

Νικόλαος Κολλιόπουλος

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών  
Επιστημών - ΕΜΠ

Μέθοδοι Monte Carlo για την τιμολόγηση  
Χρηματοοικονομικών Παραγώγων

Διπλωματική Εργασία

Επιβλέπων Καθηγητής:

Μιχάλης Λουλάκης

## Περιεχόμενα:

1. Μια Γενική Εισαγωγή	3
2. Εισαγωγή στα Δικαιώματα Προκαθορισμένης Ωρίμανσης	4
3. Θεωρία τιμολόγησης βασικών Δικαιωμάτων Προκαθορισμένης Ωρίμανσης	8
3.1. Εισαγωγικά	8
3.2. Χαρτοφυλάκια και μέτρο αντικειμενικής πιθανότητας	10
3.3. Παράγωγα και δίκαιες τιμές	13
4. Δίκαιες τιμές Δικαιωμάτων Προκαθορισμένης Ωρίμανσης	16
4.1. Εισαγωγικά	16
4.2. Δίκαιες τιμές Asian Geometric και European Options	17
4.3. Δίκαιη τιμή Lookback Put Option	19
4.4. Δίκαιη τιμή Up and In Barrier Call Options	25
5. Εισαγωγή στη Μέθοδο Monte Carlo	29
6. Τιμολόγηση με τη Μέθοδο Monte Carlo	33
6.1. Εισαγωγικά	33
6.2. Τιμολόγηση European Call Options	34
6.3. Τιμολόγηση Geometric Asian Call Option	38
6.4. Τιμολόγηση Arithmetic Asian Call Option	40
6.5. Τιμολόγηση Lookback Put Option	42
6.6. Τιμολόγηση Up and In Barrier Call Option	46
7. Μέθοδοι Ελάττωσης Διασποράς	50
6.1. Εισαγωγικά	50
6.2. Μέθοδος Μεταβλητών Ελέγχου	50
6.3. Μέθοδος Αντιθετικών Μεταβλητών	57
6.4. Μέθοδος Importance Sampling	61
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Εντολές λογισμικών Mathematica - R	66
Βιβλιογραφία	70

## 1. Μια Γενική Εισαγωγή

Η εργασία αυτή απευθύνεται στο χώρο των χρηματοοικονομικών αγορών. Τα συναλλακτικά μέσα στις αγορές αυτές είναι είτε υποκείμενοι τίτλοι (underlying assets), δηλαδή μετοχές, ομόλογα, συναλλάγματα, αγαθά κ.α, είτε παράγωγα προϊόντα (derivatives), τα οποία προσφέρουν στους κατόχους τους συγκεκριμένα δικαιώματα τα οποία σχετίζονται με συγκεκριμένους υποκείμενους τίτλους. Το κύριο χαρακτηριστικό ενός παραγώγου προϊόντος είναι το ότι η αξία του σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, εξαρτάται άμεσα από την αξία που έχει την ίδια χρονική στιγμή ο υποκείμενος τίτλος με τον οποίο σχετίζονται τα δικαιώματα που αυτό παρέχει στον κάτοχό του. Συχνά οι μεταβολές που πρόκειται να εμφανίσουν οι αξίες συγκεκριμένων υποκείμενων τίτλων είναι προκαθορισμένες. Για παράδειγμα ο αγοραστής ενός ομολόγου συμφωνεί με τον πωλητή, να του πουλήσει ξανά το ομόλογο σε μια συγκεκριμένη ημερομηνία στο μέλλον (ημερομηνία λήξης), σε μια προκαθορισμένη τιμή. Όμως οι περισσότερες αξίες υποκείμενων τίτλων μεταβάλλονται με τρόπο που δεν είναι προβλέψιμος. Αυτό συμβαίνει πχ στην περίπτωση μιας μετοχής, η αξία της οποίας επηρεάζεται συνεχώς από το νόμο προσφοράς-ζήτησης. Έτσι, ένας επενδυτής που σκέφτεται να επενδύσει σε συγκεκριμένους υποκείμενους τίτλους, προσπαθεί να μειώσει το ρίσκο που πρόκειται να πάρει, με την αγορά παραγώγων που θα του εξασφαλίζουν κάποια συγκεκριμένα δικαιώματα σχετικά με τους τίτλους αυτούς. Η αγορά όμως θα είχε καταρρεύσει εάν οι επενδυτές μπορούσαν να επινοήσουν επενδυτικές στρατηγικές με σίγουρη κερδοφορία. Οπότε σε κάθε χρονική στιγμή, οι αξίες των παραγώγων προϊόντων σε σχέση με αυτές των αντίστοιχων υποκείμενων τίτλων, πρέπει να καθορίζονται έτσι ώστε να μη μπορεί να υπάρξει επενδυτική στρατηγική με σίγουρη κερδοφορία ούτε από τον πωλητή αλλά ούτε και από τον αγοραστή ενός παράγωγου προϊόντος. Το αντικείμενο της εργασίας αυτής είναι ακριβώς αυτό: Η τιμολόγηση των παραγώγων προϊόντων έτσι ώστε να μη μπορούν να αναπτυχθούν επενδυτικές στρατηγικές με σίγουρη κερδοφορία. Αυτό βέβαια, αποτελεί από μόνο του μια ολόκληρη επιστήμη που δεν χωράει σε μια μόνο εργασία. Στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε μόνο με μια κατηγορία παραγώγων προϊόντων που καλούνται Δικαιώματα Προκαθορισμένης Ωρίμανσης. Κάποιες βασικές γνώσεις Στοχαστικών Ανελιξεων και Στοχαστικής Ανάλυσης είναι απαραίτητες για την κατανόηση της εργασίας, όποτε θεωρούμε ότι ο αναγνώστης είναι εξοικειωμένος με τους κλάδους αυτούς.

## 2. Εισαγωγή στα Δικαιώματα Προκαθορισμένης Ωρίμανσης

Προτού να προχωρήσουμε στα Δικαιώματα Προκαθορισμένης Ωρίμανσης, θα ορίσουμε την πιο απλή κατηγορία παράγωγων προϊόντων που είναι τα Δικαιώματα Προαίρεσης. Ένα Δικαίωμα Προαίρεσης είναι ένα συμβόλαιο μεταξύ δύο αντισυμβαλλόμενων, ενός αγοραστή και ενός πωλητή. Με την υπογραφή του συμβολαίου αυτού, ο αγοραστής αγοράζει από τον πωλητή το δικαίωμα είτε να αγοράσει από τον πωλητή (call option) είτε να πουλήσει στον πωλητή (put option) μια προκαθορισμένη ποσότητα ενός υποκείμενου τίτλου, σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή στο μέλλον (στιγμή ωρίμανσης του δικαιώματος), σε μια προκαθορισμένη τιμή (τιμή άσκησης δικαιώματος - strike price). Αν πχ το συμβόλαιο προβλέπει δικαίωμα αγοράς ποσότητας  $X$  του υποκείμενου τίτλου  $A$ , τη χρονική στιγμή  $T$ , σε προκαθορισμένη τιμή  $P$ , ενώ η τιμή της ποσότητας αυτής τη χρονική στιγμή  $T$  είναι  $P'$ , τότε ο αγοραστής έχει δικαίωμα (όχι όμως υποχρέωση) τη χρονική στιγμή  $T$  να απαιτήσει από τον πωλητή να του πουλήσει την ποσότητα αυτή στην τιμή  $P$  (προφανώς αυτό θα το κάνει μόνο αν  $P < P'$ ). Τότε ο πωλητής είναι υποχρεωμένος είτε να πουλήσει στον αγοραστή τη συγκεκριμένη ποσότητα τίτλου στη συγκεκριμένη τιμή, είτε να καλύψει τη διαφορά  $P' - P$  έτσι ώστε ο αγοραστής να αποκτήσει την συγκεκριμένη ποσότητα από αλλού και στην κανονική τιμή της, καταβάλλοντας όμως χρηματικό ποσό  $P$ . Η στιγμή ωρίμανσης του δικαιώματος μπορεί είτε να είναι προκαθορισμένη, είτε να καθορίζεται από τον αγοραστή στο μέλλον εντός ενός προκαθορισμένου χρονικού διαστήματος, μετά το πέρας του οποίου το συμβόλαιο παύει να ισχύει (αυτά τα δικαιώματα καλούνται Δικαιώματα Αμερικάνικου τύπου). Τα παράγωγα που θα δούμε σε αυτή την εργασία θα αποτελούν τέτοια συμβόλαια αλλά και κάποια παρόμοια συμβόλαια με ακόμα πιο σύνθετους όρους, όπου όμως η στιγμή ωρίμανσης θα είναι πάντα προκαθορισμένη. Αυτός είναι και ο λόγος που τα παράγωγα με τα οποία θα ασχοληθούμε καλούνται Δικαιώματα Προκαθορισμένης Ωρίμανσης. Η σωστή τιμολόγηση των Δικαιωμάτων μη προκαθορισμένης ωρίμανσης, δηλαδή των Δικαιωμάτων Αμερικάνικου τύπου, είναι ένας πολύ πιο δύσκολος κλάδος που δε θα μας απασχολήσει. Ακολουθεί μια σύντομη περιγραφή μερικών βασικών παραγώγων προϊόντων της παραπάνω κατηγορίας:

### 1) European call options:

Πρόκειται για απλά Δικαιώματα Προαίρεσης που παρέχουν στον κάτοχό τους δικαίωμα αγοράς, τα οποία ανήκουν στην κατηγορία των Δικαιωμάτων Προκαθορισμένης Ωρίμανσης. Όπως είδαμε και πιο πάνω, αν τη χρονική στιγμή της ωρίμανσης η αντίστοιχη ποσότητα υποκείμενου τίτλου κοστίζει  $P' > P$ , όπου  $P$  είναι η προκαθορισμένη τιμή αγοράς, ο κάτοχος του Δικαιώματος Προαίρεσης έχει ένα κέρδος  $P' - P$  το οποίο ζημιώνεται ο πωλητής αυτού, ενώ σε άλλη περίπτωση

κανένας από τους δύο δεν κερδίζει ούτε χάνει τίποτα. Οπότε ο κάτοχος του παράγωγου αυτού, τη χρονική στιγμή της ωρίμανσης έχει ένα κέρδος ίσο με  $(P' - P)^+$ , το οποίο προφανώς αποτελεί την αξία του παραγώγου κατά τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

## 2) European put options:

Πρόκειται για απλά Δικαιώματα Προαίρεσης που παρέχουν στον κάτοχό τους δικαίωμα πώλησης, τα οποία ανήκουν στην κατηγορία των Δικαιωμάτων Προκαθορισμένης Ωρίμανσης. Σε απόλυτη αναλογία με τα European call options, αν τη χρονική στιγμή της ωρίμανσης η αντίστοιχη ποσότητα υποκείμενου τίτλου κοστίζει  $P' < P$ , όπου  $P$  είναι η προκαθορισμένη τιμή πώλησης, ο κάτοχος του Δικαιώματος Προαίρεσης έχει ένα κέρδος  $P - P'$  το οποίο ζημιώνεται ο πωλητής αυτού, ενώ σε άλλη περίπτωση κανένας από τους δύο δεν κερδίζει ούτε χάνει τίποτα. Οπότε ο κάτοχος του παράγωγου αυτού, τη χρονική στιγμή της ωρίμανσης έχει ένα κέρδος ίσο με  $(P - P')^+$ , το οποίο προφανώς αποτελεί την αξία του παραγώγου κατά τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

## 3) Barrier options:

Πρόκειται για Δικαιώματα Προαίρεσης Ευρωπαϊκού τύπου όπως αυτά που μόλις περιγράψαμε, με τον επιπλέον όρο ότι υπάρχει στο συμβόλαιο ένα φράγμα  $M$ , ανάλογα με το ρόλο του οποίου, προκύπτουν 4 διαφορετικοί τύποι τέτοιων Δικαιωμάτων τα οποία παρέχουν δικαίωμα αγοράς στον κάτοχό τους (Barrier call options), και 4 διαφορετικοί τύποι τέτοιων Δικαιωμάτων τα οποία παρέχουν δικαίωμα πώλησης (Barrier put options). Θα αναλύσουμε μόνο το ρόλο του φράγματος  $M$  στα Barrier Call Options, καθώς ο ρόλος του στα Barrier Put Options είναι ακριβώς ο ίδιος (δεν εξαρτάται από το αν το δικαίωμα που παρέχεται στον κάτοχο είναι δικαίωμα πώλησης ή αγοράς υποκείμενου τίτλου). Οι 4 διαφορετικοί τύποι Barrier Call Options είναι οι ακόλουθοι:

### a) *Down and out call option:*

Ένα European call option το οποίο παύει να ισχύει αν, κάποια στιγμή από τη στιγμή που υπογράφεται το συμβόλαιο μέχρι τη στιγμή της ωρίμανσης, η τιμή της προκαθορισμένης ποσότητας υποκείμενου τίτλου που αφορά το δικαίωμα γίνει μικρότερη από  $M$ .

### β) *Up and in call option:*

Ένα European call option το οποίο παύει να ισχύει αν, από τη στιγμή που υπογράφεται το συμβόλαιο μέχρι τη στιγμή της ωρίμανσης, η τιμή της προκα-

θορισμένης ποσότητας υποκείμενου τίτλου που αφορά το δικαίωμα δεν ξεπεράσει ποτέ την τιμή  $M$ .

γ) *Up and out call option:*

Ένα European call option, το οποίο παύει να ισχύει αν, κάποια στιγμή από τη στιγμή που υπογράφεται το συμβόλαιο μέχρι τη στιγμή της ωρίμανσης, η τιμή της προκαθορισμένης ποσότητας υποκείμενου τίτλου που αφορά το δικαίωμα ξεπεράσει την τιμή  $M$ .

δ) *Down and in call option:*

Ένα European call option το οποίο παύει να ισχύει αν, από τη στιγμή που υπογράφεται το συμβόλαιο μέχρι τη στιγμή της ωρίμανσης, η τιμή της προκαθορισμένης ποσότητας υποκείμενου τίτλου που αφορά το δικαίωμα δεν γίνει ποτέ μικρότερη από  $M$ .

#### 4) Asian call options:

Ο αγοραστής ενός Asian call option, υπογράφει με τον πωλητή ένα συμβόλαιο, στο οποίο καθορίζεται μια ποσότητα ενός υποκείμενου τίτλου, μια τιμή  $K > 0$ , η χρονική στιγμή ωρίμανσης του δικαιώματος  $T$ , και ένα σύνολο  $S$  από προηγούμενες μελλοντικές χρονικές στιγμές το οποίο περιέχει και τη χρονική στιγμή  $T$ . Τη χρονική στιγμή  $T$  ο κάτοχος του Asian call option, έχει δικαίωμα να ζητήσει από τον πωλητή τη διαφορά  $M - K$ , όπου  $M$  είναι η μέση τιμή της προκαθορισμένης ποσότητας υποκείμενου τίτλου κατά τις χρονικές στιγμές του συνόλου  $S$ . Το  $M$  μπορεί να είναι πχ αριθμητικός μέσος, γεωμετρικός μέσος, ή ολοκλήρωμα αν το  $S$  είναι συνεχές. Αν η διαφορά αυτή δεν είναι θετική, ο κάτοχος του παραγωγού αυτού δεν κάνει καμία συναλλαγή με τον πωλητή.

#### 5) Lookback options:

a) *Standard lookback call option:*

Πρόκειται για μια παραλλαγή ενός European Call Option, κατά την οποία η τιμή  $P$  δεν καθορίζεται όταν υπογράφεται το συμβόλαιο, αλλά ορίζεται ως η μικρότερη τιμή που θα πάρει η προκαθορισμένη ποσότητα του προκαθορισμένου υποκείμενου τίτλου, από τη στιγμή που υπογράφεται το συμβόλαιο μεταξύ των δύο αντισυμβαλλόμενων μέχρι την προκαθορισμένη χρονική στιγμή της ωρίμανσης.

*β) Standard lookback put option:*

Πρόκειται για μια παραλλαγή ενός European put option, κατά την οποία η τιμή  $P$  δεν καθορίζεται όταν υπογράφεται το συμβόλαιο, αλλά ορίζεται ως η μεγαλύτερη τιμή που θα πάρει η προκαθορισμένη ποσότητα του προκαθορισμένου υποκείμενου τίτλου, από τη στιγμή που υπογράφεται το συμβόλαιο μεταξύ των δύο αντισυμβαλλόμενων μέχρι την προκαθορισμένη χρονική στιγμή της ωρίμανσης.

Για περισσότερα παραδείγματα παράγωγων προϊόντων παραπέμπουμε στη βιβλιογραφία στα [1], [4].

### 3. Θεωρία τιμολόγησης Δικαιωμάτων Προκαθορισμένης Ωρίμανσης

#### 3.1. Εισαγωγικά

Όπως αναφέραμε στην εισαγωγή, οι αξίες των παραγώγων προϊόντων σε σχέση με αυτές των αντίστοιχων υποκείμενων τίτλων, πρέπει να καθορίζονται έτσι ώστε να μη μπορούν να εμφανιστούν στρατηγικές σίγουρης κερδοφορίας. Υπό αυτή την έννοια, η αξία ενός παραγώγου προϊόντος μεταβάλλεται στο χρόνο ως μια στοχαστική ανέλιξη  $Y(t)$ , η οποία εξαρτάται από τη στοχαστική ανέλιξη  $X(t)$  που εκφράζει τις μεταβολές στην αξία του αντίστοιχου υποκείμενου τίτλου ως προς το χρόνο  $t$ . Επίσης η αξία  $Y(T)$  του παραγώγου προϊόντος τη στιγμή  $T$  της άσκησης του δικαιώματος αυτού, πρέπει προφανώς να είναι ίση με το κέρδος που έχει ο κάτοχος αυτού όταν ασκεί το δικαίωμα. Το ερώτημα όμως είναι: Ποια πρέπει να είναι η αξία  $Y(0)$  του παραγώγου τη στιγμή που υπογράφεται το συμβόλαιο μεταξύ αγοραστή και πωλητή; Τι πρέπει δηλαδή να πληρώσει ο αγοραστής στον πωλητή ώστε να αποκτήσει το Δικαίωμα Προκαθορισμένης Ωρίμανσης, χωρίς κανένας από τους δύο να κερδοσκοπήσει; Το ζητούμενο αυτό χρηματικό ποσό καλείται δίκαιη τιμή για το Δικαίωμα Προκαθορισμένης Ωρίμανσης και παρακάτω θα δούμε το πως υπολογίζεται.

Θεωρούμε ότι η οικονομία περιγράφεται από έναν χώρο πιθανότητας  $(\Omega, F, P)$  με μια διύλιση  $\{F_t, t \in [0, +\infty)\}$  και μια τυπική κίνηση Brown  $B_t$  προσαρμοσμένη στη διύλιση αυτή. Ο δειγματικός χώρος  $\Omega$  εκφράζει προφανώς όλες τις δυνατές πορείες που μπορεί να έχει η οικονομία, η μεταβλητή  $t$  εκφράζει το χρόνο, ενώ για κάθε  $t > 0$  η σ-άλγεβρα  $F_t$  εκφράζει όλα τα σύνθετα ενδεχόμενα που μπορούν να παρατηρηθούν μέχρι τη χρονική στιγμή  $t$ . Επειδή όπως θα δούμε παρακάτω όλα εξαρτώνται από τις τροχιές της κίνησης Brown που παρατηρούνται, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η  $F_t$  είναι η τυπική διύλιση της κίνησης Brown (η “ελάχιστη” διύλιση ως προς την οποία η τυπική κίνηση Brown είναι προσαρμοσμένη). Για να προχωρήσουμε παρακάτω τώρα, θα χρειαστούμε δύο ισχυρά αποτελέσματα από τον κλάδο της στοχαστικής ανάλυσης, για τις αποδείξεις των οποίων παραπέμπουμε στο [1]:

#### Θεώρημα 1 (Αναπαράστασης Brownian Martingales):

Έστω χώρος πιθανότητας  $(\Omega, F, P)$  στον οποίο ορίζεται μια μονοδιάστατη κίνηση Brown  $\{B_t, t \in [0, +\infty)\}$  και η αντίστοιχη τυπική διύλιση  $\{F_t, t \in [0, +\infty)\}$ , δηλαδή για κάθε  $t \geq 0$  έχουμε  $F_t = \sigma(F_t^B \cup N)$  με  $F_t^B = \sigma(B_s, 0 \leq s \leq t)$  και



$N = \{L \subset \Omega : \exists N \in F : L \subset N \wedge P(N) = 0\}$ . Έστω ακόμα ένα  $F_t$ -martingale  $M = \{M_t, t \in [0, +\infty)\}$  με  $\mathbb{E}(M_t^2) < +\infty$  για κάθε  $t \geq 0$ . Τότε υπάρχει μοναδική (με την έννοια του μέτρου  $dt \otimes dP$ ) στοχαστική ανέλιξη  $f = \{f(s) : s \in [0, +\infty)\}$  με  $\mathbb{E}(\int_0^t f^2(s)ds) < +\infty$  για κάθε  $t \geq 0$ , έτσι ώστε:

$$M_t = \mathbb{E}(M_0) + \int_0^t f(s)dB_s$$

$P$ -σ.β για κάθε  $t \geq 0$ .

### Θεώρημα 2 (Girsanov):

Έστω χώρος πιθανότητας  $(\Omega, F, P)$  στον οποίο ορίζεται μια μονοδιάστατη κίνηση Brown  $\{B_t, t \in [0, +\infty)\}$  και η αντίστοιχη τυπική διύλιση  $\{F_t, t \in [0, +\infty)\}$ , δηλαδή για κάθε  $t \geq 0$  έχουμε  $F_t = \sigma(F_t^B \cup N)$  με  $F_t^B = \sigma(B_s, 0 \leq s \leq t)$  και  $N = \{L \subset \Omega : \exists N \in F : L \subset N \wedge P(N) = 0\}$ . Έστω ακόμα  $T > 0$  και στοχαστική ανέλιξη  $a = \{a(s) : s \in [0, T]\}$  ώστε  $P(\int_0^T a^2(s)ds < +\infty) = 1$  και ώστε η στοχαστική ανέλιξη:

$$Z_t = e^{\int_0^t a(s)dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t a^2(s)ds}, t \in [0, +\infty)$$

να είναι ένα  $F_t$ -martingale. Ορίζουμε τη συνολοσυνάρτηση  $Q : F_T \rightarrow \mathbb{R}$  με:

$$Q(A) = \int_A Z_T dP$$

για κάθε  $A \in F_T$ . Τότε η συνολοσυνάρτηση  $Q$  είναι ένα μέτρο πιθανότητας ισοδύναμο του μέτρου πιθανότητας  $P$  (δηλαδή  $P(A) = 0 \Leftrightarrow Q(A) = 0$ ), ενώ η στοχαστική ανέλιξη  $W_t = B_t - \int_0^t a(s)ds, t \in [0, T]$ , είναι  $F_t$ -προσαρμοσμένη κίνηση Brown για το μέτρο  $Q$ .

Ο προσδιορισμός της στοχαστικής ανέλιξης  $Y(t)$  της αξίας ενός Δικαιώματος Προκαθορισμένης Ωρίμανσης, θα γίνει θεωρώντας ότι έχουμε μια οικονομία με δύο υποκείμενους τίτλους: μια μετοχή της οποίας η αξία μεταβάλλεται τυχαία και ένα χρεόγραφο. Ο πωλητής ενός χρεόγραφου πρέπει σε κάποια στιγμή στο μέλλον να καταβάλλει στον αγοραστή την αξία του, ενώ η αξία του χρεόγραφου αυξάνεται συνεχώς με βάση ένα συγκεκριμένο επιτόκιο. Το χρεόγραφο εδώ εκφράζει είτε απόκτηση δανείου (οπότε ο αγοραστής είναι η τράπεζα) είτε κατάθεση χρημάτων (οπότε ο πωλητής είναι η τράπεζα) αξίας 1 (σε ευρώ). Όλα όσα θα ακολουθήσουν γενικεύονται και για πιο σύνθετες οικονομίες χωρίς να αλλάζουν τα αποτελέσματα που προκύπτουν για την ανέλιξη  $Y(t)$ , οπότε δε θα χρειαστεί να μελετήσουμε πιο σύνθετες οικονομίες (για τους ενδιαφερόμενους παραπέμπουμε στο [3]).

### 3.2. Χαρτοφυλάκια και μέτρο αντικειμενικής πιθανότητας

Έστω  $X(t)$ ,  $R(t)$  οι αντίστοιχες ανελιζεις αξίας της μετοχής και ενός χρεόγραφου που αφορά το δανεισμό (ή την κατάθεση) ενός ευρώ. Η  $X(t)$  θα είναι  $F_t$ -προσαρμοσμένη και σύμφωνα με το μοντέλο Black-Scholes θα έχουμε:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t bX(s)ds + \int_0^t \sigma X(s)dB_s \quad (1),$$

$$R(t) = 1 + r \int_0^t R(s)ds \quad (2)$$

για κάθε  $t \in [0, +\infty)$ , όπου  $b, \sigma$  είναι σταθερές που μπορούν να εκτιμηθούν στατιστικά, ενώ  $r$  είναι ο συντελεστής συνεχούς ανατοκισμού ο οποίος είναι γνωστός.

Μια επενδυτική στρατηγική (ή χαρτοφυλάκιο) είναι ένα ζεύγος  $F_t$ -προσαρμοσμένων στοχαστικών ανελιξεων ( $\phi_1(t)$ ,  $\phi_2(t)$ ), όπου  $\phi_1(t)$ ,  $\phi_2(t)$  εκφράζουν αντίστοιχα το πλήθος των μονάδων της μετοχής και το πλήθος των μονάδων του χρεόγραφου που ο επενδυτής έχει στην κατοχή του τη στιγμή  $t$ . Τα πλήθη αυτά είναι πραγματικοί αριθμοί και είναι τυχαία και  $F_t$ -προσαρμοσμένα διότι ο επενδυτής τα προσαρμόζει ανάλογα με την τυχαία συμπεριφορά της μετοχής που έχει παρατηρηθεί μέχρι τότε. Αρνητική τιμή ενός εξ αυτών των πληθών αντιστοιχεί σε μη κατοχή αλλά υποχρέωση καταβολής του αντίστοιχου υποκείμενου τίτλου στο μέλλον. Η συνολική αξία του χαρτοφυλακίου του επενδυτή τη χρονική στιγμή  $t$  είναι προφανώς:

$$S(t) = \phi_1(t)X(t) + \phi_2(t)R(t) \quad (3)$$

Οι ανελιξεις  $\phi_1(t)$ ,  $\phi_2(t)$  πρέπει ακόμα να ικανοποιούν κάποιες υποθέσεις.. Μια απαραίτητη υπόθεση για την ορθότητα όσων ακολουθούν είναι η εξής:

$$P\left(\int_0^T |\phi_2(s)|ds + \int_0^T |\phi_1(s)X(s)|^2 ds < +\infty\right) = 1 \quad \forall T > 0 \quad (4)$$

Η υπόθεση αυτή είναι λογική αν σκεφτούμε ότι σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα,

είναι πρακτικά αδύνατο τόσο το να αγοράζει ή να πουλάει κάποιος συνεχώς όλο και περισσότερες μονάδες υποκείμενων τίτλων, όσο και το να αυξάνεται απεριόριστα η τιμή μιας μετοχής. Ακόμα, επειδή οι αποφάσεις του επενδυτή λαμβάνονται σε

διακριτό χρόνο, για  $\Delta t$  πολύ μικρό πρέπει να ισχύει:  $\phi_i(t) = \phi_i(t + \Delta t)$  για  $i \in \{1, 2\}$ . Έτσι έχουμε:

$$S(t + \Delta t) - S(t) = (\phi_1(t + \Delta t)X(t + \Delta t) + \phi_2(t + \Delta t)R(t + \Delta t)) -$$

$\phi_1(t)X(t) - \phi_2(t)R(t) = \phi_1(t)(X(t + \Delta) - X(t)) + \phi_2(t)(R(t + \Delta) - R(t))$   
 οπότε παίρνοντας  $\Delta t \rightarrow 0$  προκύπτει η στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$dS(t) = \phi_1(t)dX(t) + \phi_2(t)dR(t) \quad (5)$$

όπου από τις (1) και (2) εύκολα προκύπτει:

$$dX(t) = bX(t)dt + \sigma X(t)dB_t,$$

$$dR(t) = rR(t)dt$$

οπότε η (5) γίνεται:

$$dS(t) = (b\phi_1(t)X(t) + r\phi_2(t)R(t))dt + \sigma\phi_1(t)X(t)dB_t$$

ή ισοδύναμα:

$$S(t) = S(0) + \int_0^t (b\phi_1(s)X(s) + r\phi_2(s)R(s))ds + \int_0^t \sigma\phi_1(s)X(s)dB_s \quad (6)$$

Όταν η ανέλιξη αξίας του χαρτοφυλακίου που δίνεται από την (3) ικανοποιεί και τις (4) και (6), λέμε ότι το χαρτοφυλάκιο του επενδυτή είναι Αυτοχρηματοδοτούμενο.

