ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΑΚΕΡΑΙΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ
ΜΕΘΟΔΟΙ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΥ ΑΝΤΩΝΙΟΥ

Επιβλέπων : ΚΟΛΕΤΣΟΣ ΙΩΑΝΝΗΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2013

Καθώς η εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας φτάνει στο τέλος της, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Γιάννη Κολέτσο, Επίκουρο Καθηγητή του Ε.Μ.Π., για την άριστη συνεργασία που είχαμε καθ' όλη την διάρκειά της. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου αλλά και τους φίλους και συμφοιτητές μου, οι οποίοι με στήριξαν σε όλο αυτό το διάστημα.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα διπλωματική εργασία είναι μία παρουσίαση και ανάλυση των προβλημάτων Ακέραιου Προγραμματισμού και των μεθόδων επίλυσής τους.

Αρχικά, στο Κεφάλαιο 1, γίνεται μία εισαγωγή στην επιστήμη της Επιχειρησιακής Έρευνας, παρουσιάζοντας τις απαρχές της, αλλά και την σημαντικότητά της στην σύγχρονη κοινωνία. Έπειτα, στο Κεφάλαιο 2 επικεντρωνόμαστε στο αντικείμενο που θα μελετήσουμε, αυτό δηλαδή του Γραμμικού Προγραμματισμού (Linear Programming), και πιο συγκεκριμένα του Ακέραιου Γραμμικού Προγραμματισμού (Integer Linear Programming). Παρουσιάζονται, εκτός των απαραίτητων ιστορικών στοιχείων, το μαθηματικό μοντέλο που θα χρησιμοποιούμε, οι προϋποθέσεις ώστε ένα πρόβλημα να μπορεί να επιλυθεί μέσω αυτών των εργαλείων, ενώ, ολοκληρώνοντας το κεφάλαιο, μοντελοποιούνται μερικά τυπικά χαρακτηριστικά προβλήματα.

Πριν προχωρήσουμε στις δύο βασικές μεθόδους που θα μας απασχολήσουν εκτενώς, στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζουμε ένα σπουδαίο μαθηματικό εργαλείο, την μέθοδο Simplex, η οποία χρησιμοποιείται ανά πάσα στιγμή και μας επιτρέπει να επιλύουμε επιτυχώς προβλήματα βελτιστοποίησης πολλών μεταβλητών. Στα Κεφάλαια 4 και 5 αναλύονται σε βάθος, με διάφορα χαρακτηριστικά παραδείγματα για την καλύτερη κατανόησή τους, οι μέθοδοι Branch and Bound (Διακλάδωσης και Οριοθέτησης) και Cutting Planes (Επιπέδων Αποκοπής). Ακολουθούν, στο Κεφάλαιο 6, δύο εφαρμογές ώστε να δούμε στην πράξη, πώς χρησιμοποιούνται όλα τα παραπάνω σε δύο ρεαλιστικά προβλήματα.

Τέλος, ολοκληρώνουμε αυτή την διπλωματική εργασία, με το Κεφάλαιο 7 και την παρουσίαση ενός πολύ σημαντικού προβλήματος της εποχής μας, αυτό του Πλανόδιου Πωλητή (Traveling Salesman Problem – TSP), το οποίο μπορεί να αντιμετωπιστεί με τα εργαλεία του Ακέραιου Προγραμματισμού.

ABSTRACT

This thesis is a study on the methods and problems that are solved through Integer Linear Programming.

Initially, Chapter 1 is an introduction of Operational Research in general, presenting its roots, as well as its significance in modern societies. In Chapter 2, we place emphasis on the subject that we will be studying in this thesis, which is Linear Programming and more specifically, Integer Linear Programming. Except for the historical facts, we will be presenting the assumptions that are needed for a problem to be considered as an ILP problem, plus some typical ILP problems.

Prior to presenting the two basic methods that are used to solve ILP problems, in Chapter 3 we introduce an essential mathematical tool, the Simplex method, which is widely used in solving optimization multivariable problems.

In the following Chapters (4 & 5) the Branch and Bound and Cutting Planes methods are studied and analyzed through many indicative examples. In Chapter 6, we solve two actual, real problems, in order to demonstrate how the above methods actually work.

Last but not least, in the final Chapter (7), the very famous and much discussed Traveling Salesman Problem (TSP) is presented, while dealing with it using the Integer Linear Programming methods which have already touched upon earlier.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

Η Επιχειρησιακή Έρευνα είναι η επιστήμη που ασχολείται με την διαδικασία λήψης αποφάσεων μέσω διάφορων επιστημονικών μεθόδων και μαθηματικών προτύπων.

Βέβαια, έχουν δοθεί διάφοροι άλλοι ορισμοί, στους οποίους θα αναφερθούμε στο τέλος του κεφαλαίου. Όσον αφορά την ονοματολογία της επιστήμης, στην Ευρώπη συνήθως χρησιμοποιούμε την ονομασία Operational Research ενώ στην άλλη άκρη του Ατλαντικού συναντούμε τον όρο Operations Research. Κοινός τόπος και των δύο η συντομογραφία OR, όπου χρησιμοποιείται ευρέως και θα χρησιμοποιήσουμε και μεις. Άλλοι όροι που χρησιμοποιούνται είναι οι εξής: Management Science (MS), Industrial Engineering (IE) και Decision Science (DS).

1.1 ΑΠΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ – ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Επισήμως, θεωρούμε πως η Επιχειρησιακή Έρευνα ξεκίνησε λίγο πριν και κατά την διάρκεια του Β' Παγκοσμίου Πολέμου. Τότε, δημιουργήθηκαν οι πρώτες ομάδες επιχειρησιακής έρευνας από τις βρετανικές και αμερικανικές δυνάμεις, αποτελούμενες από επιστήμονες διαφόρων τομέων, με σκοπό την αντιμετώπιση και επίλυση των τακτικών και στρατηγικών προβλημάτων που προέκυπταν κατά την διάρκεια του πολέμου. Ο όρος Operational Research γεννήθηκε αυτή την περίοδο, καθώς ουσιαστικά σήμαινε Research in Military Operations .

Συγκεκριμένα, σημείο αναφοράς είναι οι ομάδες που ασχολήθηκαν με την αποδοτικότερη χρήση ενός νέου ραντάρ (τότε «σύστημα έγκαιρης επισήμανσης αεροσκαφών»), όπου έγινε μελέτη, όχι μόνο του συστήματος αυτού καθεαυτού, των λειτουργιών του και της ορθότερης χρήσης του εξοπλισμού, αλλά επίσης μελετήθηκε και η συμπεριφορά του ανθρώπινου δυναμικού που το χειρίζεται. Θεωρείται ότι οι συγκεκριμένες μελέτες, έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στην έκβαση της Μάχης της Αγγλίας (1940).

Η επιτυχημένη αυτή είσοδος της επιστημονικής προσέγγισης σε στρατιωτικά θέματα επέτρεψε το άνοιγμά της και σε άλλους τομείς. Η γενικότερη βιομηχανική (και όχι μόνο) ανάπτυξη που ακολούθησε τον Β΄ Παγκόσμιο Πόλεμο δημιούργησε νέες ανάγκες, καθώς η πολυπλοκότητα των προβλημάτων που προέκυπταν σε διάφορους οργανισμούς, επιχειρήσεις αλλά ακόμη και στις κυβερνήσεις, κατέστησαν αναγκαία την εξεύρεση νέων τρόπων αντιμετώπισής τους. Δεν άργησαν να συνειδητοποιήσουν, ότι τα προβλήματα που, επιτυχώς, αντιμετωπίστηκαν κατά την διάρκεια του πολέμου είναι παρόμοια, απλά σε άλλο πλαίσιο. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα να δημιουργηθούν επιστημονικές κοινότητες και κέντρα για την Ε.Ε., ακαδημαϊκά προγράμματα κ.λπ. Μάλιστα, πολλά εργαλεία της Ε.Ε., που χρησιμοποιούνται ευρέως και σήμερα, αναπτύχθηκαν επαρκώς εκείνη την εποχή.

Η Επιχειρησιακή Έρευνα συνέχισε να αναπτύσσεται τις επόμενες δεκαετίες, και με την δημιουργία των ηλεκτρονικών υπολογιστών αυτή η εξέλιξή της ήταν ραγδαία. Το γιατί είναι προφανές: η Ε.Ε. προϋποθέτει μεγάλη ποσότητα υπολογισμών, κάτι που οι υπολογιστές μπορούν να κάνουν τάχιστα, αντίθετα με τον άνθρωπο. Από το 1980 και μετά, δημιουργήθηκε και αντίστοιχο software, γεγονός, που σε συνδυασμό με την εξάπλωση των οικιακών ηλεκτρονικών υπολογιστών, επέτρεψε σε κάθε άνθρωπο να έχει πρόσβαση στην επιστήμη αυτή. Σήμερα, προγράμματα (software) όπου βοηθούν στην επίλυση προβλημάτων επιχειρησιακής έρευνας υπάρχουν σε κάθε υπολογιστή, ακόμη και δεν το γνωρίζουμε ή δεν τα χρησιμοποιούμε.

1.2 ΤΙ ΕΙΝΑΙ Η ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

Όπως είπαμε και προηγουμένως, ο όρος Operational Research ουσιαστικά προέρχεται από το Research in Operations. Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι η Επιχειρησιακή Έρευνα εφαρμόζεται σε προβλήματα που αφορούν την διαχείριση των εργασιών και ασχολιών (operations) εντός ενός οργανισμού/επιχείρησης. Η φύση αυτών των οργανισμών ποικίλλει και επεκτείνεται σε κάθε πιθανό τομέα της εποχής μας: στην βιομηχανία, στις μεταφορές, στις τηλεπικοινωνίες, στην υγειονομική περίθαλψη, σε θέματα οικονομικού σχεδιασμού και διαχείρισης, στον δημόσιο τομέα κ.λπ.

Αντίστοιχα, χρησιμοποιείται η λέξη Research για να τονίσει ότι η διαδικασία που ακολουθείται είναι επιστημονικά τεκμηριωμένη. Πιο συγκεκριμένα:

- Γίνεται ενδελεχής παρατήρηση του προβλήματος ενώ παράλληλα συγκεντρώνουμε όλα τα δεδομένα του. Πιο συγκεκριμένα, εντοπίζουμε όλες τις συνιστώσες του καθορίζοντας τις μεταβλητές και τις παραμέτρους που έχουμε. Επίσης αναγνωρίζουμε τους περιορισμούς που έχουμε ενώ προσδιορίζουμε και τους επιθυμητούς στόχους.

- Κατασκευάζουμε ένα μαθηματικό μοντέλο, στο οποίο ουσιαστικά αναπαρίσταται το πραγματικό πρόβλημα. Γίνεται η μετατροπή των στοιχείων που συλλέξαμε στο προηγούμενο βήμα σε μαθηματικές σχέσεις, ανάλογα με την μέθοδο που θα χρησιμοποιήσουμε.

- Υποθέτουμε ότι έγινε σωστή αναπαράσταση, έτσι ώστε τα αποτελέσματα που θα εξάγουμε να θεωρούνται και πραγματικές λύσεις του αρχικού προβλήματος.

- Ακολουθεί η επίλυση και επαλήθευση του μοντέλου, μέσω κάποιων δοκιμών και πειραμάτων, προσαρμόζοντάς το αναλόγως, έως ότου να πιστοποιείται σε κάποιο βαθμό η υπόθεσή μας.

Όμως, μέσω της Επιχειρησιακής Έρευνας δεν έχουμε απλά μια θεωρητική μελέτη ενός προβλήματος, αλλά μια ουσιώδη και καθ' όλα πρακτική επίλυσή του. Επομένως, για να θεωρείται επιτυχημένη η συμμετοχή της, θα πρέπει εν τέλει να δίνει στους φορείς λήψης αποφάσεων σαφή και κατανοητά αποτελέσματα και συμπεράσματα.

Ένα ακόμη χαρακτηριστικό της Ε.Ε. είναι το γεγονός ότι οι όποιες λύσεις δίνονται, προκύπτουν πάντα με το σκεπτικό της επιχείρησης ως σύνολο. Μπορεί να λαμβάνονται υπόψη όλες οι πιθανές μεταβλητές, αλλά αυτό γίνεται αποκλειστικά με σκοπό το πώς θα ωφεληθεί ο οργανισμός. Επιπλέον, πάντα ο απώτερος στόχος θα είναι μία βέλτιστη λύση, και όχι κάτι λιγότερο. Τέλος, εξαιτίας της πολυπλοκότητας των προβλημάτων της Ε.Ε., συνήθως, προσεγγίζονται ομαδικά και όχι ατομικά. Το δυναμικό της ομάδας θα πρέπει να αποτελείται από έμπειρους επιστήμονες διαφόρων ειδικοτήτων ώστε να μπορεί να αντιμετωπιστεί επιτυχώς κάθε πρόκληση που θα προκύψει.

Τα αποτελέσματα της εφαρμογής της Ε.Ε., είναι πάρα πολλά:

- ✓ Ελαχιστοποίηση κόστους/επενδύσεων
- ✓ Μεγιστοποίηση εσόδων/απόδοσης επενδύσεων
- ✓ Αύξηση μεριδίου αγοράς
- ✓ Επιλογή βέλτιστης διαδρομής
- ✓ Διαχείριση και ελαχιστοποίηση ρίσκου
- ✓ Προβλήματα μεταφοράς
- ✓ Βελτίωση ποιότητας
- ✓ Βελτίωση διαμεταγωγής και ελαχιστοποίηση καθυστερήσεων
- ✓ Μεγιστοποίηση απόδοσης χρήσης περιορισμένων πόρων κ.ά.

Η Ε.Ε. υποβοηθά τους φορείς λήψης αποφάσεων ενός οργανισμού σε κάθε πιθανή απόφαση διαχειριστικής φύσεως. Συγκεκριμένα, μέσω αυτής λύνονται άμεσα προβλήματα επιτακτικής ανάγκης, χρησιμοποιείται για την δημιουργία βέλτιστων πολυσταδιακών εργασιών, υποστηρίζει την διαδικασία προβλέψεων και προλήψεων, κατευθύνει και ορίζει πολιτικές, ενώ πάντα πραγματεύεται απτά αποτελέσματα. Φυσικά, η Ε.Ε. δεν είναι προνόμιο των λίγων, αλλά μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε καθημερινό επίπεδο, καθώς ακόμη και ο πελάτης ενός οργανισμού μπορεί να επωφεληθεί από αυτή την διαδικασία λήψης αποφάσεων.

1.3 ΜΕΘΟΔΟΙ ΤΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Οι έννοιες που θα πρωτοσυναντήσουμε ασχολούμενοι με την Επιχειρησιακή Έρευνα θα είναι ποικίλες: γραμμικός και μη γραμμικός προγραμματισμός, ακέραιος προγραμματισμός, δυναμικός προγραμματισμός, πολυκριτηριακή ανάλυση αποφάσεων, θεωρία γραμμών αναμονής, στοχαστική μοντελοποίηση, θεωρία παιγνίων – μεταξύ άλλων, κάτι που δυσκολεύει την πρώτη μας επαφή με το αντικείμενο. Εν τέλει όμως, το μεγαλύτερο ποσοστό των προβλημάτων βρίσκουν εφαρμογή σε κάποιες από τις παρακάτω ευρύτερες κατηγοριοποιήσεις:

- Μέθοδοι προσομοίωσης (simulation methods) – ο στόχος είναι η δημιουργία προσομοιωτών (simulators) όπου θα επιτρέπουν στον υπεύθυνο των αποφάσεων να μελετήσει την δυνατότητα βελτιώσεων και κατόπιν να ελεγχθεί η απόδοση των βελτιώσεων αυτών.

- Μέθοδοι βελτιστοποίησης (optimization methods) - ο στόχος είναι η παρουσίαση πολλών λύσεων στον υπεύθυνο αποφάσεων με έναν τρόπο αποδοτικό και αποτελεσματικό, σε ένα περιβάλλον όπου στην πραγματικότητα οι επιλογές θα είναι άπειρες. Ο τελικός στόχος είναι η εύρεση της καλύτερης δυνατής λύσης, δεδομένων κάποιων συνθηκών.

- Μέθοδοι ανάλυσης δεδομένων (data analysis methods) – όπου ο στόχος είναι η παροχή βοήθειας στον φορέα αποφάσεων στην αναγνώριση μοτίβων και συνδέσεων στα δεδομένα που έχουμε. Αυτή η μέθοδος είναι ιδιαίτερα χρήσιμη σε διάφορες εφαρμογές, όπως στον τομέα των προβλέψεων (forecasting) αλλά και σε αυτόν της εξαγωγής (προηγουμένως άγνωστης) γνώσης από τα δεδομένα που έχουμε συλλέξει.

Τέλος, θα παραθέσουμε μερικούς ορισμούς της Επιχειρησιακής Έρευνας που έχουν δοθεί από διάφορους φορείς και επιστήμονες:

1.4 ΟΡΙΣΜΟΙ

1. Κατά τον Sir Robert Watson-Watt (1892-1973):

«Ο σκοπός της Επιχειρησιακής Έρευνας είναι να εξετάσει ποσοτικά αν ένας οργανισμός λαμβάνει τα μέγιστα από τον εξοπλισμό που διαθέτει σχετικά με τον στόχο του, ποιοι είναι οι κυρίαρχοι παράγοντες για να επιτευχθεί αυτό στον ελάχιστο χρόνο και με το ελάχιστο κόστος, και σε ποιο βαθμό μεταβολές σε επιμέρους στόχους θα συνεισφέρουν σε μία οικονομικότερη αλλά εξίσου έγκαιρη επίτευξη του ολικού στρατηγικού στόχου».

2. Κατά την Βρετανική Εταιρεία Επιχειρησιακής Έρευνας:

«Η Επιχειρησιακή Έρευνα είναι η εφαρμογή των μεθόδων της επιστήμης σε πολύπλοκα προβλήματα που προκύπτουν κατά την διεύθυνση και διαχείριση μεγάλων συστημάτων που αποτελούνται από φυσικά πρόσωπα, μηχανές, υλικά και κεφάλαια στην βιομηχανία, στις επιχειρήσεις και στον στρατό. Η χαρακτηριστική προσέγγιση που πρέπει να γίνει είναι να αναπτυχθεί ένα επιστημονικό μοντέλο για το σύστημα, το οποίο να περιλαμβάνει μετρήσεις για παράγοντες όπως η τύχη και το ρίσκο, το οποίο θα προβλέπει και θα συγκρίνει τα αποτελέσματα διαφόρων αποφάσεων και στρατηγικών. Ο απώτερος στόχος είναι να βοηθά την διοίκηση να καθορίζει τις πολιτικές της και τις αποφάσεις επιστημονικώς».

3. Κατά τους Philip McCord Morse (1903-1985) και George E. Kimball (1906-1967):

«Η Επιχειρησιακή Έρευνα είναι η επιστημονική μέθοδος η οποία παρέχει στα εκτελεστικά τμήματα μία ποσοτική βάση σχετική με τις αποφάσεις που πρέπει να παρθούν».

4. Κατά τους Russell L. Ackoff (1919-2009) και Charles West Churchman (1913-2004):

«Επιχειρησιακή Έρευνα είναι η εφαρμογή επιστημονικών μεθόδων ώστε να επιτευχθεί η βέλτιστη λύση ενός προβλήματος».

5. Κατά τους Saul I. Gass και Arjang Assad:

«Επιχειρησιακή Έρευνα είναι η μαθηματική ή επιστημονική ανάλυση της συστηματικής απόδοσης του ανθρώπινου δυναμικού, του εξοπλισμού αλλά και των πολιτικών που χρησιμοποιούνται σε μία κυβερνητική, στρατιωτική ή εμπορικής φύσεως επιχείρηση».

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ - ΑΚΕΡΑΙΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Είδαμε στην εισαγωγή ότι απαραίτητες έννοιες - τεχνικές για την κατανόηση και επίλυση προβλημάτων Επιχειρησιακής Έρευνας είναι οι έννοιες του γραμμικού προγραμματισμού, του ακέραιου προγραμματισμού, του δυναμικού προγραμματισμού κ. ά. Εμείς θα επικεντρωθούμε κατ' αρχήν στην πιο διαδεδομένη τεχνική, αυτή του γραμμικού προγραμματισμού (Linear Programming - LP) και κατόπιν θα ασχοληθούμε, λεπτομερώς, με τον ακέραιο γραμμικό προγραμματισμό (Integer Linear Programming - ILP).

2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ – ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Η ανάπτυξη του γραμμικού προγραμματισμού από τα μέσα του 20ου αιώνα και έπειτα είναι ραγδαία, και δικαίως έχει χαρακτηρισθεί ως μία από τις σημαντικότερες εξελίξεις στον χώρο των επιστημών, καθώς η επίδραση που έχει σε δεκάδες τομείς είναι καταλυτική. Στην εποχή μας είναι ένα εργαλείο που χρησιμοποιείται ευρέως από τις περισσότερες εταιρίες παγκοσμίως, μεγάλου ή μικρότερου βεληνεκούς, ενώ η χρήση του και σε άλλους τομείς διαδίδεται με ταχύτατους ρυθμούς. Δεκάδες βιβλία γράφονται για την χρήση του γραμμικού προγραμματισμού, ενώ αντίστοιχα εκατοντάδες είναι οι δημοσιεύσεις.

Ας δούμε όμως τις απαρχές του και κάποια σημαντικά γεγονότα γύρω από την εξέλιξή του. Όπως είπαμε, είναι ένας νέος τομέας, και συγκεκριμένα θα ξεκινήσουμε την αναδρομή πηγαίνοντας στο 1939, και στην δουλειά του **Leonid Vitaliyevich Kantorovich** (1912-1986). Ο Kantorovich ουσιαστικά εισήγαγε για πρώτη φορά την τεχνική του γραμμικού προγραμματισμού, χρησιμοποιώντας την αρχικά κατά τη διάρκεια του 2ου Παγκοσμίου Πολέμου για την ελαχιστοποίηση του κόστους συντήρησης των στρατιωτικών δυνάμεων ενώ παράλληλα να μεγιστοποιείται η αποτελεσματικότητα στο πεδίο της μάχης. Η δουλειά του, πάντως, ουσιαστικά δεν διαδόθηκε ιδιαίτερα.

Λίγα χρόνια μετά, το 1947, ο **George Bernard Dantzig** (1914-2005) ουσιαστικά επανεφηύρε και ανέπτυξε περαιτέρω τον γραμμικό προγραμματισμό εισάγοντας τη μέθοδο Simplex, με την οποία - εκτός των άλλων - θα ασχοληθούμε παρακάτω. Ο Dantzig, αντίθετα με τους υπόλοιπους οικονομολόγους της εποχής του, αντιμετώπισε τον γραμμικό προγραμματισμό όχι μόνο σαν ένα ποιοτικό εργαλείο ανάλυσης οικονομικών φαινομένων, αλλά σαν μια μέθοδο που θα μπορούσε να προσφέρει ουσιαστικές λύσεις σε πραγματικά προβλήματα. Η μέθοδος Simplex είναι ακόμη και σήμερα ένα βασικό υπολογιστικό εργαλείο του γραμμικού προγραμματισμού, όπως και του ακέραιου. Οι Kantorovich και Dantzig, μαζί με τον **John von Neumann** (1903-1957), ο οποίος εισήγαγε την Δυϊκή Θεωρία, θεωρούνται οι ιδρυτές του γραμμικού προγραμματισμού.

Μεταφερόμαστε τώρα στις δεκαετίες του ’70 και του ’80, καθώς αυτές οι δεκαετίες χαρακτηρίζονται ως η αρχή σπουδαίων πραγμάτων σχετικά με τα προβλήματα γραμμικού αλλά και ακέραιου προγραμματισμού. Ήδη άλλωστε, η μέθοδος Simplex μετρούσε 20 χρόνια περίπου, ενώ, και μία καινούρια μέθοδος, ο αλγόριθμος Διακλάδωσης και Οριοθέτησης (Branch and Bound algorithm) είχε κάνει τα πρώτα της βήματα στα πλαίσια προβλημάτων ακέραιου προγραμματισμού. Με τον συγκεκριμένο αλγόριθμο θα ασχοληθούμε εκτενώς σε επόμενο κεφάλαιο. Εκείνη την περίοδο, όπως γράψαμε και στην εισαγωγή, η ανάπτυξη των υπολογιστών ήταν ραγδαία. Οι νέες δυνατότητες που τους συνόδευαν, όχι μόνο επέτρεψαν τα προβλήματα να λύνονται πιο γρήγορα, αλλά ίσως πιο σημαντικό ήταν το γεγονός ότι χωρίς τους περιορισμούς των προηγούμενων τεχνολογιών, θα μπορούσαν να δοκιμαστούν νέα πράγματα και να εφαρμοστούν νέες ιδέες. Η συνεχής χρήση και εφαρμογή των τεχνικών αυτών είναι κάτι που συνεχίζεται ακόμη και σήμερα με αδιάκοπους ρυθμούς, από κάθε είδους εταιρεία/οργανισμό κ.λπ.

2.2 ΓΕΝΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Τι είναι αυτό όμως που κάνει το συγκεκριμένο εργαλείο τόσο σημαντικό; Τι προβλήματα αντιμετωπίζονται μέσω αυτού; Ουσιαστικά, τα παραδείγματα ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού, που θα μελετήσουμε παρακάτω, θα μας δώσουν μία καλή εικόνα για τα προβλήματα που λύνει. Ας το προσεγγίσουμε όμως πρώτα λίγο πιο θεωρητικά.

Ο πιο συνήθης προβληματισμός για την εκτέλεση μίας εργασίας σε ένα ανταγωνιστικό περιβάλλον είναι η καλύτερη διαχείριση περιορισμένων πόρων προκειμένου να επιτύχουμε το βέλτιστο αποτέλεσμα. Η παραπάνω περιγραφή αντιπροσωπεύει ποικίλες δραστηριότητες, αρκετά διαφορετικές μεταξύ τους. Από την κατάλληλη τοποθέτηση εγκαταστάσεων παραγωγής, την κατανομή κρατικών πόρων για τις εγχώριες ανάγκες, την κατάρτιση επενδυτικού χαρτοφυλακίου, την βέλτιστη επιλογή μεθόδων αποστολής, τον σχεδιασμό γεωργικών δραστηριοτήτων μέχρι την αντιμετώπιση ασθενειών - και σε δεκάδες άλλα προβλήματα -, η τεχνική του γραμμικού προγραμματισμού είναι αυτή που θα μας βοηθήσει να επιτύχουμε τους σκοπούς μας. Όλες αυτές οι καταστάσεις έχουν ένα βασικό συστατικό: την κατανομή των πόρων σε δραστηριότητες, επιλέγοντας σωστά το επίπεδο αυτών των δραστηριοτήτων.

Ο γραμμικός προγραμματισμός (και κατ’ επέκταση ο ακέραιος) χρησιμοποιεί ένα μαθηματικό μοντέλο για να περιγράψει το πρόβλημα που μας απασχολεί. Ο όρος «γραμμικός» σημαίνει ότι όλες οι συναρτήσεις του μοντέλου πρέπει υποχρεωτικά να είναι γραμμικές συναρτήσεις. Η λέξη «προγραμματισμός» δεν χρησιμοποιείται με την έννοια του προγραμματισμού υπολογιστών, αλλά έχει την έννοια του σχεδιασμού. Ο όρος «ακέραιος» που προστίθεται στον ακέραιο προγραμματισμό διακρίνει τα προβλήματα των οποίων όλες ή μερικές από τις μεταβλητές του εκάστοτε προβλήματος λαμβάνουν ακέραιες (διακριτές) τιμές. Οπότε, ο γραμμικός προγραμματισμός περιλαμβάνει τον σχεδιασμό των δραστηριοτήτων προκειμένου να επιτύχουμε το βέλτιστο αποτέλεσμα, ένα αποτέλεσμα δηλαδή που είναι το καλύτερο δυνατό μεταξύ άλλων πιθανών αποτελεσμάτων.

Ενώ η διαχείριση των πόρων και η κατανομή τους στις διάφορες δραστηριότητες είναι ο πιο συνήθης τρόπος εφαρμογής του, ο γραμμικός προγραμματισμός έχει δεκάδες άλλες, εξίσου σημαντικές, εφαρμογές. Στην πραγματικότητα, οποιοδήποτε πρόβλημα μπορούμε να το περιγράψουμε με το μαθηματικό μοντέλο του γραμμικού προγραμματισμού, τότε μπορούμε να το αντιμετωπίσουμε κιόλας με αυτή την τεχνική. Επιπλέον, ένας χαρακτηριστικός τρόπος λύσης, η μέθοδος Simplex που αναφέραμε και πιο πάνω, μας επιτρέπει να λύνουμε προβλήματα τεράστιου μεγέθους.

2.3 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Το μοντέλο του γραμμικού προγραμματισμού περιλαμβάνει:

- **Τις μεταβλητές απόφασης** (decision variables)
- **Την αντικειμενική συνάρτηση** (objective function)
- **Τους περιορισμούς** (constraints)

Οι μεταβλητές απόφασης ορίζουν με σαφή τρόπο τις ποσότητες που πρέπει να υπολογίσουμε και θα αποτελέσουν τη λύση του προβλήματός μας. Ο ορισμός των μεταβλητών απόφασης θεωρείται από τα πιο δύσκολα κομμάτια της διαδικασίας μοντελοποίησης ενός προβλήματος, κάτι που έχει ως αποτέλεσμα ανεπαρκείς ή μη ρεαλιστικές λύσεις. Συνήθως, συμβολίζουμε τις μεταβλητές με το γράμμα x και με έναν δείκτη j, ώστε να ξεχωρίζουν επαρκώς.

Η αντικειμενική συνάρτηση προσπαθεί να εκφράσει με έναν μετρήσιμο τρόπο τον στόχο - επιδίωξη του προβλήματος και τελικά βελτιστοποιεί (μεγιστοποιεί ή ελαχιστοποιεί) το κριτήριο απόδοσης που θέλουμε (ελαχιστοποίηση κόστους, μεγιστοποίηση κέρδους κ.λπ.).

Οι περιορισμοί είναι εξισώσεις ή ανισώσεις που αντιστοιχούν στους περιορισμούς του φυσικού προβλήματος. Οφείλουμε να παρατηρήσουμε τους παράγοντες του προβλήματος που απαιτούν κάποιου είδους όρια στις τιμές τους. Δεν θα πρέπει να ξεχνάμε και τον περιορισμό της μη αρνητικότητας των τιμών των μεταβλητών μας, ο οποίος προκύπτει από την φυσική ερμηνεία του προβλήματος.

Εδώ θα πρέπει να τονίσουμε την προσθήκη του περιορισμού των ακέραιων τιμών, εφ’ όσον θα επιλύσουμε κάποιο πρόβλημα με χρήση ακέραιου προγραμματισμού. Αν όλες οι τιμές απαιτείται να είναι ακέραιες, τότε έχουμε ένα πρόβλημα καθαρού ακέραιου προγραμματισμού (Pure Integer Linear Problem – Pure ILP). Αν μέρος των μεταβλητών απαιτείται να λαμβάνουν ακέραιες τιμές, τότε έχουμε ένα μεικτό πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού (Mixed Integer Linear Problem – Mixed ILP).

Επιπλέον, θα πρέπει να αναφερθούμε και στα προβλήματα εκείνα όπου οι μεταβλητές μπορούν να λαμβάνουν αποκλειστικά τις τιμές «ναι» ή «όχι», κάτι που προσπερνάμε αντιστοιχίζοντας αυτές τις τιμές με «1» ή «0» αντίστοιχα. Τέτοιες μεταβλητές ονομάζονται δυαδικές μεταβλητές (binary variables) ή «0-1» μεταβλητές. Αυτά τα προβλήματα τα ονομάζουμε δυαδικά προβλήματα ακέραιου προγραμματισμού (Binary ILP – BILP).

