Το Πρόβλημα Cauchy για τις Εξισώσεις Einstein - Ζητήματα Ευστάθειας

Μοσχίδης Γεώργιος

Διπλωματική Εργασία

Επιβλέπων Καθηγητής: Δαφέρμος Μιχάλης

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Πρόλογος

Παρ᾽ ότι οι πρώτες μη τετριμμένες λύσεις των εξισώσεων Einstein έκαναν την εμφάνισή τους ήδη από τα πρώτα χρόνια της γέννησης της γενικής θεωρίας της σχετικότητας, η αντιμετώπιση ζητημάτων που σχετίζονται με αυτές με αυστηρά μαθηματικά εργαλεία δεν έγινε παρά αρκετά χρόνια αργότερα, κατά τις δεκαετίες του '50 και του '60. Η περίοδος, δε, των δεκαετιών του '60 και του '70 αποκαλείται συχνά και χρυσή εποχή της θεωρίας της σχετικότητας, και ένα από τα σημαντικά αποτελέσματα των χρόνων αυτών είναι και η θεμελίωση του προβλήματος Cauchy για τις εξισώσεις Einstein. Η θεμελίωση αυτή ήταν απαραίτητη για την μετέπειτα μελέτη των λύσεων των εξισώσεων Einstein με τα εργαλεία της θεωρίας των μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων, και άνοιξε τον δρόμο για την επίτευξη πολυάριθμων αποτελεσμάτων στο χώρο αυτό αλλά και την διατύπωση ακόμα περισσότερων δύσκολων εικασιών. Όπως συμβαίνει και με τους περισσότερους κλάδους των διαφορικών εξισώσεων, ένα από τα κεντρικά ανοιχτά προβλήματα της προσέγγισης αυτής έχει να κάνει με την μελέτη της ευστάθειας των λύσεων των εξισώσεων Einstein.

Για το λόγο, λοιπόν, αυτό, η παρούσα εργασία επικεντρώνεται κατ᾽ αρχάς στην προσέγγιση του προβλήματος Cauchy για τις εξισώσεις Einstein: Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται μια παρουσίαση των αποδείξεων σχετικά με τον ορισμό και την καλή τοποθέτηση του αντίστοιχου προβλήματος αρχικών τιμών, καθώς και της έννοιας του μεγιστικού καθολικά υπερβολικού αναπτύγματος. Στην συνέχεια, στο τρίτο κεφάλαιο, παρουσιάζονται κάποιες από τις κλασικότερες λύσεις των εξισώσεων Einstein και σχολιάζονται τα γεωμετρικά τους χαρακτηριστικά υπό το πρίσμα του προβλήματος Cauchy για αυτές. Το κεφάλαιο αυτό (και μαζί του η παρούσα εργασία) κλείνει με μια μικρή συζήτηση σχετικά με την ευστάθεια των λύσεων αυτών, καθώς και με μια παρουσίαση των σημαντικότερων αποτελεσμάτων που έχουν επιτευχθεί προς την κατεύθυνση αυτή.

Φυσικά, η διαφορική γεωμετρία παίζει θεμελιώδη ρόλο σε όλες τις εκφάνσεις της θεωρίας της σχετικότητας, και για τον λόγο αυτό το πρώτο κεφάλαιο περιλαμβάνει μια μικρή εισαγωγή σε βασικές έννοιες της Ριμάννειας αλλά και της Λορέντζιας γεωμετρίας. Βέβαια, η εισαγωγή αυτή απέχει πολύ από το να θεωρηθεί πλήρης, μια και ο σκοπός της είναι απλώς η παρουσίαση των ορισμών και των αποτελεσμάτων που κάνουν την εμφάνισή τους αργότερα στο κείμενο. Πέραν αυτού, για την ολοκληρωμένη παρουσίαση των αποδείξεων του δευτέρου κεφαλαίου, είναι απαραίτητη η γνώση κάποιων αποτελεσμάτων σχετικά με τις λύσεις μη γραμμικών κυματικών εξισώσεων. Τα αποτελέσματα αυτά παρουσιάζονται με αναλυτικές αποδείξεις (στις περισσότερες περιπτώσεις) στο παράρτημα, ακολουθώντας (όπως και στο μεγαλύτερο μέρος του δεύτερου κεφαλαίου) τον [2]. Τέλος, στην συζήτηση σχετικά με την ευστάθεια των λύσεων των εξισώσεων Einstein κεντρική θέση κατέχει η μέθοδος του διανυσματικού πεδίου, και για τον λόγο αυτό το παράρτημα περιλαμβάνει κάποιους βασικούς σχετικούς ορισμούς.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον κ. Μ. Δαφέρμο, ο οποίος με στήριξε πραγματικά με πολυσχιδείς τρόπους σε όλη την διάρκεια της εκπόνησης της εργασίας αυτής. Με μύησε στον κόσμο της γενικής σχετικότητας και μου δίδαξε πολλά περισσότερα από όσα διαφαινονται στην προκείμενη εργασία. Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω και τον κ. Δ. Γκιντίδη και την κ. Κ. Κυριάκη, οι οποίοι αποτελούν τα δύο άλλα μέλη της τριμελούς επιτροπής της εργασίας, και οι οποίοι μου εχουν προσφέρει αμέριστα τόσο τις μαθηματικές τους γνώσεις όσο και την πολύτιμη βοήθειά τους σε όλα τα χρόνια των σπουδών μου.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή: Στοιχεία διαφορικής γεωμετρίας και αιτιακών δομών

Σκοπός της εισαγωγικής αυτής παραγράφου είναι η συνοπτική παρουσίαση των βασικών εννοιών που προέρχονται από τον χώρο της Ριμάνειας και Λορέντζιας γεωμετρίας, οι οποίες αποτελούν το βασικό πλαίσιο αναφοράς μέσα στο οποίο κινείται η γενική θεωρία της σχετικότητας. Βέβαια, η παράθεση των εννοιών αυτών γίνεται με το σκεπτικό πως ο αναγνώστης ειναι εξοικειωμένος με τις έννοιες και τις τεχνικές της διαφορικής γεωμετρίας και του λογισμού σε πολλαπλότητες. Για μια πιο ενδελεχή (και πολύ πιο προσεγμένη) προσέγγιση των θεμάτων αυτών, παραμπέμπουμε στα εξαιρετικα [10, 11].

Οι χώροι που αποτελούν ως επί το πλείστον το βασικό σημείο αναφοράς της διαφορικής γεωμετρίας ειναι οι διαφορίσιμες πολλαπλότητες. Πιο συγκεκριμένα, μια πολλαπλότητα διάστασης n ορίζεται ως ένας Hausdorff και δεύτερος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος M, ο οποίος είναι τοπικά ομοιορφικός με τον $\mathbb{R}^n$. Υπάρχει, δηλαδή, μια συλλογή ανοιχτών συνόλων του M $\{U_i\}_{i\epsilon I}$ και μια αντιστοιχη συλλογή απεικονίσεων $\{\varphi_i\}_{i\epsilon I}$ ώστε $\cup_{i\epsilon I} U_i = M$ και $\forall i\epsilon I$: $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ ομοιομορφικά. Μια τέτοια οικογένεια ζευγών $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ ονομάζεται άτλαντας. Εάν περιοριστούμε στην τομή δύο τέτοιων συνόλων, έστω $U_i \cap U_j$, και υποθέσουμε ότι αυτή είναι μη κενή, τότε τόσο η φ_i όσο και η φ_j απεικονίζουν ομοιομορφικα το σύνολο $U_i \cap U_j$ στα ανοιχτα υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ και $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ αντίστοιχα. Μπορούμε, λοιπόν, για κάθε τέτοιο ζεύγος απεικονίσεων να ορίσουμε την λεγόμενη συνάρτηση μετάβασης $\varphi_{i,j} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \subseteq \mathbb{R}^n \to \varphi_j(U_i \cap U_j) \subseteq \mathbb{R}^n$, $\varphi_{i,j}(x) = \varphi_{\mathrm{j}}(\varphi_i^{-1}(x))$. Η συλλογή των συναρτήσεων αυτών περιγράφει το πως μπορούμε να κατασκευάσουμε την πολλαπλότητα M "κολλώντας" κατάλληλα ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ και ουσιαστικά καθορίζει και τις ιδιότητες της M. Απαιτώντας οι συναρτήσειςαυτές να ικανοποιούν κάποιους περιορισμούς, μπορούμε να δώσουμε επιπλέον δομή στην πολλαπλότητα. Έτσι, λοιπόν, μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα τάξης C^k ορίζεται ως μια πολλαπλότητα με έναν άτλαντα $\{U_i, \varphi_i\}_{i\epsilon I}$ για τον οποίο όλες οι συναρτήσεις μετάβασης είναι k φορές συνεχώς παραγωγίσιμες. Ένας μεγιστικός τέτοιος άτλαντας (ένας άτλαντας, δηλαδή, για τον οποίο κάθε ζεύγος (U_i, φ_i) το οποίο δεν περιέχεται σε αυτόν δεν μπορεί να προστεθεί σε αυτόν χωρίς να δημιουργηθεί κάποια συνάρτηση μετάβασης που ξεφεύγει από την κατηγορία των C^k συναρτήσεων) θα λέμε ότι ορίζει μια διαφορίσιμη δομή στην πολαπλότητα M.

Σε μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα M ορίζεται με φυσιολογικό τρόπο η έννοια της παραγωγίσιμης συνάρτησης ως εξής: Μια συνάρτηση $f : M \to \mathbb{R}$ θα καλείται παραγωγίσιμη αν για κάθε U_i στον άτλαντα ισχύει ότι η $f \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη. Φυσικά, ο ορισμός αυτός έχει νόημα μόνο επειδή οι συναρτήσεις μετάβασης είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι το σύνολο των συναρτήσεων αυτών αποτελεί μια $\mathbb{R}$-άλγεβρα A με τις κατά σημείο πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού. Το σύνολο των παραγωγίσεων (derivations) της άλγεβρας αυτής, δηλαδή το σύνολο των $\mathbb{R}-$γραμμικών απεικονίσεων $D : A \to A$ που ικανοποιούν τον κανόνα του Leibniz $D(f \cdot g) = D(f) \cdot g + f \cdot D(g)$ αποτελεί την λεγόμενη εφαπτόμενη δέσμη TM της M. Κάθε τέτοια παραγώγιση θα λέμε ότι αποτελεί ένα εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο στο M. Εναλλακτικά, η εφαπτόμενη δέσμη TM μπορεί να οριστεί ως η διανυσματική δέσμη πάνω από το M με ίνα ισόμορφη με τον $\mathbb{R}^n$, τετριμμένο κάλυμμα $\{U_i\}_{i\epsilon I}$ και συναρτήσεις μετάβασης δέσμης τις ιακωβιανές των συναρτήσεων μετάβασης $\{\varphi_{i,j}\}_{i,j\epsilon I}$ του άτλαντα $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\epsilon I}$. Η δυική δέσμη της TM, T*M, ορίζεται ως η διανυσματική δέσμη για την οποία κάθε ίνα της είναι ο δυικός χώρος V^* της ίνας V της TM και οι συναρτήσεις μετάβασης δέσμης είναι οι δυικές των αντίστοιχων συναρτήσεων για την TM. Αντίστοιχα, μπορούν να οριστούν και οι τανυστικές δέσμες $\otimes^k TM \otimes^l T*M$ ως οι διανυσματικές δέσμες πάνω από την πολλαπλότητα M με ίνες τα αντίστοιχα τανυστικά γινόμενα των ινών της TM και της δυικής της και συναρτήσεις μετάβασης τα αντίστοιχα τανυστικά γινόμενα των συναρτήσεων μετάβασης της TM και της T*M. Οι τομές της τανυστικής δέσμης $\otimes^k TM \otimes^l T*M$ (δηλαδή οι συναρτήσεις $f : M \to \otimes^k TM \otimes^l T*M$ για τις οποίες κάθε f(x) ανήκει στην ίνα της δέσμης πάνω από το x) θα καλούνται και (k,l)-τανυστές. Δεν θα αναφερθούμε άλλο στις ιδιότητες της εφαπτόμενης δέσμης, παρά θα παραπέμψουμε τον αναγνώστη στο [10].

Παρ' ότι οι διαφορίσιμες πολλαπλότητες έχουν ιδιαίτερα πλούσια θεωρία από μόνες τους, αποκτούν γεωμετρικό ενδιαφέρον μόνο με τον ορισμό μιας κατάλληλης μετρικής, η οποία σέβεται την δομή τους ως πολλαπλότητες. Μια τέτοια μετρική λέγεται Ριμάννεια μετρική, και καθορίζεται από μια συνεχή συνάρτηση $g : TM \times TM \to \mathbb{R}$ για την οποία ο περιορισμός της στις ίνες $V \times V$ είναι μια συμμετρική και θετικά ορισμένη διγραμμική μορφή. Στην γενική θεωρία της σχετικότητας, όμως, ιδιαίτερο ρόλο παίζουν οι λεγόμενες Λορέντζιες μετρικές (οι οποίες, βέβαια, δεν ορίζουν μια μετρική με την αυστηρή έννοια), για τις οποίες η πιο πάνω συνάρτηση g σε κάθε ίνα V είναι θετικά ορισμένη σε έναν υπόχωρο συνδιάστασης 1, και αρνητικά ορισμένη σε έναν συμπληρωματικό του υπόχωρο. Σε κάθε ίνα της TM, λοιπόν, τα διανύσματα θα ταξινομούνται σε τρείς κατηγορίες ως εξής:

- Αν g(v,v)<0, το v θα καλείται χρονόμορφο ή χρονοειδές
- Αν g(v,v)=0, το v θα καλείται φωτοειδές

- Αν g(v,v)>0, το v θα καλείται χωρόμορφο ή χωροειδές
- Αν g(v,v)≤ 0 το v θα καλείται αιτιώδες

Αντίστοιχα, τα διανυσματικά πεδία (ή οι καμπύλες) στο M θα χαρακτηρίζονται ως χρονοειδή, φωτοειδή ή χωροειδή (ή και αιτιώδη) αν ο περιορισμός σε κάθε ίνα του διανυσματικού πεδίου (ή ενός εφαπτόμενου διανυσματικού πεδίου της καμπύλης) είναι χρονοειδή, φωτοειδή ή χωροειδή (ή και αιτιώδη) διανύσματα. Επιπλέον, μια υποπολλαπλότητα μιας Λορέντζιας πολλαπλότητας M θα καλείται χωρόμορφη ή χωροειδής αν η μετρική που κληρονομεί από την M ειναι Ριμάννεια. Για ένα αιτιώδες διάνυσμα μπορούμε να ορίσουμε το μήκος του ως $|v| = \sqrt{-g(v,v)}$. Έτσι, αν τα v, w είναι αιτιώδη ισχύει η ανεστραμμένη τριγωνική ανισότητα: $|v+w| \geq |v| + |w|$, ενώ γενικότερα αν το επίπεδο που παράγουν τα v, w περιέχει και μη μηδενικό φωτοειδές διάνυσμα η ανισότητα Cauchy ισχύει ανεστραμμένη: $|g(v,w)|^2 \geq |g(v,v)| \cdot |g(w,w)|$. Να σημειωθεί ότι στην ειδική σχετικότητα, όπου ο χωροχρόνος μοντελοποιείται από τον χώρο Minkowski και οι ταχύτητες των σωμάτων οφείλουν να είναι αιτιώδη διανύσματα, η ανεστραμμένη τριγωνική ανισότητα αποτελεί την ουσία του παραδόξου των διδύμων.

Δεδομένου ότι μια τέτοια διγραμμική συνάρτηση g είναι μη ιδιάζουσα, με την βοήθειά της καθορίζεται με μοναδικό τρόπο ένας ισομορφισμός δεσμών $\flat$ μεταξύ της TM και της T*M, ώστε $\forall X \in TM$, $X^\flat = g(X, \cdot)$.

Εν γένει, οι περισσότεροι ορισμοί και ιδιότητες των ριμάννειων πολλαπλοτήτων επεκτείνονται και στην περίπτωση της Λορέντζιας γεωμετρίας. Παρ' ότι, όμως, κάθε διαφορίσιμη πολλαπλότητα επιδέχεται μια συμβατή Ριμάννεια μετρική (όπως μπορεί να δειχτεί με ένα απλό επιχείρημα διαμερίσεων της μονάδας), δεν ισχύει το ίδιο και για μια Λορέντζια μετρική, αφού η ύπαρξη της κατανομής ευθειών πάνω στις οποίες η g είναι αρνητικά ορισμένη καθορίζει μια διάσπαση της εφαπτόμενης δέσμης TM σε τοπολογικό άθροισμα δύο διανυσματικών δεσμών, το οποίο δεν είναι εφικτό για κάθε διαφορίσιμη πολλαπλότητα.

Σε πολλές περιπτώσεις είναι απαραίτητο να κάνει κανείς κάποιους υπολογισμούς σχετικά με διάφορα γεωμετρικά αντικείμενα, και για το σκοπό αυτό ειναι ιδιαίτερα βολική η επιλογή κάποιου τοπικού συστήματος συντεταγμένων στο οποίο να εκφράζονται οι διάφορες ποσότητες. Πιο συγκεκριμένα, λοιπόν, λόγω του ορισμού μιας πολλαπλότητας M, γύρω από κάθε σημείο $x\epsilon M$ υπάρχει μια περιοχή U του άτλαντα που απεικονίζεται ομοιομορφικά στον $\mathbb{R}^n$ μέσω μιας απρεικόνισης φ. Αποδεικνύεται, λοιπόν, τότε ότι κάθε εφαπτόμενο διανυσματικό πεδιο v στην U μπορεί να γραφεί ως $v^1(x) \cdot \varphi^*(\frac{\partial}{\partial x_1}) + ... + v^n(x) \cdot \varphi^*(\frac{\partial}{\partial x_n})$ (όπου οι παραγωγίσεις $\varphi^*(\frac{\partial}{\partial x_i})$ είναι οι pullpack των παραγωγίσεων $\frac{\partial}{\partial x_i}$ στον $\mathbb{R}^n$, και στο εξής θα συμβολίζουμε και αυτές με $\frac{\partial}{\partial x_i}$ ή ∂_i). Οι συναρτήσεις v^i αποτελούν τις συντεταγμένες του διανυσματικού πεδίου v σύμφωνα με τον χάρτη (U, φ). Στην περίπτωση 1-μορφών, δηλαδή τομών της δυικής δέσμης T*M, οι συντελεστές των συνιστωσών τους θα γράφονται με τους δείκτες "κατεβασμένους". Με τον ίδιο τρόπο, η λορέντζια μετρική g αναπαρίσταται τοπικά ως $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$, και με αυτόν τον συμβολισμό (χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό του Einstein για την άθροιση) για δυο διανυσματικά πεδία x, y ισχύει $g(x,y) = g_{ij}x^iy^j$. Θα συμβολίζουμε με g^{ij} τον αντιστροφο του g_{ij}. Στο εξής, θα "ανεβάζουμε" και θα "κατεβάζουμε" τους δείκτες σε διανύσματα και τανυστές με την βοήθεια των g^{ij} και g_{ij}, οπότε και θα έχουμε λόγου χάρη: $x^i = g^{ij}x_j$. Αυτό αποτελεί ουσιατικά μια έκφραση του ισομορφισμού μεταξύ TM και T*M που καθορίζεται από την μετρική μας.

Η μετρική αυτή επεκτείνεται και στην τανυστική δέσμη $\otimes^k TM \otimes^l T^*M$, ώστε για δύο (k,l)-τανυστές $S^{a_1,..a_k}_{b_1,..b_l}$, $P^{c_1,..c_k}_{d_1,..d_l}$ (με συντεταγμένες σε έναν τοπικό χάρτη) να έχουμε ότι $\tilde{g}(S,P) = g^{b_1d_1}g^{b_2d_2}\cdot\cdot g^{b_ld_l}g_{a_1c_1}\cdot\cdot g_{a_kc_k}S^{a_1,..a_k}_{b_1,..b_l}P^{c_1,..c_k}_{d_1,..d_l}$.

Πολύ σημαντική έννοια που σχετίζεται με τις διανυσματικές δέσμες πάνω από διαφορίσιμες πολλαπλότητες είναι η έννοια της παράλληλης μεταφοράς διανυσμάτων. Η παράλληλη μεταφορά διανυσμάτων μπορεί να θεμελιωθεί αξιωματικά ώστε να αποτελεί γενίκευση της παράλληλης μεταφοράς διανυσμάτων στον $\mathbb{R}^n$, και η σημασία της έγκειται στο ότι επιτρέπει την σύγκριση διανυσμάτων που ανήκουν σε διαφορετικές ίνες της δέσμης. Με αυτόν τον τρόπο, μπορεί να οριστεί με φυσιολογικό τρόπο μια ιδιαίτερη παράγωγος, η συναλλοίωτη παράγωγος μιας τομής της δέσμης, χρησιμοποιώντας απλώς στον "κλασικό" ορισμό της παραγώγου την έννοια της παράλληλης μεταφοράς ώστε να έχει νόημα η διαφορά δύο διανυσμάτων που ανήκουν σε διαφορετικές ίνες. Αποφεύγοντας να παρουσιάσουμε πιο βαθιά το πολύ ενδιαφέρον αυτό θέμα, να αναφέρουμε πως στην περίπτωση μιας Ριμάννειας ή Λορέντζιας πολλαπλότητας ορίζεται κατά μοναδικό τρόπο παράλληλη μεταφορά κατά την οποία διατηρείται το εσωτερικό γινόμενο g(X,Y) κατά την παράλληλη μεταφορά των διανυσμάτων X, Υ μιας ίνας και η "συνοχή" της οποίας έχει μηδενική στρέψη. Η συνοχή αυτή ονομάζεται και συνοχή Levi-Civita. Σε αυτήν την περίπτωση, η συναλλοίωτη παράγωγος ενός διανυσματικού πεδίου X στην κατεύθυνση του διανυσματικού πεδίου Υ δίνεται από την σχέση:

$$(\nabla_Y X)^i = Y^j\partial_j X^i + \Gamma^i_{kl}Y^kX^l$$

όπου

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2}g^{im}(\partial_k g_{ml} + \partial_l g_{mk} - \partial_m g_{kl})$$

Λόγω του ορισμού της Levi - Civta συνοχής, ισχύει ότι $\nabla g = 0$ και επομένως $V(g(X,Y)) = g(\nabla_V X, Y) + g(X, \nabla_V Y)$. Επιπλέον, η έννοια της συναλλοίωτης παραγώγου μπορεί να επεκταθεί και στις τανυστικές δέσμες που προκύπτουν από την TM ώς εξής (σε τοπικές συντεταγμένες): Αν $S \in \Gamma(\otimes^k TM \otimes^l T^*M)$ και $V \in \Gamma(TM)$:

$$(\nabla_V S)^{a_1,..a_k}_{b_1,..b_l} = V^n\partial_n S^{a_1,..a_k}_{b_1,..b_l} + \sum_{i=1}^{k}\Gamma^{a_i}_{n,m}S^{a_1,..m..a_k}_{b_1,..b_l}V^n - \sum_{i=1}^{k}\Gamma^m_{n,a_i}S^{a_1,..a_k}_{b_1,..m..b_l}V^n$$

Υπό το πρίσμα της συναλλοίωτης παραγώγου, λοιπόν, ειναι δυνατόν να οριστεί μια ιδιαίτερη κατηγορία καμπυλών στην πολλαπλότητα M, οι λεγόμενες γεωδαισιακές καμπύλες. Πιο συγκεκριμένα, μια C^2 καμπύλη $\gamma : \mathbb{R} \to M$ θα λέγεται γεωδαισιακή αν ισχύει ότι $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$ ή ισοδύναμα σε ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων $\ddot\gamma^m + \Gamma^m_{kl}\dot\gamma^k\dot\gamma^l = 0$. Σύμφωνα με το θεώρημα του Picard για τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, αν η μετρική g είναι τάξης τουλάχιστον C^2 τότε για κάθε σημείο $p \in M$ και για κάθε διάνυσμα $v \in T_pM$ υπάρχει μοναδική γεωδαισιακή γ ώστε γ(0)=p και $\dot{\gamma}(0) = v$. Το γεγονός αυτό μας επιτρέπει να ορίσουμε $\forall p \in M$ μια ιδιαίτερη απεικόνιση $exp_p : T_pM \to M$, η οποία στέλνει κάθε $v \in T_pM$ στο σημείο γ(1), όπου γ η μοναδική γεωδαισιακή που μας εξασφαλίζει το θεώρημα του Picard. Μάλιστα, περιοριζόμενοι σε μια αρκούντως "μικρή" ανοιχτή περιοχή $\tilde{U}$ του 0_p στην ίνα T_pM, η απεικόνιση αυτή αποδεικνύεται ότι ειναι διαφορομορφισμός (με χρήση λ.χ. του θεωρήματος αντίστροφης απεικόνισης δεδομένου ότι $D(exp_p)(0_p) = Id$). Στο εξής, ένα σύνολο $U \subseteq M$ το οποίο για κάθε σημείο $p \in M$ μπορεί να γραφεί ως η διαφορομορφική εικόνα $exp_p(\tilde{U})$ ενός αστεροειδούς συνόλου $\tilde{U} \subset T_pM$ γύρω από το $0_p \in T_pM$ θα λέμε ότι είναι κυρτό. Με αυτόν τον ορισμό, κάθε σημείο p μιας Ριμάννειας ή Λορέντζιας πολλαπλότητας έχει μια ανοιχτή κυρτή περιοχή. Φυσικά, υπάρχουν πολλές γενικεύσεις της έννοιας της κυρτότητας συνόλων στην διαφορική γεωμετρία, αλλά σε εμάς μόνο η προκείμενη θα φανεί χρήσιμη.

Στην περίπτωση των Ριμάννειων πολλαπλοτήτων το μήκος μιας γεωδαισιακής που συνδέει δύο σημεία αποτελεί ένα τοπικό ελάχιστο μεταξύ των μηκών των καμπυλών που συνδέουν τα δύο σημεία (όπου το μήκος μιας καμπύλης από το γ(α) ως το γ(b) δίνεται από την σχέση $\int_a^b g(\dot{\gamma},\dot{\gamma})^{\frac{1}{2}}\, dt$ και είναι ανεξάρτητο από την παραμέτρησή της), και το θεώρημα των Hopf - Rinow μας εξασφαλίζει την ύπαρξη γεωδαισιακής ελαχίστου μήκους μεταξύ δύο οποιωνδήποτε σημείων της πολλαπλότητάς μας με την προυπόθεση ότι αυτή αποτελεί πλήρη μετρικό χώρο με την Ριμάνια μετρική (όπου η απόσταση δύο σημείων ορίζεται ώς το infimum των μηκών των καμπυλών που τα συνδέουν). Στην περίπτωση της Λορέντζιας γεωμετρίας, βέβαια, αυτό παύει να ισχύει εν γένει.

Έχοντας ορίσει κατάλληλα την παράλληλη μεταφορά διανυσμάτων μιας διανυσματικής δέσμης κατά μήκος καμπυλών της πολλαπλότητας M, εύλογα γεννάται το ερώτημα του τι συμβαίνει σε μια ίνα αν την μεταφέρουμε παράλληλα κατά μήκος μιας κλειστής καμπύλης, γεγονός που ορίζει μια απεικόνιση από την ίνα στον εαυτό της. Εν γένει η απεικόνιση αυτή δεν ειναι η ταυτοτική. Η απόκλιση της απεικόνισης αυτής από την ταυτοτική για "απειροστά" μικρές καμπύλες περιγράφεται από την έννοια της καμπυλότητας. Η καμπυλότητα, λοιπόν, αποτελεί έναν τανυστή που δέχεται ως όρισμα δυο διανυσματικά πεδία και επιστρέφει έναν γραμμικό ενδομορφισμό για κάθε ίνα και ορίζεται από την σχέση:

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

Παρ' όλα αυτά, για να είμαστε σύμφωνοι με τα πρόσημα διαφόρων ποσοτήτων όπως αυτές εμφανίζονται στις παραπομπές, από εδώ και στο εξής θα υιοθετήσουμε το αντίθετο πρόσημο για τον τανυστή R. Εκφρασμένος σε ένα σύστημα τοπικών συντεταγμένων (οπότε και θα ισχύει $[\partial_i, \partial_j] = 0$) έχουμε ότι:

$$R_{ijk}{}^{l} Z^k = -((\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i) Z)^l \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow R_{ijk}{}^{l} = \partial_j \Gamma^l_{ik} - \partial_i \Gamma^l_{jk} + \Gamma^l_{jm} \Gamma^m_{ik} - \Gamma^l_{im} \Gamma^m_{jk}$$

Ο τανυστής αυτός ικανοποιεί τις εξής συμμετρίες:

- $R_{ijkl} = -R_{jikl} = R_{klji} = -R_{ijlk}$
- $R_{ijkl} + R_{kijl} + R_{jkil} = 0$ (Πρώτη ταυτότητα του Bianchi)
- $\nabla_i R_{jkl}{}^m + \nabla_k R_{ijl}{}^m + \nabla_j R_{kil}{}^m = 0$ (Δεύτερη ταυτότητα του Bianchi)

Η δεύτερη ταυτότητα του Bianchi έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, καθώς σε συμπαγείς πολλαπλότητες επιτρέπει μια πρώτη σύνδεση της γεωμετρίας με την τοπολογία. Και αυτό, διότι η ταυτότητα αυτή μπορεί να γραφεί και ως $d^\nabla R = 0$ (όπου d^∇: εξωτερική παράγωγος μορφών με πεδίο τιμών $\Gamma(\otimes^k TM \otimes^l T^*M)$ η οποίο καθορίζεται από την συναλλοίωτη παράγωγο), και επομένως με αλγεβροτοπολογικά επιχειρήματα μπορεί να δειχθεί ότι πολλές αναλλοίωτες της εφαπτόμενης δέσμης μπορούν να γραφτούν ως εκφράσεις της καμπυλότητας.

Πέραν αυτού, όμως, ένα πόρισμα της δεύτερης ταυτότητας του Bianchi που θα μας χρειαστεί στην συνέχεια είναι το εξής:

Κατ' αρχάς, ο τανυστής Ricci ορίζεται με την βοήθεια της καμπυλότητας ως:

$$R_{ij} = R_{ikj}{}^k$$

και αποτελεί κατά μία έννοια μια έκφραση της παραγώγου των στοιχειωδών όγκων καθώς αυτοί μεταβάλονται κατά την κίνηση κατά μήκος γεωδαισιακών. (Το γεγονός ότι χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο R δεν θα πρέπει να προκαλεί σύγχυση, καθώς σε κάθε περίπτωση θα ειναι ξεκάθαρο το ποιόν τανυστή θα συμβολίζει).

Ξεκινώντας από την δεύτερη ταυτότητα του Bianchi λοιπόν και ενθυμούμενοι πως $\nabla_i g_{jk} = 0$ έχουμε ότι:

$$\nabla_i R_{jkl}{}^k + \nabla_k R_{ijl}{}^k + \nabla_j R_{kil}{}^k = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla_i R_{jl} + \nabla_k R_{ijl}{}^k - \nabla_j R_{il} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g^{il}(\nabla_i R_{jl} + \nabla_k R_{ijl}{}^k - \nabla_j R_{il}) = 0 \Rightarrow$$

$$2\nabla_k R_j^k - \nabla_j R_k^k = 0$$

Αν, λοιπόν, συμβολίσουμε την βαθμωτή καμπυλότητα $g^{ij}R_{ij} = R$ και θέσουμε $G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij}$ (ο τανυστής αυτός καλείται και τανυστής Einstein) η πιο πάνω σχέση γράφεται και ως:

$$\nabla^k G_{kj} = 0$$

Αυτή η σχέση θα μας φανεί χρήσιμη κατά την περιγραφή των εξισώσεων Einstein.

Ιδιαίτεροο ενδιαφέρον παρουσιάζει επίσης το πως σχετίζεται η καμπυλότητα μιας υποπολλαπλότητας M' της M με τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της εμβύθισης

$\iota : M' \to M$. Έτσι, λοιπόν, αν θεωρήσουμε ότι η M' είναι μια χωροειδής υποπολλαπλότητα της (M,g) με συνοχή που ορίζει την συαναλλοίωτη παράγωγο ∇ τότε, χωρίς κίνδυνο παρερμηνείας, θα ταυτίζουμε τα εφαπτόμενα διανυσματικά πεδία v της M' με τις εικόνες τους $\iota_*(v)$ στην TM. Ακόμη, για κάθε διανυσματικό πεδίο v στο M θα μπορούμε να θεωρούμε μόνο τον περιορισμό του στο ι(M') και να τον αναλύουμε σε δύο συνιστώσες, την tan(v) που θα είναι εφαπτόμενη στο ι(M') (θα ανήκει δηλαδή στην $i_*(TM')$) και την nor(v) που θα ειναι κάθετη σε αυτο. Επιπλέον, θα συμβολίσουμε με $\bar{g}$ την επαγόμενη μετρική της M', και με $\bar{\nabla}$ και $\bar{R}$ θα συμβολίσουμε την συναλλοίωτη παράγωγο και την καμπυλότητα της συνοχής Levi Civita της (M',$\bar{g}$). Τότε, αν το N είναι ένα διανυσματικό πεδίο της M κάθετο στην M' και για το οποίο ισχύει ότι |g(N,N)|=1, ορίζουμε ως δεύτερη θεμελιώδη μορφή της M' ως προς το N τον τανυστή που ορίζεται από την σχέση:

$$k_N(u,w) = g(\nabla_u N, w), \;\; u, w \in \Gamma(TM')$$

Εύκολα επαληθεύεται ότι η ποσότητα αυτή ειναι όντως τανυστής, και μάλιστα συμμετρικός, και πως εξαρτάται μόνο από τον περιορισμό του N πάνω από το $\iota(m') \subset M$ και όχι από το πως αυτό θα επεκταθεί έξω από την υποπολλαπλότητα. Στην περίπτωση, λοιπόν, που η M' ειναι συνδιάστασης 1 η δεύτερης θεμελιώδης μορφή είναι ανεξάρτητη από το N (μια και πάνω στην M' μπορεί να οριστεί με μοναδικό τρόπο) και θα συμβολίζεται απλώς με k. Επιπλέον, αν $v, w \in \Gamma(TM')$ τότε σύμφωνα με τον τύπο του Gauss $tan(\nabla_v w) = \bar{\nabla}_v w$ και η συνάρτηση $S(v,w) = nor(\nabla_v w)$ είναι συμμετρικός τανυστής, για τον οποίο μάλιστα ισχύει: $g(nor(\nabla_v w), N) = g(N,N) \cdot k_N(v,w)$ (όπου για να έχουν νόημα οι παραγωγίσεις αυτές επεκτείνουμε αυθαίρετα τα v, w σε διανυσματικά πεδία σε όλη την M).

Με αυτούς τους συμβολισμούς, λοιπόν, η καμπυλότητα της υποπολλαπλότητας M' συνδέεται με την καμπυλότητα της M με τις εξής σχέσεις (οι οποίες θα μας φανούν χρήσιμες κατά την περιγραφή των περιορισμών των αρχικών συνθηκών για τις εξισώσεις Einstein):

- $R_{ijkl} = \bar{R}_{ijkl} + k_{ik}k_{jl} - k_{jk}k_{il}$ αφού αν $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM')$:

  $$g(R(X,Y)Z,W) = g(-\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X,Y]} Z, W) =$$

$$= g(\bar{R}(X,Y)Z,W) - g(nor(\nabla_X Z), nor(\nabla_Y W)) + g(nor(\nabla_Y Z), nor(\nabla_X W)) =$$

$$= g(\bar{R}(X,Y)Z,W) + k(X,Z) \cdot k(Y,W) - k(Y,Z) \cdot k(X,W)$$

- Εξίσωση Codazzi - Mainardi: Αν $X, Y, Z \in \Gamma(TM')$

  $$nor(R(X,Y)Z) = (\nabla_X S)(Y,Z) - (\nabla_Y S)(X,Z)$$

  όπου $S(X,Y) = nor(\nabla_X Y)$ και $(\nabla_V A)(X,Y) = V(A(X,Y)) - A(\nabla_V X, Y) - A(X, \nabla_V Y)$

Με την βοήθεια της Λορέντζιας μετρικής g μπορούμε επιπλέον να μετατρέψουμε την πολλαπλότητα M σε χώρο μέτρου ως εξής: Λόγω του ορισμού της g, σε κάθε τοπικό σύστημα συντεταγμένων ισχύει ότι $det(g_{ij}) < 0$. Ορίζουμε, λοιπόν, την n-μορφή ω ώστε σε κάθε τοπικό σύστημα συντεταγμένων $\varphi = (x^1, ..x^n) : U \to \mathbb{R}^n$ αυτή να παίρνει την μορφή $\omega = \sqrt{-det(g)}dx^1 \wedge ... \wedge dx^n$ (η έκφραση αυτή πράγματι δεν έξαρτάται από ην επιλογή συστήματος συντεταγμένων). Έτσι, λοιπόν, για κάθε συνάρτηση f με συμπαγή φορέα που περιέχεται σε ένα χάρτη τοπικών συντεταγμένων (U, φ), μπορούμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα της f ως $\int_U f \cdot \sqrt{-detg}dx^1...dx^n$, και ο ορισμός αυτός είναι ανεξάρτητος από την επιλογή συσήματος συντεταγμένων. Χρησιμοποιώντας, δε, διαμερίσεις της μονάδας υποδιατασσόμενες από έναν άτλαντα, μπορούμε να επεκτείνουμε τον ορισμό αυτόν για οποιαδήποτε συνάρτηση f με συμπαγή φορέα. Στην περίπτωση που η μετρική μας ήταν Ριμάννεια, φυσικά, ο ορισμός θα ήταν ο ίδιος χωρίς όμως να απαιτείται το "-" στην ρίζα. Με την βοήθεια διαμερίσεων της μονάδας, μπορούμε ακόμη να αποδείξουμε το θεώρημα απόκλισης: Υποθέτοντας ότι η πολλαπλότητα M είναι χρονικά προσανατολίσιμη (αυτό συμβαίνει αν υπάρχει μοναδιαίο χρονοειδές εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο, το οποίο κατά σύμβαση θα λέμε πως "δείχνει" στους μελλοντικούς κώνους φωτός), αν Ω είναι ένα κατά τμήματα C^1 ανοιχτό σύνολο με συμπαγή κλειστότητα μιας Λορέντζιας πολλαπλότητας M και J είναι μια 1-μορφή ορισμένη σε μια περιοχή του $\bar{\Omega}$, ισχύει ότι:

$$\int_{\Omega} \nabla^i J_i = \int_{\partial\Omega} J_i n^i$$

Η ολοκλήρωση σε κάθε περίπτωση γίνεται με την επαγόμενη μορφή μέτρου και το διανυσματικό πεδίο n επιλέγεται μοναδιαίο και κάθετο στην $\partial\Omega$, ώστε:

- Για τα χωροειδή τμήματα του $\partial\Omega$ να στρέφεται προς το εσωτερικό του Ω
- Για τα φωτοειδή τμήματα (αυτά δηλαδή στα οποία η επαγόμενη μετρική είναι Λορέντζια) να στρέφεται προς το εξωτερικό του Ω
- Για τα μελλοντικά φωτοειδή τμήματα (όπου η επαγόμενη μετρική ειναι εκφυλισμένη) να στρέφεται προς το παρελθόν, και αντίστροφα για τα παρελθοντικά.

Προτού κλείσουμε την εισαγωγική αυτή παράγραφο, αναγκαίο είναι να αναφέρουμε ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό των Λορέντζιων πολλαπλοτήτων που δεν συναντάται στην Ριμάννεια γεωμετρία: Η ύπαρξη αιτιακής δομής. Πιο συγκεκριμένα, λοιπόν, μια Λορέντζια πολλαπλότητα θα λέγεται χρονικά προσανατολίσιμη αν επιδέχεται χρονοειδές εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο το οποίο να είναι παντού μη μηδενικό. Σε αυτήν την περίπτωση, φιξάροντας ένα τέτοιο διανυσματικό πεδίο v, σε κάθε ίνα της εφαπτόμενης δέσμης θα ονομάζουμε μελλοντικά κατευθυνόμενα τα αιτιώδη διανύσματα w εκείνα για τα οποία ισχύει $g(w, v) \leq 0$. Τα μελλοντικά κατευθυνόμενα διανύσματα μιας ίνας, δηλαδή, αποτελούνται από τα διανύσματα εκείνα που ανήκουν στην κλειστότητα εκείνης της συνιστώσας του ανοιχτού κώνου (που ορίζεται από την διγραμμική μορφή g) στην οποία ανήκει και το v. Αποδεικνύεται ότι αν μια Λορέντζια πολλαπλότητα M δεν είναι χρονικά προσανατολίσιμη, υπάρχει ένα διπλό κάλυμμά της $\tilde{M}$ που είναι.

Στο εξής, λοιπόν, θα υποθέτουμε ότι κάθε Λορέντζια πολλαπλότητα στην οποία αναφερόμαστε είναι χρονικά προσανατολίσιμη. Σε μία τέτοια πολλαπλότητα (M,g), λοιπόν, για κάθε σύνολο $S \subset M$ ορίζουμε το χρονοειδές μέλλον του S, $I^+(S)$ ως το σύνολο των $p \in M$ εκείνων για τα οποία υπάρχει μελλοντικά κατευθυνόμενη χρονόμορφη καμπύλη γ για την οποία να ισχύει $\gamma(0) \in S$, $\gamma(1) = p$. Όμοια, ορίζουμε το αιτιακό μέλλον του S, $J^+(S)$ ως το σύνολο των σημείων στα οποία μπορει να φτάσει κανείς από το S με μια αιτιακή καμπύλη. Αντίστοιχα, ορίζονται και το χρονοειδές και αιτιακό παρελθόν $I^-(S), J^-(S)$. Αποδεικνύεται εύκολα ότι για κάθε σημείο $p \in M$, τα $I^+(p), I^-(p)$ είναι ανοιχτά σύνολα.

Ένα πολύ χρήσιμο θεώρημα που ισχύει για τα σύνολα αυτά είναι το εξής: Αν $q \in J^+(p) \backslash I^+(p)$ τότε κάθε μελλοντικά κατευθυνόμενη αιτιακή καμπύλη από το p στο q πρέπει να είναι φωτοειδής γεωδαισιακή. Ο λόγος που κάτι τέτοιο σύμβαινει έχει να κάνει με το ότι στην αντίθετη περίπτωση, θα υπήρχε μια αρκούντως μικρή διαταραχή της καμπύλης αυτής που θα την έκανε χρονόμορφη. Μια άμεση συνέπεια του θεωρήματος αυτού είναι πως αν $q \in I^+(p)$ και $r \in J^+(q)$ τότε $r \in I^+(p)$. Φυσικά, οι αντίστοιχες προτάσεις ισχύουν και για τα παρελθοντικά σύνολα.

Δεδομένου ότι στην συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τις Λορέντζιες πολλαπλότητες ως μοντέλα για τον χωροχρόνο, είναι φυσικό να περιορίσουμε την μελέτη μας μόνο στις πολλαπλότητες που είναι "ρεαλιστικές" ως προς την αιτιακή τους δομή. Για παράδειγμα, είναι φυσικό να υποθέσουμε ότι σε μια τέτοια πολλαπλότητα δεν θα θέλαμε να υπάρχουν κλειστές χρονόμορφες καμπύλες, μια και κάτι τέτοιο θα σήμαινε πως ένας παρατηρητής θα μπορούσε ταξιδεύοντας στο μέλλον να επιστρέφει σε κάποια παρελθοντική στιγμή. Μια τέτοια Λορέντζια πολλαπλότητα θα λέμε ότι ικανοποιεί την χρονολογική συνθήκη. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε (λόγω συμπάγειας) ότι κάθε συμπαγής Λορέντζια πολλαπλότητα παραβιάζει την χρονολογική συνθήκη. Η απαίτηση να μην υπάρχουν ούτε κλειστές αιτιακές καμπύλες συνιστά την αιτιακή συνθήκη. Μια ακόμα πιο ισχυρή συνθήκη είναι αυτή της ισχυρής αιτιότητας: Μια Λορέντζια πολλαπλότητα (M,g) θα λέγεται ισχυρά αιτιακή αν για κάθε σημείο της p υπάρχει μια περιοχή του U ώστε κάθε αιτιακή καμπύλη που ξεκινάει από το p και φεύγει από την U δεν επιστρέφει ποτέ σε αυτή.

Η πλέον σημαντική συνθήκη η οποία εμφανίζεται στην γενική σχετικότητα είναι αυτή της καθολικής υπερβολικότητας. Πιο συγκεκριμένα, λοιπόν, ένας χώρος (M,g) θα λέγεται καθολικά υπερβολικός αν είναι ισχυρά αιτιακός και για κάθε ζεύγος σημείων $p, q \in M$ το σύνολο $J^+(p) \cap J^-(q)$ είναι συμπαγές. Η δεύτερη συνθήκη κατά κάποιον τρόπο εξασφαλίζει ότι ο χώρος μας δεν έχει τρύπες (εύκολα διαπστώνουμε λ.χ. ότι αυτή παύει α ισχύει αν αφαιρέσουμε από τον $\mathbb{R}^{1+1}$ το (0,0) και θεωρήσουμε τα σημεία (0,1) και (0,-1)), και παίζει ανάλογο ρόλο με αυτόν της γεωδαισιακής πληρότητας στην περίπτωση των Ριμάννειων πολλαπλοτήτων. Για παράδειγμα, η εν λόγω συνθήκη συμπάγειας μας επιτρέπει να μιμηθούμε την απόδειξη του θεωρήματος Hopf Rinow ώστε να δείξουμε ότι για κάθε $p \in M$ και $q \in I^+(p)$ υπάρχει αιτιακή γεωδαισιακή μεγίστου μήκους που τα συνδέει. Ακόμη, από την συνθήκη αυτή έπεται άμεσα ότι για οποιαδήποτε δύο συμπαγή $A, B \subseteq M$ το $J^+(A) \cap J^-(B)$ είναι συμπαγές.

Πέραν από την χρηστική της σημασία, όμως, η συνθήκη της καθολικής υπερβολικότητας έχει σπουδαίο ρόλο και από φυσική άποψη, καθώς αποτελεί την έκφραση της αρχής της αιτιότητας. Για να αναφερθούμε σε αυτό πιο εκτενώς, όμως πρέπει να ορίσουμε την έννοια της υπερεπιφάνειας Cauchy: Για μια Λορέντζια πολλαπλότητα (M, g), ένα υποσύνολο S λέγεται υπερεπιφάνεια Cauchy αν κάθε μη επεκτάσιμη αιτιακή καμπύλη στο M τέμνει την S ακριβώς σε ένα σημείο. Αποδεικνύεται ότι μια υπερεπιφάνεια Cauchy είναι όντως μια Lipschitz υπερεπιφάνεια (υποπολλαπλότητα, δηλαδή, συνδιάστασης 1), και όλες οι Cauchy υπερεπιφάνειες ενός χώρου είναι ομοιομορφικές. Η σύνδεση των υπερεπιφανειών Cauchy με την έννοια της καθολικής υπερβολικότητας δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα του Geroch: Ένας χώρος είναι καθολικά υπερβολικός αν και μόνο αν περιέχει μια υπερεπιφάνεια Cauchy.

Για την απόδειξη αυτού (όπως και αρκετών άλλων θεωρημάτων για την αιτιακή ιεραρχία των χωροχρόνων), απαραίτητο είναι να κατασκευάσει κανείς με την βοήθεια ενός κατάλληλου μέτρου μιας συνάρτηση χρόνου. Στην περίπτωση μιας καθολικά υπερβολικής πολλαπλότητας, αποδεικνύεται ότι υπάρχει μια λεία συνάρτηση $t : M \to \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα κατά μήκος οποιασδήποτε αιτιακής καμπύλης και όλες οι ισουψείς της οποίας είναι επιφάνειες Cauchy. Κατά συνέπεια, μια καθολικά υπερβολική πολλαπλότητα έχει την διαφορική δομή του γινομένου $\mathbb{R} \times S$, όπου S : μια υπερεπιφάνεια Cauchy.

