ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μελέτη παραμετρικού sloshing σε τριδιάστατη ορθογωνική δεξαμενή

Κουγιουμτζόγλου Μαρία
Α.Μ. 08108027

Επιβλέπων:
Κ.Σπύρου,Καθηγητής ΣΝΜΜ

Αθήνα,2013

Περιεχόμενα

Περίληψη 3
Abstract 3
Εισαγωγή 4
1. Αντικειμενικός σκοπός 4
2. Περίγραμμα διπλωματικής εργασίας 4
Κεφάλαιο 1^{ο} - Περιγραφή φαινομένου 6
1.1 Εισαγωγή 6
1.2 Ορισμός κλυδασμού 6
1.3 Επηρεαζόμενοι τεχνολογικοί τομείς 7
1.4 Εξάρτηση από φυσικές παραμέτρους 11
Κεφάλαιο 2^{ο} – Ανασκόπιση εργασιών 13
2.1 Ιστορικό υπόβαθρο 13
2.2 Τρόποι ανάλυσης 14
2.2.1 Αριθμητική–Υπολογιστική μέθοδος 14
2.2.2 Ημιαναλυτική μέθοδος τροπικής (modal) ανάλυσης 15
2.3 Παραμετρικός κλυδασμός 18
Κεφάλαιο 3^{ο} – Θεωρητικό υπόβαθρο 20
3.1 Εξισώσεις κίνησης του υγρού 20
3.1.1 Παραδοχές 20
3.1.2 Μοντέλο Ροής για αδρανειακό σύστημα 21
3.1.3 Μοντέλο ροής για μη αδρανειακό σύστημα 23
3.1.4 Οριακές συνθήκες σώματος 24
3.1.5 Συνθήκες ελεύθερης επιφάνειας 24
3.1.6 Συνθήκη διατήρησης του όγκου (μάζας) 25
3.1.7 Αρχικές και περιοδικές συνθήκες 25
3.2 Γραμμικές φυσικές συχνότητες 26
3.2.1 Γενική θεωρία 26
3.2.2 Ακριβείς λύσεις 28
Κεφάλαιο 4ο - Τροπική ανάλυση 35

4.1 Εισαγωγή 35
4.1.1 Γραμμική θεώρηση 35
4.1.2 Μη γραμμική θεώρηση 38
4.2 Το προσαρμοστικό (adaptive) μοντέλο 41
4.2.1 Το n-διάστατο σύστημα 42
4.3 Παραμετρική αστάθεια 45
4.3.1 Εξαγωγή δυναμικού συστήματος 46
Κεφάλαιο 5° –Αναλυση Αποτελεσμάτων 75
5.1 Μελέτη δυναμικής ευστάθειας μοντέλου 75
5.1.1 Μοντέλο εισαγωγής στο matcont 75
5.1.2 Παρουσίαση μοντέλων 77
5.1.3 Αποτελέσματα 79
Κεφάλαιο 6° - Συμπεράσματα 100
6.1 Γενικά συμπεράσματα 100
6.2 Αντικείμενα για μελλοντική μελέτη 100
Βιβλιογραφία 102

Περίληψη

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η συστηματική μελέτη της παραμετρικής αστάθειας της ελεύθερης επιφάνειας υγρού εντός ορθογωνικής τρισδιάστατης δεξαμενής, υπό κατακόρυφη διέγερση. Οι παραδοχές που πρέπει να γίνουν για το υγρό είναι ότι είναι ασυμπίεστο,ιδανικό και αρχικά μη στοβιλώδες, ενώ για τη δεξαμενή ότι είναι λεία, μη ελαστική και στεγανή. Ακόμα θεωρούμε ότι δεν υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού και της οροφής της δεξαμενής. Ένα απειροδιάστατο σύστημα μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων που εξάγεται από τις αρχικές εξισώσεις που περιγράφουν το σύστημα υγρό – δεξαμενή με τη βοήθεια της τροπικής (modal) ανάλυσης, χρησιμοποιείται για την ανάλυση. Θεωρώντας μικρού πλάτους εξωτερική διέγερση σε σχέση με το μήκος ή/και το πλάτος της δεξαμενής, το τροπικό (modal) σύστημα μπορεί να οδηγήσει με τη βοήθεια ασυμπτωτικών προσαρμοστικών μεθόδων σε ένα απειροδιάστατο σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων με μη γραμμικούς όρους. Ακολουθώντας την προσαρμοστική ιεράρχηση των ιδιομορφών οδηγούμαστε σε ένα σύστημα ODE πεπερασμένης διάστασης. Έπειτα χρησιμοποιώντας αριθμητικές μη γραμμικές μεθόδους υπολογίζουμε τις περιοχές αστάθειας και ευστάθειας του συστήματος για διάφορες διαστάσεις δεξαμενής.

Abstract

A systematic investigation on the prediction of nonlinear sloshing of an incompressible fluid with irrotational flow in a three dimension (3D) rectangular tank, under vertical excitation is described in this thesis. Infinite tank roof height and no overturning waves are assumed. The analysis is based on an infinite-dimensional system of nonlinear differential equations coupling generalized coordinates of the free surface and fluid motion associated with the amplitude response of natural modes. This modal system is asymptotically reduced to an infinite-dimensional system of ordinary differential equations with polynomial nonlinearity by assuming small fluid motion relative to fluid depth and tank breadth. Following adaptive mode ordering, we obtain a finite-dimensional system of ODEs. The method of continuation of nonlinear dynamics is introduced in order to expedite the identification of the instability boundary and instability areas for several tank dimensions.

Εισαγωγή

1. Αντικειμενικός σκοπός

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετάται η παραμετρική αστάθεια της ελεύθερης επιφάνειας υγρού εντός ορθογωνικής δεξαμενής υπό κατακόρυφη διέγερση, με τη χρήση της ημι-αναλυτικής μεθόδου «τροπικής (modal) ανάλυσης». Συγκεκριμένα το φαινόμενο μελετάται σε τριδιάστατη δεξαμενή, διαφόρων διαστάσεων, ενώ τα αποτελέσματα συγκρίνονται και με αυτά του διδιάστατου μοντέλου.

2. Περίγραμμα διπλωματικής εργασίας

Στο πρώτο κεφάλαιο δίνεται ο ορισμός του sloshing, το οποίο μεταφράζουμε στα ελληνικά ως κλυδασμό, μαζί με κάποιες βασικές έννοιες,ενώ παράλληλα αναλύεται και η επιρροή του σε διάφορους τεχνολογικούς τομείς. Ακόμη περιγράφεται και η εξάρτηση του από φυσικές παραμέτρους, κάτι που παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον όπως θα δούμε αργότερα.

Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται αναφορά στην εξέλιξη της έρευνας γύρω από το φαινόμενο αλλά και η παρουσίαση των δύο βασικών μεθόδων ανάλυσής του κλυδασμού, η αριθμητική-υπολογιστική μέθοδος και η ημιαναλυτική μέθοδος τροπικής ανάλυσης, καθώς και τα μειονεκτήματα και πλεονεκτήματα της κάθε μίας. Έπειτα περιγράφεται το ακριβές φαινόμενο που θα μας απασχολήσει στην παρούσα εργασία, ο παραμετρικός κλυδασμός.

Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται παρουσίαση του θεωρητικού υποβάθρου του φαινομένου, το οποίο περιλαμβάνει τις παραδοχές του συστήματος, τα μοντέλα ροής για αδρανειακό και μη αδρανειακό σύστημα, τις οριακές, αρχικές και περιοδικές συνθήκες καθώς και τις συνθήκες ελεύθερης επιφάνειας και διατήρησης του όγκου(μάζας). Επίσης αναφέρεται η θεωρία των φυσικών συχνοτήτων και ιδιαίτερα πώς αυτές εμπλέκονται στο σύστημά μας.

Αντικείμενο του τέταρτου κεφαλαίου είναι η παρουσίαση της τροπικής ανάλυσης τόσο σε περίπτωση όπου δεχόμαστε γραμμικότητα στην απόκριση της ελεύθερης επιφάνειας, πράγμα που μας βοηθάει στην καλύτερη κατανόηση του κλυδασμού, όσο και στην περίπτωση του μη γραμμικού μοντέλου. Οι διαφορικές εξισώσεις που προκύπτουν από την τελευταία περίπτωση, αποτελούν και το σύστημα που θα επεξεργαστούμε, αφού από το n-διάστατο σύστημα εξάγουμε το σύστημα τριών διαστάσεων για την περίπτωση της κατακόρυφης διέγερσης.

Στο πέμπτο κεφάλιο παραθέτουμε τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την επεξεργασία του μοντέλου τρίτης τάξης για το οποίο μελετούμε τη δυναμική ευστάθεια και την εξάρτηση αυτής από τις παραμέτρους του προβλήματος.

Στο τελευταίο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα από την ανάλυση του προηγούμενου κεφαλαίου καθώς και πιθανά αντικείμενα για μελλοντική μελέτη ώστε να αναλυθεί σε μεγαλύτερο βάθος το φαινόμενο του κλυδασμού.

Κεφάλαιο 1^{ο} - Περιγραφή φαινομένου

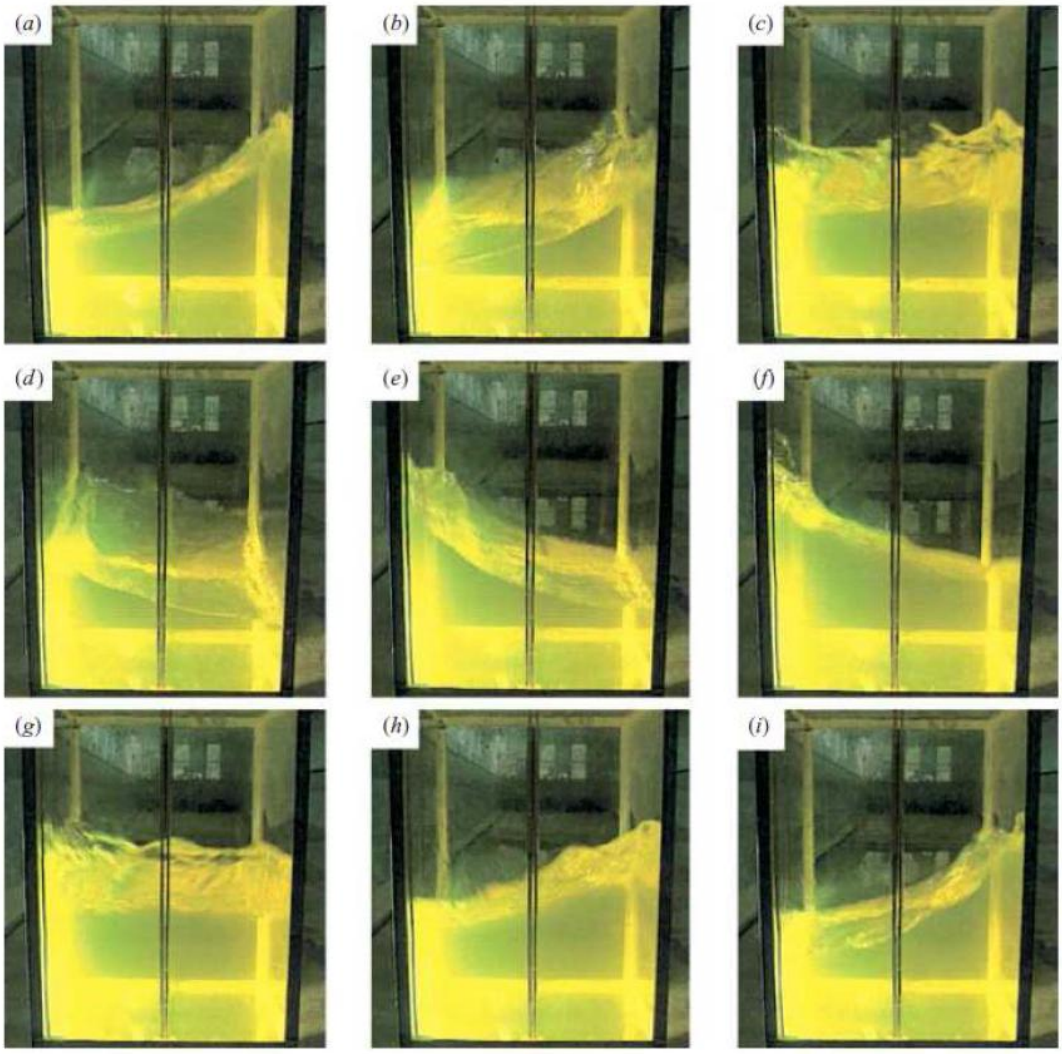
1.1 Εισαγωγή

Οι καταστροφικές συνέπειες που μπορεί να έχει το φαινόμενο του sloshing, καθώς και το ενδιαφέρον του ως δυναμικό φαινόμενο είναι ένα θέμα που απασχολεί τον άνθρωπο εδώ και πολλά χρόνια. Πολλές κατασκευές κατέρρευσαν μερικώς ή και πλήρως λόγω των σχετικά απρόβλεπτων φορτίσεων που προκαλεί αυτό το φαινόμενο. Καθώς, μάλιστα, κινούμενες δεξαμενές εμφανίζοναι σε πολλές εφαρμογές,σε κάποιες από τις οποίες, ένα ατύχημα μπορεί να έχει επιπτώσεις τεράστιων χρηματικών ποσών και ανθρωπίνων ζωών, το φαινόμενο αυτό είναι φανερό ότι έπρεπε να μελετηθεί ώστε να είναι πλέον ελέγξιμο.

Αρχικά δίνεται ο ορισμός του κλυδασμού και αναλύονται κάποιες σχετικές έννοιες ώστε να γίνει κατανοητό το φαινόμενο. Στη συνέχεια γίνεται μια σύντομη αναφορά στους τεχνολογικούς τομείς στους οποίους το φαινόμενο παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, και δίδονται παραδείγματα συγκεκριμένα για τον τομέα της ναυτιλίας. Τέλος αναφέρεται η εξάρτηση του φαινομένου από τις φυσικές παραμέτρους του προβλήματος, όπως το μήκος και το βάθος της δεξαμενής, η τιμή της συχνότητας διέγερσης και το πλάτος ταλάντωσης. Η εξάρτηση αυτή από τις φυσικές παραμέτρους είναι που κάνει δύσκολη την γενίκευση των αποτελεσμάτων στο σύνολο των δεξαμενών.

1.2 Ορισμός κλυδασμού

Με τον όρο κλυδασμός εννοούμε κάθε κίνηση της ελεύθερης επιφάνειας ενός υγρού μέσα σε μια μερικώς γεμάτη δεξαμενή, η οποία εμφανίζεται ως συνέπεια μιας διαταραχής (περιοδικής η μη) στην κινητική κατάσταση της δεξαμενής (Ibrahim, 2005). Για να εξετάσουμε την κίνηση του υγρού θεωρούμε ότι το σώμα του υγρού κινείται με την ταχύτητα διέγερσης της δεξαμενής ενώ στην ελεύθερη επιφάνεια εμφανίζεται κλυδασμός. Η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού μπορεί να εμφανίσει πολλές διαφορετικές μορφές κίνησης, ανάλογα με το είδος της διαταραχής και το σχήμα της δεξαμενής, όπως επίπεδη και μη επίπεδη, περιστροφική, περιοδική, τυχαία ή και χαοτική, αλλά και άλλες πολύπλοκες μορφές κίνησης όταν η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού αλληλεπιδράσει με τα τοιχώματα της δεξαμενής. Αντικείμενο της παρούσας εργασίας είναι κυρίως ο παραμετρικός κλυδασμός, δηλαδή η παραμετρική αστάθεια της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού υπό κατακόρυφη διέγερση. Διευκρινίζεται ότι ο όρος κλυδασμός είναι ο κοντινότερος εννοιολογικά στον αγγλικό όρο “sloshing”, οποίος χρησιμοποιείται στη διεθνή βιβλιογραφία και μπορεί να περιγράψει ικανοποιητικά το παρατηρούμενο φαινόμενο. Επίσης είναι ο όρος που χρησιμοποιήθηκε ιστορικά (κυρίως με την μεταφορική του σημασία) για προβλήματα αναταραχής και αστάθειας στη ναυτιλία.



Εικόνα 1.1: Πειραματική αναπαράσταση του φαινομένου του κλυδασμού.Ο λόγος του μήκους προς το βάθος του υγρού παραμένει σταθερός. Στη διαφανή δεξαμενή εφαρμόζεται οριζόντια περιοδική δύναμη η οποία έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση στροβιλώδους κίνησης της ελεύθερης επιφάνειας. Η συχνότητα διέγερσης είναι κοντά στη χαμηλότερη φυσική συχνότητα. Πηγή:Faltinsen et al (2003 a).

1.3 Επηρεαζόμενοι τεχνολογικοί τομείς

Το φαινόμενο του sloshing μπορεί να παρατηρηθεί οπουδήποτε στη φύση όπως σε λίμνες ή ακόμα και ωκεανούς μετά από ένα ισχυρό σεισμό. Αρκετά συχνή εμφάνιση όμως κάνει και στις ανθρώπινες δραστηριότητες, ειδικά όπου εμπλέκονται δεξαμενές γεμάτες με υγρό. Γενικά, οι δεξαμενές είναι κατασκευές πολύ συχνά συναντώμενες στον σύγχρονο κόσμο. Ιστορικά η εφεύρεση τρόπου αποθήκευσης υγρού συντέλεσε στην ανάπτυξη οικονομικών συναλλαγών των κοινωνιών. Μας παρέχουν την δυνατότητα αποθήκευσης υγρών, όπως το νερό, τα έλαια, το υγροποιημένο φυσικό αέριο (LNG) και τα διάφορα χημικά προϊόντα σε υγρή φάση και στερεών των οποίων η συμπεριφορά είναι σχεδόν ανάλογη με αυτή των υγρών (π.χ. τα σιτηρά και το κάρβουνο). Το σχήμα, το μέγεθος και οι σχετικές διαστάσεις των δεξαμενών

ποικίλουν ανάλογα με την χρήση τους. Παρακάτω αναφέρονται οι κυριότεροι επιστημονικοί τομείς που έχουν άμεση με το φαινόμενο του sloshing. Εκτενής αναφορά γίνεται στις εργασίες των Abramson (1963 και 1966), Sloane (1960) και Cooper (1960).

Α) Αεροναυπηγική

Ο υπολογισμός της δυναμικής ευστάθειας αποτελεί ίσως τον σημαντικότερο παράγοντα σχεδίασης ενός αεροσκάφους αφού οι απότομες αυξομειώσεις ταχυτήτων, οι συχνές αλλαγές υψομέτρου καθώς και οι ταχείες αλλαγές κλίσεων κατά τη διάρκεια μιας πτήσης είναι δυνατό να προκαλέσουν συντονισμένη διέγερση του καυσίμου στις δεξαμενές και να επηρεαστεί έτσι η δυναμική ευστάθεια του αεροσκάφους.

Β) Διαστημική

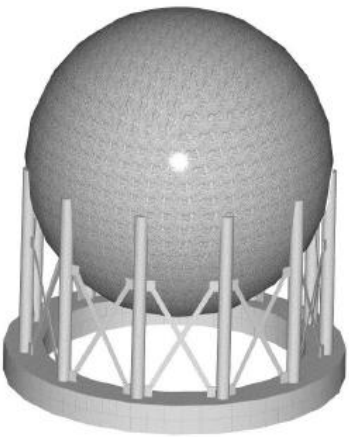
Στην περίπτωση οχημάτων που κινούνται προς ή στο διάστημα οι σημαντικότερες διεγέρσεις είναι συνήθως οι κατακόρυφες επιταχύνσεις καθώς και οι υψίσυχνες ταλαντώσεις των τοιχωμάτων των δεξαμενών που οδηγούν σε έντονα μη γραμμική, έως και χαοτική συμπεριφορά. Σημαντικό αντικείμενο μελέτης είναι και ο υπολογισμός των πιέσεων στα τοιχώματα λόγω του κλυδασμού. Βεβαίως όλα αυτά επηρεάζονται και από διαφοροποιήσεις στις συνθήκες, όπως οι συνθήκες μικροβαρύτητας και οι διαφορετικοί τρόποι κίνησης αυτών των σκαφών.

Γ) Επίγειες Μεταφορές

Σημαντικό είναι το ποσοστό των ατυχημάτων σε επίγειες μεταφορές που οφείλονται στο φαινόμενο του κλυδασμού. Οι απότομοι ελιγμοί που μπορεί να εκτελέσει ένα όχημα με δεξαμενές, αλλά και οι απότομες αλλαγές της ταχύτητας, μπορεί να προκαλέσουν κλυδωνισμό και να αναπτυχθεί ισχυρή περιστροφική ροπή στο όχημα. Στην περίπτωση που η μεταφορά αφορά σε φαγώσιμα υγρά υπάρχουν υγειονομικοί κίνδυνοι ενώ στην περίπτωση, επίσης, των οχημάτων σταθερής τροχιάς όπου υπάρχει μικρή απόσβεση ο κίνδυνος είναι μεγαλύτερος.

Δ) Επίγειες Εγκαταστάσεις Αποθήκευσης Υγρών

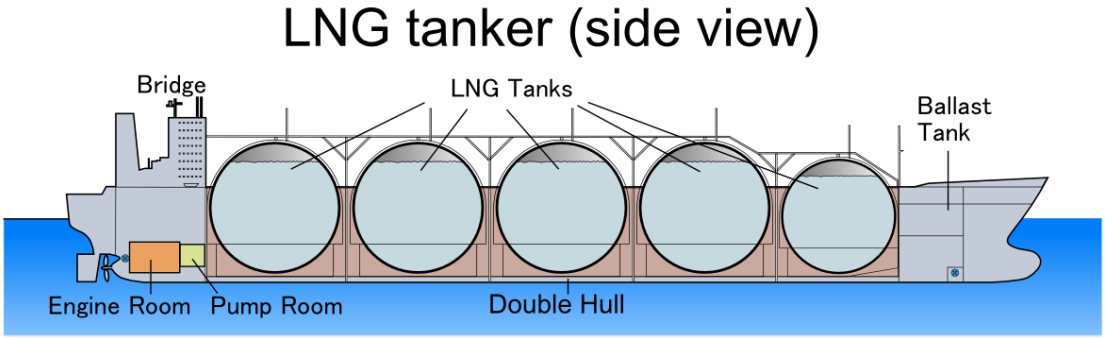
Επίγειες δεξαμενές αποθήκευσης, που είναι συνήθως στηριγμένες σε ένα μηχανισμό αποτελούμενο από συστοιχία πυλώνων, όπως φαίνεται στην περίπτωση του Σχήματος (1.2), χρησιμοποιούνται σε εγκαταστάσεις επεξεργασίας, παραγωγής και αποθήκευσης καύσιμων (πετρελαιοπαράγωγα). Η σεισμική απόκριση τέτοιων δεξαμενών πρέπει να μελετάται σε βάθος αφού φαινόμενα κλυδασμού σε τέτοια περίπτωση μπορεί να οδηγήσουν σε ανάφλεξη του περιεχομένου.



Εικόνα 1.2 Μορφή τυπικής σφαιρικής δεξαμενής. Πηγή: "Επίδραση κλυδασμού στη σεισμική απόκριση σφαιρικών δεξαμενών", Γεώργιος Δρόσος, Διπλωματική ΜΔΕ, Πάτρα 2005.

Ε) Ναυπηγική

Το πρόβλημα του κλυδασμού αφορά τα περισσότερα πλοία συμπεριλαμβανομένων των tankers, bulk carriers, liquefied gas carriers, chemical tankers, cruise vessels, fishing vessels. Τα δεξαμενόπλοια διαθέτουν μεγάλες δεξαμενές για τη μεταφορά υγρών φορτίων, ενώ σχεδόν όλα τα πλοία διαθέτουν δεξαμενές υγρών καυσίμων, θαλασσίου έρματος, δεξαμενές πόσιμου νερού, δεξαμενές τροφοδοτικού νερού και άλλα είδη δεξαμενών. Σε μια μερικώς γεμάτη δεξαμενή πλοίου μπορεί να εμφανιστεί σφοδρή κίνηση του περιεχομένου, όταν το πλοίο κινείται κοντά στη συχνοτική περιοχή της μικρότερης φυσικής συχνότητας του υγρού (ή πολλαπλάσιων αυτής). Σε αυτές τις συχνότητες είναι πολύ πιθανή η εμφάνιση υψηλών πιέσεων επί των τοιχωμάτων των δεξαμενών με αποτέλεσμα την κατάρρευση των φρακτών. Επίσης η επαφή της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού με την οροφή της δεξαμενής και η ακόλουθη διάσπαση των κυμάτων οδηγεί στην ανάμειξη του υγρού με αέρα και την δημιουργία φυσαλίδων αέρα σε μεγάλο μέρος του όγκου του υγρού. Το φαινόμενα αυτά είναι ιδιαίτερα σημαντικά σε πλοία μεταφοράς υγροποιημένου φυσικού αερίου. Λόγω της κρισιμότητας των δεξαμενών ως τμημάτων ενός συστήματος μεταφοράς και διανομής ενέργειας ο σχεδιασμός των δεξαμενών αυτών διέπεται από πολύ αυστηρές προδιαγραφές σχετικά με την ικανότητα τους να αντεπεξέρχονται σε μια σειρά περιβαλλοντικών διεγέρσεων. Για το λόγο αυτό δεν έχουν σημειωθεί και μεγάλα ατυχήματα λόγω του φαινομένου του κλυδασμού. Κλυδασμός μπορεί να συμβεί και σε φορτίο χύδην στην περίπτωση των bulk carriers αλλά και σε στερεό φορτίο, όπως τα ψάρια στα fishing boats. Επίσης, το ανεπιθύμητο αυτό φαινόμενο μπορεί να εμφανιστεί και στις πισίνες των κρουαζιερόπλοιων όπου καθίσταται τόσο αντιαισθητικό όσο και επικίνδυνο για τους επιβάτες.



Εικόνα 1.3 Μορφή πλοίου μεταφοράς υγροποιημένου φυσικού αερίου. Πηγή: Wikipedia

Η σοβαρότητα και η αναγκαιότητα μελέτης αυτού του φαινομένου μπορεί να γίνει εύκολα αντιληπτή εάν δει κανείς την πληθώρα ατυχημάτων που οφείλονται στο sloshing. Οι συνέπειες μπορεί να είναι τόσο υλικές και οικονομικές όσο και ανθρώπινες απώλειες, οι οποίες όπως είπαμε όμως έχουν περιοριστεί λόγω των αυστηρών κανονισμών που διέπουν αυτό το φαινόμενο.

Το πλοίο Taharoa Express για παράδειγμα κινδύνεψε να υποστεί ολική κατασκευαστική απώλεια και να ανατραπεί λόγω μετακίνησης φορτίου και της επίδρασης της ελεύθερης επιφάνειας στα αμπάρια του. Ευτυχώς το πλοίο τελικά σώθηκε χωρίς να υπάρξει καμία ανθρώπινη απώλεια.

Εικόνα 1.4 Το πλοίο Taharoa Express ενώ έχει πάρει κλίση. Πηγή:Wikipedia

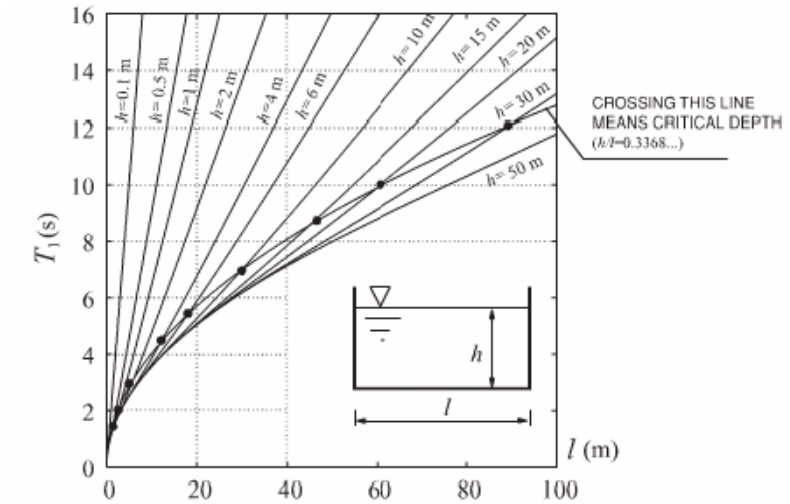
Ένα άλλο παράδειγμα είναι αυτό του πλοίου Pasha Bulker όπου από λάθος του καπετάνιου έβαλε έρμα στις δεξαμενές του ενώ βρισκόταν στη μέση μιας θύελλας. Η εξωτερική κίνηση του πλοίου λόγω της καταιγίδας προκάλεσε την κίνηση του έρματος μέσα στις δεξαμενές με συνέπεια την απώλεια της ευστάθειας του πλοίου τη στιγμή που τη χρειαζόταν για να ανταπεξέλθει στις άσχημες συνθήκες θάλασσας που επικρατούσαν. Το αποτέλεσμα ήταν να κολλήσει στα ανοιχτά χωρίς ευτυχώς καμία ανθρώπινη απώλεια.

Εικόνα 1.5 Το πλοίο Pasha Bulker ενώ έχει προσαράξει.Πηγή:Wikipedia

1.4 Εξάρτηση από φυσικές παραμέτρους

Οι χαμηλότερες φυσικές συχνότητες είναι εκείνες με το μεγαλύτερο ερευνητικό ενδιαφέρον στη μελέτη του κλυδασμού. Οι συχνότητες αυτές έχουν άμεση εξάρτηση από διάφορες παραμέτρους του προβλήματος και επομένως ο κλυδασμός της ελεύθερης επιφάνειας είναι εξαρτώμενος από τις παραμέτρους αυτές.

Τέτοιες παράμετροι είναι οι γεωμετρικές παράμετροι της δεξαμενής και ειδικά ο λόγος βάθους υγρού – μήκους δεξαμενής. Η εξάρτηση αυτή αναπαρίσταται γραφικά στο Σχήμα 1.6 για την περίπτωση μιας διδιάστατης ορθογώνιας δεξαμενής με βάθος υγρού h και μήκος δεξαμενής l .



Σχήμα 1.6: Η υψηλότερη φυσική περίοδος T_1 για διάφορες τιμές του βάθους h , ως συνάρτηση του μήκους l της δεξαμενής. Στο σχήμα επίσης απεικονίζεται και η

κρίσιμη περιοχή βάθους για κάθε περίπτωση. Πηγή: Sloshing, Faltinsen & Timokha, Campridge 2009.

Στο Σχήμα (1.6) παρουσιάζεται η υψηλότερη φυσική περίοδος T_1, όπως υπολογίζεται από τη γραμμική θεωρία δυναμικού, για διάφορες τιμές του βάθους h, ως συνάρτηση του μήκους l της δεξαμενής. Παρατηρούμε ότι για δεδομένο βάθος η φυσική περίοδος αυξάνεται καθώς ο μήκος της δεξαμενής αυξάνεται. Η επίδραση του βάθους είναι μικρή όταν ο λόγος βάθος υγρού προς μήκος δεξαμενής περιγράφεται από την ανίσωση $h/l \geq 1.0$. Η προηγούμενη ανισότητα αποτελεί τη συνθήκη βαθέως υγρού, κατά την οποία η κίνηση του υγρού δεν επηρεάζεται από τον πυθμένα της δεξαμενής. Η αντίστοιχη συνθήκη ρηχού υγρού εκφράζεται από την ανισότητα $h/l \leq 1.0$. Οι συνθήκες μεσαίου και πεπερασμένου βάθους δίνονται από τις ανισότητες $0.1 \geq h/l \leq 0.2\text{-}0.25$ και $0.2\text{-}0.25 \geq h/l \leq 1.0$, αντίστοιχα. Από τα προηγούμενα είναι φανερό πως δεν υπάρχουν σαφή όρια ανάμεσα στις τέσσερις προηγούμενες συνθήκες. Εντυπωσιακές αλλαγές και ενισχύσεις στην συμπεριφορά του υγρού συμβαίνουν για συχνοτικές διεγέρσεις κοντά στη χαμηλότερη φυσική συχνότητα στην περιοχή του κρίσιμου βάθους που ορίζεται την εξίσωση $h/l=0.3$.

Κεφάλαιο 2^{ο} – Ανασκόπιση εργασιών

2.1 Ιστορικό υπόβαθρο

Μεγάλη προσπάθεια έχει καταβληθεί από την επιστημονική κοινότητα εδώ και χρόνια για την μελέτη του κλυδασμού, αφού αποτελεί, όπως αναφέραμε, ένα ενδιαφέρον αλλά και επικίνδυνο φαινόμενο. Στο κάθε κομμάτι της θεωρίας θα γίνει μνεία στους εκάστοτε ερευνητές που ασχολήθηκαν με αυτό, αλλά είναι θεμιτή και μια πρώτη αναφορά με τους πρωτοπόρους στο τομέα του sloshing.

Η ουσιαστική προσπάθεια να αναλυθεί μαθηματικά η κίνηση της ελεύθερης επιφάνειας ενός υγρού μέσα σε περιοδικά (αρχικά) διεγειρόμενη δεξαμενή ξεκίνησε στα τέλη του 19ου αιώνα. Από τις πιο σημαντικές μελέτες ήταν αυτές των Hough (1895),Honda και Matsushita (1913), Jeffries (1924), Sen (1927), Goldsborough (1930),Westergaard (1933), Binnie (1941, 1955), K. W. Smith (1947, 1956), C. Smith (1948),Taylor (1950, 1954), Luskin και Lapin (1952), Schy (1952), Moiseev (1952a,b,c,d, 1953,1954, 1956), Senda και Nakagawa (1954), Nakagawa (1955, 1956), Birkhoff (1956), Narimanov (1956, 1957c), Okhotsimski (1956), Heinrich and Kaufman (1956), Sretanskii (1956, 1957), Housner (1957), Krein και Moiseev (1957), και Shved (1959). Θεωρητική και πειραματική έρευνα πάνω σε αξονικά συμμετρικές δεξαμενές έχει γίνει τα τελευταία χρόνια από τη διαστημική βιομηχανία (Abramson 1966 and Mikishev 1978). Θεωρητικές εργασίες του μη γραμμικού κλυδασμού σε αξονικά συμμετρικές δεξαμενές έχουν επίσης παρουσιαστεί από τους Narimanov, Dokuchaev & Lukovsky (1977), Miles (1984a, b), Lukovsky (1990), Luppes(2005) Pal(2009) και άλλους.

Με την πειραματική μελέτη των στάσιμων κυμάτων που δημιουργούνται σε κατακόρυφα κινούμενες δεξαμενές πρώτος ασχολήθηκε ο Faraday (1831). Ακολούθησαν οι Mathiessen (1868, 1870) και Lord Rayleigh (1833, 1867). Θεωρητική μελέτη του ίδιου προβλήματος πραγματοποιήθηκε από τους Lewis (1950), Taylor (1950), Benjamin & Ursell (1954), Konstantinov et al. (1978), Nevolin (1985), Feng & Sethna (1989), Simoneli & Gollub (1989), Henderson & Miles (1990), Nagata(1991), Miles (1994), Perlin & Schultz (2000).

Για την αριθμητική προσέγγιση του sloshing έκαναν προσπάθειες οι Su Tsung-Chow (1992), Buechmann (1996), Tanizawa(1996), Chen et al. (1997), Pawell (1997), Moan & Berge (1997). Προσομοιώσεις δεξαμενών πλοίου εμφανίζονται σε δημοσιεύσεις των Arai et al (1992), Arai, Cheng & Inoue (1992, 1993), ISCC Report (1997),Faltinsen & Rognebakke (2000), Wu, Ma & Taylor (1998). Με τη διδιάστατη ανάλυση ασχολήθηκαν οι Celebi & Akyildiz (2002), Sames, Marcouly & Schellin (2002), Aliabadi, Johnson & Abedi (2003), Fransen (2004). Οι Telste(1985), Chen et al. (1996), Takizawa & Kondo (1995), Chen et al. (1999),Pawell (1997), Turnbull et al. (2003), Wu et al (1998, 2001, 2007), Fradnsen(2003), Y. Kim et al (2001, 2007) χρησιμοποίησαν αριθμητικές μεθόδους την πρόβλεψη των φαινομένων παραμετρικής αστάθειας, οι οποίες όμως δεν έδωσαν ικανοποιητικά αποτελέσματα για μακροπρόθεσμες προβλέψεις. Πιο πρόσφατες έρευνες πάνω σε αριθμητικές μεθόδους είναι αυτές των Veldman(2007), των Wemmenhove, Iwanowski, Lefranc, Veldman, Luppes & Bunnik(2007,2008,2009) και Aquelet,Souli,Gabrys & Olovson(2003), Loots, Buchner, Pastoor, Tveitnes(2004), Helder(2005), Luppes, Helder,

Veldman(2006), Bunnik,Veldman,Huijsmans(2007), Iwanowski, Lefranc, Wemmenhove(2009,2010)

Η ημιαναλυτική τροπική ανάλυση πρωτοαμφανίστηκε σε μια δημοσίευση του Narimanov (1957) και βελτιώθηκε στη συνέχεια από τους Dodge, Kana & Abramson (1965), Narimanov Dokuchaev & Lukovsky (1977) και Lukovsky (1990).

Περαιτέρω μελέτες πάνω στο θέμα με βάση τη θεωρία κυρίαρχου κυματισμού παρουσιάστηκαν από τους Lukovsky 1976, Miles (1976, 1984), Shemer (1990),Tsai, Yue & Yip (1990), Funakoshi & Inoue (1991). Η πρώτη θεωρητική μελέτη για μη γραμμικό sloshing πραγματοποιήθηκε μάλλον από τον Stolbetsov(1967), ο οποίος βασίστηκε στη θεωρία του Narimanov (1957). Το θέμα αυτό μελετήθηκε πάλι με βάση τα κύματα Faraday από τους Nevolin (1984), Feng& Sethna (1989), Simonelli & Gollub (1989), Henderson & Miles (1990),Nagata (1991), Miles (1994), Perlin & Schultz (2000). Τα ελεύθερα κύματα στη δεξαμενή χρησιμοποίησαν οι Bridges (1985, 1987), Bryant & Stiassnie(1994, 1995).

Μια πρώτη εμφάνιση της πολυτροπικής ανάλυσης έγινε στην εργασία των Lukovsky & Timokha (1995) και Limarchenko & Yasinsky(1997), ενώ χρησιμοποιήθηκε στη συνέχεια και από τους Ikeda & Nakagawa(1997) για ανάλυση σχετικά με την απόσβεση του πλάτους ταλάντωσης. Τελικά οι Faltinsen & Timokha (2001, 2002) παρουσίασαν την τελική μορφή της προσαρμοστικής τροπικής μοντελοποίησης.

Με το γενικότερο φαινόμενο ασχολήθηκαν οι Gerrits, Loots, Fekken, Veldman(before 2000),

2.2 Τρόποι ανάλυσης

Οι δύο κυρίαρχες προσεγγίσεις στην μοντελοποίηση του sloshing είναι η αριθμητική και η ημιαναλυτική. Από αυτές η δεύτερη βασίζεται στη θεωρία της τροπικής(modal) ανάλυσης και αποτελεί το αντικείμενο της παρούσας εργασίας. Τα βασικά χαρακτηριστικά των προσεγγίσεων αυτών παρατίθονται παρακάτω.

2.2.1 Αριθμητική–Υπολογιστική μέθοδος

Η ανάπτυξη της επιστήμης των υπολογιστών σε επίπεδο επεξεργαστικής ισχύος, και σε επίπεδο λογισμικού και διαδικτύου έχει δώσει τη λύση για εύκολη μοντελοποίηση προβλημάτων που απαιτούν αρκετά δύσκολη αναλυτική προσέγγιση.

Οι προσομοιώσεις CFD είναι ένα τέτοιο παράδειγμα που βοηθούν στην επίλυση προβλημάτων ροής κάποιου υγρού. Τα βήματα που ακολουθεί μια τέτοια προσομοίωση είναι η επιλογή των μαθηματικών εξισώσεων που περιγράφουν το πρόβλημα, η ανάπτυξη αριθμητικού μοντέλου για τις εξισώσεις αυτές και η επίλυσή τους σε χωρικές συντεταγμένες καθώς ο χρόνος περνά. Ως προς την επιλογή των εξισώσεων λαμβάνουμε υπόψη τις αρχικές παραδοχές, ενώ για την κατασκευή του αριθμητικού μοντέλου έχουν αναπτυχθεί διάφορες αριθμητικές μέθοδοι κυριότερες εκ των οποίων είναι οι κάτωθι:

• boundary element method (BEM)
• constrained interpolation method (CIP)
• finite difference method (FDM)
• finite element method (FEM)
• finite volume method (FVM)
• level set (LS)
• marker and cell (MAC)
• moving particle semi-implicit (MPS)
• smoothed particle hydrodynamics (SPH)
• volume of fluid (VOF)

Οι αριθμητικές αυτές μέθοδοι χωρίζονται σε δύο κατηγορίες. Η πρώτη κατηγορία περιλαμβάνει αυτές που για την επίλυση του προβλήματος λαμβάνουν υπόψη τη θεώρηση του δυναμικού της ροής, ενώ η δεύτερη περιλαμβάνει τις μεθόδους που κάνουν χρήση της μεθόδου Navier – Stokes (Faltinsen, 2009). Υπάρχουν βέβαια και υβριδικές μέθοδοι οι οποίες εκμεταλλεύονται κατά περίπτωση τα πλεονεκτήματα και των δύο κατηγοριών.

Πολλοί ερευνητές θεώρησαν αναγκαίο να αναπτυχθούν αριθμητικές μέθοδοι οι οποίες να περιγράφουν ακριβώς την κίνηση του ρευστού και τις επαγόμενες δυνάμεις λόγω της αλληλεπίδρασής του με την διεγειρόμενη δεξαμενή. Μερικές από τις πιο χαρακτηριστικές μελέτες πάνω σε αυτό το θέμα είναι των Su Tsung-Chow (1992), Buechmann (1996), Tanizawa (1996), Chen et al. (1997), Pawell (1997), Moan & Berge (1997). Χαρακτηριστικά παραδείγματα CFD προσομοιώσεων τρισδιάστατης ροής μέσα σε μια δεξαμενή πλοίου είναι αυτά των Arai et al. (1992b), Arai, Cheng & Inoue (1992*a*, 1993), ISSC Report (1997), Faltinsen & Rognebakke (2000) and Wu, Ma & Taylor (1998), ενώ για την δισδιάστατη περίπτωση οι κυριότερες δημοσιεύσεις είναι αυτές των Celebi & Akyildiz 2002, Sames, Marcouly & Schellin 2002, Aliabadi, Johnson & Abedi 2003, Fransen (2004).

Το βασικό μειονέκτημα όλων των αριθμητικών μεθόδων είναι τα ανεπαρκή υπολογιστικά συστήματα τα οποία θα μπορούσαν να εκτελούν προσομοιώσεις πολύ μεγάλης χρονικής διάρκειας, ειδικά για την περίπτωση έντονης αλληλεπίδρασης μεταξύ του ρευστού και της δεξαμενής με την ταυτόχρονη εμφάνιση ακραίων μη γραμμικών συμπεριφορών, ούτε να λάβουν υπόψιν όλες τις παραμέτρους του συστήματος(π.χ υδροελαστικότητα) με αποτέλεσμα να σημειώνονται σημαντικά λάθη στα αποτελέσματα (Faltinsen & Rognebakke 2000).

Αναλυτικότερη περιγραφή των πλεονεκτημάτων και των μειονεκτημάτων διαφόρων αριθμητικών μεθόδων ανάλυσης του κλυδασμού παρατίθενται στις εργασίες των Ibrahim, Pilipchuk & Ikeda (2001), Solaas (1995), Faltinsen & Rognebakke (2000), Faltinsen & Timokha (2002a) και Ibrahim et al. (2001).

2.2.2 Ημιαναλυτική μέθοδος τροπικής (modal) ανάλυσης

Τα προβλήματα που παρουσιάζουν οι αριθμητικές μέθοδοι αλλά και η ανάπτυξη πολύ ισχυρών μαθηματικών εργαλείων, οδήγησε στην προτίμηση των αναλυτικών προσεγγίσεων του κλυδασμού. Μια από τις πιο πολλά υποσχόμενες μεθόδους είναι η

ημιαναλυτική μέθοδος τροπικής ανάλυσης. Για την εξαγωγή των αποτελεσμάτων απαιτείται η θεώρηση κάθετων τοιχωμάτων της δεξαμενής στο επίπεδο της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού στην κατάσταση ηρεμίας. Παρά τις απλοποιήσεις η ανάλυση με τη μέθοδο αυτή είναι αρκετά ακριβής στην περίπτωση μικρού πλάτους, ενώ ο χρόνος υπολογισμού είναι αρκετά μειωμένος εφόσον το σύστημα που περιγράφει το φαινόμενο μετατρέπεται από απειροδιάστατο σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων σε πεπερασμένης διάστασης σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων.

Η μέθοδος αυτή είναι καινοτόμα γιατί η αναπαράσταση της ελεύθερης επιφάνειας γίνεται μέσω γενικευμένων σειρών Fourier με τη χρήση (ως βάσης) των φυσικών κυματισμών του συστήματος. Για την ανάλυση χρησιμοποιείται η θεωρία δυναμικού και τελικά η ελεύθερη επιφάνεια και το δυναμικό της ταχύτητας του υγρού εκφράζονται από τις σχέσεις

$$z = f(x, y, z) = \sum \beta_i(t)\, s_i(x, y) \qquad (1)$$
$$\varphi(x, y, z, t) = \sum R_i(t)\, d_i(x, y, z)$$

Το σύστημα συντεταγμένων είναι σωματοπαγές και σταθερό ως προς την δεξαμενή, ενώ το επίπεδο (x, y) δεν είναι άλλο από αυτό της ελεύθερης επιφάνειας σε κατάσταση ηρεμίας. Οι μεταβλητές s_i και d_i της σχέσης (1) δεν είναι γνωστές όμως, όπως αναφέρθηκε ήδη, επιλέγονται να είναι οι φυσικοί κυματισμοί του συστήματος. Η χρήση των φυσικών κυματισμών ως βάση για το μη γραμμικό σύστημα εξισώσεων γίνεται μετά από τη χρήση ασυμπτωτικών θεωρήσεων για την ελεύθερη επιφάνεια. Οι ασυμπτωτικές αυτές θεωρήσεις βασίζονται σε συγκεκριμένη ταξινόμηση - ιεράρχηση των γενικευμένων συντεταγμένων του συστήματος $\beta_i(t)$ και $R_i(t)$. Η ιεράρχηση αυτή όμως παρουσιάζει αδυναμία στο να περιγράψει ικανοποιητικά περιπτώσεις όπως αυτή κατά την οποία ο λόγος βάθος υγρού προς μήκος δεξαμενής είναι μικρότερος ή ίσος από την τιμή του κρίσιμου βάθους ή η δύναμη διέγερσης είναι αρκετά μεγάλου πλάτους,και έτσι αντικαταστάθηκε από την πολυωνιμική.

Μέθοδοι με βάση κυριαρχική μορφή συμπεριφοράς (Single Dominant Methods)

Η τεχνική αυτή προτάθηκε για πρώτη φορά από τον Narimanov (1957) και βασίζονταν σε μια τεχνική διαταραχών. Με βάση αυτή τη θεώρηση οι γενικευμένες συντεταγμένες $\beta_i(t)$ και $R_i(t)$ μπορούν να υπολογιστούν από ένα σύστημα μη γραμμικών συνήθων διαφορικών εξισώσεων (modal system). Σημαντικές βελτιώσεις του αρχικού συστήματος παρουσιάστηκαν από τους Dodge, Kana & Abramson (1965), Narimanov, Dokuchaev & Lukovsky (1977) και Lukovsky (1990). Χρησιμοποιώντας τεχνικές διαταραχών και τη μέθοδο προβολών του Hamilton (Hamilton-Ostrogradsky projective method) εξήγαν μοντέλα περιορισμένων βαθμών ελευθερίας (1-3) για τις γενικευμένες συντεταγμένες $\beta_i(t)$ και $R_i(t)$ ή για τις μέσες τιμές αυτών (πχ Lukovsky 1976, Miles (1976, 1984$a; b$).) όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\beta_i = \sum_{j=0}^{\infty} (< \beta >_j^1 (\tau)\, sin(j\sigma t) + < \beta >_j^2 cos(j\sigma t) \qquad (2)$$

όπου σ είναι η συχνότητα διέγερσης και τ είναι η αργή διακύμανση του χρόνου (t). Οι μέσες τιμές των $< \beta i >_j$ (τ) έχουν τη μορφή των λύσεων των εξισώσεων Duffing για

μια ορθογώνια δεξαμενή (βλ. Shemer 1990 και Tsai, Yue & Yip 1990) ή ενός συστήματος τεσσάρων πρωτοτάξιων συνήθων διαφορικών εξισώσεων για την περίπτωση της κατακόρυφης κυλινδρικής δεξαμενής (βλ. Miles (1984*a; b*)).

Ο Stolbetsov (1967) ασχολούμενος θεωρητικά με το μη γραμμικό κλυδασμό σε σχεδόν τετράγωνη (near-square) δεξαμενή διεγειρόμενη από οριζόντια αρμονική δύναμη με συχνότητα κοντά στη χαμηλότερη φυσική συχνότητα, χρησιμοποίησε τη θεωρία διαταραχών του Narimanov (1957) και παρήγαγε δύο τύπους λύσεων σταθερής κατάστασης. Ο πρώτος τύπος περιγράφει κίνηση δύο διαστάσεων (επίπεδα κύματα) ενώ ο δεύτερος περιγράφει τα περιστροφικά κύματα για την περίπτωση της ορθογώνιας γεωμετρίας. Δυστυχώς, η εργασία του (όπως διαπιστώθηκε από τον Lukovsky το 1990) περιέχει αριθμητικά λάθη. Οι υπάρχουσες θεωρητικές δημοσιεύσεις στο μη γραμμικό κλυδασμό σε τετραγωνική δεξαμενή σχεδόν πάντοτε είναι αφιερωμένες είτε στα κύματα Faraday (παραδείγματα τέτοιων δημοσιεύσεων είναι αυτά των Nevolin 1984; Feng & Sethna 1989; Simonelli & Gollub 1989; Henderson & Miles 1990; Nagata 1991; Miles 1994; Perlin & Schultz 2000), είτε στα ελεύθερα κύματα στη δεξαμενή (για παράδειγμα οι εργασίες των Bridges 1985, 1987; Bryant & Stiassnie 1994, 1995). Οι Bridges (1987) και Bryant & Stiassnie (1994, 1995) παρουσίασαν θεωρητικά αποτελέσματα για ελεύθερα μη γραμμικά περιοδικά κύματα σε τετραγωνικές δεξαμενές, για την περίπτωση του βαθέως και του ρηχού υγρού.

Οι παραπάνω μελέτες οδήγησαν στην κατάταξη των κυματισμών της ελεύθερης επιφάνειας σε τρείς διακριτές μεταξύ τους κατηγορίες. Μαζί με κάποιες ειδικές περιοδικές λύσεις που περιγράφηκαν από τους Bryant & Stiassnie (1994), τα ελεύθερα μη γραμμικά μονοαρμονικά κύματα μιας τετραγωνικής δεξαμενής μπορούν να ταξινομηθούν σε τρεις κατηγορίες: (i) ‘επίπεδα’ (διδιάστατα) στάσιμα κύματα Stokes, (ii) το στατικό κύμα που δημιουργείται με ταλάντωση από τη μια γωνία της δεξαμενής στην απέναντι γωνία, (‘διαγώνια’ ή ‘σχεδόν τετράγωνα’) και (iii) ‘περιστρεφόμενα’ κύματα. Οι Bryant & Stiassnie (1995) απέδειξαν, ότι τα διδιάστατα περιοδικά κύματα τύπου Stokes είναι ασταθή όταν υπόκεινται σε διαταραχές τριών διαστάσεων, ενώ τα τρισδιάστατα κύματα είναι ευσταθή. Οι Waterhouse (1995) και Ockendon, (Ockendon & Waterhouse (1996)) μελέτησαν την οριζόντια περιοδική διέγερση μιας τετραγωνικής δεξαμενής μεγάλου και μικρού βάθους. Η ευστάθεια του συστήματος στη σταθερή κατάσταση και η μετάβαση από μεγάλο σε μικρό βάθος παρουσιάστηκαν από τους Faltinsen et al. 2000 και Faltinsen & Timokha (2001, 2002a). Οι Chen & Arai (1995), έδειξαν σημαντική πρόοδο στην μελέτη διαγώνιας διέγερσης της δεξαμενής.

Η ανωτέρω τεχνική είναι πολύ χρήσιμη και αποτελεσματική για τον υπολογισμό της απόκρισης της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού (ρευστού) μέσα σε μια δεξαμενή με περιοδική διέγερση. Όμως υπάρχουν ερωτηματικά σχετικά με την αποτελεσματικότητα σε μη περιοδική διέγερση του συστήματος δεξαμενής – υγρού, και στη μεταφορική κίνηση, περιπτώσεις που αντιμετωπίζονται ως τώρα είτε με αριθμητικές προσεγγίσεις, είτε με τη χρήση απλοποιημένων μηχανικών μοντέλων (συνήθως εκκρεμές) (Narimanov et al. 1977 ή Pilipchuk & Ibrahim 1997).

Πολυτροπικές – προσαρμοστικές μέθοδοι (Multimodal - adaptive methods)

Η χρήση της αρχικής τεχνικής του Narimanov με την αναπαράσταση της σχέσης (1) σε συνδυασμό με γενικότερες ασυμπτωτικές παραδοχές για τα $\beta_i(t)$ $R_i(t)$ είναι μια εναλλακτική λύση για την αποφυγή των αδυναμιών των προηγούμενων μεθόδων ώστε να καταλήξουμε σε κάποιο τροπικό σύστημα πεπερασμένων διαστάσεων. Η μέθοδος αυτή απομακρύνεται από τη λογική της μιας κυρίαρχης ιδιομορφής αλλά προσθέτει περισσότερες ελευθερίες στην κίνηση της ελεύθερης επιφάνειας. Η επιτυχία αυτής της μεθόδου παρουσιάζεται από τους Limarchenko & Yasinsky (1997) και Lukovsky & Timokha (1995) ενώ μια παρόμοια μέθοδος χρησιμοποιήθηκε από τους Ikeda & Nakagawa (1997) για την ανάλυση της απόσβεσης του πλάτους ταλάντωσης. Η μέθοδος, λοιπόν, αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην περίπτωση οπού εμφανίζονται πολύπλοκες κινήσεις και η μη γραμμική συμπεριφορά του συστήματος είναι έντονη.

Μια σύντομη ιστορική αναδρομή των μεθόδων αυτών δίνεται από τους Faltinsen et al. (2000) and Faltinsen & Timokha (2002a), ενώ μελέτες των La Rocca, Mele & Armenio (1997), Faltinsen & Timokha (2001) και Rognebakke & Faltinsen (2003) αποδεικνύουν ότι αυτή η μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην περίπτωση αναλυτικών μελετών, αλλά και για αριθμητικές προσομοιώσεις της κίνησης του συστήματος. Οι Faltinsen & Timokha (2001, 2002a) παρουσίασαν μια τεχνική (adaptive modal modelling technique) για τη δισδιάστατη περίπτωση κατά την οποία συνυπολογίζονται δυναμικές αλλαγές στους κυρίαρχους κυματισμούς. Ένας περιορισμός για την χρήση της μεθόδου αυτής είναι ότι δεν υπολογίζει πιθανή «διαφυγή» του υγρού από τις άκρες των κάθετων τοιχωμάτων λόγω της θεώρησης που γίνεται για την κίνηση της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού ενώ το μεγαλύτερο μειονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι το γεγονός πως είναι σχετικά καινούρια και επομένως η μελέτη των εφαρμογών της είναι αρκετά περιορισμένη.