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω η μαθηματική μοντελοποίηση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού παίρνει τη μορφή:

Αντικειμενική συνάρτηση:

Να μεγιστοποιηθεί ή να ελαχιστοποιηθεί η αντικειμενική συνάρτηση:

$$\text{optimize } z=f(x)=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{array}{lcc}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & \{\leq,=,\geq\} & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & \{\leq,=,\geq\} & b_2 \\
. & . & . \\
. & . & . \\
. & . & . \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & \{\leq,=,\geq\} & b_m
\end{array}$$

και

$$x_j \geq 0,\ j=1,2,\ldots.,n$$

ενώ σε πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού προσθέτουμε

$$x_j \in \mathbb{Z}$$

με a_{ij}, b_i, c_j γνωστές σταθερές, ενώ για κάθε περιορισμό μπορεί να ισχύει μόνο μία από τις σχέσεις ≤, =, ≥.

2.4 ΠΡΟΫΠΟΘΕΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Υπάρχουν κάποιες προϋποθέσεις (ή αλλιώς υποθέσεις/assumptions) που θα πρέπει να ικανοποιούνται, προκειμένου να χρησιμοποιηθούν οι τεχνικές του γραμμικού προγραμματισμού για την επίλυση προβλημάτων. Αυτές είναι οι εξής:

- ✓ Γραμμικότητα (Linearity)
- ✓ Αναλογικότητα (Proportionality)
- ✓ Προσθετικότητα (Additivity)
- ✓ Διαιρετότητα (Divisibility)
- ✓ Βεβαιότητα - Προσδιορισμένοι Συντελεστές (Certainty)

Η γραμμικότητα αφορά το γεγονός πως η αντικειμενική συνάρτηση, αλλά και οι διάφοροι περιορισμοί θα πρέπει να είναι 1^ου^ βαθμού συναρτήσεις ως προς τις μεταβλητές απόφασης x_j. Σε αντίθετη περίπτωση θα έχουμε μοντέλο μη γραμμικού προγραμματισμού.

Η αναλογικότητα είναι μία υπόθεση που αφορά την αντικειμενική συνάρτηση αλλά και τις μεταβλητές. Είναι συνηθισμένο φαινόμενο να συναντούμε μη γραμμικά προβλήματα, στην περίπτωση που η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης και η χρησιμοποίηση των διαθέσιμων μέσων δεν είναι ανάλογα ποσά ως προς τις ποσότητες της κάθε μεταβλητής. Εάν όμως η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι το άθροισμα των ατομικών συνεισφορών κάθε μεταβλητής και αν το αριστερό μέρος κάθε περιορισμού ισούται με το άθροισμα της συμβολής κάθε μεταβλητής στο μοντέλο, τότε ικανοποιείται η συνθήκη της αναλογικότητας.

Σχετικά με την υπόθεση της προσθετικότητας, απαιτούμε από κάθε συνάρτηση του γραμμικού μοντέλου μας (είτε πρόκειται για την αντικειμενική συνάρτηση, είτε για τους περιορισμούς που έχουμε) να προκύπτει ότι το συνολικό κέρδος από τις δραστηριότητες x_j ισούται με το συνολικό άθροισμα των επί μέρους κερδών της κάθε δραστηριότητας.

Η απαίτηση της διαιρετότητας μας ορίζει πως κάθε μεταβλητή απόφασης σε ένα μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού μπορεί να πάρει οποιαδήποτε ρητή τιμή, αρκεί να ικανοποιούνται οι περιορισμοί του μοντέλου. Στην περίπτωση που δεν ικανοποιείται αυτή η προϋπόθεση, χρησιμοποιούμε την τεχνική του ακέραιου προγραμματισμού, όπως θα δούμε εκτενώς παρακάτω.

Τέλος, μία ακόμη εξίσου σημαντική προϋπόθεση για την εφαρμογή της θεωρίας του γραμμικού προγραμματισμού, είναι και αυτή της βεβαιότητας, που μας ορίζει πως οι τιμές των παραμέτρων πρέπει να είναι απολύτως γνωστές σταθερές. Επειδή όμως, τα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού, συνήθως, χρησιμοποιούνται για την σωστή λήψη μελλοντικών αποφάσεων, είναι επόμενο πως και οι παραπάνω παράμετροι επιλέγονται βασιζόμενοι σε μετέπειτα καταστάσεις, κάτι που έχει ως αποτέλεσμα να μην υπάρχει απόλυτη βεβαιότητα για αυτές. Για να ξεπεράσουμε αυτό το πρόβλημα, διεξάγουμε μία Ανάλυση Ευαισθησίας (Sensitivity Analysis), η οποία μας επιτρέπει να αναγνωρίσουμε ποιες παράμετροι δεν μπορούν να μεταβληθούν μετέπειτα.

2.5 ΤΥΠΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΚΕΡΑΙΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Σε αυτή την παράγραφο θα παρουσιάσουμε μερικά ενδεικτικά προβλήματα ακέραιου προγραμματισμού. Τα ILP προβλήματα μοντελοποιούνται κατά παρόμοιο τρόπο με τα LP προβλήματα, με τον επιπλέον περιορισμό, βεβαίως, ότι μία ή περισσότερες μεταβλητές λαμβάνουν ακέραιες τιμές. Χαρακτηριστικά έχουμε τα προβλήματα:

- της εφάπαξ χρέωσης (fixed charged problem)
- της διαχείρισης κεφαλαίου (capital budgeting problem)
- της ελάχιστης ποσότητας (minimum batch size problem)
- των διαζευκτικών περιορισμών (either-or constraints problem)
- της επέκτασης δυναμικότητας ενός εργοστασίου (capacity expansion problem)
- χωροθέτησης και μεγέθους νέων εγκαταστάσεων (facilities size and location)
- της επιλογής κατάλληλης τοποθεσίας (site selection) κ.ά.

Ας προχωρήσουμε στην παρουσίαση κάποιων από τα παραπάνω:

2.5.1 Το πρόβλημα της εφάπαξ χρέωσης (fixed charged problem[1])

Η εταιρεία αθλητικών ειδών Abibas παράγει τρία είδη ποδοσφαιρικού εξοπλισμού: φανέλες, σορτς και αθλητικές φόρμες. Για την κατασκευή του κάθε είδους απαιτείται και ο κατάλληλος εξοπλισμός, ο οποίος ενοικιάζεται και έχει τα εξής κόστη: 200€/εβδομάδα για τις φανέλες, 150€/εβδομάδα για τα σορτς και 100€/εβδομάδα για τις φόρμες. Για την παραγωγή του κάθε είδους φυσικά απαιτούνται και κάποιες ώρες εργασίας, όπως και κάποια τετραγωνικά μέτρα υφάσματος, όπως φαίνονται στον Πίνακα 2.5.1.1:

Είδος	Ώρες Εργασίας	Ύφασμα (m^2)
Φανέλες	3	4
Σορτς	2	3
Φόρμες	6	4

Πίνακας 2.5.1.1

Κάθε εβδομάδα η Abibas μπορεί να διαθέσει 150 ώρες εργασίας και 160 m^2 υφάσματος, ενώ στον Πίνακα 2.5.1.2 αναγράφονται τα μεταβλητά κόστη ανά μονάδα προϊόντος αλλά και οι τιμές πώλησής τους.

Είδος	Τιμή (€)	Μεταβλητό Κόστος (€)
Φανέλες	12	6
Σορτς	8	4
Φόρμες	15	8

Πίνακας 2.5.1.2

Θα κάνουμε την μοντελοποίηση του προβλήματος ώστε η λύση του να μας μεγιστοποιεί τα εβδομαδιαία κέρδη της Abibas.

Αρχικά θα ορίσουμε τις μεταβλητές μας ως εξής:

$x_1 =$ αριθμός φανελών που παράγονται ανά εβδομάδα
$x_2 =$ αριθμός σορτς που παράγονται ανά εβδομάδα
$x_3 =$ αριθμός φορμών που παράγονται ανά εβδομάδα

Έπειτα παρατηρούμε ότι το κόστος της ενοικίασης των μηχανημάτων εξαρτάται αποκλειστικά από το αν κάποιο είδος θα

[1] Winston L. Wayne (2004). *Operations Research, Applications and Algorithms*, εκδ. Duxbury Press

παραχθεί και όχι από την παραγόμενη ποσότητα. Οπότε ορίζουμε τις παρακάτω μεταβλητές:

$$y_1 = \begin{cases} 1 \text{ αν παραχθούν φανέλες} \\ 0 \text{ σε αντίθετη περίπτωση} \end{cases}$$

$$y_2 = \begin{cases} 1 \text{ αν παραχθούν σορτς} \\ 0 \text{ σε αντίθετη περίπτωση} \end{cases}$$

$$y_2 = \begin{cases} 1 \text{ αν παραχθούν φόρμες} \\ 0 \text{ σε αντίθετη περίπτωση} \end{cases}$$

Τα συνολικά εβδομαδιαία κέρδη της Abibas θα ισούνται με (τα κέρδη από τις πωλήσεις) – (τα μεταβλητά κόστη) – (το ενοίκιο των μηχανημάτων).

Κέρδη από τις πωλήσεις = $12x_1 + 8x_2 + 15x_3$
Μεταβλητά κόστη = $6x_1 + 4x_2 + 8x_3$
Το κόστος του ενοικίου = $200y_1 + 150y_2 + 100y_3$

Εδώ έχουμε και την εφάπαξ χρέωση (fixed charge) στο πρόβλημά μας. Το κόστος ενοικίασης είναι ανεξάρτητο από την ποσότητα των μονάδων που θα παραχθούν από αυτό. Τελικά τα εβδομαδιαία κέρδη είναι:

$$z = (12x_1 + 8x_2 + 15x_3) - (6x_1 + 4x_2 + 8x_3) - (200y_1 + 150y_2 + 100y_3)$$

Δεν πρέπει όμως να ξεχάσουμε και τους περιορισμούς στις διαθέσιμες εργατικές ώρες και στα διαθέσιμα m^2 υφάσματος:

$3x_1 + 2x_2 + 6x_3 \le 150$ (περιορισμός εργατικών ωρών)
$4x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 160$ (περιορισμός διαθέσιμου υφάσματος)

Φυσικά, έχουμε και τους περιορισμούς μη αρνητικότητας για τις μεταβλητές $x_j, j = 1,2,3$, ενώ θα πρέπει να είναι και ακέραιες αυτές οι τιμές. Επίσης οι $y_j, j = 1,2,3$παίρνουν τιμές 0 ή 1.

Εδώ πρέπει να προσέξουμε πως πρέπει με κάποιον τρόπο να εισαχθούν και οι μεταβλητές $y_j, j=1,2,3$ στους περιορισμούς. Σε αντίθετη περίπτωση, κατά την επίλυση του προβλήματος, θα επιλεχθεί η τιμή 0 καθώς θα μας δώσει καλύτερη τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση, κάτι που, όμως, δεν είναι εφικτό, καθώς αυτό θα σήμαινε ότι η Abibas θα κατασκεύαζε φανέλες και φόρμες χωρίς να πλήρωνε για την ενοικίαση των αντίστοιχων μηχανημάτων. Αυτό το πρόβλημα θα λυθεί προσθέτοντας τους παρακάτω περιορισμούς:

$$\begin{aligned} x_1 &\le My_1 \\ x_2 &\le My_2 \\ x_3 &\le My_3 \end{aligned}$$

όπου M ένας πολύ μεγάλος αριθμός της επιλογής μας (πχ. $M=200$).

Τελικά, έχουμε το πρόβλημα:

Αντικειμενική Συνάρτηση:

$$\max z = 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 200y_1 - 150y_2 - 100y_3$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{aligned} & 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 \le 150 \\ & 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 160 \\ & x_1 \le 200y_1 \\ & x_2 \le 200y_2 \\ & x_3 \le 200y_3 \\ & x_j \ge 0,\ j=1,2,3 \\ & x_j \text{ ακέραιες} \\ & y_j = 0 \text{ ή } 1,\ j=1,2,3 \end{aligned}$$

Η λύση του προβλήματος θα ήταν $z=75$€, $x_3=25$, $y_3=1$, η Abibas δηλαδή θα έπρεπε να κατασκευάζει 25 φόρμες την εβδομάδα.

2.5.2 Το πρόβλημα της διαχείρισης κεφαλαίου (capital budgeting problem[2])

Η StockCo μελετά την προώθηση τεσσάρων επενδύσεων. Η πρώτη (1) έχει Καθαρή Παρούσα Αξία (ΚΠΑ – Net Present Value) 16.000€, η δεύτερη (2) 22.000€, η τρίτη (3) 12.000€ και η τέταρτη (4) 8.000€. Κάθε επένδυση απαιτεί κάποιο αρχικό κεφάλαιο. Η πρώτη 5.000€, η δεύτερη 7.000€, η τρίτη 4.000€ και η τέταρτη 3.000€. Το διαθέσιμο κεφάλαιο που έχουμε είναι 14.000€. Να γίνει η μοντελοποίηση του προβλήματος ώστε η λύση του να επιτρέπει στην StockCo να μεγιστοποιήσει την Καθαρή Παρούσα Αξία των επενδύσεων 1 έως 4.

Πρώτα, θα ορίσουμε τις μεταβλητές μας. Στην συγκεκριμένη περίπτωση θα χρησιμοποιήσουμε δυαδικές μεταβλητές ως εξής:

$$x_j\,(j=1,2,3,4)=\begin{cases}1, & \textit{αν γίνει η επένδυση } j\\ 0, & \textit{σε κάθε άλλη περίπτωση}\end{cases}$$

Για παράδειγμα θα είναι $x_3=1$ αν προχωρήσει με την επένδυση 3 και $x_4=0$ αν δεν προχωρήσει με την επένδυση 4.

Τώρα θα προχωρήσουμε στην αντικειμενική μας συνάρτηση. Η συνολική Καθαρή Παρούσα Αξία των επενδύσεων είναι (σε χιλ. ευρώ):

$$z=16x_1+22x_2+12x_3+8x_4,$$

την οποία και θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε. Αυτό σημαίνει, ότι αν η StockCo αποφασίσει να προχωρήσει τις επενδύσεις 1 και 4, θα προκύψει Καθαρή Αξία: $16\cdot1+22\cdot0+12\cdot0+8\cdot1=24$ χιλιάδες ευρώ, όπου δηλαδή $(x_1,x_2,x_3,x_4)=(1,0,0,1)$.

Έχουμε όμως και τον εξής περιορισμό (σε χιλ. ευρώ):

$$5x_1+7x_2+4x_3+3x_4\le 14,$$

[2] Winston L. Wayne (2004). *Operations Research, Applications and Algorithms*, εκδ. Duxbury Press

καθώς υπάρχει το αρχικό κεφάλαιο των 14.000€ που δεν μπορεί να ξεπεραστεί.

Προκύπτει το παρακάτω πρόβλημα:

Αντικειμενική Συνάρτηση:

$$\max z = 16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 8x_4$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 14$$
$$x_j = 0 \text{ ή } 1,\ j = 1,2,3,4$$

Φυσικά, θα ήταν ιδιαίτερα αναμενόμενο να υπήρχαν και κάποιοι επιπλέον περιορισμοί για την εταιρεία. Για παράδειγμα, έστω ότι η εταιρεία θα πρέπει να προχωρήσει το πολύ σε δύο projects. Τότε, απλά θα έπρεπε να προσθέσουμε τον παρακάτω περιορισμό, ο οποίος αποκλείει την επιλογή περισσοτέρων των δύο επενδύσεων:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 2$$

Ένα άλλο παράδειγμα θα ήταν το εξής: αν η StockCo προχωρήσει την επένδυση 2, τότε θα πρέπει να επιλέξει και την 1. Εδώ θα πρέπει να προσθέσουμε τον περιορισμό:

$$x_2 \leq x_1 \text{ ή } x_2 - x_1 \leq 0$$

Αν για παράδειγμα έχουμε $x_2 = 1$, τότε αναγκαστικά θα είναι και $x_1 \geq 1$, και δεδομένου ότι έχουμε δυαδικές μεταβλητές, τότε θα έχουμε $x_1 = 1$.

Τέλος, αν η StockCo θα έπρεπε να επιλέξει μεταξύ δύο επενδύσεων, π.χ. μεταξύ της 2 και της 4, τότε θα προσθέταμε τον περιορισμό:

$$x_2 + x_4 = 1$$

2.5.3 Το πρόβλημα των διαζευκτικών περιορισμών (either-or constraints[3])

Η αυτοκινητοβιομηχανία Fort Motor Company έχει στα σκαριά την παραγωγή τριών νέων μοντέλων αυτοκινήτων για τις εξής κατηγορίες: compact, μεσαία και οικογενειακά. Στον Πίνακα 2.5.3.1 που ακολουθεί φαίνονται οι απαραίτητοι πόροι που χρειάζονται, οι ώρες εργασίας αλλά και τα έσοδα από κάθε κατηγορία:

	Κατηγορία Αυτοκινήτου		
	Compact	**Μεσαία**	**Οικογενειακά**
Χάλυβας (σε τόνους)	1.5	3	5
Ώρες εργασίας	30	25	40
Κέρδος (σε χιλ. €)	2	3	4

Πίνακας 2.5.3.1

Διαθέσιμοι υπάρχουν 6.000 τόνοι χάλυβα και 60.000 ώρες εργασίας, ενώ θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας ότι θα πρέπει να κατασκευάζονται τουλάχιστον 1.000 αυτοκίνητα από κάθε κατηγορία, αν αποφασιστεί η παραγωγή αυτού του είδους. Θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε το κέρδος της Fort.

Οι μεταβλητές μας θα είναι οι εξής:

$x_1 =$ αριθμός παραγόμενων αυτοκινήτων compact κατηγορίας
$x_2 =$ αριθμός παραγόμενων αυτοκινήτων μεσαίας κατηγορίας
$x_3 =$ αριθμός παραγόμενων οικογενειακών αυτοκινήτων

Προκύπτει άμεσα ότι θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε την συνάρτηση:

$$z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

Με περιορισμούς για κάθε είδος:

$$x_1 \le 0 \text{ ή } x_1 \ge 1000$$
$$x_2 \le 0 \text{ ή } x_2 \ge 1000$$
$$x_3 \le 0 \text{ ή } x_3 \ge 1000$$

[3] Winston L. Wayne (2004). *Operations Research, Applications and Algorithms*, εκδ. Duxbury Press

Επίσης, έχουμε και τους περιορισμούς χάλυβα και ωρών εργασίας:

$$1.5x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 6.000$$
$$30x_1 + 25x_2 + 40x_3 \le 60.000$$

Ενώ, φυσικά, οι μεταβλητές πρέπει να παίρνουν ακέραιες και θετικές τιμές.

Οι τρεις πρώτοι περιορισμοί μας είναι διαζευκτικοί και πρέπει να εκφραστούν με κατάλληλο τρόπο. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε, όπως και πριν, έναν πολύ μεγάλο αριθμό M και μία δυαδική μεταβλητή y, και να αντικαταστήσουμε τους διαζευκτικούς περιορισμούς μας, όπως φαίνεται παρακάτω:

$$x_1 \le My_1$$
$$1.000 - x_1 \le M(1 - y_1)$$
$$y_1 = 0 \text{ ή } 1$$

$$x_2 \le My_2$$
$$1.000 - x_2 \le M(1 - y_2)$$
$$y_2 = 0 \text{ ή } 1$$

$$x_3 \le My_3$$
$$1.000 - x_3 \le M(1 - y_3)$$
$$y_3 = 0 \text{ ή } 1$$

Ενδεικτικά μπορούμε να επιλέξουμε $M = 10.000$. Αν $y_1 = 1$ τότε θα έχουμε ότι $x_1 \le 10.000$ και $x_1 \ge 1.000$, κάτι που επιθυμούμε. Αν $y_1 = 0$ τότε θα είναι $x_1 \le 0$ και $x_1 \ge -1.000$ ο οποίος θα υπερκαλύπτεται από τον περιορισμό μη αρνητικότητας.

Το τελικό πρόβλημα είναι:

Αντικειμενική Συνάρτηση:

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{gathered}
x_1 \leq 10.000 y_1 \\
1.000 - x_1 \leq 10.000(1 - y_1) \\
x_2 \leq 10.000 y_2 \\
1.000 - x_2 \leq 10.000(1 - y_2) \\
x_3 \leq 10.000 y_3 \\
1.000 - x_3 \leq 10.000(1 - y_3) \\
1.5x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 6.000 \\
30x_1 + 25x_2 + 40x_3 \leq 60.000 \\
x_j \geq 0,\ j = 1,2,3 \\
x_j \text{ ακέραιες} \\
y_j = 0 \text{ ή } 1,\ j = 1,2,3
\end{gathered}$$

Η βέλτιστη λύση του παραπάνω προβλήματος είναι $z = 6.000$, $x_2 = 2.000$, $y_2 = 1$ και $x_1 = x_3 = y_1 = y_3 = 0$, δηλαδή καταλήγουμε ότι η Fort θα έχει τα περισσότερα κέρδη αν ξεκινήσει την παραγωγή 2.000 μεσαίας κατηγορίας αυτοκινήτων. Αν δεν είχαμε τον περιορισμό των 1.000 αυτοκινήτων ανά κατηγορία, τότε η Fort θα έπρεπε να κατασκευάσει 570 αυτοκίνητα compact και 1.715 μεσαίας κατηγορίας.

Ολοκληρώνουμε αυτή την παρουσίαση ενδεικτικών προβλημάτων ILP με το αυτό της επιλογής κατάλληλης τοποθεσίας (site selection).

2.5.4 Το πρόβλημα της επιλογής κατάλληλης τοποθεσίας (site selection[4])

Η γαλακτοβιομηχανία Κίσσαβος εξετάζει το ενδεχόμενο κατασκευής δύο νέων εργοστασίων για την παραγωγή της οικογένειας των προϊόντων της. Έχει τις επιλογές της πόλης των Ιωαννίνων ή του Καρπενησίου (ή την κατασκευή και στις δύο πόλεις) ενώ θα προχωρήσει και στην κατασκευή και μίας το πολύ αποθήκης, η οποία όμως θα βρίσκεται αναγκαστικά εκεί που θα έχει δημιουργηθεί κάποιο εργοστάσιο.

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα καλούμαστε να δώσουμε απαντήσεις τύπου «Ναι» ή «Όχι». Για παράδειγμα πρέπει να αποφασίσουμε αν θα πρέπει να κατασκευαστεί εργοστάσιο στα Ιωάννινα ή αν πρέπει να κατασκευαστεί αποθήκη στο Καρπενήσι κ.ο.κ.. Με αυτόν τον τρόπο θα ορίσουμε και τις μεταβλητές μας, ενώ η μορφή τους θα είναι δυαδική, όπως θα δούμε παρακάτω. Ο ορισμός τους αλλά και τα δεδομένα του προβλήματος φαίνονται στον Πίνακα 2.5.4.1:

Αριθμός Απόφασης	**Ερώτηση τύπου Ναι ή Όχι;**	**Μεταβλητή Απόφασης**	**Καθαρή Αξία**	**Απαιτούμενο Κεφάλαιο**
1	Εργοστάσιο/Ιωάννινα	x_1	9 εκ. €	6 εκ. €
2	Εργοστ./Καρπενήσι	x_2	5 εκ. €	3 εκ. €
3	Αποθήκη/Ιωάννινα	x_3	6 εκ. €	5 εκ. €
4	Αποθήκη/Καρπενήσι	x_4	4 εκ. €	2 εκ. €
				Διαθέσιμο κεφάλαιο: 10 εκ. €

Πίνακας 2.5.4.1

Ορισμός των μεταβλητών:

$$x_j\,(j=1,2,3,4)=\begin{cases}1, & \textit{η απόφαση } j \textit{ είναι θετική}\\ 0, & \textit{η απόφαση } j \textit{ είναι αρνητική}\end{cases}$$

Ο σκοπός μας είναι να μεγιστοποιήσουμε την συνάρτηση:

$$z=9x_1+5x_2+6x_3+4x_4,$$

[4] Hillier S. F., Lieberman G. J. (2001). *Introduction to Operations Research, 7th Edition*, Mc-Graw – Hill, σελ. 577-578

η οποία μας δίνει την συνολική Καθαρή Παρούσα Αξία (Κ.Π.Α.) των επιλογών μας.

Ο πρώτος μας περιορισμός είναι αυτός του διαθέσιμου κεφαλαίου:

$$6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 10,$$

ενώ εξαιτίας του περιορισμού της μιας το πολύ αποθήκης που μπορούμε να κατασκευάσουμε, πρέπει να προσθέσουμε και τον περιορισμό:

$$x_3 + x_4 \leq 1,$$

καθώς οι δύο μεταβλητές είναι αμοιβαία αποκλειόμενες. Επιπλέον, οι x_3, x_4 είναι εξαρτημένες μεταβλητές από τις x_1, x_2 αντίστοιχα, καθώς αν δεν υπάρχει εργοστάσιο δεν θα κατασκευαστεί αποθήκη. Οπότε προσθέτουμε και τους παρακάτω περιορισμούς:

$$x_3 \leq x_1$$
$$x_4 \leq x_2$$

Καταλήγουμε στο πρόβλημα:

Αντικειμενική συνάρτηση:

$$\max z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 10$$
$$x_3 + x_4 \leq 1$$
$$x_3 \leq x_1$$
$$x_4 \leq x_2$$
$$x_j = 0 \text{ ή } 1, \; j = 1,2,3$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX

“The tremendous power of the Simplex Method is a constant surprise to me“.

«Οι τεράστιες δυνατότητες της μεθόδου Simplex με εκπλήσσουν διαρκώς».

- G. B. Dantzig

3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, και συγκεκριμένα στην παράγραφο 2.1 των εισαγωγικών στοιχείων του γραμμικού προγραμματισμού, αναφέραμε για πρώτη φορά τη μέθοδο Simplex, ως ένα εργαλείο επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού.

Ο **George Bernard Dantzig**, ένας εκ των τριών πατέρων του Γραμμικού Προγραμματισμού, ήταν αυτός όπου, δουλεύοντας πάνω στο Project SCOOP (Scientific Computation of Optimal Programs) για λογαριασμό της Πολεμικής Αεροπορίας της Αμερικής και του Πενταγώνου, ανέπτυξε το καλοκαίρι του 1947 τη μέθοδο Simplex. Την ίδια εποχή, στη Σοβιετική Ένωση ο **Leonid Kantorovich** είχε ήδη παρουσιάσει μια παρόμοια μέθοδο, η οποία όμως δεν έγινε γνωστή στην επιστημονική κοινότητα. Επίσης, και τον **Joseph Fourier** στις αρχές σχετικά του 18^{ου} αιώνα τον είχαν απασχολήσει παρόμοιες μέθοδοι.

Αυτό, όμως, που έκανε την μέθοδο του Dantzig να ξεχωρίσει ήταν η ταυτόχρονη ανάπτυξη των υπολογιστών, όπου επέτρεψε την χρήση της μεθόδου σε πραγματικά προβλήματα μεγάλου μεγέθους, αλλά και η ανάπτυξη των οικονομικών μοντέλων εισροών/εκροών του **Wassily Leontief**, το οποίο επέτρεπε την παρουσίαση οικονομιών με κάποια δομή γραμμικού προγραμματισμού.

Πρακτικά λοιπόν, η αλγεβρική μέθοδος Simplex είναι ένας αλγόριθμος που μας επιτρέπει να λύνουμε αποτελεσματικά προβλήματα βελτιστοποίησης γραμμικού προγραμματισμού, τα οποία μπορεί να περιέχουν ακόμη και εκατοντάδες μεταβλητές, με άλλους τόσους περιορισμούς. Η μέθοδος Simplex έχει ως κύριο χαρακτηριστικό το γεγονός ότι είναι επαναληπτική. Κάθε επανάληψη της μεθόδου μετακινεί την προηγούμενη λύση σε ένα νέο ακρότατο σημείο, που έχει την ικανότητα να βελτιώνει την αξία της αντικειμενικής συνάρτησης. Η διαδικασία ολοκληρώνεται, όταν δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί καμία περαιτέρω βελτίωση[5]. Για την αξιοποίηση της μεθόδου η χρήση υπολογιστών είναι απαραίτητη, καθώς σε προβλήματα μεγάλου μεγέθους οι υπολογισμοί, που απαιτούνται, είναι αδύνατο να γίνουν με άλλον τρόπο.

3.2 ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Στην παράγραφο 2.3 - μεταξύ άλλων - παρουσιάσαμε το μαθηματικό μοντέλο του γενικού προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού:

Αντικειμενική συνάρτηση:

Να μεγιστοποιηθεί ή να ελαχιστοποιηθεί η αντικειμενική συνάρτηση:

$$\text{optimize } z=f(x)=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n$$

Υπό τους περιορισμούς

$$\begin{array}{lcc}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & \{\leq,=,\geq\} & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & \{\leq,=,\geq\} & b_2 \\
. & . & . \\
. & . & . \\
. & . & . \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & \{\leq,=,\geq\} & b_m
\end{array}$$

και

$$x_j\geq 0,\ j=1,2,\ldots.,n$$

[5] Κολέτσος Ι., Στογιάννης Δ. (2012). *Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα*, εκδ. Συμεών, σελ. 118.

ενώ σε πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού προσθέτουμε

$$x_j \in \mathbb{Z}$$

με a_{ij}, b_i, c_j γνωστές σταθερές, ενώ για κάθε περιορισμό μπορεί να ισχύει μόνο μία από τις σχέσεις ≤, =, ≥.

Κανονική μορφή (standard form) σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού έχουμε αν επιβάλλουμε τις παρακάτω συνθήκες:

- Όλες οι μεταβλητές να είναι μη αρνητικές
- Όλοι οι περιορισμοί να είναι ισότητες με μη αρνητικό δεξιό μέλος (εξαιρούνται οι περιορισμοί μη αρνητικότητας)

Όταν αναγνωρίζουμε τους διάφορους περιορισμούς κατά την διάρκεια μελέτης ενός προβλήματος Γ.Π. αρχικά είναι σύνηθες να τους εκφράζουμε με τη βοήθεια ανισοτήτων. Για να φέρουμε όμως το πρόβλημα στην κανονική μορφή θα πρέπει να μετατρέψουμε τις ανισότητες σε ισότητες. Αυτό το επιτυγχάνουμε εισάγοντας στις σχέσεις μας κάποιες νέες μη αρνητικές μεταβλητές, τις λεγόμενες **περιθώριες μεταβλητές**.

Η διαδικασία αυτής της μετατροπής γίνεται ως εξής:

i) Στην περίπτωση ανισοτήτων της μορφής

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ik}x_k \leq b_i$$

θα προσθέσουμε στο αριστερό μέλος του περιορισμού μία μη αρνητική περιθώρια μεταβλητή, την οποία θα συμβολίσουμε με s και η οποία είναι γνωστή ως **χαλαρή μεταβλητή** (slack variable). Ο περιορισμός λαμβάνει τώρα τη μορφή:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ik}x_k + s = b_i \,,\ s \geq 0$$

ii) Στην περίπτωση ανισοτήτων της μορφής

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ik}x_k \geq b_i$$

θα αφαιρέσουμε από το αριστερό μέλος του περιορισμού μία μη αρνητική περιθώρια μεταβλητή s, η οποία αυτή τη φορά είναι γνωστή ως **πλεονασματική μεταβλητή** (surplus variable). Ο περιορισμός τώρα παίρνει τη μορφή:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ik}x_k - s = b_i\,,\ s \geq 0$$

Τέλος, και στις δύο περιπτώσεις, αν το δεξιό μέλος είναι αρνητικό (κάτι που δεν θέλουμε όπως προκύπτει από την πρώτη συνθήκη), απλά πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με -1.