Έστω τώρα  $X^*(t) = R^{-1}(t)X(t)$  και  $S^*(t) = R^{-1}(t)S(t)$  οι ανελιξίες αξίας της μετοχής και του χαρτοφυλακίου αντίστοιχα ως προς το χρήμα που ανατοκίζεται. Η (2) εύκολα μετασχηματίζεται στην:

$$R^{-1}(t) = 1 + \int_0^t -rR^{-1}(s)ds + \int_0^t 0dB_s$$

Η τελευταία μαζί με τις (1) και (6) μας δίνουν τις εκφράσεις των  $R^{-1}(t)$ ,  $X(t)$  και  $S(t)$  ως ανελιξίες Ito. Έτσι εφαρμόζοντας την formula του Ito για την  $f(x, y) = xy$ , πρώτα με  $(x, y) = (X(t), R^{-1}(t))$  και στη συνέχεια με  $(x, y) = (S(t), R^{-1}(t))$ , προκύπτουν οι εκφράσεις των  $X^*(t)$  και  $S^*(t)$  ως ανελιξίες Ito:

$$X^*(t) = X(0) + \int_0^t (b - r)X^*(s)ds + \int_0^t \sigma X^*(s)dB_s \quad (7)$$

$$S^*(t) = S(0) + \int_0^t (b - r)\phi_1(s)X^*(s)ds + \int_0^t \sigma\phi_1(s)X^*(s)dB_s \quad (8)$$

Ας θεωρήσουμε τώρα την εκθετική κίνηση Brown  $E_t = e^{-\theta B_t - \frac{\theta^2}{2}t}$  με  $\theta = \frac{b-r}{\sigma}$  και  $T$  το χρόνο ωρίμανσης ενός Δικαιώματος Προκαθορισμένης Ωρίμανσης. Από

τη formula του Ito για την συνάρτηση  $f(x) = e^x$  και την ανέλιξη  $U_t = -\theta B_t - \frac{\theta^2}{2}t$  προκύπτει  $E_t = 1 - \theta \int_0^t E_s dB_s$ . Από την τελευταία προκύπτει εύκολα ότι η  $E_t$  είναι  $F_t$ -martingale, ενώ εύκολα βλέπουμε ότι ικανοποιούνται όλες οι υποθέσεις του Θεωρήματος Girsanov για  $a(t) = -\theta$  και  $Z_t = E_t$ . Έτσι υπάρχει ένα μέτρο πιθανότητας  $Q$  με  $Q(A) = \int_A E_T dP \forall A \in F_T$ , ισοδύναμο ως προς το μέτρο πιθανότητας  $P$ , ως προς το οποίο η στοχαστική ανέλιξη  $W_t = B_t + \theta t$ ,  $t \in [0, T]$ , είναι  $F_t$ -προσαρμοσμένη κίνηση Brown. Επειδή τα δύο μέτρα είναι ισοδύναμα, είναι εύκολο να δούμε ότι η τυπική διύλιση της κίνησης Brown  $W_t$  είναι πάλι η  $F_t$ . Ακόμα, μπορεί να δείχτεί σχετικά εύκολα ότι η  $W_t$  είναι τυπική κίνηση Brown ως προς το μέτρο  $Q$ , ενώ ισχύει:  $dB_t = dW_t - \theta dt$  και άρα με αντικατάσταση στις (1), (7) και (8) λαμβάνουμε:

$$X(t) = X(0) + r \int_0^t X(s) ds + \sigma \int_0^t X(s) dW_s, t \in [0, T] \quad (9)$$

$$X^*(t) = X(0) + \sigma \int_0^t X^*(s) dW_s, t \in [0, T] \quad (10)$$

$$S^*(t) = S(0) + \sigma \int_0^t \phi_1(s) X^*(s) dW_s, t \in [0, T] \quad (11)$$

Οι παραπάνω αποτελούν απλές στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις ως προς το

μέτρο  $Q$ . Η (10) είναι γραμμική ΣΔΕ ως προς  $X^*(t)$  υπό το μέτρο  $Q$ , της οποίας η λύση  $X^*(t)$  είναι γνωστή και λόγω του Θεωρήματος Ito των ΣΔΕ ικανοποιεί:  $\int_0^T \mathbb{E}^Q([X^*(s)]^2) ds < +\infty$ . Αυτό μαζί με τη μορφή της ΣΔΕ (10) συνεπάγεται ότι η  $X^*(t)$  είναι ένα  $F_t$ -martingale ως προς το μέτρο  $Q$ , το οποίο για το λόγο αυτό καλείται μέτρο αντικειμενικής πιθανότητας.

Ας υποθέσουμε ακόμα ότι η συνάρτηση  $\phi_1(t)$  ικανοποιεί την ανισοτική σχέση:  $\int_0^T \mathbb{E}^Q([\phi_1(s) X^*(s)]^2) ds < +\infty$ . Η λογικότητα της υπόθεσης αυτής έχει να κάνει με την ισοδυναμία των μέτρων  $P$  και  $Q$  και με το ότι είναι εξαιρετικά απίθανο για έναν επενδυτή, εντός ενός πεπερασμένου χρονικού διαστήματος να αποκτήσει ένα πολύ μεγάλο χρηματικό ποσό σε μετοχές.

Θα δείξουμε τώρα ότι η  $S^*(t)$  είναι  $F_t$ -martingale υπό το μέτρο  $Q$  ενώ δεν υπάρχει επενδυτική στρατηγική σίγουρης κερδοφορίας αν επενδύουμε μόνο σε υποκείμενους τίτλους. Το πρώτο είναι άμεσο από την τελευταία υπόθεση και από τη σχέση (11). Για το δεύτερο, αν υπήρχε στρατηγική με σίγουρη κερδοφορία, τότε για την ανέλιξη αξίας του χρηματοφυλακίου  $S^*(t)$  θα είχαμε:  $S^*(0) = S(0) = 0$ ,  $S^*(T) \geq 0$  και  $\mathbb{E}^P(S^*(T)) > 0$ , οπότε  $P(S^*(T) > 0) > 0 \Rightarrow Q(S^*(T) > 0) > 0$  και έτσι  $\mathbb{E}^Q(S^*(T)) > 0$ . Το τελευταίο είναι άτοπο καθώς έχουμε  $\mathbb{E}^Q(S^*(T)) = \mathbb{E}^Q(S^*(T)|F_0) = S^*(0) = 0$ . Η σχέση  $\mathbb{E}^Q(S^*(T)|F_0) = \mathbb{E}^Q(S^*(T))$ ,  $Q$ -σ.β, προκύπτει εύκολα από το ότι τα σύνολα της σ-άλγεβρας  $F_0$  έχουν πιθανότητα είτε 0 είτε 1.

### 3.3. Παράγωγα και δίκαιες τιμές

Έστω τώρα ένα Δικαίωμα Προκαθορισμένης Ωρίμανσης του οποίου η χρονική στιγμή ωρίμανσης είναι η στιγμή  $t = T$ . Υποθέτουμε ότι η άσκηση του δικαιώματος του παραγωγού παρέχει στον κάτοχο αυτού κέρδος  $Y$ , το οποίο είναι προφανώς μια  $F_T$ -μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή. Αν ορίσουμε:

$$M(t) = \mathbb{E}^Q(R^{-1}(T)Y|F_t) \forall t \geq 0$$

τότε από βασική ιδιότητα των δεσμευμένων μέσω τιμών έχουμε ότι η  $M(t)$  είναι  $F_t$ -martingale ως προς το μέτρο  $Q$ . Από το Θεώρημα Αναπαράστασης Brownian Martingales έχουμε ότι υπάρχει μοναδική (με την έννοια του μέτρου  $dt \otimes dP$ ) στοχαστική ανέλιξη  $f = \{f(s) : s \in [0, +\infty)\}$  με  $\mathbb{E}^Q(\int_0^t f^2(s)ds) < +\infty$  για κάθε  $t \geq 0$ , έτσι ώστε:

$$M(t) = \mathbb{E}^Q(R^{-1}(T)Y) + \int_0^t f(s)dW_s$$

$P$ -σ.β για κάθε  $t \geq 0$ . Ορίζουμε τώρα μια επενδυτική στρατηγική  $(\phi_1(t), \phi_2(t))$  με:

$$\phi_1(t) = R(t) \frac{f(t)}{\sigma X(t)}, t \in [0, T],$$

$$\phi_2(t) = E^Q(R^{-1}(T)Y) + G(t) - \phi_1(t)X^*(t), t \in [0, T]$$

όπου:

$$G(t) = \int_0^t (b-r)\phi_1(s)X^*(s)ds + \int_0^t \sigma\phi_1(s)X^*(s)dW_s, t \in [0, T]$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την ισοδυναμία των δύο μέτρων, τη σχέση  $dW_t = dB_t +$

$\theta dt$ , τον ορισμό της ανέλιξης  $f$  και τη σχέση (11), μπορούμε να δείξουμε ότι η παραπάνω στρατηγική ικανοποιεί όλες τις απαραίτητες προϋποθέσεις και ότι η ανέλιξη αξίας  $S^*(t)$  του χαρτοφυλακίου ως προς το χρήμα που ανατοκίζεται, είναι εκδοχή της ανέλιξης  $M(t)$  υπό το μέτρο  $P$ . Έστω τώρα  $Y(t)$  η ανέλιξη αξίας

του Δικαιώματος Προκαθορισμένης Ωρίμανσης. Ορίζουμε  $Y^*(t) = R^{-1}(t)Y(t)$  να είναι η ανέλιξη αξίας του Δικαιώματος Προκαθορισμένης Ωρίμανσης ως προς το χρήμα που ανατοκίζεται. Θα αποδείξουμε ότι για να μην υπάρχει στρατηγική σίγουρης κερδοφορίας, θα πρέπει να ισχύει:

$$Y^*(t) = S^*(t)$$

για κάθε  $t \geq 0$ ,  $P$ - σχεδόν βεβαίως. Αρχεί να δείξουμε ότι αν δεν υπάρχει τέτοια στρατηγική, τότε  $P(\{\exists t \geq 0 : Y^*(t) > S^*(t)\}) = 0$  και  $P(\{\exists t \geq 0 : Y^*(t) < S^*(t)\}) = 0$ . Πράγματι, αν η πρώτη πιθανότητα ήταν  $p > 0$ , τότε θα μπορούσε κάποιος να μην επενδύσει τίποτα μέχρι μια χρονική στιγμή  $t'$  για την

οποία  $Y^*(t') > S^*(t')$ , τη στιγμή αυτή να πουλήσει ένα τέτοιο Δικαίωμα Προκαθορισμένης Ωρίμανσης και την ίδια στιγμή με το κέρδος της πώλησης να σχηματίσει το χαρτοφυλάκιο ανέλιξης αξίας  $S^*(t)$ , κρατώντας τη διαφορά  $Y^*(t') - S^*(t')$  στην άκρη. Επειδή προφανώς  $S^*(T) = R^{-1}(T)Y = R^{-1}(T)Y(T) = Y^*(T)$ , ο επενδυτής αυτός δεν θα ζημιωθεί καθόλου από τις υποχρεώσεις του ως πωλητής του παραγώγου. Έτσι ο επενδυτής αυτός, έχοντας μηδενικό αρχικό κεφάλαιο, στο τέλος με πιθανότητα  $1 - p$  θα έχει πάλι μηδενικό κεφάλαιο (μη έχοντας πραγματοποιήσει καμία συναλλαγή), ενώ με πιθανότητα  $p > 0$  θα έχει τελικά κέρδος μια διαφορά  $Y^*(t') - S^*(t')$  που θα έχει βάλει στην άκρη σε κάποια χρονική στιγμή  $t'$ . Η παραπάνω στρατηγική είναι προφανώς στρατηγική σίγουρης κερδοφορίας, οπότε καταλήγουμε στο ότι για να μην υπάρχει τέτοια στρατηγική πρέπει να ισχύει:  $P(\{\exists t \geq 0 : Y^*(t) > S^*(t)\}) = 0$ . Ομοίως δείχνουμε ότι για να μην υπάρχει στρατηγική σίγουρης κερδοφορίας, πρέπει και η άλλη πιθανότητα να είναι επίσης 0.

Από τα παραπάνω έχουμε ότι πρέπει να ισχύει:

$$Y^*(t) = M(t) = \mathbb{E}^Q(R^{-1}(T)Y|F_t) \quad (12)$$

$P$ -σχεδόν βεβαίως για κάθε  $t \in [0, T]$ .

Όπως ορίσαμε μια επενδυτική στρατηγική για τους δύο υποκείμενους τίτλους, εντελώς ανάλογα μπορούμε να ορίσουμε και μια επενδυτική στρατηγική για τους δύο υποκείμενους τίτλους και το Δικαίωμα Προκαθορισμένης Ωρίμανσης. Κάνοντας στη συνέχεια μερικές λογικές υποθέσεις όπως αυτές που κάναμε για τις στρατηγικές επένδυσης σε υποκείμενους τίτλους, δεδομένου ότι η ανέλιξη αξίας του παραγώγου είναι αυτή που βρήκαμε πιο πάνω, μπορούμε να δείξουμε ότι η ανέλιξη αξίας του χαρτοφυλακίου είναι πάλι  $F_t$ -martingale. Έτσι, ακριβώς όπως και στην περίπτωση όπου επενδύουμε μόνο σε υποκείμενους τίτλους, αποδεικνύεται ότι δεν υπάρχει επενδυτική στρατηγική με σίγουρη κερδοφορία (για μια πιο αναλυτική εξήγηση σε αυτό, παραπέμπουμε στο [3]). Άρα ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε να μην υπάρχουν στρατηγικές σίγουρης κερδοφορίας, είναι τα Δικαιώματα Προκαθορισμένης Ωρίμανσης να τιμολογούνται με βάση την σχέση (12). Επομένως, η δίκαιη τιμή για το συγκεκριμένο Δικαίωμα Προκαθορισμένης Ωρίμανσης θα είναι:

$$Y(0) = Y^*(0) = \mathbb{E}^Q(R^{-1}(T)Y|F_0) = \mathbb{E}^Q(e^{-rT}Y)$$

και γενικότερα η δίκαιη τιμή την τυχαία χρονική στιγμή  $t \in [0, T]$  θα είναι:

$$Y^*(t) = \mathbb{E}^Q(e^{-rT}Y|F_t)$$

Με βάση όσα αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, για τα πιο γνωστά Δικαιώματα Προκαθορισμένης Ωρίμανσης που αφορούν τη μετοχή ανέλιξης αξίας  $X(t)$ , οι δίκαιες τιμές είναι οι ακόλουθες:

1) European Call Option:

$$Y(0) = \mathbb{E}^Q (e^{-rT} (X(T) - K)^+)$$

2) European Put Option:

$$Y(0) = \mathbb{E}^Q (e^{-rT} (K - X(T))^+)$$

3) Up and In Barrier Call Option:

$$Y(0) = \mathbb{E}^Q \left( e^{-rT} (X(T) - K)^+ I_{\{\max_{0 \leq s \leq T} X(s) > M\}} \right)$$

4) Standard Lookback Put Option:

$$Y_{LP}(0) = \mathbb{E}^Q \left( e^{-rT} \left( \max_{0 \leq s \leq T} X(s) - X(T) \right)^+ \right)$$

5) Geometric Asian Call Option:

$$Y(0) = \mathbb{E}^Q \left( e^{-rT} \left( \sqrt[m]{\prod_{i=0}^{m-1} X(T-i)} - K \right)^+ \right)$$

όπου:  $m \leq T + 1$ .

Γενικά, οι μέσες τιμές ως προς το μέτρο  $Q$  στις οποίες ανάγονται οι δίκαιες τιμές των Δικαιωμάτων Προκαθορισμένης Ωρίμανσης, δεν υπολογίζονται εύκολα. Έτσι, πολλές φορές υπολογίζουμε αυτές τις μέσες τιμές προσεγγιστικά, χρησιμοποιώντας μεθόδους που θα δούμε στα επόμενα κεφάλαια. Για να φανεί όμως η αποτελεσματικότητα των μεθόδων που θα ακολουθήσουν, θα πρέπει να υπολογίσουμε ακριβώς τις παραπάνω μέσες τιμές. Αυτό θα γίνει στο κεφάλαιο που ακολουθεί.

## 4. Δίκαιες τιμές βασικών Δικαιωμάτων Προκαθορισμένης Ωρίμανσης

### 4.1. Εισαγωγικά

Σε αυτό το κεφάλαιο θα υπολογίσουμε ακριβώς τις μέσες τιμές που βρήκαμε στο τέλος του τρίτου κεφαλαίου, οι οποίες αποτελούν τις δίκαιες τιμές των βασικών Δικαιωμάτων Προκαθορισμένης Ωρίμανσης. Αρχικά, θα χρειαστούμε το παρακάτω λήμμα:

#### Λήμμα 1:

α) Αν  $Z \sim N(0, 1)$ ,  $a, K > 0$  και  $b \in \mathbb{R}$ , ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((e^{aZ+b} - K)^+) &= e^{b+\frac{a^2}{2}} (1 - F(\frac{\ln K - b}{a} - a)) - K(1 - F(\frac{\ln K - b}{a})) \\ &= e^{b+\frac{a^2}{2}} F(-\frac{\ln K - b}{a} + a) - KF(\frac{-\ln K + b}{a}) \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από τη συμμετρία της κανονικής κατανομής.

β) Αν  $Z \sim N(0, 1)$ ,  $a, K > 0$  και  $b \in \mathbb{R}$ , ισχύει ότι:

$$\mathbb{E}((-e^{aZ+b} + K)^+) = -e^{b+\frac{a^2}{2}} F(\frac{\ln K - b}{a} - a) + KF(\frac{\ln K - b}{a})$$

όπου  $F$  είναι η συνάρτηση κατανομής της τυποποιημένης κανονικής κατανομής.

#### Απόδειξη:

Θα αποδείξουμε το α) καθώς το β) αποδεικνύεται εντελώς ανάλογα:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((e^{aZ+b} - K)^+) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{ax+b} - K)^+ \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx = \int_{\frac{\ln K - b}{a}}^{+\infty} (e^{ax+b} - K) \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \\ &= \int_{\frac{\ln K - b}{a}}^{+\infty} \frac{e^{ax+b-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx - K \int_{\frac{\ln K - b}{a}}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= e^{b+\frac{a^2}{2}} \int_{\frac{\ln K-b}{a}}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+a^2-2ax)}}{\sqrt{2\pi}} dx - K(1 - F(\frac{\ln K-b}{a})) \\
&= e^{b+\frac{a^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\ln K-b}{a}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-a)^2} dx - K(1 - F(\frac{\ln K-b}{a})) \\
&= e^{b+\frac{a^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\ln K-b}{a}-a}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy - K(1 - F(\frac{\ln K-b}{a})) \\
&= e^{b+\frac{a^2}{2}} (1 - F(\frac{\ln K-b}{a} - a)) - K(1 - F(\frac{\ln K-b}{a}))
\end{aligned}$$

και η απόδειξη είναι πλήρης.

#### 4.2. Δίκαιες τιμές Geometric Asian και European Options

Ας εξετάσουμε πρώτα την ποσότητα εντός της μέσης τιμής που αντιστοιχεί στο Geometric Asian Call Option. Έχουμε:

$$\sqrt[m]{\prod_{i=0}^{m-1} X(T-i)} = e^{\frac{1}{m}(\ln X(T-m+1)+\ln X(T-m+2)+\dots+\ln X(T))}$$

όπου η  $X^*(t) = R^{-1}(t)X(t)$  ικανοποιεί τη γραμμική ΣΔΕ (10), με την ανέλιξη  $W_t$  να είναι μια  $F_t$ -προσαρμοσμένη τυπική κίνηση Brown ως προς το μέτρο  $Q$ , οπότε από τη θεωρία γραμμικών ΣΔΕ ισχύει:  $X(t) = R(t)X^*(t) = X(0)e^{rt}e^{-\frac{\sigma^2}{2}t+\sigma W_t} = X(0)e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W_t}$ . Άρα έχουμε:

$$\sqrt[m]{\prod_{i=0}^{m-1} X(T-i)} = e^{\ln X(0)+(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1}i)+\frac{\sigma}{m}(\sum_{i=0}^{m-1}W_{T-i})}$$

ενώ ακόμα ισχύει:

$$\sum_{i=0}^{m-1} W_{T-i} = \sum_{i=1}^{m-1} i(W_{T-i}-W_{T-i-1})+mW_{T-n+1} \sim N(0, \sum_{i=1}^{m-1} i^2+m^2(T-n+1))$$

ως προς το μέτρο  $Q$  με  $\sum_{i=1}^{m-1} i^2 + m^2(T-m+1) = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + Tm^2 - m^3$ .

Έτσι ισχύει  $\frac{\sigma}{m} \sum_{i=0}^{m-1} W_{T-i} = \frac{\sigma}{m} \sqrt{\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + Tm^2 - m^3} Z$  με  $Z \sim N(0, 1)$

ως προς το μέτρο  $Q$ , και αφού  $\sum_{i=0}^{m-1} i = \frac{m(m-1)}{2}$ , εφαρμόζεται το Λήμμα 1 και μετά από λίγες πράξεις προκύπτει ότι η δίκαιη τιμή για το Geometric Asian Call Option είναι:

$$Y_G(0) = e^{-rT} \mathbb{E}^Q \left( \left( \sqrt[m]{\prod_{i=0}^{m-1} X(T-i)} - K \right)^+ \right) =$$

$$X(0) e^{-\frac{\sigma^2(m+1)}{4} - r \frac{m-1}{2} + \frac{\sigma^2(m+1)(2m+1)}{12m}} F(D_2 - D_1) - K e^{-rT} F(-D_1)$$

όπου:

$$D_1 = \frac{\ln\left(\frac{K}{X(0)}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \left(T - \frac{m-1}{2}\right)}{\frac{\sigma}{m} \sqrt{\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + Tm^2 - m^3}}$$

$$\text{και } D_2 = \frac{\sigma}{m} \sqrt{\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + Tm^2 - m^3}$$

Τονίζουμε ότι αυτό ήταν μόνο ένα παράδειγμα Geometric Asian Call Option, ένα άλλο παράδειγμα θα μπορούσε να χρησιμοποιεί διαφορετικές χρονικές στιγμές οι οποίες μάλιστα θα μπορούσαν να μην ισαπέχουν. Η δίκαιη τιμή για το European Call Option προκύπτει ως ειδική περίπτωση του παραπάνω Παραγώγου για  $m = 1$  και είναι:

$$Y(0) = X(0) F\left(-\frac{\ln\left(\frac{K^*}{X(0)}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2}\right) - K^* F\left(-\frac{\ln\left(\frac{K^*}{X(0)}\right)}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{\sigma\sqrt{T}}{2}\right)$$

όπου  $K^* = e^{-rT}K$  είναι η τιμή άσκησης του δικαιώματος ως προς το χρήμα που ανατοκίζεται. Η σχέση αυτή είναι γνωστή ως Black-Scholes formula.

Για το European Put Option, παρατηρούμε ότι προκύπτει πάλι από το Geometric Asian Call Option, θέτοντας  $n = 1$  και αλλάζοντας τα πρόσημα εντός του θετικού μέρους, οπότε η δίκαιη τιμή αυτού θα προκύπτει από το β) του Λήμματος 1, χρησιμοποιώντας πάλι τα ίδια  $a, b$  με  $n = 1$ . Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι θα προκύψει το ίδιο αποτέλεσμα με αντίθετο πρόσημο και με αντίθετα πρόσημα εντός των συναρτήσεων κατανομής:

$$Y_P(0) = -X(0) F\left(\frac{\ln\left(\frac{K^*}{X(0)}\right)}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{\sigma\sqrt{T}}{2}\right) + K^* F\left(\frac{\ln\left(\frac{K^*}{X(0)}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2}\right)$$

### 4.3. Δίκαιη τιμή Lookback Put Option

Η τιμολόγηση των Standard Lookback Options και των Barrier Options είναι πολύ πιο δύσκολη, διότι απαιτείται ο προσδιορισμός της κατανομής της μέγιστης τιμής μιας “πειραγμένης” κίνησης Brown σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα. Γι’ αυτό θα χρειαστούμε τα παρακάτω λήμματα:

#### Λήμμα 2:

Έστω  $a, b, c, p \in \mathbb{R}$  και  $l > 0$ , τότε ισχύουν:

$$\alpha) \int_a^d e^{px - \frac{1}{2l}(x+b)^2} dx = \sqrt{2\pi l} e^{-pb + \frac{p^2 l}{2}} \left( F\left(\frac{d+b}{\sqrt{l}} - p\sqrt{l}\right) - F\left(\frac{a+b}{\sqrt{l}} - p\sqrt{l}\right) \right)$$

$$\beta) \int_a^d e^{cx} \int_{-\infty}^{-x} e^{-\frac{1}{2l}(u+b)^2} dudx = \frac{\sqrt{2\pi l}}{c} \left( e^{cd} F\left(\frac{b-d}{\sqrt{l}}\right) - e^{ca} F\left(\frac{b-a}{\sqrt{l}}\right) \right) + \frac{\sqrt{2\pi l}}{c} e^{cb + \frac{1}{2}c^2 l} \left( F\left(\frac{d-b}{\sqrt{l}} - c\sqrt{l}\right) - F\left(\frac{a-b}{\sqrt{l}} - c\sqrt{l}\right) \right)$$

όπου  $F$  είναι η συνάρτηση κατανομής της τυποποιημένης κανονικής κατανομής.