2.3 Παραμετρικός κλυδασμός

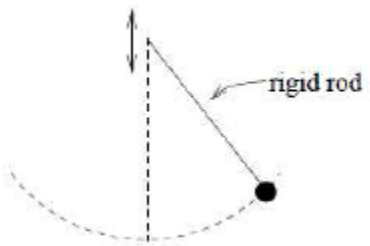
Ως παραμετρικός κλυδασμός νοείται η κυματοειδής κίνηση της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού κατά τη διάρκεια κατακόρυφης (ως προς το επίπεδο της αδιατάραχτης ελεύθερης επιφάνειας) διέγερσης. Γενικά, ως αποτέλεσμα χρονικά εξαρτώμενων μεταβολών παραμέτρων όπως η απόσβεση, η αδράνεια και η δυσκαμψία, είναι δυνατόν να εμφανιστούν παραμετρικές ταλαντώσεις σε δυναμικά συστήματα. Οι μεταβολές αυτές μπορεί να οφείλονται σε επενεργούμενες εξωτερικές δυνάμεις,τις καλούμενες παραμετρικές διεγέρσεις. Στην περίπτωση του παραμετρικού sloshing, το ενεργό βαρυτικό πεδίο γίνεται χρονικά εξαρτώμενο.

Παράδειγμα παραμετρικών ταλαντώσεων είναι τα κύματα κλυδασμού που δημιουργούνται από την κατακόρυφη διέγερση μιας δεξαμενής (μερικώς γεμάτης) με συχνότητα διέγερσης κοντά στη διπλάσια τιμή της χαμηλότερης φυσικής ιδιοσυχνότητας του συστήματος. Ο τύπος αυτός κυμάτων ονομάζεται κύματα Faraday αφού αυτός τα παρατήρησε πρώτος (1831) και διαφέρουν από τα κύματα που περιγράφηκαν από τους Miles (1985a, 1988b, 1990a), Miles & Becker (1988),Guthar & Wu (1991).

Έπειτα το φαινόμενο αναλύθηκε και από άλλους ερευνητές όπως ο Mathiessen (1868, 1970), ο Rayleigh (1883a, 1883b, 1987) ,ο Mathieu (1868) με αντιφατικά αποτελέσμαστα. Όμως έπειτα οι Lewis (1950), Taylor (1950), Benjamin & Ursell (1954), Konstantinov, et al. (1978) και Nevolin (1985) κατόρθωσαν να εξηγήσουν μαθηματικά την αναντιστοιχία μεταξύ των παρατηρήσεων των Faraday, Rayleigh και του Matthiessen. Θεωρώντας ως $Z_O = -\Omega^2 Z_O cos(\Omega t)$ την κατακόρυφη διέγερση της δεξαμενής, κατόπιν γραμμικοποίησης η ανάλυση όλων των προηγούμενα αναφερθέντων ερευνητών οδήγησε σε ένα σύστημα εξισώσεων τύπου Mathieu της μορφής:

$$\frac{d^2 A_{mn}}{dt^2} + 2\zeta_{mn}\omega_{mn}\frac{dA_{mn}}{dt} + \omega_{mn}^2\left(1 - \frac{\Omega^2 Z_0}{g}\cos(\Omega t)\right)A_{mn} = 0 \qquad (3)$$

όπου A_{mn} είναι η κανονικοποιημένη τιμή του ύψους του κύματος και ω_{mn} , ζ_{mn} είναι αντίστοιχα η φυσική συχνότητα και ο ρυθμός απόσβεσης της ιδιομορφής mn, Ω είναι η συχνότητα διέγερσης, Z_0 το πλάτος διέγερσης. Ανάλογα με την τιμή του πλάτους διέγερσης, της συχνότητας και του ρυθμού απόσβεσης, οι λύσεις της προηγούμενης εξίσωσης μπορεί να είναι ευσταθείς ή ασταθείς. Η ανάλυση της παραμετρικής ευστάθειας των διαφορικών εξισώσεων της μορφής (3) παρουσιάζεται από τους McLachlan (1947) και Yakubovich και Starzhinskii (1975),Bolotin (1964), Schmidt (1975), Evan-Iwanowski (1976), και Nayfeh and Mook (1979), Ibrahim (1985). Με πιο εξειδικευμένες περιπτώσεις έχουν ασχοληθεί και οι Kana (1966),Woodward (1966), Lomen και Fontenot (1967), Woodward και Bauer (1970),Schoenhals, et al. (1967) και Nevolin (1983, Bauer (1989a),Reynolds (1965), Devitt και Melcher (1965), Briskman και Shaidurov (1968), Yih (1968a, b), Raco (1968),Dodge & Garza (1972), Ohaba & Sudo (1995), Pursi & Malik (1995), Sudo, et al. (1993, 1997) ,Briskman, et al. (1976), Leonov και Morozov (1988), Bessem, et al. (1996),Miles & Henderson (1990),οι Frandsen και Borthwick (2002, 2003),Vladimirov (1981), Nesterov (1982), Sekerzhi-Zenkovich (1983), Kravtsov και Sekerzhi-Zenkovich (1993, 1996).



Σχήμα 2.1: Μηχανικό ανάλογο για την εξέταση του γραμμικού παραμετρικού κλυδασμου. Η άκρη του εκκρεμούς δύναται να ταλαντώνεται αρμονικά στην κατακόρυφη διέγερση με αποτέλεσμα να εμφανίζεται χρονοεξαρτόμενο βαρυτικό πεδίο. Η ανάλυση του μοντέλου οδηγεί σε διαφορική εξίσωση τύπου Mathieu.

Κεφάλαιο 3^{ο} – Θεωρητικό υπόβαθρο

3.1 Εξισώσεις κίνησης του υγρού

3.1.1 Παραδοχές

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστούν οι οι οριακές συνθήκες αλλά και εξισώσεις κίνησης που χρησιμοποιούνται στις αναλυτικές αλλά και στις υπολογιστικές μεθόδους προσέγγισης του κλυδασμού ελεύθερης επιφάνειας υγρού σε διεγειρόμενη δεξαμενή. Παρόλο που η αναλυτική περιγραφή των εξισώσεων για διάφορους τύπους δεξαμενών έχει γίνει από τους Ewart (1956), Bauer (1962a, 1962c, 1969a), Lomen (1965), Abramson (1966a), Ibrahim (1969), Khandelwai (1980), Kornecki (1983) και Bauer (1999), θα γίνει μια σύντομη ανάλυση της για λόγους πληρότητας της εργασίας. Οι παραδοχές που πρέπει να δεχτούμε είναι οι εξής:

1. Θεωρούμε πως η δεξαμενή είναι:

α) Μη ελαστική. Δηλαδή τα τοιχώματα της δεξαμενής δεν μπορούν να κινούνται με ταχύτητες διαφορετικές από αυτή της εξωτερικής διέγερσης.
β) Στεγανή. Έτσι εξασφαλίζεται ότι ο όγκος του υγρού μέσα στη δεξαμενή παραμένει καθ' όλη τη διάρκεια της κίνησης της δεξαμενής αναλλοίωτος. Βέβαια η διατήρηση του όγκου του υγρού γίνεται σε συνδυασμό με την επόμενη παραδοχή.
γ) Αρκετά μεγαλύτερη καθ ύψος σε σχέση με το επίπεδο της αδιατάραχης ελεύθερης επιφάνειας του υγρού, με αποτέλεσμα να μην είναι δυνατή η υπερχείλιση της δεξαμενής σε καμία περίπτωση.
δ) Λεία. Η παραδοχή αυτή σε συνδυασμό με τις άλλες μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε την θεωρία δυναμικού για την εξαγωγή του μαθηματικού μοντέλου.

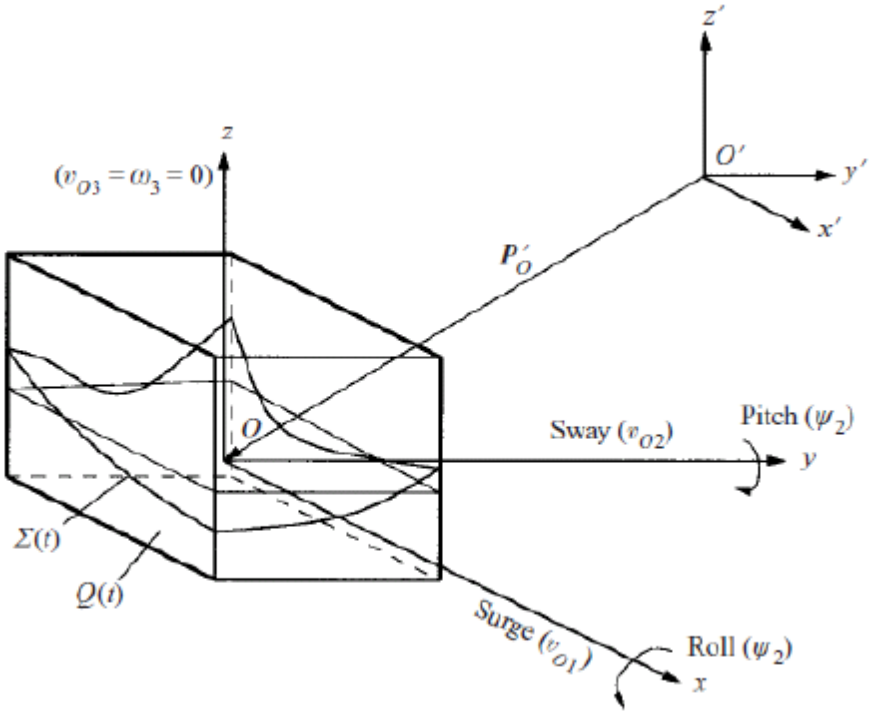
2. Θεωρούμε ότι το υγρό είναι:

α) Αρχικά μη στροβιλώδες. Έτσι η ταχύτητα του υγρού μπορεί να εκφραστεί από τη σχέση: $u = \nabla\Phi$, δηλαδή μέσω του δυναμικού ταχύτητας και συνεπώς η εφαρμογή των αντίστοιχων κανόνων της θεωρίας δυναμικού.
β) Ασυμπίεστο και ιδανικό (έχει δηλαδή, μηδενικό ιξώδες και μηδενική επιφανειακή τάση). Έτσι βέβαια τα αποτελέσματα της ανάλυσης μπορούν να θεωρηθούν μόνο μια προσεγγιστική εκτίμηση της συμπεριφοράς των πραγματικών ρευστών που χαρακτηρίζονται από χαμηλές τιμές ιξώδους. Παρόλαυτά η ανάλυση γίνεται πολύ πιο εύκολη, ενώ η εισαγωγή αποσβέσεων στο τελικό μοντέλο είναι εύκολη ακόμη και εκ των υστέρων.

3. Θεωρούμε τη γενική περίπτωση κατά την οποία η δεξαμενή κινείται σε μια συγκεκριμένη τροχιά με συγκεκριμένη ταχύτητα. Για την εξαγωγή των εξισώσεων βασιζόμαστε σε δύο διαφορετικά συστήματα συντεταγμένων όπως φαίνεται και στο Σχήμα (3.1).

Στις παρακάτω παραγράφους παρουσιάζεται το μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει τον κλυδασμό σε μια δεξαμενή τόσο για την περίπτωση όπου το σύστημα

συντεταγμένων είναι σταθερό ($O'x'y'z'$) όσο και για την περίπτωση όπου το σύστημα συντεταγμένων είναι κινούμενο ($Oxyz$) μαζί με την δεξαμενή, αλλά σταθερό ως προς το κέντρο αυτής (tank fixed coordinate system), Σχήμα (3.1). Αν και έπειτα θα ασχοληθούμε μόνο με τη δεύτερη περίπτωση, η εξαγωγή των εξισώσεων θα γίνει στο αδρανειακό σύστημα λόγω του ότι είναι πιο οικείο στον αναγνώστη και στη συνέχεια οι εξισώσεις θα μεταφερθούν σε ένα κινούμενο μαζί με τη δεξαμενή σύστημα συντεταγμένων. Τέλος γίνεται μια σύντομη παρουσίαση της αρχής ελαχίστου δράσης η οποία σε συνδυασμό με το μη γραμμικό μοντέλο εξισώσεων οδηγεί στην εξαγωγή του τελικού συστήματος διαφορικών εξισώσεων που περιγράφει τον κλυδασμό.



Σχήμα 3.1: Σχηματική απεικόνιση των δύο θεωρήσεων για το σύστημα αναφοράς. Το σύστημα συντεταγμένων $O'x'y'z'$ είναι σταθερό - αδρανειακό (inertia system) ενώ το σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$ είναι κινούμενο μαζί με τη δεξαμενή (tank fixed coordinate system).

3.1.2 Μοντέλο Ροής για αδρανειακό σύστημα

Το καρτεσιανό σύστημα που χρησιμοποιείται για την εξαγωγή των αρχικών εξισώσεων δεν επηρεάζεται από την κίνηση της δεξαμενής. Ο άξονας z θεωρείται ότι είναι κάθετος στο επίπεδο της διαταραχής ελεύθερης επιφάνειας (επίπεδο xy) και θετικός προς τα πάνω. Ως συντεταγμένες αναφοράς επιλέγουμε τις συντεταγμένες της γης. Το σύστημα συντεταγμένων $O'x'y'z'$ καθώς και οι δυνατοί τρόποι κίνησης της δεξαμενής απεικονίζεται στο Σχήμα (3.1).

Εξίσωση Laplace

Μετά την παραδοχή ότι η δεξαμενή είναι λεία και ότι η ροή του υγρού είναι μη στροβιλώδης ($\nabla\times u = 0$), εισάγουμε το δυναμικό ταχύτητας Φ έτσι ώστε

$$\vec{u} = \nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}e_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial y}e_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial z}e_3 \tag{4}$$

όπου $\vec{u}$ = (v,u,w) είναι η ταχύτητα του υγρού και τα e_1, e_2, e_3 είναι μοναδιαία διανύσματα κατά τους άξονες x, y και z αντίστοιχα.

Η εξίσωση συνέχειας για την περίπτωση ασυμπίεστου υγρού παίρνει τη μορφή:

$$\nabla\vec{u} = 0 \tag{5}$$

και μετά την εισαγωγή της (4) παίρνει τη μορφή:

$$\nabla^2\Phi = 0 \tag{6}$$

Η εξίσωση (6) εκφράζει το γεγονός ότι το δυναμικό της ταχύτητας για ένα ασυμπίεστο υγρό ικανοποιεί την τρισδιάστατη εξίσωση Laplace και έχει συχνά τη μορφή:

$$\Delta\Phi = 0 \tag{7}$$

Εξίσωση Bernouli

Με τη βοήθεια των εξισώσεων Navier – Stokes θα εξάγουμε την εξίσωση Bernouli. Για την τρισδιάστατη περίπτωση οι εξισώσεις Navier – Stokes παίρνουν τη μορφή:

$$\rho\frac{Du}{Dt} = -\nabla p + \rho g + \mu\nabla^2\vec{u} \tag{8}$$

όπου g είναι το διάνυσμα της βαρυτικής επιτάχυνσης, μ είναι η δυναμική σταθερά του ιξώδους και D/Dt εκφράζει το ρυθμό μεταβολής μιας ποσότητας ως προς το χρόνο και είναι ίσος με:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}\nabla \tag{9}$$

Με την παραδοχή μηδενικού ιξώδους για το υγρό μας μπορούμε στην εξίσωση (8) να μηδενίσουμε την παράμετρο του ιξώδους (μ) και να εξάγουμε τελικά την:

$$\rho\frac{Du}{Dt} = -\nabla p + \rho g \tag{10}$$

η οποία είναι γνωστή ως εξίσωση Euler. Εισάγοντας στην (10) την παρακάτω εξίσωση (11)

$$(\vec{u}\nabla)\vec{u} = \frac{1}{2}\nabla\vec{u}^2 - \vec{u}\times(\nabla\times\vec{u}) = \frac{1}{2}\nabla\vec{u}^2 \tag{11}$$

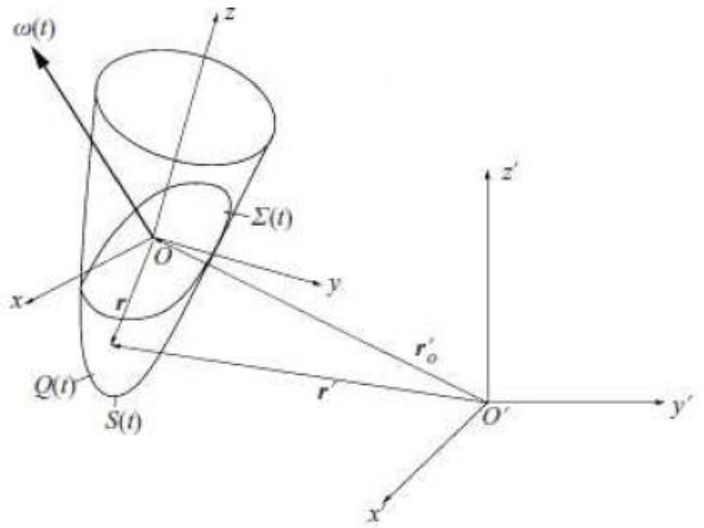
και με χωρική ολοκλήρωση καταλήγουμε στην εξίσωση Bernouli για την πίεση:

$$p + \rho\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla \Phi|^2 + U_g\right] = C(t) \qquad (12)$$

όπου C(t) είναι μια χρονοεξαρτώμενη σταθερά που υπολογίζεται από τις αρχικές και οριακές συνθήκες και U_g=-gr, r = $xe_1 + ye_2 + ze_3$ είναι το δυναμικό βαρύτητας.

3.1.3 Μοντέλο ροής για μη αδρανειακό σύστημα

Θεωρούμε δεξαμενή, μερικώς γεμάτη με υγρό, κινούμενη σε μια τροχιά με μεταβαλλόμενη ταχύτητα. Η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού Σ(t) και η επιφάνεια των βρεγμένων τοιχωμάτων της δεξαμενής S(t) περιορίζουν τον χρονικά μεταβαλλόμενο όγκο του υγρού Q(t) όπως φαίνεται και στο Σχήμα (3.2). Το σύστημα συντεταγμένων $O'x'y'z'$ που φαίνεται στο ίδιο Σχήμα είναι το αδρανειακό σύστημα που περιγράφηκε προηγουμένως.



Σχήμα 3.2: Περιγραφή των επιφανειών του υγρού. Σ(t) είναι η ελεύθερη επιφάνεια, S(t) είναι η βρεγμένη επιφάνεια των τοιχωμάτων της δεξαμενής και Q(t) είναι ο όγκος (χρονικά μεταβαλλόμενος) του υγρού.

Το σύστημα αναφοράς *Oxyz* είναι επιταχυνόμενο και περιστρεφόμενο. Η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος είναι η ω(t) με συνιστώσες ω_1, ω_2, και ω_3 σε κάθε έναν από τους άξονες x, y, z αντίστοιχα. Η αρχή των αξόνων O έχει σχετική ταχύτητα $u_o(t)$ ως προς το σύστημα $O'x'y'z'$.

Εφόσον γίνεται η θεώρηση του μη αδρανειακού συστήματος συντεταγμένων, πρέπει να γίνει και η μετατροπή των εξισώσεων κίνησης του υγρού στο σύστημα αυτό. Οι βασικές εξισώσεις που περιγράφουν το σύστημα είναι οι εξισώσεις (6) και (12).

Στο μη αδρανειακό σύστημα οι εξισώσεις αυτές γίνονται:

Εξίσωση Laplace

$$\Delta\Phi \equiv \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \; \sigma\tau o \; Q(t) \tag{13}$$

Εξίσωση Bernulli

$$p - p_0 = -\rho\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \nabla\Phi(\vec{u} + \vec{\omega} \times \vec{r}) + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + U_g\right] \tag{14}$$

Οι εξισώσεις (13) και (14) θα μας βοηθήσουν για να εξάγουμε τις οριακές συνθήκες για το σύστημά μας.

3.1.4 Οριακές συνθήκες σώματος

Θεωρούμε ότι δεν υπάρχει υπερχείλιση του υγρού από την ελεύθερη επιφάνεια της δεξαμενής. Αυτή η παραδοχή εκφράζεται ως εξής:

$$\vec{u}\vec{n} = \overrightarrow{u_0}\vec{n} + [\vec{\omega} \times \vec{r}]\vec{n} \tag{15}$$

όπου $\vec{n}$ είναι το κάθετο προς την επιφάνεια S(t) διάνυσμα. Εκφράζοντας την ταχύτητα με τη βοήθεια της θεωρίας δυναμικού στη σχέση (15) καταλήγουμε στην παρακάτω μορφή για την οριακή συνθήκη σώματος:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \vec{u}\vec{n} = \overrightarrow{u_0}\vec{n} + \vec{\omega}[\vec{r} \times \vec{n}] \quad \sigma\tau\eta\nu \quad S(t) \tag{16}$$

3.1.5 Συνθήκες ελεύθερης επιφάνειας

Ανάλογα με τις παραδοχές που έχουν γίνει για το σύστημα (δεξαμενή-υγρό-αέριο), είναι απαραίτητο η πίεση της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού να είναι ίση με την πίεση του αερίου ακριβώς πάνω από την επιφάνεια αυτή. Η πρόταση αυτή είναι η δυναμική συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας και εκφράζεται ως:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \nabla\Phi(\overrightarrow{u_0} + \vec{\omega} \times \vec{r}) + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + U_g = 0 \, , \sigma\tau\eta\nu \; \Sigma(t) \tag{17}$$

Επίσης για το σύστημά μας πρέπει να ισχύει η κινηματική συνθήκη της ελεύθερης επιφάνειας. Αυτό σημαίνει ότι ένα σημείο που βρίσκεται στην ελεύθερη επιφάνεια, θα παραμείνει στην ελεύθερη επιφάνεια. Η κινηματική συνθήκη της ελεύθερης επιφάνειας μπορεί να περιγραφεί ως ακολούθως:

Για το κινούμενο σύστημα συντεταγμένων μπορούμε να περιγράψουμε την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού μέσω της

$$Z(x, y, z,t) = 0 \tag{18}$$

Επομένως για να μείνει κάποιο σωματίδιο της ελεύθερης επιφάνειας στην ελεύθερη επιφάνεια για όλο το χρόνο πρέπει να ισχύει:

$$0 = \frac{D'Z}{Dt} = \frac{\partial Z}{\partial t}_{O'x'y'z'} + \vec{u}\nabla Z = \frac{\partial Z}{\partial t}_{Oxyz} - \overrightarrow{u_b}\nabla Z + \nabla F \nabla Z \text{ , } \sigma\tau\eta\nu\ \Sigma(t) \tag{19}$$

Η (19) για την περίπτωση του δυναμικού της ταχύτητας και με τη βοήθεια του μετασχηματισμού:

$$\vec{n} = \frac{\nabla Z}{|\nabla Z|}, \sigma\tau\eta\nu\ \Sigma(t) \tag{20}$$

παίρνει την τελική της μορφή:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \overrightarrow{u_0}\vec{n} + \vec{\omega}[\vec{r} \times \vec{n}] - \frac{\partial Z/\partial t}{|\nabla Z|} \text{ , } \sigma\tau\eta\nu\ \Sigma(t) \tag{21}$$

3.1.6 Συνθήκη διατήρησης του όγκου (μάζας)

Μια ακόμα συνθήκη που πρέπει να προστεθεί είναι αυτή της διατήρησης του όγκου του υγρού.Αυτή περιγράφει το γεγονός ότι όταν δεν υπάρχει εισερχόμενη ή εξερχόμενη ροή υγρού στην εξεταζόμενη δεξαμενή, τότε η μάζα του ασυμπίεστου υγρού πρέπει να μένει σταθερή και να ικανοποιεί την εξίσωση:

$$M_l = \int_{Q(t)} \rho dQ = \rho V_{ol} = const \tag{22}$$

όπου M_l και Vol είναι η μάζα και ο όγκος του υγρού εντός της δεξαμενής,αντίστοιχα.

3.1.7 Αρχικές και περιοδικές συνθήκες

Ένα μέρος του οριακού στρώματος του υγρού, η ελεύθερη επιφάνεια, είναι ελεύθερο να κινηθεί. Αυτό σημαίνει ότι για να είναι το πρόβλημα αυτό καλά ορισμένο, θα πρέπει να συμπληρωθεί και από αρχικές ή περιοδικές (στην περίπτωση περιοδικής διέγερσης της δεξαμενής) συνθήκες.

Η τυπική μορφή των αρχικών συνθηκών (Faltinsen 2009) είναι:

$$\begin{aligned} Z(x, y, z, t_0) &= Z_0(x, y, z) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n}_{\Sigma(t_0)} &= V(x, y, z)_{\Sigma(t_0)} \end{aligned} \tag{23}$$

ενώ η τυπική μορφή των περιοδικών συνθηκών για δοσμένη περίοδο διέγερσης T είναι:

$$Z(x, y, z, t + T) = Z(x, y, z)$$

$$\nabla\Phi(x, y, z, t + T) = \nabla\Phi(x, y, z, t) \tag{24}$$

όπου Z είναι η κατακόρυφη μετατόπιση της ελεύθερης επιφάνειας.

3.2 Γραμμικές φυσικές συχνότητες

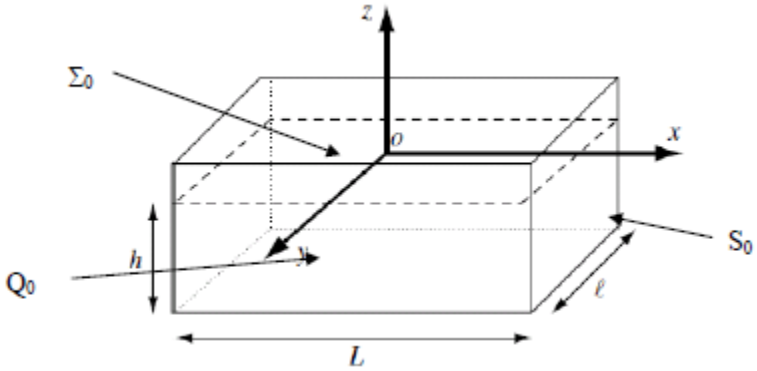
Πρίν από την ανάλυση του προβλήματος με χρήση της τροπικής ανάλυσης, παρουσιάζουμε τον τρόπο προσδιορισμού των γραμμικών φυσικών συχνοτήτων (ιδιοσυχνότητες ή natural frequencies) και των επαγόμενων φυσικών ιδιομορφών - κυματισμών (natural modes), οι οποίες είναι απαραίτητες για την επίλυση.

Θεωρώντας μικρού πλάτους κυματισμό και υποθέτοντας μια αρμονική λύση του προβλήματος, από τις προαναφερθείσες εξισώσεις προκύπτει ένα τυπικό πρόβλημα ιδιοτιμών. Η επίλυση του, η οποία για ορθογωνικές και κατακόρυφες κυλινδρικές δεξαμενές μπορεί να γίνει αναλυτικά χρησιμοποιώντας την μέθοδο διαχωρισμού των μεταβλητών, εξασφαλίζει τις φυσικές ιδιοσυχνότητες της κίνησης του sloshing καθώς και τις αντίστοιχες ιδιομορφές του, οι οποίες εξαρτώνται έντονα από τη μορφή της δεξαμενής.

Στο κεφάλαιο αυτό θα μας απασχολήσει κυρίως η ορθογωνικής διατομής δεξαμενή τριών διαστάσεων (θα γίνει όμως αναφορά και στη διδιάστατη), για την οποία ο υπολογισμός είναι σχετικά εύκολος και μπορεί να γίνει ακόμη ευκολότερος με τη βοήθεια μαθηματικών εργαλείων λογισμικού, όπως το πρόγραμμα Mathematica. Αρχικά γίνεται παρουσίαση της γενικότερης θεωρίας υπολογισμού των φυσικών συχνοτήτων για το σύστημα υγρό-δεξαμενή και έπειτα υπολογίζονται οι ακριβείς εκφράσεις των ιδιοσυχνοτήτων για την διδιάστατη και την τρισδιάστατη περίπτωση.

3.2.1 Γενική θεωρία

Οι φυσικές συχνότητες και οι επαγόμενοι κυματισμοί είναι λύσεις του γραμμικού προβλήματος που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, για το οποίο επιπλέον θεωρούμε μηδενική εξωτερική διέγερση. Στο Σχήμα 3.3 φαίνεται το μη αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων Oxyz που χρησιμοποιείται για την εξαγωγή των αποτελεσμάτων όπου Q_0 και S_0 είναι ο μέσος όγκος και η μέση συνολική επιφάνεια αντίστοιχα της δεξαμενής κάτω από την μέση ελεύθερη επιφάνεια Σ_0 .



Σχήμα 3.3: Αναπαράσταση της ορθογωνικής δεξαμενής σε ηρεμία.

Εφόσον δεν υπάρχει εξωτερική διέγερση, ισχύουν οι θεωρήσεις που έχουμε κάνει για το σύστημα όπως διατήρηση του όγκου, ασυμπιεστότητα κτλ. Έτσι το μαθηματικό μοντέλο που περογράφεται σε αυτή την περίπτωση έχει τη μορφή:

$$
\begin{aligned}
&\alpha)\Delta\Phi \equiv \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} && \sigma\tau o\ Q_0\\
&\beta)\frac{\partial\Phi}{\partial n}=0 && \sigma\tau\eta\nu\ S_0\\
&\gamma)\ \zeta(x,y,t)=-\frac{1}{g}\frac{\partial\Phi}{\partial t} && \sigma\tau o\ \Sigma_0\\
&\delta)\frac{\partial\Phi}{\partial z}=\frac{\partial\zeta}{\partial t} && \sigma\tau o\ \Sigma_0\\
&\varepsilon)\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\Phi}{\partial z}=0 && \gamma\iota\alpha\ Z=0\\
&\sigma\tau)\int_{\Sigma_0}\zeta dxdy=0
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Στο παραπάνω σύστημα εξισώσεων η (25β) εκφράζει την έλλειψη εξωτερικής διέγερσης ενώ η (25στ) εκφράζει την αρχή διατήρησης του όγκου για το υγρό της δεξαμενής.

Για να βρούμε τις περιοδικές ως προς το χρόνο λύσεις του ανωτέρω συστήματος με κυκλική συχνότητα σ, μπορούμε να εκφράσουμε τις λύσεις αυτές ως:

$$\zeta(x,y,t)=f(x,y)e^{-i\sigma t}$$

$$\Phi(x,y,z,t)=\frac{ig}{\sigma}\varphi(x,y,z)e^{i\sigma t} \tag{26}$$

Όπου f(x,y)=φ(x,y,0). Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (26) στο σύστημα (25) καταλήγουμε στο παρακάτω σύστημα:

$$\alpha)\ \nabla^2\varphi=0 \qquad \sigma\tau o\ Q_0$$

$$\beta)\ \frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}} = 0 \quad \sigma\tau o\ S_0$$
$$\gamma)\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \kappa\varphi \qquad \sigma\tau o\ \Sigma_0(\kappa = \frac{\sigma^2}{g}) \tag{27}$$
$$\delta)\ \int_{\Sigma_0} \varphi dxdy = 0$$

Το σύστημα (27) είναι τώρα χρονικά ανεξάρτητο. Η χρονική ανεξαρτησία θα μας βοηθήσει στον υπολογισμό των ιδιομορφών του συστήματος. Η εξίσωση (27.δ) εξασφαλίζει ότι το χωρικό πρόβλημα (27) δεν έχει λύσεις της μορφής $\phi = f = C \neq 0$, κ=0. Για τα υπόλοιπα κ αποδεικνύεται ότι ισχύει:

$$0 \leq \kappa_1 \leq \kappa_2 \leq \cdots \leq \kappa_n \leq \cdots, \kappa_n \to \infty \tag{28}$$

Η ισότητα στην προηγούμενη σχέση σημαίνει ότι είναι δυνατό να υπάρχουν περισσότερες από μια ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή. Όμως ο αριθμός των ιδιοσυναρτήσεων που αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή πρέπει να είναι πεπερασμένος. Δηλαδή η ίδια ιδιοσυχνότητα μπορεί να συνεπάγεται περισσότερους του ενός κυματισμούς αλλά πάντοτε πεπερασμένο αριθμό κυματισμών.

Οι ιδιοσυναρτήσεις $\varphi_n(x,y,z)$ ονομάζονται γραμμικοί φυσικοί sloshing κυματισμοί (linear natural sloshing modes) ή συναρτήσεις sloshing. Οι φυσικές περίοδοι και συχνότητες προκύπτουν από το σύστημα (26):

$$T_n = 2\pi/\sqrt{g\kappa_n}$$
$$\sigma_n = \sqrt{g\kappa_n} \tag{29}$$

ενώ τα στάσιμα κύματα της ελεύθερης επιφάνειας από τη σχέση:

$$f_n(x,y) = \varphi_n(x,y,0) = \frac{1}{\kappa_n}\frac{\partial\varphi_n}{\partial z}(x,y,0) \tag{30}$$

Οποιαδήποτε συνάρτηση ικανοποιεί τη συνθήκη διατήρησης του όγκου μπορεί να περιγραφεί ως γραμμική συνισταμένη των στάσιμων αυτών κυμάτων. Κατά συνέπεια τα κύματα αυτά αποτελούν μια βάση της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού. Και ως μέλη της βάσης ικανοποιούν την συνθήκη της ορθογωνιότητας:

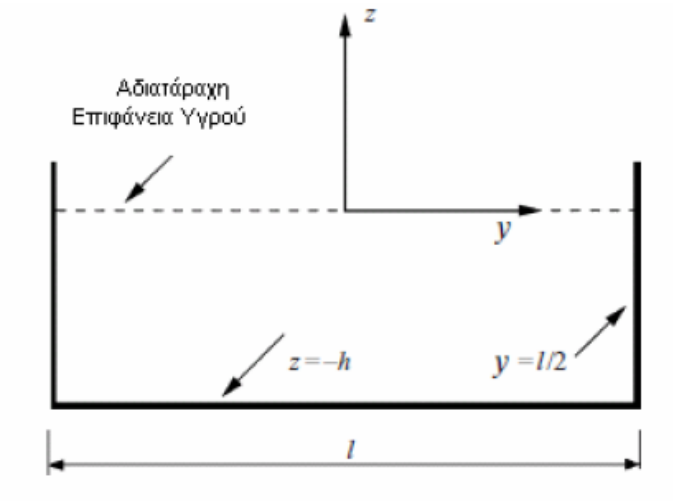
$$\int_{\Sigma_0} f_i f_j dxdy = \int_{\Sigma_0} \varphi_\iota(x,y,0)\varphi_j(x,y,0)dxdy = 0, i \neq j \tag{31}$$

3.2.2 Ακριβείς λύσεις

Όπως έχουμε αναφέρει δεν είναι πολλές οι περιπτώσεις για τις οποίες μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά οι φυσικές συχνότητες γιατί ο υπολογισμός των λύσεων του συστήματος (27), μπορεί να γίνει μόνο αν η γεωμετρία του προβλήματος, που εξαρτάται κυρίως από το είδος της δεξαμενής, επιτρέπει τη χρήση της μεθόδου χωρισμού των μεταβλητών. Αναλυτικές μέθοδοι έχουν παρουσιαστεί από τον Ibrahim

(2005) για τον υπολογισμό των φυσικών συχνοτήτων για διάφορους τύπους δεξαμενών. Παρακάτω παρουσιάζεται ο τρόπος υπολογισμού των φυσικών ιδιοσυχνοτήτων για την περίπτωση της διδιάστατης και της τρισδιάστατης ορθογώνιας δεξαμενής.

Διδιάστατη ορθογώνια δεξαμενή



Σχήμα 3.4: Αναπαράσταση της δισδιάστατης ορθογώνιας δεξαμενής

Το σύστημα (27) για την περίπτωση της δισδιάστατης ορθογώνιας δεξαμενής που φαίνεται στο Σχήμα 3.4 παίρνει τη μορφή:

$$\alpha)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0 \qquad \sigma\tau o\ Q_0$$

$$\begin{aligned}
&\beta)\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0 \qquad \sigma\tau o\ \ y=\pm\tfrac{1}{2}l\ \ \gamma\iota\alpha-h\le z\le 0\\
&\gamma)\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0 \qquad \sigma\tau o\ z=-h\ \ \gamma\iota\alpha\ |y|\le\tfrac{1}{2}l\\
&\delta)\frac{\partial\varphi}{\partial z}-\kappa\varphi=0 \qquad \sigma\tau o\ Z=0\ \gamma\iota\alpha\ |y|\le\tfrac{1}{2}\ l\\
&\varepsilon)\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\varphi(y,0)dxdy=0
\end{aligned} \tag{32}$$

Η μέθοδος χωρισμού μεταβλητών για τις μεταβλητές x, z δίνει εξίσωση της μορφής Laplace της οποίας η λύση είναι:

$$\kappa_\iota=\frac{\pi i}{l}tanh(\frac{\pi i}{l}h)$$

$$\varphi_i(y,z)=cos(\frac{\pi i}{l}\left(y+\frac{1}{2}l\right))\times\frac{cosh\pi\frac{z+h}{l}}{cosh\frac{\pi ih}{l}} \tag{33}$$

$$f_i(y)=\varphi_i(y,0)=cos(\pi i\frac{y+\frac{1}{2}l}{l}) \tag{34}$$

Μέσω της συνθήκης ορθογωνιότητας μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι οι ιδιοσυναρτήσεις που περιγράφονται από την (33) αναπαριστούν μια ορθογώνια βάση στο επίπεδο της ελεύθερης επιφάνειας

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_i(y)\, f_j(y) dy = \frac{1}{2} l \delta_{ij} \qquad ,\delta_{ij} = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases} \tag{35}$$

όπου δ_{ij}είναι το δέλτα του Kronecker.

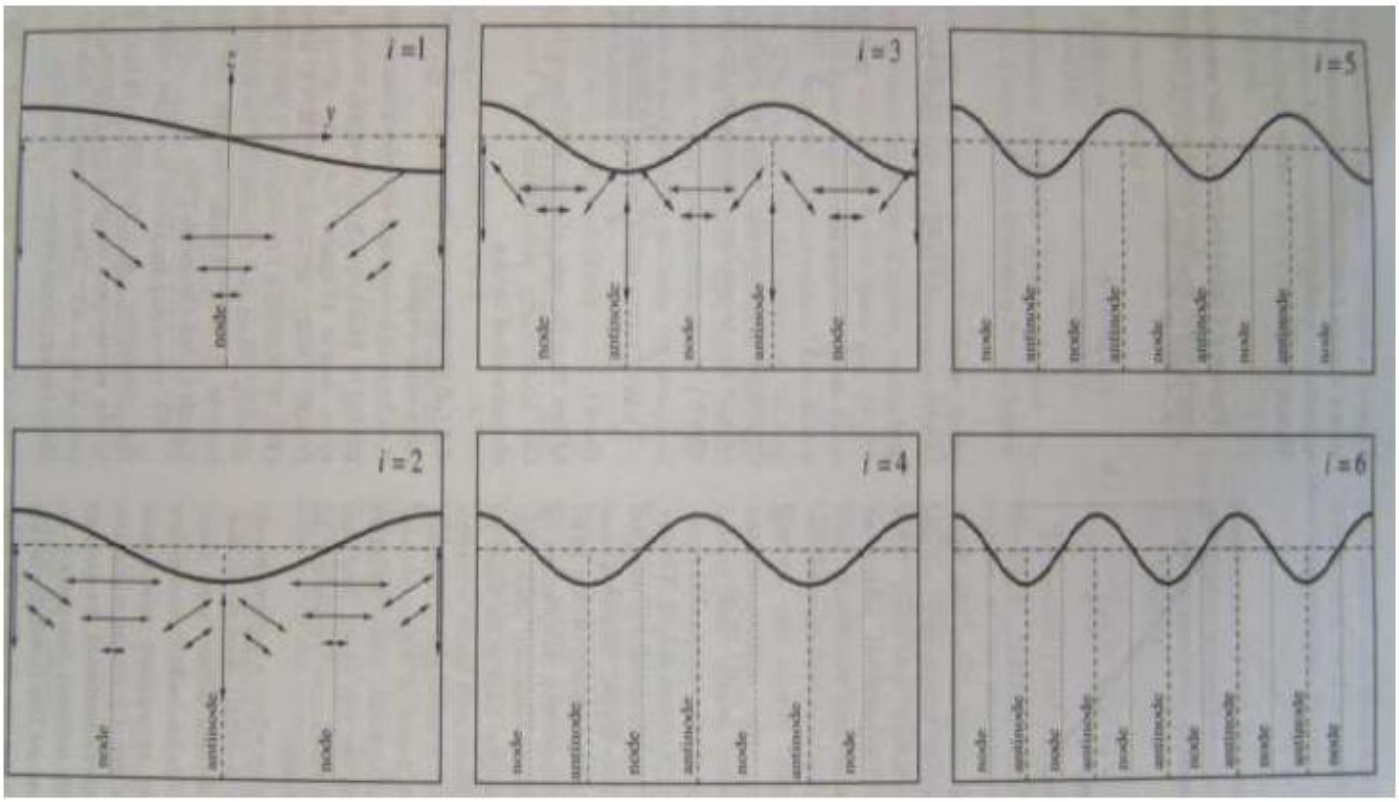
Οι ακριβείς λύσεις της σχέσης (33) ικανοποιούν τη συνθήκη (28). Στη συγκεκριμένη περίπτωση, της διδιάστατης δεξαμενής, κάθε ιδιοτιμή αντιστοιχεί σε μια και μοναδική ιδιοσυνάρτηση. Οι φυσικές συχνότητες και περίοδοι, λοιπόν υπολογίζονται:

$$\sigma_i = \sqrt{g \frac{\pi i}{l} tanh(\frac{\pi i}{l} h)}$$

$$T_i = \frac{2\pi l}{\sqrt{g \pi i tanh(\frac{\pi i h}{l})/l}} \quad , i = 1,2 \ldots \tag{36}$$

Οι φυσικοί κυματισμοί (natural modes) χωρίζονται σε συμμετρικούς και αντισυμμετρικούς. Ο διαχωρισμός αυτός γίνεται με βάση τη συμπεριφορά των $f_i(y)$ σε σχέση με τον άξονα z. Ο χαμηλότερος γραμμικός κυματισμός $f_i(y)$που έχει μεγάλη σημασία για τις εφαρμογές στην ναυτιλία, είναι αντισυμμετρικός και έχει μήκος κύματος, όπως φαίνεται και στην Εικόνα 3.5 διπλάσιο από το μήκος της δεξαμενής.

Στην Εικόνα 3.5 φαίνεται επίσης πως ο όγκος του υγρού μέσα στη δεξαμενή χωρίζεται από κομβικές (nodal) και αντικομβικές (antinodal) κάθετες γραμμές στη βάση της δεξαμενής. Ένα σωματίδιο του υγρού μπορεί να κινηθεί μόνο οριζόντια πάνω σε μια κομβική γραμμή, ενώ αντίθετα μπορεί να κινηθεί μόνο κάθετα πάνω σε μια αντικομβική γραμμή. Ο αριθμός των κόμβων είναι ίσος με τον αριθμό i του κυματισμού, ενώ οι αντικομβικές γραμμές χωρίζουν τον όγκο του υγρού σε i+1 υποπεριοχές.



Εικόνα 3.5: Στάσιμα κύματα τα οποία αντιστοιχούν σε συμμετρικούς και μη συμμετρικούς φυσικούς κυματισμούς για sloshing σε μια δισδιάστατη ορθογώνια δεξαμενή. Τα βέλη συμβολίζουν την κίνηση ενός σωματιδίου του υγρού στις περιοχές ανάμεσα στις κομβικές και τις αντικομβικές γραμμές. Πηγή: Sloshing, Faltinsen & Timokha, Campridge 2009

Αναφερόμενοι ξανά στην εξάρτηση των φυσικών κυματισμών από το λόγο h/l βλέπουμε ότι αυτός εμφανίζεται στη σχέση (36) στο εσωτερικό της υπερβολικής εφαπτομένης. Επειδή ο όρος $\tanh(\frac{\pi i}{l}h)$ συμπεριφέρεται διαφορετικά για μικρές και μεγάλες τιμές του λόγου h/l εισάγουμε τις εξής προσεγγιστικές περιπτώσεις:

- Μικρού βάθους όπου $h / l \leq 0{,}05 - 0{,}1$. Σ' αυτή την περίπτωση για το σύνολο των χαμηλότερων φυσικών συχνοτήτων ισχύει η σχέση:
$$\tanh(\frac{\pi i}{l}h) \sim \frac{\pi i}{l}h$$
Όσο αυξάνεται η τιμή του λόγου h/l, για ολοένα και λιγότερες φυσικές συχνότητες ισχύει η τελευταία σχέση.

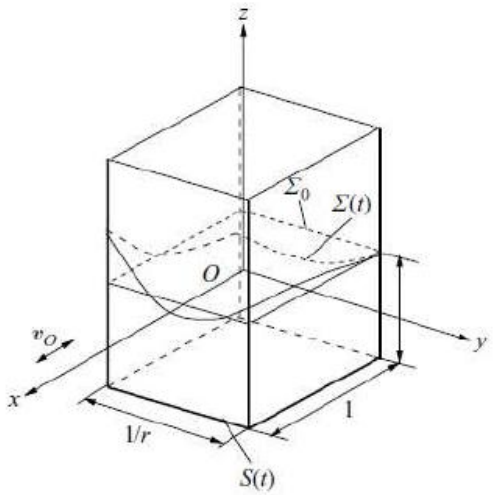
- Ενδιάμεσου βάθους όπου $0{,}05 - 0{,}1 \leq h / l \leq 0{,}2 - 0{,}25$. Σ' αυτή την περίπτωση η σχέση (36) ισχύει για ένα περιορισμένο αριθμό χαμηλότερων φυσικών συχνοτήτων.

- Πεπερασμένου βάθους όπου $0{,}2 - 0{,}25 \leq h / l \leq 1$. Σ' αυτή την περίπτωση η τιμή του όρου $\tanh\left(\frac{\pi i}{l}h\right)$ είναι μεγαλύτερη από αυτήν της περίπτωσης ενδιάμεσου βάθους αλλά δεν είναι κοντά στο 1. Αυτό σημαίνει ότι τουλάχιστον η χαμηλότερη φυσική συχνότητα (σ_1) είναι εξαρτώμενη από το λόγο h/l.

- Απείρου βάθους όπου 1 ≤ h / l. Στην περίπτωση αυτή ισχύει $\tanh\left(\frac{\pi i}{l}h\right) \sim 1$ επομένως οι διαστάσεις της δεξαμενής επηρεάζουν καμία φυσική συχνότητα.

Ένα πολύ σημαντικό φυσικό φαινόμενο που αξίζει να σημειωθεί και στο οποίο οφείλεται η στροφή της έρευνας από το γραμμικό στο μη γραμμικό πρόβλημα είναι ο δευτερεύων συντονισμός.(Faltinsen 2009). Κατά το φαινόμενο αυτό μια υψηλότερη ιδιοτιμή είναι δυνατό να διεγείρεται μη γραμμικά κατά τη διάρκεια αρμονικής διέγερσης της χαμηλότερης ιδιοτιμής με περίοδο T κοντά στην T_1.

Τρισδιάστατη ορθογώνια δεξαμενή



Σχήμα 3.6: Τρισδιάστατη ορθογώνια δεξαμενή. Η αρχή του συστήματος συντεταγμένων (μη-αδρανειακό) ταυτίζεται με το κέντρο της αδιατάραχης ελεύθερης επιφάνειας του υγρού Σ_0.

Όπως έχει αναφερθεί και πριν, θεωρούμε το μη αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων με την αρχή του συστήματος συντεταγμένων να ταυτίζεται με το κέντρο της αδιατάραχης ελεύθερης επιφάνειας του υγρού. Όπως φαίνεται και στο Σχήμα (3.6) το επίπεδο (xy) ταυτίζεται με το επίπεδο της αδιατάραχης ελεύθερης επιφάνειας ενώ ο άξονας είναι κάθετος σε αυτό και με θετική φορά προς τα επάνω. Το μήκος της δεξαμενής είναι l και το πλάτος 1/ r.

Η επίλυση του (27) γίνεται και στην περίπτωση των τριών διαστάσεων με τη μέθοδο των χωριζόμενων μεταβλητών. Έτσι η συνάρτηση $\phi(x,y,z)$ εκφράζεται ως γινόμενο τριών ανεξάρτητων συναρτήσεων εκ των οποίων η μία εμφανίζει εξάρτηση μόνο στον άξονα x, η άλλη μόνο στον άξονα y και τελευταία μόνο στον z άξονα, δηλαδή $\phi = X(x)Y(y)Z(z)$ και η οποία οδηγεί την εξίσωση Laplace στις ισότητες:

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = 0$$

$$X'' + k^2{}_x X = 0, Y'' + k^2{}_y Y = 0 \; \kappa\alpha\iota \; Z'' - (k^2{}_x + k^2{}_y)Z = 0 \qquad (37)$$

Και τελικά στις λύσεις:

$$f_i^{(1)}(x) = cos\left[i\pi(x + \frac{1}{2}L_1)/L_1\right]$$
$$f_j^{(2)}(y) = cos\left[j\pi(y + \frac{1}{2}L_2)/L_2\right] \quad (38)$$

Και

$$\varphi_{ij}(x,y,z) = f_i^{(1)}(x)f_j^{(2)}(y)\frac{\cosh[k_{ij}(z+h)]}{\cosh(k_{ij}h)} \quad (39)$$

Με

$$\frac{\sigma^2{}_{ij}}{g} = \kappa_{ij} = k_{ij}tanh(k_{ij}h)$$
$$k_{ij} = \pi\sqrt{\left(\frac{i}{L_1}\right) + \left(\frac{j}{L_2}\right)} \quad i + j \neq 0 \quad (40)$$

όπου k_{ij} είναι ο κυματάριθμος των φυσικών συναρτήσεων $\phi_{i,\,j}$ για $i,\ j \geq 1$. Στην περίπτωση κατά την οποία $j = 0$ και $k_{i0} = k_{xi}$ ο κυματάριθμος ταυτίζεται με αυτόν της δισδιάστατης περίπτωσης sloshing κατά τον άξονα x. Ανάλογα και για την περίπτωση κατά την οποία $i = 0$ και $k_{i0} = k_{xi}$. Η περίπτωση όπου $i = j = 0$ δε λαμβάνεται υπόψη αφού αντιστοιχεί στη λύση $\phi_{0,0}$ =σταθ. η οποία δεν ικανοποιεί την συνθήκη διατήρησης του όγκου.

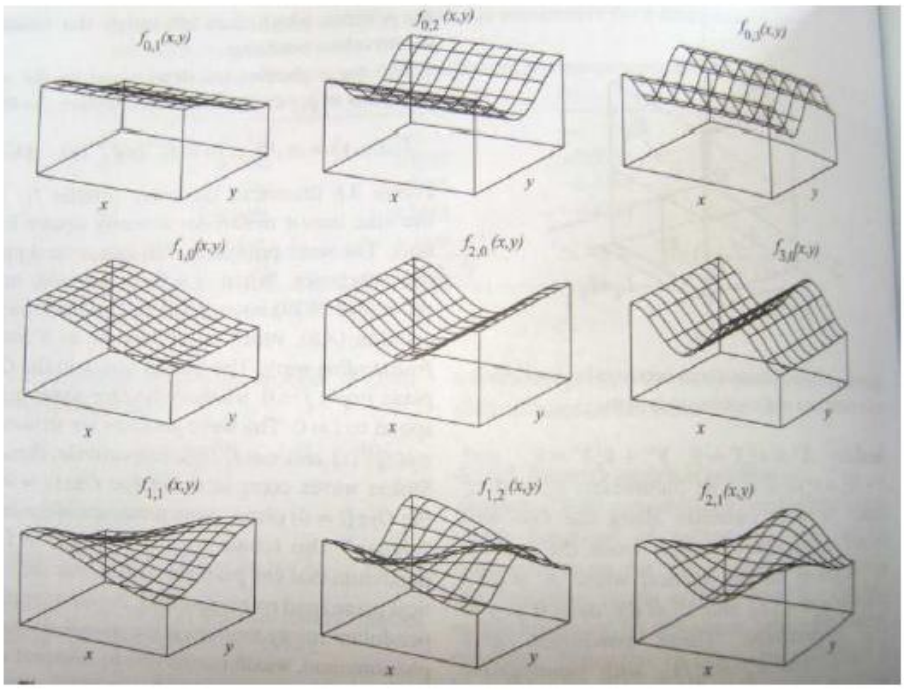
Και σε αυτήν την περίπτωση ισχύει η σχέση για τους κυματισμούς της ελεύθερης επιφάνειας:

$$f_{i,j}(x,y) = \varphi_{i,j}(x,y,0) = f_i^{(1)}(x)f_j^{(2)}(y) \quad (41)$$

Στην Εικόνα (3.7) παρουσιάζονται τα προφίλ των εννέα χαμηλότερων φυσικών κυματισμών για την περίπτωση της κυβικής δεξαμενής. Η περιγραφή των κυματισμών αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι της μελέτης του φαινομένου του sloshing. Όταν ισχύει $i \cdot j = 0$ για $i \neq j$, όπως ειπώθηκε και προηγουμένως, οι φυσικοί κυματισμοί ταυτίζονται με αυτούς της διδιάστατης περίπτωσης και ονομάζονται κύματα Stokes ή επίπεδα κύματα αφού η εμφάνιση των κυμάτων αυτών γίνεται για κάθε περίπτωση στο ένα επίπεδο. Μια ακόμη μορφή κίνησης και πιο σύνθετη εμφανίζεται στην περίπτωση της τρισδιάστατης δεξαμενής, το φαινόμενο του στροβιλισμού. Ο στροβιλισμός είναι η πιο συχνά εμφανιζόμενη μορφή τρισδιάστατης κίνησης και μπορεί να περιγραφεί μαθηματικά από την υπέρθεση δύο επίπεδων κυμάτων Stokes τα οποία έχουν μεταξύ τους κάποια διαφορά φάσης,με πιο απλό απλό παράδειγμα τη διαφορά φάσης 90° οπότε και ο στροβιλισμός περιγράφεται από τη σχέση:

$$f_1^{(1)}(x)cos\sigma_{1,0}t \pm f_1^{(2)}(y)sin\sigma_{0,1}t \quad (42)$$

Το θετικό και αρνητικό πρόσημο αντιστοιχούν σε διαφορετική φορά στροβιλισμού.

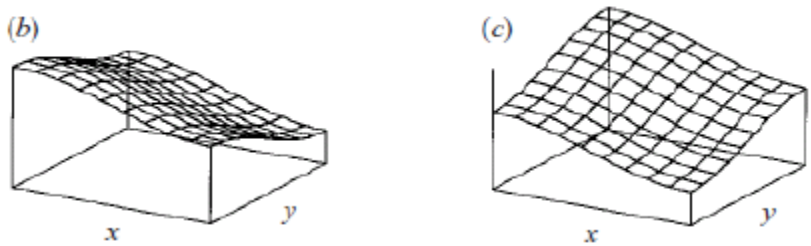


Εικόνα 3.7: Σχηματική αναπαράσταση των εννέα χαμηλότερων φυσικών κυματισμών για την περίπτωση της τρισδιάστατης ορθογώνιας δεξαμενής. Πηγή: Sloshing, Faltinsen & Timokha, Campridge 2009

Μια τρίτη περίπτωση κίνησης που εμφανίζεται στην τρισδιάστατη περίπτωση και που μπορεί να θεωρηθεί ως οριακή περίπτωση των δύο προηγούμενων είναι αυτή που περιγράφεται από τις σχέσεις:

$$S_1^i(x,y) = f_i^{(1)}(x) - f_i^{(2)}(y)$$
$$S_2^i(x,y) = f_i^{(1)}(x) + f_i^{(2)}(y) \qquad (43)$$

Στο Σχήμα 3.8 φαίνεται η μορφή των κυματισμών αυτών για μια κυβική δεξαμενή. Σύμφωνα με τους Faltinsen et al (2003) και Miles (1994), ονομάζουμε τα κύματα αυτά διαγώνια ή τετραγωνικά. Στην περίπτωση αυτών των κυμάτων οι δύο αντίθετες γωνίες της ελεύθερης επιφάνειας είναι αμετακίνητες, ενώ οι άλλες δύο ταλαντώνονται με αντίθετη μεταξύ τους φάση.



