-συνδυασμός με επανάληψη από το σύνολο M των m κελιών.
- Αν οι μπάλες και τα κελιά είναι διακεκριμένα, αναζητούμε τις 1-1 συναρτήσεις $f:N\rightarrow M$, που αντιστοιχούν στις n-μεταθέσεις ενός m-συνόλου.
- Αν δεν υπάρχουν κενά κελιά κατά την τοποθέτηση, αναζητούμε τις επί συναρτήσεις $f:N\rightarrow M$.

Το πλήθος των συναρτήσεων από ένα n-σύνολο σε ένα m-σύνολο είναι S(n,m)m!, δηλαδή είναι ίσο με το πλήθος των τρόπων τοποθέτησης n διακεκριμένων μπαλών σε m διακεκριμένα κελιά, όπως είδαμε και στην παράγραφο 3.3 I.

Οι διαφορετικές περιπτώσεις των προβλημάτων πληρότητας φαίνεται στον παρακάτω πίνακα, που είδαμε και στην παράγραφο 3.3 I:

διακεκριμένα αντικείμενα n	διακεκριμένες θέσεις m	κενές θέσεις	πλήθος τρόπων
όχι	όχι	όχι	$p_m(n) - p_{m-1}(n)$
όχι	όχι	ναι	$p_m(n)$
όχι	ναι	όχι	$\binom{n-1}{m-1}$
όχι	ναι	ναι	$\binom{n+m-1}{n}$
ναι	όχι	όχι	S(n,m)
ναι	όχι	ναι	S(n,1) +…+ S(n,m)
ναι	ναι	όχι	m!S(n,m)
ναι	ναι	ναι	m^n

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Παπαϊωάννου, Αλ. (2003). *Διακριτά Μαθηματικά*, σελ. 287-317, Αθήνα: Εκδόσεις ΕΜΠ

Παπαϊωάννου, Αλ. (2004). *Θεωρία Γραφημάτων*, σελ. 1-6, Αθήνα: Εκδόσεις ΕΜΠ

Abramowitz, M.; Stegun, I. A. (1972). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, 9th printing. p. 824-825, New York: Dover \

Chisholm, H. (1911). *Stirling, James*, Encyclopædia Britannica 11th ed., England: Cambridge University Press

Cohen, D. (1978). *Basic Techniques of Combinatorial Theory*, p. 107-132, USA: John Wiley and Sons, Inc.

Conway, J.; Guy, R. (1996). *The book of Numbers*, p. 91-126, New York/ Heidelberg: Springer

Donaghey, R.; Shapiro, L. W. (1977). *Motzkin numbers*, p. 291–301, Journal of Combinatorial Theory, Series A 23 (3), San Francisco: Elsevier Inc.

Dowling, T. (2007). *Applications of Discrete Mathematics*, p. 94-111, USA: The McGraw-Hill Companies, Inc.

Fort, T. (1948). *Finite Differences and Difference Equations in the Real Domain*, Oxford, England: Clarendon Press

Goulden, I. P.; Jackson, D. M. (1983). *Combinatorial Enumeration*, p.111, New York: Wiley

Graham, R. L.; Knuth, D. E.; Patashnik, O. (1994). *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science 2nd ed.*, ex. 9.8, USA: Addison-Wesley

Graham, R. L.; Knuth, D. E.; Patashnik, O. (1994). *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science, 2nd ed.*, p.257-267, USA: Addison-Wesley

Higham, J. N. (1998). *Handbook of writing for the mathematical sciences*, p. 25, USA: SIAM

Hilton, P.; Pedersen, J. (1991). *Catalan Numbers, Their Generalization, and Their Uses*, p. 64-75, The Mathematical Intelligencer, Vol. 13, Germany: Springer

Jiang, X. (2012). *Applications of Catalan Numbers,* Sweet Briar: Department of Mathematical Sciences, Sweet Briar College

Jordan, C. (1965). *Calculus of Finite Differences*, 3rd ed. New York: Chelsea

Kleinberg, J.; Tardos E. (2006). *Algorithm Design,* p. 107-108, India:

Pearson Education, Inc./Addison-Wesley

Knuth, D. E. (1992). *Two Notes on Notation*, p.403-422, American Mathematical Monthly, Vol.99, USA: Mathematical Association of America

Knuth, E. D. (1997). *The Art of Computer Programming*, Volume 1: Fundamental Algorithms (Third ed.), p. 52–74, USA: Addison-Wesley

Luo, J. (2012). *Ming Antu and His Power Series Expansions*, Institute for the History of Science, Inner Mongolia Normal University; Institute of Science, Technology and Culture, Zhejiang University

Mansion, P. (1896). *Notice sur les travaux mathématiques de Eugène-Charles Catalan*, Brussels: F Hayes

Mihăilescu, P. (2004). *Primary Cyclotomic and a Proof of Catalan's Conjecture*, p. 167-195, J. reine angew. Math. 572, Berlin-New York: Walter de Gruyter

Pemmaraju, S.; Skiena, S. (2003). *Computational Discrete Mathematics: Combinatorics and Graph Theory with Mathematica*, p.169, Cambridge, England: Cambridge University Press

Riordan, J. (1980). *An Introduction to Combinatorial Analysis*, New York: Wiley

Roman, S. (1984). *The Umbral Calculus*, p. 59-67, New York: Academic Press

Simonson, S. (2009). *The Mathematics of Levi ben Gershon, the Ralbag*, North Easton: Department of Mathematics and Computer Science, Stonehill College

Stanley, R. P. (1999b). *Enumerative Combinatorics,Vol.2*, p. 219, Cambridge, England: Cambridge University Press

Tweedie, C. (1922), *James Stirling : a Sketch of his Life and Works along with his Scientific Correspondence*, Oxford: Clarendon Press

Tweddle, I. (1988). *James Stirling: this about series and such things*, Edinburgh: Scottish Academic Press

Tweddle, I. (1992). *James Stirling's early work on acceleration of convergence*, Archive for History of Exact Science, Vol. 45, p. 105-125, Germany: Springer

van Lint, J. H.; Wilson, R. M. (1992). *A Course in Combinatorics*, p. 136, New York: Cambridge University Press