#### Απόδειξη:

α) Έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_a^d e^{px - \frac{1}{2l}(x+b)^2} dx &= \sqrt{l} e^{-pb} \int_{\frac{a+b}{\sqrt{l}}}^{\frac{d+b}{\sqrt{l}}} e^{p\sqrt{l}u - \frac{1}{2}u^2} du \\ &= \sqrt{l} e^{-pb + \frac{p^2 l}{2}} \int_{\frac{a+b}{\sqrt{l}}}^{\frac{d+b}{\sqrt{l}}} e^{-\frac{1}{2}(u - p\sqrt{l})^2} du = \sqrt{l} e^{-pb + \frac{p^2 l}{2}} \int_{\frac{a+b}{\sqrt{l}} - p\sqrt{l}}^{\frac{d+b}{\sqrt{l}} - p\sqrt{l}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds \\ &= \sqrt{l} e^{-pb + \frac{p^2 l}{2}} \int_{\frac{a+b}{\sqrt{l}} - p\sqrt{l}}^{\frac{d+b}{\sqrt{l}} - p\sqrt{l}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds \\ &= \sqrt{2\pi l} e^{-pb + \frac{p^2 l}{2}} \left( F\left(\frac{d+b}{\sqrt{l}} - p\sqrt{l}\right) - F\left(\frac{a+b}{\sqrt{l}} - p\sqrt{l}\right) \right) \end{aligned}$$

β) Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε:

$$\begin{aligned}
& \int_a^d e^{cx} \int_{-\infty}^{-x} e^{-\frac{1}{2l}(u+b)^2} du dx = \frac{1}{c} \int_a^d (e^{cx})' \int_{-\infty}^{-x} e^{-\frac{1}{2l}(u+b)^2} du dx \\
&= \frac{1}{c} \left[ e^{cx} \int_{-\infty}^{-x} e^{-\frac{1}{2l}(u+b)^2} du \right]_a^d + \frac{1}{c} \int_a^d e^{cx} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{-x} e^{-\frac{1}{2l}(u+b)^2} du dx = \frac{e^{cd}}{c} \int_{-\infty}^{-d} e^{-\frac{(u+b)^2}{2l}} du - \\
& \frac{1}{c} e^{ca} \int_{-\infty}^{-a} e^{-\frac{1}{2l}(u+b)^2} du + \frac{\sqrt{l}}{c} \int_{\frac{a-b}{\sqrt{l}}}^{\frac{d-b}{\sqrt{l}}} e^{c(\sqrt{l}y+b) - \frac{y^2}{2}} dy = \frac{\sqrt{l}}{c} e^{cd} \int_{-\infty}^{\frac{b-d}{\sqrt{l}}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds - \\
& \frac{\sqrt{l}}{c} e^{ca} \int_{-\infty}^{\frac{b-a}{\sqrt{l}}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds + \frac{\sqrt{l}}{c} e^{cb + \frac{1}{2}c^2l} \int_{\frac{a-b}{\sqrt{l}}}^{\frac{d-b}{\sqrt{l}}} e^{-\frac{1}{2}(y-c\sqrt{l})^2} dy = \frac{\sqrt{2\pi l} e^{cd}}{c} F\left(\frac{b-d}{\sqrt{l}}\right) - \\
& \frac{\sqrt{2\pi l} e^{ca}}{c} F\left(\frac{b-a}{\sqrt{l}}\right) + \frac{\sqrt{l}}{c} e^{cb + \frac{1}{2}c^2l} \int_{\frac{a-b}{\sqrt{l}}}^{\frac{d-b}{\sqrt{l}}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds = \frac{\sqrt{2\pi l}}{c} e^{cd} F\left(\frac{b-d}{\sqrt{l}}\right) - \\
& \frac{\sqrt{2\pi l}}{c} e^{ca} F\left(\frac{b-a}{\sqrt{l}}\right) + \frac{\sqrt{2\pi l}}{c} e^{cb + \frac{1}{2}c^2l} \left( F\left(\frac{d-b}{\sqrt{l}} - c\sqrt{l}\right) - F\left(\frac{a-b}{\sqrt{l}} - c\sqrt{l}\right) \right)
\end{aligned}$$

και η απόδειξη είναι πλήρης.

### Λήμμα 3 (Γενίκευση της Αρχής της Ανάκλασης):

Έστω ένας χώρος πιθανότητας  $(\Omega, F, Q)$  με μια τυπική κίνηση Brown  $B_t$ ,  $t \in [0, T]$ . Έστω ακόμα  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  και  $M_T = \max_{t \in [0, T]} \{B_t + \lambda t\}$ . Η τυχαία μεταβλητή  $M_T$  έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_M(x) = \frac{2e^{-\frac{\lambda^2 T}{2}}}{\sqrt{2\pi T}} \left( e^{\lambda x - \frac{x^2}{2T}} - \lambda \int_{-\infty}^x e^{\lambda z - \frac{1}{2T}(2x-z)^2} dz \right) I_{[0, +\infty)}(x)$$

και θέτοντας  $u = -2x + z$  και κάνοντας μερικές πράξεις, προκύπτει η πιο απλή μορφή:

$$f_M(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi T}} \left( e^{-\frac{1}{2T}(x-\lambda T)^2} - \lambda e^{2\lambda x} \int_{-\infty}^{-x} e^{-\frac{1}{2T}(u-\lambda T)^2} du \right) I_{[0, +\infty)}(x)$$

### Απόδειξη:

Η ύπαρξη της χαρακτηριστικής συνάρτησης των θετικών αριθμών μας λείπει απλά ότι η σ.π.π είναι 0 στους αρνητικούς, πράγμα που είναι προφανές διότι το μέγιστο  $M_T$  είναι σίγουρα θετικό. Άρα αρκεί να αποδείξουμε την παραπάνω σχέση για την σ.π.π για θετικά  $x$ , παραλείποντας την χαρακτηριστική συνάρτηση. Από το θεώρημα Girsanov με  $a(t) = -\lambda$ , έχουμε ότι υπάρχει ένα ισοδύναμο του  $Q$  μέτρο πιθανότητας  $P'$ , με  $dQ = e^{\lambda V_T - \frac{1}{2}\lambda^2 T} dP'$ , όπου η  $V_t = B_t + \lambda t$  είναι μια τυπική κίνηση Brown ως προς αυτό το μέτρο. Έχουμε τώρα για  $y \geq \max\{0, z\}$ :

$$P'(V_T \geq 2y - z) = P'(V_T \geq 2y - z \wedge M_T \geq y) + P'(V_T \geq 2y - z \wedge M_T < y)$$

με την τελευταία πιθανότητα να είναι 0 διότι  $2y - z \geq y$  ενώ:

$$P'(V_T > M_T) = 0$$

Άρα:

$$P'(V_T \geq 2y - z) = P'(V_T \geq 2y - z \wedge M_T \geq y)$$

Έστω τώρα  $\tau_y = \inf\{t : V_t \geq y\} = \inf\{t : V_t = y\}$  ο χρόνος πρώτης εξόδου από το  $(-\infty, y)$  και  $h_y : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας αυτού. Επειδή ο  $\tau_y$  είναι  $P'$ -σ.β πεπερασμένος χρόνος διακοπής, από την ισχυρή μαρκοβιανή ιδιότητα της κίνησης Brown, έχουμε ότι η στοχαστική ανέλιξη:  $W_t = V_{\tau_y+t} - V_{\tau_y} = V_{\tau_y+t} - y$  είναι μια τυπική κίνηση Brown ανεξάρτητη της  $\sigma$ -άλγεβρας  $F_{\tau_y}$ . Έτσι, μπορούμε να δούμε ότι η τελευταία πιθανότητα γράφεται:

$$\begin{aligned} P'(W_{T-\tau_y} \geq y - z \wedge \tau_y \leq T) &= \int_0^T h_y(s) P'(W_{T-\tau_y} \geq y - z \mid \tau_y = s) ds \\ &= \int_0^T h_y(s) P'(W_{T-s} \geq y - z \mid \tau_y = s) ds = \int_0^T h_y(s) P'(W_{T-s} \geq y - z) ds \\ &= \int_0^T h_y(s) P'(W_{T-s} \leq z - y) ds = \int_0^T h_y(s) P'(W_{T-s} \leq z - y \mid \tau_y = s) ds \\ &= \int_0^T h_y(s) P'(W_{T-\tau_y} \leq z - y \mid \tau_y = s) ds = P'(W_{T-\tau_y} \leq z - y \wedge \tau_y \leq T) \\ &= P'(V_T \leq y + (z - y) \wedge M_T \geq y) = P'(V_T \leq z \wedge M_T \geq y) = \\ P'(V_T \leq y + (z - y) \wedge M_T \geq y) &= P'(V_T \leq z \wedge M_T \geq y) = \int_{-\infty}^z \int_y^{+\infty} g(u, v) du dv \end{aligned}$$

με  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των  $M_T, V_T$  υπό το μέτρο  $P'$ .

Άρα για τη συγκεκριμένη πυκνότητα πιθανότητας έχουμε:

$$g(y, z) = -\frac{\partial^2 (P'(V_T \geq 2y - z))}{\partial z \partial y} = \frac{2}{T} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{1}{2T}(2y-z)^2} (2y - z)$$

για  $y \geq \max\{0, z\}$ , ενώ προφανώς σε όλο το υπόλοιπο  $\mathbb{R}^2$  η  $g$  είναι 0 (αυτό μπορούμε να το δούμε εξετάζοντας το τι τιμές λαμβάνει το  $M_T$  γενικά και σε σχέση με το  $V_T$ ). Τώρα για  $x > 0$  έχουμε:  $Q(M_T \geq x) =$

$$\begin{aligned} &= \int_{M_T \geq x} dQ = \int_{M_T \geq x} e^{\lambda V_T - \frac{\lambda^2 T}{2}} dP' = \int_x^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda z - \frac{\lambda^2 T}{2}} g(y, z) dz dy \\ &= e^{-\lambda^2 \frac{T}{2}} \int_x^{+\infty} \int_{-\infty}^y e^{\lambda z} \frac{2}{T} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{1}{2T}(2y-z)^2} (2y-z) dz dy \end{aligned}$$

Άρα:

$$f_M(x) = -\frac{\partial(Q(M_T \geq x))}{\partial x} = e^{-\frac{\lambda^2 T}{2}} \int_{-\infty}^x e^{\lambda z} \frac{2}{T\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{1}{2T}(2x-z)^2} (2x-z) dz =$$

$$2e^{-\frac{\lambda^2 T}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^x e^{\lambda z} \frac{\partial(e^{-\frac{1}{2T}(2x-z)^2})}{\partial z} dz = \frac{2e^{-\frac{\lambda^2 T}{2}}}{\sqrt{2\pi T}} \left[ e^{\lambda z - \frac{1}{2T}(2x-z)^2} \right]_{-\infty}^x -$$

$$\frac{2e^{-\frac{\lambda^2 T}{2}}}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^x \lambda e^{\lambda z} e^{-\frac{1}{2T}(2x-z)^2} dz$$

όπου προφανώς  $\lim_{z \rightarrow -\infty} e^{\lambda z - \frac{1}{2T}(2x-z)^2} = 0$  οπότε το ζητούμενο έπεται και η απόδειξη είναι πλήρης.

Έστω τώρα ότι για τη μετοχή με ανέλιξη αξίας  $X(t)$  έχουμε:

$$G(t) = \max_{s \in [0, t]} X(s), \quad H(t) = \max_{s \in [t, T]} X(s), \quad t \in [0, T]$$

και όπως στο Λήμμα 3:

$$M_t = \max_{s \in [0, t]} V_s$$

με  $V_s = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)s + \sigma W_s$ , όπου η  $W_s$  είναι μια τυπική κίνηση Brown ως προς  $s$ . Με βάση τα παραπάνω και όσα είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, η δίκαιη τιμή για το Standard Lookback Put Option ως προς το χρήμα που ανατοκίζεται τη χρονική στιγμή  $t$  είναι:

$$Y_{LP}^*(t) = \mathbb{E}^Q(e^{-rT}(G(T) - X(T)) | F_t) = e^{-rT} \mathbb{E}^Q(G(T) | F_t) - \mathbb{E}^Q(X^*(T) | F_t) =$$

$$e^{-rT} \mathbb{E}^Q(G(T) | F_t) - X^*(t) = e^{-rT} \mathbb{E}^Q(G(T) I_{\{G(T)=H(t)\}} + G(T) I_{\{G(T)=G(t)\}} | F_t) -$$

$$\begin{aligned}
X^*(t) &= e^{-rT} \mathbb{E}^Q(G(T)I_{\{G(T)=G(t)\}}|F_t) + e^{-rT} \mathbb{E}^Q(G(T)I_{\{G(T)=H(t)\}}|F_t) - X^*(t) \\
&= e^{-rT} \mathbb{E}^Q(G(t)I_{\{G(t)\geq H(t)\}}|F_t) + e^{-rT} \mathbb{E}^Q(H(t)I_{\{G(t)<H(t)\}}|F_t) - X^*(t) \\
&= e^{-rT} G(t) \mathbb{E}^Q(I_{\{\frac{G(t)}{X(t)} \geq \frac{H(t)}{X(t)}\}}|F_t) + e^{-rT} X(t) \mathbb{E}^Q\left(\frac{H(t)}{X(t)} I_{\{\frac{G(t)}{X(t)} < \frac{H(t)}{X(t)}\}}|F_t\right) - X^*(t) \\
&= e^{-rT} G(t) \mathbb{E}^Q\left(I_{\{k \geq \frac{H(t)}{X(t)}\}}|F_t\right) \Big|_{k=\frac{G(t)}{X(t)}} + \\
&e^{-rT} X(t) \mathbb{E}^Q\left(\frac{H(t)}{X(t)} I_{\{k < \frac{H(t)}{X(t)}\}}|F_t\right) \Big|_{k=\frac{G(t)}{X(t)}} - X^*(t) \quad (3)
\end{aligned}$$

καθώς η τ.μ  $G(t)$  είναι  $F_t$ -μετρήσιμη. Λόγω της Μαρκοβιανής ιδιότητας της κίνησης Brown, εύκολα βλέπουμε ότι το  $\frac{H(t)}{X(t)}$  είναι ανεξάρτητο της  $F_t$  ενώ ισούται με  $e^{\sigma M_{T-t}}$ , όπου με τους συμβολισμούς του Λήμματος 3,  $M_{T-t}$  είναι το μέγιστο μιας πειραγμένης κίνησης Brown στο  $[0, T-t]$  με  $\lambda = \frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}$ . Άρα χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3 έχουμε:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^Q(I_{\{k \geq \frac{H(t)}{X(t)}\}}|F_t) &= E^Q(I_{\{k \geq \frac{H(t)}{X(t)}\}}) = \\
Q\left(\frac{H(t)}{X(t)} \leq k\right) &= Q(\sigma M_{T-t} \leq \ln k) = \frac{2}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \times \\
\int_0^{\frac{\ln k}{\sigma}} \left( e^{-\frac{1}{2(T-t)}(x - (\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2})(T-t))^2} - \left(\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right) e^{2(\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2})x} \int_{-\infty}^{-x} s(u) du \right) dx &= \\
\frac{2}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_0^{\frac{\ln k}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2(T-t)}(x - (\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2})(T-t))^2} dx - \frac{2}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \times \\
\int_0^{\frac{\ln k}{\sigma}} \left(\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right) e^{2(\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2})x} \int_{-\infty}^{-x} s(u) du dx &
\end{aligned}$$

με  $s(u) = e^{-\frac{1}{2(T-t)}(u - (\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2})(T-t))^2}$  και  $k \geq 1$ . Ακόμα ισχύει:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^Q\left(\frac{H(t)}{X(t)} I_{\{\frac{H(t)}{X(t)} > k\}}|F_t\right) &= \mathbb{E}^Q\left(\frac{H(t)}{X(t)} I_{\{\frac{H(t)}{X(t)} > k\}}\right) = \\
\mathbb{E}^Q(e^{\sigma M_{T-t}} I_{\{\sigma M_{T-t} > \ln k\}}) &= \int_{\frac{\ln k}{\sigma}}^{+\infty} e^{\sigma x} f_M(x) dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \times
\end{aligned}$$

$$\int_{\frac{\ln k}{\sigma}}^{+\infty} \left( e^{\sigma x - \frac{1}{2(T-t)}(x - (\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2})(T-t))^2} - \left( \frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2} \right) e^{2(\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2})x + \sigma x} \int_{-\infty}^{-x} s(u) du \right) dx$$

Όλα τα παραπάνω ολοκληρώματα ως προς  $x$  υπολογίζονται χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2 πρώτα για  $a = 0$ ,  $p = 0$ ,  $d = \frac{\ln k}{\sigma}$ ,  $l = T - t$ ,  $b = -l \left( \frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2} \right)$ ,  $c = \frac{-2b}{l}$  (για την πρώτη δεσμευμένη μέση τιμή) και στη συνέχεια για  $a = \frac{\ln k}{\sigma}$ ,  $d \rightarrow +\infty$ ,  $p = \sigma$ ,  $l = T - t$ ,  $b = -l \left( \frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2} \right)$ ,  $c = \frac{2r}{\sigma}$  (για τη δεύτερη δεσμευμένη μέση τιμή). Μετά από αντικατάσταση των παραπάνω δεσμευμένων μέσων τιμών στη σχέση (3), κάνοντας τις πράξεις και χρησιμοποιώντας τη συμμετρία της κανονικής κατανομής και το ότι  $\lim_{d \rightarrow +\infty} e^{cd} \int_{-\infty}^{\frac{b-d}{\sqrt{d}}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds = 0$ , προκύπτει ότι η δίκαιη τιμή για το Standard Lookback Put Option τη χρονική στιγμή  $t$  είναι:

$$Y_{LP}^*(t) = -e^{-rT} X(t) \left( \frac{G(t)}{X(t)} \right)^{\frac{2r}{\sigma^2}} \frac{\sigma^2}{2r} F(a_1) + e^{-rT} G(t) F(a_2) +$$

$$X(t) e^{-rt} \frac{\sigma^2}{2r} F(a_3) - e^{-rt} X(t) F(-a_3)$$

όπου:

$$a_1 = -\frac{\ln \left( \frac{G(t)}{X(t)} \right) + (T-t) \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right)}{\sigma \sqrt{T-t}}$$

$$a_2 = \frac{\ln \left( \frac{G(t)}{X(t)} \right) - (T-t) \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right)}{\sigma \sqrt{T-t}}$$

$$a_3 = -\frac{\ln \left( \frac{G(t)}{X(t)} \right) - (T-t) \left( r + \frac{\sigma^2}{2} \right)}{\sigma \sqrt{T-t}}$$

Ειδικότερα, επειδή  $G(0) = X(0)$ , η δίκαιη τιμή του Standard Lookback Put Option τη χρονική στιγμή  $t = 0$  προκύπτει εύκολα ότι ισούται με:

$$Y_{LP}(0) = e^{-rT} \mathbb{E}^Q \left( \max_{0 \leq s \leq T} X(s) - X(T) \right)$$

$$= -e^{-rT} X(0) \frac{\sigma^2}{2r} F(a) + e^{-rT} X(0) F(a) + X(0) \frac{\sigma^2}{2r} F(b) - X(0) F(-b)$$

$$\text{όπου } a = -\sqrt{T} \left( \frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2} \right) \text{ και } b = \sqrt{T} \left( \frac{r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2} \right)$$



#### 4.4. Δίκαιη τιμή Up and In Barrier Call Option

Θα κλείσουμε αυτό το κεφάλαιο με τον προσδιορισμό της δίκαιης τιμής για ένα Up and In Barrier Call Option με φράγμα  $M$ . Αν και ο υπολογισμός της δίκαιης τιμής σε τυχαίο χρόνο  $t \in [0, T]$  δεν είναι ιδιαίτερα δύσκολος (απαιτεί χρήση χαρακτηριστικών συναρτήσεων σε συνδυασμό με κάποιες ιδιότητες των δεσμευμένων μέσων τιμών και της εκθετικής κίνησης Brown, περίπου όπως και στην περίπτωση της τιμολόγησης των Lookback Options, ενώ χρησιμοποιείται και το Λήμμα 1 του κεφαλαίου αυτού), επειδή απαιτεί πολύ περισσότερες πράξεις θα περιοριστούμε στον προσδιορισμό της τη στιγμή  $t = 0$ . Η δίκαιη τιμή ισούται με:

$$Y_B(0) = \mathbb{E}^Q(e^{-rT}(X(T) - K)^+ I_{\{\max_{0 \leq s \leq T} X(s) > M\}}(\omega)) =$$

$$e^{-rT} \mathbb{E}^Q((X(T) - K) I_{\{\max_{0 \leq s \leq T} X(s) > M \wedge X(T) > K\}}(\omega))$$

Έστω τώρα το μέτρο  $P'$  όπως στην απόδειξη του Λήμματος 3, αλλά με  $W_t$  στη θέση του  $B_t$  και  $\lambda = (\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2})$  (διότι έτσι έχουμε  $X(t) = X(0)e^{\sigma((\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2})t + W_t)} = X(0)e^{\sigma V_t}$  με  $W_t$  κίνηση Brown ως προς το μέτρο  $Q$ ). Αν θέσουμε ακόμα  $\lambda_1 = \frac{\ln M - \ln X(0)}{\sigma}$ ,  $\lambda_2 = \frac{\ln K - \ln X(0)}{\sigma}$ , με τους συμβολισμούς του Λήμματος 3 θα έχουμε:

$$Y_B(0) = e^{-rT} \int_{\{\max_{0 \leq s \leq T} X(s) > M \wedge X(T) > K\}} (X(T) - K) dQ$$

$$= X(0) e^{-rT} \int_{\{\max_{0 \leq s \leq T} V_s > \lambda_1 \wedge V_T > \lambda_2\}} e^{\sigma V_T} e^{\lambda V_T - \frac{1}{2} \lambda^2 T} dP' -$$

$$K e^{-rT} \int_{\{\max_{0 \leq s \leq T} V_s > \lambda_1 \wedge V_T > \lambda_2\}} e^{\lambda V_T - \frac{1}{2} \lambda^2 T} dP' = e^{-\frac{\lambda^2 T}{2} - rT} \times$$

$$\left( X(0) \int_{\lambda_1}^{+\infty} \int_{\lambda_2}^{+\infty} e^{z(\lambda + \sigma)} g(y, z) dz dy - K \int_{\lambda_1}^{+\infty} \int_{\lambda_2}^{+\infty} e^{\lambda z} g(y, z) dz dy \right)$$

Όπως είδαμε και στην απόδειξη του Λήμματος 3, ισχύει:

$$g(y, z) = \frac{2}{T} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{1}{2T}(2y-z)^2} (2y-z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi T}} \frac{\partial \left( e^{-\frac{1}{2T}(2y-z)^2} \right)}{\partial z}, \quad y \geq \max\{0, z\}$$

και 0 στο υπόλοιπο  $\mathbb{R}^2$ . Παρατηρώντας ότι  $\lambda_1 = \frac{\ln M - \ln X(0)}{\sigma} \geq 0$  (διαφορετικά το κάτω φράγμα  $M$  δεν έχει νόημα στο παράγωγο), θέτοντας  $A = \frac{2}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{\lambda^2 T}{2} - rT} X(0)$ ,

$B = \frac{2}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{\lambda^2 T}{2} - rT} K$ ,  $K^* = K e^{-rT}$  (κατά τα γνωστά) και κόνοντας αντικατάσταση και ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες στα παραπάνω ολοκληρώματα, προκύπτει:

$$\begin{aligned}
Y_B(0) &= A \int_{\lambda_1}^{+\infty} \left[ e^{(\lambda+\sigma)z - \frac{1}{2T}(2y-z)^2} \right]_{\lambda_2}^y dy - \\
&A(\lambda + \sigma) \int_{\lambda_1}^{+\infty} \int_{\lambda_2}^y e^{(\lambda+\sigma)z - \frac{1}{2T}(2y-z)^2} dz dy - \\
&B \left( \int_{\lambda_1}^{+\infty} \left[ e^{\lambda z - \frac{1}{2T}(2y-z)^2} \right]_{\lambda_2}^y dy - \lambda \int_{\lambda_1}^{+\infty} \int_{\lambda_2}^y e^{\lambda z - \frac{1}{2T}(2y-z)^2} dz dy \right) \\
&= A \left( \int_{\lambda_1}^{+\infty} e^{(\lambda+\sigma)y - \frac{1}{2T}y^2} dy - \int_{\lambda_1}^{+\infty} e^{(\lambda+\sigma)\lambda_2 - \frac{1}{2T}(2y-\lambda_2)^2} dy \right) - \\
A(\lambda + \sigma) \int_{\lambda_1}^{+\infty} \int_{\lambda_2}^y e^{(\lambda+\sigma)z - \frac{1}{2T}(2y-z)^2} dz dy - e^{-\frac{\lambda^2 T}{2} - rT} \frac{2K}{\sqrt{2\pi T}} \int_{\lambda_1}^{+\infty} e^{\lambda y - \frac{1}{2T}y^2} dy - \\
&B \left( - \int_{\lambda_1}^{+\infty} e^{\lambda\lambda_2 - \frac{1}{2T}(2y-\lambda_2)^2} dy - \lambda \int_{\lambda_1}^{+\infty} \int_{\lambda_2}^y e^{\lambda z - \frac{1}{2T}(2y-z)^2} dz dy \right) \\
&= A \left( e^{\frac{(\lambda+\sigma)^2 T}{2}} \int_{\lambda_1}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2T}((\lambda+\sigma)T-y)^2} dy - \frac{\sqrt{T}}{2} \int_{\frac{2\lambda_1-\lambda_2}{\sqrt{T}}}^{+\infty} e^{(\lambda+\sigma)\lambda_2 - \frac{1}{2}u^2} du \right) - \\
A(\lambda + \sigma) \int_{\lambda_1}^{+\infty} \int_{\lambda_2}^y e^{(\lambda+\sigma)z - \frac{1}{2T}(2y-z)^2} dz dy - \frac{2K}{\sqrt{2\pi T}} \int_{\lambda_1}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2T}(T\lambda-y)^2} dy - \\
&B \left( -\frac{\sqrt{T}}{2} \int_{\frac{2\lambda_1-\lambda_2}{\sqrt{T}}}^{+\infty} e^{\lambda\lambda_2 - \frac{1}{2}u^2} du - \lambda \int_{\lambda_1}^{+\infty} \int_{\lambda_2}^y e^{\lambda z - \frac{1}{2T}(2y-z)^2} dz dy \right) \quad (4)
\end{aligned}$$

Ισχύει όμως:

$$\begin{aligned}
\int_{\lambda_1}^{+\infty} \int_{\lambda_2}^y e^{\lambda z - \frac{1}{2T}(z-2y)^2} dz dy &= \int_{\lambda_1}^{+\infty} \int_{\lambda_2-2y}^{-y} e^{\lambda u + 2\lambda y - \frac{u^2}{2T}} du dy = \frac{e^{\frac{\lambda^2 T}{2}}}{2\lambda} \times \\
\int_{\lambda_1}^{+\infty} \frac{\partial(e^{2\lambda y})}{\partial y} \int_{\lambda_2-2y}^{-y} e^{-\frac{1}{2T}(u-\lambda T)^2} du dy &= \frac{e^{\frac{\lambda^2 T}{2}}}{2\lambda} \left[ e^{2\lambda y} \int_{\lambda_2-2y}^{-y} e^{-\frac{1}{2T}(u-\lambda T)^2} du \right]_{\lambda_1}^{+\infty} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& e^{\frac{\lambda^2 T}{2}} \frac{1}{2\lambda} \left( - \int_{\lambda_1}^{+\infty} e^{2\lambda y} e^{-\frac{1}{2T}(y+\lambda T)^2} dy + 2 \int_{\lambda_1}^{+\infty} e^{2\lambda y} e^{-\frac{1}{2T}(2y-\lambda_2+\lambda T)^2} dy \right) \\
&= \frac{e^{\frac{\lambda^2 T}{2}}}{2\lambda} \left( -e^{2\lambda\lambda_1} \int_{\lambda_2-2\lambda_1}^{-\lambda_1} e^{-\frac{1}{2T}(u-\lambda T)^2} du + e^{-2\lambda^2 T} \int_{\lambda_1+\lambda T}^{+\infty} e^{2\lambda u - \frac{u^2}{2T}} du \right) \\
&-e^{\frac{\lambda^2 T}{2}} \frac{1}{2\lambda} e^{\lambda(\lambda_2-\lambda T)} \int_{2\lambda_1-\lambda_2+\lambda T}^{+\infty} e^{\lambda u - \frac{u^2}{2T}} du = -\frac{e^{\frac{\lambda^2 T}{2}+2\lambda\lambda_1}}{2\lambda} \sqrt{T} \int_{\frac{\lambda_2-2\lambda_1-\lambda T}{\sqrt{T}}}^{\frac{-\lambda_1-\lambda T}{\sqrt{T}}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds \\
&+ \frac{e^{\frac{\lambda^2 T}{2}}}{2\lambda} \int_{\lambda_1+\lambda T}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2T}(u-2\lambda T)^2} du - \frac{e^{\lambda\lambda_2}}{2\lambda} \int_{2\lambda_1-\lambda_2+\lambda T}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2T}(u-\lambda T)^2} du \\
&= -\frac{e^{\frac{\lambda^2 T}{2}+2\lambda\lambda_1}}{2\lambda} \sqrt{2\pi T} \left( F\left(\frac{-\lambda_1-\lambda T}{\sqrt{T}}\right) - F\left(\frac{\lambda_2-2\lambda_1-\lambda T}{\sqrt{T}}\right) \right) \\
&+ \frac{e^{\frac{\lambda^2 T}{2}}}{2\lambda} \sqrt{T} \int_{\frac{\lambda_1-\lambda T}{\sqrt{T}}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds - \frac{e^{\lambda\lambda_2}}{2\lambda} \sqrt{T} \int_{\frac{2\lambda_1-\lambda_2}{\sqrt{T}}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds \\
&= -\frac{e^{\frac{\lambda^2 T}{2}+2\lambda\lambda_1}}{2\lambda} \sqrt{2\pi T} \left( F\left(\frac{-\lambda_1-\lambda T}{\sqrt{T}}\right) - F\left(\frac{\lambda_2-2\lambda_1-\lambda T}{\sqrt{T}}\right) \right) \\
&+ \frac{e^{\frac{\lambda^2 T}{2}}}{2\lambda} \sqrt{2\pi T} F\left(\frac{\lambda T - \lambda_1}{\sqrt{T}}\right) - \frac{e^{\lambda\lambda_2}}{2\lambda} \sqrt{2\pi T} F\left(\frac{\lambda_2-2\lambda_1}{\sqrt{T}}\right)
\end{aligned}$$