Σχήμα 3.8: Διαγώνιοι κυματισμοί οι οποίοι είναι αποτέλεσμα της κίνησης που περιγράφεται από τη σχέση (43) στην περίπτωση της τρισδιάστατης ορθογώνιας δεξαμενής. Πηγή: Sloshing, Faltinsen & Timokha, Campridge 2009.

Κεφάλαιο 4ο - Τροπική ανάλυση

4.1 Εισαγωγή

Η τροπική modal ανάλυση θα μας απασχολήσει στα επόμενα κεφάλαια για τον προσδιορισμό του κλυδασμού στην περίπτωση κατακόρυφης διέγερσης σε διδιάστατη και τρισδιάστατη ορθογωνική δεξαμενή. Το πλεονέκτημα της μεθόδου αυτής είναι ότι μπορεί να μετατρέψει το αρχικό πρόβλημα ιδιοτιμών σε ένα απειροδιάστατο σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Η μέθοδος ονομάζεται τροπική (modal) γιατί οι άγνωστες παράμετροι των εξισώσεων (συναρτήσεις modal $\beta_i(t)$) αποτελούν τις γενικευμένες συντεταγμένες των κυματισμών του sloshing που περιγράφουν την κατακόρυφη κίνηση της ελεύθερης επιφάνειας.

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η τροπική ανάλυση στην περίπτωση ταυτόχρονης οριζόντιας και κατακόρυφης διέγερσης. Αρχικά παρουσιάζεται η γραμμική περίπτωση κατά την οποία δεχόμαστε γραμμική απόκριση της ελεύθερης επιφάνειας (μικρό πλάτος διέγερσης συγκρινόμενο με το πλάτος της δεξαμενής), ενώ στη συνέχεια περιγράφεται η μη γραμμική περίπτωση. Το σύνολο των συνήθων διαφορικών εξισώσεων της τελευταίας περίπτωσης θα αποτελέσει το αντικείμενο της ανάλυσης που θα γίνει παρακάτω.

4.1.1 Γραμμική θεώρηση

Για να κάνουμε την υπόθεση της γραμμικότητας θεωρούμε ότι τόσο το πλάτος ταλάντωσης της δεξαμενής όσο και η επαγομένη κίνηση της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού είναι μικρή σε σχέση με το πλάτος της δεξαμενής. Έτσι προκύπτει ένα τυπικό πρόβλημα ιδιοτιμών το οποίο εκφράζει τον κυματισμό της ελεύθερης επιφάνειας ενός ιδεατού ρευστού μέσα σε μια δεξαμενή και ικανοποιεί την εξίσωση Laplace για ιδεατά ρευστά, τις συνθήκες μη-διαπερατότητας στο όριο με το τοίχωμα της δεξαμενής και τις οριακές συνθήκες της ελεύθερης επιφάνειας. Η επίλυση του προβλήματος αυτού εξασφαλίζει τις φυσικές ιδιοσυχνότητες και τις αντίστοιχες ιδιομορφές της κίνησης του sloshing, οι οποίες εξαρτώνται από τη μορφή της δεξαμενής. Για ορθογωνικές και κατακόρυφες κυλινδρικές δεξαμενές, το πρόβλημα των ιδιοτιμών του sloshing μπορεί να επιλυθεί αναλυτικά χρησιμοποιώντας την μέθοδο διαχωρισμού των μεταβλητών.

Εξαγωγή του συστήματος για τρισδιάστατη ορθογωνική δεξαμενή

Θεωρούμε μια τρισδιάστατη ορθογωνική δεξαμενή μερικώς γεμάτη με υγρό το οποίο ικανοποιεί τους περιορισμούς που αναφέρθηκαν στο τρίτο κεφάλαιο. Η δεξαμενή έχει έξι βαθμούς ελευθερίας, δηλαδή μπορεί να κινηθεί με τους τρόπους που απεικονίζονται στο Σχήμα 3.1 και για την ταχύτητα στους τρεις άξονες ισχύει η σχέση:

$$u_0(t) = u_{01}(t)e_1 + u_{02}(t)e_2 + u_{03}(t)e_3 = \dot{\eta}_1 e_1 + \dot{\eta}_2 e_2 + \dot{\eta}_3 e_3$$

Για την γωνιακή ταχύτητα επιπλέον ισχύει:

$$\omega_0(t) = \omega_1(t)e_1 + \omega_2(t)e_2 + \omega_3(t)e_3 = \dot{\eta}_4 e_1 + \dot{\eta}_5 e_2 + \dot{\eta}_6 e_3$$

όπου η_i είναι η δύναμη διέγερσης.

Το γραμμικό μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει το σύστημα σ' αυτήν την περίπτωση θα έχει τη μορφή:

$$\begin{aligned}
&\alpha)\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0 \quad \sigma\tau o\ Q_0 \\
&\beta)\ \frac{\partial \Phi}{\partial n}_{S_0} = \vec{u}_0 \vec{n} + \vec{\omega}[\vec{r} \times \vec{n}] \\
&\gamma)\ \frac{\partial \Phi}{\partial n}_{\Sigma_0} = \vec{u}_0 \vec{n} + \vec{\omega}[\vec{r} \times \vec{n}] + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \\
&\delta)\ \frac{\partial \Phi}{\partial t}_{\Sigma_0} - g_1 x - g_2 y - g_3 \zeta = 0 \\
&\varepsilon)\ \int_{\Sigma_0} \zeta dx dy = 0
\end{aligned} \tag{44}$$

όπου ως γνωστόν Q_0 και S_0 είναι ο μέσος όγκος και η μέση συνολική επιφάνεια αντίστοιχα της δεξαμενής κάτω από την μέση ελεύθερη επιφάνεια Σ_0 . Η λύση του ανωτέρω συστήματος μπορεί να γραφεί με τη βοήθεια σειρών Fourier ως εξής:

$$\zeta(x,y,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_\iota(t)\varphi_\iota(x,y,0) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_\iota(t) f_\iota(x,y) \tag{45}$$

$$\Phi(x,y,z,t) = u_0(t)r + \omega(t)\Omega_0(x,y,z) + \sum_{i=1}^{\infty} R_\iota(t)\varphi_\iota(x,y,z) \tag{46}$$

όπου $f_\iota(x,y) = \varphi_\iota(x,y,z)$. Η εξίσωση (46) εισάγει τη διανυσματική συνάρτηση $\Omega_0(x,y,z) = (\Omega_{01}(x,y,z), \Omega_{02}(x,y,z), \Omega_{03}(x,y,z))$ η οποία αποτελεί το δυναμικό Stokes – Joukowski και εμφανίζεται στην περίπτωση κατά την οποία υπάρχει πλήρως γεμάτη δεξαμενή. Στη γραμμική περίπτωση το δυναμικό αυτό είναι ανεξάρτητο του χρόνου και αποτελεί την λύση του κάτωθι προβλήματος οριακών τιμών:

$$\nabla^2 \Omega_0 = 0 \quad \sigma\tau o\ Q_0 \tag{47}$$

$$\frac{\partial \Omega_{01}}{\partial n} = y n_3 - z n_2, \qquad \frac{\partial \Omega_{02}}{\partial n} = z n_1 - x n_3, \qquad \frac{\partial \Omega_{03}}{\partial n} = x n_2 - y n_1 \ \ \sigma\tau o\ S_0 \cup \Sigma_0$$

Οι εξισώσεις (45) και (46) ικανοποιούν τις συνθήκες του συστήματος (44) εκτός από τις (44γ) και (44δ) οι οποίες εκφράζουν την κινηματική και δυναμική συνθήκη της ελεύθερης επιφάνειας, αντίστοιχα. Οι μορφές των στάσιμων κυμάτων σε μια μη διεγειρόμενη δεξαμενή περιγράφονται από φυσικές ιδιομορφές. Το τετράγωνο της φυσικής συχνότητας σ_i κάθε στάσιμου κύματος σχετίζεται με την ιδιοτιμή κ_i. Αν χρησιμοποιήσουμε τις ιδιοσυναρτήσεις $f_i(x,y)$ που αποτελούν μια πλήρη βάση στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού, για να επιλύσουμε το πρόβλημα, τότε αυτό μετατοπίζεται πλέον στον υπολογισμό των χρονικών εξαρτήσεων των κυμάτων που περιγράφονται από τις σχέσεις (45) και (46). Εδώ γίνεται φανερό το πλεονέκτημα της θεωρίας modal, ειδικά σε περιπτώσεις μη γραμμικότητας, αφού καθίσταται πιο εύκολος ο υπολογισμός των χρονικών εξαρτήσεων β_j και R_j που με αναλυτικές

μεθόδους θα ήταν πρακτικά αδύνατο. Η θεωρία είναι ακόμα πιο χρήσιμη στην περίπτωση που εισάγονται και μη γραμμικότητες στο μαθηματικό μοντέλο.

Εισάγοντας τις (45) και (46) στην (44γ) και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα ορθογωνιότητας των φυσικών ιδιοσυναρτήσεων $f_i(\int_{S_0} f_i f_j dS = 0, \forall j \neq i)$ καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση μεταξύ των αγνώστων β_j και R_j:

$$\dot{\beta}_J = \kappa_j R_j, j \geq 1 \tag{48}$$

Εισάγοντας τις (45) και (46) στην (44δ) και χρησιμοποιώντας την (47) καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\sum_{j=1}^{\infty}[\ddot{\beta}_J(t) + \sigma_j^2 \beta_j(t)]\kappa_j^{-1}\varphi_j(x,y,0) + x(\ddot{\eta}_1 - g\eta_5) + y(\ddot{\eta}_2 + g\eta_4) + \sum_{k=4}^{6} \ddot{\eta}_\kappa \Omega_{0(\kappa-3)}(x,y,0) = 0 \tag{49}$$

Όπου (x,y)$\in \Sigma_0$

Οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (modal system) για τη συνάρτηση (modal function) β_m είναι οι εξής:

$$\mu_m(\ddot{\beta}_m + \sigma_m^2 \beta_m) + \lambda_{1m}(\ddot{\eta}_1 - g\eta_5) + \lambda_{2m}(\ddot{\eta}_2 + g\eta_4) + \sum_{k=4}^{6} \ddot{\eta}_\kappa \lambda_{0(\kappa-3)m} = 0, \quad m = 1,2 \ldots \tag{50}$$

Όπου ρ είναι η πυκνότητα του υγρού.

Οι εξισώσεις (49) αποτελούν τις γραμμικές τροπικές εξισώσεις. Σε αυτές περιλαμβάνεται και ένα σύνολο χρονικά ανεξάρτητων υδροδυναμικών συντελεστών $(\mu_m, \lambda_{1m}, \lambda_{2m}, \lambda_{0km})$. Για τον υπολογισμό τους, απαιτείται η γνώση των φυσικών ιδιομορφών sloshing και του δυναμικού Stokes – Joukowski:

$$\sigma_m^2 = g\kappa_m, \quad \mu_m = \frac{\rho}{\kappa_m}\int_{\Sigma_0} \varphi_m^2 \, dxdy = \frac{\rho}{\kappa_m}\int_{\Sigma_0} f_m^2 \, dxdy$$

$$\lambda_{1m} = \rho \int_{\Sigma_0} f_m \, xdxdy, \quad \lambda_{2m} = \rho \int_{\Sigma_0} f_m \, ydxdy, \quad \lambda_{0km} = \rho \int_{\Sigma_0} f_m \, \Omega_{0k} dxdy, \quad (50)$$

$$k = 1,2,3 \qquad m = 1,2 \ldots$$

Ο συντελεστής m μπορεί να πάρει και τιμές της μορφής (i,j) σε περιπτώσεις τρισδιάστατων δεξαμενών. Η ύπαρξη της πυκνότητας ρ στις εξισώσεις της (50) αν και αυθαίρετη διευκολύνει τον υπολογισμό των δυνάμεων και ροπών στην δεξαμενή λόγω του sloshing (Faltinsen et al 2000),ο οποίος όμως είναι έξω από το αντικείμενο της παρούσας εργασίας.

Κατακόρυφη διέγερση

Όταν γνωρίζουμε την κατεύθυνση της διέγερσης της δεξαμενής (δηλαδή ποιοι από τους συντελεστές n_i συμμετέχουν στην κίνηση της δεξαμενής) καλό είναι να γράψουμε την εξίσωση (49) στη μορφή

$$\ddot{\beta_m} + \sigma_m^2 \beta_m = K_m(t), m = 1,2 \ldots$$

όπου το δεξί μέλος της εξίσωσης δίνεται από τη σχέση

$$K_m(t) = \frac{1}{\mu_m}(\lambda_{1m}(\ddot{\eta}_1 - g\eta_5) + \lambda_{2m}(\ddot{\eta}_2 + g\eta_4) + \sum_{k=4}^{6} \ddot{\eta}_\kappa \lambda_{0(\kappa-3)m}), m = 1,2\ldots \quad (51)$$

Βλέποντας ότι στη σχέση (51) δεν συμπεριλαμβάνεται πουθενά ο όρος n_3, καταλαβαίνουμε ότι η κατακόρυφη διέγερση της δεξαμενής δεν είναι δυνατό να προκαλέσει γραμμικά sloshing ή αντίστροφα ο κατακόρυφος κλυδασμός δεν μπορεί να αναλυθεί μέσω της θεωρίας modal.

4.1.2 Μη γραμμική θεώρηση

Με την εξαγωγή μη γραμμικών τροπικών εξισώσεων έχει ασχοληθεί πληθώρα ερευνητών όπως οι Miles (1976) και Lukovski (1976), Lukovski (1990), Lukovski & Timokha (1995) και La Rocca (et al 2000). Στην ενότητα αυτή θα ακολουθήσουμε τον τρόπο που εισήγαγε ο Faltinsen (2000).

Όπως και στη γραμμική περίπτωση αρχικά γίνεται αναλυτική παρουσίαση της αναπαράστασης του δυναμικού της ταχύτητας καθώς και της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού ενώ έπειτα αναλύεται ο τρόπος εξαγωγής του συνόλου (απειροδιάστατου) των διαφορικών εξισώσεων οι οποίες αποτελούν τις τροπικές εξισώσεις, χωρίς να λάβουμε υπόψη το σχήμα της δεξαμενής. Τέλος παρουσιάζονται τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της θεωρίας.

Θα εισαχθούν δύο αναπαραστάσεις Fourier για να περιγράψουμε τις άγνωστες συναρτήσεις της ελεύθερης επιφάνειας και του δυναμικού ταχύτητας του υγρού. Αναπαριστούμε ,σύμφωνα με Faltinsen (2000), την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού με την εξίσωση $z = \zeta(x,y,t)$ σε ένα κινούμενο σύστημα συντεταγμένων και με τη βοήθεια των γενικευμένων σειρών Fourier έχουμε:

$$\zeta(x,y,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i(t) f_i(x,y) \quad (52)$$

Όμως η βάση $\{f_i(x, y)\}$ δεν είναι απαραίτητο να συμπίπτει με τις φυσικές ιδιομορφές, όπως ισχύει για τη γραμμική θεώρηση ενώ επιπροσθέτως πρέπει να διατηρεί την ισχύ της η αρχή διατήρησης της μάζας του υγρού, δηλαδή να ισχύει η σχέση $\int_{\Sigma_0} f_i(x,y)dxdy = 0$, όπου Σ_0 είναι η μέση ελεύθερη επιφάνεια. Ωστόσο η αναπαράσταση (52) πρέπει να μπορεί να αναπαριστά κάθε στιγμή την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού. Οι εξαρτώμενες από τον χρόνο συναρτήσεις $\{\beta_i\}$ ερμηνεύονται ως γενικευμένες συντεταγμένες (modal εξισώσεις).

Η αναπαράσταση του δυναμικού ταχύτητας Φ(x,y,z,t) θα γίνει με τη βοήθεια γενικευμένων σειρών Fourier ως μια γενίκευση της αναπαράστασης που χρησιμοποιήθηκε στην γραμμική θεώρηση:

$$\Phi(x,y,z,t) = u_0(t)r + \omega(t)\Omega(x,y,z) + \sum_{n=1}^{\infty} R_n(t)\,\varphi_n(x,y,z) \qquad (53)$$

όπου η βάση $\{\varphi_n\}$ δεν σχετίζεται κατ' ανάγκη με τις φυσικές ιδιομορφές. Το δυναμικό Stokes – Joukowski ($\Omega_1(x, y, z,t)$, $\Omega_2(x, y, z,t)$, $\Omega_3(x, y, z, t)$) σε αυτήν την περίπτωση είναι εξαρτώμενο από τις χωρικές και χρονικές συντεταγμένες και ικανοποιεί το σύστημα εξισώσεων:

$$\nabla^2\Omega = 0, \quad \sigma\tau o\ \ Q(t), \quad \frac{\partial\Omega_1}{\partial n} = yn_3 - zn_2, \quad \frac{\partial\Omega_2}{\partial n} = zn_1 - xn_3, \qquad (54)$$
$$\frac{\partial\Omega_3}{\partial n} = xn_2 - yn_1 \quad \sigma\tau o\ S(t) \cup \Sigma(t)$$

Το σύνολο συναρτήσεων $\{\Phi_n(x,y,z)\}$ της αναπαράστασης (53) στις περισσότερες περιπτώσεις, επιλέγεται να συμπίπτει με τις φυσικές ιδιομορφές κάτι το οποίο σημαίνει ότι η (53) αυτομάτως ικανοποιεί την εξίσωση Laplace και όλες τις συνθήκες του μαθηματικού μοντέλου εκτός από την δυναμική και κινητική της ελεύθερης επιφάνειας.

Με τη βοήθεια της αρχής της ελάχιστης δράσης Bateman-Luke θα εξάγουμε το απειροδιάστατο σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων (modal εξισώσεις) που συσχετίζουν τα β_i και R_n.

Η αρχή Bateman-Luke

Οι Faltinsen και Timokha έδειξαν, το 2009, ότι οι ομαλές λύσεις του προβλήματος ελεύθερου ορίου που αποτελεί το sloshing σχετίζονται με τα ακρότατα της συνάρτησης της δράσης, η οποία ορίζεται ως:

$$S(\zeta) = \int_{t_1}^{t_2} = 0 \qquad (55)$$

όπου

$$L = \int_{Q(t)} (p - p_0)\, dQ \qquad (56)$$

Με $p - p_0$ τη διαφορά της εξίσωσης Bernulli.
Κατά την αρχή Bateman-Luke οι συναρτήσεις Φ και ζ δεν εκφράζουν απαραιτήτως το δυναμικό και την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας, αντιστοίχως, εφόσον είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, όπως επίσης, η διαφορά $p - p_0$ δεν εκφράζει πλέον, απαραιτήτως, την πίεση του υγρού σε σχέση με την ατμοσφαιρική. Οι Bateman και Luke απέδειξαν ότι, αν ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση δράσης, εξάγονται όλες οι οριακές συνθήκες και μαθηματικές σχέσεις που ορίζουν το sloshing και, συνεπώς, οι συναρτήσεις Φ και ζ αποκτούν και πάλι την αρχική τους σημασία.

Με αντικατάσταση των Φ,ζ στη συνάρτηση Lagrange και με χρήση της αρχής Bateman-Luke αλλά και του θεωρήματος Gauss,προκύπτουν οι τροπικές εξισώσεις:

$$\sum_i \frac{\partial D_n}{\partial \beta_i} \dot{\beta}_i - \sum_k R_k D_{nk} = 0, \qquad n = 1,2 \ldots \tag{57}$$

$$\sum_n \frac{\partial D_n}{\partial \beta_i} \dot{R}_n + \frac{1}{2} \sum_{n,k} \frac{\partial D_{nk}}{\partial \beta_i} R_n R_k + \dot{\omega}_1 \frac{\partial l_{1\omega}}{\partial \beta_i} + \dot{\omega}_2 \frac{\partial l_{2\omega}}{\partial \beta_i} + \dot{\omega}_3 \frac{\partial l_{3\omega}}{\partial \beta_i} + \omega_1 \frac{\partial l_{1\omega t}}{\partial \beta_i} + \omega_2 \frac{\partial l_{2\omega t}}{\partial \beta_i} + \omega_3 \frac{\partial l_{3\omega t}}{\partial \beta_i} - \frac{d}{dx}\left(\omega_1 \frac{\partial l_{1\omega t}}{\partial \beta_i} + \omega_2 \frac{\partial l_{2\omega t}}{\partial \beta_i} + \omega_3 \frac{\partial l_{3\omega t}}{\partial \beta_i}\right) + (\dot{u}_{01} - g_1 + \omega_2 u_{03} - \omega_3 u_{02}) \frac{\partial l_1}{\partial \beta_i} + (\dot{u}_{02} - g_2 + \omega_3 u_{01} - \omega_1 u_{03}) \frac{\partial l_2}{\partial \beta_i} + (\dot{u}_{03} - g_3 + \omega_1 u_{02} - \omega_2 u_{01}) \frac{\partial l_3}{\partial \beta_i} - \frac{1}{2} \omega_1^2 \frac{\partial J_{11}^1}{\partial \beta_i} - \frac{1}{2} \omega_2^2 \frac{\partial J_{22}^1}{\partial \beta_i} - \frac{1}{2} \omega_3^2 \frac{\partial J_{33}^1}{\partial \beta_i} - \omega_1 \omega_2 \frac{\partial J_{12}^1}{\partial \beta_i} - \omega_1 \omega_3 \frac{\partial J_{13}^1}{\partial \beta_i} - \omega_2 \omega_3 \frac{\partial J_{23}^1}{\partial \beta_i} = 0 \qquad i \geq 1 \tag{58}$$

Όπου

$$D_n = \rho \int_{Q(t)} \varphi_n \, dQ$$

$$D_{nk} = D_{kn} = \rho \int_{Q(t)} (\nabla \varphi_n * \nabla \varphi_k) \, dQ$$

$$J_{11}^1 = \rho \int_{S(t)+\Sigma(t)} \Omega_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial n} dS$$

$$J_{22}^1 = \rho \int_{S(t)+\Sigma(t)} \Omega_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial n} dS$$

$$J_{33}^1 = \rho \int_{S(t)+\Sigma(t)} \Omega_3 \frac{\partial \Omega_3}{\partial n} dS \tag{59}$$

$$J_{12}^1 = \rho \int_{S(t)+\Sigma(t)} \Omega_1 \frac{\partial \Omega_2}{\partial n} dS$$

$$J_{13}^1 = \rho \int_{S(t)+\Sigma(t)} \Omega_1 \frac{\partial \Omega_3}{\partial n} dS$$

$$J_{23}^1 = \rho \int_{S(t)+\Sigma(t)} \Omega_2 \frac{\partial \Omega_3}{\partial n} dS$$

Σε ειδικές περιπτώσεις όπως στην περίπτωση πεπερασμένου όγκου, το σύστημα μετατρέπεται σε γραμμικό σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων του R_k της μορφής:

$$\sum_k R_k D_{nk}(\beta_i) = \frac{d}{dx} D_n \beta_i \tag{60}$$

Πλεονεκτήματα και περιορισμοί της μη γραμμικής τροπικής ανάλυσης

Το σύστημα των εξισώσεων (57) και (58) συνδέει μη γραμμικά τις μεταβλητές $\beta_i(t)$ και $R_n(t)$ και έχει προκύψει χωρίς υποθέσεις και περιορισμούς σχετικά με το μέγεθος των κυμάτων της επιφάνειας και του βάθους της δεξαμενής. Έτσι το σύστημα αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει πολλές διαφορετικές παραλλαγές του προβλήματος της αλληλεπίδρασης υγρού – δεξαμενής.

Η ανάλυση αυτή όμως απαιτεί και κάποιους περιορισμούς για να παράξει αξιόπιστα αποτελέσματα, που σχετίζονται κυρίως με τους περιορισμούς της τροπικής αναπαράστασης (52) και (53).

Γεωμετρικοί περιορισμοί Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ του υγρού και της οροφής της δεξαμενής καθώς και ότι δεν μπορούν να υπάρξουν overturning κύματα ενώ σε κάθε περίπτωση ο πυθμένας της δεξαμενής πρέπει να είναι βρεγμένος. Σε περίπτωση αλληλεπίδρασης οροφής -υγρού πρέπει η μέθοδος να συνδυαστεί με το λεγόμενο slamming μοντέλο (Faltinsen, 2008). Επίσης αν τα τοιχώματα δεν είναι παράλληλα με τον άξονα z απαιτείται άλλη παραμετροποίηση για την επίλυση του προβλήματος. (Gavriliuk et al, 2005).

Συναρτησιακοί περιορισμοί Όπως έχουμε ήδη δει αναλυτικά η τροπική αναπαράσταση (52) και (53) προϋποθέτει τα σύνολα συναρτήσεων $\{f_i\}$ και $\{\varphi_n\}$ πλήρη στην ελεύθερη επιφάνεια Σ και στον συνολικό όγκο Q του υγρού, αντίστοιχα, για κάθε χρονική στιγμή, πράγμα εξαιρετικά δύσκολο. Γι'αυτό το λόγο συνήθως επιλέγεται ως βάση το σύνολο των γραμμικών φυσικών κυματισμών. Το μειονέκτημα αυτής της επιλογής είναι το γεγονός ότι οι φυσικοί κυματισμοί θεωρητικά ορίζονται μόνο για την αδιατάραχη περίπτωση. Έτσι εισάγουμε σφάλμα στους υπολογισμούς καθώς η χρησιμοποιούμενη βάση δεν είναι πλήρης για κάθε τυχαία χρονική στιγμή στο σύνολο του όγκου Q (Timokha, 2002).

Αριθμητικοί περιορισμοί Για τις περισσότερες περιπτώσεις δεξαμενών πρέπει να χρησιμοποιηθούν αριθμητικές μέθοδοι για την εύρεση των φυσικών κυματισμών καθώς και των αντίστοιχων φυσικών συχνοτήτων (Gavrilyuk et al, 2006). Επομένως τίθεται θέμα ακρίβειας ανάλυσης του προβλήματος. Παράλληλα, επειδή οι τροπικές εξισώσεις είναι αρκετά πολύπλοκες εγείρεται το ερώτημα εάν ένα τέτοιο σύστημα λύνεται χωρίς πολλές απλοποιήσεις και σε ρεαλιστικό χρόνο με τη χρήση αριθμητικών μεθόδων.

4.2 Το προσαρμοστικό (adaptive) μοντέλο

Η τροπική (modal) ανάλυση, για την περιγραφή του sloshing σε περιπτώσεις κρίσιμου βάθους, μεγάλου πλάτους διέγερσης ή δευτερεύοντος συντονισμού δεν δίνει αποτελέσματα. Γι' αυτό το λόγο ήταν απαραίτητο να αναπτυχθεί ένα μοντέλο που να καλύπτει και τις παραπάνω περιπτώσεις. Έτσι το 2002 παρουσιάστηκε από τους Faltinsen και Timokha μια απειροδιάστατη τροπική μοντελοποίηση 'πολυωνυμικής κατασκευής' για τα $\beta_i(t), R_i(t)$ και τις χρονικές παραγώγους τους. Τα μοντέλα αυτά δίνουν αποτελέσματα τόσο για πεπερασμένο όσο και για ενδιάμεσο ή μικρό βάθος, όπου η τελευταία μέθοδος δεν μπορούσε να εφαρμοστεί.

Σημαντικό προτέρημα της προσαρμοστικής προσέγγισης είναι, όπως δηλώνει και το όνομά της, η εύκολη προσαρμογή του μοντέλου αναλόγως με την κατάσταση που θέλουμε να μελετήσουμε, όπως επιλογή της τάξης του συστήματος που θα χρησιμοποιήσουμε αναλόγως με το πλάτος διέγερσης, τη συχνότητα, το βάθος κτλ.

4.2.1 Το n-διάστατο σύστημα

Οι φυσικοί κυματισμοί, σε αδιαστατοποιημένη μορφή, αναπαρίστανται με τις σχέσεις:

$$\overline{\varphi_n} = \overline{f_n}(y)\frac{cosh\left(\pi * n\left(z+\bar{h}\right)\right)}{cosh(\pi * n * h)}$$
$$\overline{f_n} = cos\,h\left(\pi * n\left(y+\frac{1}{2}\right)\right) \tag{61}$$

Όπου $\bar{h} = h/l$ είναι το κανονικοποιημένο βάθος του υγρού.
Το τροπικό σύστημα εξισώσεων για διδιάστατη περίπτωση δεξαμενής υπό οριζόντια διέγερση προκύπτει ότι έχει τη μορφή:

$$\sum_n \dot{R_n}\frac{\partial D_n}{\partial \beta_\iota} + \frac{1}{2}\sum_{n,k} R_n\, R_k \frac{\partial D_{nk}}{\partial \beta_\iota} + \dot{\omega}\frac{\partial l_{1\omega}}{\partial \beta_i} + \omega\frac{\partial l_{1\omega t}}{\partial \beta_i} - \frac{d}{dt}\left(\omega\frac{\partial l_{1\omega t}}{\partial \beta_i}\right) + (\dot{u_{02}} - g_2)\lambda_{2i} - g_3\beta_i\lambda_{3i} = 0 \tag{62}$$

Η εξαγωγή του πολυωνυμικού συστήματος βασίζεται στο ανάπτυγμα Taylor των κανονικοποιημένων ως προς το πλάτος και την πυκνότητα ολοκληρωμάτων D_n και $D_n k$ αντιστοίχως.

$$D_n = \frac{1}{2}\left(\beta_n + \frac{1}{2}\widetilde{E_n}\Lambda^{(1)}_{nij}\beta^i\beta^j + \frac{1}{3}C_{nn}\Lambda^{(2)}_{nijk}\beta^i\beta^j\beta^k\right) \tag{63}$$

Όπου $$\widetilde{E_n} = \tfrac{1}{2}\pi * ntanh\left(\pi * n\bar{h}\right), C_{nn} = \tfrac{1}{8}\,\pi^2 nk \tag{64}$$

Και

$$\Lambda^{(0)}_{ij} = \begin{cases} 2 & i = j = 0 \\ 1 & i = j \neq 0 \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$
$$\Lambda^{(1)}_{nkj} = \Lambda^{(0)}_{ln-klj} + \Lambda^{(0)}_{ln+klj} \tag{65}$$
$$\Lambda^{(2)}_{nkjp} = \Lambda^{(1)}_{ln-kljp} + \Lambda^{(1)}_{ln+kljp}$$

Προκύπτει επίσης:

$$\dot{D_n} = \frac{1}{2}\left(\dot{\beta_n} + \widetilde{E_n}\Lambda^{(1)}_{nij}\dot{\beta}^\iota\beta^j + C_{nn}\Lambda^{(2)}_{nijk}\dot{\beta}^\iota\beta^j\beta^k\right) \tag{66}$$

$$\frac{\partial D_n}{\partial \beta_m u} = \frac{1}{2}(\delta_m u + \widetilde{E_n}\Lambda^{(1)}_{ni\mu}\beta^\iota + C_{nn}\Lambda^{(2)}_{nij\mu}\beta^i\beta^j \tag{67}$$

Για το D_{nk} ισχύει:

$$D_{nk} = \frac{1}{2}(\delta_{nk} 2\widetilde{E^k} + \Pi^{(1)}_{nk,i}\beta^i + \Pi^{(2)}_{nk,ij}\beta^i\beta^j \tag{68}$$

Όπου το κόμμα χωρίζει συμμετρικά ζεύγη ακεραίων τιμών. Οι τελεστές Π δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{gathered}\Pi^{(1)}_{nk,i} = 4C_{nk}\Lambda^{(-1)}_{nk,i} + 2\widetilde{E_n}\widetilde{E_k}\Lambda^{(1)}_{nki} \\ \Pi^{(2)}_{nk,ij} = 2C_{nk}\left(\widetilde{E_n} + \widetilde{E_k}\right)\Lambda^{(-2)}_{nk,ij} + 2(C_{kk}\widetilde{E_n} + C_{kk}\widetilde{E_k})\Lambda^{(2)}_{nkij}\end{gathered} \tag{69}$$

Κατά τα γνωστά ισχύει:

$$\begin{gathered}\Lambda^{(-1)}_{n,ij} = \Lambda^{(0)}_{ln-kli} + \Lambda^{(0)}_{ln+kli} \\ \Lambda^{(-2)}_{nk,ij} = \Lambda^{(1)}_{ln-klij} + \Lambda^{(1)}_{ln+klij}\end{gathered} \tag{70}$$

Οι μερικές παράγωγοι του D_{nk} ως προς το β_μ έχουν τη μορφή:

$$\frac{\partial D_{nk}}{\partial \beta_\mu} = \frac{1}{2}\left(\Pi^{(1)}_{nk,\mu} + \Pi^{(2)}_{nk,i\mu}\beta^i\right) \tag{71}$$

Θεωρώντας το σύστημα γραμμικό αλγεβρικό ισχύει:

$$D_{nk}R_k = \dot{D_n} \tag{72}$$

Στο ασυμπτωτικό όριο $\beta_i \to 0$, τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα O(1) για πεπερασμένο βάθος:

$$D_{nn} = \widetilde{E_n} = \frac{1}{2}\pi * ntanh\left(\pi n\tilde{h}\right) \tag{73}$$

Ενώ τα μη διαγώνια ατοιχεία τείνουν στο 0. Το γεγονός αυτό καθιστά δυνατή μια ασυμπτωτική λύση της γραμμικής αλγεβρικής εξίσωσης (72) ως προς το R_k, το οποίο τελικά δίδεται από την πολυωνυμική έκφραση:

$$R_k = \frac{\dot{\beta}^k}{2\widetilde{E_k}} + V^{2,k}_{i,j}\dot{\beta}^\imath\beta^j + V^{3,k}_{i,j,p}\dot{\beta}^\imath\beta^j\beta^p \tag{74}$$

Οι τελεστές V δεν παρουσιάζουν συμμετρία μεταξύ των i,j,p και το κόμμα ανάμεσα στους δείκτες χρησιμοποιείται για να εκφράσει αυτή ακριβώς την έλλειψη συμμετρίας.Οι παράγοντες αυτοί δίδονται από τις σχέσεις:

$$\begin{gathered}V^{2,n}_{a,b} = \frac{1}{2}\Lambda^{(1)}_{nab} - (4\widetilde{E_n}\widetilde{E_a})^{-1}\Pi^{(1)}_{na,b} \\ V^{3,n}_{a,b,c} = (2\widetilde{E_n})^{-1}C_{nn}\Lambda^{(2)}_{nabc} - (4\widetilde{E_n}\widetilde{E_a})^{-1}\Pi^{(2)}_{na,bc} - (2\widetilde{E_n})^{-1}V^{2,k}_{a,b}\Pi^{(1)}_{nk,c}\end{gathered} \tag{75}$$

Η παράγωγος του R_k ως προς το χρόνο είναι:

$$\dot{R}_k = \frac{\ddot{\beta}^k}{2\widetilde{E_k}} + \ddot{\beta}^{\iota}\left(V_{i,j}^{2,k}\beta^j + V_{i,j,p}^{3,k}\beta^j\beta^p\right) + \dot{\beta}^{\iota}\dot{\beta}^{\jmath}\left(V_{i,j}^{2,k} + \bar{V}_{i,j,p}^{3,k}\beta^p\right) \tag{76}$$

Όπου

$$\bar{V}_{i,j,p}^{3,k} = \frac{1}{2}\left(V_{i,j,p}^{3,k} + V_{i,p,j}^{3,k}\right) \tag{77}$$

Με αντικατάσταση των παραπάνω στη σχέση (62), παίρνουμε την τελική απειροδιάστατη μορφή για την πολυδιάστατη τροπική αναπαράσταση του sloshing στην περίπτωση πεπερασμένου βάθους και οριζόντιας διέγερσης:

$$\ddot{\beta}^a\left(\delta_{a\mu} + d_{a,b}^{1,\mu}\beta^b + d_{a,b,c}^{2,\mu}\beta^b\beta^c\right) + \dot{\beta}^{\alpha}\dot{\beta}^b\left(t_{a,b}^{0,\mu} + t_{a,b,c}^{1,\mu}\beta^c\right) + \sigma_\mu^2\beta_\mu = \widetilde{K_\mu}, \mu > 1 \tag{78}$$

Όπου οι άγνωστοι τελεστές δίδονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} d_{a,b}^{1,\mu} &= 2\widetilde{E_\mu}\left(\frac{1}{2}\Lambda_{ab\mu}^{(1)} + V_{a,b}^{2,\mu}\right) \\ d_{a,b,c}^{2,\mu} &= 2\widetilde{E_\mu}\left((2\widetilde{E_\alpha})^{-1}C_{a\alpha}\Lambda_{abc\mu}^{(2)} + \widetilde{E_n}\Lambda_{nc\mu}^{(1)}V_{a,b}^{2,n} + V_{a,b,c}^{3,\mu}\right. \end{aligned} \tag{79}$$

$$t_{a,b}^{0,\mu} = 2\widetilde{E_\mu}(V_{a,b}^{2,\mu} + (8\widetilde{E_\alpha}\widetilde{E_b})^{-1}\Pi_{ab,\mu}^{(1)}$$

$$t_{a,b,c}^{1,\mu} = 2\widetilde{E_\mu}(2V_{a,b,c}^{3,\mu} + V_{a,b}^{2,\mu}\widetilde{E_n}\Lambda_{ncm} + (4\widetilde{E_a}\widetilde{E_b})^{-1}\Pi_{ab,\mu c}^{(1)} + (2\widetilde{E_a})^{-1}V_{b,c}^{2,n}\Pi_{an,\mu}^{(1)} \tag{80}$$

Το σύστημα (78) τροποποιήθηκε από τους Faltinsen και Timokha ώστε να μπορεί να περιγράψει διέγερση σε οποιοδήποτε διεύθυνση αλλά και περιστροφικές κινήσεις. Το μη γραμμικό τροπικό σύστημα 5^{ης} τάξης ως προς β_i για κατακόρυφη διέγερση, όπου είναι εμφανές πως μπορεί να παρουσιαστεί παραμετρική αστάθεια είναι το εξής:

$$\begin{aligned} &\ddot{\beta}^a\left(\delta_{a\mu} + d_{a,b}^{1,\mu}\beta^b + d_{a,b,c}^{2,\mu}\beta^b\beta^c + d_{a,b,c,d}^{3,\mu}\beta^b\beta^c\beta^c + d_{a,b,c,d,f}^{4,\mu}\beta^b\beta^c\beta^d\beta^f\right) \\ &\quad + \dot{\beta}^{\alpha}\dot{\beta}^b\left(t_{a,b}^{0,\mu} + t_{a,b,c}^{1,\mu}\beta^c + t_{a,b,c,d}^{2,\mu}\beta^c\beta^d + t_{a,b,c,d,f}^{3,\mu}\beta^c\beta^d\beta^f\right) \\ &\quad + \sigma_\mu^2(\ddot{n}_3 l^{-1}\pi tanh(\pi\mu\bar{h})\beta_\mu = 0 \end{aligned} \tag{81}$$

Όπως αναφέρεται στο βιβλίο του Faltinsen ‘Sloshing’ χρησιμοποιείται το ίδιο σχήμα και για την τρισδιάστατη περίπτωση με μόνη διαφορά ότι κάθε δείκτης αντικαθίσταται από ένα ζευγάρι δεικτών (i,j). Έτσι η σχέση (81), κρατώντας τους όρους μέχρι και δεύτερης τάξης, γίνεται:

$$\begin{aligned} &\beta^{\ddot{a},b}\left(\delta_{ia}\delta_{jb} + d_{(a,b),(c,d)}^{1,(i,j)}\beta^{c,d} + d_{(a,b),(c,d),(e,f)}^{2,(i,j)}\beta^{c,d}\beta^{e,f}\right) \\ &+ \beta^{\dot{\alpha},b}\beta^{\dot{c},d}\left(t_{(a,b),(c,d)}^{0,(i,j)} + t_{(a,b),(c,d),(e,f)}^{1,(i,j)}\beta^{e,f}\right) \\ &+ \sigma_{i,j}^2(\ddot{n}_3 l^{-1}\pi\, tanh\left(\pi\mu\bar{h}\right))\beta_{i,j} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{82}$$

Σημειώνουμε σε αυτό το σημείο ότι οι όροι της μορφής β^n της προηγούμενης εξίσωσης αποτελούν τελεστές αθροίσματος στο διάστημα από 1 έως n.
Για να γίνει πιο κατανοητή, η σχέση (82) γράφεται σε μορφή αθροισμάτων ως εξής:

$$\sum_{\substack{\alpha,b=0\\ \alpha+b\neq 0}}^{\infty} \beta^{\ddot{a},b}\,[\delta_{ia}\delta_{jb} + \sum_{\substack{c,d=0\\ c+d\neq 0}}^{\infty} d^{1,(i,j)}_{(a,b),(c,d)}\beta^{c,d} + \sum_{\substack{c,d=0\\ c+d\neq 0}}^{\infty}\sum_{\substack{e,f=0\\ e+f\neq 0}}^{\infty} d^{2,(i,j)}_{(a,b),(c,d),(e,f)}\beta^{c,d}\beta^{e,f}]$$
$$+ \sum_{\substack{\alpha,b=0\\ \alpha+b\neq 0}}^{\infty}\sum_{\substack{c,d=0\\ c+d\neq 0}}^{\infty} \beta^{\dot{\alpha},b}\beta^{\dot{c},d}\left[t^{0,(i,j)}_{(a,b),(c,d)} + t^{1,(i,j)}_{(a,b),(c,d),(e,f)}\beta^{e,f}\right]$$
$$+ \sigma^2_{i,j}(\ddot{n}_3 l^{-1}\pi\tanh(\pi\mu\bar{h}))\beta_{i,j} = 0 \qquad i+j \geq 1 \tag{83}$$

Οι άγνωστοι τελεστές δίνονται από τις σχέσεις:

$$d^{1,(i,j)}_{(a,b),(c,d)} = E^{i,j}V^{2,(i,j)}_{(a,b),(c,d)} + E_{i,j}\frac{\Lambda^{(1)}_{aci}\Lambda^{(1)}_{bdj}}{\Lambda^{(0)}_{ii}\Lambda^{(0)}_{jj}}$$
$$d^{2,(i,j)}_{(a,b),(c,d),(e,f)} = E^{i,j}\bar{V}^{3,(i,j)}_{(a,b),(c,d),(e,f)} + E_{n,k}E_{i,j}\frac{\Lambda^{(1)}_{nei}\Lambda^{(1)}_{kfj}}{\Lambda^{(0)}_{ii}\Lambda^{(0)}_{jj}}V^{2,(n,k)}_{(a,b),(c,d)} + \frac{D_{a,b}E_{i,j}\Lambda^{(2)}_{acei}\Lambda^{(2)}_{bdjf}}{E_{a,b}\Lambda^{(0)}_{ii}\Lambda^{(0)}_{jj}} \tag{84}$$

$$t^{0,(i,j)}_{(a,b),(c,d)} = E^{i,j}V^{2,(i,j)}_{(a,b),(c,d)} + \frac{rE^{i,j}\Pi^{(1)}_{(a,b)(c,d),(i,j)}}{2E_{a,b}E_{c,d}\Lambda^{(0)}_{ii}\Lambda^{(0)}_{jj}}$$
$$t^{1,(i,j)}_{(a,b),(c,d),(e,f)} = 2E^{i,j}\bar{V}^{3,(i,j)}_{(a,b),(c,d),(e,f)} + E_{n,k}E_{i,j}\frac{\Lambda^{(1)}_{nei}\Lambda^{(1)}_{kfj}}{\Lambda^{(0)}_{ii}\Lambda^{(0)}_{jj}}V^{2,(n,k)}_{(a,b),(c,d)} + \frac{rE^{i,j}\Pi^{(2)}_{(a,b)(c,d),(i,j),(e,f)}}{E_{a,b}E_{c,d}\Lambda^{(0)}_{ii}\Lambda^{(0)}_{jj}} + \frac{rV^{2,(n,k)}_{(a,b),(e,f)}E^{i,j}\Pi^{(1)}_{(n,k)(c,d),(i,j)}}{2E_{c,d}\Lambda^{(0)}_{ii}\Lambda^{(0)}_{jj}} + \frac{rV^{2,(n,k)}_{(a,b),(e,f)}E^{i,j}\Pi^{(1)}_{(n,k)(a,b),(i,j)}}{2E_{a,b}\Lambda^{(0)}_{ii}\Lambda^{(0)}_{jj}} \tag{85}$$

4.3 Παραμετρική αστάθεια

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, όπου εξετάστηκε η περίπτωση της γραμμικής τροπικής ανάλυσης, είχε δειχθεί ότι δεν είναι δυνατό να δημιουργηθεί κλυδασμός στην ελεύθερη επιφάνεια υγρού εντός μιας δεξαμενής, ως συνέπεια κατακόρυφης διέγερσης της δεξαμενής. Παρ'όλα αυτά, πειραματικές παρατηρήσεις (Faraday (1831), Rayleigh (1983)) έχουν δείξει πως για κάποιες συχνότητες διέγερσης είναι δυνατό να προκληθεί υδροδυναμική αστάθεια της ελεύθερης επιφάνειας με

αποτέλεσμα την εμφάνιση κλυδασμού. Συμπεραίνουμε λοιπόν έτσι ότι η εμφάνιση του κλυδασμού στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού εντός δεξαμενής που διεγείρεται κατακόρυφα, δεν μπορεί να περιγραφεί μέσω της γραμμικής τροπικής ανάλυσης.

Επειδή ο Faraday (1831) ήταν ο πρώτος που παρατήρησε αυτού του είδους τις αστάθειες, τα επαγόμενα κύματα ονομάζονται κύματα Faraday. Άλλοι ερευνητές που ασχολήθηκαν με το φαινόμενο είναι οι Rayleigh (1983), Ibrahim (2005, Chap. 6), Nevolin (1984) και Perlin & Schwarz (2000).

4.3.1 Εξαγωγή δυναμικού συστήματος

Πριν από τη μελέτη της δυναμικής του συμπεριφοράς, να εισάγουμε έναν συντελεστή απόσβεσης. Με αυτόν τον τρόπο άρουμε τον περιορισμό που είχαμε αρχικά για το ιδανικό υγρό και εξετάζουμε περισσότερο ρεαλιστικά τα υγρά. Όπως αναφέρεται και από ερευνητές όπως οι Keulegan (1959), Faltinsen & Timokha (2002) και Faltinsen et al (2005 a, 2005 b,2006 b), η απόσβεση σε μια ορθογωνική δεξαμενή με υγρό που υπακούει τους περιορισμούς που έχουμε θέσει οφείλεται τόσο στην αλληλεπίδραση του εξωτερικού στρώματος του υγρού με τα τοιχώματα της δεξαμενής όσο και στις διάφορων ειδών ατέλειες που εμφανίζονται κατά τη διάρκεια της κίνησης, όπως για παράδειγμα φυσαλίδες. Επειδή ο αναλυτικός υπολογισμός του συντελεστή απόσβεσης είναι πολύπλοκος (‘Sloshing’, Faltinsen & Timokha, Cambridge 2009), χωρίς να χάνεται η γενικότητα, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένας συντελεστής απόσβεσης ξ_m ο οποίος θα εισαχθεί στο τροπικό σύστημα με την μορφή του όρου $2\xi\sigma_{i,j}\dot{\beta}_{i,j}$. Έχει δειχτεί ότι όταν ο συντελεστής απόσβεσης είναι μικρός προκαλείται ένα πολύ μικρό σφάλμα υπολογισμού το οποίο σε γενικές γραμμές είναι αποδεκτό.

