Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Δ.Π.Μ.Σ. Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες

Ευαγγελία Λαμπάκη

Θεώρημα Lax-Milgram Γενικεύσεις και Εφαρμογές

Επιβλέποντες καθηγητές:

Νικόλαος Γιαννακάκης,

Δημοσθένης Δριβαλιάρης

24 Ιουλίου 2013

Πρόλογος

Στη Μεταπτυχιακή αυτή εργασία ασχοληθήκαμε με το Θεώρημα Lax-Milgram και κάποιες βασικές γενικεύσεις και εφαρμογές του. Ένα πολύ γνωστό και βασικό θεώρημα της Συναρτησιακής Ανάλυσης είναι το Θεώρημα Αναπαράστασης Riesz, στο οποίο αποδεικνύεται ότι για κάθε γραμμικό και φραγμένο συναρτησιακό f ορισμένο σε ένα χώρο Hilbert H υπάρχει μοναδικό στοιχείο $u \in H$ τέτοιο ώστε $f(v) = (v, u)$, για κάθε $v \in H$. Το Θεώρημα Lax-Milgram στην ουσία είναι γενίκευση του Θεωρήματος Αναπαράστασης Riesz για διγραμμικές μορφές όχι απαραίτητα συμμετρικές και αποδεικνύεται μέσω αυτού η ύπαρξη μοναδικής λύσης σε πολλά προβλήματα συνοριακών τιμών των Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων Ελλειπτικού τύπου.

Στο πρώτο κεφάλαιο αυτής της εργασίας ορίζουμε αρχικά την έννοια της διγραμμικής μορφής πάνω σε διανυσματικούς χώρους και στην συνέχεια αποδεικνύουμε την ύπαρξη γραμμικού ισομετρικού ισομορφισμού από τον χώρο $\{B : X \times Y \to \mathbb{R} : B$ διγραμμική και φραγμένη$\}$ στον χώρο $\{A : X \to Y^* | \ A$ γραμμικός και φραγμένος$\}$, όπου X, Y χώροι με νόρμα. Στην συνέχεια αποδεικνύουμε το Θεώρημα Lax-Milgram, δηλαδή ότι αν έχουμε μια φραγμένη και πιεστική διγραμμική μορφή B ορισμένη σε ένα χώρο Hilbert H τότε για κάθε συναρτησιακό $f \in H^*$ υπάρχει $u \in H$ τέτοιο ώστε $f(v) = B(u, v)$, για κάθε $v \in H$. Η πρώτη απόδειξη που παραθέτουμε είναι αυτή που δημοσίευσαν οι P. Lax και A. Milgram το 1954 στην εργασία τους [16]. Μετά το Θεώρημα Lax-Milgram παραθέτουμε μια σειρά από προβλήματα Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων Ελλειπτικού τύπου στα οποία δείχνουμε την ύπαρξη μοναδικής ασθενούς λύσης με την βοήθεια του Θεωρήματος Lax-Milgram. Στην απόδειξη του Θεωρήματος Lax-Milgram δεν γίνεται φανερό με ποιό τρόπο θα μπορούσε κάποιος να βρει ή να κατασκευάσει τη λύση u.

Για τον σκοπό αυτό αφιερώσαμε τις επόμενες δύο παραγράφους. Το πρώτο αποτέλεσμα που συζητάμε είναι του W. Petryshyn [19] όπου κατασκευάζει μια ακολουθία που συγκλίνει στην λύση. Στην συνέχεια, δίνουμε τα αποτελέσματα των S. Hildebrandt και E. Wienholtz [11] όπου πέρα από ένα τρόπο προσέγγισης της λύσης, δίνουν στην ουσία και μια γενίκευση του Θεωρήματος Lax-Milgram, καθώς δεν απαιτούν από την διγραμμική μορφή να είναι πιεστική σε όλο το χώρο αλλά απαιτούν μια διαφορετική συνθήκη πιεστικότητας πάνω σε πεπερασμένους υπόχωρους. Στο τελευταίο μέρος αυτού του πρώτου κεφαλαίου παρουσιάζουμε το Θεώρημα Stampacchia και δύο εφαρμογές του. Το Θεώρημα αυτό έχει ως άμεσο Πόρισμα το Θεώρημα Lax-Milgram και είναι χρήσιμο καθώς δίνει λύση σε προβλήματα μεταβολικών ανισώσεων.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζουμε κάποιες βασικές γενικεύσεις του Θεωρήματος Lax-Milgram. Στα θεωρήματα που παρουσιάζουμε στο πρώτο κεφάλαιο η διγραμμική μορφή είναι ορισμένη πάνω σε ένα χώρο Hilbert, όμως στις εφαρμογές πολλές φορές η διγραμμική μορφή είναι ορισμένη πάνω σε δύο διαφορετικούς χώρους Hilbert. Το ερώτημα λοιπόν που απαντάμε σε αυτό το σημείο είναι κάτω από ποιές κατάλληλες συνθήκες έχουμε ύπαρξη λύσης. Το πρώτο αποτέλεσμα το οποίο παρουσιάζουμε είναι το Θεώρημα Babuška, ορίζοντας την φραγμένη διγραμμική μορφή B πάνω σε δύο χώρους Hilbert και με ένα κατάλληλο ζεύγος συνθηκών για την B, αποδεικνύουμε την ύπαρξη μοναδικής λύσης. Το ζεύγος αυτών των συνθηκών αποτελούν αυτό που ονομάζουμε ασθενή πιεστικότητα για την διγραμμική μορφή, όπου η μια συνθήκη από αυτές είναι γνωστή ως inf-sup συνθήκη. Στη συνέχεια, δίνεται μια περαιτέρω γενίκευση του Θεωρήματος Babuška σε ανακλαστικούς χώρους Banach, καθώς επίπλέον συζητάμε διάφορες συνέπειες των συνθηκών του Θεωρήματος Babuška. Μετά από αυτά τα αποτελέσματα, παρουσιάζουμε το Θεώρημα Babuška-Brezzi το οποίο μας δίνει λύση σε προβλήματα σαγματικού σημείου, όπως είναι το πρόβλημα Stokes το οποίο και αναλύουμε. Επιπλέον, δείχνουμε την ύπαρξη λύσης στο Διαρμονικό πρόβλημα με την χρήση του Θεωρήματος Babuška-Brezzi αλλά και του Θεωρήματος Lax-Milgram. Συνεχίζουμε με την ισοδυναμία των συνθηκών του Θεωρήματος Babuška και του Θεωρήματος Babuška-Brezzi. Τέλος, παρουσιάζουμε το Θεώρημα Lions και μια εφαρμογή αυτού σε προβλήματα Παραβολικού τύπου.

Στο τελευταίο κεφάλαιο αυτής της εργασίας δείχνουμε ότι αν X ένας χώρος Hilbert ή Banach και $A : X \to X$ ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής που ικανοποιεί κάποια κατάλληλη χαλαρή συνθήκη πιεστικότητας είναι αντιστρέψιμος. Ο λόγος για την γενίκευση προς αυτή την κατεύθυνση είναι διότι η απαίτηση ένας τελεστής A να είναι πιεστικός, αναγκάζει το $\langle Ax, x\rangle$ να διατηρεί σταθερό πρόσημο για όλα τα $x \in X$.

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω τους καθηγητές Νικόλαο Γιαννακάκη και Δημοσθένη Δριβαλιάρη για την πολύτιμη βοηθειά τους στην επίλυση των προβλημάτων που προέκυψαν, καθώς και για το θετικό κλίμα συνεργασίας που φρόντισαν να δημιουργήσουν από την πρώτη στιγμή.

Περιεχόμενα

Συμβολισμοί και Ορολογία

- $\mathbb{R}$– το σύνολο των πραγματικών αριθμών

  Αν $L : X \to Y$ γραμμικός τελεστής

- $D(L)$– το πεδίο ορισμού του L
- $R(L)$– η εικόνα του L
- $N(L)$– ο πυρήνας του L

  Αν X χώρος με νόρμα

- $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X,X^*}$–δυϊκό γινόμενο
- $A^{\perp} = \{x^* \in X^* : \langle x, x^* \rangle = 0,$ για κάθε $x \in A \subset X\}$
- $A_{\perp} = \{x \in X : \langle x, x^* \rangle = 0,$ για κάθε $x^* \in A \subset X^*\}$

Κεφάλαιο 1

Το Θεώρημα Lax-Milgram

1.1 Το Θεώρημα Lax-Milgram

Το πρώτο εργαλείο που θα αναπτύξουμε για την εξαγωγή συμπερασμάτων ύπαρξης λύσης σε ελλειπτικά προβλήματα είναι το Θεώρημα Lax-Milgram. Το Θεώρημα Lax-Milgram στην πραγματικότητα είναι γενίκευση του Θεωρήματος Αναπαράστασης του Riesz ([14, 21]) για διγραμμικές μορφές, όχι απαραίτητα συμμετρικές.

Αρχικά θα παρουσιάσουμε ένα γενικό αποτέλεσμα για την ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης για μια γραμμική εξίσωση τελεστών της μορφής

$$u \in X, \ Lu = f,$$

όπου $L : \mathcal{D}(L) \subset X \to Y$, X και Y διανυσματικοί χώροι και $f \in Y$. Παρατηρούμε ότι η επιλυσιμότητα της εξίσωσης είναι ισοδύναμη με την ιδιότητα $\mathcal{R}(L) = Y$, δηλαδή ο L να είναι επί του Y, και η μοναδικότητα της λύσης είναι ισοδύναμη με την $\mathcal{N}(L) = \{0\}$, δηλαδή ο L να είναι 1-1.

Θεώρημα 1 *Έστω X και Y χώροι Banach, $L : \mathcal{D}(L) \subset X \to Y$ ένας γραμμικός τελεστής. Τότε $\mathcal{R}(L) = Y$ αν και μόνο αν η $\mathcal{R}(L)$ είναι κλειστή και $\mathcal{R}(L)^{\perp} = \{0\}$.*

Απόδειξη. Αν $\mathcal{R}(L) = Y$, τότε προφανώς $\mathcal{R}(L)$ είναι κλειστό και $\mathcal{R}(L)^{\perp} = \{0\}$.
Έστω ότι η $\mathcal{R}(L)$ είναι κλειστή και $\mathcal{R}(L)^{\perp} = \{0\}$, αλλά $\mathcal{R}(L) \neq Y$. Τότε $\mathcal{R}(L)$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του Y. Έστω $y \in Y \backslash \mathcal{R}(L)$. Από το θεώρημα Hahn-Banach ([14, 21]), το συμπαγές σύνολο $\{y\}$ και το κλειστό κυρτό σύνολο $\mathcal{R}(L)$ μπορούν να διαχωριστούν αυστηρά από ένα κλειστό υπερεπίπεδο, δηλαδή υπάρχει $y^* \in Y^*$ τέτοιο ώστε $\langle y^*, y \rangle > 0$ και $\langle y^*, Lx \rangle \leq 0, \quad$ για κάθε $x \in \mathcal{D}(L)$. Επειδή ο L είναι γραμμικός τέλεστής, το $\mathcal{D}(L)$ θα είναι γραμμικός υπόχωρος του X. Άρα για κάθε $x \in \mathcal{D}(L)$ έχουμε ότι $-x \in \mathcal{D}(L)$, και άρα

$$\langle y^*, L(-x) \rangle \leq 0 \Rightarrow \langle y^*, -Lx \rangle \leq 0 \Rightarrow -\langle y^*, Lx \rangle \leq 0 \Rightarrow \langle y^*, Lx \rangle \geq 0,$$

για κάθε $x \in \mathcal{D}(L)$. Άρα $\langle y^*, Lx \rangle = 0$, για κάθε $x \in \mathcal{D}(L)$. Επομένως, $0 \neq y^* \in \mathcal{R}(L)^{\perp}$. Άτοπο διότι $\mathcal{R}(L)^{\perp} = \{0\}$ ■

Για να αποδείξουμε το Θεώρημα Lax-Milgram θα πρέπει αρχικά να μελετήσουμε την σχέση που έχουν οι διγραμμικές μορφές ορισμένες σε ένα χώρο Banach X και οι γραμμικοί τελεστές $A : X \longrightarrow X^*$ (βλ. [24]).

Ορισμός 1 *Έστω X, Y διανυσματικοί χώροι και μια απεικόνιση*

$$B : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Η B θα λέγεται διγραμμική μορφή αν είναι γραμμική και ως προς τις δύο μεταβλητές, δηλαδή αν

$$B(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda B(x_1, y) + \mu B(x_2, y),$$
$$B(x, \lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda B(x, y_1) + \mu B(x, y_2),$$

για κάθε $x, x_1, x_2 \in X$, $y, y_1, y_2 \in Y$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Ορισμός 2 *Έστω X, Y διανυσματικοί χώροι με νόρμα και μια διγραμμική μορφή $B : X \times Y \to \mathbb{R}$. Θα λέμε ότι η B είναι φραγμένη αν υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε $x \in X, y \in Y$,*

$$|B(x, y)| \leq M\|x\|\|y\|.$$

Θεώρημα 2 *Έστω X, Y χώροι Banach. Υπάρχει μια ένα προς ένα και επί αντιστοιχία μεταξύ των φραγμένων γραμμικών τελεστών $A : X \longrightarrow Y^*$ και των φραγμένων διγραμμικών μορφών $B : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$, που συνδέονται με την εξής σχέση*

$$\langle Ax, y\rangle = B(x, y), \quad \text{για κάθε } x \in X, y \in Y.$$

Απόδειξη. Έστω $A : X \longrightarrow Y^*$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Ορίζουμε $B : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ με $B(x, y) = \langle Ax, y\rangle$, για κάθε $x \in X, y \in Y$. Θα δείξουμε ότι η απεικόνιση B είναι μια φραγμένη διγραμμική μορφή. Έστω $x_1, x_2 \in X, y \in Y$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε

$$\begin{aligned}
B(\lambda x_1 + \mu x_2, y) &= \langle A(\lambda x_1 + \mu x_2), y\rangle \\
&= \langle \lambda Ax_1 + \mu Ax_2, y\rangle \quad (\text{λόγω γραμμικότητας του } A) \\
&= \lambda\langle Ax_1, y\rangle + \mu\langle Ax_2, y\rangle \\
&= \lambda B(x_1, y) + \mu B(x_2, y).
\end{aligned}$$

Έστω $x \in X, y_1, y_2 \in Y$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε

$$\begin{aligned}
B(x, \lambda y_1 + \mu y_2) &= \langle Ax, \lambda y_1 + \mu y_2\rangle \\
&= \lambda\langle Ax, y_1\rangle + \mu\langle Ax, y_2\rangle \quad (\text{λόγω γραμμικότητας του } Ax \in Y^*) \\
&= \lambda B(x, y_1) + \mu B(x, y_2)
\end{aligned}$$

Άρα η B είναι διγραμμική. Επιπλέον, ισχύει

$$|B(x, y)| = |\langle Ax, y\rangle| \leq \|Ax\|\|y\| \leq \|A\|\|x\|\|y\|,$$

για κάθε $x \in X, y \in Y$. Άρα η B είναι φραγμένη με $\|B\| \leq \|A\|$.

Αντίστροφα, έστω $B(\cdot, \cdot)$ φραγμένη διγραμμική μορφή στο $X \times Y$. Για κάθε σταθερό $x \in X$, η απεικόνιση $Ax : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ με $\langle Ax, y\rangle = B(x, y)$ ορίζει ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό, διότι η B είναι γραμμική ως προς την δεύτερη μεταβλητή και φραγμένη. Άρα $Ax \in Y^*$ για κάθε $x \in X$. Επειδή όμως η B είναι διγραμμική ο τελεστής $A : X \longrightarrow Y^*$ είναι γραμμικός και φραγμένος. Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in X, y \in Y$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε

$$\begin{aligned}
\langle A(\lambda x_1 + \mu x_2), y\rangle = B(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda B(x_1, y) + \mu B(x_2, y) = \\
= \lambda\langle Ax_1, y\rangle + \mu\langle Ax_2, y\rangle = \langle \lambda Ax_1 + \mu Ax_2, y\rangle,
\end{aligned}$$

για κάθε $y \in Y$. Άρα $A(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda A x_1 + \mu A x_2$ Επίσης έχουμε ότι

$$|\langle Ax, y\rangle| = |B(x,y)| \le \|B\|\|x\|\|y\|, \quad \text{για κάθε } x \in X, y \in Y \Rightarrow$$
$$\|Ax\| \le \|B\|\|x\|, \quad \text{για κάθε } x \in X$$

Άρα ο A είναι φραγμένος και $\|A\| \le \|B\|$.

■

Πρόταση 3 *Έστω X, Y χώροι Banach,*

$$\mathcal{L}^2(X \times Y; \mathbb{R}) = \{B : X \times Y \to \mathbb{R} |\ B \text{ διγραμμική και φραγμένη}\}$$

και

$$\mathcal{L}(X, Y^*) = \{A : X \to Y^* |\ A \text{ γραμμικός και φραγμένος}\}.$$

Τότε υπάρχει γραμμικός ισομετρικός ισομορφισμός $T : \mathcal{L}^2(X \times Y; \mathbb{R}) \to \mathcal{L}(X, Y^*)$.

Απόδειξη. Ορίζουμε $T : \mathcal{L}^2(X \times Y; \mathbb{R}) \to \mathcal{L}(X, Y^*)$ με $T(B) = A$ όπου A όπως στο θεώρημα 2, δηλαδή $\langle Ax, y\rangle = B(x,y)$, για κάθε $x \in X, y \in Y$. Θα δείξουμε τώρα ότι ο T είναι γραμμικός, 1-1, επί και ισομετρία.
Θα δείξουμε ότι ο T είναι γραμμικός, δηλαδή

$$T(B_1 + B_2) = T(B_1) + T(B_2), \text{ για κάθε } B_1, B_2 \in \mathcal{L}^2(X \times Y; \mathbb{R})$$

και

$$T(\lambda B) = \lambda T(B), \text{ για κάθε } B \in \mathcal{L}^2(X \times Y; \mathbb{R}) \text{ και κάθε } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Έστω $B_1, B_2 \in \mathcal{L}^2(X \times Y; \mathbb{R})$. Τότε αν $T(B_1 + B_2) = A$ και $T(B_1) = A_1, T(B_2) = A_2$ με $A, A_1, A_2 \in \mathcal{L}(X, Y^*)$, θα δείξουμε ότι $A = A_1 + A_2$ ή ισοδύναμα $Ax = A_1 x + A_2 x$, για κάθε $x \in X$, ή ισοδύναμα

$$\langle Ax, y\rangle = \langle A_1 x, y\rangle + \langle A_2 x, y\rangle, \text{ για κάθε } x \in X, y \in Y.$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned}\langle Ax, y\rangle &= (B_1 + B_2)(x, y)\\ &= B_1(x, y) + B_2(x, y)\\ &= \langle A_1x, y\rangle + \langle A_2x, y\rangle, \text{ για κάθε } x \in X, y \in Y.\end{aligned}$$

Έστω $B \in \mathcal{L}^2(X \times Y; \mathbb{R})$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε αν $T(\lambda B) = A_\lambda$ και $T(B) = A$ με $A_\lambda, A \in \mathcal{L}(X, Y^*)$, θα δείξουμε ότι $A_\lambda = \lambda A$ ή ισοδύναμα $A_\lambda x = \lambda Ax$, για κάθε $x \in X$, ή ισοδύναμα

$$\langle A_\lambda x, y\rangle = \langle Ax, y\rangle, \text{ για κάθε } x \in X \text{ και } y \in Y.$$

Πράγματι,

$$\langle A_\lambda x, y\rangle = (\lambda B)(x, y) = \lambda B(x, y) = \lambda\langle Ax, y\rangle, \text{ για κάθε } x \in X, y \in Y.$$

Θα δείξουμε ότι ο T είναι 1-1. Πράγματι, έστω $B_1, B_2 \in \mathcal{L}^2(X \times Y; \mathbb{R})$ με $T(B_1) = T(B_2)$. Τότε αν $T(B_1) = A_1, T(B_2) = A_2$, θα έχουμε

$$A_1x = A_2x, \text{ για κάθε } x \in X \Rightarrow \langle A_1x, y\rangle = \langle A_2x, y\rangle, \text{ για κάθε } x \in X, y \in Y.$$

Άρα $B_1(x, y) = B_2(x, y)$, για κάθε $x \in X, y \in Y$, και επομένως $B_1 = B_2$

Θα δείξουμε ότι ο T είναι επί. Για κάθε $A \in \mathcal{L}(X, Y^*)$ από το προηγούμενο Θεώρημα υπάρχει $B \in \mathcal{L}^2(X \times Y; \mathbb{R})$ με $B(x, y) = \langle Ax, y\rangle, x \in X, y \in Y$. Άρα για αυτή την B ισχύει ότι $T(B) = A$.

Ο T είναι ισομετρία. Επειδή ο T είναι 1-1 και επί θα έχουμε ότι για κάθε $B \in \mathcal{L}^2(X \times Y; \mathbb{R})$ υπάρχει μοναδικός $A \in \mathcal{L}(X, Y^*)$ τέτοιος ώστε $T(B) = A$ και αντίστροφα. Από το προηγούμενο Θεώρημα έχουμε $\|B\| \leq \|A\|$ και $\|A\| \leq \|B\|$. Άρα $\|T(B)\| = \|B\|$. ∎

Παρατήρηση 1 *Παρατηρούμε ότι εκτός από τον τελεστή $A : X \to Y^*$ μπορούμε επίσης να ορίσουμε τον τελεστή $C : Y \to X^*$ που συνδέεεται με την διγραμμική B ως εξής*

$$\langle x, Cy\rangle = B(x, y), \; x \in X, y \in Y.$$

Για τον τελεστή αυτό ισχύουν ακριβώς τα ίδια συμπερασματα που ισχύουν και για τον A. *Επιπλέον, αν οι χώροι είναι ανακλαστικοί τότε ο* C *είναι ακριβώς ο συζυγής του* A, *και τον συμβολίζουμε με* A^*. *Πράγματι, ο συζυγής του* A *είναι ο τελεστής* $A^* : Y \to X^*$ *με* $\langle A^*y, x\rangle = \langle y, Ax\rangle$, *για κάθε* $x \in X, y \in Y$. *Όμως,* $\langle Ax, y\rangle = B(x, y)$ *με* $x \in X, y \in Y$, *δηλαδή* $\langle A^*y, x\rangle = B(x, y)$, $x \in X, y \in Y$, *και άρα* $A^* = C$. *Επιπρόσθετα, εφόσον υποθέσαμε ότι οι χώροι είναι ανακλαστικοί ο* $(A^*)^* = A$.

Για ένα γραμμικό τελεστή A και μία διγραμμική μορφή B που συνδέονται με την σχέση

$$\langle Ax, y\rangle = B(x, y), \quad \text{για κάθε } x, y \in X,$$

πολλές ιδιότητες του γραμμικού τελεστή A μπορούν να οριστούν μέσω αυτών της διγραμμικής μορφής B, ή το αντίστροφο. Για παράδειγμα, αν X χώρος Banach:

(i) Η $B : X \times X \to \mathbb{R}$ είναι θετική ($B(x, x) \geq 0, \quad$ για κάθε $x \in X$) αν και μόνο αν ο $A : X \to X^*$ είναι θετικός ($\langle Ax, x\rangle \geq 0,\;$ για κάθε $x \in X$).

(ii) Η $B : X \times X \to \mathbb{R}$ είναι αυστηρά θετική ($B(x, x) > 0,\;$ για κάθε $x \in X$) αν και μόνο αν ο $A : X \to X^*$ είναι αυστηρά θετικός ($\langle Ax, x\rangle > 0,\;$ για κάθε $x \in X$).

(iii) Η $B : X \times X \to \mathbb{R}$ είναι πιεστική ή ισχυρά θετική ($B(x, x) \geq a\|x\|^2,\;$ για κάθε $x \in X$ για κάποια σταθερά $a > 0$) αν και μόνο αν ο $A : X \to X^*$ είναι πιεστικός ή ισχυρά θετικός ($\langle Ax, x\rangle \geq a\|x\|^2,\;$ για κάθε $x \in X$).

(iv) Η $B : X \times X \to \mathbb{R}$ είναι συμμετρική ($B(x, y) = B(y, x),\;$ για κάθε $x, y \in X$) αν και μονο αν ο $A : X \to X^*$ είναι συμμετρικός ($\langle Ax, y\rangle = \langle Ay, x\rangle,\;$ για κάθε $x, y \in X$).

Για το Θεώρημα Lax-Milgram θα δώσουμε τρεις αποδείξεις. Η πρώτη είναι αυτή με την οποία το απέδειξαν οι P. Lax και A. Milgram και οι άλλες δύο βασίζονται στο Θεώρημα Stampacchia το οποίο θα δούμε σε επόμενη παράγραφο.

Θεώρημα 4 (Lax-Milgram) *Έστω* H *ένας χώρος Hilbert και* $B : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ *μια φραγμένη και πιεστική διγραμμική μορφή. Τότε, για κάθε* $f \in H^*$, *υπάρχει μοναδικό* $u \in H$

τέτοιο ώστε

$$B(u,v) = f(v), \quad \textit{για κάθε } v \in H. \tag{1.1.1}$$

Επιπλέον, αν η B είναι συμμετρική, τότε το u είναι το μοναδικό στοιχείο που ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό

$$E(v) = \frac{1}{2}B(v,v) - f(v),\ v \in H. \tag{1.1.2}$$

Απόδειξη. ([7],[16])
Έστω $A : H \longrightarrow H^*$ ο γραμμικός τελεστής που αντιστοιχεί στη διγραμμική μορφή $B(\cdot,\cdot)$, δηλαδή $\langle Au, v\rangle = B(u,v)$ για κάθε $u, v \in H$. Ο A θα είναι φραγμένος και πιεστικός, δηλαδή θα υπάρχουν $M, a > 0$ τέτοια ώστε

$$\|Av\| \leq M\|v\|, \text{ για κάθε } v \in H$$

και

$$\langle Av, v\rangle \geq a\|v\|^2, \text{ για κάθε } v \in H.$$

Προφανώς, $\langle Av, v\rangle \leq \|Av\|\|v\|$, για κάθε $v \in H$, και άρα

$$\|Av\| \geq a\|v\| \text{ για κάθε } v \in H.$$

Αν συμβολίσουμε με $\mathcal{J} : H^* \longrightarrow H$ την ισομετρική δυϊκή αναπαράσταση, τότε

$$B(u,v) = \langle Au, v\rangle = (\mathcal{J}Au, v) \text{ για κάθε } u, v \in H$$

και άρα

$$\|\mathcal{J}Au\| = \|Au\|, \text{ για κάθε } u \in H.$$

Το πρόβλημα έχει τώρα την μορφή $Lu = \mathcal{J}f$, όπου $L = \mathcal{J}A$. Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι η απεικόνιση $L = \mathcal{J}A : H \longrightarrow H$ είναι 1-1 και επί, διότι τότε η εξίσωση $(Lu, v) = f(v)$ θα έχει λύση και θα είναι μοναδική.
Για να δείξουμε ότι είναι επί, δηλαδή $\mathcal{R}(L) = H$, αρκεί να δείξουμε ότι το $\mathcal{R}(L)$ είναι κλειστό και ότι $\mathcal{R}(L)^\perp = \{0\}$.

Η εικόνα $\mathcal{R}(L)$ της L είναι κλειστή :

Έστω $\{u_n\} \subseteq \mathcal{R}(L)$ μια ακόλουθία που συγκλίνει στο $u \in H$. Τότε $u_n = \mathcal{J} A w_n$, για κάποιο $w_n \in H$, και έχουμε

$$\|u_n - u_m\| = \|\mathcal{J} A(w_n - w_m)\| = \|A(w_n - w_m)\| \geq a\|w_n - w_m\|.$$

Η $\{u_n\}$ ως συγκλίνουσα ακολουθία θα είναι ακολουθία Cauchy και άρα από την παραπάνω ανισότητα η $\{w_n\}$ θα είναι ακολουθία Cauchy. Όμως ο H είναι χώρος Hilbert και άρα η $\{w_n\}$ θα συγκλίνει σε καποιο $w \in H$. Επομένως,

$$\|u_n - \mathcal{J} A w\| = \|\mathcal{J} A(w_n - w)\| = \|A(w_n - w)\| \leq M\|w_n - w\| \longrightarrow 0.$$

Λόγω μοναδικότητας του ορίου $u = \mathcal{J} A w \in \mathcal{R}(L)$. Επομένως, η εικόνα $\mathcal{R}(L)$ είναι κλειστή.