Και ομοίως:

$$\begin{aligned}
& \int_{\lambda_1}^{+\infty} \int_{\lambda_2}^y e^{(\lambda+\sigma)z - \frac{1}{2T}(z-2y)^2} dz dy = -\frac{e^{\frac{(\lambda+\sigma)^2 T}{2} + 2(\lambda+\sigma)\lambda_1}}{2(\lambda+\sigma)} \times \\
& \sqrt{2\pi T} \left( F\left(\frac{-\lambda_1 - (\lambda+\sigma)T}{\sqrt{T}}\right) - F\left(\frac{\lambda_2 - 2\lambda_1 - (\lambda+\sigma)T}{\sqrt{T}}\right) \right) + \\
& \frac{e^{\frac{(\lambda+\sigma)^2 T}{2}}}{2(\lambda+\sigma)} \sqrt{2\pi T} F\left(\frac{(\lambda+\sigma)T - \lambda_1}{\sqrt{T}}\right) - \frac{e^{(\lambda+\sigma)\lambda_2}}{2(\lambda+\sigma)} \sqrt{2\pi T} F\left(\frac{\lambda_2 - 2\lambda_1}{\sqrt{T}}\right)
\end{aligned}$$

Τα υπόλοιπα ολοκληρώματα της σχέσης (4), υπολογίζονται είτε άμεσα είτε σχεδόν άμεσα με αλλαγές μεταβλητής παρόμοιες με αυτές που κάναμε στους παραπάνω υπολογισμούς. Έτσι η σχέση (4) δίνει τελικά:

$$\begin{aligned}
Y_B(0) &= 2Ae^{\frac{(\lambda+\sigma)^2 T}{2}} F\left(\frac{-\lambda_1 + (\lambda + \sigma)T}{\sqrt{T}}\right) - Ae^{(\lambda+\sigma)\lambda_2} F\left(\frac{\lambda_2 - 2\lambda_1}{\sqrt{T}}\right) \\
&+ Ae^{\frac{(\lambda+\sigma)^2 T}{2} + 2(\lambda+\sigma)\lambda_1} \left( F\left(\frac{-\lambda_1 - (\lambda + \sigma)T}{\sqrt{T}}\right) - F\left(\frac{\lambda_2 - 2\lambda_1 - (\lambda + \sigma)T}{\sqrt{T}}\right) \right) \\
&\quad - Ae^{\frac{(\lambda+\sigma)^2 T}{2}} F\left(\frac{(\lambda + \sigma)T - \lambda_1}{\sqrt{T}}\right) + Ae^{(\lambda+\sigma)\lambda_2} F\left(\frac{\lambda_2 - 2\lambda_1}{\sqrt{T}}\right) \\
&\quad - 2K^* F\left(\frac{-\lambda_1 + \lambda T}{\sqrt{T}}\right) + Be^{\lambda\lambda_2} F\left(\frac{\lambda_2 - 2\lambda_1}{\sqrt{T}}\right) - K^* e^{2\lambda\lambda_1} F\left(\frac{-\lambda_1 - \lambda T}{\sqrt{T}}\right) \\
&\quad + K^* e^{2\lambda\lambda_1} F\left(\frac{\lambda_2 - 2\lambda_1 - \lambda T}{\sqrt{T}}\right) + K^* F\left(\frac{\lambda T - \lambda_1}{\sqrt{T}}\right) - Be^{\lambda\lambda_2} F\left(\frac{\lambda_2 - 2\lambda_1}{\sqrt{T}}\right)
\end{aligned}$$

Κάνοντας αντικατάσταση των  $A, B, K^*, \lambda, \lambda_1, \lambda_2$  και πράξεις, γίνονται αρκετές απλοποιήσεις και προκύπτει ότι η δίκαιη τιμή για το Up and In Barrier Call Option τη στιγμή  $t = 0$  είναι:

$$Y_B(0) = X(0)F(-f_1(M, X(0))) - Ke^{-rT}F(-f_2(M, X(0))) +$$

$$\left(\frac{M}{X(0)}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}} M (F(f_1(X(0), M)) - F(f_1(X(0)K, M^2))) -$$

$$\left(\frac{M}{X(0)}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}} \frac{X(0)Ke^{-rT}}{M} (F(f_2(X(0), M)) - F(f_2(X(0)K, M^2)))$$

όπου  $f_1(x, y) = \frac{\ln(\frac{x}{y}) - (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$ ,  $f_2(x, y) = \frac{\ln(\frac{x}{y}) - (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$  και  $F$  κατά τα γνωστά η συνάρτηση κατανομής της τυποποιημένης κανονικής κατανομής.

## 5. Εισαγωγή στη Μέθοδο Monte Carlo

Με αυτό το κεφάλαιο ξεκινάει το υπολογιστικό κομμάτι της εργασίας. Η μέθοδος Monte Carlo αποτελεί μια πολύ ισχυρή μέθοδο προσέγγισης ποσοτήτων που δεν μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά, η οποία στηρίζεται στους ασυμπτωτικούς νόμους της Θεωρίας Πιθανοτήτων. Η μέθοδος είναι απλή: υπολογίζουμε προσεγγιστικά μέσες τιμές αλλά και μη υπολογίσιμα ολοκληρώματα τα οποία ανάγονται σε μέσες τιμές τυχαίων μεταβλητών με γνωστές κατανομές, χρησιμοποιώντας δειγματικούς μέσους τυχαίων δειγμάτων από τις κατανομές αυτές. Θυμίζουμε ότι με βάση τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών, αν έχουμε μια ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών  $X_1, X_2, \dots, X_n$  από μια κατανομή με μέση τιμή  $\mu$  και διασπορά  $\sigma^2$ , αν η κατανομή αυτή ικανοποιεί κάποιες προϋποθέσεις που ισχύουν για τις πιο κλασικές κατανομές, τότε ισχύει:

$$Y_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \rightarrow \mu$$

με πιθανότητα 1. Έτσι για μεγάλες τιμές του  $n$  το  $Y_n$  είναι μια καλή προσέγγιση του  $\mu$ . Από το κεντρικό οριακό θεώρημα έχουμε ότι

$$Y_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

προσεγγιστικά για μεγάλα  $n$ , οπότε έτσι βλέπουμε ότι η μέθοδος αυτή έχει ένα σημαντικό πλεονέκτημα: Όσο βελτιώνουμε την προσέγγιση, το σφάλμα αυτής συγκλίνει στο 0, όχι πολύ γρήγορα μεν, αλλά με ταχύτητα η οποία δεν εξαρτάται από τη διάσταση του προβλήματος. Έστερα όμως από μια σύντομη περιγραφή, ο καλύτερος τρόπος για να κατανοήσουμε καλά μια μέθοδο, είναι να δούμε μερικά παραδείγματα:

### Παράδειγμα 1:

Έστω  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  συνάρτηση Riemann ολοκληρώσιμη. Να υπολογιστεί προσεγγιστικά το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^1 f(x) dx$$

### Λύση:

Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα μηχανισμό ο οποίος επιλέγει σημεία από το διάστημα  $[0, 1]$ , με ομοιόμορφο και τυχαίο τρόπο. Αυτό φαίνεται αδύνατο για έναν υπολογιστή. Όμως αυτό που μας ενδιαφέρει εδώ είναι να επαληθευτούν ικανοποιητικά οι ασυμπτωτικοί νόμοι της Θεωρίας Πιθανοτήτων, χωρίς να έχουμε απαραίτητα

τυχαιότητα στην επιλογή των σημείων αυτών. Το τελευταίο είναι εφικτό χρησιμοποιώντας τους λεγόμενους 'μηχανισμούς παραγωγής ψευδοτυχαίων δειγμάτων'. Ένας τέτοιος μηχανισμός θα μπορούσε να είναι η καταγραφή ενός αριθμήσιμου και πυκνού στο  $[0, 1]$  συνόλου, όπως πχ το σύνολο των ρητών στο διάστημα αυτό. Για περισσότερα σχετικά με το θέμα αυτό παραπέμπουμε στο [4]. Έστω λοιπόν ότι έχουμε έναν τέτοιο μηχανισμό ο οποίος επιλέγει μια ακολουθία αριθμών:

$$U_1, U_2, U_3, \dots, U_n \in [0, 1]$$

Ο Ισχυρός Νόμος των Μεγάλων Αριθμών μας λέει ότι:

$$I_n = \frac{f(U_1) + f(U_2) + \dots + f(U_n)}{n} \rightarrow I$$

με πιθανότητα 1 όταν  $n \rightarrow +\infty$ . Άρα για μεγάλες τιμές του  $n$  έχουμε πολύ καλές προσεγγίσεις για το  $I$ . Μένει να εκτιμήσουμε το σφάλμα της προσέγγισης και την ταχύτητα σύγκλισης αυτού στο 0, ώστε να ξέρουμε για πόσο μεγάλες τιμές του  $n$  έχουμε ικανοποιητικές προσεγγίσεις. Ας υποθέσουμε ότι η  $f$  είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη και έστω:

$$\sigma_f^2 = \int_0^1 (f(x) - I)^2 dx$$

Από το κεντρικό οριακό θεώρημα, έχουμε ότι για σχετικά μεγάλο  $n$  (πχ  $n \geq 30$ ), μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ποσότητα  $I_n$  ακολουθεί κανονική κατανομή  $N\left(I, \frac{\sigma_f^2}{n}\right)$ , ενώ μπορούμε είτε να εκτιμήσουμε το  $\sigma_f$  από την ποσότητα:

$$s_f = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (f(U_k) - I_n)^2}{n - 1}}$$

ή ακόμα καλύτερα να το φράξουμε από μια γνωστή ποσότητα (για παράδειγμα:  $\int_0^1 (f(x) - I)^2 dx \leq 2 \int_0^1 (f^2(x) + I^2) dx = 2 \int_0^1 f^2(x) dx + 2(\int_0^1 f(x) dx)^2 \leq 2 \int_0^1 |f|_\infty^2 dx + 2(\int_0^1 |f|_\infty dx)^2 = 4|f|_\infty^2$ , αν η  $f$  είναι φραγμένη). Έτσι έχουμε μια καλή εκτίμηση του άγνωστου σφάλματος, την οποία μπορούμε να κάνουμε όσο μικρή θέλουμε, επιλέγοντας κατάλληλα μεγάλο  $n$ .

Αν αντί για την παραπάνω μέθοδο, χρησιμοποιούσαμε κλασικές μεθόδους όπως αυτή του τραπεζίου ή αυτή του Simpson, θα είχαμε σφάλματα που θα πήγαιναν στο 0 με μεγαλύτερη ταχύτητα. Για παράδειγμα, η μέθοδος του τραπεζίου δίνει σφάλμα  $O(n^{-2})$  αντί για  $O(n^{-\frac{1}{2}})$ . Όμως σε όλες αυτές τις μεθόδους, η ταχύτητα σύγκλισης του σφάλματος στο 0 εξαρτάται από τη διάσταση του ολοκληρώματος, πράγμα που μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι δε συμβαίνει με την παραπάνω μέθοδο. Έτσι, αν η διάσταση του ολοκληρώματος είναι  $d$ , μια μη-στοχαστική μέθοδος δίνει σφάλμα της τάξεως του  $n^{-\frac{2}{d}}$ , το οποίο είναι πολύ χειρότερο από αυτό της παραπάνω μεθόδου όταν το  $d$  είναι πολύ μεγάλο. Ειδικά αν το ολοκλήρωμα είναι άπειρης διάστασης (θα συναντήσουμε τέτοια ολοκληρώματα στα επόμενα κεφάλαια), δεν τίθεται καν θέμα σύγκρισης μεταξύ των μεθόδων αυτών.

Γενικά στη μέθοδο Monte Carlo δε μπορούμε να βελτιώσουμε την τάξη μεγέθους του σφάλματος, οπότε όταν δεν μπορούμε να εκτιμήσουμε επαρκώς τις άγνωστες σταθερές που εμπλέκονται (όπως το  $\sigma_f$  στο παραπάνω παράδειγμα), το καλύτερο που μπορούμε να κάνουμε είναι αντικατάσταση αυτών με άλλες που είναι σίγουρα μικρότερες. Συγκεκριμένες μεθόδους για το σκοπό αυτό θα παρουσιάσουμε στο 7ο κεφάλαιο της εργασίας.

### Παράδειγμα 2:

Να βρεθεί μια καλή προσέγγιση του αριθμού  $\pi$ .

#### Λύση:

Η λύση στο συγκεκριμένο πρόβλημα προσέγγισης θα υλοποιηθεί μέσω του Mathematica. Κατά τα γνωστά, επιλέγοντας τυχαία και ομοιόμορφα μιγαδικούς αριθμούς  $z$  από το εσωτερικό του τετραγώνου με κορυφές τα σημεία  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$ , και  $(1, 1)$ , η πιθανότητα να πετύχουμε σημείο στο εσωτερικό του κύκλου  $C$  με κέντρο  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  και ακτίνα  $\frac{1}{2}$  (ο οποίος περιέχεται στο τετράγωνο που αναφέραμε πιο πάνω) ισούται με τη εμβαδόν του κύκλου αυτού, δηλαδή  $\frac{\pi}{4}$ . Άρα αν  $p$  είναι μια καλή προσέγγιση της πιθανότητας αυτής, τότε η ποσότητα  $4p$  είναι μια καλή προσέγγιση του αριθμού  $\pi$ . Έστω ότι επιλέγουμε συνεχώς μιγαδικούς αριθμούς ομοιόμορφα και τυχαία (στην πραγματικότητα ψευδοτυχαία, αφού θα χρησιμοποιήσουμε λογισμικό Mathematica) από το εσωτερικό του τετραγώνου που προαναφέραμε. Τη στιγμή που επιλέγουμε τον  $n$ -ωστό μιγαδικό, θεωρούμε  $A_n$  το πλήθος των μιγαδικών που έχουν επιλεγεί και ανήκουν στο εσωτερικό του κύκλου που αναφέραμε πιο πάνω, τότε από τον Ισχυρό Νόμο των Μεγάλων Αριθμών και σύμφωνα με τα παραπάνω, έχουμε με πιθανότητα 1:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{A_n}{n} = E(I_{\{z \in C\}}) = P(z \in C) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4A_n}{n} = \pi$$

Άρα εκτελώντας το παραπάνω πείραμα στο Mathematica, η τιμή του  $4\frac{A_n}{n}$  που θα παρατηρήσουμε, αναμένεται να είναι μια καλή προσέγγιση του αριθμού  $\pi$ .

Το παραπάνω πείραμα στο Mathematica για  $n = 4000000$ , υλοποιείται με τις παρακάτω 3 εντολές:

1)  $k = 1$  (δίνουμε αρχική τιμή στο μετρητή)

2) For[i = 0, i < 4000000, i++, z = RandomComplex[]; If[Abs[z - (1/2 + I\*1/2)] < 1/2, k++, k = k]] (υπολογίζουμε το  $A_n$ )

3) k/1000000 // N (εμφανίζουμε το  $4\frac{A_n}{n}$  στην οθόνη)

Η εκτέλεση αυτού του πειράματος 4 φορές στο Mathematica, δίνει τα παρακάτω 4 αποτελέσματα:

1) 3.14272

2) 3.1408

3) 3.14148

4) 3.13884

Βλέπουμε πως η παραπάνω διαδικασία μας έδωσε 4 σχετικά καλές προσεγγίσεις του αριθμού  $\pi$ , εκ των οποίων οι 3 πρώτες “πέτυχαν” σωστά τα 3 πρώτα ψηφία (2 δεκαδικά), ενώ η τέταρτη “πέτυχε” σωστά μόνο τα 2 πρώτα ψηφία (1 δεκαδικό). Το ότι πρέπει να πάρουμε πολύ μεγαλύτερο  $n$  για να πετύχουμε καλύτερες προσεγγίσεις, έχει να κάνει με το συμπέρασμα του προηγούμενου παραδείγματος, σύμφωνα με το οποίο η σύγκλιση του σφάλματος της μεθόδου Monte Carlo στο 0 είναι ιδιαίτερα αργή (συγκεκριμένα το σφάλμα είναι  $O(\frac{1}{\sqrt{n}})$ ).

Εκτελέσεις του πειράματος για σημαντικά μεγαλύτερες τιμές του  $n$  δίνουν σχετικά καλύτερες προσεγγίσεις, αλλά απαιτούν υπερβολικά πολύ χρόνο για τον υπολογιστή. Μια εκτέλεση διάρκειας 3 ωρών περίπου, με  $n = 300000000$ , έδωσε την προσέγγιση  $\pi \simeq 3.14169$  με ακρίβεια 4 ψηφίων (3 δεκαδικών). Η βελτίωση της προσέγγισης κατά 1 δεκαδικό ψηφίο ήταν αναμενόμενη, διότι η αύξηση του  $n$  ήταν περίπου της τάξης του  $10^2$ , οπότε με βάση όσα έχουμε δει, η μεταβολή του σφάλματος έπρεπε να είναι της τάξης του  $\frac{1}{\sqrt{10^2}} = 10^{-1}$ .



## 6. Τιμολόγηση με τη Μέθοδο Monte Carlo

### 6.1. Εισαγωγικά

Σε αυτό το κεφάλαιο θα υπολογίσουμε προσεγγιστικά με τη μέθοδο Monte Carlo, τις μέσες τιμές που βρήκαμε στο 3ο κεφάλαιο ότι αντιστοιχούν στις δίκαιες τιμές των πιο γνωστών Δικαιωμάτων Προκαθορισμένης Ωρίμανσης. Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, αυτό θα κάνουμε είναι εκτίμηση των μέσων τιμών με δειγματικούς μέσους. Όταν θα θέλουμε να προσεγγίσουμε την αξία του παραγώγου σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, για να πετύχουμε την καλύτερη δυνατή ακρίβεια θα χρησιμοποιούμε πολύ μεγαλύτερο μέγεθος δείγματος. Θα χρησιμοποιήσουμε όμως τη μέθοδο αυτή και για να προσεγγίσουμε ολόκληρες τροχιές για την ανέλιξη αξίας ενός παραγώγου, με βάση μια δεδομένη τροχιά για την ανέλιξη αξίας μιας μετοχής. Στην περίπτωση αυτή μας ενδιαφέρει κυρίως να επαληθεύσουμε τους τύπους του 4ου κεφαλαίου για τις ανελιξίες αξίας και δε μας ενδιαφέρει τόσο η τέλεια προσέγγιση, οπότε για να εξοικονομούμε χρόνο θα παίρνουμε μέγεθος  $n \approx 1000$  και συχνά θα παρατηρούμε σφάλματα σχετικά μεγάλα. Οι αλγόριθμοι όλοι θα υλοποιηθούν στο λογισμικό Mathematica, για το οποίο μερικές βασικές εντολές περιγράφονται στο Παράρτημα. Όπως έχουμε δει όμως, η κατανομή που εμφανίζεται κυρίως στην τιμολόγηση παραγώγων είναι η κανονική κατανομή. Επομένως, έχοντας στον υπολογιστή έναν αλγόριθμο που παράγει ψευδοτυχαίους αριθμούς από την ομοιόμορφη κατανομή, θα πρέπει να φτιάξουμε έναν αλγόριθμο που να παράγει ψευδοτυχαίους αριθμούς από την κανονική κατανομή. Αυτό μπορεί να γίνει με τη μέθοδο της Αντίστροφης κατανομής, μια μέθοδο με την οποία μπορούμε να φτιάξουμε ψευδοτυχαίους αριθμούς από οποιαδήποτε κατανομή και η οποία βασίζεται σε ένα πολύ απλό αποτέλεσμα:

#### Λήμμα:

Έστω χώρος πιθανότητας  $(\Omega, F, P)$ ,  $X$  τυχαία μεταβλητή με ομοιόμορφη κατανομή στο  $[0, 1]$  και  $F$  η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας κάποιας συνεχούς κατανομής  $D$  (πχ της τυποποιημένης κανονικής κατανομής). Τότε η τυχαία μεταβλητή  $Y = F^{-1}(X)$  ακολουθεί την κατανομή  $D$ .

#### Απόδειξη:

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  έχουμε:

$$P(Y \leq x) = P(F^{-1}(X) \leq x) = P(X \leq F(x)) = F(x)$$

και το ζητούμενο έπεται.

Έτσι αν μπορούμε να φτιάξουμε ψευδοτυχαίους αριθμούς  $U_1, U_2, \dots, U_n$  από την ομοιόμορφη κατανομή στο  $[0, 1]$  και  $F$  είναι η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας της τυποποιημένης κανονικής κατανομής, τότε οι αριθμοί  $F^{-1}(U_1), \dots, F^{-1}(U_n)$  είναι ψευδοτυχαίοι αριθμοί από την τυποποιημένη κανονική κατανομή. Η συνάρτηση  $F^{-1}$  όμως δεν είναι γνωστή, οπότε οι τιμές της υπολογίζονται προσεγγιστικά. Για παράδειγμα, αν θέλουμε να βρούμε το  $u = F^{-1}(x)$ , αυτό προκύπτει ως λύση της εξίσωσης  $F(u) - x = 0$  και μπορεί να υπολογιστεί προσεγγιστικά με τη μέθοδο Newton-Raphson:

$$u_{k+1} = u_k - \frac{F(u_k) - x}{f(u_k)}$$

όπου  $f$  είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυποποιημένης κανονικής κατανομής. Η προσέγγιση του  $u$  είναι το  $u_m$  για κάποιο φυσικό  $m$ , αρχίζοντας από κάποιο  $u_0$ . Η μέθοδος της Αντίστροφης κατανομής είναι ίσως η πιο απλή που υπάρχει για αυτό το σκοπό. Υπάρχουν και άλλες μέθοδοι οι οποίες είναι πιο πολύπλοκες αλλά ίσως και πιο αποτελεσματικές και οι οποίες πάλι από ψευδοτυχαίους αριθμούς της ομοιόμορφης κατανομής, παράγουν ψευδοτυχαίους αριθμούς από άλλες κατανομές. Τέτοιες μέθοδοι είναι η μέθοδος Αποδοχής-Απόρριψης και η μέθοδος του Zigurat, για τις οποίες παραπέμπουμε στο [4] στη βιβλιογραφία. Δε θα αναφερθούμε περισσότερο σε τέτοιες μεθόδους, καθώς το Mathematica υλοποιεί μια ιδιαίτερα αποτελεσματική μέθοδο παραγωγής ψευδοτυχαίων αριθμών από την τυποποιημένη κανονική κατανομή με μια μόνο εντολή.

## 6.2. Τιμολόγηση European Call Option

Έφτασε η ώρα να τιμολογήσουμε το πιο απλό Δικαίωμα Προκαθορισμένης Ωρίμανσης, δηλαδή το European Call Option. Με τους συμβολισμούς του 3ου κεφαλαίου, υποθέτουμε ότι έχουμε μια μετοχή η οποία ικανοποιεί το μοντέλο Black-Scholes με  $X(0) = 40$ ,  $b = 0.5$ ,  $\sigma = 0.07$ ,  $r = 0.00045$ . Υπό το μέτρο πιθανότητας  $Q$ , η ανέλιξη αξίας της μετοχής είναι  $X(t) = 40e^{-0.002t+0.07B_t}$  με  $B_t$  μια τυπική κίνηση Brown. Ποια είναι η δίκαιη τιμή για ένα European Call Option για τη μετοχή αυτή, με χρονική στιγμή ωρίμανσης  $T = 30$  (μέρες) και τιμή άσκησης δικαιώματος  $K = 30$ ; Για αρχή, ας προσομοιώσουμε μια τροχιά της ανέλιξης αξίας της μετοχής στις χρονικές στιγμές  $\{0, 0.5, \dots, 29.5, 30\}$ . Αυτό θα γίνει προσομοιώνοντας τις τιμές μιας τροχιάς της κίνησης Brown  $B_t$  σε αυτές τις χρονικές στιγμές, μέσω των διαδοχικών διαφορών αυτών οι οποίες θα είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με κατανομή  $N(0, 0.5)$ . Ο παρακάτω αλγόριθμος, υλοποιημένος στο Mathematica, μας δίνει μια τέτοια τροχιά στις συγκεκριμένες χρονικές στιγμές:

```

F[t_,y_]:=40*Exp[-0.002*t+0.07*y]
t=0; y=0; L=List[]; LB=List[]
For[i=0,i<61,i++,L=Join[L,List[F[t,y]]];LB=Join[LB,List[y]]t=t+0.5;
y=y+RandomVariate[NormalDistribution[0,Sqrt[0.5]]]]
Labeled[DiscretePlot[L[[2 t + 1]], {t, 0, 30, 0.5}, Joined -> True, AxesLabel
-> {"Time (days)", "Price (Euros)"}, "Fig 1: Simulated path for a stock of
volatility  $\sigma=0.07$  and discount rate  $r=0.0007$ "]

```

Οι τιμές της ανέλιξης αξίας της μετοχής στις χρονικές στιγμές που εξετάζουμε αποθηκεύονται στη λίστα  $L$ , ενώ η λίστα  $LB$  περιέχει τις τιμές της κίνησης Brown που προσομοιώσαμε, καθώς αυτές θα μας χρειαστούν παρακάτω. Η τελευταία εντολή του παραπάνω αλγορίθμου μας δίνει το παρακάτω γράφημα στο οποίο βλέπουμε τη ζητούμενη τροχιά:

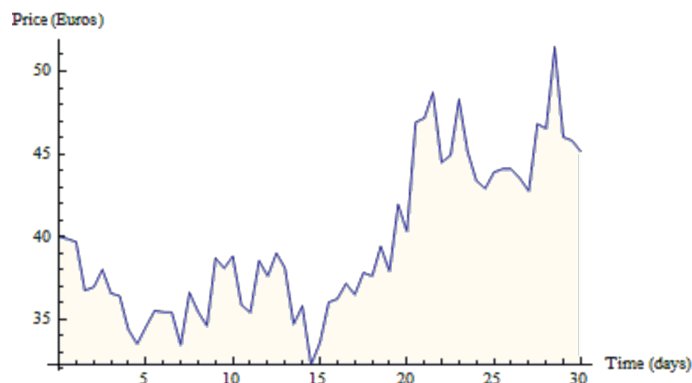


Fig 1: Simulated path for a stock of volatility  $\sigma=0.07$  and discount rate  $r=0.0007$

Η δίκαιη τιμή τώρα για το European Call Option στην τυχαία χρονική στιγμή  $t \in [0, 30]$  είναι:

$$\begin{aligned}
Y(t) &= e^{rt} Y^*(t) = \\
&= \mathbb{E}(e^{-r(T-t)}(X(T) - K)^+ | F_t) = \mathbb{E}(e^{-0.0135}(40e^{-0.06+0.07B_{30}} - 30)^+ | F_t) \\
&= \mathbb{E}(e^{-0.0135+0.00045t}(40e^{-0.06+0.07B_t+0.07N} - 30)^+ | F_t)
\end{aligned}$$