Θεωρώντας πολύ μικρές αρχικές διαταραχές των γενικευμένων συντεταγμένων β_m της ελεύθερης επιφάνειας, η εξίσωση (83) μπορεί να γραμμικοποιηθεί. Κατά τη διάρκεια της γραμμμικοποίησης θεωρούμε τον όρο $\ddot{n}_3 l^{-1}\pi\tanh(\pi\mu\bar{h})$ ως μια χρονοεξαρτώμενη σταθερά και έτσι δεν εμπλέκεται ο όρος n_3 , ο οποίος εκφράζει την κατακόρυφη διέγερση, στη διαδικασία γραμμικοποίησης. Η προηγούμενη επεξεργασία οδηγεί στο σύστημα:

$$\sum_{\substack{\alpha,b=0\\ \alpha+b\neq 0}}^{\infty} \ddot{\beta}^{\alpha,b}\left[\delta_{ia}\delta_{jb} + \sum_{\substack{c,d=0\\ c+d\neq 0}}^{\infty} d^{1,(i,j)}_{(a,b),(c,d)}\beta^{c,d} + \sum_{\substack{c,d=0\\ c+d\neq 0}}^{\infty}\sum_{\substack{e,f=0\\ e+f\neq 0}}^{\infty} d^{2,(i,j)}_{(a,b),(c,d),(e,f)}\beta^{c,d}\beta^{e,f}\right]$$
$$+ \sum_{\substack{\alpha,b=0\\ \alpha+b\neq 0}}^{\infty}\sum_{\substack{c,d=0\\ c+d\neq 0}}^{\infty} \dot{\beta}^{\alpha,b}\dot{\beta}^{c,d}\left[t^{0,(i,j)}_{(a,b),(c,d)} + t^{1,(i,j)}_{(a,b),(c,d),(e,f)}\beta^{e,f}\right]$$
$$+ \sigma^2_{i,j}\left(\frac{\ddot{n}_3}{g}+1\right)\beta_{i,j} = 0 \qquad i+j\geq 1 \tag{86}$$

Επειδή όμως ισχύει

$$n_3 = n_{3a}\cos(\sigma t) \Longrightarrow \ddot{n}_3 = -n_{3a}\sigma^2\cos(\sigma t)$$

Έχουμε

$$\sum_{\substack{\alpha,b=0\\ \alpha+b\neq 0}}^{\infty} \beta^{\ddot{\alpha},b}\,[\delta_{ia}\delta_{jb} + \sum_{\substack{c,d=0\\ c+d\neq 0}}^{\infty} d^{1,(i,j)}_{(a,b),(c,d)}\beta^{c,d} + \sum_{\substack{c,d=0\\ c+d\neq 0}}^{\infty}\sum_{\substack{e,f=0\\ e+f\neq 0}}^{\infty} d^{2,(i,j)}_{(a,b),(c,d),(e,f)}\beta^{c,d}\beta^{e,f}]$$
$$+ \sum_{\substack{\alpha,b=0\\ \alpha+b\neq 0}}^{\infty}\sum_{\substack{c,d=0\\ c+d\neq 0}}^{\infty} \beta^{\dot{\alpha},b}\beta^{\dot{c},d}\left[t^{0,(i,j)}_{(a,b),(c,d)} + t^{1,(i,j)}_{(a,b),(c,d),(e,f)}\beta^{e,f}\right]$$
$$+ \sigma^2_{i,j}\left(1 - \frac{n_{3a}}{g}\sigma^2\cos(\sigma t)\right)\beta_{i,j} = 0 \qquad i+j \geq 1 \tag{87}$$

Κρατώντας τους όρους μέχρι O($\varepsilon^{2/3}$) τάξης όπου

$$\beta_{0,1}\sim\beta_{1,0} = O\left(\varepsilon^{1/3}\right)$$
$$\beta_{0,2}\sim\beta_{2,0}\sim\beta_{1,1} = O\left(\varepsilon^{2/3}\right)$$
$$\beta_{i,j} \leq O(\varepsilon)$$

Έχουμε τις παρακάτω πέντε εξισώσεις:

$$\ddot{\beta}_{1,0} + \sigma^2_{1,0}\beta_{1,0}\left(1 - \frac{n_{3a}}{g}\sigma^2\cos(\sigma t)\right) + d_1\left(\ddot{\beta}_{1,0}\beta_{2,0} + \dot{\beta}_{1,0}\dot{\beta}_{2,0}\right)$$
$$+ d_2\left(\ddot{\beta}_{1,0}\beta^2_{1,0} + \dot{\beta}^2_{1,0}\beta_{1,0}\right) + d_3\ddot{\beta}_{2,0}\beta_{1,0} + d_6\ddot{\beta}_{1,0}\beta^2_{0,1}$$
$$+ \ddot{\beta}_{0,1}\left(d_7\beta_{1,1} + d_8\beta_{1,0}\beta_{0,1}\right) + d_9\ddot{\beta}_{1,1}\beta_{0,1} + d_{10}\dot{\beta}^2_{0,1}\beta_{1,0}$$
$$+ d_{11}\dot{\beta}_{1,0}\dot{\beta}_{0,1}\beta_{0,1} + d_{12}\dot{\beta}_{0,1}\dot{\beta}_{1,1} = 0 \tag{88}$$

$$\ddot{\beta}_{0,1} + \sigma^2_{0,1}\beta_{0,1}\left(1 - \frac{n_{3a}}{g}\sigma^2\cos(\sigma t)\right) + \overline{d_1}\left(\ddot{\beta}_{0,1}\beta_{0,2} + \dot{\beta}_{0,1}\dot{\beta}_{0,2}\right)$$
$$+ \overline{d_2}\left(\ddot{\beta}_{0,1}\beta^2_{0,1} + \dot{\beta}^2_{0,1}\beta_{0,1}\right) + \overline{d_3}\ddot{\beta}_{0,2}\beta_{0,1} + \overline{d_6}\ddot{\beta}_{0,1}\beta^2_{1,0}$$
$$+ \ddot{\beta}_{1,0}\left(\overline{d_7}\beta_{1,1} + \overline{d_8}\beta_{1,0}\beta_{0,1}\right) + \overline{d_9}\ddot{\beta}_{1,1}\beta_{1,0} + \overline{d_{10}}\dot{\beta}^2_{1,0}\beta_{0,1}$$
$$+ \overline{d_{11}}\dot{\beta}_{1,0}\dot{\beta}_{0,1}\beta_{1,0} + \overline{d_{12}}\dot{\beta}_{1,0}\dot{\beta}_{1,1} = 0 \tag{89}$$

$$\ddot{\beta}_{2,0} + \sigma^2_{2,0}\beta_{2,0}\left(1 - \frac{n_{3a}}{g}\sigma^2\cos(\sigma t)\right) + d_4\ddot{\beta}_{1,0}\beta_{1,0} + d_5\dot{\beta}^2_{1,0} = 0 \tag{90}$$

$$\ddot{\beta}_{0,2} + \sigma^2_{0,2}\beta_{0,2}\left(1 - \frac{n_{3a}}{g}\sigma^2\cos(\sigma t)\right) + \overline{d_4}\ddot{\beta}_{0,1}\beta_{0,1} + \overline{d_5}\dot{\beta}^2_{0,1} = 0 \tag{91}$$

$$\ddot{\beta}_{1,1} + \sigma^2_{1,1}\beta_{1,1}\left(1 - \frac{n_{3a}}{g}\sigma^2\cos(\sigma t)\right) + \widehat{d_1}\ddot{\beta}_{1,0}\beta_{0,1} +$$
$$\widehat{d_2}\ddot{\beta}_{0,1}\beta_{1,0} + \widehat{d_3}\dot{\beta}_{1,0}\dot{\beta}_{0,1} = 0 \tag{92}$$

Οι συντελεστές δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$d_1 = d^{1,(1,0)}_{(1,0),(2,0)}, d_2 = d^{2,(1,0)}_{(1,0),(1,0),(1,0)}, d_3 = d^{1,(1,0)}_{(2,0),(1,0)}, d_4 = d^{1,(2,0)}_{(1,0),(1,0)}, d_5 = d^{0,(2,0)}_{(1,0),(1,0)},$

$d_6 = d^{2,(1,0)}_{(1,0),(0,1),(0,1)}, d_7 = d^{1,(1,0)}_{(0,1),(1,1)}, d_8 = d^{2,(1,0)}_{(0,1),(0,1),(1,0)} + d^{2,(1,0)}_{(0,1),(1,0),(0,1)},$

$d_9 = d^{1,(1,0)}_{(1,1),(0,1)}, d_{10} = t^{1,(1,0)}_{(0,1),(0,1),(1,0)}, d_{11} = t^{1,(1,0)}_{(1,0),(0,1),(0,1)} + t^{1,(1,0)}_{(0,1),(1,0),(0,1)},$

$d_{12} = t^{0,(1,0)}_{(0,1),(1,1)} + t^{0,(1,0)}_{(1,1),(0,1)}, \overline{d_1} = d^{1,(0,1)}_{(0,1),(0,2)}, \overline{d_2} = d^{2,(0,1)}_{(0,1),(0,1),(0,1)}$

$\overline{d_3} = d^{1,(0,1)}_{(0,2),(0,1)}, \overline{d_4} = d^{1,(0,2)}_{(0,1),(0,1)}, \overline{d_5} = t^{0,(0,2)}_{(0,1),(0,1)}, \overline{d_6} = d^{2,(0,1)}_{(0,1),(1,0),(1,0)}, \overline{d_7} = d^{1,(0,1)}_{(1,0),(1,1)},$

$\overline{d_8} = d^{2,(0,1)}_{(1,0),(1,0),(0,1)} + d^{2,(0,1)}_{(1,0),(0,1),(1,0)}, \overline{d_9} = d^{1,(0,1)}_{(1,1),(1,0)}, \overline{d_{10}} = t^{1,(0,1)}_{(1,0),(1,0),(0,1)},$

$\overline{d_{11}} = t^{1,(0,1)}_{(1,0),(0,1),(1,0)} + t^{1,(0,1)}_{(0,1),(1,0),(1,0)}, \overline{d_{12}} = t^{0,(0,1)}_{(1,0),(1,1)} + t^{0,(0,1)}_{(1,1),(1,0)}, \widehat{d_1} = d^{1,(1,1)}_{(1,0),(0,1)},$

$\widehat{d_2} = d^{1,(1,1)}_{(0,1),(1,0)}, \widehat{d_3} = t^{0,(1,1)}_{(1,0),(0,1)} + t^{0,(1,1)}_{(0,1),(1,0)}$

Παρακάτω θα μελετηθούν δύο διαφορετικές εκδοχές επίλυσης αυτών των εξισώσεων στις οποίες ο συντελεστής απόσβεσης θα μπει σε αυτό το αρχικό στάδιο στο οποίο βρίσκονται τώρα,πριν δηλαδή την επίλυση ως προς τα $\beta_{i,j}$, αλλά και αφού επιλυθούν. Στην πρώτη περίπτωση οι εξισώσεις θα είναι:

$$\begin{aligned}\ddot{\beta}_{1,0} + 2\xi\sigma_{1,0}\beta_{1,0}^{\cdot} + \sigma_{1,0}^2\beta_{1,0}\left(1 - \frac{n_{3a}}{g}\sigma^2\cos(\sigma t)\right) + d_1\left(\ddot{\beta}_{1,0}\beta_{2,0} + \dot{\beta}_{1,0}\dot{\beta}_{2,0}\right)\\ + d_2\left(\ddot{\beta}_{1,0}\beta_{1,0}^2 + \dot{\beta}_{1,0}^2\beta_{1,0}\right) + d_3\ddot{\beta}_{2,0}\beta_{1,0} + d_6\ddot{\beta}_{1,0}\beta_{0,1}^2\\ + \ddot{\beta}_{0,1}\left(d_7\beta_{1,1} + d_8\beta_{1,0}\beta_{0,1}\right) + d_9\ddot{\beta}_{1,1}\beta_{0,1} + d_{10}\dot{\beta}_{0,1}^2\beta_{1,0}\\ + d_{11}\dot{\beta}_{1,0}\dot{\beta}_{0,1}\beta_{0,1} + d_{12}\dot{\beta}_{0,1}\dot{\beta}_{1,1} = 0\end{aligned} \tag{93}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\beta}_{0,1} + 2\xi\sigma_{0,1}\beta_{0,1}^{\cdot} + \sigma_{0,1}^2\beta_{0,1}\left(1 - \frac{n_{3a}}{g}\sigma^2\cos(\sigma t)\right) + \overline{d_1}\left(\ddot{\beta}_{0,1}\beta_{0,2} + \dot{\beta}_{0,1}\dot{\beta}_{0,2}\right)\\ + \overline{d_2}\left(\ddot{\beta}_{0,1}\beta_{0,1}^2 + \dot{\beta}_{0,1}^2\beta_{0,1}\right) + \overline{d_3}\ddot{\beta}_{0,2}\beta_{0,1} + \overline{d_6}\ddot{\beta}_{0,1}\beta_{1,0}^2\\ + \ddot{\beta}_{1,0}\left(\overline{d_7}\beta_{1,1} + \overline{d_8}\beta_{1,0}\beta_{0,1}\right) + \overline{d_9}\ddot{\beta}_{1,1}\beta_{1,0} + \overline{d_{10}}\dot{\beta}_{1,0}^2\beta_{0,1}\\ + \overline{d_{11}}\dot{\beta}_{1,0}\dot{\beta}_{0,1}\beta_{1,0} + \overline{d_{12}}\dot{\beta}_{1,0}\dot{\beta}_{1,1} = 0\end{aligned} \tag{94}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\beta}_{2,0} + 2\xi\sigma_{2,0}\beta_{2,0}^{\cdot} + \sigma_{2,0}^2\beta_{2,0}\left(1 - \frac{n_{3a}}{g}\sigma^2\cos(\sigma t)\right) + d_4\ddot{\beta}_{1,0}\beta_{1,0} +\\ d_5\dot{\beta}_{1,0}^2 = 0\end{aligned} \tag{95}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\beta}_{0,2} + 2\xi\sigma_{0,2}\beta_{0,2}^{\cdot} + \sigma_{0,2}^2\beta_{0,2}\left(1 - \frac{n_{3a}}{g}\sigma^2\cos(\sigma t)\right) + \overline{d_4}\ddot{\beta}_{0,1}\beta_{0,1} +\\ \overline{d_5}\dot{\beta}_{0,1}^2 = 0\end{aligned} \tag{96}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\beta}_{1,1} + 2\xi\sigma_{1,1}\beta_{1,1}^{\cdot} + \sigma_{1,1}^2\beta_{1,1}\left(1 - \frac{n_{3a}}{g}\sigma^2\cos(\sigma t)\right) + \widehat{d_1}\ddot{\beta}_{1,0}\beta_{0,1} +\\ \widehat{d_2}\ddot{\beta}_{0,1}\beta_{1,0} + \widehat{d_3}\dot{\beta}_{1,0}\dot{\beta}_{0,1} = 0\end{aligned} \tag{97}$$

Οι οποίες μετά την επίλυσή τους με τη βοήθεια του προγράμματος Mathematica γίνονται:

$$
\begin{aligned}
\ddot{\beta}_{1,0} = {} & \frac{-\dot{\beta}_{1,0}^{2}\, d_5 - 2\,\xi\,\dot{\beta}_{2,0}\,\sigma_{20} - \left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_{20}^{2}\,\beta_{2,0}}{d_4\,\beta_{1,0}} - \\
& \frac{1}{d_4\,\beta_{1,0}}\left(-\frac{1}{\mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^{2}}\left(-d_4\,\mathrm{dhat}_2\right.\right. \\
& \left(-\dot{\beta}_{0,1}^{2}\,\mathrm{dbar}_5 - 2\,\xi\,\dot{\beta}_{0,2}\,\sigma_2 - \left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_2^{2}\,\beta_{0,2}\right)\beta_{1,0}^{2} + \mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1} \\
& \left(d_4\,\beta_{1,0}\left(-\dot{\beta}_{0,1}\,\dot{\beta}_{1,0}\,\mathrm{dhat}_3 - 2\,\xi\,\dot{\beta}_{1,1}\,\sigma_{11} - \left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_{11}^{2}\,\beta_{1,1}\right) - \right. \\
& \left.\left.\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}\left(-\dot{\beta}_{1,0}^{2}\,d_5 - 2\,\xi\,\dot{\beta}_{2,0}\,\sigma_{20} - \left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_{20}^{2}\,\beta_{2,0}\right)\right)\right) - \\
& \left(d_4\,\mathrm{dhat}_2\,\beta_{1,0}^{2}\left(-\left(-d_4\,d_9\,\mathrm{dbar}_4^{2}\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^{4}\,\beta_{1,0} - d_4\,\mathrm{dbar}_4^{2}\,\beta_{0,1}^{2}\,\beta_{1,0}\right.\right.\right. \\
& \left.(-1 - d_6\,\beta_{0,1}^{2} - d_2\,\beta_{1,0}^{2} + d_3\,d_4\,\beta_{1,0}^{2} - d_1\,\beta_{2,0})\right) \\
& \left(-\mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}\left(-\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1}\right)\left(-d_4\,\mathrm{dhat}_2\left(-\dot{\beta}_{0,1}^{2}\,\mathrm{dbar}_5 - \right.\right.\right. \\
& \left.2\,\xi\,\dot{\beta}_{0,2}\,\sigma_2 - \left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_2^{2}\,\beta_{0,2}\right)\beta_{1,0}^{2} + \mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1} \\
& \left(d_4\,\beta_{1,0}\left(-\dot{\beta}_{0,1}\,\dot{\beta}_{1,0}\,\mathrm{dhat}_3 - 2\,\xi\,\dot{\beta}_{1,1}\,\sigma_{11} - \left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_{11}^{2}\,\beta_{1,1}\right) - \right. \\
& \left.\left.\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}\left(-\dot{\beta}_{1,0}^{2}\,d_5 - 2\,\xi\,\dot{\beta}_{2,0}\,\sigma_{20} - \left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_{20}^{2}\,\beta_{2,0}\right)\right)\right) - \\
& \mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^{2}\left(-d_4\left(-\dot{\beta}_{0,1}^{2}\,\mathrm{dbar}_5 - 2\,\xi\,\dot{\beta}_{0,2}\,\sigma_2 - \left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\right.\right. \\
& \left.\sigma_2^{2}\,\beta_{0,2}\right)\beta_{1,0}\left(1 + \mathrm{dbar}_2\,\beta_{0,1}^{2} + \mathrm{dbar}_1\,\beta_{0,2} + \mathrm{dbar}_6\,\beta_{1,0}^{2}\right) + \\
& \mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}\left(d_4\,\beta_{1,0}\left(-\dot{\beta}_{0,1}\,\dot{\beta}_{0,2}\,\mathrm{dbar}_1 - \dot{\beta}_{1,0}\,\dot{\beta}_{1,1}\,\mathrm{dbar}_{12} - 2\,\xi\,\dot{\beta}_{0,1}\,\sigma_1 - \right.\right. \\
& \dot{\beta}_{0,1}^{2}\,\mathrm{dbar}_2\,\beta_{0,1} - \dot{\beta}_{1,0}^{2}\,\mathrm{dbar}_{10}\,\beta_{0,1} - \left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_1^{2}\,\beta_{0,1} - \\
& \left.\dot{\beta}_{0,1}\,\dot{\beta}_{1,0}\,\mathrm{dbar}_{11}\,\beta_{1,0}\right) - \left(\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0} + \mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1}\right) \\
& \left.\left.\left.\left(-\dot{\beta}_{1,0}^{2}\,d_5 - 2\,\xi\,\dot{\beta}_{2,0}\,\sigma_{20} - \left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_{20}^{2}\,\beta_{2,0}\right)\right)\right)\right) + \\
& \left(-d_4\,d_9\,\mathrm{dbar}_4^{2}\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^{3}\,\beta_{1,0}^{2} - d_4\,\mathrm{dbar}_4^{2}\,\beta_{0,1}^{2}\,\beta_{1,0}\left(-\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1}\right)\right) \\
& \left(-\mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}\left(-1 - d_6\,\beta_{0,1}^{2} - d_2\,\beta_{1,0}^{2} + d_3\,d_4\,\beta_{1,0}^{2} - d_1\,\beta_{2,0}\right)\right.
\end{aligned}
$$

$$\Big(-d_4\,\mathrm{dhat}_2\Big(-\dot{\beta}_{0,1}{}^2\,\mathrm{dbar}_5-2\,\xi\,\dot{\beta}_{0,2}\,\sigma_2-\Big(1-\frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\Big)\,\sigma_2^2\,\beta_{0,2}\Big)\,\beta_{1,0}^2+$$

$$\mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}\Big(d_4\,\beta_{1,0}\Big(-\dot{\beta}_{0,1}\,\dot{\beta}_{1,0}\,\mathrm{dhat}_3-2\,\xi\,\dot{\beta}_{1,1}\,\sigma_{11}-$$

$$\Big(1-\frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\Big)\,\sigma_{11}^2\,\beta_{1,1}\Big)-\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}\Big(-\dot{\beta}_{1,0}{}^2\,d_5-$$

$$2\,\xi\,\dot{\beta}_{2,0}\,\sigma_{20}-\Big(1-\frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\Big)\,\sigma_{20}^2\,\beta_{2,0}\Big)\Big)\Big)-\mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^2$$

$$\Big(-d_4\Big(-\dot{\beta}_{0,1}{}^2\,\mathrm{dbar}_5-2\,\xi\,\dot{\beta}_{0,2}\,\sigma_2-\Big(1-\frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\Big)\,\sigma_2^2\,\beta_{0,2}\Big)\,\beta_{1,0}$$

$$(d_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0}+d_7\,\beta_{1,1})+\mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}\Big(d_4\,\beta_{1,0}\Big(-\dot{\beta}_{1,0}\,\dot{\beta}_{2,0}\,d_1-\dot{\beta}_{0,1}\,\dot{\beta}_{1,1}\,d_{12}-$$

$$2\,\xi\,\dot{\beta}_{1,0}\,\sigma_{10}-\dot{\beta}_{0,1}\,\dot{\beta}_{1,0}\,d_{11}\,\beta_{0,1}-\dot{\beta}_{1,0}{}^2\,d_2\,\beta_{1,0}-\dot{\beta}_{0,1}{}^2\,d_{10}\,\beta_{1,0}-$$

$$\Big(1-\frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\Big)\,\sigma_{10}^2\,\beta_{1,0}\Big)-(1+d_6\,\beta_{0,1}^2+d_2\,\beta_{1,0}^2+d_1\,\beta_{2,0})$$

$$\Big(-\dot{\beta}_{1,0}{}^2\,d_5-2\,\xi\,\dot{\beta}_{2,0}\,\sigma_{20}-\Big(1-\frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\Big)\,\sigma_{20}^2\,\beta_{2,0}\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big/$$

$$\Big(-d_4\Big(-\dot{\beta}_{0,1}{}^2\,\mathrm{dbar}_5-2\,\xi\,\dot{\beta}_{0,2}\,\sigma_2-\Big(1-\frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\Big)\,\sigma_2^2\,\beta_{0,2}\Big)\,\beta_{1,0}$$

$$(d_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0}+d_7\,\beta_{1,1})+\mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}\Big(d_4\,\beta_{1,0}\Big(-\dot{\beta}_{1,0}\,\dot{\beta}_{2,0}\,d_1-\dot{\beta}_{0,1}\,\dot{\beta}_{1,1}\,d_{12}-$$

$$2\,\xi\,\dot{\beta}_{1,0}\,\sigma_{10}-\dot{\beta}_{0,1}\,\dot{\beta}_{1,0}\,d_{11}\,\beta_{0,1}-\dot{\beta}_{1,0}{}^2\,d_2\,\beta_{1,0}-\dot{\beta}_{0,1}{}^2\,d_{10}\,\beta_{1,0}-$$

$$\Big(1-\frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\Big)\,\sigma_{10}^2\,\beta_{1,0}\Big)-(1+d_6\,\beta_{0,1}^2+d_2\,\beta_{1,0}^2+d_1\,\beta_{2,0})$$

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^2\,(-(-\mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^2\,(d_4\,\mathrm{dbar}_2\,\mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0} - d_4\,\beta_{1,0}\\
&\qquad (1 + \mathrm{dbar}_2\,\beta_{0,1}^2 + \mathrm{dbar}_1\,\beta_{0,2} + \mathrm{dbar}_6\,\beta_{1,0}^2)) + d_4\,\mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_2\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0}^2\\
&\qquad (-\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1}))\,(-d_4\,d_9\,\mathrm{dbar}_4^2\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^4\,\beta_{1,0} -\\
&\qquad d_4\,\mathrm{dbar}_4^2\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0}\,(-1 - d_6\,\beta_{0,1}^2 - d_2\,\beta_{1,0}^2 + d_3\,d_4\,\beta_{1,0}^2 - d_1\,\beta_{2,0})) +\\
&\qquad (-d_4\,d_9\,\mathrm{dbar}_4^2\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^3\,\beta_{1,0}^2 - d_4\,\mathrm{dbar}_4^2\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0}\,(-\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1}))\\
&\qquad (d_4\,\mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0}\,(d_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0} + d_7\,\beta_{1,1}) +\\
&\qquad d_4\,\mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_2\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0}^2\,(-1 - d_6\,\beta_{0,1}^2 - d_2\,\beta_{1,0}^2 + d_3\,d_4\,\beta_{1,0}^2 - d_1\,\beta_{2,0}))))) +\\
&\frac{1}{\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}}\Bigg(d_4\,\beta_{1,0}\Bigg(\Bigg(-\mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}\,(-\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1})\Bigg(-d_4\,\mathrm{dhat}_2\Bigg(-\dot{\beta}_{0,1}^2\\
&\qquad \mathrm{dbar}_5 - 2\,\xi\,\dot{\beta}_{0,2}\,\sigma_2 - \left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_2^2\,\beta_{0,2}\Bigg)\beta_{1,0}^2 + \mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}\\
&\qquad \Bigg(d_4\,\beta_{1,0}\left(-\dot{\beta}_{0,1}\,\dot{\beta}_{1,0}\,\mathrm{dhat}_3 - 2\,\xi\,\dot{\beta}_{1,1}\,\sigma_{11} - \left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_{11}^2\,\beta_{1,1}\right) -\\
&\qquad \mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}\left(-\dot{\beta}_{1,0}^2\,d_5 - 2\,\xi\,\dot{\beta}_{2,0}\,\sigma_{20} - \left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_{20}^2\,\beta_{2,0}\right)\Bigg)\Bigg) -\\
&\qquad \mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^2\Bigg(-d_4\Bigg(-\dot{\beta}_{0,1}^2\,\mathrm{dbar}_5 - 2\,\xi\,\dot{\beta}_{0,2}\,\sigma_2 - \left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\\
&\qquad \sigma_2^2\,\beta_{0,2}\Bigg)\beta_{1,0}\,(1 + \mathrm{dbar}_2\,\beta_{0,1}^2 + \mathrm{dbar}_1\,\beta_{0,2} + \mathrm{dbar}_6\,\beta_{1,0}^2) +\\
&\qquad \mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}\Bigg(d_4\,\beta_{1,0}\Bigg(-\dot{\beta}_{0,1}\,\dot{\beta}_{0,2}\,\mathrm{dbar}_1 - \dot{\beta}_{1,0}\,\dot{\beta}_{1,1}\,\mathrm{dbar}_{12} - 2\,\xi\,\dot{\beta}_{0,1}\,\sigma_1 -\\
&\qquad \dot{\beta}_{0,1}^2\,\mathrm{dbar}_2\,\beta_{0,1} - \dot{\beta}_{1,0}^2\,\mathrm{dbar}_{10}\,\beta_{0,1} - \left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_1^2\,\beta_{0,1} -\\
&\qquad \dot{\beta}_{0,1}\,\dot{\beta}_{1,0}\,\mathrm{dbar}_{11}\,\beta_{1,0}\Bigg) - (\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0} + \mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1})\\
&\qquad \left(-\dot{\beta}_{1,0}^2\,d_5 - 2\,\xi\,\dot{\beta}_{2,0}\,\sigma_{20} - \left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_{20}^2\,\beta_{2,0}\right)\Bigg)\Bigg)\Bigg)\Bigg)\Bigg/\\
&(-d_4\,d_9\,\mathrm{dbar}_4^2\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^3\,\beta_{1,0}^2 - d_4\,\mathrm{dbar}_4^2\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0}\,(-\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0} -\\
&\qquad \mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1})) - \Bigg((-\mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^2\,(d_4\,\mathrm{dbar}_2\,\mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0} -
\end{aligned}
$$

$$d_4 \beta_{1,0} \left(1 + \mathrm{dbar}_2 \beta_{0,1}^2 + \mathrm{dbar}_1 \beta_{0,2} + \mathrm{dbar}_6 \beta_{1,0}^2\right)\Big) + d_4$$

$$\mathrm{dbar}_4 \mathrm{dhat}_2 \beta_{0,1} \beta_{1,0}^2 \left(-\mathrm{dbar}_8 \beta_{0,1} \beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7 \beta_{1,1}\right)\Big)$$

$$\Big(-\Big(-d_4 d_9 \mathrm{dbar}_4^2 \mathrm{dhat}_1 \beta_{0,1}^4 \beta_{1,0} - d_4 \mathrm{dbar}_4^2 \beta_{0,1}^2 \beta_{1,0} \left(-1 - d_6 \beta_{0,1}^2 - d_2 \beta_{1,0}^2 +$$

$$d_3 d_4 \beta_{1,0}^2 - d_1 \beta_{2,0}\right)\Big) \Big(-\mathrm{dbar}_4 \beta_{0,1} \left(-\mathrm{dbar}_8 \beta_{0,1} \beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7 \beta_{1,1}\right)$$

$$\Big(-d_4 \mathrm{dhat}_2 \Big(-\dot{\beta}_{0,1}^2 \mathrm{dbar}_5 - 2 \xi \dot{\beta}_{0,2} \sigma_2 - \Big(1 - \frac{\sigma^2 \mathrm{Cos}[t \sigma] n_{3,2}}{g}\Big) \sigma_2^2 \beta_{0,2}\Big)$$

$$\beta_{1,0}^2 + \mathrm{dbar}_4 \beta_{0,1} \Big(d_4 \beta_{1,0} \Big(-\dot{\beta}_{0,1} \dot{\beta}_{1,0} \mathrm{dhat}_3 - 2 \xi \dot{\beta}_{1,1} \sigma_{11} -$$

$$\Big(1 - \frac{\sigma^2 \mathrm{Cos}[t \sigma] n_{3,2}}{g}\Big) \sigma_{11}^2 \beta_{1,1}\Big) - \mathrm{dhat}_1 \beta_{0,1} \Big(-\dot{\beta}_{1,0}^2 d_5 -$$

$$2 \xi \dot{\beta}_{2,0} \sigma_{20} - \Big(1 - \frac{\sigma^2 \mathrm{Cos}[t \sigma] n_{3,2}}{g}\Big) \sigma_{20}^2 \beta_{2,0}\Big)\Big)\Big) - \mathrm{dbar}_4 \mathrm{dhat}_1$$

$$\beta_{0,1}^2 \Big(-d_4 \Big(-\dot{\beta}_{0,1}^2 \mathrm{dbar}_5 - 2 \xi \dot{\beta}_{0,2} \sigma_2 - \Big(1 - \frac{\sigma^2 \mathrm{Cos}[t \sigma] n_{3,2}}{g}\Big) \sigma_2^2 \beta_{0,2}\Big)$$

$$\beta_{1,0} \left(1 + \mathrm{dbar}_2 \beta_{0,1}^2 + \mathrm{dbar}_1 \beta_{0,2} + \mathrm{dbar}_6 \beta_{1,0}^2\right) + \mathrm{dbar}_4 \beta_{0,1}$$

$$\Big(d_4 \beta_{1,0} \Big(-\dot{\beta}_{0,1} \dot{\beta}_{0,2} \mathrm{dbar}_1 - \dot{\beta}_{1,0} \dot{\beta}_{1,1} \mathrm{dbar}_{12} - 2 \xi \dot{\beta}_{0,1} \sigma_1 -$$

$$\dot{\beta}_{0,1}^2 \mathrm{dbar}_2 \beta_{0,1} - \dot{\beta}_{1,0}^2 \mathrm{dbar}_{10} \beta_{0,1} - \Big(1 - \frac{\sigma^2 \mathrm{Cos}[t \sigma] n_{3,2}}{g}\Big) \sigma_1^2$$

$$\beta_{0,1} - \dot{\beta}_{0,1} \dot{\beta}_{1,0} \mathrm{dbar}_{11} \beta_{1,0}\Big) - \left(\mathrm{dbar}_8 \beta_{0,1} \beta_{1,0} + \mathrm{dbar}_7 \beta_{1,1}\right)$$

$$\Big(-\dot{\beta}_{1,0}^2 d_5 - 2 \xi \dot{\beta}_{2,0} \sigma_{20} - \Big(1 - \frac{\sigma^2 \mathrm{Cos}[t \sigma] n_{3,2}}{g}\Big) \sigma_{20}^2 \beta_{2,0}\Big)\Big)\Big)\Big) +$$

$$\Big(-d_4 d_9 \mathrm{dbar}_4^2 \mathrm{dhat}_1 \beta_{0,1}^3 \beta_{1,0}^2 - d_4 \mathrm{dbar}_4^2 \beta_{0,1}^2 \beta_{1,0} \left(-\mathrm{dbar}_8 \beta_{0,1} \beta_{1,0} -$$

$$\mathrm{dbar}_7 \beta_{1,1}\right)\Big) \Big(-\mathrm{dbar}_4 \beta_{0,1} \left(-1 - d_6 \beta_{0,1}^2 - d_2 \beta_{1,0}^2 + d_3 d_4 \beta_{1,0}^2 - d_1 \beta_{2,0}\right)$$

$$\Big(-d_4 \mathrm{dhat}_2 \Big(-\dot{\beta}_{0,1}^2 \mathrm{dbar}_5 - 2 \xi \dot{\beta}_{0,2} \sigma_2 - \Big(1 - \frac{\sigma^2 \mathrm{Cos}[t \sigma] n_{3,2}}{g}\Big) \sigma_2^2 \beta_{0,2}\Big)$$

$$\beta_{1,0}^2 + \mathrm{dbar}_4 \beta_{0,1} \Big(d_4 \beta_{1,0} \Big(-\dot{\beta}_{0,1} \dot{\beta}_{1,0} \mathrm{dhat}_3 - 2 \xi \dot{\beta}_{1,1} \sigma_{11} -$$

$$\Big(1 - \frac{\sigma^2 \mathrm{Cos}[t \sigma] n_{3,2}}{g}\Big) \sigma_{11}^2 \beta_{1,1}\Big) - \mathrm{dhat}_1 \beta_{0,1} \Big(-\dot{\beta}_{1,0}^2 d_5 -$$

$$2 \xi \dot{\beta}_{2,0} \sigma_{20} - \Big(1 - \frac{\sigma^2 \mathrm{Cos}[t \sigma] n_{3,2}}{g}\Big) \sigma_{20}^2 \beta_{2,0}\Big)\Big)\Big) - \mathrm{dbar}_4 \mathrm{dhat}_1$$

$$\beta_{0,1}^2 \Big(-d_4 \Big(-\dot{\beta}_{0,1}^2 \mathrm{dbar}_5 - 2 \xi \dot{\beta}_{0,2} \sigma_2 - \Big(1 - \frac{\sigma^2 \mathrm{Cos}[t \sigma] n_{3,2}}{g}\Big)$$

$$\sigma_2^2 \beta_{0,2}\Big) \beta_{1,0} \left(d_8 \beta_{0,1} \beta_{1,0} + d_7 \beta_{1,1}\right) + \mathrm{dbar}_4 \beta_{0,1} \Big(d_4 \beta_{1,0}$$

$$\Big(-\dot{\beta}_{1,0} \dot{\beta}_{2,0} d_1 - \dot{\beta}_{0,1} \dot{\beta}_{1,1} d_{12} - 2 \xi \dot{\beta}_{1,0} \sigma_{10} - \dot{\beta}_{0,1} \dot{\beta}_{1,0} d_{11} \beta_{0,1} -$$

$$\dot{\beta}_{1,0}^2 d_2 \beta_{1,0} - \dot{\beta}_{0,1}^2 d_{10} \beta_{1,0} - \Big(1 - \frac{\sigma^2 \mathrm{Cos}[t \sigma] n_{3,2}}{g}\Big) \sigma_{10}^2 \beta_{1,0}\Big) -$$

$$(1 + d_6\,\beta_{0,1}^2 + d_2\,\beta_{1,0}^2 + d_1\,\beta_{2,0})\,\Big(-\dot{\beta}_{1,0}^{\,2}\,d_5 - 2\,\xi\,\dot{\beta}_{2,0}\,\sigma_{20} -$$

$$\left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_{20}^2\,\beta_{2,0}\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big/$$

$$((-d_4\,d_9\,\mathrm{dbar}_4^2\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^3\,\beta_{1,0}^2 - d_4\,\mathrm{dbar}_4^2\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0}\,(-\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0} -$$

$$\mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1}))\,(-(-\mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^2\,(d_4\,\mathrm{dbar}_3\,\mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0} -$$

$$d_4\,\beta_{1,0}\,(1 + \mathrm{dbar}_2\,\beta_{0,1}^2 + \mathrm{dbar}_1\,\beta_{0,2} + \mathrm{dbar}_6\,\beta_{1,0}^2)) +$$

$$d_4\,\mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_2\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0}^2\,(-\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1}))$$

$$(-d_4\,d_9\,\mathrm{dbar}_4^2\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^4\,\beta_{1,0} - d_4\,\mathrm{dbar}_4^2\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0}\,(-1 - d_6\,\beta_{0,1}^2 -$$

$$d_2\,\beta_{1,0}^2 + d_3\,d_4\,\beta_{1,0}^2 - d_1\,\beta_{2,0})) + (-d_4\,d_9\,\mathrm{dbar}_4^2\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^3\,\beta_{1,0}^2 -$$

$$d_4\,\mathrm{dbar}_4^2\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0}\,(-\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1}))$$

$$(d_4\,\mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0}\,(d_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0} + d_7\,\beta_{1,1}) + d_4\,\mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_2$$

$$\beta_{0,1}\,\beta_{1,0}^2\,(-1 - d_6\,\beta_{0,1}^2 - d_2\,\beta_{1,0}^2 + d_3\,d_4\,\beta_{1,0}^2 - d_1\,\beta_{2,0}))))\Big)\Big)\Big)$$

$$\ddot{\beta}_{0,1} = \frac{-\dot{\beta}_{0,1}^{\,2}\,\mathrm{dbar}_5 - 2\,\xi\,\dot{\beta}_{0,2}\,\sigma_2 - \left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_2^2\,\beta_{0,2}}{\mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}} -$$

$$\Big(-(-d_4\,d_9\,\mathrm{dbar}_4^2\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^4\,\beta_{1,0} -$$

$$d_4\,\mathrm{dbar}_4^2\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0}\,(-1 - d_6\,\beta_{0,1}^2 - d_2\,\beta_{1,0}^2 + d_3\,d_4\,\beta_{1,0}^2 - d_1\,\beta_{2,0}))$$

$$\Big(-\mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}\,(-\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1})$$

$$\Big(-d_4\,\mathrm{dhat}_2\,\Big(-\dot{\beta}_{0,1}^{\,2}\,\mathrm{dbar}_5 - 2\,\xi\,\dot{\beta}_{0,2}\,\sigma_2 - \left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_2^2\,\beta_{0,2}\Big)\,\beta_{1,0}^2 +$$

$$\mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}\,\Big(d_4\,\beta_{1,0}\,\Big(-\dot{\beta}_{0,1}\,\dot{\beta}_{1,0}\,\mathrm{dhat}_3 - 2\,\xi\,\dot{\beta}_{1,1}\,\sigma_{11} -$$

$$\left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_{11}^2\,\beta_{1,1}\Big) - \mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}\,\Big(-\dot{\beta}_{1,0}^{\,2}\,d_5 -$$

$$2\,\xi\,\dot{\beta}_{2,0}\,\sigma_{20} - \left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_{20}^2\,\beta_{2,0}\Big)\Big)\Big) - \mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^2$$

$$\Big(-d_4\,\Big(-\dot{\beta}_{0,1}^{\,2}\,\mathrm{dbar}_5 - 2\,\xi\,\dot{\beta}_{0,2}\,\sigma_2 - \left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_2^2\,\beta_{0,2}\Big)$$

$$\beta_{1,0}\,(1 + \mathrm{dbar}_2\,\beta_{0,1}^2 + \mathrm{dbar}_1\,\beta_{0,2} + \mathrm{dbar}_6\,\beta_{1,0}^2) +$$

$$\mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}\,\Big(d_4\,\beta_{1,0}\,\Big(-\dot{\beta}_{0,1}\,\dot{\beta}_{0,2}\,\mathrm{dbar}_1 - \dot{\beta}_{1,0}\,\dot{\beta}_{1,1}\,\mathrm{dbar}_{12} - 2\,\xi\,\dot{\beta}_{0,1}\,\sigma_1 -$$

$$\dot{\beta}_{0,1}^{\,2}\,\mathrm{dbar}_2\,\beta_{0,1} - \dot{\beta}_{1,0}^{\,2}\,\mathrm{dbar}_{10}\,\beta_{0,1} - \left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_1^2$$

$$\beta_{0,1} - \dot{\beta}_{0,1}\,\dot{\beta}_{1,0}\,\mathrm{dbar}_{11}\,\beta_{1,0}\Big) - (\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0} + \mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1})$$

$$\Big(-\dot{\beta}_{1,0}^{\,2}\,d_5 - 2\,\xi\,\dot{\beta}_{2,0}\,\sigma_{20} - \left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_{20}^2\,\beta_{2,0}\Big)\Big)\Big)\Big) +$$

$$(-d_4\,d_9\,\mathrm{dbar}_4^2\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^3\,\beta_{1,0}^2 - d_4\,\mathrm{dbar}_4^2\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0}\,(-\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1}))$$

$$\Big(-\mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}\,(-1 - d_6\,\beta_{0,1}^2 - d_2\,\beta_{1,0}^2 + d_3\,d_4\,\beta_{1,0}^2 - d_1\,\beta_{2,0})$$

$$\left(-d_4\,\mathrm{dhat}_2\left(-\dot{\beta}_{0,1}^{\,2}\,\mathrm{dbar}_5-2\,\xi\,\dot{\beta}_{0,2}\,\sigma_2-\left(1-\frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_2^2\,\beta_{0,2}\right)\beta_{1,0}^2+\right.$$

$$\mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}\left(d_4\,\beta_{1,0}\left(-\dot{\beta}_{0,1}\,\dot{\beta}_{1,0}\,\mathrm{dhat}_3-2\,\xi\,\dot{\beta}_{1,1}\,\sigma_{11}-\right.\right.$$

$$\left(1-\frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_{11}^2\,\beta_{1,1}\Big)-\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}\left(-\dot{\beta}_{1,0}^{\,2}\,d_5-\right.$$

$$\left.\left.\left.2\,\xi\,\dot{\beta}_{2,0}\,\sigma_{20}-\left(1-\frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_{20}^2\,\beta_{2,0}\right)\right)\right)-\mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^2$$

$$\left(-d_4\left(-\dot{\beta}_{0,1}^{\,2}\,\mathrm{dbar}_5-2\,\xi\,\dot{\beta}_{0,2}\,\sigma_2-\left(1-\frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_2^2\,\beta_{0,2}\right)\beta_{1,0}\right.$$

$$(d_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0}+d_7\,\beta_{1,1})+\mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}\left(d_4\,\beta_{1,0}\left(-\dot{\beta}_{1,0}\,\dot{\beta}_{2,0}\,d_1-\dot{\beta}_{0,1}\,\dot{\beta}_{1,1}\,d_{12}-\right.\right.$$

$$2\,\xi\,\dot{\beta}_{1,0}\,\sigma_{10}-\dot{\beta}_{0,1}\,\dot{\beta}_{1,0}\,d_{11}\,\beta_{0,1}-\dot{\beta}_{1,0}^{\,2}\,d_2\,\beta_{1,0}-\dot{\beta}_{0,1}^{\,2}\,d_{10}\,\beta_{1,0}-$$

$$\left(1-\frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_{10}^2\,\beta_{1,0}\Big)-(1+d_6\,\beta_{0,1}^2+d_2\,\beta_{1,0}^2+d_1\,\beta_{2,0})$$

$$\left.\left.\left.\left.\left.\left(-\dot{\beta}_{1,0}^{\,2}\,d_5-2\,\xi\,\dot{\beta}_{2,0}\,\sigma_{20}-\left(1-\frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_{20}^2\,\beta_{2,0}\right)\right)\right)\right)\right)\Big/$$

$$(\mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}\,(-(-\mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^2\,(d_4\,\mathrm{dbar}_2\,\mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0}-$$

$$d_4\,\beta_{1,0}\,(1+\mathrm{dbar}_2\,\beta_{0,1}^2+\mathrm{dbar}_1\,\beta_{0,2}+\mathrm{dbar}_6\,\beta_{1,0}^2))+$$

$$d_4\,\mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_2\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0}^2\,(-\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0}-\mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1}))$$

$$(-d_4\,d_9\,\mathrm{dbar}_4^2\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^4\,\beta_{1,0}-d_4\,\mathrm{dbar}_4^2\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0}$$

$$(-1-d_6\,\beta_{0,1}^2-d_2\,\beta_{1,0}^2+d_3\,d_4\,\beta_{1,0}^2-d_1\,\beta_{2,0}))+$$

$$(-d_4\,d_9\,\mathrm{dbar}_4^2\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^3\,\beta_{1,0}^2-d_4\,\mathrm{dbar}_4^2\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0}$$

$$(-\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0}-\mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1}))$$

$$(d_4\,\mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0}\,(d_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0}+d_7\,\beta_{1,1})+$$

$$d_4\,\mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_2\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0}^2\,(-1-d_6\,\beta_{0,1}^2-d_2\,\beta_{1,0}^2+d_3\,d_4\,\beta_{1,0}^2-d_1\,\beta_{2,0}))))$$

$$\ddot{\beta}_{2,0}=-\frac{1}{\mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^2}$$

$$\left(-d_4\,\mathrm{dhat}_2\left(-\dot{\beta}_{0,1}^{\,2}\,\mathrm{dbar}_5-2\,\xi\,\dot{\beta}_{0,2}\,\sigma_2-\left(1-\frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_2^2\,\beta_{0,2}\right)\beta_{1,0}^2+\mathrm{dbar}_4\right.$$

$$\beta_{0,1}\left(d_4\,\beta_{1,0}\left(-\dot{\beta}_{0,1}\,\dot{\beta}_{1,0}\,\mathrm{dhat}_3-2\,\xi\,\dot{\beta}_{1,1}\,\sigma_{11}-\left(1-\frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_{11}^2\,\beta_{1,1}\right)-\right.$$

$$\left.\left.\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}\left(-\dot{\beta}_{1,0}^{\,2}\,d_5-2\,\xi\,\dot{\beta}_{2,0}\,\sigma_{20}-\left(1-\frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_{20}^2\,\beta_{2,0}\right)\right)\right)-$$

$$\left(d_4\,\mathrm{dhat}_2\,\beta_{1,0}^2\left(-(-d_4\,d_9\,\mathrm{dbar}_4^2\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^4\,\beta_{1,0}-d_4\,\mathrm{dbar}_4^2\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0}\right.\right.$$

$$(-1-d_6\,\beta_{0,1}^2-d_2\,\beta_{1,0}^2+d_3\,d_4\,\beta_{1,0}^2-d_1\,\beta_{2,0}))$$

$$\left(-\mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}\,(-\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0}-\mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1})\right.$$

$$\left(-d_4\,\mathrm{dhat}_2\left(-\dot{\beta}_{0,1}^{\,2}\,\mathrm{dbar}_5-2\,\xi\,\dot{\beta}_{0,2}\,\sigma_2-\left(1-\frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_2^2\,\beta_{0,2}\right)\right.$$

$$\beta_{1,0}^2 + \mathrm{dbar}_4 \beta_{0,1} \Big(d_4 \beta_{1,0} \Big(-\dot{\beta}_{0,1} \dot{\beta}_{1,0} \mathrm{dhat}_3 - 2 \xi \dot{\beta}_{1,1} \sigma_{11} -$$

$$\Big(1 - \frac{\sigma^2 \mathrm{Cos}[t\,\sigma]\, n_{3,2}}{g} \Big) \sigma_{11}^2 \beta_{1,1} \Big) - \mathrm{dhat}_1 \beta_{0,1}$$

$$\Big(-\dot{\beta}_{1,0}{}^2 d_5 - 2 \xi \dot{\beta}_{2,0} \sigma_{20} - \Big(1 - \frac{\sigma^2 \mathrm{Cos}[t\,\sigma]\, n_{3,2}}{g} \Big) \sigma_{20}^2 \beta_{2,0} \Big) \Big) \Big) -$$

$$\mathrm{dbar}_4 \mathrm{dhat}_1 \beta_{0,1}^2 \Big(-d_4 \Big(-\dot{\beta}_{0,1}{}^2 \mathrm{dbar}_5 - 2 \xi \dot{\beta}_{0,2} \sigma_2 - \Big(1 - \frac{\sigma^2 \mathrm{Cos}[t\,\sigma]\, n_{3,2}}{g} \Big)$$

$$\sigma_2^2 \beta_{0,2} \Big) \beta_{1,0} \, (1 + \mathrm{dbar}_2 \beta_{0,1}^2 + \mathrm{dbar}_1 \beta_{0,2} + \mathrm{dbar}_6 \beta_{1,0}^2) +$$

$$\mathrm{dbar}_4 \beta_{0,1} \Big(d_4 \beta_{1,0} \Big(-\dot{\beta}_{0,1} \dot{\beta}_{0,2} \mathrm{dbar}_1 - \dot{\beta}_{1,0} \dot{\beta}_{1,1} \mathrm{dbar}_{12} - 2 \xi \dot{\beta}_{0,1} \sigma_1 -$$

$$\dot{\beta}_{0,1}{}^2 \mathrm{dbar}_2 \beta_{0,1} - \dot{\beta}_{1,0}{}^2 \mathrm{dbar}_{10} \beta_{0,1} - \Big(1 - \frac{\sigma^2 \mathrm{Cos}[t\,\sigma]\, n_{3,2}}{g} \Big) \sigma_1^2$$

$$\beta_{0,1} - \dot{\beta}_{0,1} \dot{\beta}_{1,0} \mathrm{dbar}_{11} \beta_{1,0} \Big) - (\mathrm{dbar}_8 \beta_{0,1} \beta_{1,0} + \mathrm{dbar}_7 \beta_{1,1})$$

$$\Big(-\dot{\beta}_{1,0}{}^2 d_5 - 2 \xi \dot{\beta}_{2,0} \sigma_{20} - \Big(1 - \frac{\sigma^2 \mathrm{Cos}[t\,\sigma]\, n_{3,2}}{g} \Big) \sigma_{20}^2 \beta_{2,0} \Big) \Big) \Big) \Big) +$$

$$(-d_4 d_9 \mathrm{dbar}_4^2 \mathrm{dhat}_1 \beta_{0,1}^3 \beta_{1,0}^2 - d_4 \mathrm{dbar}_4^2 \beta_{0,1}^2 \beta_{1,0}$$

$$(-\mathrm{dbar}_8 \beta_{0,1} \beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7 \beta_{1,1}))$$

$$\Big(-\mathrm{dbar}_4 \beta_{0,1} \, (-1 - d_6 \beta_{0,1}^2 - d_2 \beta_{1,0}^2 + d_2 d_4 \beta_{1,0}^2 - d_1 \beta_{2,0})$$

$$\Big(-d_4 \mathrm{dhat}_2 \Big(-\dot{\beta}_{0,1}{}^2 \mathrm{dbar}_5 - 2 \xi \dot{\beta}_{0,2} \sigma_2 - \Big(1 - \frac{\sigma^2 \mathrm{Cos}[t\,\sigma]\, n_{3,2}}{g} \Big) \sigma_2^2 \beta_{0,2} \Big)$$

$$\beta_{1,0}^2 + \mathrm{dbar}_4 \beta_{0,1} \Big(d_4 \beta_{1,0} \Big(-\dot{\beta}_{0,1} \dot{\beta}_{1,0} \mathrm{dhat}_3 - 2 \xi \dot{\beta}_{1,1} \sigma_{11} -$$

$$\Big(1 - \frac{\sigma^2 \mathrm{Cos}[t\,\sigma]\, n_{3,2}}{g} \Big) \sigma_{11}^2 \beta_{1,1} \Big) - \mathrm{dhat}_1 \beta_{0,1}$$

$$\Big(-\dot{\beta}_{1,0}{}^2 d_5 - 2 \xi \dot{\beta}_{2,0} \sigma_{20} - \Big(1 - \frac{\sigma^2 \mathrm{Cos}[t\,\sigma]\, n_{3,2}}{g} \Big) \sigma_{20}^2 \beta_{2,0} \Big) \Big) \Big) -$$

$$\mathrm{dbar}_4 \mathrm{dhat}_1 \beta_{0,1}^2 \Big(-d_4 \Big(-\dot{\beta}_{0,1}{}^2 \mathrm{dbar}_5 - 2 \xi \dot{\beta}_{0,2} \sigma_2 -$$

$$\Big(1 - \frac{\sigma^2 \mathrm{Cos}[t\,\sigma]\, n_{3,2}}{g} \Big) \sigma_2^2 \beta_{0,2} \Big) \beta_{1,0} \, (d_8 \beta_{0,1} \beta_{1,0} + d_7 \beta_{1,1}) +$$

$$\mathrm{dbar}_4 \beta_{0,1} \Big(d_4 \beta_{1,0} \Big(-\dot{\beta}_{1,0} \dot{\beta}_{2,0} d_1 - \dot{\beta}_{0,1} \dot{\beta}_{1,1} d_{12} - 2 \xi \dot{\beta}_{1,0} \sigma_{10} -$$

$$\dot{\beta}_{0,1} \dot{\beta}_{1,0} d_{11} \beta_{0,1} - \dot{\beta}_{1,0}{}^2 d_2 \beta_{1,0} - \dot{\beta}_{0,1}{}^2 d_{10} \beta_{1,0} -$$

$$\Big(1 - \frac{\sigma^2 \mathrm{Cos}[t\,\sigma]\, n_{3,2}}{g} \Big) \sigma_{10}^2 \beta_{1,0} \Big) - (1 + d_6 \beta_{0,1}^2 + d_2 \beta_{1,0}^2 + d_1 \beta_{2,0})$$

$$\Big(-\dot{\beta}_{1,0}{}^2 d_5 - 2 \xi \dot{\beta}_{2,0} \sigma_{20} - \Big(1 - \frac{\sigma^2 \mathrm{Cos}[t\,\sigma]\, n_{3,2}}{g} \Big) \sigma_{20}^2 \beta_{2,0} \Big) \Big) \Big) \Big) \Big) \Big) \Big) \Big) \Big) /$$

$$(\mathrm{dbar}_4 \mathrm{dhat}_1 \beta_{0,1}^2 \, (-(-\mathrm{dbar}_4 \mathrm{dhat}_1 \beta_{0,1}^2 \, (d_4 \mathrm{dbar}_3 \mathrm{dbar}_4 \beta_{0,1}^2 \beta_{1,0} -$$

$$d_4 \beta_{1,0} \, (1 + \mathrm{dbar}_2 \beta_{0,1}^2 + \mathrm{dbar}_1 \beta_{0,2} + \mathrm{dbar}_6 \beta_{1,0}^2)) +$$

$$d_4 \mathrm{dbar}_4 \mathrm{dhat}_2 \beta_{0,1} \beta_{1,0}^2 \, (-\mathrm{dbar}_8 \beta_{0,1} \beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7 \beta_{1,1}))$$

$$
\begin{aligned}
&(-d_4\, d_9\, \mathrm{dbar}_4^2\, \mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1}^4\, \beta_{1,0} - d_4\, \mathrm{dbar}_4^2\, \beta_{0,1}^2\, \beta_{1,0} \\
&\quad (-1 - d_6\, \beta_{0,1}^2 - d_2\, \beta_{1,0}^2 + d_2\, d_4\, \beta_{1,0}^2 - d_1\, \beta_{2,0})) + \\
&(-d_4\, d_9\, \mathrm{dbar}_4^2\, \mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1}^3\, \beta_{1,0}^2 - d_4\, \mathrm{dbar}_4^2\, \beta_{0,1}^2\, \beta_{1,0} \\
&\quad (-\mathrm{dbar}_8\, \beta_{0,1}\, \beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7\, \beta_{1,1})) \\
&(d_4\, \mathrm{dbar}_4\, \mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1}^2\, \beta_{1,0}\, (d_8\, \beta_{0,1}\, \beta_{1,0} + d_7\, \beta_{1,1}) + \\
&\quad d_4\, \mathrm{dbar}_4\, \mathrm{dhat}_2\, \beta_{0,1}\, \beta_{1,0}^2\, (-1 - d_6\, \beta_{0,1}^2 - d_2\, \beta_{1,0}^2 + d_2\, d_4\, \beta_{1,0}^2 - d_1\, \beta_{2,0}))))) + \\
&\frac{1}{\mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1}} \Big(d_4\, \beta_{1,0} \Big(\Big(-\mathrm{dbar}_4\, \beta_{0,1}\, (-\mathrm{dbar}_8\, \beta_{0,1}\, \beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7\, \beta_{1,1}) \\
&\quad \Big(-d_4\, \mathrm{dhat}_2 \Big(-\dot{\beta}_{0,1}^2\, \mathrm{dbar}_5 - 2\, \xi\, \dot{\beta}_{0,2}\, \sigma_2 - \Big(1 - \frac{\sigma^2\, \mathrm{Cos}[t\, \sigma]\, n_{3,2}}{g}\Big)\, \sigma_2^2\, \beta_{0,2}\Big) \\
&\quad \beta_{1,0}^2 + \mathrm{dbar}_4\, \beta_{0,1} \Big(d_4\, \beta_{1,0} \Big(-\dot{\beta}_{0,1}\, \dot{\beta}_{1,0}\, \mathrm{dhat}_3 - 2\, \xi\, \dot{\beta}_{1,1}\, \sigma_{11} - \\
&\quad \Big(1 - \frac{\sigma^2\, \mathrm{Cos}[t\, \sigma]\, n_{3,2}}{g}\Big)\, \sigma_{11}^2\, \beta_{1,1}\Big) - \mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1} \\
&\quad \Big(-\dot{\beta}_{1,0}^2\, d_5 - 2\, \xi\, \dot{\beta}_{2,0}\, \sigma_{20} - \Big(1 - \frac{\sigma^2\, \mathrm{Cos}[t\, \sigma]\, n_{3,2}}{g}\Big)\, \sigma_{20}^2\, \beta_{2,0}\Big)\Big)\Big) - \\
&\mathrm{dbar}_4\, \mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1}^2 \Big(-d_4 \Big(-\dot{\beta}_{0,1}^2\, \mathrm{dbar}_5 - 2\, \xi\, \dot{\beta}_{0,2}\, \sigma_2 - \Big(1 - \frac{\sigma^2\, \mathrm{Cos}[t\, \sigma]\, n_{3,2}}{g}\Big) \\
&\quad \sigma_2^2\, \beta_{0,2}\Big)\, \beta_{1,0}\, (1 + \mathrm{dbar}_2\, \beta_{0,1}^2 + \mathrm{dbar}_1\, \beta_{0,2} + \mathrm{dbar}_6\, \beta_{1,0}^2) + \\
&\mathrm{dbar}_4\, \beta_{0,1} \Big(d_4\, \beta_{1,0} \Big(-\dot{\beta}_{0,1}\, \dot{\beta}_{0,2}\, \mathrm{dbar}_1 - \dot{\beta}_{1,0}\, \dot{\beta}_{1,1}\, \mathrm{dbar}_{12} - 2\, \xi\, \dot{\beta}_{0,1}\, \sigma_1 - \\
&\quad \dot{\beta}_{0,1}^2\, \mathrm{dbar}_2\, \beta_{0,1} - \dot{\beta}_{1,0}^2\, \mathrm{dbar}_{10}\, \beta_{0,1} - \Big(1 - \frac{\sigma^2\, \mathrm{Cos}[t\, \sigma]\, n_{3,2}}{g}\Big)\, \sigma_1^2 \\
&\quad \beta_{0,1} - \dot{\beta}_{0,1}\, \dot{\beta}_{1,0}\, \mathrm{dbar}_{11}\, \beta_{1,0}\Big) - (\mathrm{dbar}_8\, \beta_{0,1}\, \beta_{1,0} + \mathrm{dbar}_7\, \beta_{1,1}) \\
&\quad \Big(-\dot{\beta}_{1,0}^2\, d_5 - 2\, \xi\, \dot{\beta}_{2,0}\, \sigma_{20} - \Big(1 - \frac{\sigma^2\, \mathrm{Cos}[t\, \sigma]\, n_{3,2}}{g}\Big)\, \sigma_{20}^2\, \beta_{2,0}\Big)\Big)\Big)\Big) \Big/ \\
&(-d_4\, d_9\, \mathrm{dbar}_4^2\, \mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1}^3\, \beta_{1,0}^2 - d_4\, \mathrm{dbar}_4^2\, \beta_{0,1}^2\, \beta_{1,0} \\
&\quad (-\mathrm{dbar}_8\, \beta_{0,1}\, \beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7\, \beta_{1,1})) - \\
&\Big((-\mathrm{dbar}_4\, \mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1}^2\, (d_4\, \mathrm{dbar}_3\, \mathrm{dbar}_4\, \beta_{0,1}^2\, \beta_{1,0} - d_4\, \beta_{1,0} \\
&\quad (1 + \mathrm{dbar}_2\, \beta_{0,1}^2 + \mathrm{dbar}_1\, \beta_{0,2} + \mathrm{dbar}_6\, \beta_{1,0}^2)) + \\
&\quad d_4\, \mathrm{dbar}_4\, \mathrm{dhat}_2\, \beta_{0,1}\, \beta_{1,0}^2\, (-\mathrm{dbar}_8\, \beta_{0,1}\, \beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7\, \beta_{1,1})) \\
&\quad \Big(-(-d_4\, d_9\, \mathrm{dbar}_4^2\, \mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1}^4\, \beta_{1,0} - d_4\, \mathrm{dbar}_4^2\, \beta_{0,1}^2\, \beta_{1,0} \\
&\quad (-1 - d_6\, \beta_{0,1}^2 - d_2\, \beta_{1,0}^2 + d_2\, d_4\, \beta_{1,0}^2 - d_1\, \beta_{2,0})) \\
&\quad \Big(-\mathrm{dbar}_4\, \beta_{0,1}\, (-\mathrm{dbar}_8\, \beta_{0,1}\, \beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7\, \beta_{1,1}) \Big(-d_4\, \mathrm{dhat}_2 \\
&\quad \Big(-\dot{\beta}_{0,1}^2\, \mathrm{dbar}_5 - 2\, \xi\, \dot{\beta}_{0,2}\, \sigma_2 - \Big(1 - \frac{\sigma^2\, \mathrm{Cos}[t\, \sigma]\, n_{3,2}}{g}\Big)\, \sigma_2^2\, \beta_{0,2}\Big) \\
&\quad \beta_{1,0}^2 + \mathrm{dbar}_4\, \beta_{0,1} \Big(d_4\, \beta_{1,0} \Big(-\dot{\beta}_{0,1}\, \dot{\beta}_{1,0}\, \mathrm{dhat}_3 - 2\, \xi\, \dot{\beta}_{1,1}\, \sigma_{11} -
\end{aligned}
$$