Το μοναδικό στοιχείο κάθετο στο $\mathcal{R}(L)$ είναι το μηδεν:

Έστω $u \in \mathcal{R}(L)^{\perp}$. Τότε, για κάθε $v \in H$, έχουμε

$$0 = (Lv, u) = (\mathcal{J} A v, u) = \langle Av, u \rangle = B(v, u)$$

Παίρνοντας τώρα $v = u$ θα έχουμε $B(u, u) = 0$. Όμως η B είναι πιεστική και άρα

$$0 = B(u, u) \geq a\|u\|^2 \Rightarrow \|u\| = 0 \Rightarrow u = 0.$$

Συνεπώς, η εικόνα $\mathcal{R}(L)$ είναι κλειστή και $\mathcal{R}(L)^{\perp} = \{0\}$ και άρα $\mathcal{R}(L) = H$.

Ο L είναι 1-1 :

Έστω $w_1, w_2 \in H$ με $Lw_1 = Lw_2$. Προφανώς, $\mathcal{J} A w_1 = \mathcal{J} A w_2$ και άρα

$$0 = \|\mathcal{J} A(w_1 - w_2)\| = \|A(w_1 - w_2)\| \geq a\|w_1 - w_2\| \Rightarrow \|w_1 - w_2\| = 0 \Rightarrow w_1 = w_2.$$

Άρα ο L είναι 1-1.

Υποθέτουμε τώρα ότι η B είναι συμμετρική και ότι u είναι η μοναδική λύση του (1.1.1). Έχουμε ότι, για κάθε $v \in H$,

$$\begin{aligned} E(u+v) &= \frac{1}{2}B(u+v, u+v) - f(u+v) \\ &= \frac{1}{2}B(u,u) + B(u,v) + \frac{1}{2}B(v,v) - f(v) - f(u) \\ &= E(u) + \frac{1}{2}B(v,v). \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας το v με $v-u$ έχουμε

$$E(v) = E(u) + \frac{1}{2}B(v-u, v-u), \quad \text{για κάθε } v \in H.$$

Λόγω πιεστικότητας έχουμε ότι $B(v-u, v-u) > 0$, για $v \neq u$, και συνεπώς το u είναι το μοναδικό στοιχείο που ελαχιστοποιεί το E. ■

Παρατηρήσεις 1 *(i) Παρατηρούμε ότι αν η $B(\cdot,\cdot)$ είναι φραγμένη και πιεστική, τότε αν ορίσουμε $\|u\|_B := \sqrt{B(u,u)}$, αυτή θα είναι μια νόρμα ισοδύναμη με την αρχική νόρμα στον H. Πράγματι, εφόσον η B είναι φραγμένη θα έχουμε ότι $\|u\|_B \leq \sqrt{M}\|u\|$ και από την πιεστικότητα της B θα έχουμε ότι $\|u\|_B \geq \sqrt{a}\|u\|$. Επιπλέον, αν η B είναι συμμετρική, τότε $B(u,v)$ ορίζει ένα νέο εσωτερικό γινόμενο στον H. Έτσι, σε αυτή την περίπτωση, το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz ([14, 21]) μας δίνει άμεσα ότι για κάθε $f \in H^*$ υπάρχει $u \in H$ που να ικανοποιεί την (1.1.1). Επομένως, η σημαντικότητα του Θεωρήματος Lax-Milgram έγκειται στην μη απαίτηση της συμμετρικότητας για την B.*

(ii)Αν επαναλαμβάναμε την απόδειξη αλλά αντί για τον A χρησιμοποιούσαμε τον A^*, τότε θα είχαμε ένα ανάλογο συμπέρασμα. Δηλαδή, ότι υπάρχει μοναδικό $w \in H$ τέτοιο ώστε

$$B(u,w) = f(u), \quad \text{για κάθε } u \in H.$$

(iii) Είναι ενδιαφέρον να σημειώσουμε τη σχέση μεταξύ της εξισώσης (1.1.1) και του προβλήματος ελαχιστοποιήσης (1.1.2). Η σχέση αυτή έχει συχνά μια ερμηνεία στη Μηχανική ή στη Φυσική (αρχή της ελάχιστης δράσης, ελαχιστοποίηση κάποιας ενέργειας, κτλ.). Στην ορολογία του λογισμού μεταβολών η εξίσωση (1.1.1) είναι η εξίσωση Euler του προβλήματος ελαχιστοποιήσης (1.1.2).

Σημειώσεις 1 *(i) Οι υποθέσεις που δώσαμε στο Θεώρημα Lax-Milgram είναι οι αρχικές υποθέσεις που είχαν δώσει οι P. Lax και A. Milgram στην εργασία τους [16]. Ο P. Lax αναφέρει στο βιβλίο του [15] ότι μπορούμε να αντικαταστήσουμε την υπόθεση της πιεστικότητας με την υπόθεση $a\|u\|^2 \leq |B(u,u)|$ για κάποια θετική σταθερά a και να κάνουμε ακριβώς την ίδια απόδειξη. Η υπόθεση αυτή μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα και σε μιγαδικούς χώρους Hilbert. Επιπλέον, στην μιγαδική περίπτωση μπορούμε να έχουμε συνθήκες όπως*

$ReB(u,u) \geq a\|u\|^2$ ή $ImB(u,u) \geq a\|u\|^2$, *οι οποίες μας οδηγούν προφανώς στην* $a\|u\|^2 \leq |B(u,u)|$.

(ii) Σε ένα πραγματικό χώρο Hilbert η νέα γενικότερη συνθήκη $a\|u\|^2 \leq |B(u,u)|,\ a \geq 0$ *δημιουργεί εύλογα ερωτήματα όπως εάν ισχύει τελικά ή όχι η πιεστική συνθήκη. Η απάντηση είναι ότι η συνθήκη πιεστικότητας ισχύει είτε για την B είτε για την $-B$. Πράγματι, αν θεωρήσουμε την απεικόνιση* $B : S(0,1) = \{u \in H : \|u\| = 1\} \to \mathbb{R}$, *τότε η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής και* $|B(u,u)| \geq a > 0$. *Άρα αν η B δεν διατηρούσε σταθερό πρόσημο τότε θα υπήρχε $u \in H$ τέτοιο ώστε* $0 = |B(u,u)| \geq a > 0$, *άτοπο. Άρα έχει σταθερό πρόσημο.*

1.2 Εφαρμογές του Θεωρήματος Lax-Milgram

1.2.1 Το Πρόβλημα Poisson με συνοριακή συνθήκη Dirichlet

Παράδειγμα 1 (Ομογενής Συνοριακή Συνθήκη Dirichlet) *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ένα ανοιχτό, φραγμένο σύνολο με σύνορο $\Gamma = \partial\Omega$ Lipschitz συνεχές. Αναζητάμε συνάρτηση $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ που να ικανοποιεί:*

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{στο } \Omega \\ u = 0, & \text{στο } \Gamma \end{cases} \tag{1.2.1}$$

Το ομογενές πρόβλημα Dirichlet στις δύο διαστάσεις περιγράφει την κάθετη κίνηση μιας ελαστικής μεμβράνης υπό την δράση κάθετης δύναμης με πυκνότητα f. Λόγω της συνοριακής συνθήκης έχουμε ότι η μεμβράνη είναι σταθερή στο σύνορο του χωρίου.

Μια κλασική λύση του προβλήματος (1.2.1) είναι μια λεία συνάρτηση $u \in C^2(\Omega)\bigcap C(\overline{\Omega})$ που ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη του (1.2.1) σημειακά. Επιπλέον, θα πρέπει να υποθέσουμε ότι $f \in C(\Omega)$ ή ακόμα ότι $f \in C(\overline{\Omega})$, το οποίο όμως δεν μας εξασφαλίζει την ύπαρξη λύσης. Για τον λόγο αυτό θα προσπαθήσουμε να γράψουμε το πρόβλημα μας σε μια άλλη μορφή, με λιγότερες απαιτήσεις για την u και την f.

Για να διατυπώσουμε το πρόβλημα σε μια ασθενέστερη μορφή, υποθέτουμε προσωρινά ότι έχει κλασική λύση $u \in C^2(\Omega)\bigcap C(\overline{\Omega})$. Πολλαπλασιάζουμε την διαφορική εξίσωση (1.2.1) με μία *τυχαία συνάρτηση* $v \in C_0^\infty(\Omega)$ *(δοκιμαστική συνάρτηση) και ολοκληρώνουμε την σχέση στο* Ω, *και παίρνουμε*

$$-\int_\Omega \Delta u v dx = \int_\Omega f v dx.$$

Επειδή $v = 0$ *στο* Γ *από το Θεώρημα Green θα έχουμε ότι*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f v dx. \tag{1.2.2}$$

Παρ'οτι για να καταλήξουμε στην σχέση αυτή υποθέσαμε ότι $u \in C^2(\Omega) \bigcap C(\overline{\Omega})$ *και* $v \in C_0^\infty(\Omega)$, *οι συνθήκες αυτές δεν είναι αναγκαίες για να έχουν νόημα τα ολοκληρώματα. Αρκεί να έχουμε ότι* $u, v \in H^1(\Omega)$ *και* $f \in L^2(\Omega)$. *Επειδή η* u *θα πρέπει να ικανοποιεί και την ομογενή συνοριακή συνθήκη αρκεί* $u \in H_0^1(\Omega)$. *Επίσης, θα πρέπει να ικανοποιεί την (1.2.2), για κάθε* $v \in C_0^\infty(\Omega)$, *ή ισοδύναμα, αφού ο* $C_0^\infty(\Omega)$ *είναι πυκνός στον* $H_0^1(\Omega)$, *για κάθε* $v \in H_0^1(\Omega)$. *Συνεπώς, η ασθενής διατύπωση του (1.1.1) είναι*

$$u \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f v dx, \quad \text{για κάθε } v \in H_0^1(\Omega). \tag{1.2.3}$$

Στην πραγματικότητα θα μπορούσαμε να κάνουμε ακόμα πιο ασθενείς τις υποθέσεις μας, θεωρώντας $f \in H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))^*$ *και το ολοκλήρωμα σαν το δυϊκό γινόμενο* $\langle f, v \rangle$ *μεταξύ των* $H^{-1}(\Omega)$ *και* $H_0^1(\Omega)$.

Έστω $H = H_0^1(\Omega)$, $B(\cdot,\cdot) : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ *η διγραμμική μορφή που ορίζεται ως εξής*

$$B(u, v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx, \;\; u, v \in H$$

και $h : H \longrightarrow \mathbb{R}$ *το γραμμικό συναρτησιακό που ορίζεται ως εξής*

$$h(v) = \int_\Omega f v dx, \;\; v \in H.$$

Τότε η ασθενής διατύπωση του προβλήματος (1.2.1) είναι να βρούμε $u \in H$ *τέτοια ώστε*

$$B(u, v) = h(v), \quad \text{για κάθε } v \in H.$$

Θα αποδείξουμε την ύπαρξη λύσης μέσω του Θεωρήματος Lax-Milgram:

Η B είναι φραγμένη και πιεστική. Πράγματι,

$$
\begin{aligned}
|B(u,v)| &= |\int_\Omega \nabla u \nabla v dx| \leq \int_\Omega |\nabla u||\nabla v| dx \leq (\int_\Omega |\nabla u|^2 dx)^{1/2} (\int_\Omega |\nabla v|^2 dx)^{1/2} = \\
&= \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}
\end{aligned}
$$

και άρα η B είναι φραγμένη. Επιπλέον, από την ανισότητα Poincare θα υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε

$$
\begin{aligned}
&\|u\|_{L^2}^2 \leq C \|\nabla u\|_{L^2}^2 \quad \text{για κάθε } u \in H_0^1 \Rightarrow \\
&\|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq (1+C) \|\nabla u\|_{L^2}^2 \quad \text{για κάθε } u \in H_0^1 \Rightarrow \\
&B(u,u) \geq \frac{1}{1+C} \|u\|_{H^1}^2 \quad \text{για κάθε } u \in H_0^1.
\end{aligned}
$$

Άρα η B είναι πιεστική.

Το h είναι γραμμικό και φραγμένο. Πράγματι, για κάθε $v \in H$, έχουμε

$$
|h(v)| = |\int_\Omega f v dx| \leq \int_\Omega |f||v| dx \leq (\int_\Omega |f|^2 dx)^{1/2} (\int_\Omega |v|^2 dx)^{1/2} = \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{H^1}.
$$

Άρα το h είναι φραγμένο. Προφανώς είναι γραμμικό λόγω της γραμμικότητας του ολοκληρώματος.

Συνεπώς, ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος, και άρα υπάρχει μοναδική λύση $u \in H_0^1$ του (1.2.1).

Παράδειγμα 2 (Μη Ομογενής συνοριακή συνθήκη Dirichlet) *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ανοιχτό φραγμένο με $\Gamma = \partial\Omega$ Lipschitz συνεχές. Αναζητάμε συνάρτηση $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ που να ικανοποιεί:*

$$
\begin{cases}
-\Delta u = f, & \text{στο } \Omega \\
u = g, & \text{στο } \Gamma
\end{cases}
\tag{1.2.4}
$$

Για να διατυπώσουμε το πρόβλημα σε μια ασθενέστερη μορφή, υποθέτουμε προσωρινά ότι έχει κλασική λύση $u \in C^2(\Omega) \bigcap C(\overline{\Omega})$. Πολλαπλασιάζουμε την διαφορική εξίσωση (1.2.4) με μία τυχαία συνάρτηση $v \in C_0^\infty(\Omega)$ (δοκιμαστική συνάρτηση) και ολοκληρώνουμε την σχέση στο Ω, και παίρνουμε ότι

$$
-\int_\Omega \Delta u v dx = \int_\Omega f v dx.
$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέλη έχουμε ότι

$$-\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} v ds + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

Υποθέτοντας ότι $v = 0$ *στο* Γ *ώστε να μηδενιστεί το ολοκλήρωμα στο σύνορο θα πάρουμε*

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx. \tag{1.2.5}$$

Για να έχουν νόημα τα ολοκληρώματα υποθέτουμε ότι $f \in L^2(\Omega)$, $u \in H^1(\Omega)$ *και* $v \in H_0^1(\Omega)$. *Όμως η* u *θα πρέπει να ικανοποιεί και την συνοριακή συνθήκη* $u = g$ *στο* Γ *με την έννοια του τελεστή ίχνους. Αρκεί δηλαδή να υποθέσουμε ότι η* g *είναι η εικόνα μέσω του τελεστή ίχνους* γ *μιας* $H^1(\Omega)$ *συνάρτησης (βλ. παρακάτω σελ. 22). Συνεπώς, η ασθενής διατύπωση του (1.2.4) είναι*

$$u \in H^1(\Omega),\ u = g \text{ στο } \Gamma,\ \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \text{για κάθε } v \in H_0^1(\Omega). \tag{1.2.6}$$

Για την ασθενή διατύπωση (1.2.6) δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε απευθείας το Θεώρημα Lax-Milgram εφόσον οι u *και* v *δεν ανήκουν στον ίδιο χώρο. Εφόσον υποθέσαμε ότι η* g *είναι το ίχνος στο* Γ *μιας* $H^1(\Omega)$ *συνάρτησης, τότε θα υπάρχει συνάρτηση* $G \in H^1(\Omega)$ *τέτοια ώστε* $\gamma(G) = g$, *όπου* γ *είναι ο τελεστής ίχνους (βλ. σελ. 22). Έτσι, με* $u = w + G$, $w \in H_0^1$, *το πρόβλημα μπορεί να μετατραπεί σε πρόβλημα για την* w:

$$w \in H_0^1(\Omega), \int_{\Omega} \nabla w \nabla v dx = \int_{\Omega} (f v - \nabla G \nabla v) dx \quad \text{για κάθε } v \in H_0^1(\Omega). \tag{1.2.7}$$

Η κλασική μορφή του συνοριακού προβλήματος για την w *είναι*

$$\begin{cases} -\Delta w = f + \Delta G, & \text{στο } \Omega \\ w = 0, & \text{στο } \Gamma \end{cases}$$

όπου τώρα το $f + \Delta G$ *δεν είναι στοιχείο του* $L^2(\Omega)$, *αλλά του* $H^{-1}(\Omega)$.

Έστω $H = H_0^1(\Omega)$, $B(\cdot,\cdot) : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ *η διγραμμική μορφή που ορίζεται ως εξής*

$$B(w, v) = \int_{\Omega} \nabla w \nabla v dx, \ \ w, v \in H$$

και $h : H \longrightarrow \mathbb{R}$ *το γραμμικό συναρτησιακό που ορίζεται ως εξής*

$$h(v) = \int_\Omega (fv - \nabla G \nabla v)dx, \quad v \in H.$$

Τότε η ασθενής διατύπωση του προβλήματος (1.2.7) είναι να βρούμε $w \in H$ *τέτοια ώστε*

$$B(w,v) = h(v), \quad \text{για κάθε } v \in H.$$

Θα αποδείξουμε την ύπαρξη λύσης μέσω του Θεωρήματος Lax-Milgram.

Η B *είναι φραγμένη και πιεστική όπως δείξαμε και στην ομογενή περίπτωση.*

Το h *είναι γραμμικό και φραγμένο. Πράγματι, για κάθε* $v \in H$ *έχουμε*

$$\begin{aligned}
|h(v)| &= |\int_\Omega (fv - \nabla G \nabla v)dx| \\
&\leq \int_\Omega |fv - \nabla G \nabla v| dx \leq \int_\Omega (|fv| + |\nabla G \nabla v|)dx \\
&= \int_\Omega |fv|dx + \int_\Omega |\nabla G \nabla v|)dx \leq (\int_\Omega |f|^2 dx)^{1/2} (\int_\Omega |v|^2 dx)^{1/2} + (\int_\Omega |\nabla G|^2 dx)^{1/2} (\int_\Omega |\nabla v|^2 dx)^{1/2} \\
&= \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \|\nabla G\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} \leq (\|f\|_{L^2} + \|\nabla G\|_{L^2}) \|v\|_{H^1}.
\end{aligned}$$

Άρα η h *φραγμένη και προφανώς είναι γραμμική λόγω της γραμμικότητας του ολοκληρώματος. Συνεπώς, ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος Lax-Milgram. Άρα υπάρχει* $w \in H$ *μοναδική λύση του (1.2.7). Επομένως, αν θέσουμε* $u = w + G$ *θα πάρουμε μια λύση του (1.2.6). Σημειώνουμε εδώ ότι η επιλογή της* G *δεν είναι μοναδική, άρα η μοναδικότητα της λύσης δεν προκύπτει άμεσα από τον ορισμό της. Παρόλα αυτά μπορούμε να αποδείξουμε την μοναδικότητα της* u.

Έστω u_1, u_2 *λύσεις του προβλήματος (1.2.6). Τότε η διαφορά* $u_1 - u_2$ *ικανοποιεί την*

$$u_1 - u_2 \in H_0^1(\Omega), \quad \int_\Omega \nabla(u_1 - u_2) \cdot \nabla v dx = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Παίρνοντας $v = u_1 - u_2$, *έχουμε ότι*

$$\int_\Omega |\nabla(u_1 - u_2)|^2 dx = 0.$$

Από την ισοδύναμη νόρμα του H_0^1 *θα έχουμε ότι* $\|u_1 - u_2\|_{H_0^1} = 0$. *Επομένως,* $u_1 = u_2$ *στο* Ω.

1.2.2 Γενικό Ελλειπτικό Πρόβλημα με συνοριακή συνθήκη Dirichlet

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ανοιχτό, φραγμένο και $\Gamma = \partial\Omega$ Lipschitz συνεχές. Αναζητάμε συνάρτηση $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ που να ικανοποιεί:

$$\begin{cases} -Lu = f, & \text{στο } \Omega \\ u = 0, & \text{στο } \Gamma \end{cases} \tag{1.2.8}$$

όπου η f δίνεται και ο L συμβολίζει τον τελεστή δεύτερης τάξης μερικών παραγώγων που έχει την διαφορική μορφή

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u. \tag{1.2.9}$$

Υποθέτουμε ότι ισχύει η συνθήκη συμμετρικότητας.

$$a^{ij} = a^{ji}, \;\; i, j = 1, \ldots, n.$$

Θα λέμε ότι ο διαφορικός τελεστής L είναι (ομοιόμορφα) ελλειπτικός αν υπάρχει σταθερά $\theta > 0$ τέτοια ώστε

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2$$

σχεδόν παντού στο Ω και για κάθε $\xi \in \mathbb{R}^N$. Η ελλειπτικότητα δηλαδή σημαίνει ότι, για κάθε σημείο $x \in \Omega$, ο συμμετρικός $n \times n$ πίνακας $A(x) = ((a^{ij}(x)))$ είναι θετικά ορισμένος. Ένα προφανές παράδειγμα είναι $a^{ij} = \delta_{ij}, b^i = 0, c = 0$. Σε αυτή την περίπτωση ο τελεστής L είναι ο $-\Delta$. Γενικά όμως δεν είναι απαραίτητη η συμμετρικότητα των a^{ij} αρκεί να ικανοποιείται η ελλειπτική συνθήκη.

Έστω τώρα ότι έχουμε το συνοριακό πρόβλημα (1.2.8). Σκοπός μας είναι να ορίσουμε κατάλληλη ασθενή μορφή για το πρόβλημα.

Υποθέσουμε ότι

$$a^{ij}, b^i, c \in L^\infty(\Omega), \; i, j = 1, \ldots, n$$

και

$$f \in L^2(\Omega).$$

Θα ακολουθήσουμε ανάλογη με το πρώτο παράδειγμα λογική. Υποθέτουμε αρχικά ότι η u είναι μια λεία λύση της (1.2.8), πολλαπλασιαζουμε τη διαφορική εξίσωση $Lu = f$ με μια συνάρτηση $v \in C_0^\infty(\Omega)$ και ολοκληρώνουμε πάνω στο Ω. Έχουμε λοιπόν

$$\int_\Omega (\sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} v + cuv)\, dx = \int_\Omega f v dx$$

όπου έχουμε ολοκληρώσει κατά μέλη στο πρώτο μέρος του αριστερού μέλους. Δεν υπάρχουν συνοριακοί όροι εφόσον $v = 0$ στο σύνορο $\partial\Omega$. Η ίδια ισότητα ισχύει ακόμα και αν $v \in H_0^1(\Omega)$, λόγω πυκνότητας του $C_0^\infty(\Omega)$ στον $H_0^1(\Omega)$, όπως επίσης ισχύει και για $u \in H_0^1(\Omega)$ (επιλέγουμε τον $H_0^1(\Omega)$ για να ικανοποιείται η συνοριακή συνθήκη).

Ορισμός 3 *Η διγραμμική μορφή $B(\cdot,\cdot)$ που σχετίζεται με τον διαφορικό ελλειπτικό τελεστή L που ορίσαμε παραπάνω είναι*

$$B(u,v) = \int_\Omega (\sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum b^i u_{x_i} v + cuv)\, dx,$$

για $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Θα λέμε ότι η $u \in H_0^1(\Omega)$ είναι ασθενής λύση του συνοριακού προβλήματος (1.2.8) αν

$$B(u,v) = (f,v), \quad \text{για κάθε } v \in H_0^1(\Omega),$$

όπου $(\cdot,\cdot)$ συμβολίζει το εσωτερικό γινόμενο στον $L^2(\Omega)$.

Για να λύσουμε τώρα το πρόβλημα αυτό αρκεί να δείξουμε ότι το B ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Lax-Milgram.

Θεώρημα 5 *Έστω Ω μια φραγμενη περιοχή. Έστω L ένας δεύτερης τάξης γραμμικός διαφορικός τελεστής της μορφής (1.2.9) τέτοιος ώστε να για κάποια σταθερά $\theta > 0$ να ικανοποιείται η ελλειπτική συνθήκη. Υποθέτουμε επίσης ότι $a^{ij}, b^j, c \in L^\infty(\Omega)$, $i, j = 1, \ldots, n$. Τότε υπάρχουν σταθερές $\alpha, \beta > 0$ και $\gamma \geq 0$ τέτοιες ώστε*

$$|B(u,v)| \leq \alpha \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

και

$$\beta \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leq B(u,u) + \gamma \|u\|^2_{L^2(\Omega)},$$

για κάθε $u, v \in H_0^1(\Omega)$.

Απόδειξη. Επειδή a^{ij}, b^i, c είναι συναρτήσεις στον $L^\infty(\Omega)$ μπορούμε να συμβολίσουμε με A μια θετική σταθερα τέτοια ώστε

$$|a^{ij}(x)|, |b^i(x)|, |c(x)| \leq A$$

σχεδόν παντού στο Ω.

Επίσης

$$|u_{x_i}| \leq |\nabla u| = \{\sum_{i=1}^n (\frac{\partial u}{\partial x_i})^2\}^{1/2}, \|u\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1} \text{ και } \|\nabla u\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1}$$

. Από αυτά παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
|B(u,v)| &\leq \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n |a^{ij}(x)||u_{x_i}||v_{x_j}| + \sum_{i=1}^n |b^i(x)||u_{x_i}||v| + |c(x)||u||v| \right) dx \\
&\leq \sum_{i,j=1}^n \|a^{ij}\|_{L^\infty} \int_\Omega |\nabla u||\nabla v| dx + \sum_{i=1}^n \|b^i\|_{L^\infty} \int_\Omega |\nabla u||v| dx + \|c\|_{L^\infty} \int_\Omega |u||v| dx \\
&\leq n^2 A (\int_\Omega |\nabla u|^2 dx)^{1/2} (\int_\Omega |\nabla v|^2 dx)^{1/2} + nA (\int_\Omega |\nabla u|^2 dx)^{1/2} (\int_\Omega |v|^2 dx)^{1/2} \\
&+ A (\int_\Omega |u|^2 dx)^{1/2} (\int_\Omega |v|^2 dx)^{1/2} \\
&\leq n^2 A \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} + nA \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} + A \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \\
&= \alpha \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)},
\end{aligned}$$

όπου $\alpha = (n^2 + n + 1)A$

Από την ελλειπτική συνθήκη παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\theta \int_\Omega |\nabla u|^2 &\leq \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i} u_{x_j} \\
&= B(u,u) - \int_\Omega (\sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} u + cu^2) \, dx \\
&\leq B(u,u) + \sum_{i=1}^n \|b^i\|_{L^\infty} \int_\Omega |\nabla u||u| dx + \|c\|_{L^\infty} \int_\Omega u^2 dx.
\end{aligned}$$

Από την ανισότητα Cauchy έχουμε ότι

$$\int_\Omega |\nabla u||u| \, dx \leq \varepsilon \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{4\varepsilon} \int_\Omega |u|^2 \, dx \ \ (\varepsilon > 0).$$

Επιλέγοντας $\varepsilon > 0$ ώστε

$$\varepsilon \sum_{i=1}^{n} \|b^i\|_{L^\infty} < \frac{\theta}{2},$$

τότε για κατάλληλα $\beta > 0, \gamma \geq 0$, από την τελευταία σχέση και την ανισότητα Poincare

$$\|u\|_{L^2} \leq C\|\nabla u\|_{L^2}$$

θα έχουμε

$$B(u,u) + \gamma \int_\Omega |u|^2 \; dx \geq \frac{\theta}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \;\; dx \geq \beta \|u\|_{H^1}^2 \Rightarrow$$
$$B(u,u) + \gamma\|u\|_{L^2}^2 \geq \beta\|u\|_{H^1}^2.$$

■

Παρατηρούμε τώρα ότι αν $\gamma > 0$, τότε η $B(\cdot,\cdot)$ δεν ικανοποιεί την υπόθεση της πιεστικότητας ώστε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Lax-Milgram. Ωστόσο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το παραπάνω Θεώρημα για να αποδείξουμε την ύπαρξη λύσης σε ένα άλλο ελλειπτικό πρόβλημα.

Θεώρημα 6 *Έστω L ένας δεύτερης τάξης γραμμικός διαφορικός τελεστής της μορφής (1.2.9), ο οποίος ικανοποιεί τις υποθέσεις του προηγούμενου θεωρήματος. Τότε υπάρχει $\gamma \geq 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε $\mu \geq \gamma$ και κάθε συνάρτηση $f \in L^2(\Omega)$, το πρόβλημα Dirichlet για τον τελεστή*

$$L_\mu u = Lu + \mu u$$

έχει μοναδική λύση $u \in H_0^1(\Omega)$.