όπου  $N = B_{30} - B_t$  είναι ανεξάρτητο της  $\sigma$ -άλγεβρας  $F_t$  και έχει κατανομή  $N(0, 30-t)$ . Ο παρακάτω αλγόριθμος προσεγγίζει με τη μέθοδο Monte Carlo την

παραπάνω μέση τιμή για κάθε  $t \in \{0, 0.5, \dots, 29.5\}$ , με βάση την κίνηση Brown και την ανάλυση αξίας της μετοχής που προσομοιώσαμε παραπάνω, και βάζει τις τιμές που προκύπτουν στη λίστα *LMC*:

```
LMC=List[];t=0
For[i=0,i<60,i++,S=0;For[j=0,j<1000,j++,W=Exp[-0.0135+0.00045*t]*
(F[30,RandomVariate[NormalDistribution[0,Sqrt[30-t]]]+LB[[i+1]]-30)/
1000; If[W>0,S=S+W]];LMC=Append[LMC,S];t=t+0.5]
```

Για να κάνουμε συγκρίσεις, θα πρέπει να υπολογίσουμε και θεωρητικά τη δίκαιη τιμή του European Call Option σε κάθε  $t \in \{0, 0.5, \dots, 29.5\}$ . Η δίκαιη τιμή τη χρονική στιγμή  $t = 0$ , όπως έχουμε δει θα δίνεται από τον τύπο:

$$Y(0) = X(0)F\left(-\frac{\ln\left(\frac{K^*}{X(0)}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2}\right) - K^*F\left(-\frac{\ln\left(\frac{K^*}{X(0)}\right)}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{\sigma\sqrt{T}}{2}\right)$$

Παίρνοντας ως αρχικές χρονικές στιγμές κάποιες μεταγενέστερες, μέσω μιας απλής μεταφοράς κατά  $t$ , μπορούμε να αποφανθούμε ότι η δίκαιη τιμή στην τυχαία χρονική στιγμή  $t < 30$  είναι:

$$Y(t) = X(t)F\left(-\frac{\ln\left(\frac{K^*}{X(t)}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}\right) - K^*F\left(-\frac{\ln\left(\frac{K^*}{X(t)}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} - \frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}\right)$$

με  $K^* = e^{-r(T-t)}K = 30e^{-0.0135+0.00045t}$ . Ακολουθεί ένας αλγόριθμος που υπολογίζει τη δίκαιη τιμή του European Call Option σε κάθε  $t \in \{0, 0.5, \dots, 29.5\}$ , βάζει τα αποτελέσματα σε μια λίστα *LT*, και κάνει σύγκριση με τα αντίστοιχα προσεγγιστικά αποτελέσματα που έδωσε ο προηγούμενος αλγόριθμος:

```
LT=List[];U=0;t=0
For[i=0,i<60,i++,U=L[[i+1]]*CDF[NormalDistribution[],(0.0135-0.00045t+
Log[L[[i+1]]-Log[30])]/(0.07Sqrt[30-t])+0.035Sqrt[30-t]]-30Exp[-0.0135+
0.00045t]*CDF[NormalDistribution[],(0.0135-0.00045t+Log[L[[i+1]]-
Log[30])]/(0.07Sqrt[30-t])-0.035Sqrt[30-t]];LT=Append[LT,U];t=t+0.5]
Labeled[ListPlot[{Table[{i/2, LMC[[i]]}, {i, 1, 60}], Table[{i/2, LT[[i]]},
{i, 1, 60}], PlotLegend -> {"Monte Carlo Values", "Theoretical Values"},
LegendPosition -> {1, -0.2}, AxesLabel -> {"Time (days)", "Price (Euros)"}],
"Fig 2: Theoretical and Estimated Price Processes for a European Call Option
for a given stock path of volatility  $\sigma=0.07$  and discount rate  $r=0.00045$ . Strike
Price: 30 euros, Strike time at: 30 days"]
```

Η τελευταία εντολή εμφανίζει το παρακάτω γράφημα, στο οποίο οι ροζ κουκκίδες παριστάνουν τις θεωρητικές τιμές της ανέλιξης αξίας του European Call Option στις χρονικές στιγμές που εξετάσαμε, ενώ οι αντίστοιχες μπλε κουκκίδες παριστάνουν τις αντίστοιχες Monte Carlo προσεγγίσεις των τιμών αυτών:

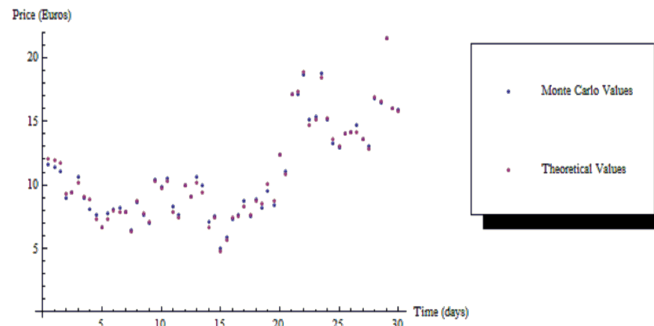


Fig 2: Theoretical and Estimated Price Processes for a European Call Option for a given stock path of volatility  $\sigma=0.07$  and discount rate  $r=0.00045$ .  
Strike Price: 30 euros, Strike time at: 30 days

Βλέπουμε λοιπόν ότι η μέθοδος Monte Carlo προσεγγίζει την θεωρητική αξία του παραγώγου σε κάθε χρονική στιγμή με αρκετά μεγάλη ακρίβεια.

Όπως είδαμε η θεωρητική δίκαιη τιμή για  $t = 0$  είναι 12.0115 (ευρώ). Με τον παρακάτω αλγόριθμο προσεγγίζουμε την αξία του παραγώγου αυτού στη συγκεκριμένη χρονική στιγμή, αλλά με πολύ μεγαλύτερο μέγεθος δείγματος έτσι ώστε να φανεί η καλύτερη δυνατή προσέγγιση που μπορούμε να πετύχουμε:

```
S=0
For[j=0,j<10000000,j++,W=Exp[-0.0135]*(F[30, RandomVariate[
NormalDistribution[0,Sqrt[30]]]-30)/10000000; If[W>0,S=S+W]]
```

Το αποτέλεσμα που παίρνουμε είναι 12.0108, δηλαδή έχουμε μια εξαιρετική ακρίβεια 4 ψηφίων.

### 6.3. Τιμολόγηση Geometric Asian Call Option

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με την τιμολόγηση Asian Options, αρχίζοντας από ένα Geometric Asian Call Option για την ίδια μετοχή με  $m = 8$  και ξανά  $K = 30$ . Έχοντας προσομοιώσει μια τροχιά της ανέλιξης αξίας της μετοχής αυτής, θα προσομοιώσουμε την αντίστοιχη τροχιά της ανέλιξης αξίας του παραγώγου αυτού για  $t \in \{0, 0.5, \dots, 22.5\}$ . Θυμίζουμε ότι η δίκαιη τιμή τη χρονική στιγμή 0 είναι:

$$Y_G(0) = X(0)e^{-\frac{\sigma^2(m+1)}{4} - r\frac{m-1}{2} + \frac{\sigma^2(m+1)(2m+1)}{12m}} F(D_2 - D_1) - Ke^{-rT} F(-D_1)$$

όπου:

$$D_1 = \frac{\ln\left(\frac{K}{X(0)}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\left(T - \frac{m-1}{2}\right)}{\frac{\sigma}{m}\sqrt{\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + Tm^2 - m^3}}$$

και  $D_2 = \frac{\sigma}{m}\sqrt{\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + Tm^2 - m^3}$ , ενώ με απλή μεταφορά κατά  $t$ , όπως και στην περίπτωση του European Call Option, μπορούμε να αποφανθούμε ότι η αξία του Geometric Asian Call Option την τυχαία χρονική στιγμή  $t < T - m + 1$  είναι:

$$Y(t) = X(t)e^{-\frac{\sigma^2(m+1)}{4} - r\frac{m-1}{2} + \frac{\sigma^2(m+1)(2m+1)}{12m}} F(D_2 - D_1) - Ke^{-r(T-t)} F(-D_1)$$

όπου:

$$D_1 = \frac{\ln\left(\frac{K}{X(t)}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\left(T - t - \frac{m-1}{2}\right)}{\frac{\sigma}{m}\sqrt{\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + (T-t)m^2 - m^3}}$$

και  $D_2 = \frac{\sigma}{m}\sqrt{\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + (T-t)m^2 - m^3}$ . Η τιμολόγηση για  $t \geq T - m + 1$  δεν διαφέρει ιδιαίτερα ούτε έχει κανένα ιδιαίτερο ενδιαφέρον, οπότε δεν θα μας απασχολήσει. Ο παρακάτω αλγόριθμος υπολογίζει τη θεωρητική αξία του Asian Option που εξετάζουμε στις χρονικές στιγμές  $t \in \{0, 0.5, \dots, 22.5\}$ , όταν η ανέλιξη αξίας της μετοχής είναι αυτή που προσομοιώσαμε, και βάζει τα αποτελέσματα στη λίστα  $LT$ :

```
LT=List[]; U=0; t=0
For[i=0,i<46,i++,D1=0.07/8*sqrt[8*9*17/6+(30-t)*64-8*64];D2=
(Log[30/L[[i+1]]]+0.002*(30-t-3.5))/D1;U=L[[i+1]]*Exp[-(0.07)^2*9/4-
0.00045*7/2+(0.07)^2*9*17/96]*CDF[NormalDistribution[],-D2+D1]-
30*Exp[-0.00045*(30-t)]*CDF[NormalDistribution[],-D2];
LT=Append[LT,U];t=t+0.5]
```

Υλοποιούμε τώρα τον αλγόριθμο που υπολογίζει προσεγγιστικά με τη μέθοδο Monte Carlo, την αξία του παραγώγου αυτού στις ίδιες χρονικές στιγμές, ξανά δεδομένου ότι παρατηρείται η προσομοιωμένη τροχιά για την ανέλιξη αξίας της μετοχής. Στη συνέχεια ο αλγόριθμος αυτός θα κάνει σύγκριση με τα θεωρητικά αποτελέσματα του προηγούμενου αλγορίθμου. Η αξία του Geometric Asian Call Option τη χρονική στιγμή  $t < T - m + 1$ , δίνεται από την παρακάτω δεσμευμένη μέση τιμή:

$$Y(t) = e^{rt} Y^*(t) = \mathbb{E}^Q \left( e^{rt-rT} \left( \sqrt[m]{\prod_{i=0}^{m-1} X(T-i)} - K \right)^+ \mid F_t \right)$$

όταν για κάθε  $i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$  με  $m = 8$  ισχύει:

$$X(T-i) = X(30-i) = 40e^{-0.06+0.002i+0.07(B_i+d(7)+d(6)+\dots+d(i))}$$

όπου οι τυχαίες μεταβλητές:  $d(7) = B_{23} - B_t$  και  $d(i) = B_{30-i} - B_{30-i-1}$  για  $i \in \{0, 1, \dots, 6\}$  είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, ανεξάρτητες της σ-άλγεβρας  $F_t$ , και έχουν κατανομές  $N(0, 23-t)$  και  $N(0, 1)$  αντίστοιχα. Ο ζητούμενος αλγόριθμος υλοποιείται στο Mathematica ως εξής:

```
LMC=List[]; t=0
For[s=0,s<46,s++,S=0;For[j=0,j<1000,j++,d7=RandomVariate[
NormalDistribution[0,Sqrt[23-t]];v=RandomVariate[
NormalDistribution[],7];X[i_]:=F[31-i,Sum[v[[u]],{u,i,7}]
+d7+LB[[s+1]];W=Exp[-0.0135+0.00045*t]((Product[X[i],{i,1,8}])^(1/8)-
30)/1000;If[W>0,S=S+W];LMC=Append[LMC,S];t=t+0.5]

Labeled[ListPlot[{Table[{i/2, LMC[[i]]}, {i, 1, 46}], Table[{i/2, LT[[i]]},
{i, 1, 46}]], PlotLegend -> {"Monte Carlo Values", "Theoretical Values"},
LegendPosition -> {1, -0.2}, AxesLabel -> {"Time (days)", "Price (Euros)"} ],
"Fig 3: Theoretical and Estimated Price Processes for a Geometric Asian Call
Option for a given stock path of volatility  $\sigma=0.07$  and discount rate  $r=0.00045$ .
Strike Price: 30 euros, Payoff Evaluation times: {23,24,...,29,30}"]
```

Όπως και στην περίπτωση του European Call Option, ο αλγόριθμος που υλοποιούμε εμφανίζει σε ένα γράφημα τις θεωρητικές τιμές της ανέλιξης αξίας του παραγώγου στις διάφορες χρονικές στιγμές (ροζ κουκκίδες), και τις αντίστοιχες προσεγγιστικές τιμές που δίνει η μέθοδος Monte Carlo (μπλε κουκκίδες). Το γράφημα αυτό της αξίας του παραγώγου ως προς το χρόνο, παρουσιάζεται στην αμέσως επόμενη σελίδα.

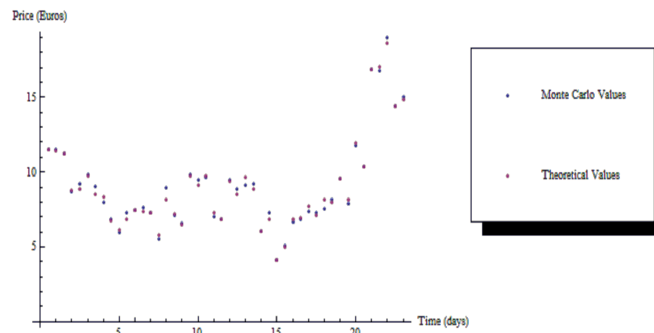


Fig 3: Theoretical and Estimated Price Processes for a Geometric Asian Call Option for a given stock path of volatility  $\sigma=0.07$  and discount rate  $r=0.00045$ .  
Strike Price: 30 euros, Payoff Evaluation times: {23,24,...,29,30}

Παρατηρούμε ότι και πάλι η ακρίβεια της προσέγγισης είναι πολύ καλή, ενώ όπως και στην περίπτωση του European Call Option, έτσι και εδώ αν υπολογίσουμε την αξία για  $t = 0$  θεωρητικά και με Monte Carlo με πολύ μεγάλο μέγεθος δείγματος, θα δούμε ότι η ακρίβεια είναι εξαιρετική:

```
S=0
For[j=0,j<10000000,j++,d7=RandomVariate[NormalDistribution[0,Sqrt[23]]];
v=RandomVariate[NormalDistribution[],7];X[i_]:=F[31-i,Sum[v[[u]],
{u,i,7}]+d7];W=Exp[-0.0135]((Product[X[i],{i,1,8}]^(1/8)-30)/10000000;
If[W>0,S=S+W]]
```

Ο παραπάνω αλγόριθμος μας εμφανίζει μια Monte Carlo προσέγγιση της θεωρητικής αρχικής δίκαιης τιμής  $LT[[1]]=11.54$ , χρησιμοποιώντας δείγμα μεγέθους  $n = 10000000$ . Η προσεγγιστική τιμή που προκύπτει είναι: 11.5461. Βλέπουμε λοιπόν ότι έχουμε και πάλι ακρίβεια 4 ψηφίων!

#### 6.4. Τιμολόγηση Arithmetic Asian Call Option

As θεωρήσουμε τώρα ένα Arithmetic Asian Call Option, το οποίο διαφέρει από το Geometric μόνο στο ότι τη θέση του γεωμετρικού μέσου που εμφανίζεται εντός του θετικού μέρους εντός της μέσης τιμής, την παίρνει ο αντίστοιχος αριθμητικός μέσος. Έχουμε λοιπόν ότι για την ανέλιξη αξίας  $Y_A(t)$  του παραγώγου αυτού ισχύει:



$$Y_A(t) = \mathbb{E}^Q \left( e^{-rT} \left( \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} X(T-i) - K \right)^+ \mid F_t \right)$$

Ο υπολογισμός αυτής της μέσης τιμής όμως, είναι μάλλον αδύνατος για μεγάλα  $n$ , οπότε η προσεγγιστική τιμολόγηση με τη μέθοδο Monte Carlo είναι μάλλον μονόδρομος. Επίσης, επειδή δεν γνωρίζουμε τις θεωρητικές τιμές, για να έχουμε μια εικόνα του πόσο καλή είναι η προσέγγιση, θα πρέπει να εκτιμήσουμε τις τάξεις των σφαλμάτων. Άρα λοιπόν, με την εκτέλεση του πειράματος Monte Carlo σε κάθε χρονική στιγμή, θα χρειαστούμε τώρα και την τυπική απόκλιση  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{1000}}$  του σφάλματος, όπου με βάση το προηγούμενο κεφάλαιο το  $\sigma$  εκτιμάται από την ποσότητα:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n})^2}{n-1}}$$

με  $n = 1000$  και  $\{x_i : i = 1, 2, \dots, 1000\}$  το σύνολο των παρατηρήσεων. Εύκολα ισχύει:

$$s = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n x_k^2}{n} - \left( \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} \right)^2}$$

το οποίο είναι πιο εύχρηστο στους υπολογισμούς. Ακολουθεί τώρα μια τροποποίηση του αλγόριθμου Monte Carlo για το Geometric Option, η οποία προσεγγίζει τις τιμές της ανέλιξης αξίας του Arithmetic Asian Call Option και τις βάζει πάλι σε μια λίστα *LMC*, ενώ στη λίστα *SE* βάζει τις εκτιμήσεις των τυπικών αποκλίσεων των αντίστοιχων σφαλμάτων. Στο τέλος, ο αλγόριθμος αυτός μας εμφανίζει ένα γράφημα στο οποίο εμφανίζονται τα προσεγγιστικά αποτελέσματα μαζί με τις εκτιμήσεις των αντίστοιχων σφαλμάτων:

```
LMC=List[];SE=List[];t=0
For[s=0,s<46,s++,S=0;S2=0;For[j=0,j<1000,j++,d7= RandomVariate[
NormalDistribution[0,Sqrt[23-t]];v=RandomVariate[NormalDistribution[],7];
X[i_]:=F[30-i,Sum[v[[u]],{u,i,7}]+d7+LB[[s+1]]];W=Exp[-0.0135]*
((Sum[X[i],{i,1,8}])/8-30);If[W<0,W=0];S=S+W/1000;S2=S2+W^2/1000];
LMC= Append[LMC,S];SE=Append[SE,(1000/999*(S2-S^2))^(1/2)/
Sqrt[1000]];t=t+0.5]

Labeled[ErrorListPlot[ Table[{i/2, LMC[[i]]}, ErrorBar[SE[[i]]],
{i, 1, 46}], AxesLabel -> {"Time (days)", "Price (Euros)"}, "Fig 4: Estimated
Price Process for an Arithm. Asian Call Option for a given stock path of
volatility  $\sigma=0.07$  and discount rate  $r=0.00045$ . Strike Price: 30 euros, Payoff
Evaluation times: {23, 24, ..., 29, 30}"]
```

Το γράφημα που εμφανίζει ο αλγόριθμος αυτός είναι το ακόλουθο:

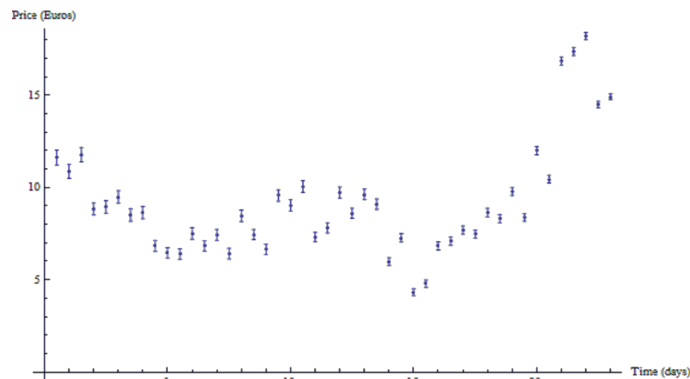


Fig 4: Estimated Price Process for an Arithm. Asian Call Option for a given stock path of volatility  $\sigma=0.07$  and discount rate  $r=0.00045$ . Strike Price: 30 euros, Payoff Evaluation times: {23, 24, ..., 29, 30}

Παρατηρούμε ότι οι εκτιμήσεις των σφαλμάτων είναι πολύ μικρές σε σχέση με τις προσεγγιστικές τιμές, πράγμα που σημαίνει ότι και πάλι η προσέγγιση είναι πολύ καλή. Το ότι τα σφάλματα μειώνονται καθώς πλησιάζουμε στη στιγμή  $T = 30$ , οφείλεται στο ότι η διασπορά της εκτιμήτριας είναι αύξουσα συνάρτηση του  $T - t$ . Παρατηρούμε επίσης ότι οι προσεγγιστικές τιμές δεν διαφέρουν ιδιαίτερα σε σχέση με αυτές του Geometric Asian Call Option. Το τελευταίο έχει να κάνει με το ότι τα δύο παράγωγα είναι της ίδιας φύσης και θα παίξει σημαντικό ρόλο στο επόμενο κεφάλαιο, όπου θα παρουσιάσουμε μια τεχνική ελάττωσης διασποράς η οποία χρησιμοποιεί το Geometric Asian Option για να ελαττώσει τη διασπορά που έχουμε στην τιμολόγηση του Arithmetic Asian Call Option.

## 6.5. Τιμολόγηση Lookback Put Option

Θα προχωρήσουμε τώρα στην τιμολόγηση των πιο σύνθετων παραγώγων που έχουμε αναφέρει, τα οποία είναι το Standard Lookback Put Option και το Up and In Barrier Call Option. Θα δουλέψουμε με την ίδια μετοχή αλλά θα προσομοιώσουμε νέες τροχιές για την ανέλιξη αξίας αυτής με διαφορετικούς τρόπους, καθώς πλέον μας ενδιαφέρουν οι μέγιστες τιμές αυτής σε συνεχείς τροχιές σε διάφορα υποδιαστήματα χρόνου. Στην τιμολόγηση του Lookback Option, θα προσομοιώσουμε τις τροχιές που θέλουμε κάνοντας απλά πολύ μικρότερες διαμερίσεις στα χρονικά διαστήματα, ώστε να πετύχουμε μια ικανοποιητική προσέγγιση του συνεχούς. Η προσομοίωση της τροχιάς με βάση την οποία θα εξετάσουμε τις ανελιζόμενες αξίες των παραγώγων που θα δούμε από εδώ και πέρα, γίνεται με τον

αλγόριθμο που ακολουθεί. Ο αλγόριθμος αυτός κρατάει σε μια λίστα  $L2$  τις τιμές που προσομοιώνονται μόνο για  $t \in \{0, 0.5, \dots, 30\}$ , ενώ στη λίστα  $MList$  βάζει για κάθε τέτοιο  $t$ , τη μέγιστη τιμή που παρατηρούνται μέχρι τη στιγμή  $t$ .

```
M=0; t=0; y=0; L=List[]; LB=List[]; L2=List[]; MList=List[]

For[i=0,i<30001,i++,u=F[t,y];L=Append[L,u];LB=Append[LB,y];If[u>M,
M=u];If[IntegerQ[i/500],L2=Append[L2, u];MList=Append[MList,M]];
t=t+0.001;y=y+RandomVariate[NormalDistribution[0, Sqrt[0.001]]]]

Labeled[DiscretePlot[L[[1000 t + 1]], {t, 0, 30, 0.001}, Joined -> True,
AxesLabel -> {"Time (days)", "Price (Euros)"}], "Fig 5: Simulated path for
a stock of volatility  $\sigma=0.07$  and discount rate  $r=0.0007$ , with very small step"]
```

Η τελευταία εντολή μας εμφανίζει την τροχιά που προσομοιώνει ο αλγόριθμος:

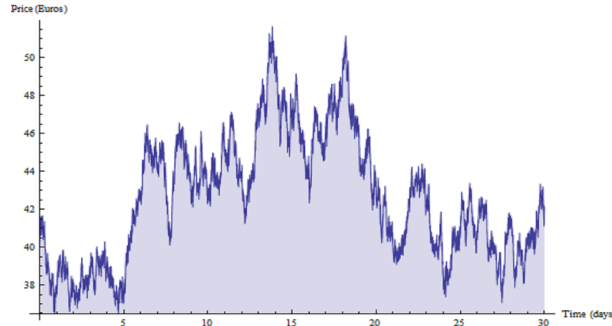


Fig 5: Simulated path for a stock of volatility  $\sigma=0.07$  and discount rate  $r=0.0007$ , with very small step

Πάμε τώρα στην τιμολόγηση του Standard Lookback Put Option το οποίο, με τους συμβολισμούς του κεφαλαίου 4, τη χρονική στιγμή  $t < T$  έχει αξία:

$$Y_{LP}(t) = e^{rt} Y_{LP}^*(t) = -e^{-r(T-t)} X(t) \left( \frac{G(t)}{X(t)} \right)^{\frac{2r}{\sigma^2}} \frac{\sigma^2}{2r} F(a_1) +$$

$$e^{-r(T-t)} G(t) F(a_2) + X(t) \frac{\sigma^2}{2r} F(a_3) - X(t) F(-a_3)$$

όπου:

$$a_1 = -\frac{\ln\left(\frac{G(t)}{X(t)}\right) + (T-t)\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$a_2 = \frac{\ln\left(\frac{G(t)}{X(t)}\right) - (T-t)\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$a_3 = -\frac{\ln\left(\frac{G(t)}{X(t)}\right) - (T-t)\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Ο παρακάτω αλγόριθμος υπολογίζει και βάζει σε μια λίστα  $LT$ , τις θεωρητικές τιμές της ανέλιξης αξίας ενός Standard Lookback Put Option στις χρονικές στιγμές  $t$  με  $t \in \{0, 0.5, \dots, 29.5\}$ , όταν η τροχιά της ανέλιξης αξίας της μετοχής που παρατηρείται είναι αυτή που προσομοιώσαμε παραπάνω:

```
t=0; LT=List[]
For[i=0,i<60,i++,A1=-(Log[MList[[i+1]]/L2[[i+1]]]-0.002(30-t))/
(0.07* Sqrt[30-t]);A2=(Log[MList[[i+1]]/L2[[i+1]]]+0.002(30-t))/
(0.07* Sqrt[30-t]);A3=-(Log[MList[[i+1]]/L2[[i+1]]]+(0.002 - (0.07)^2)(30-t))/
(0.07* Sqrt[30-t]);P=Exp[-0.0135+0.00045t]*(-L2[[i+1]]*(MList[[i+1]]/
L2[[i+1]])^(0.0009/(0.07)^2)*(0.07)^2/0.0009*CDF[NormalDistribution[],A1]+
MList[[i+1]]*CDF[NormalDistribution[],A2])+L2[[i+1]]*(0.07)^2/0.0009*
CDF[NormalDistribution[],A3]-L2[[i+1]]*CDF[NormalDistribution[],-A3];
LT=Append[LT,P];t=t+0.5]
```

Για την προσεγγιστική τιμολόγηση του παραγώγου αυτού με Monte Carlo, θυμίζουμε ότι η αξία του τη χρονική στιγμή  $t$ , προέκυψε για κάθε  $t < T$  από τον υπολογισμό της ακόλουθης μέσης τιμής:

$$Y_{LP}(t) = e^{rt} Y_{LP}^*(t) = e^{rt} \mathbb{E}^Q \left( e^{-rT} \left( \max_{0 \leq s \leq T} X(s) - X(T) \right) \mid F_t \right)$$