Ένα επιπλέον σημείο, που θέλει προσοχή, είναι οι περιπτώσεις όπου δεν ξέρουμε τι τιμή μπορεί να λάβει μία μεταβλητή (θετική, αρνητική ή μηδέν). Όταν συναντήσουμε μία τέτοια μεταβλητή, π.χ. την x_i, θα την εκφράσουμε με τη βοήθεια δύο άλλων μη αρνητικών μεταβλητών, των x_i^+ και x_i^-, ως εξής: $x_i = x_i^+ - x_i^-$, με $x_i^+, x_i^- \geq 0$.

Αν $x_i^+ > 0$ και $x_i^- = 0$, τότε η x_i^+ αντιπροσωπεύει έλλειμμα, αλλιώς αν $x_i^- > 0$ και $x_i^+ = 0$, τότε η x_i^- αντιπροσωπεύει πλεόνασμα. x_i^+, x_i^-

Τελικά, η κανονική μορφή του γενικού προβλήματος Γ.Π. γράφεται (με τη μορφή πινάκων):

$$\max \text{ (ή min) } z = f(x) = c^T x \qquad (3.1)$$
$$Ax = b \ (b \geq 0) \qquad (3.2)$$
$$x \geq 0 \qquad (3.3)$$

όπου A το διάνυσμα των συντελεστών (a_{ij}) διαστάσεων $m \times l$, b, c, x διανύσματα διαστάσεων $m \times l$, $l \times 1$ και $l \times 1$ αντίστοιχα, και c^T το ανάστροφο διάνυσμα του c.

Η κανονική μορφή μας δίνει τις εξής λύσεις:

- ✓ Λύση (solution) ενός προβλήματος Γ.Π. ονομάζεται κάθε λύση του συστήματος (3.2), δηλαδή κάθε διάνυσμα x, που ικανοποιεί το σύστημα.
- ✓ Δυνατή ή εφικτή λύση (feasible solution) ενός προβλήματος Γ.Π. ονομάζεται κάθε λύση του συστήματος (3.2), που ικανοποιεί και τους περιορισμούς μη αρνητικότητας (3.3).
- ✓ Βέλτιστη εφικτή λύση (optimal feasible solution) ενός προβλήματος Γ.Π. ονομάζεται κάθε εφικτή λύση, η οποία βελτιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος.

3.3 ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

Πριν αναφέρουμε τα βήματα του αλγόριθμου Simplex (και πιο συγκεκριμένα του πρωταρχικού αλγόριθμου Simplex - primary Simplex algorithm) είναι χρήσιμο να αναφέρουμε πρώτα κάποιους χρήσιμους ορισμούς και συμβολισμούς[6].

Με m θα συμβολίζουμε το πλήθος των εξισώσεων του συστήματος, ενώ με n τον αριθμό των μεταβλητών. Στην πλειοψηφία των προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού θα έχουμε m<n, οπότε και προκύπτει απειρία λύσεων. Με $B=(b_1, b_2, \dots, b_m)$ συμβολίζουμε τον τετραγωνικό $m \times m$ πίνακα, τον οποίο ονομάζουμε βάση του συστήματος, και προκύπτει από τον A (του συστήματος (3.2)). Οι m μεταβλητές, που αντιστοιχούν στις στήλες μίας βάσης B, καλούνται βασικές (ή εξαρτημένες) μεταβλητές ως προς την βάση αυτή, ενώ οι υπόλοιπες (n-m) μεταβλητές, που αντιστοιχούν στις αντίστοιχες στήλες του A που δεν περιλαμβάνονται στην βάση B, καλούνται μη βασικές (ή ανεξάρτητες) μεταβλητές ως προς την βάση αυτή.

Η βασική εφικτή λύση ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων ως προς μία βάση B, καλείται μία εφικτή λύση του συστήματος, όταν έχει το πολύ όλες τις εξαρτημένες ως προς τη βάση αυτή διάφορες του μηδενός (θετικές) και όλες τις ανεξάρτητες ίσες με το μηδέν. Η λύση αυτή δίνεται από την σχέση

$$x_B = B^{-1}b \qquad (3.4)$$

[6] Κολέτσος Ι., Στογιάννης Δ. (2012). *Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα*, εκδ. Συμεών, σελ. 133.

και θα παριστάνεται με το διάνυσμα στήλης m – στοιχείων

$$x_B = (x_{B1}, x_{B2}, ..., x_{Bi}, ..., x_{Bm})^T$$

όπου ο δείκτης i σημαίνει πως η βασική μεταβλητή x_{Bi} αντιστοιχεί στην στήλη b_i του B, χωρίς να υποδηλώνει ποια μεταβλητή του συστήματος (3.2) είναι η x_{Bi}.

Κατόπιν, ορίζουμε το παρακάτω διάνυσμα m – στοιχείων, οι συντεταγμένες του οποίου είναι οι συντελεστές των βασικών μεταβλητών στην αντικειμενική συνάρτηση:

$$c_B = \begin{pmatrix} c_{B1} \\ c_{B2} \\ . \\ . \\ . \\ c_{Bm} \end{pmatrix}$$

Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για κάθε βασική εφικτή λύση δίνεται από τον τύπο

$$z = c_B^T x_B$$

αφού όλες οι ανεξάρτητες μεταβλητές έχουν μηδενικές τιμές. Επίσης, για κάθε στήλη a_j του A που δεν ανήκει στην βάση, θέτουμε:

$$y_j = B^{-1} a_j$$

με $y_j = \left(y_{1j}, y_{2j}, ..., y_{mj}\right)$.

Τέλος, ορίζουμε την οριακή καθαρή τιμή

$$c_j - z_j \text{ ,}$$

με $z_j = y_{1j}c_{B1} + y_{2j}c_{B2} + ... + y_{mj}c_{Bm} = \sum_{i=1}^{m} y_{ij}c_{Bi} = c_B^T y_j$, η οποία παριστάνει την συνεισφορά στην αντικειμενική συνάρτηση από την είσοδο μίας μονάδας της μη βασικής μεταβλητής x_j και την αντίστοιχη μείωση της συνεισφοράς των βασικών μεταβλητών.

3.4 Ο ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ SIMPLEX

Έχοντας τα παραπάνω υπόψη μας, μπορούμε τώρα να παρουσιάσουμε τον πρωταρχικό αλγόριθμο Simplex[7].

Βήμα 1:
Υπολογίζουμε μία αρχική βασική λύση x_B. Επιλέγουμε τη βάση B από τις στήλες του πίνακα A με κάποια γνωστή μέθοδο και βρίσκουμε την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για την λύση αυτή.

Βήμα 2:
Εκφράζουμε τα διανύσματα του πίνακα A, που δεν ανήκουν στην βάση, συναρτήσει των διανυσμάτων της βάσης. Υπολογίζουμε τις αντίστοιχες ποσότητες y_j.

Βήμα 3:
Υπολογίζουμε τις τιμές z_j για τα διανύσματα εκτός βάσης, εφαρμόζοντας τη σχέση $z_j = c_B^T y_j$.

Βήμα 4:
Υπολογίζουμε τις ποσότητες $z_j - c_j$.

I. Αν για όλα τα j ισχύει ότι $z_j - c_j \geq 0$, τότε έχουμε βέλτιστη λύση.
II. Αν ένα ή περισσότερα $z_j - c_j \leq 0$, επιλέγουμε το μη βασικό διάνυσμα για να εισέλθει στη βάση εφαρμόζοντας το κριτήριο:

$$z_k - c_k = \min\{z_j - c_j \mid z_j - c_j < 0\}.$$

Βήμα 5:
Αν όλα τα $y_{ik} \leq 0$, τότε υπάρχει μία μη φραγμένη λύση. Αν ένα τουλάχιστον $y_{ik} > 0$, επιλέγουμε το διάνυσμα εφαρμόζοντας το κριτήριο:

[7] Κολέτσος Ι., Στογιάννης Δ. (2012). *Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα*, εκδ. Συμεών, σελ. 157.

$$\theta = \frac{x_{Br}}{y_{rj}} = \min\{\frac{x_{Bi}}{y_{ij}}, y_{ij} > 0\}.$$

Βήμα 6:

Υπολογίζουμε:

1. Την νέα βάση B αντικαθιστώντας το διάνυσμα b_r με το μη βασικό διάνυσμα a_k.
2. Την νέα βασική εφικτή λύση, από τις παρακάτω σχέσεις:

$$x_{Bi} = x_{Bi} - x_{Br}\frac{y_{ij}}{y_{rj}} \text{ με } i = 1, 2, ..., m \text{ και } i \neq r$$

$$x_{Br} = \frac{x_{Br}}{y_{rj}}$$

3. Τις νέες τιμές των ποσοτήτων y_{ij}, $z_j - c_j$ και z.

Βήμα 7:

Επιστρέφουμε στο βήμα 2 και επαναλαμβάνουμε την διαδικασία.

3.5 Ο ΠΙΝΑΚΑΣ SIMPLEX (THE SIMPLEX TABLEAU)

Ο αλγόριθμος που παρουσιάσαμε στην προηγούμενη παράγραφο δεν είναι αυτός που χρησιμοποιούμε εν τέλει για τον λύση ενός προβλήματος Γ.Π., καθώς αποδεικνύεται ότι δεν είναι και ο πιο βολικός στην πράξη. Όταν πρόκειται να επιχειρήσουμε να λύσουμε στο χέρι ή σε κάποιο λογισμικό προτιμάται ο πίνακας Simplex.

Ο πίνακας Simplex περιλαμβάνει ονομαστικά μόνο τις απαραίτητες πληροφορίες, όπως τους συντελεστές των μεταβλητών, τις σταθερές που βρίσκονται στο δεξί μέλος των εξισώσεων και τις βασικές μεταβλητές. Πέρα από το γεγονός ότι δεν χρειάζεται να γράφουμε τα σύμβολα των μεταβλητών μας επανειλημμένα, το πιο σημαντικό είναι ότι μας επιτρέπει να τονίζουμε ποιοι αριθμοί παίζουν ρόλο στους αριθμητικούς μας υπολογισμούς ενώ καταγράφουμε τα αποτελέσματα.

Ας δούμε στην πράξη όμως με ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα[8] πώς καταλήγουμε σε μία βέλτιστη λύση όπως και στην αντίστοιχη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης με την βοήθεια του Simplex tableau.

[8] Κολέτσος Ι., Στογιάννης Δ. (2012). *Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα*, εκδ. Συμεών, σελ. 174

Παράδειγμα 3.5.1

Αλγεβρική μορφή

Αντικειμενική συνάρτηση:

$$\max z = 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{aligned}
&x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 \leq 40 \\
&2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 8 \\
&4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \leq 10
\end{aligned}$$

Πρώτα πρέπει να μετατρέψουμε το πρόβλημα στην κανονική του μορφή. Αυτό επιτυγχάνεται κάνοντας τις ανισότητες, ισότητες και προσθέτοντας ακόμη τον περιορισμό της μη αρνητικότητας για τις μεταβλητές μας. Παρατηρούμε ότι όλοι οι περιορισμοί είναι της μορφής "≤" οπότε αρκεί να προσθέσουμε στο αριστερό μέλος του κάθε περιορισμού μία χαλαρή μεταβλητή, ας τις πούμε s_1, s_2, s_3. Άρα το πρόβλημα γίνεται:

Κανονική Μορφή

Αντικειμενική συνάρτηση:

$$\max z = 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$$

ή

$$-2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 - 0s_1 - 0s_2 - 0s_3 + z = 0$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{aligned}
&x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 + s_1 + 0s_2 + 0s_3 = 40 \\
&2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 0s_1 + s_2 + 0s_3 = 8 \\
&4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 0s_1 + 0s_2 + s_3 = 10 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4, s_1, s_2, s_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Δημιουργούμε τον αρχικό πίνακα Simplex, τοποθετώντας στις στήλες τις μεταβλητές μας και στις γραμμές τους συντελεστές τους. Η πρώτη στήλη περιέχει τις βασικές μεταβλητές μας, ενώ η τελευταία στήλη περιλαμβάνει τα δεξιά μέλη των εξισώσεων. Το τελευταίο στοιχείο αυτής της στήλης θα είναι η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για την βέλτιστη λύση που θα βρούμε.

Αρχικός Πίνακας Simplex:

Βάση	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	Λύση
s_1	1	2	-2	4	1	0	0	40
s_2	2	-1	1	2	0	1	0	8
s_3	4	-2	1	-1	0	0	1	10
z	-2	-1	3	-5	0	0	0	0

Πίνακας 3.5.1.1

Παρατηρούμε ότι στον αρχικό πίνακα Simplex έχουμε ήδη μία αρχική βασική εφικτή λύση, την (0, 0, 0, 0, 40, 8, 10) με z=0.

Ο σκοπός είναι να βρούμε την βέλτιστη λύση, βρίσκοντας με μία επαναληπτική διαδικασία διαρκώς καλύτερες βασικές εφικτές λύσεις.

Σε κάθε επανάληψη θα εισέρχεται στην βάση κάποια από τις μη βασικές μεταβλητές, μέχρι να μην υπάρχουν αρνητικές τιμές στην τελευταία γραμμή του πίνακα.

Αυτό γίνεται ως εξής:

$1^{η}$ Επανάληψη:

Πρώτα βρίσκουμε τον μικρότερο συντελεστή που βρίσκεται στην τελευταία γραμμή.

$$\min\{-2,-1,-5\} = -5$$

Με αυτόν τον τρόπο βρίσκουμε την οδηγό-στήλη (pivot column). Στην περίπτωσή μας είναι η τέταρτη (η στήλη του x_4).

Έπειτα βρίσκουμε την οδηγό-γραμμή (pivot line) και κατόπιν το οδηγό στοιχείο (pivot element) διαιρώντας τις τιμές της τελευταίας στήλης με τις θετικές τιμές της οδηγού-στήλης. Η μικρότερη τιμή, που προκύπτει, θα μας δείξει το οδηγό στοιχείο. Δηλαδή:

$$\min\{\frac{40}{4},\frac{8}{2}\}=\frac{8}{2}=4$$

Συμπεραίνουμε ότι το οδηγό στοιχείο είναι αυτό της στήλης της x_4 και της γραμμής s_2, οπότε στη βάση θα εισαχθεί η x_4 και θα αντικαταστήσει την s_2.

Για να γίνει αυτή η αντικατάσταση θα ακολουθήσουμε την παρακάτω διαδικασία:

1. Θα διαιρέσουμε την οδηγό-γραμμή με το οδηγό στοιχείο, ώστε αυτό να πάρει την τιμή 1. Προκύπτει ο πίνακας:

Βάση	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	Λύση
s_1	1	2	-2	4	1	0	0	40
s_2	1	-0.5	0.5	1	0	0.5	0	4
s_3	4	-2	1	-1	0	0	1	10
z	-2	-1	3	-5	0	0	0	0

Πίνακας 3.5.1.2

2. Θα προσθαφαιρέσουμε την οδηγό γραμμή με τις υπόλοιπες γραμμές, ώστε τα υπόλοιπα στοιχεία της οδηγού στήλης να είναι 0. Εκτελώντας τις γραμμοπράξεις, λαμβάνουμε τον πίνακα:

Βάση	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	Λύση
s_1	-3	4	-4	0	1	-2	0	24
x_4	1	-0.5	0.5	1	0	0.5	0	4
s_3	5	-2.5	1.5	0	0	0.5	1	14
z	3	-3.5	5.5	0	0	2.5	0	20

Πίνακας 3.5.1.3

Σε αυτό το σημείο, μετά από μία επανάληψη, έχουμε την λύση (0,0,0,4,24,0,14) και z=20.

Η αρνητική τιμή -3.5 μαρτυρά την ύπαρξη ακόμη καλύτερης λύσης. Οπότε συνεχίζουμε με την δεύτερη επανάληψη.

$2^η$ Επανάληψη:

Ομοίως με πριν, από τον Πίνακα 3.5.1.3 λαμβάνουμε:

$$\min\{-3.5\} = -3.5$$

και

$$\min\{\frac{24}{4}\} = \frac{24}{4} = 6$$

Οπότε, κατά σειρά, έχουμε σαν οδηγό στήλη αυτή της x_2, σαν οδηγό γραμμή αυτή της s_1 και ως οδηγό στοιχείο το 4. Οπότε, εισάγεται στην βάση το x_2 και αντικαθιστά το s_1.

Εν τέλει, ακολουθώντας την προηγούμενη διαδικασία, προκύπτει ο πίνακας:

Βάση	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	Λύση
x_2	-0.75	1	-1	0	0.25	-0.5	0	6
x_4	0.63	0	0	1	0.13	0.25	0	7
s_3	3.13	0	-1	0	0.63	-0.75	1	29
z	0.38	0	2	0	0.88	0.75	0	41

Πίνακας 3.5.1.4

Παρατηρούμε ότι ικανοποιείται το κριτήριο βελτιστότητας (δηλαδή στην τελευταία γραμμή δεν υπάρχουν αρνητικές τιμές), επομένως, η λύση μας δεν μπορεί να βελτιωθεί άλλο και είναι η ακόλουθη:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, s_1, s_2, s_3) = (0, 6, 0, 7, 0, 0, 29)$$

Με τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για την βέλτιστη λύση:

$$z = 41$$

Φυσικά, στα προβλήματα που θα μελετήσουμε παρακάτω θα έχουμε μόνο ακέραιες τιμές, καθώς θα επικεντρωθούμε σε προβλήματα ακέραιου προγραμματισμού.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Ο ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ BRANCH AND BOUND (ΔΙΑΚΛΑΔΩΣΗΣ ΚΑΙ ΟΡΙΟΘΕΤΗΣΗΣ)

4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο αλγόριθμος Branch and Bound (και οι παραλλαγές του) είναι μία από τις τεχνικές όπου χρησιμοποιούνται ευρέως σε διάφορα προβλήματα Επιχειρησιακής Έρευνας και ειδικότερα είναι πολύ δημοφιλής σε αυτά του ακέραιου προγραμματισμού, είτε αυτά είναι Pure, είτε Mixed, είτε Binary Integer Linear Problems. Ο αλγόριθμος παρουσιάστηκε για πρώτη φορά τον Ιούλιο του 1960 από τους **Ailsa H. Land** και **Alison G. Doig**[9] για το βασικό Mixed ILP πρόβλημα, ενώ λίγα χρόνια αργότερα, το 1965, επεκτάθηκε από τον **Egon Balas**[10] για το Binary ILP. Την ίδια περίοδο και άλλοι ασχολήθηκαν και εξέλιξαν την συγκεκριμένη μέθοδο, όπως οι **E. Beale** και **R. Small**[11] και ο **N. J. Driebeck**[12].

Η βασική ιδέα του αλγόριθμου είναι η τεχνική του “divide and conquer” ή, αλλιώς, «διαίρει και βασίλευε», μέθοδος που χρησιμοποιείται κατά κόρον στην δημιουργία αλγορίθμων στην πληροφορική, προκειμένου να απλοποιηθεί ένα πρόβλημα σε μικρότερα επιμέρους προβλήματα. Στην περίπτωσή μας, όταν έχουμε ένα τεράστιο πρόβλημα, το οποίο είναι ιδιαίτερα επίπονο να επιλυθεί κατ’ ευθείαν, καταφεύγουμε σε αυτή την μέθοδο προκειμένου να διαιρεθεί (“divide”) το αρχικό σε άλλα μικρότερα (και αυτά με την σειρά τους σε ακόμη πιο μικρά κ.ο.κ.) μέχρι να βρεθεί η βέλτιστη λύση (“conquer”).

---

[9] Land, A., H. and Doig, A., G. (1960). An automatic method of solving discrete programming problems, *Econometrica*, 28, σελ. 497-520

[10] Balas, E., (1965). An additive algorithm for solving linear programs with zero-one variables, *Operations Research*, 13, σελ. 517-549

[11] Beale, E. and Small, R. (1965). Mixed integer programming by a branch and bound technique, *Proceedings of the Third IFIP Congress*, σελ. 450-451.

[12] Driebeck, N., J. (1966). An algorithm for the solution of mixed integer programming problems, Management Science, σελ. 576-587.

Πρακτικά, η διαίρεση επιτυγχάνεται χωρίζοντας τον χώρο των εφικτών λύσεων σε μη τεμνόμενους χώρους καθώς, όπως θα δούμε, ένα διάστημα τιμών αποκλείεται. Η επιλογή της βέλτιστης λύσης επιτυγχάνεται αρχικά ορίζοντας ένα άνω φράγμα για την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης (προκύπτει επιλύοντας το αρχικό πρόβλημα) και ελέγχοντας τις λύσεις των υποπροβλημάτων, επιλέγοντας τελικά την βέλτιστη ακέραια λύση που θα προκύψει.

Ας περάσουμε όμως σε κάποια παραδείγματα χρήσης της μεθόδου.

4.2 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ PURE ILP

Θα ξεκινήσουμε με το παρακάτω πρόβλημα (LP_0 - Παράδειγμα 4.2.1[13]):

Αλγεβρική μορφή

Αντικειμενική Συνάρτηση:

$$\max z = 40x_1 + 100x_2$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{aligned} &2x_1 + 4x_2 \leq 21 \\ &x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \\ &x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Αρχικά θα επιχειρήσουμε να λύσουμε το πρόβλημα κανονικά με πίνακα Simplex όπως παρουσιάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, χωρίς τους περιορισμούς των ακεραίων.

[13] Κολέτσος Ι., Στογιάννης Δ. (2012). *Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα*, εκδ. Συμεών, σελ. 118.

Κανονική Μορφή

Αντικειμενική συνάρτηση:

$$z - 40x_1 - 100x_2 + 0s_1 + 0s_2 = 0$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$2x_1 + 4x_2 + s_1 = 21$$
$$x_1 + 3x_2 + s_2 = 12$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Αρχικός πίνακας Simplex:

Βάση	x_1	x_2	s_1	s_2	Λύση
s_1	2	4	1	0	21
s_2	1	3	0	1	12
z	-40	-100	0	0	0

Πίνακας 4.2.1

$$\min\{-40, -100\} = -40$$
$$\min\{\frac{21}{4}, \frac{12}{3}\} = \frac{12}{3} = 4$$

Επομένως, συμπεραίνουμε ότι έχουμε σαν οδηγό στήλη αυτήν του x_2, σαν οδηγό γραμμή αυτή του s_2 και σαν οδηγό στοιχείο το 3.

Οπότε στην βάση εισάγεται η x_2 και εκτελώντας τις κατάλληλες προσθαφαιρέσεις στις γραμμές (γραμμοπράξεις) προκύπτει ο πίνακας μετά την πρώτη επανάληψη:

Βάση	x_1	x_2	s_1	s_2	Λύση
s_1	2/3	0	1	-4/3	5
x_2	1/3	1	0	1/3	4
z	-20/3	0	0	100/3	400

Πίνακας 4.2.2

Συνεχίζουμε μέχρι να ικανοποιηθεί το κριτήριο βελτιστότητας.

$$\min\{-\frac{20}{3}\} = -\frac{20}{3}$$

$$\min\{\frac{5}{\frac{2}{3}}, \frac{4}{\frac{1}{3}}\} = \min\{\frac{15}{2}, 12\} = \frac{15}{2}$$

Σε αυτό το βήμα έχουμε οδηγό στήλη αυτή του x_1, οδηγό γραμμή του s_1 και οδηγό στοιχείο το $\frac{2}{3}$, άρα εισάγουμε στην βάση το x_1 και μετά τις πράξεις έχουμε τον πίνακα:

Βάση	**x_1**	**x_2**	**s_1**	**s_2**	**Λύση**
x_1	1	0	3/2	-2	15/2
x_2	0	1	-1/2	1	3/2
z	0	0	10	20	450

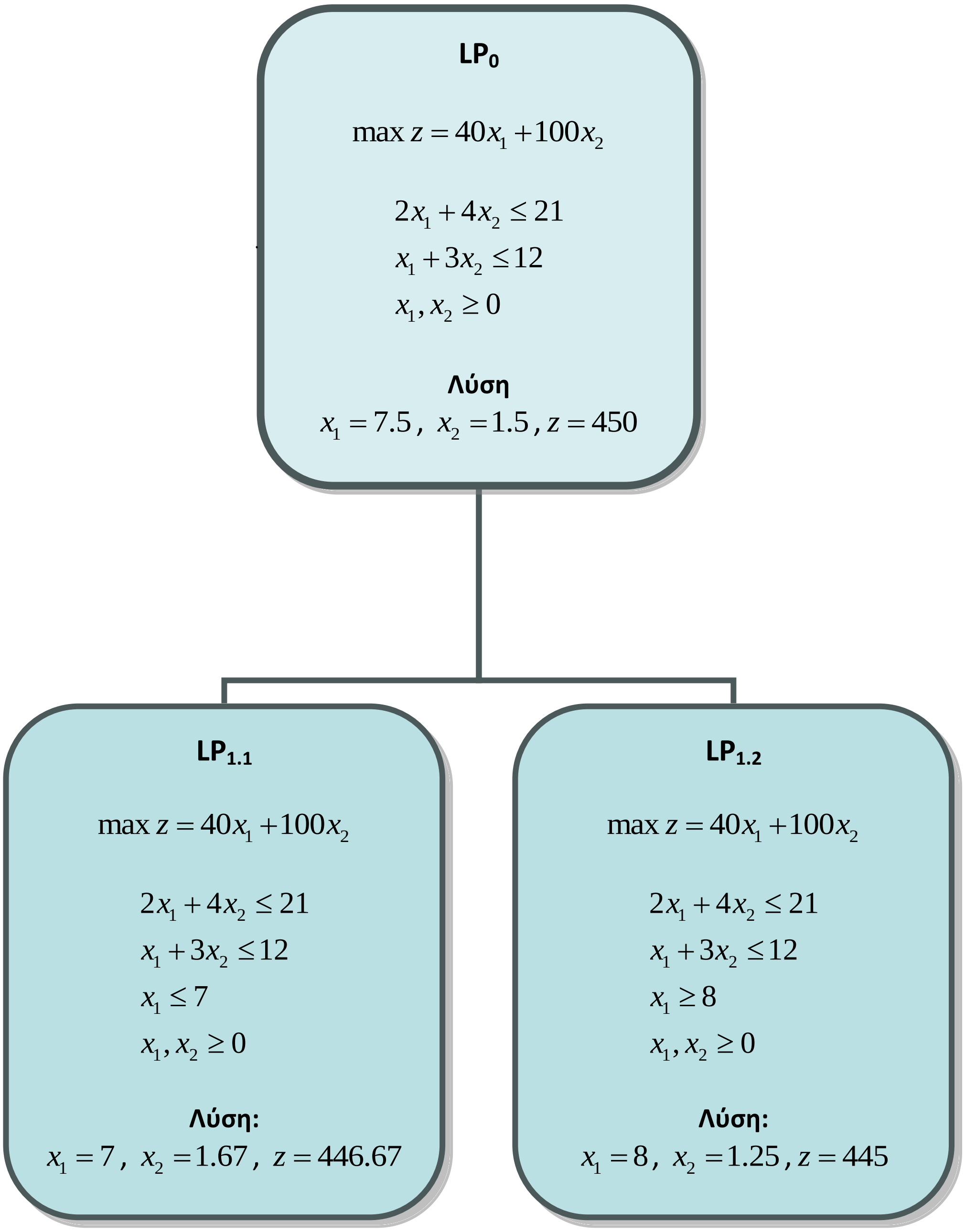
Πίνακας 4.2.3

Παρατηρούμε ότι ικανοποιείται το κριτήριο βελτιστότητας με λύση $x_1 = 7.5$ και $x_2 = 1.5$ και βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης $z = 450$.

Οι μεταβλητές δεν λαμβάνουν ακέραια τιμή, οπότε, ενώ έχουμε μία βέλτιστη λύση για το LP πρόβλημα, δεν ικανοποιούνται οι περιορισμοί για το αντίστοιχο πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού (ILP).

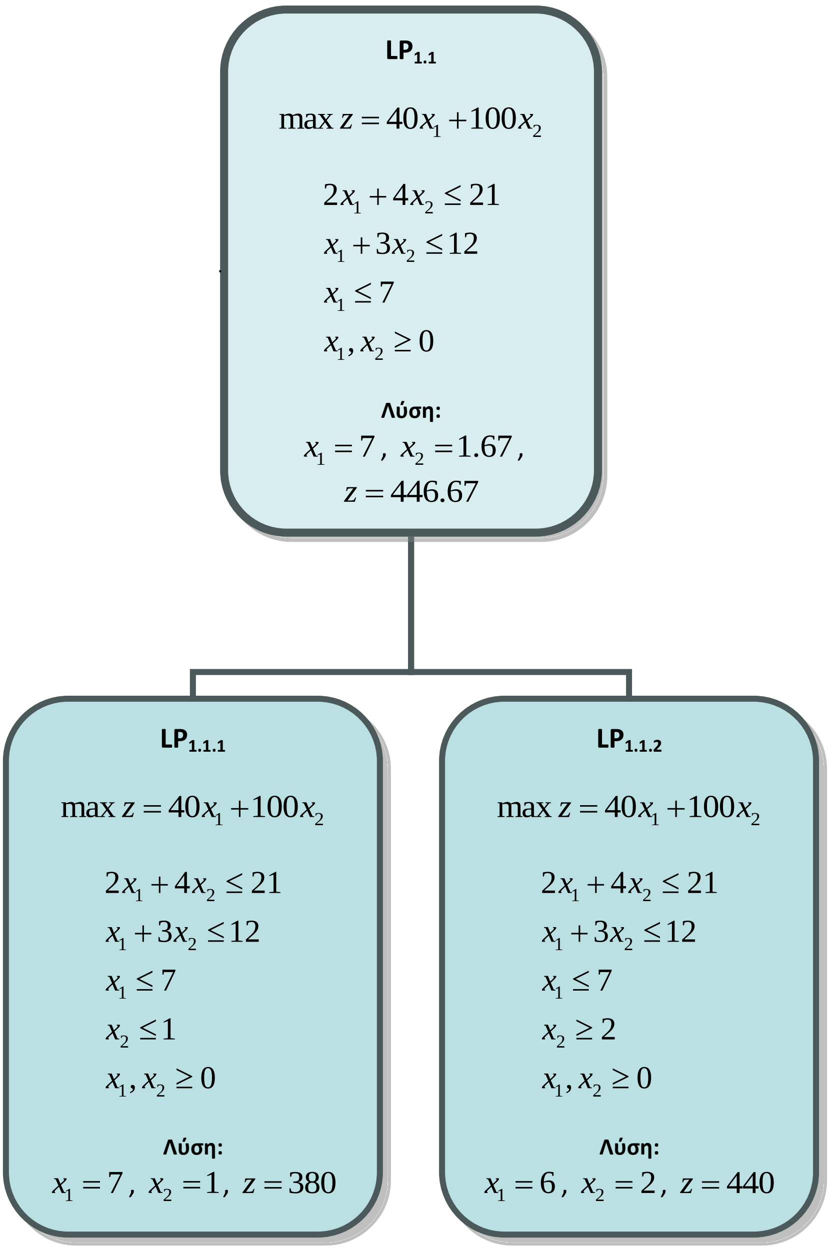
Οπότε, σε αυτή τη φάση, θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο Branch and Bound. Επιλέγουμε μία από τις δύο μεταβλητές που δεν έχουν ακέραια τιμή, για παράδειγμα την $x_1 = 7.5$ (η οποία ονομάζεται μεταβλητή διακλάδωσης – branching variable). Κατόπιν, αποκλείουμε το διάστημα $7 < x_1 < 8$, το οποίο δεν περιλαμβάνει καμία πιθανή ακέραια τιμή της μεταβλητής. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την δημιουργία δύο υποπροβλημάτων, των $LP_{1.1}$ και $LP_{1.2}$, τα οποία είναι ίδια με το αρχικό, προσθέτοντας στο καθένα έναν επιπλέον περιορισμό, τον $x_1 \leq 7$ στο $LP_{1.1}$ και τον $x_1 \geq 8$ στο $LP_{1.2}$. Να σημειώσουμε ότι η τιμή $z = 450$ του αρχικού προβλήματος θα αποτελεί ένα άνω φράγμα για την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης οποιουδήποτε ILP προβλήματος που θα ακολουθήσει. Όλα τα προβλήματα θα λύνονται με την μέθοδο Simplex.