Απόδειξη. Θεωρούμε ως γ αυτό που μας δίνει το Θεώρημα 5 και έστω $\mu \geq \gamma$. Ορίζουμε την διγραμμική μορφή

$$B_\mu(u,v) = B(u,v) + \mu(u,v)_{L^2}, \;\; u,v \in H_0^1(\Omega)$$

που αντιστοιχεί στον τελεστή L_μ. Τότε η $B_\mu(\cdot,\cdot)$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Lax-Milgram. Πράγματι,

$$\begin{aligned}|B_\mu(u,v)| &\leq |B(u,v)| + |\mu||(u,v)| \\ &\leq \alpha\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1} + \mu\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \\ &\leq C\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}. \quad (\text{επειδή } \|u\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1}\ )\end{aligned}$$

Άρα η B_μ είναι φραγμένη. Επίσης έχουμε ότι

$$B_\mu(u,u) = \mu\|u\|_{L^2}^2 + B(u,u) \geq \beta\|u\|_{H^1}^2,$$

όπου β η σταθερά που μας δίνει το Θεώρημα 5. Δηλαδή η B_μ είναι ελλειπτική.
Επιπλέον, για $f \in L^2(\Omega)$, ορίζουμε την απεικόνιση

$$g : H_0^1 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ με } g(v) = (f,v)_{L^2} = \int_\Omega fv dx.$$

Τότε

$$|g(v)| = |\int_\Omega fv dx| \leq \int_\Omega |f||v| dx \leq (\int_\Omega |f|^2 dx)^{1/2} (\int_\Omega |v|^2 dx)^{1/2} = \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{H^1}.$$

Επομένως, οι υποθέσεις του Θεωρήματος ισχύουν άρα υπάρχει μοναδικό $u \in H_0^1(\Omega)$ που ικανοποιεί την

$$B_\mu(u,v) = g(v) \Leftrightarrow B_\mu(u,v) = (f,v), \quad \text{για κάθε } v \in H_0^1(\Omega).$$

Συνεπώς, το u είναι η ασθενής λύση του συνοριακού προβλήματος. ■

Σημείωση 1 *Στην περίπτωση $Lu = -\Delta u$, η διγραμμική μορφή $B[u,v] = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx$ ικανοποιεί το Θεώρημα 5 για $\gamma = 0$ (από ανισότητα Poincare). Ένας ανάλογος ισχυρισμός ισχύει και για τον γενικό τελεστή $Lu = -\sum_{i,j=1}^n (a^{ij}u_{x_i})_{x_j} + cu$ υπό τον όρο ότι $c \geq c_0 > 0$ σ.π. στο Ω, όπου c_0 σταθερά. Πράγματι, λόγω της ελλειπτικότητας του L,*

$$\begin{aligned}
&\theta\|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq B(u,u) - c_0\int_\Omega u^2 dx \Rightarrow \\
&\beta(\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2) \leq \theta\|\nabla u\|_{L^2}^2 + c_0\|u\|_{L^2}^2 \leq B(u,u) \Rightarrow \\
&\beta\|u\|_{H^1}^2 \leq B(u,u).
\end{aligned}$$

Δηλαδή η διγραμμική μορφή που αντιστοιχεί στο πρόβλημα

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^n (a^{ij}u_{x_i})_{x_j} + cu = f, & \text{στο } \Omega \\ u = 0, & \text{στο } \Gamma \end{cases} \tag{1.2.10}$$

είναι φραγμένη και πιεστική.

Παρατήρηση 2 *Για την διερεύνηση του αρχικού προβλήματος*

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n}(a^{ij}u_{x_i})_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}b^i(x)u_{x_i}+cu=f, & \sigma\tau o \ \ \Omega \\ \\ \hfill u=0, & \sigma\tau o \ \ \Gamma \end{cases} \tag{1.2.11}$$

μπορεί να γίνει χρήση του Εναλλακτικού Θεωρήματος Fredholm (βλ. [7]).

1.2.3 Το Πρόβλημα Helmholtz με συνοριακή συνθήκη Neumann

Παράδειγμα 3 (Ομογενής Συνοριακή Συνθήκη Neumann) *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ένα ανοιχτό, φραγμένο σύνολο με σύνορο $\Gamma = \partial\Omega$ Lipschitz συνεχές. Έστω μια συνάρτηση $\alpha_0 \in L^\infty(\Omega)$ και μια σταθερά $a_0 > 0$ τέτοια ώστε*

$$\alpha_0(x) \geq a_0, \ \ \sigma.\pi. \ \ \sigma\tau o \ \ \Omega.$$

Αναζητάμε συνάρτηση $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ που να ικανοποιεί:

$$\begin{cases} -\Delta u + \alpha_0 u = f, & \sigma\tau o \ \ \Omega \\ \hfill \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \sigma\tau o \ \ \Gamma \end{cases} \tag{1.2.12}$$

όπου η f είναι ορισμένη στο Ω και το $\partial/\partial\nu$ συμβολίζει την παραγώγιση ως προς το κάθετο διάνυσμα στο Γ.

Αρχικά θα φτιάξουμε την ασθενή διατύπωση. Υποθέτουμε ότι $u \in C^2(\Omega)\bigcap C^1(\overline{\Omega})$ είναι μια κλασική λύση του προβλήματος (1.2.12). Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη σχέση της (1.2.12) με μία τυχαία δοκιμαστική συνάρτηση v με κατάλληλη λείοτητα ώστε να έχουν νόημα οι παρακάτω υπολογισμοί, ολοκληρώνουμε κατά μέλη πάνω στο Ω

$$\int_\Omega (\nabla u \nabla v + \alpha_0 uv)dx = \int_\Omega fv dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} v ds.$$

Με αντικατάσταση της συνοριακής συνθήκης οδηγούμαστε στην σχέση

$$\int_\Omega (\nabla u \nabla v + \alpha_0 uv)dx = \int_\Omega fv dx.$$

Υποθέτουμε ότι $f \in L^2(\Omega)$*. Για να έχει νόημα κάθε όρος στην παραπάνω σχέση αρκεί να επιλέξουμε τον χώρο* $H^1(\Omega)$ *και για τις δύο συναρτήσεις* u, v*. Έτσι, η ασθενής διατύπωση του συνοριακού προβλήματος (1.2.12) είναι*

$$u \in H^1(\Omega), \quad \int_\Omega (\nabla u \nabla v + \alpha_0 uv)dx = \int_\Omega fvdx, \quad \text{για κάθε } v \in H^1(\Omega). \tag{1.2.13}$$

Το πρόβλημα αυτό θα δείξουμε ότι έχει μοναδική λύση χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Lax-Milgram.

Ορίζουμε:

$$H = H^1(\Omega)$$

$$B(u, v) = \int_\Omega (\nabla u \nabla v + \alpha_0 uv)dx$$

και

$$h(v) = \int_\Omega fvdx.$$

Η $B(\cdot, \cdot)$ *ικανοποιεί το Θεώρημα 5 εφόσον από την Παρατήρηση 1 έχουμε ότι* $\gamma = 0$ *και άρα είναι πιεστική και φραγμένη. Το* $h : H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ *είναι γραμμικό και φραγμένο, όπως και στα προβλήματα Dirichlet. Επομένως, οι υποθέσεις του Θεωρήματος Lax-Milgram ικανοποιούνται και άρα υπάρχει μοναδικό* $u \in H^1(\Omega)$ *που ικανοποιεί την*

$$B(u, v) = h(v), \quad \text{για κάθε } v \in H^1(\Omega).$$

Συνεπώς, το u *είναι η ασθενής λύση του ελλειπτικού προβλήματος με ομογενή συνοριακή συνθήκη Neumann.*

Ένα ενδιαφέρον ερώτημα που τίθεται είναι η σχέση μεταξύ του συνοριακού προβλήματος Neumann (1.2.12) και της ασθενής διατύπωσης (1.2.13). Στην πραγματικότητα το πιο εντυπωσιακό χαρακτηριστικό στην ασθενή διατύπωση είναι ότι η συνοριακή συνθήκη Neumann δεν εμφανίζεται ρητά αλλά περιέχεται σιωπηρά, κάτι το οποίο θα διαπιστώσουμε παρακάτω.

Υποθέτουμε ότι η λύση u είναι ομαλή λύση δηλαδή $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Έστω μια δοκιμαστική συνάρτηση $v \in \mathcal{D} = \{v|_\Omega : v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)\}$ και ολοκληρώνουμε κατά μέλη την (1.2.13). Αυτό είναι δυνατό καθώς οι συναρτήσεις u, v είναι ομαλές στο σύνορο και θα έχουμε

$$\int_\Omega (-\Delta u + \alpha_0 u - f)vdx + \int_\Gamma v\frac{\partial u}{\partial \nu}ds = 0, \;\; \text{για κάθε } \; v \in v \in \mathcal{D}. \tag{1.2.14}$$

Από την (1.2.14), θα εξετάσουμε την u στο Ω και στο Γ. Θα εξετάσουμε πρώτα την u στο Ω παίρνοντας $v \in C_0^\infty(\Omega)$ στην (1.2.14). Εφόσον $v = 0$ στο Γ, ο όρος πάνω στο Γ της (1.2.14) είναι μηδέν και άρα θα έχουμε

$$\int_\Omega (-\Delta u + \alpha_0 u - f) v dx = 0, \ \text{ για κάθε } \ v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Αν συμβολίσουμε με $(\cdot,\cdot)_{L^2(\Omega)}$ το εσωτερικό γινόμενο στον $L^2(\Omega)$, τότε από την παραπάνω σχέση έχουμε

$$(-\Delta u + \alpha_0 u - f, v)_{L^2(\Omega)} = 0, \ \text{ για κάθε } \ v \in C_0^\infty(\Omega),$$

όπου ο $C_0^\infty(\Omega)$ είναι πυκνός υπόχωρος του $L^2(\Omega)$ και λόγω συνέχειας του εσωτερικού γινομένου θα έχουμε

$$(-\Delta u + \alpha_0 u - f, v)_{L^2(\Omega)} = 0, \ \text{ για κάθε } \ v \in L^2(\Omega).$$

Άρα $-\Delta u + \alpha_0 u - f = 0$ στον $L^2(\Omega)$ ή ισοδύναμα

$$-\Delta u + \alpha_0 u - f = 0 \ \ \sigma.\pi. \text{ στο } \ \Omega. \tag{1.2.15}$$

Για να συνεχίσουμε θα χρειαστεί να υπενθυμήσουμε την έννοια του τελεστή ίχνους (βλ. [7], παράγραφος 5.5). Ο τελεστής ίχνους $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Gamma)$, $1 \leq p < \infty$, είναι μια φραγμένη γραμμική απεικόνιση, τέτοια ώστε

(i) $\gamma(v) = v|_\Gamma$, $\forall v \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$

(ii) Υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε $\|\gamma(v)\|_{L^2(\Gamma)} \leq C\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}$, για κάθε $v \in W^{1,p}(\Omega)$.

Ας εξετάσουμε τώρα την u πάνω στο Γ. Για να το κάνουμε αυτό επιστρέφουμε στο (1.2.14) με μια γενική $v \in \mathcal{D}$ και χρησιμοποιούμε το (1.2.15). Από την σχέση (1.2.15) έχουμε ότι η $-\Delta u + \alpha_0 u - f$ η οποία είναι $L^2(\Omega)$ συνάρτηση είναι ίση με μηδέν σχεδόν παντού στο Ω. Συνεπώς, το πρώτο ολοκλήρωμα στο Ω της σχέσης (1.2.14) είναι μηδέν και έχουμε

$$\int_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = 0, \ \text{ για κάθε } \ v \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \int_\Gamma \gamma(v) \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = 0, \ \text{ για κάθε } \ v \in \mathcal{D},$$

όπου $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$ ο τελεστής ίχνους. Ισοδύναμα λοιπόν έχουμε ότι

$$(\frac{\partial u}{\partial \nu}, \gamma(v))_{L^2(\Gamma)} = 0, \ \text{ για κάθε } \ v \in \mathcal{D}.$$

Ο $\mathcal{D}$ είναι πυκνός στον $H^1(\Omega)$(βλ. [2], Πρόταση 5.4.1). Άρα λόγω συνέχειας του εσωτερικού γινομένου και του γ, θα έχουμε

$$(\frac{\partial u}{\partial \nu}, \gamma(v))_{L^2(\Gamma)} = 0, \text{ για κάθε } v \in H^1(\Omega),$$

δηλαδή

$$(\frac{\partial u}{\partial \nu}, v)_{L^2(\Gamma)} = 0, \text{ για κάθε } v \in \gamma(H^1(\Omega)).$$

Αλλά ο $\gamma(H^1(\Omega))$ είναι πυκνός στον $L^2(\Gamma)$ (βλ. [2], Λήμμα 6.2.1). Συνεπώς $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ στον $L^2(\Gamma)$, δηλαδή $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ *σ.π.* στο Γ. Επειδή όμως υποθέσαμε ότι η $u \in C^2(\overline{\Omega})$ θα έχουμε $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ στο Γ. Επομένως, η συνοριακή συνθήκη ικανοποιείται αυτόματα.

Θέλουμε τώρα να λύσουμε το ανάλογο πρόβλημα αλλά με μη ομογενή συνοριακή συνθήκη.

Παράδειγμα 4 (Μη ομογενής Συνοριακή Συνθήκη Neumann) *Αναζητάμε συνάρτηση $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ που να ικανοποιεί:*

$$\begin{cases} -\Delta u + \alpha_0 u = f, & \text{στο } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g, & \text{στο } \Gamma \end{cases} \tag{1.2.16}$$

όπου f και g ορισμένες στο Ω και Γ αντίστοιχα, και $\partial/\partial\nu$ συμβολίζει την παραγώγιση ως προς το κάθετο διάνυσμα στο Γ. Αρχικά θα φτιάξουμε την ασθενή διατύπωση. Υποθέτουμε ότι $u \in C^2(\Omega) \bigcap C^1(\overline{\Omega})$ είναι μια κλασική λύση του προβλήματος (1.2.16). Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη σχέση της (1.2.16) με μία τυχαία δοκιμαστική συνάρτηση v με κατάλληλη λείοτητα ώστε να έχουν νόημα οι παρακάτω υπολογισμοί, ολοκληρώνουμε κατά μέλη πάνω στο Ω και παίρνουμε

$$\int_\Omega (\nabla u \nabla v + \alpha_0 uv)dx = \int_\Omega fvdx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} vds.$$

Με αντικατάσταση της συνοριακής συνθήκης οδηγούμαστε στη σχέση

$$\int_\Omega (\nabla u \nabla v + \alpha_0 uv)dx = \int_\Omega fvdx + \int_\Gamma gvds.$$

Υποθέτουμε ότι $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\Gamma)$. Για να έχει νόημα κάθε όρος στην παραπάνω σχέση αρκεί να επιλέξουμε τον χώρο $H^1(\Omega)$ και για τις δύο συναρτήσεις u, v. Έτσι, η ασθενής *διατύπωση του συνοριακού προβλήματος 1.2.16 είναι*

$$u \in H^1(\Omega), \quad \int_\Omega (\nabla u \nabla v + \alpha_0 uv)dx = \int_\Omega fvdx + \int_\Gamma gvds, \quad \text{για κάθε } v \in H^1(\Omega).$$

Το πρόβλημα αυτό θα δείξουμε ότι έχει μοναδική λύση χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Lax-Milgram.

Ορίζουμε:

$$H = H^1(\Omega)$$
$$B(u,v) = \int_\Omega (\nabla u \nabla v + \alpha_0 uv)dx$$

και

$$h(v) = \int_\Omega fvdx + \int_\Gamma gvds.$$

Η $B(\cdot,\cdot)$ *ικανοποιεί το Θεώρημα 5 εφόσον από την Παρατήρηση 1 έχουμε ότι* $\gamma = 0$ *και άρα είναι πιεστική και φραγμένη. Το* $h : H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ *είναι γραμμικό.*

Επιπλέον, έχουμε ότι $g \in L^2(\Gamma)$. *Άρα*

$$\begin{aligned}
|\int_\Omega fvdx + \int_\Gamma gvds| &\le \int_\Omega |fv|dx + \int_\Gamma |gv|ds \\
&\le (\int_\Omega |f|^2dx)^{1/2}(\int_\Omega |v|^2dx)^{1/2} + (\int_\Gamma |g|^2ds)^{1/2}(\int_\Gamma |v|^2ds)^{1/2} \\
&= \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma)}\|v\|_{L^2(\Gamma)} \\
&\le \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} + C\|g\|_{L^2(\Gamma)}\|v\|_{H^1(\Omega)} \\
&\le (\|f\|_{L^2(\Omega)} + C\|g\|_{L^2(\Gamma)})\|v\|_{H^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

Συνεπώς, το h *είναι φραγμένο. Επομένως, οι υποθέσεις του Θεωρήματος Lax-Milgram ικανοποιούνται και άρα υπάρχει μοναδικό* $u \in H^1(\Omega)$ *που ικανοποιεί την*

$$B(u,v) = h(v), \quad \text{για κάθε } v \in H^1(\Omega).$$

Συνεπώς, το u *είναι η ασθενής λύση του συνοριακού προβλήματος. Ακριβώς όπως και στην ομογενή περίπτωση για μια* $u \in C^2(\overline{\Omega})$ *μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η συνοριακή συνθήκη ικανοποιείται αυτόματα εφόσον με ανάλογη διαδικασία καταλήγουμε ότι*

$$\int_\Gamma v(\frac{\partial u}{\partial \nu} - g)ds = 0, \quad \text{για κάθε } \; v \in \mathcal{D}$$

Άρα $\frac{\partial u}{\partial \nu} = g$ *στο* Γ.

Σημείωση: Όταν αναφερόμαστε στις τιμές που παίρνει στο σύνορο Γ μια συνάρτηση $u \in W^{1,p}(\Omega)$ είναι πάντα υπό την έννοια του τελεστή ίχνους. Πολλές φορές όμως για ευκολία παραλείπουμε τον τελεστή, κάτι το οποίο κάνουμε παραπάνω.

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε στη διερεύνηση του προβλήματος με συνοριακή συνθήκη Neumann υποθέσαμε ότι $\alpha_0 > 0$. Η περίπτωση $\alpha_0 = 0$ χρειάζεται ειδικό χειρισμό. Έστω $f \in L^2(\Omega)$. Αναζητάμε $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ που να ικανοποιεί το πρόβλημα

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{στο } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \text{στο } \Gamma \end{cases} \tag{1.2.17}$$

Το πρόβλημα αυτό δεν είναι καλά τοποθετημένο (well-posed). Για να το δούμε αυτό υποθέτουμε ότι η u είναι ομαλή συνάρτηση και ολοκληρώνουμε στο Ω χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Green

$$\begin{aligned} \int_\Omega f dx &= -\int_\Omega \Delta u dx \\ &= -\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} ds \\ &= 0. \end{aligned}$$

Επομένως, μια αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη κλασικής λύσης είναι $\int_\Omega f dx = 0$. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι αν u είναι μια κλασική λύση, τότε για κάθε σταθερά C, η $u + C$ θα είναι λύση. Ορίζουμε τον χώρο

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : \int_\Omega v(x)dx = 0\}.$$

Τότε η διγραμμική μορφή του προβλήματος είναι πιεστική λόγω της Γενικευμένης Ανισότητας Poincare (βλ. [2], Θεώρημα 5.4.3) πάνω στον V, ο οποίος είναι ένας κλειστός υπόχωρος του $H^1(\Omega)$ με μοναδική σταθερή συνάρτηση την μηδενική. Οι B και h είναι φραγμένες όπως και προηγουμένως. Άρα από το Θεώρημα Lax-Milgram υπάρχει μοναδική λύση $u \in V$ και αν u^* είναι μια κλασική λύση τότε η $u^* - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u^*(x)dx$ είναι η μοναδική ασθενής λύση (για την απόδειξη αυτών παραπέμπουμε στο [2], παράγραφος 6.2.3).

1.2.4 Ελλειπτικό Πρόβλημα με μικτές συνοριακές συνθήκες

Επιπλέον είναι δυνατόν να ορίσουμε προβλήματα με διαφορετικές συνοριακές συνθήκες πάνω σε διαφορετικά μέρη του συνόρου. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n}(a^{ij}u_{x_i})_{x_j}+cu=f, \ \ \text{στο} \ \ \Omega, \\ \qquad\qquad\qquad u=0, \ \ \text{στο}\ \Gamma_D, \\ \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\nu_j=g, \ \ \text{στο} \ \ \Gamma_N \end{cases} \tag{1.2.18}$$

όπου Γ_D, Γ_N αποτελούν διαμέριση του συνόρου, δηλαδή $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, Γ_D είναι σχετικά κλειστό, Γ_N είναι σχετικά ανοιχτό και $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$. Υποθέτουμε ότι $c \geq c_0 > 0$ σχεδόν παντού στο Ω, όπου c_0 σταθερά, και $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\Gamma_N)$.

Ο κατάλληλος χώρος στον οποίο θα θέσουμε την ασθενή διατύπωση του προβλήματος είναι τώρα ο

$$H = H^1_{\Gamma_D}(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : \gamma(v) = 0 \ \ \text{στο} \ \ \Gamma_D\}.$$

Δηλαδή $\gamma(v) = 0$ στον $L^2(\Gamma_D)$ ή αλλιώς $\gamma(v) = 0$ $\sigma.\pi.$ στο Γ_D. Για ευκολία πολλές φορές γράφουμε

$$H = H^1_{\Gamma_D}(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \ \ \text{στο} \ \ \Gamma_D\},$$

όπου οι τιμές στο σύνορο είναι υπό την έννοια του τελεστή ίχνους. Ο H είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $H^1(\Omega)$. Το γεγονός ότι είναι υπόχωρος είναι άμεση συνέπεια της γραμμικότητας του γ. Θα αποδείξουμε ότι είναι κλειστός. Έστω $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον H τέτοια ώστε $u_n \to u$. Λόγω συνέχειας της γ θα έχουμε ότι $\gamma(u_n) \to \gamma(u)$ στον $L^2(\Gamma)$ και επειδή $\Gamma_D \subset \Gamma$, θα έχουμε ότι $\gamma(u_n) \to \gamma(u)$ στον $L^2(\Gamma_D)$. Όμως, $\{u_n\} \subset H$, δηλαδή $\gamma(u_n) = 0$ σχεδόν παντού στο Γ_D και επομένως $\gamma(u) = 0$ στον $L^2(\Gamma_D)$. Άρα $\gamma(u) = 0$ σχεδόν παντού στο Γ_D, δηλαδή $u \in H$. Συνεπώς, είναι χώρος Hilbert με την κανονική νόρμα του $H^1(\Omega)$.

Τότε η ασθενής διατύπωση του προβλήματος θα προκύψει όπως και στα προηγούμενα πολλαπλασιάζοντας με κατάλληλες συναρτήσεις δοκιμής, στη συγκεκριμένη περίπτωση με

$v \in \mathcal{D} = \{v|_\Omega : v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)\}$ τέτοιες ώστε $v = 0$ στο Γ_D. Άρα θέτουμε

$$B(u,v) = \int_\Omega (\sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} + cuv)dx, \ u, v \in H,$$

$$h(v) = \int_\Omega fvdx + \int_{\Gamma_N} \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i} v \nu_j ds = \int_\Omega fvdx + \int_{\Gamma_N} gvds, \ u, v \in H.$$

Η B είναι ελλειπτική και φραγμένη όπως έχουμε ήδη δείξει στο γενικευμένο ελλειπτικό πρόβλημα (βλ. Παρατήρηση 1-Θεώρημα 5).

Μένει να αποδείξουμε τώρα ότι h είναι φραγμένο.

Πράγματι, επειδή η απεικόνιση $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$ είναι συνεχής και $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\Gamma_N)$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
|h(v)| &= |\int_\Omega fvdx + \int_{\Gamma_N} gvds| \\
&\leq \int_\Omega |fv|dx + \int_{\Gamma_N} |gv|ds \\
&= \int_\Omega |fv|dx + \int_\Gamma |gv|ds \\
&\leq (\int_\Omega |f|^2 dx)^{1/2} (\int_\Omega |v|^2 dx)^{1/2} + (\int_\Gamma |g|^2 ds)^{1/2} (\int_\Gamma |v|^2 ds)^{1/2} \\
&\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma)} \|v\|_{L^2(\Gamma)} \\
&\leq (\|f\|_{L^2(\Omega)} + C\|g\|_{L^2(\Gamma)}) \|v\|_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Επομένως, ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος Lax-Milgram και άρα υπάρχει $u \in H$ μοναδική λύση του προβλήματος.

Παρατήρηση 3 *Στην περίπτωση όπου $c = 0$ για να δείξουμε ότι η διγραμμική μορφή είναι πιεστική χρειαζόμαστε την Γενικευμένη ανισότητα Poincare (βλ. [2], Θεώρημα 5.4.3) καθώς ο H είναι κλειστός υπόχωρος και η μόνη σταθερή συνάρτηση που περιέχει είναι η μηδενική.*

Σημείωση: Όπως έχουμε ήδη αναφέρει όταν μιλάμε για τις τιμές που παίρνει στο σύνορο Γ μια συνάρτηση $u \in W^{1,p}(\Omega)$ είναι πάντα υπό την έννοια του τελεστή ίχνους. Για ευκολία όμως παραλείψαμε τον τελεστή στις παραπάνω πράξεις.

1.3 Κατασκευή της λύσης του Θεωρήματος Lax-Milgram

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει το Θεώρημα Lax-Milgram για κάθε $f \in H^*$ μας δίνει την ύπαρξη δύο στοιχείων u και w στον H, τέτοιων ώστε $f(x) = B(u,x) = B(x,w)$, για κάθε $x \in H$. Όμως πως προσδιορίζουμε τις λύσεις αυτές ή πως βρίσκουμε προσεγγίσεις αυτών δεν αναφέρεται στην απόδειξη του αρχικού Θεωρήματος. Στις επόμενες παραγράφους αναλύουμε τα αποτελέσματα των S. Hildebrandt-E.Wienholtz (1964) και W. Petryshyn (1965) με τα οποία θα κατασκευάσουμε ακολουθίες που συγκλίνουν στη λύση.

1.3.1 Αποτελέσματα Petryshyn

Έστω H ένας πραγματικός χώρος Hilbert. Έστω $B(x,y)$ μια διγραμμική μορφή ορισμένη στον H τέτοια ώστε για τις σταθερές $c_1 > 0$ και $c_2 > 0$ ισχύουν

$$|B(x,y)| \leq c_1\|x\|\|y\|,\ x,y \in H$$

και

$$B(x,x) \geq c_2\|x\|^2,\ x \in H.$$

Δηλαδή η B είναι φραγμένη και πιεστική. Έστω $\{\phi_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset H$ μια πλήρης ακολουθία από γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία στον H, δηλαδή $\overline{\langle\{\phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle} = H$.

Λήμμα 1 *Αν $B(x,y)$ είναι πιεστική, τότε $det(B(\phi_i,\phi_j)_{i=1}^n) \neq 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

Απόδειξη. Έστω $M = (B(\phi_i,\phi_j))_{i,j=1}^n$. Θα δείξουμε ότι $x^TMx \geq 0$, για κάθε $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$, δηλαδή ότι ο πίνακας είναι θετικά ορισμένος και άρα αντιστρέψιμος. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
x^TMx &= \sum_{i=1}^n x_i(\sum_{j=1}^n M_{ij}x_j) = \sum_{i,j=1}^n x_iM_{ij}x_j \\
&= \sum_{i,j=1}^n x_iB(\phi_i,\phi_j)x_j = B(\sum_{i=1}^n x_i\phi_i, \sum_{j=1}^n x_j\phi_j) \\
&= B(\psi,\psi) \geq c_2\|\psi\|^2 > 0, \ \text{ με } \ \psi = \sum_{i=1}^n x_i\phi_i
\end{aligned}$$

Άρα ο M είναι αντιστρέψιμος και επομένως $det(B(\phi_i,\phi_j))_{i,j=1}^n \neq 0$.

■

Έστω f ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό στον H και έστω $\{u_n\}$ και $\{w_n\}$ ακολουθίες στον H ορισμένες ως εξής

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} a_{in}\phi_i, \quad w_n = \sum_{i=1}^{n} b_{in}\phi_i, \ n = 1, 2, \ldots, \tag{1.3.1}$$

όπου οι συντελεστές $\{a_{1n}, \ldots, a_{nn}\}$ προσδιορίζονται από τη λύση του συστήματος

$$\sum_{i=1}^{n} B(\phi_i,\phi_j)a_{in} = f(\phi_j), \ 1 \leq j \leq n \tag{1.3.2}$$

και $\{b_{1n}, \ldots, b_{nn}\}$ προσδιορίζονται από τη λύση του συστήματος

$$\sum_{i=1}^{n} B(\phi_j,\phi_i)b_{in} = f(\phi_j), \ 1 \leq j \leq n. \tag{1.3.3}$$

Λήμμα 2 *Έστω $B(x,y)$ μια φραγμένη και πιεστική διγραμμική μορφή και f ένα δοθέν φραγμένο συναρτησιακό στον H. Τότε*

(α΄) Για κάθε n τα παραπάνω συστήματα έχουν μοναδικές λύσεις $\{a_{1n}, \ldots, a_{nn}\}$ και $\{b_{1n}, \ldots, b_{nn}\}$ αντίστοιχα.

(β΄) Οι ακολουθίες $\{u_n\}$ και $\{w_n\}$, όπως ορίστηκαν παραπάνω, συγκλίνουν αντίστοιχα στα στοιχεία u^* και w^* στον H, τα οποία είναι τέτοια ώστε

$$f(x) = B(u^*,x) = B(x,w^*), \quad \text{για κάθε } x \in H.$$

Απόδειξη. ([19])

(α΄) Από το Λήμμα έχουμε ότι η ορίζουσα του συστήματος είναι μη μηδενική, άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση.