$$\left(1-\frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_{11}^2\,\beta_{1,1}\Big)-\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}\Big(-\dot{\beta}_{1,0}^{\,2}\,d_5-$$

$$2\,\xi\,\dot{\beta}_{2,0}\,\sigma_{20}-\left(1-\frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_{20}^2\,\beta_{2,0}\Big)\Big)\Big)-\mathrm{dbar}_4$$

$$\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^2\Big(-d_4\Big(-\dot{\beta}_{0,1}^{\,2}\,\mathrm{dbar}_5-2\,\xi\,\dot{\beta}_{0,2}\,\sigma_2-\left(1-\frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)$$

$$\sigma_2^2\,\beta_{0,2}\Big)\,\beta_{1,0}\,(1+\mathrm{dbar}_2\,\beta_{0,1}^2+\mathrm{dbar}_1\,\beta_{0,2}+\mathrm{dbar}_6\,\beta_{1,0}^2)+$$

$$\mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}\Big(d_4\,\beta_{1,0}\Big(-\dot{\beta}_{0,1}\,\dot{\beta}_{0,2}\,\mathrm{dbar}_1-\dot{\beta}_{1,0}\,\dot{\beta}_{1,1}\,\mathrm{dbar}_{12}-$$

$$2\,\xi\,\dot{\beta}_{0,1}\,\sigma_1-\dot{\beta}_{0,1}^{\,2}\,\mathrm{dbar}_2\,\beta_{0,1}-\dot{\beta}_{1,0}^{\,2}\,\mathrm{dbar}_{10}\,\beta_{0,1}-$$

$$\left(1-\frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_1^2\,\beta_{0,1}-\dot{\beta}_{0,1}\,\dot{\beta}_{1,0}\,\mathrm{dbar}_{11}\,\beta_{1,0}\Big)-$$

$$(\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0}+\mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1})\Big(-\dot{\beta}_{1,0}^{\,2}\,d_5-2\,\xi\,\dot{\beta}_{2,0}\,\sigma_{20}-$$

$$\left(1-\frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_{20}^2\,\beta_{2,0}\Big)\Big)\Big)\Big)+(-d_4\,d_9\,\mathrm{dbar}_4^2\,\mathrm{dhat}_1$$

$$\beta_{0,1}^3\,\beta_{1,0}^2-d_4\,\mathrm{dbar}_4^2\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0}\,(-\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0}-\mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1}))$$

$$\Big(-\mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}\,(-1-d_6\,\beta_{0,1}^2-d_2\,\beta_{1,0}^2+d_3\,d_4\,\beta_{1,0}^2-d_1\,\beta_{2,0})\Big(-d_4\,\mathrm{dhat}_2$$

$$\Big(-\dot{\beta}_{0,1}^{\,2}\,\mathrm{dbar}_5-2\,\xi\,\dot{\beta}_{0,2}\,\sigma_2-\left(1-\frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_2^2\,\beta_{0,2}\Big)$$

$$\beta_{1,0}^2+\mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}\Big(d_4\,\beta_{1,0}\Big(-\dot{\beta}_{0,1}\,\dot{\beta}_{1,0}\,\mathrm{dhat}_3-2\,\xi\,\dot{\beta}_{1,1}\,\sigma_{11}-$$

$$\left(1-\frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_{11}^2\,\beta_{1,1}\Big)-\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}\Big(-\dot{\beta}_{1,0}^{\,2}\,d_5-$$

$$2\,\xi\,\dot{\beta}_{2,0}\,\sigma_{20}-\left(1-\frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_{20}^2\,\beta_{2,0}\Big)\Big)\Big)-\mathrm{dbar}_4$$

$$\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^2\Big(-d_4\Big(-\dot{\beta}_{0,1}^{\,2}\,\mathrm{dbar}_5-2\,\xi\,\dot{\beta}_{0,2}\,\sigma_2-\left(1-\frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)$$

$$\sigma_2^2\,\beta_{0,2}\Big)\,\beta_{1,0}\,(d_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0}+d_7\,\beta_{1,1})+\mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}\Big(d_4\,\beta_{1,0}$$

$$\Big(-\dot{\beta}_{1,0}\,\dot{\beta}_{2,0}\,d_1-\dot{\beta}_{0,1}\,\dot{\beta}_{1,1}\,d_{12}-2\,\xi\,\dot{\beta}_{1,0}\,\sigma_{10}-\dot{\beta}_{0,1}\,\dot{\beta}_{1,0}\,d_{11}\,\beta_{0,1}-$$

$$\dot{\beta}_{1,0}^{\,2}\,d_2\,\beta_{1,0}-\dot{\beta}_{0,1}^{\,2}\,d_{10}\,\beta_{1,0}-\left(1-\frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)$$

$$\sigma_{10}^2\,\beta_{1,0}\Big)-(1+d_6\,\beta_{0,1}^2+d_2\,\beta_{1,0}^2+d_1\,\beta_{2,0})\Big(-\dot{\beta}_{1,0}^{\,2}\,d_5-$$

$$2\,\xi\,\dot{\beta}_{2,0}\,\sigma_{20}-\left(1-\frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_{20}^2\,\beta_{2,0}\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big/$$

$$
\begin{aligned}
&((-d_4\, d_9\, \mathrm{dbar}_4^2\, \mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1}^3\, \beta_{1,0}^2 - d_4\, \mathrm{dbar}_4^2\, \beta_{0,1}^2\, \beta_{1,0}\, (-\mathrm{dbar}_8\, \beta_{0,1}\, \\
&\quad \beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7\, \beta_{1,1}))\, \\
&\quad (-(-\mathrm{dbar}_4\, \mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1}^2\, (d_4\, \mathrm{dbar}_3\, \mathrm{dbar}_4\, \beta_{0,1}^2\, \beta_{1,0} - d_4\, \beta_{1,0}\, \\
&\qquad (1 + \mathrm{dbar}_2\, \beta_{0,1}^2 + \mathrm{dbar}_1\, \beta_{0,2} + \mathrm{dbar}_6\, \beta_{1,0}^2)) + \\
&\qquad d_4\, \mathrm{dbar}_4\, \mathrm{dhat}_2\, \beta_{0,1}\, \beta_{1,0}^2\, (-\mathrm{dbar}_8\, \beta_{0,1}\, \beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7\, \beta_{1,1}))\, \\
&\quad (-d_4\, d_9\, \mathrm{dbar}_4^2\, \mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1}^4\, \beta_{1,0} - d_4\, \mathrm{dbar}_4^2\, \beta_{0,1}^2\, \beta_{1,0}\, \\
&\qquad (-1 - d_6\, \beta_{0,1}^2 - d_2\, \beta_{1,0}^2 + d_3\, d_4\, \beta_{1,0}^2 - d_1\, \beta_{2,0})) + (-d_4\, d_9\, \mathrm{dbar}_4^2\, \mathrm{dhat}_1\, \\
&\qquad \beta_{0,1}^3\, \beta_{1,0}^2 - d_4\, \mathrm{dbar}_4^2\, \beta_{0,1}^2\, \beta_{1,0}\, (-\mathrm{dbar}_8\, \beta_{0,1}\, \beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7\, \beta_{1,1}))\, \\
&\quad (d_4\, \mathrm{dbar}_4\, \mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1}^2\, \beta_{1,0}\, (d_8\, \beta_{0,1}\, \beta_{1,0} + d_7\, \beta_{1,1}) + d_4\, \mathrm{dbar}_4\, \\
&\quad \mathrm{dhat}_2\, \beta_{0,1}\, \beta_{1,0}^2\, (-1 - d_6\, \beta_{0,1}^2 - d_2\, \beta_{1,0}^2 + d_3\, d_4\, \beta_{1,0}^2 - d_1\, \beta_{2,0}))))\Big)\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\beta}_{1,1} = &\Big(-\mathrm{dbar}_4\, \beta_{0,1}\, (-\mathrm{dbar}_8\, \beta_{0,1}\, \beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7\, \beta_{1,1})\, \\
&\Big(-d_4\, \mathrm{dhat}_2\, \Big(-\dot{\beta}_{0,1}^2\, \mathrm{dbar}_5 - 2\, \xi\, \dot{\beta}_{0,2}\, \sigma_2 - \Big(1 - \frac{\sigma^2\, \mathrm{Cos}[t\, \sigma]\, n_{3,2}}{g}\Big)\, \sigma_2^2\, \beta_{0,2}\Big)\, \beta_{1,0}^2 + \\
&\quad \mathrm{dbar}_4\, \beta_{0,1}\, \Big(d_4\, \beta_{1,0}\, \Big(-\dot{\beta}_{0,1}\, \dot{\beta}_{1,0}\, \mathrm{dhat}_3 - 2\, \xi\, \dot{\beta}_{1,1}\, \sigma_{11} - \\
&\qquad \Big(1 - \frac{\sigma^2\, \mathrm{Cos}[t\, \sigma]\, n_{3,2}}{g}\Big)\, \sigma_{11}^2\, \beta_{1,1}\Big) - \mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1}\, \\
&\qquad \Big(-\dot{\beta}_{1,0}^2\, d_5 - 2\, \xi\, \dot{\beta}_{2,0}\, \sigma_{20} - \Big(1 - \frac{\sigma^2\, \mathrm{Cos}[t\, \sigma]\, n_{3,2}}{g}\Big)\, \sigma_{20}^2\, \beta_{2,0}\Big)\Big)\Big) - \mathrm{dbar}_4\, \\
&\quad \mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1}^2\, \Big(-d_4\, \Big(-\dot{\beta}_{0,1}^2\, \mathrm{dbar}_5 - 2\, \xi\, \dot{\beta}_{0,2}\, \sigma_2 - \Big(1 - \frac{\sigma^2\, \mathrm{Cos}[t\, \sigma]\, n_{3,2}}{g}\Big)\, \sigma_2^2\, \beta_{0,2}\Big)\, \\
&\qquad \beta_{1,0}\, (1 + \mathrm{dbar}_2\, \beta_{0,1}^2 + \mathrm{dbar}_1\, \beta_{0,2} + \mathrm{dbar}_6\, \beta_{1,0}^2) + \\
&\qquad \mathrm{dbar}_4\, \beta_{0,1}\, \Big(d_4\, \beta_{1,0}\, \Big(-\dot{\beta}_{0,1}\, \dot{\beta}_{0,2}\, \mathrm{dbar}_1 - \dot{\beta}_{1,0}\, \dot{\beta}_{1,1}\, \mathrm{dbar}_{12} - 2\, \xi\, \dot{\beta}_{0,1}\, \sigma_1 - \\
&\qquad\quad \dot{\beta}_{0,1}^2\, \mathrm{dbar}_2\, \beta_{0,1} - \dot{\beta}_{1,0}^2\, \mathrm{dbar}_{10}\, \beta_{0,1} - \Big(1 - \frac{\sigma^2\, \mathrm{Cos}[t\, \sigma]\, n_{3,2}}{g}\Big)\, \sigma_1^2\, \\
&\qquad\quad \beta_{0,1} - \dot{\beta}_{0,1}\, \dot{\beta}_{1,0}\, \mathrm{dbar}_{11}\, \beta_{1,0}\Big) - (\mathrm{dbar}_8\, \beta_{0,1}\, \beta_{1,0} + \mathrm{dbar}_7\, \beta_{1,1})\, \\
&\qquad \Big(-\dot{\beta}_{1,0}^2\, d_5 - 2\, \xi\, \dot{\beta}_{2,0}\, \sigma_{20} - \Big(1 - \frac{\sigma^2\, \mathrm{Cos}[t\, \sigma]\, n_{3,2}}{g}\Big)\, \sigma_{20}^2\, \beta_{2,0}\Big)\Big)\Big)\Big)\Big) \Big/ \\
&(-d_4\, d_9\, \mathrm{dbar}_4^2\, \mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1}^3\, \beta_{1,0}^2 - d_4\, \mathrm{dbar}_4^2\, \beta_{0,1}^2\, \beta_{1,0}\, \\
&\quad (-\mathrm{dbar}_8\, \beta_{0,1}\, \beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7\, \beta_{1,1})) - \\
&\Big((-\mathrm{dbar}_4\, \mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1}^2\, (d_4\, \mathrm{dbar}_3\, \mathrm{dbar}_4\, \beta_{0,1}^2\, \beta_{1,0} - \\
&\qquad d_4\, \beta_{1,0}\, (1 + \mathrm{dbar}_2\, \beta_{0,1}^2 + \mathrm{dbar}_1\, \beta_{0,2} + \mathrm{dbar}_6\, \beta_{1,0}^2)) +
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& d_4\,\mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_2\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0}^2\,(-\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1}))\\
& \Big(-(-d_4\,d_9\,\mathrm{dbar}_4^2\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^4\,\beta_{1,0} - d_4\,\mathrm{dbar}_4^2\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0}\\
& \quad (-1 - d_6\,\beta_{0,1}^2 - d_2\,\beta_{1,0}^2 + d_3\,d_4\,\beta_{1,0}^2 - d_1\,\beta_{2,0}))\\
& \quad \Big(-\mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}\,(-\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1})\,\Big(-d_4\,\mathrm{dhat}_2\\
& \quad \Big(-\dot{\beta}_{0,1}^2\,\mathrm{dbar}_5 - 2\,\xi\,\dot{\beta}_{0,2}\,\sigma_2 - \Big(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\Big)\,\sigma_2^2\,\beta_{0,2}\Big)\,\beta_{1,0}^2 +\\
& \quad \mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}\,\Big(d_4\,\beta_{1,0}\,\Big(-\dot{\beta}_{0,1}\,\dot{\beta}_{1,0}\,\mathrm{dhat}_3 - 2\,\xi\,\dot{\beta}_{1,1}\,\sigma_{11} -\\
& \quad \Big(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\Big)\,\sigma_{11}^2\,\beta_{1,1}\Big) - \mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}\,\Big(-\dot{\beta}_{1,0}^2\,d_5 - 2\,\xi\\
& \quad \dot{\beta}_{2,0}\,\sigma_{20} - \Big(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\Big)\,\sigma_{20}^2\,\beta_{2,0}\Big)\Big)\Big) - \mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_1\\
& \quad \beta_{0,1}^2\,\Big(-d_4\,\Big(-\dot{\beta}_{0,1}^2\,\mathrm{dbar}_5 - 2\,\xi\,\dot{\beta}_{0,2}\,\sigma_2 - \Big(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\Big)\,\sigma_2^2\,\beta_{0,2}\Big)\\
& \quad \beta_{1,0}\,(1 + \mathrm{dbar}_2\,\beta_{0,1}^2 + \mathrm{dbar}_1\,\beta_{0,2} + \mathrm{dbar}_6\,\beta_{1,0}^2) + \mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}\\
& \quad \Big(d_4\,\beta_{1,0}\,\Big(-\dot{\beta}_{0,1}\,\dot{\beta}_{0,2}\,\mathrm{dbar}_1 - \dot{\beta}_{1,0}\,\dot{\beta}_{1,1}\,\mathrm{dbar}_{12} - 2\,\xi\,\dot{\beta}_{0,1}\,\sigma_1 - \dot{\beta}_{0,1}^2\\
& \quad \mathrm{dbar}_2\,\beta_{0,1} - \dot{\beta}_{1,0}^2\,\mathrm{dbar}_{10}\,\beta_{0,1} - \Big(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\Big)\,\sigma_1^2\\
& \quad \beta_{0,1} - \dot{\beta}_{0,1}\,\dot{\beta}_{1,0}\,\mathrm{dbar}_{11}\,\beta_{1,0}\Big) - (\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0} + \mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1})\\
& \quad \Big(-\dot{\beta}_{1,0}^2\,d_5 - 2\,\xi\,\dot{\beta}_{2,0}\,\sigma_{20} - \Big(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\Big)\,\sigma_{20}^2\,\beta_{2,0}\Big)\Big)\Big)\Big) +\\
& (-d_4\,d_9\,\mathrm{dbar}_4^2\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^3\,\beta_{1,0}^2 - d_4\,\mathrm{dbar}_4^2\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0}\\
& \quad (-\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1}))\\
& \quad \Big(-\mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}\,(-1 - d_6\,\beta_{0,1}^2 - d_2\,\beta_{1,0}^2 + d_3\,d_4\,\beta_{1,0}^2 - d_1\,\beta_{2,0})\\
& \quad \Big(-d_4\,\mathrm{dhat}_2\,\Big(-\dot{\beta}_{0,1}^2\,\mathrm{dbar}_5 - 2\,\xi\,\dot{\beta}_{0,2}\,\sigma_2 - \Big(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\Big)\,\sigma_2^2\\
& \quad \beta_{0,2}\Big)\,\beta_{1,0}^2 + \mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}\,\Big(d_4\,\beta_{1,0}\,\Big(-\dot{\beta}_{0,1}\,\dot{\beta}_{1,0}\,\mathrm{dhat}_3 - 2\,\xi\,\dot{\beta}_{1,1}\,\sigma_{11} -\\
& \quad \Big(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\Big)\,\sigma_{11}^2\,\beta_{1,1}\Big) - \mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}\,\Big(-\dot{\beta}_{1,0}^2\,d_5 - 2\,\xi\\
& \quad \dot{\beta}_{2,0}\,\sigma_{20} - \Big(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\Big)\,\sigma_{20}^2\,\beta_{2,0}\Big)\Big)\Big) - \mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_1\\
& \quad \beta_{0,1}^2\,\Big(-d_4\,\Big(-\dot{\beta}_{0,1}^2\,\mathrm{dbar}_5 - 2\,\xi\,\dot{\beta}_{0,2}\,\sigma_2 - \Big(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\Big)\,\sigma_2^2\,\beta_{0,2}\Big)\\
& \quad \beta_{1,0}\,(d_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0} + d_7\,\beta_{1,1}) + \mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}\,\Big(d_4\,\beta_{1,0}\,\Big(-\dot{\beta}_{1,0}\,\dot{\beta}_{2,0}\,d_1 -\\
& \quad \dot{\beta}_{0,1}\,\dot{\beta}_{1,1}\,d_{12} - 2\,\xi\,\dot{\beta}_{1,0}\,\sigma_{10} - \dot{\beta}_{0,1}\,\dot{\beta}_{1,0}\,d_{11}\,\beta_{0,1} - \dot{\beta}_{1,0}^2\,d_2\,\beta_{1,0} -\\
& \quad \dot{\beta}_{0,1}^2\,d_{10}\,\beta_{1,0} - \Big(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\Big)\,\sigma_{10}^2\,\beta_{1,0}\Big) -\\
& \quad (1 + d_6\,\beta_{0,1}^2 + d_2\,\beta_{1,0}^2 + d_1\,\beta_{2,0})\,\Big(-\dot{\beta}_{1,0}^2\,d_5 - 2\,\xi\,\dot{\beta}_{2,0}\,\sigma_{20} -\\
& \quad \Big(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\Big)\,\sigma_{20}^2\,\beta_{2,0}\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big) \Big/
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&((-d_4\, d_9\, \mathrm{dbar}_4^2\, \mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1}^3\, \beta_{1,0}^2 - d_4\, \mathrm{dbar}_4^2\, \beta_{0,1}^2\, \beta_{1,0} \\
&\qquad (-\mathrm{dbar}_8\, \beta_{0,1}\, \beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7\, \beta_{1,1})) \\
&\quad (-(-\mathrm{dbar}_4\, \mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1}^2\, (d_4\, \mathrm{dbar}_3\, \mathrm{dbar}_4\, \beta_{0,1}^2\, \beta_{1,0} - \\
&\qquad\qquad d_4\, \beta_{1,0}\, (1 + \mathrm{dbar}_2\, \beta_{0,1}^2 + \mathrm{dbar}_1\, \beta_{0,2} + \mathrm{dbar}_6\, \beta_{1,0}^2)) + \\
&\qquad d_4\, \mathrm{dbar}_4\, \mathrm{dhat}_2\, \beta_{0,1}\, \beta_{1,0}^2\, (-\mathrm{dbar}_8\, \beta_{0,1}\, \beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7\, \beta_{1,1})) \\
&\quad (-d_4\, d_9\, \mathrm{dbar}_4^2\, \mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1}^4\, \beta_{1,0} - d_4\, \mathrm{dbar}_4^2\, \beta_{0,1}^2\, \beta_{1,0} \\
&\qquad (-1 - d_6\, \beta_{0,1}^2 - d_2\, \beta_{1,0}^2 + d_3\, d_4\, \beta_{1,0}^2 - d_1\, \beta_{2,0})) + \\
&\quad (-d_4\, d_9\, \mathrm{dbar}_4^2\, \mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1}^3\, \beta_{1,0}^2 - d_4\, \mathrm{dbar}_4^2\, \beta_{0,1}^2\, \beta_{1,0} \\
&\qquad (-\mathrm{dbar}_8\, \beta_{0,1}\, \beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7\, \beta_{1,1})) \\
&\quad (d_4\, \mathrm{dbar}_4\, \mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1}^2\, \beta_{1,0}\, (d_8\, \beta_{0,1}\, \beta_{1,0} + d_7\, \beta_{1,1}) + \\
&\qquad d_4\, \mathrm{dbar}_4\, \mathrm{dhat}_2\, \beta_{0,1}\, \beta_{1,0}^2\, (-1 - d_6\, \beta_{0,1}^2 - d_2\, \beta_{1,0}^2 + d_3\, d_4\, \beta_{1,0}^2 - d_1\, \beta_{2,0}))))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\beta}_{0,2} = \Bigg(&- (-d_4\, d_9\, \mathrm{dbar}_4^2\, \mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1}^4\, \beta_{1,0} - \\
&\quad d_4\, \mathrm{dbar}_4^2\, \beta_{0,1}^2\, \beta_{1,0}\, (-1 - d_6\, \beta_{0,1}^2 - d_2\, \beta_{1,0}^2 + d_3\, d_4\, \beta_{1,0}^2 - d_1\, \beta_{2,0})) \\
&\Bigg(-\mathrm{dbar}_4\, \beta_{0,1}\, (-\mathrm{dbar}_8\, \beta_{0,1}\, \beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7\, \beta_{1,1}) \\
&\quad \Bigg(-d_4\, \mathrm{dhat}_2 \left(-\dot{\beta}_{0,1}^2\, \mathrm{dbar}_5 - 2\, \xi\, \dot{\beta}_{0,2}\, \sigma_2 - \left(1 - \frac{\sigma^2\, \mathrm{Cos}[t\, \sigma]\, n_{3,2}}{g}\right) \sigma_2^2\, \beta_{0,2}\right) \\
&\quad \beta_{1,0}^2 + \mathrm{dbar}_4\, \beta_{0,1} \Bigg(d_4\, \beta_{1,0} \Bigg(-\dot{\beta}_{0,1}\, \dot{\beta}_{1,0}\, \mathrm{dhat}_3 - 2\, \xi\, \dot{\beta}_{1,1}\, \sigma_{11} - \\
&\qquad \left(1 - \frac{\sigma^2\, \mathrm{Cos}[t\, \sigma]\, n_{3,2}}{g}\right) \sigma_{11}^2\, \beta_{1,1}\Bigg) - \mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1} \Bigg(-\dot{\beta}_{1,0}^2\, d_5 - \\
&\qquad 2\, \xi\, \dot{\beta}_{2,0}\, \sigma_{20} - \left(1 - \frac{\sigma^2\, \mathrm{Cos}[t\, \sigma]\, n_{3,2}}{g}\right) \sigma_{20}^2\, \beta_{2,0}\Bigg)\Bigg)\Bigg) - \mathrm{dbar}_4\, \mathrm{dhat}_1 \\
&\quad \beta_{0,1}^2 \left(-d_4 \left(-\dot{\beta}_{0,1}^2\, \mathrm{dbar}_5 - 2\, \xi\, \dot{\beta}_{0,2}\, \sigma_2 - \left(1 - \frac{\sigma^2\, \mathrm{Cos}[t\, \sigma]\, n_{3,2}}{g}\right) \sigma_2^2\, \beta_{0,2}\right)\right.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\beta_{1,0}\,(1+\mathrm{dbar}_2\,\beta_{0,1}^2+\mathrm{dbar}_1\,\beta_{0,2}+\mathrm{dbar}_6\,\beta_{1,0}^2)+\\
&\mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}\Big(d_4\,\beta_{1,0}\Big(-\dot{\beta}_{0,1}\,\dot{\beta}_{0,2}\,\mathrm{dbar}_1-\dot{\beta}_{1,0}\,\dot{\beta}_{1,1}\,\mathrm{dbar}_{12}-2\,\xi\,\dot{\beta}_{0,1}\,\sigma_1-\\
&\dot{\beta}_{0,1}{}^2\,\mathrm{dbar}_2\,\beta_{0,1}-\dot{\beta}_{1,0}{}^2\,\mathrm{dbar}_{10}\,\beta_{0,1}-\left(1-\frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_1^2\\
&\beta_{0,1}-\dot{\beta}_{0,1}\,\dot{\beta}_{1,0}\,\mathrm{dbar}_{11}\,\beta_{1,0}\Big)-(\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0}+\mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1})\\
&\Big(-\dot{\beta}_{1,0}{}^2\,d_5-2\,\xi\,\dot{\beta}_{2,0}\,\sigma_{20}-\left(1-\frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_{20}^2\,\beta_{2,0}\Big)\Big)\Big)\Big)+\\
&(-d_4\,d_9\,\mathrm{dbar}_4^2\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^3\,\beta_{1,0}^2-d_4\,\mathrm{dbar}_4^2\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0}\\
&\quad(-\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0}-\mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1}))\\
&\Big(-\mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}\,(-1-d_6\,\beta_{0,1}^2-d_2\,\beta_{1,0}^2+d_3\,d_4\,\beta_{1,0}^2-d_1\,\beta_{2,0})\\
&\Big(-d_4\,\mathrm{dhat}_2\Big(-\dot{\beta}_{0,1}{}^2\,\mathrm{dbar}_5-2\,\xi\,\dot{\beta}_{0,2}\,\sigma_2-\left(1-\frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_2^2\,\beta_{0,2}\Big)\\
&\beta_{1,0}^2+\mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}\Big(d_4\,\beta_{1,0}\Big(-\dot{\beta}_{0,1}\,\dot{\beta}_{1,0}\,\mathrm{dhat}_3-2\,\xi\,\dot{\beta}_{1,1}\,\sigma_{11}-\\
&\left(1-\frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_{11}^2\,\beta_{1,1}\Big)-\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}\Big(-\dot{\beta}_{1,0}{}^2\,d_5-\\
&2\,\xi\,\dot{\beta}_{2,0}\,\sigma_{20}-\left(1-\frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_{20}^2\,\beta_{2,0}\Big)\Big)\Big)-\mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_1\\
&\beta_{0,1}^2\Big(-d_4\Big(-\dot{\beta}_{0,1}{}^2\,\mathrm{dbar}_5-2\,\xi\,\dot{\beta}_{0,2}\,\sigma_2-\left(1-\frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_2^2\,\beta_{0,2}\Big)\\
&\beta_{1,0}\,(d_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0}+d_7\,\beta_{1,1})+\mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}\\
&\Big(d_4\,\beta_{1,0}\Big(-\dot{\beta}_{1,0}\,\dot{\beta}_{2,0}\,d_1-\dot{\beta}_{0,1}\,\dot{\beta}_{1,1}\,d_{12}-2\,\xi\,\dot{\beta}_{1,0}\,\sigma_{10}-\dot{\beta}_{0,1}\,\dot{\beta}_{1,0}\,d_{11}\,\beta_{0,1}-\\
&\dot{\beta}_{1,0}{}^2\,d_2\,\beta_{1,0}-\dot{\beta}_{0,1}{}^2\,d_{10}\,\beta_{1,0}-\left(1-\frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_{10}^2\,\beta_{1,0}\Big)-\\
&(1+d_6\,\beta_{0,1}^2+d_2\,\beta_{1,0}^2+d_1\,\beta_{2,0})\Big(-\dot{\beta}_{1,0}{}^2\,d_5-2\,\xi\,\dot{\beta}_{2,0}\,\sigma_{20}-\\
&\left(1-\frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_{20}^2\,\beta_{2,0}\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big/\\
&(-(-\mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^2\,(d_4\,\mathrm{dbar}_3\,\mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0}-d_4\,\beta_{1,0}\\
&\qquad(1+\mathrm{dbar}_2\,\beta_{0,1}^2+\mathrm{dbar}_1\,\beta_{0,2}+\mathrm{dbar}_6\,\beta_{1,0}^2))+\\
&\quad d_4\,\mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_2\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0}^2\,(-\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0}-\mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1}))\\
&\quad(-d_4\,d_9\,\mathrm{dbar}_4^2\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^4\,\beta_{1,0}-d_4\,\mathrm{dbar}_4^2\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0}\\
&\quad(-1-d_6\,\beta_{0,1}^2-d_2\,\beta_{1,0}^2+d_3\,d_4\,\beta_{1,0}^2-d_1\,\beta_{2,0}))+\\
&(-d_4\,d_9\,\mathrm{dbar}_4^2\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^3\,\beta_{1,0}^2-d_4\,\mathrm{dbar}_4^2\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0}\\
&\quad(-\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0}-\mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1}))\\
&(d_4\,\mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0}\,(d_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0}+d_7\,\beta_{1,1})+\\
&\quad d_4\,\mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_2\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0}^2\,(-1-d_6\,\beta_{0,1}^2-d_2\,\beta_{1,0}^2+d_3\,d_4\,\beta_{1,0}^2-d_1\,\beta_{2,0})))
\end{aligned}
\tag{98}
$$

Ενώ στη δεύτερη περίπτωση οι εξισώσεις (88)-(92) μετά την επίλυσή τους θα είναι:

$$
\begin{aligned}
\ddot{\beta}_{1,0} = {} & \frac{-\dot{\beta}_{1,0}^{2}\, d_5 - \left(1 - \frac{\sigma^2 \operatorname{Cos}[t\,\sigma]\, n_{3,2}}{g}\right) \sigma_{20}^{2}\, \beta_{2,0}}{d_4\, \beta_{1,0}} - \frac{1}{d_4\, \beta_{1,0}} \\
& \Bigg(-\frac{1}{\mathrm{dbar}_4\, \mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1}^{2}} \Bigg(-d_4\, \mathrm{dhat}_2 \left(-\dot{\beta}_{0,1}^{2}\, \mathrm{dbar}_5 - \left(1 - \frac{\sigma^2 \operatorname{Cos}[t\,\sigma]\, n_{3,2}}{g}\right) \sigma_{2}^{2}\, \beta_{0,2}\right) \\
& \beta_{1,0}^{2} + \mathrm{dbar}_4\, \beta_{0,1} \Bigg(d_4\, \beta_{1,0} \left(-\dot{\beta}_{0,1}\, \dot{\beta}_{1,0}\, \mathrm{dhat}_3 - \left(1 - \frac{\sigma^2 \operatorname{Cos}[t\,\sigma]\, n_{3,2}}{g}\right) \sigma_{11}^{2} \right. \\
& \left. \beta_{1,1}\right) - \mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1} \left(-\dot{\beta}_{1,0}^{2}\, d_5 - \left(1 - \frac{\sigma^2 \operatorname{Cos}[t\,\sigma]\, n_{3,2}}{g}\right) \sigma_{20}^{2}\, \beta_{2,0}\right)\Bigg)\Bigg) - \\
& \Bigg(d_4\, \mathrm{dhat}_2\, \beta_{1,0}^{2} \Bigg(-(-d_4\, d_9\, \mathrm{dbar}_4^{2}\, \mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1}^{4}\, \beta_{1,0} - d_4\, \mathrm{dbar}_4^{2}\, \beta_{0,1}^{2}\, \beta_{1,0} \\
& (-1 - d_6\, \beta_{0,1}^{2} - d_2\, \beta_{1,0}^{2} + d_3\, d_4\, \beta_{1,0}^{2} - d_1\, \beta_{2,0})) \\
& \Bigg(-\mathrm{dbar}_4\, \beta_{0,1}\, (-\mathrm{dbar}_8\, \beta_{0,1}\, \beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7\, \beta_{1,1}) \Bigg(-d_4\, \mathrm{dhat}_2 \\
& \left(-\dot{\beta}_{0,1}^{2}\, \mathrm{dbar}_5 - \left(1 - \frac{\sigma^2 \operatorname{Cos}[t\,\sigma]\, n_{3,2}}{g}\right) \sigma_{2}^{2}\, \beta_{0,2}\right) \beta_{1,0}^{2} + \mathrm{dbar}_4\, \beta_{0,1} \\
& \left(d_4\, \beta_{1,0} \left(-\dot{\beta}_{0,1}\, \dot{\beta}_{1,0}\, \mathrm{dhat}_3 - \left(1 - \frac{\sigma^2 \operatorname{Cos}[t\,\sigma]\, n_{3,2}}{g}\right) \sigma_{11}^{2}\, \beta_{1,1}\right) - \right. \\
& \left. \mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1} \left(-\dot{\beta}_{1,0}^{2}\, d_5 - \left(1 - \frac{\sigma^2 \operatorname{Cos}[t\,\sigma]\, n_{3,2}}{g}\right) \sigma_{20}^{2}\, \beta_{2,0}\right)\right)\Bigg) - \\
& \mathrm{dbar}_4\, \mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1}^{2} \Bigg(-d_4 \left(-\dot{\beta}_{0,1}^{2}\, \mathrm{dbar}_5 - \left(1 - \frac{\sigma^2 \operatorname{Cos}[t\,\sigma]\, n_{3,2}}{g}\right) \sigma_{2}^{2}\, \beta_{0,2}\right) \\
& \beta_{1,0}\, (1 + \mathrm{dbar}_2\, \beta_{0,1}^{2} + \mathrm{dbar}_1\, \beta_{0,2} + \mathrm{dbar}_6\, \beta_{1,0}^{2}) + \mathrm{dbar}_4\, \beta_{0,1} \\
& \Bigg(d_4\, \beta_{1,0} \Bigg(-\dot{\beta}_{0,1}\, \dot{\beta}_{0,2}\, \mathrm{dbar}_1 - \dot{\beta}_{1,0}\, \dot{\beta}_{1,1}\, \mathrm{dbar}_{12} - \dot{\beta}_{0,1}^{2}\, \mathrm{dbar}_2\, \beta_{0,1} - \\
& \dot{\beta}_{1,0}^{2}\, \mathrm{dbar}_{10}\, \beta_{0,1} - \left(1 - \frac{\sigma^2 \operatorname{Cos}[t\,\sigma]\, n_{3,2}}{g}\right) \sigma_{1}^{2}\, \beta_{0,1} - \\
& \dot{\beta}_{0,1}\, \dot{\beta}_{1,0}\, \mathrm{dbar}_{11}\, \beta_{1,0}\Bigg) - (\mathrm{dbar}_8\, \beta_{0,1}\, \beta_{1,0} + \mathrm{dbar}_7\, \beta_{1,1}) \\
& \left(-\dot{\beta}_{1,0}^{2}\, d_5 - \left(1 - \frac{\sigma^2 \operatorname{Cos}[t\,\sigma]\, n_{3,2}}{g}\right) \sigma_{20}^{2}\, \beta_{2,0}\right)\Bigg)\Bigg)\Bigg) + \\
& (-d_4\, d_9\, \mathrm{dbar}_4^{2}\, \mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1}^{3}\, \beta_{1,0}^{2} - d_4\, \mathrm{dbar}_4^{2}\, \beta_{0,1}^{2}\, \beta_{1,0}\, (-\mathrm{dbar}_8 \\
& \beta_{0,1}\, \beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7\, \beta_{1,1})) \\
& \Bigg(-\mathrm{dbar}_4\, \beta_{0,1}\, (-1 - d_6\, \beta_{0,1}^{2} - d_2\, \beta_{1,0}^{2} + d_3\, d_4\, \beta_{1,0}^{2} - d_1\, \beta_{2,0}) \\
& \Bigg(-d_4\, \mathrm{dhat}_2 \left(-\dot{\beta}_{0,1}^{2}\, \mathrm{dbar}_5 - \left(1 - \frac{\sigma^2 \operatorname{Cos}[t\,\sigma]\, n_{3,2}}{g}\right) \sigma_{2}^{2}\, \beta_{0,2}\right) \beta_{1,0}^{2} + \mathrm{dbar}_4 \\
& \beta_{0,1} \left(d_4\, \beta_{1,0} \left(-\dot{\beta}_{0,1}\, \dot{\beta}_{1,0}\, \mathrm{dhat}_3 - \left(1 - \frac{\sigma^2 \operatorname{Cos}[t\,\sigma]\, n_{3,2}}{g}\right) \sigma_{11}^{2}\, \beta_{1,1}\right) - \right. \\
& \left. \mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1} \left(-\dot{\beta}_{1,0}^{2}\, d_5 - \left(1 - \frac{\sigma^2 \operatorname{Cos}[t\,\sigma]\, n_{3,2}}{g}\right) \sigma_{20}^{2}\, \beta_{2,0}\right)\right)\Bigg) - \\
& \mathrm{dbar}_4\, \mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1}^{2} \left(-d_4 \left(-\dot{\beta}_{0,1}^{2}\, \mathrm{dbar}_5 - \left(1 - \frac{\sigma^2 \operatorname{Cos}[t\,\sigma]\, n_{3,2}}{g}\right) \sigma_{2}^{2}\, \beta_{0,2}\right)\right.
\end{aligned}
$$

$$\beta_{1,0}\,(d_8\,\beta_{0,1}\beta_{1,0} + d_7\,\beta_{1,1}) + \mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}\Big(d_4\,\beta_{1,0}\Big(-\dot{\beta}_{1,0}\,\dot{\beta}_{2,0}\,d_1 -$$

$$\dot{\beta}_{0,1}\dot{\beta}_{1,1}\,d_{12} - \dot{\beta}_{0,1}\dot{\beta}_{1,0}\,d_{11}\,\beta_{0,1} - \dot{\beta}_{1,0}^{\,2}\,d_2\,\beta_{1,0} - \dot{\beta}_{0,1}^{\,2}\,d_{10}\,\beta_{1,0} -$$

$$\left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_{10}^2\,\beta_{1,0}\Big) - (1 + d_6\,\beta_{0,1}^2 + d_2\,\beta_{1,0}^2 +$$

$$d_1\,\beta_{2,0})\left(-\dot{\beta}_{1,0}^{\,2}\,d_5 - \left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_{20}^2\,\beta_{2,0}\right)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big) \Big/$$

$$(\mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^2\,(-(-\mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^2\,(d_4\,\mathrm{dbar}_3\,\mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0} -$$

$$d_4\,\beta_{1,0}\,(1 + \mathrm{dbar}_2\,\beta_{0,1}^2 + \mathrm{dbar}_1\,\beta_{0,2} + \mathrm{dbar}_6\,\beta_{1,0}^2)) +$$

$$d_4\,\mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_2\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0}^2\,(-\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1}))$$

$$(-d_4\,d_9\,\mathrm{dbar}_4^2\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^4\,\beta_{1,0} - d_4\,\mathrm{dbar}_4^2\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0}$$

$$(-1 - d_6\,\beta_{0,1}^2 - d_2\,\beta_{1,0}^2 + d_3\,d_4\,\beta_{1,0}^2 - d_1\,\beta_{2,0})) +$$

$$(-d_4\,d_9\,\mathrm{dbar}_4^2\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^3\,\beta_{1,0}^2 - d_4\,\mathrm{dbar}_4^2\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0}$$

$$(-\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1}))$$

$$(d_4\,\mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0}\,(d_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0} + d_7\,\beta_{1,1}) +$$

$$d_4\,\mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_2\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0}^2\,(-1 - d_6\,\beta_{0,1}^2 - d_2\,\beta_{1,0}^2 + d_3\,d_4\,\beta_{1,0}^2 - d_1\,\beta_{2,0}))))$$

$$\frac{1}{\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}}\Big(d_4\,\beta_{1,0}\Big(\Big(-\mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}\,(-\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1})$$

$$\left(-d_4\,\mathrm{dhat}_2\left(-\dot{\beta}_{0,1}^{\,2}\,\mathrm{dbar}_5 - \left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_2^2\,\beta_{0,2}\right)\beta_{1,0}^2 + \mathrm{dbar}\right.$$

$$\beta_{0,1}\left(d_4\,\beta_{1,0}\left(-\dot{\beta}_{0,1}\dot{\beta}_{1,0}\,\mathrm{dhat}_3 - \left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_{11}^2\,\beta_{1,1}\right) -\right.$$

$$\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}\left(-\dot{\beta}_{1,0}^{\,2}\,d_5 - \left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_{20}^2\,\beta_{2,0}\right)\Big)\Big) -$$

$$\mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^2\left(-d_4\left(-\dot{\beta}_{0,1}^{\,2}\,\mathrm{dbar}_5 - \left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_2^2\,\beta_{0,2}\right)\right.$$

$$\beta_{1,0}\,(1 + \mathrm{dbar}_2\,\beta_{0,1}^2 + \mathrm{dbar}_1\,\beta_{0,2} + \mathrm{dbar}_6\,\beta_{1,0}^2) + \mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}$$

$$\Big(d_4\,\beta_{1,0}\Big(-\dot{\beta}_{0,1}\dot{\beta}_{0,2}\,\mathrm{dbar}_1 - \dot{\beta}_{1,0}\dot{\beta}_{1,1}\,\mathrm{dbar}_{12} - \dot{\beta}_{0,1}^{\,2}\,\mathrm{dbar}_2\,\beta_{0,1} -$$

$$\dot{\beta}_{1,0}^{\,2}\,\mathrm{dbar}_{10}\,\beta_{0,1} - \left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_1^2\,\beta_{0,1} -$$

$$\dot{\beta}_{0,1}\dot{\beta}_{1,0}\,\mathrm{dbar}_{11}\,\beta_{1,0}\Big) - (\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0} + \mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1})$$

$$\left(-\dot{\beta}_{1,0}^{\,2}\,d_5 - \left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_{20}^2\,\beta_{2,0}\right)\Big)\Big)\Big) \Big/$$

$$(-d_4\,d_9\,\mathrm{dbar}_4^2\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^3\,\beta_{1,0}^2 - d_4\,\mathrm{dbar}_4^2\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0}$$

$$(-\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1})) -$$

$$\Big((-\mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^2\,(d_4\,\mathrm{dbar}_3\,\mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0} - d_4\,\beta_{1,0}$$

$$(1 + \mathrm{dbar}_2\,\beta_{0,1}^2 + \mathrm{dbar}_1\,\beta_{0,2} + \mathrm{dbar}_6\,\beta_{1,0}^2)) + d_4$$

$$\mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_2\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0}^2\,(-\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1}))$$

$$\Big(-(-d_4\, d_9\, \mathrm{dbar}_4^2\, \mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1}^4\, \beta_{1,0} - d_4\, \mathrm{dbar}_4^2\, \beta_{0,1}^2\, \beta_{1,0}$$

$$(-1 - d_6\, \beta_{0,1}^2 - d_2\, \beta_{1,0}^2 + d_3\, d_4\, \beta_{1,0}^2 - d_1\, \beta_{2,0}))$$

$$\Big(-\mathrm{dbar}_4\, \beta_{0,1}\, (-\mathrm{dbar}_8\, \beta_{0,1}\, \beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7\, \beta_{1,1})$$

$$\Big(-d_4\, \mathrm{dhat}_2 \Big(-\dot{\beta}_{0,1}^2\, \mathrm{dbar}_5 - \Big(1 - \frac{\sigma^2\, \mathrm{Cos}[t\, \sigma]\, n_{3,2}}{g}\Big)\, \sigma_2^2\, \beta_{0,2}\Big)\, \beta_{1,0}^2 +$$

$$\mathrm{dbar}_4\, \beta_{0,1} \Big(d_4\, \beta_{1,0} \Big(-\dot{\beta}_{0,1}\, \dot{\beta}_{1,0}\, \mathrm{dhat}_3 - \Big(1 - \frac{\sigma^2\, \mathrm{Cos}[t\, \sigma]\, n_{3,2}}{g}\Big)$$

$$\sigma_{11}^2\, \beta_{1,1}\Big) - \mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1} \Big(-\dot{\beta}_{1,0}^2\, d_5 -$$

$$\Big(1 - \frac{\sigma^2\, \mathrm{Cos}[t\, \sigma]\, n_{3,2}}{g}\Big)\, \sigma_{20}^2\, \beta_{2,0}\Big)\Big)\Big) - \mathrm{dbar}_4\, \mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1}^2$$

$$\Big(-d_4 \Big(-\dot{\beta}_{0,1}^2\, \mathrm{dbar}_5 - \Big(1 - \frac{\sigma^2\, \mathrm{Cos}[t\, \sigma]\, n_{3,2}}{g}\Big)\, \sigma_2^2\, \beta_{0,2}\Big)\, \beta_{1,0}$$

$$(1 + \mathrm{dbar}_2\, \beta_{0,1}^2 + \mathrm{dbar}_1\, \beta_{0,2} + \mathrm{dbar}_6\, \beta_{1,0}^2) + \mathrm{dbar}_4\, \beta_{0,1} \Big(d_4\, \beta_{1,0}$$

$$\Big(-\dot{\beta}_{0,1}\, \dot{\beta}_{0,2}\, \mathrm{dbar}_1 - \dot{\beta}_{1,0}\, \dot{\beta}_{1,1}\, \mathrm{dbar}_{12} - \dot{\beta}_{0,1}^2\, \mathrm{dbar}_2\, \beta_{0,1} -$$

$$\dot{\beta}_{1,0}^2\, \mathrm{dbar}_{10}\, \beta_{0,1} - \Big(1 - \frac{\sigma^2\, \mathrm{Cos}[t\, \sigma]\, n_{3,2}}{g}\Big)\, \sigma_1^2\, \beta_{0,1} -$$

$$\dot{\beta}_{0,1}\, \dot{\beta}_{1,0}\, \mathrm{dbar}_{11}\, \beta_{1,0}\Big) - (\mathrm{dbar}_8\, \beta_{0,1}\, \beta_{1,0} + \mathrm{dbar}_7\, \beta_{1,1})$$

$$\Big(-\dot{\beta}_{1,0}^2\, d_5 - \Big(1 - \frac{\sigma^2\, \mathrm{Cos}[t\, \sigma]\, n_{3,2}}{g}\Big)\, \sigma_{20}^2\, \beta_{2,0}\Big)\Big)\Big)\Big) +$$

$$(-d_4\, d_9\, \mathrm{dbar}_4^2\, \mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1}^3\, \beta_{1,0}^2 - d_4\, \mathrm{dbar}_4^2\, \beta_{0,1}^2\, \beta_{1,0}$$

$$(-\mathrm{dbar}_8\, \beta_{0,1}\, \beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7\, \beta_{1,1})) \Big(-\mathrm{dbar}_4\, \beta_{0,1}$$

$$(-1 - d_6\, \beta_{0,1}^2 - d_2\, \beta_{1,0}^2 + d_3\, d_4\, \beta_{1,0}^2 - d_1\, \beta_{2,0}) \Big(-d_4\, \mathrm{dhat}_2 \Big(-\dot{\beta}_{0,1}^2$$

$$\mathrm{dbar}_5 - \Big(1 - \frac{\sigma^2\, \mathrm{Cos}[t\, \sigma]\, n_{3,2}}{g}\Big)\, \sigma_2^2\, \beta_{0,2}\Big)\, \beta_{1,0}^2 + \mathrm{dbar}_4\, \beta_{0,1}$$

$$\Big(d_4\, \beta_{1,0} \Big(-\dot{\beta}_{0,1}\, \dot{\beta}_{1,0}\, \mathrm{dhat}_3 - \Big(1 - \frac{\sigma^2\, \mathrm{Cos}[t\, \sigma]\, n_{3,2}}{g}\Big)\, \sigma_{11}^2\, \beta_{1,1}\Big) -$$

$$\mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1} \Big(-\dot{\beta}_{1,0}^2\, d_5 - \Big(1 - \frac{\sigma^2\, \mathrm{Cos}[t\, \sigma]\, n_{3,2}}{g}\Big)\, \sigma_{20}^2\, \beta_{2,0}\Big)\Big)\Big) -$$

$$\mathrm{dbar}_4\, \mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1}^2 \Big(-d_4 \Big(-\dot{\beta}_{0,1}^2\, \mathrm{dbar}_5 - \Big(1 - \frac{\sigma^2\, \mathrm{Cos}[t\, \sigma]\, n_{3,2}}{g}\Big)$$

$$\sigma_2^2\,\beta_{0,2}\Big)\,\beta_{1,0}\,(d_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0}+d_7\,\beta_{1,1})+\mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}$$

$$\Big(d_4\,\beta_{1,0}\,\Big(-\dot{\beta}_{1,0}\,\dot{\beta}_{2,0}\,d_1-\dot{\beta}_{0,1}\,\dot{\beta}_{1,1}\,d_{12}-\dot{\beta}_{0,1}\,\dot{\beta}_{1,0}\,d_{11}\,\beta_{0,1}-$$

$$\dot{\beta}_{1,0}^{\,2}\,d_2\,\beta_{1,0}-\dot{\beta}_{0,1}^{\,2}\,d_{10}\,\beta_{1,0}-\Big(1-\frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\Big)$$

$$\sigma_{10}^2\,\beta_{1,0}\Big)-(1+d_6\,\beta_{0,1}^2+d_2\,\beta_{1,0}^2+d_1\,\beta_{2,0})$$

$$\Big(-\dot{\beta}_{1,0}^{\,2}\,d_5-\Big(1-\frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\Big)\,\sigma_{20}^2\,\beta_{2,0}\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big/$$

$$((-d_4\,d_9\,\mathrm{dbar}_4^2\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^3\,\beta_{1,0}^2-d_4\,\mathrm{dbar}_4^2\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0}\,(-\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0}-$$

$$\mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1}))\,(-(-\mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^2\,(d_4\,\mathrm{dbar}_3\,\mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0}-$$

$$d_4\,\beta_{1,0}\,(1+\mathrm{dbar}_2\,\beta_{0,1}^2+\mathrm{dbar}_1\,\beta_{0,2}+\mathrm{dbar}_6\,\beta_{1,0}^2))+$$

$$d_4\,\mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_2\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0}^2\,(-\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0}-\mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1}))$$

$$(-d_4\,d_9\,\mathrm{dbar}_4^2\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^4\,\beta_{1,0}-d_4\,\mathrm{dbar}_4^2\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0}\,(-1-d_6\,\beta_{0,1}^2-$$

$$d_2\,\beta_{1,0}^2+d_3\,d_4\,\beta_{1,0}^2-d_1\,\beta_{2,0}))+(-d_4\,d_9\,\mathrm{dbar}_4^2\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^3\,\beta_{1,0}^2-$$

$$d_4\,\mathrm{dbar}_4^2\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0}\,(-\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0}-\mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1}))$$

$$(d_4\,\mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0}\,(d_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0}+d_7\,\beta_{1,1})+d_4\,\mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_2$$

$$\beta_{0,1}\,\beta_{1,0}^2\,(-1-d_6\,\beta_{0,1}^2-d_2\,\beta_{1,0}^2+d_3\,d_4\,\beta_{1,0}^2-d_1\,\beta_{2,0}))))\Big)\Big)\Big)-2\,\xi\sigma_{1,0}\,\beta_{1,0}$$

$$\ddot{\beta}_{0,1}=\frac{-\dot{\beta}_{0,1}^{\,2}\,\mathrm{dbar}_5-\Big(1-\frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\Big)\,\sigma_2^2\,\beta_{0,2}}{\mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}}-$$

$$\Big(-(-d_4\,d_9\,\mathrm{dbar}_4^2\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^4\,\beta_{1,0}-d_4\,\mathrm{dbar}_4^2\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0}\,(-1-d_6\,\beta_{0,1}^2-d_2\,\beta_{1,0}^2+$$

$$d_3\,d_4\,\beta_{1,0}^2-d_1\,\beta_{2,0}))\,\Big(-\mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}\,(-\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0}-\mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1})$$

$$\Big(-d_4\,\mathrm{dhat}_2\,\Big(-\dot{\beta}_{0,1}^{\,2}\,\mathrm{dbar}_5-\Big(1-\frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\Big)\,\sigma_2^2\,\beta_{0,2}\Big)\,\beta_{1,0}^2+$$

$$\mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}\,\Big(d_4\,\beta_{1,0}\,\Big(-\dot{\beta}_{0,1}\,\dot{\beta}_{1,0}\,\mathrm{dhat}_2-\Big(1-\frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\Big)\,\sigma_{11}^2\,\beta_{1,1}\Big)-$$

$$\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}\,\Big(-\dot{\beta}_{1,0}^{\,2}\,d_5-\Big(1-\frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\Big)\,\sigma_{20}^2\,\beta_{2,0}\Big)\Big)\Big)-$$

$$\mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^2\,\Big(-d_4\,\Big(-\dot{\beta}_{0,1}^{\,2}\,\mathrm{dbar}_5-\Big(1-\frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\Big)\,\sigma_2^2\,\beta_{0,2}\Big)$$

$$\beta_{1,0}\,(1+\mathrm{dbar}_2\,\beta_{0,1}^2+\mathrm{dbar}_1\,\beta_{0,2}+\mathrm{dbar}_6\,\beta_{1,0}^2)+$$

$$\mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}\,\Big(d_4\,\beta_{1,0}\,\Big(-\dot{\beta}_{0,1}\,\dot{\beta}_{0,2}\,\mathrm{dbar}_1-\dot{\beta}_{1,0}\,\dot{\beta}_{1,1}\,\mathrm{dbar}_{12}-\dot{\beta}_{0,1}^{\,2}\,\mathrm{dbar}_2\,\beta_{0,1}-$$

$$\dot{\beta}_{1,0}^{2}\,\mathrm{dbar}_{10}\,\beta_{0,1} - \left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_1^2\,\beta_{0,1} -$$

$$\dot{\beta}_{0,1}\,\dot{\beta}_{1,0}\,\mathrm{dbar}_{11}\,\beta_{1,0}\Big) - (\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0} + \mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1})$$

$$\left(-\dot{\beta}_{1,0}^{2}\,d_5 - \left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_{20}^2\,\beta_{2,0}\right)\Big)\Big)\Big)\Big) +$$

$$(-d_4\,d_9\,\mathrm{dbar}_4^2\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^3\,\beta_{1,0}^2 - d_4\,\mathrm{dbar}_4^2\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0}\,(-\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1}))$$

$$\Big(-\mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}\,(-1 - d_6\,\beta_{0,1}^2 - d_2\,\beta_{1,0}^2 + d_3\,d_4\,\beta_{1,0}^2 - d_1\,\beta_{2,0})$$

$$\left(-d_4\,\mathrm{dhat}_2\left(-\dot{\beta}_{0,1}^{2}\,\mathrm{dbar}_5 - \left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_2^2\,\beta_{0,2}\right)\beta_{1,0}^2 +\right.$$

$$\mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}\left(d_4\,\beta_{1,0}\left(-\dot{\beta}_{0,1}\,\dot{\beta}_{1,0}\,\mathrm{dhat}_3 - \left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_{11}^2\,\beta_{1,1}\right) -\right.$$

$$\left.\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}\left(-\dot{\beta}_{1,0}^{2}\,d_5 - \left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_{20}^2\,\beta_{2,0}\right)\right)\Big) -$$

$$\mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^2\left(-d_4\left(-\dot{\beta}_{0,1}^{2}\,\mathrm{dbar}_5 - \left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_2^2\,\beta_{0,2}\right)\right.$$