Έχουμε λοιπόν τα εξής υποπροβλήματα, όπως φαίνονται ακολούθως στο δένδρο:



Καμία από τις δύο παραπάνω λύσεις δεν μας έδωσε ακέραιες τιμές. Οπότε θα εκτελούμε διαδοχικά αυτή τη διαδικασία για κάθε LP πρόβλημα που προκύπτει, μέχρι να λυθεί το ILP πρόβλημα. Στην προκειμένη περίπτωση θα χρησιμοποιήσουμε εκ νέου την μέθοδο Branch and Bound στα προβλήματα $LP_{1.1}$ και $LP_{1.2}$ δημιουργώντας ουσιαστικά τέσσερα νέα προβλήματα, τα $LP_{1.1.1}$, $LP_{1.1.2}$, $LP_{1.2.1}$ και $LP_{1.2.2}$. Μόλις κάποιο από τα προβλήματα δώσει κάποια ακέραια λύση, θα έχουμε και ένα κάτω φράγμα για την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης (οπότε θα απορρίπτονται οι τιμές που θα προκύψουν και θα είναι μικρότερες από αυτή). Η διαδικασία θα σταματήσει μόλις απομείνει ένας ενεργός κλάδος με τη βέλτιστη ακέραια λύση.

Εφαρμόζουμε την μέθοδο στο $LP_{1.1}$, θεωρώντας ως branching variable την $x_2 = 1.67$. Αποκλείουμε το διάστημα $1 < x_2 < 2$, και προκύπτουν τα προβλήματα $LP_{1.1.1}$, $LP_{1.1.2}$ με τους κατάλληλους περιορισμούς, όπως φαίνονται στο παρακάτω δένδρο (με τις λύσεις τους).



Και τα δύο προβλήματα βλέπουμε ότι μας δίνουν ακέραιες λύσεις, άρα και εφικτές για το αρχικό ILP πρόβλημα. Απορρίπτουμε την $z=380$ του $\text{LP}_{1.1.1}$ καθώς η $z=440$ του $\text{LP}_{1.1.2}$ είναι μεγαλύτερη και εφόσον έχουμε πρόβλημα μεγιστοποίησης αυτή θα είναι και το κάτω φράγμα (για την ώρα τουλάχιστον). Αυτό σημαίνει ότι τελικά η βέλτιστη λύση σίγουρα θα είναι μεγαλύτερη ή ίση από 440. Ομοίως ενεργούμε για το πρόβλημα $\text{LP}_{1.2}$:

$\text{LP}_{1.2}$

$$\max z = 40x_1 + 100x_2$$

$$\begin{aligned} &2x_1 + 4x_2 \le 21 \\ &x_1 + 3x_2 \le 12 \\ &x_1 \ge 8 \\ &x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Λύση:

$x_1 = 8$, $x_2 = 1.25$, $z = 445$

$\text{LP}_{1.2.1}$

$$\max z = 40x_1 + 100x_2$$

$$\begin{aligned} &2x_1 + 4x_2 \le 21 \\ &x_1 + 3x_2 \le 12 \\ &x_1 \ge 8 \\ &x_2 \le 1 \\ &x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Λύση:

$x_1 = 8.5$, $x_2 = 1$, $z = 440$

$\text{LP}_{1.2.2}$

$$\max z = 40x_1 + 100x_2$$

$$\begin{aligned} &2x_1 + 4x_2 \le 21 \\ &x_1 + 3x_2 \le 12 \\ &x_1 \ge 8 \\ &x_2 \ge 2 \\ &x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Λύση:

Μη εφικτή

Ο κλάδος LP$_{1.2.1}$ δεν δίνει ακέραιες λύσεις, ενώ και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι ίση με το κάτω φράγμα που έχουμε ήδη ορίσει ($z = 440$), οπότε θα συνεχίσουμε με την μέθοδο διακλάδωσης και οριοθέτησης. Ο κλάδος LP$_{1.2.2}$ δεν δίνει κάποια εφικτή λύση, οπότε δεν θα ασχοληθούμε άλλο μαζί του. Θεωρώντας ως μεταβλητή διακλάδωσης την $x_1 = 8.5$ απορρίπτουμε το διάστημα $8 < x_1 < 9$ και έχουμε τις εξής διακλαδώσεις (ας προσέξουμε τον περιορισμό $x_1 = 8$ στο LP$_{1.2.1.1}$ καθώς υπήρχε ήδη ο $x_1 \geq 8$ και τώρα θα παίρναμε τον $x_1 < 8$):

LP$_{1.2.1}$

$$\max z = 40x_1 + 100x_2$$

$$\begin{aligned} &2x_1 + 4x_2 \leq 21 \\ &x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ &x_1 \geq 8 \\ &x_2 \leq 1 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Λύση:

$x_1 = 8.5,\ x_2 = 1, z = 440$

LP$_{1.2.1.1}$

$$\max z = 40x_1 + 100x_2$$

$$\begin{aligned} &2x_1 + 4x_2 \leq 21 \\ &x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ &x_1 = 8 \\ &x_2 \leq 1 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Λύση:

$x_1 = 8,\ x_2 = 1, z = 420$

LP$_{1.2.1.2}$

$$\max z = 40x_1 + 100x_2$$

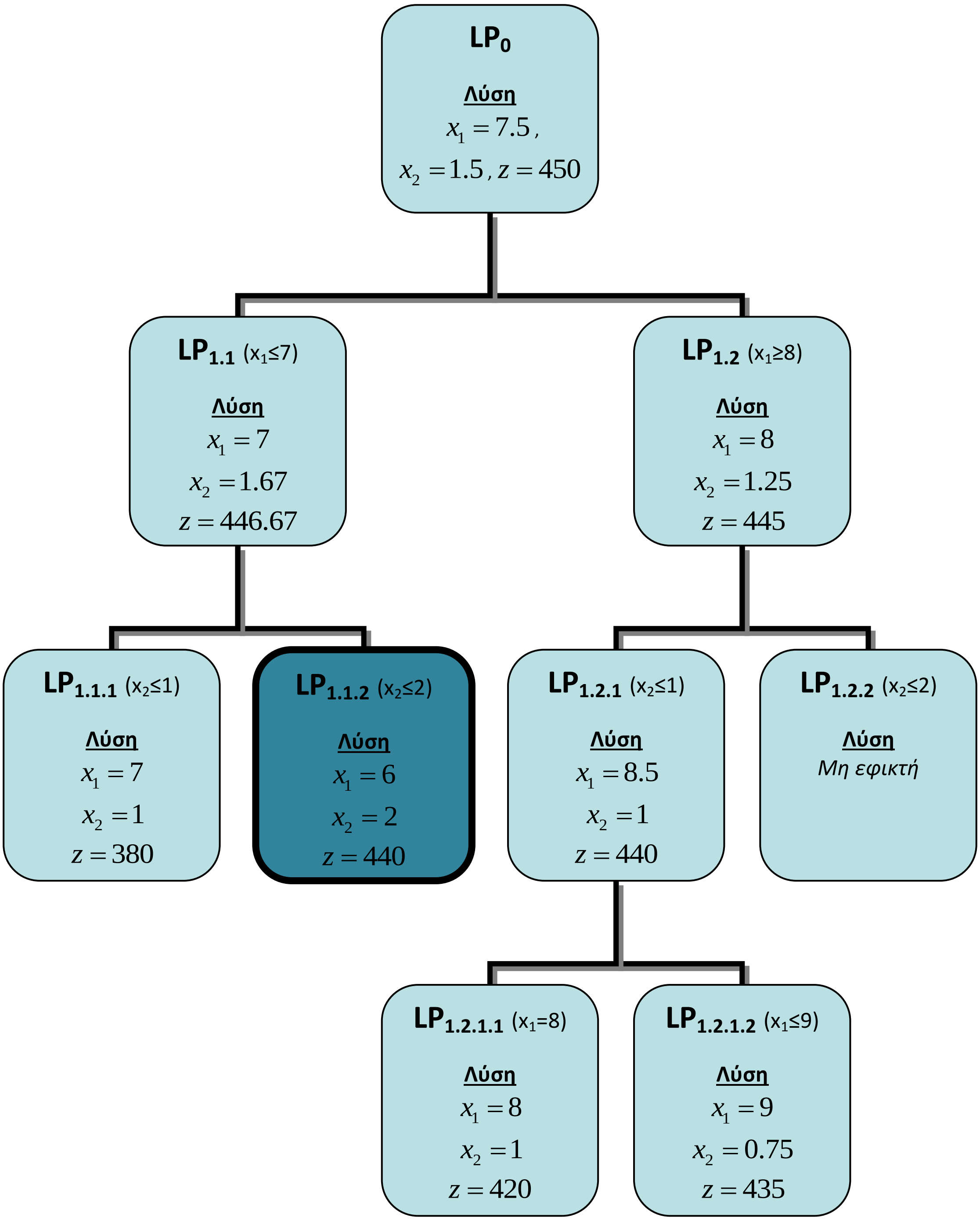
$$\begin{aligned} &2x_1 + 4x_2 \leq 21 \\ &x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ &x_1 \geq 9 \\ &x_2 \geq 2 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Λύση:

$x_1 = 9,\ x_2 = 0.75,$
$z = 435$

Και οι δύο κλάδοι αποκλείονται, καθώς οι τιμές που προκύπτουν για την αντικειμενική συνάρτηση είναι μικρότερες αυτής του κάτω φράγματος, δηλαδή του προβλήματος $LP_{1.1.2}$.

Τελικά, ο αλγόριθμος ολοκληρώθηκε δίνοντας ως λύση αυτή του προβλήματος $LP_{1.1.2}$: $x_1 = 6$, $x_2 = 2$, $z = 440$. Ακολουθεί το πλήρες δένδρο της διαδικασίας, με την βέλτιστη λύση τονισμένη:



4.3 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ BINARY ILP

Ας δούμε σε αυτή την παράγραφο ένα πρόβλημα ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού με μεταβλητές που θα πρέπει να είναι δυαδικές (LP_0 - Παράδειγμα 4.3.1[14]).

Αλγεβρική μορφή

Αντικειμενική Συνάρτηση:

$$\max z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{aligned}
&6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \le 10 \\
&x_3 + x_4 \le 1 \\
&-x_1 + x_3 \le 0 \\
&-x_2 + x_4 \le 0 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \\
&\quad x_1, x_2, x_3, x_4 = 0 \text{ ή } 1
\end{aligned}$$

Η βέλτιστη λύση του γραμμικού προβλήματος, χωρίς να είναι οι μεταβλητές ακέραιοι και χωρίς τον περιορισμό της δυαδικότητας, είναι $x_1, x_2, x_3, x_4 = (\frac{5}{6}, 1, 0, 1)$ με βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης $z = 16.5$.

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν μεταβλητές που δεν λαμβάνουν ακέραιες τιμές, οπότε αυτή η λύση δεν θα είναι και λύση του αντίστοιχου ILP προβλήματος. Όμοια με πριν, θα επιλέξουμε ως μεταβλητή διακλάδωσης την x_1, θα αποκλείσουμε το διάστημα τιμών $0 < x_1 < 1$, και θα προκύψουν δύο νέα προβλήματα, τα $LP_{1.1}$ και $LP_{1.2}$ στα οποία έχουν προστεθεί οι περιορισμοί $x_1 = 0$ και $x_1 = 1$, αντίστοιχα.

Η τιμή $z = 16.5$ αποτελεί ένα άνω φράγμα τις όλες τις τιμές z που θα βρούμε στα προβλήματα που θα προκύψουν εξαιτίας της μεθόδου B&B. Έχουμε, λοιπόν, το παρακάτω δένδρο:

[14] Cliff Stein (2007). *Applied Integer Programming*, Columbia University

LP_0

$$\max z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

$$\begin{aligned} &6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \le 10 \\ &x_3 + x_4 \le 1 \\ &-x_1 + x_3 \le 0 \\ &-x_2 + x_4 \le 0 \\ &x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{aligned}$$

Λύση

$$x_1, x_2, x_3, x_4 = (0.83, 1, 0, 1)$$
$$z = 16.5$$

$LP_{1.1}$ (x_1=0)

$$\max z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

$$\begin{aligned} &3x_2 + 2x_4 \le 10 \\ &-x_2 + x_4 \le 0 \\ &x_1 = 0 \\ &x_3 = 0 \end{aligned}$$

Λύση:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 = (0, 1, 0, 1)$$
$$z = 9$$

$LP_{1.2}$ (x_1=1)

$$\max z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

$$\begin{aligned} &3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \le 4 \\ &x_3 + x_4 \le 1 \\ &x_3 \le 1 \\ &-x_2 + x_4 \le 0 \\ &x_1 = 1 \\ &x_2, x_3, x_4 = 0 \text{ ή } 1 \end{aligned}$$

Λύση:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 = (1, 0.8, 0, 0.8)$$
$$z = 16.2$$

Η λύση του $LP_{1.1}$ είναι η νέα μας βέλτιστη λύση, κάτι που σημαίνει ότι και η τελική βέλτιστη λύση που θα λάβουμε αποκλείεται να πάρει τιμή μικρότερη της $z = 9$. Θεωρώντας ως μεταβλητή διακλάδωσης την $x_2 = 0.8$ συνεχίζουμε την εφαρμογή της μεθόδου στο $LP_{1.2}$.

LP$_{1.2}$ (x_1=1)

$$\max z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

$$\begin{aligned} &3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \le 4 \\ &x_3 + x_4 \le 1 \\ &x_3 \le 1 \\ &-x_2 + x_4 \le 0 \\ &x_1 = 1 \\ &x_2, x_3, x_4 = 0 \text{ ή } 1 \end{aligned}$$

Λύση:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 = (1, 0.8, 0, 0.8)$$

$$z = 16.2$$

LP$_{1.2.1}$ (x_1=1, x_2=0)

$$\max z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

$$\begin{aligned} &5x_3 \le 4 \\ &x_3 \le 1 \\ &x_3 \ge 0 \\ &x_3 = 0 \text{ ή } 1 \end{aligned}$$

Λύση:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 = (1, 0, 0.8, 0)$$

$$z = 13.8$$

LP$_{1.2.2}$ (x_1=1, x_2=1)

$$\max z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

$$\begin{aligned} &5x_3 + 2x_4 \le 1 \\ &x_3 + x_4 \le 1 \\ &x_3 \le 1 \\ &x_4 \le 1 \\ &x_3, x_4 = 0 \text{ ή } 1 \end{aligned}$$

Λύση:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 = (1, 1, 0, 0.5)$$

$$z = 16$$

Στο πρόβλημα LP$_{1.2.1}$, λόγω των περιορισμών, θα είναι αναγκαστικά $x_4 = 0$, γι' αυτό και έχουμε την παραπάνω μορφή στους περιορισμούς. Καμία από τις παραπάνω λύσεις δεν μας ικανοποιεί, οπότε θα συνεχίσουμε με 4 νέους κλάδους, δύο για κάθε πρόβλημα.

Στο $LP_{1.2.1}$ επιλέγουμε ως μεταβλητή διακλάδωσης την x_3 ενώ στο $LP_{1.2.2}$ επιλέγουμε την x_4. Ακολουθούν τα δένδρα:

$LP_{1.2.1}$ (x_1=1, x_2=0)

$$\max z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

$$5x_3 \le 4$$
$$x_3 \le 1$$
$$x_3 \ge 0$$
$$x_3 = 0 \text{ ή } 1$$

Λύση:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 = (1, 0, 0.8, 0)$$
$$z = 13.8$$

$LP_{1.2.1.1}$ (x_1=1, x_2=0, x_3=0)

$$\max z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

Για $x_1, x_2, x_3, x_4 = (1, 0, 0, 0)$ έχουμε $z = 9$ η οποία δεν είναι καλύτερη από την λύση που είχαμε μέχρι τώρα (λύση προβλήματος $LP_{1.1}$).

$LP_{1.2.1.2}$ (x_1=1, x_2=0, x_3=1)

$$\max z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

Για $x_1, x_2, x_3, x_4 = (1, 0, 1, 0)$ δεν έχουμε εφικτή λύση ($z = 15$).

Συνεχίζουμε με την διακλάδωση του $LP_{1.2.2}$.

$LP_{1.2.2}$ (x_1=1, x_2=1)

$$\max z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

$$5x_3 + 2x_4 \le 1$$
$$x_3 + x_4 \le 1$$
$$x_3 \le 1$$
$$x_4 \le 1$$
$$x_3, x_4 = 0 \text{ ή } 1$$

Λύση:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 = (1,1,0,0.5)$$
$$z = 16$$

$LP_{1.2.2.1}$ (x_1=1, x_2=1, x_4=0)

$$\max z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

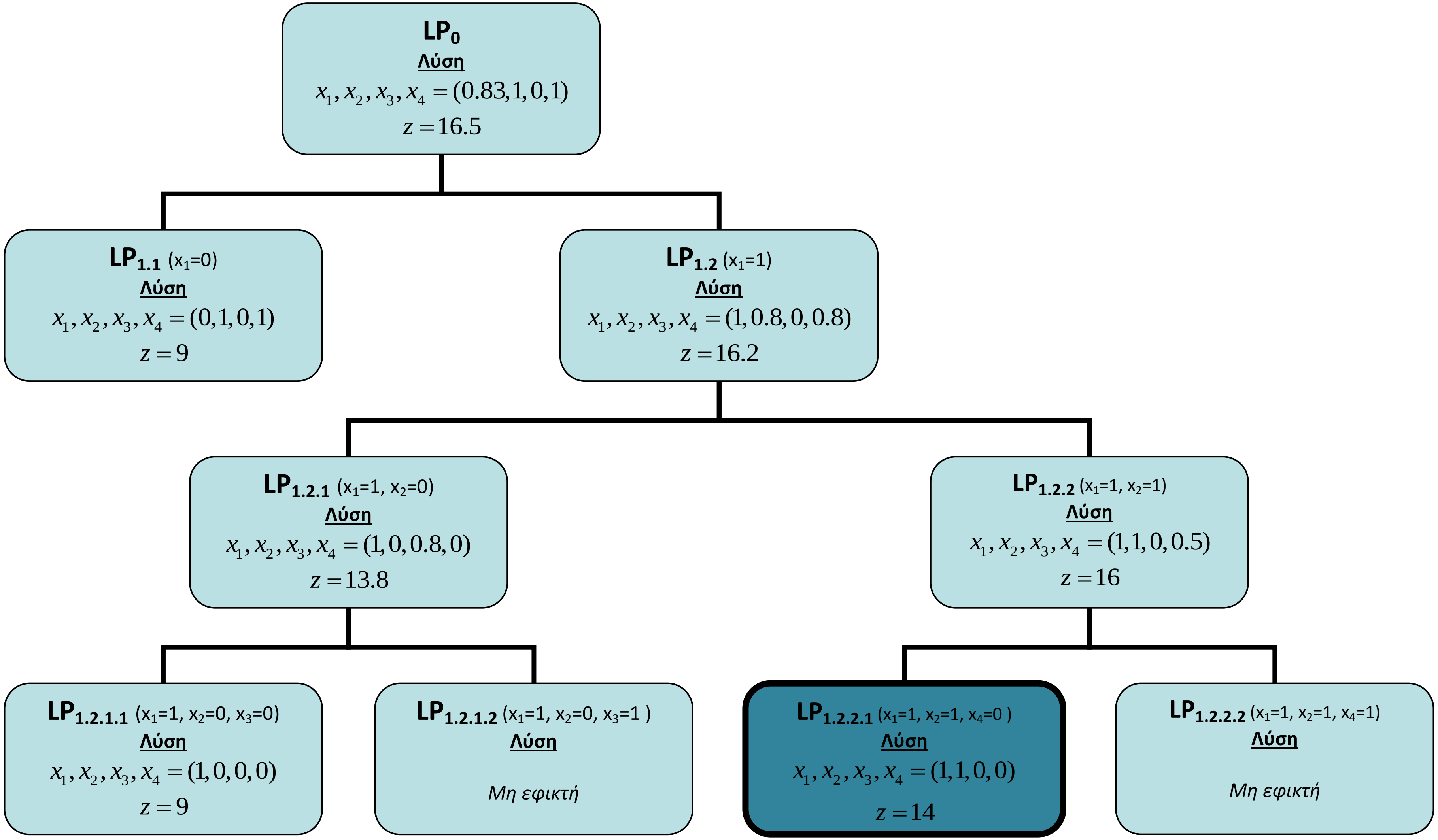
Για $x_1, x_2, x_3, x_4 = (1,1,0,0)$ *έχουμε* $z = 14$ *η οποία είναι η νέα μας βέλτιστη λύση καθώς* $z = 14 > 9$.

$LP_{1.2.2.2}$ (x_1=1, x_2=1, x_4=1)

$$\max z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

Για $x_1, x_2, x_3, x_4 = (1,1,0,1)$ *δεν έχουμε εφικτή λύση (* $z = 18$ *).*

Καταλήξαμε στην βέλτιστη λύση του προβλήματος, η οποία είναι $x_1, x_2, x_3, x_4 = (1,1,0,0)$, και μας δίνει τιμή για την αντικειμενική συνάρτηση $z = 14$. Τελικά, κατασκευάζουμε το πλήρες δένδρο:


LP_0
Λύση
$x_1, x_2, x_3, x_4 = (0.83, 1, 0, 1)$
$z = 16.5$
$LP_{1.1}$ (x_1=0)
Λύση
$x_1, x_2, x_3, x_4 = (0, 1, 0, 1)$
$z = 9$
$LP_{1.2}$ (x_1=1)
Λύση
$x_1, x_2, x_3, x_4 = (1, 0.8, 0, 0.8)$
$z = 16.2$
$LP_{1.2.1}$ (x_1=1, x_2=0)
Λύση
$x_1, x_2, x_3, x_4 = (1, 0, 0.8, 0)$
$z = 13.8$
$LP_{1.2.2}$ (x_1=1, x_2=1)
Λύση
$x_1, x_2, x_3, x_4 = (1, 1, 0, 0.5)$
$z = 16$
$LP_{1.2.1.1}$ (x_1=1, x_2=0, x_3=0)
Λύση
$x_1, x_2, x_3, x_4 = (1, 0, 0, 0)$
$z = 9$
$LP_{1.2.1.2}$ (x_1=1, x_2=0, x_3=1)
Λύση
Μη εφικτή
$LP_{1.2.2.1}$ (x_1=1, x_2=1, x_4=0)
Λύση
$x_1, x_2, x_3, x_4 = (1, 1, 0, 0)$
$z = 14$
$LP_{1.2.2.2}$ (x_1=1, x_2=1, x_4=1)
Λύση
Μη εφικτή

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Η ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ LP ΚΑΙ Η ΜΕΘΟΔΟΣ CUTTING PLANES (ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΑΠΟΚΟΠΗΣ) ΓΙΑ ΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ILP

5.1 Η ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ LP

Ένας από τους τρόπους επίλυσης ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού είναι και η γραφική επίλυση, την οποία θα παρουσιάσουμε σε αυτή τη παράγραφο. Ο συγκεκριμένος τρόπος μας περιορίζει βέβαια, καθώς η χρησιμοποίησή του είναι δυνατή σε προβλήματα δύο ή τριών μεταβλητών, όσες και οι διαστάσεις που μπορούμε να παραστήσουμε γραφικά.

Η διαδικασία, που θα ακολουθήσουμε, είναι η εξής:

1. Θα παραστήσουμε γραφικά τους περιορισμούς μας, σε ένα σύστημα όπου οι άξονές μας θα είναι οι μεταβλητές μας. Με αυτόν τον τρόπο θα έχουμε εντοπίσει το σύνολο των εφικτών σημείων που αποτελούν λύση του προβλήματος (εφικτή περιοχή – feasible region).

2. Θα αναπαραστήσουμε γραφικά και την αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος, επιλέγοντας κάποια τιμή γι’ αυτήν. Τα σημεία της ευθείας, που βρίσκονται μέσα στην εφικτή περιοχή, θα αποτελούν λύσεις του προβλήματος.

3. Για να βρούμε την βέλτιστη λύση, θα μετατοπίσουμε την ευθεία παράλληλα, μέχρι ένα σημείο της μόνο να βρίσκεται στην εφικτή περιοχή. Αυτό θα είναι ένα γωνιακό σημείο της εφικτής περιοχής.

Ας τα δούμε στην πράξη όμως με ένα παράδειγμα (Παράδειγμα 5.1.1[15]):

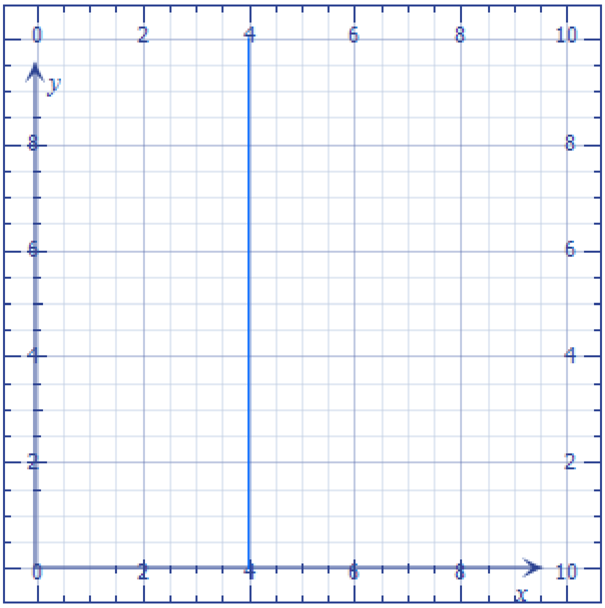
Αντικειμενική συνάρτηση:

$$\max z = 3x + 5y$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{aligned} &x \le 4 \\ &2y \le 12 \\ &3x + 2y \le 18 \\ &x, y \ge 0 \end{aligned}$$

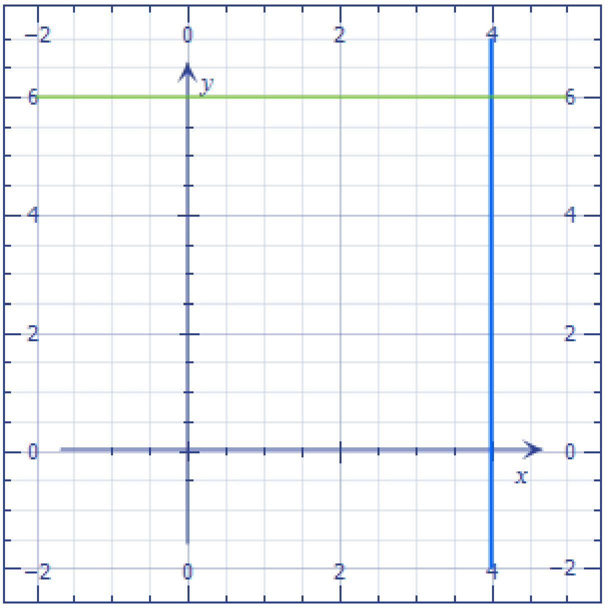
Πρώτα φέρνουμε την ευθεία $x = 4$ που αφορά τον πρώτο περιορισμό:



Εικόνα 1: x=4

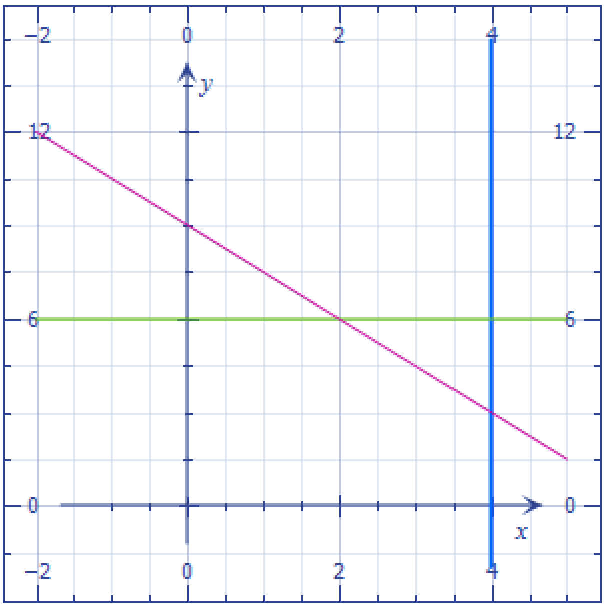
Συνεχίζουμε με την ευθεία $y = 6$ που αντιπροσωπεύει τον δεύτερο:

[15]Hillier S. F., Lieberman G. J. (2001). *Introduction to Operations Research, 7th Edition*, Mc-Graw – Hill, σελ. 27-30



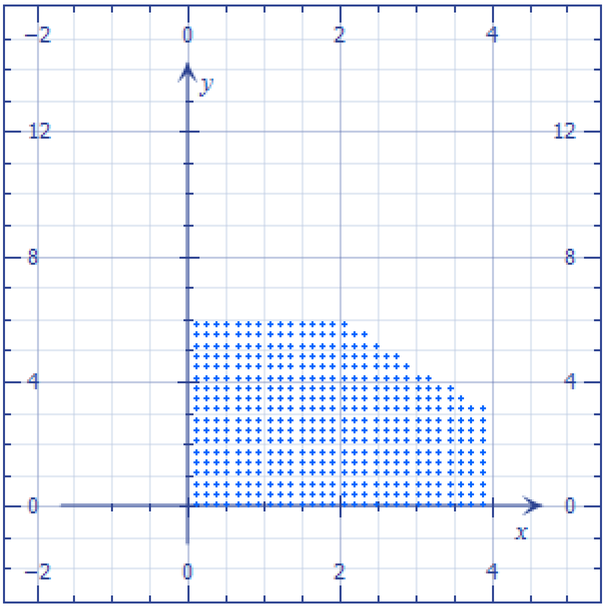
Εικόνα 2: x=4 & y =6

Και, τέλος, ολοκληρώνουμε την αναπαράσταση των περιορισμών με την $3x+2y=18$:



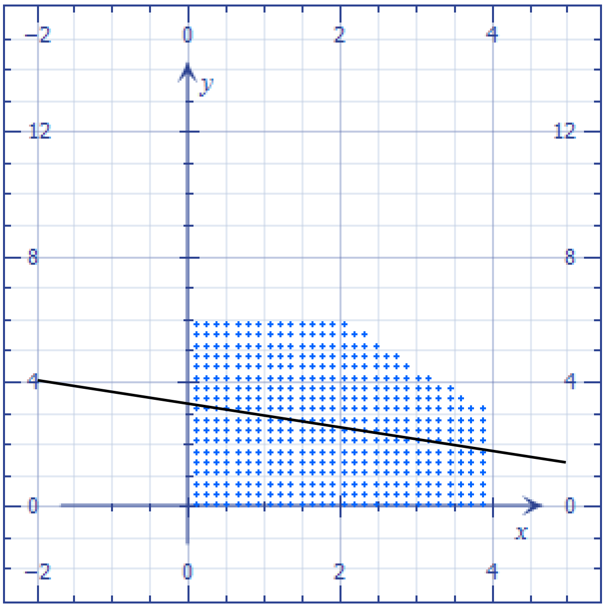
Εικόνα 3: x=4, y=6 & 3x+2y=18

Η εφικτή περιοχή είναι εξής:



Εικόνα 4: Εφικτή περιοχή (feasible region)

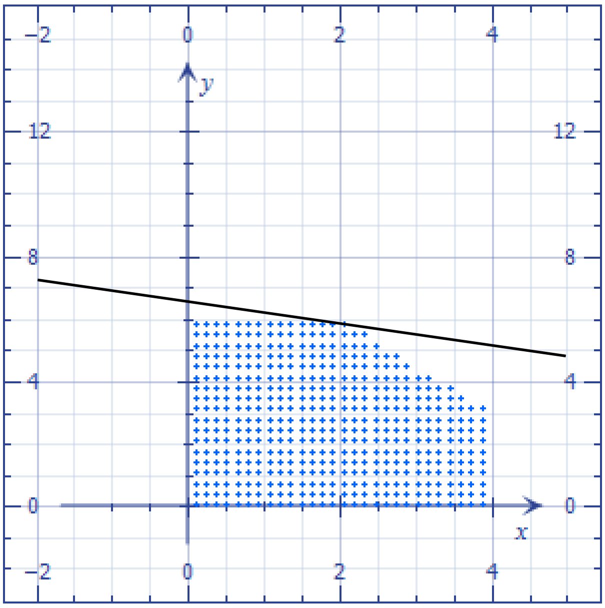
Ο σκοπός είναι να εντοπίσουμε το σημείο ή τα σημεία όπου μεγιστοποιούν την αντικειμενική μας συνάρτηση. Θα συνεχίσουμε δοκιμαστικά επιλέγοντας αυθαίρετα κάποια τιμή για την αντικειμενική μας συνάρτηση, π.χ. για $z=20$ έχουμε $3x+5y=20$.