(β΄) Αρχικά θα αποδείξουμε ότι ισχύουν τα συμπερασματά για την $\{u_n\}$. Από το πρώτο μας σύστημα και τον ορισμό της $\{u_n\}$ έχουμε

$$\sum_{i=1}^{n} B(\phi_i,\phi_j)a_{in} = f(\phi_j) \Leftrightarrow B(u_n,\phi_j) = f(\phi_j), \ 1 \leq j \leq n. \tag{1.3.4}$$

Πολλαπλασιάζουμε με a_{jn} και αθροίζουμε και τα δύο μέλη από $j = 1$ έως $j = n$ και παίρνουμε

$$B(u_n, u_n) = f(u_n). \tag{1.3.5}$$

Οπότε λόγω της πιεστικότητας έχουμε

$$c_2\|u_n\| \leq B(u_n, u_n) = f(u_n) \leq \|f\|\|u_n\| \Rightarrow \|u_n\| \leq \frac{\|f\|}{c_2}, \text{ για κάθε } n.$$

Συνεπώς, η $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι φραγμένη άρα περιέχει μια υπακολουθία που συγκλίνει ασθενώς σε κάποιο στοιχείο u^* του H, δηλαδή $u_{n_i} \xrightarrow{w} u^*$. Από την (1.3.4)

$$B(u_{n_i}, \phi_j) = f(\phi_j), \ 1 \leq j \leq n_i,$$

και για κάθε δεδομένο j το $B(u_{n_i}, \phi_j)$ είναι ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό ως προς u_{n_i}, επομένως παίρνοντας το όριο έχουμε

$$B(u^*, \phi_j) = f(\phi_j), \ j = 1, 2, \ldots.$$

Εφόσον $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ είναι πλήρης στον H, για κάθε $x \in H$ έχουμε ότι

$$B(u^*, x) = f(x). \tag{1.3.6}$$

Επιπλέον, αν $u^* \neq u'$ δύο λύσεις, τότε $B(u^*, x) = f(x)$ και $B(u', x) = f(x)$, για κάθε $x \in H$. Από την ισότητα των δύο μελών έχουμε $B(u^* - u', x) = 0$, για κάθε $x \in H$ και για $x = u^* - u'$ από την πιεστικότητα

$$c_2\|u^* - u'\| \leq B(u^* - u', u^* - u') = 0 \Rightarrow u^* = u'.$$

Επομένως, κάθε συγκλίνουσα υπακολουθία συγκλίνει σε αυτό το μοναδικό όριο u^*. Άρα, η αρχική ακολουθία συγκλίνει στο ίδιο όριο, δηλαδή $u_n \xrightarrow{w} u^*$. Χρησιμοποιώντας τις (1.3.5) και (1.3.6) παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} c_2\|u^* - u_n\|^2 &\leq B(u^* - u_n, u^* - u_n) \\ &= B(u^*, u^*) - B(u^*, u_n) - B(u_n, u^*) + B(u_n, u_n) (\text{ από τις } (1.3.5)\text{-}(1.3.6)\ ) \\ &= B(u^*, u^*) - f(u_n) - B(u_n, u^*) + f(u_n) \\ &= B(u^*, u^*) - B(u_n, u^*). \end{aligned}$$

Εφόσον $u_n \stackrel{w}{\to} u^*$ και για δοθέν u^* το $B(u_n, u^*)$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό, $B(u_n, u^*) \to B(u^*, u^*)$. Συνεπώς $\|u_n - u^*\| \to 0$ καθώς $n \to \infty$. Με όμοια επιχειρήματα αποδεικνύουμε ότι $w_n \to w^* \in H$, τέτοιο ώστε, για κάθε $x \in H$,

$$B(x, w^*) = f(x).$$

Επομένως, $f(x) = B(u^*, x) = B(x, w^*)$, για κάθε $x \in H$.

■

Στο σημείο αυτό πρέπει να παρατηρήσουμε ότι δεν είναι πρακτικά χρήσιμος ο τρόπος με τον οποίο προσδιορίσαμε τις προσεγγίσεις $\{u_n\}$ και $\{w_n\}$, διότι έχουν το μειονέκτημα ότι οι συντελεστές $\{a_{in}\}$, $\{b_{in}\}$ εξαρτώνται από το n και επομένως αν θέλουμε μια καλύτερη προσέγγιση θα πρέπει να αυξήσουμε το n, έστω $m > n$, και να υπολογίσουμε νέους συντελεστές $\{a_{im}\}$, $\{b_{im}\}$. Για να το αποφύγουμε αυτό θα κατασκευάσουμε τις λύσεις ανεξάρτητα από το n.

Θεώρημα 7 *Έστω $\{\psi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ και $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ είναι αντίστοιχα άνω και κάτω ημι-ορθογώνιες ακολουθίες, δηλαδή $B(\psi_i, \psi_j) = 0, i > j$ και $B(f_i, f_j) = 0, i < j$. Έστω επίσης οι συντελεστές που ορίζονται ως εξής*

$$a_1 = \frac{f(\psi_1)}{B(\psi_1, \psi_1)}, \;\; a_j = \frac{f(\psi_j) - \sum_{i=1}^{j-1} B(\psi_i, \psi_j) a_i}{B(\psi_j, \psi_j)}, \; j = 2, 3, \ldots, \tag{1.3.7}$$

και

$$b_1 = \frac{f(f_1)}{B(f_1, f_1)}, \;\; b_j = \frac{f(f_j) - \sum_{i=1}^{j-1} B(f_i, f_j) b_i}{B(f_j, f_j)}, \; j = 2, 3, \ldots. \tag{1.3.8}$$

Τότε οι σειρές

$$u^* = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \psi_i$$

και

$$w^* = \sum_{i=1}^{\infty} b_i f_i$$

συγκλίνουν στον H και τα αντίστοιχα αθροίσματα τους u^* και w^* ικανοποιούν την εξίσωση

$$f(x) = B(u^*, x) = B(x, w^*), \;\; \text{για κάθε } x \in H.$$

Απόδειξη. ([19]) Υποθέτουμε ότι στην (1.3.1) παίρνουμε

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} a_{in}\psi_i$$

και θα προσδιορίσουμε τα $\{a_{in}\}$ από το αντίστοιχο σύστημα (1.3.2). Όμως επειδή τα $\{\psi_i\}$ είναι ημι-ορθογώνια το σύστημα ανάγεται στο

$$\sum_{i=1}^{j} B(\psi_i, \psi_j)a_{in} = f(\phi_j),$$

ο δείκτης i τρέχει μέχρι το j διότι για μεγαλύτερους δείκτες τα $B(\psi_i, \psi_j)$ είναι μηδέν. Εφόσον τώρα τα $B(\psi_i, \psi_j)$ των αθροισμάτων είναι μη μηδενικά για κάθε j, έχουμε τις επόμενες σχέσεις

$$a_{1n} = \frac{f(\phi_1)}{B(\psi_1, \psi_1)}, \quad a_{jn} = \frac{f(\phi_j) - \sum_{i=1}^{j-1} B(\psi_i, \psi_j)a_{in}}{B(\psi_j, \psi_j)}, \; j = 2, 3, \dots, \tag{1.3.9}$$

δηλαδή οι συντελεστές a_{jn} είναι ανεξάρτητοι από το n και $a_{jn} = a_j$, για κάθε j, όπου a_j ορίζονται από τις σχέσεις (1.3.7).

Από το Λήμμα συνεπάγεται ότι το όριο

$$u^* = \lim_{n\to\infty} u_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i\psi_i$$

υπάρχει στον H και ικανοποιεί την εξίσωση $f(x) = B(u^*, x)$, για κάθε $x \in H$. Όμοια, αν πάρουμε $w_n = \sum_{i=1}^{n} b_{in}f_i$ τότε το αντίστοιχο σύστημα (1.3.2) για τον προσδιορισμό των $\{b_{in}\}$ ανάγεται στο

$$\sum_{i=1}^{j} B(f_i, f_j)b_{in} = f(\phi_j)$$

από το οποίο, όπως παραπάνω, καταλήγουμε στη σχέση $b_{jn} = b_j$ για κάθε j. Έτσι,

$$w^* = \lim_{n\to\infty} w_n = \sum_{i=1}^{\infty} b_i f_i$$

υπάρχει στον H και ικανοποιεί την εξίσωση $f(x) = B(x, w^*)$, για κάθε $x \in H$. ∎

Παρατηρήσεις 2 *(i) Η δυνατότητα κατασκευής των* $\{\psi_i\}$, $\{f_i\}$ *και* a_j, b_j *αποδεικνύεται στην εργασία του W.V.Petryshyn [19] στην 4η παράγραφο.*

(ii) Στην μιγαδική περίπτωση μπορούμε με ανάλογη λογική να καταλήξουμε σε αντίστοιχα προσεγγιστικά αποτελέσματα (βλ. [19]).

1.3.2 Αποτελέσματα των Hildebrandt-Wienholtz

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε ένα αποτέλεσμα των Hildebrandt-Wienholtz (1964) όπου δεν δόθηκε μόνο ένας τρόπος κατασκευής της λύσης του Θεωρήματος Lax-Milgram αλλά γενικεύτηκε το Θεώρημα για διγραμμικές μορφές που δεν είναι πιεστικές με την γνωστή εννοια αλλά ικανοποιούν μια " πιεστική συνθήκη" πάνω σε μια ακολουθία πεπερασμένης διάστασης υπόχωρων.

Έστω $(H, (\cdot,\cdot))$ ένας διαχωρίσιμος χώρος Hilbert. Θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα κατασκευής μιας λύσης y της εξίσωσης

$$B(x,y) = f(x), \ \ \text{για κάθε } x \in H, \tag{1.3.10}$$

όπου υποθέτουμε ότι η B είναι μια φραγμένη διγραμμική μορφή και το f ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό, δηλαδή $|B(x,y)| \le b\|x\|\|y\|$ και $|f(x)| \le l\|x\|$ για κάθε $x, y \in H$ και $b, l > 0$ σταθερές. Έστω $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ μια ορθοκανονική βάση του H (η ακολουθία αυτή υπάρχει διότι ο H είναι διαχωρίσιμος). Συμβολίζουμε με P_n την ορθογώνια προβολή από τον H στον πεπερασμένης διάστασης υπόχωρο $H_n = \langle e_1, e_2, \dots, e_n\rangle$.

Θεώρημα 8 *Έστω ότι υπάρχει ένας ακέραιος $N > 0$, μια σταθερά $a > 0$ και μια ακολουθία ομοιόμορφα φραγμένων τελεστών $Q_n : H_n \to H_n$ τέτοια ώστε*

$$a\|x\|^2 \le |B(Q_n x, x)|, \ \text{για κάθε } x \in H_n \text{ και } n \ge N. \tag{1.3.11}$$

Τότε

(i) (Μοναδικότητα) Υπάρχει το πολύ μια λύση της (1.3.10).

(ii) (Ύπαρξη) Για κάθε $n > N$, το πεπερασμένο σύστημα εξισώσεων

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k^n B(e_i, e_k) = f(e_i), \ i = 1, \dots, n, \tag{1.3.12}$$

έχει μια μοναδική λύση $(\beta_1^n, \beta_2^n, \dots, \beta_n^n)$ και η ακολουθία $y_n = \sum_{k=1}^n \beta_k^n e_k, \ n = 1, 2, \dots,$ συγκλίνει σε ένα στοιχείο y, το οποίο είναι η λύση της (1.3.10).

Απόδειξη. ([11]) (i) Αν υποθέσουμε το αντίθετο, δηλαδή ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο λύσεις $z_1 \neq z_2$ της (1.3.10), τότε το $z = z_1 - z_2 \neq 0$ θα είναι λύση του $B(x,z) = 0,\;$ για κάθε $x \in H$. Προφανώς, $z = P_n z + (I - P_n)z$. Για $x = Q_n P_n z$, παίρνουμε ότι

$$B(Q_nP_nz, P_nz) + B(Q_nP_nz, (I-P_n)z) = B(Q_nP_nz, z) = 0.$$

Έτσι λόγω της (1.3.11) και της φραξιμότητας των $B(x,y)$ και $\{Q_n\}$ παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} a\|P_nz\|^2 &\leq |B(Q_nP_nz, P_nz)| = |B(Q_nP_nz, (I-P_n)z)| \\ &\leq b\|Q_nP_nz\|\|(I-P_n)z\| \leq b\|Q_n\|\|P_nz\|\|(I-P_n)z\| \\ &\leq C\|P_nz\|\|(I-P_n)z\|. \end{aligned}$$

Το αριστερό μέλος τείνει στο $a\|z\|^2$ και το δεξί στο μηδέν καθώς $n \to \infty$ και άρα $z = 0$. Άτοπο.

(ii) Από την (1.3.11) παρατηρούμε ότι $det(B(Q_ne_i, e_k))_{i,k=1,\ldots,n} \neq 0,\; n \geq N$, όπως και στην προηγούμενη παράγραφο, το οποίο είναι ισοδύναμο με το $det((AQ_ne_i, e_k))_{i,k=1,\ldots,n} \neq 0,\; n \geq N$. Άρα ο τελεστής $P_nAQ_n : H_n \to H_n$ είναι αντιστρέψιμος.

Επιπλέον, ο $Q_n : H_n \to H_n$ είναι αντιστρέψιμος εφόσον από την (1.3.11) $N(Q_n) = \{0\}$. Επομένως, ο $P_nA : H_n \to H_n$ θα είναι αντιστρέψιμος. Συνεπώς, έχουμε ότι

$$det((P_nAe_i, e_k))_{i,k=1,\ldots,n} \neq 0,\; n \geq N$$

ή ισοδύναμα

$$det((Ae_i, e_k))_{i,k=1,\ldots,n} = (B(e_i, e_k))_{i,k=1,\ldots,n} \neq 0,\; n \geq N.$$

Επομένως, το σύστημα (1.3.12) έχει μοναδική λύση, για $n \geq N$. Προφανώς η y_n έχει την ιδιότητα

$$B(x, y_n) = f(x), \;\; \text{για κάθε } x \in H_n \text{ αν } n \geq N. \tag{1.3.13}$$

Πράγματι, αν $n \geq N$ και $x \in H_n$, δηλαδή $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, τότε

$$\begin{aligned} B(x, y_n) &= B(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{k=1}^{n} \beta_k^n e_k) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i B(e_i, \sum_{k=1}^{n} \beta_k^n e_k) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{k=1}^{n} \beta_k^n B(e_i, e_k) \ \ (\text{από την } (1.3.13)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = f(x) \end{aligned}$$

Έχουμε ότι

$$a\|y_n\|^2 \leq |B(Q_n y_n, y_n)| = |f(Q_n y_n)| \leq \|f\| \|Q_n y_n\| \leq M\|y_n\|,$$

όπου M μια σταθερά. Άρα η ακολουθία $\{y_n\}$ είναι φραγμένη. Επομένως θα υπάρχει υπακολουθία $\{y_{n_i}\}$ η οποία συγκλίνει ασθενώς σε κάποιο $y \in H$. Για $x \in H_n$ με $n \geq N$, το $B(x, \cdot)$ είναι συνεχές γραμμικό συναρτησιακό, οπότε θα έχουμε $B(x, y_{n_i}) \to B(x, y)$ και από την (1.3.13) θα έχουμε τελικά ότι

$$B(x, y) = f(x), \ \ \text{για κάθε } x \in H_n \text{ αν } n \geq N.$$

Τώρα με την χρήση της τελευταίας και διασπώντας ένα τυχαίο $x \in H$ έχουμε

$$B(x, y) = B(P_n x, y) + B((I - P_n)x, y) = f(P_n x) + B((I - P_n)x, y).$$

Επειδή $P_n x \to x$ καθώς $n \to \infty$, $f(P_n x) \to f(x)$ και $B((I - P_n)x, y) \to 0$. Επομένως, η προηγούμενη σχέση για $n \to \infty$ γίνεται

$$B(x, y) = f(x), \ \ \text{για κάθε } x \in H. \tag{1.3.14}$$

Επιπλέον, από τις (1.3.13) και (1.3.14) έχουμε $B(x, y) = B(x, y_n)$, για κάθε $x \in H_n$ αν $n \geq N$. Οπότε για $x = Q_n(y_n - P_n y) \in H_n$,

$$B(Q_n(y_n - P_n y), y) = B(Q_n(y_n - P_n y), y_n).$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} a\|y_n - P_n y\|^2 &\leq |B(Q_n(y_n - P_n y), y_n - P_n y)| = |B(Q_n(y_n - P_n y), y - P_n y)| \\ &\leq b\|Q_n\| \|y_n - P_n y\| \|y - P_n y\| \leq C\|y_n - P_n y\| \|y - P_n y\| \Rightarrow \\ a\|y_n - P_n y\| &\leq C\|y - P_n y\|, \end{aligned}$$

όπου C μια σταθερά και έχουμε

$$\|y_n - y\| = \|y_n - P_n y + P_n y - y\| \leq \|y_n - P_n y\| + \|P_n y - y\| \leq c\|P_n y - y\|,$$

όπου c μια σταθερά. Το αριστερό μέλος συγκλίνει στο 0 καθώς $n \to \infty$, δηλαδή $y_n \to y$. ■

Παρατήρηση 4 *Αν η $B(x,y)$ είναι πιεστική, δηλαδή αν $c\|x\|^2 \leq B(x,x)$, για κάθε $x \in H$, όπου $c > 0$ σταθερά, τότε οι υποθέσεις του Θεωρήματος ικανοποιούνται με $N = 1$ και $Q_n = I$. Σε αυτή την περίπτωση αναγόμαστε στο αρχικό Θεώρημα Lax-Milgram που ήδη ξέρουμε, το οποίο ισχύει και σε μη διαχωρίσιμους χώρους Hilbert.*

Θεώρημα 9 *Αν το $B(x,y)$ είναι άθροισμα μιας πιεστικής και μιας συμπαγής διγραμμικής μορφής και $B(x,y) = 0$, για κάθε $x \in H \Rightarrow y = 0$, τότε οι υποθέσεις του Θεωρήματος 8 ικανοποιούνται για ένα επαρκώς μεγάλο N και $Q_n = P_n T$, όπου ο τελεστής T ορίζεται από την σχέση*

$$B(x,y) = (x, Ty), \ \text{ για κάθε } x, y \in H$$

και άρα ισχύουν τα ανάλογα συμπεράσματα.

Θα το δείξουμε χρησιμοποιώντας το παρακάτω Λήμμα.

Λήμμα 3 *Έστω $T = D + K$, όπου D είναι φραγμένος τελεστής στον H που ικανοποιεί την σχέση $c\|x\|^2 \leq |(Dx,x)|$ για κάθε $x \in H$, με $c > 0$ μια σταθερά, K είναι ένας συμπαγής τελεστής στον H και $N(T) = \{0\}$. Τότε υπάρχει $a > 0$ και ακέραιος $N > 0$ τέτοια ώστε $a\|x\| \leq \|P_n T P_n x\| = \|P_n T x\|$, για κάθε $x \in H_n$, $n \geq N$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι δεν αληθεύει το συμπέρασμα. Τότε μπορούμε να βρούμε ακολουθία $\{x_{n_i}\}$, όπου $x_{n_i} \in H_{n_i}$ με $\|x_{n_i}\| = 1$, ασθενώς συγκλίνουσα σε κάποιο $x \in H$, τέτοια ώστε

$$\|P_{n_i} T x_{n_i}\| = \|P_{n_i} D x_{n_i} + P_{n_i} K x_{n_i}\| \to 0 \ \text{ καθώς } \ i \to \infty. \tag{1.3.15}$$

Όμως, $P_{n_i} T x_{n_i} \xrightarrow{w} Tx$, καθώς

$$(P_{n_i} T x_{n_i}, y) = (x_{n_i}, T^* P_{n_i} y) \to (x, T^* y) = (Tx, y), \ \text{ για κάθε } y \in H,$$

διότι $x_{n_i} \stackrel{w}{\to} x$ και $T^*P_{n_i}y \to T^*y$. Όμως,

$$\|Tx\| \leq \lim\inf_{i\to\infty} \|P_{n_i}Tx_{n_i}\| = 0,$$

και άρα $Tx = 0$. Από την άλλη, επειδή ο K είναι συμπαγής έχουμε $Kx_{n_i} \to Kx$ Άρα $P_{n_i}Kx_{n_i} \to Kx$ και από την (1.3.15) $P_{n_i}Dx_{n_i} \to -Kx$. Όμως, επειδή $x_{n_i} \stackrel{w}{\to} x$ και $P_{n_i}Dx_{n_i} \to -Kx$ θα έχουμε τελικά ότι $x_{n_i} \to x$, εφόσον

$$\begin{aligned} c\|x - x_{n_i}\|^2 &\leq |(D(x - x_{n_i}), x - x_{n_i})| \\ &= |(x, D^*x) - (x_{n_i}, D^*x) - (Dx, x_{n_i}) + (P_{n_i}Dx_{n_i}, x_{n_i})| \\ &\to |-(Tx, x)| = 0. \end{aligned}$$

Συνεπώς, $\|x\| = 1$, δηλαδή $Tx = 0$ και $x \neq 0$ που είναι άτοπο διότι $N(T) = \{0\}$. ■

Απόδειξη. (Θεωρηματός 9) Υποθέτουμε ότι το B είναι ένα διγραμμικό που γράφεται ως άθροισμα μιας ελλειπτικής και μιας συμπαγούς διγραμμική μορφής, έστω $B(x, y) = D(x, y) + K(x, y)$. Τότε οι διγραμμικές μορφές D και K ορίζουν αντίστοιχους τελεστές,έστω πάλι D και K, όπου ο D ικανοποιεί την σχέση $c\|x\|^2 \leq |(Dx, x)|$, για κάθε $x \in H$, και ο K είναι συμπαγής. Άρα ο τελεστής $T = D + K$ ικανοποιεί την

$$B(x, y) = (x, Ty), \quad \text{για κάθε } x, y \in H.$$

Έχουμε υποθέσει ότι $B(x, y) = 0$, για κάθε $x \in H \Rightarrow y = 0$ το οποίο είναι ισοδύναμο με $N(T) = \{0\}$. Αυτό που πρέπει να αποδείξουμε είναι ότι η διγραμμική μορφή ικανοποιεί την σχέση (1.3.11), δηλαδή για $Q_n = P_nT$ ισχύει

$$a\|x\|^2 \leq |B(Q_nx, x)|.$$

Από το Λήμμα έχουμε ότι υπάρχει σταθερά $\alpha > 0$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} \alpha\|x\| &\leq \|P_nTP_nx\| = \|P_nTx\|, \quad \text{για κάθε } x \in H_n,\ n \geq N \Leftrightarrow \\ \alpha^2\|x\|^2 &\leq \|P_nTx\|^2 = (P_nTx, P_nTx) = |(P_n^*P_nTx, Tx)| \\ &= |(P_nTx, Tx)| = |B(P_nTx, x)| = |B(Q_nx, x)| \ \text{(από τον ορισμό του } Q\text{)} \end{aligned}$$

Επομένως, υπάρχει $a = \alpha^2 > 0$ τέτοιο ώστε $a\|x\|^2 \leq |B(Q_nx, x)|$, για κάθε $x \in H_n$.

■

Θεώρημα 10 *(Fredholm Alternative) Υποθέτουμε ότι $T = D + K$, όπου D είναι φραγμένος τελεστής στον H που ικανοποιεί την σχέση $c\|x\|^2 \leq |(Dx, x)|$, για κάθε $x \in H$ με $c > 0$ σταθερά, και K είναι συμπαγής τελεστής στον H.*

(i) Η εξίσωση $Ty = f$ έχει λύση αν και μόνο αν $f \in H \ominus N(T^*) = N(T^*)^{\perp}$. Η λύση μπορεί να κατασκευαστεί και είναι μοναδική modulo $N(T)$.

(ii) $dimN(T) = dimN(T^*) < \infty$.

Απόδειξη. *(i)* Από τον τελεστή T ορίζουμε ένα νεό τελεστή $S = TT^*$, οποίος είναι αυτοσυζυγής. Τώρα από τον S ορίζουμε μια διγραμμική μορφή Q ως εξής

$$Q(x, y) = (x, Sy), \;\; x, y \in H.$$

Η Q είναι συμμετρική, καθώς

$$Q(x, y) = (x, Sy) = (S^*x, y) = (Sx, y) = (y, Sx) = Q(y, x).$$

Παρατηρούμε επίσης ότι $N(S) = N(T^*)$. Επιπλεόν, η Q είναι πιεστική στον υπόχωρο $H \ominus N(T^*)$, δηλαδή

$$Q(x, x) = (x, Sx) = \|T^*x\| \geq \epsilon \cdot \|x\|^2, \text{ για κάποιο } \epsilon > 0 \text{ για κάθε } x \in H \ominus N(T^*). \quad (1.3.16)$$

Έστω ότι δεν ισχυει η πιεστικότητα. Τότε μπορούμε να βρούμε ακολουθία $\{x_n\}$ στον $H \ominus N(T^*)$, με $\|x_n\| = 1$, η οποία θα συγκλίνει ασθενώς σε κάποιο $x \in H \ominus N(T^*)$, τέτοια ώστε

$$\|T^*x_n\| = \|D^*x_n + K^*x_n\| \to 0, \text{ καθώς } n \to \infty.$$

Άρα από την ασθενή σύγκλιση της $\{x_n\}$ έχουμε ότι

$$\|T^*x\| \leq \liminf_n \|T^*x_n\| = 0 \Rightarrow T^*x = 0.$$

Από την συμπάγεια του K^* έχουμε ότι $K^*x_n \to K^*x$ και επομένως $D^*x_n \to -K^*x$. Τώρα από την συνθήκη που ικανοποιεί ο D έχουμε ότι

$$\begin{aligned} c\|x_n - x\|^2 &\leq |(D(x_n - x), x_n - x)| \\ &= |(x, D^*x) - (x_n, D^*x) - (Dx, x_n) + (x_n, D^*x_n)| \\ &\to |(x, D^*x) - (x, D^*x) - (x, D^*x) - (x, K^*x)| = |(x, T^*x)| = 0. \end{aligned}$$

Άρα $x_n \to x$. Συνεπώς $T^*x = 0$ και $\|x\| = 1$, δηλαδή θα πρέπει $x \in N(T^*)^{\perp} \cap N(T^*)$ και άρα $x = 0$, το οποίο είναι άτοπο καθώς $\|x\| = 1$. Από την (1.3.16) και το γεγονός ότι η $Q(x, y)$ είναι συμμετρική διγραμμική μορφή, για κάθε $f \in H \ominus N(T^*)$ με την διαδικασία Ritz μπορούμε να κατασκευάσουμε λύση $z \in H \ominus N(S)$ της εξίσωσης

$$Q(x', z) = (x', f) \tag{1.3.17}$$

για κάθε $x' \in H \ominus N(S)$. Επιπλέον, η (1.3.17) ισχύει για όλα τα $x \in H$, εφόσον $x = x' + x''$, όπου $x' \in H \ominus N(S), x'' \in N(S) = N(T^*)$ και

$$Q(x, z) = Q(x', z) + (Sx'', z) = (x', f) = (x, f).$$

Έτσι,

$$Q(x, z) = f(x), \;\; \text{για κάθε } x \in H \Longleftrightarrow (Sz, x) = (TT^*z, x) = (Ty, x) = f(x) \;\; \text{για κάθε } x \in H$$

όπου $y = T^*z$. Επομένως, αυτό το y είναι μια λύση του προβλήματος $Ty = f$ για
$f \in H \ominus N(T^*)$, η οποία είναι μοναδική mod $N(T)$ εφόσον ο T δεν είναι απαραίτητα ένα προς ένα.