$$\beta_{1,0}\,(d_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0} + d_7\,\beta_{1,1}) + \mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}$$

$$\Big(d_4\,\beta_{1,0}\,\Big(-\dot{\beta}_{1,0}\,\dot{\beta}_{2,0}\,d_1 - \dot{\beta}_{0,1}\,\dot{\beta}_{1,1}\,d_{12} - \dot{\beta}_{0,1}\,\dot{\beta}_{1,0}\,d_{11}\,\beta_{0,1} - \dot{\beta}_{1,0}^{2}\,d_2\,\beta_{1,0} -$$

$$\dot{\beta}_{0,1}^{2}\,d_{10}\,\beta_{1,0} - \left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_{10}^2\,\beta_{1,0}\Big) - (1 + d_6\,\beta_{0,1}^2 + d_2$$

$$\beta_{1,0}^2 + d_1\,\beta_{2,0})\left(-\dot{\beta}_{1,0}^{2}\,d_5 - \left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_{20}^2\,\beta_{2,0}\right)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big) \Big/$$

$$(\mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}\,(-(-\mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^2\,(d_4\,\mathrm{dbar}_3\,\mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0} -$$

$$d_4\,\beta_{1,0}\,(1 + \mathrm{dbar}_2\,\beta_{0,1}^2 + \mathrm{dbar}_1\,\beta_{0,2} + \mathrm{dbar}_6\,\beta_{1,0}^2)) +$$

$$d_4\,\mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_2\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0}^2\,(-\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1}))$$

$$(-d_4\,d_9\,\mathrm{dbar}_4^2\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^4\,\beta_{1,0} - d_4\,\mathrm{dbar}_4^2\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0}$$

$$(-1 - d_6\,\beta_{0,1}^2 - d_2\,\beta_{1,0}^2 + d_3\,d_4\,\beta_{1,0}^2 - d_1\,\beta_{2,0})) +$$

$$(-d_4\,d_9\,\mathrm{dbar}_4^2\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^3\,\beta_{1,0}^2 - d_4\,\mathrm{dbar}_4^2\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0}\,(-\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1}))$$

$$(d_4\,\mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0}\,(d_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0} + d_7\,\beta_{1,1}) +$$

$$d_4\,\mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_2\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0}^2\,(-1 - d_6\,\beta_{0,1}^2 - d_2\,\beta_{1,0}^2 + d_3\,d_4\,\beta_{1,0}^2 - d_1\,\beta_{2,0}))))) - 2\,\xi\sigma_{0,1}\,\beta_{0,1}$$

$$
\begin{aligned}
\ddot{\beta}_{2,0} = & -\frac{1}{\mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^2} \\
& \Big(-d_4\,\mathrm{dhat}_2\Big(-\dot{\beta}_{0,1}^{\,2}\,\mathrm{dbar}_5 - \Big(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\Big)\,\sigma_2^2\,\beta_{0,2}\Big)\,\beta_{1,0}^2 + \\
& \quad \mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}\Big(d_4\,\beta_{1,0}\Big(-\dot{\beta}_{0,1}\,\dot{\beta}_{1,0}\,\mathrm{dhat}_3 - \Big(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\Big)\,\sigma_{11}^2\,\beta_{1,1}\Big) - \\
& \quad\quad \mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}\Big(-\dot{\beta}_{1,0}^{\,2}\,d_5 - \Big(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\Big)\,\sigma_{20}^2\,\beta_{2,0}\Big)\Big)\Big) - \\
& \Big(d_4\,\mathrm{dhat}_2\,\beta_{1,0}^2\Big(-(-d_4\,d_9\,\mathrm{dbar}_4^2\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^4\,\beta_{1,0} - d_4\,\mathrm{dbar}_4^2\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0} \\
& \quad\quad (-1 - d_6\,\beta_{0,1}^2 - d_2\,\beta_{1,0}^2 + d_3\,d_4\,\beta_{1,0}^2 - d_1\,\beta_{2,0})) \\
& \quad \Big(-\mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}\,(-\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1}) \\
& \quad\quad \Big(-d_4\,\mathrm{dhat}_2\Big(-\dot{\beta}_{0,1}^{\,2}\,\mathrm{dbar}_5 - \Big(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\Big)\,\sigma_2^2\,\beta_{0,2}\Big)\,\beta_{1,0}^2 + \mathrm{dbar}_4 \\
& \quad\quad\quad \beta_{0,1}\Big(d_4\,\beta_{1,0}\Big(-\dot{\beta}_{0,1}\,\dot{\beta}_{1,0}\,\mathrm{dhat}_3 - \Big(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\Big)\,\sigma_{11}^2\,\beta_{1,1}\Big) - \\
& \quad\quad\quad\quad \mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}\Big(-\dot{\beta}_{1,0}^{\,2}\,d_5 - \Big(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\Big)\,\sigma_{20}^2\,\beta_{2,0}\Big)\Big)\Big) - \\
& \quad\quad \mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^2\Big(-d_4\Big(-\dot{\beta}_{0,1}^{\,2}\,\mathrm{dbar}_5 - \Big(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\Big)\,\sigma_2^2\,\beta_{0,2}\Big) \\
& \quad\quad\quad \beta_{1,0}\,(1 + \mathrm{dbar}_2\,\beta_{0,1}^2 + \mathrm{dbar}_1\,\beta_{0,2} + \mathrm{dbar}_6\,\beta_{1,0}^2) + \\
& \quad\quad\quad \mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}\Big(d_4\,\beta_{1,0}\Big(-\dot{\beta}_{0,1}\,\dot{\beta}_{0,2}\,\mathrm{dbar}_1 - \dot{\beta}_{1,0}\,\dot{\beta}_{1,1}\,\mathrm{dbar}_{12} - \dot{\beta}_{0,1}^{\,2}\,\mathrm{dbar}_2 \\
& \quad\quad\quad\quad \beta_{0,1} - \dot{\beta}_{1,0}^{\,2}\,\mathrm{dbar}_{10}\,\beta_{0,1} - \Big(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\Big)\,\sigma_1^2\,\beta_{0,1} - \\
& \quad\quad\quad\quad \dot{\beta}_{0,1}\,\dot{\beta}_{1,0}\,\mathrm{dbar}_{11}\,\beta_{1,0}\Big) - (\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0} + \mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1}) \\
& \quad\quad\quad\quad \Big(-\dot{\beta}_{1,0}^{\,2}\,d_5 - \Big(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\Big)\,\sigma_{20}^2\,\beta_{2,0}\Big)\Big)\Big)\Big) +
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(-d_4\, d_9\, \mathrm{dbar}_4^2\, \mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1}^3\, \beta_{1,0}^2 - d_4\, \mathrm{dbar}_4^2\, \beta_{0,1}^2\, \beta_{1,0} \\
&\quad (-\mathrm{dbar}_8\, \beta_{0,1}\, \beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7\, \beta_{1,1})) \\
&\Big(-\mathrm{dbar}_4\, \beta_{0,1}\, (-1 - d_6\, \beta_{0,1}^2 - d_2\, \beta_{1,0}^2 + d_2\, d_4\, \beta_{1,0}^2 - d_1\, \beta_{2,0}) \\
&\quad \Big(-d_4\, \mathrm{dhat}_2 \Big(-\dot{\beta}_{0,1}^2\, \mathrm{dbar}_5 - \Big(1 - \frac{\sigma^2\, \mathrm{Cos}[t\,\sigma]\, n_{3,2}}{g}\Big)\, \sigma_2^2\, \beta_{0,2}\Big)\, \beta_{1,0}^2 + \mathrm{dbar}_4 \\
&\quad \beta_{0,1} \Big(d_4\, \beta_{1,0} \Big(-\dot{\beta}_{0,1}\, \dot{\beta}_{1,0}\, \mathrm{dhat}_3 - \Big(1 - \frac{\sigma^2\, \mathrm{Cos}[t\,\sigma]\, n_{3,2}}{g}\Big)\, \sigma_{11}^2\, \beta_{1,1}\Big) - \\
&\quad \mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1} \Big(-\dot{\beta}_{1,0}^2\, d_5 - \Big(1 - \frac{\sigma^2\, \mathrm{Cos}[t\,\sigma]\, n_{3,2}}{g}\Big)\, \sigma_{20}^2\, \beta_{2,0}\Big)\Big)\Big) - \\
&\quad \mathrm{dbar}_4\, \mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1}^2 \Big(-d_4 \Big(-\dot{\beta}_{0,1}^2\, \mathrm{dbar}_5 - \Big(1 - \frac{\sigma^2\, \mathrm{Cos}[t\,\sigma]\, n_{3,2}}{g}\Big)\, \sigma_2^2\, \beta_{0,2}\Big) \\
&\quad \beta_{1,0}\, (d_8\, \beta_{0,1}\, \beta_{1,0} + d_7\, \beta_{1,1}) + \mathrm{dbar}_4\, \beta_{0,1} \Big(d_4\, \beta_{1,0} \Big(-\dot{\beta}_{1,0}\, \dot{\beta}_{2,0}\, d_1 - \\
&\quad \dot{\beta}_{0,1}\, \dot{\beta}_{1,1}\, d_{12} - \dot{\beta}_{0,1}\, \dot{\beta}_{1,0}\, d_{11}\, \beta_{0,1} - \dot{\beta}_{1,0}^2\, d_2\, \beta_{1,0} - \dot{\beta}_{0,1}^2\, d_{10}\, \beta_{1,0} - \\
&\quad \Big(1 - \frac{\sigma^2\, \mathrm{Cos}[t\,\sigma]\, n_{3,2}}{g}\Big)\, \sigma_{10}^2\, \beta_{1,0}\Big) - (1 + d_6\, \beta_{0,1}^2 + d_2\, \beta_{1,0}^2 + \\
&\quad d_1\, \beta_{2,0}) \Big(-\dot{\beta}_{1,0}^2\, d_5 - \Big(1 - \frac{\sigma^2\, \mathrm{Cos}[t\,\sigma]\, n_{3,2}}{g}\Big)\, \sigma_{20}^2\, \beta_{2,0}\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big) \Big/ \\
&(\mathrm{dbar}_4\, \mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1}^2\, (-(-\mathrm{dbar}_4\, \mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1}^2\, (d_4\, \mathrm{dbar}_3\, \mathrm{dbar}_4\, \beta_{0,1}^2\, \beta_{1,0} - \\
&\quad d_4\, \beta_{1,0}\, (1 + \mathrm{dbar}_2\, \beta_{0,1}^2 + \mathrm{dbar}_1\, \beta_{0,2} + \mathrm{dbar}_6\, \beta_{1,0}^2)) + \\
&\quad d_4\, \mathrm{dbar}_4\, \mathrm{dhat}_2\, \beta_{0,1}\, \beta_{1,0}^2\, (-\mathrm{dbar}_8\, \beta_{0,1}\, \beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7\, \beta_{1,1})) \\
&\quad (-d_4\, d_9\, \mathrm{dbar}_4^2\, \mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1}^4\, \beta_{1,0} - d_4\, \mathrm{dbar}_4^2\, \beta_{0,1}^2\, \beta_{1,0} \\
&\quad (-1 - d_6\, \beta_{0,1}^2 - d_2\, \beta_{1,0}^2 + d_2\, d_4\, \beta_{1,0}^2 - d_1\, \beta_{2,0})) + \\
&\quad (-d_4\, d_9\, \mathrm{dbar}_4^2\, \mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1}^3\, \beta_{1,0}^2 - d_4\, \mathrm{dbar}_4^2\, \beta_{0,1}^2\, \beta_{1,0} \\
&\quad (-\mathrm{dbar}_8\, \beta_{0,1}\, \beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7\, \beta_{1,1})) \\
&\quad (d_4\, \mathrm{dbar}_4\, \mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1}^2\, \beta_{1,0}\, (d_8\, \beta_{0,1}\, \beta_{1,0} + d_7\, \beta_{1,1}) + \\
&\quad d_4\, \mathrm{dbar}_4\, \mathrm{dhat}_2\, \beta_{0,1}\, \beta_{1,0}^2\, (-1 - d_6\, \beta_{0,1}^2 - d_2\, \beta_{1,0}^2 + d_2\, d_4\, \beta_{1,0}^2 - d_1\, \beta_{2,0})))) + \\
&\frac{1}{\mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1}} \Big(d_4\, \beta_{1,0} \Big(\Big(-\mathrm{dbar}_4\, \beta_{0,1}\, (-\mathrm{dbar}_8\, \beta_{0,1}\, \beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7\, \beta_{1,1}) \\
&\quad \Big(-d_4\, \mathrm{dhat}_2 \Big(-\dot{\beta}_{0,1}^2\, \mathrm{dbar}_5 - \Big(1 - \frac{\sigma^2\, \mathrm{Cos}[t\,\sigma]\, n_{3,2}}{g}\Big)\, \sigma_2^2\, \beta_{0,2}\Big)\, \beta_{1,0}^2 + \mathrm{dbar}_4 \\
&\quad \beta_{0,1} \Big(d_4\, \beta_{1,0} \Big(-\dot{\beta}_{0,1}\, \dot{\beta}_{1,0}\, \mathrm{dhat}_3 - \Big(1 - \frac{\sigma^2\, \mathrm{Cos}[t\,\sigma]\, n_{3,2}}{g}\Big)\, \sigma_{11}^2\, \beta_{1,1}\Big) - \\
&\quad \mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1} \Big(-\dot{\beta}_{1,0}^2\, d_5 - \Big(1 - \frac{\sigma^2\, \mathrm{Cos}[t\,\sigma]\, n_{3,2}}{g}\Big)\, \sigma_{20}^2\, \beta_{2,0}\Big)\Big)\Big) - \\
&\quad \mathrm{dbar}_4\, \mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1}^2 \Big(-d_4 \Big(-\dot{\beta}_{0,1}^2\, \mathrm{dbar}_5 - \Big(1 - \frac{\sigma^2\, \mathrm{Cos}[t\,\sigma]\, n_{3,2}}{g}\Big)\, \sigma_2^2\, \beta_{0,2}\Big) \\
&\quad \beta_{1,0}\, (1 + \mathrm{dbar}_2\, \beta_{0,1}^2 + \mathrm{dbar}_1\, \beta_{0,2} + \mathrm{dbar}_6\, \beta_{1,0}^2) + \\
&\quad \mathrm{dbar}_4\, \beta_{0,1} \Big(d_4\, \beta_{1,0} \Big(-\dot{\beta}_{0,1}\, \dot{\beta}_{0,2}\, \mathrm{dbar}_1 - \dot{\beta}_{1,0}\, \dot{\beta}_{1,1}\, \mathrm{dbar}_{12} - \dot{\beta}_{0,1}^2\, \mathrm{dbar}_2 \\
&\quad \beta_{0,1} - \dot{\beta}_{1,0}^2\, \mathrm{dbar}_{10}\, \beta_{0,1} - \Big(1 - \frac{\sigma^2\, \mathrm{Cos}[t\,\sigma]\, n_{3,2}}{g}\Big)\, \sigma_1^2\, \beta_{0,1} -
\end{aligned}
$$

$$\dot{\beta}_{0,1}\dot{\beta}_{1,0}\,\mathrm{dbar}_{11}\,\beta_{1,0}\Big) - (\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\beta_{1,0} + \mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1})$$

$$\left(-\dot{\beta}_{1,0}^{\,2}\,d_5 - \left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_{20}^2\,\beta_{2,0}\right)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big/$$

$$(-d_4\,d_9\,\mathrm{dbar}_4^2\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^3\,\beta_{1,0}^2 - d_4\,\mathrm{dbar}_4^2\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0}$$

$$(-\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1})) -$$

$$\Big((-\mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^2\,(d_4\,\mathrm{dbar}_2\,\mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0} - d_4\,\beta_{1,0}$$

$$(1 + \mathrm{dbar}_2\,\beta_{0,1}^2 + \mathrm{dbar}_1\,\beta_{0,2} + \mathrm{dbar}_6\,\beta_{1,0}^2)) +$$

$$d_4\,\mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_2\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0}^2\,(-\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1}))$$

$$\Big(-(-d_4\,d_9\,\mathrm{dbar}_4^2\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^4\,\beta_{1,0} - d_4\,\mathrm{dbar}_4^2\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0}$$

$$(-1 - d_6\,\beta_{0,1}^2 - d_2\,\beta_{1,0}^2 + d_3\,d_4\,\beta_{1,0}^2 - d_1\,\beta_{2,0}))$$

$$\Big(-\mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}\,(-\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1})$$

$$\Big(-d_4\,\mathrm{dhat}_2\,\Big(-\dot{\beta}_{0,1}^{\,2}\,\mathrm{dbar}_5 - \left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_2^2\,\beta_{0,2}\Big)\,\beta_{1,0}^2 +$$

$$\mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}\,\Big(d_4\,\beta_{1,0}\,\Big(-\dot{\beta}_{0,1}\,\dot{\beta}_{1,0}\,\mathrm{dhat}_2 - \left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)$$

$$\sigma_{11}^2\,\beta_{1,1}\Big) - \mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}\,\Big(-\dot{\beta}_{1,0}^{\,2}\,d_5 -$$

$$\left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_{20}^2\,\beta_{2,0}\Big)\Big)\Big) - \mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^2$$

$$\Big(-d_4\,\Big(-\dot{\beta}_{0,1}^{\,2}\,\mathrm{dbar}_5 - \left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_2^2\,\beta_{0,2}\Big)\,\beta_{1,0}\,(1 +$$

$$\mathrm{dbar}_2\,\beta_{0,1}^2 + \mathrm{dbar}_1\,\beta_{0,2} + \mathrm{dbar}_6\,\beta_{1,0}^2) + \mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}\,\Big(d_4\,\beta_{1,0}$$

$$\Big(-\dot{\beta}_{0,1}\,\dot{\beta}_{0,2}\,\mathrm{dbar}_1 - \dot{\beta}_{1,0}\,\dot{\beta}_{1,1}\,\mathrm{dbar}_{12} - \dot{\beta}_{0,1}^{\,2}\,\mathrm{dbar}_2\,\beta_{0,1} -$$

$$\dot{\beta}_{1,0}^{\,2}\,\mathrm{dbar}_{10}\,\beta_{0,1} - \left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_1^2\,\beta_{0,1} -$$

$$\dot{\beta}_{0,1}\,\dot{\beta}_{1,0}\,\mathrm{dbar}_{11}\,\beta_{1,0}\Big) - (\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\beta_{1,0} + \mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1})$$

$$\left(-\dot{\beta}_{1,0}^{\,2}\,d_5 - \left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_{20}^2\,\beta_{2,0}\Big)\Big)\Big)\Big) +$$

$$(-d_4\,d_9\,\mathrm{dbar}_4^2\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^3\,\beta_{1,0}^2 - d_4\,\mathrm{dbar}_4^2\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0}$$

$$(-\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1})\,\Big(-\mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}$$

$$(-1 - d_6\,\beta_{0,1}^2 - d_2\,\beta_{1,0}^2 + d_3\,d_4\,\beta_{1,0}^2 - d_1\,\beta_{2,0})\,\Big(-d_4\,\mathrm{dhat}_2\,\Big(-\dot{\beta}_{0,1}^{\,2}$$

$$\mathrm{dbar}_5 - \left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_2^2\,\beta_{0,2}\Big)\,\beta_{1,0}^2 + \mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}$$

$$\left(d_4 \beta_{1,0} \left(-\dot{\beta_{0,1}} \dot{\beta_{1,0}} \, \mathrm{dhat}_2 - \left(1 - \frac{\sigma^2 \, \mathrm{Cos}[t\,\sigma] \, n_{3,2}}{g}\right) \sigma_{11}^2 \beta_{1,1}\right) - \right.$$

$$\left. \mathrm{dhat}_1 \beta_{0,1} \left(-\dot{\beta_{1,0}}^2 d_5 - \left(1 - \frac{\sigma^2 \, \mathrm{Cos}[t\,\sigma] \, n_{3,2}}{g}\right) \sigma_{20}^2 \beta_{2,0}\right)\right)\right) -$$

$$\mathrm{dbar}_4 \, \mathrm{dhat}_1 \beta_{0,1}^2 \left(-d_4 \left(-\dot{\beta_{0,1}}^2 \, \mathrm{dbar}_5 - \left(1 - \frac{\sigma^2 \, \mathrm{Cos}[t\,\sigma] \, n_{3,2}}{g}\right)\right.\right.$$

$$\left.\sigma_2^2 \beta_{0,2}\right) \beta_{1,0} \left(d_8 \beta_{0,1} \beta_{1,0} + d_7 \beta_{1,1}\right) + \mathrm{dbar}_4 \beta_{0,1}$$

$$\left(d_4 \beta_{1,0} \left(-\dot{\beta_{1,0}} \dot{\beta_{2,0}} \, d_1 - \dot{\beta_{0,1}} \dot{\beta_{1,1}} \, d_{12} - \dot{\beta_{0,1}} \dot{\beta_{1,0}} \, d_{11} \beta_{0,1} - \right.\right.$$

$$\dot{\beta_{1,0}}^2 \, d_2 \beta_{1,0} - \dot{\beta_{0,1}}^2 \, d_{10} \beta_{1,0} - \left(1 - \frac{\sigma^2 \, \mathrm{Cos}[t\,\sigma] \, n_{3,2}}{g}\right)$$

$$\left.\sigma_{10}^2 \beta_{1,0}\right) - \left(1 + d_6 \beta_{0,1}^2 + d_2 \beta_{1,0}^2 + d_1 \beta_{2,0}\right)$$

$$\left.\left.\left.\left.\left.\left.\left(-\dot{\beta_{1,0}}^2 d_5 - \left(1 - \frac{\sigma^2 \, \mathrm{Cos}[t\,\sigma] \, n_{3,2}}{g}\right) \sigma_{20}^2 \beta_{2,0}\right)\right)\right)\right)\right)\right) \Big/$$

$$\left(\left(-d_4 \, d_9 \, \mathrm{dbar}_4^2 \, \mathrm{dhat}_1 \beta_{0,1}^3 \beta_{1,0}^2 - d_4 \, \mathrm{dbar}_4^2 \beta_{0,1}^2 \beta_{1,0}\right.\right.$$

$$\left(-\mathrm{dbar}_8 \beta_{0,1} \beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7 \beta_{1,1}\right))$$

$$\left(-\left(-\mathrm{dbar}_4 \, \mathrm{dhat}_1 \beta_{0,1}^2 \left(d_4 \, \mathrm{dbar}_3 \, \mathrm{dbar}_4 \beta_{0,1}^2 \beta_{1,0} - d_4 \beta_{1,0}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left(1 + \mathrm{dbar}_2 \beta_{0,1}^2 + \mathrm{dbar}_1 \beta_{0,2} + \mathrm{dbar}_6 \beta_{1,0}^2\right)\right) +$$

$$\left.d_4 \, \mathrm{dbar}_4 \, \mathrm{dhat}_2 \beta_{0,1} \beta_{1,0}^2 \left(-\mathrm{dbar}_8 \beta_{0,1} \beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7 \beta_{1,1}\right)\right)$$

$$\left(-d_4 \, d_9 \, \mathrm{dbar}_4^2 \, \mathrm{dhat}_1 \beta_{0,1}^4 \beta_{1,0} - d_4 \, \mathrm{dbar}_4^2 \beta_{0,1}^2 \beta_{1,0}\right.$$

$$\left(-1 - d_6 \beta_{0,1}^2 - d_2 \beta_{1,0}^2 + d_3 \, d_4 \beta_{1,0}^2 - d_1 \beta_{2,0}\right)) +$$

$$\left(-d_4 \, d_9 \, \mathrm{dbar}_4^2 \, \mathrm{dhat}_1 \beta_{0,1}^3 \beta_{1,0}^2 - d_4 \, \mathrm{dbar}_4^2 \beta_{0,1}^2 \beta_{1,0}\right.$$

$$\left(-\mathrm{dbar}_8 \beta_{0,1} \beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7 \beta_{1,1}\right))$$

$$\left(d_4 \, \mathrm{dbar}_4 \, \mathrm{dhat}_1 \beta_{0,1}^2 \beta_{1,0} \left(d_8 \beta_{0,1} \beta_{1,0} + d_7 \beta_{1,1}\right) + d_4 \, \mathrm{dbar}_4 \, \mathrm{dhat}_2 \beta_{0,1}\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.\beta_{1,0}^2 \left(-1 - d_6 \beta_{0,1}^2 - d_2 \beta_{1,0}^2 + d_3 \, d_4 \beta_{1,0}^2 - d_1 \beta_{2,0}\right)\right)\right)\right)\right) - 2 \, \xi \sigma_{2,0} \beta_{2,0}$$

$$
\begin{aligned}
\ddot{\beta}_{1,1} = \Bigg(& -\mathrm{dbar}_4 \beta_{0,1} \left(-\mathrm{dbar}_8 \beta_{0,1} \beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7 \beta_{1,1}\right) \\
& \Bigg(-d_4 \, \mathrm{dhat}_2 \left(-\dot{\beta}_{0,1}^2 \, \mathrm{dbar}_5 - \left(1 - \frac{\sigma^2 \, \mathrm{Cos}[t\,\sigma] \, n_{3,2}}{g}\right) \sigma_2^2 \beta_{0,2}\right) \beta_{1,0}^2 + \\
& \quad \mathrm{dbar}_4 \beta_{0,1} \left(d_4 \beta_{1,0} \left(-\dot{\beta}_{0,1} \dot{\beta}_{1,0} \, \mathrm{dhat}_3 - \left(1 - \frac{\sigma^2 \, \mathrm{Cos}[t\,\sigma] \, n_{3,2}}{g}\right) \sigma_{11}^2 \beta_{1,1}\right) - \right. \\
& \quad \left. \mathrm{dhat}_1 \beta_{0,1} \left(-\dot{\beta}_{1,0}^2 \, d_5 - \left(1 - \frac{\sigma^2 \, \mathrm{Cos}[t\,\sigma] \, n_{3,2}}{g}\right) \sigma_{20}^2 \beta_{2,0}\right)\right)\Bigg) - \\
& \mathrm{dbar}_4 \, \mathrm{dhat}_1 \beta_{0,1}^2 \Bigg(-d_4 \left(-\dot{\beta}_{0,1}^2 \, \mathrm{dbar}_5 - \left(1 - \frac{\sigma^2 \, \mathrm{Cos}[t\,\sigma] \, n_{3,2}}{g}\right) \sigma_2^2 \beta_{0,2}\right) \\
& \quad \beta_{1,0} \left(1 + \mathrm{dbar}_2 \beta_{0,1}^2 + \mathrm{dbar}_1 \beta_{0,2} + \mathrm{dbar}_6 \beta_{1,0}^2\right) + \\
& \quad \mathrm{dbar}_4 \beta_{0,1} \Bigg(d_4 \beta_{1,0} \Bigg(-\dot{\beta}_{0,1} \dot{\beta}_{0,2} \, \mathrm{dbar}_1 - \dot{\beta}_{1,0} \dot{\beta}_{1,1} \, \mathrm{dbar}_{12} - \dot{\beta}_{0,1}^2 \, \mathrm{dbar}_2 \beta_{0,1} - \\
& \qquad \dot{\beta}_{1,0}^2 \, \mathrm{dbar}_{10} \beta_{0,1} - \left(1 - \frac{\sigma^2 \, \mathrm{Cos}[t\,\sigma] \, n_{3,2}}{g}\right) \sigma_1^2 \beta_{0,1} - \\
& \qquad \dot{\beta}_{0,1} \dot{\beta}_{1,0} \, \mathrm{dbar}_{11} \beta_{1,0}\Bigg) - \left(\mathrm{dbar}_8 \beta_{0,1} \beta_{1,0} + \mathrm{dbar}_7 \beta_{1,1}\right) \\
& \qquad \left(-\dot{\beta}_{1,0}^2 \, d_5 - \left(1 - \frac{\sigma^2 \, \mathrm{Cos}[t\,\sigma] \, n_{3,2}}{g}\right) \sigma_{20}^2 \beta_{2,0}\right)\Bigg)\Bigg)\Bigg)\Bigg) \Bigg/ \\
& \left(-d_4 \, d_9 \, \mathrm{dbar}_4^2 \, \mathrm{dhat}_1 \beta_{0,1}^3 \beta_{1,0}^2 - d_4 \, \mathrm{dbar}_4^2 \beta_{0,1}^2 \beta_{1,0} \right. \\
& \quad \left. \left(-\mathrm{dbar}_8 \beta_{0,1} \beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7 \beta_{1,1}\right)\right) - \\
& \Bigg(\left(-\mathrm{dbar}_4 \, \mathrm{dhat}_1 \beta_{0,1}^2 \left(d_4 \, \mathrm{dbar}_3 \, \mathrm{dbar}_4 \beta_{0,1}^2 \beta_{1,0} - \right.\right. \\
& \quad \left.\left. d_4 \beta_{1,0} \left(1 + \mathrm{dbar}_2 \beta_{0,1}^2 + \mathrm{dbar}_1 \beta_{0,2} + \mathrm{dbar}_6 \beta_{1,0}^2\right)\right) + \right. \\
& \quad \left. d_4 \, \mathrm{dbar}_4 \, \mathrm{dhat}_2 \beta_{0,1} \beta_{1,0}^2 \left(-\mathrm{dbar}_8 \beta_{0,1} \beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7 \beta_{1,1}\right)\right) \\
& \Bigg(-\left(-d_4 \, d_9 \, \mathrm{dbar}_4^2 \, \mathrm{dhat}_1 \beta_{0,1}^4 \beta_{1,0} - d_4 \, \mathrm{dbar}_4^2 \beta_{0,1}^2 \beta_{1,0} \left(-1 - d_6 \beta_{0,1}^2 - d_2 \beta_{1,0}^2 + \right.\right. \\
& \quad \left.\left. d_3 \, d_4 \beta_{1,0}^2 - d_1 \beta_{2,0}\right)\right) \Bigg(-\mathrm{dbar}_4 \beta_{0,1} \left(-\mathrm{dbar}_8 \beta_{0,1} \beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7 \beta_{1,1}\right) \\
& \quad \Bigg(-d_4 \, \mathrm{dhat}_2 \left(-\dot{\beta}_{0,1}^2 \, \mathrm{dbar}_5 - \left(1 - \frac{\sigma^2 \, \mathrm{Cos}[t\,\sigma] \, n_{3,2}}{g}\right) \sigma_2^2 \beta_{0,2}\right) \beta_{1,0}^2 + \mathrm{dbar}_4 \\
& \quad \beta_{0,1} \left(d_4 \beta_{1,0} \left(-\dot{\beta}_{0,1} \dot{\beta}_{1,0} \, \mathrm{dhat}_3 - \left(1 - \frac{\sigma^2 \, \mathrm{Cos}[t\,\sigma] \, n_{3,2}}{g}\right) \sigma_{11}^2 \beta_{1,1}\right) - \right. \\
& \quad \left. \mathrm{dhat}_1 \beta_{0,1} \left(-\dot{\beta}_{1,0}^2 \, d_5 - \left(1 - \frac{\sigma^2 \, \mathrm{Cos}[t\,\sigma] \, n_{3,2}}{g}\right) \sigma_{20}^2 \beta_{2,0}\right)\right)\Bigg) - \\
& \mathrm{dbar}_4 \, \mathrm{dhat}_1 \beta_{0,1}^2 \Bigg(-d_4 \left(-\dot{\beta}_{0,1}^2 \, \mathrm{dbar}_5 - \left(1 - \frac{\sigma^2 \, \mathrm{Cos}[t\,\sigma] \, n_{3,2}}{g}\right) \sigma_2^2 \beta_{0,2}\right) \\
& \quad \beta_{1,0} \left(1 + \mathrm{dbar}_2 \beta_{0,1}^2 + \mathrm{dbar}_1 \beta_{0,2} + \mathrm{dbar}_6 \beta_{1,0}^2\right) + \\
& \quad \mathrm{dbar}_4 \beta_{0,1} \Bigg(d_4 \beta_{1,0} \Bigg(-\dot{\beta}_{0,1} \dot{\beta}_{0,2} \, \mathrm{dbar}_1 - \dot{\beta}_{1,0} \dot{\beta}_{1,1} \, \mathrm{dbar}_{12} - \dot{\beta}_{0,1}^2 \, \mathrm{dbar}_2 \\
& \qquad \beta_{0,1} - \dot{\beta}_{1,0}^2 \, \mathrm{dbar}_{10} \beta_{0,1} - \left(1 - \frac{\sigma^2 \, \mathrm{Cos}[t\,\sigma] \, n_{3,2}}{g}\right) \sigma_1^2 \beta_{0,1} - \\
& \qquad \dot{\beta}_{0,1} \dot{\beta}_{1,0} \, \mathrm{dbar}_{11} \beta_{1,0}\Bigg) - \left(\mathrm{dbar}_8 \beta_{0,1} \beta_{1,0} + \mathrm{dbar}_7 \beta_{1,1}\right) \\
& \qquad \left(-\dot{\beta}_{1,0}^2 \, d_5 - \left(1 - \frac{\sigma^2 \, \mathrm{Cos}[t\,\sigma] \, n_{3,2}}{g}\right) \sigma_{20}^2 \beta_{2,0}\right)\Bigg)\Bigg)\Bigg)\Bigg)
\end{aligned}
$$

$$\beta_{0,1}\dot{\beta}_{1,0}\,\mathrm{dbar}_{11}\,\beta_{1,0}\Big) - (\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\beta_{1,0} + \mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1})$$

$$\left(-\dot{\beta}_{1,0}^{\,2}\,d_5 - \left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_{20}^2\,\beta_{2,0}\right)\Big)\Big)\Big)\Big) +$$

$$(-d_4\,d_9\,\mathrm{dbar}_4^2\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^3\,\beta_{1,0}^2 - d_4\,\mathrm{dbar}_4^2\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0}$$

$$(-\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1}))$$

$$\Big(-\mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}\,(-1 - d_6\,\beta_{0,1}^2 - d_2\,\beta_{1,0}^2 + d_3\,d_4\,\beta_{1,0}^2 - d_1\,\beta_{2,0})$$

$$\Big(-d_4\,\mathrm{dhat}_2\left(-\dot{\beta}_{0,1}^{\,2}\,\mathrm{dbar}_5 - \left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_2^2\,\beta_{0,2}\right)\beta_{1,0}^2 + \mathrm{dbar}_4$$

$$\beta_{0,1}\left(d_4\,\beta_{1,0}\left(-\dot{\beta}_{0,1}\dot{\beta}_{1,0}\,\mathrm{dhat}_3 - \left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_{11}^2\,\beta_{1,1}\right) -\right.$$

$$\left.\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}\left(-\dot{\beta}_{1,0}^{\,2}\,d_5 - \left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_{20}^2\,\beta_{2,0}\right)\right)\Big) -$$

$$\mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^2\left(-d_4\left(-\dot{\beta}_{0,1}^{\,2}\,\mathrm{dbar}_5 - \left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_2^2\,\beta_{0,2}\right)\right.$$

$$\beta_{1,0}\,(d_8\,\beta_{0,1}\beta_{1,0} + d_7\,\beta_{1,1}) + \mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}\Big(d_4\,\beta_{1,0}\Big(-\dot{\beta}_{1,0}\,\dot{\beta}_{2,0}\,d_1 -$$

$$\dot{\beta}_{0,1}\dot{\beta}_{1,1}\,d_{12} - \dot{\beta}_{0,1}\dot{\beta}_{1,0}\,d_{11}\,\beta_{0,1} - \dot{\beta}_{1,0}^{\,2}\,d_2\,\beta_{1,0} - \dot{\beta}_{0,1}^{\,2}\,d_{10}\,\beta_{1,0} -$$

$$\left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_{10}^2\,\beta_{1,0}\Big) - (1 + d_6\,\beta_{0,1}^2 + d_2\,\beta_{1,0}^2 +$$

$$d_1\,\beta_{2,0})\left(-\dot{\beta}_{1,0}^{\,2}\,d_5 - \left(1 - \frac{\sigma^2\,\mathrm{Cos}[t\,\sigma]\,n_{3,2}}{g}\right)\sigma_{20}^2\,\beta_{2,0}\right)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big) \Big/$$

$$((-d_4\,d_9\,\mathrm{dbar}_4^2\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^3\,\beta_{1,0}^2 - d_4\,\mathrm{dbar}_4^2\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0}\,(-\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1}))$$

$$(-(-\mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^2\,(d_4\,\mathrm{dbar}_3\,\mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0} - d_4\,\beta_{1,0}$$

$$(1 + \mathrm{dbar}_2\,\beta_{0,1}^2 + \mathrm{dbar}_1\,\beta_{0,2} + \mathrm{dbar}_6\,\beta_{1,0}^2)) + d_4\,\mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_2\,\beta_{0,1}$$

$$\beta_{1,0}^2\,(-\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1}))\,(-d_4\,d_9\,\mathrm{dbar}_4^2\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^4\,\beta_{1,0} -$$

$$d_4\,\mathrm{dbar}_4^2\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0}\,(-1 - d_6\,\beta_{0,1}^2 - d_2\,\beta_{1,0}^2 + d_3\,d_4\,\beta_{1,0}^2 - d_1\,\beta_{2,0})) +$$

$$(-d_4\,d_9\,\mathrm{dbar}_4^2\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^3\,\beta_{1,0}^2 - d_4\,\mathrm{dbar}_4^2\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0}\,(-\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1}))$$

$$(d_4\,\mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0}\,(d_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0} + d_7\,\beta_{1,1}) + d_4\,\mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_2\,\beta_{0,1}$$

$$\beta_{1,0}^2\,(-1 - d_6\,\beta_{0,1}^2 - d_2\,\beta_{1,0}^2 + d_3\,d_4\,\beta_{1,0}^2 - d_1\,\beta_{2,0}))))) - 2\,\xi\sigma_{1,1}\,\beta_{1,1}$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\beta}_{0,2} = \Bigg(& -\big(-d_4\, d_9\, \mathrm{dbar}_4^2\, \mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1}^4\, \beta_{1,0} - \\
& d_4\, \mathrm{dbar}_4^2\, \beta_{0,1}^2\, \beta_{1,0}\, \big(-1 - d_6\, \beta_{0,1}^2 - d_2\, \beta_{1,0}^2 + d_3\, d_4\, \beta_{1,0}^2 - d_1\, \beta_{2,0}\big)\big) \\
& \Big(-\mathrm{dbar}_4\, \beta_{0,1}\, \big(-\mathrm{dbar}_8\, \beta_{0,1}\, \beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7\, \beta_{1,1}\big) \\
& \Big(-d_4\, \mathrm{dhat}_2 \Big(-\dot{\beta}_{0,1}^2\, \mathrm{dbar}_5 - \Big(1 - \frac{\sigma^2\, \mathrm{Cos}[t\,\sigma]\, n_{3,2}}{g}\Big)\, \sigma_2^2\, \beta_{0,2}\Big)\, \beta_{1,0}^2 + \\
& \mathrm{dbar}_4\, \beta_{0,1} \Big(d_4\, \beta_{1,0} \Big(-\dot{\beta}_{0,1}\, \dot{\beta}_{1,0}\, \mathrm{dhat}_3 - \Big(1 - \frac{\sigma^2\, \mathrm{Cos}[t\,\sigma]\, n_{3,2}}{g}\Big)\, \sigma_{11}^2\, \beta_{1,1}\Big) - \\
& \mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1} \Big(-\dot{\beta}_{1,0}^2\, d_5 - \Big(1 - \frac{\sigma^2\, \mathrm{Cos}[t\,\sigma]\, n_{3,2}}{g}\Big)\, \sigma_{20}^2\, \beta_{2,0}\Big)\Big)\Big) - \\
& \mathrm{dbar}_4\, \mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1}^2 \Big(-d_4 \Big(-\dot{\beta}_{0,1}^2\, \mathrm{dbar}_5 - \Big(1 - \frac{\sigma^2\, \mathrm{Cos}[t\,\sigma]\, n_{3,2}}{g}\Big)\, \sigma_2^2\, \beta_{0,2}\Big) \\
& \beta_{1,0}\, \big(1 + \mathrm{dbar}_2\, \beta_{0,1}^2 + \mathrm{dbar}_1\, \beta_{0,2} + \mathrm{dbar}_6\, \beta_{1,0}^2\big) + \\
& \mathrm{dbar}_4\, \beta_{0,1} \Big(d_4\, \beta_{1,0} \Big(-\dot{\beta}_{0,1}\, \dot{\beta}_{0,2}\, \mathrm{dbar}_1 - \dot{\beta}_{1,0}\, \dot{\beta}_{1,1}\, \mathrm{dbar}_{12} - \dot{\beta}_{0,1}^2\, \mathrm{dbar}_2 \\
& \beta_{0,1} - \dot{\beta}_{1,0}^2\, \mathrm{dbar}_{10}\, \beta_{0,1} - \Big(1 - \frac{\sigma^2\, \mathrm{Cos}[t\,\sigma]\, n_{3,2}}{g}\Big)\, \sigma_1^2\, \beta_{0,1} - \\
& \dot{\beta}_{0,1}\, \dot{\beta}_{1,0}\, \mathrm{dbar}_{11}\, \beta_{1,0}\Big) - \big(\mathrm{dbar}_8\, \beta_{0,1}\, \beta_{1,0} + \mathrm{dbar}_7\, \beta_{1,1}\big) \\
& \Big(-\dot{\beta}_{1,0}^2\, d_5 - \Big(1 - \frac{\sigma^2\, \mathrm{Cos}[t\,\sigma]\, n_{3,2}}{g}\Big)\, \sigma_{20}^2\, \beta_{2,0}\Big)\Big)\Big)\Big) + \\
& \big(-d_4\, d_9\, \mathrm{dbar}_4^2\, \mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1}^3\, \beta_{1,0}^2 - d_4\, \mathrm{dbar}_4^2\, \beta_{0,1}^2\, \beta_{1,0} \\
& \big(-\mathrm{dbar}_8\, \beta_{0,1}\, \beta_{1,0} - \mathrm{dbar}_7\, \beta_{1,1}\big)\big) \\
& \Big(-\mathrm{dbar}_4\, \beta_{0,1}\, \big(-1 - d_6\, \beta_{0,1}^2 - d_2\, \beta_{1,0}^2 + d_3\, d_4\, \beta_{1,0}^2 - d_1\, \beta_{2,0}\big) \\
& \Big(-d_4\, \mathrm{dhat}_2 \Big(-\dot{\beta}_{0,1}^2\, \mathrm{dbar}_5 - \Big(1 - \frac{\sigma^2\, \mathrm{Cos}[t\,\sigma]\, n_{3,2}}{g}\Big)\, \sigma_2^2\, \beta_{0,2}\Big)\, \beta_{1,0}^2 + \\
& \mathrm{dbar}_4\, \beta_{0,1} \Big(d_4\, \beta_{1,0} \Big(-\dot{\beta}_{0,1}\, \dot{\beta}_{1,0}\, \mathrm{dhat}_3 - \Big(1 - \frac{\sigma^2\, \mathrm{Cos}[t\,\sigma]\, n_{3,2}}{g}\Big)\, \sigma_{11}^2\, \beta_{1,1}\Big) - \\
& \mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1} \Big(-\dot{\beta}_{1,0}^2\, d_5 - \Big(1 - \frac{\sigma^2\, \mathrm{Cos}[t\,\sigma]\, n_{3,2}}{g}\Big)\, \sigma_{20}^2\, \beta_{2,0}\Big)\Big)\Big) - \\
& \mathrm{dbar}_4\, \mathrm{dhat}_1\, \beta_{0,1}^2 \Big(-d_4 \Big(-\dot{\beta}_{0,1}^2\, \mathrm{dbar}_5 - \Big(1 - \frac{\sigma^2\, \mathrm{Cos}[t\,\sigma]\, n_{3,2}}{g}\Big)\, \sigma_2^2\, \beta_{0,2}\Big) \\
& \beta_{1,0}\, \big(d_8\, \beta_{0,1}\, \beta_{1,0} + d_7\, \beta_{1,1}\big) + \mathrm{dbar}_4\, \beta_{0,1} \Big(d_4\, \beta_{1,0} \Big(-\dot{\beta}_{1,0}\, \dot{\beta}_{2,0}\, d_1 - \\
& \dot{\beta}_{0,1}\, \dot{\beta}_{1,1}\, d_{12} - \dot{\beta}_{0,1}\, \dot{\beta}_{1,0}\, d_{11}\, \beta_{0,1} - \dot{\beta}_{1,0}^2\, d_2\, \beta_{1,0} - \dot{\beta}_{0,1}^2\, d_{10}\, \beta_{1,0} - \\
& \Big(1 - \frac{\sigma^2\, \mathrm{Cos}[t\,\sigma]\, n_{3,2}}{g}\Big)\, \sigma_{10}^2\, \beta_{1,0}\Big) - \big(1 + d_6\, \beta_{0,1}^2 + d_2\, \beta_{1,0}^2 + d_1\, \beta_{2,0}\big) \\
& \Big(-\dot{\beta}_{1,0}^2\, d_5 - \Big(1 - \frac{\sigma^2\, \mathrm{Cos}[t\,\sigma]\, n_{3,2}}{g}\Big)\, \sigma_{20}^2\, \beta_{2,0}\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big) \Big/
\end{aligned}
$$

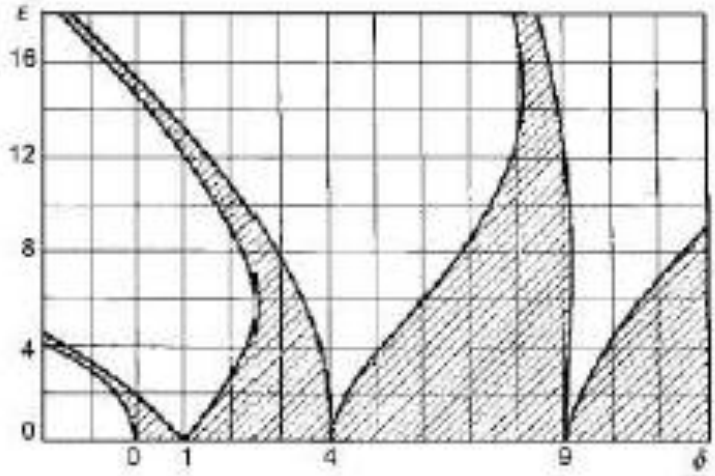
$$
\begin{aligned}
&(-(-\mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^2\,(d_4\,\mathrm{dbar}_3\,\mathrm{dbar}_4\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0}-d_4\,\beta_{1,0}\,(1+\mathrm{dbar}_2\,\beta_{0,1}^2+\\
&\qquad \mathrm{dbar}_1\,\beta_{0,2}+\mathrm{dbar}_6\,\beta_{1,0}^2))+d_4\,\mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_2\,\beta_{0,1}\\
&\qquad \beta_{1,0}^2\,(-\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0}-\mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1}))\,(-d_4\,d_9\,\mathrm{dbar}_4^2\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^4\,\beta_{1,0}-\\
&\qquad d_4\,\mathrm{dbar}_4^2\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0}\,(-1-d_6\,\beta_{0,1}^2-d_2\,\beta_{1,0}^2+d_3\,d_4\,\beta_{1,0}^2-d_1\,\beta_{2,0}))+\\
&\qquad (-d_4\,d_9\,\mathrm{dbar}_4^2\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^3\,\beta_{1,0}^2-d_4\,\mathrm{dbar}_4^2\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0}\,(-\mathrm{dbar}_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0}-\mathrm{dbar}_7\,\beta_{1,1}))\\
&\qquad (d_4\,\mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_1\,\beta_{0,1}^2\,\beta_{1,0}\,(d_8\,\beta_{0,1}\,\beta_{1,0}+d_7\,\beta_{1,1})+d_4\,\mathrm{dbar}_4\,\mathrm{dhat}_2\,\beta_{0,1}\\
&\qquad \beta_{1,0}^2\,(-1-d_6\,\beta_{0,1}^2-d_2\,\beta_{1,0}^2+d_3\,d_4\,\beta_{1,0}^2-d_1\,\beta_{2,0})))-2\,\xi\sigma_{0,2}\,\beta_{0,2}|
\end{aligned}
\tag{99}
$$

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι εξισώσεις (93)-(97) αποτελούν γενίκευση της εξίσωσης Mathieu με απόσβεση:

$$\ddot{\beta_1} + 2\xi\sigma_1\dot{\beta_1} + \sigma_1^2\beta_1(1 - h\sigma^2\cos(\sigma t)) = 0 \tag{100}$$

Όπου $h = \frac{n_{3a}}{g}$.

Οι εξισώσεις αυτές δεν επιδέχονται ακριβή αναλυτική λύση.Το χαρακτηριστικό της εξίσωσης Mathieu είναι ότι για $\frac{4\sigma_1^2}{\sigma^2} = n^2$, όπου n οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός, υπάρχουν λύσεις που αντιπροσωπεύουν ασταθείς καταστάσεις. Στο Σχήμα (4.1) παρουσιάζονται οι περιοχές αστάθειας όταν η απόσβεση είναι μηδενική. Με δ συμβολίζεται ο λόγος $\frac{\sigma_1^2}{\sigma^2}$ ενώ ε=h($\frac{1}{\sigma^2}$).



Σχήμα 4.1: Διάγραμμα ευσταθών – ασταθών περιοχών για την εξίσωση Mathieu με μηδενική απόσβεση. Οι γραμμοσκιασμένες περιοχές αντιστοιχούν σε περιοχές ευστάθειας. Πηγή: Liquid Sloshing Dynamics Theory and Applications, Ibrahim, Cambridge 2001.

Από τις διάφορες περιοχές που φαίνονται στο ανωτέρω σχήμα σημαντικότερη είναι η περίπτωση όπου n=1 δηλαδή $\sigma^2 = 4\sigma_1^2$ (Abramson 1963) και συνεπώς $T = 1/2T_1$, όπου T είναι η φυσική περίοδος και T_1 η περίοδος διέγερσης της δεξαμενής.Η περιοχή αυτή είναι γνωστή ως περιοχή κύριου συντονισμού (principal resonance).Τα ανωτέρω αναφέρθηκαν ώστε να είναι έπειτα πιο εύκολη η ερμηνεία των διαγραμμάτων.

Κεφάλαιο 5° –Αναλυση Αποτελεσμάτων

5.1 Μελέτη δυναμικής ευστάθειας μοντέλου

Η ανάλυση του μοντέλου και μελέτη της ευστάθειας, έχει γίνει με τη χρήση του προγράμματος matcont 5.2 το οποίο λειτουργεί ως πρόγραμμα γραφικού περιβάλλοντος του Matlab. Η έκδοση Matlab που χρησιμοποιήθηκε είναι 7.1. Η επεξεργασία έχει γίνει σε Η/Υ με επεξεργαστική ισχύ 2.0 GHz και μνήμη 2GB. Επιπλέον, για την εξαγωγή κάποιων εξισώσεων χρησιμοποιήθηκε το Mathematica 6 λόγω της απλότητας χρήσης του σε σχέση με το Matlab. Το Matcont αποτελεί έναν ισχυρό continuation αλγόριθμο ο οποίος δέχεται αυτόνομα μαθηματικά μοντέλα της μορφής:

$$\frac{dx}{dt} = f(x; b)$$

όπου x και b είναι αντίστοιχα τα διανύσματα των μεταβλητών και των σταθερών ελέγχου του συστήματος. Η μεταβολή ενός ή περισσοτέρων στοιχείων του διανύσματος b, κατόπιν επίλυσης του ανωτέρω συστήματος, δίνει ως αποτέλεσμα τις διακλαδώσεις της απόκρισης που ανάλογα με την πολυπλοκότητα των μη γραμμικών όρων μπορεί να έχουν εξαιρετικά πολύπλοκη μορφή. Η κατασκευή ενός διαγράμματος διακλαδώσεων είναι πολύ σημαντική για την πρόβλεψη της δυναμικής συμπεριφοράς του συστήματος και την αποφυγή δυσάρεστων καταστάσεων.

5.1.1 Μοντέλο εισαγωγής στο matcont

Για τη μετατροπή των εξισώσεων σε πρωτοτάξιες θεωρούμε:

$$\beta_{1,0} = X_6,\ \beta_{0,1} = X_7,\ \beta_{2,0} = X_8,\ \beta_{1,1} = X_9,\ \beta_{0,2} = X_{10}$$
$$\dot{\beta}_{1,0} = \dot{X}_6 = X_1,\ \dot{\beta}_{0,1} = \dot{X}_7 = X_2,\ \dot{\beta}_{2,0} = \dot{X}_8 = X_3,\ \dot{\beta}_{1,1} = \dot{X}_9 = X_4,\ \dot{\beta}_{0,2} = \dot{X}_{10} = X_5$$
$$\ddot{\beta}_{1,0} = \dot{X}_1,\ \ddot{\beta}_{0,1} = \dot{X}_2,\ \ddot{\beta}_{2,0} = \dot{X}_3,\ \ddot{\beta}_{1,1} = \dot{X}_4,\ \ddot{\beta}_{0,2} = \dot{X}_5$$

Τα παραπάνω μαθηματικά μοντέλα όμως είναι μη αυτόνομα και επομένως για να μπορέσουμε να τα εισάγουμε στο Matcont για περαιτέρω επεξεργασία πρέπει να τα μετατρέψουμε σε μη αυτόνομη μορφή. Για να το καταφέρουμε αυτό εισάγουμε ένα ζεύγος επιπρόσθετων διαφορικών εξισώσεων με μεταβλητές x, y τέτοιες ώστε $x = \sin(\sigma t)$ και $y = \cos(\sigma t)$.Οι εξισώσεις αυτές είναι οι εξής:

x'=x+σy-x(x^2+y^2)
y'=-σx+y-y(x^2+y^2) (101)

Οι δύο τελευταίες εξισώσεις στο σύστημα εξασφαλίζουν ότι η τιμή των x και y θα παραμείνει μεταξύ του -1 και του 1.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να διευκρινιστούν οι αντιστοιχίες των συντελεστών που χρησιμοποιήθηκαν σε σχέση με τις αρχικές εξισώσεις ώστε να μπορέσει το matcont να επεξεργαστεί το σύστημα.