Εικόνα 5: 3x+5y=20

Όλα τα σημεία της ευθείας, που βρίσκονται μέσα στην εφικτή περιοχή, αποτελούν λύσεις του προβλήματος. Η ευθεία που θα είναι παράλληλη με την παραπάνω αλλά θα έχει ένα και μόνο σημείο στην εφικτή περιοχή (γωνιακό) θα μας δίνει την μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

Δοκιμαστικά, καταλήγουμε στην $3x+5y=36$ με βέλτιστη λύση του προβλήματος το σημείο $(2,6)$.



Εικόνα 6: 3x+5y=36

5.2 Η ΜΕΘΟΔΟΣ CUTTING PLANES (ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΑΠΟΚΟΠΗΣ) – ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε την γραφική επίλυση ενός προβλήματος LP με δύο μεταβλητές. Σε αυτήν την παράγραφο θα δούμε πώς, μέσω της μεθόδου επιπέδων αποκοπής, μπορούμε γραφικά να επιλύσουμε ένα αντίστοιχο πρόβλημα ILP.

Έστω το πρόβλημα (Παράδειγμα 5.2.1[16]):

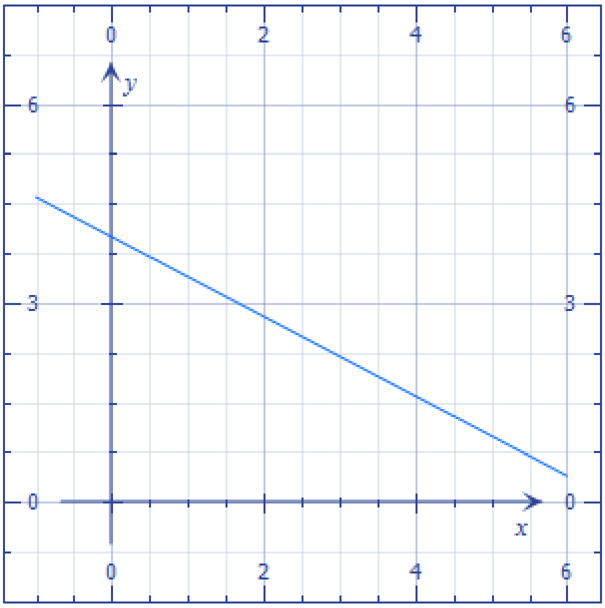
Αντικειμενική Συνάρτηση:

$$\max z = 2x + y$$

Υπό τους περιορισμούς:

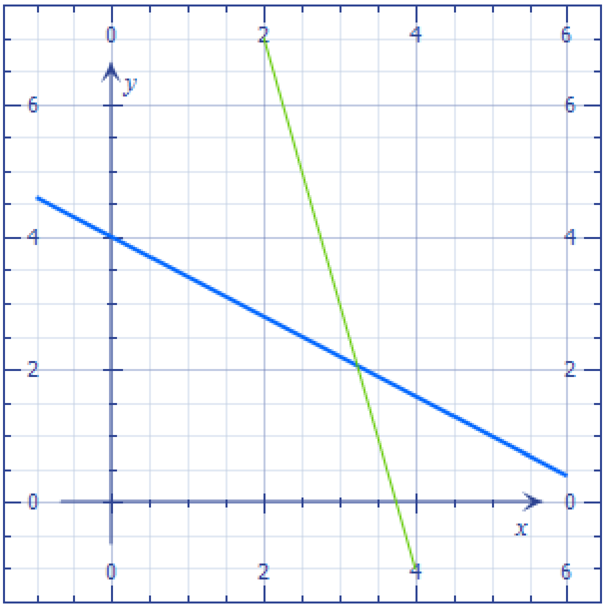
$$\begin{aligned} &3x + 5y \leq 20 \\ &4x + y \leq 15 \\ &x, y \geq 0 \end{aligned}$$

Κάνουμε την γραφική επίλυση, όπως και πριν, φέρνοντας έναν έναν τους περιορισμούς και καταλήγοντας στην εφικτή περιοχή των λύσεων (Εικόνες 1, 2, 3):

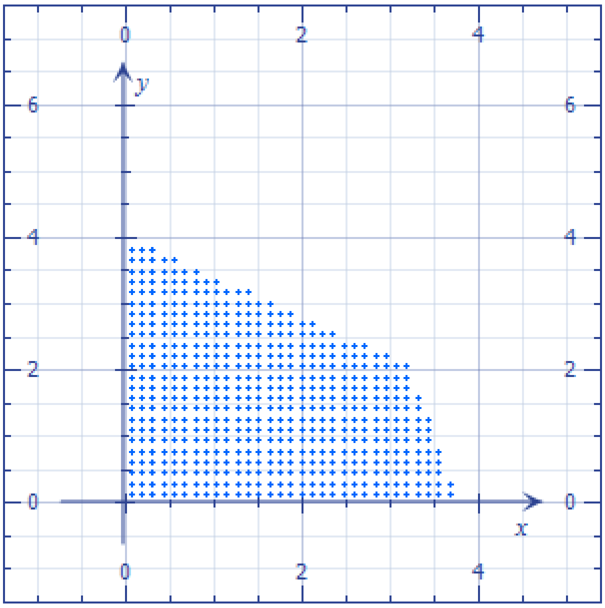


Εικόνα 7: 3x+5y=20

[16] Blumenfeld, Dennis (2009). *Operations Research Calculations Handbook, 2nd Edition*, CRC Press, σελ. 155

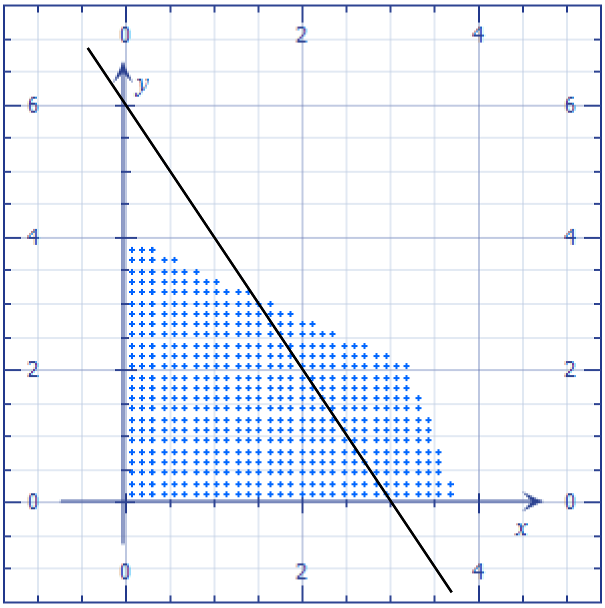


Εικόνα 8: 3x+5y=20 & 4x+y=15



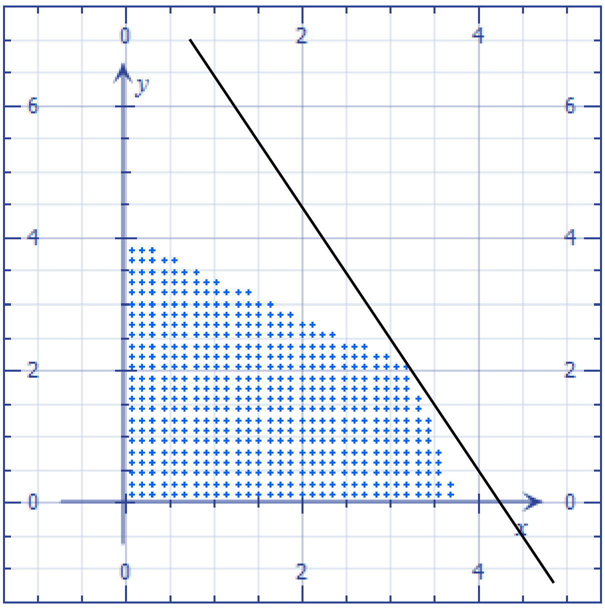
Εικόνα 9: Εφικτή περιοχή (feasible region)

Δοκιμαστικά, επιλέγουμε μία τιμή για την αντικειμενική μας συνάρτηση (εδώ $z=6$) . Οπότε σχεδιάζουμε την $2x+y=6$ και έχουμε:



Εικόνα 10: Εφικτή περιοχή & 2x+y=6

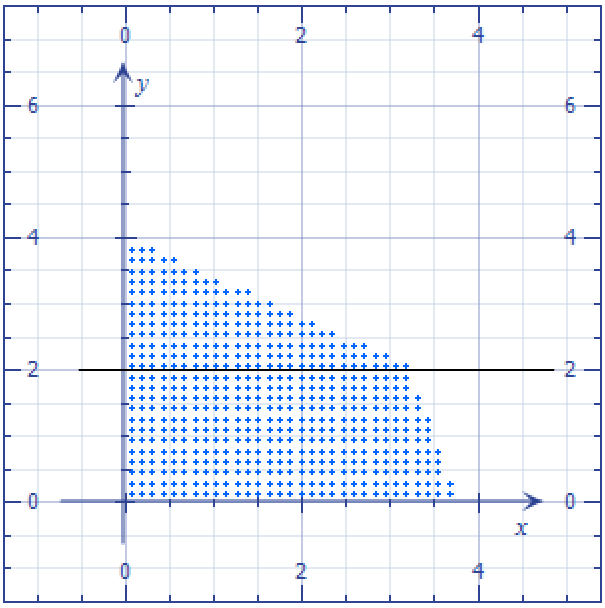
Με παράλληλη μετατόπισή της καταλήγουμε στην βέλτιστη λύση του προβλήματος, «πέφτοντας» πάνω στο γωνιακό σημείο $(3.24, 2.06)$, το οποίο μας δίνει την βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης $(z = 8.53)$.



Εικόνα 11: Εφικτή περιοχή & 2x+y=8.53

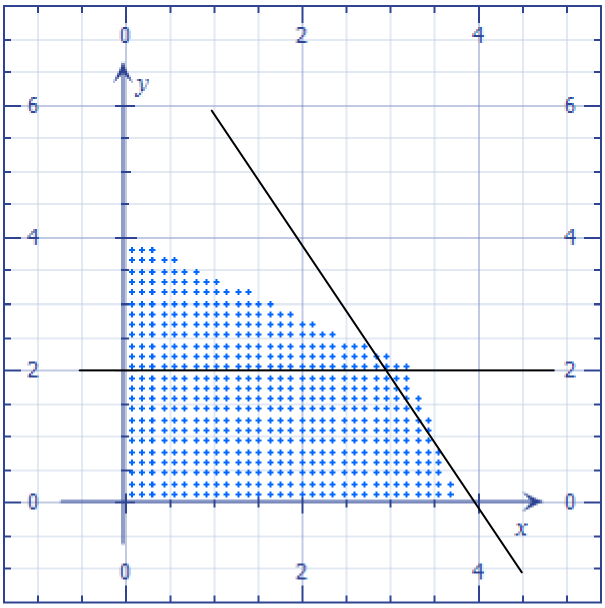
Τώρα θα προχωρήσουμε στην μέθοδο επιπέδων αποκοπής, ώστε να εντοπίσουμε την βέλτιστη λύση του αντίστοιχου ILP προβλήματος.

Αρχικά, προσθέτουμε το πρώτο επίπεδο αποκοπής, $y = 2$, το οποίο παράγει την βέλτιστη λύση του LP προβλήματος $(x, y) = (3.25, 2)$ με τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης $z = 8.5$.



Εικόνα 12: Εφικτή περιοχή και το πρώτο επίπεδο αποκοπής, y=2

Κατόπιν, θα προσθέσουμε το δεύτερο επίπεδο αποκοπής, $2x + y = 8$. Παρατηρούμε ότι η μόνη ακέραια λύση είναι το σημείο $(3, 2)$, το οποίο μας δίνει βέλτιστη λύση $z = 8$ για την αντικειμενική συνάρτηση.



Εικόνα 7: Εφικτή περιοχή και τα δύο επίπεδα αποκοπής, y=2 και 2x+y=8

5.3 Η ΜΕΘΟΔΟΣ CUTTING PLANES (ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΑΠΟΚΟΠΗΣ) – ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ

Η μέθοδος Cutting Planes μπορεί να χρησιμοποιηθεί και αλγεβρικά με την βοήθεια της μεθόδου Simplex. Ας δούμε πώς, αναλυτικά με το παρακάτω παράδειγμα (Παράδειγμα 5.3.1[17]).

Αλγεβρική Μορφή

Αντικειμενική συνάρτηση:

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{aligned}
&4x_1 - 4x_2 \le 5\\
&-x_1 + 6x_2 \le 5\\
&-x_1 + x_2 + x_3 \le 5\\
&x_1, x_2, x_3 \ge 0\\
&x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Προσθέτουμε τις χαλαρές μεταβλητές s_1, s_2, s_3 και έχουμε την κανονική μορφή του προβλήματος.

Κανονική μορφή

Αντικειμενική Συνάρτηση:

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$$

ή

$$-2x_1 - 3x_2 - x_3 - 0s_1 - 0s_2 - 0s_3 + z = 0$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{aligned}
4x_1 - 4x_2 + 0x_3 + s_1 + 0s_2 + 0s_3 &= 5\\
-x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0s_1 + s_2 + 0s_3 &= 5\\
-x_1 + x_2 + x_3 + 0s_1 + 0s_2 + s_3 &= 5
\end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \ge 0 \text{ και } x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{Z}$$

[17] Κολέτσος Ι., Στογιάννης Δ. (2012). *Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα*, εκδ. Συμεών, σελ. 342

Προχωρούμε με την επίλυση του προβλήματος με την βοήθεια της μεθόδου Simplex, όπως την περιγράψαμε στο Κεφάλαιο 3.

Αρχικός πίνακας Simplex:

Βάση	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	Λύση
s_1	4	-4	0	1	0	0	5
s_2	-1	6	0	0	1	0	5
s_3	-1	1	1	0	0	1	5
z	-2	-3	-1	0	0	0	0

Πίνακας 5.3.1

$$\min\{-2,-3,-1\} = -3$$
$$\min\{\frac{5}{6},\frac{5}{1}\} = \frac{5}{6}$$

Οδηγός στήλη: x_2

Οδηγός γραμμή: s_2

Οδηγό στοιχείο: 6

Εισάγεται στην βάση η x_2 και εκτελώντας τις γραμμοπράξεις προκύπτει ο πίνακας:

Βάση	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	Λύση
s_1	10/3	0	0	1	2/3	0	25/3
x_2	-1/6	1	0	0	1/6	0	5/6
s_3	-5/6	0	1	0	-1/6	1	25/6
z	-5/2	0	-1	0	1/2	0	5/2

Πίνακας 5.3.2: $1^{η}$ Επανάληψη

$$\min\{-\frac{5}{2},-1\} = -\frac{5}{2}$$
$$\min\{\frac{25/3}{10/3}\} = \frac{5}{2}$$

Οδηγός στήλη: x_1

Οδηγός γραμμή: s_1

Οδηγό στοιχείο: $10/3$

Εισάγεται στην βάση η x_1 και εκτελώντας τις γραμμοπράξεις προκύπτει ο πίνακας:

Βάση	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**s_1**	**s_2**	**s_3**	**Λύση**
x_1	1	0	0	3/10	1/5	0	5/2
x_2	0	1	0	1/20	1/5	0	5/4
s_3	0	0	1	1/4	0	1	25/4
z	0	0	-1	3/4	1	0	35/4

Πίνακας 5.3.3: 2η Επανάληψη

$$\min\{-1\} = -1$$

$$\min\{\frac{25/4}{1}\} = \frac{25}{4}$$

Οδηγός στήλη: x_3
Οδηγός γραμμή: s_3
Οδηγό στοιχείο: 1

Εισάγεται στην βάση η x_3 και εκτελώντας τις γραμμοπράξεις προκύπτει ο πίνακας:

Βάση	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**s_1**	**s_2**	**s_3**	**Λύση**
x_1	1	0	0	3/10	1/5	0	5/2
x_2	0	1	0	1/20	1/5	0	5/4
x_3	0	0	1	1/4	0	1	25/4
z	0	0	0	1	1	1	15

Πίνακας 5.3.4: 3η Επανάληψη

Παρατηρούμε ότι ικανοποιείται το κριτήριο βελτιστότητας με λύση $(x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3) = (\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{25}{4}, 0, 0, 0)$ και βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης $z = 15$.

Οι μεταβλητές δεν λαμβάνουν ακέραιες τιμές, οπότε θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο επιπέδων αποκοπής, ώστε να καταλήξουμε σε ακέραιες λύσεις.

Από τον Πίνακα 5.3.4 της 3ης Επανάληψης προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις:

x_1 – εξίσωση: $x_1 + \frac{3}{10}s_1 + \frac{1}{5}s_2 = \frac{5}{2}$

x_2 – εξίσωση: $x_2 + \frac{1}{20}s_1 + \frac{1}{5}s_2 = \frac{5}{4}$

x_3 – εξίσωση: $x_3 + \frac{1}{4}s_1 + s_3 = \frac{5}{4}$

z – εξίσωση: $s_1 + s_2 + s_3 = 15$

Κάθε μία από αυτές τις εξισώσεις, εφόσον στο δεξιό τους μέλους έχουν κάποιο κλάσμα, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την δημιουργία ενός επιπέδου αποκοπής. Διαλέγουμε τυχαία κάποια από τις παραπάνω εξισώσεις, ας πούμε την x_1. Αναλύουμε το δεξί της μη ακέραιο μέλος σε μια ακέραια τιμή και σε ένα θετικό κλάσμα. Η x_1 – *εξίσωση* γίνεται:

$$x_1 + \frac{3}{10}s_1 + \frac{1}{5}s_2 = 2 + \frac{1}{2} \Rightarrow$$
$$x_1 - 2 = -\frac{3}{10}s_1 - \frac{1}{5}s_2 + \frac{1}{2}$$

Οι s_1, s_2 είναι μη αρνητικές, οπότε για το δεξιό μέλος της θα πρέπει να ισχύει:

$$-\frac{3}{10}s_1 - \frac{1}{5}s_2 + \frac{1}{2} \le \frac{1}{2}$$

Επίσης, το αριστερό μέλος λαμβάνει ακέραια τιμή, οπότε για το δεξιό μέλος της εξίσωσης θα πρέπει να ισχύει:

$$-\frac{3}{10}s_1 - \frac{1}{5}s_2 + \frac{1}{2} \le 0$$

Αυτή η σχέση είναι και ο νέος μας περιορισμός που θα προστεθεί στο πρόβλημά μας (το επίπεδο αποκοπής μας). Προκειμένου να χρησιμοποιήσουμε το επίπεδο αποκοπής, πριν προσθέσουμε τον περιορισμό στον Πίνακα 5.3.4, θα πρέπει να προσθέσουμε μία τεχνητή μεταβλητή[18] R_1 στο επίπεδο αποκοπής αλλά και στην αντικειμενική συνάρτηση με κόστος M . Το πρόβλημά μας γίνεται:

Αντικειμενική συνάρτηση:

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 - MR_1$$

ή

$$-2x_1 - 3x_2 - x_3 - 0s_1 - 0s_2 - 0s_3 + MR_1 + z = 0$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$x_1 + \frac{3}{10}s_1 + \frac{1}{5}s_2 = \frac{5}{2}$$
$$x_2 + \frac{1}{20}s_1 + \frac{1}{5}s_2 = \frac{5}{4}$$
$$x_3 + \frac{1}{4}s_1 + s_3 = \frac{5}{4}$$
$$-\frac{3}{10}s_1 - \frac{1}{5}s_2 + R_1 = -\frac{1}{2}$$
$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3, R_1 \geq 0 \text{ και } x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3, R_1 \in \mathbb{Z}$$

Αρχικός Πίνακας Simplex

Βάση	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	R_1	Λύση
x_1	1	0	0	3/10	1/5	0	0	5/2
x_2	0	1	0	1/20	1/5	0	0	5/4
x_3	0	0	1	1/4	0	1	0	25/4
R_1	0	0	0	-3/10	-1/5	0	1	-1/2
z	0	0	0	1	1	1	-M	15

Πίνακας 5.3.5

Θα τροποποιήσουμε τον παραπάνω πίνακα πολλαπλασιάζοντας με Μ την γραμμή της R_1 και προσθέτοντάς την στην γραμμή της z . Έχουμε:

[18] Κολέτσος Ι., Στογιάννης Δ. (2012). *Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα*, εκδ. Συμεών, σελ. 179

Τροποποιημένος Πίνακας Simplex

Βάση	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	R_1	Λύση
x_1	1	0	0	3/10	1/5	0	0	5/2
x_2	0	1	0	1/20	1/5	0	0	5/4
x_3	0	0	1	1/4	0	1	0	25/4
R_1	0	0	0	-3/10	-1/5	0	1	-1/2
z	0	0	0	$1-\frac{3}{10}M$	$1-\frac{1}{5}M$	1	0	$15-\frac{1}{2}M$

Πίνακας 5.3.6

$$\min\{1-\frac{3}{10}M, 1-\frac{2}{10}M\} = 1-\frac{3}{10}M$$
$$\min\{\frac{5/2}{3/10}, \frac{5/4}{1/20}, \frac{25/4}{1/4}, \frac{-1/2}{-3/20}\} = \{\frac{25}{3}, 25, 25, \frac{5}{3}) = \frac{5}{3}$$

Οδηγός στήλη: s_1
Οδηγός γραμμή: R_1
Οδηγό στοιχείο: $-3/10$

Εισάγεται στην βάση η s_1 και εκτελώντας τις γραμμοπράξεις προκύπτει ο πίνακας:

Βάση	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	R_1	Λύση
x_1	1	0	0	0	0	0	1	2
x_2	0	1	0	0	1/6	0	1/6	7/6
x_3	0	0	1	0	-1/6	1	5/6	35/6
s_1	0	0	0	1	2/3	0	-10/3	5/3
z	0	0	0	0	1/3	1	$\frac{10}{3}-M$	40/3

Πίνακας 5.3.7: 1η Επανάληψη

Ικανοποιείται το κριτήριο βελτιστότητας, με λύση

$$(x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3) = (2, \frac{7}{6}, \frac{35}{6}, \frac{5}{3}, 0, 0)$$

και τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης $z = \frac{40}{3}$.

Η τεχνητή μεταβλητή R_1 έχει επιτελέσει τον σκοπό της οπότε την αφαιρούμε από τον πίνακα Simplex.

Όμοια με πριν, από τον Πίνακα 5.3.7 προκύπτουν οι σχέσεις που ακολουθούν, μία εκ των οποίων θα επιλεχθεί τυχαία ώστε να γίνει το επόμενο επίπεδο αποκοπής.

x_1 – εξίσωση: $x_1 = 2$

x_2 – εξίσωση: $x_2 + \frac{1}{6}s_2 = \frac{7}{6}$

x_3 – εξίσωση: $x_3 - \frac{1}{6}s_2 + s_3 = \frac{35}{6}$

s_3 – εξίσωση: $s_1 + \frac{2}{3}s_2 = \frac{5}{3}$

z – εξίσωση: $\frac{1}{3}s_2 + s_3 = \frac{40}{3}$

Με παρόμοιο τρόπο, όπως προηγουμένως, η *x_3 – εξίσωση* γίνεται:

$$x_3 - \frac{1}{6}s_2 + s_3 = \frac{35}{6} \Rightarrow$$
$$x_3 - s_2 + s_3 - 5 = -\frac{5}{6}s_2 + \frac{5}{6}$$

Το δεξιό μέλος της τελευταίας σχέσης θα πρέπει να ικανοποιεί την σχέση (αφού θα πρέπει να είναι $\leq \frac{5}{6}$ και ακέραιο):

$$-\frac{5}{6}s_2 + \frac{5}{6} \leq 0$$

Αυτή η σχέση είναι και το δεύτερό μας επίπεδο αποκοπής. Προσθέτουμε την τεχνητή μεταβλητή R_2 στην σχέση, όπως και στην αντικειμενική συνάρτηση με κόστος M. Έχουμε το πρόβλημα:

Αντικειμενική συνάρτηση:

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 - MR_2$$

ή

$$-2x_1 - 3x_2 - x_3 - 0s_1 - 0s_2 - 0s_3 + MR_2 + z = 0$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$x_1 = 2$$
$$x_2 + \frac{1}{6}s_2 = \frac{7}{6}$$
$$x_3 - \frac{1}{6}s_2 + s_3 = \frac{35}{6}$$
$$s_1 + \frac{2}{3}s_2 = \frac{5}{3}$$
$$-\frac{5}{6}s_2 + R_2 = -\frac{5}{6}$$

$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3, R_2 \geq 0$ και $x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3, R_2 \in \mathbb{Z}$

Αρχικός Πίνακας Simplex

Βάση	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	R_2	Λύση
x_1	1	0	0	0	0	0	0	2
x_2	0	1	0	0	1/6	0	0	7/6
x_3	0	0	1	0	-1/6	1	0	35/6
s_1	0	0	0	1	2/3	0	0	5/3
R_2	0	0	0	0	-5/6	0	1	-5/6
z	0	0	0	0	1/3	1	-M	40/3

Πίνακας 5.3.8

Τροποποιημένος Πίνακας Simplex

Βάση	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	R_2	Λύση
x_1	1	0	0	0	0	0	0	2
x_2	0	1	0	0	1/6	0	0	7/6
x_3	0	0	1	0	-1/6	1	0	35/6
s_1	0	0	0	1	2/3	0	0	5/3
R_2	0	0	0	0	-5/6	0	1	-5/6
z	0	0	0	0	$\frac{1}{3} - \frac{5}{6}M$	1	0	$\frac{40}{3} - \frac{5}{6}M$

Πίνακας 5.3.9

$$\min\{\frac{1}{3}-\frac{5}{6}M\}=\frac{1}{3}-\frac{5}{6}M$$
$$\min\{\frac{7/6}{1/6},\frac{5/3}{2/3},\frac{-5/6}{-5/6}\}=\{7,\frac{5}{2},1\}=1$$

Οδηγός στήλη: s_2
Οδηγός γραμμή: R_2
Οδηγό στοιχείο: $-5/6$

Εισάγεται στην βάση η s_2 και εκτελώντας τις γραμμοπράξεις προκύπτει ο πίνακας:

Βάση	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	R_2	Λύση
x_1	1	0	0	0	0	0	0	2
x_2	0	1	0	0	0	0	1/5	1
x_3	0	0	1	0	0	1	-1/5	6
s_1	0	0	0	1	0	0	4/5	1
R_2	0	0	0	0	1	0	-6/5	1
z	0	0	0	0	0	1	$\frac{2}{5}-M$	13

Πίνακας 5.3.10: 1η Επανάληψη

Η τεχνητή μεταβλητή R_2 επιτέλεσε τον σκοπό της, άρα μπορούμε να την αφαιρέσουμε από τον βέλτιστο πίνακα Simplex:

Βάση	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	Λύση
x_1	1	0	0	0	0	0	2
x_2	0	1	0	0	0	0	1
x_3	0	0	1	0	0	1	6
s_1	0	0	0	1	0	0	1
R_2	0	0	0	0	1	0	1
z	0	0	0	0	0	1	13

Πίνακας 5.3.11: Βέλτιστος Πίνακας Simplex

Ικανοποιείται το κριτήριο βελτιστότητας και προκύπτει η παρακάτω βέλτιστη ακέραια λύση:

$$(x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3) = (2,1,6,1,1,0)$$

με τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης $z = 13$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

6.1 ΑΝΑΘΕΣΗ ΑΕΡΟΠΟΡΙΚΩΝ ΠΤΗΣΕΩΝ

Το πρόβλημα[19]:

Μία μικρή ιδιωτική αεροπορική εταιρεία διαθέτει τρία είδη αεροσκαφών: Α, Β και Γ, για να εκτελεί πτήσεις σε συγκεκριμένες αεροπορικές διαδρομές με αντίστοιχους κωδικούς αριθμούς 001, 002 και 003. Για τα αεροσκάφη γνωρίζουμε τις διαδρομές που είναι δυνατό να πραγματοποιήσουν. Τα αεροσκάφη τύπου Α δεν πραγματοποιούν τη διαδρομή 003, ενώ τα αεροσκάφη τύπου Γ δεν πραγματοποιούν τη διαδρομή 001. Τα αεροσκάφη τύπου Β πραγματοποιούν όλες τις διαδρομές.

Όσον αφορά στον προγραμματισμό των πτήσεων της επόμενης εβδομάδας, η εταιρεία έχει προβλέψει την ελάχιστη ζήτηση (αριθμό επιβατών) για κάθε μια από τις τρεις διαδρομές. Τα στοιχεία αυτά, καθώς και το αντίτιμο του εισιτηρίου κάθε διαδρομής, περιέχονται στον πίνακα 6.1.1.

Η οικονομική υπηρεσία της εταιρείας έχει υπολογίσει αναλυτικά το κόστος μεταφοράς ενός επιβάτη για κάθε διαδρομή και για τα αεροσκάφη που μπορούν να τις καλύψουν. Τα μοναδιαία αυτά κόστη, δίνονται στον Πίνακα 6.1.2.

Διαδρομή	Ελάχιστος Αριθμός Επιβατών	Τιμή Εισιτηρίου (€)
001	320	45
002	170	45
003	190	24

Πίνακας 6.1.1: Ζήτηση θέσεων και τιμές εισιτηρίων

[19] Κολέτσος Ι. (2006). *Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα*, Ακέραιος Προγραμματισμός, σελ. 8

Διαδρομή	Μοναδιαίο Κόστος Μεταφοράς (€)		
	Α	Β	Γ
001	36	39	-
002	36	39	45
003	-	33	42

Πίνακας 6.1.2: Κόστη μεταφοράς

Το κάθε αεροσκάφος μπορεί να εκτελέσει το πολύ 3 πτήσεις (σε 3 διαδρομές) την εβδομάδα και έχει διαφορετική χωρητικότητα, ανάλογα με τη διαδρομή στην οποία θα χρησιμοποιηθεί. Αυτό το τελευταίο οφείλεται στους ισχύοντες διεθνείς κανόνες ασφαλείας. Τα τεχνικά αυτά δεδομένα, καθώς και ο διαθέσιμος αριθμός αεροσκαφών κάθε τύπου, φαίνονται στον Πίνακα 6.1.3.

Διαδρομή	Χωρητικότητα αεροσκάφους (αριθμός επιβατών)		
	Α	Β	Γ
001	20	15	-
002	18	13	10
003	-	14	8
Διαθέσιμα Αεροσκάφη	15	14	18

Πίνακας 6.1.3: Χωρητικότητα αεροσκαφών

Η εταιρεία επιδιώκει να καθορίσει εκείνη την ανάθεση των πτήσεων αεροσκαφών η οποία μεγιστοποιεί το συνολικό κέρδος της.

Μοντελοποίηση προβλήματος κατανομής

Το πρόβλημα που απασχολεί την εταιρεία, αφορά την ανάθεση των πτήσεων στα αεροσκάφη της. Κατά συνέπεια, εδώ έχουμε πρόβλημα κατανομής των αεροσκαφών (ή μάλλον των πτήσεων που μπορούν να πραγματοποιήσουν τα αεροσκάφη) στις τρεις διαδρομές.