Θα υλοποιηθεί ένας αλγόριθμος που υπολογίζει τη μέση τιμή αυτή με τη μέθοδο Monte Carlo για κάθε  $t \in \{0, 0.5, \dots, 29.5\}$ , στη συνέχεια βάζει τις τιμές που προκύπτουν στη λίστα  $LMC$ , και τέλος κάνει συγκρίσεις με τα αντίστοιχα θεωρητικά αποτελέσματα που έχουν αποθηκευτεί στη λίστα  $LT$ . Επειδή ο αλγόριθμος αυτός πρέπει να προσομοιώνει συνεχώς τροχιές μιας κίνησης Brown με πολύ μικρές διαμερίσεις, η πολυπλοκότητά του είναι πολύ μεγαλύτερη σε σχέση με αυτή των προηγούμενων αλγορίθμων Monte Carlo που έχουμε δει. Για το λόγο αυτό, θα μειώσουμε τις επαναλήψεις σε κάθε εκτέλεση πειράματος Monte Carlo από 1000 σε  $625 = 25^2$ , πράγμα που με βάση το προηγούμενο κεφάλαιο μπορεί να μειώσει την ακρίβεια των προσεγγίσεων κατά το πολύ 1 ψηφίο. Αρχικά ας παρατηρήσουμε ότι για κάθε  $t < T$  έχουμε:

$$\max_{0 \leq s \leq T} X(s) = \max\left\{ \max_{0 \leq s \leq t} X(s), \max_{t \leq s \leq T} X(s) \right\}$$

οπότε σε κάθε επανάληψη θα γνωρίζουμε το  $\max_{0 \leq s \leq t} X(s)$  και θα πρέπει να προσομοιώνουμε το  $\max_{t \leq s \leq T} X(s)$ , πράγμα που απαιτεί την προσομοίωση μιας τροχιάς της ανέλιξης  $X(s) = X(t)e^{-0.002(s-t)+0.07W_s}$  για  $T \geq s \geq t$ , με  $W_s = B_s - B_t$  που είναι ξανά μια κίνηση Brown ορισμένη για  $T \geq s \geq t$ . Ο αλγόριθμος που θα φτιάξουμε θα υπολογίζει και τα τυπικά σφάλματα, θα τα βάζει σε μια λίστα  $SE$  και θα τα εμφανίζει σε ένα γράφημα μαζί με τα υπόλοιπα αποτελέσματα, ακριβώς όπως έκανε και ο αλγόριθμος Monte Carlo για το Arithmetic Asian Option. Αυτό το χρειαζόμαστε διότι οι αποκλίσεις αναμένονται να είναι σχετικά μεγάλες, καθώς όπως αναφέραμε πιο πάνω, λόγω των λιγότερων επαναλήψεων θα χάσουμε λίγο στην ακρίβεια, ενώ θα έχουμε και ένα επιπλέον σφάλμα λόγω του ότι προσομοιώνουμε συνεχείς τροχιές με πεπερασμένο πλήθος σημείων (σφάλμα διακριτοποίησης). Παρακάτω βλέπουμε το πως υλοποιείται ο αλγόριθμος αυτός στο Mathematica:

```
t=0;LMC=List[];SE=List[]

For[i=0,i<60,i++,S=0;S2=0;F2[s_,y_]:=L2[[i+1]]*Exp[-0.002(s-t)+0.07y];
For[j=0,j<625,j++,s=t;y=0;M=MList[[i+1]];While[s<30.001,If[F2[s,y]>M,M=
F2[s,y];s=s+0.001;y=y+RandomVariate[NormalDistribution[0,Sqrt[0.001]]]];
Pr=Exp[-0.0135]*(M-F2[s,y]);S=S+Pr/625;S2=S2+(Pr)^2/625;t=t+0.5;
LMC=Append[LMC,S];SE=Append[SE,(625/624*(S2-S^2))^(1/2)/25]]

Labeled[ErrorListPlot[{Table[{i/2, LMC[[i]]}, ErrorBar[SE[[i]]], {i, 1, 60}],
Table[{i/2, LT[[i]]}, ErrorBar[0]], {i, 1, 60}]], "Fig 6: Theoretical and
Estimated Price Processes for a Lookback Put Option for a given stock path of
volatility  $\sigma=0.07$  and discount rate  $r=0.00045$ . Strike time at: 30 days" ]
```

Η τελευταία εντολή του αλγορίθμου μας εμφανίζει το παρακάτω γράφημα:

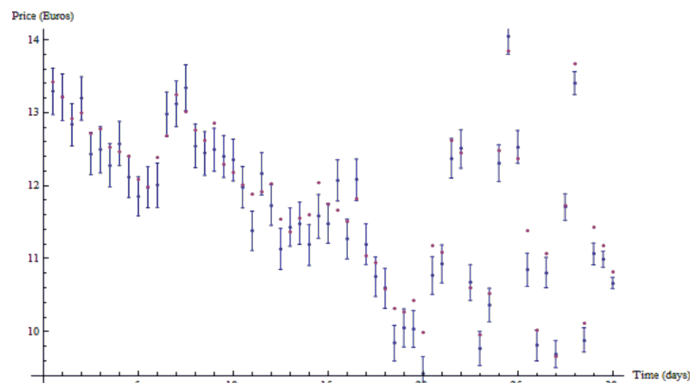


Fig 6: Theoretical and Estimated Price Processes for a Lookback Put Option for a given stock path of volatility  $\sigma=0.07$  and discount rate  $r=0.00045$ . Strike time at: 30 days

Τα τυπικά σφάλματα που παρατηρούνται γύρω από τις προσεγγιστικές δίκαιες τιμές (μπλε κουκκίδες) σε κάθε χρονική στιγμή, είναι αρκετά μεγάλα και σε κάποιες περιπτώσεις φτάνουν περίπου μέχρι και το 7.5% των προσεγγιστικών αποτελεσμάτων. Αν είχαμε χρησιμοποιήσει μεγαλύτερα δείγματα στις εκτελέσεις Monte Carlo, θα είχαμε σίγουρα πολύ μικρότερα τυπικά σφάλματα, αλλά αυτό θα απαιτούσε ακόμα και μέρες λόγω της πολύ μεγάλης πολυπλοκότητας του αλγορίθμου και του αργού επεξεργαστή που έχουμε στη διάθεσή μας. Παρατηρούμε επίσης ότι οι θεωρητικές δίκαιες τιμές του παραγώγου (ροζ κουκκίδες), σε κάποιες χρονικές στιγμές ξεφεύγουν από τα όρια των τυπικών σφαλμάτων. Αυτό οφείλεται στο ότι η διακριτοποίηση που κάναμε έχει ως συνέπεια η εκτιμήτρια Monte Carlo να παύει να είναι αμερόληπτη, ενώ προφανώς αν κάναμε μια πιο λεπτή διαμέριση θα είχαμε μικρότερη μεροληψία και άρα καλύτερες προσεγγίσεις. Υπάρχουν κάποιες μέθοδοι με τις οποίες μειώνουμε τη μεροληψία που προκύπτει από διακριτοποίηση, αλλά αυτές δε θα μας απασχολήσουν σε αυτή την εργασία (για περισσότερα παραπέμπουμε στο [4] στη βιβλιογραφία).

## 6.6. Τιμολόγηση Up and In Barrier Call Option

Για την τιμολόγηση ενός Up and In Barrier Call Option, θα προσομοιώσουμε τροχιές για την ανέλιξη αξίας της μετοχής με την μέθοδο της “Γέφυρας Brown”. Θυμίζουμε ότι στην τιμολόγηση του συγκεκριμένου παραγώγου, το μόνο που μας ενδιαφέρει είναι η τελική τιμή της ανέλιξης αξίας της μετοχής και τον αν αυτή λαμβάνει τιμές μεγαλύτερες από ένα φράγμα, οπότε και το παράγωγο παύει να ισχύει. Η μέθοδος αυτή προσομοιώνει την τροχιά μιας κίνησης Brown σε ένα πεπερασμένο διάστημα με ομοιόμορφο τρόπο, οπότε στις περισσότερες περιπτώσεις ανιχνεύει γρήγορα μια τροχιά που οδηγεί στην παύση της ισχύος του παραγώγου, με αποτέλεσμα να εξοικονομούμε αρκετό χρόνο. Ας δούμε όμως το πως λειτουργεί η συγκεκριμένη μέθοδος: Στο πρώτο βήμα προσομοιώνουμε την τελική τιμή της κίνησης Brown  $B_T$  η οποία έχει κατανομή  $N(0, T)$ . Επαγωγικά, θεωρούμε ότι στο βήμα  $m \geq 1$  έχουμε προσομοιώσει την τροχιά της κίνησης Brown στα ενδιάμεσα

σημεία:  $0 < t_{m,1}, t_{m,2}, \dots, t_{m,k(m)} < T$  με  $k(m) = \sum_{i=1}^{m-1} 2^{i-1}$ , και στα ακραία ση-

μεία  $t_{m,0} = 0$  και  $t_{m,k(m)+1} = T$ . Στο επόμενο βήμα προσομοιώνουμε την τροχιά στα ενδιάμεσα σημεία:  $0 < t_{m+1,1}, t_{m+1,2}, \dots, t_{m+1,k(m+1)} < T$  με  $t_{m+1,2s} = t_{m,s}$  για  $s \in \{1, 2, \dots, k(m)\}$  και  $t_{m+1,2s-1} = \frac{t_{m,s-1} + t_{m,s}}{2}$  για  $s \in \{1, 2, \dots, k(m)+1\}$ ,

οπότε έχουμε συνολικά  $k(m+1) = 2k(m) + 1 = \sum_{i=1}^{(m+1)-1} 2^{i-1}$  ενδιάμεσα σημεία

και η επαγωγή είναι πλήρης. Η προσομοίωση στο επαγωγικό βήμα, απαιτεί τη γνώση της κατανομής της τ.μ  $B_{s_i}$  όταν είναι δεδομένες οι τιμές των  $\{B_{s_j} : 1 \leq j \leq n, j \neq i\}$  με  $n \in \mathbb{N}$  και  $s_1 < s_2 < \dots < s_n$ . Εύκολα μπορούμε να δούμε

ότι μας αρκεί να βρούμε την κατανομή της προσαύξησης  $B_{s_i} - B_{s_{i-1}}$  όταν γνωρίζουμε τις τιμές των προσαυξήσεων της ανέλιξης:  $\{B_{s_j} : 1 \leq j \leq n, j \neq i\}$  και του  $B_{s_1}$ , οι οποίες είναι όλες ανεξάρτητες μεταξύ τους τυχαίες μεταβλητές, ενώ μόνο η  $B_{s_{i+1}} - B_{s_{i-1}}$  δεν είναι ανεξάρτητη της  $B_{s_i} - B_{s_{i-1}}$ . Άρα τελικά θέλουμε την κατανομή της τ.μ  $W_1 = B_{s_i} - B_{s_{i-1}}$  δεδομένης της  $W_2 = B_{s_{i+1}} - B_{s_{i-1}}$ , όταν προφανώς οι  $W_1$ ,  $W_2$  και  $W_2 - W_1$  έχουν κανονικές κατανομές  $N(0, s_i - s_{i-1})$ ,  $N(0, s_{i+1} - s_{i-1})$  και  $N(0, s_{i+1} - s_i)$  αντίστοιχα, ενώ οι  $W_2 - W_1$ ,  $W_1$  είναι ανεξάρτητες. Αν  $f_{X_1, X_2, \dots, X_d}$  είναι ο συμβολισμός της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας για μια  $d$ -διάστατη τυχαία μεταβλητή  $(X_1, X_2, \dots, X_d)$ , τότε για τη ζητούμενη δεσμευμένη κατανομή η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας θα είναι:

$$f(x, y) = \frac{f_{W_1, W_2}(x, y)}{f_{W_2}(y)} = \frac{f_{W_2 - W_1, W_1}(y - x, x)}{f_{W_2}(y)} = \frac{f_{W_2 - W_1}(y - x)f_{W_1}(x)}{f_{W_2}(y)} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{s_{i+1} - s_{i-1}}{(s_{i+1} - s_i)(s_i - s_{i-1})}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{(x-y)^2}{s_{i+1} - s_i} + \frac{x^2}{s_i - s_{i-1}} - \frac{y^2}{s_{i+1} - s_{i-1}} \right)} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{s_{i+1} - s_{i-1}}{(s_{i+1} - s_i)(s_i - s_{i-1})}} e^{-\frac{1}{2} \frac{s_{i+1} - s_{i-1}}{(s_{i+1} - s_i)(s_i - s_{i-1})} \left( x - \frac{s_i - s_{i-1}}{s_{i+1} - s_{i-1}} y \right)^2}$$

η οποία είναι σ.π.π κανονικής κατανομής  $N\left(\frac{s_i - s_{i-1}}{s_{i+1} - s_{i-1}} y, \frac{(s_{i+1} - s_i)(s_i - s_{i-1})}{s_{i+1} - s_{i-1}}\right)$ . Κάτω από τις δεσμεύσεις της δεσμευμένης κατανομής του  $W_1$  που εξετάζουμε, είναι  $y = B_{s_{i+1}} - B_{s_{i-1}}$  ενώ το  $B_{s_{i-1}}$  είναι σταθερό, οπότε το  $B_{s_i} = W_1 + B_{s_{i-1}}$  έχει κανονική κατανομή  $N\left(\frac{s_i - s_{i-1}}{s_{i+1} - s_{i-1}} (B_{s_{i+1}} - B_{s_{i-1}}) + B_{s_{i-1}}, \frac{(s_{i+1} - s_i)(s_i - s_{i-1})}{s_{i+1} - s_{i-1}}\right)$ , δηλαδή  $N\left(\frac{s_i - s_{i-1}}{s_{i+1} - s_{i-1}} B_{s_{i+1}} + \frac{s_{i+1} - s_i}{s_{i+1} - s_{i-1}} B_{s_{i-1}}, \frac{(s_{i+1} - s_i)(s_i - s_{i-1})}{s_{i+1} - s_{i-1}}\right)$ . Όταν τα διαδοχικά  $s_j$  έχουν σταθερή απόσταση  $r$ , τότε η συγκεκριμένη κανονική κατανομή είναι η  $N\left(\frac{B_{s_{i+1}} + B_{s_{i-1}}}{2}, \frac{r}{2}\right)$ .

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα την παραπάνω μέθοδο για την προσομοίωση των τροχιών που απαιτεί ο αλγόριθμος, ο οποίος τιμολογεί προσεγγιστικά τη στιγμή  $t = 0$  για τη μετοχή των προηγούμενων παραδειγμάτων, ένα Up and In Barrier Call Option με τιμή άσκησης δικαιώματος  $K = 30$  και άνω φράγμα  $M = 44$  (ευρώ). Θυμίζουμε ότι με τους συμβολισμούς του 4ου κεφαλαίου, η αξία του παραγώγου αυτού για  $t = 0$  είναι:

$$Y_B(0) = X(0)F(-f_1(M, X(0))) - Ke^{-rT}F(-f_2(M, X(0))) +$$

$$\left(\frac{M}{X(0)}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}} M (F(f_1(X(0), M)) - F(f_1(X(0)K, M^2))) -$$

$$\left(\frac{M}{X(0)}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}} \frac{X(0)Ke^{-rT}}{M} (F(f_2(X(0), M)) - F(f_2(X(0)K, M^2)))$$

όπου  $f_1(x, y) = \frac{\ln(\frac{x}{y}) - (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$ ,  $f_2(x, y) = \frac{\ln(\frac{x}{y}) - (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$  και  $F$  κατά τα γνωστά η συνάρτηση κατανομής της τυποποιημένης κανονικής κατανομής.

Παρακάτω υπολογίζουμε τη θεωρητική αξία του παραγώγου αυτού, κάνοντας αντικατάσταση και πράξεις στο Mathematica:

```
F1[x_,y_]:= (Log[x/y]+0.06-(0.07)^2*30)/(0.07*Sqrt[30])
F2[x_,y_]:= (Log[x/y]+0.06)/(0.07*Sqrt[30])
40*CDF[NormalDistribution[],-F1[44,40]]-30*Exp[-0.0135]*
CDF[NormalDistribution[],-F2[44,40]]+(44/40)^(0.0009/(0.07)^2)*
(44*(CDF[NormalDistribution[],F1[40,44]]-CDF[NormalDistribution[],
F1[40*30,44^2]])-40*30*Exp[-0.0135]/44*(CDF[NormalDistribution[],
F2[40,44]]-CDF[NormalDistribution[],F2[40*30,44^2]]))
```

Το αποτέλεσμα που εμφανίζεται είναι: 11.6543.

Για να δούμε τώρα πόσο ακριβής είναι η τιμολόγηση με Monte Carlo, θυμίζουμε ότι η αξία του παραγώγου που εξετάζουμε ισούται με τη μέση τιμή:

$$Y(0) = \mathbb{E}^Q(e^{-rT}(X(T) - K)^+ I_{\{\max_{0 \leq s \leq T} X(s) > M\}})$$

οπότε ο αλγόριθμος Monte Carlo που υπολογίζει προσεγγιστικά τη συγκεκριμένη αξία, υλοποιείται στο Mathematica ως εξής:

```
S=0;S2=0
For[i=0,i<10000,i++,B=0;LastBrown=RandomVariate[NormalDistribution[0,
Sqrt[30]]];LastValue=F[30,LastBrown];ValueList=List[40,LastValue];
BrownList=List[0,LastBrown]; For[j=1,j<13,j++,L=Length[ValueList];
t=30/(2^j); For[k=0,k<L-1,k++,NewBrown=RandomVariate[
NormalDistribution[(BrownList[[k+1]]+BrownList[[k+2]])/2,Sqrt[30/
(2^(j+1))]];BrownList=Insert[BrownList,NewBrown,2k+2];ValueList=
Insert[ValueList,F[t,NewBrown],2k+2];t=t+30/2^(j-1)];If[Max[ValueList]
>44,B=1;Break[]];If[B==1,S=S+Max[0,LastValue-30]/10000;S2=S2+
(Max[0,LastValue-30])^2/10000]
Price=S;Error=((10000/9999)*(S2-S^2))^(1/2)/100
```

Η εντολή Break[] που εμφανίζεται στον αλγόριθμο, σταματάει τον περιττό υπολογισμό ενδιάμεσων τιμών για την ανέλιξη αξίας της μετοχής, όταν παρατηρηθεί



τιμή για τη μετοχή μεγαλύτερη από το άνω φράγμα. Οι δύο τελευταίες εντολές τώρα, μας δίνουν αντίστοιχα το προσεγγιστικό αποτέλεσμα και μια καλή προσέγγιση του σφάλματος. Οι τιμές που εμφανίζονται για τις ποσότητες αυτές, είναι  $Price = 11.5056$  και  $Error = 0.147263$ . Βλέπουμε λοιπόν ότι η προσέγγιση είναι πολύ καλή, ενώ το σφάλμα της προσέγγισης είναι  $11.6543 - 11.5056 = 0.148654$  και διαφέρει ελάχιστα από το προσεγγιστικό σφάλμα, οπότε και η μεροληψία της διακριτοποίησης είναι εξαιρετικά μικρή. Το σχετικό σφάλμα είναι περίπου 1.5% και με μεγαλύτερο δείγμα στη μέθοδο Monte Carlo θα μπορούσε να γίνει πολύ πιο μικρό, όμως αυτό θα απαιτούσε πολύ περισσότερο υπολογιστικό χρόνο οπότε θα αρκεστούμε σε μια ελάττωση αυτού με μεθόδους που θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο.

## 7. Μέθοδοι Ελάττωσης Διασποράς

### 7.1. Εισαγωγικά

Στο τελευταίο αυτό κεφάλαιο θα δούμε τρεις βασικές μεθόδους για την ελάττωση της διασποράς στις μεθόδους Monte Carlo, και θα δούμε με παραδείγματα ότι αυτές βελτιώνουν εξαιρετικά την ακρίβεια στην τιμολόγηση παραγώγων με Monte Carlo. Οι μέθοδοι που θα δούμε είναι η μέθοδος των μεταβλητών ελέγχου, η μέθοδος των αντιθετικών μεταβλητών και η μέθοδος importance sampling. Στο κεφάλαιο αυτό, αντί του λογισμικού Mathematica θα χρησιμοποιηθεί κυρίως το στατιστικό πακέτο R, το οποίο είναι πιο εύχρηστο στη σύγκριση διασπορών. Περιγραφή μερικών βασικών εντολών του πακέτου R μπορεί να βρεθεί στο Παράρτημα.

### 7.2. Μέθοδος Μεταβλητών Ελέγχου

Η πρώτη μέθοδος Ελάττωσης Διασποράς που θα δούμε είναι η μέθοδος των Μεταβλητών Ελέγχου. Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα δείγμα  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  μιας τυχαίας μεταβλητής  $Y$  από μια κατανομή με μέση τιμή  $\mu$  και διασπορά  $\sigma_y^2$ . Η μέθοδος Monte Carlo για την προσέγγιση της παραμέτρου  $\mu$  βασίζεται στο ότι ισχύει:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n}{n} = \mu$$

με πιθανότητα 1. Η εκτιμήτρια της άγνωστης μέσης τιμής είναι ο δειγματικός μέσος  $\bar{Y}_n = \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n}$  και έχει διασπορά  $\frac{\sigma_y^2}{n}$ . Έστω τώρα ένα άλλο δείγμα  $X_1, X_2, \dots, X_n$  μιας άλλης τυχαίας μεταβλητής  $X$  με  $\bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$  και θεωρούμε  $Z_i(b) = Y_i - b(X_i - \mathbb{E}(X)) \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$  με  $b \in \mathbb{R}$  και  $\bar{Z}_n(b) = \frac{Z_1(b) + Z_2(b) + \dots + Z_n(b)}{n}$ . Προφανώς το  $\bar{Z}_n(b)$ , ακριβώς όπως και το  $\bar{Y}_n$ , είναι μια αμερόληπτη εκτιμήτρια του  $\mu$ . Η μέθοδος που εξετάζουμε βασίζεται στον προσδιορισμό του  $b$  έτσι ώστε η διασπορά της εκτιμήτριας  $\bar{Z}_n(b)$  να γίνεται η ελάχιστη δυνατή. Αν έχουμε  $\sigma_x^2 = \text{Var}(X)$  και  $\rho_{xy} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y}$  είναι ο συντελεστής προσδιορισμού των δύο τυχαίων μεταβλητών, τότε είναι απλό να δείξουμε ότι ισχύει:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\bar{Z}_n(b)) &= \frac{1}{n} (\text{Var}(Y) + \text{Var}(b(X - \mathbb{E}(X))) - 2\text{Cov}(Y, b(X - \mathbb{E}(X)))) \\ &= \frac{1}{n} (b^2 \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2b \sigma_x \sigma_y \rho_{xy}). \end{aligned}$$

Η παράσταση αυτή είναι ένα τριώνυμο δεύτερου βαθμού ως προς  $b$ , με ελάχιστη τιμή κατά τα γνωστά για  $b = b^* = \frac{\sigma_y \rho_{xy}}{\sigma_x}$  η οποία είναι:

$$\text{Var}(\bar{Z}_n(b^*)) = \frac{4\sigma_x^2\sigma_y^2(1 - \rho_{xy}^2)}{4n\sigma_x^2} = \frac{\sigma_y^2(1 - \rho_{xy}^2)}{n} < \frac{\sigma_y^2}{n}.$$

Επειδή όμως η κατανομή της μεταβλητής  $Y$  είναι άγνωστη (διαφορετικά δε θα προσπαθούσαμε να εκτιμήσουμε τη μέση τιμή αυτής), τις πιο πολλές φορές τα  $\sigma_y = \text{Var}(Y)$ ,  $\rho_{xy} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}$  θα είναι επίσης άγνωστα, οπότε θα πρέπει

να τα εκτιμήσουμε από τα αντίστοιχα μεγέθη των δειγμάτων  $s_y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}_n)^2$

και  $r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}_n)(X_i - \bar{X}_n)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}_n)^2 \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}}$ . Έτσι τελικά επιλέγουμε

$$b = b_n = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}_n)(X_i - \bar{X}_n)}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}.$$

Τότε  $(\bar{X}_n, \bar{Y}_n) \rightarrow (\mu, \mathbb{E}(X))$  και άρα το  $\bar{Z}_n(b_n) = \bar{Y}_n - b_n(\bar{X}_n - \mathbb{E}(X)) \rightarrow \mu$  με πιθανότητα 1 καθώς  $n \rightarrow +\infty$ . Το  $\bar{Z}_n(b_n)$  δεν είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια για το  $\mu$ , όμως το τελευταίο αποτέλεσμα μας λέει ότι για μεγάλα  $n$  η συγκεκριμένη ποσότητα προσεγγίζει αρκετά καλά το  $\mu$ , ενώ με βάση τα παραπάνω έχουμε ότι η διασπορά αυτής είναι μικρότερη από  $\text{Var}(\bar{Y}_n) = \frac{\sigma_y^2}{n}$  και μάλιστα γίνεται πολύ μικρή όταν η εξάρτηση των μεταβλητών  $X$  και  $Y$  γίνεται σχεδόν γραμμική. Άρα αν επιλέξουμε την τυχαία μεταβλητή  $X$  έτσι ώστε να έχει γνωστή μέση τιμή και να εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό γραμμικά από την  $Y$ , τότε η εκτιμήτρια  $\bar{Z}_n(b_n)$  του  $\mu$  είναι πιθανότατα πολύ καλύτερη της  $\bar{Y}_n$ . Η μεταβλητή  $X$  καλείται μεταβλητή ελέγχου. Ο καλύτερος τρόπος όμως για να επαληθεύσουμε την αποτελεσματικότητα της μεθόδου αυτής, είναι να δούμε μερικές εφαρμογές στην τιμολόγηση Δικαιωμάτων Προκαθορισμένης Ωρίμανσης:

### Παράδειγμα 1: Τιμολόγηση European Call Option:

Θεωρούμε την μετοχή και το European Call Option του προηγούμενου κεφαλαίου. Θα επαναλάβουμε την τιμολόγηση που κάναμε για  $t = 0$ , αλλά αρκετές φορές τόσο με την εκτιμήτρια που χρησιμοποιήθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο

όσο και με τη βελτιωμένη εκτιμήτρια που μας δίνει η παραπάνω μέθοδος. Ως μεταβλητή ελέγχου θα χρησιμοποιηθεί η τελική αξία της μετοχής  $e^{-rT}X(T)$  ως προς το χρήμα που ανατοκίζεται, η οποία ως Martingale ως προς το μέτρο αντικειμενικής πιθανότητας  $Q$  έχει γνωστή μέση τιμή  $\mathbb{E}^Q(e^{-rT}X(T)) = X(0) = 40$ . Η σχέση της μεταβλητής αυτής και τις εκτιμήτριες Monte Carlo του προηγούμενου κεφαλαίου, δηλαδή της  $Y = e^{-rT}(X(T) - K)^+$ , δεν είναι μεν γραμμική αλλά είναι αρκετά μεγάλη, οπότε αναμένεται να έχουμε καλά αποτελέσματα. Έτσι, η εκτιμήτρια που χρησιμοποιούμε είναι ο δειγματικός μέσος των παρατηρήσεων:

$$Z_i = Y_i - \frac{\sum_{j=1}^n (Y_j - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k)(X_i - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k)}{\sum_{j=1}^n (X_j - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k)^2} (X_i - 40)$$

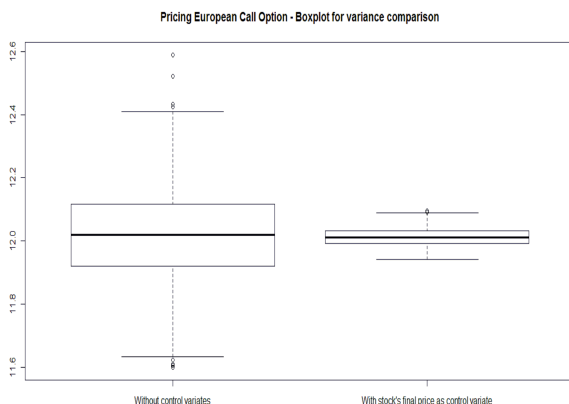
όπου  $(X_i, Y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  οι παρατηρήσεις για το ζεύγος τυχαίων μεταβλητών  $(e^{-rT}X(T), e^{-rT}(X(T) - K)^+)$ . Η προσομοίωση δειγμάτων για τις δύο αυτές μεταβλητές γίνεται προφανώς με την παραγωγή ψευδοτυχαίων τιμών για την τελική αξία της μετοχής. Ακολουθεί ένας αλγόριθμος υλοποιημένος στο στατιστικό πακέτο R, ο οποίος με δείγματα μεγέθους  $n = 10000$ , πραγματοποιεί 1000 τιμολογήσεις με τη μέθοδο Μεταβλητών Ελέγχου και άλλες 1000 χωρίς αυτή, ενώ στη συνέχεια εμφανίζει ένα θηκογράφημα στο οποίο συγκρίνονται οι τιμές που προκύπτουν με την θεωρητική τιμή, αλλά και οι διασπορές που προκύπτουν με και χωρίς τη μέθοδο ελάττωσης διασποράς. Οι τιμές που δίνουμε στις παραμέτρους είναι οι ίδιες που δώσαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο

```
result<-rep(NA,1000)
impresult<-rep(NA,1000)
for(i in seq(1,1000)){
v<-rnorm(10000)
e<-40*exp(-0.0135)*exp(-0.06+0.07*30^(1/2)*v)
eur<-(e-30*exp(-0.0135))
eur[eur<0]<-0
improved<-eur-(sd(eur)/sd(e))*cor(eur,e)*(e-40)
impresult[i]<-sum(improved)/10000
result[i]<-sum(eur)/10000 }

boxplot(result, impresult, names=c("Without control variates",
"With stock's final price as control variate"))
title("Pricing European Call Option - Boxplot for variance comparison")
```

Παρακάτω βλέπουμε το θηκογράφημα που εμφανίζει ο αλγόριθμος αυτός, σύμφωνα με το οποίο η μέθοδος μεταβλητών ελέγχου μας δίνει μια διασπορά περίπου 5 φορές μικρότερη, ενώ η μεροληψία της μεθόδου που αναφέραμε στη θεωρία φαίνεται να

είναι αμελητέα, καθώς και στις δύο περιπτώσεις προκύπτει η ίδια μέση τιμή, η οποία φαίνεται να ταυτίζεται με τη θεωρητική δίκαιη τιμή του παραγώγου (12.0115).