Αρχικός συμβολισμός	Συμβολισμός στο Mathematica	Συμβολισμός στο matcont
d_1	d_1	D1
d_2	d_2	D2
d_3	d_3	D3
d_4	d_4	D4
d_5	d_5	D5
d_6	d_6	D6
d_7	d_7	D7
d_8	d_8	D8
d_9	d_9	D9
d_{10}	d_{10}	D10
d_{11}	d_{11}	D11
d_{12}	d_{12}	D12
$\overline{d_1}$	$dbar_1$	K1
$\overline{d_2}$	$dbar_2$	K2
$\overline{d_3}$	$dbar_3$	K3
$\overline{d_4}$	$dbar_4$	K4
$\overline{d_5}$	$dbar_5$	K5
$\overline{d_6}$	$dbar_6$	K6
$\overline{d_7}$	$dbar_7$	K7
$\overline{d_8}$	$dbar_8$	K8
$\overline{d_9}$	$dbar_9$	K9
$\overline{d_{10}}$	$dbar_{10}$	K10
$\overline{d_{11}}$	$dbar_{11}$	K11
$\overline{d_{12}}$	$dbar_{12}$	K12
$\widehat{d_1}$	$dhat_1$	M1
$\widehat{d_2}$	$dhat_2$	M2
$\widehat{d_3}$	$dhat_3$	M3
$\sigma_{1,0}$	$\sigma_{1,0}$	S10
$\sigma_{0,1}$	$\sigma_{0,1}$	S1
$\sigma_{2,0}$	$\sigma_{2,0}$	S20
$\sigma_{0,2}$	$\sigma_{0,2}$	S2
$\sigma_{1,1}$	$\sigma_{1,1}$	S11
σ	σ	SS
n_{3a}	n_{3a}	N3
$\dot{\beta}_{1,0}$	$\dot{\beta}_{1,0}$	X1
$\dot{\beta}_{0,1}$	$\dot{\beta}_{0,1}$	X2
$\dot{\beta}_{2,0}$	$\dot{\beta}_{2,0}$	X3
$\dot{\beta}_{1,1}$	$\dot{\beta}_{1,1}$	X4
$\dot{\beta}_{0,2}$	$\dot{\beta}_{0,2}$	X5
$\beta_{1,0}$	$\beta_{1,0}$	X6
$\beta_{0,1}$	$\beta_{0,1}$	X7
$\beta_{2,0}$	$\beta_{2,0}$	X8
$\beta_{1,1}$	$\beta_{1,1}$	X9

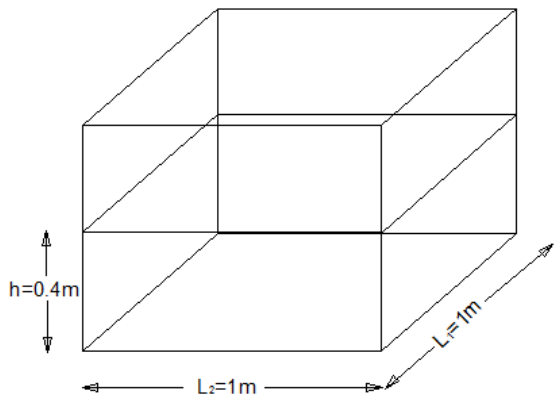
$\beta_{0,2}$	$\beta_{0,2}$	X10
g	g	G
x	-	X
y	-	Y
ξ	Z	Z

5.1.2 Παρουσίαση μοντέλων

Η επιλογή των φυσικών παραμέτρων του συστήματος είναι αρκετά σημαντική σύμφωνα με όσα έχουν λεχθεί σε προηγούμενα κεφάλαια. Η σημαντικότητα της επιλογής μας αυξάνει αν αναλογιστούμε το γεγονός ότι η επιλογή των φυσικών παραμέτρων πρέπει να συνεπάγεται κάποιο φυσικό σύστημα το οποίο να είναι ρεαλιστικό, να έχει άμεση εφαρμογή σε περιπτώσεις ναυπηγικής (ή έστω να είναι υπό κλίμακα) και να ικανοποιεί τους περιορισμούς που θέτει το μαθηματικό μοντέλο μας.

Έτσι στο σημείο αυτό θα πρέπει να διευκρινιστούν τα μοντέλα τα οποία εξετάστηκαν. Οι διαφοροποίηση των μοντέλων βασίζεται πάνω στις διαστάσεις της εκάστοτε δεξαμενής που θεωρούμε ως αντικείμενο μελέτης. Κατά συνέπεια σε κάθε μοντέλο αυτά που παρουσιάζουν αλλαγές είναι οι συντελεστές $d_i, \bar{d}_i, \widehat{d}_i$, οι οποίοι εξαρτώνται από τις διαστάσεις τις δεξαμενής, καθώς και τις συχνότητες $\sigma_{i,j}$ που όπως είναι φανερό από τη σχέση (40) εξαρτώνται και αυτές από τις διαστάσεις της δεξαμενής.

1° Μοντέλο
Σαν πρώτο μοντέλο θεωρούμε δεξαμενή με τετράγωνο σχήμα και διαστάσεις $L_1 = L_2 = 1\ m, h = 0.4\ m$ όπως φαίνεται και στο σχήμα που ακολουθεί:

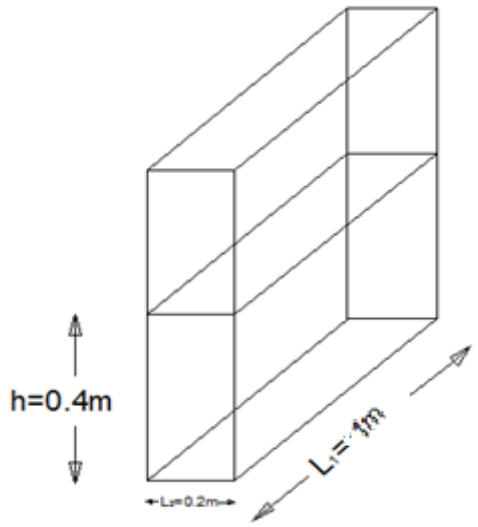


Σχήμα 5.1:Αναπαράσταση της δεξαμενής που χρησιμοποιήθηκε για την ανάλυση του πρώτου μοντέλου.

Εκτός των άλλων η επιλογή αυτή έγινε γιατί δίνει λόγο $\bar{h}$=h/L_1= 0.4 ο οποίος είναι οριακά μεγαλύτερος από το λόγο κρίσιμου βάθους.Για τις τιμές αυτές οι χαμηλότερες φυσικές συχνότητες έχουν τιμές $\sigma_{0,1}$=$\sigma_{1,0}$=5.12 Hz, $\sigma_{0,2}$=$\sigma_{2,0}$=7.79 Hz, $\sigma_{1,1}$=6.42 Hz.

2° Μοντέλο

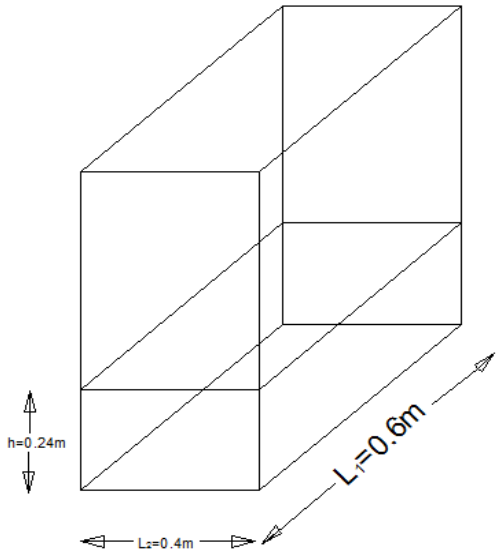
Σαν δεύτερο μοντέλο θεωρούμε δεξαμενή με ορθογώνιο,σχεδόν διδιάστατο σχήμα και διαστάσεις $L_1 = 1\,m, L_2 = 0.2\,m, h = 0.4\,m$ όπως φαίνεται και στο σχήμα που ακολουθεί.Οι διαστάσεις αυτές δίνουν λόγο $\bar{h}$=h/L_1= 0.4 και οι χαμηλότερες φυσικές συχνότητες έχουν τιμές $\sigma_{0,1}$=12.41 Hz, $\sigma_{1,0}$=5.12 Hz, $\sigma_{0,2}$=17.56 Hz, $\sigma_{2,0}$=7.79 Hz, $\sigma_{1,1}$=12.54 Hz.



Σχήμα 5.2:Αναπαράσταση της δεξαμενής που χρησιμοποιήθηκε για την ανάλυση του δεύτερου μοντέλου.

3° Μοντέλο

Σαν τρίτο μοντέλο θεωρούμε δεξαμενή με ορθογώνιο σχήμα και διαστάσεις $L_1 = 0.6\,m, L_2 = 0.4\,m, h = 0.24\,m$ όπως φαίνεται και στο σχήμα που ακολουθεί. Οι διαστάσεις αυτές δίνουν λόγο $\bar{h}$=h/L_1= 0.4 και οι χαμηλότερες φυσικές συχνότητες έχουν τιμές $\sigma_{0,1}$=6.64 Hz, $\sigma_{1,0}$=5.12 Hz, $\sigma_{0,2}$=9.61 Hz, $\sigma_{2,0}$=7.79 Hz, $\sigma_{1,1}$=7.37 Hz.



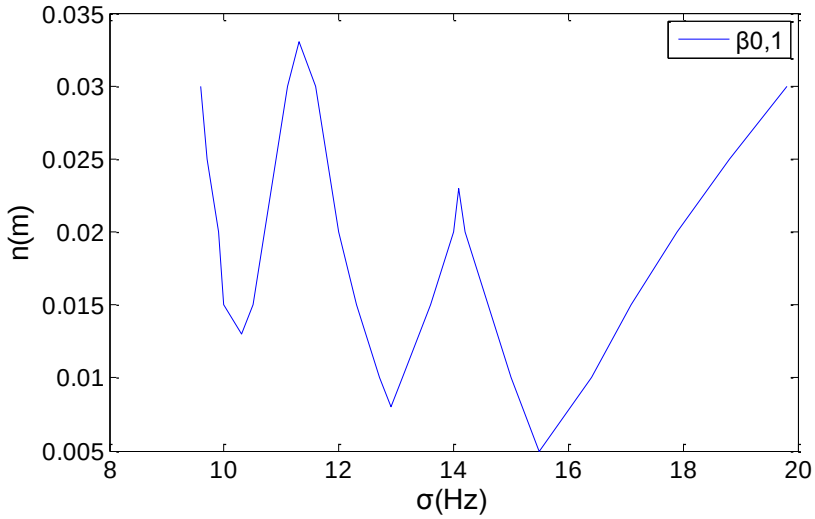
Σχήμα 5.3:Αναπαράσταση της δεξαμενής που χρησιμοποιήθηκε για την ανάλυση του τρίτου μοντέλου.

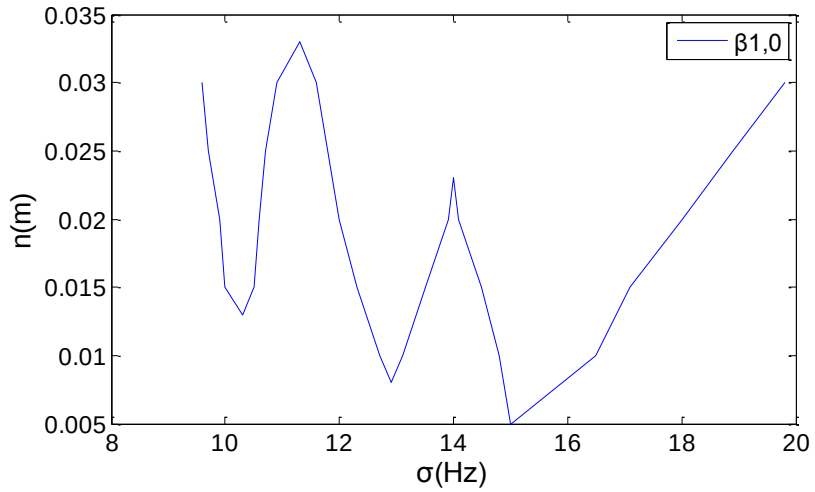
Οι παράμετροι ελέγχου στην περίπτωσή και των τριών δεξαμενών είναι η συχνότητα διέγερσης και το πλάτος διέγερσης ενώ ο συντελεστής απόσβεσης παραμένει σταθερός και ίσος με ξ=0.03. Διατηρώντας σταθερή μια από τις σταθερές ελέγχου εξετάζουμε την επίδραση της δεύτερης στην δυναμική ευστάθεια του συστήματος. Η εξέταση αυτή γίνεται αφενός για να διαπιστώσουμε αν η συμπεριφορά του συστήματος είναι κοντά σε αυτήν που προβλέπει η γραμμική θεώρηση και αφετέρου για να ελέγξουμε την ισχύ των αποτελεσμάτων στην περίπτωση που η αρχική διαταραχή δεν είναι μικρή (κάτι που δεν είναι δυνατό να εξεταστεί μέσω της γραμμικής θεώρησης).

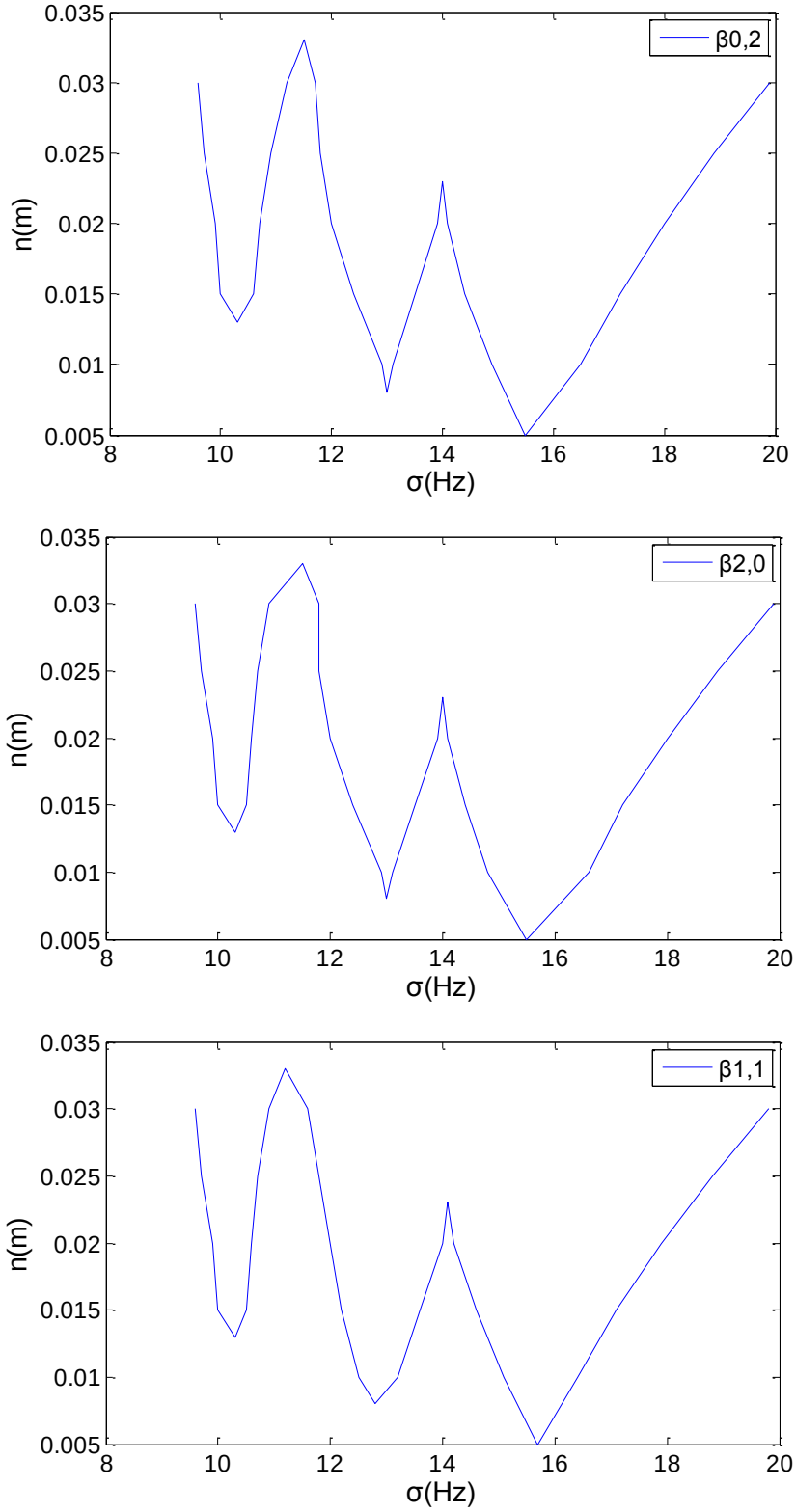
5.1.3 Αποτελέσματα

1° Μοντέλο

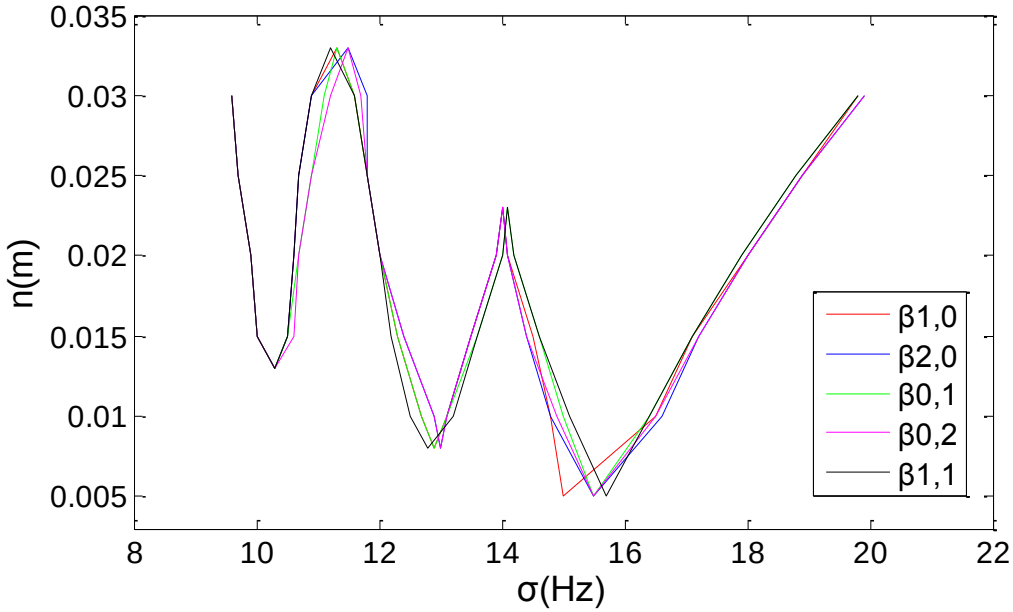
Ξεκινώντας από το πρώτο μοντέλο θα παρουσιαστούν οι καμπύλες αστάθειας των διαφόρων modes για την περίπτωση καταρχήν όπου το ιξώδες έχει προστεθεί από την αρχή. Στον οριζόντιο άξονα αναπαρίσταται η συχνότητα διέγερσης σ,ενώ στον κατακόρυφο, το πλάτος διέγερσης n.







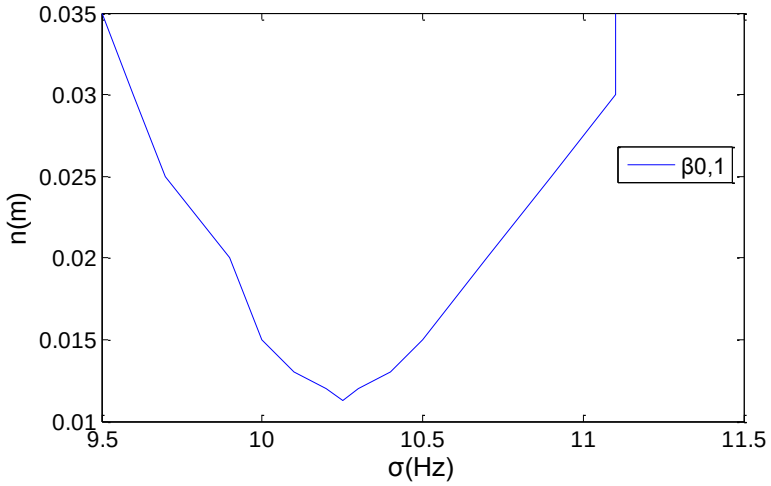
Σχήμα 5.4:Καμπύλη αστάθειας για τα modes $\beta_{i,j}$ του πρώτου μοντέλου και του συστήματος όπου το ιξώδες προστέθηκε πρίν την επίλυση των εξισώσεων.

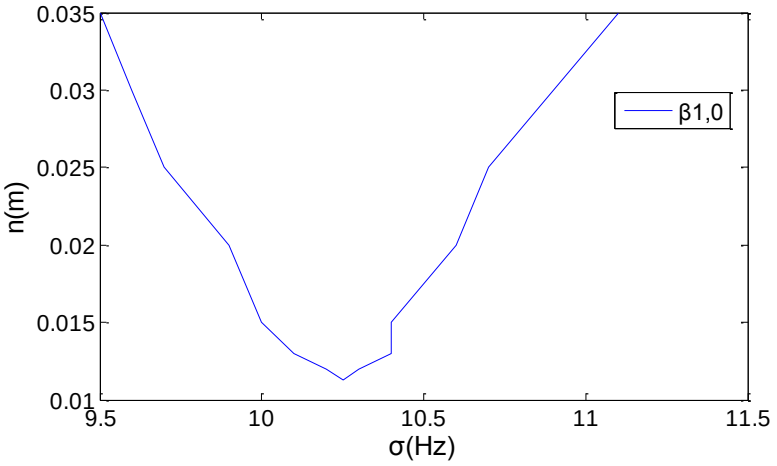


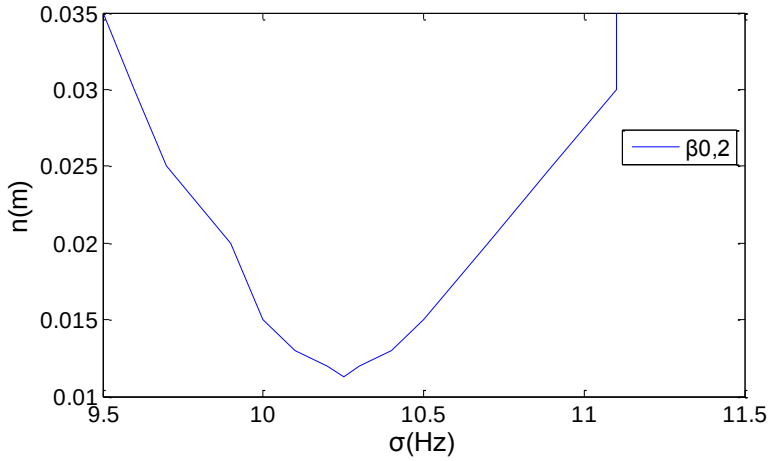
Σχήμα 5.5:Συγκεντρωτική καμπύλη αστάθειας για τα modes $\beta_{i,j}$ του πρώτου μοντέλου και του συστήματος όπου το ιξώδες προστέθηκε πρίν την επίλυση των εξισώσεων.

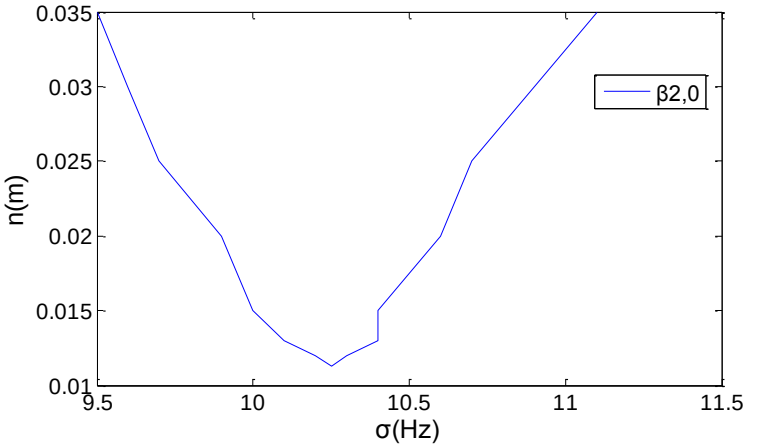
Ενώ θα περιμέναμε η περιοχή αστάθειας του κάθε mode να βρίσκεται γύρω από τις τιμές όπου ισχύει $\sigma=2\sigma_{i,j}$ για το κάθε ένα, και οι περιοχές αυτές να μην επικαλύπτονται,όπως παρατηρούμε από τα διαγράμματα παρ'όλο που ισχύει η πρώτη υπόθεση, όλες οι περιοχές εμφανίζονται σε όλα τα modes. Αυτό πιθανόν συμβαίνει επειδή οι εξισώσεις που προσδιορίζουν τα modes είναι συζευγμένες μεταξύ τους.

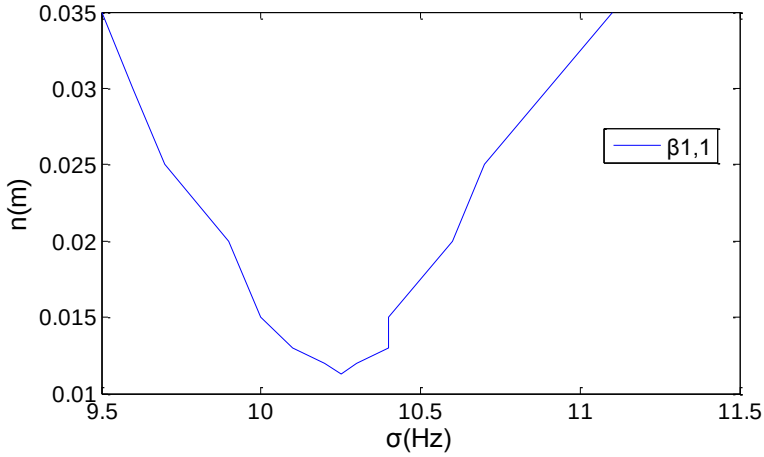
Παρακάτω, αποσκοπώντας στη σύγκριση των αποτελεσμάτων θα παρουσιαστούν και οι καμπύλες που προκύπτουν από το σύστημα όπου το ιξώδες προστέθηκε μετά την επίλυση των εξισώσεων. Σχηματίστηκαν όμως οι καμπύλες που αντιστοιχούν μόνο σε συχνότητες διέγερσης κοντά στο διπλάσιο της χαμηλότερης φυσικής συχνότητας, όπου είναι και περιοχή κυρίου ενδιαφέροντος.



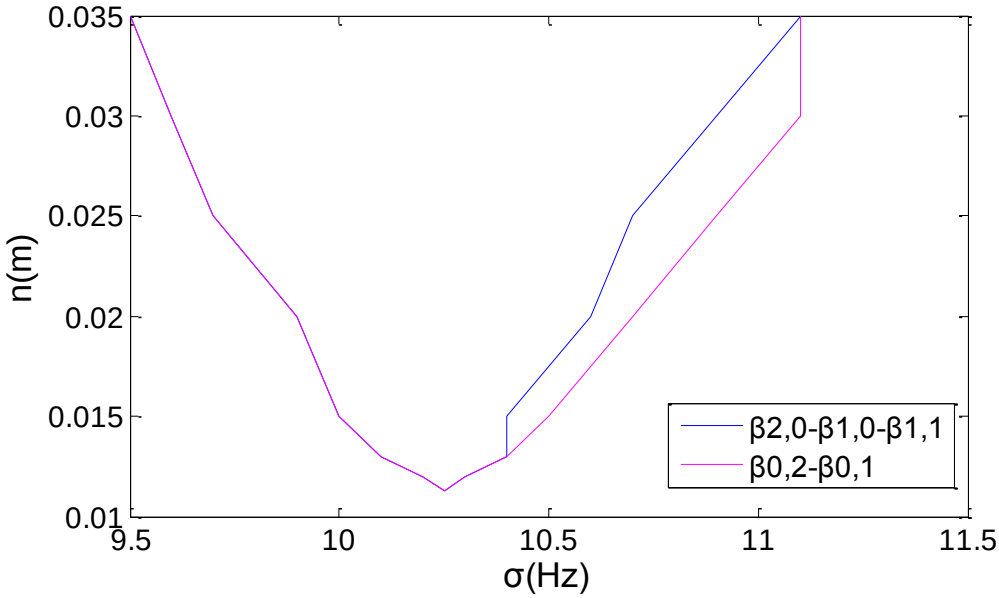

0.035
0.03
0.025
0.02
0.015
0.01
n(m)
9.5
10
10.5
11
11.5
σ(Hz)
β1,0


0.035
0.03
0.025
0.02
0.015
0.01
n(m)
9.5
10
10.5
11
11.5
σ(Hz)
β0,2


0.035
0.03
0.025
0.02
0.015
0.01
n(m)
9.5
10
10.5
11
11.5
σ(Hz)
β2,0



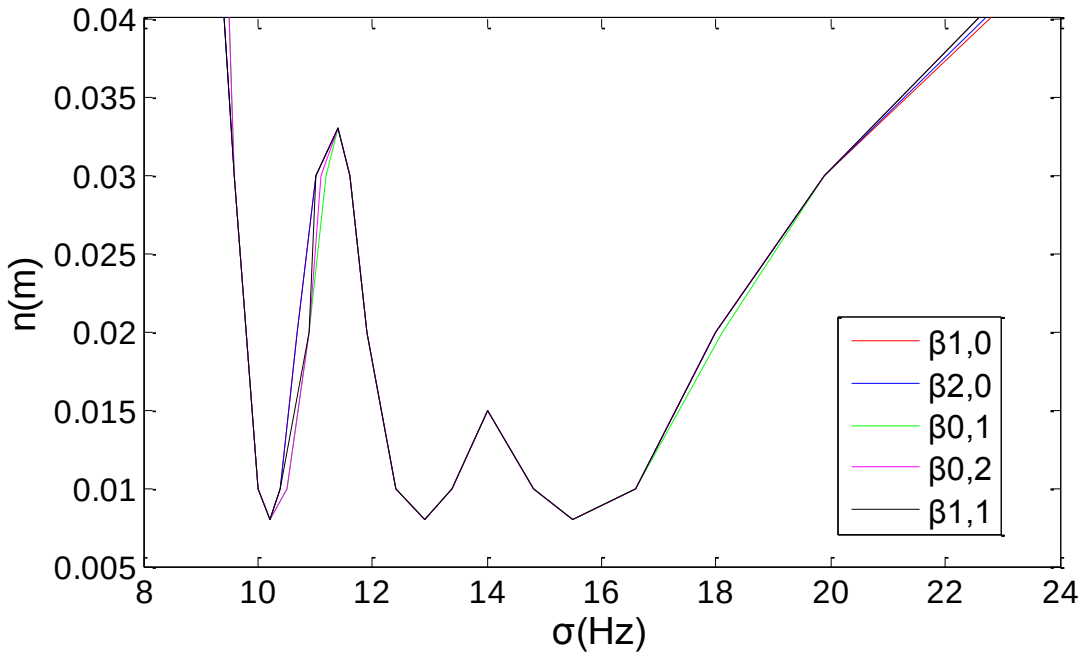
Σχήμα 5.6:Καμπύλη αστάθειας για τα modes $\beta_{i,j}$ του πρώτου μοντέλου και του συστήματος όπου το ιξώδες προστέθηκε μετά την επίλυση των εξισώσεων.



Σχήμα 5.7:Συγκεντρωτική καμπύλη αστάθειας για τα modes $\beta_{i,j}$ του πρώτου μοντέλου και του συστήματος όπου το ιξώδες προστέθηκε μετά την επίλυση των εξισώσεων.

Όπως βλέπουμε η καμπύλη δεν έχει ουσιαστική διαφορά με την πρώτη περιοχή του σχήματος 5.5. Και στις δύο περιπτώσεις τα όρια και η κορυφή της καμπύλης συμπίπτουν, τα modes $\beta_{0,2}$ και $\beta_{0,1}$ είναι μετατοπισμένα σε σχέση με τα υπόλοιπα και στις δύο καμπύλες, ενώ αν θέλουμε να είμαστε ακριβείς υπάρχει μια μικρή διαφοροποίηση όσον αφορά τη μορφή του δεξιού κλάδου.

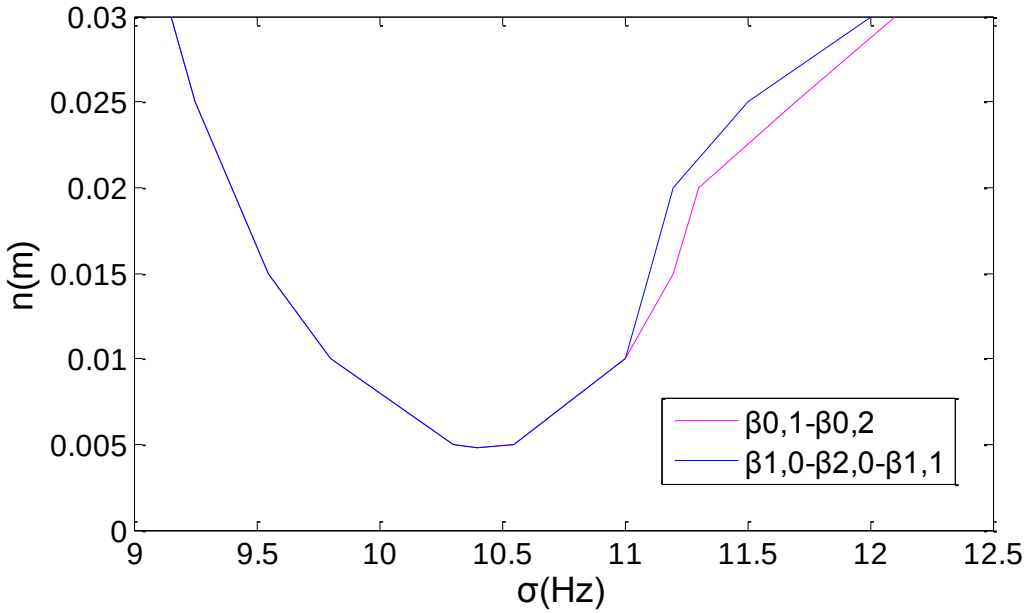
Επίσης για λόγους σύγκρισης με το κύριο μοντέλο όπου το ιξώδες έχει προστεθεί πρίν την επίλυση των εξισώσεων και οι αρχικές συνθήκες είναι ίσες με 0.01m,θα παρατεθούν δύο ακόμη περιπτώσεις που εξετάστηκαν,αυτή του μοντέλου χωρίς καθόλου ιξώδες και αυτή του κυρίου μοντέλου αλλά με αρχικές συνθήκες 0.014m.



Σχήμα 5.8:Συγκεντρωτική καμπύλη αστάθειας για τα modes $\beta_{i,j}$ του πρώτου μοντέλου και του συστήματος χωρίς ιξώδες.

Και εδώ βλέπουμε ότι δεν υπάρχει ουσιαστική διαφορά από το κύριο μοντέλο εκτός ίσως από το ότι τα modes τείνουν να συμπίπτουν περισσότερο μεταξύ τους.Αξίζει να σημειωθεί ότι αυτή ήταν η μόνη περίπτωση όπου όλοι οι οριακοί κύκλοι που παρατηρήθηκαν στις περιοχές αστάθειας ήταν απολύτως ευσταθείς.

Για την περίπτωση όπου αυξήσαμε τις αρχικές συνθήκες, δεν παρατηρούμε ιδιαίτερη αλλαγή στη μορφή της καμπύλης.

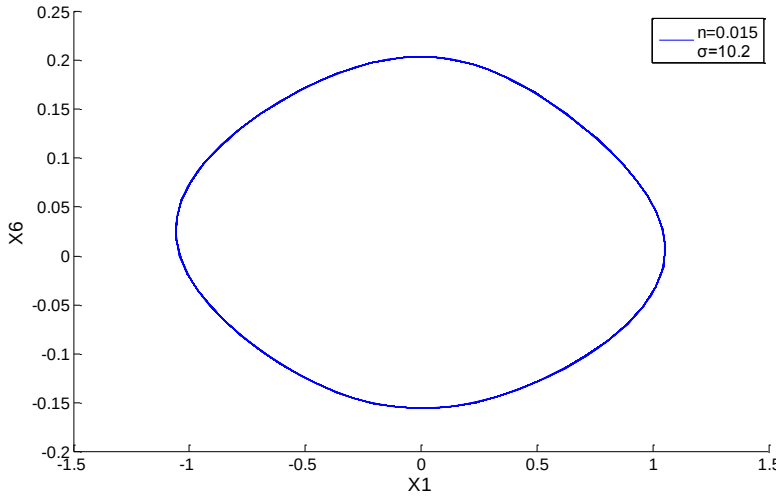


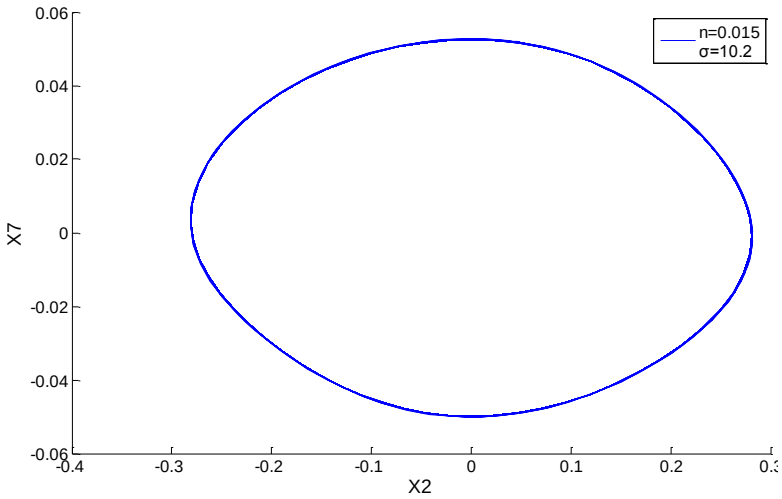
Σχήμα 5.9:Συγκεντρωτική καμπύλη αστάθειας για τα modes $\beta_{i,j}$ του πρώτου μοντέλου και του συστήματος όπου το ιξώδες προστέθηκε πρίν την επίλυση των

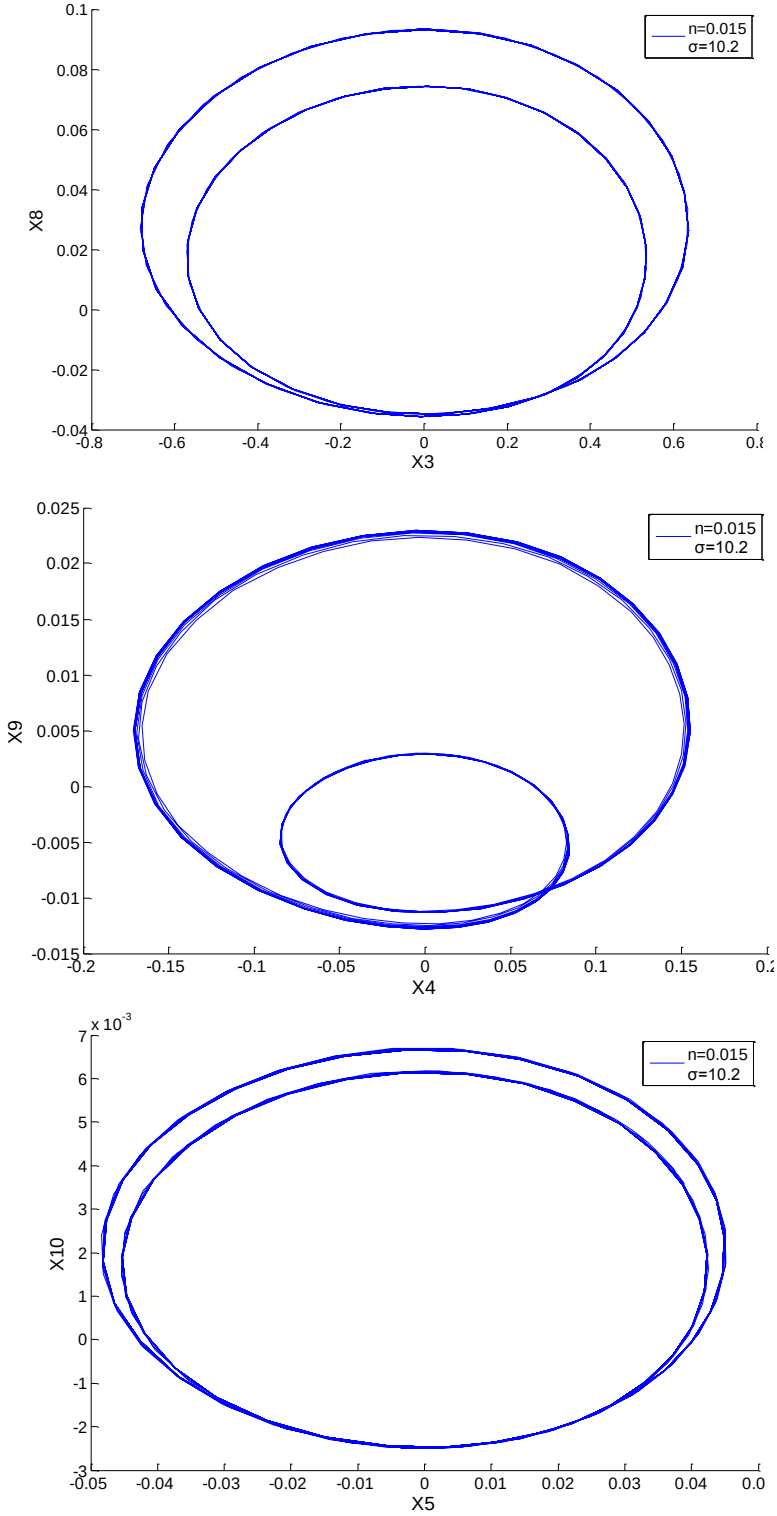
εξισώσεων,αλλά με αρχικές συνθήκες 0.014m και σε συχνότητες διέγερσης κοντά στο διπλάσιο της χαμηλότερης φυσικής συχνότητας.

Τα συμπεράσματα τα οποία προκύπτουν από τα παραπάνω διαγράμματα αφορούν συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων του συστήματος. Για να μπορέσουμε να γενικεύσουμε τα συμπεράσματα για όλες τις τιμές των παραμέτρων ελέγχου (κυρίως της συχνότητας) πρέπει να εξεταστεί το σύστημα περισσότερο σφαιρικά. Πριν όμως παρουσιάσουμε την εξάρτηση του συστήματος από τη συχνότητα διέγερσης καλό θα ήταν να αναφέρουμε πώς η δυναμική συμπεριφορά του συστήματος απεικονίζεται ποιοτικά υπό τη μορφή διαγραμμάτων φάσης.

Παρακάτω θα παρουσιαστούν ορισμένοι ενδεικτικοί οριακοί κύκλοι του πρώτου συστήματος, οι οποίοι στη συνέχεια χρησιμοποιούνται για τα γενίκευση των αποτελεσμάτων σε όλες τις συχνότητες διέγερσης.

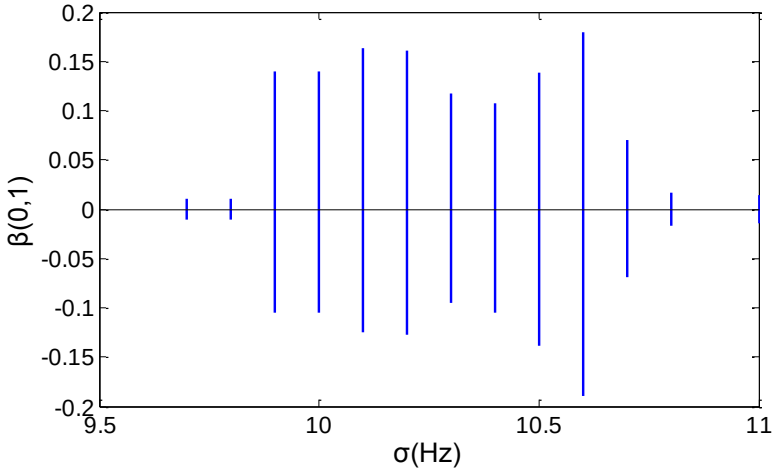


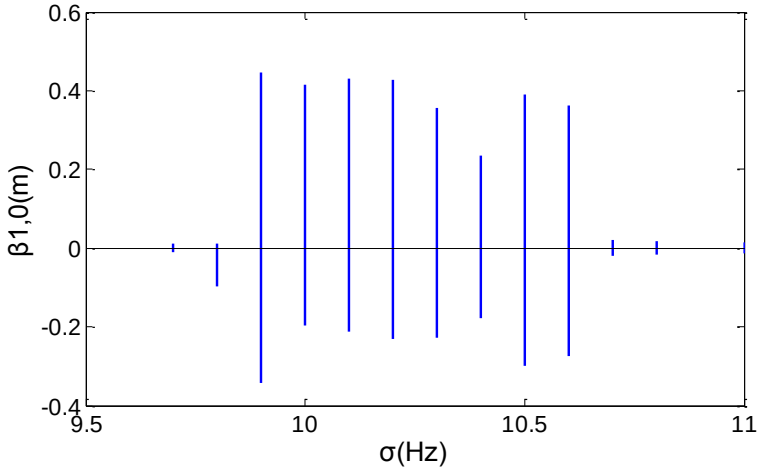


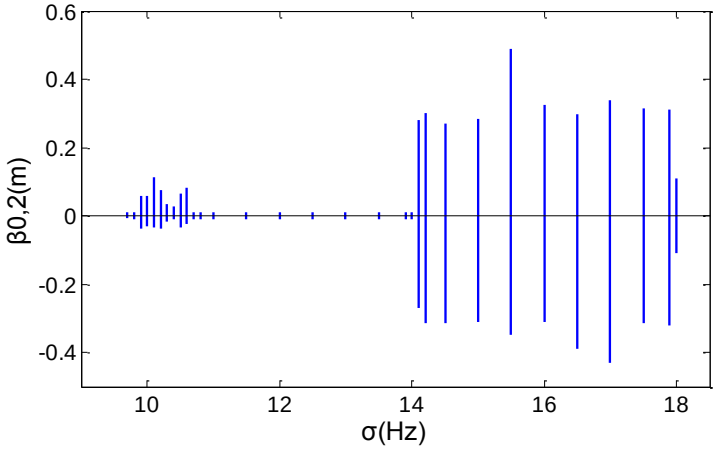


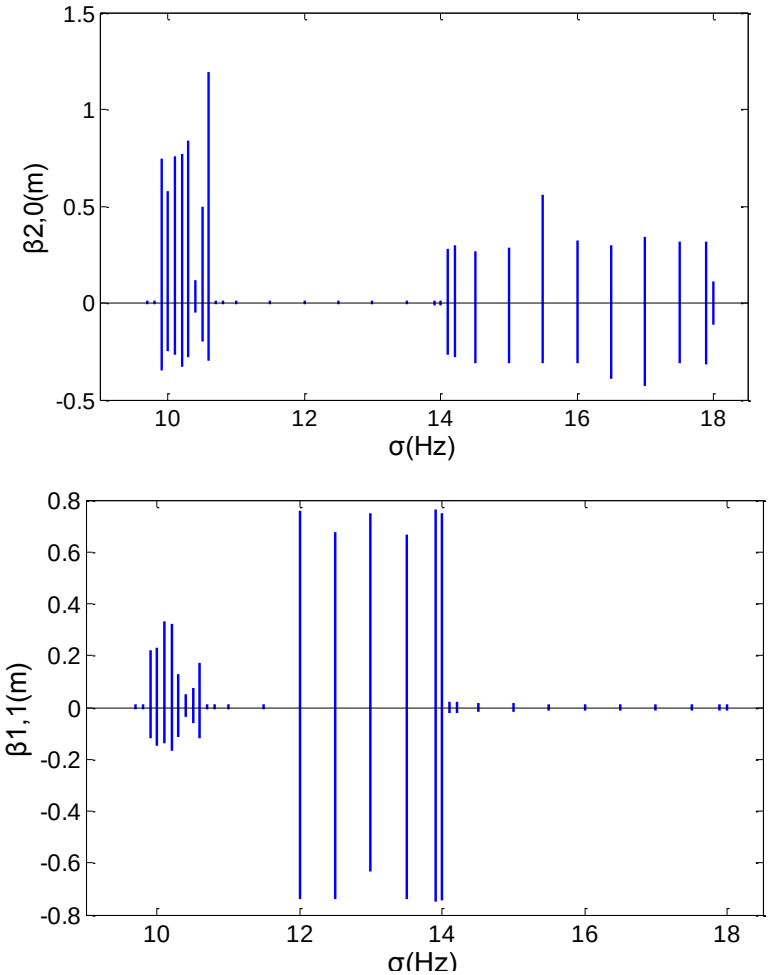
Σχήμα 5.10: Ποιοτική αναπαράσταση της δυναμικής συμπεριφοράς του πρώτου μοντέλου για διάφορες συχνότητες και διάφορα πλάτη διέγερσης επιλεγμένων modes.Αξίζει να σημειωθεί ότι στα τρία τελευταία σχήματα παρατηρείται και το φαινόμενο του διπλασιασμού συχνότητας.Το φαινόμενο αυτό αποτελεί κατάσταση αστάθειας του συστήματος κατά την οποία το σύστημα μεταβαίνει σε μια νέα συμπεριφορά με περίοδο το διπλάσιο της περιόδου του αρχικού συστήματος.

Τα επόμενα διαγράμματα δείχνουν τη διερεύνηση της απόκρισης σε συνάρτηση με τη συχνότητα διέγερσης. Διατηρώντας σταθερή την τιμή του πλάτους διέγερσης περιμένουμε να δούμε σε ποια συχνότητα εμφανίζεται η αστάθεια καθώς επίσης και ποιο είναι το πλάτος απόκρισης του συστήματος.









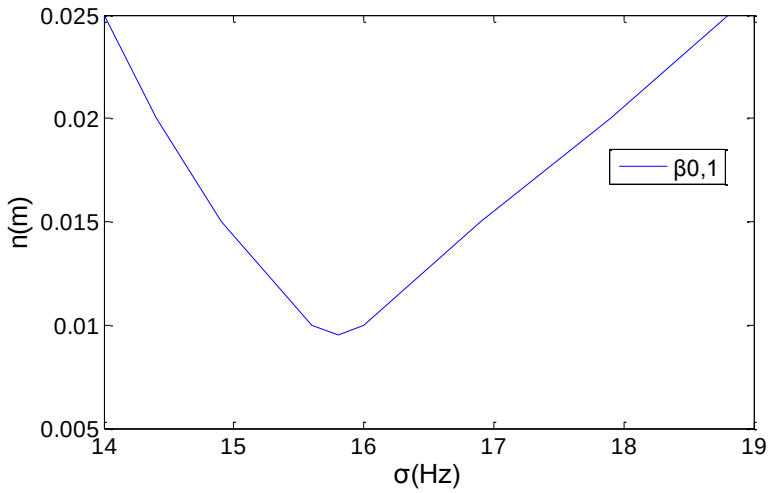
Σχήμα 5.11: Εξάρτηση της απόκρισης του συστήματος από τη συχνότητα διέγερσης. Το συγκεκριμένο γράφημα αντιστοιχεί σε τιμές ξ = 0.03 και n = 0.02. Η ίδια μορφή (μετατοπισμένη) εμφανίζεται για κάθε ζεύγος των τιμών ξ και n.

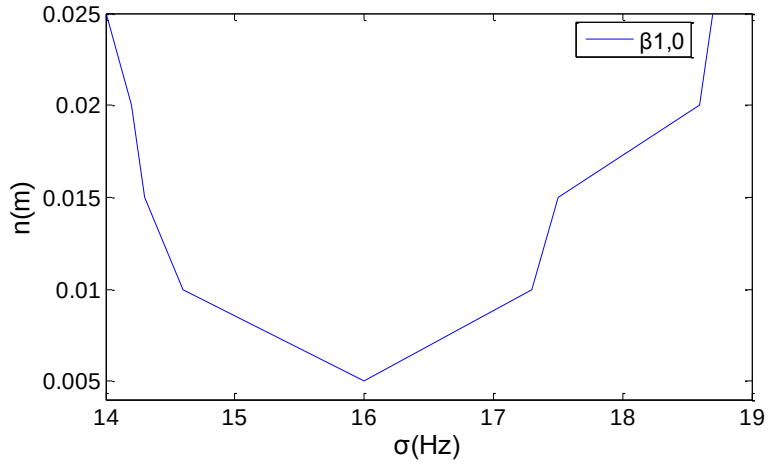
Όπως αναμενόταν, αύξηση των πλατών παρατηρείται στην κύρια περιοχή αστάθειας του κάθε mode όπου ισχύει $\sigma=2\sigma_{i,j}$,ενώ ειδικά στα modes $\beta_{0,2}$,$\beta_{2,0}$,$\beta_{1,1}$,εμφανίζεται και η περιοχή αστάθειας των $\beta_{0,1}$,$\beta_{1,0}$.

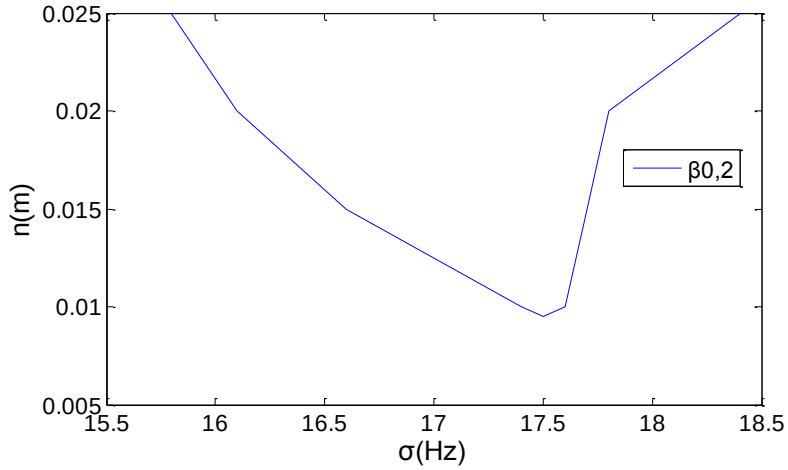
Μια γενική παρατήρηση πάνω σε αυτό το μοντέλο είναι η απόλυτη τήρηση της συμμετρίας στα αποτελέσματα των modes, που οφείλεται βέβαια και στην συμμετρία της γεωμετρίας της δεξαμενής.

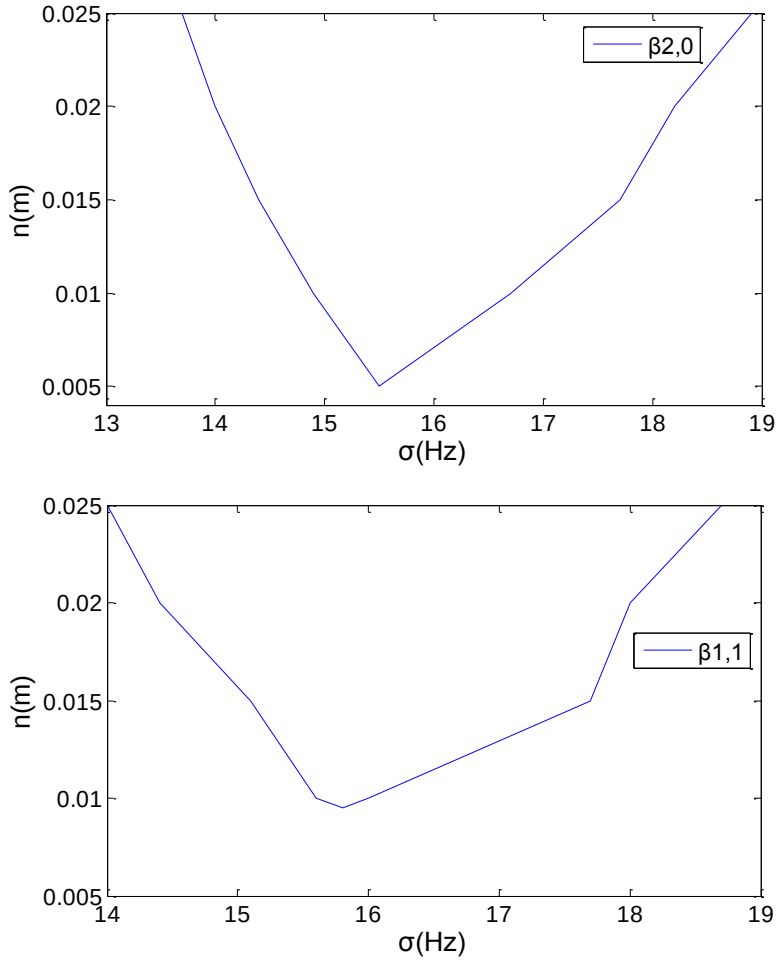
<u>2° Μοντέλο</u>

Συνεχίζοντας κατά τον ίδιο τρόπο και με το δεύτερο μοντέλο παρακάτω παρατίθονται τα διαγράμματα σ-n.