Το σύνολο των επιμέρους δραστηριοτήτων κατανομής οριοθετείται από όλους τους δυνατούς τρόπους δρομολόγησης των αεροσκαφών, όπως: εκτέλεση της διαδρομής 001 από αεροσκάφη τύπου Α, εκτέλεση της διαδρομής 001 από αεροσκάφη τύπου Β, κ.λπ.

Ουσιαστικά, οι παραπάνω δυνατοί τρόποι δρομολόγησης των αεροσκαφών θα είναι και οι μεταβλητές μας. Υπάρχουν συνολικά επτά (7) τέτοιες δραστηριότητες. Οπότε, ορίζουμε τις μεταβλητές:

- x_{A1}: αριθμός πτήσεων αεροσκαφών τύπου Α στη διαδρομή 001
- x_{A2}: αριθμός πτήσεων αεροσκαφών τύπου Α στη διαδρομή 002
- x_{B1}: αριθμός πτήσεων αεροσκαφών τύπου Β στη διαδρομή 001
- x_{B2}: αριθμός πτήσεων αεροσκαφών τύπου Β στη διαδρομή 002
- x_{B3}: αριθμός πτήσεων αεροσκαφών τύπου Β στη διαδρομή 003
- $x_{Γ2}$: αριθμός πτήσεων αεροσκαφών τύπου Γ στη διαδρομή 002
- $x_{Γ3}$: αριθμός πτήσεων αεροσκαφών τύπου Γ στη διαδρομή 003

Ακολουθεί και ο πίνακας των μεταβλητών (6.1.4):

Διαδρομή	Αεροσκάφη		
	Α	Β	Γ
001	x_{A1}	x_{B1}	-
002	x_{A2}	x_{B2}	$x_{Γ2}$
003	-	x_{B3}	$x_{Γ3}$

Πίνακας 6.1.4: Μεταβλητές απόφασης προβλήματος

Μοντελοποίηση περιορισμών

Οι περιορισμοί στο πρόβλημα της αεροπορικής εταιρείας είναι δύο ειδών: η **διάθεση αεροσκαφών** και η **κάλυψη της ζήτησης θέσεων**. Ας τους δούμε:

Περιορισμοί διάθεσης αεροσκαφών

Με δεδομένο ότι κάθε αεροσκάφος μπορεί να εκτελέσει το πολύ 3 πτήσεις την εβδομάδα, ο μέγιστος εβδομαδιαίος αριθμός πτήσεων για κάθε τύπο αεροσκάφους είναι:

Α: 3 x 15 αεροσκ. = 45 πτήσεις
Β: 3 x 14 αεροσκ. = 42 πτήσεις
Γ: 3 x 18 αεροσκ. = 54 πτήσεις

Επομένως, έχουμε τους περιορισμούς:

$$x_{A1} + x_{A2} \leq 45 \text{ (πτήσεις αεροσκάφους Α/εβδομάδα)}$$
$$x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} \leq 42 \text{ (πτήσεις αεροσκάφους Β/εβδομάδα)}$$
$$x_{\Gamma 2} + x_{\Gamma 3} \leq 54 \text{ (πτήσεις αεροσκάφους Γ/εβδομάδα)}$$

Περιορισμοί ελάχιστης ζήτησης θέσεων

Στον Πίνακα 6.1.1 βλέπουμε την ελάχιστη ζήτηση που θα πρέπει να καλυφθεί. Οπότε, οι προσφερόμενες θέσεις σε κάθε διαδρομή θα πρέπει να είναι μεγαλύτερες ή ίσες αυτής της ζήτησης.

Ο αριθμός των προσφερόμενων θέσεων σε μια διαδρομή υπολογίζεται από τον αριθμό των πτήσεων πολλαπλασιασμένο επί τη χωρητικότητα των αντίστοιχων αεροσκαφών που εκτελούν τις πτήσεις αυτές (βλ. Πίνακα 6.1.3). Για παράδειγμα, στη διαδρομή 001, διατίθενται εβδομαδιαίως ($20x_{A1} + 15x_{B1}$) θέσεις επιβατών.

Έχουμε, λοιπόν, τους εξής τρεις περιορισμούς:

$$20x_{A1} + 15x_{B1} \geq 320 \text{ (θέσεις διαδρομής 001)}$$
$$18x_{A2} + 13x_{B2} + 10x_{\Gamma 2} \geq 170 \text{ (θέσεις διαδρομής 002)}$$
$$14x_{B3} + 8x_{\Gamma 3} \geq 190 \text{ (θέσεις διαδρομής 003)}$$

Φυσικοί Περιορισμοί

Εφ’ όσον οι μεταβλητές εκφράζουν αριθμό πτήσεων, οι τιμές τους οφείλουν να είναι ακέραιοι θετικοί αριθμοί (ή μηδέν):

$$x_{A1}, x_{A2}, x_{B1}, x_{B2}, x_{B3}, x_{\Gamma 1}, x_{\Gamma 2} \geq 0$$
$$x_{A1}, x_{A2}, x_{B1}, x_{B2}, x_{B3}, x_{\Gamma 1}, x_{\Gamma 2} \in \mathbb{Z}$$

Αντικειμενική συνάρτηση

Είναι προφανές πως θα πρέπει να μεγιστοποιήσουμε το κέρδος της εταιρείας κάθε εβδομάδα. Το συνολικό εβδομαδιαίο κέρδος εκφράζεται ως η διαφορά μεταξύ των εσόδων από την πώληση των εισιτηρίων και του κόστους μεταφοράς.

Τα έσοδα της εταιρείας ανά εβδομάδα είναι (€):

$$45\cdot(20x_{A1}+15x_{B1})+45\cdot(18x_{A2}+13x_{B2}+10x_{\Gamma 2})+24\cdot(14x_{B3}+8x_{\Gamma 3})=$$
$$900x_{A1}+810x_{A2}+675x_{B1}+585x_{B2}+336x_{B3}+450x_{\Gamma 2}+192x_{\Gamma 3}$$

Τα έξοδα της εταιρείας ανά εβδομάδα είναι (€):

$$36\cdot 20x_{A1}+36\cdot 18x_{A2}+39\cdot 15x_{B1}+39\cdot 13x_{B2}+33\cdot 14x_{B3}+45\cdot 10x_{\Gamma 2}+42\cdot 8x_{\Gamma 3}=$$
$$720x_{A1}+648x_{A2}+585x_{B1}+507x_{B2}+462x_{B3}+450x_{\Gamma 2}+336x_{\Gamma 3}$$

Επομένως, η αντικειμενική συνάρτηση είναι (€):

$$\max z=180x_{A1}+162x_{A2}+90x_{B1}+78x_{B2}-126x_{B3}+0x_{\Gamma 2}-140x_{\Gamma 3}$$

Τελικά το πρόβλημά μας παίρνει την μορφή:

Αντικειμενική συνάρτηση:

$$\max z=180x_{A1}+162x_{A2}+90x_{B1}+78x_{B2}-126x_{B3}+0x_{\Gamma 2}-140x_{\Gamma 3}$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{gathered}
x_{A1}+x_{A2}\le 45\\
x_{B1}+x_{B2}+x_{B3}\le 42\\
x_{\Gamma 2}+x_{\Gamma 3}\le 54\\
20x_{A1}+15x_{B1}\ge 320\\
18x_{A2}+13x_{B2}+10x_{\Gamma 2}\ge 170\\
14x_{B3}+8x_{\Gamma 3}\ge 190\\
x_{A1},x_{A2},x_{B1},x_{B2},x_{B3},x_{\Gamma 1},x_{\Gamma 2}\ge 0\\
x_{A1},x_{A2},x_{B1},x_{B2},x_{B3},x_{\Gamma 1},x_{\Gamma 2}\in\mathbb{Z}
\end{gathered}$$

Θα συνεχίσουμε με την λύση του προβλήματος.

Εφαρμογή Μεθόδου Branch and Bound (Διακλάδωσης και Οριοθέτησης)

Αρχικά, για την εφαρμογή της μεθόδου, θα επιλύσουμε το αντίστοιχο LP πρόβλημα και την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης θα την θεωρήσουμε ως ένα άνω φράγμα.

Λύνοντας το πρόβλημα με κάποιο υπολογιστικό πακέτο, όπως με την εντολή “Solver” οποιασδήποτε έκδοσης του Microsoft Office Excel, θα λάβουμε την παρακάτω βέλτιστη λύση:

$$(x_{A1}, x_{A2}, x_{B1}, x_{B2}, x_{B3}, x_{\Gamma 2}, x_{\Gamma 3}) = (45, 0, 28.43, 0, 13.57, 17, 0)$$

με

$$z = 8.948,242$$

Όπως είπαμε, αυτή η λύση δεν είναι αποδεκτή, καθώς δεν είναι ακέραιη. Η παραπάνω τιμή της z μας δίνει ένα άνω φράγμα.

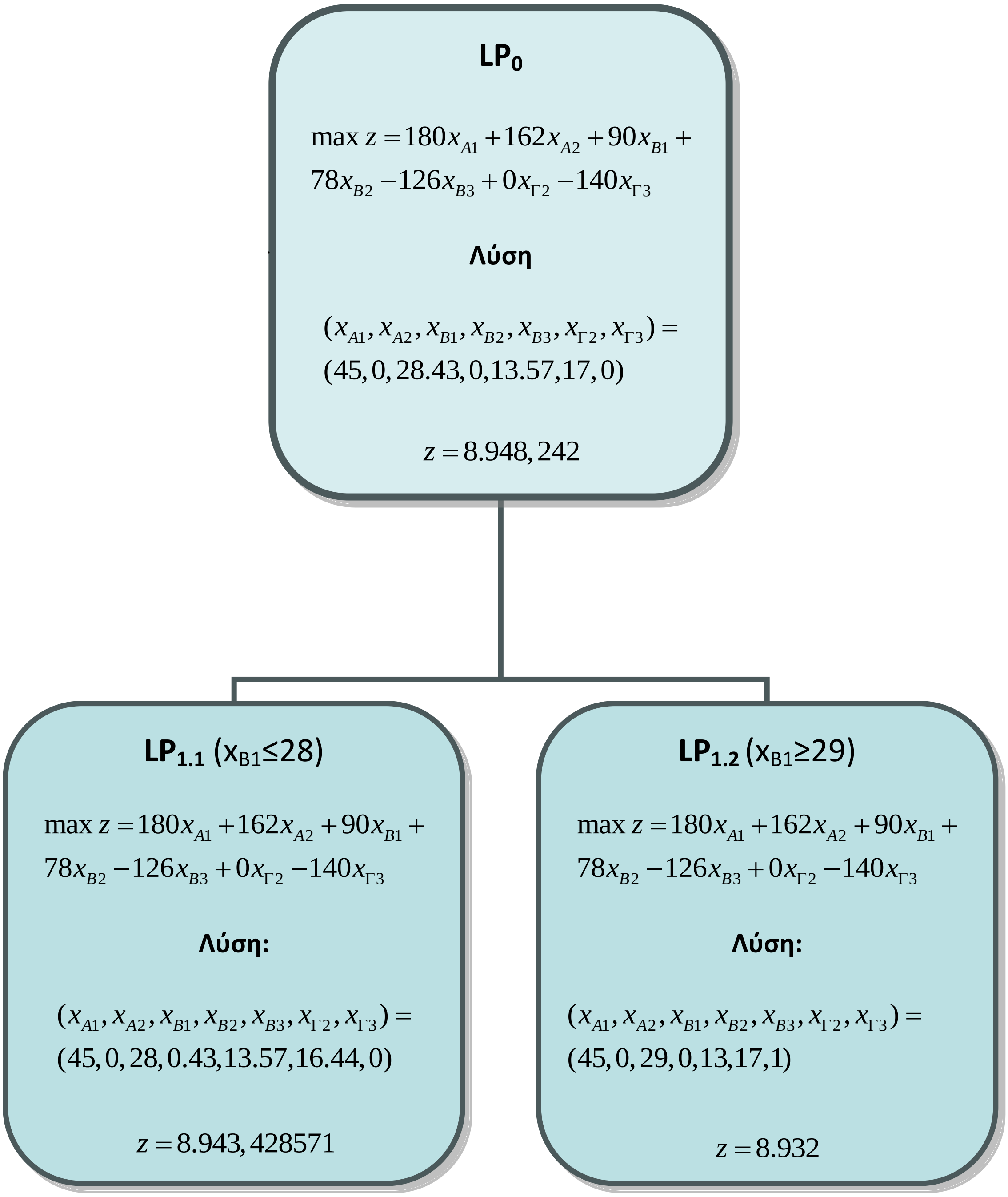
Μπορούμε, κάνοντας κατάλληλες στρογγυλοποιήσεις (ικανοποιώντας τους περιορισμούς του προβλήματος, βέβαια), να λάβουμε μία νέα τιμή για την z, η οποία θα είναι το κάτω φράγμα μας.

$$(x_{A1}, x_{A2}, x_{B1}, x_{B2}, x_{B3}, x_{\Gamma 2}, x_{\Gamma 3}) = (45, 0, 28, 0, 14, 17, 0)$$

με

$$z = 8.856$$

Από το παραπάνω αρχικό μας πρόβλημα LP_0 θα επιλέξουμε μία από τις μεταβλητές $x_{B1} = 28.43$ και $x_{B3} = 13.57$ και θα δημιουργήσουμε τα υποπροβλήματα $LP_{1.1}$ και $LP_{1.2}$. Επιλέγουμε την $x_{B1} = 28.43$ ως μεταβλητή διακλάδωσης, αποκλείουμε το διάστημα $28 < x_{B1} < 29$ το οποίο δεν περιλαμβάνει καμία ακέραια τιμή για την μεταβλητή μας, οπότε δημιουργείται το παρακάτω δένδρο:



Από την πρώτη αυτή διακλάδωση παρατηρούμε ότι το πρόβλημα LP$_{1.2}$ μας δίνει μία εφικτή λύση για το ILP πρόβλημα, ενώ η τιμή $z = 8.932$ θα αποτελεί το νέο μας κάτω φράγμα.

Θα συνεχίσουμε την μέθοδο με το πρόβλημα LP$_{1.1}$. Θα επιλέξουμε την μεταβλητή $x_{B3} = 13.57$ ως branching variable και θα δημιουργηθούν τα προβλήματα LP$_{1.1.1}$ και LP$_{1.1.2}$ (αφού αποκλείσουμε το διάστημα $13 < x_{B3} < 14$).

$LP_{1.1}$ ($x_{B1} \leq 28$)

$$\max z = 180x_{A1} + 162x_{A2} + 90x_{B1} + 78x_{B2} - 126x_{B3} + 0x_{\Gamma 2} - 140x_{\Gamma 3}$$

Λύση:

$$(x_{A1}, x_{A2}, x_{B1}, x_{B2}, x_{B3}, x_{\Gamma 2}, x_{\Gamma 3}) = (45, 0, 28, 0.43, 13.57, 16.44, 0)$$

$$z = 8.943,428571$$

$LP_{1.1.1}$ ($x_{B3} \leq 13$)

$$\max z = 180x_{A1} + 162x_{A2} + 90x_{B1} + 78x_{B2} - 126x_{B3} + 0x_{\Gamma 2} - 140x_{\Gamma 3}$$

Λύση:

$$(x_{A1}, x_{A2}, x_{B1}, x_{B2}, x_{B3}, x_{\Gamma 2}, x_{\Gamma 3}) = (45, 0, 28, 1, 13, 15.7, 0)$$

$$z = 8.920$$

$LP_{1.1.2}$ ($x_{B3} \geq 14$)

$$\max z = 180x_{A1} + 162x_{A2} + 90x_{B1} + 78x_{B2} - 126x_{B3} + 0x_{\Gamma 2} - 140x_{\Gamma 3}$$

Λύση:

$$(x_{A1}, x_{A2}, x_{B1}, x_{B2}, x_{B3}, x_{\Gamma 2}, x_{\Gamma 3}) = (45, 0, 28, 0, 14, 17, 0)$$

$$z = 8.856$$

Οι δύο τιμές που προκύπτουν από τα παραπάνω προβλήματα απορρίπτονται, καθώς είναι μικρότερες από το κάτω φράγμα που έχουμε βρει παραπάνω ($z = 8.920$, $z = 8.856 < z = 8.932$).

Επομένως, το πρόβλημα $LP_{1.2}$ μας δίνει την βέλτιστη εφικτή λύση του ILP προβλήματος η οποία είναι $(x_{A1}, x_{A2}, x_{B1}, x_{B2}, x_{B3}, x_{\Gamma 2}, x_{\Gamma 3})$ = $= (45, 0, 29, 0, 13, 17, 1)$ με τιμή για την αντικειμενική συνάρτηση $z = 8.932$.

Από την βέλτιστη λύση που βρήκαμε, έχουμε τα εξής αποτελέσματα: η αεροπορική εταιρεία θα έχει εβδομαδιαίο κέρδος 8.932€ αν τα αεροσκάφη τύπου Α πραγματοποιούν 45 πτήσεις στην διαδρομή 001 και καμία στην διαδρομή 002, τα αεροσκάφη τύπου Β πραγματοποιούν 29 πτήσεις στην διαδρομή 001, καμία στην διαδρομή 002 και 13 πτήσεις στην διαδρομή 003, ενώ τα αεροσκάφη τύπου Γ θα πρέπει να πραγματοποιούν 17 πτήσεις στην διαδρομή 002 και 1 στην διαδρομή 003.

Συμπεραίνουμε πως κάποιες πτήσεις θα μείνουν ανεκμετάλλευτες. Συγκεκριμένα, τα αεροσκάφη τύπου Γ θα μπορούσαν να πραγματοποιούν 52 πτήσεις, αλλά αντ’ αυτού εκτελούν 18. Δεν μας ενοχλεί πάντως αυτό το αποτέλεσμα, καθώς δεν θα είχαμε κάποιο κέρδος από επιπλέον πτήσεις των αεροσκαφών Γ.

Ακολουθεί το ολοκληρωμένο δένδρο της μεθόδου:

LP_0

$\max z = 180x_{A1} + 162x_{A2} + 90x_{B1} +$
$78x_{B2} - 126x_{B3} + 0x_{\Gamma 2} - 140x_{\Gamma 3}$

Λύση

$(x_{A1}, x_{A2}, x_{B1}, x_{B2}, x_{B3}, x_{\Gamma 2}, x_{\Gamma 3}) =$
$(45, 0, 28.43, 0, 13.57, 17, 0)$

$z = 8.948,242$

$LP_{1.1}$ ($x_{B1} \leq 28$)

$\max z = 180x_{A1} + 162x_{A2} + 90x_{B1} +$
$78x_{B2} - 126x_{B3} + 0x_{\Gamma 2} - 140x_{\Gamma 3}$

Λύση:

$(x_{A1}, x_{A2}, x_{B1}, x_{B2}, x_{B3}, x_{\Gamma 2}, x_{\Gamma 3}) =$
$(45, 0, 28, 0.43, 13.57, 16.44, 0)$

$z = 8.943,428571$

$LP_{1.2}$ ($x_{B1} \geq 29$)

$\max z = 180x_{A1} + 162x_{A2} + 90x_{B1} +$
$78x_{B2} - 126x_{B3} + 0x_{\Gamma 2} - 140x_{\Gamma 3}$

Λύση:

$(x_{A1}, x_{A2}, x_{B1}, x_{B2}, x_{B3}, x_{\Gamma 2}, x_{\Gamma 3}) =$
$(45, 0, 29, 0, 13, 17, 1)$

$z = 8.932$

$LP_{1.1.1}$ ($x_{B3} \leq 13$)

$\max z = 180x_{A1} + 162x_{A2} + 90x_{B1}$ -
$78x_{B2} - 126x_{B3} + 0x_{\Gamma 2} - 140x_{\Gamma 3}$

Λύση:

$(x_{A1}, x_{A2}, x_{B1}, x_{B2}, x_{B3}, x_{\Gamma 2}, x_{\Gamma 3}) =$
$(45, 0, 28, 1, 13, 15.7, 0)$

$z = 8.920$

$LP_{1.1.2}$ ($x_{B3} \geq 14$)

$\max z = 180x_{A1} + 162x_{A2} + 90x_{B1} +$
$78x_{B2} - 126x_{B3} + 0x_{\Gamma 2} - 140x_{\Gamma 3}$

Λύση:

$(x_{A1}, x_{A2}, x_{B1}, x_{B2}, x_{B3}, x_{\Gamma 2}, x_{\Gamma 3}) =$
$(45, 0, 28, 0, 14, 17, 0)$

$z = 8.856$

6.2 ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ ΔΙΑΦΗΜΙΣΗΣ

Το πρόβλημα[20]:

Θέλουμε να επιλέξουμε μία στρατηγική διαφήμισης προκειμένου να προσεγγίσουμε δύο κατηγορίες καταναλωτών: καταναλωτές που το ετήσιο οικογενειακό τους εισόδημα υπερβαίνει τα 15.000€ και άλλους με οικογενειακό εισόδημα κατώτερο των 15.000€. Από προηγούμενες έρευνές μας γνωρίζουμε ότι πελάτες από την πρώτη ομάδα αγοράζουν διπλάσια ποσότητα προϊόντων μας σε σχέση με τους πελάτες μας από τη δεύτερη ομάδα.

Μπορούμε να διαφημιστούμε είτε στην τηλεόραση είτε σε περιοδικά. Επίσης, γνωρίζουμε και τα παρακάτω στοιχεία:

- Μια διαφήμιση στην τηλεόραση κοστίζει 20.000€ και προσεγγίζει περίπου 20.000 άτομα της πρώτης ομάδας και 40.000 άτομα της δεύτερης ομάδας.
- Μια διαφήμιση σε περιοδικό κοστίζει 12.000€ και προσεγγίζει 30.000 άτομα της πρώτης ομάδας και 15.000 άτομα της δεύτερης.
- Ζητάμε από τον υπεύθυνο διαφημιστικού της εταιρείας μας να κάνει τουλάχιστον 5 διαφημίσεις στη τηλεόραση και όχι περισσότερες από 10 διαφημίσεις σε περιοδικά, γιατί αυτό υπαγορεύει η πολιτική της εταιρείας.
- Για την διαφήμιση, διαθέτουμε συνολικά 180.000€ (Advertising Budget).

Επιδίωξή μας είναι να μεγιστοποιήσουμε τις πωλήσεις μας.

Μοντελοποίηση προβλήματος

Η εταιρεία θέλει να πάρει τις κατάλληλες αποφάσεις έτσι ώστε να μεγιστοποιήσει το κέρδος της, προχωρώντας σε μία κατάλληλη διαφημιστική στρατηγική.

Οι αποφάσεις που πρέπει να πάρει, αφορούν την ποσότητα των διαφημίσεων αλλά και το μέσο (τηλεόραση, περιοδικά) που θα προβληθούν. Ο αριθμός των διαφημίσεων στην τηλεόραση και ο

[20] Κολέτσος Ι., Στογιάννης Δ. (2012). *Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα*, εκδ. Συμεών, σελ. 39, 361

αριθμός των διαφημίσεων στα περιοδικά θα είναι και οι μεταβλητές του προβλήματός μας. Έχουμε λοιπόν:

- x_1: αριθμός διαφημίσεων στην τηλεόραση
- x_2: αριθμός διαφημίσεων στα περιοδικά

Μοντελοποίηση περιορισμών

Ας ξεκινήσουμε από τον περιορισμό του budget μας. Συνολικά διαθέτουμε 180.000€, ενώ η κάθε διαφήμιση στην τηλεόραση κοστίζει 20.000€ και σε περιοδικό κοστίζει 12.000€. Οπότε έχουμε τον περιορισμό:

$$20000x_1 + 12000x_2 \leq 180000$$

Επίσης θέλουμε να προβληθούν τουλάχιστον 5 διαφημίσεις στην τηλεόραση. Προκύπτει ο περιορισμός:

$$x_1 \geq 5$$

Ενώ αντίστοιχα θέλουμε να μην τυπωθούν περισσότερες από 10 διαφημίσεις σε περιοδικά:

$$x_2 \leq 10$$

Τέλος, δεν ξεχνάμε τους περιορισμούς μη αρνητικότητας, αλλά και το γεγονός πως θέλουμε οι μεταβλητές μας να λαμβάνουν ακέραια τιμή.

$$x_1, x_2 \geq 0$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

Αντικειμενική συνάρτηση

Ουσιαστικά, θέλουμε να επιλέξουμε τον κατάλληλο αριθμό διαφημίσεων, ώστε, δεδομένου του αριθμού των πελατών που θα προσεγγίσουμε, να μεγιστοποιήσουμε το κέρδος μας:

$$\max z = (2 \cdot 20000 + 40000)x_1 + (2 \cdot 30000 + 15000)x_2$$

Τελικά το πρόβλημά μας παίρνει την μορφή:

Αντικειμενική Συνάρτηση:

$$\max z = (2 \cdot 20000 + 40000)x_1 + (2 \cdot 30000 + 15000)x_2$$

ή

$$\max z = 80000x_1 + 75000x_2$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$20000x_1 + 12000x_2 \leq 180000$$
$$x_1 \geq 5$$
$$x_2 \leq 10$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

Εφαρμογή Μεθόδου Branch and Bound (Διακλάδωσης και Οριοθέτησης)

Αρχικά, θα επιλύσουμε το αντίστοιχο LP πρόβλημα, με κάποια από τις μεθόδους που έχουμε παρουσιάσει (όπως για παράδειγμα μέσω του πίνακα Simplex), και θα θεωρήσουμε την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης που θα προκύψει ως το άνω φράγμα μας.

Με αυτόν τον τρόπο, λαμβάνουμε την παρακάτω βέλτιστη λύση:

$$(x_1, x_2) = (5, 6.67)$$

με

$$z = 900000$$

Παρατηρούμε ότι η τιμή της μεταβλητής x_2 δεν είναι ακέραια, οπότε θα πρέπει να προχωρήσουμε με την χρησιμοποίηση της μεθόδου Branch and Bound προκειμένου να καταλήξουμε στην βέλτιστη ακέραια λύση για το πρόβλημά μας (καθώς ο αριθμός των διαφημίσεων θα πρέπει να είναι ακέραιος. Η τιμή $z = 900000$ αποτελεί το άνω φράγμα του προβλήματος. Η μεταβλητή x_2 είναι η μεταβλητή διακλάδωσης (branching variable), ενώ αποκλείουμε το διάστημα $6 < x_2 < 7$, καθώς δεν θα περιλαμβάνει κάποια ακέραια τιμή της μεταβλητής.

Θεωρώντας το αρχικό μας πρόβλημα ως LP_0, δημιουργούνται δύο υποπροβλήματα, τα $LP_{1.1}$ και $LP_{1.2}$, με αποτέλεσμα να έχουμε το παρακάτω δένδρο:

LP_0

$$\max z = 80000x_1 + 75000x_2$$

$$\begin{gathered} 20000x_1 + 12000x_2 \le 180000 \\ x_1 \ge 5 \\ x_2 \le 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{gathered}$$

Λύση

$x_1 = 5$, $x_2 = 6.67$,

$z = 900000$

$LP_{1.1}$ ($x_2 \le 6$)

$$\max z = 80000x_1 + 75000x_2$$

$$\begin{gathered} 20000x_1 + 12000x_2 \le 180000 \\ x_1 \ge 5 \\ x_2 \le 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{gathered}$$

Λύση:

$x_1 = 5.4$, $x_2 = 6$,

$z = 882000$

$LP_{1.2}$ ($x_2 \ge 7$)

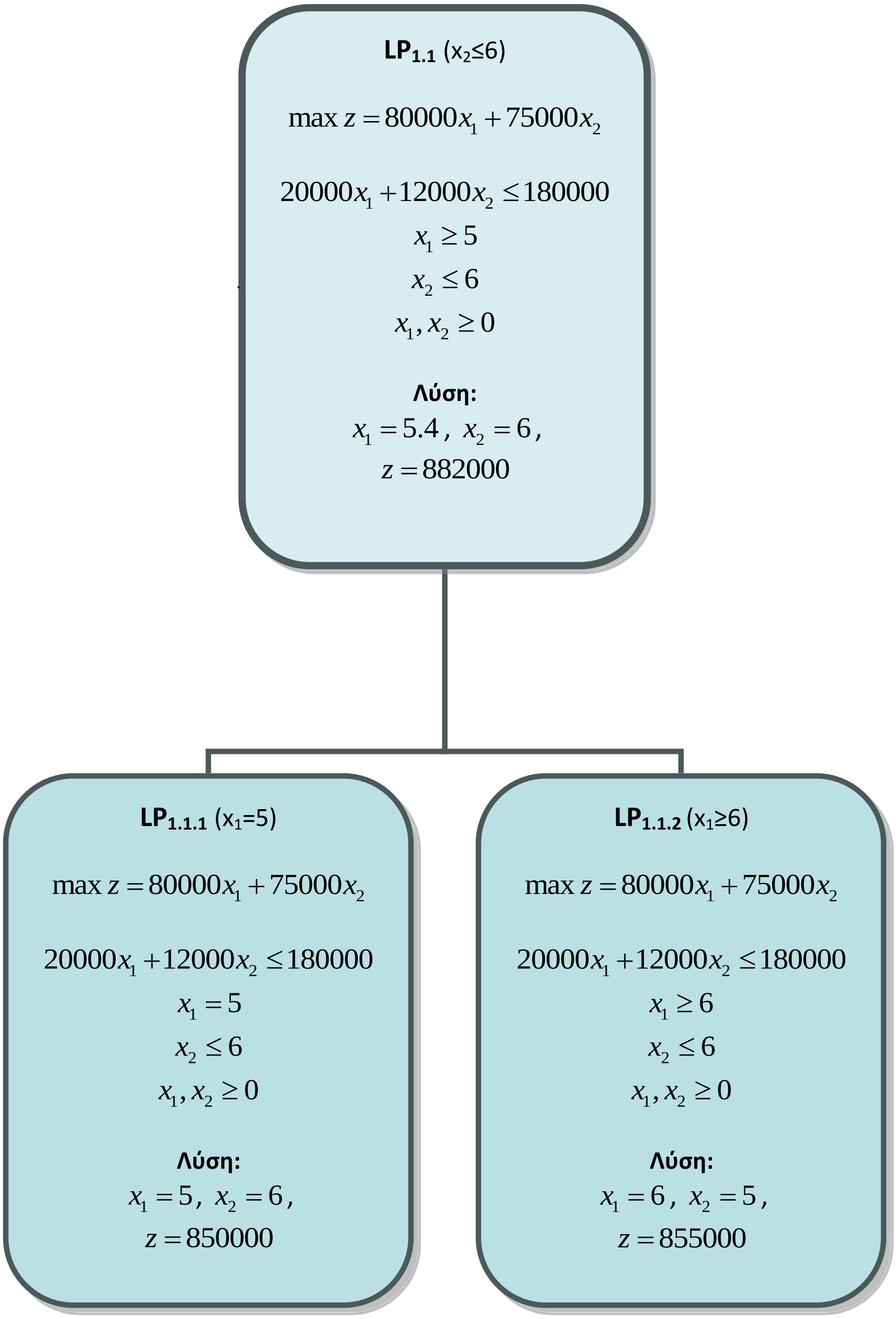
$$\max z = 80000x_1 + 75000x_2$$

$$\begin{gathered} 20000x_1 + 12000x_2 \le 180000 \\ x_1 \ge 5 \\ x_2 \le 10 \text{ και } x_2 \ge 7 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{gathered}$$