## Παράδειγμα 2: Τιμολόγηση Arithmetic Asian Call Option:

Θα εφαρμόσουμε τώρα την ίδια μέθοδο στην τιμολόγηση του Arithmetic Asian Call Option του προηγούμενου κεφαλαίου, χρησιμοποιώντας την εκτιμήτρια της αξίας του Geometric Asian Call Option ως μεταβλητή ελέγχου. Αυτή είναι ίσως η πιο σημαντική εφαρμογή της μεθόδου αυτής στην τιμολόγηση παραγώγων, διότι έχει να κάνει με την τιμολόγηση ενός παραγώγου που δεν μπορεί να τιμολογηθεί θεωρητικά, ενώ χρησιμοποιεί ως μεταβλητή ελέγχου μια με τις καλύτερες δυνατές ιδιότητες. Πράγματι, το Geometric Asian Call Option μπορεί να τιμολογηθεί θεωρητικά οπότε έχει αμερόληπτη εκτιμήτρια με γνωστή μέση τιμή, ενώ παρατηρήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο ότι η αξία του συμπεριφέρεται σχεδόν όπως αυτή του Arithmetic Asian Call Option, πράγμα που σημαίνει ότι στην περίπτωση αυτή ο συντελεστής συσχέτισης  $\rho_{xy}$  της μεθόδου (βλέπε θεωρία παραπάνω) είναι μάλλον πολύ κοντά στο 1, οπότε η διασπορά αναμένεται να γίνεται εξαιρετικά μικρή και η ακρίβεια εξαιρετικά μεγάλη. Η εκτιμήτρια της μεθόδου στην περίπτωση αυτή θα είναι ο δειγματικός μέσος των παρατηρήσεων:

$$Z_i = Y_i - \frac{\sum_{j=1}^n (Y_i - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k)(X_i - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k)}{\sum_{j=1}^n (X_i - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k)^2} (X_i - Y_G(0))$$

όπου  $Y_G(0)$  είναι η δίκαιη τιμή του Arithmetic Asian Call Option τη στιγμή  $t = 0$  όπως υπολογίστηκε στο κεφάλαιο 4, ενώ  $(X_i, Y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  είναι

οι παρατηρήσεις για το ζεύγος τυχαίων μεταβλητών

$$\left( e^{-rT} \left( \sqrt[m]{\prod_{i=0}^{m-1} (X(T-i) - K)} \right)^+, e^{-rT} \left( \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} X(T-i) - K \right)^+ \right).$$

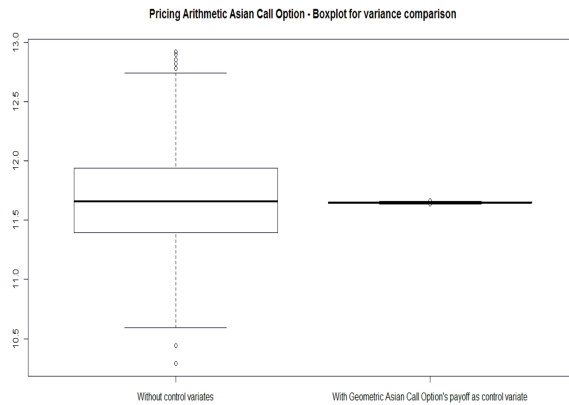
Όπως ακριβώς και στο προηγούμενο παράδειγμα, υλοποιούμε την εφαρμογή αυτή στο πακέτο R και κάνουμε συγκρίσεις με την απλή τιμολόγηση μέσω ενός θηκογράφηματος. Η υλοποίηση της εφαρμογής γίνεται με τον παρακάτω αλγόριθμο, χρησιμοποιώντας αυτή τη φορά δείγμα μεγέθους  $n = 1000$ , ενώ οι τιμές των παραμέτρων είναι και πάλι αυτές του προηγούμενου κεφαλαίου:

```
d2<-0.07/8*(8*9*17/6+30*8^2-8^3)^(1/2)
d1<-(log(30/40)+0.002*(30-3.5))/d2
E=40*exp(-9/4*(0.07)^2-0.00045*3.5+(0.07)^2*9*17/(12*8))* +
pnorm(d2-d1)-30*exp(-0.0135)*pnorm(-d1)
result<-rep(NA,1000)
impresult<-rep(NA,1000)

for(i in seq(1,1000)){
v<-matrix(rnorm(8000), ncol=8, byrow=T)
g<-40*exp(-0.0135)*exp(-0.002*(8*30-28)/8+0.07* +
colSums(apply(c((23)^(1/2),rep(1,7))*t(v),2,cumsum)))/8)
gest<-(g-30*exp(-0.0135))
gest[gest<0]<-0
a<-0
for(j in seq(1,8)){
a<-a+40*exp(-0.0135)*exp(-0.002*(31-j)+0.07* +
apply(c((23)^(1/2),rep(1,7))*t(v),2,cumsum)[9-j,])/8 }
aest<-(a-30*exp(-0.0135))
aest[aest<0]<-0
impaest<-aest-(sd(aest)/sd(gest))*cor(aest,gest)*(gest-E)
result[i]<-sum(aest)/1000
impresult[i]<-sum(impaest)/1000 }

boxplot(result, impresult, names=c("Without control variates",
"With Geometric Asian Call Option's payoff as control variate"))
title("Pricing Arithmetic Asian Call Option - Boxplot for variance comparison")
```

Παρακάτω βλέπουμε το θηκογράφημα που εμφανίζει ο παραπάνω αλγόριθμος, από το οποίο φαίνεται ότι στην περίπτωση αυτή η μέθοδος των μεταβλητών ελέγχου είναι απίστευτα αποτελεσματική, καθώς όχι μόνο μειώνει τη διασπορά αλλά σχεδόν την εξαφανίζει:



Αν κάνουμε ακόμα μια τιμολόγηση με τη μέθοδο αυτή αλλά με πολύ μεγαλύτερο μέγεθος δείγματος  $n = 1000000$ , τότε η διασπορά θα είναι τόσο μικρή που πιθανότατα το αποτέλεσμα που θα προκύψει θα είναι το ακριβέστερο δυνατό:

```
v<-matrix(rnorm(8000000), ncol=8, byrow=T)
g<-40*exp(-0.0135)*exp(-0.002*(8*30-28))/8+0.07* +
colSums(apply(c((23)^(1/2),rep(1,7))*t(v),2,cumsum))/8)
gest<-(g-30*exp(-0.0135))
gest[gest<0]<-0
a<-0
for(j in seq(1,8)){
a<-a+40*exp(-0.0135)*exp(-0.002*(31-j))+0.07* +
apply(c((23)^(1/2),rep(1,7))*t(v),2,cumsum)[9-j,]/8 }
aest<-(a-30*exp(-0.0135))
aest[aest<0]<-0
impaest<-aest-(sd(aest)/sd(gest))*cor(aest,gest)*(gest-E)
impresult<-sum(impaest)/1000000
impresult
```

Το αποτέλεσμα που παίρνουμε είναι 11.64772 και λόγω του αμελητέου σφάλματος της μεθόδου, μπορούμε να αποφανθούμε ότι το αποτέλεσμα αυτό αποτελεί σίγουρα την δίκαιη τιμή του Arithmetic Asian Call Option τη στιγμή  $t = 0$ .

### Παράδειγμα 3: Τιμολόγηση Up and In Barrier Call Option:

Η τελευταία εφαρμογή της μεθόδου αυτής που θα δούμε σε αυτή την εργασία, αφορά την τιμολόγηση του Up and In Barrier Call Option τη στιγμή  $t = 0$ , χρησιμοποιώντας το European Call Option ως μεταβλητή ελέγχου. Δεδομένου ότι το Barrier Option ταυτίζεται με το European Call Option όταν η ισχύ του δεν ακυρώνεται λόγω του φράγματος, η εξάρτηση των δύο παραγώγων αναμένεται να είναι μεγάλη και άρα ο συντελεστής συσχέτισης  $\rho_{xy}$  της μεθόδου αναμένεται να είναι κοντά στο 1, οπότε και θα έχουμε σημαντική μείωση της διασποράς. Η εκτιμήτρια της μεθόδου αυτή τη φορά θα είναι ο δειγματικός μέσος των παρατηρήσεων:

$$Z_i = Y_i - \frac{\sum_{j=1}^n (Y_j - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k)(X_i - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k)}{\sum_{j=1}^n (X_j - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k)^2} (X_i - Y(0))$$

όπου  $Y(0)$  είναι η δίκαιη τιμή του European Call Option τη στιγμή  $t = 0$  όπως υπολογίστηκε στο κεφάλαιο 4, ενώ  $(X_i, Y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  είναι οι παρατηρήσεις για το ζεύγος τυχαίων μεταβλητών:

$$\left( e^{-rT} (X(T) - K)^+, e^{-rT} (X(T) - K)^+ I_{\{\max_{0 \leq s \leq T} X(s) > M\}} \right).$$

Θυμίζουμε ότι η συμβατική τιμολόγηση του Up and In Barrier Call Option του προηγούμενου κεφαλαίου με Monte Carlo τη στιγμή  $t = 0$ , έδωσε προσεγγιστική δίκαιη τιμή 11.5056 με τυπικό σφάλμα 0.1486, δηλαδή περίπου όσο είναι και η απόκλιση από τη θεωρητική δίκαιη τιμή που βρέθηκε ίση με 11.6543. Για της ίδιες τιμές των παραμέτρων που εμφανίζονται, ίδια λεπτότητα διαμέρισης και ίδιο μέγεθος δείγματος, υλοποιούμε στο πακέτο R έναν αλγόριθμο που τιμολογεί το συγκεκριμένο παράγωγο με τη μέθοδο μεταβλητών ελέγχου όπως περιγράψαμε παραπάνω:

```
l<-log(30*exp(-0.0135)/40)/(0.07*(30)^(1/2))
E<-40*pnorm(1+0.035*(30)^(1/2))-30*exp(-0.0135)*
pnorm(1-0.035*(30)^(1/2))
est<-rep(0,10000)
cntvar<-rep(0,10000)

for(i in seq(1,10000)){
v<-cumsum(rnorm(2^12)*(30/2^12)^(1/2))
u<-cumsum(rep(30/2^12,2^12))
```

————— Συνέχεια στην επόμενη σελίδα —————



## Συνέχεια αλγορίθμου

```

m<-max(max(40*exp(-0.002*u+0.07*v)),40)
e<-(40*exp(-0.002*u[2^12]+0.07*v[2^12])-30)
if(m>44&e>0) {est[i]<-e*exp(-0.0135)}
if(e>0) {cntvar[i]<-e*exp(-0.0135)}

result<-sum(est)/10000-sd(est)*cor(est,cntvar)/ sd(cntvar)*
(sum(cntvar)/10000-E)

result

```

Εκτέλεση του αλγορίθμου αυτού 5 φορές έδωσε τα αποτελέσματα: 11.64088, 11.64193, 11.63903, 11.62894, 11.61072. Παρατηρούμε ότι η μέθοδος αυτή μας εξασφαλίζει στη συγκεκριμένη τιμολόγηση ακρίβεια 3 ψηφίων, όταν η συμβατική τιμολόγηση μας είχε δώσει αποτέλεσμα με ακρίβεια 2 ψηφίων. Φαίνεται λοιπόν για ακόμα μια φορά το πόσο χρήσιμη μπορεί να φανεί η συγκεκριμένη μέθοδος. Ας σημειώσουμε ότι και οι 5 τιμές που προέκυψαν είναι μικρότερες από τη θεωρητική δίκαιη τιμή του παραγώγου, πράγμα που οφείλεται στη μεροληψία της μεθόδου που αναφέραμε πιο πάνω. Βέβαια, όταν η μέθοδος αυτή βελτιώνει τόσο πολύ τη διασπορά, μια μικρή μεροληψία που μπορεί να προκύπτει δεν αποτελεί πρόβλημα.

**Μερικά σχόλια για τη μέθοδο:** Αν εξετάσουμε τα τρία παραπάνω παραδείγματα, βλέπουμε ότι η μέθοδος Μεταβλητών Ελέγχου στην χειρότερη περίπτωση υποτριπλασιάζει τη διασπορά, ενώ στην καλύτερη περίπτωση σχεδόν την εξαφανίζει. Από το 5ο κεφάλαιο γνωρίζουμε ότι για να υποτριπλασιαστεί η διασπορά στη μέθοδο Monte Carlo, πρέπει το μέγεθος του δείγματος να γίνει 9 φορές μεγαλύτερο, πράγμα που λογικά απαιτεί 9 φορές περισσότερο χρόνο. Συγκρίνοντας τώρα τους αλγορίθμους της συμβατικής μεθόδου Monte Carlo με τους αντίστοιχους τροποποιημένους αλγορίθμους που εφαρμόζουν τη μέθοδο Μεταβλητών Ελέγχου, βλέπουμε ότι ως προς την πολυπλοκότητα οι δεύτεροι είναι μεν πιο αργοί, αλλά μάλλον όχι περισσότερο από 5 φορές πιο αργοί. Αυτό διότι όσος χρόνος απαιτείται για τον υπολογισμό του δειγματικού μέσου της απλής εκτιμήτριας, άλλος τόσος περίπου απαιτείται τόσο για τον υπολογισμό του δειγματικού μέσου της μεταβλητής ελέγχου, όσο και για τον υπολογισμό των τυπικών αποκλίσεων και των συνδιασπορών που χρησιμοποιούνται στην εφαρμογή της μεθόδου. Έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η χρήση της μεθόδου αυτής συμφέρει αναμφισβήτητα.

### 7.3. Μέθοδος Αντιθετικών Μεταβλητών

Μια άλλη μέθοδος η οποία χρησιμοποιείται για την ελάττωση της διασποράς μιας προσέγγισης Monte Carlo, είναι η μέθοδος των Αντιθετικών Μεταβλητών. Έστω ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε τη μέση τιμή  $\mu = \mathbb{E}(f(X))$  όταν  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  είναι μια γνωστή συνάρτηση και  $X$   $k$ -διάστατη τυχαία μεταβλητή με  $k \geq 1$ , από την κατανομή της οποίας μπορούμε να προσομοιώνουμε τυχαία ή ψευδοτυχαία δείγματα. Αν  $X_1, X_2, \dots, X_n$  είναι τυχαίο δείγμα από τη συγκεκριμένη κατανομή, τότε η συμβατική εκτιμήτρια για το  $\mu$  είναι η:

$$Y = \frac{f(X_1) + f(X_2) + \dots + f(X_n)}{n}.$$

Προφανώς, αυτό που μπορεί να κάνει τη μεταβλητή  $Y$  να λάβει μια ακραία τιμή ώστε να παρατηρηθεί μεγάλη διασπορά, είναι το να συμβεί το ίδιο για πολλές από τις μεταβλητές  $f(X_i)$ . Η μέθοδος Αντιθετικών Μεταβλητών βασίζεται στην αποφυγή αυτού του φαινομένου, διπλασιάζοντας κατά κάποιο τρόπο το δείγμα με την εισαγωγή επιπλέον μεταβλητών, των οποίων η απόκλιση από τη μέση τιμή τους αντισταθμίζει τις αποκλίσεις των μεταβλητών που είχαμε αρχικά. Αυτό γίνεται εισάγοντας στο δείγμα τις τυχαίες μεταβλητές  $R(X_1), R(X_2), \dots, R(X_n)$  (αυτές καλούνται αντιθετικές μεταβλητές), όπου  $R : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  μια συνάρτηση τέτοια ώστε οι μεταβλητές  $X$  και  $R(X)$  να έχουν ίδια κατανομή και αρνητική συσχέτιση. Το δεύτερο εκφράζεται με την ανισοτική σχέση  $Cov(X, R(X)) < 0$ . Ας υποθέσουμε αρχικά ότι η συνάρτηση  $f$  είναι αύξουσα ή φθίνουσα ως προς κάθε συντεταγμένη του  $\mathbb{R}^k$ . Αν τώρα η κατανομή της  $X$  είναι κανονική, τότε η καλύτερη δυνατή αρνητική συσχέτιση επιτυγχάνεται για  $R = -I$ , με  $I$  τον ταυτοτικό τελεστή, ενώ η συνάρτηση αυτή προφανώς διατηρεί την κατανομή στη συγκεκριμένη περίπτωση. Αν πάλι η κατανομή είναι πολυδιάστατη ομοιόμορφη στο μοναδιαίο υπερκύβο (αν δηλαδή όλες οι συντεταγμένες της  $X$  έχουν κανονική κατανομή στο  $[0, 1]$ ) τότε το βέλτιστο αποτέλεσμα επιτυγχάνεται για  $R = J - I$ , όπου το  $J$  στέλνει κάθε διάνυσμα στο  $(1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^k$ . Σε κάθε περίπτωση, η εκτιμήτρια αντιθετικών μεταβλητών θα είναι:

$$\tilde{Y} = \frac{f(X_1) + f(R(X_1)) + \dots + f(X_n) + f(R(X_n))}{2n}$$

η οποία είναι προφανώς αμερόληπτη για το  $\mu$ . Πότε όμως είναι αυτή η εκτιμήτρια πιο αποδοτική από την  $Y$ ; Υποθέτουμε ότι η εισαγωγή μιας από τις μεταβλητές  $R(X_i)$  κοστίζει σε χρόνο όσο και η προσομοίωση της  $X_i$ , τότε η προσομοίωση της  $\tilde{Y}$  που έχει διασπορά  $\frac{1}{4n} Var(f(X) + f(R(X)))$  κοστίζει χρονικά όσο και αυτή της  $Y$  για δείγμα μεγέθους  $2n$  που έχει διασπορά  $\frac{1}{2n} Var(f(X))$ . Έτσι η εκτιμήτρια αντιθετικών μεταβλητών είναι καλύτερη όταν ισχύει:

$$\frac{1}{4n} Var(f(X) + f(R(X))) < \frac{1}{2n} Var(f(X)) \Leftrightarrow$$

$$Var(f(X) + f(R(X))) < 2Var(f(X)) \Leftrightarrow$$

$$\text{Var}(f(X)) + \text{Var}(f(R(X))) + 2\text{Cov}(f(X), f(R(X))) < 2\text{Var}(f(X))$$

όπου επειδή  $\text{Var}(f(X)) = \text{Var}(f(R(X)))$  η τελευταία ισοδυναμεί με:

$$\text{Cov}(f(X), f(R(X))) < 0$$

και ισχύει λόγω της υπόθεσης της μονοτονίας της  $f$ . Όταν η συνάρτηση  $f$  δεν έχει την ιδιότητα της μονοτονίας ως προς κάθε συντεταγμένη του  $\mathbb{R}^k$ , είναι πιθανό το αποτέλεσμα να μην είναι και τόσο καλό. Υπάρχουν κάποιες πιο γενικές μορφές της παραπάνω μεθόδου οι οποίες σε τέτοιες περιπτώσεις βελτιώνουν το αποτέλεσμα, αλλά δε θα αναφερθούμε σε αυτές καθώς οι συναρτήσεις  $f$  που εμφανίζονται στην τιμολόγηση των περισσότερων παραγώγων Προκαθορισμένης Ωρίμανσης ικανοποιούν την υπόθεση της μονοτονίας.

#### Παράδειγμα: Τιμολόγηση Geometric Asian Call Option:

Θεωρούμε τη μετοχή και το Geometric Asian Call Option με τις παραμέτρους του προηγούμενου κεφαλαίου. Θυμίζουμε ότι η θεωρητική δίκαιη τιμή του παραγώγου αυτού τη στιγμή  $t = 0$  είχε προκύψει ίση με 11.54. Επίσης, έχουμε δει ότι η τιμή αυτή ισούται με τη μέση τιμή  $\mathbb{E}(f(Z_1, Z_2, \dots, Z_8))$ , όπου  $Z_1, \dots, Z_8$  κανονικά κατανομημένες ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και  $f(z_1, \dots, z_8) = Ae^{B+g(z_1, \dots, z_8)}$  με  $g$  γραμμική συνάρτηση των  $z_1, \dots, z_8$  η οποία είναι αύξουσα ως προς κάθε μεταβλητή. Άρα στην τιμολόγηση μπορούμε να εφαρμόσουμε την παραπάνω μέθοδο για να πετύχουμε τη μείωση της διασποράς. Με τον παρακάτω αλγόριθμο που υλοποιούμε στο πακέτο R, πραγματοποιούμε 1000 επαναλήψεις, σε κάθε μια από τις οποίες τιμολογούμε το συγκεκριμένο παράγωγο με τη συμβατική μέθοδο Monte Carlo αλλά και με την μέθοδο που είδαμε παραπάνω. Στη συμβατική τιμολόγηση με Monte Carlo χρησιμοποιούμε ψευδοτυχαίο δείγμα 1000 μεταβλητών, ενώ στην τιμολόγηση με τη μέθοδο των Αντιθετικών Μεταβλητών, για να έχουμε ίδια πολυπλοκότητα χρησιμοποιούμε τις 500 από αυτές και οι υπόλοιπες 500 αποτελούν τις αντιθετικές μεταβλητές που εισάγονται για την ελάττωση της διασποράς. Ο αλγόριθμος αυτός εμφανίζει σε ένα θηκογράφημα, τη διαφορά που παρατηρείται στις διασπορές των αποτελεσμάτων που προκύπτουν με και χωρίς τη μέθοδο των Αντιθετικών Μεταβλητών. Ο αλγόριθμος και το θηκογράφημα που εμφανίζει φαίνονται στην επόμενη σελίδα.

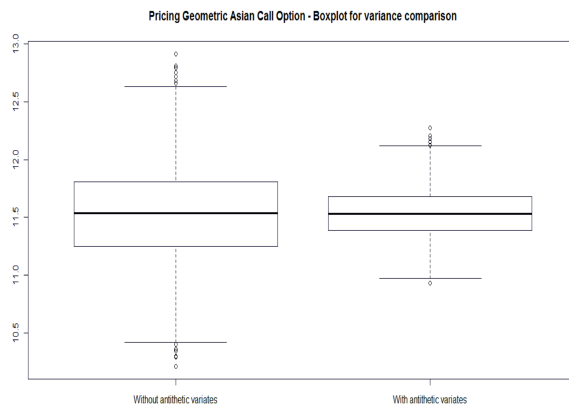
```

result<-rep(NA,1000)
impresult<-rep(NA,1000)

for(i in seq(1,1000)){
v<-matrix(rnorm(8000), ncol=8, byrow=T)
g<-40*exp(-0.0135)*exp(-0.002*(8*30-28))/8+0.07*
colSums(apply(c((23)^(1/2),rep(1,7))*t(v),2,cumsum))/8)
gest<-(g-30*exp(-0.0135))
gest[gest<0]<-0
g2<-40*exp(-0.0135)*exp(-0.002*(8*30-28))/8+0.07*
colSums(apply(c((23)^(1/2),rep(1,7))*t(-v),2,cumsum))/8)
gest2<-(g2-30*exp(-0.0135))
gest2[gest2<0]<-0
result[i]<-sum(gest)/1000
impresult[i]<-(sum(gest[seq(1,500)])+sum(gest2[seq(1,500)]))/1000 }

boxplot(result, impresult, names=c("Without antithetic variates",
"With antithetic variates"))
title("Pricing Geometric Asian Call Option - Boxplot for variance comparison")

```



Βλέπουμε λοιπόν ότι στη συγκεκριμένη περίπτωση η μέθοδος Αντιθετικών Μεταβλητών είναι αποδοτική, καθώς μειώνει τη διασπορά περίπου στο μισό. Επίσης, η μέθοδος αυτή δεν παρουσιάζει μεροληψία καθώς και στις 2 τιμολογήσεις βλέπουμε πως η μέση τιμή είναι κοντά στο 11.54 (το αναμενόμενο με βάση τη θεωρία).

#### 7.4. Μέθοδος Importance Sampling

Θα κλείσουμε αυτή την εργασία με τη μέθοδο Importance Sampling η οποία στηρίζεται στη μείωση της διασποράς μιας εκτιμήτριας μέσω της αλλαγής της κατανομής από την οποία παίρνουμε το τυχαίο ή ψευδοτυχαίο δείγμα. Η αλλαγή μέτρου πιθανότητας είναι κάτι που συνηθίζεται στην τιμολόγηση χρηματοοικονομικών παραγώγων, όπως έγινε πχ στο 3ο κεφάλαιο όπου για να υπολογίσουμε τις δίκαιες τιμές έπρεπε να πάμε, μέσω του θεωρήματος Girsanov, από ένα μέτρο υποκειμενικής πιθανότητας σε ένα μέτρο αντικειμενικής πιθανότητας.