Το γεγονός ότι κάθε μη επεκτάσιμη αιτιακή καμπύλη τέμνει μια υπερεπιφάνεια Cauchy, λοιπόν, σημαίνει, κατά μια έννοια, πως οτιδήποτε συμβαίνει στον χωροχρόνο μπορεί να προβλεφθεί από το ότι συμβαίνει στην επιφάνεια Cauchy. Το γεγονός αυτό αποκτά νόημα μέσω των υπερβολικών διαφορικών εξισώσεων: Όπως μπορεί να δείξει κανείς με τα εργαλεία του παραρτήματος, θέτοντας κανείς αρχικές τιμές πάνω σε μια υπερεπιφάνεια Cauchy για μια γραμμική κυματική εξίσωση με κύριο σύμβολο g, το πρόβλημα αρχικών τιμών που δημιουργείται είναι καλώς τοποθετημένο και έχει μοναδική λύση σε όλη την πολλαπλότητα M.

Γενικότερα, αν S είναι ένα μη αιτιακό υποσύνολο μιας Λορέντζιας πολλαπλότητας (M,g) (δηλαδή δεν υπάρχει ζεύγος σημείων του S που να συνδέονται με αιτιακή καμπύλη), θα ορίζουμε το πεδίο μελλοντικής εξάρτησής του, $D^+(S)$, ως το σύνολο των $p \in M$ εκείνων για τα οποία ισχύει ότι κάθε αιτιακή καμπύλη που διέρχεται από αυτά και είναι μη παρελθντικά επεκτάσιμη τέμνει το S. Δεδομένου ότι στην σχετικότητα η "πληροφορία" διαδίδεται κατά μήκος αιτιακών καμπυλών, το σύνολο αυτό αποτελείται από εκείνα τα σημεία που κάθε πληροφορία που δέχονται από το παρελθόν διέρχεται από το S. Όμοια ορίζεται και το $D^-(S)$, ενώ συνηθίζουμε να θέτουμε $D(S) = D^+(S) \cup D^-(S)$. Επιπλέον, για ένα μη αιτιακό σύνολο S ισχύει ότι το s είναι μια υπερεπιφάνεια Cauchy για τον χώρο (D(S),g), ενώ η S είναι υπερεπιφάνεια Cauchy για όλον τον χώρο M αν και μόνο αν D(S)=M.

Κλείνοντας την παράγραφο αυτή, να αναφέρουμε μια ιδιότητα των καθολικά υπερβολικών χώρων η οποία θα μας φανεί χρήσιμη πιο κάτω: Αν (M,g) είναι ένας καθολικά υπερβολικός χώρος και Σ μια υπερεπιφάνεια Cauchy σε αυτόν, τότε για κάθε $p \in M$ τα σύνολα $J^+(p) \cap \Sigma$ και $J^-(p) \cap \Sigma$ είναι συμπαγή - κάθε σημείο του χωροχρόνου, δηλαδή, επηρεάζεται μόνο από ένα συμπαγές χωρίο της υπερεπιφάνειας Cauchy. Το γεγονός αυτό αποδεικνύεται ως εξής: υποθέτοντας το αντίθετο για το $J^-(p)$, μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία σημείων p_n του $J^-(p) \cap \Sigma$ χωρίς καμιά συγκλίνουσα υπακολουθία (άμεσο είναι, επίσης, ότι για να είναι μη κενό το σύνολο αυτό πρέπει $p \in J^+(\Sigma)$). Λόγω μιας προηγούμενης παρατήρησής μας, όμως, ορίζονται κατά μοναδικό τρόπο τα τμήματα γ_n των αιτιακών γεωδαισιακών μεγίστου μήκους που συνδέουν τα p_n με το p, και μπορούμε να συμβολίσουμε με $v_n = \dot{\gamma}|_p \in T_pM$. Λόγω συμπάγειας του προβολικού χώρου της ίνας και κλειστότητας του κώνου των αιτιακών διανυσμάτων, η ακολουθία των κατευθύνσεων των v_n έχει συγκλίνουσα υπακολουθία σε μια αιτιακή κατεύθυνση v, για την οποία διαλέγουμε ένα παρελθοντικά κατευθυνόμενο διάνυσμα - αντιπρόσωπό της. Επειδή η Σ είναι υπερεπιφάνεια Cauchy, η γεωδαισιακή από το p στην κτεύθυνση v τέμνει την Σ σε ένα σημείο έστω q. Επιδή το γεωδαισιακό τμήμα [p,q] είναι συμπαγές, μπορούμε να βρούμε μια συμπαγή σωληνοειδή περιοχή του (έστω V) ώστε κάθε γεωδαισιακή που ξεκινάει από το p με αρχική κατεύθυνση αρκούντως κοντά στο v να παραμένει στην περιοχή αυτή εως ότου τμήσει την επιφάνεια Σ. Το γεγονός αυτό, όμως, δεδομένου ότι στο v συγκλίνει μια υπακολουθία των v_n, συνεπάγεται ότι άπειρα εκ των p_n θα ανήκουν στο συμπαγές σύνολο $V \cap \Sigma$ και επομένως θα έχουν συγκλίνουσα υπακολουθία - γεγονός που έρχεται σε αντίφαση με την αρχική μας υπόθεση. με όμοιο τρόπο, φυσικά, αποδεικνύεται και ο ανάλογος ισχυρισμός για το $J^+(p)$.

Κεφάλαιο 2

Το πρόβλημα Cauchy για τις εξισώσεις Einstein

2.1 Εξισώσεις Einstein

Αμέσως μετά την διατύπωση της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας το 1905, ο Einstein ξεκίνησε τις προσπάθειες για την ενσωμάτωση σε αυτή της θεωρίας της βαρύτητας. Βασικό στοιχείο που τον καθοδήγησε σε αυτή του την προσέγγιση ήταν η λεγόμενη αρχή της ισοδυναμίας. Σε μια πιο ασθενή της διατύπωση, η αρχή της ισοδυναμίας ειχε ήδη κάνει την εμφάνισή της από την εποχή του Γαλιλαίου, ο οποίος και υποστήριζε πως η αδρανειακή μάζα ενός σώματος ταυτίζεται με την βαρυτική. Σύμφωνα, λοιπόν, με αυτήν την αρχή, η επίδραση της βαρύτητας σε ένα σώμα που βρίσκεται σε ελεύθερη πτώση δεν μπορεί να διακριθεί από την επίδραση των φαινομενικών δυνάμεων στην τροχιά ενός ελεύθερου σώματος που παρατηρείται από έναν επιταχυνόμενο παρατηρητή. Το γεγονός αυτό αποτελούσε μια πρώτη ένδειξη ότι η βαρύτητα θα μπορούσε να περιγραφεί ως μια γεωμετρική ιδιότητα του χωροχρόνου, στον οποίον τα σώματα τα οποία βρίσκονταν σε ελεύθερη πτώση θα κινούνταν κατά μήκος γεωδαισιακών, κατ' αντιστοιχία με την κλασική ευθύγραμμη ομαλή κίνηση ελεύθερων σωμάτων.

Φυσικά, μια τέτοια γεωμετρική περιγραφή θα έπρεπε να βρίσκεται σε συμφωνία με την ειδική θεωρία της σχετικότητας. Στην ειδική θεωρία της σχετικότητας, ο χωροχρόνος αναπαρίσταται από τον χώρο Minkowski, και οι τροχιές των υλικών σωμάτων αντιστοιχούσαν σε αιτιακές καμπύλες σε αυτόν. Ο Einstein, λοιπόν, κατάφερε να επιτύχει την γεωμετρική περιγραφή του χωροχρόνου ώστε να είναι συμβατή με την ειδική θεωρία της σχετικότητας ισχυροποιόντας την αρχή της ισοδυναμίας: Ισχυρίστηκε πως, πέραν της ισοδυναμίας αδρανειακής και βαρυτικής μάζας, για κάθε σύστημα αναφοράς που βρίσκεται σε ελεύθερη πτώση τα αποτελέσματα των πειραμάτων (τουλάχιστον τοπικά) δεν επηρεάζονται από την ταχύτητά και την θέση του συστήματος στο χωροχρόνο. Θα πρέπει, επομένως, σε ένα τέτοιο σύστημα τοπικά να ισχύουν οι νόμοι της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας. Συνακόλουθα, με βάση αυτήν την παρατήρηση έγινε φανερό ότι το πλέον κατάλληλο μοντέλο για έναν χωροχρόνο ήταν μια Λορέντζια πολλαπλότητα, καθώς γύρω από κάθε σημείο p μιας τέτοιας πολλαπλότητας μπορούμε να βρούμε ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων στο οποίο $g(p) = diag(-1, +1, +1, +1)$ και $\partial_k g_{ij}(p) = 0$ (και επομένως σε αυτό το σύστημα αναφοράς που ειναι τοπικά αδρανειακό ή ισοδύναμα τοπικά σε ελεύθερη πτώση ο χωροχρόνος μοιάζει τοπικά με τον χώρο Minkowski). Φυσικά, την εποχή εκείνη η θεωρία των πολλαπλοτήτων με την ορολογία που χρησιμοποιούμε σήμερα δεν είχε ακόμη πλήρως αναπτυχθεί, και ο ίδιος ο Einstein δεν είχε εξ' αρχής χρησιμοποιήσει μια τέτοιου είδους προσέγγιση (σε αυτό θα επανέλθουμε και λίγο πιο κάτω).

Αυτό που απέμενε πλέον ήταν η ακριβής σχέση που θα συνέδεε την γεωμετρία του χωροχρόνου ως Λορέντζια πολλαπλότητα με την βαρύτητα και την ύλη. Δεδομένου ότι στην Νευτώνεια θεωρία πηγή της βαρύτητας θεωρείτο η μάζα και στην ειδική θεωρία της σχετικότητας η μάζα συνδέεται άρρηκτα με την ενέργεια, ο Einstein κατέληξε στο συμπέρασμα πως η γεωμετρία του χωροχρόνου εξαρτάται από τον λεγόμενο τανυστή ενέργειας τάσης T_{ij}. Επιπλέον, παρατηρώντας πως στην περιπτωση της κλασικής θεωρίας, για μια αρχικά ακίνητη μικρή ομάδα (σημειακών) σωμάτων που βρίσκεται σε ελεύθερη πτώση μεταβάλλεται ο "όγκος" της ομάδας αλλά τα σώματα δεν ξεκινούν να περιστρέφονται το ένα ως προς το άλλο, μπορει κανείς να υποθέσει πως ο τανυστής τάσης ενέργειας επηρεάζει μόνο τον τανυστή Ricci της πολλαπλότητας. Αρχικά, αυτό είχε οδηγήσει τον Einstein στην υπόθεση πως η εξίσωση που εκφράζει τις παραπάνω σχέσεις θα έπρεπε να είναι της μορφής $R_{ij} \propto T_{ij}$. Κάτι τέτοιο όμως δεν μπορεί να ισχύει εν γένει, καθώς σε μια τέτοια περίπτωση για να ισχύει η αρχή διατήρησης της ενέργειας ($\nabla^i T_{ij} = 0$) θα πρέπει η πυκνότητα ενέργειας-μάζας να είναι παντού η ίδια, μια και θα είχαμε ότι $\nabla^i R_{ij} = 0 = \nabla^i R_{ij} - \frac{1}{2}\nabla^i R g_{ij} \Rightarrow (\nabla^i R) g_{ij} = 0 \Rightarrow R =$ σταθερό και επομένως το $tr_g(T)$ πρέπει να είναι σταθερό. Ο Einstein, όμως, διόρθωσε γρήγορα το λάθος αυτό και έτσι το Νοέμβριο του 1915 δημοσίευσε τις περίφημες εξισώσεις Einstein:

$$R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij}$$

Σε κατάλληλο σύστημα μονάδων, οι εξισώσεις αυτές μπορούν να αδιαστατοποιηθούν ως:

$$R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} = 8\pi T_{ij}$$

Αργότερα, σε μια προσπάθεια δημιουργίας στατικής κοσμολογικής λύσης, ο Einstein προσέθεσε μια σταθερά Λ στις εξισώσεις αυτές ως εξής:

$$R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} + \Lambda g_{ij} = 8\pi T_{ij}$$

Φυσικά, έχει μείνει διάσημη η παραδοχή του πως αυτό "ήταν το μεγαλύτερο λάθος της ζωής του", αλλά παρ' όλα αυτά σύγχρονες αστρολογικές παρατηρήσεις δείχνουν να απαιτούν την ύπαρξη μιας μικρής θετικής σταθεράς Λ.

Σε κάθε περίπτωση, οι εξισώσεις αυτές ικανοποιούν την αρχή διατήρησης ενέργειας σύμφωνα με την παρατήρησή της προηγούμενης παραγράφου για τον τανυστή Einstein. Ένα ακόμη συμπέρασμα που μπορεί κανείς να εξάγει άμεσα είναι πως οι εξισώσεις αυτές είναι σε συναλλοίωτη μορφή και δεν εξαρτώνται από το σύστημα συντεταγμένων. Κατά συνέπεια, για οποιαδήποτε λύση (M, g) οποιοσδήποτε διαφορομορφισμος $f : M \to M$ ορίζει μια νέα λύση $(M,\ f^{*}g)$, Αυτό είχε αποτελέσει πηγή σύγχυσης ακόμα και για τον ίδιο τον Einstein. Μάλιστα, αρχικά είχε απορρίψει την ιδέα της μοντελοποίησης του χωροχρόνου με μια πολλαπλότητα κατ' αυτόν τον τρόπο με το επιχείρημα πως ένας φυσικός νόμος θα έπρεπε δεδομένου του τανυστή T_{ij} να καθορίζει μοναδικά την μετρική σε ένα σύστημα αναφοράς. Παρ' όλα αυτά, κατέληξε εν τέλει στο συμπέρασμα πως αυτός ειναι ο πλέον φυσιολογικός τρόπος αναπαράστασης ενός φυσικού νόμου, καθώς τα συστήματα αναφοράς είναι αυθαίρετα νοητικά κατασκευάσματα και επομένως οι ιδιότητες της ύλης θα πρέπει να ειναι συναλλοίωτες, δηλαδή να διατηρούν την μορφή τους αναλλοίωτη κάτω από την αλλαγή συστήματος συντεταγμένων μέσω διαφορομορφισμών.

Στις εξισώσεις αυτές, ο τανυστής τάσης-ενέργειας T περιγράφεται ως συνάρτηση της μετρικής g και ορισμένων υλικών πεδίων στην πολλαπλότητα M, τα οποία με την σειρά τους ικανοποιούν κάποιες εξισώσεις. Για παράδειγμα, στην απλή περίπτωση όπου μας ενδιαφέρει μια λύση των εξισώσεων Einstein στο κενό, ο τανυστής αυτός ισούται απλώς με 0. Μια ακόμη απλή εκδοχή ειναι αυτή ενός βαθμωτού πεδίου χωρίς μάζα $\varphi : M \to \mathbb{R}$, όπου ο τανυστής τάσης ενέργειας δίνεται από την σχέση $T_{ij} = d\varphi_i d\varphi_j - \frac{1}{2}g^{kl}d\varphi_k d\varphi_l g_{ij}$ και το υλικό πεδίο ικανοποιεί την κυματική εξίσωση $\Box_g \varphi = \frac{1}{\sqrt{-det(g)}}\partial_i(\sqrt{-det(g)}g^{ij}\partial_j\varphi) = 0$. Στην περίπτωση όπου μας ενδιαφέρει μια λύση υπό την επίδραση ηλεκτρομαγνητικών πεδίων, ο αντίστοιχος τανυστής τάσης - ενέργειας ισούται με $T_{ij} = \frac{1}{\mu_0}\Big(g^{kl}F_{ik}F_{jl} - \frac{1}{4}g_{ij}F^{mn}F_{mn}\Big)$, όπου ο F_{ij} είναι ο ηλεκτρομαγνητικός τανυστής που ικανοποιεί τις εξισώσεις Maxwell και τα διάφορα φορτία και ρεύματα ικανοποιούν με την σειρά τους κάποια δεδομένη σχέση ως προς την κατανομή τους στην πολλαπλότητα.

Να σημειώσουμε ότι στην περίπτωση της Νευτώνειας θεωρίας βαρύτητας, στην οποία η εξίσωση που διέπει το βαρυτικό δυναμικό φ είναι της μορφής $\triangle\varphi = 4\pi\rho$ (όπου ρ: η πυκνότητα της μάζας), η μόνη λύση στην περίπτωση του κενού ($\rho \equiv 0$) είναι η τετριμμένη φ=0 (δεδομένου ότι στο άπειρο απαιτούμε το δυναμικό να μηδενίζεται). Αυτό, όμως, παύει να ισχύει στην περίπτωση των εξισώσεων Einstein, οι οποίες στο κενό γράφονται ως $R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij} = 0 \Rightarrow R - \frac{4}{2}R = 0$ (όπου υποθέσαμε πως ο χωροχρόνος έχει 4 διαστάσεις) και συνεπώς αντικαθιστώντας στις αρχικές εξισώσεις έχουμε ισοδύναμα ότι $R_{ij} = 0$. Πολλαπλότητες στις οποίες η καμπυλότητα Ricci ικανοποιεί την σχέση αυτή ονομάζονται πολλαπλότητες Einstein και, όπως θα δούμε στην συνέχεια, περιέχουν πολύ ενδιαφέρουσες μη τετριμμένες περιπτώσεις. Επιπλέον, οι εξισώσεις Einstein μπορούν να γενικευτούν με τον προφανή τρόπο και για την περίπτωση χωροχρόνου διάστασης n+1 (για n>1) και όλες οι παρατηρήσεις της προκείμενης παραγράφου επεκτείνονται απ' ευθείας σε αυτήν. Για αυτό στις επόμενες παραγράφους θα ασχοληθούμε με την γενικότερη περίπτωση.

Φυσικά, όπως θα ήταν αναμενόμενο, η γενική θεωρία της σχετικότητας στην περίπτωση ενός ασθενούς βαρυτικού πεδίου και ενός "βραδέως" κινούμενου παρατηρητή προσεγγίζεται ικανοποιητικά από την Νευτώνεια θεώρια. Για να το δεί αυτό κανείς, μπορεί να εργαστεί ως εξής: Αν συμβολίσουμε με η_{ij} την μετρική Minkowski (εκφρασμένη σε μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^{3+1}$ αυτή παίρνει την μορφή $\eta_{ij} = diag(-1,+1,+1,+1)$), τότε, σύμφωνα με την αρχή της ισοδυναμίας, για κάθε παρατηρητή στον χωροχρόνο υπάρχει ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων στο οποίο η μετρική g να παίρνει την μορφή $g_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij}$, όπου $h_{ij}(0) = 0$ και $\partial_k h_{ij}(0) = 0$, και επιπλέον ο τανυστής h να θεωρείται "μικρός". Αν, λοιπόν, (x^0, x^1, x^2, x^3) είναι οι συντεταγμένες σε αυτό το σύστημα (με $g_{00} < 0$) τότε, λόγω της υπόθεσης ότι ο παρατηρητής είναι αδρανειακός (ή σε ελεύθερη πτώση), αυτός θα πρέπει να κινείται κατα μήκος της γεωδαισιακής γ με $\gamma(0) = 0$, $\dot{\gamma}(0) = \partial_0$. Έχοντας υποθέσει ότι ο παρατηρητής κινείται με ταχύτητα πολύ μικρότερη της ταχύτητας του φωτός (και επομένως $\frac{dx^i}{dt} << 1$ για i=1,2,3 και $\frac{dx^0}{dt} \simeq 1$, όπου t: η παραμέτρηση της γεωδαισιακής με το μήκος της, ή, στην γλώσσα της θεωρίας της σχετικότητας, ο χρόνος που "μετράει ο παρατηρητής), αντικαθιστώντας στην εξίσωση των γεωδαισιακών καμπυλών και συνυπολογίζοντας το μικρό μέγεθος του h έχουμε ότι για $i = 1, 2, 3$ (δηλαδή για τις "χωρικές" συντεταγμένες) $\frac{d^2x^i}{dt^2} \simeq -\Gamma^i_{00}(\frac{dx^0}{dt})^2 \simeq -\Gamma^i_{00} \simeq \frac{1}{2}\partial_i h_{00}$. Από την άλλη, σύμφωνα με την κλασική θεωρία, αν φ ειναι το βαρυτικό δυναμικό που "αισθάνεται" ο παρατηρητής, θα έπρεπε να ισχύει $\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\partial_i\varphi$. Συνεπώς, θα έχουμε ότι $h_{00} \simeq -2\varphi$. Υπό αυτές τις συνθήκες, λοιπόν, αν αντικαταστήσουμε τις προηγούμενες ποσότητες στις εξισώσεις Einstein στην περίπτωση όπου η ύλη συμπεριφέρεται ως τέλειο υγρό (όπου $T_{ij} = (\rho + p)v_i v_j + p g_{ij}$, και v το τετραδιάνυσμα της ταχύτητας του υγρού), προκύπτει ότι $\Delta\varphi \simeq 4\pi\rho$ - ακριβώς όπως προβλέπεται από την εξίσωση του Poisson στην Νευτώνεια περίπτωση. Φυσικά, στα προηγούμενα υποθέτουμε πως δουλεύουμε σε σύστημα μονάδων τέτοιο ώστε c=G=1.

2.2 Πρόβλημα αρχικών τιμών - Εξισώσεις περιορισμών

Όπως μπορεί κανείς εύκολα να διαπιστώσει, οι εξισώσεις Einstein έχουν την εξής ιδιομορφία: σε αντίθεση με τις περισσότερες γνωστές διαφορικές εξισώσεις, οι οποιες περιγράφουν κάποια σχέση που πρέπει να ικανοποιεί μια άγνωστη συνάρτηση ορισμένη σε έναν δεδομένο χώρο (είτε υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ είτε πολλαπλότητα), στις εξισώσεις Einstein και ο ίδιος ο χώρος (η Λορέντζια πολλαπλότητα) είναι εκ των προτέρων άγνωστος, και προκύπτει μόνο ως λύση των εξισώσεων αυτών. Όπως πολύ εύστοχα το διατύπωσε ο Wheeler, σύμφωνα με τις εξισώσεις Einstein "ο χωροχρόνος λέει στην ύλη πως θα κινηθεί, και η ύλη υπαγορεύει στον χωροχρόνο το πως θα καμπυλωθεί". Παρ' όλα αυτά, όμως, για την μελέτη των προβλημάτων της γενικής σχετικότητας με τις μεθόδους των διαφορικών εξισώσεων, είναι φανερό ότι θα πρέπει με κάποιον τρόπο να τεθεί το πρόβλημα εύρεσης λύσεων των εξισώσεων Einstein στα πλαίσια των προβλημάτων συνοριακών ή αρχικών τιμών. Δεδομένου, λοιπόν, του "υπερβολικού" χαρακτήρα των εξισώσεων αυτών (το ζήτημα αυτό θα το προσεγγίσουμε στην επόμενη παράγραφο), το κατάλληλο πλαίσιο για την μελέτη αυτή δίνεται από την περιγραφή του προβλήματος ως πρόβλημα αρχικών τιμων. Κατά συνέπεια, θα ήταν λογικό να περιορίσει κανείς την μελέτη του σε καθολικά υπερβολικούς χώρους, οι οποίοι τοπολογικά μπορούν εκ των προτέρων να γραφούν ως ένα γινόμενο $S\times\mathbb{R}$ (όπου S: μια υπερεπιφάνεια Cauchy), και, ορίζοντας "αρχικές τιμές" σε μια υπερεπιφάνεια όπως η $S\times\{0\}$, να μελετήσει την "εξέλιξη" των διάφορων γεωμετρικών ποσοτήτων σύμφωνα με τις επιταγές των εξισώσεων Einstein. Φυσικά, πέρα από μαθηματική απαίτηση, ο περιορισμός σε λύσεις που είναι καθολικά υπερβολικοί χώροι ικανοποιεί και την φυσική μας διαίσθηση όπως υπαγορεύεται από την αρχή της αιτιότητας: Γνώρίζοντας "ό,τι συμβαίνει" μια δεδομένη χρονική στιγμή, θα έπρεπε κανείς να είναι ικανός να καθορίσει πλήρως τόσο το μέλλον όσο και το παρελθόν.

Όσον αφορά στην ακριβή έννοια και το είδος των αρχικών τιμών που θα πρέπει να θέσει κανείς σε μια επιφάνεια Cauchy, τα πράγματα δεν είναι εξ αρχής ξεκάθαρα. Δεδομένου ότι οι ποσότητες που περιγράφουν οι εξισώσεις Einstein είναι συναλλοίωτες, οι αρχικές τιμές δεν θα πρέπει να είναι ποσότητες που εξαρτώνται από το σύστημα συντεταγμένων που θα έχει επιλεγεί. Αντιθέτως, θα πρέπει να ειναι γεωμετρικές ποσότητες. Όπως θα δούμε στην συνέχεια, οι εξισώσεις Einstein μπορούν σε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων να γραφούν ως υπερβολικές εξισώσεις δεύτερης τάξης. Σε μια πρώτη προσέγγιση, λοιπόν, θα φαινόταν ορθό να ορίσουμε στην αρχική υπερεπιφάνεια S μια Ριμάννεια μετρική (η οποία θα είναι η επαγόμενη μετρική της Λορέντζιας πολλαπλότητας M), την παράγωγο της μετρικής αυτής ως προς ένα διανυσματικό πεδιο κάθετο στην S (κάτι που προσδιορίζεται από την δεύτερη θεμελιώδη μορφή της S στην M) καθώς και αντίστοιχες αρχικές συνθήκες για τα υλικά πεδία που καθορίζουν τον τανυστή τάσης - ενέργειας.

Παρ' όλα αυτά, οι ποσότητες αυτές δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, και επομένως αν οριστούν αυθαίρετα δεν θα μπορούσαμε να περιμένουμε ένα "πρόβλημα αρχικών τιμών" ορισμένο έτσι να έχει εν γένει λύση. Μια αναγκαία συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν προκύπτει από του τύπους των Gauss και Codazzi που περιγράψαμε στην πρώτη παράγραφο. Για μια δεδομένη καθολικά υπερβολική Λορέντζια πολλαπλότητα (M,g) με Levi Civita συνοχή ∇, αν Σ είναι μια επιφάνεια Cauchy με επαγόμενη μετρική $\bar{g}$ (και Levi Civita συνοχή $\bar{\nabla}$), δεύτερη θεμελιώδη μορφή k και κάθετο σε αυτήν διανυσματικό πεδίο N με $g(N,N)=-1$, τότε ο τανυστής Einstein G της M περιορισμένος στην Σ ικανοποεί τις σχέσεις:

$$G(N,N)=\frac{1}{2}\Big(\bar{R}-k_{ij}k^{ij}+(\bar{g}^{ij}k_{ij})^2\Big)$$

$$\forall v\in\Gamma(T\Sigma):\, G(N,v)=\Big(\bar{\nabla}^j k_{ji}-\bar{\nabla}_i(\bar{g}^{kl}k_{kl})\Big)v^i$$

όπου $\bar{R}=\bar{g}^{ij}\bar{R}_{ij}$: η βαθμωτή καμπυλότητα της Σ.

Οι σχέσεις αυτές, που καλούνται και εξισώσεις περιορισμών, προκύπτουν ως εξής:

Για δοθέν σημείο p της Σ αν διαλέξουμε μια βάση $\{N,e_1,...e_n\}$ της ίνας T_pM ώστε $g(N,e_i)=0$ και $g(e_i,e_i)=1$ για $i\in\{1,..n\}$, χρησιμοποιώντας την παρατήρηση της πρώτης παραγράφου σχετικά με τον τύπο του Gauss έχουμε ότι:

$$G(N,N)=Ric(N,N)-\frac{1}{2}R\cdot g(N,N)=$$

$$= Ric(N,N) + \frac{1}{2}\Big(- Ric(N,N) + \sum_{i=1}^{n} Ric(e_i,e_i)\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{n} g(R(N,e_i)N,e_i) + \sum_{i=1}^{n}(-1) g(R(e_i,N)e_i,N) + \sum_{i,j=1}^{n} g(R(e_i,e_j)e_i,e_j)\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}(\sum_{i,j=1}^{n} g(R(e_i,e_j)e_i,e_j)) = \frac{1}{2}(\sum_{i,j=1}^{n} g(\bar{R}(e_i,e_j)e_i,e_j) + k(e_i,e_i)\cdot k(e_j,e_j) - k(e_i,e_j)\cdot k(e_i,e_j))) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\bar{R} - k_{ij}k^{ij} + (\bar{g}^{ij}k_{ij})^2\Big)$$

Όμοια, χρησιμοποιώντας την εξίσωση Codazzi-Mainardi για διανυσματικά πεδία $X, Y, Z \in \Gamma(T\Sigma)$:

$$nor(R(X,Y)Z) = (\nabla_X S)(Y,Z) - (\nabla_Y S)(X,Z) = ((\nabla_X k)(Y,Z) - (\nabla_Y k)(X,Z))N$$

(μια και $S(X,Y) = nor(\nabla_X Y) = k(X,Y)N$ και $g(N,N) = -1 =$ σταθερό) μπορούμε να υπολογίσουμε ότι:

$$G(N,e_i) = Ric(N,e_i) - 0 = \sum_{j=1}^{n} g(R(N,e_j)e_i,e_j) = \sum_{j=1}^{n} g(R(e_j,e_i)e_j,N) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} g(nor(R(e_j,e_i)e_j),N) = -\sum_{j=1}^{n}(\nabla_{e_j}k)(e_i,e_j) - (\nabla_{e_i}k)(e_j,e_j)$$

από όπου άμεσα προκύπτει η δεύτερη σχέση. $\square$

Κατά συνέπεια, αν η (M,g) είναι μια λύση των εξισώσεων Einstein, οι "αρχικές συνθήκες" στην Σ πρέπει να ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\bar{R} - k_{ij}k^{ij} + (k_i^i)^2 = 16\pi T_{kl}N^k N^l$$

και

$$\bar{\nabla}^j k_{ij} - \bar{\nabla}_i k_j^j = 8\pi T_{ik}N^k$$

(όπου το $v_i = T_{ij}N^j$, παρ' ότι ειναι στοιχείο του $\Gamma(T*M)$, μπορούμε να το θεωρήσουμε και στοιχείο του $\Gamma(T*\Sigma)$ λόγω του εγκλεισμού $\iota : \Sigma \to M$)

Φυσικά, για να έχουν νόημα οι πιο πάνω περιορισμοί θα πρέπει να εχουν δοθεί οι κατάλληλες αρχικές τιμές και στα υλικά πεδία από τα οποία προκύπτει ο τανυστής τάσης ενέργειας. Αν υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι ασχολούμαστε με την περίπτωση ενός βαθμωτού πεδίου χωρίς μάζα, θα έπρεπε να ορίσουμε αρχικά τις ποσότητες $\varphi\mid_\Sigma$ και $N\varphi\mid_\Sigma$.

2.3 Ύπαρξη λύσης

Στην προηγούμενη παράγραφο περιγράψαμε κάποιες αναγκαίες συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν τα γεωμετρικά δεδομένα που μπορούμε να επιγράψουμε σε μια Ριμάννεια πολλαπλότητα, ώστε οι εξισώσεις Einstein να μας προσδιορίσουν βάσει αυτών μια καθολικά υπερβολική Λορέντζια πολλαπλότητα. Παρ' όλα αυτά, ο χαρακτηρισμός τους ως "αρχικές τιμές" μέχρι στιγμής δεν ήταν δικαιολογημένος, μια και δεν δείξαμε καν ότι τέτοια δεδομένα είναι όντως ικανά να παράξουν μια λύση των εξισώσεων Einstein. Έτσι, λοιπόν, τόσο σε αυτή όσο και στις επόμενες παραγράφους θα προσπαθήσουμε να περιγράψουμε το πως δεδομένα αυτής της μορφής είναι ικανά να παράξουν λύση, η οποία μάλιστα είναι μοναδική (κατά μια έννοια που θα γίνει φανερή λίγο πιο κάτω) και Cauchy ευσταθής. Κατά συνέπεια, γεωμετρικά δεδομένα όπως αυτά που περιγράφηκαν στην προηγούμενη παράγραφο συνιστούν πράγματι ένα πρόβλημα αρχικών τιμών, καλά τοποθετημένο κατά Hadamard.

Στο εξής, για να αποφεύγονται οι περιττοί συμβολισμοί αναφορικά με το εύρος στο οποίο αναφέρονται οι διάφοροι δείκτες, θα υιοθετήσουμε την εξής σύμβαση: σε περίπτωση συμβολισμού των δεικτών με ελληνικούς χαρακτήρες, αυτοί θα παίρνουν τιμές από 0 μέχρι m (όπου το m σε κάθε περίπτωση θα προκύπτει από τα συμφραζόμενα), ενώ ο συμβολισμός τους με λατινικούς χαρακτήρες θα υποδηλώνει ότι παίρνουν τιμές μόνο από 1 έως m.

Παίρνοντας το ίχνος των εξισώσεων Einstein ώστε να προσδιορίσουμε την βαθμωτή καμπυλότητα και στην συνέχεια αντικαθιστώντας ξανά προκύπτει ότι ισοδύναμα, οι εξισώσεις αυτές γράφονται ως:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi(T_{\mu\nu} - \frac{1}{n-1} tr_g(T) g_{\mu\nu})$$

Στο εξής, για λόγους απλότητας, θα υποθέτουμε ότι ο τανυστής τάσης ενέργειας προκύπτει από ένα βαθμωτό πεδίο χωρίς μάζα, και επομένως οι εξισώσεις Einstein μαζί με τις εξισώσεις του πεδίου γράφονται ως:

$$\begin{cases} R_{\mu\nu} = 8\pi(d\varphi)_\mu(d\varphi)_\nu \\ \Box_g\varphi = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Θα θεωρούμε, λοιπόν, ότι τα αρχικά μας δεδομένα αποτελούνται από μια n-διάστατη Ριμάννεια πολλαπλότητα (Σ, g_0), έναν (0,2)-τανυστή k σε αυτήν, καθώς και δύο λείες συναρτήσεις $\varphi_0, \varphi_1 : \Sigma \to \mathbb{R}$, τα οποία ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$R - k_{ij}k^{ij} + (k^i_i)^2 = 8\pi(\varphi_1^2 + \partial^i\varphi_0\partial_i\varphi_0)$$

$$\nabla^j k_{ij} - \partial_i(k^j_j) = 8\pi \cdot \varphi_1\partial_i\varphi_0$$

Δοθέντων αυτών, το αντίστοιχο πρόβλημα αρχικών τιμών έγκειται στην εύρεση μιας (n+1)-διάστατης Λορέντζιας πολλαπλότητας (M,g) η οποία ικανοποεί τις εξισώσεις ... και για την οποία υπάρχει μια συνάρτηση $\varphi \in C^\infty(M)$ και ένας εγκλεισμός $\iota : \Sigma \to M$ ώστε η $\iota(\Sigma)$ να είναι μια υπερεπιφάνεια Cauchy για την M και $\iota_*(g) = g_0$, $\varphi\circ\iota = \varphi_0$, $N\varphi\circ\iota = \varphi_1$ και $\iota_*(K) = k$, όπου το N είναι ένα διανυσματικό πεδίο μελλοντικά κατευθυνόμενο, κάθετο στην Σ με $g(N,N) = -1$ και Κ είναι η δεύτερη θεμελιώδης μορφή της $i(\Sigma)$. Μια τέτοια τριάδα (M,g,φ) θα καλείται καθολικά υπερβολικό ανάπτυγμα των εν λόγω αρχικών δεδομένων, και η ύπαρξη ενός καθολικά υπερβολικού αναπτύγματος είναι το αντικείμενο της παραγράφου αυτής.

Για τον σκοπό αυτό είναι αναγκαίο να αφήσουμε για λίγο την συναλλοίωτη μορφή των εξισώσεων Einstein και να δούμε την έκφρασή τους σε ένα (τοπικό) σύστημα συντεταγμένων. Ο τανυστής Ricci παίρνει τότε την μορφή (μετά από πράξεις):

$$R_{\mu\nu} = \partial_\varkappa \Gamma^\varkappa_{\mu\nu} - \partial_\mu \Gamma^\varkappa_{\varkappa\nu} + \Gamma^\varkappa_{\varkappa\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\varkappa_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\varkappa\nu} =$$

$$= -\frac{1}{2} g^{\varkappa\lambda}\partial_\varkappa\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \nabla_\mu \Gamma_\nu + \nabla_\nu \Gamma_\mu + g^{\varkappa\lambda} g^{\gamma\delta}\left(\Gamma_{\varkappa\gamma\mu}\Gamma_{\lambda\delta\nu} + \Gamma_{\varkappa\gamma\mu}\Gamma_{\lambda\nu\delta} + \Gamma_{\varkappa\gamma\nu}\Gamma_{\lambda\mu\delta}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2} g^{\varkappa\lambda}\partial_\varkappa\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \nabla_\mu \Gamma_\nu + \nabla_\mu \Gamma_\nu + f_{\mu\nu}(g, \partial g)$$

όπου έχουμε ορίσει$\Gamma_{\mu\varkappa\nu} = g_{\varkappa\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ και $\Gamma^\mu = g^{\varkappa\lambda}\Gamma^\mu_{\varkappa\lambda}$ (βέβαια η ποσότητα αυτή δεν είναι διάνυσμα, αλλά εξαρτάται από το σύστημα συντεταγμένων που έχουμε επιλέξει).

Αναζητώντας τρόπους να δείξουμε την ύπαρξη καθολικά υπερβολικού αναπτύγματος για δεδομένα αρχικά δεδομένα, παρατηρούμε ότι εν γένει η εξίσωση Einstein δεν εμπίπτει σε καμία από τις κλασικές κατηγορίες μερικών διαφορικών εξισώσεων (πράγμα αναμενόμενο, αφού αν κάτι τέτοιο συνέβαινε κλασικά θεωρήματα μερικών διαφορικών εξισώσεων θα επέβαλαν μοναδικότητα στην λύση, γεγονός αντίθετο με τον συναλλοίωτο χαρακτήρα της λύσης). Παρ' όλα αυτά, είναι δυνατόν να περιοριστούμε σε μια συγκεκριμένη κλάση συστήματων συντεταγμένων, στα οποία η εξίσωση αυτή να παίρνει απλούστερη μορφή, καθώς πλέον ο μόνος όρος δεύτερης τάξης που θα απομένει στην έκφραση για την καμπυλότητα Ricci θα είναι ο $-\frac{1}{2}g^{\varkappa\lambda}\partial_\varkappa\partial_\lambda g_{\mu\nu}$.

Έχοντας κατά νου, λοιπόν, πως θέλουμε να επιτύχουμε την "απαλοιφή" του όρου $\nabla_\mu \Gamma_\nu + \nabla_\mu \Gamma_\nu$ και εκμεταλλευόμενοι το γεγονός πως τα αρχικά δεδομένα με τον τρόπο που έχουν οριστεί μας δίνουν την ελευθερία να επιλέξουμε αυθαίρετα κάποιες συνιστώσες του τανυστή g και των παραγώγων του εργαζόμαστε ως εξής:

Ορίζουμε την διαφορίσιμη πολλαπλότητα $M = \Sigma \times \mathbb{R}$, την οποία εφοδιάζουμε με μια λορέντζια μετρική $h = -dt^2 + g_0$, και η οποία επάγει μια Levi Civita συνοχή $\bar{\nabla}$. Δεδομένου ότι η λύση μας θα είναι καθολικά υπερβολική Λορέντζια πολλαπλότητα με υπερεπιφάνεια Cauchy διαφορομορφική με την Σ, ένα ανοιχτό υποσύνολο αυτής θα ταυτίζεται διαφορομορφικά με ένα ανοιχτό υποσύνολο της Μ που περιέχει την $\Sigma \times \{0\}$. Για το λόγο αυτό, προς αποφυγή περιττών συμβολισμών, στο εξής θα υποθέτουμε ότι η λύση μας ταυτίζεται με αυτό το υποσύνολο (όχι βέβαια ως προς την Λορέντζια μετρική, παρά μόνο ως προς την διαφορική δομή) και η Σ ταυτίζεται με την $\Sigma \times \{0\}$. Στην συνέχεια, θεωρούμε το εξής τροποποιημένο πρόβλημα αρχικών τιμών: Κρατώντας τα αρχικά δεδομένα ίδια, απαιτούμε η λύση μας (η οποία όπως είπαμε είναι ανοιχτό υποσύνολο της Μ) να ικανοποιεί τις εξισώσεις:

$$\begin{cases} \hat{R}_{\mu\nu} = 8\pi(d\varphi)_\mu(d\varphi)_\nu \\ \Box_g\varphi = 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

όπου $\hat{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \nabla_\mu F_\nu + \nabla_\mu F_{i\nu}$ και η 1-μορφή F ορίζεται ως:

$$F_\mu = g_{\mu\nu}g^{\varkappa\lambda}(\bar{\Gamma}^\nu_{\varkappa\lambda} - \Gamma^\nu_{\varkappa\lambda})$$

και όπου Γ, $\bar{\Gamma}$ τα σύμβολα Christofell για τις συνοχές των g, h αντίστοιχα. Η F είναι όντως 1-μορφή παρ' ότι τα σύμβολα Christofell δεν είναι τανυστές, διότι η διαφορά των συμβόλων Christofell είναι στην πραγματικότητα ένας τανυστής A που περιγράφεται από την σχέση $\forall X, Y \in \Gamma(TM), \omega \in \Gamma(T*M) : A(X, Y, \omega) = \omega(\bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y)$.

Εύκολα παρατηρούμε ότι η τροποποιημένη εξίσωση ειναι της μορφής $-\frac{1}{2}g^{\varkappa\lambda}\partial_\varkappa\partial_\lambda g_{\mu\nu} + f_{\mu\nu}(g, \partial g) = 0$, και επομένως το πρόβλημα της εύρεσης λύσης μπορεί να αντιμετωπιστεί με τα εργαλεία που αναφέρονται στο παράρτημα. Επιπλέον, σε περίπτωση που η 1-μορφή μηδενίζεται ταυτοτικά, η λύση της τροποιημένης αυτής εξίσωσης θα ήταν στην πραγματικότητα μια λύση των εξισώσεων Einstein. Κατά συνέπεια, για να αντιμετωπίσουμε το ζήτημα ύπαρξης λύσης για το πρόβλημα αρχικών τιμών των εξισώσεων Einstein, αρκεί να δείξουμε ότι εκμεταλλευόμενοι την ελευθερία επιλογής κάποιων συνιστωσών της μετρικής και των παραγώγων της (που μας επιτρέπουν τα αρχικά δεδομένα) μπορούμε να επιτύχουμε τον μηδενισμό αυτής της ποσότητας.

Πιο συγκεκριμένα, φιξάρουμε ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων $(x^1, ...x^n)$ σε ένα ανοιχτό σύνολο U γύρω από ένα σημείο p της Σ με συμπαγή κλειστότητα και το επεκτείνουμε σε σύστημα συντεταγμένων $(x^0, x^1, ...x^n)$ στην $U \times \mathbb{R}$ (ώστε η συντεταγμένη x^0 να είναι η δεύτερη συντεταγμένη του γινομένου). Δεδομένου ότι η τροποποιημένη εξίσωση είναι της μορφής $-\frac{1}{2}g^{\varkappa\lambda}\partial_\varkappa\partial_\lambda g_{\mu\nu} + f_{\mu\nu}(g, \partial g) = 0$, πρέπει οι αρχικές τιμές που θα ορίσουμε στην $U \times \{0\}$ να περιλαμβάνουν τις ποσότητες $g \mid_{x^0=0}$, $\partial_0 g \mid_{x^0=0}$, $\varphi \mid_{x^0=0}$ και $\partial_0\varphi \mid_{x^0=0}$. Προφανώς, τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος μας "υποχρεώνουν' να ορίσουμε $\varphi \mid_{x^0=0}= \varphi_0$, $\partial_0\varphi \mid_{x^0=0}= \varphi_1$, $g_{ij} \mid_{x^0=0}= (g_0)_{ij}$ και $\partial_0 g_{ij} \mid_{x^0=0}= 2k_{ij}$ για $i, j \in \{1, ..n\}$. Είμαστε, όμως, ελεύθεροι να ορίσουμε $g_{00} \mid_{x^0=0}= -1$ και $g_{0i} \mid_{x^0=0}= 0, i \in \{1, ..n\}$. Επιπλέον, είμαστε ελεύθεροι να ορίσουμε αυθαίρετα τις ποσότητες $\partial_0 g_{00}$ και $\partial_0 g_{0i}$, και αυτό θα το κάνουμε ώστε να επιτύχουμε τον μηδενισμό της 1-μορφής F: Απαιτώντας $\partial_0 g_{00} \mid_{x^0=0}= -(2g_{0\mu}g^{\varkappa\lambda}\bar{\Gamma}^\mu_{\varkappa\lambda}) \mid_{x^0=0} -2tr_{g_0}(k)$ και για $i \geq 1$: $\partial_0 g_{0i} \mid_{x^0=0}= \big(-(g_{i\nu}g^{\varkappa\lambda}\bar{\Gamma}^\nu_{\varkappa\lambda}) \mid_{x^0=0} +\frac{1}{2}(g_0)^{\varkappa\lambda}(2\partial_\varkappa(g_0)_{i\lambda} - \partial_i(g_0)_{\varkappa\lambda}) \mid_{x^0=0} \big)$ εύκολα επαληθεύουμε ότι επιτυγχάνουμε $F \mid_{x^0=0}= 0$.

Για να εφαρμόσουμε, τώρα, τις τεχνικές και τα εργαλεία του παραρτήματος για την ύπαρξη λύσης μιας μη γραμμικής κυματικής εξίσωσης, θα έπρεπε τα αρχικά μας δεδομένα να είχαν συμπαγή φορέα, ο συντελεστής του μεγιστοτάξιου όρου να ήταν μια "συμβατή μετρική" (κατά την ορολογία του παραρτήματος) και όλοι οι υπόλοιποι όροι να σχημάτιζαν μια συμβατή "μη γραμμικότητα". Για τον λόγο αυτό, λοιπόν, θεωρώντας ότι $U \subseteq \mathbb{R}^n$, πολλαπλασιάζουμε τα αρχικά μας δεδομένα με μια κατάλληλη συνάρτηση ψ με συμπαγή φορέα η οποία είναι ταυτοτικά ίση με 1 σε ένα ανοιχτό και φραγμένο σύνολο V_1. Επιπλέον, επειδή το σύνολο $\{g^{\mu\nu}(x)|w \in \bar{V_1}\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του C_n και συνακόλουθα ανήκει σε κάποια $C_{n,a}$ για κάποιο $a = (a_1, a_2 a_3)$, μπορούμε να θεωρήσουμε μια C^1 συνάρτηση $A : C_n \to C_{n,(\frac{a_1}{2},\frac{a_2}{2},2a_3)}$ η οποία είναι η ταυοτική περιορισμένη σε μια ανοιχτή περιοχή του $\{g^{\mu\nu}(x)|w \in \bar{V_1}\}$ και για την οποία ισχύει $A(g^{-1}) = \big(A(g)\big)^{-1}$. Με αυτόν τον τρόπο, το πρόβλημα αρχικών τιμών για την εξίσωση που προκύπτει από την τροποποιημένη εξίσωση (ως προς το ζεύγος (g, φ)) αν αντικαταστήσουμε όλους τους συντελεστες της μορφής $g^{\mu\nu}$ με την εικόνα τους μέσω της A ικανοποιεί τις πρυποθέσεις του παραρτήματος, και επομένως έχει λύση σε ένα σύνολο της μορφής $U \times (T_1, T_2)$. Λόγω συνέχειας της λύσης αυτής, υπάρχει μια ανοιχτή περιοχή U_1 του $V_1 \times \{0\}$ στην οποία η λύση g ειναι τέτοια ώστε $A(g) = g$. Κατά συνέπεια, περιοριζόμενοι σε μια ίσως ακόμη μικρότερη περιοχή U_2 για την οποία $\pi(U_2) \subset V_1$ (όπου π: η προβολή στον πρώτο παραγοντα του $\Sigma \times \mathbb{R}$) και στην οποία κάθε μη επεκτάσιμη χρονοειδής καμπύλη (σύμφωνα με την μετρική g) τέμνει ακριβώς μια φορά την $V_2 \times \{0\} = U_2 \cap (\Sigma \times \{0\})$, η λύση g επαληθεύει την τροποποιημένη εξίσωση (2.2) με αρχικές συνθήκες τον περιορισμό των αρχικών συνθηκών του αρχικού προβλήματος.