(ii) Αρχικά θα δείξουμε ότι $\dim N(T) < \infty$ και $\dim N(T^*) < \infty$. Αν για παράδειγμα υποθέσουμε ότι

$$\dim N(T) = \infty,$$

τότε θα μπορούσαμε να βρούμε ορθοκανονική ακολουθία $\{x_n\}$ στον $N(T)$ δηλαδή $Dx_n + Kx_n = 0$, η οποία είναι ασθενώς συγκλίνουσα σε κάποιο x. Επειδή, ο K είναι συμπαγής έχουμε $Kx_n \to Kx$, άρα $Dx_n \to -Kx$. Όπως προηγουμένως, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα του D, $c\|x\|^2 \le |(Dx, x)|$, για κάθε $x \in H$, προκύπτει ότι $\|x_n - x_m\| \to 0$. Αυτό όμως έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι η $\{x_n\}$ είναι ορθοκανονική. Επομένως $\dim N(T) < \infty$.
Επιπλέον, αν $N(T) = 0$, τότε $N(T^*) = 0$. Πράγματι, από το Λήμμα 3 έχουμε ότι

$$a\|x\| \le \|P_n T P_n x\|, \;\; \text{για κάθε } \; x \in H_n, \; n \ge N.$$

Επομένως, η $P_n T P_n$ είναι μια ένα προς ένα απεικόνιση από τον H_n επί του H_n και έτσι $a\|x\| \le \|P_n T^* P_n x\|$, για κάθε $x \in H_n$, $n \ge N$, διότι είναι γνωστό ότι $\inf_{\|x\|=1} \|Tx\| = \|T^{-1}\|^{-1} =$

$\|T^{*-1}\|^{-1} = \inf_{\|x\|=1}\|T^*x\|$. Συνεπώς, για $n \to \infty$ θα έχουμε $a\|x\| \leq \|T^*x\|$, για κάθε $x \in H, a > 0$, δηλαδή ο T^* είναι ένα προς ένα και άρα $\dim N(T^*) = 0$.

Τελικά, $\dim N(T) = \dim N(T^*)$. Πράγματι, χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $m = \dim N(T) \leq \dim N(T^*) = m + l$. Τότε με ένα απλό τέχνασμα, ανάγουμε την γενική περίπτωση $m \geq 0$ στην ειδική περίπτωση $m = 0$ για την οποία αποδεικνύεται ο ισχυρισμός. Έστω $\{a_1, \ldots, a_m\}$ και $\{a_1^*, \ldots, a_{m+l}^*\}$ μια ορθοκανονική βάση του $N(T)$ και του $N(T^*)$ αντίστοιχα. Τότε θέτουμε $T_0 = T + K_0$, όπου K_0 είναι ο συμπαγής τελεστής που ορίζεται ως $K_0 a_i = a_i^*,\ i = 1, \ldots, m$ και $K_0 x = 0,\ \text{αν } x \in H \ominus N(T)$.

Παρατηρούμε ότι $N(T_0) = \{0\}$. Πράγματι, έστω $x \in H$ τέτοιο ώστε $T_0 x = 0$. Τότε υπάρχουν $x_1 \in N(T),\ x_2 \in N(T)^{\perp}$ ώστε $x = x_1 + x_2$. Επομένως,

$$T_0 x = T_0 x_1 + T_0 x_2 = Tx_1 + K_0 x_1 + Tx_2 + K_0 x_2 = Tx_2 + K_0 x_1 = 0 \Rightarrow Tx_2 = -K_0 x_1.$$

Όμως $Tx_2 \in R(T)$, $K_0 x_1 \in N(T^*)$ και $R(T) \perp N(T^*)$ και άρα $Tx_2 = K_0 x_1 = 0$. Αλλά $x_2 \in N(T)^{\perp}$ και άρα θα πρέπει $x_2 = 0$ και $x_1 \in N(T)$, δηλαδή $x_1 = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i$ για κάποια $\lambda_i \in \mathbb{R}$, οπότε θα έχουμε $K_0 x_1 = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i^* = 0$ και τα $\{a_i^*\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα άρα $\lambda_i = 0, i = 1, \ldots, m$ δηλαδή $x_1 = 0$. Άρα, $x = 0$. Επομένως, $N(T_0) = \{0\}$ και συνεπώς σύμφωνα με τα προηγούμενα $N(T_0) = N(T_0^*) = \{0\}$.

Επομένως, ο T_0 είναι ένα προς ένα και ο T_0^* είναι ένα προς ένα, δηλαδή ο T_0 θα είναι ένα προς ένα και επί. Παρατηρούμε τώρα ότι ο $T_0 : N(T) \to N(T^*)$ είναι ένας ισομορφισμός, δηλαδή θα πρέπει $dimN(T) = dimN(T^*)$. ■

1.4 Το Θεώρημα Stampacchia

Ο G. Stampacchia απέδειξε μια γενίκευση του Θεωρήματος Lax-Milgram το 1964 ([23]) με στόχο να μελετήσει συγκεκριμένα προβλήματα μερικών διαφορικών εξισώσεων.

Θεώρημα 11 (Stampacchia) *Έστω $B(u, v)$ μια διγραμμική μορφή πάνω στον χώρο Hilbert H φραγμένη και πιεστική. Έστω K ένα μη κενό, κλειστό και κυρτό υποσύνολο του H.*

Για κάθε $f \in H^*$, υπάρχει μοναδικό $u \in K$ τέτοιο ώστε

$$B(u, v-u) \geq f(v-u), \quad \textit{για κάθε } v \in K. \tag{1.4.1}$$

Απόδειξη. ([4]) Έστω $A : H \longrightarrow H^*$ ο γραμμικός τελεστής που αντιστοιχεί στη διγραμμική μορφή $B(\cdot,\cdot)$, δηλαδή $\langle Au, v\rangle = B(u,v)$ για κάθε $u, v \in H$. Ο A θα είναι φραγμένος και πιεστικός, δηλαδή

$$\|Av\| \leq M\|v\| \text{ και } \langle Av, v\rangle \geq a\|v\|^2, \text{ για κάθε } v \in H.$$

Επομένως

$$\|Av\| \leq M\|v\| \text{ και } \|Av\| \geq a\|v\|, \text{ για κάθε } v \in H.$$

Αν συμβολίσουμε με $\mathcal{J} : H^* \longrightarrow H$ την ισομετρική δυϊκή αναπαράσταση, τότε

$$B(u,v) = \langle Au, v\rangle = (\mathcal{J}Au, v), \text{ για κάθε } u, v \in H$$

και

$$\|\mathcal{J}Au\| = \|Au\|, \quad \text{για κάθε } u \in H.$$

Το πρόβλημα (1.4.1) ανάγεται στο να βρεθεί $u \in K$ τέτοιο ώστε

$$(JAu, v-u) \geq f(v-u) = (Jf, v-u), \quad \text{για κάθε } v \in K. \tag{1.4.2}$$

Έστω $\rho > 0$ μια σταθερά που θα οριστεί αργότερα. Η ανισότητα (1.4.2) ισοδυναμεί με

$$(\rho Jf - \rho JAu + u - u, v-u) \leq 0, \text{ για κάθε } v \in K,$$

δηλαδή

$$u = P_K(\rho Jf - \rho JAu + u),$$

όπου P_K ο τελεστής της ορθογώνιας προβολής. Ορίζουμε τον τελεστή $S : K \to K$ με $Sv = P_K(\rho Jf - \rho JAv + v)$. Θα δείξουμε ότι, αν το $\rho > 0$ επιλεγεί κατάλληλα, τότε η S είναι μια αυστηρή συστολή, δηλαδή υπάρχει $c < 1$ τέτοιο ώστε

$$\|Sv_1 - Sv_2\| \leq c\|v_1 - v_2\|, \;\; v_1, v_2 \in K.$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned}\|Sv_1 - Sv_2\| &= \|P_K(\rho Jf - \rho JAv_1 + v_1) - P_K(\rho Jf - \rho JAv_2 + v_2)\| \ \ (\text{η προβολή είναι συστολή})\\ &\leq \|\rho Jf - \rho JAv_1 + v_1 - \rho Jf + \rho JAv_2 - v_2\|\\ &= \|(v_1 - v_2) - \rho(JAv_1 - JAv_2)\| \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|Sv_1 - Sv_2\|^2 &\leq \|(v_1 - v_2)\|^2 - 2\rho(v_1 - v_2, JAv_1 - JAv_2) + \rho^2\|JAv_1 - JAv_2\|^2\\ &\leq \|(v_1 - v_2)\|^2 - 2\rho a\|(v_1 - v_2)\|^2 + \rho^2 M^2\|(v_1 - v_2)\|^2\end{aligned}$$

λόγω πιεστικότητας και συνέχειας. Άρα

$$\|Sv_1 - Sv_2\|^2 \leq (1 - 2\rho a + M^2\rho^2)\|(v_1 - v_2)\|^2.$$

Επομένως, για να είναι συστολή θα πρέπει

$$1 - 2\rho a + \rho^2 M^2 < 1 \Rightarrow M^2\rho^2 - 2\rho a < 0 \Rightarrow \rho(M^2\rho - 2a) < 0.$$

Άρα για $\rho \in (0, \frac{2a}{M^2})$ η S είναι συστολή. Συνεπώς, από το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Banach ([4]) το S έχει μοναδικό σταθερό σημείο $u \in V$, άρα το πρόβλημα έχει λύση. ■

Παρατήρηση 5 *Απο το Θεώρημα Stampacchia προκύπτει πολύ εύκολα το Θεώρημα Lax-Milgram.*
Πράγματι, έχουμε ότι H *μη κενό, κλειστό και κυρτό. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Stampacchia έχουμε, για κάθε* $f \in H^*$: *υπάρχει μοναδικό* $u \in H : B(u, v - u) \geq f(v - u)$, *για κάθε* $v \in H$. *Όμως,* $u - v \in H$ *και αν για* v *θεσουμε* $u - v$, *παίρνουμε*

$$B(u, -v) \geq f(-v) \Rightarrow -B(u, v) \geq -f(v) \Rightarrow B(u, v) \leq f(v), \ \ \text{για κάθε } v \in H.$$

Όπως επίσης και $u + v \in H$, *άρα αν για* v *θέσουμε* $u + v$ *θα έχουμε*

$$B(u, v) \geq f(v), \ \ \text{για κάθε } v \in H.$$

Άρα τελικά $B(u, v) = f(v)$, *για κάθε* $v \in H$.

Αν στις υποθέσεις μας συμπεριλάβουμε την συμμετρικότητα της διγραμμικής μορφής τότε μπορούμε να έχουμε το Θεώρημα Stampacchia με ένα εναλλακτικό τρόπο:

Πρόταση 12 *Έστω $K \neq \emptyset$ κλειστό, κυρτό υποσύνολο του χώρου Hilbert H,*

$$B(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{R}$$

μια διγραμμική, συμμετρική, φραγμένη και πιεστική μορφή και $f \in H^*$.
Έστω $E(v) = \frac{1}{2}B(v,v) - f(v)$, για κάθε $v \in H$. Τότε υπάρχει μοναδικό $u \in K$ τέτοιο ώστε

$$E(u) = \inf_{v \in K} E(v),$$

το οποίο είναι λύση της

$$u \in K, B(u, v-u) \geq f(v-u), \text{ για κάθε } v \in K$$

ή αν K είναι υπόχωρος

$$u \in K, B(u,v) = f(v), \quad \text{για κάθε } v \in K.$$

Απόδειξη. ([1]) Από τις υποθέσεις μπορούμε να ορίσουμε ένα νέο εσωτερικό γινόμενο στον H με

$$(u,v)_B = B(u,v), \quad \text{για κάθε } u, v \in H$$

Προφανώς, $\|v\|_B = \sqrt{B(v,v)}$ $v \in H$. Η νέα νόρμα είναι ισοδύναμη με την αρχική νόρμα του H

$$c_1\|v\| \leq \|v\|_B \leq c_2\|v\|, \text{ για κάθε } v \in H,$$

όπου $0 < c_1 \leq c_2 < +\infty$ κατάλληλες σταθερές που προκύπτουν λόγω του ότι η B είναι πιεστική και φραγμένη. Επειδή τώρα οι νόρμες είναι ισοδύναμες το f θα είναι συνεχές ως προς την $\|\cdot\|$ αν και μόνο αν είναι συνεχές ως προς την $\|\cdot\|_B$. Παρατηρούμε ότι

$$E(v) = \frac{1}{2}\|v\|_B^2 - f(v)$$

και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 39 του Παραρτήματος. ■

Παρατήρηση 6 *Χρησιμοποιώντας αυτή την Πρόταση μπορούμε να αποδείξουμε το Θεώρημα Lax-Milgram με ένα ακόμα τρόπο:*

Απόδειξη ([1]):

Παρατηρούμε ότι για $\theta > 0$, το πρόβλημα (1.1.1) είναι ισοδύναμο με το

$$(u, v) = (u, v) - \theta[B(u, v) - f(v)], \text{ για κάθε } v \in H,$$

δηλαδή το πρόβλημα σταθερού σημείου $u = P_\theta(u)$, όπου $P_\theta : H \longrightarrow H$ και ορίζεται από τη σχέση

$$(P_\theta(u), v) = (u, v) - \theta[B(u, v) - f(v)], v \in H.$$

Για κάθε $u \in H$, από την Πρόταση 12, το πρόβλημα

$$(w, v) = (u, v) - \theta[B(u, v) - f(v)], \text{ για κάθε } v \in H$$

έχει μοναδική λύση $w = P_\theta(u)$, δηλαδή το P_θ είναι καλά ορισμένο(μονότιμη απεικόνιση).

(Χρησιμοποιήσαμε την Πρόταση 12 ως εξής: Έστω $u \in H$ τότε

$$g_u(v) = (u, v) - \theta[B(u, v) - f(v)]$$

με $g_u \in H^*$. Τότε το $E(v) = \frac{1}{2}(v, v) - g_u(v)$ έχει μοναδικό w που το ελαχιστοποιεί και ικανοποιεί την σχέση

$$(w, v) = g_u(v), \text{ για κάθε } v \in H.$$

Αυτό το w ονομάζουμε P_θ)

Θα δείξουμε ότι για $\theta \in (0, \frac{2a}{M^2})$ το P_θ είναι συστολή. Έστω $u_1, u_2 \in H$

$$\begin{aligned}(P_\theta(u_1) - P_\theta(u_2), v) &= (P_\theta(u_1), v) - (P_\theta(u_2), v)\\ &= (u_1 - u_2, v) - \theta B(u_1 - u_2, v)\\ &= ((I - \theta JA)(u_1 - u_2), v), \text{ για κάθε } v \in H.\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}
&P_\theta(u_1) - P_\theta(u_2) = (I - \theta JA)(u_1 - u_2) \Rightarrow \\
&\|P_\theta(u_1) - P_\theta\|^2 = \|u_1 - u_2\|^2 - 2\theta(JA(u_1 - u_2), u_1 - u_2) + \theta^2\|JA(u_1 - u_2)\|^2 \\
&= \|u_1 - u_2\|^2 - 2\theta B(u_1 - u_2, u_1 - u_2) + \theta^2\|A(u_1 - u_2)\|^2 \\
&\leq (1 - 2\theta a + \theta^2 M^2)\|u_1 - u_2\|^2.
\end{aligned}$$

Επομένως, για να είναι συστολή θα πρέπει

$$1 - 2\theta a + \theta^2 M^2 < 1 \Rightarrow M^2\theta^2 - 2\theta a < 0 \Rightarrow \theta(M^2\theta - 2a) < 0$$

Άρα για $\theta \in (0, \frac{2a}{M^2})$ *η* P_θ *είναι συστολή. Συνεπώς, από το Θεώρημα σταθερού σημείου του Banach το* P_θ *έχει μοναδικό σταθερό σημείο* $u \in V$ *και άρα το πρόβλημα έχει λύση.*

1.4.1 Ελλειπτικό Πρόβλημα με Μη Ομογενή συνοριακή συνθήκη Dirichlet

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ένα φραγμένο ανοιχτό σύνολο με σύνορο $\Gamma = \partial\Omega$ Lipschitz συνεχές. Σκοπός μας είναι να βρούμε συνάρτηση $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ που να ικανοποιεί:

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{στο } \Omega \\ \quad u = g, & \text{στο } \Gamma \end{cases} \tag{1.4.3}$$

Αν υποθέσουμε ότι $u \in H^1(\Omega)$ και ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη $u = g$ στο Γ με την έννοια του τελεστή ίχνους (βλ. σελ.22), δηλαδή $\gamma(u) = g$ στον $L^2(\Gamma)$. Επομένως, υποθέτουμε ότι υπάρχει $\tilde{g} \in H^1(\Omega)$ τέτοια ώστε $\gamma(\tilde{g}) = g$ στον $L^2(\Gamma)$ ή πιο απλά γράφουμε $\tilde{g} = g$ στο Γ, και εισάγουμε το σύνολο

$$K = \{v \in H^1(\Omega) : v - \tilde{g} \in H_0^1(\Omega)\}.$$

Αποδεικνύεται ότι το K είναι ανεξάρτητο από την επιλογή της $\tilde{g}$ και εξαρτάται μόνο από την g. Παρατηρούμε ότι το K είναι μη κενό εφόσον περιέχει σίγουρα την $\tilde{g}$, κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $H^1(\Omega)$ λόγω της συνέχειας και της γραμμικότητας του τελεστή ίχνους.

Όπως έχουμε ήδη δείξει η ασθενής διατύπωση του (1.4.3) είναι

$$u \in H^1(\Omega),\ u = g \text{ στο } \Gamma,\ \int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f v dx, \quad \text{για κάθε } v \in H_0^1(\Omega) \tag{1.4.4}$$

ή ισοδύναμα

$$u \in K,\ \int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f v dx, \quad \text{για κάθε } v \in H_0^1(\Omega) \tag{1.4.5}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι η $u \in K$ είναι ασθενής λύση του (1.4.3) αν και μόνο αν ισχύει

$$\int_\Omega \nabla u(\nabla v - \nabla u) dx \geq \int_\Omega f(v-u) dx, \quad \text{για κάθε } v \in K. \tag{1.4.6}$$

Πράγματι, αν η u είναι ασθενής λύση της (1.4.3), είναι φανερό ότι

$$\int_\Omega \nabla u(\nabla v - \nabla u) dx = \int_\Omega f(v-u) dx, \quad \text{για κάθε } v \in K.$$

Αντίστροφα, αν $u \in K$ ικανοποιεί (1.4.6), επιλέγουμε $v = u \pm w$ στην (1.4.6), με $w \in H_0^1(\Omega)$ και παίρνουμε την (1.4.5).

Επομένως, έστω $H = H^1(\Omega)$ και $K \subset H$ μη κενό, κλειστό, κυρτό υποσύνολο και

$$B : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$$

η διγραμμική μορφή που ορίζεται από

$$B(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx, \ \ u, v \in H$$

και $h : H \longrightarrow \mathbb{R}$ το γραμμικό συναρτησιακό που ορίζεται ως εξής

$$h(v) = \int_\Omega f v dx, \ \ v \in H.$$

Έχουμε δείξει ότι η B είναι φραγμένη και πιεστική και οτι το h είναι γραμμικό και φραγμένο. Τότε η συνθήκη (1.4.6) γράφεται στη μορφή

$$B(u, v-u) \geq h(v-u), \quad \text{για κάθε } v \in K.$$

Από την μορφή αυτή είναι φανερό τώρα ότι το Θεώρημα Stampacchia μας δίνει μοναδική λύση $u \in K$ για το πρόβλημα (1.4.3).

1.4.2 Προβλημα Εμποδίου(Obstacle problem)

Έστω μια ελαστική μεμβράνη η οποία στηρίζεται από ένα άκαμπτο στήριγμα και πιέζεται από κάτω από ένα εμπόδιο. Το $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ είναι το χωρίο αναφοράς της μεμβράνης στην απαραμόρφωτη κατάσταση, δηλαδή το χωρίο στο οποίο η μεμβράνη βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας πριν από την δράση οποιασδήποτε δύναμης.

Αν $u : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι η παραμόρφωση της μεμβράνης, τότε θα λέμε ότι η u είναι θέση ισορροπίας για την μεμβράνη αν ελαχιστοποιεί την ελαστική ενέργεια

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx. \tag{1.4.7}$$

Αν ϕ είναι μια συνάρτηση ορισμένη στο Ω και περιγράφει το εμπόδιο, τότε δεν θα είναι όλες οι παραμορφώσεις αποδεχτές παρά μόνο αυτές για τις οποίες ισχύει

$$v \geq \phi \text{ στο } \Omega.$$

Επομένως, αν θέσουμε

$$K = \{v : \Omega \to \mathbb{R} : v = 0 \text{ στο } \Gamma, v \geq \phi \text{ στο } \Omega\}$$

όπου $\Gamma = \partial\Omega$, τότε η θέση ισορροπίας της ελαστικής μεμβράνης υπο ένταση (under tension) λόγω του εμποδίου ϕ δίνεται από την $u \in K$ που ελαχιστοποιεί το ολοκλήρωμα (1.4.7) πάνω στο K, δηλαδή η u είναι τέτοια ώστε

$$\begin{cases} u \in K, \\ J(u) \leq J(v), \quad \text{για κάθε } v \in K \end{cases} \tag{1.4.8}$$

Θα διατυπώσουμε τώρα το πρόβλημα μας χρησιμοποιώντας τους χώρους Sobolev.

Έστω Ω ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με σύνορο Γ. Για μια συνάρτηση $\phi \in H^1(\Omega)$ ορίζουμε

$$\phi^+ = \max\{0, \phi\}, \text{ και } \phi^- = (-\phi)^+.$$

Ορισμός 4 *Έστω $\phi \in H^1(\Omega)$. Θα λέμε ότι*

$$\phi \leq 0 \textit{ στο } \Gamma$$

αν και μόνο αν $\phi^+ \in H_0^1(\Omega)$.

Επομένως, αν $\phi \in H^1(\Omega)$ με $\phi \leq 0$ στο Γ, τότε μπορούμε να θέσουμε

$$K = \{v \in H_0^1(\Omega) : v(x) \geq \phi(x) \text{ σ.π. στο } \Omega\}. \tag{1.4.9}$$

Το σύνολο K είναι στην ουσία το ίδιο σύνολο με αυτό που ορίσαμε αρχικά απλά είναι εκφρασμένο σε όρους χώρων Sobolev.

Θεώρημα 13 (Προβλημα Εμποδίου) *Έστω Ω ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ φραγμένο ως προς τη μια κατεύθυνση με σύνορο $\Gamma = \partial\Omega$ C^1. Έστω $\phi \in H^1(\Omega)$ τέτοια ώστε $\phi \leq 0$ στο Γ. Τότε, υπάρχει μια μοναδική λύση u για το*

$$\begin{cases} u \in K, \\ \int_\Omega \nabla u \nabla(v-u)dx \geq 0, \quad \text{για κάθε } v \in K \end{cases} \tag{1.4.10}$$

Επιπλεόν, u είναι ο μοναδικός ελαχιστοποιήτης για το ολοκλήρωμα (1.4.7) πάνω στο K.

Απόδειξη. ([6]) Είναι αρκετό να δείξουμε ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος Stampacchia με $H = H_0^1(\Omega),\ f = 0$,

$$B(u, v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx$$

και K όπως ορίστηκε στην (1.4.9). Έχουμε ήδη δείξει σε προηγούμενα παραδείγματα ότι η B είναι φραγμένη και πιεστική. Επομένως, χρειάζεται να ελέγξουμε αν το K είναι μη κενό, κυρτό και κλειστό. Το ότι είναι κυρτό είναι πολύ εύκολο να διαπιστωθεί, επίσης το ότι είναι μη κενό έπεται από την υπόθεση για την ϕ άρα $\phi^+ \in K$. Επομένως, μένει να δείξουμε ότι το K είναι κλειστό. Έστω μια ακολουθία $\{v_n\}$ στο K τέτοια ώστε $v_n \to v$ στον $H_0^1(\Omega)$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $v \in K$.

Επειδή η ακολουθία συγκλίνει στον $H_0^1(\Omega)$ θα συγκίνει και στον $L^2(\Omega)$, διότι $\|u\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1}$. Τότε υπάρχει υπακολουθία $\{v_{n_k}\}_k$ τέτοια ώστε

$$v_{n_k}(x) \to v(x) \text{ σ.π. στο } \Omega,$$

δηλαδή έχουμε

$$v_{n_k}(x) \to v(x), \quad \text{για κάθε } x \in \Omega \backslash U,$$

όπου U είναι ένα σύνολο μέτρου Lebesgue μηδέν. Εφόσον όμως η ακολουθία είναι στο K έχουμε επίσης

$$v_{n_k}(x) \geq \phi(x), \quad \text{για κάθε } x \in \Omega \backslash U_k$$

όπου U_k είναι ένα σύνολο μέτρου Lebesgue μηδέν. Συνδυάζοντας αυτές τις δύο σχέσεις έχουμε προφανώς

$$v(x) \geq \phi(x), \quad \text{για κάθε } x \in \Omega \backslash \cup_k \left(U_k \cup U\right),$$

δηλαδή η σχέση ισχύει σχεδόν παντού στο Ω. Επομένως, η v ανήκει στο K και το K θα είναι κλειστό. Συνεπώς, εφαρμόζοντας το Θεώρημα Stampacchia έχουμε μοναδική λύση στο πρόβλημα μας. ■

Κεφάλαιο 2

Γενικεύσεις του Θεωρήματος Lax-Milgram

2.1 Το Θεώρημα Necas

Μετα την δημοσίευση του Θεωρήματος Lax-Milgram ακολούθησαν διάφορες γενικεύσεις όπως το Θεώρημα Babuška ([3]) το 1971 και το Θεώρημα Necas.

Θεώρημα 14 (Babuška) *Έστω U και V πραγματικοί χώροι Hilbert, $B : U \times V \to \mathbb{R}$ μια διγραμμική μορφή και $f \in V^*$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν σταθερές $M > 0$ και $a > 0$ τέτοιες ώστε*

$$|B(u,v)| \leq M\|u\|_U\|v\|_V, \quad \text{για κάθε } u \in U, v \in V, \tag{2.1.1}$$

$$\alpha\|u\|_U \leq \sup_{0 \neq v \in V} \frac{|B(u,v)|}{\|v\|_V}, \quad \text{για κάθε } u \in U. \tag{2.1.2}$$

Επιπλέον, αν $v \in V$, έχουμε ότι

$$B(u,v) = 0 \ \text{ για κάθε } u \in U \Rightarrow v = 0. \tag{2.1.3}$$

Τότε υπάρχει μοναδική λύση u του προβλήματος

$$u \in U, \ \ B(u,v) = f(v), \ \ \text{για κάθε } \ v \in V. \tag{2.1.4}$$

Επιπλέον,

$$\|u\|_U \leq \frac{\|f\|_{V^*}}{a}.$$

Απόδειξη. ([1]) Η απόδειξη είναι παρόμοια με την πρώτη απόδειξη του Θεωρήματος Lax-Milgram.
Έστω $A : U \longrightarrow V^*$ ο γραμμικός τελεστής που αντιστοιχεί στη διγραμμική απεικόνιση $B(\cdot,\cdot)$, δηλαδή $\langle Au, v\rangle = B(u,v)$, για κάθε $u \in U, v \in V$. Ο A θα είναι φραγμένος, εφόσον

$$\|Av\| \leq M\|v\| \text{ για κάθε } v \in H.$$

Αν συμβολίσουμε με $\mathcal{J} : V^* \longrightarrow V$ την ισομετρική δυϊκή αναπαράσταση, τότε

$$B(u,v) = \langle Au, v\rangle = (\mathcal{J}Au, v), \text{ για κάθε } u \in U, v \in V,$$

και

$$\|\mathcal{J}Au\| = \|Au\| \quad \text{για κάθε } u \in U.$$

Τότε το πρόβλημα (2.1.4) μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$u \in U, \quad JAu = Jf, \text{ για κάθε } v \in V. \tag{2.1.5}$$

Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι η απεικόνιση $L = \mathcal{J}A : U \longrightarrow V$ είναι 1-1 και επί, διότι τότε η (2.1.5) θα έχει λύση και θα είναι μοναδική.
Για να δείξουμε ότι είναι επί, δηλαδή $\mathcal{R}(L) = V$, αρκεί να δείξουμε ότι το $\mathcal{R}(L)$ είναι κλειστό και ότι $\mathcal{R}(L)^{\perp} = \{0\}$.

Το $\mathcal{R}(L)$ είναι κλειστό :
Έστω μια ακολουθία $\{u_n\} \subset U$ τέτοια ώστε $\{Lu_n\}$ να συγκλίνει στο $w \in V$. Χρησιμοποιώντας την (2.1.2), έχουμε

$$\begin{aligned}\|u_m - u_n\|_U &\leq \frac{1}{a} \sup_{0 \neq v \in V} \frac{|(L(u_m - u_n), v)_V|}{\|v\|_V} \\ &= \frac{1}{a}\|Lu_m - Lu_n\|_V.\end{aligned}$$

Η $\{Lu_n\}$ είναι Cauchy ακολουθία ως συγκλίνουσα. Άρα από την παραπάνω ανισότητα η $\{u_n\}$ είναι ακολουθία Cauchy στον U και επομένως θα έχει όριο $u \in U$. Επιπλέον, από την συνέχεια του L έχουμε ότι $Lu_n \to Lu = w$ στον V. Άρα $w \in R(L)$, δηλαδή το $\mathcal{R}(L)$ είναι κλειστό.

Το μοναδικό κάθετο στοιχείο στο $\mathcal{R}(L)$ είναι το μηδεν: Αν $v \in R(L)^\perp$, τότε

$$(Lu, v)_V = B(u, v) = 0, \quad \text{για κάθε } u \in U.$$

Από την συνθήκη (2.1.3), συμπεραίνουμε ότι $v = 0$. Άρα $R(L)^\perp = \{0\}$.