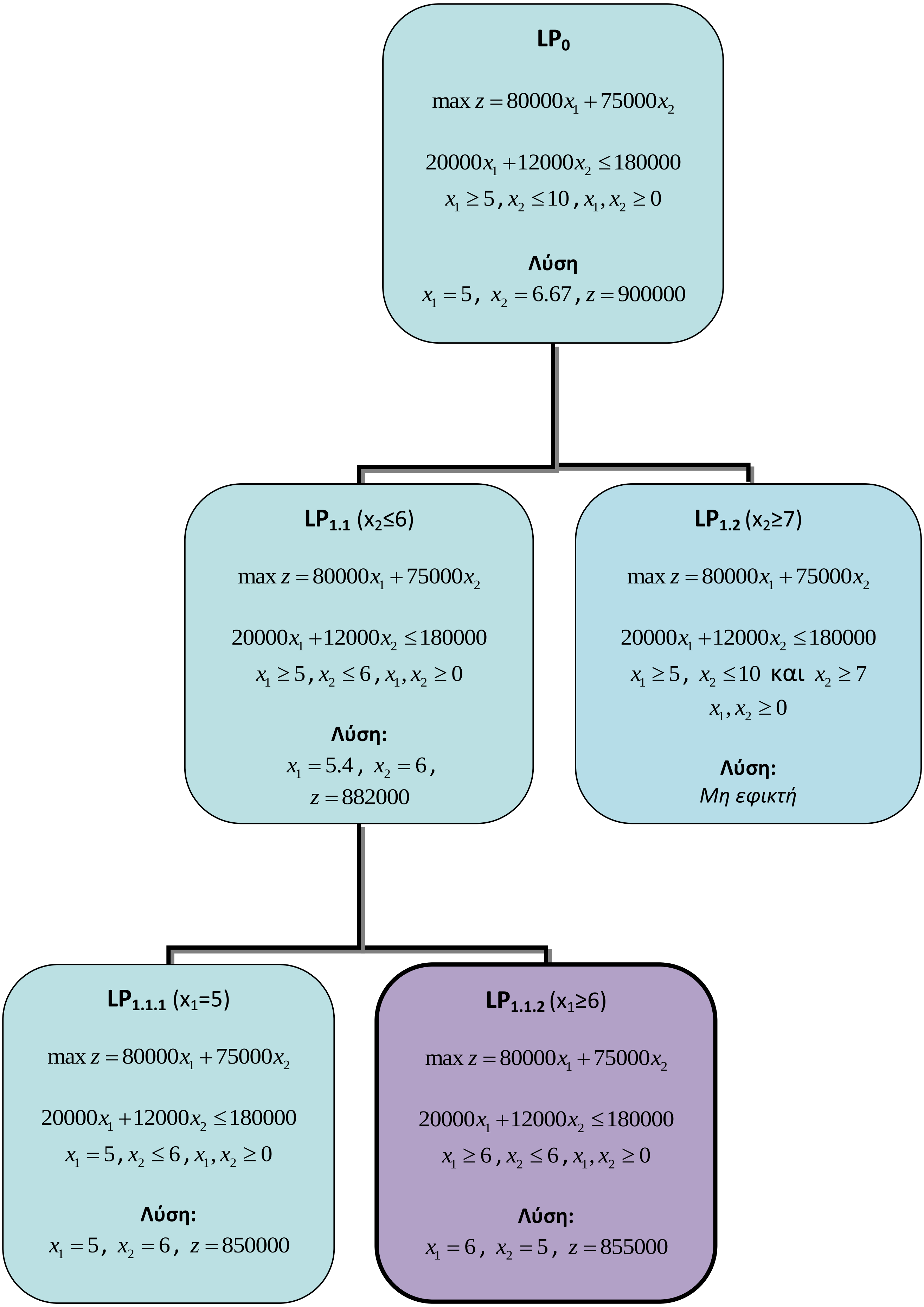
Λύση:

Μη εφικτή

Παρατηρούμε ότι το πρόβλημα $LP_{1.2}$ δεν μας δίνει καμία εφικτή λύση, οπότε δεν θα συνεχίσουμε με αυτόν τον κλάδο. Το πρόβλημα $LP_{1.1}$ μας δίνει σαν λύση τις $x_1 = 5.4$, $x_2 = 6$ με τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης $z = 882000$ (το νέο μας άνω φράγμα). Άρα θα συνεχίσουμε την διαδικασία χρησιμοποιώντας ως μεταβλητή διακλάδωσης την $x_1 = 5.4$, ενώ αποκλείσουμε το διάστημα $5 < x_1 < 6$. Από τους περιορισμούς του προβλήματος έχουμε ότι $x_1 \geq 5$ οπότε ο ένας κλάδος θα έχει τον περιορισμό $x_1 = 5$ (αντί του $x_1 \leq 5$) και ο άλλος κανονικά τον $x_1 \geq 6$. Οπότε, έχουμε τα προβλήματα LP$_{1.1.1}$ και LP$_{1.1.2}$:



Ακολουθεί το πλήρες δένδρο:

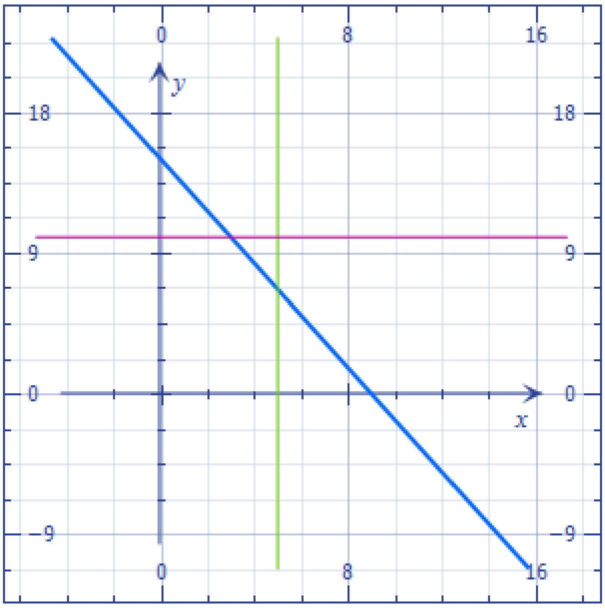


Παρατηρούμε ότι καταλήξαμε σε δύο εφικτές ακέραιες λύσεις για το πρόβλημα: η μία προτείνει να προχωρήσουμε στην προβολή 5 διαφημίσεων στην τηλεόραση και 6 στα περιοδικά, κάτι που θα μας αποφέρει κέρδος 850000€, ενώ η δεύτερη προτείνει 6 διαφημίσεις στην τηλεόραση και 5 σε περιοδικά με κέρδος 855000€. Είναι προφανές ότι η δεύτερη λύση είναι η βέλτιστη για το πρόβλημά μας.

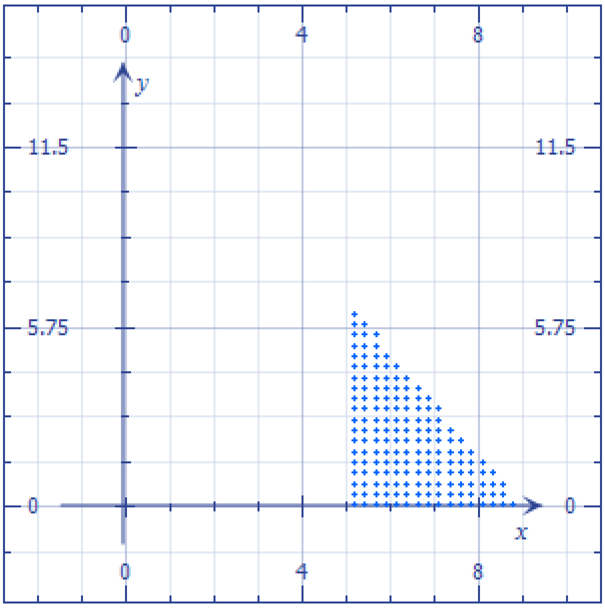
Εφαρμογή Μεθόδου Cutting Planes – Γραφική Επίλυση (Επιπέδων Αποκοπής)

Ας δούμε τώρα, και πώς θα καταλήξουμε στην ίδια βέλτιστη ακέραια λύση, χρησιμοποιώντας την γραφική επίλυση της μεθόδου Cutting Planes (όπου x_1=x και x_2=y).

Σχεδιάζουμε τους περιορισμούς του προβλήματος ώστε να καταλήξουμε στην εφικτή περιοχή των λύσεων (Εικόνες 1, 2).

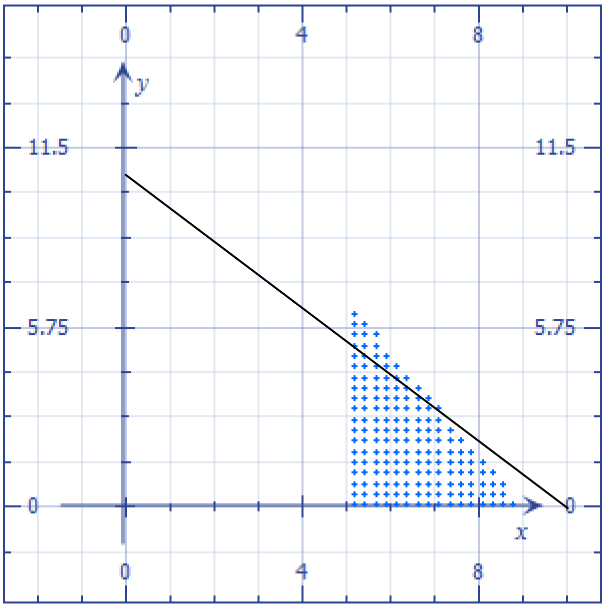


Εικόνα 13: 20x+12y=180 & x=5 & y=10



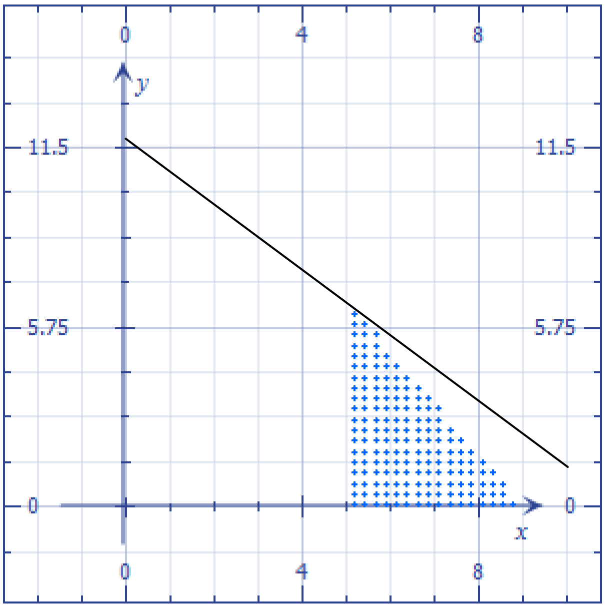
Εικόνα 14: Εφικτή περιοχή (feasible region)

Δοκιμαστικά, θα επιλέξουμε μια τιμή για την αντικειμενική μας συνάρτηση (εδώ $z = 850$) και θα την σχεδιάσουμε:



Εικόνα 15: Εφικτή περιοχή και 80x+75y=800

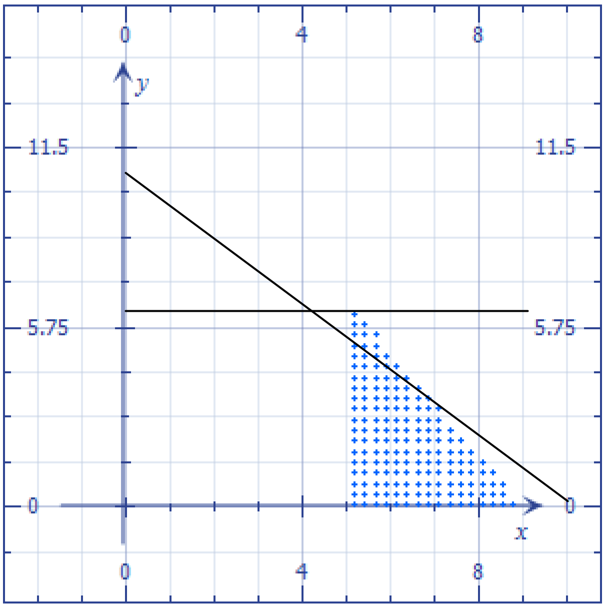
Με παράλληλη μετατόπισή της, θα βρούμε την βέλτιστη λύση του LP προβλήματος ($x = 5$, $y = 6.67$) με τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης $z = 900$, όπως φαίνεται στην Εικόνα 16:



Εικόνα 16: Εφικτή περιοχή και 80x+75y=900

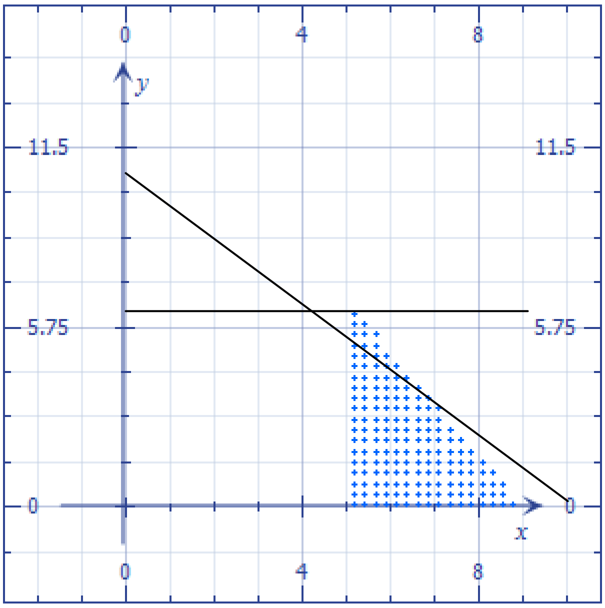
Τώρα θα προχωρήσουμε στην μέθοδο επιπέδων αποκοπής ώστε να εντοπίσουμε την βέλτιστη λύση του αντίστοιχου ILP προβλήματος.

Αρχικά, προσθέτουμε το πρώτο επίπεδο αποκοπής, $y = 6$, το οποίο παράγει μία εφικτή λύση του ILP προβλήματος $(x, y) = (5,6)$ με τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης $z = 850$.



Εικόνα 17: Εφικτή περιοχή και το πρώτο επίπεδο αποκοπής, y=6

Συνεχίζουμε με το δεύτερο επίπεδο αποκοπής, την $80x+75y=850$:



Εικόνα 6: Εφικτή περιοχή και τα δύο επίπεδα αποκοπής, y=6 & 80x+75y=850

Παρατηρούμε ότι προκύπτουν δύο ακέραιες λύσεις, $(x,y)=(5,6)$ και $(x,y)=(6,5)$ με την δεύτερη να μας δίνει την βέλτιστη τιμή για την αντικειμενική μας συνάρτηση, $z=855$ (σε χιλ. €).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΠΛΑΝΟΔΙΟΥ ΠΩΛΗΤΗ (TRAVELING SALESMAN PROBLEM - TSP)

Το πρόβλημα του Πλανόδιου Πωλητή (TSP) είναι ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης, όπου απασχολεί εντατικά επιστήμονες και ερευνητικές ομάδες πολλές δεκαετίες. Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε το πρόβλημα και θα το προσεγγίσουμε από την σκοπιά του ακέραιου προγραμματισμού.

7.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το αντικείμενο του προβλήματος, είναι, δεδομένου κάποιου αριθμού πόλεων και του κόστους ταξιδιού μεταξύ τους, να βρεθεί η διαδρομή με το μικρότερο κόστος ώστε να επισκεφτεί ο πωλητής όλες τις πόλεις μία φορά και να επιστρέψει στην αφετηρία του. Θα θεωρήσουμε ότι τα κόστη είναι συμμετρικά, δηλαδή ότι το ίδιο κόστος απαιτείται για το ταξίδι από την πόλη Α στην πόλη Β και το αντίθετο. Πρακτικά, αν οι πόλεις είναι n, τότε έχουμε $n-1$ επιλογές για το ποια θα είναι η δεύτερη πόλη, $n-2$ για την τρίτη κ.ο.κ.. Πολλαπλασιάζοντας τις επιλογές αυτές και διαιρώντας με το 2 (καθώς δεν έχει σημασία η φορά της διαδρομής εφ' όσον θεωρήσαμε τα κόστη συμμετρικά, αλλιώς δεν διαιρούμε με 2) θα έχουμε $(n-1)!/2=(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times3\times2\times1/2$ διαδρομές, οπότε αθροίζοντας τα κόστη επιλέγουμε το ελάχιστο.

Η περιγραφή του προβλήματος μπορεί να μοιάζει απλοϊκή, αλλά είναι ένα από πιο πολύπλοκα που αντιμετωπίζει η επιστημονική κοινότητα, ενώ, καμία εφικτή λύση για την γενική μορφή του προβλήματος δεν έχει βρεθεί ακόμη. Ας προσπαθήσουμε να φανταστούμε τον αριθμό των διαδρομών που θα προκύψει για ένα πρόβλημα εκατοντάδων ή χιλιάδων πόλεων. Είναι αδύνατο να τις ελέγξουμε όλες και να επιλέξουμε αυτή με το ελάχιστο άθροισμα.

Το πρόβλημα κατατάσσεται στα NP – Hard Problems (Non-deterministic Polynomial-time hard) από την Θεωρία Πολυπλοκότητας της Επιστήμης Υπολογιστών[21]. Παρ' όλη την δυσκολία του προβλήματος, ένας μεγάλος αριθμός ευρετικών (heuristic) και άλλων μεθόδων είναι γνωστός, με αποτέλεσμα να είναι δυνατή η επίλυση ενός προβλήματος χιλιάδων πόλεων.

Φυσικά οι εφαρμογές του προβλήματος επεκτείνονται σε ποικίλα προβλήματα επιχειρησιακής έρευνας, όπως θα δούμε και παρακάτω, σε προβλήματα λογιστικής, ακόμη και στην κατασκευή μικροεπεξεργαστών. Με κατάλληλες τροποποιήσεις, συναντάται σε ακόμη περισσότερους τομείς, όπως σε προβλήματα τοποθέτησης δορυφόρων, στην αλληλούχηση του DNA, στην τοποθέτηση (εγκατάσταση) καλωδίων και, γενικότερα, στην χημεία, στην βιολογία και στην φυσική. Η δυσκολία αντιμετώπισής του αυξάνεται ακόμη περισσότερο αν προστεθούν και άλλοι περιορισμοί, πόρων ή χρονικού περιθωρίου, για παράδειγμα.

7.2 ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Οι απαρχές του προβλήματος του Πλανόδιου Πωλητή δεν είναι ιδιαίτερα σαφείς. Ένα σημειωματάριο για πλανόδιους πωλητές που χρονολογείται στο 1832, αναφέρεται στο πρόβλημα και περιλαμβάνει παραδείγματα διαδρομών εντός της Γερμανίας και της Αυστρίας, χωρίς να αντιμετωπίζεται όμως με κάποια μαθηματική μέθοδο.

Ο προσδιορισμός του προβλήματος χρεώνεται στον σπουδαίο Ιρλανδό μαθηματικό **Sir William Rowan Hamilton** (1805-1865) και στον Βρετανό **Thomas Penyngton Kirkman** (1806-1895). Ο πρώτος ήταν ο δημιουργός του «Δωδεκάεδρου του Ταξιδιώτη[22]», ενός μαθηματικού παιχνιδιού του οποίου ο σκοπός ήταν αρκετά κοντά (έστω και σε πρώιμο στάδιο) με το πρόβλημα που μελετάμε σε αυτό το κεφάλαιο. Η γενική μορφή του TSP φαίνεται ότι μελετήθηκε αρχικώς τον προηγούμενο αιώνα (δεκαετία του '30) από μαθηματικούς στο Πανεπιστήμιο της Βιέννης, όπως ο **Karl Menger** (1902-1985) και στο Χάρβαρντ. Ο Αμερικάνος **Hassler Whitney** (1907-1989) του

[21] Τα NP κλάσης πολυπλοκότητας προβλήματα, είναι εκείνα τα προβλήματα απόφασης των οποίων η λύση τους μπορεί να αποδειχθεί αν είναι σωστή σε μη αιτιοκρατικό - πολυωνυμικό χρόνο. Δεν έχει βρεθεί λύση για όλα τα NP προβλήματα, αλλά δεν έχει αποδειχθεί και το αντίθετο. Τα NP-Hard προβλήματα ορίζονται ως «τουλάχιστον όσο δύσκολα είναι τα πιο δύσκολα NP προβλήματα». Τα προβλήματα κλάσης P είναι τα προβλήματα όπου η λύση τους αποδεικνύεται σε αιτιοκρατικό πολυωνυμικό χρόνο. Το ανοικτό πρόβλημα P=NP είναι ένα σημαντικότατο αντικείμενο μελέτης της εποχής μας και ένα από τα επτά Millennium Prize Problems του Clay Mathematics Institute.

[22] "The Icosian Game", 1857

Πανεπιστημίου Princeton εισήγαγε το όνομα Traveling Salesman Problem, λίγο αργότερα.

Τις επόμενες δεκαετίες το πρόβλημα απέσπασε την προσοχή της επιστημονικής κοινότητας ευρύτατα στην Ευρώπη και στην Αμερική. Σπουδαία συνεισφορά στις μελέτες του προβλήματος προσέφεραν οι **George Dantzig**, **Delbert Ray Fulkerson** και **Selmer M. Johnson**, ενώ εργαζόντουσαν για τις αμερικανικές στρατιωτικές δυνάμεις. Συγκεκριμένα, το αντιμετώπισαν ως πρόβλημα ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού και ανέπτυξαν την μέθοδο Cutting Planes για την επίλυσή του. Με αυτόν τον τρόπο επέλυσαν ένα πρόβλημα 49 πόλεων (1953) βρίσκοντας την βέλτιστη διαδρομή.

Με την πάροδο των χρόνων, υπήρχε και αντίστοιχη πρόοδος στην αντιμετώπιση του TSP. Στις δεκαετίες του ‘70 και του ‘80 πολλοί μαθηματικοί, με χρήση των μεθόδων που αναπτύξαμε στα προηγούμενα κεφάλαια (Branch and Bound και Cutting Planes) κατάφεραν να επιλύουν προβλήματα μερικών χιλιάδων πόλεων (2.392 πόλεις, από τους **M. Padberg** και **G. Rinaldi**).

Την δεκαετία του ’90, δημιουργήθηκε ο Concorde TSP Solver από τους **David Applegate**, **Robert E. Bixby**, **Vasek Chvatal** και **William J. Cook**. Με το πρόγραμμα αυτό, διαδοχικά, επιλύθηκαν ακόμη μεγαλύτερα προβλήματα. Οι παραπάνω επιστήμονες, μαζί με τον **Keld Helsgaun**, κατάφεραν τον Μάιο του 2004 και βρήκαν την βέλτιστη διαδρομή ανάμεσα στις 24.978 πόλεις που βρίσκονται στην Σουηδία. Δύο χρόνια μετά, το 2006, βρέθηκε η βέλτιστη διαδρομή 85.900 «πόλεων», αυτή τη φορά σε μία VLSI (Very Large Scale Integration) εφαρμογή[23]. Ουσιαστικά, ελαχιστοποιούσαμε τον χρόνο που έκανε ένα laser να περάσει και να «κόψει» κάποιους κόμβους κατά την δημιουργία ενός κυκλώματος. Αυτή είναι και η μεγαλύτερη περίπτωση που έχει επιλυθεί μέχρι και σήμερα.

[23] VLSI είναι δημιουργία ολοκληρωμένων κυκλωμάτων, όταν συνδέουμε χιλιάδες τρανζίστορς σε ένα μικροεπεξεργαστή.

7.3 ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Θα αντιμετωπίσουμε και μεις το πρόβλημα του Πλανόδιου Πωλητή με την βοήθεια του ακέραιου προγραμματισμού και των μεθόδων που παρουσιάσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια.

Η μαθηματική μοντελοποίηση στην περίπτωση n πόλεων είναι η εξής[24]:

Ορισμός μεταβλητών:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ αν πάμε από την πόλη } i \text{ στην πόλη } j \\ 0, \text{ σε άλλη περίπτωση} \end{cases}$$

Αν θεωρήσουμε ως d_{ij} την απόσταση μεταξύ των πόλεων i, j τότε έχουμε το μοντέλο:

Αντικειμενική συνάρτηση:

$$\min z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_{ij} = \infty \text{ για κάθε } i = j$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = 1, 2, ..., n \qquad (1)$$

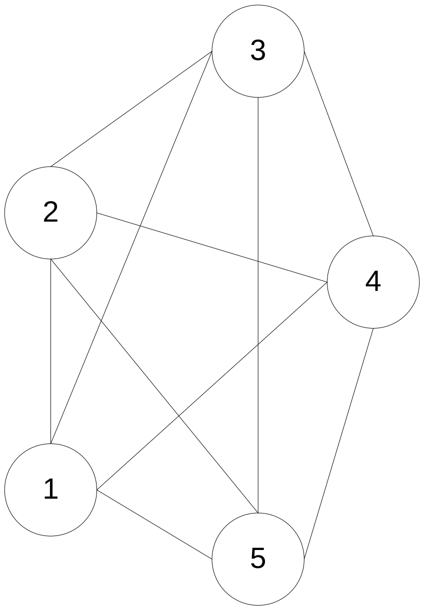
$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \ j = 1, 2, ..., n \qquad (2)$$

$$x_{ij} = 0 \text{ ή } 1 \qquad (3)$$

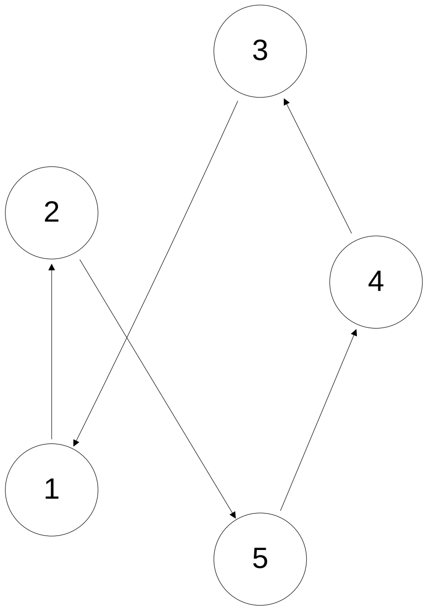
Η λύση θα πρέπει να είναι διαδρομή που να περνά από όλες τις πόλεις μία φορά (4)

[24] Taha A. Hamdy (2004). *Operations Research, An Introduction*, εκδ. Pearson Prentice Hall, σελ. 386 - 396

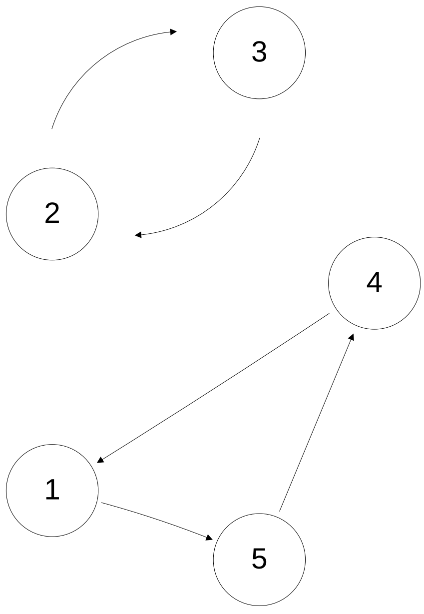
Η επιλογή των περιορισμών έγιναν με αυτόν τον τρόπο, καθώς μόνο μία μεταβλητή x_{ij} μπορεί να πάρει την τιμή της μονάδας, και δεν γίνεται να επιλέξουμε ταυτόχρονα δύο διαδρομές να ακολουθήσουμε. Παρόμοια μοντελοποιείται και το πρόβλημα ανάθεσης (assignment problem), με εξαίρεση τον τελευταίο περιορισμό, όπου στα προβλήματα ανάθεσης δεν είναι απαραίτητος (δύο ξεχωριστές διαδρομές σαν λύση είναι αποδεκτές), όπως φαίνεται παρακάτω.



Εικόνα 7.3.1.: Πρόβλημα 5 πόλεων



Εικόνα 7.3.2.: Λύση με τον περιορισμό



Εικόνα 7.3.3.: Λύση χωρίς τον περιορισμό

Η Εικόνα 7.3.1 μας παρουσιάζει ένα πρόβλημα 5 πόλεων. Η Εικόνα 7.3.2 περιλαμβάνει λύση μίας διαδρομής, ενώ η 7.3.3 λύση δύο διαδρομών. Η πρώτη είναι λύση του TSP προβλήματος, ενώ η δεύτερη είναι λύση του αντίστοιχου προβλήματος ανάθεσης.

Ακριβείς λύσεις ενός TSP προβλήματος, προκύπτουν με την χρήση των μεθόδων που παρουσιάσαμε στα κεφάλαια 4 και 5, των Branch and Bound και Cutting Planes. Βέβαια, ο χρόνος που απαιτείται για την επίλυσή του, ανάλογα με το μέγεθός του, μπορεί να είναι τεράστιος. Γι' αυτόν τον λόγο, σε πολλές περιπτώσεις, χρησιμοποιούνται ευρετικές μέθοδοι (heuristics) για την εύρεση μίας λύσης.

Πριν προχωρήσουμε σε παρουσίαση προβλημάτων και επίλυσή τους με διάφορες ευρετικές μεθόδους, αλλά και με τις Branch and Bound και Cutting Planes, ας δούμε την πολλαπλή χρησιμότητα του TSP στην αντιμετώπιση διαφόρων καταστάσεων με ένα παράδειγμα.

<u>Παράδειγμα 7.3.1</u>

Η εταιρεία χρωμάτων Rainbow παράγει τέσσερα χρώματα, λευκό (white - W), κίτρινο (yellow - Y), κόκκινο (red - R) και μαύρο (black - B). Η εταιρεία χρησιμοποιεί τα ίδια μηχανήματα για την παρασκευή των χρωμάτων, οπότε είναι απαραίτητος ο καθαρισμός τους μετά από κάθε παρτίδα. Ο Πίνακας 7.3.1.1, που ακολουθεί, μας δείχνει τον χρόνο που απαιτείται για τον καθαρισμό μετά από την παρασκευή του κάθε χρώματος. Δεν είναι δυνατό να παραχθεί το ίδιο χρώμα διαδοχικά. Ο σκοπός μας είναι να βρούμε την καλύτερη δυνατή ακολουθία, που θα ελαχιστοποιεί τον συνολικό χρόνο καθαρισμού.

Χρώμα	Χρόνος καθαρισμού για το επόμενο χρώμα (min)			
	Λευκό	**Κίτρινο**	**Μαύρο**	**Κόκκινο**
Λευκό	∞	10	17	15
Κίτρινο	20	∞	19	18
Μαύρο	50	44	∞	25
Κόκκινο	45	40	20	∞

Πίνακας 7.3.1.1

Θεωρούμε το κάθε χρώμα ως τις πόλεις που θα επισκεπτόταν ο πλανόδιος πωλητής και τα λεπτά καθαρισμού έχουν τον ρόλο των αποστάσεων των πόλεων. Λόγω του μεγέθους του προβλήματος, μπορούμε να το επιλύσουμε βρίσκοντας τις 6 πιθανές «διαδρομές» (για $n = 4 : (4-1)! = 6$, αυτή τη φορά δεν είναι τα κόστη συμμετρικά, άρα δεν διαιρούμε με 2) υπολογίζοντας τον χρόνο στην κάθε μία και κατόπιν επιλέγοντας αυτή με τον ελάχιστο συνολικό χρόνο. Ο Πίνακας 7.3.1.2 παρουσιάζει όλες τις πιθανές διαδρομές και τα αντίστοιχα κόστη:

Διαδρομή	**Κόστος**
W→Y→B→R→W	10+19+25+45=99
W→Y→R→B→W	10+18+20+50=98
W→B→Y→R→W	17+44+18+45=124
W→B→R→Y→W	17+25+40+20=102
W→R→B→Y→W	15+20+44+20=99
W→R→Y→B→W	15+40+19+50=124

Πίνακας 7.3.1.2

Είναι προφανές ότι η βέλτιστη διαδρομή είναι η W→Y→R→B→W.