Επιπλέον, στην περιοχή U_2 θα δείξουμε ότι επιτυγχάνεται ο μηδενισμός του F. Οι εξισώσεις περιορισμών μας εξασφαλίζουν ακριβώς ότι $(G_{0\mu} - 8\pi T_{0\mu}) \mid_{x^0=0}= 0$ για $\mu \in \{0, 1, ..n\}$. Επειδή στο U_2 το ζεύγος (g,φ) ικανοποιεί την εξίσωση $G_{\mu\nu} - 8\pi T_{\mu\nu} = \nabla_\mu F_\nu + \nabla_\mu F_\nu + \frac{1}{2}(\nabla^\lambda F_\lambda) g_{\mu\nu}$, λόγω των εξισώσεων περιορισμών θα έχουμε $\big(\nabla_\mu F_\nu + \nabla_\mu F_\nu + \frac{1}{2}(\nabla^\lambda F_\lambda) g_{\mu\nu}\big) \mid_{x^0=0}= 0$ (όπου $\{x^0 = 0\} \cap U_2 = V_2 \times \{0\}$), και θεωρώντας $X \in \Gamma(T\Sigma)$ και το N κάθετο στην Σ (περιορισμένα πάντα στην U_2 έχουμε ότι

$$\big((\nabla_X F)(N) + (\nabla_N F)(X) + \frac{1}{2}(\nabla^k F_k) g(N, X)\big) \mid_{x^0=0}= 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \big((\nabla_N F)(X)\big) \mid_{x^0=0}= 0$$

αφού g(N,X)=0 και $F \mid_{x^0=0}= 0 =$ σταθερό. Συνεπώς $\nabla_0 F_i = 0, i \geq 1$. Όμοια,

$$\big((\nabla_N F)(N) + (\nabla_N F)(N) + \frac{1}{2}(\nabla^k F_k) g(N, N)\big) \mid_{x^0=0}= 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla_0 F_0 = 0$$

Επειδή, όμως, $\nabla_\mu(G_{\mu\nu} - 8\pi T_{\mu\nu}) = 0$, η 1-μορφή F ικανοποεί στο U_2 την κυματική εξίσωση:

$$\nabla_\varkappa \nabla^\varkappa F_\mu + R^\lambda_\mu F_\lambda = 0$$

Έτσι, έχοντας εξασφαλίσει ότι $(F)_{x^0=0} = (\nabla_0 F)_{x^0=0} = 0$ στο $V_2 \times \{0\}$ και έχοντας υποθέσει ότι $U_2 \subseteq D(V_2)$, σύμφωνα με το παράρτημα θα έχουμε ότι F=0 στο U_2 (μια και το κύριο σύμβολο της κυματικής εξίσωσης του F είναι η ίδια η g). Κατά συνέπεια, στο U_2 η λύση (g,φ) που κατασκευάσαμε είναι στην πραγματικότητα μια λύση των εξισώσεων Einstein.

Με αυτόν τον τρόπο, έχουμε καταφέρει για κάθε σημείο $p \in \Sigma$ να κατασκευάσουμε μια ανοιχτή περιοχή του V_p στην Σ, καθώς και να μια λύση (g_p, φ_p) του προβλήματος αρχικών τιμών περιορισμένο στο V_p σε ένα ανοιχτό σύνολο U_p της $\Sigma \times \mathbb{R}$, για το οποίο ισχύει $U_p \cap (\Sigma \times \{0\}) = V_p \times \{0\}$ καθώς και ότι η $V_p \times \{0\}$ είναι μια υπερεπιφάνεια Cauchy για το (U_p, g_p). Η ύπαρξη λύσης του προβλήματος αρχικών τιμών θα είχε εξασφαλισθεί αν μπορούσαμε να "κολλήσουμε" όλα αυτά τα σύνολα ώστε να φτιάξουμε μια καθολικά υπερβολική λύση των εξισώσεων Einstein. Αυτό επιτυγχάνεται ως εξής: Κατ' αρχάς, πρέπει να δείξουμε ότι για οποιαδήποτε δύο σημεία p_1 και p_2 για τα οποία ισχύει ότι $U_{p_1} \cap U_{p_2} \neq \emptyset$ θα έχουμε και ότι $g_{p_1} = g_{p_2}$ και $\varphi_{p_1} = \varphi_{p_2}$ εκει. Αυτό όμως επαληθεύεται εύκολα, αφού λόγω του συναλλοίωτου χαρακτήρα των εξισώσεων και της 1-μορφής F, ως προς οποιδήποτε σύστημα συντεταγμένων και τα δύο ζεύγη είναι λύσεις των εξισώσεων Einstein με ταυτόσημες αρχικές τιμές στο $V_{p_1} \cap V_{p_2}$. Κατά συνέπεια, ορίζοντας για $t \geq 0$ το σύνολο $S_t = \Sigma \times [0,t] \cap \bar{U}_{p_1} \cap \bar{U}_{p_2}$ και θέτοντας $A = \{t \in [0, +\infty) | \forall x \in S_t : (g_{p_1}, \varphi_{p_1})(x) = (g_{p_2}, \varphi_{p_2})(x)$ και $J^-_{g_{p_1}}(x) \cap J^+_{g_{p_1}}(V_1) = J^-_{g_{p_2}}(x) \cap J^+_{g_{p_2}}(V_2)\}$ (όποτε και $A \neq \emptyset$ αφού $0 \in A$) μπορούμε να δειξουμε ότι το A ειναι κλειστό και ανοιχτό υποσύνολο του $[0, \infty)$ (καθώς αν $t \in A$ και $(t,x) \in S_t$ τότε για $t_1 > t$ αρκούντως κοντά στο t θα ισχύει ότι $J^-_{g_{p_i}}((t_1,x)) \cap J^+_{g_{p_i}}(V_i) \subset V_1 \cap V_2$ και, λόγω του θεωρήματος μοναδικότητας που διατυπώνεται στο παράρτημα, $g_{p_1} = g_{p_2}, \varphi_{p_1} = \varphi_{p_2}$ στο $J^-_{g_{p_1}}((t_1,x)) \cap J^+_{g_{p_1}}(V_1) \cup J^-_{g_{p_2}}((t_1,x)) \cap J^+_{p_2}(V_2)$ και συνακόλουθα $J^-_{g_{p_1}}((t_1,x)) \cap J^+_{g_{p_1}}(V_1) = J^-_{g_{p_2}}((t_1,x)) \cap J^+_{p_2}(V_2))$. Συνακόλουθα, θα ισχύει ότι $(g_{p_1}, \varphi_{p_1}) = (g_{p_2}, \varphi_{p_2})$ στο $\Sigma \times [0, \infty) \cap \bar{U}_{p_1} \cap \bar{U}_{p_2}$ και, με το ίδιο ακριβώς επιχείρημα και για την αντίστροφη χρονική κατεύθυνση, έχουμε ότι οι λύσεις ταυτίζονται στο $\Sigma \times (-\infty, \infty) \cap \bar{U}_{p_1} \cap \bar{U}_{p_2} = \bar{U}_{p_1} \cap \bar{U}_{p_2}$. Επομένως, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι λύσεις $\{(g_p, \varphi_p)\}_{p \in \Sigma}$ ορίζουν όντως μια λύση του προβλήματος αρχικών τιμών στο σύνολο $M = \cup_{p \in \Sigma} U_p$. Το ότι το M είναι ένας καθολικά υπερβολικός χώρος με υπερεπιφάνεια Cauchy $\Sigma \times \{0\}$ έπεται άμεσα από το γεγονός ότι κάθε μη επεκτάσιμη χρονοειδής καμπύλη γ του M τέμνει τουλάχιστον μια φορά την $\Sigma \times \{0\}$ (αφού τέμνει τουλάχιστον ένα U_p και είναι μη επεκτάσιμη χρονοειδής σε αυτό), ενώ (δεδομένου ότι οι U_p είχαν επιλεγεί αρκούντως μικρές ώστε το ∂_0 να ήταν παντού χρονοειδές σε αυτές) δεν μπορεί να την τέμνει πάνω από μια φορά, αφού μια παραμέτρησή της με βάση την συντεταγμένη x^0 θα ήταν 1-1 και συνακόλουθα δεν θα μπορούσε να τέμνει την $\Sigma \times \{0\} = \{x^0 = 0\}$ πάνω από μια φορά.

2.4 Μοναδικότητα

Στην προηγούμενη παράγραφο αποδείξαμε την ύπαρξη λύσης του προβλήματος αρχικών τιμών για τις εξισώσεις Einstein στην περίπτωση ενός βαθμωτού πεδίου χωρίς μάζα. Άμεσα, λοιπόν, γεννάται το ερώτημα του κατά πόσο μια τέτοια λύση είναι, τουλάχιστον τοπικά, μοναδική. Φυσικά, η έννοια της μοναδικότητας, όπως συζητήθηκε και κατά την περιγραφή των εξισώσεων Einstein, δεν αφορά τις εκφράσεις του τανυστή της μετρικής σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων, αλλά την γεωμετρία της Λορέντζιας πολλαπλότητας που προκύπτει ως λύση. Για το λόγο αυτό, η (τοπική) μοναδικότητα της λύσης θα έπεται από το εξής θεώρημα:

> Θεώρημα: Έστω τα αρχικά δεδομένα $(\Sigma, g_0, k, \varphi_0, \varphi_1)$ για το πρόβλημα αρχικών τιμών των εξισώσεων Einstein στην περίπτωση ενός βαθμωτού πεδίου φ χωρίς μάζα. Έστω, επιπλέον, δύο αναπτύγματα (M_a, g_a, φ_a) και (M_b, g_b, φ_b) των αρχικών δεδομένων, με αντίστοιχους εγκλεισμούς $i_a : \Sigma \to M_a$ και $i_b : \Sigma \to M_b$. Τότε υπάρχει ένα καθολικά υπερβολικό ανάπτυγμα (M, g, φ) (με αντίστοιχο εγκλεισμό ι) το οποίο εμφυτεύεται ισομετρικά ως υποσύνολο των M_a, M_b μέσω ισομετριών ψ_a και ψ_b ώστε $\psi_a \circ i = i_a, \psi_b \circ i = i_b$ και $\psi_a^* \varphi_a = \varphi, \psi_b^* \varphi_b = \varphi$.

Παρατήρηση:
τα αναπτύγματα M_a, M_b δεν χρειάζεται να είναι καθολικά υπερβολικοί χώροι, αλλά οι εγκλεισμοί i_a, i_b πρέπει να συνοδεύονται από διανυσματικά πεδία κάθετα στις $i_a(\Sigma), i_b(\Sigma)$ και μοναδιαία γύρω από αυτές, τα οποία στο εξής θα αναφέρονται ως "μελλοντικά" (ακόμα και αν οι χώροι αυτοί δεν επιδέχονται χρονικό προσανατολισμό)

Απόδειξη:

Με μια πρώτη ματιά, θα μπορούσε κανείς να θεωρήσει ότι θα αρκούσε να ταυτίσει μια ανοιχτή περιοχη των $i_a(\Sigma), i_b(\Sigma)$ με μια ανοιχτή περιοχή της $\Sigma \times \{0\}$ στο $\Sigma \times \mathbb{R}$ μέσω κάθετων συντεταγμένων (όπου η απεικόνιση $\Sigma \times \mathbb{R} \to M_k$ γίνεται μέσω της απεικόνισης exp για ένα κάθετο διανυσματικό πεδίο στις $i_k(\Sigma)$), και στην συνέχεια να αποδείξη ότι εκεί οι λύσεις ταυτίζονται μέσω θεωρημάτων διαφορικών εξισώσεων. Μια τέτοια προσπάθεια, όμως, δεν γίνεται να ευοδωθεί, καθώς σε τέτοιες συντεταγμένες οι εξισώσεις Einstein δεν έχουν την μορφή κυματικών εξισώσεων ή έστω κάποιας κατηγορίας διαφορικών εξισώσεων όπου να ισχύουν εν γένει θεωρήματα μοναδικότητας για προβλήματα αρχικών τιμών. Για το λόγο αυτό, είναι απαραίτητο, όπως και στην απόδειξη ύπαρξης λύσης, να καταφύγουμε σε συντεταγμένες στις οποίες οι διαφορικές μας εξισώσεις θα παίρνουν μια "καλή" μορφή. και οι συντεταγμένες αυτές δεν είναι άλλες από τις κυματικές συντεταγμένες.

Πιο συγκεκριμένα, λοιπόν, επαναλαμβάνοντας την απόδειξη για την ύπαρξη λύσης μπορούμε να κατασκευάσουμε μια λύση (g,φ) σε μια ανοιχτή περιοχή D του $\Sigma \times \{0\}$ στο $\Sigma \times \mathbb{R}$ (με $i : \Sigma \to \Sigma \times \{0\}$ την προφανή απεικόνιση), ώστε για κάθε σημείο p της Σ να έχουμε έναν χάρτη (V, y) γύρω από το $i(p)$ στον οποίο να ισχύει $y(i(p)) = 0$, $\{y^0 = 0\} = V \cap (\Sigma \times \{0\})$ και $g^{\alpha\beta}(\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} - \bar{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta}) = 0$ (όπου $\bar{\Gamma}$ είναι το σύμβολο Christofell που αντιστοιχεί για τις συντεταγμένες αυτές στην μετρική $ds^2 = dt^2 + (g_0)_{ij} dx^i dx^j$ στην πολαπλότητα $\Sigma \times \mathbb{R}$). Κατά συνέπεια, θεωρώντας προς το παρόν το $p \in \Sigma$ φιξαρισμένο, αν θεωρήσουμε την ανοιχτή περιοχή $U = i^{-1}(V \cap (\Sigma \times \{0\}))$ του p στην Σ και τον χάρτη $\hat{x} = (\hat{x}^1, ... \hat{x}^n) = (y^1 \circ i, ... y^n \circ i)$ σε αυτήν, μπορούμε να ορίσουμε συντεταγμένες σε μια περιοχή του $i_a(p)$ στην M_a ως εξής: Αν N_a είναι το μοναδιαίο μελλοντικό κάθετο διανυσματικό πεδίο στην $i_a(\Sigma)$, ορίζουμε σε μια περιοχή V_a του $i_a(p)$ συντεταγμένες $x = (x^0, ... x^n)$ ώστε να ισχύει $(x^0, x^1, ... x^n)^{-1} = exp_{i_a(\hat{x}^{-1}(x_1, ... x_n))}(x^0 N)$ (αν η V_a επιλεγεί αρκούντως μικρή, η απεικόνιση αυτή είναι όντως διαφορομορφισμός). Στις συντεταγμένες αυτές ισχύει ότι $g_{00}|_{x^0=0} = -1, g_{0i}|_{x^0=0} = \partial_0 g_{0\mu}|_{x^0=0} = 0$ και $(\partial_0 g|_{x^0=0})(i_{a*}(X), i_{a*}(Y) = k(X, Y)$ για $X, Y \in \Gamma(\mathrm{T}\Sigma)$.

Σκοπός μας είναι να φτιάξουμε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων $\tilde{x}$ γύρω από το $i_a(p)$ στο οποίο να ισχύει $g^{\alpha\beta}(\Gamma_{(\alpha)})^{\mu}_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}\bar{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta} \circ y^{-1} \circ \tilde{x}$. Για τον λόγο αυτό, θεωρώντας μια συνάρτηση $\eta \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1})$ με συμπαγή φορέα που περιέχεται στο $y(V) \cap x(V_a)$ και η οποία ειναι ταυτοτικά 1 σε μια περιοχή του 0, ορίζουμε για $w \in \mathbb{R}^{n+1}$ $Q^{\mu}_{\alpha\beta}(w) = (\bar{\Gamma} \circ y^{-1}(\eta(w) \cdot w))^{\mu}_{\alpha\beta}$ και $h_{\mu\nu}(w) = (g_a)_{\mu\nu} \circ x^{-1}(\eta(w)w)$ (όπου φυσικά οι συνιστώσες του g_a είναι αυτές που αντιστοιχούν στις συντεταγμένες x). Επιλέγοντας τον φορέα της η αρκούντως μικρό, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι υπάρχει θετική τριάδα (a_1, a_2, a_3) ώστε $\forall w \in \mathbb{R}^{n+1} : h(w) \in C_{n,(a_1,a_2,a_3)}$. Με αυτούς τους συμβολισμούς, λοιπόν, και θεωρώντας μια συνάρτηση αποκοπής $\psi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ ώστε $0 \leq \psi \leq 1$ και ψ=1 σε μια περιοχή του 0 και συμβολίζοντας με $\xi = (\xi^0, ...\xi^n)$ τις φυσικές συντεταγμένες του $\mathbb{R}^{n+1}$, μπορούμε να ορίσουμε το εξής πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} \square_h \bar{x}^{\mu} = -h^{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{x}^{\gamma}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial \bar{x}^{\delta}}{\partial \xi^{\beta}} Q^{\mu}_{\gamma\delta}(\bar{x}) \\ \bar{x}(0, \xi^1, ...\xi^n) = \psi(\xi^1, ...\xi^n) \cdot (0, \xi^1, ...\xi^n) \\ \frac{\partial}{\partial \xi_0} \bar{x}(0, \xi^1, ...\xi^n) = \psi(\xi^1, ...\xi^n) \cdot (1, 0, ..0) \end{cases}$$

Το σύστημα αυτό έχει (σύμφωνα με τις τεχνικές του παραρτήματος) μία λύση $\bar{x} \in C^2(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^{n+1})$, για την οποία ισχύει ότι $\bar{x}(0) = 0$ και $\partial_{\xi^{\mu}} \bar{x}^{\nu} = \delta^{\nu}_{\mu}$. Κατά συνέπεια, περιορισμένη σε μια αρκούντως μικρή περιοχή του 0 μπορεί να θεωρηθεί διαφορομορφισμός, και ως εκ τούτου περιορισμένη σε μια αρκούντως μικρή περιοχή W του $i_a(p)$ η συνάρτηση $\tilde{x} = \bar{x} \circ x$ αποτελεί έναν χάρτη συντεταγμένων. Συρρικνώνοντας πιθανόν κι άλλο την W, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\psi \circ (x^1, ..x^n) = 1$ και $\eta \circ (x^0, ..x^n) = 1$ σε αυτή. Τότε, οι πράξεις εύκολα μας δίνουν ότι η $\tilde{x}$ ικανοποιεί την εξίσωση $\square_{g_a} \tilde{x}^{\mu} = -(\tilde{g}_a)^{\kappa\lambda} \bar{\Gamma}^{\mu}_{\kappa\lambda}(y^{-1} \circ \tilde{x})$ (όπου $\tilde{g}_a$: οι συνιστώσες της g_a στο σύστημα συντεταγμένων $\tilde{x}$). Ισοδύναμα, η εξίσωση αυτή γράφεται και ως $\tilde{g}^{\kappa\lambda}(\tilde{\Gamma}_a)^{\mu}_{\kappa\lambda} = (\tilde{g}_a)^{\kappa\lambda} \bar{\Gamma}^{\mu}_{\kappa\lambda}(y^{-1} \circ \tilde{x})$ όπου $\tilde{\Gamma}_a$ είναι τα σύμβολα Christoffel της g_a στο σύστημα συντεταγμένων $\tilde{x}$.

Κατά συνέπεια, μπορούμε να δείξουμε ότι σε ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\tilde{x}(W) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ οι συναρτήσεις $(\tilde{g}_a)_{\mu\nu} \circ \tilde{x}^{-1}$ και $g_{\mu\nu} \circ y^{-1}$ ταυτίζονται ως εξής: Λόγω των ιδιοτήτων των χαρτών (V,y) (όπως αυτές περιγράφονται στην απόδειξη ύπαρξης λύσης) και (W,$\tilde{x}$), καθώς και του γεγονότος ότι περιοριζόμενοι στα $i(\Sigma)$ και $i_a(\Sigma)$ οι χάρτες ορίστηκαν ώστε να μεταφέρουν τις ίδιες συντεταγμένες στην Σ, εύκολα επαληθεύουμε ότι $(\tilde{g}_a)_{\mu\nu} \circ \tilde{x}^{-1} = g_{\mu\nu} \circ y^{-1}$, $\partial_{\tilde{x}^0}(\tilde{g}_a)_{\mu\nu} \circ \tilde{x}^{-1} = \partial_{y^0} g_{\mu\nu} \circ y^{-1}$, $\varphi_a \circ \tilde{x}^{-1} = \varphi \circ y^{-1}$ και $\partial_{\tilde{x}_0} \varphi_a \circ \tilde{x}^{-1} = \partial_{y^0} \varphi \circ y^{-1}$ στο $\{\xi^0 = 0\} \cap \tilde{x}(W)$. Επιπλέον, λόγω του ορισμού των συντεταγμενων σε κάθε περίπτωση, ισχύει ότι $(\partial_{\tilde{x}^0} f_1) \circ \tilde{x}^{-1}|_{\xi^0=0} = \partial_{\xi^0}(f_1 \circ \tilde{x}^{-1})|_{\xi^0=0}$ και $(\partial_{y^0} f_2) \circ y^{-1}|_{\xi^0=0} = \partial_{\xi^0}(f_2 \circ y^{-1})|_{\xi^0=0}$. Κατά συνέπεια, θέτοντας χάριν απλότητας $(g_1)_{\mu\nu} = (\tilde{g}_a)_{\mu\nu} \circ \tilde{x}^{-1}, (g_2)_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \circ y^{-1}, \varphi_1 = \varphi_a \circ \tilde{x}^{-1}$ και $\varphi_2 = \varphi \circ y^{-1}$ οι προηγούμενες σχέσεις μπορούν να γραφτούν και ως $(g_1)_{\mu\nu} = (g_2)_{\mu\nu}$, $\partial_{\xi^0}(g_1)_{\mu\nu} = \partial_{\xi^0}(g_2)_{\mu\nu}$, $\varphi_1 = \varphi_2$ και $\partial_{\xi^0}\varphi_1 = \partial_{\xi^0}\varphi_2$ στο $\{\xi^0 = 0\} \cap \tilde{x}(W)$. Επιπλέον, στο $\tilde{x}(W)$ ισχύει ότι $g^{\kappa\lambda}\Gamma^{\mu}_{\kappa\lambda} \circ y^{-1} = g^{\kappa\lambda}\bar{\Gamma}^{\mu}_{\kappa\lambda} \circ y^{-1}$ και $\tilde{g}^{\kappa\lambda}(\tilde{\Gamma}_a)^{\mu}_{\kappa\lambda} \circ \tilde{x}^{-1} = (\tilde{g}_a)^{\kappa\lambda}\bar{\Gamma}^{\mu}_{\kappa\lambda} \circ y^{-1}$ (αυτό είναι ουσιαστικά και το κρίσιμο σημείο για το οποίο χρειαστήκαμε συντεταγμένες ειδικής μορφής). Κατά συνέπεια, αντικαθιστώντας στις εξισώσεις Einstein τους όρους αυτούς διαπιστώνουμε ότι οι ποσότητες $((g_1)_{\mu\nu}, \varphi_1)$ και $((g_2)_{\mu\nu}, \varphi_2)$ ικανοποιούν στο $\tilde{x}(W)$ εξισώσεις της μορφής $(g_1)_{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\big((g_1)_{\kappa\lambda},\varphi_1\big) = f_1((g_1,\varphi_1),\partial(g_1,\varphi_1))$ και $(g_2)_{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\big((g_2)_{\kappa\lambda},\varphi_2\big) = f_2((g_2,\varphi_2),\partial(g_2,\varphi_2))$ αντίστοιχα. Ονομάζοντας v την διαφορά $(g_1,\varphi_1)-(g_2,\varphi_2)$, αφαιρώντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις και χρησιμοποιώντας το θεώρημα μέσης τιμής εύκολα δειχνουμε ότι η διαφορά αυτή ικανοποιεί μια εξίσωση της μορφής

$$(g_2)_{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu v + f_{3,\kappa}\cdot\partial_\kappa v + f_4\cdot v = 0$$

όπου οι f_3, f_4 εξαρτόνται από τα $g_i, \partial g_i, \varphi_i, \partial\varphi_i$ (όπως φυσικά και από το $\xi = (\xi^0, ..\xi^n))$

Συνακόλουθα, δεδομένου ότι λόγω των προηγουμένων $v|_{\xi^0} = 0$ και $\partial_{\xi^0} v|_{\xi^0} = 0$, χρησιμοποιώντας τις τεχνικές του παραρτήματος μπορούμε να δείξουμε ότι $v = 0$ στο $D_{g_2}(\{\xi^0 = 0\}\cap\tilde{x}(W)) \subseteq \tilde{x}(W)$. Το σύνολο αυτό έχει μη κενό εσωτερικό, επομένως μπορούμε να περιοριστούμε σε ένα ανοιχτό υποσύνολό του $\tilde{V}$ το οποίο με την μετρική g_2 να είναι καθολικά υπερβολικός χώρος με υπερεπιφάνεια Cauchy $\{\xi^0 = 0\}\cap\tilde{V}$. Επειδή v=0 στο σύνολο αυτό, ο διαφορομορφισμός που ορίζεται από την σχέση $\psi : \tilde{x}^{-1}(\tilde{V}) \to y^{-1}(\tilde{V})$, $\psi = y^{-1}\circ\tilde{x}$ ικανοποεί $\psi^*(g,\varphi) = (g_a,\varphi_a)$, και κατά συνέπεια είναι μια ισομετρία.

Με τον παραπάνω τρόπο, μπορούμε να κατασκευάσουμε $\forall p \in \Sigma$ μια περιοχή U_p του $i_a(p)$ και μια ισομετρία ψ_p με όλες τις προηγούμενες ιδιότητες. Δεδομένου ότι στην τομή δύο τέτοιων συνόλων $U_{p_1}\cap U_{p_2}$ ισχύει ότι η ισομετρία $\psi_{p_2}^{-1}\circ\psi_{p_1}$ ειναι η ταυτοτική απεικόνιση αν περιοριστεί στο $i_a(\Sigma)\cap U_{p_1}\cap U_{p_2}$, θα πρέπει να είναι η ταυτοτική απεικόνιση και σε όλο το $U_{p_1}\cap U_{p_2}$(όπως μπορεί να διαπιστώσει κανείς καλύπτωντας το $U_{p_1}\cap U_{p_2}$ με την απεικόνιση $\{exp_p(tN)|p \in i_a(\Sigma)\}$ όπου N μοναδιαίο κάθετο στην $i_a(\Sigma)$). Κατά συνέπεια, οι ισομετρίες αυτές μας καθορίζουν μια ισομετρική αντιστοίχιση μιας ανοιχτής περιοχής U της $i_a(\Sigma)$ με μια ανοιχτή περιοχή της $\Sigma\times\{0\}$ στο (D,g) με τις ζητούμενες ιδιότητες. Κάνοντας το ίδιο και για την δεύτερη πολλαπλότητα, και παίρνοντας την τομή των δύο υποσυνόλων του (D,g) προκύπτει άμεσα το ζητούμενο. $\square$

Μια άμεση παρατήρηση που μπορεί να κάνει κανείς (και η οποία θα μας φανεί χρήσιμη πιο κάτω) έχει να κάνει με την λειότητα την οποί μπορούμε να επιτύχουμε να έχει το συνόρο της U. Πιο συγκεκριμένα, στην εφαπτόμενη ίνα κάθε σημείου $q \in M_a$ ορίζουμε των διπλό κώνο των αιτιακών διανυσμάτων ως $Caus_q M_a = \{v \in T_q M_a | g(v,v) \leq 0\}$. Προφανώς η συνάρτηση που αντιστοιχίζει σε κάθε σημείο p τον αντίστοιχο κώνο είναι λεία. Επιπλέον, για κάθε ανοιχτό σύνολο $V \subset M_a$, για κάθε $q \in \partial V$ μπορούμε να ορίσουμε το υποδιαφορικό $D_q\partial V = \{w \in T_q M_a :$ το $\{t : exp_q(tw) \in \bar{V}\}$ περιέχει ανοιχτή περιοχή του $0\}$. Στην περίπτωση που το V είναι C^1, το υποδιαφορικό δεν είναι τίποτε άλλο από το εφαπτόμενο υπερεπίπεδο στο αντίστοιχο σημείο. Με αυτούς τους συμβολισμούς, μπορούμε να δείξουμε ότι για κάθε σημείο $p \in \Sigma$ μπορούμε να μικρύνουμε την αντίστοιχη περιοχή U_p της απόδειξης ώστε $\forall q \in \partial U_p \backslash i_a(\Sigma)$ να ισχύει ότι $D_q\partial U_p \cap Caus_q M_a = \{0_p\}$. Για να το καταφέρουμε αυτό, αρκεί να μικρύνουμε με τέτοιον τρόπο την U_p ώστε σε ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων όπως της απόδειξης να έχει την μορφή ενός μικρού "φακού" (και επομένως το σύνορό της να είναι χωροειδείς επιφάνειες αρκούντως κοντά στην εικόνα της $i_a(\Sigma)$ στον χάρτη αυτόν). Κατά συνέπεια, κολλώντας τις αντίστοιχες περιοχές όπως πριν μπορούμε να επιτύχουμε το ανοιχτό σύνολο U του θεωρήματος να έχει σύνορο όπου θα ισχύει $D_q\partial U \cap Caus_q M_a = \{0_q\}$ (το γεγονός αυτό πέραν των άλλων αρκεί για να μας εξασφαλίσει ότι το σύνορο θα είναι σχεδόν παντού C^1).

2.5 Ευστάθεια Cauchy

Για να μπορεί να θεωρηθεί ένα πρόβλημα αρχικών τιμών καλώς τοποθετημένο (κατά Hadamard), τρεις είναι οι απαιτούμενες προυποθέσεις: Ύπαρξη λύσης, μοναδικότητα και συνεχής εξάρτηση αυτής από τα αρχικά δεδομένα. Έχοντας αντιμετωπίσει προηγουμένως τα δύο πρώτα ερωτήματα, σκοπός της παρούσης παραγράφου είναι να ξεκαθαρίσει την έννοια της Cauchy ευστάθειας μιας καθολικά υπερβολικής λύσης του προβλήματος αρχικών τιμών για τις εξισώσεις Einstein.

Φυσικά, όπως και προηγουμένως, η γεωμετρική φύση του προβλήματος επιβάλλει μια ιδιαίτερη προσέγγιση του ζητήματος της ευστάθειας. Έτσι, λοιπόν, αν M ειναι μια Ριμάννεια η Λορέντζια πολλαπλότητα και $V, \{V_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \Gamma(TM)$, θα λέμε ότι $V_n \to V$ στον H^l_{loc} αν για κάθε χάρτη (U, x) και κάθε C^∞ συνάρτηση $\varphi : M \to \mathbb{R}$ με συμπαγή φορέα που περιέχεται στο U ισχύει ότι $||\varphi V_n \circ x^{-1} - \varphi V \circ x^{-1}||_{H^l(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} \to 0$. Φυσικά, εύκολα διαπιστώνουμε ότι η σύγκλιση αυτή αρκεί να επιτυγχάνεται για ένα τοπικά πεπερασμένο κάλυμμα του M με χάρτες και μια υποδιατασσόμενη διαμέριση της μονάδας. Επιπλέον, η σύγκλιση αυτή γενικεύεται με τον προφανή τρόπο και στην περίπτωση στοιχείων του $\Gamma(\otimes^k TM \otimes^m T^*M)$. Στην πραγματικότητα, ο χώρος αυτός γίνεται ένας τοπολογικός διανυσματικός χώρος, με τοπολογία που γεννάται από τις αντίστροφες εικόνες των ανοιχτών συνόλων του $H^l(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{(k+m)n})$ μέσω των ως άνω χαρτών και του πολλαπλασιασμού με συναρτήσεις με συμπαγή φορέα.

Ξεκινόντας από μια λύση του προβλήματος αρχικών τιμών με συγκεκριμένα αρχικά δεδομένα, σκοπός μας είναι να αποδείξουμε ότι για αρχικά δέδομένα που συγκλίνουν σε αυτά στον H^l_{loc} (για κατάλληλο l) οι αντίστοιχες λύσεις συγκλίνουν στην δεδομενή λύση περιορισμένες σε συμπαγή υποσύνολα αυτής. Για λόγους απλότητας, θα υποθέτουμε ότι η αρχική μας λύση γράφεται ως $(M \times I, g, \varphi)$, όπου I: ανοιχτό διάστημα του $\mathbb{R}$ και οι υπερεπιφάνειες $M \times \{t\}$ είναι υπερεπιφάνειες Cauchy, με το ∂_t να είναι χρονόμορφο.

Η πολυπόθητη ευστάθεια Cauchy, λοιπόν, υπό αυτήν την έννοια, θα απορρέει από το εξής θεώρημα:

> Θεώρημα: Έστω $(M \times I, g, \varphi)$ μια λύση των εξισώσεων Einstein για ένα βαθμωτό πεδίο φ χωρίς μάζα, με επαγόμενα αρχικά δεδομένα στο $i(M) = M \times \{0\}$ την τετράδα $(g_0, k_0, \varphi_0, \varphi_1)$. Ακόμη, έστω g_j, k_j μια ακολουθία συμμετρικών (0,2)-τανυστών στο M και $\varphi_{0j}, \varphi_{1j}$ μια ακολουθία λείων συναρτήσεων στο M ώστε $g_j \to g_0$, $\varphi_{0j} \to \varphi_0$ στον H^{l+1}_{loc} και $k_j \to k_0$, $\varphi_{1j} \to \varphi_1$ στον H^l_{loc} (όπου $l > \frac{n}{2} + 1$, με $n = dim M$). Υποθέτουμε ότι η ακολουθία αρχικών δεδομένων $(g_j, k_j, \varphi_{0j}, \varphi_{1j})$ ικανοποιεί τις εξισώσεις περιορισμών. Τότε, για κάθε συμπαγές υποσύνολο $K \subset M$ με μη κενό εσωτερικό και για κάθε θετικό $T \in I$ υπάρχει ένα j_0 ώστε για $j \geq j_0$ να υπάρχουν λύσεις

(h_j, ψ_j) των εξισώσεων Einstein σε ένα ανοιχτό υποσύνολο του $M \times I$ που περιέχει το $M \times \{0\}$ και το $K \times [0,T]$ ώστε τα αρχικά δεδομένα που επάγουν στην $M \times \{0\}$ να ειναι τα $(g_j, k_j, \varphi_{0j}, \varphi_{1j})$ και τα αρχικά δεδομένα που επάγουν στο $K \times \{T\}$ να συγκλίνουν σε αυτά που επάγει το ζεύγος (g, φ) (στην αντίστοιχη H^{l+1}_{loc} ή H^{l}_{loc} τοπολογία).

Σκιαγράφηση απόδειξης:

Κατ' αρχάς, για κάθε σημείο $p \in M$ μπορούμε να βρούμε μια ανοιχτή περιοχή $U_p \subset M \times I$ η οποία να είναι της μορφής $D_g(V \times \{0\})$ για κάποιο $V \subset M$ και γύρω από την οποία για αρκούντως μεγάλο j να ορίζεται λύση του αντίστοιχου (περιορισμένου) προβλήματος αρχικών τιμών με αρχικά δεδομένα $(g_j, k_j, \varphi_{0j}, \varphi_{1j})$ περιορισμένα σε μια περιοχή της V (μια τέτοια λύση μπορεί να θεωρηθεί ως ο περιορισμός μιας καθολικής λύσης, η οποία φυσικά ορίζεται σε μια περιοχή του $M \times \{0\}$). Αυτό μπορεί να το διαπιστώσει κανείς κατασκευάζοντας κυματικές συντεταγμένες γύρω από το ι(p) όπως στην απόδειξη μοναδικότητας, καθώς και μια λύση για το περιορισμένο πρόβλημα αρχικών τιμών σε κατάλληλες συντεταγμένες, ώστε οι δύο λύσεις πλέον να μπορούν να θεωρηθούν ότι έχουν πεδίο ορισμού υποσύνολα του $\mathbb{R}^{n+1}$ (ακριβώς όπως κάναμε και κατά την απόδειξη μοναδικότητας). Στην συνέχεια, η σύγκλιση των αντίστοιχων αρχικών δεδομένων που επάγονται στο $D_g(V \times \{0\}) \cap [0,t]$ (για t αρκούντως μικρό) στους αντίστοιχους H^l χώρους εξασφαλίζεται από το θεώρημα ευστάθειας των μη γραμμικών κυματικών εξισώσεων που αναφέρεται στο παράρτημα.

Επιπλέον, ένα κάτω φράγμα για το "μέγεθος" της πιο πάνω περιοχής U_p μπορεί να δειχθεί ότι εξαρτάται με συνεχή τρόπο από τις ποσότητες g και φ περιορισμένες στο υποσύνολο $B_{g_0}(p,1) \times ((-1,1) \cap I)$. Κατά συνέπεια, δοθέντος συμπαγούς $K \subset M$ μπορούμε να υποθέσουμε (λόγω συμπάγειας) ότι η ένωση $\cup_{p \in K} U_p$ περιέχει ένα σύνολο της μορφής $K \times [0, T_K]$, όπου ο χρόνος T_K εξαρτάται από τα μεγέθη g, φ σε μια δεδομένη περιοχή του $K \times \{0\}$. Φυσικά, μπορούμε να δείξουμε (όπως ακριβώς και στις αποδείξεις ύπαρξης και μοναδικότητας) ότι μπορούμε να "κολλήσουμε" τις πιο πάνω περιοχές U_p ώστε να επιτύχουμε την επιθυμητή σύγκλιση στο $D_g(K) \cap K \times \{T_K\}$.

Το ζητούμενο, λοιπόν, έπεται εύκολα από την παρατήρηση ότι για κάθε $K \subset M$ συμπαγές και $T \in I \cap \mathbb{R}^+$ υπάρχει $K' \supset K$ επίσης συμπαγές ώστε $K \times \{T\} \subset D_g(K' \times \{0\})$ (αυτό προκύπτει από το ότι εφ' όσον ο χώρος ($M \times I$,g) ειναι καθολικά υπερβολικός με υπερεπιφάνεια Cauch $M \times \{0\}$, αν κάθε σημείο του q το $J^-_g(q) \cap M \times \{0\}$ είναι συμπαγές). Κατά συνέπεια, μπορούμε ξεκινώντας από ένα υπερσύνολο του K' να επαναλαμβάνουμε την πιο πάνω διαδικασία (επιλέγοντας κάθε φορά ένα ακόμα μεγαλύτερο j_0 ώστε να εξασφαλίζεται η περαιτέρω ύπαρξη και σύγκλιση). Το ότι επαναλαμβάνοντας αυτήν την διαδικασία για πεπερασμένα βήματα μας επιτρέπει να "φτάσουμε" στο $K \times \{T\}$ εξασφαλίζεται από το ότι το βήμα T_K με το οποίο "προχωράμε" κάθε φορά μπορεί να επιλεγεί ομοιόμορφα φραγμένο, αφού εξαρτάται με συνεχή τρόπο από τις τιμές των (g, φ) γύρω από το εκάστοτε σύνολο, και επομένως μπορεί να φραγεί απο τις ακρότατες τιμές των g, φ σε μια περιοχή του $J^-(K \times \{T\}) \cap J^+(M \times \{0\})$ (οι τιμές αυτές είναι πεπερασμένες αφού το σύνολο αυτό είναι συμπαγές). $\square$

2.6 Μεγιστικό καθολικά υπερβολικό ανάπτυγμα

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, δοθέντων αρχικών δεδομένων $(\Sigma, g_0, k_0, \varphi_0, \varphi_1)$ μπορούμε να βρούμε μια μοναδική λύση των εξισώσεων Einstein σε μια ανοιχτή περιοχή της $\Sigma \times \{0\}$ στην πολλαπλότητα $\Sigma \times \mathbb{R}$. Με άλλα λόγια, δηλαδή, γνωρίζοντας κανείς το τι συμβαινεί στο σύμπαν σε μια δεδομένη "χρονική στιγμή", ειναι δυνατόν να προβλέψει την μορφή του χωροχρόνου για ένα μικρό "χρονικό" διάστημα. Παρ' όλα αυτά, τα προηγούμενα θεωρήματα δεν αρκούν για να καθορίσουν μονοσήμαντα έναν μεγιστικό καθολικά υπερβολικό χωροχρόνο, με την έννοια ότι είναι πιθανόν η προηγούμενη προβλεπόμενη περιοχή και τα αντίστοιχα αρχικά δεδομένα να εμφυτεύονται ισομετρικά σε δυο μη ισομετρικές (καθολικά υπερβολικές) λύσεις των εξισώσεων Einstein. Κάτι τέτοιο, όμως, θα παραβίαζε την αρχή της αιτιότητας, μια και σε μια τέτοια περίπτωση, η πλήρης γνώση όσων συμβαίνουν σε μια "χρονική στιγμή" στο σύμπαν δεν θα αρκούσε για να προβλέψει πλήρως το μέλλον. Θα δείξουμε, λοιπόν, ότι κάτι τέτοιο δεν μπορεί να συμβεί, λόγω της ύπαρξης μεγιστικού καθολικά υπερβολικού αναπτύγματος.

Πιο συγκεκριμένα, θα ορίζουμε ένα καθολικά υπερβολικό ανάπτυγμα (M,g,φ) των αρχικών δεδομένων $(\Sigma, g_0, k_0, \varphi_0, \varphi_1)$ ως μεγιστικό καθολικά υπερβολικό ανάπτυγμα αν για κάθε άλλο (καθολικά υπερβολικό) ανάτυγμα (M', g', φ') αυτών υπάρχει 1-1 λεία απεικόνιση $\psi : M' \to M$ που διατηρεί τον χρονικό προσανατολισμό που ορίζουν οι εγκλεισμοί της Σ ώστε $\psi^* g = g'$, $\varphi \circ \psi = \varphi'$ και $\psi \circ i' = i$ (όπου i, i' οι αντίστοιχοι εγκλεισμοί της Σ στους M, M'). Αν, λοιπόν, M, M' είναι δύο μεγιστικά καθολικά υπερβολικά αναπτύγματα των αρχικών δεδομένων $(\Sigma, g_0, k_0, \varphi_0, \varphi_1)$, λόγω ορισμού υπάρχουν $\psi : M \to M'$, $\psi' : M' \to M$ 1-1 λείες απεικονίσεις με τις πιο πάνω ιδιότητες. Κατά συνέπεια, η 1-1 συνάρτηση $h = \psi' \circ \psi : M \to M$ ικανοποιεί $h^* g = g$ και $h|_{i(\Sigma)} = Id$, $Dh|_{i(\Sigma)} = Id_{TM}$ (αφού διατηρεί τον χρονικό προσανατολισμό). Επομένως θα πρέπει h=Id, αφού για κάθε $p \in M$ υπάρχει γεωδαισιακή γ που το συνδέει με ένα σημείο $q \in i(\Sigma)$ (έστω γ(0)=q) και η h(γ) θα είναι και αυτή γεωδαισιακή με $h(\gamma(0)) = \gamma(0) = q$ και $\frac{d}{dt} h(\gamma(0)) = \frac{d}{dt}\gamma(0)$ - επομένως h(γ)=γ και άρα h(p)=p. Συνεπώς, τα M, M' είναι ισομετρικά και η ισομετρία που τα ταυτίζει ταυτίζει επίσης τις i(Σ), i'(Σ), τα επαγόμενα αρχικά δεδομένα και τις τιμές του πεδίου φ. Με αυτήν την έννοια, ένα καθολικά υπερβολικό ανάπτυγμα, αν υπάρχει, είναι μοναδικό. Επιπλέον, στο εξής όταν αναφερόμαστε σε ισομετρικά καθολικά υπερβολικά αναπτύγματα, θα εννοούμε ότι η αντίστοιχη ισομετρία είναι τέτοια ώστε να ταυτίζει τις i(Σ), i'(Σ), τα επαγόμενα αρχικά δεδομένα και τις τιμές του πεδίου φ.

Θα αποδείξουμε, λοιπόν, το εξής:

> Θεώρημα: Αν $(\Sigma, g_0, k_0, \varphi_0, \varphi_1)$ είναι τα αρχικά δεδομένα των εξισώσεων 2.1 τότε υπάρχει μεγιστικό καθολικά υπερβολικό ανάπτυγμα αυτών, το οποίο είναι μοναδικό ως προς ισομετρία.

Απόδειξη:

Η απόδειξή μας θα ακολουθήσει σε γενικές γραμμές τον [2]καθώς και το [3]. Ας συμβολίσουμε με B το σύνολο όλων των καθολικά υπερβολικών αναπτυγμάτων των αρχικών μας δεδομένων ως προς ισομετρία. Το ότι είναι σύνολο (και όχι γενικότερα συλλογή) έπεται από το ότι κάθε τέτοιο ανάπτυγμα μπορεί να θεωρηθεί ως ένα ζεύγος συναρτήσεων (g, φ) σε ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\Sigma\times\mathbb{R}$, και φυσικά λόγω του θεωρήματος ύπαρξης αυτό είναι μη κενό.

Έστω $\mathrm{N}, \mathrm{N}' \in B$. Σύμφωνα με το θεώρημα μοναδικότητας, υπάρχει $U \in B$ το οποίο εμφυτεύεται ισομετρικά (ως ανάπτυγμα) στα N, N', και έστω j_1, j_2 οι αντίστοιχοι εγκλεισμοί. Σύμφωνα με την παρατήρηση που κάναμε μετά την απόδειξη της μοναδικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι η U είναι τέτοια ώστε να ισχύει $\forall q \in \partial(j_1U) : D_q\partial(j_1U) \cap Caus_qN = \{0_q\}$. Ορίζουμε, λοιπόν, ως $C(N, N')$ το (μη κενό) σύνολο των αναπτυγμάτων αυτής της μορφής, και για ευκολία στους συμβολισμούς θα υποθέτουμε ότι κάθε τέτοιο U ταυτίζεται με το $j_1(U) \subset N$. Εύκολα επαληθεύουμε ότι αν $U_1, U_2 \in C(N, N')$ τότε και $U_1 \cup U_2 \in C(N, N')$ (επιτρέπεται να πάρουμε την ένωση αφού τα θεωρούμε υποσύνολα του N), αφού με το επιχείρημα που έγινε η "συγκόλληση" των αντίστοιχων συνόλων στην απόδειξη μοναδικότητας, οι αντίστοιχοι εγκλεισμοί ταυτίζονται περιορισμένοι στο $U_1 \cap U_2$. Επιπλέον, αν $\{U_i\}_{i\in I}$ είναι μια αύξουσα (με την διάταξη του εγκλεισμού) ακολουθία τέτοιων συνόλων, ισχύει ότι $\cup_{i\in I}U_i \in C(N, N')$, λόγω των ιδιοτήτων του υποδιαφορικού και της "συνέχειας" των κώνων $Caus_q$. Κατά συνέπεια, από το λήμμα του Zorn έπεται άμεσα ότι υπάρχει ένα μεγιστικό στοιχείο $U \in C(N, N')$, το οποίο ειναι και μοναδικό (μια και αν είχαμε δύο τέτοια, η ένωσή τους θα όριζε ένα στοιχείο μεγαλύτερο και από τα δύο, πράγμα άτοπο).