Ο L είναι 1-1 :

Έστω $Lu = 0$ για κάποιο $u \in U$. Από την υπόθεση (2.1.2) έχουμε

$$0 = \|Lu\|_V = \sup\{\frac{|(Lu, v)_V|}{\|v\|_V} : \|v\|_V \neq 0\} \geq a\|u\|_U \geq 0$$

Άρα $\|u\|_U = 0 \Leftrightarrow u = 0$, δηλαδή $\mathcal{N}(L) = \{0\}$ ή ισοδύναμα ο L είναι 1-1.

Επομένως, η εξίσωση (2.1.5) ή ισοδύναμα το πρόβλημα (2.1.4) έχει μοναδική λύση.

Την εκτίμηση της νόρμας την παίρνουμε από την (2.1.2) ως εξής

$$\|u\|_U \leq \frac{1}{a} \sup_{0 \neq v \in V} \frac{|B(u, v)|}{\|v\|_V} = \frac{1}{a} \sup_{0 \neq v \in V} \frac{|f(v)|}{\|v\|_V} = \frac{\|f\|_{V^*}}{a}.$$

■

Όταν ισχύουν οι υποθεσεις (2.1.2) και (2.1.3) λέμε ότι η διγραμμική μορφή είναι ασθενώς πιεστική. Είναι εύκολο να δούμε ότι αν μια διγραμμική μορφή είναι (ισχυρά) πιεστική τότε είναι και ασθενώς πιεστική. Πράγματι, έστω $B(u, u) \geq \alpha\|u\|^2$. Τότε για $u \neq 0$ έχουμε $\frac{B(u,u)}{\|u\|} \geq \alpha\|u\| \Rightarrow \alpha\|u\| \leq \sup_{v \neq 0} \frac{B(u,v)}{\|v\|}$ και για $v \in U$ αν $B(u, v) = 0$, για κάθε $u \in U$, τότε για $u = v$ έχουμε $0 = B(v, v) \geq \alpha\|v\|^2 \Rightarrow v = 0$.

Στο παραπάνω Θεώρημα υποθέσαμε ότι οι U και V δεν είναι οι ίδιοι χώροι Hilbert και ότι η διγραμμική μορφή δεν είναι πιεστική, δηλαδή δεν ισχύει η $B(v, v) \geq a\|v\|^2$. Μια τέτοια υπόθεση είναι αρκετά χαλαρή και συμπεριλαμβάνει περιπτώσεις προβλημάτων τις οποίες δεν μπορούσαμε να διαχειριστούμε με το αρχικό Θεώρημα Lax-Milgram. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η περίπτωση του γενικού ελλειπτικού προβλήματος στο οποίο αποδεικνύεται ότι η αντίστοιχη διγραμμική μορφή ικανοποιεί τις συνθήκες του Θεωρήματος Babuška και άρα έχει μοναδική λύση (βλ. [3]).

Το επόμενο Θεώρημα είναι μια γενίκευση του Babuška σε ένα χώρο Banach και ένα ανακλαστικό χώρο Banach.

Θεώρημα 15 (Hayden) *Έστω U ένας χώρος Banach, V ένας ανακλαστικός χώρος Banach, B μια φραγμένη διγραμμική μορφή ορισμένη στον $U \times V$. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Για κάθε $f \in V^*$, υπάρχει μοναδικό $u \in U$ τέτοιο ώστε

$$B(u, v) = f(v), \quad \text{για κάθε } v \in V. \tag{2.1.6}$$

(ii) (α) Υπάρχει $\alpha > 0$ τέτοιο ώστε

$$\alpha \|u\|_U \leq \sup_{v \in V} \frac{|B(u, v)|}{\|v\|_V}, \quad \text{για κάθε } u \in U. \tag{2.1.7}$$

(β) Αν $v \in V$ έχουμε ότι

$$B(u, v) = 0 \;\; \text{για κάθε } u \in U \Rightarrow v = 0. \tag{2.1.8}$$

Επιπλέον, για κάθε $f \in V^*$,

$$\|u\|_U \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{V^*}.$$

Απόδειξη. ([9],[10],[13]) $(i) \Rightarrow (ii)$: Ορίζουμε ένα τελεστή $A : U \to V^*$ ο οποίος δρα όπως τον ορίσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, δηλαδή

$$\langle Au, v \rangle = B(u, v), \quad \text{για κάθε } u \in U, v \in V.$$

Ο τελεστής A είναι γραμμικός και φραγμένος διότι

$$\|A\| = \sup_{u \in U} \frac{\|Au\|_{V^*}}{\|u\|_U} = \sup_{u \in U} \sup_{v \in V} \frac{|B(u, v)|}{\|u\|_U \|v\|_V} = \|B\|.$$

Έχοντας υποθέσει ότι ισχύει το (i), δηλαδή ότι, για κάθε $f \in V^*$, υπάρχει μοναδικό u που ικανοποιεί το ισοδύναμο πρόβλημα $Au = f$, ο τελεστής A είναι ένα προς ένα και επί. Λόγω της συνέχειας του A, από το Θεώρημα Ανοιχτής Απεικόνισης ([4]) ο A θα έχει συνεχή αντίστροφο. Άρα υπάρχει $\alpha > 0$ τέτοιο ώστε

$$\alpha \|u\|_U \leq \|Au\|_{V^*}.$$

Αυτό είναι ισοδύναμο με την σχέση (2.1.7). Η συνθήκη (2.1.8) ισχύει διότι ο A είναι επί. Πράγματι έστω $v \in V$ και $B(u,v) = 0$, για κάθε $u \in U$, ή ισοδύναμα $\langle Au, v\rangle = 0$, για κάθε $u \in U$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $v = 0$. Η συνθήκη αυτή είναι ισοδύναμη με την εξής σχέση:
Για κάθε $0 \neq v \in V$, υπάρχει $u \in U$ τέτοιο ώστε $\langle Au, v\rangle \neq 0$.
Έστω $v \neq 0$, τότε επειδή V χώρος Banach, από Θεώρημα Hahn-Banach θα υπάρχει $v^* \in V^* = R(A)$ τέτοιο ώστε $v^*(v) \neq 0$. Συνεπώς, θα υπάρχει $u \in U$ τέτοιο ώστε $Au = v^*$, δηλαδή $\langle Au, v\rangle \neq 0$.
$(ii) \Rightarrow (i)$: Η συνθήκη (2.1.7) δίνει

$$\alpha\|u\|_U \leq \|Au\|_{V^*}, \quad \text{για κάθε } u \in U.$$

Επομένως, από την ανισότητα αυτή έχουμε ότι ο A είναι ένα προς ένα και ότι $R(A)$ είναι κλειστό υποσύνολο του V^*. Πράγματι, αν $Au = 0$ τότε $u = 0$, δηλαδή ο A είναι ένα προς ένα, άρα αν υπάρχει λύση θα είναι μοναδική. Έστω $w_n = Au_n$ μια ακολουθία στο $R(A)$ τέτοια ώστε $w_n \to w \in V^*$. Θα δείξουμε ότι $w \in R(A)$. Έχουμε ότι

$$\alpha\|u_m - u_n\|_U \leq \|A(u_m - u_n)\| = \|w_m - w_n\|_{V^*} \to 0$$

καθώς $n, m \to \infty$. Επομένως, $\{u_n\}_n$ είναι Cauchy ακολουθία στον U που είναι πλήρης. Άρα υπάρχει $u \in U$ τέτοιο ώστε $u_n \to u$. Από την συνέχεια του A έχουμε ότι

$$Au = \lim_{n\to\infty} Au_n = w \in R(A).$$

Επομένως, το $R(A)$ είναι κλειστό. Τέλος, θα δείξουμε ότι είναι επί. Έστω ότι δεν είναι. Τότε από το (2.1.8) και λόγω ανακλαστικότητας του V έχουμε

$$\begin{aligned}
R(A)^\perp &= \{y^{**} \in V^{**} :< y^{**}, v^* >= 0, \;\; \text{για κάθε } v^* \in R(A)\} \;\; (\text{λόγω ανακλαστικότητας του } V)\\
&= \{y \in V :< y, v^* >= 0, \;\; \text{για κάθε } v^* \in R(A)\}\\
&= \{y \in V :< Au, y >= 0, \;\; \text{για κάθε } u \in U\}\\
&= \{y \in V : B(u,y) = 0, \;\; \text{για κάθε } u \in U\}\\
&= \{0\}.
\end{aligned}$$

Άρα $R(A) = V^*$, δηλαδή, για κάθε $f \in V^*$, υπάρχει $u \in U$ τέτοιο ώστε

$$Au = f \iff B(u, v) = f(v), \text{ για κάθε } v \in V.$$

Συνεπώς, για κάθε $f \in V^*$ υπάρχει μοναδικό $u \in U$ ώστε $B(u, v) = f(v)$, για κάθε $v \in V$. Τέλος, λόγω της (2.1.7) όπως ακριβώς και στο Θεώρημα Babuška παίρνουμε την εκτίμηση της νόρμας. ■

Παρατηρήσεις 3 *(i) Η συνθήκη (2.1.2) ή (2.1.7) μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα*

$$0 < \alpha \leq \inf_{u \in U} \sup_{v \in V} \frac{B(u, v)}{\|u\|_U \|v\|_V}.$$

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως inf-sup συνθήκη.
(ii) Αν U ανακλαστικός χώρος Banach και V χώρος Banach, τότε για κάθε $f \in U^*$ θα υπάρχει μοναδικό $v \in V$ τέτοιο ώστε $B(u, v) = f(u)$, για κάθε $u \in U$ αν και μόνο αν ισχύουν οι επόμενες δύο συνθήκες

(α΄) Υπάρχει $\alpha > 0$ τέτοιο ώστε $\alpha \|v\|_V \leq \sup_{u \in U} \frac{|B(u,v)|}{\|v\|_V}$, $v \in V$.

(β΄) Αν $u \in U$ έχουμε ότι $B(u, v) = 0$, για κάθε $v \in V \Rightarrow u = 0$.

Δηλαδή, το ακριβώς ανάλογο του Θεωρήματος Hayden όταν αντιστρέψουμε τους ρόλους των χώρων.
(iii) Παρατηρούμε ότι η συνθήκη (2.1.7) είναι ισοδύναμη με την $\|Au\| \geq \alpha \|u\|$ που είναι ισοδύναμη με το ότι ο τελεστής A είναι ένα προς ένα και έχει κλειστή εικόνα.
(iv) Η δεύτερη συνθήκη (2.1.8) μας δίνει ότι το $R(A)$ είναι πυκνό. Πράγματι, για $v \in V$ έχουμε τις παρακάτω ισοδυναμίες

$$\begin{aligned}
&\{\langle Au, v\rangle = 0, \text{ για κάθε } u \in U \Rightarrow v = 0\} \iff \\
&\{\ v \in R(A)_\perp \Rightarrow v = 0\} \iff \\
&\{\ R(A)_\perp = \{0\}\ \}(\text{ λόγω ανακλαστικότητας του } V\ ) \iff \\
&\{\ R(A)^\perp = R(A)_\perp = \{0\}\ \}(\text{από Θεώρημα Hahn-Banach για τον } \overline{R(A)}\ ) \iff \\
&\{\overline{R(A)} = V^*\}.
\end{aligned}$$

Θεώρημα 16 (Necas) *Έστω U, V ανακλαστικοί χώροι Banach και B χώρος Banach ώστε $U \hookrightarrow B$ και $B : U \times V \to \mathbb{R}$ μια διγραμμική μορφή φραγμένη, $V-$πιεστική και $B-$πιεστική, δηλαδή*

$$\sup_{\|u\|_U \leq 1} |B(u,v)| \geq c\|v\|_V, \quad \text{για κάθε } v \in V,$$

$$\sup_{\|v\|_V \leq 1} |B(u,v)| \geq c\|u\|_B, \quad \text{για κάθε } u \in U.$$

Τότε για κάθε $f \in U^*$ υπάρχει μοναδικό $v \in V$ τέτοιο ώστε $B(u,v) = f(u), \quad$ για κάθε $u \in U$. Επίσης,

$$\|v\|_V \leq 1/c\|f\|_{U^*}$$

Απόδειξη. Ορίζουμε $A : V \to U^*$ και δείχνουμε ότι είναι ένα προς ένα και το $R(A)$ είναι κλειστό ακριβώς όπως πριν, εφόσον ισχύει η $V-$πιεστικότητα. Για να δείξουμε ότι $R(A)^{\perp} = \{0\}$ αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η $B-$πιεστικότητα μου δίνει την ανάλογη (2.1.8) για το πρόβλημα που έχουμε εδώ, δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι αν για $u \in U$ ισχύει $B(u,v) = 0, \quad$ για κάθε $v \in V$ τότε $u = 0$. Πράγματι, αν $u \in U$ τέτοιο ώστε $B(u,v) = 0, \quad$ για κάθε $v \in V$, τότε από την $B-$πιεστικότητα $0 = \sup_{\|v\|_V \leq 1} |B(u,v)| \geq c\|u\|_B \Rightarrow u = 0$. ■

Θεώρημα 17 (Hayden) *Έστω U και V δύο χώροι Banach και B μια φραγμένη διγραμμική μορφή στον $U \times V$ τέτοια ώστε :*

(i) Για κάθε $f \in V^*$ υπάρχει μοναδική αναπαράσταση της μορφής $f(v) = B(u,v), \quad$ για κάθε $v \in V$ για κάποιο $u \in U$.

(ii) Για κάθε $g \in U^*$ υπάρχει μοναδική αναπαράσταση της μορφής $g(u) = B(u,v), \quad$ για κάθε $u \in U$ για κάποιο $v \in V$.

Τότε οι U και V είναι ανακλαστικοί.

Απόδειξη. ([10]) Θα δείξουμε ότι ο V είναι ανακλαστικός και η απόδειξη για τον U είναι ανάλογη. Έστω $A : U \to V^*$, $C : V \to U^*$ οι τελεστές που ορίζονται από την διγραμμική μορφή και $A^* : V^{**} \to U^*$ ο συζυγής του A. Οι A και C είναι φραγμένοι καθώς η B είναι φραγμένη και ο A^* είναι επίσης φραγμένος επειδή ο A είναι φραγμένος. Επιπλέον, ο A (όπως και ο C), είναι ένα προς ένα και επί λόγω του (i) (λόγω του (ii)). Συνεπώς από το Θεώρημα

Ανοιχτής Απεικόνισης ([4]) ο A θα έχει συνεχή αντίστροφο. Θα δείξουμε τώρα ότι η απεικόνιση $A^{*-1}C$ είναι η κανονική απεικόνιση από τον V επί του V^{**} και έτσι ο V θα είναι ανακλαστικός. Παρατηρούμε ότι είναι ένα προς ένα και επί επειδή οι τελεστές A^{*-1} και C είναι ένα προς ένα και επί. Έστω τώρα ένα $v \in V$. Τότε, για κάθε $u \in U$,

$$\begin{aligned}&\langle v, Au\rangle = B(u,v) = \langle u, Cv\rangle = \langle u, A^*A^{*-1}Cv\rangle = \langle Au, A^{*-1}Cv\rangle \Rightarrow\\ &\langle A^{*-1}Cv, v^*\rangle = \langle v^*, v\rangle, \text{ για κάθε } v^* \in V^*.\end{aligned}$$

Άρα η απεικόνιση αυτή δεν είναι ένας οποιοσδήποτε ισομορφισμός, το οποίο δεν θα μας εξασφάλιζε την ανακλαστικότητα, αλλά είναι η κανονική απεικόνιση. ■

Παρατήρηση 7 *Αξίζει να παρατηρήσουμε στο σημείο αυτό ότι με τις υποθέσεις του Θεωρήματος 15 φτιάξαμε ένα ισομορφισμό $A : U \to V^*$, εφόσον ο V είναι ανακλαστικός, θα είναι και ο V^*. Άρα ο U είναι ισόμορφος με έναν ανακλαστικό χώρο Banach και συνεπώς και ο ίδιος θα είναι ανακλαστικός. Δηλαδή, πάλι καταλήγουμε ότι και οι δύο χώροι θα είναι ανακλαστικοί.*

Θα δώσουμε τώρα ισοδύναμες συνθήκες για το διγραμμικό B ώστε το πρόβλημα μας να έχει λύση (well-posed). Το παρακάτω αποτέλεσμα είναι του Necas (1962).

Θεώρημα 18 (Necas) *Έστω U, V ανακλαστικοί χώροι Banach και $B : U \times V \to \mathbb{R}$ μια φραγμένη διγραμμική μορφή. Τότε το πρόβλημα*

$$B(u,v) = f(v), \quad \textit{για κάθε } v \in V.$$

έχει μοναδική λύση $u \in U$, για κάθε $f \in V^*$, αν και μόνο αν η διγραμμική μορφή ικανοποιεί μια από τις ισοδύναμες συνθήκες:

(i) Υπάρχει $\alpha > 0$ τέτοιο ώστε

$$\sup_{v\in V} \frac{B(u,v)}{\|v\|_V} \geq \alpha\|u\|_U, \quad \textit{για κάθε } u \in U. \tag{2.1.9}$$

$$\textit{Για κάθε } 0 \neq v \in V \textit{ υπάρχει } u \in U \textit{ τέτοιο ώστε } B(u,v) \neq 0. \tag{2.1.10}$$

(ii) Ισχύουν οι

$$\inf_{u\in U}\sup_{v\in V}\frac{B(u,v)}{\|u\|_U\|v\|_V} > 0, \tag{2.1.11}$$

$$\inf_{v\in V}\sup_{u\in U}\frac{B(u,v)}{\|u\|_U\|v\|_V} > 0. \tag{2.1.12}$$

(iii) Υπάρχει $\alpha > 0$ τέτοιο ώστε

$$\inf_{u\in U}\sup_{v\in V}\frac{B(u,v)}{\|u\|_U\|v\|_V} = \inf_{v\in V}\sup_{u\in U}\frac{B(u,v)}{\|u\|_U\|v\|_V} = \alpha \tag{2.1.13}$$

Επιπρόσθετα, η λύση u ικανοποιεί την εκτίμηση

$$\|u\|_U \leq \frac{1}{\alpha}\|f\|_{V^*}.$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 15 έχουμε ότι αν ισχύει το (i) τότε υπάρχει μοναδική λύση. Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι οι συνθήκες είναι μεταξύ τους ισοδύναμες. Έστω ότι ισχύει η (i). Τότε από το Θεώρημα 15 ο τελεστής $A : U \to V^*$ είναι συνεχής, ένα προς ένα και επί. Από γνωστό Θεώρημα έχουμε ότι ο συζυγής του $A^* : V \to U^*$ θα είναι συνεχής ή αλλιώς από τον τρόπο που έχει οριστεί ο A^* μέσω του διγραμμικού θα είναι και αυτός συνεχής. Επιπλέον, επειδή ο A είναι επί, έχουμε ότι ο A^* είναι ένα προς ένα. Επίσης, λόγω ανακλαστικότητας έχουμε ότι $(A^*)^* = A$, ο οποίος θα είναι συνεχής και ένα προς ένα, άρα ο A^* θα είναι επί. Δηλαδή, ο A^* είναι ένα προς ένα, επί και συνεχής. Τότε οι τελεστές αυτοί θα έχουν συνεχείς αντιστρόφους με $A^{-1} : V^* \to U,\ A^{*-1} : U^* \to V$ και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\inf_{u\in U}\sup_{v\in V}\frac{B(u,v)}{\|u\|_U\|v\|_V} &= \inf_{u\in U}\sup_{v\in V}\frac{\langle Au,v\rangle}{\|u\|_U\|v\|_V} = \inf_{u\in U}\frac{\|Au\|_{V^*}}{\|u\|_U} \text{ (ο } A \text{ είναι επί)}\\ &= \inf_{v^*\in V^*}\frac{\|v^*\|_{V^*}}{\|A^{-1}v^*\|_U} = \frac{1}{\sup_{v^*\in V^*}\frac{\|A^{-1}v^*\|_U}{\|v^*\|_{V^*}}} = \frac{1}{\|A^{-1}\|} \geq a > 0.\end{aligned}$$

Αυτή η σχέση μας δίνει την ισοδυναμία της (2.1.9) με την (2.1.11). Επιπλέον,

$$\begin{aligned}\inf_{v\in V}\sup_{u\in U}\frac{B(u,v)}{\|u\|_U\|v\|_V} &= \inf_{v\in V}\sup_{u\in U}\frac{\langle Au,v\rangle}{\|u\|_U\|v\|_V} = \inf_{v\in V}\sup_{u\in U}\frac{\langle u,A^*v\rangle}{\|u\|_U\|v\|_V} = \inf_{v\in V}\frac{\|A^*v\|_{V^*}}{\|v\|_V}\\ &= \inf_{u^*\in U^*}\frac{\|u^*\|_{U^*}}{\|A^{*-1}u^*\|_U} = \frac{1}{\sup_{u^*\in V^*}\frac{\|A^{*-1}u^*\|_U}{\|u^*\|_{U^*}}} = \frac{1}{\|A^{*-1}\|} \geq a > 0\end{aligned}$$

η οποία μας δίνει την ισοδυναμία των (2.1.10)-(2.1.12). Δηλαδή $(i) \iff (ii)$. Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι $\|A^*\| = \|A\|$, άρα ομοίως $\|A^{*-1}\| = \|A^{-1}\|$ δηλαδή τα δύο inf-sup είναι ίσα. Επομένως, οι σχέσεις (i),(iii) είναι ισοδύναμες.

Επιπλέον, εφόσον για το τυχόν $\alpha > 0$ που ικανοποιεί την (2.1.9) έχουμε $\|A^{-1}\| \le \alpha^{-1}$ τότε, για κάθε $f \in V^*$, υπάρχει μοναδικό $u \in U$ που ικανοποιεί το πρόβλημα και άρα

$$\frac{\|u\|_U}{\|f\|_{V^*}} = \frac{\|A^{-1}f\|_U}{\|f\|_{V^*}} \le \|A^{-1}\| =\le \alpha^{-1} \Rightarrow$$
$$\|u\|_U \le \alpha^{-1}\|f\|_{V^*}.$$

■

Η ισότητα (2.1.13) μπορεί να δείχνει περίεργη αρχικά αλλά πρακτικά είναι απλή συνέπεια της $\|A^{*-1}\| = \|A^{-1}\|$. Γενικά, η (i) είναι η πιο απλή συνθήκη για να διαπιστωθεί και το $\alpha > 0$ της ισότητας (2.1.13) είναι το μεγαλύτερο δυνατό α στην (2.1.9), όπου είναι ακριβώς το αντίστροφο της νόρμας του A^{-1}.

Πόρισμα 19 *Υποθέτουμε ότι το πρόβλημα μας έχει μοναδική λύση $u \in U$ για κάθε $f \in V^*$ τέτοια ώστε*

$$\|u\|_U \le C\|f\|_{V^*}.$$

Τότε το διγραμμικό B ικανοποιεί την συνθήκη (2.1.13) με $\alpha \ge C^{-1}$.

Απόδειξη. Εφόσον για κάθε $f \in V^*$ το πρόβλημα μας έχει μοναδική λύση $u \in U$ από το Θεώρημα Necas ικανοποιείται η συνθήκη (2.1.13). Επιπλέον, ο τελεστής $A : U \to V^*$ που αντιστοιχεί στο διγραμμικό B είναι ένα προς ένα, επί και συνεχής, δηλαδή αντιστρέψιμος. Ο A^{-1} θα είναι φραγμένος με

$$\|A^{-1}\| = \sup\{\frac{\|A^{-1}f\|}{\|f\|_{V^*}} : f \in V^*\} = \sup\{\frac{\|u\|}{\|f\|_{V^*} : f \in V^*}\} \le C \Rightarrow \|A^{-1}\| \le C.$$

Από την άλλη από τα προηγούμενα το $\|A^{-1}\|$ είναι το μικρότερο α^{-1} που ικανοποιεί την σχέση. Άρα θα πρέπει $\alpha^{-1} \le C$. ■

Πόρισμα 20 *Έστω U χώρος Banach, V ανακλαστικός χώρος Banach και μια διγραμμική μορφή $B : U \times V \to \mathbb{R}$. Αν ισχύει μια από τις υποθέσεις του Θεωρήματος Necas, τότε, για κάθε $f \in U^*$, υπάρχει $v \in V$ ώστε $B(u, v) = f(u), \quad$ για κάθε $u \in U$.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 15 έχουμε ότι ο τελεστής $A : U \to V^*$ είναι συνεχής, ένα προς ένα και επί. Από την Παρατήρηση 7 ο U θα είναι ανακλαστικός. Επομένως, ο A^* θα είναι ο συζυγής του A και ταυτόχρονα είναι ακριβώς ο τελεστής που ορίζεται από το διγραμμικό ως εξής

$$\langle u, A^*v\rangle = B(u,v), u \in U, v \in V.$$

Από γνωστό Θεώρημα έχουμε ότι ο συζυγής του $A^* : V \to U^*$ θα είναι συνεχής ή αλλιώς από τον τρόπο που έχει οριστεί ο A^* μέσω του διγραμμικού θα είναι συνεχής. Επιπλέον, επειδή ο A είναι επί, έχουμε ότι ο A^* είναι ένα προς ένα. Επίσης, ο $(A^*)^* = A$ είναι συνεχής και ένα προς ένα και επομένως ο A^* θα είναι επί. Δηλαδή τελικά, ο A^* είναι συνεχής, ένα προς ένα και επί. Έστω $f \in U^*$. Το πρόβλημα εύρεσης μοναδικού $v \in V$ τέτοιου ώστε $B(u,v) = f(u),\;$ για κάθε $u \in U$, είναι ισοδύναμο με το $\langle u, A^*v\rangle = B(u,v) = f(u),\;$ για κάθε $u \in U$, ή ισοδύναμα $A^*v = f$. Εφόσον, ο A^* είναι ένα προς ένα και επί θα υπάρχει τέτοιο v. Επιπλέον, σύμφωνα με το Θεώρημα Necas θα ικανοποιεί και τις αντίστοιχες συνθήκες. ■

2.2 Το Θεώρημα Babuška-Brezzi και Εφαρμογές

2.2.1 Το Θεώρημα Babuška-Brezzi

Θεώρημα 21 (Babuška-Brezzi) *Έστω X, M χώροι Hilbert, $a : X \times X \to \mathbb{R}$, $b : X \times M \to \mathbb{R}$ φραγμένες διγραμμικές μορφές και*

$$V = \{u \in X : b(u,q) = 0, \;\; \text{για κάθε } q \in M\}.$$

Αν η a είναι $V-$πιεστική, δηλαδή υπάρχει $\alpha > 0$ με $a(v,v) \geq \alpha\|v\|^2$, για κάθε $v \in V$ και επίσης υπάρχει $\beta > 0$ με

$$\beta\|q\| \leq \sup_{v\in X} \frac{b(v,q)}{\|v\|}, \;\; \text{για κάθε } q \in M,$$

τότϵ αν $f \in X^*, g \in M^*$, υπάρχουν μοναδικά $(u,p) \in X \times M$ τέτοια ώστϵ, για κάθϵ $(v,q) \in X \times M$,

$$\begin{aligned} a(u,v) + b(v,p) &= f(v), \quad v \in X, && (2.2.1) \\ b(u,q) &= g(q), \quad q \in M. && (2.2.2) \end{aligned}$$

Επιπλέον, υπάρχϵι $\gamma = \gamma(\alpha, \beta, \|a\|)$ τέτοιο ώστϵ η λύση (u,p) να ικανοποιϵί την ϵκτίμηση

$$(\|u\|_X^2 + \|p\|_M^2)^{1/2} \le \gamma(\|f\|_{X^*}^2 + \|g\|_{M^*}^2)^{1/2}.$$

Σε κάθε διγραμμική μορφή αντιστοιχεί μια γραμμική απεικόνιση, όπως τις ορίσαμε στην αρχή του προηγούμενου κεφαλαίου. Δηλαδή, θα θεωρήσουμε τους συνεχείς γραμμικούς τελεστές $A : X \to X^*$ και $B : X \to M^*$, οι οποίοι ορίζονται ως εξής

$$\langle Au, v \rangle = a(u,v), \ \ \text{για κάθε } (u,v) \in X \times X,$$
$$\langle Bv, q \rangle = b(v,q), \ \ \text{για κάθε } (v,q) \in X \times M.$$

Ο συζηγής τελεστή του B ορίζεται να είναι

$$B^* : M \to X^*, \ \langle B^* q, v \rangle = b(v,q) = \langle Bv, q \rangle, \quad \text{για κάθε } (v,q) \in X \times M.$$

Επομένως, το πρόβλημα (2.2.1)-(2.2.2) μπορούμε να το γράψουμε ως εξής

$$\begin{cases} Au + B^* p = f \\ \qquad\ \ Bu = g \end{cases} \tag{2.2.3}$$

Παρατηρούμε ότι το σύνολο V που ορίσαμε στην εκφώνηση του Θεωρήματος είναι ακριβώς το $N(B)$. Θέτουμε $V^\circ = \{h \in X^* : \langle h, v \rangle = 0, \text{ για κάθε } v \in V\}$ και με $\Pi : X^* \to V^*$ την κανονική προβολή, δηλαδή για κάθε $h \in X^*$ ορίζουμε Πh στο V^* με $\langle \Pi h, v \rangle = \langle h, v \rangle$, για κάθε $v \in V$. Με άλλα λόγια, αν h είναι μια συνεχής γραμμική απεικόνιση ορισμένη στον X, τότε Πh είναι ο περιορισμός της στον V. Παρατηρούμε ότι $\|\Pi h\|_{V^*} \le \|h\|_{X^*}$, δηλαδή είναι συνεχής και $V^\circ = N(\Pi)$.