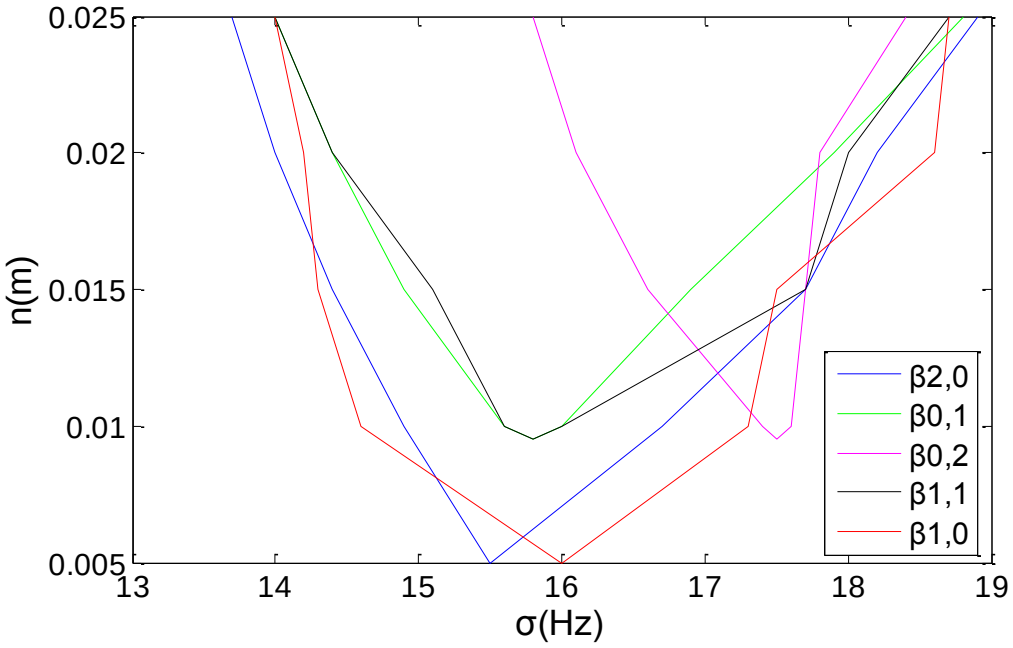

0.025
0.02
0.015
0.01
0.005
η(m)
14
15
16
17
18
19
σ(Hz)
β0,1


0.025
0.02
0.015
0.01
0.005
η(m)
14
15
16
17
18
19
σ(Hz)
β1,0

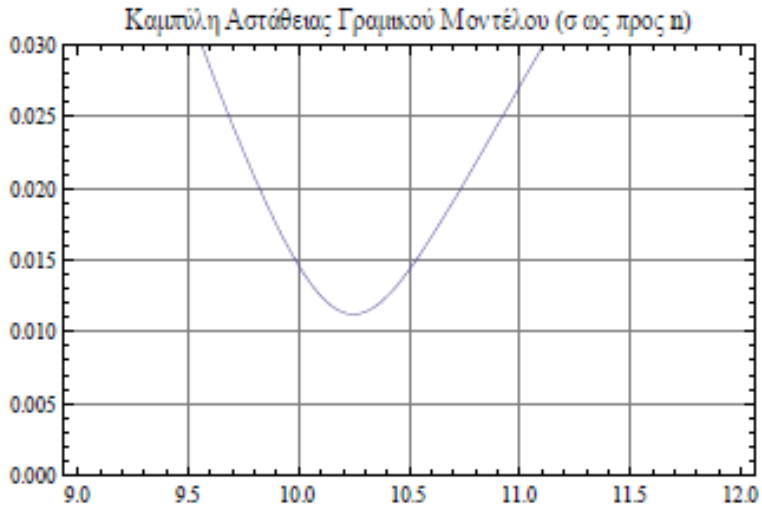

0.025
0.02
0.015
0.01
0.005
η(m)
15.5
16
16.5
17
17.5
18
18.5
σ(Hz)
β0,2



Σχήμα 5.12:Καμπύλη αστάθειας για τα modes $\beta_{i,j}$ του δεύτερου μοντέλου και του συστήματος όπου το ιξώδες προστέθηκε πρίν την επίλυση των εξισώσεων.

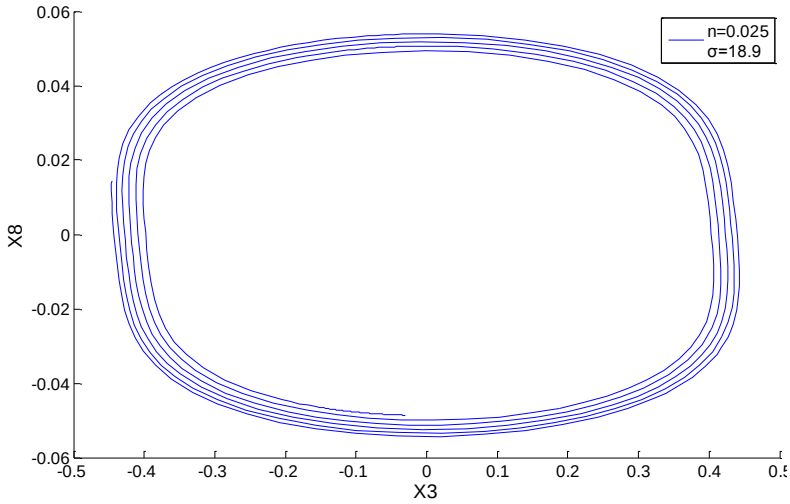


Σχήμα 5.13:Συγκεντρωτική καμπύλη αστάθειας για τα modes $\beta_{i,j}$ του δεύτερου μοντέλου και του συστήματος όπου το ιξώδες προστέθηκε πρίν την επίλυση των εξισώσεων.

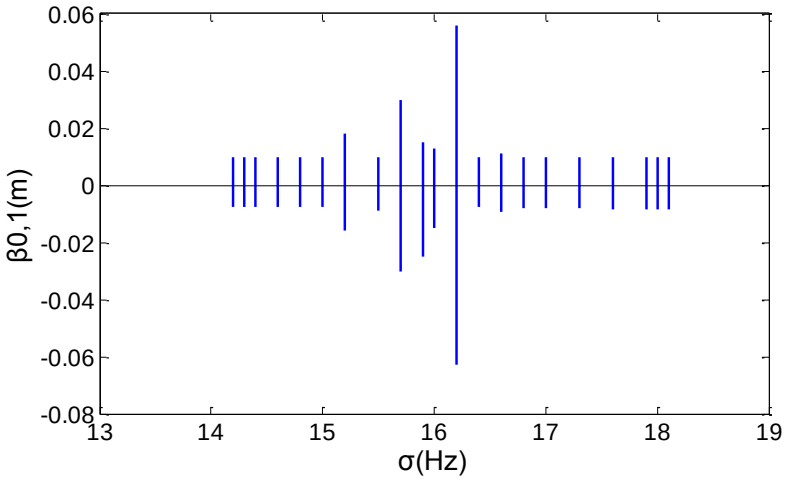


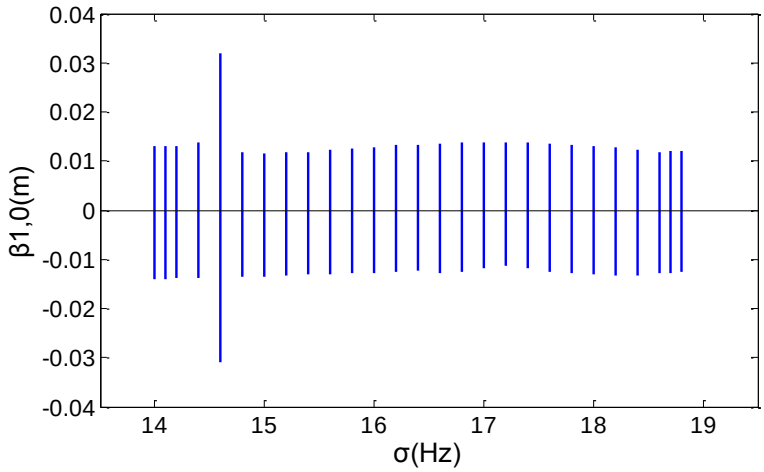
Σχήμα 5.14: Καμπύλη αστάθειας γραμμικού μοντέλου για τιμές των παραμέτρων τιμές h=0.4 m, l=1 m και ξ=0.03. Στον οριζόντιο άξονα αναπαρίσταται η συχνότητα διέγερσης (σ), ενώ στον κατακόρυφο το πλάτος διέγερσης (n). Η καμπύλη αντιστοιχεί σε συχνότητες διέγερσης στην περιοχή όπου $\sigma = 2\sigma_1$.

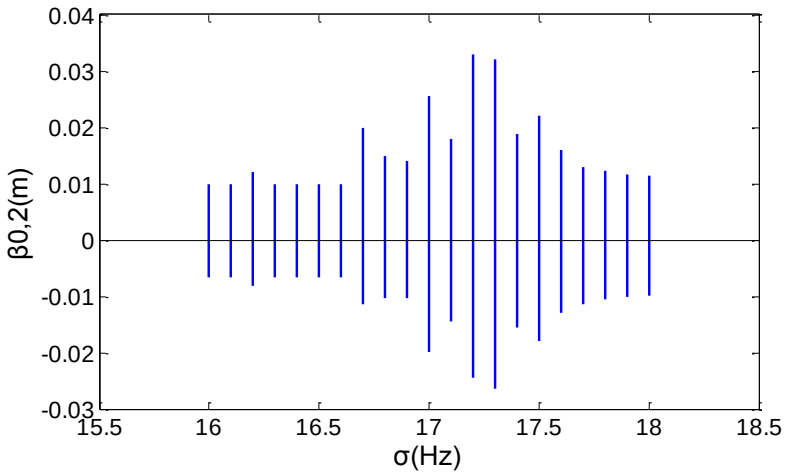
Όπως παρατηρούμε τα αποτελέσματα του μοντέλου 2 δεν συμπίπτουν με τα αποτελέσματα του διδιάστατου μοντέλου όπως αυτά φαίνονται στο σχήμα 7.6. Προφανώς το πάχος της δεξαμενής, αν και αρκετά μικρό, παίζει αρκετά μεγάλο ρόλο στα τελικά αποτελέσματα. Ακόμη αξίζει να σημειωθεί ότι στο συγκεκριμένο μοντέλο σε κάθε mode εμφανίζεται μόνο μια περιοχή αστάθειας και αυτή όχι στην περιοχή συχνοτήτων όπου ισχύει $\sigma=2\sigma_{i,j}$.

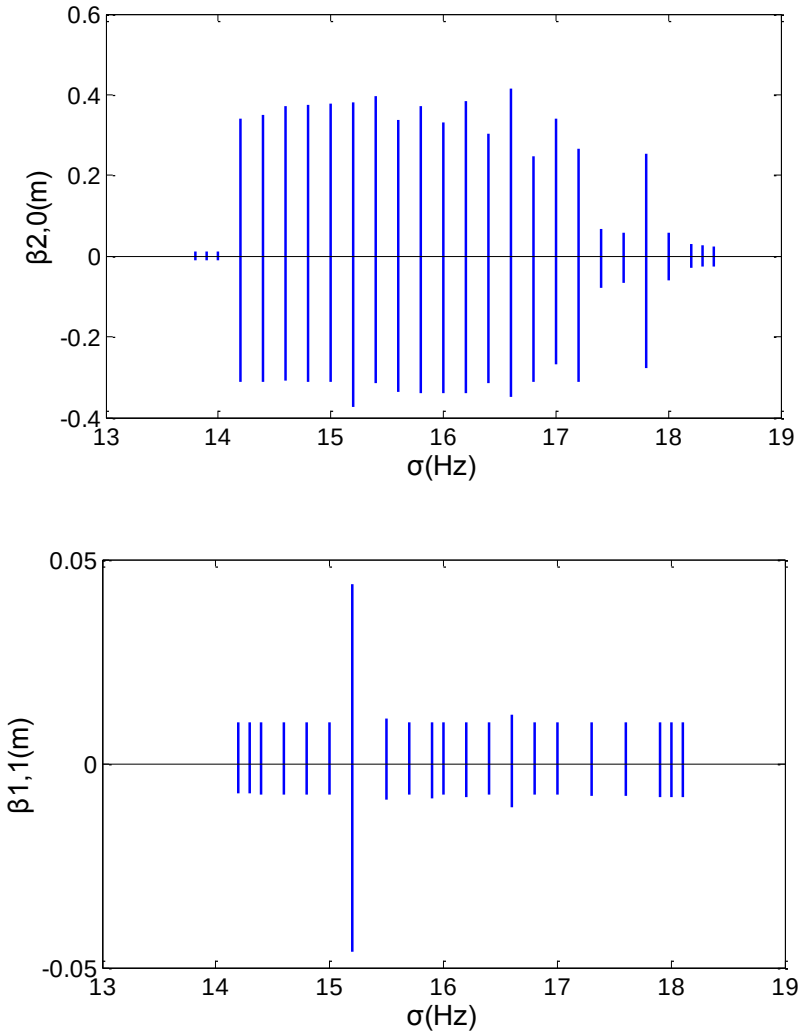


Σχήμα 5.15: Ποιοτική αναπαράσταση της δυναμικής συμπεριφοράς του δεύτερου μοντέλου για συχνότητα σ=18.9 Hz και πλάτος διέγερσης n=0.025m του mode $\beta_{2,0}$.


0.06
0.04
0.02
0
-0.02
-0.04
-0.06
-0.08
β0,1(m)
13
14
15
16
17
18
19
σ(Hz)


0.04
0.03
0.02
0.01
0
-0.01
-0.02
-0.03
-0.04
β1,0(m)
14
15
16
17
18
19
σ(Hz)


0.04
0.03
0.02
0.01
0
-0.01
-0.02
-0.03
β0,2(m)
15.5
16
16.5
17
17.5
18
18.5
σ(Hz)

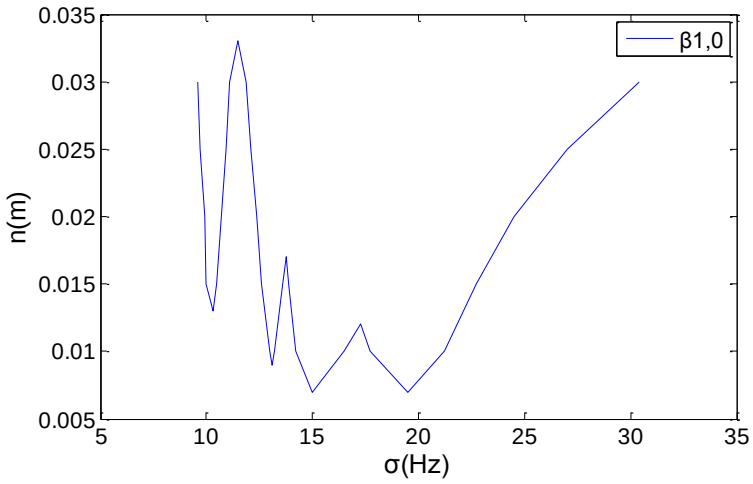


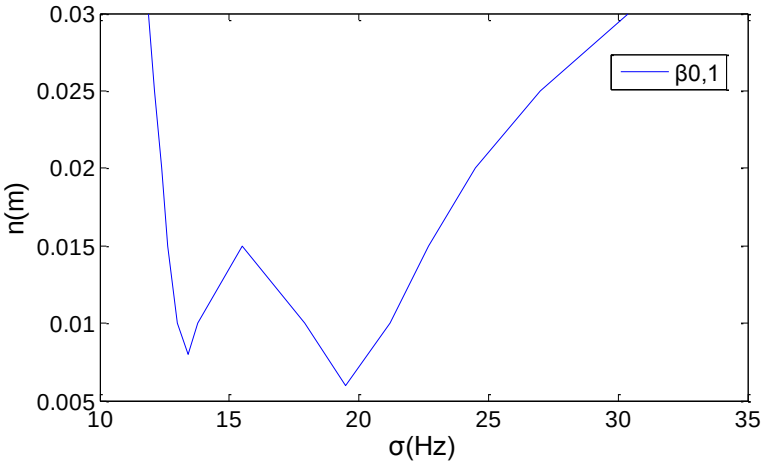
Σχήμα 5.16: Εξάρτηση της απόκρισης του συστήματος από τη συχνότητα διέγερσης. Το συγκεκριμένο γράφημα αντιστοιχεί σε τιμές ξ = 0.03 και n = 0.02. Η ίδια μορφή (μετατοπισμένη) εμφανίζεται για κάθε ζεύγος των τιμών ξ και n.

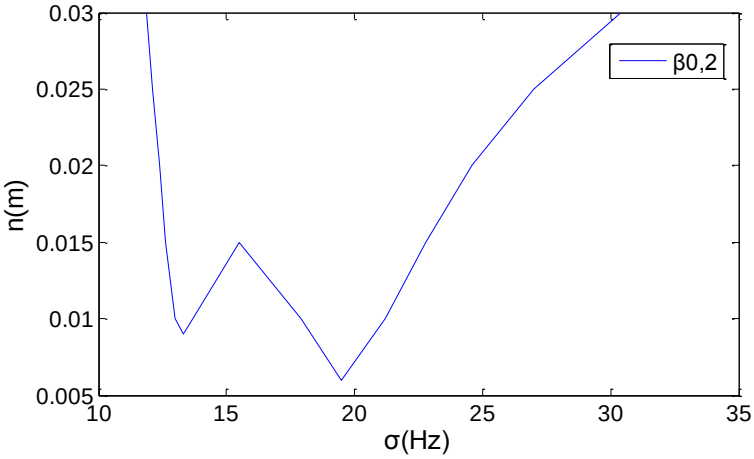
Παρ΄όλο που όπως είδαμε το δεύτερο μοντέλο δεν έδωσε τα αποτελέσματα που αναμέναμε όσον αφορά τις περιοχές αστάθειας, όπως και στο προηγούμενο μοντέλο έτσι κ εδώ οι περιοχές αυτές που βρήκαμε είναι και οι περιοχές όπου το πλάτος αυξάνεται αισθητά. Μάλιστα οι τιμές όπου το πλάτος αρχίζει και σταματά να αυξάνεται ταυτίζονται με τις τιμές όπου αρχίζει και τελειώνει η καμπύλη αστάθειας για την συγκεκριμένη τιμή του n. Γι' αυτό το λόγο στα διαγράμματα έχει επιλεχθεί να εμφανίζεται μόνο αυτή η περιοχή.

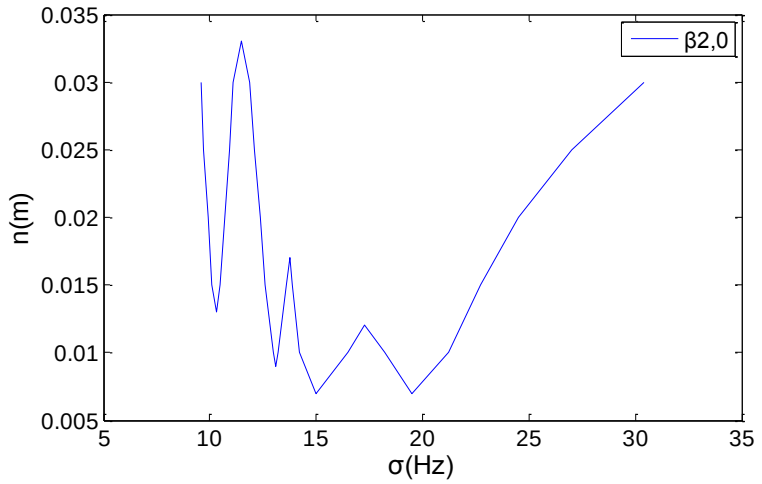
<u>3° Μοντέλο</u>

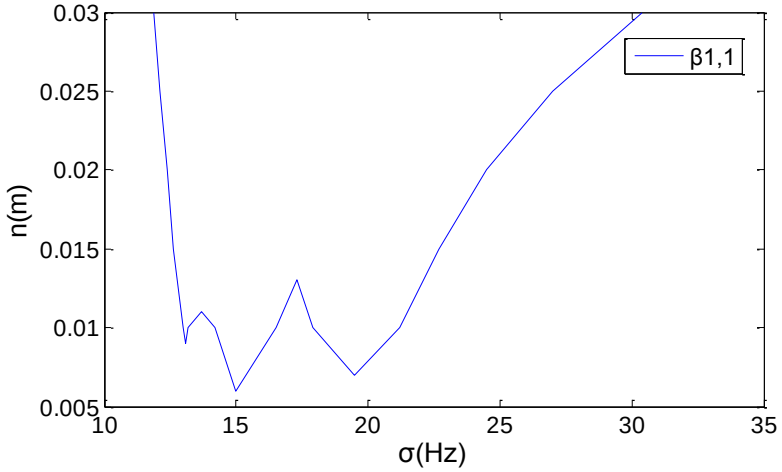
Ανάλογα θα παρουσιαστούν και τα αποτελέσματα του τρίτου μοντέλου.


β1,0
n(m)
σ(Hz)
0.035
0.03
0.025
0.02
0.015
0.01
0.005
5
10
15
20
25
30
35


β0,1
n(m)
σ(Hz)
0.03
0.025
0.02
0.015
0.01
0.005
10
15
20
25
30
35

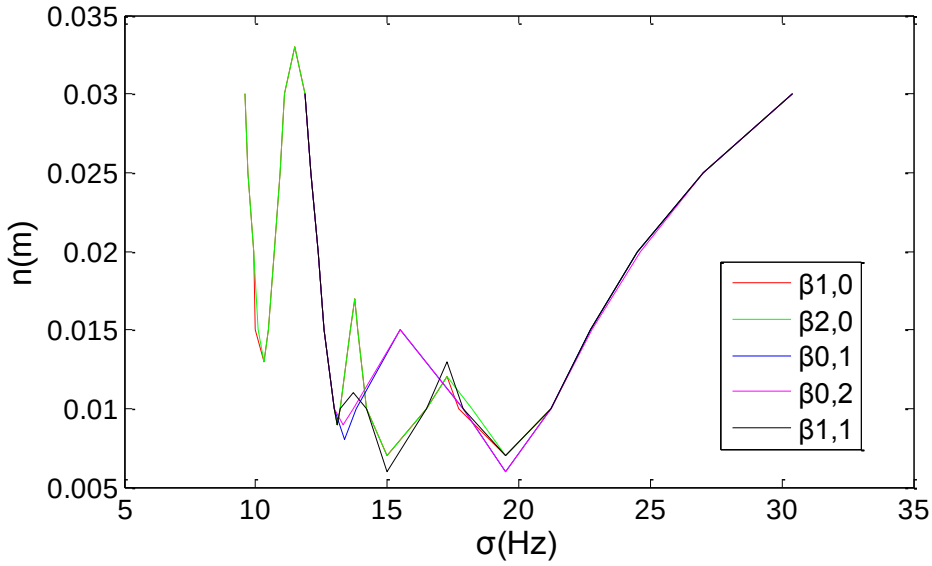

β0,2
n(m)
σ(Hz)
0.03
0.025
0.02
0.015
0.01
0.005
10
15
20
25
30
35



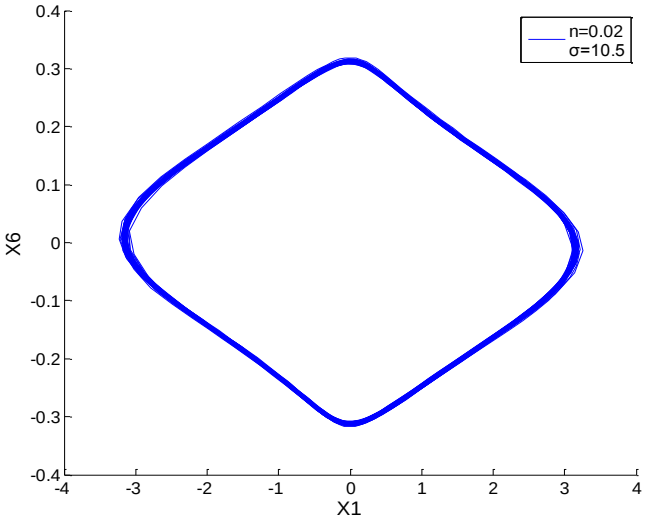


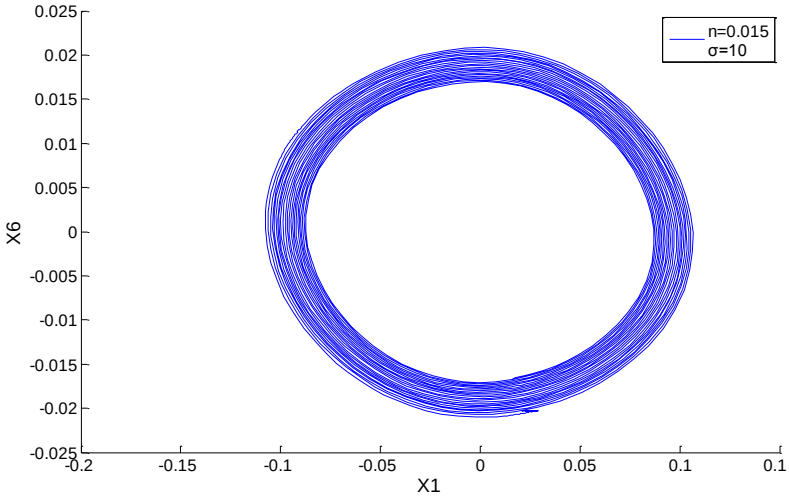
Σχήμα 5.17:Καμπύλη αστάθειας για τα modes $\beta_{i,j}$ του τρίτου μοντέλου και του συστήματος όπου το ιξώδες προστέθηκε πρίν την επίλυση των εξισώσεων.

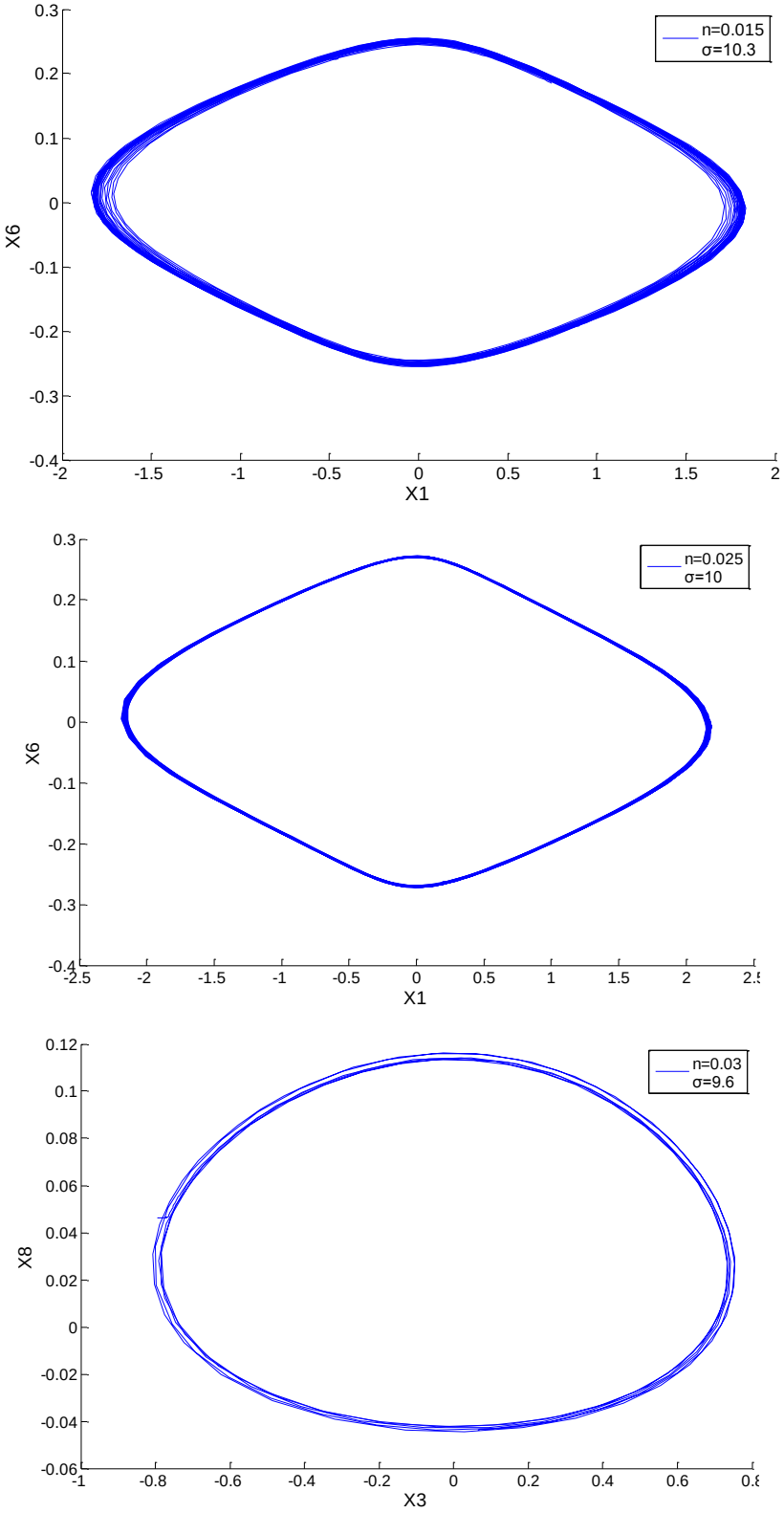
Όπως μπορούμε πολύ εύκολα να παρατηρήσουμε, η απεικόνιση των modes που αντιστοιχούν στον άξονα με το μεγαλύτερο μήκος, στην προκειμένη περίπτωση τα $\beta_{1,0}$,$\beta_{2,0}$, περιλαμβάνει όλες τις περιοχές αστάθειας που αντιστοιχούν σε όλα τα mode για $\sigma=2\sigma_{i,j}$. Ενώ η απεικόνιση των modes που αντιστοιχούν στον άλλο άξονα περιλαμβάνει μόνο τις περιοχές αστάθειας αυτών των modes, δηλαδή των $\beta_{0,1}\beta_{0,2}$.Το διαγώνιο mode δεν περιλαμβάνει την περιοχή του $\beta_{1,0}$.



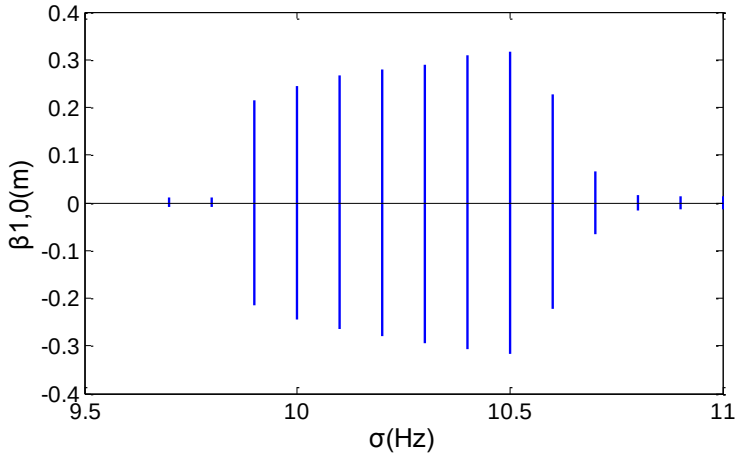
Σχήμα 5.18:Συγκεντρωτική καμπύλη αστάθειας για τα modes $\beta_{i,j}$ του τρίτου μοντέλου και του συστήματος όπου το ιξώδες προστέθηκε πρίν την επίλυση των εξισώσεων.

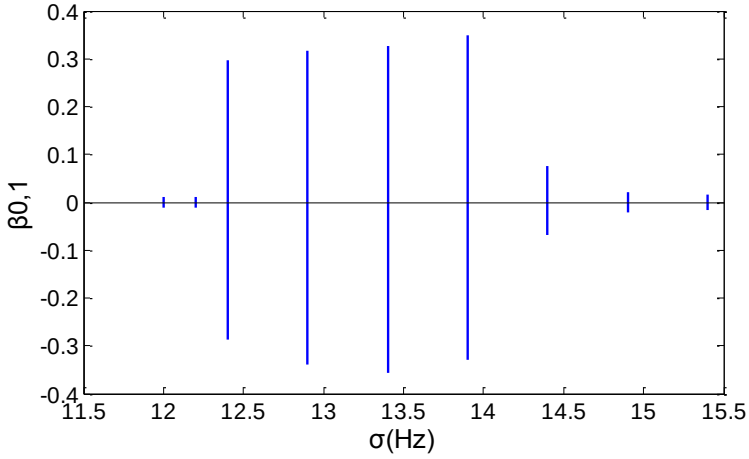


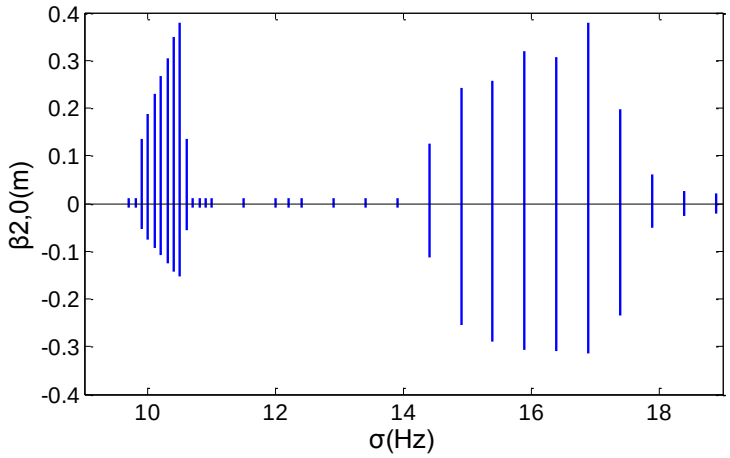


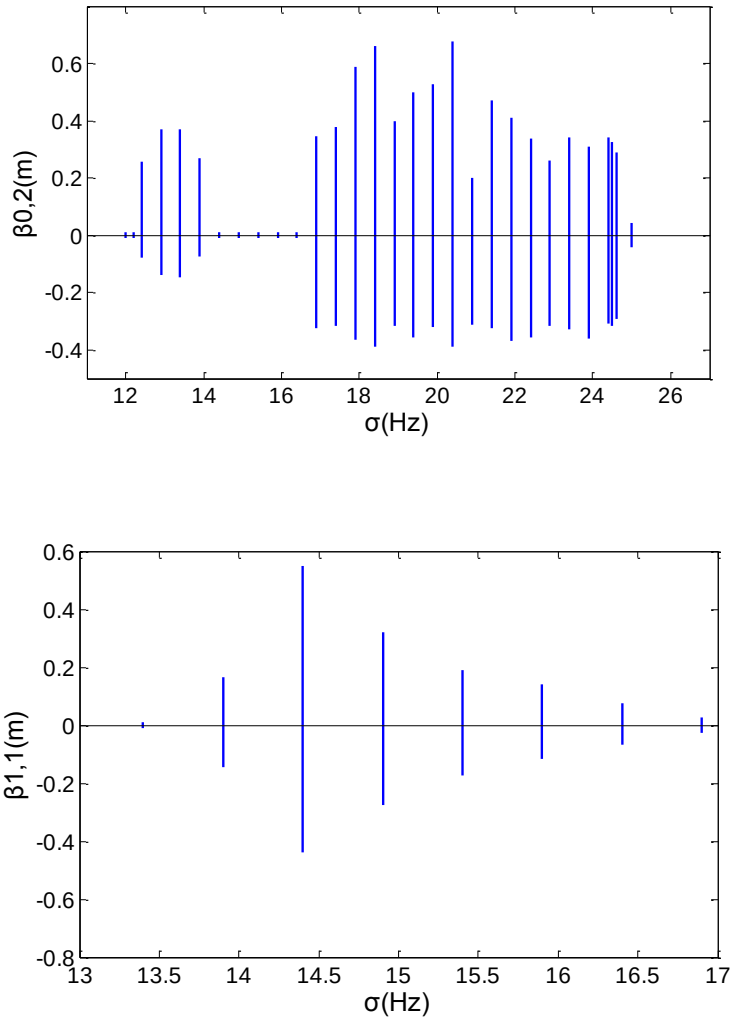


Σχήμα 5.19: Ποιοτική αναπαράσταση της δυναμικής συμπεριφοράς του δεύτερου μοντέλου για διάφορες συχνότητες και πλάτη διέγερσης επιλεγμένων modes.


0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
β1,0(m)
9.5
10
10.5
11
σ(Hz)


0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
β0,1
11.5
12
12.5
13
13.5
14
14.5
15
15.5
σ(Hz)


0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
β2,0(m)
10
12
14
16
18
σ(Hz)



Σχήμα 5.20: Εξάρτηση της απόκρισης του συστήματος από τη συχνότητα διέγερσης. Το συγκεκριμένο γράφημα αντιστοιχεί σε τιμές ξ = 0.03 και n = 0.02. Η ίδια μορφή (μετατοπισμένη) εμφανίζεται για κάθε ζεύγος των τιμών ξ και n.

Όπως είδαμε, και πάλι οι αυξομειώσεις των πλατών ταυτίζονται με τα όρια των καμπυλών. Παρατηρούμε όμως ότι μόνο στην περίπτωση των modes $\beta_{0,2}$ και $\beta_{2,0}$ εμφανίζεται η αλλαγή του πλάτους και για τις περιοχές αστάθειας που αντιστοιχούν στα modes $\beta_{0,1}$ και $\beta_{1,0}$ αντίστοιχα.

Κεφάλαιο 6^{ο} - Συμπεράσματα

6.1 Γενικά συμπεράσματα

Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας,εξάγαμε τα παρακάτω συμπεράσματα,τα οποία και παραθέτουμε συγκεντρωτικά:

- Τα φαινόμενα παραμετρικής αστάθειας παρουσιάζονται και στο τριδιάστατο μοντέλο.

- Σε συμμετρική δεξαμενή,τα αποτελέσματα όπως αναμενόταν είναι ίδια για συμμετρικά modes.

- Σε μη συμμετρική δεξαμενή,τα αποτελέσματα είναι αισθητά διαφοροποιημένα μεταξύ των modes,με αυτά που αντιστοιχούν στον μεγαλύτερο άξονα να είναι κυρίαρχα.

- Η συμπεριφορά του σχεδόν διδιάστατου μοντέλου δεν επαληθεύτηκε με βάση την προβλεπόμενη θεώρηση και σε σχέση με τα αποτελέσματα του διδιάστατου μοντέλου,όπως αυτό έχει μελετηθεί παλαιότερα.

- Όπως αναμενόταν τα μεγαλύτερα πλάτη απόκρισης παρατηρήθηκαν μέσα στα όρια συχνοτήτων που ορίζουν οι καμπύλες αστάθειας.

- Αφαίρεση του συντελεστή ιξώδους ή πρόσθήκη του μετά την επίλυση των εξισώσεων,όπως αυτό δοκιμάστηκε στο πρώτο μοντέλο,δεν παρουσίασε ουσιαστική αλλοίωση στα αποτελέσματα.

6.2 Αντικείμενα για μελλοντική μελέτη

Όπως έχει διαπιστωθεί το τριδιάστατο μοντέλο μπορεί να προβλέψει με ακρίβεια τη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος υγρό-δεξαμενή,στην περίπτωση κατακόρυφης διέγερσης,με μικρό πλάτος διέγερσης και τιμής λόγου h/l μεγαλύτερου από την τιμή κρίσιμου βάθους.Για να διαπιστωθεί η ακρίβεια των ανωτέρων υπολογισμών και να συμπληρωθεί το τριδιάστατο μοντέλο,ως συνέχεια της παρούσας μελέτης θεωρούνται τα επόμενα βήματα:

- Εξέταση του τριδιάστατου μοντέλου στην περίπτωση ανώτερων τάξεων.Έτσι μπορεί να οδηγηθούμε σε πιο ακριβή αποτελέσματα και πιο σύνθετες δυναμικές συμπεριφορές, όπως φαινόμενα στροβιλισμού ή χαοτικής συμπεριφοράς.

- Μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς για μεγαλύτερες τιμές του πλάτους διέγερσης όσο και για μικρότερες τιμές του λόγου h/l.

- Εξέταση της εξάρτησης της δυναμικής συμπεριφοράς από τον συντελεστή απόσβεσης και ιδιάιτερα για τιμές που αντιστοιχούν σε υπαρκτά υγρά.

- Μελέτη του δεύτερου μοντέλου με ακόμα μικρότερο μήκος L_2 ώστε να αναπαριστά πιο ρεαλιστικά το διδιάστατο μοντέλο.

- Πειραματική επαλήθευση των ανωτέρων συμπερασμάτων ώστε να σιγουρευτούμε για την ισχύ των θεωρητικών αποτελεσμάτων.

- Μελέτη δεξαμενών άλλων σχημάτων όπως κυλινδρικές ή σφαιρικές και μελέτη-σύγκριση των αποτελεσμάτων για ρεαλιστικά μεγέθη δεξαμενών.

Βιβλιογραφία

- *Abramson, H. N. 1966 The dynamics of liquids in moving containers. NASA Rep.SP 106.*

- *Abramson, H. N., Bass, R. L., Faltinsen, O.M. & Olsen, H. A. 1974 Liquid slosh in LNG Carriers.In Tenth Symp. on Naval Hydrodynamics, June 24–28, 1974, Cambridge, Massachusetts. ACR-204, pp. 371–388.*

- *Aliabadi, S., Johnson, A. & Abedi, J. 2003 Comparison of finite element and pendulum models for simulation of sloshing. Computers Fluids. 23, 535–545.*

- *Arai, M., Cheng, L. Y. & Inoue, Y. 1992a 3D numerical simulation of impact load due to liquid cargo sloshing. J. Soc. Nav. Arch. Japan. 171, 177–185.*

- *Arai, M., Cheng, L. Y. & Inoue, Y. 1993 Numerical simulation of sloshing and swirling in cubic and cylindrical tank. J. Kansai Soc. Nav. Arch. Japan. 219, 97–101.*

- *Arai, M., Cheng, L. Y., Inoue, Y., Sasaki, H. & Yamagishi, N. 1992b Numerical analysis of liquid sloshing in tanks of FPSO. Proc. Second (1992) Intl Offshore and Polar Conf., San Francisco, USA, 14–19 June 1992, vol. 3, 383–390.*

- *Bader, G. & Ascher, U. 1987 A new basis implementation for a mixed order boundary value ODE solver. SIAM J. Sci. Statist. Comput. 8, 483–500.*

- *Benjamin TB, Ursell F. The stability of the plane free surface of a liquid in a vertical periodic motion. Proc R Soc Lond Ser A 1954;225:505–15.*

- *Bogdan Iwanowski, Marc Lefranc, Rik Wemmenhove, Numerical Simulation of Sloshing in a Tank, CFD Calculations against Model Tests. In: Proc. 28th Conf. on Ocean, Offshore and Arctic Eng. OMAE2009, May 31-June 5, 2009, Honolulu, paper OMAE2009-79051.*

- *Bogdan Iwanowski, Marc Lefranc and Rik Wemmenhove, Numerical Investigation of Sloshing in a Tank, Statistical Desc-ription of Experiments and CFD Calculations. In: 29th Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering OMAE2010, Shanghai, China (2010) paper OMAE2010-20335, 10 pages.*

- *Bredmose H, Brocchini M, Peregrine DH, Thais L. Experimental investigation and numerical modelling of steep forced water waves. J Fluid Mech 2003;490:217–49.*

- *Bridges, T. J. 1985 On secondary bifurcation of three dimensional standing waves.Tech. Summary Rep. Wisconsin Univ., Madison.*

- *Bridges, T. J. 1986 On secondary bifurcation of three-dimensional standing waves. SIAM J. Appl. Maths 47, 40–59.*

- *Bridges, T. J. 1987 Secondary bifurcation and change of type for three dimensional standing waves in finite depth. J. Fluid Mech. 179, 137–153.*

- *Bridges, T. J. 1988 Strong internal resonance, Z1 _ Z2 symmetry, and multiple periodic solutions. SIAM J. Math. Anal. 19, 1015–1031.*

- *Bryant, P. J. 1989 Nonlinear progressive waves in a circular basin. J. Fluid Mech.205, 453–467.*

- *Bryant, P. J. & Stiassnie, M. 1994 Different forms for nonlinear standing waves in deep water. J. Fluid Mech. 272, 135–156.*

- *Bryant, P. J. & Stiassnie, M. 1995 Water waves in a deep square basin. J. Fluid Mech. 302, 65–90.*

- *Bunnik, A.E.P. Veldman and R.H.M Huijsmans, LNG sloshing simulations and validation model tests. In: J. Chung (ed.) Proc. ISOPE-2007, Lisbon, July 1-6 (2007).*

- *Bunnik, A.E.P. Veldman and R.H.M Huijsmans, LNG sloshing simulations and validation model tests. In: J. Chung (ed.) Proc. ISOPE-2007, Lisbon, July 1-6 (2007).*

- *Bunnik and A.E.P. Veldman, Modelling the effect of sloshing on ship motions. In: Proc. 29th Conf. on Ocean, Offshore and Arctic Eng. OMAE2010 , Shanghai (2010) paper OMAE2010-20458, 9 pags.*

- *Celebi, S. M. & Akyildiz, H. 2002 Nonlinear modelling of liquid sloshing in a moving rectangular tank. Ocean Engng 29, 1527–1553.*

- *Chen, L. Y. & Arai, M. 1995 Liquid sloshing in a cubic and a cylindrical tank. Ninth Technical Exchange and Advisory Meeting, July 24–27, 1995,Hiroshima,Japan.*

- *Faltinsen O.M. & Timokha A.N. 'Sloshing', Cambridge University Press 2009*

- *Faltinsen, O. M. 1974 A nonlinear theory of sloshing in rectangular tanks. J. Ship. Res. 18, 224–241.*

- *Faltinsen, O. M. & Rognebakke, O. F. 2000 Sloshing. Keynote lecture. NAV 2000. Proc. Intl Conf. on Ship and Shipping Research, Venice, 19–22 September, 2000,Italy.*

- *Faltinsen, O. M., Rognebakke, O. F., Lukovsky, I. A. & Timokha, A. N. 2000 Multidimensional modal analysis of nonlinear sloshing in a rectangular tank with finite water depth. J. Fluid Mech. 407, 201–234.*

- *Faltinsen, O. M. & Timokha, A. N. 2001 Adaptive multimodal approach to nonlinear sloshing in a rectangular rank. J. Fluid Mech. 432, 167–200.*

- *Faltinsen, O. M. & Timokha, A. N. 2002a Asymptotic modal approximation of nonlinear resonant sloshing in a rectangular tank with small fluid depth. J. Fluid Mech. 470, 319–357.*

- *Faltinsen, O. M. & Timokha, A. N. 2002b Analytically-oriented approaches to two dimensionalfluid sloshing in a rectangular tank (survey). Proc. Insti. Maths Ukrainian Natl. Acad. Sci. "Problems of Analytical Mechanics and its Applications" 44, 321–345.*

- *Faraday M. On a peculiar class of acoustical figures, and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces. Phil Trans R Soc Lond 1831;121:299–340.*

- *Feng, Z. C. & Senthna, P. R. 1989 Symmetry-breaking bifurcations in resonant surface waves. J. Fluid Mech. 199, 495–518.*

- *Fultz, D. 1962 An experimental note on finite-amplitude standing gravity waves. J.Fluid Mech. 13, 193–212.*

- *Frandsen JB. Sloshing motions in the excited tanks. J Comput Phys 2004; 196:53–87.*

- *Gerrits, G.E. Loots, G. Fekken, A.E.P. Veldman: Liquid sloshing on earth and in space. In: B. Sarler, C.A. Brebbia and H. Power (eds.) Moving Boundaries V. WIT Press, Southampton (1999) pp. 111-120.*

- *Gavrilyuk, I., Lukovsky, I. A. & Timokha, A. N. 2000 A multimodal approach to nonlinear sloshing in a circular cylindrical tank. Hybrid Meth. Engng 2, 463–483.*

- *Henderson, D. M. & Miles, J. W. 1990 Single-mode Faraday waves in small cylinder. J. Fluid Mech. 213, 95–109.*

- *Hermann, M. & Ullrich, K. 1992 RWPKV: a software package for continuation and bifurcation problems in two-point boundary value problems. Appl. Math. Lett. 5,57–61.*

- *Ibrahim R.A. Liquid Sloshing Dynamics Theory and Applications,Cambridge 2001*

- *Ibrahim, R. A., Pilipchuk, V. N. & Ikeda, T. 2001 Recent advances in liquid sloshing dynamics. Appl. Mech. Res. 54(2), 133–199.*

- *ISSC 1997 Report of Committee I.2 "Loads". In Proc. 13th Intl Ship and Offshore Structures Congress (ed. T. Moan & S. Berge) Vol. 1, pp. 59–122. Pergamon.*

- *La Rocca, M., Mele, P. & Armenio, V. 1997 Variational approach to the problem of sloshing in a moving container. J. Theor. Appl. Fluid Mech. 1(4), 280–310.*

- *La Rocca, M., Sciortino, G. & Boniforti, M. A. 2000 A fully nonlinear model for sloshing in a rotating container. Fluid Dyn. Res. 27, 23–52.*

- *Loots, B. Buchner, W. Pastoor and T. Tveitnes: The numerical solution of LNG sloshing with an improved Volume-of-Fluid method. In: Proc. 23rd Int. Conf. Offshore Mech. Arctic Engng,Vancouver, paper OMAE2004-51085 (2004).*

- *Lukovsky, I. A. 1990 Introduction to Nonlinear Dynamics of a Solid Body with a Cavity Including a Liquid. Kiev: Naukova dumka (in Russian).*

- *Luppes, J.A. Helder and A.E.P. Veldman: The numerical simulation of liquid sloshing in microgravity. In: P. Wesseling, E. Onate and J. Periaux (eds.) Proc. Europ. Conf. Comput. Fluid Dyn.: ECCOMAS CFD 06, Egmond aan Zee, ISBN 909020970-0 (2006) paper 490.*

- *Luppes, J.A. Helder and A.E.P. Veldman, The numerical simulation of liquid sloshing in microgravity. In: H. De Coninck and E. Dick (eds.) Computational Fluid Dynamics 2006. Springer, Berlin (2009) 607-612 (doi: 10.1007/978-3-540-92779-2_95)*

- *Mikishev, G. I. 1978 Experimental Methods in the Dynamics of Spacecraft.Moscow:Mashinostroenie (in Russian).*

- *Miles, J. W. 1984a Internally resonant surface waves in circular cylinder. J. Fluid Mech. 149, 1–14.*

- *Miles, J. W. 1984b Resonantly forces surface waves in circular cylinder. J. Fluid Mech. 149, 15–31.*

- *Miles, J. W. 1994 Faraday waves: rolls versus squares. J. Fluid Mech. 269, 353–371.*

- *Moiseyev, N. N. & Rumyantsev, V. V. 1968 Dynamic Stability of Bodies Containing Fluid. Springer.*

- *Nagata, M. 1991 Chaotic behaviour of parametrically excited surface waves in square geometry. Eur. J. Mech. B/Fluids. 10, 61–66.*

- *Narimanov, G. S. 1957 Movement of a tank partly filled by a fluid: the taking into account of non-smallness of amplitude. Prikl. Mat. Mekh. 21, 513–524 (in Russian).*

- *Ockendon, J. R. & Ockendon, H. 1973 Resonant surface waves. J. Fluid Mech. 59,397–413.*

- *Ockendon, H., Ockendon, J. R. & Waterhouse, D. D. 1996 Multi-mode resonance in fluids. J. Fluid Mech. 315, 317–344.*

- *Perlin, M. & Schultz, W. W. 2000 Capillary effects on surface waves. Annu. Rev.Fluid Mech. 32, 241–274.*

- *Rognebakke, O. F. & Faltinsen, O. M. 2003 Coupling of sloshing and ship motions.J. Ship Res.*

- *Royon, A., Gaudin, E., Cavellier, A. & Hopfinger, E. J. 2002 Sloshing and drop formation conditions in cylindrical liquid propellant tanks. 4th Intl Conf. on Launcher Technology "Space Launcher Liquid Propulsion", Liege, Belgium, 3–6 December, 2002. Abstracts.*

- *Sames, P. C., Marcouly, D. & Schellin, T. 2002 Sloshing in rectangular and cylindrical tank. J. Ship Res. 46, 186–200.*

- *Shankar, P. N. & Kidambi, R. 2002 A modal method for finite amplitude, nonlinear sloshing. Pramana – J. Phy. 59, 631–651.*

- *Simonelli, F. & Gollub, J. P. 1989 Surface wave mode interaction: effects of symmetry and degeneracy. J. Fluid Mech. 199, 471–494.*

- *Solaas, F. 1995 Analytical and numerical studies of sloshing in tanks. PhD Thesis,The Norwegian Institute of Technology, Faculty of Marinε Technology,Trondheim.*

- *Stolbetsov, V. I. 1967 On oscillations of a fluid in the tank having the shape of rectangular parallelepiped. Mech. Zhid. i Gaza (Fluid Dyn.) N 1, 67–76 (in Russian).*

- *Tomawa, S. & Sueoka, H. 1989 Experimental and numerical studies on sloshing in partially filled tank. Proc. Fourth Intl Symp. on Practical Design of Ships and Mobile Units, pp. 57.1–57.8.*

- *Tsai, W.-T., Yue, D. K.-P. & Yip, K. M. K. 1990 Resonantly excited regular and chaotic motions in a rectangular wave tank. J. Fluid Mech. 216, 343–380.*

- *Veldman, J. Gerrits, R. Luppes, J.A. Helder and J.P.B Vreeburg: The numerical simulation of liquid sloshing on board spacecraft. J. Comput. Phys. 224 (2007) 82-99.*

- *Waterhouse, D. D. 1994 Resonant sloshing near a critical depth. J. Fluid Mech.281, 313–318.*

- *Waterhouse, D. D. 1995 Resonant oscillations of gases and liquids in three dimensions.Dphil thesis, Oxford University.*

- *Wemmenhove, R. Luppes, A.E.P. Veldman and T. Bunnik: Numerical simulation of sloshing in LNG tanks with a compressible two-phase model. In: Proc. 26th Int. Conf. Offshore Mech. Arctic Eng., San Diego (2007) paper OMAE2007-29294.*

- *R. Wemmenhove, R. Luppes, A.E.P. Veldman and T. Bunnik: Numerical simulation and model experiments of sloshing in LNG tanks. In: E. Onate, et al. (eds.) Proc. Int. Conf. Comp. Meth. Marine Eng. MARINE 2007, Barcelona (2007).*

- *Wemmenhove, R. Luppes and A.E.P. Veldman, Application of a VOF method to model compressible two-phase flow in sloshing tanks. 27th OMAE Conference, Estoril, 16-19 June (2008). Paper OMAE2008-57254, 10 pages.*

- *R. Wemmenhove, B. Iwanowski, M. Lefranc, A.E.P. Veldman, R. Luppes and T. Bunnik, Simulation of sloshing dynamics in a tank by an improved Volume-of-Fluid method. In: Proc. ISOPE 2009, 1st Sloshing Dynamics and Design Symposium, Osaka, Japan, June 21-26 (2009) paper ISOPE2009-YHK-05*

- *Wemmenhove, R. Luppes, A.E.P. Veldman and T. Bunnik: Numerical simulation of sloshing in LNG tanks with a compressible two-phase model. In: Proc. 26th Int. Conf. Offshore Mech. Arctic Eng., San Diego (2007) paper OMAE2007-29294.*

- *Wemmenhove, R. Luppes, A.E.P. Veldman and T. Bunnik: Numerical simulation and model experiments of sloshing in LNG tanks. In: E. Onate, et al. (eds.) Proc. Int. Conf. Comp. Meth. Marine Eng. MARINE 2007, Barcelona (2007)*

- *Wu, G. X., Ma, Q. W. & Taylor, R. E. 1998 Numerical simulation of sloshing waves in 3D tank based on a finite element method. Appl. Ocean Res. 20, 337–355.*

- *Zakharov, V. E. 1968 Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid. J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2, 190–194.*