Επιπλέον, θα λέμε ότι $N \leq N'$ αν $N \in C(N, N')$. Λόγω του επιχειρήματος που αναπτύχθηκε στην αρχή της παραγράφου για την ισομετρία καθολικά υπερβολικών αναπτυγμάτων, αν $N \leq N'$ και $N' \leq N$ τότε N'=N. Η μεταβατικότητα επαληθεύεται εύκολα (ως σύνθεση των αντίστοιχων εγκλεισμών) και επομένως η σχέση αυτή ορίζει μια μερική διάταξη στο σύνολο B. Έσχω, λοιπόν, μια αλυσίδα $\{N_a\}_{a\in A}$ στο B (όπου ως αλυσίδα ορίζουμε ένα ολικά διατεταγμένο υποσύνολο) και για $N_{a_1} \leq N_{a_1}$ έστω $\psi_{a_1a_2}$ η αντίστοιχη ισομετρική εμφύτευση. Θα δείξουμε ότι μια τέτοια αλυσίδα είναι άνω φραγμένη. Πράγματι, μπορούμε να ορίσουμε το σύνολο K ως την ξένη ένωση των N_a, και να πάρουμε το πηλίκο του Q κάτω από την εξής σχέση ισοδυναμίας: Αν $p_a \in N_a$ και $p_b \in N_b$, τότε $p_a \sim p_b$ αν και μόνο αν $N_a \leq N_b$ και $\psi_{ab}(p_a) = p_b$. Επιπλέον, για κάθε $a \in A$ ορίζουμε την 1-1 απεικόνιση $\pi_a : N_a \to Q$ ως $\pi_a(p) = [p]$. Το σύνολο Q μπορεί να εφοδιαστεί με τις εξής ιδιότητες:

- Με την τοπολογία που παράγεται από τα σύνολα $\cup_{a\in A}\{\pi_a(W)|\, W \in \tau(N_a)\}$ το Q γίνεται Hausdorff τοπολογικός χώρος, και οι απεικονίσεις π_a γίνονται συνεχείς ανοιχτές απεικονίσεις.

- Με τον άτλαντα που δημιουργείται από τους μεγιστικούς άτλαντες των N_a μέσω των απεικονίσεων π_a: το Q γίνεται διαφορίσιμη πολλαπλότητα (με εξαίρεση προς το παρόν την συνθήκη της δεύτερης αριθμησιμότητας). Πιο συγκεκριμένα, για κάθε σημείο $p \in Q$ και για κάθε σημείο p_a της αντίστοιχης κλάσης ισοδυναμίας, αν (U_a, x_a) είναι ένας χάρτης σε μια περιοχή του p_a στο N_a μπορούμε να ορίσουμε γύρω από το p τον χάρτη $(\pi_a(U_a), x_a \circ \pi_a^{-1})$. Το ότι ένας τέτοιος άτλαντας είναι λείος προκύπτει από το ότι για κάθε δύο τέτοιους τεμνόμενους χάρτες $(\pi_a(U_a), x_a \circ \pi_a^{-1})$, $(\pi_b(U_b), x_b \circ \pi_b^{-1})$ ισχύει είτε ότι $N_a \leq N_b$ είτε $N_b \leq N_a$ (λόγω της ιδιότητας της αλυσίδας). Κατά συνέπεια, υποθέτοντας ότι $N_a \leq N_b$, ισχύει στην $x_a(\pi_a(U_a) \cap \pi_b(U_b))$: $(x_b \circ$

$\pi_b^{-1}) \circ (x_a \circ \pi_a^{-1})^{-1} = x_b \circ (\pi_b^{-1} \circ \pi_a) \circ x_a^{-1} = x_b \circ \psi_{ab} \circ x_a^{-1}$ η οποία είναι λεία συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$.

- Με την Λορέντζια μετρική που κληρονομεί από τις N_a το Q γίνεται μια Λορέντζια πολλαπλότητα (εξαιρουμένης προς το παρόν της συνθήκης για την δεύτερη αριθμησιμοτήτα). Και αυτό, διότι λόγω της διαφορίσιμης δομής, ορίζεται κατά φυσιολογικό τρόπο η δέσμη TQ. Τότε, $\forall p \in Q$ και $X, Y \in T_pQ$, αν $p_a \in N_a$ είναι ένα σημείο της αντίστοιχης κλάσης ισοδυναμίας ορίζουμε $g(X,Y) = g_a(\pi_a^*(X), \pi_a^*(Y))$. Το γεγονός ότι ο ορισμός αυτός ειναι ανεξάρτητος από την επιλογή του σημείου $p_a \in p$ έπεται από το ότι αν $p_a, p_b \in p$ με $p_a \in N_a \leq N_b \ni p_b$, επειδή η ψ_{ab} ειναι ισομετρική εμφύτευση και $\psi_{ab} = \pi_b^{-1} \circ \pi_a$ θα έχουμε ότι $g_a(\pi_a^*(X), \pi_a^*(Y)) = \psi_{ab}^* g_b(\pi_b^*(X), \pi_b^*(Y))$

- Με βάση τις ιδιότητες του γεωδαισιακού αφρού (geodesic spray) μπορούμε να αποδειξουμε ότι το Q είναι δεύτερος αριθμήσιμος χώρος (και επομένως γίνεται Λορέντζια πολλαπλότητα με τον αρχικό ορισμό). Πιο συγκεκριμένα, μπορούμε να αποδείξουμε ότι για κάθε διαφορισιμη πολλαπλότητα M με συνοχή ∇ υπάρχει ένα διανυσματικό πεδίο s στην TM (δηλαδή $s \in \Gamma(TTM)$) ώστε η ολοκληρωτική καμπύλη του s με αρχικό σημείο (p, v) είναι η (γ(t),γ'(t)), όπου γ η γεωδαισιακή στο M για την οποία ισχύει $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$. Δεδομένου ότι τοπικά τουλάχιστον το Q ειναι μια Λορέντζια πολλαπλότητα (αφου κάθε σημείο έχει ανοιχτή περιοχή ομοιομορφική με ένα ανοιχτό υποσύνολο κάποιου N_a, το οποίο είναι δεύτερο αριθμήσιμο), ένα τέτοιο πεδίο s ορίζεται και στην TQ. Χρησιμοποιώντας τεχνικές διαφορικών εξισώσεων, μπορούμε να δειξουμε ότι υπάρχει ένα ανοιχτό υποσύνολο $D \subseteq \mathbb{R} \times TQ$ για το οποίο να ορίζεται η αντίστοιχη ροή του s (δηλαδή για $(t, (p, v)) \in D$ ορίζεται το $exp_{(p,v)}(ts)$). Επιπλέον, δεδομένου ότι $i_b = \psi_{ab} \circ i_a$, ορίζεται κατα φυσιολογικό τρόπο ένας εγκλεισμός $i : \Sigma \to Q$. Με αυτόν τον τρόπο, ορίζεται η απεικόνιση $f : (\cup_{p\in\Sigma} \mathbb{R} \times Caus_pQ) \cap D \to Q$, $f(t, p, v) = exp_{i(p)}(tv)$ (όπου $Caus_pQ$: το σύνολο των αιτιακών διανυσμάτων στην ίνα T_pQ). Η απεικόνιση αυτή είναι επί, αφου το pullback του s μέσω κάθε απεκόνισης π_a είναι ο αντίστοιχος γεωδαισιακός αφρός του N_a (επομένως μέσω του π_a οι δύο ροές ταυτίζονται περιορισμένες στο πεδίο ορισμού της ροής για το N_a), και η αντίστοιχη ροή καλύπτει εξ' ολοκλήρου το N_a - επομένως η f είναι επί του συνόλου $\cup_{a\in A} \pi_a(N_a) = Q$. Ακόμη, δεδομένου ότι σε κάθε N_a η αντίστοιχη ροή εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι ανοιχτή απεικόνιση, η συνάρτηση f είναι μια επί, συνεχής και ανοιχτή απεικόνιση, και συνεπώς ορίζει έναν επιμορφισμό από την τοπολογία του πεδίου ορισμού της στην τοπολογία του συνόλου τιμών (αφού η εικόνα κάθε ανοιχτού είναι ανοιχτό σύνολο και για κάθε ανοιχτό υποσύνολο του συνόλου τιμών η αντίστροφη εικόνα του είναι ανοιχτό υποσύνολο του πεδίου ορισμού). Κατά συνέπεια, εφ'όσον το $\cup_{p\in\Sigma} \mathbb{R} \times Caus_pQ$ είναι δεύτερο αριθμήσιμο (μια και μπορεί να θεωρηθεί ως υποσύνολο του δεύτερου αριθμήσιμου μετρικού χώρου $\Sigma \times \mathbb{R}^N$ για αρκούντως μεγάλο N), θα πρέπει να είναι δεύτερο αριθμήσιμο και το Q.

- Με τον εγκλεισμό $i : \Sigma \to Q$, το Q γίνεται καθολικά υπερβολική Λορέντζια πολλαπλότητα με επιφάνεια Cauchy $i(\Sigma)$. Και αυτό, διότι για κάθε μη κενή μη επεκτάσιμη χρονοειδή καμπύλη γ σε αυτό, η αντίστροφη εικόνα της μέσω κάποιας από τις συναρτήσεις π_a είναι μη κενή (μια και για δοθέν $p \in \gamma$ $\exists a \in A, p_a \in N_a : p = [p_a]$) χρονοειδής μη επεκτάσιμη καμπύλη, η οποία (εξ' ορισμού των N_a) τέμνει την $i_a(\Sigma)$.

Κατά συνέπεια, $Q \in B$ και $\forall a \in A : N_a \leq Q$. Κατά συνέπεια, η αλυσίδα $\{N_a\}_{a \in A}$ είναι άνω φραγμένη.

Ως άμεση συνέπεια του λήμματος του Zorn, λοιπόν, το (B,≤) περιέχει κάποιο μεγιστικό στοιχείο M. Για να δειξουμε ότι αυτό είναι όντως ένα μεγιστικό καθολικά υπερβολικό ανάπτυγμα των αρχικών μας δεδομένων, μένει μόνο να δείξουμε ότι κάθε άλλο καθολικά υπερβολικό ανάπτυγμα εμφυτεύεται ισομετρικά στο M (ως ανάπτυγμα).

Για τον σκοπό αυτό, υποθέτουμε ότι M' είναι ένα άλλο καθολικά υπερβολικό ανάπτυγμα των αρχικών μας δεδομένων. Αν U ειναι το μεγιστικό στοιχείο του $C(M, M')$, Μπορούμε να σχηματίσουμε κατά τρόπο ανάλογο με πρίν από την ξένη ένωση των M, M' το πηλίκο που προκύπτει ταυτίζοντας τα σημεία που αντιστοιχούν στο ίδιο σημείο του U, και να δείξουμε (όπως ακριβώς και προηγουμένως) ότι το πηλίκο που προκύπτει έχει διαφορική δομή και είναι δεύτερο αριθμήσιμο. Στην περίπτωση που δείχναμε ότι ειναι και Hausdorff τοπολογικός χώρος, αυτομάτως θα συνάγαμε ότι το U θα ταυτιζόταν είτε με το M ειτε με το M'. Κατά συνέπεια θα είχαμε είτε ότι $M \leq M'$, οπότε λόγω μεγιστικότητας θα ισχυε ότι $M = M'$, είτε $M' \leq M$. σε κάθε περίπτωση, το ζητούμενο θα είχε αποδειχτεί.

Για να δείξουμε, λοιπόν, ότι ο χώρος μας είναι Hausdorff εργαζόμαστε ως εξής: Χρησιμοποιώντας κλασικά θεωρήματα της τοπολογίας, μπορούμε να δείξουμε ότι τα μόνα ζεύγη σημείων (p,p') τα οποία δεν μπορούν να διαχωριστούν με ανοιχτές περιοχές θα πρέπει να ανήκουν στα $M \setminus U$ και $M' \setminus \psi(U)$ αντίστοιχα. Μάλιστα, θα πρέπει να είναι σημεία που ανήκουν στις ∂U και $\partial(\psi(U))$ (όπου $\psi : U \to M'$ ο ισομετρικός εγκλεισμός) αντίστοιχα, για τα οποία για κάθε ακολουθία $x_n \in U$ με $x_n \to p$ ισχύει ότι $\psi(x_n) \to p'$, και αντιστρόφως, κάθε ζεύγος σημείων που ικανοποιεί αυτές τις συνθήκες δεν μπορεί να διαχωρίζεται με ανοιχτές περιοχές. Το σύνολο των σημείων p αυτής της μορφής, λοιπόν, (το οποίο θα συμβολίζουμε στο εξής με H) θα πρέπει να είναι ανοιχτό υποσύνολο του ∂U, αφού για κάθε τέτοιο ζεύγος σημείων (p,p'), μπορούμε να βρούμε μια αρκούντως μικρή ανοιχτή περιοχή V του p στο M με συμπαγή κλειστότητα ώστε η $V \cap U$ να επεκτείνεται σε ανοιχτή περιοχή V' του p', και τότε για κάθε σημείο του $V' \cap \partial(\psi(U))$ υπάρχει ακολουθία $x_n \in U \cap V$ που να συγκλίνει σε αυτό, και, λόγω ισομετρίας, η $\psi^{-1}(x_n)$ είναι Cauchy και συγκλίνει σε σημείο της $\bar{V} \cap \partial U$ (μια και αυτή είναι συμπαγής).

Επιπλέον, αν γ είναι μια φωτοειδής γεωδαισιακή στο M για την οποία ισχύει ότι $\gamma \cap H \neq \emptyset$ και το $\gamma \cap \partial U$ είναι συνεκτικό, θα πρέπει απαραίτητα να ισχύει ότι $\gamma \cap \partial U = \gamma \cap H$. Κατά συνέπεια, σύμφωνα με τις ιδιότητες του U και τις δύο προηγούμενες ιδιότητες του H, είναι δυνατόν να δείξουμε (βλέπε [3]) ότι υπάρχει ένα σημείο $p \in H$ για το οποίο υπάρχει μια λεία χωροειδής υπερεπιφάνεια S ώστε $p \in S$ και $S \setminus \{p\} \subset U$. Τότε, όμως, θα μπορούσαμε να επαναλάβουμε την απόδειξη ύπαρξης και μοναδικότητας για τα αρχικά δεδομένα που επάγονται στην S σε μια περιοχή του p, για να δείξουμε ότι στην πραγματικότητα η U (η περιοχή δηλαδή στην οποία οι M, M' ταυτίζονται ισομετρικά) μπορεί να επεκταθεί ώστε να περιλαμβάνει μια περιοχή του p - άτοπο, καθώς υποθέσαμε ότι η U είναι μεγιστική. □

Εκτός αυτού, χρησιμοποιώντας τις τεχνικές με τις οποίες δείξαμε την μοναδικότητα του μεγιστικού καθολικά υπερβολικού αναπτύγματος ως προς ισομετρία, είναι δυνατόν να δείξουμε και τα εξής:

> Θεώρημα: Αν (M,g,φ) είναι το μεγιστικό καθολικά υπερβολικό ανάπτυγμα των αρχικών δεδομένων $(\Sigma, g_o, k_0, \varphi_0, \varphi_1)$, τότε για κάθε άλλη υπερεπιφάνεια Cauchy Σ' του M, το M είναι το μεγιστικό καθολικά υπερβολικό ανάπτυγμα των αρχικών δεδομένων που επάγονται στην Σ'.
>
> Θεώρημα: Αν (M,g,φ) είναι μια καθολικά υπερβολική λύση των εξισώσεων Einstein, και Σ, Σ' είναι δύο επιφάνειες Cauchy σε αυτή, τότε τα καθολικά υπερβολικά αναπτύγματα των προβλημάτων αρχικών τιμών με τα αρχικά δεδομένα που επάγονται στις Σ, Σ' είναι ισομετρικά.

Κεφάλαιο 3

Μαύρες τρύπες και λύσεις των εξισώσεων **Einstein** κάτω από την δράση συμμετριών - Ζητήματα ευστάθειας

3.1 Ασυμπτωτικά επίπεδα αρχικά δεδομένα - Λύσεις με συμμετρίες

Στο προηγούμενο κεφάλαιο αντιμετωπίσαμε το θέμα της καλής τοποθέτησης του προβλήματος αρχικών τιμών για τις εξισώσεις Einstein καθαρά από την σκοπιά των διαφορικών εξισώσεων. Για την αναζήτηση ρεαλιστικών λύσεων όμως, οι οποίες να διαδραματίζουν και τον ζητούμενο ρόλο ενός μοντέλου για μια περιοχή του χωροχρόνου, είναι απαραίτητο να απαιτήσουμε οι λύσεις αυτές να ικανοποιούν συγκεκριμένα γεωμετρικά κριτήρια. Πέρα, όμως, από τις απαιτήσεις ρεαλιστικότητας, ο μη γραμμικός χαρακτήρας των εξισώσεων καθιστά την άμεση εύρεση γενικών λύσεων με αναλυτικές μεθόδους πρακτικά αδύνατη. Για αυτόν τον λόγο, περιοριζόμαστε συνήθως στην εύρεση και την μελέτη λύσεων με κάποιου είδους γεωμετρική συμμετρία. Στην παράγραφο αυτή, λοιπόν, θα σκιαγραφήσουμε τις συνηθέστερες γεωμετρικές συνθήκες που εισάγονται συνήθως κατά την μελέτη λύσεων των εξισώσεων Einstein.

Ένα από τα πλέον βασικά κριτήρια για την επιλογή των κατάλληλων συνθηκών που θα πρέπει να ικανοποιεί η ζητούμενη λύση έχει να κάνει με το τι θα θέλαμε αυτή να μοντελοποιεί. Δύο ευρείες κατηγορίες τέτοιων μοντέλων συνιστούν οι κοσμολογικές λύσεις, οι λύσεις, δηλαδή, που προκύπτουν από αρχικά δεδομένα που επιγράφονται σε μια συμπαγή πολλαπλότητα και μοντελοποιούν την συμπεριφορά ολόκληρου του χωροχρόνου, και οι ασυμπτωτικα επίπεδες λύσεις, οι οποίες μοντελοποιούν την συμπεριφορά μιας συγκεκριμένης περιοχής του χωροχρόνου, η οποία μπορεί κατά προσέγγιση να θεωρηθεί απομονωμένη - ανεπηρέαστη, δηλαδή, από τα όσα συμβαίνουν στο υπόλοιπο σύμπαν. Στις παραγράφους που ακολουθούν, λοιπόν, εμείς θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με λύσεις της δεύτερης κατηγορίας.

Πιο συγκεκριμένα, λοιπόν, δοθείσας μιας τριάδας αρχικών δεδομένων (Σ, g, k) (η οποία ικανοποιεί, πάντα, τις εξισώσεις περιορισμών), θα λέμε ότι αυτή είναι ασυμπτωτικά ευκλείδεια με ένα άκρο αν υπάρχει ένα συμπαγές $K \subset \Sigma$ και διαφορομορφισμός $f : \Sigma\backslash K \to \mathbb{R}^n\backslash B$ (όπου B: μια κλειστή μπάλα), ώστε, αν r είναι η συνάρτηση πολικής απόστασης στον $\mathbb{R}^n$, να ισχύει ότι $g_{ij} \to \delta_{ij}$ καθώς $r \to \infty$ (όπου οι συνιστώσες του g θεωρούνται εκφρασμένες στο σύστημα συντεταγμένων που καθορίζει ο διαφορομορφισμός f ως χάρτης). Επιπλέον, μια ασυμπτωτικά ευκλείδια τριάδα αρχικών δεδομένων με ένα άκρο θα λέγεται και ασυμπτωτικά επίπεδη αν $k_{ij} \to 0$ καθώς $r \to \infty$. Με όμοιο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε την έννοια των ασυμπτωτικά ευκλείδιων και ασυμπτωτικά επίπεδων αρχικών δεδομένων με m άκρα ως τα ασυμτωτικά δεδομένα εκείνα για τα οποία υπάρχει συμπαγές $K \subset \Sigma$ για το οποίο το $\Sigma\backslash K$ να έχει m συνεκτικές συνιστώσες, κάθε μια από τις οποίες να εμπίπτει στον προηγούμενο ορισμό. Επιπλέον, θα υιοθετήσουμε τον ορισμό (βλ. Ρινγστρομ) ότι ένας χωροχρόνος θα λέγεται ασυμτωτικά ευκλείδειος ή ασυμπτωτικά επίπεδος αν προκύπτει ως το μεγιστικό καθολικά υπερβολικό ανάπτυγμα μιας τριάδας αρχικών δεδομένων που είναι ασυμπτωτικά ευκλείδεια ή επίπεδη. Ένας πιο "σωστός" ορισμός ενός ασυμπτωτικά επίπεδου χώρου θα απαιτούσε ένας χώρος να έχει σύμμορφη συμπαγοποίηση ώστε όλες οι μη επεκτάσιμες φωτοειδής γεωδαισιακές να έχουν παρελθοντικά και μελλοντικά άκρα στο σύνορο αυτού και επιπλέον κοντά στο σύνορο ο χώρος να "μοιάζει" με τον συμπαγοποιημένο χώρο Minkowski. Για χάρη απλότητας, όμως, στο εξής θα χρησιμοποιούμε μόνο τον πρώτο ορισμό.

Φυσικά, για να έχει και χρηστική αξία η έννοια των ασυμπτωτικά επίπεδων αρχικών δεδομένων είναι απαραίτητο να προσδιορίσει κανείς και τον ρυθμό με τον οποίο η μετρική και η δεύτερης θεμελειώδης μορφή τείνουν στα αντίστοιχα όρια. Ένας χρήσιμος σχετικός ορισμός, λοιπόν, είναι ο εξής:

> Ορισμός: Η τριάδα αρχικών δεδομένων (Σ, g, k) (όπου$dim\Sigma = n \geq 3$) καλείται ισχυρά ασυμπτωτικά επίπεδη με ένα άκρο αν για κάποιο συμπαγές K και έναν διαφορομορφισμό f όπως πριν ισχύει στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων που επάγει η f ως χάρτης:

$$g_{ij} = \big(1 + \frac{2m}{r^{n-2}}\big)\delta_{ij} + o(\frac{1}{r^{n-2}}),\; k_{ij} = o(\frac{1}{r^{n-1}})$$

Σε μια τέτοια περίπτωση, η ποσότητα m μπορεί να ερμηνευθεί ως "μάζα". Και αυτό διότι στην περίπτωση όπου n=3, για έναν αδρανειακό παρατηρητή που βρίσκεται αρκούντως μακριά στο άπειρο και κινείται "βραδέως", σύμφωνα με τα όσα αναφέραμε στην παράγραφο των εξισώσεων Einstein, η κίνησή του ταιριάζει (ασυμπτωτικά τουλάχιστον) με την κίνησή του υπό το βαρυτικό δυναμικό ενός σώματος μάζας m σύμφωνα με την Νευτώνεια θεωρία - όπου $\varphi = \frac{m}{r}$.

Στην περίπτωση, λοιπόν, μιας ασυμπτωτικά επίπεδης λύση, ειναι δυνατόν να οριστούν με κατάλληλο τρόπο οι έννοιες της συνολικής ενέργειας και της ορμής της λύσης. Για τον σκοπό αυτό, ακολουθώντας τον [4], ειναι χρησιμο να καταφύγουμε στην προσέγγιση των εξισώσεων Einstein ως εξισώσεις Euler Lagrange που προκύπτουν από μια Λαγκραντζιανή συγκεκριμένου τύπου. Ιστορικά, ο Hilbert ήαν ο πρώτος ο οποίο επιχείρησε μια τέτοια προσέγιση, θεωρώντας την Λαγκραντζιανή $R\sqrt{-detg}$, ενώ αργότερα οι Einstein και Weyl τροποποίησαν την ποσότητα αυτή ώστε να περιέχει παραγώγους της g τάξης το πολυ 1. Εμείς, όμως, θα ακολουθήσουμε μια ελαφρώς διαφορετική προσέγγιση: Υποθέτοντας, λοιπόν, ότι η λύση μας θα έχει την διαφορική δομή του $\mathbb{R}^{n+1}$, και φιξάροντας στον $\mathbb{R}^{n+1}$ το σύνηθες σύστημα συντεταγμένων καθώς και την μετρική Minkowski $\tilde{g}$, μπορούμε να σχηματίσουμε την γεωμετρική Λαγκραντζιανή η οποία, για μια δεδομένη τομή h της δέσμης της $\otimes^2 T^*\mathbb{R}^{n+1}$ ορίζουσα για κάθε σημείο $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ μια μη εκφυλισμένη διγραμμική μορφή τύπου (-,+,..,+), παίρνει την μορφή $L = -\frac{1}{4}\omega h^{\mu\nu}(\Delta^{\beta}_{\mu\alpha}\Delta^{\alpha}_{\nu\beta} - \Delta^{\beta}_{\mu\nu}\Delta^{\alpha}_{\beta\alpha})$, όπου $\Delta^{\alpha}_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu}$ (Γ: το σύμβολο Christoffel που αντιστοιχεί στην μετρική που ορίζει η h και $\tilde{\Gamma}$ το σύμβολο Christoffel για την $\tilde{g}$) και $\sqrt{-det(h)} = \omega\sqrt{-det(\tilde{g})}$. Επαληθεύουμε εύκολα ότι η L ανήκει στον $\pi^*(\Lambda^{n+1}\mathbb{R}^{n+1})$, όπου, συμβολίζοντας με C το ανοιχτό υποσύνολο της δέσμης S_2 (των τετραγωνικών μορφών επί των ινών $T_x\mathbb{R}^{n+1}$) που αντιστοιχεί στις Λορέντζιες μετρικές επί του $\mathbb{R}^{n+1}$, και με V την διανυσματική δέσμη $T\mathbb{R}^{n+1} \otimes S_2$, η π ειναι η προβολή επί του $\mathbb{R}^{n+1}$ που ορίζει την δέσμη $\pi : C \times_{\mathbb{R}^{n+1}} V \subseteq S_2 \oplus V \to \mathbb{R}^{n+1}$. Φυσικά, μια Λαγκραντζιανή αυτής της μορφής μοιάζει διαφορετική από τις συνηθισμένες, μια και το όρισμά της πλέον δεν είναι μια συνάρτηση και οι πρώτες παράγωγοί της, αλλά μια (κατάλληλη) τομή μιας διανυσματικής δέσμης και τιμές της παραγώγου απεικόνισης της τομής αυτής (λόγω του ότι όλες οι δέσμες είναι επί του $\mathbb{R}^{n+1}$ με την συνήθη του διαφορική δομή και συνοχή, θα μπορούσαμε να διατυπώσουμε όλα αυτά με την κλασική προσέγγιση - η γεωμετρική, όμως, προσέγγιση, βρίσκει πολύ πιο γενικές εφαρμογές). Επαναλαμβάνοντας, λοιπόν, μια μεταβολική διαδικασία αντίστοιχη της κλασικής περίπτωσης (ώστε να επιτύχουμε ακρότατο για την ποσότητα $\int(L + L_M)$, όπου όρος L_M ορίζεται κατάλληλα σύμφωνα με τα υλικά πεδία που θα θέλαμε να τπάρχουν στην λύση μας), μπορούμε να εξάγουμε τις εξισώσεις Euler Lagrange, οι οποίες εν προκειμένω ταυτίζονται με τις εξισώσεις Einstein. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι οποιοδήποτε διανυσματικό πεδίο X στον $\mathbb{R}^{n+1}$ που διατηρεί αναλλοίωτη την μετρική Minkowski, διατηρει αναλλοίωτη και την L, υπό την έννοια ότι αν f_t ειναι η επαγόμενη οικογένεια διαφορομορφισμών του $\mathbb{R}^{n+1}$ ισχύει ότι $\frac{d}{dt}(f_t^* L) = 0$. Κατά συνέπεια, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα της Noether (για την ακρίβεια την αντίστοιχη επέκταση αυτού) ώστε για κάθε γεννήτορα X μιας ισομετρίας του $(\mathbb{R}^{n+1}, \tilde{g})$ να προκύψει μια αντίστοιχη διατηρούμενη ποσότητα $J_X \in \pi^*(\Lambda^n\mathbb{R}^{n+1})$ - θα ισχύει, δηλαδή, ότι για κάθε λύση h των εξισώσεων Einstein η n μορφή $J_X(h, \tilde{\nabla}h)$ στον $\mathbb{R}^{n+1}$ θα είναι κλειστή, και επομένως από το θεώρημα του Green για οποιαδήποτε κλειστή υπερεπιφάνεια S διάστασης n του $\mathbb{R}^{n+1}$ θα ισχύει $\int_S J_X(h, \tilde{\nabla}h) = 0$. Ειδικότερα, για κάθε υπερεπιφάνεια Cauchy $\tilde{\Sigma}$ της λύσης $(\mathbb{R}^{n+1}, h)$ η ποσότητα $\int_{\tilde{\Sigma}} J_X(h, \tilde{\nabla}h)$ θα είναι η ίδια.

Ακόμη, μπορούμε να δειξουμε ότι στην προκείμενη περίπτωση οι n-μορφές

$J_X(h, \tilde{\nabla} h)$ μπορούν να γραφούν και ως $d(G_X(h, \tilde{\nabla} h))$, όπου $G_X \in \pi^*(\Lambda^{n-1}\mathbb{R}^{n+1})$ - κατά συνέπεια για κάθε υπερεπιφάνεια S (με C^1 σύνορο) θα ισχύει ότι $\int_S J_X(h, \tilde{\nabla} h) = \int_{\partial S} G_X(h, \tilde{\nabla} h)$. Ως εκ τούτου, δεδομένου ότι η ομάδα ισομετριών του χώρου Minkowski (η ομάδα Poincare) παράγεται από στροφές (με την έννοια της ψευδομετρικής) και παράλληλες μεταφορές, οι αντίστοιχες διατηρούμενες ποσότητες θα έπρεπε να είναι τα ανάλογα της ενέργειας-ορμής και της στροφορμής που εμφανίζονται στην ειδική θεωρία της σχετικότητας.

Βέβαια, ο ισχυρισμός αυτός δεν είναι ακριβώς αληθής. Και αυτό, διότι οι ποσότητες αυτές δεν έχουν περιγραφεί με γεωμετρικό τρόπο, αλλά εξαρτώνται από τον συγκεκριμένο χάρτη που είχαμε επιλέξει για να ταυτίσουμε την λύση των εξισώσεων Einstein με τον $\mathbb{R}^{n+1}$. Παρ' όλα αυτά, μπορούμε να δειξουμε το εξής: Ορίζουμε για δεδομένο πεδίο X που παράγει παράλληλη μεταφορά του $(\mathbb{R}^{n+1}, \tilde{g})$ και επιφάνεια S (πιθανόν με σύνορο) διάστασης n την ποσότητα $Q_X(S) = \int_{\partial S} G_X(h, \tilde{\nabla} h)$. Σε αυτήν την περιπτωση, αν Σ είναι μια υπερεπιφάνεια Cauchy του $(\mathbb{R}^{n+1}, h)$ και S_r η τομή της μπάλας ακτίνας r στον $\mathbb{R}^{n+1}$ με την Σ, και αν επιπλέον ισχύει ότι $h_{\mu\nu} - \tilde{g}_{\mu\nu} = o(\frac{1}{r^a}), a \geq \frac{1}{2}$, η ποσοτητα $lim_{r\to\infty} Q_X(S_r)$ παραμένει αναλλοίωτη κάτω από διαφορομορφισμούς που διατηρούν τον συγκεκριμένο ρυθμό μείωσης της διαφοράς $h_{\mu\nu} - \tilde{g}_{\mu\nu}$. Συνεπώς, η ποσότητα αυτή αποτελεί μια γεωμετρική αναλλοίωτο της λύσης μας. Η ποσότητα αυτή, η οποία σχηματίζεται από τις αναλλοίωτες ποσότητες που αντιστοιχούν στις παράλληλες μεταφορές του χώρου Minkowski, μπορει να οριστεί αντίστοιχα και στην περιπτωση που η λύση μας δεν είναι εξ ολοκλήρου διαφορομορφική με τον $\mathbb{R}^{n+1}$ αλλά ικανοποιεί τις συνθήκες αυτές στο συμπλήρωμα ενός συνόλου που ειναι χωρικά συμπαγές, και αποτελεί την συνολική ενέργεια-ορμή της λύσης.

Φυσικά, η τελευταια συνθήκη μείωσης δεν αφορούσε μόνο τα αρχικά μας δεδομένα, αλλά ολόκληρη την λύση που προκύπτει από αυτά. Παρ' όλα αυτά, επιλέγοντας κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων γύρω από την υπερεπιφάνεια Cauchy όπου επιγράφονται τα αρχικά δεδομένα της λύσης, μπορούμε να περιγράψουμε τις έννοιες της συνολικής ενέργειας και ορμής αποκλειστικά και μόνο από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των αρχικών δεδομένων, και να αντικαταστήσουμε την συνθήκη $h_{\mu\nu} - \tilde{g}_{\mu\nu} = o(\frac{1}{r^a}), a \geq \frac{1}{2}$ με την $g_{ij} - \delta_{ij} = o(\frac{1}{r^a}), k_{ij} = o(\frac{1}{r^{1+a}}), a \geq \frac{1}{2}$. Με αυτόν τον τρόπο, οι ακόλουθες ποσότητες είναι γεωμετρικές αναλλοίωτοι των αρχικών δεδομένων (Σ,g,k) και διατηρούμενες ποσοτητες: Έχοντας φιξάρουμε έναν χάρτη $y : \Sigma \setminus K \to \mathbb{R}^n \setminus B$ σύμφωνα με τον ορισμό της ασυμπτωτικά επίπεδης λύσης και συμβολίζοντας με S_r την σφαίρα ακτίνας r του $\mathbb{R}^n$ με την ευκλείδια μετρική, με κατευθυνόμενη μορφή όγκου dS_i ορίζουμε:

- Συνολική ενέργεια: $E = lim_{r\to\infty} \frac{1}{4} \int_{S_r} \sum_{i,j} (\partial_i g_{ij} - \partial_j g_{ii}) dS_j$
- Γραμμική ορμή: $P_i = -lim_{r\to\infty} \frac{1}{2} \int_{S_r} (k_{ij} - g_{ij} tr_g(k)) dS_j$

Στην περίπτωση όπου τα αρχικά μας δεδομένα ήταν ισχυρά ασυμπτωτικά επίπεδα, η γραμμική ορμή θα ήταν μηδενική. Σε αυτήν την περίπτωση, η παράμετρος m που εμφανίζεται στον ορισμό της ισχυρής ασυμπτωτικής επιπεδότητας είναι ισοδύναμη με την συνολική ενέργεια, με την ακριβή σχέση στις 3 διαστάσεις να είναι η E=4πm.

Δεδομένης της αναλογίας με πιο κλασικές έννοιες ενέργειας, λοιπόν, θα ήταν αναμενόμενο η παράμετρος m να μην μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές κάτω από ρεαλιστικές συνθήκες για τον τανυστή τάσης ενέργειας. Πράγματι, η εικασία αυτή απόδείχτηκε κάτω από λίγο πιο ισχυρές συνθήκες από τους Schoen και Yau το 1979, και το θεώρημά τους (σε μια πιο ασθενή μορφή) μπορει να διατυπωθεί ως εξής:

> Θεώρημα (Schoen-Yau): Έστω η τριάδα αρχικών δεδομένων (Σ,g,k) με dimΣ=3 η οποία είναι ισχυρά ασυμπτωτικά ευσταθής με ένα άκρο, με τον επιπλέον περιορισμό ότι αντί των $o(r^{-1}), o(r^{-2})$ στον ορισμό να έχουμε $O(r^{-2}), O(r^{-3})$ αντίστοιχα, και έστω ότι στις εξισώσεις περιορισμών θέτουμε $\mu = T_{\mu\nu}N^{\mu}N^{\nu}$ και $J_i = T_{i\mu}N^{\mu}$ (ειναι ορισμένα στην Σ, η οποία θεωρούμε ότι ταυτίζεται ισομετρικά με την ι(Σ)). Τότε, αν $\mu \geq \sqrt{J^i J_i}$ παντού στην Σ, θα πρέπει απαραίτητα να ισχύει $m \geq 0$. Αν m=0, τότε η Σ εμφυτεύεται στον $\mathbb{R}^{3+1}$ με επαγόμενη μετρικη g και δεύτερη θεμελιώδη μορφη k.

Το θεώρημα αυτό, φυσικά, μπορει να γενικευτεί και για την περίπτωση ασυμπτωτικά επίπεδων αρχικών δεδομένων με k άκρα. Αν m=0 για ένα άκρο, τότε αυτό θα πρέπει να είναι και το μοναδικό άκρο των αρχικών δεδομένων.

Βεβαίως, τα όσα αναφέραμε αφορούν την περίπτωση των εξισώσεων Einstein με μηδενική κοσμολογική σταθερά. Στην περίπτωση που υποθέσουμε ότι η κοσμολογική σταθερά Λ παίρνει τιμές διαφορετικές του 0, ένα απομονωμένο σύστημα θα πρέπει να μοντελοποιείται από έναν χώρο που ασυμπτωτικά μοιάζει με τις αντίστοιχες ομογενείας λύσεις των εξισώσεων του κενού για $\Lambda \neq 0$. Οι χώροι αυτοί είναι οι χώροι de Sitter για Λ>0, οι οποίοι είναι τα ανάλογα της Ριμάννειας σφαίρας και μπορούν να αναπαρασταθούν ως τα υπερβολοειδή σταθερής (και θετικής) ψευδονόρμας στον χώρο Minkowski, και οι χώροι Anti de Sitter για Λ<0, με σταθερή αρνητική καμπυλότητα, οι οποίοι ειναι τα ανάλογα του υπερβολικού χώρου στην Ριμάννεια περίπτωση (μάλιστα είναι εφικτό να φτιάξουμε μια αναπαράσταση για αυτούς αντίστοιχη με το μοντέλο της μπάλας για τους υπερβολικούς χώρους του Poincare). Φυσικά, δεδομένου ότι οι χώροι deSitter έχουν συμπαγείς επιφάνειες Cauchy, η έννοια των ασυμπτωτικά ευκλείδειων αρχικών δεδομένων δεν μπορει να έχει ανάλογο για την περίπτωση Λ>0. Επιπλέον, μπορεί να αποδειχτεί ότι ιο χώροι Anti de Sitter δεν επιδέχονται υπερεπιφάνεια Cauchy. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι ο ορισμός της ασυμπτωτικής επιπεδότητας που έχουμε δώσει εδώ δεν μπορει να μεταφερθεί αυτούσιος για να ορίσουμε ασυμπτωτικά deSitter και Anti deSitter χώρους, αλλά πρέπει να τροποποιηθεί. Εμείς, όμως, στο εξής θα ασχοληθούμε μόνο με την περίπτωση της μηδενικής κοσμολογικής σταθεράς και θα χρησιμοποιούμε τον αρχικό μας ορισμό.

Μια παράμετρος από την οποία εξαρτάται θεμελιωδώς το κατά πόσο μια λύση (M,g) των εξισώσεων Einstein μπορει να θεωρηθεί ρεαλιστική είναι ο τανυστής τάσης ενέργειας. Πιο συγκεκριμένα, λοιπόν, για έναν δεδομένο σημείο x του χωροχρόνου, αν X είναι ένα μελλόντικά κατευθυνόμενο χρονόμορφο εφαπτόμενο διάνυσμα στο x, η ποσότητα $T_{\mu\nu}X^{\mu}X^{\nu}$ ισούται με την πυκνότητα της ενέργειας-ύλης στο συγκεκριμένο σημείο όπως αυτή μετράται από έναν αδρανειακό παρατηρητή που κινείται στην κατεύθυνση που ορίζει το X, ενώ αντίστοιχα η προβολή του διανύσματος $-g^{\mu\nu}T_{\mu\kappa}X^{\kappa}$ στο κάθετο υπερεπίπεδο του X “δείχνεί” την κατεύθυνση της ροής της ενέργειας (-ύλης). Κατά συνέπεια, τρεις από τις πιο συνήθεις συνθήκες που απαιτούνται να ισχύουν για έναν "ρεαλιστικό" τανυστή τάσεις ενέργειας είναι οι εξής (σε "αυξανόμενη" σειρά ισχύος):

- Συνθήκη μηδενικής ενέργειας: $\forall X \in \Gamma(TM)$ με $g(X,X)=0$ ισχύει $T_{\mu\nu}X^{\mu}X^{\nu} \geq 0$
- Ασθενής ενεργειακή συνθήκη: $\forall X \in \Gamma(TM)$ με $g(X,X) \geq 0$ ισχύει $T_{\mu\nu}X^{\mu}X^{\nu} \geq 0$. Με άλλα λόγια, η πυκνότητα μάζας-ενέργειας μετρημένη από οποιονδήποτε αδρανειακό παρατηρητή θα πρέπει να είναι μη αρνητική.
- Συνθήκη κυρίαρχης ενέργειας: Θα πρέπει να ισχύει η ασθενής ενεργειακή συνθήκη και επιπλέον, για κάθε μελλοντικά κατευθυνόμενο χρονόμορφο X το διάνυσμα $-g^{\mu\nu}T_{\mu\kappa}X^{\kappa}$ θα πρέπει να είναι αιτιακό. Με άλλα λόγια, η μάζα-ενέργεια δεν μπορει να παρατηρηθεί να ρέει "πιο γρήγορα" από το φως.

Διαπιστώνουμε, για παράδειγμα, ότι η συνθήκη κυρίαρχης ενέργειας επαρκεί για την εξασφάλιση της υπόθεσης του θεωρήματος των Schoen-Yau.

Όπως σχολιάσαμε και στην αρχή της παραγράφου αυτής, η μελέτη συγκεκριμένων λύσεων των εξισώσεων Einstein γίνεται σχεδόν πάντα προυποθέτοντας εκ των προτέρων κάποιου είδους συμμετρία. Μια από τις πιο διαδεδομένες προυποθέσεις συμμετρίας, λοιπόν, έχει "χρονικό" χαρακτήρα και ενδείκνυται για την μοντελοποίηση συστημάτων που βρίσκονται σε μια μόνιμη κατάσταση ή σε ισορροπία. Πιο συγκεκριμένα, μια λυση (M,g) των εξισώσεων Einstein θα καλείται στάσιμη αν είναι ασυμπτωτικά επίπεδη και διαθέτει ένα πεδίο Killing T το οποίο ειναι χρονόμορφο σε ένα ανοιχτό σύνολο που είναι "περιοχή" των άκρων. Στην περίπτωση, μάλιστα, που η κατανομή των υπερεπιπέδων κάθετων στο T είναι ολοκληρώσιμη (υπάρχει, δηλαδή, μια λεία συνάρτηση $f: M \to \mathbb{R}$ με $df \neq 0$ ώστε για κάθε $X \in \Gamma(TM)$ με $g(X,T)=0$ να ισχύει $df(X)=0$), η (M,g) θα καλείται στατική.

Εκτός από αυτού του είδους την χρονική συμμετρία, σημαντικό ρόλο στις διάφορες εφαρμογές εμφανίζουν και οι συμμετρίες που ορίζονται από κάποια συμπαγή ομάδα Lie, ή, πιο γενικά, κάποια μονομετρική ομάδα Lie. Φυσικά, στην περίπτωση των 3+1 διαστάσεων, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι οι μόνες μη τετριμμένες συνεκτικές και συμπαγείς ομάδες Lie οι οποίες μπορούν να δράσουν αποτελεσματικά στην λυση M "σεβόμενες" την ασυμπτωτική επιπεδότητα είναι οι $SO(2)$ και η $SO(3)$, μια και με αυτούς τους περιορισμούς οι (συμπαγείς) τροχιές μπορούν να έχουν είτε την τοπολογία κύκλου είτε την τοπολογία σφαίρας. Σε περισσότερες διαστάσεις, όμως, οι επιλογές είναι περισσότερες, μια και, λόγου χάρη, στην περίπτωση των 4+1 διαστάσεων τροχιές ομοιομορφικές με την S^3 μπορούν να έχουν οι ομάδες $SU(2)(\simeq S^3), SU(2) \times SO(2)$ και $SO(4) \simeq S^3 \times SO(3)$.

Σε αυτό το σημείο, λοιπόν, είναι απαραίτητο να δούμε ορισμένα μη τετριμμένα παραδείγματα λύσεων των εξισώσεων Einstein, τα οποία διετέλεσαν θεμελιώδη ρόλο στην εξέλιξη της γενικής θεωρίας της σχετικότητας αλλά και στην διατύπωση ορισμένων από τις πιο μεγάλες ανοιχτές εικασίες. Για το λόγο αυτό, θα μελετήσουμε τις πιο απλές μη τετριμμένες λύσεις με σφαιρική συμμετρία: τον χώρο Schwartzschild και την λύση Reissner-Nordstrom.

3.2 Λύσεις Schwarzschild και Reissner-Nordstrom

Ας υποθέσουμε, για αρχή, ότι αναζητούμε μια μη τετριμμένη σφαιρικά συμμετρική λύση M των εξισώσεων του κενού με την τοπολογια του $\mathbb{R}^{n+1} \backslash B, n \geq 3$. Το κίνητρο για μια τέτοια προσέγγιση, πέρα από την απλότητα της υπόθεσης, είναι και πρακτικό: το εξωτερικό ενός ακίνητου, ομογενούς και σφαιρικά συμμετρικού άστρου, το οποίο θεωρείται "απομονωμένο" από το υπόλοιπο σύμπαν θα πρέπει να αποτελεί μια τέτοια λύση (για την περίπτωση n=3). Αυτό, άλλωσε, ήταν και το κίνητρο του Scwarzschild για την εξαγωγή της ομώνυμης λύσης, η οποία ήταν το πρώτο μη τετριμμένο παράδειγμα λύσης της εξίσωσης του Einstein δημοσιευμένη ήδη από το 1916. Παρ' ότι αρχικά θα εξάγουμε την γενικότερη λύση (για $n \geq 3$), στην συνέχεια θα επικεντρωθούμε στη "παραδοσιακή" περίπτωση των φυσιολογικών διαστάσεων (n=3).

Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας, μπορούμε να σχηματίσουμε ένα ιδιαίτερο τοπικό σύστημα συντεταγμένων ως εξής: Δεδομένης μιας σφαιρικής τροχιάς S και ενός σημείου $x \in S$, μπορούμε να φτιάξουμε μια 1-1 απεικόνιση $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to M$ (με $0 \in U$) μέσω της γεωδαισιακής απεικόνισης, απαιτώντας να ταυτίζεται ισομετρικά το $T_0\mathbb{R}^2$ με το ορθογώνιο συμπλήρωμα του T_xS (η S είναι διάστασης n-1, επομένως αυτό είναι εφικτό). Αν συμβολίσουμε με x^0, x^1 τις συνήθεις συντεταγμένες του $\mathbb{R}^2$ περιορισμένες στο U, τότε μεσω της προηγούμενης απεικόνισης αυτές μπορούν να επεκταθούν σε συναρτήσεις σε μια γειτονιά V της S η οποία να είναι κλειστή ως προς τις τροχιές. Και αυτό διότι, εφ' όσον η U έχει επιλεγεί αρκούντως μικρή, υπάρχει μια γειτονιά της S κλειστή ως προς τις τροχιές ώστε κάθε τροχιά να τέμνει την f(U) εγκάρσια τουλάχιστον μια φορά. Ταυτόχρονα, όμως, δεν μπορεί να την τέμνει πάνω από μια φορά, μια και στην αντίθετη περίπτωση, αν δηλαδή υπήρχε τροχιά Q που έτεμνε την f(U) εγκάρσια σε m>1 σημεία, τότε, μεταφέροντας την f(U) μέσω της δράσης της SO(n) η Q θα έπρεπε, λόγω σφαιρικής συμμετρίας, να τέμνει την μεταφορά της f(U) σε ακριβώς m σημεία κάθε φορά. Με αυτόν τον τρόπο θα οριζόταν μια συνεχής απεικόνιση $g : Q \to S$, για την οποία η αντίστροφη εικόνα κάθε σημείου θα αποτελούνταν από m σημεία, και επιπλέον η m θα ήταν τοπικά 1-1 - κατά συνέπεια η Q θα ήταν ένα m-κάλυμμα της S. Επειδή όμως $S \simeq S^{n-1}$ και $n \geq 3$, η S ειναι απλά συνεκτική και συνεπώς δεν μπορεί να επιδέχεται πολλαπλό κάλυμμα - καταλήγουμε δηλαδή σε άτοπο. Κατά συνέπεια, στην εν λόγω περιοχή V της S, οι συναρτήσεις x^0, x^1 μπορούν να ορίστουν ώστε η τιμή τους σε δεδομένο σημείο y να ισούται με την τιμή τους στο σημείο τομής της τροχιάς του y με την $f(U)$ (για την ακρίβεια, με την τιμή τους στην αντίστροφη εικόνα του σημείου αυτού). Οι ισουψείς της απεικόνισης $(x^0, x^1) : V \to \mathbb{R}^2$ λοιπόν θα είναι οι τροχιές της $SO(n)$. Επιπλέον, $\forall x \in V$ και για κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα v στο x το οποίο να εφάπτεται στην τροχιά του θα ισχύει ότι $dx^0(v) = dx^1(v) = 0$. Και αυτό διότι η τιμή της dx^μ για διανύσματα εφαπτόμενα στην τροχιά του x θα πρέπει να είναι αναλλοίωτη κάτω από την δράση του $Stab(x) \simeq SO(n-1)$ - αυτό σημαίνει ότι η γραμμική απεικόνιση $dx^\mu : T_xOrb(x) \to \mathbb{R}$ θα πρέπει να είναι σταθερή στην μοναδιαία σφαίρα του $T_xOrb(x)$ (και, επειδή n-1>1, η απεικόνιση αυτή θα πρέπει να είναι η μηδενική. Επιπλέον, λόγω του ότι κάθε τροχιά στην V τέμνει την f(U), μέσω της σφαιρικής συμμετρίας κάθε παραμέτρηση της S μπορεί να ορίσει μονοσήμαντα μια παραμέτρηση σε κάθε τροχιά στην V. Τέλος, μπορεί με φυσιολογικό τρόπο να οριστεί η συνάρτηση $r : M \to \mathbb{R}$, ώστε $\forall x \in M : Vol(Orb(x)) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} r^{n-1}(x)$. Χρησιμοποιώντας τα λήμματα αυτά, λοιπόν, μπορούμε να δείξουμε ότι γύρω από κάθε τροχιά υπάρχει μια ανοιχτή περιοχή κλειστή ως προς τις τροχιές και ένας χάρτης συντεταγμενων (x^0, x^1, σ) εκεί (όπου σ: η συνήθης παραμέτρηση της μοναδιαίας σφαίρας του $\mathbb{R}^n$) ώστε η μετρική να παίρνει την μορφή:

$$ds^2 = a \cdot (dx^0)^2 + 2b \cdot dx^0 dx^1 + c \cdot (dx^1)^2 + r^2 d\sigma^2$$

όπου οι ποσότητες a, b, c εξαρτώνται μόνο από τα x^0, x^1.

Σε αυτό το σημείο ειναι απαραίτητο να εξετάσουμε κάποιους περιορισμούς που επιβάλλονται να ισχύουν για την λύση η οποία οφείλει να επαληθεύει τις εξισώσεις του Einstein για το κενό. Κατ' αρχάς, διαπιστώνουμε άμεσα ότι δεν μπορεί να υπάρχει ανοιχτό υποσύνολο της λύσης στο οποίο η συνάρτηση r να είναι σταθερή. Και αυτό, διότι, αν U είναι ένα τέτοιο σύνολο (το οποίο, φυσικά πρέπει να ειναι κλειστό ως προς τις τροχιές), τότε σύμφωνα με την παραπάνω σχέση για την μετρική το U θα πρέπει να γράφεται ως γινόμενο $V \times S$, όπου η πολλαπλότητα S είναι ομογενής Ριμάννεια πολλαπλότητα με θετική καμπυλότητα.Σε αυτήν την περίπτωση, δεδομένου ότι αν $v \in \Gamma(TV), w \in \Gamma(TS)$ ισχύει $R(v, w) = 0$, θα έχουμε ότι ο τανυστής Ricci για την U περιορισμένος στον $TS \subset TU$ θα ταυτίζεται με τον τανυστή Ricci για την S, και επομένως δεν θα μηδενίζεται (αφου η S έχει σταθερή μη μηδενική καμπυλότητα και $dimS \geq 2$) - συνεπώς δεν θα μπορει να ικανοποιεί τις εξισώσεις Einstein του κενού. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι το σύνολο $\{x \in M | dr \neq 0 \,\text{στο x}\}$ είναι ανοιχτό και πυκνό υποσύνολο του M, κλειστό ως προς τις τροχιές,, και συνεπώς μπορούμε (για αρχή) να υποθέσουμε ότι η λυση μας περιορίζεται σε αυτό το σύνολο. Κατά συνέπεια, μέσω του θεωρήματος πεπλεγμένων συναρτήσεων, σε μια περιοχή ενός σημείου όπου η μετρική έχει γραφει όπως πριν, η συνάρτηση $r = r(x^0, x^1)$ μπορει να λυθεί ως προς τουλάχιστον ένα από τα x^0, x^1 και επομένως μπορούμε να υποθέσουμε ότι η μια εκ των δύο συντεταγμένων, έστω η x^0 μπορεί να αντικατασταθεί και έτσι το νέο (τοπικό) σύστημα συντεταγμένων να είναι το (x^1, r, σ).

Δεδομένου ότι, λόγω της συμμετριάς, οι τροχιές με την επαγόμενη μετρική ειναι ομογενείς χώροι διάστασης μεγαλύτερης του 1, οι τροχιές αυτές θα πρέπει να είναι χωροειδείς υπερεπιφάνειες (μια και αν ο εφαπτόμενος χώρος μιας τροχιάς σε ένα σημείο τη περιείχε διάνυσμα v με g(v,v)=0 θα έπρεπε $g \equiv 0$ στον εφαπτόμενο χώρο της τροχιάς, πράγμα άτοπο μια και ο κώνος φωτός στον χώρο Minkowski δεν περιέχει υπόχωρο διάστασης μεγαλύτερης του 1). Κατά συνέπεια, η μετρική που κληρονομεί η U μέσω της απεικόνισης f που ορίσαμε προηγουμένως είναι Λορέντζια, μια και η f(U) τέμνει κάθετα τις τροχιές. Δεδομένου, τώρα, ότι θα θέλαμε η λύση μας ασυμπτωτικά να μοιάζει με τον χώρο Minkowski, φαίνεται λογικό να υποθέσουμε για αρχή ότι βρισκόμαστε σε μια περιοχή αρκούντως κοντά στο "άπειρο" ώστε να υποθέσουμε ότι το dr είναι χωροειδές - εκ των υστέρων, βέβαια, θα διαπιστώσουμε ότι η υπόθεση αυτή είναι δικαιολογημένη, αλλά δεν θα μπορούσαμε να την επιβάλλουμε παντού στην λύση μας. Με αυτήν την υπόθεση, λοιπόν, μπορούμε, για κατάλληλη συνάρτηση f να ορίσουμε μια νέα συντεταγμένη στην θέση της x^1, της μορφής $t = x^1 + f(r) \cdot r$ (προφανώς το dt θα είναι πάντα μη συγγραμμικό του dr, μια και τοdx^1 δεν είναι συγγραμμικό του dr), ώστε να επιτύχουμε στο νέο σύστημα συντεταγμένων η μετρική να παίρνει την μορφή $g = g_{tt}(r,t)dt^2 + g_{rr}(r,t)dr^2 + r^2 d\sigma^2$. Λόγω της προηγούμενης υπόθεσης, ισχύει ότι $g_{rr} > 0$ και $g_{tt} < 0$ στην περιοχή που εργαζόμαστε, και επομένως μπορούμε να υποθέσουμε ότι γράφονται στην μορφή $g_{tt} = -e^{a(r,t)}, g_{rr} = e^{b(r,t)}$.

Σε αυτό το σημείο ειναι απαραίτητο να υπολογίσουμε τον τανυστή Ricci προκειμένου η απαίτηση για μηδενισμό του να μας καθορίσει τις τιμές των συναρτήσεων a, b. Θα αποφύγουμε την παράθεση των μακροσκελών πράξεων (οι οποίες, βέβαια, λόγω της υπόθεσης συμμετρίας είναι απλούστερες από ότι στην γενική περίπτωση μιας n+1 διάσταστατης πολλαπλότητας), αλλά θα αναφέρουμε απ' ευθείας τα σχετικά αποτελέσματα. Συμβολίζοντας με 0, 1 τους δείκτες που αντιστοιχούν στις συντεταγμένες t, r αντίστοιχα, και με 2,.. n τους δείκτες που αντιστοιχούν στην συνήθη παραμέτρηση της S^{n-1} έχουμε ότι:

- $R_{00} = \frac{1}{2}\left((\partial_0^2 b + (\partial_0 b)^2 - \partial_0 a \partial_0 b) + e^{a-b}(\partial_1^2 a + (\partial_1 a)^2 - \partial_1 a \partial_1 b + \frac{n-1}{r}\partial_1 a)\right)$
- $R_{11} = e^{b-a}(2(\partial_0^2 b + (\partial_0 b)^2 - \partial_0 a \partial_0 b) - R_{00}) + \frac{n-1}{r}(\partial_1 a + \partial_1 b)$
- $R_{01} = \frac{n-1}{r}\partial_0 b$
- $R_{22} = \frac{r}{2}e^{-b}(\partial_1 b - \partial_1 a) + (n-2)(1 - e^{-b})$

Οι υπόλοιπες συνιστώσες του $R_{\mu\nu}$ είτε είναι 0 είτε είναι της μορφής $R_{22} \cdot f(\sigma)$, και επομένως ο μηδενισμός των πιο πάνω ποσοτήτων αρκεί για να επιτευχθεί ο μηδενισμός του τανυστή Ricci. Απαιτώντας τον μηδενισμό αυτών, λοιπόν, έπεται άμεσα ότι:

- $R_{01} = 0 \Rightarrow \partial_0 b = 0$. Επομένως $b(r,t) = b(r)$

- Δεδομένου ότι $\partial_0 b = 0$, από την τελευταια σχέση έχουμε ότι $0 = \partial_0 R_{22} = \frac{1}{2} r e^{-b}(-\partial_0 \partial_1 a) \Rightarrow \partial_0 \partial_1 a = 0$. Επομένως, το a γράφεται στην μορφή $a(r,t) = a(r) + A(t)$. Μπορούμε, όμως, να κάνουμε μια επαναπαράμέτρηση του t, έστω τ η νέα συντεταγμένη, ώστε $\frac{d}{dt}\tau = e^{A(t)}$ (είναι καλά ορισμένη, μια και $e^{A(t)} > 0$). Έχοντας κάνει αυτήν την επαναπαραμέτρηση, λοιπόν, και συμβολίζοντας καταχρηστικά με t και την νέα συντεταγμένη, έχουμε ότι με όσα έχουμε δείξει μέχρι στιγμής, η μετρική μας γράφεται (τοπικά) στην μορφή $g = -e^{a(r)}dt^2 + e^{b(r)}dr^2 + r^2 d\sigma^2$.

- Από την δεύτερη σχέση (και δεδομένου ότι $R_{00} = 0$ έχουμε: $\partial_1 a + \partial_1 b = 0 \Rightarrow a(r) = -b(r) + c$. Επαναπαραμετρώντας την συντεταγμένη r (όπως κάναμε πρίν για την t), μπορούμε να "απαλείψουμε" την σταθερά c και να έχουμε a=-b.

- Τέλος, από την σχέση $R_{22} = 0$ έχουμε $re^{-b(r)}\partial_r b(r) = (n-2)(e^{-b(r)} - 1) \Leftrightarrow \partial_r(e^{-b(r)}) = \frac{n-2}{r}(1 - e^{-b(r)})$ ή ισοδύναμα, αν $f(r) = e^{-b(r)}$: $\dfrac{f'}{1-f} = \dfrac{n-2}{r}$ από το οποίο έπεται άμεσα ότι $e^{-b(r)} = 1 + \dfrac{c}{r^{n-2}}$.

Η ζητούμενη μετρική, λοιπόν, έχει την εξής μορφή σε ένα σύστημα συντεταγμένων όπως περιγράφηκε:

$$g = -(1 + \frac{c}{r^{n-2}})dt^2 + (1 + \frac{c}{r^{n-2}})^{-1}dr^2 + r^2 d\sigma^2$$

Μια άμεση παρατήρηση που μπορει να κάνει κανείς ειναι ότι παρόλο που η μόνη αρχική υπόθεσή μας αφορούσε τη σφαιρική συμμετρία της λύσης, οι εξισώσεις Einstein για το κενό μας εφοδίασαν με ένα ακόμα διανυσματικό πεδίο Killing: το πεδίο ∂_t.

Όσον αφορά στο νόημα της σταθεράς c, μπορούμε να καταλήξουμε στο εξής συμπέρασμα: Αν περιοριζόμασταν στην "φυσιολογική" περίπτωση n=3, και υποθέσουμε ότι μελετάμε την κίνηση ενός αδρανειακού παρατηρητή που βρίσκεται αρκούντως ¨κοντα" στο $r = +\infty$ και κινείται σχετικά αργά, στην κατεύθυνση του ∂_t, τα όσα αναφέραμε στην παράγραφο για τις εξισώσεις Einstein μας οδηγούν άμεσα στο συμπέρασμα ότι θα έπρεπε να ισχύει $g(\partial_t, \partial_t) \simeq -(1 + 2\varphi)$, όπου φ: το βαρυτικό δυναμικό που προβλέπεται από την Νευτώνεια θεωρία. Δεδομένου, λοιπόν, ότι η κατασκευή της λύσης αυτής είχε σαν βασικό σκοπό την μοντελοποίηση του εξωτερικού ενός άστρου μάζας M, σύμφωνα με την νευτώνεια θεωρία (η οποία θα πρέπει να ισχύει κατά προσέγγιση για μεγάλες τιμές του r) θα είχαμε ότι $\varphi = -\frac{M}{r}$. Κατά συνέπεια, αντικαθιστώντας στην πιο πάνω σχέση προκύπτει η έκφραση της μετρικής για την λύση Schwarzschild στο εν λόγω σύστημα συντεταγμένων:

$$g = -(1 - \frac{2M}{r^{n-2}})dt^2 + (1 - \frac{2M}{r^{n-2}})^{-1}dr^2 + r^2 d\sigma^2$$

Ειδικά στην περίπτωση των 3+1 διαστάσεων, η λύση γράφεται ως:

$$g = -(1 - \frac{2M}{r})dt^2 + (1 - \frac{2M}{r})^{-1}dr^2 + r^2 d\sigma^2$$

Στο εξής, θα επικεντρωθούμε σε αυτήν την περίπτωση. Λόγω της πιο πάνω παρατήρησης για τον ρόλο της M, φαίνεται λογικό να υποθέσουμε για αρχή ότι $M \geq 0$. Επειδή, δε, στην περίπτωση όπου M=0 η λύση μας ταυτίζεται (όπως θα αναμενόταν, άλλωστε) με τον χώρο Minkowski, στο εξής θα υποθέτουμε ότι M>0. Θα επανέλθουμε, όμως, σε αυτό λίγο αργότερα.

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, η λύση Schwarzschild ειχε ως σκοπό την μοντελοποίηση του εξωτερικού ενός ομογενούς στατικού άστρου, και σε αυτήν την περίπτωση η συντεταγμένη r φαίνεται να έχει το νόημα της πολικής απόστασης από το "κέντρο" του άστρου. Αν, λοιπόν, η διάμετρος θεωρηθεί πως είναι μεγαλύτερη του 2M τότε πράγματι η πιο πάνω σχέση περιγράφει την μορφή της μετρικής σε ολόκληρο το εξωτερικό του άστρου. Στην περίπτωση, όμως, που κάτι τέτοιο δεν ισχύει, μια πρώτη ματιά στην πιο πάνω σχέση θα μας έδειχνε ότι κάτι "πάει στραβά" στην περιοχή όπου $r = 2M$, μια και εκεί οι συντελεστές της προηγούμενης σχέσης συμπεριφέρονται ιδιόμορφα. Πράγματι, κατά τα πρώτα χρόνια της θεωρίας της γενικής σχετικότητας, οπότε και ο φορμαλισμός των Λορέντζιων πολλαπλοτήτων δεν ήταν ευρέως διαδεδομένος, οι φυσικοί θεωρούσαν πως η περιοχή γύρω από το $r = 2M$ είναι ιδιόμορφη, και κατά συνέπεια δεν θα έπρεπε η λύση σε εκείνη την περιοχή να θεωρείται ρεαλιστική. Παρ' όλα αυτά, κάτι τέτοιο δεν ισχύει - έχοντας κατά νου πως η πιο πάνω σχέση δεν είναι τίποτα άλλο από την έκφραση της μετρικής σε ένα επιλεγμένο σύστημα συντεταγμένων, μπορούμε να ορίσουμε μια νέα συντεταγμένη στην θέση της t (κατ' αντιστοιχία με τις τεχνικές των Eddison και Lemaitre), την $t^* = t + 2M \cdot ln(r - 2M)$, οπότε και η μετρική στο νέο σύστημα συντεταγμένων θα παίρνει την μορφή για $r > 2M$

$$g = -(1 - \frac{2M}{r})(dt^*)^2 + \frac{4M}{r}dt^* dr + (1 + \frac{2M}{r})dr^2 + r^2 d\sigma^2$$

Σε αυτή την περίπτωση, λοιπόν, βλέπουμε ότι η προηγούμενη "ιδιομορφία" για $r = 2M$ εξαφανίζεται, και η μετρική στο νέο σύστημα συντεταγμένων μπορεί να επεκταθεί σε όλο το εύρος $r > 0$, $t^* \in \mathbb{R}$, και, λόγω αναλυτικότητας, θα ικανοποιεί σε όλο αυτό το εύρος τις εξισώσεις Einstein του κενού. Κατά συνέπεια, η προηγούμενη "ιδιομορφία" στην πραγματικότητα δεν ήταν τίποτε άλλο παρά μια ιδιομορφία του συστήματος συντεταγμένων που είχε επιλεγεί.

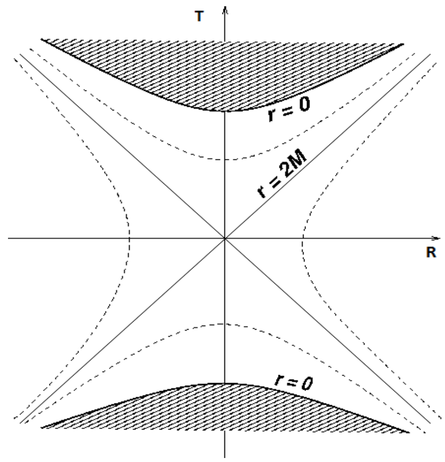
Παρατηρήσαμε, λοιπόν, ότι με μια αλλαγή συστήματος συντεταγμένων μπορέσαμε να επεκτεινουμε την λύση Schwarzschild πέρα από το αρχικό φράγμα. Το ερώτημα, λοιπόν, που γεννάται άμεσα είναι το εξής: μήπως η λύση αυτή μπορεί να επεκταθεί περαιτέρω; Και αν ναι, ποια θα είναι μια μέγιστη δυνατή επέκταση; Και ακόμη: κατά πόσο μια τέτοια επεκτεταμένη λύση των εξισώσεων Einstein του κενού μπορεί να θεωρηθεί ρεαλιστική;

Δεν θα ασχοληθούμε με την ιστορική εξέλιξη των προσεγγίσεων στο ζήτημα αυτό, παρά θα παραπέμψουμε τον αναγνώστη στα [1] και [6]. Αντ' αυτού, θα αναφέρουμε απ' ευθείας πως η προηγούμενη λύση όντως επεκτείνεται περαιτέρω, και ο πρώτος που ασχολήθηκε με την έννοια της μεγιστικής επέκτασης της Schwarzschild ήταν ο Synge (1950) και, λίγο αργότερα (1960), μια καλύτερη προσέγγιση έγινε από τον Kruscal. Πιο συγκεκριμένα, μπορούμε να θεωρήσουμε την πολλαπλότητα M με την διαφορική δομή του $U \times S^2$, όπου U το ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ της μορφής $T^2 - R^2 < 1$ (όπου R, T: οι συνήθεις συντεταγμένες του $\mathbb{R}^2$), και να την εφοδιάσουμε με την μετρική:

$$g = \frac{32M^3}{r} e^{-\frac{r}{2M}} \big(- dT^2 + dR^2) + r^2 d\sigma^2$$

όπου η συνάρτηση r δίνεται από την πεπλεγμένη σχέση $T^2 - R^2 = (1 - \frac{r}{2M})e^{\frac{r}{2M}}$.

Με αυτήν την μετρική, η M γίνεται σφαιρικά συμμετρική Λορέντζια πολλαπλότητα που ικανοποιεί τις εξισώσεις του Einstein για το κενό. Επιπλέον, περιέχει ισομετρικά την λύση Schwarzschild που κατασκευάσαμε αρχικά, ως το ανοιχτό υποσύνολο $R > |T|$. Για να το διαπιστώσει κανείς αυτό, αρκεί να ορίσει στην περιοχή αυτή την συνάρτηση $t = 4M \cdot Arctanh(\frac{T}{R})$, και να επαληθεύσει ότι οι συντεταγμένες (r, t, σ) σε αυτήν την περιοχή έχουν το ίδιο εύρος με τις αντίστοιχες της Schwarzschild και επιπλέον η μετρική εκφρασμένη σε αυτές ταυτίζεται με την μετρική της Scwarzschild (για τον σκοπό αυτό ειναι χρήσιμη η εξής σχέση μεταξύ των συντεταγμένων: $R = \big(\frac{r}{2M} - 1\big)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{4M}} \cdot cosh(\frac{t}{4M})$, $T = \big(\frac{r}{2M} - 1\big)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{4M}} \cdot sinh(\frac{t}{4M})$). Επιπλέον, η επεκτεταμένη λύση που κατασκευάσαμε προηγουμένως αντιστοιχεί με τον ίδιο τρόπο στην περιοχή $R > -T$. Ενδιαφέρον είναι να παρατηρήσει κανείς πως όλες οι διακριτές συμμετρίες του χωρίου $\{T^2 - R^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^{1+1}$ αποτελούν και συμμετρίες της εν λόγω λύσης.



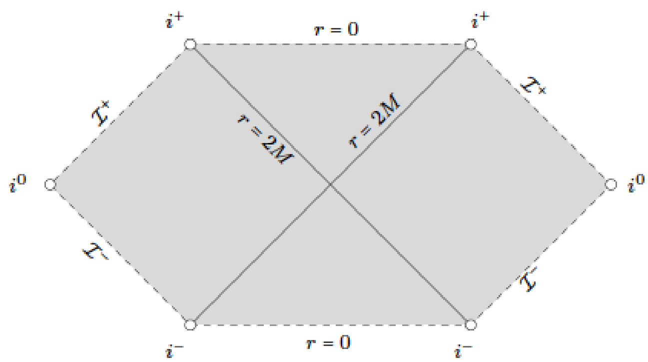
Η επέκταση αυτή της Scwarzschild (την οποία στο εξής θα αποκαλούμε απλώς Schwarzschild) αποδεικνύεται εύκολα πως δεν είναι C^2 επεκτάσιμη - με άλλα λόγια, δεν υπάρχει Λορέντζια πολλαπλότητα με C^2 μετρική η οποία να την περιέχει ισομετρικά ως γνήσιο υποσύνολό της. Αυτό ισχύει διότι, σε αντίθετη περίπτωση, αν υποθέσουμε ότι M_1 ειναι μια τέτοια Λορέντζια πολλαπλότητα και $i : M \to M_1$ ενας τέτοιος εγκλεισμός (όπου (M,g) : η λύση Scwarzschild), τότε θα πρέπει οπωσδήποτε να υπάρχει σε αυτήν μια μη επεκτάσιμη γεωδαισιακή γ η οποία τέμνει τόσο το $i(M)$ όσο και το συμπλήρωμά της. Αν περιοριστούμε μόνο στο κομμάτι της γ που βρίσκεται μέσα στην $i(M)$ (και το οποίο ταυτίζεται ισομετρικά με την M), τότε θα πρέπει να υπάρχει ένα σημείο p της M και μια κατεύθυνσή της γ ώστε κάθε αφινική παραμέτρησή της από το $i(p)$ προς την κατεύθυνση αυτή να παραμένει για πεπερασμένο χρόνο μέσα στην $i(M)$ (μια και σε αντίθετη περίπτωση θα βρισκόταν εξ' ολοκλήρου στην $i(M)$). Όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε από την προηγούμενη έκφραση της μετρικής, όμως, οι μόνες γεωδαισιακές στην Schwarzschild που είναι μη επεκτάσιμες και έχουν πεπερασμένο αφινικό μήκος είναι αυτές που κατευθύνονται προς το "σύνορο" r=0. Κατά μήκος μιας τέτοιας γεωδαισιακής, λοιπόν, η ποσότητα $R^{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta} \sim \frac{1}{r^6}$ απειρίζεται. Δεδομένου, όμως, πως λόγω του ορισμού της η ποσότητα αυτή (επονομαζόμενη και βαθμωτή Kretschmann) είναι συναλλοίωτη, και επομένως καθορίζεται μόνο από την γεωμετρία, θα έπρεπε να απειρίζεται και καθώς η εικόνα της γεωδαισιακής αυτής πλησιάζει το σημείο τομής της με το σύνορο $\partial i(M)$ - άτοπο, καθώς, λόγω της υπόθεσης ότι η M_1 έχει C^2 μετρική και η βαθμωτή Kretschmann εξαρτάται μόνο από παραγώγους της μετρικής μέχρι δεύτερης τάξης, ο περιορισμός της σε κάθε συμπαγές υποσύνολο της M_1 θα πρέπει να ειναι φραγμένος.

Το ερώτημα από αυτά που θέσαμε προηγουμένως, λοιπόν, και το οποίο δεν απαντήσαμε ακόμα έχει να κάνει με την ρεαλιστικότητα της λύσης Schwarzschild. Όπως αναφέραμε και πιο πριν, τα πρώτα χρόνια μετά την ανακάλυψη της λύσης οι φυσικοί απέρριπταν την ρεαλιστικότητα της λύσης στην περιοχή όπου $r = 2M$ με το σκεπτικό ότι μια ρεαλιστική λύση δεν θα έπρεπε να είναι ιδιόμορφη. Εξηγήσαμε ότι αυτή η αίσθηση της ιδιομορφίας ήταν λανθασμένη, αλλά εκτός αυτού και η βάση του σκεπτικού αυτού ήταν λανθασμένη: η ύπαρξη ιδιομορφιών δεν στερεί από μια λύση την ρεαλιστικότητά της. Αντιθέτως, σύμφωνα με τον φορμαλισμό που αναπτύξαμε στις πρώτες παραγράφους (και ο οποίος αναπτύχθηκε την δεκαετία του '50), μια ρεαλιστική λύση οφειλει απλώς να είναι μια μεγιστική καθολικά υπερβολική πολλαπλότητα (ώστε να ισχύει η αρχή της αιτιότητας), και να προέρχεται από ένα πρόβλημα αρχικών τιμών όπου τόσο τα αρχικά δεδομένα όσο και η επιλογή των σχέσεων που ικανοποιεί ο τανυστής τάσης ενέργειας να είναι ρεαλιστικά.

Η (μεγιστική) λύση Schwarzschild, λοιπόν, είναι πράγματι μια μεγιστική καθολικά υπερβολική πολλαπλότητα, και είναι λύση των εξισώσεων του κενού. Το "πρόβλημά" της, όμως, είναι ότι κάθε υπερεπιφάνεια Cauchy της έχει την τοπολογία του $\mathbb{R} \times S^2$, και τα αρχικά δεδομένα είναι ασυμπτωτικά επίπεδα με 2 άκρα, και όχι απλώς με 1 άκρο όπως θα όφειλε να έχει ένα "ρεαλιστικό" απομονωμένο σύστημα. Κατά συνέπεια, η λύση αυτή δεν μπορει να μοντελοποιήσει ένα φυσικό σύστημα. Παρ' όλα αυτά, η λύση Schwarzschild μπορει να θεωρηθεί ρεαλιστική με την εξής έννοια: Μπορούν να κατασκευαστούν κάποιες λύσεις των εξισώσεων Einstein, οι λεγόμενες λύσεις Oppenheimer Snyder, οι οποίες περιγραφούν ένα αρχικά ομογενές σφαιρικά συμμετρικό άστρο, αποτελούμενο από ιδεατή σκόνη, το οποίο δεν απαιτείται να είναι στατικό. Σε αυτήν την περίπτωση, αποδεικνύεται ότι υπάρχει μια κρίσιμη ακτίνα R_0, η οποία μεταβάλλεται με μια κατάλληλη χρονική παράμετρο τείνοντας στο 0, και η οποία ορίζει το σύνορο του άστρου - για $r > R_0$, ισχύουν οι εξισώσεις του κενού, ενώ για $r \leq R_0$ ο τανυστής τάσης ενέργειας είναι αυτός που αντιστοιχεί στο μοντέλο της ιδεατής σκόνης. Μια τέτοια λύση, δηλαδή, αναπαριστά ένα άστρο που καταρρέει υπό την βαρυτική του επίδραση. Σε αυτήν την περίπτωση, λοιπόν, αποδεικνύεται ότι το εξωτερικό του άστρου είναι ισομετρικό με μια ανοιχτή περιοχή της Schwarzschild, η οποία μάλιστα περιέχει και ένα τμήμα της λύσης για $r < 2M$. Επιπλέον, η λύση αυτή προέρχεται από δεδομένα που επιγράφονται σε μια υπερεπιφάνεια Cauchy ομοιομορφική με τον $\mathbb{R}^3$, και τα οποία μπορούν να επιλεγούν όσο "κοντα" στα αρχικά δεδομένα για τον χώρο Minkowski θέλουμε. Επιπλέον, το μοντέλο της ιδεατής σκόνης για το άστρο μπορεί σε μια πρώτη εκτίμηση να θεωρηθεί ρεαλιστικό (αν και κάτι τέτοιο θα είχε ιδιαίτερα σοβαρές επιπτώσεις σύμφωνα με το [1] - αλλά εμείς δεν θα ασχοληθούμε προς το παρόν με αυτό). Κατά συνέπεια, η λύση αυτή μπορεί να θεωρηθεί ρεαλιστική, και επομένως εξίσου ρεαλιστικές μπορούν να θεωρηθούν ανοιχτές πριοχές της λύσης Schwarzschild που διαπερνούν το "ιδιόμορφο" σύνολο r=2M.

Ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο για την εξαγωγή συμπερασμάτων σχετικά με την δομή της λύσης Schwarzschild είναι το διάγραμμα Penrose. Το διάγραμμα Penrose αποτελείται από μια σύμμορφη απεικόνιση του χώρου πηλίκου $M/SO(3)$ (το οποίο είναι ισομετρικό με το υποσύνολο $T^2 - R^2 < 1$ του $\mathbb{R}^{1+1}$) σε ένα φραγμένο ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{1+1}$ με την μετρική Minkowski, η οποία να διατηρεί τον χρονικό προσανατολισμό. Το ότι μια τέτοια απεικόνιση είναι εφικτό να υλοποιηθεί οφείλεται στην μεγάλη ελευθερία που έχουμε στις 1+1 διαστάσεις να σχηματίζουμε σύμμορφες απεικονίσεις: Μεταβαίνοντας σε ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων στο οποίο οι ισουψείς των συναρτήσεων συντεταγμένων είναι φωτοειδείς καμπύλες (πάντα υπάρχει τουλάχιστον τοπικά ένα τέτοιο σύστημα, αφού η οικογένεια των καμπυλών αυτών ειναι καλώς ορισμένη ως η οικογένεια των ολοκληρωτικών καμπυλών των δυο φωτοειδών ευθειών κάθε εφαπτόμενης ίνας), κάθε σύμμορφη απεικόνιση ενός ανοιχτού υποσυνόλου του $\mathbb{R}^{1+1}$ στην πολλαπλότητα μας καθορίζεται μονοσήμαντα από μια 1-1 επαναπαραμετροποίηση αυτών των συναρτήσεων συντεταγμένων. Κατά συνέπεια, στην περίπτωση της Schwarzschild, κάθε επαναπαραμέτρηση με πεπερασμένο εύρος και η οποία διατηρεί τον επιλεγμένο προσανατολισμό των φωτοειδών καμπυλών μας δίνει το ζητούμενο.

Λόγω του ότι η απεικόνιση είναι σύμμορφη, το διάγραμμα Penrose διατηρεί την αιτιακή δομή, και αυτός είναι ένας από τους λόγους που το καθιστούν τόσο χρήσιμο: Σημεία που ανήκουν στο φωτοειδές μέλλον ενός σημείου της Schwarzschild θα διατηρούν αυτήν την αιτιακή σχέση και κατά την απεικόνισή τους στο διάγραμμα Penrose. Επιπλέον, οι ακτινικές φωτοειδείς γεωδαισιακές της Schwarzschild απεικονίζονται σε φωτοειδείς ευθείες στο διάγραμμα Penrose.



Όπως φαίνεται και στο σχήμα, το διάγραμμα Penrose, ως φραγμένο υποσύνολο του επιπέδου, έχει συνοριακά τμήματα τα οποία διαφέρουν από το "ιδιόμορφο" σύνορο r=0. Σύμφωνα με τους συμβολισμούς του σχήματος, λοιπόν, τα τμήματα αυτά μπορούν να χαρακτηριστούν ως γεωματρικά ως εξής: Το $\mathcal{I}^+$, το οποίο καλείται και μελλοντικό φωτοειδές άπειρο, αποτελείται από τα μελλοντικά οριακά σημεία των φωτοειδών γεωδαισιακών κατά μήκος των οποίων $r \to \infty$. Τα αντίστοιχα παρελθοντικά οριακά σημεία ορίζουν το παρελθοντικό φωτοειδές άπειρο, $\mathcal{I}^-$. Τα υπόλοιπα τμήματα του συνόρου, i_0, i^+, i^- αποτελούν το χωροειδές και χρονοειδές (μελλοντικό και παρελθοντικό) άπειρο αντίστοιχα. Δεδομένου ότι το "άπειρο" σε μια ασυμπτωτικά επίπεδη λύση των εξισώσεων Einstein στην πραγματικότητα μοντελοποιεί την συμπεριφορά παρατηρητών πολύ απομακρυσμένων από το απομονωμένο σύστημα, μελλοντικό φωτοειδές άπειρο αποκτά το φυσικό νόημα των απομεκρυσμένων παρατηρητών οι οποίοι παρατηρούν (μέσω της ακτινοβολίας που λαμβάνουν) τα καθέκαστα στο εν λόγω σύστημα.

Σύμφωνα με αυτήν την ερμηνεία του φωτοειδούς άπειρου, λοιπόν, είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε την ιδιότητα της λύσης Schwarzschild ως "μάυρη τρύπα" (πάντα για $M > 0$). Κατ' αρχάς, ειναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι, περιοριζόμενοι στο διάγραμμα Penrose, μπορούμε να επιλέξουμε μια ακολουθία φωτοειδών γεωδαισιακών περιορισμένων στο $J^-(\mathcal{I}^+)$ που να "τείνουν" στο $\mathcal{I}^+$. Σε αυτήν την περίπτωση, επίλεγοντας έναν γεννήτορα για μια από αυτές και μεταφέροντάς τον παράλληλα κατά μήκος μιας φωτοειδούς γεωδαισιακής που τέμνει εγκάρσια την εν λόγω ακολουθία, μπορούμε να ορίσουμε μια "ομοιόμορφη" αφινική παραμέτρηση των γεωδαισιακών της ακολουθίας αυτής. Εκτελώντας τους εν λόγω υπολογισμούς, λοιπόν, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι το αφινικό μήκος των γεωδαισιακών κάθε τέτοιας ακολουθίας τείνει στο άπειρο. Κατά συνέπεια, το αφινικό μήκος του $\mathcal{I}^+$, ορισμένο με αυτόν τον τρόπο, είναι άπειρο - με άλλα λόγια, οι παρατηρητές στο φωτοειδές άπειρο μπορούν να "παρατηρούν" επ άπειρον, χωρίς ποτέ να πέφτουν πάνω σε κάποια "ανωμαλία". Λόγω συμμετρίας, το ίδιο ακριβώς ισχύει και για το $\mathcal{I}^-$.

Από την άλλη, το σύνολο από το οποίο οι παρατηρητές μπορούν να δεχτούν ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία είναι το $J^-(\mathcal{I}^+)$, το οποίο όμως, όπως μπορεί να παρατηρήσει κανείς άμεσα από το διάγραμμα Penrose (και αυτό είναι μια ακόμη απόδειξη της χρησιμότητας τέτοιων διαγραμμάτων), το σύνολο αυτό δεν καλύπτει όλη την λύση Schwarzschild, αλλά μόνο ένα υποσύνολό της. Το συμπλήρωμα του συνόλου αυτού, λοιπόν, καλείται μαύρη οπή - μαύρη, με την έννοια ότι φως εκπεμπόμενο από το εσωτερικό της δεν μπορεί να φτάσει ποτέ στους απομακρυσμένους παρατηρητές. Αντίστοιχα, το συμπλήρωμα του $J^+(\mathcal{I}^-)$ (το οποίο επίσης είναι μη κενό λόγω συμμετρίας) καλείται λευκή οπή. Το μελλοντικό σύνορο του $J^-(\mathcal{I}^+)$ καλείται μελλοντικός ορίζοντας γεγονότων, και συμβολίζεται με H^+. Αντίστοιχα ορίζεται ο παρελθοντικός ορίζοντας γεγονότων, H^-. Επιπλέον, ισχύει ότι $H^+ \cup H^- = \{r = 2M\}$. Αξίζει να αναφερθεί ότι στην περίπτωση της Schwarzshild που μελετάμε, το μελλοντικό σύνολο ιδιομορφίας r=0 είναι "κρυμμένο" πίσω από τον ορίζοντα, και κατά συνέπεια οι απομακρυσμένοι παρατηρητές δεν μπορούν να αντιληφθούν την ύπαρξή του.

Παρ' ότι μέχρι στιγμής επικεντρωθήκαμε μόνο στην περίπτωση της λύσης Schwarzschild για M>0, μπορεί να δειχθεί ότι το διάγραμμα Penrose μπορει να οριστεί με τον ίδιο ακριβώς τρόπο και για οποιαδήποτε σφαιρικά συμμετρική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών για τις εξισώσεις Einstein. Σε αυτήν την περίπτωση, η έννοια του φωτοειδούς απείρου μπορεί να οριστεί πανομοιότυπα. Κατά συνέπεια, σε μια τέτοια περίπτωση, θα λέμε ότι ένας χώρος περιέχει μια μάυρη τρύπα αν το μελλοντικό φωτοειδές άπειρο είναι αφινικά πλήρες (με την έννοια που περιγράψαμε προηγουμένως), και το συμπλήρωμα το $J^-(\mathcal{I}^+)$ είναι μη κενό. Στην περίπτωση, όμως, που δεν έχουμε κάποια συμμετρία αυτής της μορφής, οι αντίστοιχοι ορισμοί είναι δύσκολο να επεκταθούν. Μια περίπτωση στην οποία οι ποσότητες αυτές είναι καλώς ορισμένες ειναι οι "μικρές" διαταραχές του χώρου Minkowski. Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με τους Χριστοδούλου και Klainerman ([5]), κάθε λύση του προβλήματος αρχικών τιμών για τις εξισώσεις Einstein στο κενό που προέρχεται από αρχικά δεδομένα αρκούντως κοντά στα αντίστοιχα δεδομένα για τον χώρο Minkowski διαθέτει πλήρες μελλοντικό φωτοειδές άπειρο (ορισμένο κατάλληλα) και δεν περιέχει μαύρη τρύπα.

Παρ' ότι για να επιτύχουμε την ρεαλιστικότητα της λύσης Schwarzschild υποθέσαμε ότι M>0, οι εξισώσεις Einstein για το κενό επαληθεύονται και για την περίπτωση όπου η παράμετρος M παίρνει αρνητικές τιμές. Μια τέτοια λύση καλείται και λύση Schwarzschild με αρνητική μάζα, και η μετρική $g = -(1-\frac{2M}{r})dt^2 + (1-\frac{2M}{r})^{-1}dr^2 + r^2 d\sigma^2$ σε αυτήν την περίπτωση είναι καλά ορισμένα για όλες τις θετικές τιμές του r. Όπως και προηγουμένως, φυσικά, γεωδαισιακές κατά μήκος των οποίων το r τεινει στο 0 έχουν πεπερασμένο αφινικό μήκος και κατά μήκος τους η βαθμωτή Kretschmann τείνει να απειριστεί - κατά συνέπεια, η πιο πάνω λύση (για r>0 και $t \in \mathbb{R}$) είναι μια μεγιστική C^2 λύση.

Σε αντίθεση με την λύση Schwarzschild με θετική μάζα, στην περίπτωση της αρνητικής μάζας δεν υπάρχει μάυρη οπή ούτε ορίζοντας γεγονότων - η "ιδιομορφία" $r = 0$ είναι ορατή από το $\mathcal{I}^+$. Ένα ακόμη πιο σημαντικό χαρακτηριστικό της λύσης αυτής είναι ότι δεν είναι καθολικά υπερβολική. Αν περιοριστούμε μόνο στο χωρίο $D(S)$, για κάποια μη επεκτάσιμη λεία χωροειδή υπερεπιφάνεια S (οπότε και το D(S) θα μπορεί να θεωρηθεί καθολικά υπερβολική Λορέντζια πολλαπλότητα), τότε το φωτοειδές άπειρο παύει να είναι πλήρες με την έννοια που περιγράψαμε προηγουμένως. Λόγω των χαρακτηριστικών αυτών, λοιπόν, η λύση Scwarzschild για αρνητικές τιμές της παραμέτρου M λέγεται ότι περιέχει μια "γυμνή" ιδιομορφία, με την έννοια ότι υπάρχει μια ιδιομορφία που γίνεται αντιληπτή από απομακρυσμένους παρατηρητές.

Δεδομένου ότι σε σφαιρικά συμμετρικούς χώρους η εξαγωγή γεωμετρικών συμπερασμάτων ειναι αρκετά πιο εύκολη, εύλογα τίθεται το ερώτημα του κατά πόσον σφαιρικά συμμετρικές λύσεις των εξισώσεων Einstein μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως μοντέλα για την απόδειξη ή έστω την μελέτη εικασιών που αφορούν γενικότερες λύσεις των εξισώσεων Einstein. Δυστυχώς, στην περίπτωση των εξισώσεων του κενού, η οικογένεια των λύσεων είναι ιδιαίτερα φτωχή: Σύμφωνα με το θεώρημα του Birkhoff, κάθε C^2 σφαιρικά συμμετρική λύση των εξισώσεων Einstein του κενού ειναι τοπικά ισομετρική με την λύση Schwarzschild για κάποια πραγματική τιμή της παραμέτρου M. Για την απόδειξη του θεωρήματος αυτού, φυσικά, θα μπορούσαμε να εργαστούμε ακριβώς όπως εργαστήκαμε για την εξαγωγή της λύσης Schwarzschild στην αρχή της παραγράφου, επιλέγοντας όμως με πιο προσεκτικό τρόπο τους διάφορους συντελεστές.

Παρ' όλα αυτά, είναι δυνατόν να εξαγάγουμε συμπεράσματα για πιο περίπλοκες λύσεις των εξισώσεων Einstein διατηρώντας την υπόθεση της σφαιρικής συμμετρίας αλλά αυξάνοντας την πολυπλοκότητα των υλικών πεδίων από τα οποία εξαρτάται ο τανυστής τάσης ενέργειας. Μια σχετικά "απλή" επιλογή, λοιπόν, είναι να υποθέσουμε την ύπαρξη ηλεκτρομαγνητικού πεδίου που ικανοποιεί τις εξισώσεις Maxwell - Einstein, αλλά υπό την απουσία πηγών. Επαναλαμβάνοντας την διαδικασία που ακολουθήθηκε για την εξαγωγή της λύσης Schwarzschild (μόνο που τώρα πέραν των εξισώσεων Einstein πρέπει να ληφθούν υπ' όψιν και οι εξισώσεις Maxwell), καταλήγουμε στην εξής λύση, η οποία καλείται λύση των Reissner - Nordstrom (οι οποίοι την ανακάλυψαν ανεξάρτητα):

$$g = -\big(1 - \frac{2M}{r^{n-2}} + \frac{Q^2}{r^{2(n-2)}}\big)dt^2 + \big(1 - \frac{2M}{r^{n-2}} + \frac{Q^2}{r^{2(n-2)}}\big)^{-1}dr^2 + r^2 d\sigma^2$$

και στις 3+1 διαστάσεις:

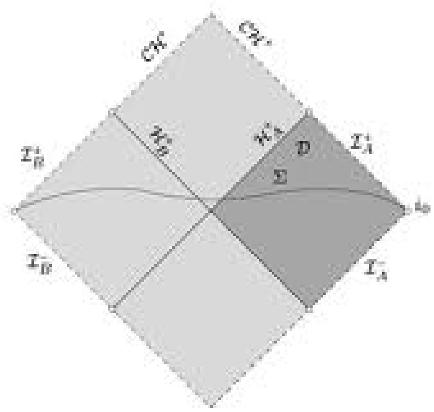
$$g = -\big(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\big)dt^2 + \big(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r}\big)^{-1}dr^2 + r^2 d\sigma^2$$

Επικεντρώνοντας την προσοχή μας (όπως και προηγουμένως) στις 3+1 διαστάσεις, οι ποσότητες M και Q, σε ένα κατάλληλο σύστημα μονάδων, αναπαριστούν την μάζα και το φορτίο, αντίστοιχα, που αισθάνεται ένας αρκούντως απομακρυσμένος αδρανειακός παρατηρητής. (Στην περίπτωση που θεωρήσουμε επιτρεπτή την ύπαρξη μαγνητικών μονοπόλων, η ποσότητα Q θα έπρεπε να αντικατασταθεί από την $\sqrt{Q^2+P^2}$, όπου P: το αντίστοιχο μαγνητικό φορτίο) Επιπλέον, η περίπτωση στην οποία το φορτίο μηδενίζεται (Q=0) ταυτίζεται με την λύση Schwarzschild.