Για να αποδείξουμε το Θεώρημα Babuška-Brezzi θα χρειαστούμε κάποια λήμματα.

Λήμμα 4 *Το πρόβλημα (2.2.3) έχει μια μοναδική λύση αν και μόνο αν*

(i) $\Pi \circ A$ *είναι ισομορφισμός από τον* $V = N(B)$ *επί του* $V^* = (N(B))^*$

(ii) $B : X \to M^*$ *είναι επί.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι η (2.2.3) έχει μοναδική λύση. Θα δείξουμε ότι ισχύουν τα $(i), (ii)$.

Έστω $h \in M^*$. Το πρόβλημα (2.2.3) έχει μοναδική λύση που αντιστοιχεί στην $f = 0$ και $g = h$. Άρα υπάρχει $u \in X$ τέτοιο ώστε $Bu = h$. Άρα ο B είναι επί.

Θα δείξουμε τώρα ότι ο $\Pi \circ A$ είναι επί. Έστω $f \in V^*$. Από το Θεώρημα Hahn-Banach, έχουμε ότι η συνεχής γραμμική απεικόνιση f από τον υπόχωρο V του X, μπορεί να επεκταθεί στον X. Έστω $\widetilde{f}$ αυτή η επέκταση (εξόρισμού $\Pi \widetilde{f} = f$). Τότε υπάρχει μοναδική λύση $(u, p) \in X \times M$ τέτοια ώστε

$$\begin{cases} Au + B^* p = \widetilde{f} \\ \qquad Bu = 0 \end{cases} \tag{2.2.4}$$

Έτσι, για κάθε $v \in V = N(B)$,

$$\langle Au, v \rangle + \langle B^* p, v \rangle = \langle \widetilde{f}, v \rangle = \langle f, v \rangle.$$

Εφόσον όμως $\langle B^* p, v \rangle = \langle p, Bv \rangle = 0$, συνεπάγεται ότι $(\Pi \circ A)u = f$.

Μένει να δείξουμε ότι $\Pi \circ A$ είναι ένα προς ένα. Έστω $u \in V$ τέτοιο ώστε $(\Pi \circ A)u = 0$. Τότε, για κάθε $v \in V$,

$$\langle Au, v \rangle = 0,$$

και επομένως $Au \in V^\circ = (N(B))^\circ$.

Επειδή ο B είναι επί, δηλαδή $R(B) = M^*$ το οποίο είναι προφανώς κλειστό στον M^* και από το Θεώρημα Κλειστού Γραφήματος ([4]) έχουμε ότι $Au \in (N(B))^\circ = R(B^*)$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $p \in M$ τέτοιο ώστε $B^* p = -Au$. Επομένως, το ζευγάρι (u, p) ικανοποιεί την

$$\begin{cases} Au + B^* p = 0 \\ \qquad Bu = 0 \end{cases} \tag{2.2.5}$$

Έχουμε υποθέσει ότι το παραπάνω πρόβλημα έχει μοναδική λύση, η λύση αυτή είναι το $(0,0)$. Έτσι $u = 0$, το οποίο αποδεικνύει ότι ο $\Pi \circ A$ είναι ένα προς ένα. Τέλος, ο τελεστής $\Pi \circ A$ είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών τελεστών, άρα είναι ένας ισομορφισμός.
Ας υποθέσουμε τώρα ότι ισχύουν οι υποθέσεις $(i), (ii)$. Θα δείξουμε πρώτα την ύπαρξη του u. Από την υπόθεση (ii) ορίζουμε $u_g \in X$ τέτοιο ώστε $Bu_g = g$. Εφόσον, $\Pi f - (\Pi \circ A)u_g$ είναι στοιχείο του V^*, από την υπόθεση (i) υπάρχει $u_0 \in V$ τέτοιο ώστε

$$(\Pi \circ A)u_0 = \Pi f - (\Pi \circ A)u_g.$$

Έτσι, αν $u = u_0 + u_g$, $(\Pi \circ A)u = \Pi f$, τότε

$$\langle f - Au, v\rangle = 0, \quad \text{για κάθε } v \in V.$$

Άρα $f - Au \in V^\circ = (N(B))^\circ$. Επειδή ο B είναι επί, δηλαδή $R(B) = M^*$, το οποίο είναι προφανώς κλειστό στον M^*, από το Θεώρημα Κλειστού Γραφήματος έχουμε ότι
$(N(B))^\circ = R(B^*)$. Επομένως, υπάρχει $p \in M$ τέτοιο ώστε $f - Au = B^*p$. Συνεπώς,

$$\begin{cases} Au + B^*p = f, \\ \qquad Bu = g \end{cases}$$

Το οποίο αποδεικνύει την ύπαρξη λύσης. Θα αποδείξουμε την μοναδικότητα, έστω ένα ζεύγος (u,p) τέτοιο ώστε

$$\begin{cases} Au + B^*p = 0, \\ \qquad Bu = 0 \end{cases}$$

το οποίο μας δίνει ότι $(\Pi \circ A)u + (\Pi \circ B^*)p = 0$. Όμως, όπως δείξαμε παραπάνω, ο περιορισμός του B^*p στο V μηδενίζεται, άρα $(\Pi \circ A)u = 0$. Αλλά από την υπόθεση (i), έχουμε ότι $u = 0$. Τελικά, ο B^* είναι ένα προς ένα αφού ο B είναι επί, συνεπώς $B^*p = 0 \Rightarrow p = 0$. Το οποίο σημαίνει ότι το (2.2.3) έχει μοναδική λύση. ■

Λήμμα 5 *Τα επόμενα είναι ισοδύναμα*

(i) Υπάρχει $\beta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\inf_{q \in M} \sup_{v \in X} \frac{b(v,q)}{\|v\|_X \|q\|_M} \geq \beta,$$

(ii) Ο B^* είναι ένας ισομορφισμός από το M επί του V° και

$$\|B^*q\|_{X^*} \geq \beta\|q\|_M, \quad \text{για κάθε } q \in M.$$

(iii) Ο B είναι ένας ισομορφισμός από το $V^\perp$ επί του M^* και

$$\|Bu\|_{M^*} \geq \beta\|u\|_X, \quad \text{για κάθε } u \in V^\perp.$$

Απόδειξη. $(ii) \Rightarrow (i)$: Εύκολα βλέπουμε ότι ικανοποιείται η inf-sup συνθήκη:

$$\begin{aligned}
&\|B^*q\|_{X^*} \geq \beta\|q\|_M, \text{ για κάθε } q \in M \Leftrightarrow \\
&\sup_{v\in X} \frac{\langle B^*q, v\rangle}{\|v\|_X} \geq \beta\|q\|_M, \text{ για κάθε } q \in M \Leftrightarrow \\
&\sup_{v\in X} \frac{b(v,q)}{\|v\|_X} \geq \beta\|q\|_M, \text{ για κάθε } q \in M \Leftrightarrow \\
&\inf_{q\in M} \sup_{v\in X} \frac{b(v,q)}{\|v\|_X\|q\|_M} \geq \beta.
\end{aligned}$$

$(i) \Rightarrow (ii)$: Από την (i) όπως δείξαμε παραπάνω έχουμε την ανισότητα

$$\|B^*q\|_{X^*} \geq \beta\|q\|_M, \text{ για κάθε } q \in M,$$

η οποία μας δίνει άμεσα ότι ο B^* είναι 1-1 και επί του $R(B^*)$ με $R(B^*)$ κλειστό. Επομένως, από το Θεώρημα Κλειστού Γραφήματος $R(B^*) = (N(B))^\circ = V^\circ$, το οποίο αποδεικνύει ότι ο B^* είναι ένα προς ένα και επί από τον M στον V°.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: $R(B^*) = V^\circ$ είναι κλειστό έτσι $R(B) = (N(B^*))^\circ = (\{0\})^\circ = M^*$. Επιπλέον, $V = N(B)$, έτσι αν περιορίσουμε τον B στο $V^\perp$ είναι 1-1. Επομένως, ο B είναι ένας ισομορφισμός από τον $V^\perp$ επί του M^*. Ως συνέπεια του Θεωρήματος Ανοιχτής Απεικόνισης, υπάρχει $\beta > 0$ τέτοιο ώστε $\|B^{-1}\| \leq 1/\beta$. Μένει να δείξουμε ότι αυτό το β είναι το ίδιο με το β του (ii). Αυτό είναι συνέπεια της ισομετρίας μεταξύ V° και $(V^\perp)^*$ και πιο γενικά από την ισομετρία μεταξύ ενός χώρου Hilbert και του συζυγούς του. Διότι οι χώροι V° και $V^\perp$ μπορούν να ταυτιστούν από το Θεώρημα Riesz. ∎

Άμεση συνέπεια του Λήμματος (5) είναι το επόμενο Πόρισμα.

Πόρισμα 22 *Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Η συνθήκη inf-sup ικανοποιείται.

(ii) $B^* : M \to X^*$ *είναι 1-1 και* B^* *έχει κλειστό πεδίο τιμών.*

(iii) $B : X \to M^*$ *είναι επί.*

Η απόδειξη του Θεωρήματος 21 τώρα είναι άμεση.

Απόδειξη. ([5],[12]) Από το Πόρισμα 22 λόγω της inf-sup συνθήκης έχουμε ότι ο B είναι επί. Αν διαπιστώσουμε ότι ο $\Pi \circ A$ είναι ισομορφισμός από τον V επί του V^*, τότε λόγω του Λήμματος 4 έχουμε λύση.

Πράγματι, η διγραμμική μορφή a είναι $V-$πιεστική, αυτό σημαίνει στην πραγματικότητα ότι ο τελεστής $\Pi \circ A$ είναι πιεστικός στον V. Επομένως, όπως και στο Θεώρημα Lax-Milgram, ο $\Pi \circ A$ είναι ισομορφισμός από τον V στον V^*. ■

Παρατήρηση 8 *Σε πολλές εφαρμογές οδηγούμαστε στο πρόβλημα (2.2.1)-(2.2.2) με την ακόλουθη διαδικασία. Έστω* V *και* X *πραγματικοί χώροι Hilbert με* V *κλειστός υπόχωρος του* X, *και έστω* $a(u,v)$ *μια συνεχής διγραμμική μορφή από τον* $X \times X$ *η οποία είναι* $V-$*πιεστική. Θέλουμε να επιλύσουμε το πρόβλημα*

$$\begin{cases} \text{Αναζητάμε } u \in V \text{ τέτοια ώστε} \\ a(u,v) = f(v), \ v \in V \end{cases} \tag{2.2.6}$$

όπου f *δοθέν στοιχείο του* X^*. *Για να το επιλύσουμε θέτουμε*

$$M = V^{\perp} = \{v^* \in X^* : \langle v^*, v\rangle = 0, \ \text{για κάθε } v \in V\},$$

ο οποίος είναι κλειστός υπόχωρος του X^* *και το πρόβλημα (2.2.6) γίνεται*

$$\begin{cases} \text{Αναζητάμε } (u,p) \in X \times M \text{ τέτοια ώστε} \\ a(u,v) + \langle p, v\rangle = f(v), \quad \text{για κάθε } v \in X \\ \langle q, u\rangle = 0, \quad \text{για κάθε } q \in M \end{cases} \tag{2.2.7}$$

Θέτοντας

$$b(v,q) = \langle q, v\rangle, \ v \in X, \ q \in M \subset X^*, \tag{2.2.8}$$

το πρόβλημα (2.2.7) είναι της μορφής (2.2.1)-(2.2.2). Παρατηρούμε επίσης ότι από την (2.2.8) έχουμε ότι $B^* = I$, ο οποίος είναι ένα προς ένα και έχει κλειστή εικόνα. Προφανώς $N(B) = V$ και το $a(u, v)$ είναι $V-$ελλειπτικό, άρα υπάρχει μοναδική λύση $(u, p) \in X \times M$. Όμως από την συνθήκη $\langle q, u\rangle = 0$, για κάθε $q \in M$, συνεπάγεται ότι $u \in V$ και αν περιορίσουμε τα v στον V, τότε έχουμε ακριβώς την λύση του (2.2.6).

2.2.2 Ισοδυναμία των συνθηκών του Θεωρήματος Babuška-Brezzi και του Θεωρήματος Babuška

Στόχος της παραγράφου αυτής είναι να δείξουμε ότι αν έχουμε τις δύο συνθήκες του Θεωρήματος Babuška-Brezzi, τότε μπορούμε να πάρουμε την inf-sup συνθήκη για μια κατάλληλη διγραμμική μορφή και το αντίστροφο.

Έστω δύο χώροι Hilbert X, M και δύο διγραμμικές μορφές $a : X \times X \to \mathbb{R}$ και $b : X \times M \to \mathbb{R}$. Αν $f \in X^*$ και $g \in M^*$, τότε αναζητάμε ζεύγος $(u, p) \in X \times M$ λύση του προβήματος

$$a(u, v) + b(v, p) = f(v), \quad v \in X, \tag{2.2.9}$$

$$b(u, q) = g(q), \quad q \in M. \tag{2.2.10}$$

Το πρόβλημα αυτό μπορεί να γραφτεί υπό την μορφή μιας διγραμμικής μορφής. Για να το κάνουμε αυτό θεωρούμε τον χώρο γινόμενο $W = X \times M$, οποίος είναι χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο

$$\langle (v, q), (w, r)\rangle_W = (v, w)_X + (q, r)_M, \quad \text{για κάθε } (v, q), (w, r) \in W$$

και με αντίστοιχη νόρμα την $\|(v, q)\|_W := (\|v\|_X^2 + \|q\|_M^2)^{1/2}$. Από τις διγραμμικές μορφές a και b μπορούμε να ορίσουμε μια διγραμμική μορφή $B : W \times W \to \mathbb{R}$ ως

$$\mathcal{B}((v, q), (w, r)) := a(v, w) + b(w, q) + b(v, r), \quad \text{για κάθε } (v, q), (w, r) \in W.$$

Τότε, το πρόβλημα (2.2.1)-(2.2.2) είναι ισοδύναμο με το να βρούμε $(u, p) \in W$ ώστε

$$\mathcal{B}((u, p), (w, r)) = (f, v) + (g, q), \quad \text{για κάθε } (v, q) \in W. \tag{2.2.11}$$

Για να το δούμε αυτό παρατηρούμε ότι η (2.2.11) για $(v, 0)$ δίνει την σχέση (2.2.1) και για $(0, q)$ δίνει την (2.2.2). Προφανώς, μια λύση του (2.2.1)-(2.2.2) είναι λύση του (2.2.11) και αντίστροφα. Επομένως, το πρόβλημα του σαγματικού σημείου είναι επιλύσιμο αν και μόνο αν η $\mathcal{B}$ ικανοποιεί την inf-sup συνθήκη (2.1.13), δηλαδή

$$\inf_{(v,q)\in W} \sup_{(w,r)\in W} \frac{\mathcal{B}((v,q),(w,r))}{\|(v,q)\|_W \|(w,r)\|_W} = \inf_{(w,r)\in W} \sup_{(v,q)\in W} \frac{\mathcal{B}((v,q),(w,r))}{\|(v,q)\|_W \|(w,r)\|_W} \geq \gamma^{-1},$$

όπου γ η σταθερά από την εκτίμηση της νόρμας του (u, p), την οποία θα προσδιορίσουμε παρακάτω.

Στο Λήμμα 4 κατασκευάσαμε την λύση (u, p) όταν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος Brezzi. Σύμφωμα με αυτή την κατασκευή θα δώσουμε μια εκτίμηση για την νόρμα της λύσης: Από την inf-sup συνθήκη για την b έχουμε ότι $\|B^{-1}\|^{-1} = \beta$, άρα

$$\|u_g\|_X = \|B^{-1}g\|_X \leq \|B^{-1}\| \|g\|_{M^*} = \beta^{-1}\|g\|_{M^*}.$$

Το u_0 επιλέχθηκε έτσι ώστε $(\Pi \circ A)u_0 = \Pi f - (\Pi \circ A)u_g$, ή ισοδύναμα

$$a(u_0, v) = \langle f, v\rangle - a(u_g, v), \quad \text{για κάθε } v \in V.$$

Επομένως, από την $V-$πιεστικότητα θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \alpha\|u_0\|_V &\leq \sup_{v\in V} \frac{a(u_0, v)}{\|v\|} = \sup_{v\in V} \frac{\langle f, v\rangle - a(u_g, v)}{\|v\|} \\ &\leq \|f\|_{X^*} + \|a\|\|u_g\|_X \Rightarrow \\ \|u_0\|_V &\leq \alpha^{-1}\|f\|_{X^*} + \|a\|(\alpha\beta)^{-1}\|g\|_{M^*}. \end{aligned}$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} \|u\|_X = \|u_0 + u_g\| &\leq \|u_0\|_V + \|u_g\|_X \\ &\leq \alpha^{-1}\|f\|_{X^*} + (1 + \alpha^{-1}\|a\|)\beta^{-1}\|g\|_{M^*}. \end{aligned}$$

Τέλος, επειδή $B^*p = f - Au$ έχουμε

$$\begin{aligned} \|p\|_M &\leq \|(B^*)^{-1}\|\|f - Au\|_{X^*} \leq \beta^{-1}(\|f\| + \|A\|\|u\|_X) \\ &\leq \beta^{-1}(1 + \alpha^{-1}\|a\|)(\|f\|_{X^*} + \beta^{-1}\|a\|\|g\|_{M^*}). \end{aligned}$$

Προσθέτοντας τις δύο εκτιμήσεις έχουμε την σταθερά $\gamma = \gamma(a, b, \|a\|)$ τέτοια ώστε

$$\left(\|u\|_X^2 + \|p\|_M^2\right) \leq \gamma \left(\|f\|_{X^*}^2 + \|g\|_{M^*}^2\right)^{1/2}.$$

Άρα από Πόρισμα 19 θα ικανοποιείται η inf-sup συνθήκη για την $\mathcal{B}$ με $\alpha \geq \frac{1}{\gamma}$, δηλαδή οι συνθήκες του Θεωρήματος Brezzi μας δίνουν την (2.1.13) για την $\mathcal{B}$.

Παρατήρηση 9 *Οι Xu και Zikatanov [25] κατέληξαν σε ένα καλύτερο φράγμα ως προς α, β και $\|a\|$*

$$\gamma \leq \kappa_{12} + \max(\kappa_{11}, \kappa_{22}).$$

όπου

$$\kappa := \frac{\|a\|}{\beta}, \quad \kappa_{11} := \frac{1+\kappa^2}{\alpha^2}, \quad \kappa_2 := \kappa^2\kappa_{11} + \frac{1}{\beta^2}, \quad \kappa_{12} := \kappa\kappa_{11}.$$

Αν υποθέσουμε τώρα ότι ικανοποιείται η συνθήκη (2.1.13) για την διγραμμική μορφή $\mathcal{B}$ δηλαδή

$$\sup_{w\neq 0, r\neq 0} \frac{|a(v,w) + b(w,q) + b(v,r)|}{\|(w,r)\|_W} \geq \gamma\|(v,q)\|_W, \quad \text{για κάθε } (v,q) \in W. \tag{2.2.12}$$

Παρατηρούμε ότι αν θέσουμε $v = 0$ στην (2.2.12) τότε το supremum λαμβάνεται για $r = 0$ και έχουμε την πρώτη συνθήκη του Babuška-Brezzi

$$\sup_{w\neq 0} \frac{|b(w,q)|}{\|w\|} \geq \gamma\|q\|, \quad \text{για κάθε } q \in M,$$

λαμβάνοντας ένα φράγμα $\beta \geq \gamma$.

Επειδή ισχύει η inf-sup συνθήκη, έχουμε από το Θεώρημα Babuška ότι το σύστημα (2.2.1)-(2.2.2) έχει μοναδική λύση για κάθε επιλογή f και g. Αν επιλέξουμε $g = 0$ και περιορίσουμε την (2.2.1) στον $V = N(B)$, τότε συμπεραίνουμε ότι το πρόβλημα

$$\begin{cases} v_0 \in V, \\ a(v_0, w_0) = f(w_0), \quad \text{για κάθε } w_0 \in V \end{cases} \tag{2.2.13}$$

έχει μοναδική λύση. Τώρα, αν περιορίσουμε την (2.2.12) στα $v = v_0 \in V$ παίρνουμε

$$\sup_{w\neq 0, r\neq 0} \frac{|a(v_0,w) + b(w,q)|}{\|(w,r)\|_W} \geq \gamma\|(v_0,q)\|_W, \quad \text{για κάθε } (v,q) \in V \times M.$$

Παρατηρούμε ότι το supremum επιτυγχάνεται για $r = 0$, άρα έχουμε

$$\inf_{v_0\neq 0, q\neq 0} \sup_{w\neq 0} \frac{|a(v_0, w) + b(w, q)|}{\|w\|\|(v_0, q)\|_W} \geq \gamma.$$

Περιορίζουμε τώρα την διγραμμική μορφή μας στο Καρτεσιανό γινόμενο $(V \times M) \times (X \times \{0\})$ και αντιστρέφοντας την σειρά των μεταβλητών στην inf-sup συνθήκη έχουμε

$$\inf_{[w]\neq 0} \sup_{v_0\neq 0, q\neq 0} \frac{|a(v_0, w) + b(w, q)|}{\|w\|\|(v_0, q)\|_W} \geq \gamma. \tag{2.2.14}$$

Εδώ η κλάση ισοδυναμίας $[w]$ ορίζεται χρησιμοποιώντας των υπόχωρο

$$\begin{aligned} V_0 &= \{w \in X : a(v_0, w) + b(w, q) = 0, \text{ για κάθε } v_0 \in V, \text{ και } q \in M\} \\ &= \{w_0 \in V : a(v_0, w_0) = 0, \text{ για κάθε } w_0 \in V\}. \end{aligned}$$

Αλλά από την μοναδικότητας της λύσης του (2.2.13) έχουμε ότι $V_0 = \{0\}$. Πράγματι, έχουμε ότι, για κάθε $f \in X^*$, υπάρχει μοναδικό $u_0 \in V$ τέτοιο ώστε

$$a(u_0, v_0) = f(v_0), \text{ για κάθε } v_0 \in V.$$

Επομένως, αν $v_0 \in V_0$ τότε $a(u_0, v_0) = 0$, για κάθε u_0, και άρα, για κάθε $f \in X^*$, θα έχουμε $f(v_0) = 0$. Δηλαδή, $v_0 \in \cap_{f\in X^*} N(f) = \{0\} \Rightarrow v_0 = 0$. Συνεπώς η συνθήκη (2.2.14) γίνεται

$$\inf_{w\neq 0} \sup_{v_0\neq 0, q\neq 0} \frac{|a(v_0, w) + b(w, q)|}{\|w\|\|(v_0, q)\|_W} \geq \gamma.$$

Αν πάρουμε $w = w_0 \in V$, θα έχουμε

$$\inf_{w_0\neq 0} \sup_{v_0\neq 0} \frac{|a(v_0, w_0)|}{\|w_0\|\|v_0\|} \geq \gamma.$$

Συνεπώς, ισχύει η inf-sup συνθήκη για το a πάνω στον V για μια σταθερά $\alpha \geq \gamma$.

2.2.3 Εφαρμογή στο Πρόβλημα Stokes

Θα δείξουμε τώρα μια εφαρμογή του Θεωρήματος Babuška-Brezzi σε προβλήματα σαγματικού σημείου. Έστω Ω ανοιχτό, φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ με σύνορο $\Gamma = \partial\Omega$ Lipschitz συνεχές. Αναζητάμε $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^d$ και $p : \Omega \to \mathbb{R}$ σε κατάλληλους χώρους Hilbert ώστε

$$\begin{cases} -\Delta u + \nabla p = f, & \text{στο } \Omega \\ \text{div} u = g, & \text{στο } \Omega \\ u = 0, & \text{στο } \Gamma \end{cases} \tag{2.2.15}$$

όπου $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ και $g : \Omega \to \mathbb{R}$ δίνονται και οι άγνωστες u και p αναπαριστούν την ταχύτητα και την πίεση σε μια (πιθανά ασυμπίεστη) ροή ιξώδους ορισμένη στο Ω. Παρατηρούμε ότι έχουμε ένα περιορισμό μηδενικής ταχύτητας στο σύνορο:

$$\int_\Omega g = 0 \;\; \text{αφού} \; \int_\Omega \text{div} u \, dx = \int_\Gamma u ds = 0.$$

Υποθέτουμε ότι οι λύσεις $u = (u_1, u_2, \ldots, u_d)$ και p είναι κατάλληλα λείες και θεωρούμε μια δοκιμαστική συνάρτηση $v = (v_1, v_2, \ldots, v_d)$ κατάλληλα λεία με τιμές στον $\mathbb{R}^d$. Εφόσον, η ταχύτητα μηδενίζεται στο σύνορο, μπορούμε να θεωρήσουμε δοκιμαστική συνάρτηση που μηδενίζεται στο σύνορο, όπως ακριβώς κάναμε και στο ομογενές πρόβλημα Dirichlet. Αν πολλαπλασιάσουμε κάθε όρο της πρώτης εξίσωσης με v και ολοκληρώσουμε κατά μέλη στο Ω, τότε έχουμε

$$\begin{aligned} -\int_\Omega v \cdot \Delta u &= -\int_\Omega (v_1, v_2, \ldots, v_d) \cdot (\Delta u_1, \Delta u_2, \ldots, \Delta u_d) \\ &= -\sum_{i=1}^d \int_\Omega v_i \cdot \Delta u_i = \sum_{i=1}^d \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v_i \\ &= \sum_{i=1}^d \int_\Omega (\frac{\partial u_i}{\partial x_1}, \frac{\partial u_i}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u_i}{\partial x_d}) \cdot (\frac{\partial v_i}{\partial x_1}, \frac{\partial v_i}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial v_i}{\partial x_d}) \\ &= \sum_{i,j=1}^d \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \int_\Omega \nabla u : \nabla v. \end{aligned}$$

Η σχέση $\int_\Omega v \cdot \nabla p = -\int_\Omega p \; \text{div} v$ είναι άμεση από τον τύπο Green και τελικά έχουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$\int_\Omega \nabla u : \nabla v - \int_\Omega p \, \text{div} v = \int_\Omega f \cdot v.$$

Υποθέτουμε ότι $f \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$, τότε όλοι οι όροι έχουν νόημα αν υποθέσουμε ότι $u \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$ και $p \in L^2(\Omega)$.

Για την δεύτερη εξίσωση του προβλήματος θεωρούμε πάλι δοκιμαστική συνάρτηση q κατάλληλα λεία:

$$\int_\Omega q \mathrm{div} u = \int_\Omega gq.$$

Εφόσον $u \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$, το αριστερό μέλος είναι καλά ορισμένο αν $q \in L^2(\Omega)$. Ωστόσο, αφού $\int_\Omega g = \int_\Omega \mathrm{div} u = 0$, μπορούμε να περιορίσουμε τον χώρο των δοκιμαστικών συναρτήσεων στον υπόχωρο του $L^2(\Omega)$ που ορίζεται ως εξής:

$$L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega) : \int_\Omega q = 0\}.$$

Επιπλέον, αν p είναι μια λύση, τότε και η $p + c$ είναι λύση (όπου c μια σταθερά). Για να ξεπεράσουμε αυτό το πρόβλημα, προσθέτουμε μια συνθήκη μηδενικής μέσης πίεσης, δηλαδή $p \in L_0^2(\Omega)$. Επομένως, έχουμε την ασθενή διατύπωση του προβλήματος Stokes:

Δίνονται οι συναρτήσεις $f \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$ και $g \in L_0^2(\Omega)$, αναζητάμε $(u, p) \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^d) \times L_0^2(\Omega)$ τέτοια ώστε

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \nabla u : \nabla v - \int_\Omega p \mathrm{div} v = \int_\Omega f \cdot v, \quad \text{για κάθε } v \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^d), \\ \displaystyle\int_\Omega q \mathrm{div} u = \int_\Omega gq, \quad \text{για κάθε } q \in L_0^2(\Omega). \end{cases}$$

Θεωρούμε τον χώρο $X = H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$ με την ισοδύναμη νόρμα του χώρου γινόμενο, δηλαδή με $|u|_{H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^d)} = \sum_{i=1}^d |u_i|_{H_0^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^d \|\nabla u_i\|_{L^2(\Omega)}$ και $M = L_0^2(\Omega)$ με την νόρμα $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$. Επιπλέον, θέτουμε $a(u, v) = \int_\Omega \nabla u : \nabla v dx$, $b(v, p) = -\int_\Omega p \ \mathrm{div} v dx$, $f(v) = \int_\Omega f \cdot v dx$, και $g(q) = -\int_\Omega gq dx$. Θα δείξουμε ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος Babuška-Brezzi.