Η πιο απλή μορφή της μεθόδου Importance Sampling είναι η ακόλουθη: Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε με τη μέθοδο Monte Carlo τη μέση τιμή μιας συνάρτησης  $h$  μιας τυχαίας μεταβλητής, προερχόμενης από μία κατανομή  $d_1$  με μια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Θέλουμε δηλαδή να υπολογίσουμε το  $\mu = \int_{\mathbb{R}^k} h(x)f(x)dx$  όταν η  $f$  είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας  $k$ -διάστατης κατανομής, από την οποία μπορούμε να παράγουμε ένα τυχαίο (ή ψευδοτυχαίο) δείγμα  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Θεωρούμε μια άλλη κατανομή  $d_2$  με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μια γνωστή συνάρτηση  $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^+$ , τέτοια ώστε  $f(x) > 0 \Rightarrow g(x) > 0$ , από την οποία πάλι μπορούμε να παράγουμε ένα τυχαίο (ή ψευδοτυχαίο) δείγμα  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ . Αν  $f(x) > 0 \forall x \in A \subset \mathbb{R}^k$  και  $f(x) = 0 \forall x \in A^c$ , τότε  $\mu = \int_A h(x) \frac{f(x)}{g(x)} g(x) dx = \mathbb{E}^{d_2} \left( h(Y_i) \frac{f(Y_i)}{g(Y_i)} \right) \forall i \in \{1, \dots, n\}$ , οπότε μπορούμε να εκτιμήσουμε το  $\mu$  από το δειγματικό μέσο των  $h(Y_i) \frac{f(Y_i)}{g(Y_i)}$   $i \in \{1, \dots, n\}$ . Η συμβατική εκτιμήτρια Monte Carlo για το  $\mu$  θα ήταν ο δειγματικός μέσος των τυχαίων μεταβλητών  $h(X_i)$  που προέρχονται από την αρχική κατανομή  $d_1$ , με διασπορά κατά τα γνωστά ίση με  $\frac{1}{n} (\mathbb{E}^{d_1} (h^2(X_i)) - \mu^2)$ , όταν η διασπορά της εκτιμήτριας Importance Sampling που αναφέραμε παραπάνω είναι προφανώς  $\frac{1}{n} (\mathbb{E}^{d_2} (h^2(Y_i) \frac{f^2(Y_i)}{g^2(Y_i)}) - \mu^2)$ . Ισχύει όμως  $\mathbb{E}^{d_2} (h^2(Y_i) \frac{f^2(Y_i)}{g^2(Y_i)}) = \int_A h^2(x) \frac{f^2(x)}{g^2(x)} g(x) dx = \int_A h^2(x) \frac{f(x)}{g(x)} f(x) dx = \mathbb{E}^{d_1} (h^2(X_i) \frac{f(X_i)}{g(X_i)})$ , οπότε αν η συνάρτηση  $g$  μπορεί να επιλεγεί ώστε να ισχύει  $\mathbb{E}^{d_1} (h^2(X_i) \frac{f(X_i)}{g(X_i)}) < \mathbb{E}^{d_1} (h^2(X_i))$ , τότε είναι προφανές ότι η εκτιμήτρια Importance Sampling έχει μικρότερη διασπορά από τη συμβατική εκτιμήτρια Monte Carlo.

Πως πρέπει όμως να επιλέγεται η συνάρτηση  $g$  ώστε να ισχύει η τελευταία ανισότητα; Ας υποθέσουμε αρχικά ότι  $h(x) > 0 \forall x \in A$  και έστω  $g(x) = \frac{f(x)h(x)}{c}$  με  $c = \int_A f(x)h(x)dx = \mu$ . Τότε προφανώς η  $g$  είναι μια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και μπορούμε να δούμε ότι η Importance Sampling εκτιμήτρια έχει μηδενική διασπορά, οπότε είμαστε στην καλύτερη δυνατή περίπτωση. Όμως αυτό δεν οδηγεί πουθενά καθώς η γνώση της συγκεκριμένης  $g$  απαιτεί τη γνώση του  $\mu$  που είναι ακριβώς αυτό που θέλουμε να εκτιμήσουμε. Παρ' όλα αυτά, η παρατήρηση αυτή μας οδηγεί στο να βρούμε μια καλή συνάρτηση  $g$ . Ας υποθέσουμε επιπλέον ότι η  $h$  είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση  $I_B$  ενός συνόλου

$B \subset A$ , οπότε  $\mu = P^{d_1}(B)$ . Τότε η άγνωστη μεν αλλά βέλτιστη συνάρτηση  $g$  που παρουσιάσαμε παραπάνω, ταυτίζεται με την συνάρτηση πυκνότητας της πιθανότητας δεδομένου του  $B$ , η οποία επάγεται από την κατανομή  $d_1$ . Ακόμα όμως και αν έχουμε μια πιο γενική συνάρτηση  $h$  η οποία μηδενίζεται παντού εκτός του  $B$ , είναι εύκολο να δούμε ότι και πάλι ως προς την κατανομή που δίνει η παραπάνω βέλτιστη συνάρτηση  $g$ , το  $B$  είναι ένα βέβαιο ενδεχόμενο. Διαισθητικά λοιπόν, φαίνεται ότι όσο πιο πιθανή είναι η πραγματοποίηση του  $B$  ως προς την πιθανότητα που ορίζει η συνάρτηση πυκνότητας  $g$  που επιλέγουμε, τόσο πιο αποτελεσματική είναι η μέθοδος Importance Sampling. Φυσικά αυτό δεν έχει μαθηματική αυστηρότητα και μπορεί να αποδειχτεί ότι δεν ισχύει γενικά, αλλά ισχύει σίγουρα όταν η συνάρτηση  $g$  που επιλέγουμε προσεγγίζει πολύ τη βέλτιστη. Επειδή όμως δεν ξέρουμε πότε η συνάρτηση  $g$  που επιλέγουμε προσεγγίζει καλά τη βέλτιστη, δεν μπορούμε να ξέρουμε πάντα αν η μέθοδος είναι αποτελεσματική. Ακολουθεί ένα παράδειγμα, στο οποίο η διασπορά είναι αρκετά μεγάλη και η μέθοδος αυτή πράγματι την μειώνει αρκετά.

#### Παράδειγμα: Τιμολόγηση Up and In Barrier Call Option:

Θεωρούμε τη μετοχή και το Up and In Barrier Call του κεφαλαίου 6, με μια μόνο αλλαγή: αντί για φράγμα  $M = 44$  επιλέγουμε ένα πολύ μεγαλύτερο, έστω  $M = 165$ . Ο υπολογισμός της δίκαιης τιμής του παραγώγου αυτού, ισοδυναμεί κατά τα γνωστά με τον υπολογισμό της μέσης τιμής της τελικής αξίας του παραγώγου ως προς το ανατοκισζόμενο χρήμα, η οποία τελική αξία όμως είναι σχεδόν πάντα 0 καθώς δύσκολα η μετοχή θα προλάβει να αποκτήσει αξία 165 ευρώ με τόσο μικρά  $r$ ,  $\sigma$ . Με βάση όσα έχουμε αναφέρει, ο χώρος από τον οποίο λαμβάνουμε τυχαία δείγματα για να τιμολογήσουμε αυτό το παράγωγο, θα είναι ο  $\mathbb{R}^k$  με  $k$  το πλήθος των ενδιάμεσων σημείων στα οποία προσομοιώνουμε το μονοπάτι της ανέλιξης αξίας της μετοχής, από το οποίο και εξαρτάται και η αξία του παραγώγου. Για την καλύτερη δυνατή προσομοίωση του συνεχούς μονοπατιού, πρέπει το  $k$  να είναι μεγάλο όπως ήταν και στη συμβατική τιμολόγηση που κάναμε για το Up and In Barrier Call Option, οπότε ας υποθέσουμε ότι  $k = 5000$ . Στην περίπτωση αυτή ισχύει ότι  $x = (x_1, x_2, \dots, x_{5000}) \in \mathbb{R}^{5000}$  και  $h(x) = I_B \times e^{-rT} (x_{5000} - K)^+$  όπου  $K = 30$ ,  $rT = 0.0135$  και  $B = \left\{ \max_{0 \leq j \leq 5000} \{x_j\} > 165 \right\}$ . Όταν πραγματοποιείται το  $B$ , το  $h(x)$  δύσκολα μηδενίζεται, ενώ όταν το  $B$  δεν πραγματοποιείται, τότε το  $h(x)$  γίνεται σίγουρα μηδέν. Άρα με βάση όσα έχουμε δει, η συνάρτηση  $g$  πρέπει να επιλεγεί έτσι ώστε το  $B$  να πραγματοποιείται με μεγάλη πιθανότητα ως προς την κατανομή  $d_2$  της μεθόδου Importance Sampling, καθώς υπό το μέτρο πιθανότητας με το οποίο δουλεύουμε αυτή τη στιγμή, το  $B$  πραγματοποιείται πολύ σπάνια. Κάθε  $x_i$  αντιστοιχεί στην αξία της μετοχής στη χρονική στιγμή  $t_i = \frac{30i}{5000}$ , η οποία θα είναι  $S_i = 40e^{-0.002t_i + 0.07B_{t_i}}$  με  $B_t$  τυπική κίνηση Brown. Επειδή η ανέλιξη αξίας της μετοχής είναι Μαρκοβιανή ανέλιξη, για τη συνάρτηση πυκνότητας

πιθανότητας θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
f(x) &= f_{S_1, S_2, \dots, S_{5000}}(x_1, x_2, \dots, x_{5000}) \\
&= f_{S_{5000}|S_{4999}, \dots, S_1}(x_{5000}|x_{4999}, \dots, x_1) f_{S_1, \dots, S_{4999}}(x_1, x_2, \dots, x_{4999}) \\
&= f_{S_{5000}|S_{4999}}(x_{5000}|x_{4999}) f_{S_1, S_2, \dots, S_{4999}}(x_1, x_2, \dots, x_{4999}) = \dots \\
&= f_{S_{5000}|S_{4999}}(x_{5000}|x_{4999}) f_{S_{4999}|S_{4998}}(x_{4999}|x_{4998}) \dots f_{S_2|S_1}(x_2|x_1) f_{S_1}(x_1).
\end{aligned}$$

Ακόμα για  $i > 1$  έχουμε  $S_i = S_i(Z_i + Z_{i-1})$ ,  $S_{i-1} = S_{i-1}(Z_{i-1})$ , με  $Z_{i-1} \sim N(0, t_{i-1})$ ,  $Z_i \sim N(0, \frac{3}{500})$  ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και όπου ορίζουμε για  $j \in \{i-1, i\}$ :  $S_j(z) = 40e^{-0.002t_j+0.07z}$  με  $S_j^{-1}(x) = \frac{1}{0.07} (\ln \frac{x}{40} + 0.002t_j)$  και  $\frac{\partial S_j^{-1}(x)}{\partial x} = \frac{1}{0.07x}$ . Έτσι αν  $u(z_1, z_2) = (S_{i-1}(z_1), S_i(z_1 + z_2))$ , τότε μπορούμε να δείξουμε εύκολα ότι ισχύει

$$u^{-1}(x_1, x_2) = \frac{1}{0.07} \left( \ln \frac{x_1}{40} + 0.002t_{i-1}, \ln \frac{x_2}{x_1} + 0.002 \times \frac{3}{500} \right),$$

ενώ η τελευταία συνάρτηση έχει ιακωβιανή ορίζουσα:  $D = \frac{1}{(0.07)^2} \times \frac{1}{x_1 x_2}$ . Επομένως για κάθε  $i > 1$  ισχύει  $u^{-1}(S_{i-1}, S_i) = (Z_{i-1}, Z_i)$  και άρα:

$$\begin{aligned}
f_{S_i|S_{i-1}}(x_i|x_{i-1}) &= \frac{f_{S_{i-1}, S_i}(x_{i-1}, x_i)}{f_{S_{i-1}}(x_{i-1})} = \frac{f_{u^{-1}(S_{i-1}, S_i)}(u^{-1}(x_{i-1}, x_i)) \frac{1}{(0.07)^2 x_{i-1} x_i}}{f_{S_{i-1}}(x_{i-1})} \\
&= \frac{f_{Z_{i-1}, Z_i}(u^{-1}(x_{i-1}, x_i)) \frac{1}{(0.07)^2 x_i x_{i-1}}}{f_{Z_{i-1}}(S_{i-1}^{-1}(x_{i-1})) \frac{1}{0.07 x_{i-1}}} = \dots = \frac{e^{-\frac{500}{6 \times (0.07)^2} (\ln x_i - \ln x_{i-1} + \frac{0.006}{500})^2}}{\sqrt{\frac{6\pi}{500}} \times 0.07 x_i}
\end{aligned}$$

Επειδή ακόμα  $f_{S_1}(x_1) = \frac{e^{-\frac{500}{6 \times (0.07)^2} (\ln \frac{x_1}{40} + \frac{0.006}{500})^2}}{\sqrt{\frac{6\pi}{500}} \times 0.07 x_1}$ , συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω αποτελέσματα συμπεραίνουμε ότι:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{5000}) = \prod_{i=1}^{5000} \frac{1}{\sqrt{\frac{6\pi}{500}} 0.07 x_i} e^{-\frac{500}{6 \times (0.07)^2} (\ln x_i - \ln x_{i-1} + \frac{0.006}{500})^2}$$

όπου  $x_0 = 40$ . Αν χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Girsanov (βλέπε 3ο κεφάλαιο) για να αλλάξουμε λίγο την κατανομή, ώστε τη θέση της τυπικής κίνησης Brown να παίρνει μια τυπική κίνηση Brown αυξημένη κατά  $0.053t$ , τότε ο συντελεστής  $a = -0.002$  στον εκθέτη της ανάλιξης αξίας της μετοχής θα μετατραπεί σε  $0.051$ . Σε αυτή την περίπτωση η αξία της μετοχής σε χρόνο  $t = 30$  θα είναι μεγαλύτερη κατά έναν παράγοντα της τάξης του  $e^{0.053 \times 30} \approx 5$ , οπότε παρατηρώντας τις τροχιές που έχουμε προσομοιώσει σε προηγούμενες ενότητες, θα δούμε ότι το να μη πραγματοποιηθεί το  $B$  αλλά και γενικότερα το να πάρει η αξία της μετοχής

τόσο μικρές τιμές που θα μηδενίσουν την τελική αξία του παραγώγου, δεν είναι τόσο πιθανό όσο πριν. Ως προς τη νέα αυτή κατανομή, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας υπολογίζεται ακριβώς όπως και η  $f$  και προκύπτει ότι είναι η:

$$g(x_1, x_2, \dots, x_{5000}) = \prod_{i=1}^{5000} \frac{1}{\sqrt{\frac{6\pi}{500} \cdot 0.07 x_i}} e^{-\frac{500}{6 \times (0.07)^2} (\ln x_i - \ln x_{i-1} - \frac{3 \times 0.051}{500})^2}$$

ενώ η Importance Sampling εκτιμήτρια θα είναι προφανώς:

$$Y = \frac{\sum_{m=1}^n I_{\{\max_{0 \leq j \leq 5000} \{X_{j,m}\} > 165\}} \times e^{-0.0135} (X_{5000,m} - 30)^+ \frac{f(X_{1,m}, \dots, X_{5000,m})}{g(X_{1,m}, \dots, X_{5000,m})}}{n}$$

όπου  $X_m = (X_{1,m}, \dots, X_{5000,m})$ ,  $m \in \{1, 2, \dots, n\}$  είναι τυχαίο (ή ψευδοτυχαίο) δείγμα τροχιών για την ανέλιξη αξίας της μετοχής.

Ο παρακάτω αλγόριθμος που υλοποιείται στο πακέτο R, πραγματοποιεί 100 τιμολογήσεις με τη συμβατική εκτιμήτρια Monte Carlo και άλλες 100 τιμολογήσεις με την εκτιμήτρια Importance Sampling. Στη συνέχεια εμφανίζει τους δειγματικούς μέσους των προσεγγιστικών δίκαιων τιμών που προκύπτουν με και χωρίς Importance Sampling, καθώς επίσης και τις αντίστοιχες τυπικές αποκλίσεις έτσι ώστε να εξεταστεί η αποτελεσματικότητα της μεθόδου Importance Sampling:

```
result<-seq(1,100)
impresult<-seq(1,100)

for(j in seq(1,100)){
  result[j] <- 0
  impresult[j] <- 0
  for(i in seq(1,1000)){
    v<-cumsum(rnorm(5000)*(3/500)^(1/2))
    u<-cumsum(rep(3/500,5000))
    path1<-40*exp(0.051*u+0.07*v)
    path2<-40*exp(-0.002*u+0.07*v)
    logf<-sum(-500/(6*(0.07)^2)*(log(path/c(40,path[seq(1,4999)])))+
    0.006/500)^2)
    logg<-sum(-500/(6*(0.07)^2)*(log(path/c(40,path[seq(1,4999)])))-
    3*0.051/500)^2)
    m1<-max(max(path1),40)
    m2<-max(max(path2),40)
```

————— Συνέχεια στην επόμενη σελίδα —————



## Συνέχεια αλγορίθμου

```

e2<-(40*exp(-0.002*u[5000]+0.07*v[5000])-30)
e1<-(40*exp(0.051*u[5000]+0.07*v[5000])-30)
if(m1>165&e1>0) {impresult[j] <- impresult[j]+e1*
exp(-0.0135+logf-logg)*1/1000}
if(m2>165&e2>0) {result[j] <- result[j]+e2*exp(-0.0135)*1/1000}
}
}

mean(impresult)
mean(result)
sd(impresult)
sd(result)

```

Ο παραπάνω αλγόριθμος, για τις 100 συμβατικές τιμολογήσεις του συγκεκριμένου  $U_p$  and In Barrier Call Option, μας δίνει μέση τιμή: 0.01415 με τυπική απόκλιση: 0.05122, δηλαδή τυπικό σφάλμα 400% που είναι εξαιρετικά κακό. Για τις 100 τιμολογήσεις όμως με τη μέθοδο Importance Sampling, μας δίνει μέση τιμή: 0.01547 και τυπική απόκλιση: 0.00127 που είναι αρκετά μικρή. Επίσης, αν τρέξουμε τον αλγόριθμο του 5ου κεφαλαίου για τον υπολογισμό της θεωρητικής δίκαιης τιμής του  $U_p$  and In Barrier Call Option, αλλάζοντας το φράγμα από 44 σε 165, θα δούμε ότι η θεωρητική δίκαιη τιμή για το  $U_p$  and In Barrier Call Option με φράγμα  $M = 165$  είναι: 0.01621. Η τιμή αυτή συμφωνεί με τη μέση τιμή που μας έδωσε η εκτίμηση με Importance Sampling, σε ένα βαθμό που, λάβουμε υπόψιν και τη μεροληψία λόγω διακριτοποίησης, μπορεί να θεωρηθεί εντός των ορίων του σφάλματος που μας έδωσε η συγκεκριμένη μέθοδος. Με βάση το καλύτερο σφάλμα της συμβατικής μεθόδου τιμολόγησης και τη θεωρία του 5ου κεφαλαίου, για να πετύχουμε τόσο καλή προσέγγιση χωρίς τεχνικές ελάττωσης διασποράς θα έπρεπε να λάβουμε δείγμα 2500 φορές μεγαλύτερο. Αυτό θα είχε χρονικό κόστος που δεν συγκρίνεται με το χρονικό κόστος υπολογισμού των επιπλέον παραστάσεων που εισάγονται για την εφαρμογή της μεθόδου Importance Sampling, οπότε έτσι καταλήγουμε στο ότι η μέθοδος αυτή δουλεύει εξαιρετικά στη συγκεκριμένη περίπτωση.

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Εντολές λογισμικών Mathematica - R

### Πράξεις (κοινές για τα δύο λογισμικά):

- + : πρόσθεση
- : αφαίρεση
- \* : πολλαπλασιασμός
- / : διαίρεση
- ^ : ύψωση σε δύναμη

### Βασικές εντολές Wolfram Mathematica:

Εντολή1;Εντολή2;Εντολή3;.....: Εκτελεί πρώτα την Εντολή1, μετά την Εντολή2, κ.ο.κ.

F[x1\_,x2\_, ...,]:= .....: ορίζει τη συνάρτηση F ως προς τις μεταβλητές x1, x2, κ.ο.κ.

x=RandomVariate[NormalDistribution[a,b], k]: παράγει k ψευδοτυχαίους αριθμούς από την κανονική κατανομή με μέση τιμή a και τυπική απόκλιση b, και εκχωρεί το διάνυσμα αυτών στο x. Αν παραλείψουμε το k, τότε παράγεται μόνο ένας ψευδοτυχαίος αριθμός. Αν παραλείψουμε τα a,b τότε αυτά παίρνουν τις τιμές 0 και 1 αντίστοιχα.

x=CDF[NormalDistribution[a,b],y]: Υπολογίζει τη συνάρτηση κατανομής της κανονικής κατανομής με μέση τιμή a και τυπική απόκλιση b. Αν παραλείψουμε τα a,b τότε αυτά παίρνουν τις τιμές 0 και 1 αντίστοιχα. Το αποτέλεσμα εκχωρείται στη μεταβλητή x.

Log[x]: υπολογίζει το νεπέριο λογάριθμο της μεταβλητής x

IntegerQ[a]: Επιστρέφει True αν ο a είναι ακέραιος, False διαφορετικά.

Exp[x]: υπολογίζει το  $e^x$  για τη μεταβλητή x

For[i=a,i<b,i++,εντολή1;εντολή2;...]: Υλοποιεί έναν βρόγχο, όπου οι εντολές εντολή1, εντολή2 κτλ εκτελούνται για κάθε i με τιμές από a μέχρι b, ενώ το i αυξάνεται μετά από κάθε εκτέλεση των εντολών κατά 1

While[Συνθήκη,εντολή1;εντολή2;...]: Υλοποιεί έναν βρόγχο, όπου οι εντολές εντολή1, εντολή2 κτλ εκτελούνται όσο ισχύει η Συνθήκη.

If[Συνθήκη, εντολή1;εντολή2...]: Εκτελεί τις εντολές εντολή1, εντολή2, κ.ο.κ αν η Συνθήκη είναι αληθής (έχει την τιμή True).

a=List[]: Δημιουργεί μια κενή λίστα με όνομα "a".

a[[i]]: καλεί το i-οστό στοιχείο της λίστας "a"

Append[a,x]: καλεί μια λίστα με το στοιχείο "x" πρώτο και στα στοιχεία της λίστας "a" στη συνέχεια

Join[a,b]: καλεί μια λίστα που έχει πρώτα τα στοιχεία της λίστας "a" και στη συνέχεια τα στοιχεία της λίστας "b"

DiscretePlot[G[t],{t,a,b,s},Joined->B, AxisLabel -> {"m","n"}]: Εμφανίζει μια γραφική παράσταση των διακριτών τιμών της συνάρτησης G ως προς τη διακριτή μεταβλητή t, η οποία παίρνει διαδοχικά τιμές στο [a,b] με βήμα s. Η παράμετρος Joined είναι μια λογική παράμετρος, όπου όταν Joined -> True τότε τα σημεία εμφανίζονται ενωμένα με γραμμές. Τα "m", "n" είναι τα ονόματα που δίνονται στους άξονες

ListPlot[{Table[{i/2,G[i]},{i,a,b}],Table[{i/2,H[i]},{i,a,b}]},PlotLegend->{"u","v"},LegendPosition->{x,y}, AxisLabel -> {"m","n"}]: Εμφανίζει μια γραφική παράσταση των διακριτών τιμών των συναρτήσεων G και H ως προς τη διακριτή μεταβλητή  $j=i/2$ , η οποία παίρνει διαδοχικά τιμές στο [a,b] με βήμα 1/2. Η παράμετρος PlotLegend απαιτεί τη φόρτωση ενός ειδικού πακέτου και χρησιμεύει στην εισαγωγή λεζάντας στο γράφημα. Τα "m", "n" είναι τα ονόματα που δίνονται στους άξονες

ErrorListPlot[{Table[{i/2,G[i]}, ErrorBar[E[i]},{i,a,b}],Table[{i/2,H[i]}, ErrorBar[0]},{i,1,60}]}, AxisLabel -> {"m","n"}]: Η εντολή αυτή απαιτεί φόρτωση ειδικού πακέτου. Εμφανίζει μια γραφική παράσταση των διακριτών τιμών των συναρτήσεων G και H ως προς τη διακριτή μεταβλητή  $j=i/2$ , η οποία παίρνει διαδοχικά τιμές στο [a,b] με βήμα 1/2. Γύρω το i-οστό σημείο που αντιστοιχεί σε τιμή της G, εμφανίζει μια γραμμή που εκφράζει πιθανό σφάλμα μεγέθους E[i]. Τα "m", "n" είναι τα ονόματα που δίνονται στους άξονες

Labeled[Εντολή, "label"]]: Εμφανίζει το αποτέλεσμα της Εντολής που δίνεται και ακριβώς από κάτω εμφανίζει το μήνυμα "label".

\*\*\* Για απόκτηση γνώσης σε βάθος σχετικά με το λογισμικό Mathematica, παραπέμπουμε στη βιβλιογραφία στο [2].

### Βασικές εντολές στατιστικού πακέτου R:

`<-` : Εντολή εκχώρησης, προτιμάται αντί του “`=`”.

`x <- rep(a, b)`: εκχωρεί στο `x` ένα διάνυσμα με `b` το πλήθος στοιχεία ίσα με `a`. Το `a` μπορεί να είναι και `NA`, δηλαδή αγνοούμενη τιμή.

`seq(a:b)`: Για `a, b` ακέραιους, επιστρέφει διάνυσμα με τιμές τους ακέραιους που υπάρχουν στο κλειστό διάστημα `[a, b]`.

`rnorm(a)`: δημιουργεί ένα διάνυσμα μεγέθους `a` με ψευδοτυχαίους αριθμούς από την τυποποιημένη κανονική κατανομή.

`pnorm(x)`: επιστρέφει την τιμή της συνάρτησης κατανομής πιθανότητας της τυποποιημένης κανονικής κατανομής στην τιμή `x`.

`for(i in v) {εντολές}`: εκτελεί τις εντολές εντός των αγκίστρων για κάθε τιμή του `i` μεταξύ των αριθμών του διανύσματος `v`.

`if(συνθήκη) {εντολές}`: εκτελεί τις εντολές εντός των αγκίστρων όταν η συνθήκη εντός των παρενθέσεων είναι αληθής (έχει τιμή `TRUE`).

`matrix(a, ncol=b, byrow=T)`: δημιουργεί έναν πίνακα με `b` στήλες με τα στοιχεία του διανύσματος `a`. Η σειρά εισαγωγής των στοιχείων στον πίνακα είναι ανά γραμμή.

`v[j]`: επιστρέφει το `j`-οστό στοιχείο του διανύσματος `v`.

`v[Συνθήκη]`: επιστρέφει τα στοιχεία ενός διανύσματος `v`, στις θέσεις των οποίων ισχύει η Συνθήκη.

`cumsum(v)`: επιστρέφει ένα διάνυσμα με στοιχεία τα διαδοχικά μερικά αθροίσματα των στοιχείων του διανύσματος `v`.

`colSums(M)`: επιστρέφει διάνυσμα με τα αθροίσματα των στοιχείων των στηλών του πίνακα  $M$ .

`apply(M,2,cumsum)`: εφαρμόζει την εντολή `cumsum` στις στήλες του πίνακα  $M$  και επιστρέφει πίνακα των οποίων οι στήλες είναι τα αποτελέσματα.

`sd(v)`: επιστρέφει την τυπική απόκλιση των στοιχείων του διανύσματος  $v$

`cor(v,u)`: επιστρέφει το συντελεστή συσχέτισης των στοιχείων των διανυσμάτων  $u$  και  $v$ .

`log(x)`: υπολογίζει το νεπέριο λογάριθμο της μεταβλητής  $x$

`exp(x)`: υπολογίζει το  $e^x$  για τη μεταβλητή  $x$

`boxplot(u,v, παράμετροι)`: Εμφανίζει ένα συγκριτικό θηκογράφημα για τις τιμές των διανυσμάτων  $u$  και  $v$ . Με τις παραμέτρους μπορούμε να προσθέσουμε επιπλέον πράγματα στο θηκογράφημα, όπως υπότιτλους κτλ.

`title("title")`: δίνει στο γράφημα που έχει εμφανιστεί τον τίτλο "title".

## Βιβλιογραφία

### Ελληνική:

1) Σπηλιώτης, Ιωάννης, καθηγητής Ε.Μ.Π. Στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις: Με εφαρμογές στα χρηματοοικονομικά / Ι. Σπηλιώτης. - Αθήνα : Συμεών, 2004.

2) Σύγχρονο μαθηματικό λογισμικό matlab-mathematika : Εισαγωγή και εφαρμογές / Συλλογικό έργο, Γ. Σ. Παπαγεωργίου, Χαράλαμπος Γρ. Τσίτουρας, Ι. Θ. Φαμέλης. - 1η έκδ. - Αθήνα : Συμεών, 2004.

### Ξένη:

3) Introduction to the Mathematics of Finance, R. J. Williams, University of California - San Diego, La Jolla, CA : American Mathematical Society.

4) Monte Carlo Methods in Financial Engineering, Paul Glasserman, 403 Uris Hall, Graduate School of Business, Columbia University - New York, NY 10027, USA : Springer, 2004.