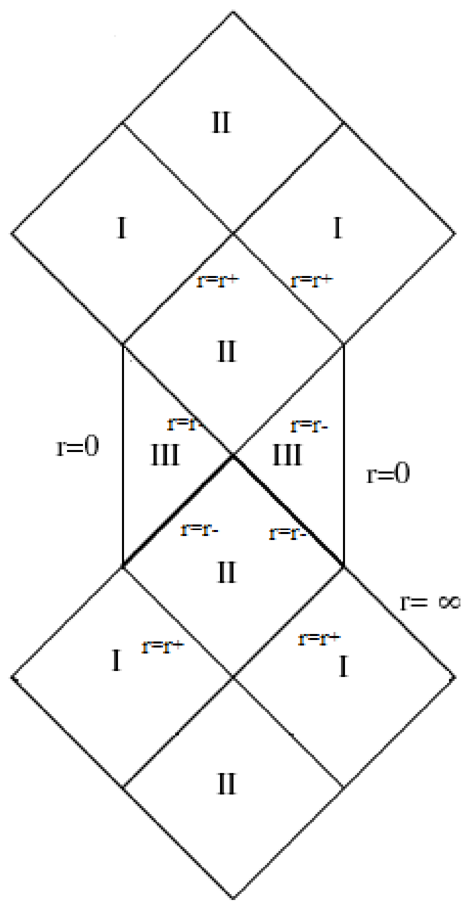
Στην περίπτωση όπου η μάζα M και το φορτίο παίρνουν "φυσικές" τιμές, δηλαδή $M \geq 0$ και $Q^2 \geq 0$, και υποθέτοντας επιπλέον ότι η μάζα και το φορτίο δεν μηδενίζονται ταυτόχρονα (μια και τότε θα αναγόμασταν στον χώρο Minkowski), διακρίνουμε τις εξής 3 περιπτώσεις:

- $M > |Q|$

Σε αυτήν την περίπτωση, μπορούμε εύκολα να επαληθύσουμε ότι η μετρική, εκφρασμένη σε ένα σύστημα συντεταγμένων όπως πιο πάνω, γίνεται ιδιόμορφη για $r = M + \sqrt{M^2 - Q^2}$. Παρ' όλα αυτά, η ιδιομορφία αυτή είναι, όπως και στην περίπτωση της Schwarzschild, απλώς μια ιδιομορφία του συστήματος συντεταγμένων, και επομένως η λύση μπορεί να επεκταθεί και πέρα από αυτήν. Μάλιστα, γράφοντας την λύση σε κατάλληλες συντεταγμένες όπου παίρνει την μορφή $\Omega(-dT^2 + dR^2) + r^2 d\sigma^2$ (οπότε και θα είναι άμεσα εμφανής η μορφή του αντίστοιχου διαγράμματος Penrose), μπορούμε αμέσως να "διακρίνουμε" μια επέκταση που, όπως και στην περίπτωση της Schwarzschild, αποτελεί μια καθολικά υπερβολική πολλαπλότητα, με υπερεπιφάνεια Cauchy ομοιομορφική με το $\mathbb{R} \times S^2$ και η οποία αποτελεί μεγιστικό καθολικά υπερβολικό ανάπτυγμα των αρχικών δεδομένων. Δεν θα παραθέσουμε την ακριβή μορφή των συντεταγμένων αυτών, παρά μόνο το διάγραμμα Penrose, από το οποίο είναι ξεκάθαρη η αιτιακή δομή (στο οποίο απεικονίζεται και μια υπερεπιφάνεια Cauchy, ενώ σκιαγραφημένη ειναι η μια συνιστώσα του $J^-(\mathcal{I}^+) \cap J^+(\mathcal{I}^-)$):



Διαπιστώνουμε ότι, όπως ακριβώς και στην περίπτωση της Schwarzschild, το φωτοειδές άπειρο είναι πλήρες, και η περιοχή $r < r_+ = M + \sqrt{M^2 - Q^2}$ αποτελείται από δύο συνιστώσες, η μελλοντική εκ των οποίων αποτελεί μια μαύρη οπή, ενώ η παρελθοντική μια λευκή οπή. Παρατηρούμε, όμως, ότι η διαφορά του με το αντίστοιχο διάγραμμα για την Schwarzschild είναι ότι το σύνορο r=0 δεν υπάρχει (καθώς, όπως θα φαινόταν και από την έκφραση της μετρικής στις αντίστοιχες συντεταγμένες, ισχύει ότι $r > M - \sqrt{M^2 - Q^2} > 0$ παντού στην λύση), αλλά αντιθέτως, υπαρχει ένα σύνορο που αντιστοιχεί στην τιμή $r = r_- = M - \sqrt{M^2 - Q^2}$. Σχηματίζοντας, κανείς μια μελλοντικά κατευθυνόμενη αιτιακή γεωδαισιακή που κατευθύνεται προς το τμήμα αυτό του συνόρου, διαπιστώνει ότι αυτή έχει πεπερασμένο αφινικό μήκος αλλά, αντίθετα από την αντίστοιχη περίπτωση στην Schwarzschild, καμία αναλλοίωτη σχηματιζόμενη από την καμπυλότητα δεν απειρίζεται κατά μήκος της. Μάλιστα, είναι δυνατόν να δείξει κανείς ότι η λύση μπορεί να επεκταθεί αναλυτικά και πέρα από το σύνορο αυτό, με τρόπο τέτοιο ώστε διαπερνόντας το σύνορο να μεταβαίνει στην περιοχή της λευκής τρύπας μιας άλλης λύσης Reissner Nordstrom. Κατά συνέπεια, "συγκολλώντας" με αυτόν τον τρόπο λύσεις, μπορεί κανείς να κατασκευάσει την μεγιστική επέκταση της λύσης Reissner Nordstrom, η οποία θα έχει διάγραμμα Penrose της μορφής:

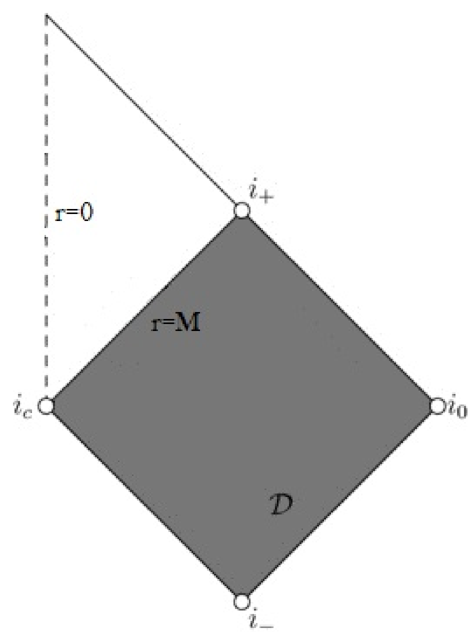


Το γεγονός ότι, διασχίζοντας την περιοχή της μαύρης τρύπας, είναι εφικτό να φτάσει κανείς σε ένα νέο "σύμπαν", συνέβαλε στην καθιέρωση της επωνυμίας "σκουληκότρυπα" για λύσεις αυτής της μορφής.

Βέβαια, από την πλευρά της αντιμετώπισης της λύσης ως ανάπτυγμα κάποιων αρχικών δεδομένων, η παραπάνω έπεκταση είναι φανερό ότι καθίσταται υπερβολική. Και αυτό διότι σε μια τέτοια επέκταση χάνεται ο καθολικά υπερβολικός χαρακτήρας της λύσης και υφίσταται πλήγμα η αρχή της αιτιότητας. Πιο συγκεκριμένα, τα αρχικά δεδομένα που επιγράφονται σε μια επιφάνεια Cauchy της λύσης Reissner Nordstrom μπορούν να καθορίσουν μονοσήμαντα μόνο το τι συμβαίνει σε ένα μεγιστικό καθολικά υπερβολικό τους ανάπτυγμα - κάθε περαιτέρω επέκταση δεν μπορεί να καθοριστεί μονοσήμαντα από αυτά. Κατά συνέπεια, το σύνορο που αντιστοχεί στην τιμή $r = M - \sqrt{M^2 - Q^2}$ καλείται ορίζοντας Cauchy της λύσης: Η λύση μπορεί να επεκταθεί και πέρα από αυτόν, αλλά με τρόπο που δεν μπορεί να καθοριστεί από το πρόβλημα Cauchy.

- $M = |Q|$

Σε αυτήν την περίπτωση η λύση καλείται και ακραία λύση Reissner Nordstrom. Όπως και στην υποακραία περίπτωση, η μετρική εκφρασμένη στις προηγούμενες συντεταγμένες παρουσιάζει μια ιδιομορφία στο $r = M$, η οποία όμως μπορεί να "απαλειφθεί" με μια αλλαγή συστήματος συντεταγμένων. Το διάγραμμα Penrose για μια τέτοια επεκτεταμένη λύση είναι το ακόλουθο:



Αντίθετα με την υποακραία περίπτωση, η επεκτεταμένη αυτή λύση ειναι καθολικά υπερβολική. Το σκιαγραφημένο πεδίο, βέβαια, δέχεται επιφάνεια Cauchy, και αποτελεί το χωρίο που επικοινωνεί με παρελθοντικές και μελλοντικές αιτιακές καμπύλες με το φωτοειδές άπειρο (και επομένως με απομακρυσμένους παρατηρητές).

Όπως και στην υποακραία περίπτωση, ακραίες λύσεις μπορούν να "συγκολληθούν" ώστε να δημιουργηθεί μια μεγαλύτερη λύση. Όσον σφορά στο σύνορο $r = 0$, δεν υπάρχει C^2 επέκταση της λύσης πέρα από αυτό, καθώς κατά μήκος γεωδαισιακών που τείνουν στο τμήμα του συνόρου r=0 υπάρχουν αναλλοίωτες ποσότητες σχηματιζόμενες από τον τανυστή καμπυλότητας οι οποίες απειρίζονται.

- $M < |Q|$

Στην περίπτωση αυτή, η πιο πάνω μετρική ειναι καλά ορισμένη για όλες τις τιμές r>0, και συμπεριφέρεται ακριβώς όπως η λύση Schwarzscild με αρνητική μάζα: δεν υπάρχει C^2 επέκταση της λύσης πέρα από την ιδιομορφία r=0, και το διάγραμμα Penrose για αυτήν την περίπτωση είναι παρόμοιο με το αντίστοιχο της Schwarzschild. Επιπλέον, η μεγιστική αυτή λύση δεν περιέχει επιφάνεια Cauchy, και περιέχει μια γυμνή ιδιομορφία (με την έννοια που περιγράψαμε προηγουμένως).

Όμοια είναι και η συμπεριφορά της λύσης για αρνητικές τιμές της μάζας, αλλά πραγματικές τιμές του φορτίου.

Φυσικά, παρ' ότι για την ερμηνεία της ποσότητας Q ως φορτίο είναι απαραίτητο αυτή να παίρνει πραγματικές τιμές, η μετρική εκφρασμένη στο προηγούμενο σύστημα αναφοράς συνεχίζει να ικανοποιεί τις εξισώσεις Einstein - Maxwell και για αρνητικές τιμές της ποσότητας Q^2. Δεν θα ασχοληθούμε εδώ με την μελέτη της περίπτωσης αυτής, η οποία είναι παρόμοια με την υποακραία περίπτωση.

Κλείνοντας την παράγραφο αυτή, να αναφέρουμε πως και για την περίπτωση των εξισώσεων Einstein Maxwell υπό την απουσία πηγών ισχύει το αντίστοιχο του θεωρήματος του Birkhoff: Κάθε C^2 σφαιρικά συμμετρική λύση θα πρέπει να είναι τοπικά ισομετρική με την λύση Reissner Nordstrom, αρκεί βέβαια οι παράμετροι M, Q^2 να επιτρέπεται να παίρνουν και αρνητικές τιμές.

3.3 Ευστάθεια των λύσεων των εξισώσεων Einstein

Κατά την περιγραφή του προβλήματος Cauchy για τις εξισώσεις Einstein που έγινε στο πρώτο κεφάλαιο, αναφέραμε πως, δεδομένων κάποιων συνθηκών ομαλότητας για τα αρχικά δεδομένα, υπάρχει μοναδική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών η οποία είναι και Cauchy ευσταθής. Φυσικά, η Cauchy ευστάθεια είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με το πρόβλημα της καλής τοποθέτησης του προβλήματος αρχικών τιμών, και αναφέρεται σε μια περιοχή της επιφάνειας Cauchy με τα αρχικά δεδομένα της εκάστοτε λύσης. Εύλογα, λοιπόν, γεννάται το ερώτημα του κατά πόσο θα μπορούσε κανείς να ξεπεράσει τον τοπικό χαρακτήρα της ευστάθειας Cauchy και να εξάγει κάποιο καθολικό αποτέλεσμα ευστάθειας για μια λύση των εξισώσεων Einstein. Ένα τέτοιο αποτέλεσμα, δηλαδή, θα περιγράφει το πως μικρές αποκλίσεις από τα αρχικά δεδομένα (με την κατάλληλη έννοια) οδηγούν σε λύσεις οι οποίες παραμένουν ομοιόμορφα κοντά στην αρχική λύση. Βέβαια, μπορεί κανείς να παρατηρήσει πως, σε αντίθεση με την Cauchy ευστάθεια, η οποία συνδέεται με την καλή τοποθέτηση του προβλήματος αρχικών τιμών, η καθολική ευστάθεια αντανακλά άμεσα την δυνατότητα ύπαρξης μιας λύσης στον φυσικό κόσμο.

Και αυτό, διότι λύσεις που κάτω από μικρές διαταραχές των αρχικών δεδομένων διαφοροποιούνται ουσιωδώς μετά από μεγάλα "χρονικά" διαστήματα μπορούν να θεωρηθούν ότι είναι αδύνατον να "παρατηρηθούν" στο συμπαν. Συνεπώς, σε αντίθεση με την περίπτωση της Cauchy ευστάθειας, η οποία ικανοποιείται για μια ιδιαίτερα ευρεία κλάση αρχικών δεδομένων, περιορισμένες θα είναι οι λύσεις οι οποίες θα απολαμβάνουν μια τέτοιου είδους "καθολική" ευστάθεια (την οποία στο εξής θα καλούμε απλώς ευστάθεια).

Δεδομένου, λοιπόν, ότι το βασικότερο μοντέλο του πραγματικού κόσμου στα πλαίσια της θεωρίας της σχετικότητας είναι αυτό του χώρου Minkowski, θα ήταν λογικό να εικάσει κανείς πως ο χώρος αυτός θα έπρεπε να ικανοποιεί κάποιου είδους ευστάθεια όπως αυτή που περιγράψαμε προηγουμένως. Και αυτό διότι αποτελεί το μοντέλο πάνω στο οποίο αναπτύχθηκε και θεμελιώθηκε η θεωρία της σχετικότητας - η παραμικρή νύξη για αστάθεια του χώρου αυτού αυτομάτως θα επέφερε ισχυρότατους τριγμούς στην ρεαλιστικότητα ολόκληρης της θεωρίας. Παρ' όλη την φαινομενική απλότητα στην δομή του χώρου Minkowski, όμως, η απόδειξη της ευστάθειας αυτού αποδείχτηκε ιδιαίτερα δύσκολη και απαιτητική, λόγω κυρίως του μη γραμμικού χαρακτήρα των εξισώσεων Einstein, και παρουσιάστηκε ολοκληρωμένη μόνο το 1993 από τους Χριστοδούλου και Klainerman ([5]).

Πιο συγκεκριμένα, λοιπόν, μια διατύπωση του προβλήματος της ευστάθειας του χώρου Minkowski για τις εξισώσεις του κενού διατυπώνεται ως εξής:

> Πρόβλημα: Να δειχθεί ότι για οποιαδήποτε τριάδα αρχικών δεδομένων (Σ, g_0, k_0), όπου
>
> - $\Sigma \simeq \mathbb{R}^3$
> - οι τανυστές $g_{0,ij} - \delta_{ij}$ και $k_{0,ij}$ είναι αρκούντως μικροί (με την κατάλληλη έννοια)
> - $g_0 = (1 - \frac{M}{r})\delta + o(r^{-1-\alpha}), k_0 = o(r^{-2-\alpha}), \alpha$¿0, όπου r είναι η συνάρτηση πολικής απόστασης που κληρονομεί η Σ από την διαφορομορφική ταύτισή της με τον Ευκλείδειο χώρο (δηλαδή τα αρχικά δεδομένα είναι ασυμπτωτικά επίπεδα)
>
> το πρόβλημα αρχικών τιμών για τις εξισώσεις Einstein του κενού έχει λύση η οποία είναι γεωδαισιακά πλήρης στις αιτιακές κατευθύνσεις και επιπλέον "τείνει" ασυμπτωτικά στον χώρο Minkowski.

Φυσικά, το πρόβλημα αυτό μπορεί να διατυπωθεί και για την περίπτωση των εξισώσεων Einstein για βαθμωτά πεδία. Σε αυτήν την περίπτωση, θα πρέπει και τα αρχικά δεδομένα (φ_0, φ_1) για το βαθμωτό πεδίο να είναι "μικρά", και ασυμπτωτικά να ισχύει ότι $\varphi_0 = o(r^{-1-a}), \varphi_1 = o(r^{-2-a})$.

Οι Χριστοδούλου και Klainermann, λοιπόν, απέδειξαν την ευστάθεια του χώρου Minkowski για τις εξισώσεις Einstein του κενού, με την προυπόθεση ότι $a \geq \frac{1}{2}$. Η απόδειξή τους ήταν ιδιαίτερα εκτενής, και θα αναφέρουμε απλώς ότι ένα από τα συστατικά αυτής ήταν η κατάλληλη προσαρμογή αποτελεσμάτων ελάττωσης των λύσεων της γραμμικής εξίσωσης. Για την προσαρμογή αυτή χρησιμοποιήθηκε μια κατάλληλη γεωμετρική τροποποίηση της μεθόδου των πολλαπλασιαστών του Friedrichs (η οποία χρησιμοποιήθηκε κατά κόρον για την απόδειξη αποτελεσμάτων ελάττωσης λύσεων της γραμμικής κυματικής εξίσωσης), η οποία καλείται μέθοδος του διανυσματικού πεδίου - ο αναγνώστης μπορεί να βρεί μια μικρή σχετική εισαγωγή στο παράρτημα.

Η εν λόγω απόδειξη θεωρείται εξαιρετικά σημαντικό επίτευγμα στη θεωρία της γενικής σχετικότητας, αλλά γενικά θεωρείται "δύσκολη" και περίπλοκη. Από το 1993 και έπειτα, έχουν γίνει αρκετές προσπάθειες για την απλούστευσή της, καθώς και γενίκευσής της σε άλλες περιπτώσεις. Ενδεικτικά αναφέρουμε την απόδειξη των Lindblad-Rodnianski για την περίπτωση του βαθμωτού πεδίου ([7]), καθώς και του N. Zipser για την περίπτωση των εξισώσεων Maxwell-Einstein ([8]).

Πέρα, όμως, από την περίπτωση του χώρου Minkowski, δεν υπάρχει κάποιο αντίστοιχο αποτέλεσμα ευστάθειας για κάποια από τις κλασικές λύσεις των εξισώσεων Einstein όπως οι λύσεις που αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο. Δεδομένου ότι για την περίπτωση της ευστάθειας του χώρου Minkowski σημαντικό ρόλο έπαιξε η κατάλληλη χρήση αποτελεσμάτων από την γραμμική κυματική εξίσωση, η αντίστοιχη μελέτη της γραμμικής κυματικής εξίσωσης για γενικότερες λύσεις των εξισώσεων Einstein θεωρείται ως επί το πλείστον προαπαιτούμενο για οποιαδήποτε απόπειρα απόδειξης ευστάθειας. Κατά κάποιο τρόπο, άλλωστε, η κυματική εξίσωση μπορεί να θεωρηθεί ως μια πρώτη γραμμικοποίηση των εξισώσεων Einstein, και επομένως η συμπεριφορά των λύσεων αυτής αναμένεται να αντανακλά τις ιδιότητες ευστάθειας ή αστάθειας ενός δεδομένου χώρου. Για τον λόγο αυτό, στην συνέχεια θα αναφερθούμε σε ορισμένα από τα σημαντικότερα αποτελέσματα στην μελέτη της κυματικής εξίσωσης σε λύσεις των εξισώσεων Einstein όπως αυτές που έχουμε περιγράψει μέχρι στιγμής, εντάσσοντάς τα στην γενικότερη συζήτηση περί ευστάθειας που ξεκινήσαμε ήδη από το πρώτο κεφάλαιο.

Μετά τον χώρο Minkowski, λοιπόν, το σημαντικότερο παράδειγμα λύσης των εξισώσεων Einstein θεωρείται η λύση Schwarzschild. Η λύση αυτή ενέπνευσε ορισμένες από τις σημαντικότερες ανοιχτές εικασίες της θεωρίας της γενικής σχετικότητας (όπως οι εικασίες κοσμικής λογοκρισίας), και για το λόγο αυτό η απόδειξη της ευστάθειάς της αποτελεί έναν από τους βασικότερους στόχους των σύγχρονων ερευνητών της σχετικότητας. Παρ' ότι η κοινότητα των φυσικών είχε ασχοληθεί εκτενώς με την μελέτη εξισώσεων όπως η εξίσωση του Schroendiger στην λύση Scwarzschlild, το πρώτο αποτέλεσμα το οποίο θεωρείται ότι μπορεί να σχετιστεί με την μελέτη της ευστάθειας ειναι αυτό των Kay και Wald (1987):

> Θεώρημα (Kay-Wald): Αν Σ είναι μια υπερεπιφάνεια Cauchy της Schwarzschild, τότε για οποιοδήποτε ζεύγος ψ_0, ψ_1 συναρτήσεων στην $H^{m+1}_{loc}(\Sigma), H^m_{loc}(\Sigma)$ αντίστοιχα (με $m \geq 1$) που φθίνουν αρκούντως γρήγορα στο χωροειδές άπειρο, υπάρχει μια σταθερά D εξαρτώμενη από αυτά ώστε αν ψ είναι η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών για την κυματική εξίσωση στην Schwarzschild με αρχικά δεδομένα (ψ_0, ψ_1) να ισχύει $|\psi|^2 \leq D$ στο $J^-(\mathcal{I}^+) \cap J^+(\mathcal{I}^-)$

Το ότι το αποτέλεσμα αυτό αναφέρεται μόνο στην περιοχή $J^-(\mathcal{I}^+) \cap J^+(\mathcal{I}^-)$ δεν θα έπρεπε να μας δυσαρεστεί, καθώς σε οποιαδήποτε περίπτωση έχουμε μια μαύρη τρύπα (όπως στην λύση Schwarzschild) θα μας αρκούσε να εξάγουμε συμπεράσματα ευστάθειας στην περιοχή όπου επικοινωνεί με το φωτοειδές άπειρο με παρελθοντικές και μελλοντικές καμπύλες - η περιοχή της μαύρης ή της λευκής οπής δεν απολαμβάνουν τέτοια επικοινωνία με τους απομακρυσμένους παρατηρητές (φωτοειδές άπειρο).

Το θεώρημα των Kay και Wald, λοιπόν, αναφέρει πως η λύση της κυματικής εξίσωσης παραμένει ομοιόμορφα φραγμένη, τουλάχιστον στην περιοχή επικοινωνίας με το φωτοειδές άπειρο. Το γεγονός αυτό, λοιπόν, αποτελεί μια πρώτη ένδειξη ευστάθειας. Παρ' όλα αυτά, η απόδειξη των Kay και Wald είχε κάποια μειονεκτήματα, τα οποία δεν της επέτρεπαν να μπορει να γενικευτεί αρκετά ώστε να χρησιμοποιηθεί στην μη γραμμική περίπτωση. Εκτός αυτού, λόγω της χρήσης της στατικότητας και των διακριτών ισομετριών της Schwarzschild, η απόδειξη αυτή αδυνατούσε να γενικευτεί ακόμη και σε απλές διαταραχές αυτής.

Η βελτίωση, λοιπόν, της προηγούμενης απόδειξης έγινε από τον Μ. Δαφέρμο και τον Ι. Rodnianski, οι οποίοι γενίκευσαν το αποτέλεσμα του ομοιόμορφου φράγματος με αρκετούς τροπους τοσο στην περίπτωση της λύσης Schwarzschild όσο και σε γενικότερους χώρους. Η διατύπωση του αντίστοιχου θεωρήματος για την περίπτωση της Schwarzschild είναι η ακόλουθη:

Θεώρημα (Δαφέρμος - Rodnianski): Έστω Σ μια επιφάνεια Cauchy για την Schwarzschild για την οποία ισχύει $\Sigma \cap H^- \neq \emptyset$, και για την οποία η συνάρτηση $-g(n_\Sigma, T)$ ειναι φραγμένη (όπου T το σύνηθες μελλοντικά κατευθυνόμενο χρονοειδές πεδίο Killing της Schwarzschild και n_Στο μελλοντικό μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο στην Σ). Τότε, αν $\Sigma_0 = \Sigma \cap J^-(\mathcal{I}^+) \cap J^+(\mathcal{I}^-)$ και Σ_t είναι η εικόνα της Σ_0 μέσω της ροής του T για χρόνο T, θα υπάρχει σταθερά C>0 ώστε για κάθε ζεύγος αρχικών δεδομένων $(\psi_0, \psi_1) \in (H^{k+1}_{loc}(\Sigma_0), H^k_{loc}(\Sigma_0))$ με $\int_{\Sigma_0} J^T_\mu(T^m\psi)n^\mu$ $\forall 0 \leq m \leq k$ (για τους συμβολισμούς αυτούς παραπέμπουμε στο αντίστοιχο παράρτημα) να ισχύει $\forall t \geq 0$:

$$||\nabla^{\Sigma_t}\psi||_{H^k(\Sigma_t)} + ||n\psi||_{H^k(\Sigma_t)} \leq C \cdot \left(||\nabla^{\Sigma_0}\psi||_{H^k(\Sigma_0)} + ||n\psi||_{H^k(\Sigma_0)}\right)$$

και

$$\sum_{0\leq m\leq k-1} (\sum_{m_1+m_2\leq m} ||(\nabla^{\Sigma_t})^{m_1} n^{m_2}\psi||_{L^\infty} \leq C \cdot \left(lim_{x\to i^0}|\psi| + ||\nabla^{\Sigma_0}\psi||_{H^k(\Sigma_0)} + ||n\psi||_{H^k(\Sigma_0)}\right)$$

Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού βασίζεται στο φαινόμενο της μετατόπισης προς το ερυθρό, το γεγονός, δηλαδή, ότι στον ορίζοντα ισχύει $\partial_i(g(T,T)) = -2\kappa g_{ij}T^j$ με κ>0. Χρησιμοποιώντας την μετατόπιση προς το ερυθρό, λοιπόν, είναι εφικτή η κατασκευή ενός διανυσματικού πεδίου N το οποίο μακρια από τον ορίζοντα ταυτίζεται με το T και το οποίο είναι αυστηρά χρονόμορφο σε μια περιοχή του ορίζοντα, και για το οποίο ισχύει $K^N(\psi) \geq C \cdot J^N_\mu(\psi)N^\mu$ κοντά στον ορίζοντα (βλέπε Παράρτημα). Χρησιμοποιώντας, λοιπόν, την μέθοδο διανυσματικού πεδίου και μια ανισότητα τύπου Gronwall μπορεί κανείς να εξαγάγει το πρώτο αποτέλεσμα του θεωρήματος. Εαν το αποτέλεσμα αυτό μπορούσε να αποδειχτεί και για παραγώγους της ψ υψηλότερης τάξης, τότε κατάλληλες ελλειπτικές εκτιμήσεις και εκτιμήσεις τύπου Sobolev θα οδηγούσαν αμέσως στο δεύτερο αποτέλεσμα. Η γενίκευση του πρώτου αποτελέσματος είναι άμεση για τις παραγώγους της ψ στις σφαιρικές κατευθύνσεις και στην κατεύθυνση του T, καθώς οι κατευθύνσεις αυτές παράγονται από πεδια Killing τα οποία πάντα αντιμετατίθενται με τον κυματικό τελεστή. Η περίπτωση των παραγωγίσεων που είναι εγκάρσιες στον ορίζοντα είναι πιο δύσκολη, όμως ειναι και αυτή εφικτή χάρη στην μετατόπιση προς το ερυθρό.

Η απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος βασίζεται σε αρκετά γενικούς γεωμετρικούς μηχανισμούς, και για τον λόγο αυτό μπορεί εύκολα να γενικευτεί και σε άλλους χώρους όπου ισχύει το φαινόμενο της μετατόπισης προς το ερυθρό, όπως οι λύσεις $Reissner - Nordstrom$ στην υποακραία περίπτωση.

Βέβαια, παρ' ότι η ομοιόμορφη φραξιμότητα των λύσεων της κυματικής εξίσωσης αποτελεί μια πρώτη ένδειξη ευστάθειας, είναι δύσκολο να αποδειχθεί ότι η ίδια ιδιότητα της φραξιμότητας είναι ευσταθής - για τον σκοπό αυτό θα χρειαζόταν να αποδειχθεί κάτι παραπάνω από αυτό: ένας ρυθμός ασυμπτωτικής μείωσης. Εκτός αυτού, σύμφωνα με την λογική της απόδειξης των Χριστοδούλου και Klainerman, ένας συγκεκριμένος ρυθμός ελάττωσης των λύσεων της κυματικής εξίσωσης είναι απαραίτητος για την γενίκευση των μεθόδων αυτών στην μη γραμμική περίπτωση. Για τον λόγο αυτό, οι Δαφέρμος και Rodnianski απέδειξαν το 2003 (στα πλαίσια μιας γενικότερης απόδειξης για τον λεγόμενο νόμο του Price) το εξής:

> Θεώρημα (Δαφέρμος - Rodnianski): Περιοριζόμενοι σε μια συνεκτική συνιστώσα του $J^-(\mathcal{I}^+) \cap J^+(\mathcal{I}^-)$, έστω Σ_0 η επιφάνεια {t=0} και έστω $\tilde{\Sigma}_0$ μια χωροειδής επιφάνεια που τέμνει εγκάρσια τον ορίζοντα και το φωτοειδές άπειρο (όπως θα φαινόταν σε μια σύμμορφη συμπαγοποίηση της Schwarzschild). Ορίζουμε ως $\tilde{\Sigma}_t$ την μεταφορά της $\tilde{\Sigma}_0$ για χρόνο t μέσω της ροής του T. Τότε υπάρχει $C > 0$ ώστε να ισχύει το εξής: Αν για το ζεύγος (ψ_0, ψ_1) αρχικών δεδομένων στην Σ_0 ισχύει $\psi_0 \in H^4_{loc}, \psi_1 \in H^3_{loc}$, $lim_{x \to i_0}\psi = 0$ και για την λύση ψ του ΠΑΤ ισχύει αρχικά $E_1 = \sum_{|a| \leq 3} \sum_{\Gamma = \{\Omega_i\}} \int_{t=0} r^2 J^T_\mu(\Gamma^{(a)}\psi)T^\mu < \infty$ (όπου τα Ω_i είναι μια βάση της άλγεβρας των σφαιρικών Killing πεδίων της Schwarzschild) τότε:
>
> $$\int_{\tilde{\Sigma}_t} J^N_\mu(\Gamma^{(a)}\psi)n^\mu_{\tilde{\Sigma}_t} \leq C \cdot E_1 t^{-2}$$
>
> (όπου N ειναι ένα T-αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο που ταυτίζεται με το T μακριά από τον ορίζοντα και είναι αυστηρά χρονόμορφο σε μια περιοχή του ορίζοντα). Επιπλέον, αν $\psi_0 \in H^7_{loc}, \psi_1 \in H^6_{loc}$, $lim_{x \to i_0}\psi = 0$ και $E_2 = \sum_{|a| \leq 6} \sum_{\Gamma = \{\Omega_i\}} \int_{t=0} r^2 J^T_\mu(\Gamma^{(a)}\psi)T^\mu < \infty$, τότε:
>
> $$\sup_{\tilde{\Sigma}_t} \sqrt{r}|\psi| \leq C\sqrt{E_2}t^{-1}, \sup_{\tilde{\Sigma}_t} r|\psi| \leq C\sqrt{E_2}t^{-1/2}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό, λοιπόν, οι λύσεις της κυματικής εξίσωσης στην Schwarzschild δεν παραμένουν απλώς ομοιόμορφα φραγμένες αλλά φθίνουν πολυωνυμικά με τον χρόνο.

Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού γίνεται με μια πολύ προσεκτική εφαρμογή της μεθόδου του διανυσματικού πεδίου: Η κυριότερη εκτίμηση προκύπτει κατ' αντιστοιχία με την περίπτωση του χώρου Minkowski με την χρήση ενός ρεύματος που σέβεται ασυμπτωτικά την σύμμορφη δομή της Schwarzschild. το ρεύμα αυτό δεν ειναι άλλο παρά μια τροποποίηση του αντιστοιχου πολλαπλασιαστή της Morawetz. Βέβαια, για την ολοκλήωση της απόδειξης με την μέθοδο αυτή ένα ενδιάμεσο αλλά απαραίτητο βήμα είναι η απόδειξη μιας ανισότητας της μορφής $\int_{\{t\geq 0\}}\int_{\tilde{\Sigma}_t}\chi J^N_\mu(\psi)n^\mu_{\tilde{\Sigma}_t}\leq C\cdot D$, όπου το D προκύπτει από τα αρχικά δεδομένα. Ο λόγος, λοιπόν, που το θεώρημα απαιτεί μια τέτοια "θυσία" παραγώγων (με την έννοια ότι η ομαλότητα των αρχικών δεδομένων που απαιτείται είναι δυσανάλογη της ισχύος του αποτελέσματος) έγκειται ακριβώς σε αυτό το σημείο: Όπως και στην κλασική περίπτωση, η ύπαρξη παγιδευμένων φωτοειδών γεωδαισιακών απαγορεύει την απόδειξη μιας ανισότητας όπως η προηγούμενη εάν η D δεν αποτελεί συνάρτηση και παραγώγων υψηλότερης τάξης από αυτές που εμφανίζονται στο αριστερό μέλος, όπως αποδεικνύει και το αντιπαράδειγμα του Ralston. Στην Schwarzschild, τέτοιες παγιδευμένες γεωδαισιακές συναντώνται στην σφαίρα $r = 3M$ - η επονομαζόμενη και φωτονόσφαιρα. Για τον λόγο αυτό, για την απόδειξη μιας ολοκληρωτικής ανισότητας της προηγούμενης μορφής (η οποία γίνεται και αυτή με μια προσεκτική εφαρμογή της μεθόδου του διανυσματικού πεδίου για ένα πεδίο που είναι πολλαπλάσιο του ∂_r στο κλασικό σύστημα συντεταγμένων) είναι απαραίτητο το "θυσίασμα" κάποιων αρχικών παραγώγων.

(Να σημειώσουμε ότι το προηγούμενο σχόλιό μας για τις παγιδευμένες φωτοειδείς γεωδαισιακές δεν είναι απολύτως σωστό. Παγιδευμένες φωτοειδείς γεωδαισιακές βρίσκονται και στον ορίζοντα, όμως το φαινόμενο της μετατόπισης στο ερυθρό οδηγεί σε μια ταχεία μείωση της παγιδευμένης ενέργειας σε αυτές. Για μια πολύ όμορφη προσέγγιση στο θέμα αυτό, καθώς και για μια συζήτηση περί του ορθού τρόπου γενίκευσης της μεθόδου του Ralston σε Λορέντζιες πολλαπλότητες παραπέμπουμε στο [13]).

Από την δημοσίευση των προηγούμενων αποτελεσμάτων μέχρι σήμερα, έχει γίνει εφικτή η εξαγωγή συμπερασμάτων σχετικά με την συμπεριφορά των λύσεων της κυματικής εξίσωσης σε πληθώρα λύσεων των εξισώσεων Einstein ακόμα και στην περίπτωση της μη μηδενικής κοσμολογικής σταθεράς. Εμείς θα αναφέρουμε απλώς ένα αποτέλεσμα των προηγούμενων συγγραφέων σχετικά με μια λύση εξίσου σημαντική με την λύση Schwarzschild: την λύση Kerr.

Στην πραγματικότητα, οι λύσεις Kerr αποτελούν μια διπαραμετρική οικογένεια αξονικά συμμετρικών λύσεων των εξισώσεων Einstein του κενού, ειδική περίπτωση της οποίας αποτελεί και η λύση Schwarzschild. Σε ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων (τις καλούμενες και συντεταγμένες Boyer Lindquist), η μετρική Kerr παίρνει την μορφή:

$$g=-\big(1-\frac{2M}{r(1+\frac{a^2cos^2\vartheta}{r^2})}\big)dt^2+\frac{1+\frac{a^2cos^2\vartheta}{r^2}}{1-\frac{2M}{r}+\frac{a^2}{r^2}}dr^2+r^2\big(\frac{a^2cos^2\vartheta}{r^2}\big)d\vartheta^2+$$

$$+r^2(1+\frac{a^2}{r^2}+\frac{2M}{r^3}\cdot\frac{a^2sin^2\vartheta}{1+\frac{a^2cos^2\vartheta}{r^2}})sin^2\vartheta d\varphi^2-4M\frac{a\cdot sin^2\vartheta}{r(1+\frac{a^2cos^2\vartheta}{r^2})}dtd\varphi$$

Η παράμετρος M καλείται (όπως και στην περίπτωση της Schwarzschild) μάζα, ενώ η α στροφορμή. Η περίπτωση α=0 αντιστοιχεί στην Schwarzschild (με την μετρική της εκφρασμένη στο αρχικό αύστημα συντεταγμένων). Όταν το α ανήκει στο εύρος $0 \leq |a| < M$, οι λύσεις καλούνται υποακραίες. Στην περίπτωση όπου $|a| = M$, οι λύσεις καλούνται ακραίες ενώ οι υπερακραίες λύσεις αντιστοιχούν στο εύρος $|a| > M$. Μεγιστικές επεκτάσεις των λύσεων Kerr κατασκευάστηκαν από τον Carter, και η αιτιακή τους δομή προσιδιάζει ιδιαίτερα στην αιτιακή δομή των λύσεων Reissner Nordstrom (αντίστοιχα στην υποακραία, ακραία και υπερακραία περίπτωση). Η υπερακραία περίπτωση παρουσιάζει (όπως και η αντίστοιχη λύση Reissner Nordstrom) μια γυμνή ιδιομορφία. Στην υποακραία περίπτωση, η λύση Kerr (κατάλληλα επεκτεταμένη) προκύπτει ως καθολικά υπερβολικό ανάπτυγμα ασυμπτωτικά επίπεδων αρχικών δεδομένων, με μια μαύρη και μια λευκή οπή, καθως και ορίζοντα γεγονότων.

Η μέθοδος απόδειξης της ομοιόμορφης φραξιμότητας των λύσεων της κυματικής εξίσωσης για την Schwarzschild δεν μπορεί να γενικευτεί άμεσα για την περίπτωση της υποακραίας λύσης Kerr, ακόμα και για μικρές τιμές της παραμέτρου α. Η αιτία αυτής της δυσκολίας βρίσκεται στο γεγονός πως το πεδίο Killing T, το οποίο είναι χρονόμορφο στην περιοχή του απείρου, πλέον γίνεται χωροειδές σε μια γειτονιά του ορίζοντα. Για το λόγο αυτό, η μέθοδος απόδειξης της φραξιμότητας της Schwarzschild μπορεί να εφαρμοστεί μόνο για ειδικές κατηγορίες λύσεων της κυματικής εξίσωσης, όπως οι αξισυμμετρικές. Παρ' όλα αυτά, οι Δαφέρμος και Rodnianski κατάφεραν να αποδείξουν την ομοιόμορφη φραξιμότητα των λύσεων της κυματικής εξίσωσης και σε αυτήν την περίπτωση για $|a| << M$, διασπώντας κάθε τέτοια λύση (μέσω κατάλληλου μετασχηματισμού Fourier) σε δύο τμήματα, και εκμεταλλευόμενοι τις μεθόδους της Schwarzschild για το ένα και μια κατάλληλη εφαρμογή της μεθόδου του διανυσματικού πεδίου για το άλλο ώστε να καταλήξουν στο ζητούμενο (βλέπε [14]). Στην συνέχεια, εκμεταλλευόμενοι την "κρυμμένη" συμμετρία της Kerr, η οποία επιτρέπει τον διαχωρισμό της κυματικής εξίσωσης σε ένα κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων, επέκτειναν και το θεώρημα πολυωνυμικής μείωσης αρχικά για μικρές τιμές του α, και στην συνέχεια σε όλο το υποακραίο εύρος ([15]).

Μέχρι στιγμής παρουσιάσαμε μόνο αποτελέσματα ενδεικτικά της ευστάθειας κάποιων λύσεων των εξισώσεων Einstein. Για το λόγο αυτό, λοιπόν, θα κλείσουμε την παράγραφο αυτή αναφέροντας ένα αποτέλεσμα σχετικό με την αστάθεια των ακραίων λύσεων Reissner-Nordstrom: Σε αυτές τις περιπτώσεις, η συμπεριφορά των λύσεων αυτών σε μια περιοχή του ορίζοντα διαφέρει δραστικά από την υποακραια περίπτωση, και για το λόγο αυτό οι μηχανισμοί που χρησιμοποιήθηκαν για την απόδειξη της ομοιόμορφης φραξιμότητας για τις λύσεις της κυματικής εξίσωσης στην Schwarzschild και στις υποακραίες Reissner-Nordstrom και Kerr δεν μπορούν να εφαρμοστούν. Παρ' όλα αυτά, ο Σ. Αρετάκης κατάφερε να δείξει (βλ. [16, 17]) ότι και σε αυτήν την περίπτωση οι λύσεις της κυματικής εξίσωσης παραμένουν ομοιόμορφα φραγμένες (στην περιοχή επικοινωνίας με το φωτοειδές άπειρο), καθώς και ότι η ενέργειά τους με βάρη που φθίνουν στον ορίζοντα φθίνει ασυμπτωτικά. Πέρα από αυτό, όμως, απέδειξε ότι το αποτέλεσμα αυτό είναι κατά κάποιο τρόπο βέλτιστο: η ενέργειά τους με βάρη οπου δεν φθίνουν στον ορίζοντα εν γένει δεν φθίνει, ενώ μπορει να κατασκευάσει κανείς λύσεις των οποίων κάποια ενέργεια υψηλότερης τάξης (με βάρη που δεν φθίνουν στον ορίζοντα) τείνει να απειριστεί! Το γεγονός αυτό, φυσικά, στα πλαίσια της προηγούμενης συζήτησης, αποτελεί μια ισχυρή ένδειξη αστάθειας τέτοιων ακραίων μαύρων οπών.

Παράρτημα Α΄

Ύπαρξη και μοναδικότητα λύσεων για την κυματική εξίσωση

Για την αντιμετώπιση των προβλημάτων ύπαρξης και μοναδικότητας λύσεων για τις εξισώσεις Einstein, αλλά και για την μελέτη της ευστάθειας λύσεων αυτών είναι αναγκαίο να προσφύγει κανείς στην θεωρία των οιωνεί γραμμικών κυματικών εξισώσεων. Σκοπός της εν λόγω παραγράφου του παραρτήματος, λοιπόν, είναι να συλλεχθούν και να σκιαγραφηθούν κάποια από τα βασικά θεωρήματα τα οποία χρησιμοποιούνται σε διάφορα σημεία της προκείμενης εργασίας. Για τον σκοπό αυτό, ακολουθώντας τον [2] θα ξεκινήσουμε εστιάζοντας στα κεντρικά θεωρήματα ύπαρξης και μοναδικότητας που αφορούν στις γραμμικές κυματικές εξισώσεις, ώστε εφοδιασμένοι με αυτά να αποδείξουμε τις κατάλληλες γενικεύσεις τους στην μη γραμμική περιπτωση.

A.1 Γραμμική κυματική εξίσωση

Για να αποφύγουμε περιττούς συμβολισμούς και επεξηγήσεις, στις παραγράφους που ακολουθούν με C_n θα συμβολίζουμε το σύνολο των $(n+1)\times(n+1)$ πραγματικών πινάκων $A_{\mu\nu}$ για τους οποίους ισχύει ότι $A_{00} < 0$ και ο υποπίνακας A_{ij}, $i,j \in \{1,...n\}$ είναι θετικά ορισμένος. Οι πίνακες του συνόλου αυτού θα καλούνται Λορέντζιοι, και είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι αν $A \in C_n$ τότε ο A έχει μία αρνητική ιδιοτιμή και n θετικές. Επιπλέον, $A \in C_n \Leftrightarrow A^{-1} \in C_n$, αφού:

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & v^T \\ v & \tilde{A} \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{00}-v^T\tilde{A}^{-1}v} & \left(-\frac{1}{a_{00}-v^T\tilde{A}^{-1}v}\tilde{A}^{-1}v\right)^T \\ \left(-\frac{1}{a_{00}-v^T\tilde{A}^{-1}v}\tilde{A}^{-1}v\right) & \left(\tilde{A}^{-1}+\frac{1}{a_{00}-v^T\tilde{A}^{-1}v}(\tilde{A}^{-1}v)(\tilde{A}^{-1}v)^T\right) \end{pmatrix}$$

και συνεπώς το ζητούμενο προκύπτει εύκολα αφού δεδομένου ότι και ο $\tilde{A}^{-1}$ είναι θετικά ορισμένος ισχύει ότι $v^T\tilde{A}^{-1}v \geq 0$ και $\forall x \in \mathbb{R}^n$: $\big(v^T\tilde{A}^{-1}x\big)^2 \leq \big(x^T\tilde{A}^{-1}x\big)\big(v^T\tilde{A}^{-1}v\big)$. Επιπλέον, για κάθε τριάδα θετικών αριθμών $a=(a_1,a_2,a_3)$ θα συμβολίζουμε με $C_{n,a}$ το σύνολο των Λορέντζιων πινάκων $A_{\mu\nu}$ για τους οποίους ισχύει $A_{00}<-a_1, \{A_{ij}\}_{i,j=1}^n > a_2 I$ (ανισότητα πινάκων) και $\sum_{\mu,\nu}|A_{\mu\nu}|<a_3$.

Χάριν ευκολίας, στο εξής όποτε συμβολίζουμε οποιουσδήποτε δείκτες με ελληνικά γράμματα θα εννοούμε ότι παίρνουν τιμές από 0 μέχρι n (όπου το n θα καθορίζεται αναλόγως με την περίσταση), ενώ ο συμβολισμός τους με λατινικούς χαρακτήρες θα υποδηλώνει ότι παίρνουν τιμές μόνο από 1 μέχρι n. Πέραν αυτού, θα συμβολίζουμε κατα τα γνωστά τις συνιστώσες του αντίστροφου του πίνακα $A_{\mu\nu}$ με $A^{\mu\nu}$.

Με αυτούς τους συμβολισμούς, λοιπόν, θα καλούμε γραμμική κυματική εξίσωση μια εξίσωση της μορφής

$$g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu u + a^\mu\partial_\mu u + bu = f$$

όπου οι g, a, b και f είναι ορισμένες στον $\mathbb{R}^{n+1}$ και έχουν τιμές στους χώρους $C_n, (\mathbb{R}^{N\times N})^{n+1}, \mathbb{R}^{N\times N}$ και $\mathbb{R}^N$ αντίστοιχα, και αναζητούμε μια λύση u που είναι συνάρτηση ορισμένη στον $\mathbb{R}^{n+1}$ με τιμές στον $\mathbb{R}^N$.

Δεδομένου ότι τοσο οι συντελεστές όσο και η λύση μας ικανοποιούν κατάλληλες συνθήκες ώστε το ολοκλήρωμα να έχει νόημα, μπορούμε να ορίσουμε την συνάρτηση ενέργειας:

$$\begin{aligned} E(t) &= \int_{[x^0=t]} \big(-g^{00}|\partial_0 u|^2 + g^{ij}\partial_i u\cdot\partial_j u\big)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \big(-g^{00}|\partial_0 u|^2 + g^{ij}\partial_i u\cdot\partial_j u\big)(t,\cdot)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

όπου $|\cdot|$: η ευκλείδεια νόρμα και $[x^0=t]=\{(x^0,x^1,...x^n)\in\mathbb{R}^{n+1}|x^0=t\}\simeq\mathbb{R}^n$.