Αυτός ο τρόπος επίλυσης όμως, όπως προαναφέρθηκε, δεν είναι ο κατάλληλος. Τι θα κάναμε αν η εταιρεία παρασκεύαζε 10άδες χρώματα; Για παράδειγμα, στην περίπτωση $n = 10$, θα είχαμε $10! = 3.628.800$ διαδρομές. Παρακάτω, θα αναπτύξουμε τις κατάλληλες μεθόδους για την επίλυσή του.

Η μαθηματική μοντελοποίηση του παραπάνω προβλήματος είναι:

Ορισμός Μεταβλητών:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ αν το χρώμα } j \text{ ακολουθεί το χρώμα } i \\ 0, \text{ σε άλλη περίπτωση} \end{cases}$$

Αντικειμενική συνάρτηση:

$$\begin{aligned} \min z = {} & Mx_{WW} + 10x_{WY} + 17x_{WB} + 15x_{WR} + 20x_{YW} + Mx_{YY} + 19x_{YB} + 18x_{YR} + \\ & 50x_{BW} + 44x_{BY} + Mx_{BB} + 25x_{BR} + 45x_{RW} + 40x_{RY} + 20x_{RB} + Mx_{RR} \end{aligned}$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$
\begin{aligned}
x_{WW} + x_{WY} + x_{WB} + x_{WR} &= 1 \\
x_{YW} + x_{YY} + x_{YB} + x_{YR} &= 1 \\
x_{BW} + x_{BY} + x_{BB} + x_{BR} &= 1 \\
x_{RW} + x_{RY} + x_{RB} + x_{RR} &= 1 \\
x_{WW} + x_{YW} + x_{BW} + x_{RW} &= 1 \\
x_{WY} + x_{YY} + x_{BY} + x_{RY} &= 1 \\
x_{WB} + x_{YB} + x_{BB} + x_{RB} &= 1 \\
x_{WR} + x_{YR} + x_{BR} + x_{RR} &= 1 \\
x_{ij} &= 0 \text{ ή } 1
\end{aligned}
$$

Φυσικά, η λύση θα πρέπει να είναι διαδρομή (loop). Ο συντελεστής M που βρίσκεται στην αντικειμενική συνάρτηση είναι ένας πολύ μεγάλος αριθμός και μας εγγυάται ότι δεν μπορεί κάποιο χρώμα να παραχθεί συνεχόμενα. Από το παραπάνω μοντέλο, θα μπορούσαμε να αφαιρέσουμε εντελώς τις μεταβλητές $x_{WW}, x_{YY}, x_{BB}, x_{RR}$, χωρίς να επηρεαστεί το αποτέλεσμα.

7.4 ΕΥΡΕΤΙΚΟΙ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ (HEURISTIC ALGORITHMS)

Σε αυτή την παράγραφο θα παρουσιάσουμε δύο ευρετικές μεθόδους: τον «Κοντινότερο Γείτονα» (Nearest Neighbor) και την «Εναλλαγή Διαδρομών» (Subtour Reversal). Η πρώτη μέθοδος είναι ιδιαίτερα εύκολη, ενώ η δεύτερη απαιτεί περισσότερους υπολογισμούς. Γενικά, η τελευταία μάς δίνει καλύτερα αποτελέσματα. Εν τέλει, οι δύο μέθοδοι συνδυάζονται, χρησιμοποιώντας πρώτα τον Κοντινότερο Γείτονα και το αποτέλεσμα αυτού χρησιμοποιείται στην εφαρμογή της Εναλλαγής Διαδρομών.

7.4.1. Ο αλγόριθμος Nearest Neighbor

Όπως ίσως υποψιαζόμαστε, μία καλή λύση του TSP προβλήματος μπορεί να βρεθεί επιλέγοντας ως αφετηρία μας μία πόλη και κατόπιν, να πηγαίνουμε σε αυτή με το μικρότερο κόστος κάθε φορά. Για να δούμε την μέθοδο με ένα παράδειγμα:

Παράδειγμα 7.4.1

Ο παρακάτω πίνακας (7.4.1.1) περιλαμβάνει τις αποστάσεις (σε km) μεταξύ 5 πόλεων:

$$d_{ij} = \begin{bmatrix} \infty & 120 & 220 & 150 & 210 \\ 120 & \infty & 100 & 110 & 130 \\ 220 & 80 & \infty & 160 & 185 \\ 150 & \infty & 160 & \infty & 190 \\ 210 & 130 & 185 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

Η μέθοδος μπορεί να ξεκινήσει από οποιαδήποτε πόλη. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να λαμβάνουμε διαφορετικά αποτελέσματα, ανάλογα με την αφετηρία μας. Στην συγκεκριμένη περίπτωση θα ξεκινήσουμε από την πόλη 3. Έχουμε τα εξής βήματα:

Βήμα	Κίνηση	Διαδρομή
1	Αφετηρία: Πόλη 3	3
2	Επόμενη πόλη: 2 (αφού $d_{32} = \min\{220, 80, \infty, 160, 185\} = 80$)	3→2
3	Επόμενη πόλη: 4 (αφού $d_{24} = \min\{120, \infty, -, 110, 130\} = 110$)	3→2→4
4	Επόμενη πόλη: 1 (αφού $d_{41} = \min\{150, \infty, -, -, 190\} = 150$)	3→2→4→1
5	Επόμενη πόλη: 5 (αναγκαστικά, κατόπιν επιστρέφουμε στην 3)	3→2→4→1 →5→3

Όπως φαίνεται από τις διαδρομές, αποκλείουμε την επιστροφή στην ίδια πόλη σημειώνοντας (-) καθώς θέλουμε να αποφύγουμε μερικές διαδρομές (subtours).

Το τελικό αποτέλεσμα είναι η διαδρομή 3→2→4→1→5→3 με συνολική απόσταση $80+110+150+210+185=735km$. Έχουμε παρατηρήσει ότι η λύση εξαρτάται από την αφετηρία μας, για παράδειγμα, αν επιλέξουμε ως αφετηρία μας την πόλη 1, η λύση μας θα είναι 1→2→3→4→5→1 με συνολική απόσταση $780km$.

7.4.2. Ο αλγόριθμος Subtour Reversal

Σε αυτή την μέθοδο, έχοντας ένα TSP πρόβλημα n πόλεων και μία αρχική εφικτή λύση, καταλήγουμε σε μία καλύτερη, εναλλάσσοντας μερικές διαδρομές, αρχικά δύο πόλεων, έπειτα τριών κ.ο.κ. μέχρι να φτάσουμε σε διαδρομές $n-1$ πόλεων.

Παράδειγμα 7.4.2

Θα συνεχίσουμε το προηγούμενο παράδειγμα, 7.4.1. Μία εφικτή λύση είναι η διαδρομή 1→4→3→5→2→1 με συνολική απόσταση $745km$. Τα βήματα του αλγορίθμου φαίνονται παρακάτω:

	Εναλλαγή	Διαδρομή	Συνολική απόσταση (km)
Αρχική διαδρομή	-	1→4→3→5→2→1	745
Εναλλαγή δύο πόλεων	4-3	1→**3→4**→5→2→1	820
	3-5	1→4→**5→3**→2→1	725
	5-2	1→4→3→**2→5**→1	730
Εναλλαγή τριών πόλεων	4-5-3	1→**3→5→4**→2→1	∞
	5-3-2	1→4→**2→3→5**→1	∞
Εναλλαγή τεσσάρων πόλεων	4-5-3-2	1→**2→3→5→4**→1	∞

Οι δυνατές εναλλαγές δύο πόλεων στην αρχική διαδρομή 1→4→3→5→2→1 είναι οι 4-3, 3-5 και 5-2 που μας δίνουν τρεις νέες διαδρομές συνολικών αποστάσεων $820km, 725km$ και $730km$, αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι η διαδρομή 1→4→5→3→2→1 μας δίνει την ελάχιστη συνολική απόσταση, οπότε επιλέγουμε αυτή ως αφετηρία για να προχωρήσουμε στην εναλλαγή τριών πόλεων. Όπως φαίνεται στο σχήμα καμία διαδρομή, που προκύπτει μετά τις εναλλαγές τριών και τεσσάρων πόλεων, δεν μας δίνει κάποια εφικτή λύση. Συνεπώς, η διαδρομή 1→4→5→3→2→1 με συνολική απόσταση $725km$ είναι η καλύτερη λύση του αλγόριθμου.

Είδαμε ότι οι εναλλαγές τριών πόλεων δεν προσέφεραν καλύτερες διαδρομές, οπότε με αφετηρία την καλύτερη διαδρομή της εναλλαγής δύο πόλεων, συνεχίσαμε στην εναλλαγή τεσσάρων πόλεων. Επίσης, παρατηρούμε ότι οι εναλλαγές δεν περιλαμβάνουν την πόλη 1, καθώς αν γινόταν αλλαγή της αφετηρίας, δεν θα είχαμε διαδρομή (π.χ. μία εναλλαγή των 1-4 θα μας έδινε 4→1→5→3→2→1, η οποία δεν είναι διαδρομή, καθώς δεν επιστρέφουμε στην αφετηρία).

Η λύση που καταλήξαμε παραπάνω, βρέθηκε συναρτήσει της αρχικής διαδρομής που επιλέξαμε. Για παράδειγμα, αν ξεκινούσαμε από την διαδρομή 2→3→4→1→5→2 συνολικής απόστασης $750km$ θα καταλήγαμε στην διαδρομή 2→1→4→3→5→2 συνολικής απόστασης $745km$, η οποία δεν είναι καλύτερη από την προηγούμενη λύση που βρήκαμε. Θα ήταν καλύτερο λοιπόν, να χρησιμοποιούσαμε τον αλγόριθμο Nearest Neighbor για όλες τις πιθανές διαδρομές που μπορούν να προκύψουν, ξεκινώντας από όλες τις πόλεις, να επιλέξουμε αυτή με την μικρότερη συνολική απόσταση και να την χρησιμοποιήσουμε ως αρχική διαδρομή του αλγορίθμου Subtour Reversal. Αυτός ο συνδυασμός των δύο ευρετικών μεθόδων, εν γένει, θα μας δώσει καλύτερες λύσεις από αυτές που θα παίρναμε από κάθε μέθοδο χωριστά.

Ο πίνακας που ακολουθεί μας δείχνει το αποτέλεσμα της εφαρμογής αυτού του συνδυασμού των μεθόδων:

Μέθοδος	Αφετηρία (Πόλη)	Διαδρομή	Συνολική Απόσταση (km)
Nearest neighbor	1	1→2→3→4→5→1	780
	2	2→3→4→1→5→2	750
	3	**3→2→4→1→5→3**	**735**
	4	4→1→2→3→5→4	∞
	5	5→2→3→4→1→5	750
Subtour Reversal	2-4	3→**4→2**→1→5→3	∞
	4-1	**3→2→1→4→5→3**	**725**
	1-5	3→2→4→**5→1**→3	810
	2-1-4	3→**4→1→2**→5→3	745
	1-4-5	3→2→**5→4→1**→3	∞
	2-1-4-5	3→**5→4→1→2**→3	∞

Η Nearest Neighbor μας έδωσε ως βέλτιστη διαδρομή την 3→2→4→1→5→3 με συνολική απόσταση $735km$. Αυτή η διαδρομή θα είναι και η αρχική μας στην εφαρμογή της Subtour Reversal. Μετά την διαδικασία των διαδοχικών εναλλαγών, καταλήγουμε στην διαδρομή 3→2→1→4→5→3 συνολικής απόστασης $725km$.

7.5 ΟΙ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ BRANCH AND BOUND ΚΑΙ CUTING PLANES

Σε αυτή την παράγραφο θα παρουσιάσουμε λύσεις του TSP προβλήματος μέσω των παραπάνω μεθόδων, τις οποίες αναλύσαμε στα κεφάλαια 4 και 5.

7.5.1. Ο αλγόριθμος Branch and Bound

Η αρχική ιδέα της χρήσης της μεθόδου Διακλάδωσης και Οριοθέτησης είναι να ξεκινήσουμε με βάση την βέλτιστη λύση του αντίστοιχου προβλήματος ανάθεσης. Αν η λύση αυτή είναι διαδρομή (tour), τότε η διαδικασία δεν συνεχίζεται. Αν όμως η λύση περιλαμβάνει μερικές διαδρομές (subtours), τότε θα πρέπει να συνεχίσουμε την διαδικασία μέχρι να καταλήξουμε σε λύση μίας διαδρομής.

Αυτό μπορεί να επιτευχθεί δημιουργώντας τόσες διακλαδώσεις, όσες και οι x_{ij}- μεταβλητές που περιλαμβάνονται σε κάθε μερική διαδρομή. Σε κάθε διακλάδωση που θα δουλεύουμε, θα αντικαθιστούμε μία εκ των εμπλεκόμενων μεταβλητών ίση με μηδέν (υπενθυμίζουμε ότι κάθε μεταβλητή μιας μερικής διαδρομής ισούται με την μονάδα).

Η λύση που θα προκύψει από την πρώτη διακλάδωση μπορεί να μας δώσει ως αποτέλεσμα κάποια διαδρομή, μπορεί και όχι. Αν πράγματι μας δώσει μία διαδρομή, θα χρησιμοποιήσουμε την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης ως άνω φράγμα για την τιμή της βέλτιστης διαδρομής που θέλουμε να βρούμε. Αν το αποτέλεσμα είναι εκ νέου μερικές διαδρομές, τότε συνεχίζουμε την διαδικασία της διακλάδωσης, ενώ την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης την θεωρούμε ως ένα κάτω φράγμα. Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να εξερευνηθούν όλα τα υποπροβλήματα, βρίσκοντας διαρκώς μικρότερα άνω φράγματα. Η βέλτιστη διαδρομή θα είναι αυτή που θα προσφέρει και το μικρότερο άνω φράγμα.

Ας δούμε με ένα παράδειγμα τον αλγόριθμο TSP B&B.

Παράδειγμα 7.5.1

Δίνεται το παρακάτω TSP πρόβλημα 5 πόλεων.

$d_{ij} =$

∞	10	3	6	9
5	∞	5	4	2
4	9	∞	7	8
7	1	3	∞	4
3	2	6	5	∞

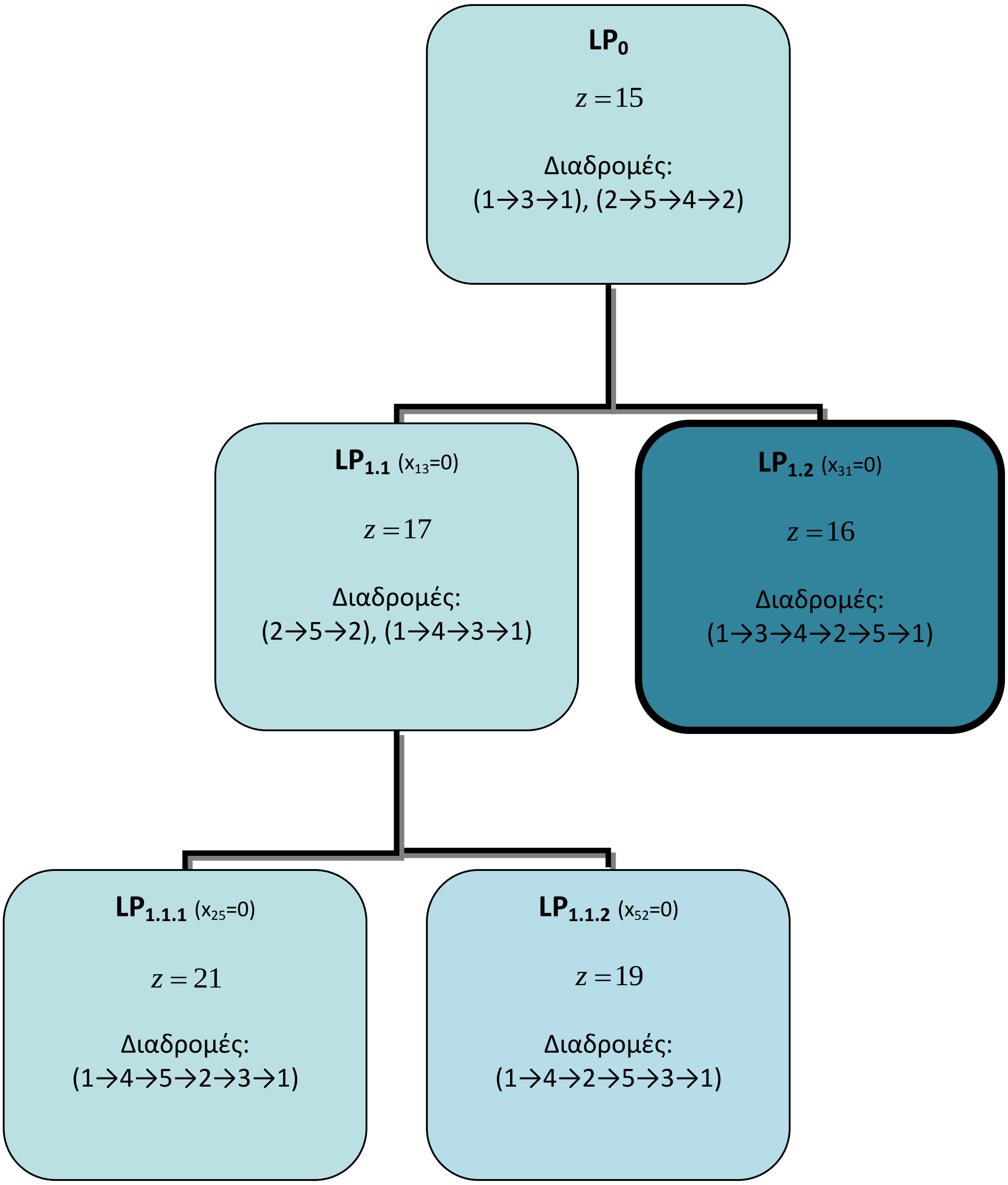
Η λύση του αντίστοιχου προβλήματος ανάθεσης είναι $x_{13} = x_{31} = 1$, $x_{25} = x_{54} = x_{42} = 1$, όλες οι υπόλοιπες μεταβλητές ίσες με το μηδέν, ενώ η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι $z = 15$.

Παρατηρούμε ότι η λύση αυτή μας δίνει δύο μερικές διαδρομές, την 1→3→1 και την 2→5→4→2. Η συνολική απόσταση σε αυτές τις διαδρομές είναι $z = 15$, τιμή που θα είναι και το κάτω φράγμα μας.

Θα ήταν χρήσιμο να είχαμε και ένα άνω φράγμα για αρχή. Ένας απλός τρόπος να προσδιορίσουμε μία τιμή, είναι να πάρουμε οποιαδήποτε διαδρομή και να βρούμε την απόσταση που προκύπτει. Για παράδειγμα, η διαδρομή 1→2→3→4→5→1 έχει συνολική απόσταση $10+5+7+4+3=29$. Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να ορίσουμε ένα άνω φράγμα χρησιμοποιώντας τον ευρετικό αλγόριθμο Nearest Neighbor. Για την ώρα, θα χρησιμοποιήσουμε την τιμή $z = 29$.

Οι δύο αυτές τιμές $(15, 29)$ ουσιαστικά μας δίνουν ότι η βέλτιστη τιμή μας θα βρίσκεται σε αυτό το σύνολο αριθμών. Είναι προφανές πως αν προκύψει διαδρομή με απόσταση ίση ή μεγαλύτερη της $z = 29$ θα απορριφθεί.

Ακολουθεί το πλήρες δένδρο της Branch and Bound και περαιτέρω σχολιασμός:



Αρχικά, θέλουμε να εξαλείψουμε τις μερικές διαδρομές του προβλήματος LP$_0$. Για παράδειγμα, αυτό το καταφέρνουμε αν επιλέξουμε την διαδρομή 1→3→1, και κατόπιν μηδενίσουμε είτε την μεταβλητή x_{13}, είτε την μεταβλητή x_{31}. Έτσι θα έχουμε δύο διακλαδώσεις, όπως φαίνεται στο σχήμα. Με παρόμοιο τρόπο, μπορούμε να επιλέξουμε την διαδρομή 2→5→4→2 και να μηδενίσουμε τις μεταβλητές x_{25}, x_{54} και x_{45}.

Σε αυτό το σημείο, να τονίσουμε ότι δεν χρειάζεται να εφαρμόσουμε την μέθοδο και για τις δύο μερικές διαδρομές. Σε κάθε υποπρόβλημα, επιλέγουμε μία μερική διαδρομή, και αλλάζοντας τις τιμές των μεταβλητών αυτής, ουσιαστικά μεταβάλλονται και οι μεταβλητές της άλλης μερικής διαδρομής. Είναι προφανές πως είναι προτιμότερο να επιλέγουμε τις μερικές διαδρομές που περιλαμβάνουν τις λιγότερες σε αριθμό πόλεις, ώστε να δημιουργήσουμε τις ελάχιστες δυνατές διακλαδώσεις.

Στην προκειμένη περίπτωση επιλέγουμε την διαδρομή 1→3→1, και δημιουργούμε δύο διακλαδώσεις, μία για την $x_{13}=0$ και μία για την $x_{31}=0$. Τα αντίστοιχα προβλήματα ανάθεσης που προκύπτουν κατασκευάζονται διαγράφοντας από τον πίνακα του αρχικού προβλήματος την γραμμή και την στήλη που αντιστοιχούν στην μεταβλητή που μηδενίσαμε, κάτι που μας «μικραίνει» και το μέγεθος του προβλήματος. Ένας άλλος τρόπος, για την επίτευξη του ίδιου αποτελέσματος, είναι να αντικαταστήσουμε την απόσταση μεταξύ των πόλεων που αντιστοιχούν στην μεταβλητή που επιλέξαμε με κάποιον πολύ μεγάλο αριθμό (∞). Στο παράδειγμά μας, αν $x_{13}=0$ τότε θα αντικαταστήσουμε την $d_{13}=\infty$. Αντίστοιχα, για την $x_{31}=0$, έχουμε $d_{31}=\infty$.

Στο σχήμα παρατηρούμε την λύση που λαμβάνουμε στο πρόβλημα $LP_{1.1}$ ($x_{13}=0$), η οποία είναι $z=17$, ενώ έχουμε εκ νέου μερικές διαδρομές, τις 2→5→2 και 1→4→3→1. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να συνεχίσουμε την εφαρμογή της B&B με δύο νέες διακλαδώσεις - προβλήματα, που προκύπτουν από τον μηδενισμό των μεταβλητών x_{25} και x_{52}.

Αυτή τη στιγμή έχουμε τρία άλυτα προβλήματα τα $LP_{1.1.1}$ ($x_{25}=0$), $LP_{1.1.2}$ ($x_{52}=0$) και το $LP_{1.2}$ ($x_{31}=0$). Ξεκινώντας από το $LP_{1.1.1}$ ($x_{25}=0$), έχουμε θέσει $d_{13}=\infty$ ενώ τώρα, θέτουμε επιπλέον και $d_{25}=\infty$ στο αρχικό πρόβλημα ανάθεσης. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μας δώσει λύση $z=21$ και ως λύση την διαδρομή 1→4→5→2→3→1. Αυτό σημαίνει ότι η λύση μας είναι εφικτή και, επομένως, το άνω φράγμα μας παίρνει την τιμή $z=21$ από $z=29$. Αυτό σημαίνει ότι θα αποκλείσουμε οποιοδήποτε από τα επόμενα προβλήματα έχει λύση μεγαλύτερο από $z=21$.

Πάμε, λοιπόν, και στα εναπομείναντα δύο προβλήματα. Στο $LP_{1.1.2}$($x_{52}=0$), θέτουμε $d_{13}=\infty$ (από προηγουμένως) και $d_{52}=\infty$, οπότε καταλήγουμε στην διαδρομή 1→4→2→5→3→1 με $z=19$. Συμπεραίνουμε άμεσα ότι αυτή η νέα διαδρομή είναι καλύτερη από την αμέσως προηγούμενη, καθώς $z = 19 < z = 21$, ενώ αυτή η τιμή θα είναι και το νέο μας άνω φράγμα.

Τέλος, μελετάμε το πρόβλημα $LP_{1.2}$ ($x_{31}=0$). Θέτουμε $d_{31} = \infty$ στο αρχικό πρόβλημα ανάθεσης, και προκύπτει ως λύση η διαδρομή 1→3→4→2→5→1 με τιμή $z = 16$ για την συνολική απόσταση μεταξύ των πόλεων. Επειδή δεν υπάρχουν περαιτέρω προβλήματα για εξερεύνηση, αυτή θα είναι και η βέλτιστή μας διαδρομή, καθώς μας προσφέρει την ελάχιστη συνολική απόσταση.

<u>Παρατηρήσεις:</u> Σχολιάζοντας την παραπάνω λύση, μπορούμε να σταθούμε σε δύο σημεία.

Η επιλογή της διαδρομής 1→2→3→4→5→1 για την εύρεση ενός αρχικού άνω φράγματος έγινε για να παρουσιάσουμε τους μηχανισμούς του αλγορίθμου Branch and Bound και της διαδικασίας ανανέωσης του άνω φράγματος όταν προκύπτει κάτι μικρότερο. Γενικά, δεν υπάρχει κάποιος τρόπος που να μας επιτρέπει να προβλέψουμε τις κατάλληλες διαδρομές, οι οποίες, πρέπει να χρησιμοποιηθούν ώστε να βελτιωθεί η αποτελεσματικότητα του αλγόριθμου. Παρ’ όλα αυτά, κάποιοι εμπειρικοί κανόνες μπορούν να χρησιμοποιηθούν. Για παράδειγμα, όταν έχουμε ένα πρόβλημα (ή υποπρόβλημα κατά την διάρκεια της διαδικασίας) μπορούμε να ξεκινήσουμε με την διακλάδωση που η αντίστοιχη απόσταση d_{ij} της μεταβλητής την οποία θα μηδενίσουμε έχει την μεγαλύτερη τιμή.

Με αυτόν τον τρόπο ελπίζουμε πως θα προκύψει μία «καλή» διαδρομή με μικρότερη συνολική απόσταση. Στο προηγούμενο παράδειγμα, θα ήταν προτιμότερο να είχαμε ασχοληθεί πρώτα με το πρόβλημα $LP_{1.2}$ ($x_{31}=0$) αντί του προβλήματος $LP_{1.1}$ ($x_{13}=0$) καθώς $(d_{31} = 4) > (d_{13} = 3)$. Πράγματι, με αυτόν τον τρόπο θα είχε προκύψει άμεσα ως άνω φράγμα $z = 16$, οπότε δεν θα ήταν απαραίτητο να επιλύσουμε τα προβλήματα $LP_{1.1.1}$ ($x_{25}=0$), $LP_{1.1.2}$ ($x_{52}=0$).

Ένας άλλος εμπειρικός κανόνας, που μπορούμε να ακολουθήσουμε, είναι να επιλύουμε τις διακλαδώσεις που προκύπτουν οριζοντίως και όχι καθέτως. Συνήθως, οι διακλαδώσεις που βρίσκονται πιο κοντά στο αρχικό πρόβλημα μας δίνουν ένα καλύτερο άνω φράγμα από τις επόμενες. Παρατηρούμε ότι, και με αυτόν τον τρόπο, θα είχαμε φτάσει στην λύση νωρίτερα.

Μία δεύτερη παρατήρηση που κάνουμε, είναι ότι η μέθοδος B&B θα έπρεπε να χρησιμοποιείται σε συνδυασμό με τους ευρετικούς αλγόριθμους που παρουσιάσαμε παραπάνω. Στο παράδειγμά μας, θα προέκυπτε η διαδρομή 1→3→4→2→5→1 με τιμή $z=16$.

7.5.2. Ο αλγόριθμος Cutting Planes

Η ιδέα της εφαρμογής της μεθόδου Επιπέδων Αποκοπής στο TSP είναι η προσθήκη κάποιων επιπλέον περιορισμών στο αρχικό αντίστοιχο πρόβλημα ανάθεσης, όπου θα αποτρέπουν την δημιουργία μερικών διαδρομών. Αυτοί οι επιπλέον περιορισμοί ορίζονται όπως φαίνεται παρακάτω. Σε μία περίπτωση n - πόλεων, «συνδέουμε» μία νέα μεταβλητή $u_j(\geq 0)$ με τις πόλεις $2,3...,n$. Ακολούθως, ορίζουμε:

$$u_i - u_j + nx_{ij} \leq n-1 \ , \ i, j = 2,3,...,n \ , \ i \neq j$$

Αυτοί οι περιορισμοί, όταν προστεθούν σε αυτούς ενός προβλήματος ανάθεσης, αυτομάτως αποκλείουν μερικές διαδρομές ως λύσεις.

Παράδειγμα 7.5.2

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας αποστάσεων σε ένα TSP πρόβλημα 4 πόλεων.

$d_{ij} =$

-	13	21	26
10	-	29	20
30	20	-	5
12	30	7	-

Μαζί με τους περιορισμούς του αντίστοιχου ILP προβλήματος, έχουμε και τους παρακάτω ($x_{ij} = 0$ ή 1, $u_j \geq 0$):

$$u_2 - u_3 + 4x_{23} \le 3$$
$$u_2 - u_4 + 4x_{24} \le 3$$
$$u_3 - u_2 + 4x_{32} \le 3$$
$$u_3 - u_4 + 4x_{34} \le 3$$
$$u_4 - u_2 + 4x_{42} \le 3$$
$$u_4 - u_3 + 4x_{43} \le 3$$

Η βέλτιστη λύση είναι

$$u_2 = 0,\ u_3 = 2,\ u_4 = 3,\ x_{12} = x_{23} = x_{34} = x_{41} = 1$$

με μήκος διαδρομής

$$z = 59$$

και βέλτιστη διαδρομή

1→2→3→4→1.

Ας δούμε όμως γιατί οι μερικές διαδρομές, που μπορεί να προκύψουν ως λύσεις, δεν ικανοποιούν τους επιπλέον περιορισμούς που προσθέσαμε. Για παράδειγμα, θεωρούμε τις μερικές διαδρομές (1→2→1, 3→4→3) που αντιστοιχούν στη λύση $x_{12} = x_{21} = 1$ και $x_{34} = x_{43} = 1$. Ας δούμε τώρα τον τελευταίο περιορισμό που έχουμε παραπάνω:

$$u_4 - u_3 + 4x_{43} \le 3$$

Αντικαθιστώντας $x_{43} = 1$, $u_3 = 2$, $u_4 = 3$ λαμβάνουμε $5 \le 3$, κάτι που είναι αδύνατο, οπότε αποκλείεται η τιμή $x_{43} = 1$ και η μερική διαδρομή 3→4→3.

Το μειονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι πως ο αριθμός των μεταβλητών αυξάνεται εκθετικά σε σχέση με τον αριθμό των πόλεων, κάτι που κάνει ιδιαίτερα δύσκολη την εύρεση λύσεων σε πρακτικές εφαρμογές. Εξαιτίας αυτού, η μέθοδος B&B (μαζί με τους ευρετικούς αλγόριθμους) συστήνεται για την επίλυση του προβλήματος.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ - ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΕΣ

1. Κολέτσος Ι. (2006). *Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα*, Ακέραιος Προγραμματισμός
2. Κολέτσος Ι., Στογιάννης Δ. (2012). *Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα*, εκδ. Συμεών
3. Winston L. Wayne (2004). *Operations Research, Applications and Algorithms*, εκδ. Duxbury Press
4. Hillier S. F., Lieberman G. J. (2001). *Introduction to Operations Research, 7th Edition*, Mc-Graw – Hill
5. Blumenfeld, Dennis (2009). *Operations Research Calculations Handbook, 2nd Edition*, CRC Press
6. Taha A. Hamdy (2004). *Operations Research, An Introduction*, εκδ. Pearson Prentice Hall
7. Cliff Stein (2007). *Applied Integer Programming*, Columbia University
8. http://www.tsp.gatech.edu/
9. http://en.wikipedia.org