Το πρόβλημα αρχικών τιμών που θα μελετήσουμε για μια τέτοια γραμμική κυματική εξίσωση, για την οποία $g\in C^1(\mathbb{R}^{n+1},C_{n,a})$ για κάποιο $a=(a_1,a_2,a_3)$ με $a_i>0$, οι υπόλοιποι συντελεστές είναι συνεχείς συναρτήσεις και επιπλέον τόσο οι συντελεστές αυτοί όσο και η πρώτη παράγωγος της g ειναι φραγμένοι, έγκειται στο να βρούμε μια συνάρτηση u η οποία να ικανοποιεί την γραμμική κυματική εξίσωση στην ασθενή της μορφή και ταυτόχρονα να ισχύει ότι $u(0,\cdot)=u_0(\cdot)$ και $\partial_0 u(0,\cdot)=u_1(\cdot)$. θα υποθέτουμε ότι οι αρχικές τιμές μας $(u_0,u_1):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N$ έχουν πεπερασμένη ενέργεια, ανήκουν δηλαδή στην πληρότητα του χώρου $C_0^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^N)\times C_0^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^N)$ με την νόρμα $||(u_0,u_1)||_E=\int_{\mathbb{R}^n}\big(-g^{00}|u_1|^2+g^{ij}\partial_i u_0\cdot\partial_j u_0+|u|^2\big)\,\mathrm{d}x$. Θα δείξουμε ότι ένα τέτοιο πρόβλημα αρχικών τιμών έχει λύση και μάλιστα μοναδική.

Για τον σκοπό αυτό, απαραίτητες είναι κάποιες εκτιμήσεις που μπορεί να εξάγει κανείς για την συνάρτηση ενέργειας. Υποθέτοντας, λοιπόν, ότι οι συντελεστές είναι όπως πρίν και η C^∞ συνάρτηση u ικανοποιεί την εξίσωση και ταυτόχρονα $\forall I\subset\mathbb{R}$ συμπαγές $\exists K_I\subset\mathbb{R}^n$ συμπαγές ώστε u(t,x)=0 $\forall t\in I, x\in(\mathbb{R}^n\setminus K_I)$, έχουμε ότι:

$$\frac{d}{dt}E = \int_{\mathbb{R}^n} \big(-(\partial_0 g^{00})|\partial_0 u|^2 + (\partial_0 g^{ij})\partial_i u \cdot \partial_j u +$$

$$+2(-g^{00}\partial_0 u \cdot \partial_0^2 u + g^{ij}\partial_i u \cdot \partial_j \partial_0 u + u \cdot \partial_0 u\big)\,\mathrm{d}x$$

Δεδομένου ότι $g \in C^1(\mathbb{R}^{n+1}, C_{n,a})$ και οι πρώτες παράγωγοι της g είναι φραγμένες, έχουμε ότι για κάποια θετική σταθερά C ισχύει $\int_{\mathbb{R}^{n+1}} -(\partial_0 g^{00})|\partial_0 u|^2 + (\partial_0 g^{ij})\partial_i u \cdot \partial_j u - 2u \cdot \partial_0 u \, dx \leq C \cdot E$. (Στο εξής κάθε τέτοια θετική σταθερά θα την συμβολίζουμε με C) Επιπλέον, επειδή η u ικανοποιεί την κυματική εξίσωση έχουμε ότι:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \big(g^{ij}\partial_i u \cdot \partial_j \partial_0 u - g^{00}\partial_0 u \cdot \partial_0^2 u\big)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} g^{ij}\partial_i u \cdot \partial_j \partial_0 u - \partial_0 u \cdot (f - a^{\mu}\partial_{\mu} u - bu - 2g^{0i}\partial_i \partial_0 u - g^{ij}\partial_i \partial_j u)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} -(\partial_j g^{ij})\partial_i u \cdot \partial_0 u - g^{ij}\partial_i \partial_j u \cdot \partial_0 u - \partial_0 u \cdot (f - a^{\mu}\partial_{\mu} u - bu - 2g^{0i}\partial_i \partial_0 u - g^{ij}\partial_i \partial_j u)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} -(\partial_j g^{ij})\partial_i u \cdot \partial_0 u - \partial_0 u \cdot (f - a^{\mu}\partial_{\mu} u - bu - 2g^{0i}\partial_i \partial_0 u)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} -(\partial_j g^{ij})\partial_i u \cdot \partial_0 u - \partial_0 u \cdot f + a^{\mu}\partial_{\mu} u \cdot \partial_0 u + bu \cdot \partial_0 u - (\partial_i g^{0i})\partial_0 u \cdot \partial_0 u)\,\mathrm{d}x$$

$$\leq C \cdot E + C \cdot E^{\frac{1}{2}}||f||_{L^2}$$

όπου οι παραγοντικές ολοκληρώσεις ως προς τις χωρικές παραγώγους έχουν νόημα λόγω της υπόθεσης ότι η u έχει συμπαγή φορέα ως προς τις χωρικές συντεταγμένες. . Προσθέτοντας κατά μέλη, λοιπόν, έχουμε ότι:

$$\frac{d}{dt}E \leq CE + CE^{\frac{1}{2}}||f||_{L^2}$$

Θέτοντας $E_{\varepsilon} = E + \varepsilon$, ε>0 αρκούντως μικρό (ώστε να εξασφαλίσουμε ότι $E_{\varepsilon} > 0$ και διαιρώντας με $E_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}$ έχουμε ότι

$$\frac{d}{dt}(E_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}) \leq CE_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} + C||f||_{L^2}$$

οπότε ολοκληρώνοντας, εφαρμόζοντας το λήμμα του Gronwall και παίρνοντας το όρο $\varepsilon \to 0$ έχουμε ότι:

$$E^{\frac{1}{2}}(t) \leq \big(E^{\frac{1}{2}}(0) + C\int_0^t ||f(s,\cdot)||_{L^2}\,\mathrm{d}s\big)e^{Ct}$$

Ανισότητες αυτής της μορφής, όπως θα δούμε στην συνέχεια, διαδραματίζουν θεμελιώδη ρόλο στην μελέτη ακόμη και των μη γραμμικών εξισώσεων, καθώς επιτρέπουν τον έλεγχο της εξέλιξης της λύσης στον χρόνο.

Επιπλέον, αντιμεταθέτοντας την κυματική εξίσωση με χωρικές και χρονικές παραγώγους, μπορούμε να πάρουμε αντίστοιχες εκτιμήσεις και για ενέργειες υψηλότερης τάξης. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε k μη αρνητικό ακέραιο μπορούμε να ορίσουμε

$$E_k(t) = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\mathbb{R}^n} \big(- g^{00}|\partial_0 \partial^a u|^2 + g^{ij}\partial_i \partial^a u \cdot \partial_j \partial^a u + |\partial^a u|^2 \big)(t,\cdot)\, \mathrm{d}x$$

όπου για έναν πολυδείκτη $a = (a_0, a_1, ...a_n)$ συμβολίζουμε $\partial^a = \partial_0^{a_0} \cdots \partial_n^{a_n}$.

Με αυτόν τον συμβολισμό, υποθέτοντας ότι οι αντίστοιχες παράγωγοι των συντελεστών υπάρχουν και ειναι φραγμένοι στον $\mathbb{R}^{n+1}$ έχουμε ότι για κάθε πολυδεικτη α με $|a| \leq k$ ισχύει:

$$L\partial^a u = \partial^a f + [L, \partial^a]u$$

όπου $L = g^{\mu\nu}\partial_\mu \partial_\nu + a^\mu \partial_\mu + b$.

Επειδή, λοιπόν, ότι $[L, \partial^a] = -\sum_{|i|=1}^{|a|}((\partial^i g^{\mu\nu})\partial_\mu\partial_\nu + (\partial^i a^\mu)\partial_\mu + \partial^i b)\partial^{a-i}$ (όπου i: πολυδεικτης) και επομένως

$$||[L, \partial^a]u(t,\cdot)||_{L^2} \leq C \cdot E_k^{\frac{1}{2}}$$

επαναλαμβάνοντας ακριβώς τα προηγούμενα βήματα προκύπτει ότι:

$$E_k^{\frac{1}{2}}(t) \leq \big(E_k^{\frac{1}{2}}(0) + C\int_0^t ||f(s,\cdot)||_{H^k}\, \mathrm{d}s\big)e^{Ct}$$

Δεδομένου ότι η συνάρτηση g παίρνει τιμές στον χώρο $C_{n,a}$ για κάποια θετική τριάδα $a = (a_1, a_2, a_3)$, η τελευταία σχέση είναι ισοδύναμη με την:

$$||u(t,\cdot)||_{H^{k+1}} + ||\partial_0 u(t,\cdot)||_{H^k} \leq \big(||u(0,\cdot)||_{H^{k+1}} + ||\partial_0 u(0,\cdot)||_{H^k} + C\int_0^t ||f(s,\cdot)||_{H^k}\, \mathrm{d}s\big)e^{Ct}$$

Μπορούμε με παρόμοιο τρόπο να δείξουμε ότι η πιο πάνω ανισότητα μπορεί να επεκταθεί και στην περίπτωση που ο k είναι αρνητικός ακέραιος, θεωρώντας απλώς την συνάρτηση $U = (Id - \Delta)^{-k}u$ (όπου ο τελεστής Δ περιμλαμβάνει μόνο χωρικές παραγωγίσεις) και αντιμεταθέτοντας τον τελεστή L με τον $(Id - \Delta)^{-k}$, και χρησιμοποιώντας την εξίσωση για την εκτίμηση των χρονικών παραγώγων δεύτερης τάξης που προκύπτουν εν συνεχεία.

Χρησιμοποιώντας τις προκείμενες ανισότητες, λοιπόν, είμαστε σε θέση να αποδείξουμε την ύπαρξη μοναδικής λύσης του προβλήματος αρχικων τιμών:

> Θεώρημα: Αν οι συντελεστές της κυματικής εξίσωσης είναι C^∞ συναρτήσεις και επιπλέον $\forall T > 0, \exists a = (a_1, a_2, a_3) > 0$ ώστε $g \in$

$C^\infty([-T,T]\times\mathbb{R}^n, C_{n,a})$, τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών με αρχικές συνθήκες $u_0, u_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$ έχει μοναδική λύση $u \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^N)$. Για την u ισχύει επιπλέον ότι $\forall I \subset \mathbb{R}$ συμπαγές $\exists K_I \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές ώστε u(t,x)=0 $\forall t \in I, x \in (\mathbb{R}^n \diagdown K_I)$.

Παρατήρηση: Δεδομένου ότι οι ανισότητες ενέργειας μας επιτρέπουν να ελέγξουμε τοπικά την H^{k+1}- νόρμα της u και την H^k νόρμα της $\partial_0 u$ με την βοήθεια της H^k- νόρμας της f, το πιο πάνω θεώρημα μπορεί (με την βοήθεια διαμερίσεων της μονάδας και επιχειρημάτων πυκνότητας) να επεκταθεί και στην περίπτωση ασθενέστερων συνθηκών στις αρχικές συνθήκες και τους συντελεστές.

Απόδειξη:

Μοναδικότητα:

Θα αποδείξουμε πως στην περίπτωση όπου f=0 και οι αρχικές συνθήκες ειναι οι μηδενικές, η μόνη C^2 λύση του προβλήματος είναι η u=0. Δεδομένης της γραμμικότητας της εξίσωσης, δοθέντων δύο λύσεων u_1, u_2 που ικανοποιούν το ίδιο πρόβλημα αρχικών τιμών μπορούμε αφαιρώντας κατά μέλη να αναχθούμε σε αυτήν την απλούστερη περιπτωση. Παρότι η απόδειξη του ισχυρισμού αυτού μπορεί να γίνει και με απλούστερα μέσα, επιλέγουμε τον εν λόγω τρόπο καθώς μπορεί να γενικευτει εύκολα και στην περίπτωση των λορέντζιων πολλαπλοτήτων

Πιο συγκεκριμένα, θα δείξουμε ότι $\forall K \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό και φραγμένο στο οποίο ισχύει ότι $u|_K = \partial_0 u|_K = 0$ θα ισχύει και ότι u=0 στο $D(K)$, όπου το D(K) αποτελείται από τα $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ εκείνα για τα οποία κάθε μεγιστική καμπύλη γ με $\gamma(0) = x$ για την οποία ισχύει ότι $g^{\mu\nu}\dot{\gamma}_\mu\dot{\gamma}_\nu < 0$ τέμνει το K. Υποθέτουμε, δηλαδή, ότι ο $\mathbb{R}^{n+1}$ γίνεται μια Λορέντζια πολλαπλότητα με την μετρική g, και επομένως στο εξής όλοι οι συμβολισμοί μας θα είναι σύμφωνοι με αυτό.

Θεωρώντας τον τανυστή $T_{\mu\nu} = \partial_\mu u \cdot \partial_\nu u - \frac{1}{2}(g^{\kappa\lambda}\partial_\kappa u \cdot \partial_\lambda u) g_{\mu\nu}$ και, θέτοντας $N = \frac{\partial}{\partial_0}$ (και επομένως το N ειναι ένα χρονόμορφο διανυσματικό πεδίο στον $(\mathbb{R}^{n+1}, g)$), ορίζουμε την 1-μορφή $J_\mu = \mathrm{T}_{\mu\nu}N^\nu$, και θέτουμε $V^\mu = e^{kx^0}J^\mu$. Με αυτόν τον συμβολισμό, οι πράξεις εύκολα μας δίνουν ότι:

$$div(V) = \nabla_\mu V^\mu = e^{kx^0}(\nabla_\mu J^\mu + kT_{\mu\nu}N^\mu N^\nu)$$

Δεδομένου ότι το N είναι χρονόμορφο και $\forall T > 0$ περιορισμένη στο $D(K) \cap \{-T < x^0 < T\}$ η g ανήκει σε κάποιον χώρο $C_{n,a}$, οπότε και προκύπτει ότι $T_{\mu\nu}N^\mu N^\nu \geq C|\nabla u|^2$, για αρκούντως μεγάλο k ισχύει $div(V) > e^{kx^0}|\nabla u|^2$

Συνεπώς, σύμφωνα με τον τύπο του Green, αν S είναι μια κατά τμήματα C^1 χωρόμορφη υπερεπιφάνεια με μελλοντικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσματικό πεδίο n η οποία βρισκεται εξ' ολοκλήρου στο $D(K) \cap \{-T < x^0 < T\} \cap J^+(K)$ και για την οποία ισχύει ότι $\partial S \subset \bar{K}$ θα έχουμε ότι:

$$\int_\Omega div(V) = \int_{K'} V^\mu N'_\mu - \int_S V^\mu n_\mu$$

όπου K' το υποσύνολο του K που περικλείεται από την ∂S, Ω: το ανοιχτό σύνολο που περικλείεται από την S και το K' και N': ένα μελλοντικό κάθετο διανυσματικό πεδίο του $\mathbb{R}^n$.

Ο όρος του αριστερού μέλους είναι μη αρνητκός, σύμφωνα με τους προηγούμενους υπολογισμούς. Στο δεξί μέλος, ο πρώτος όρος είναι 0 (λόγω των αρχικών συνθηκών), ενώ ο δεύτερος είναι μη θετικός (όπως προκύπτει εύκολα με υπολογισμούς). Κατά συνέπεια, θα πρέπει και τα δύο μέλη να είναι ταυτοτικά 0, και επομένως η ∇u θα πρέπει να ειναι ταυτοτικά 0 στο Ω και άρα (εφ' όσον $u = 0$ στο K') u=0 στο Ω. Επειδή (όπως μπορεί εύκολα να δειχθεί) κάθε σημείο στο εσωτερικό του $D(K) \cap J^+(K)$ ανήκει στο αντίστοιχο Ω για κάποια υπερεπιφάνεια S τέτοιας μορφής (μια και, λόγω των υποθέσεων για την g, ο $\mathbb{R}^n$ ειναι μια υπερεπιφάνεια Cauchy του $(\mathbb{R}^{n+1}, g)$ και επομένως το K είναι μια υπερεπιφάνεια Cauchy του $D(K)$, και έτσι οι υπερεπιφάνειες S μπορούν να οριστούν ως οι ισουψείς μιας κατάλληλης συνάρτησης χρόνου στο $D(K)$), συμπεραίνουμε ότι u=0 στο $D(K) \cap J^+(K)$. Με όμοια επιχειρήματα καταλήγουμε ότι u=0 και στο $D(K) \cap J^-(K)$, και επομένως u=0 στο D(K).

Επιπλέον, με τον τρόπο αυτό βλέπουμε πως αν $u_0, u_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$, δηλαδή αν $\exists K \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές ώστε $u_0 = u_1 = 0$ στο $\mathbb{R}^n \setminus K$, τότε u=0 στο $D(\mathbb{R}^n \setminus K)$.

Ύπαρξη:

Έστω T>0. Θα ασχοληθούμε μόνο με την περίπτωση των μηδενικών αρχικών συνθηκών. Η γενικότερη περίπτωση μπορεί να αντιμετωπιστεί λύνοντας την αντίστοιχη εξίσωση για την συνάρτηση $\tilde{u}(t,x) = u(t,x) - \Psi(t,x) \cdot u_0(x)$, όπου $\Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^{N\times N})$ με Ψ=0 για $|t| \geq T+1$ και Ψ(0,x) $= Id$, $(\partial_0 \Psi(0,x))u_0(x) = u_1(x)$.

Κατ' αρχάς, θα δείξουμε ότι $\forall k \geq 0$ υπάρχει μια συνάρτηση $\tilde{U} \in L^\infty([0,T], H^{k+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)) \cap W^{1,\infty}((0,T), H^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N))$ (ο χώρος αυτός δεν είναι άλλος από την πληρότητα του $C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^N)$ με την νόρμα $||w(\cdot)|| = esssup_{x^0 \in [0,T]} |(||w(x^0, \cdot)||_{H^{k+1}})| + esssup_{x^0 \in [0,T]} |(||\partial_0 w(x^0, \cdot)||_{H^k})|$) για την οποία να ισχύει ότι $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^N)$ η οποία είναι ταυτοτικά 0 για $x^0 > T$, έχουμε ότι:

$$\int_0^T < \tilde{U}(t,\cdot), L^* \varphi(t,\cdot) >_{L^2} \, dt = \int_0^T < f(t,\cdot), \varphi(t,\cdot) >_{L^2} \, dt$$

όπου $L = g^{\mu\nu}\partial_\mu \partial_\nu + a^\mu \partial_\mu + b$ και $L^* = \partial_\mu \partial_\nu (g^{\mu\nu} \cdot) - \partial_\mu (a^\mu \cdot) + b$ ο τυπικός συζυγής του.

Για να δείξουμε αυτό εργαζόμαστε ως εξής: Κατ' αρχάς, παρατηρούμε (εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας για τις παραγωγίσεις) ότι ο τελεστής L^* είναι ίδιου τύπου με τον L, και επομένως ισχύουν και για αυτόν ενεργειακές ανισότητες όπως αυτές που έχουμε δείξει. Κατά συνέπεια, $\forall k \geq 0 \; \exists C > 0$ ώστε $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^N)$ η οποία είναι ταυτοτικά 0 για $x^0 > T$, να έχουμε ότι:

$$||\varphi(t,\cdot)||_{H^{-k+1}} + ||\partial_0 \varphi(t,\cdot)||_{H^{-k}} \leq C \int_t^T ||L^* \varphi(s,\cdot)||_{H^{-k}} \, ds$$

Κατά συνέπεια, αν ορίσουμε το γραμμικό συναρτησιακό F το οποίο δέχεται ως όρισμα συναρτήσεις $L^*\varphi$ όπου η φ είναι όπως πριν και περιγράφεται από την σχέση:

$$F(L^*\varphi) = \int_0^T < f(t,\cdot), \varphi(t,\cdot) >_{L^2} \, dt$$

τότε από την προηγούμενη ανισότητα ενέργειας έπεται ότι:

$$|F(L^*\varphi)| \leq (sup_{t\in[0,T]}||f(t,\cdot)||_{H^k})\cdot \int_0^T ||L^*\varphi(s,\cdot)||_{H^{-k-1}}\, ds = C_f ||L^*\varphi||_{L^1H^{-k-1}}$$

Αν, λοιπόν, συμβολίσουμε με X τον υπόχωρο του $L^1\big([0,T],H^{-k-1}\big)$ που παράγεται από τις συναρτήσεις της μορφής $L^*\varphi$ (όπου η φ είναι όπως πριν), τότε το γραμμικό συναρτησιακό F ορισμένο σε αυτόν είναι φραγμένο. Σύμφωνα με το θεώρημα Hahn Banach, λοιπόν, μπορούμε να επεκτείνουμε το συναρτησιακό αυτό σε όλο τον $L^1\big([0,T],H^{-k-1}\big)$ με την ίδια νόρμα - την επέκταση αυτή, βέβαια, την κάνουμε για βοηθητικούς κυρίως λόγους, μια και στην συνέχεια θα τροποποιήσουμε ξανά το συναρτησιακό. Προς το παρόν θα συμβολίζουμε ένα τέτοιο συναρτησιακό με $\tilde{F}$.

Επιπλέον, ισχύει ότι για κάθε συνάρτηση φ όπως πριν:

$$|\tilde{F}(\partial_0 L^*\varphi) = |\tilde{F}(L^*(\partial_0\varphi)) - \tilde{F}([L^*,\partial_0]\varphi)| \leq |\tilde{F}(L^*(\partial_0\varphi))| + |\tilde{F}([L^*,\partial_0]\varphi)|$$

Για τον πρώτο όρο, λόγω του ορισμού του συναρτησιακού F για όρους της μορφής $L^*\psi$ και των ανισοτήτων ενέργειας ισχύει ότι φράσσεται ως εξής:

$$|\tilde{F}(L^*(\partial_0\varphi))| = |\int_0^T < f(t,\cdot), \partial_0\varphi(t,\cdot) >_{L^2}\ dt| \leq C_f \int_0^T ||\partial_0\varphi(t,\cdot)||_{H^{-k-1}}\, dt| \leq$$

$$\leq C_f \int_0^T ||L^*\varphi(t,\cdot)||_{H^{-k-1}}\, dt = C||L^*\varphi||_{L^1H^{-k-1}}$$

Για να επιτύχουμε ένα αντίστοιχο φράξιμο του δεύτερου όρου, ορίζουμε τον τελεστή $\hat{L} = \frac{1}{g^{00}}L^*$, για τον οποίο ισχύει ότι ο συντελεστής του ∂_0^2 είναι το 1. Σε αυτήν την περίπτωση, έχουμε ότι $\forall l \in \mathbb{Z}$: $||(\hat{L}-\partial_0^2)\varphi(t,\cdot)||_{H^l} \leq C(||\varphi||_{H^{l+2}} + ||\partial_0\varphi||_{H^{l+1}})$ και $||\hat{L}\varphi|| \leq C||L^*\varphi||$, επομένως:

$$||[L^*,\partial_0]\varphi(t,\cdot)||_{H^l} \leq C(||\partial_0^2\varphi(\mathrm{t},\cdot)||_{H^l} + ||\partial_0\varphi(\mathrm{t},\cdot)||_{H^{l+1}} + ||\varphi(\mathrm{t},\cdot)||_{H^{l+2}}) \leq$$

$$\leq C(||L^*\varphi(\mathrm{t},\cdot)||_{H^{l+1}} + ||\partial_0\varphi(\mathrm{t},\cdot)||_{H^{l+1}} + ||\varphi(\mathrm{t},\cdot)||_{H^{l+2}}) \leq$$

$$\leq C(||L^*\varphi(t,\cdot)||_{H^{l+1}} + \int_0^T ||L^*\varphi(s,\cdot)||_{H^{l+1}}\, ds)$$

όπου η τελευταία ανισότητα προέκυψε από την αντίστοιχη ανισότητα ενέργειας. Κατά συνέπεια, για l=-k-1, ο δεύτερος όρος της ανισότητας .. μπορεί να εκτιμηθεί ως:

$$|\tilde{F}([L^*,\partial_0]\varphi)| \leq C_{\tilde{F}} \int_0^T ||[L^*,\partial_0]\varphi(t,\cdot)||_{H^{-k-1}}\, \mathrm{d}t \leq C||L^*\varphi||_{L^1H^{-k}}$$

Ως εκ τούτου, καταλήξαμε ότι αν συμβολίσουμε με Y τον υπόχωρο του $C_0^\infty([0,T)\times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$ που παράγεται από συναρτήσεις της μορφής $L^*\varphi$ (φ: όπως προηγουμένως) (θεωρούμε ότι τα στοιχεία του χώρου αυτού δεν μηδενίζονται απαραίτητα στο "κλειστό" άκρο $\{0\}\times\mathbb{R}^n$) και με X_2 την εικόνα του υπόχωρου αυτού μέσω της γραμμικής απεικόνισης $\partial_0 : C_0^\infty([0,T)\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^N) \to C_0^\infty([0,T)\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^N)$ τότε ο τελεστής $\tilde{F}$ (περιορισμένος στον X, όπου ταυτίζεται με το αρχικό μας συναρτησιακό F) ικανοποιεί τις εξής σχέσεις:

- $|\tilde{F}(y)| \le C_f ||y||_{L^1 H^{-k-1}} \ \forall y \in \mathrm{X}$
- $|\tilde{F}(\partial_0 x)| \le C'_f ||x||_{L^1 H^{-k}} \ \forall x \in X_2 \cap (\partial_0^{-1} X)$

Η τελευταία ιδιότητα μπορεί να γραφεί και ισοδύναμα ως $|\tilde{F}(y)| \le C'_f h(y) \, \forall y \in X$, όπου το θετικό υπογραμμικό συναρτησιακό h ορίζεται ως $h(y) = \inf_{x\in\partial_0^{-1}(\{y\})}\{||x||_{L^1((0,T),H^{-k})}\}$ και φυσικά έχουμε κάνει την σύμβαση $inf\{\emptyset\} = +\infty$. Κατά συνέπεια,από το θεώρημα Hahn Banach (όπου πλέον τον ρόλο του υπογραμμικού συναρτησιακού θα παίζει το $\hat{f}(y) = min\{||y||_{L^1H^{-k-1}}, \inf_{x\in A^{-1}(\{y\})}\{||x||_{L^1H^{-k}}\}\}$, οπου $A = \partial_0 : C_0^\infty \to C_0^\infty \subset L^1H^{-k-1}$) ο περιορισμός της $\tilde{F}$ στον X (ο οποίος, φυσικά, ταυτίζεται με το αρχικό μας συναρτησιακό F) μπορεί να επεκταθεί σε ολόκληρο τον χώρο $L^1([0,T],H^{-k-1})$ ώστε να συνεχίζει να κυριαρχείται από το υπογραμμικό συναρτησιακό $\hat{f}$, ας ονομάσουμε την επέκταση αυτή U. Μπορούμε, λοιπόν, να θεωρούμε ότι $U \in L^\infty([0,T],H^{k+1})$. Λόγω του ότι η επέκταση αυτή θα συνεχίζει να κυριαρχείται από το συναρτησιακό $\hat{f}$ που επιλέξαμε, θα έχουμε ότι $\exists C > 0 : \forall \varphi \in C_0^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^N)$: $|\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} < U(t,\cdot), \partial_0\varphi(t,\cdot) > dxdt| \le C||\varphi||_{L^1H^{-k}}$. Ως εκ τούτου, η U έχει ασθενή παράγωγο στον $\Big(L^1((0,T),H^{-k})\Big)^* = L^\infty((0,T),H^k)$, γεγονός από το οποίο έπεται ότι $U \in W^{1,\infty}((0,T),H^k)$. Ακόμη, λόγω του υπογραμμικού συναρτησιακού που χρησιμοποιήσαμε, η προηγούμενη σχέση θα πρέπει να ικανοποιείται και από όλα τα στοιχεία του $C_0^\infty([0,T)\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^N)$ (και από στοιχεία, δηλαδή, που δεν μηδενίζονται στο "κλειστό" άκρο $\{0\}\times\mathbb{R}^n$). Για το λόγο αυτό, το ίχνος της U για $x^0 = 0$ θα πρέπει να μηδενίζεται: $U|_{\{x^0=0\}} = 0$.

Το U που έχουμε κατασκευάσει μέχρι στιγμής δεν είναι απαραίτητα ασθενής λύση της εξίσωσής μας. Αν όμως, αρχικά, υποθέσουμε ότι η f μηδενίζεται για $x^0 < 0$, τότε η συνάρτηση U μπορεί να επεκταθεί τεριμμένα (δηλαδή ωστε $U = 0$ για $x^0 < 0$) ωστε να ανήκει στον $L^\infty\big((-\infty,T],H^{k+1}\big)\cap W^{1,\infty}((-\infty,T),H^k)$ (το ότι η επεκτεταμένη συνάρτηση συνεχίζει να έχει ασθενή χρονική παράγωγο έπεται με την ίδια δικαιολογία με την οποία καταλήξαμε στο συμπέρασμα για το ίχνος της U). Σε αυτήν την περίπτωση, η U είναι μια ασθενής λύση της εξίσωσής μας (με μηδενικές αρχικές τιμές) στο $(-\infty,T]\times\mathbb{R}^{n+1}$, μια και ικανοποιεί την σχέση:

$$\int_{-\infty}^T \int_{\mathbb{R}^{n+1}} LU\cdot\varphi\,dxdt = \int_{-\infty}^T \int_{\mathbb{R}^{n+1}} f\cdot\varphi\,dxdt\,\forall\varphi\in C_0^\infty((-\infty,T)\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^N)$$

Άμεσα προκύπτει (υπολογίζοντας το αντίστοιχο ολοκλήρωμα της L^2 νόρμας) ότι κάθε στοιχείο του $\big(L^\infty\big((-\infty,T],H^{k+1}\big)\cap W^{1,\infty}((-\infty,T],H^k\big)$ είναι και στοιχείο του $L^2_{loc}\big(\mathbb{R}^{n+1},\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N\big)$ το οποίο έχει k ασθενείς παραγώγους στις χωρικές κατευθύνσεις και τουλάχιστον μια ασθενή παράγωγο στην χρονική διεύθυνση. Δεδομένου ότι η U, όμως, είναι ασθενής λύση της εξίσωσης μπορούμε να δείξουμε επαγωγικά ότι έχει και k+1 ασθενείς παραγώγους στην χρονική διεύθυνση, καθώς χρησιμοποιώντας την εξίσωση μπορούμε να "αντικαταστήσουμε" κάθε παράγωγο $\partial_0^2 U$ της U με τους υπόλοιπους όρους της εξίσωσης, που περιλαμβάνουν μόνο χωρικές παραγωγίσεις και χρονικές παραγωγίσεις πρώτης τάξης. Επιπλέον, οι λύσεις που παίρνουμε με αυτόν τον τρόπο για k αρκούντως μέγαλο είναι, λόγω των ανισοτήτων Sobolev, τάξης τουλάχιστον C^2 και συνακόλουθα από το θεώρημα μοναδικότητας θα πρέπει να ταυτιζονται. Ως εκ τούτου, η λύση μας αυτή θα έχει άπειρες ασθενείς παραγώγους και συνεπώς θα είναι τάξης C^∞.

Η περίπτωση όπου η f δεν μηδενίζεται ταυτοτικά για $x^0 < 0$ αντιμετωπίζεται θέτοντας $f_\varepsilon(x^0, x^1, ..x^n) = h(\frac{x^0}{\varepsilon})f(x^0, x^1, ...x^n)$, όπου $0 \leq h(t) \leq 1$ και h=1 για t>1, h=0 για t<0. Λύνοντας το νέο πρόβλημα αρχικών τιμών, με λύση U_ε και παίρνοντας το όριο $\varepsilon \to 0^+$ καταλήγουμε σε μια λύση του αρχικού προβλήματος. Το ότι το όριο αυτό υπάρχει και μας δίνει μια λύση προκύπτει από την ανισότητα για τις ενέργειες αρκούντως υψηλής τάξης

$$||U_{\varepsilon_1}(t,\cdot) - U_{\varepsilon_2}(t,\cdot)||_{H^{k+1}} + ||\partial_0 U_{\varepsilon_1}(t,\cdot) - \partial_0 U_{\varepsilon_2}(t,\cdot)||_{H^k} \leq$$

$$\leq C\int_0^t |h(\frac{s}{\varepsilon_1}) - h(\frac{s}{\varepsilon_2})|||f(s,\cdot)||_k \, \mathrm{d}s$$

□

Παρ' ότι το πιο πάνω θεώρημα είναι διατυπωμένο για την περιπτωση του $\mathbb{R}^{n+1}$, εύκολα μπορεί να γενικευτεί και για την περίπτωση καθολικά Λορέντζιων πολλαπλοτήτων, στις οποίες η κυματική εξίσωση παίρνει την μορφή $\Box_g u + Xu + bu = f$ (όπου X είναι ένα εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο), και οι αρχικές συνθήκες ορίζονται ως $u|_\Sigma = u_0$ και $Nu|_\Sigma = u_1$, όπου Σ μια υπερεπιφάνεια Cauchy και N ένα μοναδιαίο κάθετο σε αυτήν. Για την γενίκευση αυτή είναι απαραίτητο να δουλέψει κανείς σε αρχικά σε σε αρκούντως μικρές κυρτές περιοχές των σημείων της Σ, όπου τα προηγούμενα αποτελέσματα επεκτείνονται άμεσα, και στην συνέχεια να επεκταθεί σε όλη την M με επιχειρήματα συνεκτικότητας. Επιπλέον, δεδομένου ότι σε αρκούντως μικρές περιοχές κάθε δέσμη μπορεί (εξ' ορισμού) να θεωρηθεί τετριμμένη, με τον ίδιο τρόπο το θεώρημα αυτό επεκτείνεται και στην περίπτωση μιας γραμμικής τανυστικής εξίσωσης.

A.2 Μη γραμμικές κυματικές εξίσωσεις

Στην υποπαράγραφο αυτή θα μελετήσουμε το πως οι τεχνικές που παρουσιάσαμε για την επίλυση ενός προβλήματος αρχικών τιμών για μια γραμμική κυματική εξίσωση μπορουν να χρησιμοποιηθούν για την εξαγωγή αντίστοιχων συμπερασμάτων για την περιπτωση των μη γραμμικών εξισώσεων.

Για το σκοπό αυτό, απαραίτητη είναι κατ' αρχάς η διατύπωση των εξής ορισμών:

- Μία C^k συνάρτηση $g : \mathbb{R}^{nN+2N+n+1} \to C_n$ θα καλείται C^k N,n - συμβατή μετρική αν:
  - Για κάθε πολυδείκτη $a = (a_1, ...a_{nN+2N+n+1})$ με $|a| \leq k$ και συμπαγές διάστημα $I \subset \mathbb{R}$ υπάρχει συνεχής και αύξουσα συνάρτηση $h_{I,a} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε $|(\partial^a g_{\mu\nu})(t, x, v)| \leq h_{I,a}(|v|)$ για κάθε $t \in I, x \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^{nN+2N}$ και κάθε δείκτη μ,ν=0,...n.
  - Για κάθε συμπαγές διάστημα $I \subset \mathbb{R}$ και για κάθε $(t, x, v) \in I \times \mathbb{R}^{nN+2N+n}$ υπάρχει θετική τριάδα $a = (a_1, a_2, a_3)$ ώστε $g(t, x, v) \in C_{n,a}$
- Μια συνάρτηση $h : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^m$ θα λέμε ότι έχει τοπικά συμπαγή χωρικό φορέα αν $\forall I \subset \mathbb{R}$ συμπαγές $\exists K_I \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές ώστε h(t,x)=0 $\forall t \in I, x \in (\mathbb{R}^n \setminus K_I)$.
- Μία C^k συνάρτηση $f : \mathbb{R}^{nN+2N+n+1} \to \mathbb{R}^N$ θα καλείται C^k N,n - συμβατή μη γραμμικότητα αν:
  - Για κάθε πολυδείκτη $a = (a_1, ...a_{nN+2N+n+1})$ με $|a| \leq k$ και συμπαγές διάστημα $I \subset \mathbb{R}$ υπάρχει συνεχής και αύξουσα συνάρτηση $h_{I,a} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε $|(\partial^a f)(t, x, v)| \leq h_{I,a}(|v|)$ για κάθε $t \in I, x \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^{nN+2N}$.
  - Η συνάρτηση f(t,x,0) έχει τοπικά συμπαγή χωρικό φορέα
- Στο εξής θα συμβολίζουμε με k κάθε απεικόνιση που δέχεται ως όρισμα μια C^∞ N,n - συμβατή μετρική g, μια C^∞ N,n - συμβατή μη γραμμικότητα f, και ένα συμπαγές διάστημα $I \subset \mathbb{R}$ και επιστρέφει μια συνεχή μη αρνητκή πραγματική συνάρτηση ώστε $I_1 \subseteq I_2 \Rightarrow k_{I_1} \leq k_{I_2}$. Επιπλέον, θα συμβολίζουμε με C κάθε απεικόνιση που δέχεται ως όρισμα μια C^∞ N,n - συμβατή μετρική, μια C^∞ N,n - συμβατή μη γραμμικότητα, και ένα συμπαγές διάστημα $I \subset \mathbb{R}$ και επιστρέφει μη αρνητική σταθερά ώστε $I_1 \subseteq I_2 \Rightarrow C_{I_1} \leq C_{I_2}$. Δεδομένου ότι τα ορίσματα των k, C και το ακριβές πεδίο ορισμού μιας τέτοιας συνάρτησης $k_I[f, g](\cdot)$ θα είναι ξεκάθαρα σε κάθε περίπτωση, θα χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο ακόμα και για διαφορετικές απεικονίσεις ώστε να παραμείνουν οι διάφορες παραστάσεις όσο το δυνατόν απλούστερες.

Εκτός αυτού, για μια N,n - συμβατή μετρική g θα γράφουμε $g[u](t, x)$ ή $g_u(t, x)$ και θα εννοούμε $g(t, x, u, \partial_0 u, ...\partial_n u)$. Όμοια και για μια N,n - συμβατή μη γραμμικότητα f.

Έτσι, λοιπόν, με τους συμβολισμούς αυτούς τα προβλήματα αρχικών τιμών με τα οποία θα ασχοληθούμε στην παράγραφο αυτή θα είναι της μορφής:

$$\begin{cases} g_u^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu u = f_u \\ u(0, \cdot) = u_0 \\ \partial_0 u(0, \cdot) = u_1 \end{cases}$$

Ένα άμεσο συμπέρασμα που μπορεί να εξάγει κανείς αφορά στην μοναδικότητα:

Θεώρημα: Αν η g είναι μια C^1 N,n - συμβατή μετρική και η f είναι μια C^1 N,n - συμβατή μη γραμμικότητα, τότε δύο C^2 λύσεις του προβλήματος αρχικών τιμών στο $(-T,T)\times\mathbb{R}^n$ που έχουν τις ίδιες αρχικές συνθήκες ταυτίζονται σε όλο το $(-T,T)\times\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη:

Παρατηρούμε ότι επειδή οι g, f ειναι C^1 απεικονίσεις, χρησιμοποιώντας το θεώρημα μέσης τιμής έχουμε ότι $g_u - g_v = g_1\cdot(u-v) + g_{2,\lambda}\partial_\lambda(u-v)$ όπου οι συντελεστές είναι συνεχείς συναρτήσεις των $t,x,u,v,\nabla u,\nabla v$, και όμοια και για το $f_u - f_v$. Θέτωντας, λοιπόν, y=u-v και αφαιρώντας κατά μέλη, παρατηρούμε ότι η y ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\begin{cases} g_u^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu y + \big(g_{2,\lambda}^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu v - f_{2,\lambda}\big)\partial_\lambda y + \big(g_1^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu v - f_1\big)y = 0 \\ y(0,\cdot) = 0 \\ \partial_0 y(0,\cdot) = 0 \end{cases}$$

Θεωρώντας, λοιπόν, τα u, v φιξαρισμένα, η παραπάνω εξίσωση είναι γραμμική ως προς y και, λόγω των υποθέσεων για τους συντελεστές, σύμφωνα με τα αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου η μόνη λύση του προβλήματο αυτού είναι η μηδενική. Συνεπώς $y=0 \Leftrightarrow u=v$ στο $(-T,T)\times\mathbb{R}^n$. $\square$

Για να μπορέσουμε να αποδείξουμε την ύπαρξη λύσεων στο πρόβλημα αρχικών τιμών, είναι απαραίτητο να προσφύγουμε σε ανισότητες ενέργειας. Για τον σκοπό αυτό εισάγουμε τους εξής συμβολισμούς (όλα τα σύμβολα γράφονται με την προυπόθεση ότι οι συναρτήσεις ειναι τέτοιες ώστε να έχουν νόημα):

- $m[u](t) = \sum_{|a|+j\le 2}\big(\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(|\partial^a\partial_0^j u|(t,x))\big)$
- $M_k[u](t) = ||u(t,\cdot)||_{H^{k+1}} + ||\partial_0 u(t,\cdot)||_{H^k}$
- $E_k[v,u](t) = \sum_{|\alpha|\le k}\int_{\mathbb{R}^n}\big(-g_v^{00}|\partial_0\partial^a u|^2 + g_v^{ij}\partial_i\partial^a u\cdot\partial_j\partial^a u + |\partial^a u|^2\big)(t,\cdot)\,\mathrm{d}x$

Τότε, αν η v έχει τοπικά συμπαγή χωρικό φορέα, η g είναι μια C^∞ N,n - συμβατή μετρική και η f είναι μια C^∞ N,n - συμβατή μη γραμμικότητα και η u είναι λύση του:

$$\begin{cases} g_v^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu u = f_v \\ u(0,\cdot) = u_0 \\ \partial_0 u(0,\cdot) = u_1 \end{cases}$$

όπου οι u_0, u_1 έχουν συμπαγή φορέα, ισχύει ότι $\forall T>0$: Αν $I=[0,T]$:

$$\partial_0 E_k[v,u] \le C_I + k_I(m[v],m[u])\big(M_k^2[v] + E_k[v,u]\big)$$

$$M_k[u](t) \le C_I M_k[u](0) + \int_0^t \big(C_I + k_I(m[v]\{(1+m[u])M_k[v] + M_k[u]\}\big)\,\mathrm{d}s$$

Οι σχέσεις αυτές αποδεικνύονται όπως και στην γραμμική περιπτωση και για αυτό η απόδειξή τους θα παραλειφθεί- έχοντας κατά νου ότι $\forall t\in I$ $\frac{1}{C_I}E_k[v,w](t) \le$

$M_k^2[w](t) \leq C_I E_k[v,w](t)$, παραγωγίζουμε την ενέργεια αντιμεταθέτοντας κατάλληλα με τις χωρικές παραγώγους και φτάνουμε στο ζητούμενο χρησιμοποιώντας μια ανισότητα τύπου Gagliardo - Nirenberg.

Επιπλέον, με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι κάτω από τις ίδιες πρυποθέσεις, αν

$$\begin{cases} g_{v_1}^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu u_1 = f_{v_1} \\ u_1(0,\cdot) = u_{1,0} \\ \partial_0 u_1(0,\cdot) = u_{1,1} \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} g_{v_2}^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu u_2 = f_{v_2} \\ u_2(0,\cdot) = u_{2,0} \\ \partial_0 u_2,(0,\cdot) = u_{2,1} \end{cases}$$

τότε ισχύει (όπου $M = M_0$):

$$M[u_2 - u_1](t) \leq C_I e^{\int_0^t k_I(m[v_2])\,\mathrm{d}s} \cdot \big(M[u_2 - u_1](0) + \int_0^t k_I(m[u_1], m[v_2], m[v_2]) M[v_1 - v_2]\, ds\big)$$

Χρησιμοποιώντας, λοιπόν, τις σχέσεις αυτές, είμαστε σε θέση να αποδείξουμε το εξής:

> Θεώρημα: Έστω g μια C^∞ N,n - συμβατή μετρική και f μια C^∞ N,n - συμβατή μη γραμμικότητα. Έστω επιπλέον $k > \frac{n}{2} + 1$, $u_0 \in H^{k+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N), u_1 \in H^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$. Τότε για κάθε συμπαγές διάστημα I υπάρχει T>0 εξαρτώμενο (κατά συνεχή τρόπο) από το I και τις $||u_0||_{H^{k+1}}, ||u_1||_{H^k}$ ώστε $\forall T_0 \in I$ να υπάρχει μοναδική λύση $u \in C^2([T_0, T_0{+}T] \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$ του αντίστοιχου προβλήματος αρχικών τιμών (με αρχικό χρόνο T_0). Επιπρόσθετα, $u \in C([T_0, T_0{+}T], H^{k+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N))$,$\partial_0 u \in C([T_0, T_0{+}T], H^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N))$ και για $t \in [T_0, T_0{+}T]$ ισχύει ότι $E_k(t) \leq \big(E_k(T_0) + C_I(t - T_0)\big) exp\big(\int_{T_0}^t k_I(m[u])\,\mathrm{d}s\big)$ (όπου $E_k = E_k[u,u]$)

Απόδειξη:

Ας θεωρήσουμε ακολουθίες αρχικών δεδομένων $u_{0,l}, u_{1,l} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$ που συγκλίνουν με την H^{k+1} και H^k νόρμα αντίστοιχα στα u_0, u_1. Περιοριζόμενοι σε μια υπακολουθία, μπορούμε να υποθέσουμε ότι για κάθε l ισχύει $||u_{0,l}||_{H^{k+1}} + ||u_{1,l}||_{H^k} < 1 + ||u_0||_{H^{k+1}} + ||u_1||_{H^k}$. Ορίζουμε αναδρομικά την εξής ακολουθία συναρτήσεων στον $\mathbb{R}^{n+1}$:

- $w_0(t,x) = u_{0,0}(x)$
- Έχοντας ορίσει την w_l, η w_{l+1} ορίζεται ως η λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} g_{w_l}^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu w_{l+1} = f_{w_l} \\ w_{l+1}(T_0,\cdot) = u_{0,l+1} \\ \partial_0 w_{l+1}(T_0,\cdot) = u_{1,l+1} \end{cases}$$

Λόγω των θεωρημάτων ύπαρξης και μοναδικότητας για την γραμμική περίπτωση, η ακολουθία αυτή είναι καλά ορισμένη και επιπλέον κάθε w_l έχει τοπικά συμπαγή χωρικό φορέα. Θα δείξουμε ότι η ακολουθία αυτή συγκλίνει στην λύση σε ένα κατάλληλο χωρίο.

Διαλέγοντας T>0 αρκούντως μικρό, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ακολουθία $(w_l, \partial_0 w_l)(t, \cdot)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη με την νόρμα M_k (έχοντας, δηλαδή, επεκτείνει τον ορισμό της M_k ώστε να ισχύει $M_k(u_1, u_2) = ||u_1||_{H^{k+1}} + ||u_2||_{H^k}$). Κι αυτό, διότι από την ανισότητα ενέργειας για τα ζεύγη w_l, w_{l+1} στο διάστημα $I = [T_0, T_0 + 1]$:

$$M_k[w_{l+1}](t) \leq C_I M_k[w_{l+1}](T_0) + \int_{T_0}^{t} \left(C_I + k_I(m[w_l])\{(1+m[w_{l+1}])M_k[w_l] + M_k[w_{l+1}]\}\right) \mathrm{d}s \leq$$

$$\leq C_{1I} M_k[w_{l+1}](T_0) + \int_{T}^{t} \left(k_{1I}(M_k[w_l])(1 + M_k[w_{l+1}])\right) \mathrm{d}s$$

όπου η δεύτερη ανισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι, λόγω του ότι $k + 1 > \frac{n}{2} + 2$ (και του γεγονότος ότι μπορούμε από την εξίσωση να αντικαταστήσουμε την ∂_0^2) η αντίστοιχη ανισότητα Sobolev συνεπάγεται ότι $m[w] \leq k_I(M_k[w])$. Επιπλέον, εν προκειμένω το k_{1I} μπορεί να θεωρηθεί αύξουσα συνάρτηση του $M_k[w_l]$. Συνεπώς, αν $C_0 = M_k(u_0, u_1)$ και θεωρήσουμε $M = 4C_{1I}(C_0 + 1)$ και $T \leq min\{\frac{M}{4C_{1I}k_{1I}(M)}, \frac{log(2C_{1I})}{k_{1I}(M)}$, τότε (εφαρμόζοντας το λήμμα του Gronwall) επαγωγικά έπεται άμεσα ότι $M_k[w_l](t) \leq M \ \forall t \in [T_0, T_0 + T], l \in \mathbb{N}$.

Επιπλέον, η ακολουθία αυτή είναι συγκλίνουσα σε μία συνάρτηση $u(t, \cdot)$ στον χώρο $C^0([T_0, T_0 + T], H^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)) \cap C^1([T_0, T_0 + T], L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N))$ (η νόρμα του χώρου αυτού είναι ισοδύναμη με την $||v||_M = \sup_{t \in [T_0, T_0+T]} M[v]$). Και αυτό, διότι αν εφαρμόσουμε την αντίστοιχη ανισότητα ενέργειας για τα ζεύγη $(w_l, w_{l+1}), (w_{l-1}, w_l)$ και δεδομένου ότι η επιλογή της ακολουθίας αρχικών δεδομένων είχε γίνει ώστε να συγκλίνει αρκούντως γρήγορα, παίρνουμε άμεσα ότι η ακολουθία $a_l = \sup_{t \in [T_0, T_0+T]} M[w_{l+1} - w_l]$ είναι αθροίσιμη, το οποίο μας δίνει το ζητούμενο.

Λόγω των θεωρημάτων παρεμβολής, που μας εξασφαλίζουν ότι $|| \cdot ||_{H^{s_2}} \leq || \cdot ||_{H^{s_1}}^a || \cdot ||_{H^{s_3}}^b$ με για $s_1 < s_2 < s_3$ (και όπου τα a, b εξαρόνται από τα s_i και ισχύει $a + b = 1$), τα δυό περοηγούμενα αποτελέσματα συνεπάγονται ότι η ακολουθία είναι συγκλίνουσα σε όλους τους χώρους $C^0([T_0, T_0 + T], H^{s+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)) \cap C^1([T_0, T_0 + T], H^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N))$ για $0 \leq s < k$ πραγματικό. Επομένως η u ανήκει στον χώρο αυτό, και κατά συνέπεια (λόγω των ανισοτήτων Sobolev) είναι C^2 συνάρτηση στο $[T_0, T_0 + T] \times \mathbb{R}^n$.

Το γεγονός αυτό υποδηλώνει, κατ' αρχάς ότι η u είναι όντως μια C^2 λύση του προβλήματος, καθώς εφ' όσον η σύγκλιση γίνεται με την C^2 νόρμα έχουμε άμεσα ότι $0 = \left(g_{w_l}^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu w_{l+1} - f_{w_l}\right) \to \left(g_u^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu u - f_u\right)$. Επιπλέον, λόγω ανακλαστικότητας έχουμε ότι η φραγμένη $w_l(t, \cdot)$ έχει ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία στον H^{k+1} $\forall t \in [T_0, T_0 + T]$ και επομένως (δεδομένου ότι στον L^2 η σύγκλιση αυτή θα έπρεπε να είναι ισχυρη) συμπεραίνουμε $u(t, \cdot) \in H^{k+1}$και (όμοια) $\partial_0 u(t, \cdot) \in H^k$. Επιπλέον, λόγω των ιδιοτήτων της ασθενούς σύγκλισης, θα ισχύει ότι $M_k[u](t) \leq limsup_l M_k[w_l](t) \leq M$.

Εκτός αυτού, εύκολα διαπιστώνουμε ότι για κάθε στοιχείο f του $H^{-k-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$ που είναι C^∞ συνάρτηση με συμπαγή φορέα η ακολουθία συνεχών πραγματικών συναρτήσεων $f(w_l)(t)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f(u)(t)$ (όπου $f(u)(\cdot) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot$

$u(\cdot,x)\,\mathrm{d}x)$, και επομένως θα πρέπει και η $f(u)(t)$ να είναι συνεχής συνάρτηση. Επειδή η συνάρτηση αυτή είναι φραγμένη στον H^{k+1} και τα συναρτησιακά f αυτής της μορφής είναι πυκνά στον $H^{-k-1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^N)$, διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση $u:[T_0,T_0+T]\to H^{k+1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^N)$ είναι ασθενώς συνεχής. Το ίδιο ισχύει και για την $\partial_0 u$.

Σημαντικό ρόλο για την απόδειξη της ισχυρής συνέχειας των συναρτήσεων αυτών (το οποίο είναι και το ζητούμενο) παίζουν οι ανισότητες ενέργειας. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε ότι:

$$E_k[w_l,w_{l+1}](t)\leq C_I E_k[w_l,w_{l+1}](T_0)+\int_{T_0}^{t}\big(C_I+k_I(m[w_l],m[w_{l+1}])(M_k^2[w_l]+E_k[w_l,w_{l+1}])\big)\,ds$$

και, παίρνοντας το $limsup$ (ως προς l) της πιο πάνω σχέσης, και ενθυμούμενοι πως $limsup_l(m(w_l))=lim_l m(w_l)=m(u)$ μια και οι w_l συγκλίνουν στην u στην C^2 νόρμα, καθώς και ότι $M_k^2(\cdot)\leq C_I E_k(u,\cdot)$, και στην συνέχεια εφαρμόζοντας το λήμμα του Gronwall έχουμε:

$$limsup E_k[w_l,w_{l+1}](t)\leq\big(limsup E_k[w_l,w_{l+1}](T_0)+C_I(t-T_0)\big)\cdot exp\Big(\int_{T_0}^{t}k_I(m[u])\,ds\Big)$$

Επειδή οι w_l συγκλίνουν στην u στην C^2 νόρμα (και οι g_u,f_u εξαρτόνται με συνεχή τρόπο από το u και τις πρώτες παραγώγους του), έχουμε ότι $\forall t\in[T_0,T_0+T]: lim_l(E_k[u,w_{l+1}](t)-E_k[w_l,w_{l+1}](t))=0$ και συνεπώς $limsup_l E_k[w_l,w_{l+1}]=limsup_l E_k[u,w_{l+1}]$. Επιπλέον, λόγω της σύγκλισης των αρχικών τιμών στην (H^{k+1},H^k) νόρμα, ισχύει ότι $E_k[u,w_l]\to E_k[u,u]$. Τέλος, λόγω της ασθενούς σύγκλισης των w_l στον H^k (και των $\partial_0 w_l$ στον H^k) έχουμε ότι $E_k[u,u]\leq limsup_l E_k[u,w_{l+1}]$. Συνδυάζοντας τις παρατηρήσεις αυτές με την πιο πάνω ανισότητα συνάγουμε ότι:

$$E_k[u,u](t)\leq\big(E_k[u,u](T_0)+C_I(t-T_0)\big)exp\Big(\int_{T_0}^{t}k_I(m[u])\,\mathrm{d}s\Big)\tag{A.1}$$

Κατά συνέπεια, η συνάρτηση $(u,\partial_0 u):[T_0,T_0+T]\to(H^{k+1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^N)\times H^k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^N))$ είναι δεξιά συνεχής στο T_0. Και αυτό διότι με το εσωτερικό γινόμενο του χώρου γινόμενο ισχύει ότι:

$$||(u(t)-u_0,\partial_0 u(t)-u_1)||^2=||(u(t),\partial_0 u(t))||^2+||(u_0,u_1)||^2-$$

$$-2<(u(t),\partial_0 u(t)),(u_0,u_1)>$$

Επειδή η u(t) είναι ασθενώς συνεχής θα έχουμε ότι καθώς $t\to T_0^+$: $<(u(t),\partial_0 u(t)),(u_0,u_1)>\to||(u_0,u_1)||^2$. Επιπλέον, $||(u(t),\partial_0 u(t))||^2=E_k[u,u](t)$, και έτσι από την ανισότητα A.1 προκύπτει ότι $limsup_{t\to T_0}(||(u(t),\partial_0 u(t))||^2)\leq||(u_0,u_1)||^2$. Αντικαθιστώντας στην πιο πάνω σχέση έχουμε λοιπόν:

$$limsup_{t\to T_0}||(u(t)-u_0,\partial_0 u(t)-u_1)||^2 \leq 2||(u_0,u_1)||^2-2||(u_0,u_1)||^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow lim_{t\to T_0}||(u(t)-u_0,\partial_0 u(t)-u_1)||^2=0$$

Η δεξιά συνέχεια της u σε κάθε $t\in(T_0,T_0+T)$ αποδεικνύεται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο κατασκευάζοντας αρχικά δεδομένα που να συγκλίνουν στην $u(t)$ και στην συνέχεια εξασφαλίζοντας από το θεώρημα μοναδικότητας ότι η λύση που προκύπτει έτσι είναι η ίδια με την προηγούμενη. Ακόμη, με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι η λύση είναι και αριστερά συνεχής. $\square$

Πέραν αυτού, η προηγούμενη απόδειξη μας παρέχει και ένα "μέτρο" για το μέγιστο διάστημα ύπαρξης της λύσης ως εξής:

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια C^2 λύση u σε ένα χωρίο της μορφής $[T_0,T_1)\times\mathbb{R}^n$, και ότι $sup_{t\in[T_0,T_1)}m[u]<\infty$. Λόγω των ανισοτήτων ενέργειας της μορφής $E_k[u,u](t)\ \leq\ \big(E_k[u,u](T_*)+C_I(t-T_*)\big)exp\big(\int_{T_*}^t k_I(m[u])\,\mathrm{d}s\big)$, αυτό σημαίνει πως $sup_{t\in[T_0,T_1)}M_k[u]<\infty$. Κατά συνέπεια, σύμφωνα με το πρώτο μέρος της απόδειξης, υπάρχει T>0 που εξαρτάται μόνο από τα C_I και $sup_{t\in[T_0,T_1)}M_k[u]$ ώστε $\forall T_*\in[T_0,T_1)$ να υπάρχει λύση u_1 σε ένα χωρίο $[T_*,T_*+T)\times\mathbb{R}^n$ ώστε $u_1(T_*)=u(T_*),\partial_0 u_1(T_*)=\partial_0 u(T_*)$. Λόγω του θεωρήματος μοναδικότητας, $u=u_1$ στο $\big([T_*,T_*+T)\cap[T_0,T_1)\big)\times\mathbb{R}^n$. Διαλέγοντας T_* αρκούντως κοντά στο T_1 ώστε $T_*+T>T_1$ συμπεραίνουμε ότι με την διαδικασία αυτή μπορούμε να επεκτείνουμε την λύση μας πέρα από το T_1. Το ίδιο ισχύει και για την παρελθοντική κατεύθυνση. Κατά συνέπεια, αν (T_-,T_+) είναι το μέγιστο χρονικό διάστημα ύπαρξης μιας C^2 λύσης (το οποίο πάντα υπάρχει) θα πρέπει για το T_+ να ισχύει απαραίτητα είτε ότι $lim_{t\to T_+}(sup_{t\in[T_0,t)}m[u])=\infty$ είτε $T_+=\infty$, και όμοια και για το T_-.

Κλείνοντας την παράγραφο αυτή, να αναφέρουμε ότι χρησιμοποιώντας όπως στα προηγούμενα κατάλληλες ενεργειακές ανισότητες για την διαφορά των λύσεων μπορούμε να αποδείξουμε το ακόλουθο θεώρημα ευστάθειας:

> Θεώρημα: Έστω g μια C^∞ N,n - συμβατή μετρική και f μια C^∞ N,n - συμβατή μη γραμμικότητα. Έστω επιπλέον το εξής πρόβλημα αρχικών τιμών:
>
> $$\begin{cases} g_u^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu u = f_u \\ u(T_0,\cdot)=u_0 \\ \partial_0 u(T_0,\cdot)=u_1 \end{cases}$$
>
> Έστω $u\in C^\infty((T_-,T_+)\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^N))$ να ειναι η λύση αυτού με $u_0,u_1\in C_0^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^N)$. Επιπλέον, έστω $u_{0,l},u_{1,l}$ ακολουθία αρχικών δεδομένων που συγκλίνουν στα u_0,u_1 με την νόρμα $(||\cdot||_{H^{k+1}},||\cdot||_{H^k})$ για $k>\frac{n}{2}+1$, και u_l οι αντίστοιχες C^∞ λύσεις με μέγιστο χρονικό διάστημα ύπαρξης $(T_{-,l},T_{+,l})$. Τότε, $\forall T_1\in(T_-,T_+)$ υπάρχει l_0 ώστε $\forall l>l_0$ να ισχύει $T_1\in(T_{-,l},T_{+,l})$. Επιπλέον

$$||u(T_1,\cdot) - u_l(T_1,\cdot)||_{H^{k+1}} + ||\partial_0 u(T_1,\cdot) - \partial_0 u_l(T_1,\cdot)||_{H^k} \to 0$$

Παράρτημα Β΄

Το θεώρημα της Noether - Η μέθοδος του διανυσματικού πεδίου

Η εισαγωγή των βασικών ιδεών που οδήγησαν στην ανάπτυξη της Λαγκραντζιανής μηχανικής έλαβε χώρα στο διάστημα από το 1772 μέχρι και το 1788, οπότε και ο Γάλλος μαθηματικός Joseph - Louis Lagrange αποπειράθηκε να απλοποιήσει και να επαναθεμελιώσει την Νευτώνεια μηχανική. Η αρχή της ελάχιστης δράσης (η οποία συναντάται και στα έργα του Maupertuis αλλά και του Euler) αποτελεί θεμελιώδη λίθο της Λαγκραντζιανής προσέγγισης στην κλασική μηχανική. Σύμφωνα με την αρχή αυτή, λοιπόν, η εξέλιξη ενός φυσικού συστήματος το οποίο μεταβαίνει από μια κατάσταση A σε μια κατάσταση B είναι τέτοια, ώστε να αποτελεί στάσιμο σημείο για το συναρτησιακό της δράσης. Όσον αφορά, φυσικά, στον ορισμό της δράσης S, αυτή δεν ειναι τίποτε άλλο από το χρονικό ολοκλήρωμα της Λαγκραντζιανής του συστήματος από την αρχική μέχρι την τελική κατάσταση. Για παράδειγμα, στην περίπτωση ενός σημειακού σώματος η αντίστοιχη Λαγκραντζιανή ορίζεται ως η διαφορά της κινητικής από την δυναμική του ενέργεια (οριζόμενη από ένα δοθέν δυναμικό), και η αρχή της ελάχιστης δράσης καθορίζει την τροχιά που το εν λόγω σώμα θα ακολουθήσει υπό την επίδραση του δυναμικού αυτού.

Παρ' ότι η εισαγωγή της Λαγκραντζιανής προσέγγισης στην μηχανική αρχικά αποσκοπούσε απλώς στην απλοποίηση της Νευτώνειας θεωρίας, η έννοια της αρχής ελάχιστης δράσης κατέχει περίοπτη θέση τόσο στην σύγχρονη φυσική όσο και σε ποικίλους κλάδους των μαθηματικών. Και αυτό, διότι κωδικοποιώντας τα χαρακτηριστικα ενός συστήματος κατάλληλα μέσω μιας Λαγκραντζιανής, είναι δυνατόν να εξαχθούν για αυτό συμπεράσματα με τις κλασικές μεθόδους του λογισμού των μεταβολών. Για παράδειγμα, όλοι οι συνήθεις φυσικοί νόμοι (λχ του ηλεκτρομαγνητισμού, της σχετικότητας κ.α.) μπορούν να περιγραφούν από μια Λαγκραντζιανή και την αντίστοιχη αρχή ελάχιστης δράσης, ενώ η προσέγγιση του λογισμού μεταβολών διαδραμάτισε σημαίνοντα ρόλο στην εξέλιξη της συναρτησιακής ανάλυσης, των διαφορικών εξισώσεων και της γεωμετρίας.

Εμάς, βέβαια, μας ενδιαφέρει η εφαρμογή των μεθόδων της Λαγκραντζιανής μηχανικής στις διαφορικές εξισώσεις και κατ' επέκταση στην διαφορική γεωμετρία και την γενική σχετικότητα. Για το λόγο αυτό, προτού προχωρήσουμε στις εφαρμογές της προσέγγισης αυτής που εμφανίζονται στο δεύτερο κεφάλαιο, θα πρέπει πρώτα να δώσουμε έναν ακριβή ορισμό της έννοιας της Λαγκραντζιανής και της δράσης στο πλαίσιο στο οποίο αναφερόμαστε. Οι ορισμοί και τα αντίστοιχα αποτελέσματα προέρχονται από τα [4] και [9], στα οποία μπορεί ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης να βρει μια πολύ πιο σαφή και ενδελεχή παρουσίαση των θεμάτων αυτών.

Έτσι, λοιπόν, αν M, N είναι δύο διαφορίσιμες πολλαπλότητες (πιθανόν με σύνορο - σε αυτήν την περίπτωση όλες οι επόμενες έννοιες που δεν έχουν έννοια στο σύνορο θα θεωρούμε ότι αναφέρονται στο εσωτερικό της αντίστοιχης πολλαπλότητας), θα μπορούμε να θεωρούμε το γινόμενο $M \times N$ ως μια δέσμη ινών πάνω από την πολλαπλότητα M μέσω της προβολής στον πρώτο παράγοντα ($\pi_1 : M \times N \to M$). Η εφαπτόμενη δέσμη $T(M \times N)$ μπορεί να θεωρηθεί ότι "σπάει" με φυσιολογικό τρόπο σε ένα άθροισμα διανυσματικών ινών $V_1 \oplus V_2$, όπου $V_1 = Ker(\pi_{*,2})$ και $V_2 = Ker(\pi_{*,1})$, ώστε $\forall (p,q) \in M \times N$ η $\pi_{*,1}$ να ταυτίζει ομοιομορφικά την $(V_1)_{(p,q)}$ με την T_pM και η $\pi_{*,2}$ να ταυτίζει ομοιομορφικά την $(V_2)_{(p,q)}$ με την T_qN. Κατά συνέπεια, η διανυσματική δέσμη $\mathcal{V} = Hom(V_1, V_2)$ πάνω από την $M \times N$ μπορεί να θεωρηθεί ως μια δέσμη ινών πάνω από την M, με αντίστοιχη προβολή $\pi : \mathcal{V} \to M$ (όπου η προβολή π δεν ειναι άλλη από την σύνθεση των αντίστοιχων προβολών $\mathcal{V} \to M \times N \to M$). Να σημειώσουμε ότι λόγω των ιδιοτήτων των V_1, V_2, κάθε C^1 συνάρτηση $u : M \to N$ ορίζει μια μοναδική τομή της $\mathcal{V}$, το σύνολο $\{(p, u(p), (\pi_{*2}|_{V_2})^{-1} \circ Du(p) \circ (\pi_{*1})|_{V_1})|p \in M\}$.

Μια Λαγκραντζιανή L, λοιπόν, στην περίπτωση αυτή ορίζεται ως μια τομή της δέσμης $\pi^*(\Lambda^n M)$ επί της $\mathcal{V}$ (όπου n ειναι η διάσταση της πολλαπλότητας M)- αυτό σημαίνει ότι για κάθε τομή (f, A) της δέσμης $\mathcal{V}$, η $L(f, A)$ αποτελεί μια $n-$μορφή στην M. Αντίστοιχα, το συναρτησιακό της δράσης S έχει ως πεδίο ορισμού το σύνολο των C^1 συναρτήσεων $u : M \to N$ και ορίζεται ως $S(u) = \int_M L(u, Du)$. Στην κλασική περίπτωση της κίνησης ενός σωματιδίου στον χώρο, η πολλαπλότητα M θα ταυτιζόταν με τον $\mathbb{R}$ (άξονας του χρόνου), ενώ η N με τον χώρο ($\mathbb{R}^3$), η δε Λαγκραντζιανή θα δινόταν από την σχέση $L(u, Du) = L(u, \frac{d}{dt}u) = T - V = \frac{1}{2}m(\frac{du}{dt})^2 - V(u)$ (όπου u(t): η θέση του σωματιδίου την χρονική στιγμή t)

Η αρχή της ελάχιστης δράσης, λοιπόν, καθορίζει μια διαφορική εξίσωση την οποία θα πρέπει να ικανοποιεί μια συνάρτηση u η οποία αποτελεί στάσιμο σημείο για τη δράση. Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με τον λογισμό μεταβολών, αν $N = \mathbb{R}$ και u είναι ένα στάσιμο σημείο για την S θα πρέπει να ισχύει $\frac{d}{d\varepsilon}S(u + \varepsilon h)|_{\varepsilon=0} = 0$ για κάθε C^1 συνάρτηση $h : M \to \mathbb{R}$ που μηδενίζεται στο ∂M (αν υπάρχει). Στην γενικότερη περίπτωση, η αντίστοιχη συνθήκη για την u είναι η εξής: Αν u^*TN ειναι η pullback της TN στην M (επομένως η u^*TN είναι μια διανυσματική δέσμη επί του M), τότε κάθε τομή v της u^*TN που μηδενίζεται στο ∂M αντιστοιχεί σε μια στοιχειώδη μεταβολή της u η οποία παίρνει τις ίδιες τιμές με την u στο ∂M, ενώ η αντίστοιχη ποσότητα για το Du θα ειναι η Dv (οι ποσότητες αυτές προκύπτουν αν θεωρήσουμε μια C^1 καμπύλη $\gamma : (-1, 1) \to \mathcal{F}(M, N)$ με γ(0)=u, και θεωρήσουμε την ποσότητα $\frac{d}{dt}\gamma|_{t=0}$). Τότε, η πρωτη μεταβολική αρχή ορίζει πως θα πρέπει να ισχύει $D_vS|_u = 0$. Η τελευταία σχέση γράφεται και ως εξής:

αν υποθέσουμε ότι για δοθέν $p \in M$ υπάρχει ένας τοπικός χάρτης συντεταγμένων (U,x) γύρω από αυτό (όπου πλέον $x : U \to \mathbb{R}^n_+$), και φιξάρουμε και έναν τοπικό χάρτη συντεταγμένων (V, y) γύρω από το $u(p)$ (ο οποίος ορίζει κατά φυσιολογικό τρόπο μια βάση για κάθε ίνα της TV και κατά συνέπεια και για κάθε ίνα της u^*TV), τότε για κάθε v όπως προηγουμένως με φορέα που περιέχεται στην U θα έχουμε στον χάρτη αυτόν: (γράφουμε $L(u, Du) = \bar{L}(u, Du)dx^1...dx^n$, όπου η $\bar{L}(u, Du) : U \to \mathbb{R}$ εξαρτάται από την συγκεκριμένη επιλογή του συστήματος συντεταγμένων)

$$D_v S|_u = 0 \Leftrightarrow \int_{x(U)} \big(v^i \frac{\partial \bar{L}}{\partial(u^i)} + \sum_k \partial_k v^i \frac{\partial \bar{L}}{\partial(\partial_k u^i)}\big) dx^1..dx^n = 0$$

(προσοχή στο ότι εδώ ΔΕΝ ακολουθούμε την σύμβαση Einstein. Επίσης η κάθε ποσότητα είναι εκφρασμένη στο σύστημα αναφοράς που ορίζει ο αντίστοιχος χάρτης)

Ουσιαστικά, λοιπόν, οι προηγούμενες δεν είναι παρά dimM εξισώσεις. Λόγω της υπόθεσης για το v, εκτελώντας μια παραγοντική εξίσωση προκύπτει ότι:

$$\int_{x(U)} v^i \big(\frac{\partial \bar{L}}{\partial(u^i)} - \sum_k \partial_k \frac{\partial \bar{L}}{\partial(\partial_k u^i)}\big) dx^1..dx^n = 0$$

Δεδομένου ότι η σχέση αυτή ισχύει για κάθε τετοιο v, και δεδομένου ότι η συνάρτηση $\big(\frac{\partial \bar{L}}{\partial(u^i)} - \sum_k \partial_k \frac{\partial \bar{L}}{\partial(\partial_k u^i)}\big)$ είναι συνεχής (για την ακρίβεια θα μας αρκούσε να είναι απλώς τοπικά ολοκληρώσιμη), έπεται ότι για $i = 1, ..n$:

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial(u^i)} - \sum_k \partial_k \frac{\partial \bar{L}}{\partial(\partial_k u^i)} = 0$$

Αυτές είναι και οι λεγόμενες εξισώσεις Euler Lagrange. Επιστρέφοντας στην πολλαπλότητα M, και δεδομένου ότι η σχέση αυτή ισχύει γύρω από κάθε σημείο και για οποιαδήποτε επιλογή τοπικών χαρτών, θα θέλαμε να γράψουμε την εξίσωση αυτή σε συναλλοίωτη μορφή. Για τον λόγο αυτό, συμβολίζοντας με $d_u L|_{(u,Du)} \in \Gamma((u^*T^*N) \otimes \Lambda^n M)$ και $d_{Du} L|_{(u,Du)} \in \Gamma(((u^*T^*N) \otimes TM) \otimes \Lambda^n M)$ τις αντίστοιχες "μερικές παραγώγους" της Λαγκραντζιανής, η προηγούμενη εξίσωση γράφεται και ως

$$d_u L - div(d_{Du} L) = 0$$

όπου η απόκλιση ορίζεται με την βοήθεια της n μορφής L και "δρα" σε τομές της TM, και άρα κατ' επέκταση και σε τομές της $((u^*T^*N) \otimes TM) \otimes \Lambda^n M$. βέβαια για λόγους απλότητας, στο εξής θα προσπαθήσουμε όπου είναι εφικτό να δουλεύυμε σε ένα τοπικό σύστημα χαρτών ώστε οι συμβολισμοί να ειναι απλούστεροι.

Συνεχίζοντας το παράδειγμα αναφορικά με την κίνηση σημειακού σώματος στον $\mathbb{R}^3$, οι αντίστοιχες εξισώσεις Euler Lagrange δεν είναι άλλες από τις εξισώσεις κίνησης του Νεύτωνα: $m\frac{d^2 u}{dt^2} = -\nabla V$.

Αν, τώρα, υποθέσουμε ότι η πολλαπλότητα M είναι εφοδιασμένη με μια n-μορφή ω, ώστε $\forall x \in M : \omega(x) \neq 0$ (μια τέτοια μορφή, για παράδειγμα, αποτελεί η μορφή όγκου μιας Λορέντζιας ή Ριμάννειας πολλαπλότητας), τότε μπρούμε να υποθέσουμε ότι κάθε Λαγκραντζιανή L όπως πριν μπορεί να γραφεί με μοναδικό τρόπο στην μορφή $\tilde{L} \cdot \pi^*\omega$, όπου $\tilde{L} : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$. Με αυτόν τον τρόπο, μπορούμε να ορίσουμε τις εξής ποσότητες:

- Κανονική ορμή: $\tilde{p} = d_{Du}\tilde{L}|_{(u,Du)} \in \Gamma((u^*T^*N) \otimes TM)$. Σε τοπικό σύστημα συντεταγμένων (επιλεγμένο όπως πριν): $\tilde{p}_i^j = \dfrac{\partial \tilde{L}}{\partial(\partial_j u^i)}$
- Κανονικός τανυστής ενέργεας-τάσης: $T \in \Gamma(TM \otimes T^*M)$, με έκφραση σε τοπικό σύστημα συντεταγμένων: $T_j^i = \tilde{p}_k^i \partial_j u^k - \tilde{L}\delta_j^i$

Πέραν αυτού, με την βοήθεια της $n-$μορφής ω μπορούμε να ορίσουμε με φυσιολογικό τρόπο έναν ισομορφισμό δεσμών $\natural : \Lambda^{n-1}M \to TM$, όπου σε κάθε $v \in \Gamma(\mathrm{T}M)$ αντιστοιχίζουμε το μοναδικό $f \in \Lambda^{n-1}M$ για το οποίο ισχύει ότι $\forall X_1, .., X_{n-1} \in \Gamma(TM)$: $f(X_1, ..X_{n-1}) = \omega(v, X_1, ..X_{n-1})$. Φυσικά, ο ισομορφισμός αυτός επεκτείνεται με φυσιολογικό τρόπο και σε έναν ισομορφισμό των δεσμών $\pi^*\Lambda^{n-1}M$ και π^*TM.

Με την βοήθεια του τανυστή ενέργειας τάσης, λοιπόν, είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε το θεώρημα της Noether. Το θεώρημα αυτό ουσιαστικά αναφέρει πως για κάθε συμμετρία του υπό μελέτη συστήματος αντιστοιχεί μια διατηρούμενη ποσότητα. Κατά συνέπεια, επιτρέπει την εύκολη εξαγωγή νόμων διατήρησης, και για το λόγο αυτό θεωρείται ιδιαίτερα σημαντικό εργαλείο σε όλους σχεδόν τους κλάδους της Φυσικής και όχι μόνο.

Πιο συγκεκριμένα, αν υποθέσουμε ότι έχουμε ένα διανυσματικό πεδίο X ορισμένο στην πολλαπλότητα M (και μηδενικό στο ∂M, αν αυτό είναι μη κενό), μπορούμε με την βοήθεια του κανονικού τανυστή ενέργειας τάσης να ορίσουμε την εξής τομή της δέσμης π^*TM:

$$\tilde{J}^i = T_j^i X^j$$

και, μέσω της απεικόνισης $\natural$, να ορίσουμε την εξής τομή της $\pi^*\Lambda^{n-1}M$:

$$J = \natural^{-1}(\tilde{J})$$

Τομές της δέσμης $\pi^*\Lambda^{n-1}M$ καλούνται συχνά και "ρέυματα" (currents), ενώ το εν λόγω ρεύμα καλείται και ρεύμα της Noether.

Το θεώρημα της Noether, λοιπόν, στο πλαίσιο όσων έχουμε αναφέρει μέχρι στιγμής διατυπώνεται ως εξής:

> Θεώρημα: Με τους προηγούμενους συμβολισμούς, αν u είναι μια λύση των εξισώσεων Euler Lagrange για μια Λαγκραντζιανή της προηγούμενης μορφής, ισχύει
>
> $$dJ \circ (u, Du) = -\mathcal{L}_X L \circ (u, Du)$$
>
> όπου $\mathcal{L}_X$: Η παράγωγος Lie ως προς το X. Αν επιπλέον η L διατηρείται από την ροή του X, τότε ισχύει:

$$dJ \circ (u, Du) = 0$$

Η τελευταία συνθήκη μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε τις περι ων ο λόγος διατηρούμενες ποσότητες: Αν R είναι ένα ανοιχτό τμηματικά C^1 υποσύνολο της M, από το θεώρημα του Stokes θα ισχύει $\int_{\partial R} J \circ (u, Du) = \int_R dJ \circ (u, Du) = 0$. Κατά συνάπεια, για οποιεσήποτε δύο κατά τμήματα C^1 ομόλογες υπερεπιφάνειες Σ_1, Σ_2 της M θα ισχύει $\int_{\Sigma_1} J \circ (u, Du) = \int_{\Sigma_2} J \circ (u, Du)$ - η ποσότητα $\int_{\Sigma} J \circ (u, Du)$ είναι μια διατηρούμενη ποσότητα για υπερεπιφάνειες ομόλογες με την Σ.

Να σημειώσουμε ότι οι προηγούμενες ποσότητες $J \circ (u, du)$ και $dJ \circ (u, Du)$ εξαρτώνται και οι δύο μόνο από παραγώγους της u μέχρι και πρώτης τάξης. Και αυτό, διότι οι παράγωγοι δεύτερης τάξης που θα έπρεπε να κάνουν την εμφάνισή τους στην $dJ \circ (u, du)$ απαλείφονται με την βοήθεια των εξισώσεων Euler Lagrange. Γενικότερα, δοθείσης μιας Λαγκραντζιανής L, ένα ρεύμα $J \in \Gamma(\pi^* \Lambda^{n-1} M)$ θα λέγεται συμβιβαστό με την L αν υπάρχει $K \in \Gamma(\pi^* \Lambda^n M)$ ώστε για κάθε λύση u των εξισώσεων Euler Lagrange να ισχύει $dJ \circ (u, Du) = K \circ (u, Du)$ και επιπλέον οι J, K να εξαρτώνται μόνο από παραγώγους τάξης το πολύ 1 της u. Όπως θα δούμε και πιο κάτω, τα συμβιβαστά ρεύματα διαδραματίζουν κεντρικό ρόλο στην μέθοδο του διανυσματικού πεδίου.

Φυσικά, ο προηγούμενος ορισμός της Λαγκραντζιανής μπορεί να γενικευτεί με πολλούς τρόπους: Αντί για την τετριμμένη δέσμη ινών $M \times N$, μπορούσαμε εξ' αρχής να θεωρήσουμε μια οποιαδήποτε δέσμη ινών πάνω από το M, οπότε και την θέση των συναρτήσεων u θα έπαιρναν οι τομές της δέσμης αυτής. Σε αυτήν την κατηγορία εμπίπτει η συζήτηση στην αρχή του κεφαλαίου 2 σχετικά με τον ορισμό της ορμής και της ενέργειας των εξισώσεων Einstein, όπου το ρόλο της εν' λόγω δέσμης ινών έπαιζε το σύνολο των λορέντζιων μετρικών επί του M. Εκτός αυτού, μπορούμε να θεωρήσουμε και μια Λαγκραντζιανή που θα εξαρτάται και από παραγώγους της u υψηλότερης τάξης.

Μια πολύ σημαντική κατηγορία εξισώσεων οι οποίες μπορούν να ενταχθούν στα πλαίσια της Λαγκραντζιανής προσέγγισης είναι η κυματική εξίσωση. Δοθείσης μιας Λορέντζιας πολλαπλότητας (M,g), λοιπόν, και θέτοντας $N = \mathbb{R}$, μπορούμε να ορίσουμε την Λαγκραντζιανή που περιγράφεται από την σχέση $L(\mathrm{u}, du) = g(du, du)dg$, όπου στην σχέση αυτή η g στην πραγματικότητα είναι η επέκταση της Λορέντζιας μετρικής στην δυική δέσμη T^*M. Σε ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων, λοιπόν, η Λαγκραντζιανή αυτή γράφεται ως $L = g^{\mu\nu}\partial_\mu u \partial_\nu u \cdot \sqrt{-detg}dx^0 ... dx^{n-1}$. Άμεσα επαληθεύουμε ότι η εξίσωση Euler lagrange στην περίπτωση αυτή δεν ειναι άλλη από την κυματική εξίσωση: $\frac{1}{\sqrt{-detg}}\partial_\nu(g^{\mu\nu}\sqrt{-detg}\partial_\mu u) = \Box_g u = 0$

Σε αυτήν την περίπτωση, λοιπόν, επαληθεύουμε ότι ο κανονικός τανυστής τάσης ενέργειας παίρνει την μορφή:

$$T^\mu_\nu = 2g^{\mu\lambda}\partial_\lambda u \partial_\nu u - g^{\kappa\lambda}\partial_\kappa u \partial_\lambda u \delta^\mu_\nu$$

Πολλαπλασιάζοντάς, τον, λοιπόν, με 1/2 και "κατεβάζοντας" τους δείκτες προκύπτει ο εξής (0,2) συμμετρικός τανυστής:

$$T_{\mu\nu}(u) = \partial_\mu u \partial_\nu u - \frac{1}{2}(g^{\kappa\lambda}\partial_\kappa u \partial_\lambda u)g_{\mu\nu}$$

ή, σε συναλλοίωτη μορφή:

$$T(u) = du \otimes du - \frac{1}{2} g(du, du) \cdot g$$

Τον τανυστή αυτόν θα τον καλούμε στο εξής τανυστή ενέργειας-ορμής, παρ' ότι θα πρέπει να ειμαστε προσεκτικοί ώστε να μην γίνεται σύγχυση με τον T^{μ}_{ν}.

Παρατηρούμε, κατ' αρχάς, ότι για οποιαδήποτε λεία συνάρτηση $u : M \to \mathbb{R}$ ισχύει (λόγω και του ορισμού της συνοχής Levi-Civitta)

$$div(T(u)) = \nabla^{\mu}(\partial_{\mu} u \partial_{\nu} u - \frac{1}{2}(g^{\kappa\lambda}\partial_{\kappa} u \partial_{\lambda} u) g_{\mu\nu}) =$$

$$= (\Box_g u)\partial_{\nu} u + \partial_{\mu} u \nabla^{\mu}\partial_{\nu} u - g^{\kappa\lambda}(\nabla^{\mu}\partial_k u)\partial_{\lambda} u \cdot g_{\mu\nu} =$$

$$= (\Box_g u)\partial_{\nu} u + \partial_{\mu} u \nabla^{\mu}\partial_{\nu} u - (\nabla_{\nu}\partial^{\lambda} u)\partial_{\lambda} u = (\Box_g u)\partial_{\nu} u = (\Box_g u) du$$

όπου η μετάβαση στην προτελευταία ισότητα έγινε χάρη στην συμμετρία του εσσιανού πίνακα $\nabla^{\mu}\partial_{\nu} u$.

Κατά συνέπεια, παρατηρούμε ότι στην περίπτωση όπου η u ικανοποιεί την κυματική εξίσωση, ισχύει $divT = 0$. Το γεγονός αυτό μας επιτρέπει να ορίσουμε κατάλληλες 1-μορφές, χρησιμοποιώντας τον τανυστή T και κατάλληλα διανυσματικά πεδία, κατ' αντιστοιχία με την κατασκευή των ρευμάτων Noether, τα οποία εξαρτώνται μόνο από παραγώγους της u τάξης το πολύ 1. Η κατάλληλη επιλογή διανυσματικών πεδίων, και η εφαρμογή του θεωρήματος απόκλισης σε ποσότητες όπως αυτές που θα περιγράψουμε στην συνέχεια, αποτελούν την ουσία της μεθόδου διανυσματικού πεδίου, η οποία μπορεί να θεωρηθεί μια γεωμετρική προέκταση της μεθόδου των πολλαπλασιαστών (ή μεθόδου A, B, C του Friedrichs).

Έτσι, λοιπόν, δοθέντος ενός συνεχούς και κατά τμήματα C^1 διανυσματικού πεδίου V στην M, ορίζουμε για κάθε λεία συνάρτηση u τις εξής ποσότητες:

- $J^V_{\mu}(u) = T_{\mu\nu}(u)V^{\nu} \in \Gamma(T^*M)$
- $K^V(u) = T_{\mu\nu}(u)\nabla^{\mu}V^{\nu} \in C(M, \mathbb{R})$
- $E^V(u) = \nabla^{\mu}\mathrm{T}_{\mu\nu}(u)V^{\nu} = (\Box_g u) \cdot V(u) \in C(M, \mathbb{R})$

Σύμφωνα με το θεώρημα απόκλισης, θα έχουμε για κάθε κατά τμήματα C^1 ανοιχτό και φραγμένο $R \subseteq M$:

$$\int_R E^V(u) dg + \int_R K^V(u) dg = \int_{\partial R} J^V_{\mu}(u) n^{\mu} d\sigma$$

όπου n^{μ}: το κέθατο μοναδιαίο στην ∂R το οποίο επιλέγεται:

- Για τα χωροειδή τμήματα του ∂R να στρέφεται προς το εσωτερικό του R
- Για τα φωτοειδή τμήματα (αυτά δηλαδή στα οποία η επαγόμενη μετρική είναι Λορέντζια) να στρέφεται προς το εξωτερικό του R

- Για τα μελλοντικά φωτοειδή τμήματα (όπου η επαγόμενη μετρική ειναι εκφυλισμένη) να στρέφεται προς το παρελθόν, και αντίστροφα για τα παρελθοντικά.

Στην περίπτωση, λοιπόν, όπου η u είναι λύση της κυματικής εξίσωσης, ο όρος E^V είναι μηδενικός. Ακόμη, στην περίπτωση όπου το V ειναι πεδίο Killing, ισχυει $\mathcal{L}_V g = 0$ και επομένως $\nabla^\mu V^\nu + \nabla^\nu V^\mu = 0$. Επειδή, λοιπόν, ο T είναι συμμετρικός, σε αυτήν την περιπτωση θα ισχύει ότι $K^V = 0$ και επομένως για κάθε ανοιχτό σύνολο R όπως πριν: $\int_{\partial R} J^V_\mu(u) n^\mu d\sigma = 0$. Αυτό, ουσιαστικά, αποτελεί και μια εφαρμογή του θεωρήματος της Noether στην ειδική αυτή περίπτωση.

Θα κλείσουμε την παράγραφο αυτή αναφέροντας μια άμεση εφαρμογή του τελευταίου νόμου διατήρησης στην μελέτη της κυματικής εξίσωσης για τον χώρο Minkowski. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια λύση u της κυματικής εξίσωσης στον $\mathbb{R}^{n+1}$, η οποία προκύπτει από λεία αρχικά δεδομένα με συμπαγή φορέα στο υπερεπίπεδο $\{x^0 = 0\}$ (το οποίο αποτελεί και μια υπερεπιφάνεια Cauchy για τον χώρο αυτό). Σύμφωνα με τα θεωρήματα ύπαρξης και μοναδικότητας, θα υπάρχει λεία λύση και μάλιστα μοναδική, και θα ισχύει ότι το σύνολο $supp(u) \cap \{x^0 = t\}$ θα είναι φραγμένο $\forall t \in \mathbb{R}$, και επομένως τα αντίστοιχα ολοκληρώματα πάνω στις επιφάνειες $\{x^0 = t\}$ θα ειναι καλά ορισμένα.

Το διανυσματικό πεδίο $T = \partial_0$ αποτελεί πεδίο Killing για τον $\mathbb{R}^{n+1}$, και επομένως σύμφωνα με τα προηγούμενα θα έχουμε:

$$\int_{x^0=t} J^T_\mu(u) \mathrm{T}^\mu = \int_{x^0=0} J^T_\mu(u) \mathrm{T}^\mu$$

(το γεγονός ότι το σύνολο $R = \{0 < x^0 < t\}$ δεν είναι φραγμένο δεν μας εμποδίζει να εφαρμόσουμε το θεώρημα της απόκλισης, μια και από το θεώρημα μοναδικότητας έπεται ότι το σύνολο $supp(u) \cap R$ είναι φραγμένο)

Ακόμη, άμεσα υπολογίζουμε ότι $\forall x \in \mathbb{R}^{n+1}$ ισχύει $J^T_\mu(u)\mathrm{T}^\mu = \partial_0 u \cdot \partial_0 u - \frac{1}{2}(-(\partial_0 u)^2 + (\partial_1 u)^2 + ... + (\partial_n u)^2)(g(T,T)) == \frac{1}{2}\big((\partial_0 u)^2 + (\partial_1 u)^2 + ... + (\partial_n u)^2\big)$ (γενικότερα, ισχύει ότι αν τα V_1, V_2 ειναι χρονοειδή σε ένα σημείο υπάρχει θετική σταθερά C ώστε για κάθε u να ισχύει στο εν λόγω σημείο η ποσότητα $J^{V_1}_\mu(u) V_2^\mu \geq C((\partial_0 u)^2 + ... + (\partial_n u)^2)$, και η σχέση αυτή είναι πολύ συχνά χρήσιμη κατά την εφαρμογή της μεθόδου του διανυσματικού πεδίου). Κατά συνέπεια, έχουμε ότι $\forall t \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_{x^0=t} ((\partial_0 u)^2 + ... + (\partial_n u)^2) = \int_{x^0=0} ((\partial_0 u)^2 + ... + (\partial_n u)^2)$$

Επιπλέον, δεδομένου ότι και όλα τα διανυσματικά πεδία ∂_μ παράγουν ισομετρίες του χώρου Minkowski, οι συναρτήσεις $\partial_\mu u$ θα ικανοποιούν και αυτές την κυματική εξίσωση, και επομένως μπορούμε να έχουμε εκτιμήσεις όπως η προηγούμενη για παραγώγους της u όσο υψηλής τάξης θα θέλαμε. Κατά συνέπεια, μια απλή εφαρμογή της ανισότητας Sobolev μας λέει ότι υπάρχει σταθερά C ώστε για κάθε λύση u της κυματικής εξίσωσης όπως η προηγούμενη να ισχύει σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$|u| \leq C \cdot ||u(0, \cdot)||_{H^k(\mathbb{R}^n)}$$

και η ανισότητα αυτή μπορει να επεκταθεί κατάλληλα για παραγώγους της u όσο υψηλής τάξης θα θέλαμε.

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι η αρχή διατήρησης που προέκυψε μέσω της Λαγκραντζιανής προσέγγισης της κυματικής εξίσωσης στον χώρο Minkowski μας οδήγησε άμεσα στο συμπέρασμα ότι μια λύση της κυματικής εξίσωσης εκεί ειναι οπωσδήποτε ομοιόμορφα φραγμένη. Χρησιμοποιώντας, από την άλλη, ένα κατάλληλο ρεύμα προσαρμοσμένο στην σύμμορφη δομή του χώρου Minkowski (το λεγόμενο ρεύμα της Morawetz) είναι δυνατόν να συμπεράνει κανείς με τον ίδιο τρόπο ότι μια τέτοια λύση της κυματικής εξίσωσης θα πρέπει να φθίνει πολυωνυμικά με τον χρόνο. Αντίστοιχη είναι και η γενικότερη κατεύθυνση της μεθόδου του διανυσματικού πεδίου: Κωδικοποιώντας βασικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά της πολλαπλότητας μέσω κατάλληλων διανυσματικών πεδίων και ρευμάτων, επιδιώκει κανείς να εξάγει συμπεράσματα για την συμπεριφορά της κυματικής εξίσωσης.

Βιβλιογραφία

[1] M. Δαφέρμος και I. Rodnianski, "Lectures on black holes and linear waves", Lectures at the Zurich Clay Summer School, 2008

[2] H. Ringstrom, "The Cauchy Problem in General Relativity", ESI Lectures in Mathematics and Physics, 2009

[3] Y. Choquet - Bruhat και R. Geroch, "Global aspects of the Cauchy problem in General relativity", Comm. Math, Phys. 109, 1987

[4] Δ. Χριστοδούλου, "Mathematical Problems of General Relativity Theory", Lectures at the ETH Zurich, 2002-2003

[5] Δ. Χριστοδούλου και S. Klainerman, "The Global Nonlinear Stability of the Minkowski Space", Princeton Mathematical Series - Princeton University Press, 1993

[6] S. Antoci, "David Hilbert and the origin of the "Schwarzschild solution"", arXiv:physics/0310104, 2003

[7] H. Lindblad και I. Rodnianski, "Global Existence for the Einstein Vacuum Equations in Wave Coordinates", Comm. Math, Phys. 256, 2005

[8] N. Zipser, "The Global Nonlinear Stability of the Trivial Solution of the Einstein-Maxwell Equations", Ph.D thesis, Harvard University, 2000

[9] Σ. Αρετάκης, "The Energy Momentum Tensor of Lagrangian Matter Fields", Lectures at Cambrdge Centre of Analysis, 2010

[10] M. P. do Carmo, "Riemannian Geometry", Birkhaeuser, 1992

[11] B. O'Neill, "Semi - Riemannian Geometry", Academic Press, New York, 1983

[12] P. Chrusciel, G. Galloway και D. Pollack, "Mathematical General Relativity: A Sampler", Bulletin of the American Mathematical Society, Vol 47, 2010

[13] J. Sbierski, "Characterisation of the Energy of Gaussian Beams on Lorentzian Manifolds - with Applications to Black Hole Spacetimes", Talk at the University of Cambridge, 2013

[14] M. Δαφέρμος και I. Rodnianski, "A proof of the uniform boundedness of solutions to the wave equation on slowly rotating Kerr backgrounds", Inventiones mathematicae-Springer, 2011

[15] M. Δαφέρμος και I. Rodnianski, "The black hole stability problem for linear scalar perturbations", arXiv:1010.5137

[16] Σ. Αρετάκης, "Stability and instability of extreme Reissner-Nordstrom black hole spacetimes for linear scalar perturbations I", Comm. math. Phys. 307, 2011

[17] Σ. Αρετάκης, "Stability and instability of extreme Reissner-Nordstrom black hole spacetimes for linear scalar perturbations II", Ann. Henri Poincare 12. 307, 2011