Παρατηρούμε ότι η a είναι φραγμένη και πιεστική. Πράγματι,

$$a(u, u) = \int_\Omega \nabla u : \nabla u = |u|^2_{H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^d)}, \quad \text{για κάθε } u \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^d),$$

δηλαδή η διγραμμική μορφή a είναι $X-$πιεστική, συνεπώς θα είναι και $V-$πιεστική για κάθε υπόχωρο V του $X = H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$. Θα δείξουμε ότι η b είναι φραγμένη, πράγματι ολοκληρώνοντας κατά μέλη έχουμε

$$\|\mathrm{div} u\|_{L^2(\Omega)} \le |u|_{H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^d)}.$$

Από τη σχέση αυτη προκύπτει ότι

$$|b(u,q)| \leq \int_\Omega |\mathrm{div} u||q| \leq \|\mathrm{div} u\|_{L^2(\Omega)}\|q\|_{L^2(\Omega)} \leq |u|_{H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^d)}\|q\|_{L^2(\Omega)} \Rightarrow$$
$$\|b\| \leq 1.$$

δηλαδή η b είναι φραγμένη. Θα ελέγξουμε τώρα την inf-sup συνθήκη για το b. Για κάθε $q \in L_0^2(\Omega)$, υπάρχει $w \in H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^d)$ τέτοιο ώστε

$$-\mathrm{div} w = q, \quad \text{στο } \Omega \quad \text{και} \quad |w|_{H^1(\Omega;\mathbb{R}^d)} \leq C(\Omega)\|q\|_{L^2(\Omega)}.$$

Αυτό είναι ένα αποτέλεσμα του Nečas στο οποίο αποδεικνύεται ότι η απεικόνιση

$$\mathrm{div} : \{v \in H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^d) : \mathrm{div} v = 0\}^\perp \to L_0^2(\Omega)$$

είναι ένας ισομορφισμός επί του $L_0^2(\Omega)$ (βλ. Λήμμα 3.2.3 σελ.134[12]). Από αυτό τώρα έχουμε ότι

$$\sup_{v \in H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^d)} \frac{b(q,v)}{|v|_{H^1(\Omega;\mathbb{R}^d)}} \geq \frac{b(q,w)}{|w|_{H^1(\Omega;\mathbb{R}^d)}} = \frac{\|q\|^2_{L^2(\Omega)}}{|w|_{H^1(\Omega;\mathbb{R}^d)}} \geq C(\Omega)^{-1}\|q\|_{L^2(\Omega)}.$$

Επομένως, για $\beta \geq C(\Omega)^{-1}$ ισχύει το Θεώρημα 21, συνεπώς υπάρχουν $(u,p) \in H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^d) \times L_0^2(\Omega)$ που ικανοποιούν το πρόβλημα Stokes.

Παρατήρηση 10 *Αναφέραμε παραπάνω ότι αν p είναι μια κλασική λύση, τότε για κάθε σταθερά C, η $p + C$ θα είναι λύση. Λογικά για να έχουμε μοναδική λύση θα έπρεπε να περιοριστούμε στον $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ και η μοναδική ασθενής λύση να είναι μια κλάση ισοδυναμίας $[p] = \{p+C : C \in \mathbb{R}\}$. Παρατηρούμε όμως ότι αν p είναι μια κλασική λύση τότε η $p - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega p dx$ είναι λύση και ανήκει στον $L_0^2(\Omega)$. Επομένως, είναι λογική η απαίτηση $p \in L_0^2(\Omega)$.*

2.2.4 Εφαρμογή στο Διαρμονικό Πρόβλημα

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ένα ανοιχτό, φραγμένο υποσύνολο με σύνορο $\Gamma = \partial\Omega$ Lipschitz συνεχές. Αναζητούμε $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f, & \text{στο } \Omega \\ u = 0, & \text{στο } \Gamma \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \text{στο } \Gamma \end{cases} \tag{2.2.16}$$

Το πρόβλημα του διαρμονικού τελεστή περιγράφει για παράδειγμα την κάμψη μίας λεπτής πακτωμένης πλάκας (clamped plate) όταν υπόκειται σε μια κάθετη δύναμη $f \in L^2(\Omega)$. Η πλάκα είναι τριών διαστάσεων σώμα και μπορεί να προσεγγιστεί από την ενδιάμεση της επιφάνεια, η οποία είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο Ω του $\mathbb{R}^2$. Αυτό το πρόβλημα μπορούμε να το προσεγγίσουμε με δύο τρόπους είτε εφαρμόζοντας το Θεώρημα Babuška-Brezzi, είτε το Θεώρημα Lax-Milgram. Και στις δύο προσεγγίσεις θα χρειαστούμε τον χώρο

$$H_0^2(\Omega) = \{v \in H^2(\Omega) | v = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \text{ στο } \partial\Omega\}.$$

Σημείωση: Όπως έχουμε ήδη αναφέρει όταν μιλάμε για τις τιμές μιας συνάρτησης στο σύνορο είναι υπό την έννοια του τελεστή ίχνους. Όμοια τώρα ορίζεται τελεστής ίχνους για την παράγωγο κατά κατεύθυνση στο σύνορο(βλ. Θεώρημα 2.7.4 σελ101 [12]).

Επομένως, εφαρμόζοντας τον τύπο Green δύο φορές για κάθε $u \in C^4(\overline{\Omega})$ και $v \in C_0^\infty(\Omega)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Delta^2 uv dx &= -\int_\Omega \nabla(\Delta u)\nabla v dx + \int_\Gamma \nabla(\Delta u) v\nu ds \\
&= \int_\Omega \Delta u \Delta v dx - \int_\Gamma \Delta u \nabla v \nu ds + \int_\Gamma \nabla(\Delta u) v \nu ds \\
&= \int_\Omega \Delta u \Delta v dx - \int_\Gamma \Delta u \frac{\partial v}{\partial \nu} ds + \int_\Gamma \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} v ds.
\end{aligned}$$

Επειδή $v \in C_0^\infty(\Omega)$ τα επιφανειακά ολοκληρώματα απαλείφονται οπότε έχουμε

$$\int_\Omega \Delta u \Delta v dx = \int_\Omega f v dx.$$

Για να έχει νόημα κάθε όρος στην παραπάνω σχέση αρκεί να επιλέξουμε τον χώρο $H_0^2(\Omega)$ και για τις δύο συναρτήσεις u, v, δηλαδή

$$\int_\Omega \Delta u \Delta v dx = \int_\Omega f v dx, \quad u, v \in H_0^2(\Omega). \tag{2.2.17}$$

Για την πρώτη προσέγγιση θα θέσουμε $w = -\Delta u \in L^2(\Omega)$. Τότε έχουμε ότι

$$\int_\Omega wz dx + \int_\Omega \Delta u z dx = 0, \text{ για κάθε } z \in L^2(\Omega), \tag{2.2.18}$$

και η (2.2.17) γίνεται

$$-\int_\Omega w\Delta v dx = \int_\Omega f v dx, \text{ για κάθε } v \in H_0^2(\Omega). \tag{2.2.19}$$

Αν θέσουμε $X = L^2(\Omega)$, $M = H_0^2(\Omega)$ και

$$a(w,z) = \int_\Omega wz dx, \ w, z \in X, \tag{2.2.20}$$

$$b(z,v) = \int_\Omega \Delta v z dx, \ z \in X, \ v \in M, \tag{2.2.21}$$

τότε με αυτό τον συμβολισμό μπορούμε να γράψουμε το πρόβλημα ως

$$\begin{cases} a(w,z) + b(z,u) = 0, \\ b(w,v) = \int_\Omega (-f) v dx \end{cases} \tag{2.2.22}$$

Παρατηρούμε ότι η διγραμμική μορφή a είναι φραγμένη και πιεστική. Πράγματι,

$$a(w,w) = \|w\|^2_{L^2(\Omega)}, \text{ για κάθε } w \in L^2(\Omega),$$

δηλαδή η a είναι $L^2(\Omega)-$πιεστική, συνεπώς θα είναι και $V-$πιεστική για κάθε υπόχωρο V του $L^2(\Omega)$. Επιπλέον, η a είναι φραγμένη αφού

$$|a(w,z)| \le \|w\|_{L^2(\Omega)} \|z\|_{L^2(\Omega)}, \text{ για κάθε } z, w \in L^2(\Omega).$$

Επίσης, η διγραμμική μορφή b είναι φραγμένη καθώς

$$|b(z,v)| \le \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)} \|z\|_{L^2(\Omega)} \le \|v\|_{H^2(\Omega)} \|z\|_{L^2(\Omega)}.$$

Θα ελέγξουμε τώρα την inf-sup συνθήκη για το b

$$\sup_{w \in X} \frac{b(w,v)}{\|w\|_{L^2(\Omega)}} \ge \frac{\int_\Omega \Delta v \Delta v dx}{\|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}} = \|\Delta v\|_{L^2} \ge C\|v\|_{H^2(\Omega)},$$

όπου η τελευταία ανισότητα οφείλεται στο γεγονός ότι η $\|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}$ ορίζει μια νόρμα στον $H_0^2(\Omega)$ ισοδύναμη με την αρχική $\|v\|_{H^2(\Omega)}$ (βλ.Παράγραφος 2.5.2 σελ.22 [18]). Επομένως, από το Θεώρημα Babuška-Brezzi θα υπάρχει μια μοναδική λύση (w,u) που ικανοποιεί το σύστημα (2.2.22). Προφανώς, η $u \in H_0^2(\Omega)$ είναι η λύση του προβλήματος (2.2.16) και $w = -\Delta u$.

Ο δεύτερος τρόπος θα ήταν να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Lax-Milgram. Παρατηρούμε ότι παραπάνω είχαμε καταλήξει στην σχέση

$$\int_\Omega \Delta u \Delta v dx = \int_\Omega f v dx,$$

όπου είχαμε υποθέσει την $u \in C^4(\Omega)$ και την $v \in C_0^2(\Omega)$. Είναι προφανές ότι για να ικανοποιήσουμε τις συνοριακές συνθήκες αρκεί να υποθέσουμε ότι η u ανήκει στον $H_0^2(\Omega)$. Άρα αν θέσουμε ως

$$B(u,v) = \int_\Omega \Delta u \Delta v dx,\ u, v \in H_0^2(\Omega)$$

και

$$h(v) = \int_\Omega f v dx,\ v \in H_0^2(\Omega),$$

μετατρέπουμε το πρόβλημα (2.2.16) στο πρόβλημα εύρεσης $u \in H_0^2(\Omega)$ ώστε

$$B(u,v) = f(v),\ v \in H_0^2(\Omega).$$

Παρατηρούμε τώρα ότι

$$|B(u,v)| \leq \|\Delta u\|_{L^2} \|\Delta u\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^2(\Omega)} \|v\|_{H^2(\Omega)},$$

δηλαδή η B είναι φραγμένη και

$$B(u,u) = \|\Delta u\|_{L^2}^2 \geq C \|u\|_{H^2(\Omega)}^2$$

δηλαδή είναι $H_0^2(\Omega)-$ελλειπτική. Επιπλεόν, το h είναι γραμμικό και φραγμένο, άρα από το Θεώρημα Lax-Milgram θα υπάρχει λύση $u \in H_0^2(\Omega)$.

2.3 Θεώρημα Lions

Θεώρημα 23 (Lions) *Έστω $(H, \|\cdot\|_H)$ χώρος Hilbert, $(V, \|\cdot\|_V)$ χώρος με νόρμα και $B : H \times V \to \mathbb{R}$ διγραμμική μορφή με $B(\cdot, v) \in H^*,\ v \in V$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(α΄) Υπάρχει $\alpha > 0$, τέτοιο ώστε $\alpha \leq \inf_{\|v\|_V = 1} \sup_{\|u\|_H \leq 1} |B(u,v)|$

(β′) Για κάθε $f \in V^*$, υπάρχει $u \in H$ τέτοιο ώστε $B(u, v) = f(v)$, για κάθε $v \in V$.

Απόδειξη. ([22],[17]) Υποθέτουμε ότι ισχύει το (α′) και θα δείξουμε το (β′).
Ορίζουμε ένα τελεστή $A : V \to H^*$ με $\langle u, Av\rangle = B(u, v)$, $u \in H, v \in V$, ο οποίος δεν είναι απαραίτητα συνεχής.
Ο A είναι κάτω φραγμένος:

$$\inf_{\|v\|_V=1} \sup_{\|u\|_H \le 1} |B(u, v)| \ge \alpha > 0 \Leftrightarrow \sup_{\|u\|_H \le 1} |B(u, v)| \ge \alpha\|v\|_V,\ v \in V \Leftrightarrow$$

$$\sup_{\|u\|_H \le 1} |\langle u, Av\rangle| \ge \alpha\|v\|_V,\ v \in V \Leftrightarrow \|Av\|_{H^*} \ge \alpha\|v\|_V,\ v \in V.$$

Άρα ο A είναι 1-1, εφόσον $Av = 0 \Rightarrow 0 = \|Av\|_{H^*} \ge \alpha\|v\|_V \ge 0 \Rightarrow \|v\|_V = 0 \Rightarrow v = 0$. Σημειώνουμε εδώ ότι το $R(A)$ δεν είναι κλειστό διότι ο V δεν είναι πλήρης χώρος.
Ο $A : V \to R(A)$ είναι 1-1 και επί. Συνεπώς, ορίζεται ο αντίστροφος $A^{-1} : R(A) \to V$, ο οποίος είναι συνεχής εφόσον για $y \in R(A)$ έχουμε

$$\|A^{-1}y\|_V = \|v\|_V \le \frac{1}{\alpha}\|A(A^{-1}y)\|_{H^*} = \frac{1}{\alpha}\|y\|_{H^*}.$$

Λόγω συνέχειας, ο τελεστής αυτός επεκτείνεται συνεχώς στον $\overline{A^{-1}} : \overline{R(A)} \to \widehat{V}$, όπου με $\widehat{V}$ θεωρούμε την πλήρωση του V (χρειαζόμαστε χώρο Banach για να γίνει η επέκταση). Έστω $f \in V^*$, αναζητάμε $u \in H : B(u, v) = f(v),\ v \in V$, ή ισοδύναμα

$$\langle u, Av\rangle = f(v),\ v \in V \Leftrightarrow \langle u, y\rangle = f(A^{-1}y),\ y \in R(A).$$

Έστω η ορθογώνια προβολή $P : H^* \to \overline{R(A)}$, τότε αν βρούμε $u \in H$ τέτοιο ώστε

$$\langle u, y\rangle = f(\overline{A^{-1}}Py),\ y \in H^* \Rightarrow \langle u, y\rangle = f(\overline{A^{-1}}Py) = f(\overline{A^{-1}}y) = f(A^{-1}y),\ y \in R(A).$$

Τώρα $\overline{A^{-1}}P : H^* \to \widehat{V}$ είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών, ορισμένη σε χώρο Banach. Συνεπώς, έχει συνεχή συζυγή απεικόνιση $(\overline{A^{-1}}P)^* : \widehat{V}^* = V^* \to H$. Έτσι η λύση είναι $u = (\overline{A^{-1}}P)^* f$. Πράγματι,

$$\langle(\overline{A^{-1}}P)^* f, y\rangle = \langle f, \overline{A^{-1}}Py\rangle = f(\overline{A^{-1}}Py),\ y \in H^*.$$

Υποθέτουμε ότι ισχύει το (b') και όχι το (a').

Τότε υπάρχει ακολουθία $\{v_n\}_n \in V : \|v_n\|_V = 1, \ \ \sup_{\|u\|_H \leq 1}|B(u,v_n)| < \frac{1}{n}, \ n \geq 1$. Από το (b'), για κάθε $f \in V^*$, υπάρχει $u_f \in H$:

$$|f(nv_n)| = |B(u_f, nv_n)| = n\|u_f\|_H |B(\frac{u_f}{\|u_f\|_H}, nv_n)|$$

$$\leq n\|u_f\|_H \sup_{\|u\|_H \leq 1}|B(u,v_n)| \leq \|u_f\|_H, \ n \geq 1.$$

Άρα η $\{nv_n\}$ είναι ασθενώς φραγμένη στο V ισοδύναμα είναι φραγμένη στο V, άτοπο διότι $\|nv_n\|_V = n\|v_n\|_V = n$. (*Υπενθύμηση: Ένα σύνολο $S \subset X$ είναι ασθενώς φραγμένο αν για κάθε $f \in X^*$ υπάρχει $r > 0$ ώστε για κάθε $x \in S \Rightarrow |f(x)| < r$.*) ■

Πόρισμα 24 *Η λύση που δίνεται παραπάνω στο (β′) ικανοποιεί την εκτίμηση*

$$\|u\|_H \leq (1/\alpha)\|f\|_{V^*}.$$

Απόδειξη. Ο τελεστής $\overline{A^{-1}}P : H^* \to \widehat{V}$ έχει νόρμα

$$\|\overline{A^{-1}}P\| \leq \|\overline{A^{-1}}\|\|P\| = \|\overline{A^{-1}}\| = \|A^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha}.$$

Επομένως, έχουμε ότι

$$\|u\|_H = \|\overline{(A^{-1}}P)^*f\| \leq \|\overline{(A^{-1}}P)^*\|\|f\|_{V^*} = \|\overline{A^{-1}}P\|\|f\|_{V^*} \leq \frac{1}{\alpha}\|f\|_{V^*}.$$

■

Πόρισμα 25 *Έστω ότι ο V εμφυτέυεται συνεχώς στον H, δηλαδή $\|v\|_H \leq c\|v\|_V$, για κάθε $v \in V$, και ότι η B είναι $V-$πιεστική, δηλαδή υπάρχει $\alpha > 0$ τέτοιο ώστε*

$$B(v,v) \geq \alpha\|v\|_V^2, \ v \in V.$$

Τότε ικανοποιείται το (α′) του Θεωρήματος Lions, επομένως υπάρχει λύση $u \in H$.

Απόδειξη. ([22]) Από την πιεστικότητα και τον ορισμό του $A : V \to H^*$ έχουμε

$$\alpha\|v\|_V^2 \leq B(v,v) = \langle v, Av\rangle \leq \|v\|_H\|Av\|_{H^*} \leq c\|v\|_V\|Av\|_{H^*}.$$

Επομένως $(\alpha/c)\|v\|_V \leq \|Av\|_{H^*}$, δηλαδή ικανοποιείται το (α′). ■

Παρατήρηση 11 *Παρατηρούμε εδώ ότι η λύση u δεν είναι μοναδική και αυτό γιατί την ορίσαμε παίρνοντας την ορθογώνια προβολή. Θα μπορούσαμε ισοδύναμα να είχαμε ορίσει λύση u μέσω μιας οποιασδήποτε άλλης προβολής, η οποία θα ήταν διαφορετική από αυτήν της ορθογώνιας προβολής.*

2.3.1 Εφαρμογή του Θεωρήματος Lions

Θα δούμε παρακάτω μια εφαρμογή του θωρήματος Lions σε εξελικτικά προβλήματα. Για τον σκοπό αυτό είναι αναγκαίο να αναφέρουμε τα παρακάτω δύο βασικά αποτελέσματα (βλ. [22] σελ.106):

Πρόταση 26 *Έστω ένας χώρος Banach V πυκνός και συνεχώς εμφυτεύσιμος σε ένα χώρο Hilbert H, ταυτίζουμε τον H με τον δυϊκό του H^* έτσι ώστε $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^*$. Τότε ο χώρος Banach $W_p(0,T) \equiv \{u \in L^p(0,T;V) : u' \in L^q(0,T;V^*)\}$ περιέχεται στον $C([0,T],H)$. Επιπλέον, αν $u \in W_p(0,T)$, τότε $\|u(\cdot)\|_H^2$ είναι απολύτως συνεχής στο $[0,T]$,*

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2 = 2\langle u'(t), u(t)\rangle_{V^*,V} \ \sigma.\pi \ in[0,T],$$

και υπάρχει μια σταθερά C για την οποία

$$\|u\|_{C([0,T],H)} \le C\|u\|_{W_p(0,T)},\ u \in W_p(0,T).$$

Πόρισμα 27 *Αν $u, v \in W_p(0,T)$, τότε $(u(\cdot), v(\cdot))_H$ είναι απόλυτα συνεχής στο $[0,T]$ και*

$$\frac{d}{dt}(u(t), v(t))_H = \langle u'(t), v(t)\rangle_{V^*,V} + \langle v'(t), u(t)\rangle_{V^*,V},\ \sigma.\pi \ [0,T].$$

Έστω Ω ένα ανοιχτό, φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με σύνορο $\Gamma = \partial\Omega$ Lipschitz συνεχές. Θεωρούμε τον διαφορικό τελεστή

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n}(a^{ij}u_{x_j})_{x_i} + cu$$

με $a^{ij}(t,x), c(t,x) \in L^\infty((0,T)\times\Omega)$ και $c(t,x) \ge c_0 > 0$ $\sigma.\pi$ στο $(0,T)\times\Omega$, όπου c_0 σταθερά. Υποθέτουμε ότι ο L είναι (ομοιόμορφα)ελλειπτικός, δηλαδή

$$a^{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \ge a|\xi|^2 \ \sigma.\pi \ \text{στο} \ (0,T)\times\Omega, \ \ \text{για κάθε} \ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Αναζητάμε $u : [0,T] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\begin{cases} u_t + Lu = f, & \text{στο } \Omega \\ u(t,x) = 0, & \text{για } x \in \Gamma, t > 0 \\ u(0,x) = u_0, & \text{στο } \Omega \end{cases} \tag{2.3.1}$$

όπου $f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ και $u_0 \in L^2(\Omega)$. Υποθέτοντας ότι για σταθερό t η $u(t,\cdot)$ είναι μια $C^2(\overline{\Omega})$ συνάρτηση, τότε όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα, πολλαπλασιάζουμε με κατάλληλη συνάρτηση δοκιμης $v \in C_0^\infty(\Omega)$ και ολοκληρώνουμε στο Ω την πρώτη σχέση

$$\int_\Omega u_t v \, dx + \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega (a^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} + cuv) \, dx = \int_\Omega fv \, dx. \tag{2.3.2}$$

Παρατηρούμε ότι για να έχουν νόημα τα παραπάνω ολοκληρώματα και να ισχύει η αρχική συνθήκη για την u, αρκεί να υποθέσουμε ότι, για κάθε t, η $u(t,\cdot) \in H_0^1(\Omega)$, $u_t(t,\cdot) \in H^{-1}(\Omega)$. Επιπλεόν, μας αρκεί $v \in H_0^1(\Omega)$. Ισοδύναμα δηλαδή, αν θέσουμε

$$a(t;u,v) = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega (a^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} + cuv) \, dx,$$

η παραπάνω σχέση γράφεται ως εξής

$$\langle u_t, v \rangle_{H^{-1},H_0^1} + a(t;u,v) = \langle f, v \rangle_{H^{-1},H_0^1}, \quad \text{για κάθε } v \in H_0^1(\Omega) \text{ και } t \in (0,T). \tag{2.3.3}$$

Θεωρούμε τον χώρο $V = \{v \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) : v_t \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \text{ και } v(T) = 0\}$, με νόρμα $\|v\|_V^2 = \|v\|^2_{L^2(0,T;H_0^1)} + \|v(0)\|^2_{L^2(\Omega)}$, ο οποίος προφανώς εμφυτεύεται συνεχώς στον $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Έστω $v \in V$, τότε ολοκληρώνοντας την (2.3.3) έχουμε

$$\int_0^T \langle u_t, v \rangle_{H^{-1},H_0^1} dt + \int_0^T a(t;u,v) dt = \int_0^T \langle f, v \rangle_{H^{-1},H_0^1} dt.$$

Στο σημείο αυτό θα εφαρμόσουμε το Πόρισμα 27 για τους χώρους $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$, όπου οι εμφυτευσεις είναι πυκνές και συνεχείς:

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(u(t),v(t))_{L^2(\Omega)} - \int_0^T \langle u(t), v_t(t) \rangle_{H^{-1},H_0^1} dt + \int_0^T a(t;u,v) dt = \int_0^T \langle f, v \rangle_{H^{-1},H_0^1} dt, \Leftrightarrow$$
$$\int_0^T a(t;u,v) dt - \int_0^T \langle u(t), v_t(t) \rangle_{H^{-1},H_0^1} dt = \int_0^T \langle f, v \rangle_{H^{-1},H_0^1} dt + (u_0, v(0))_{L^2(\Omega)}, \quad \text{για κάθε } v \in V.$$

Θέτουμε

$$B(u,v) = \int_0^T \left(a(t;u,v) - \langle u(t), v_t(t) \rangle_{H^{-1},H_0^1} \right) dt, \ u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \ v \in V$$

και

$$h(v) = \int_0^T \langle f, v \rangle_{H^{-1},H_0^1} dt + (u_0, v(0))_{L^2(\Omega)}, \ v \in V.$$

Θα δείξουμε ότι για $v \in V$, $B(\cdot, v) \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) = (L^2(0,T;H_0^1(\Omega)))^*$. Πράγματι, επειδή $a^{ij}(t,x), c(t,x) \in L^\infty((0,T)\times\Omega)$ υπάρχει σταθερά $M > 0$ τέτοια ώστε

$$|a^{ij}(t,x)|, |c(t,x)| \le M, \ \sigma.\pi. \text{ στο } (0,T)\times\Omega.$$

Όπως ακριβώς αποδείξαμε και στο Γενικό Ελλειπτικό πρόβλημα της παραγράφου 1.2.2, υπάρχει κατάλληλη σταθερά A ώστε

$$|a(t;u(t),v(t))| \le A\|u(t)\|_{H^1(\Omega)}\|v(t)\|_{H^1(\Omega)}, \text{ για κάθε } t \in (0,T).$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\int_0^T |a(t;u(t),v(t))| dt &\le A \int_0^T \|u(t)\|_{H^1(\Omega)}\|v(t)\|_{H^1(\Omega)} dt \\
&\le A \left(\int_0^T \|u(t)\|^2_{H^1(\Omega)} \right)^{1/2} \left(\int_0^T \|v(t)\|^2_{H^1(\Omega)} \right)^{1/2} \\
&= A\|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}\|v\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\int_0^T |\langle u(t), v_t(t) \rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}| &\le \int_0^T \|u(t)\|_{H^1(\Omega)}\|v_t(t)\|_{H^{-1}(\Omega)} \\
&\le \left(\int_0^T \|u(t)\|^2_{H^1(\Omega)} \right)^{1/2} \left(\int_0^T \|v_t(t)\|^2_{H^{-1}(\Omega)} \right)^{1/2} \\
&= \|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}\|v_t\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}.
\end{aligned}$$

Άρα

$$|B(u,v)| \le \left(A\|v\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|v_t\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \right) \|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))},$$

δηλαδή, για κάθε $v \in V$, η $B(\cdot, v)$ είναι φραγμένη.

Θα δείξουμε τώρα ότι υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε $B(v,v) \geq C\|v\|^2$, για κάθε $v \in V$.

Πράγματι, για $v \in V$ έχουμε ότι

$$\int_0^T |\langle v(t), v_t(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}| = \frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = -\frac{1}{2}\|v(0)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Επιπλέον, λόγω της ελλειπτικότητας του διαφορικού τελεστή

$$\begin{aligned} a(t; v(t), v(t)) - c_0 \int_0^T v^2(t)dx &\geq a\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \Rightarrow \\ a(t; v(t), v(t)) &\geq \min\{a, c_0\}\|v(t)\|^2_{H^1(\Omega)} = \beta\|v(t)\|^2_{H^1}, \end{aligned}$$

όπου $\beta = \min\{a, c_0\}$. Συνεπώς,

$$\int_0^T a(t; v(t), v(t)) \geq \beta \int_0^T \|v(t)\|^2_{H^1(\Omega)} = \beta\|v\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}.$$

Άρα

$$B(v,v) \geq \beta\|v\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \frac{1}{2}\|v(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \min\{\beta, \frac{1}{2}\}\|v\|^2_V = C\|v\|^2_V, \ v \in V,$$

δηλαδή είναι $V-$ελλειπτική. Τέλος, παρατηρούμε ότι το h είναι φραγμένο, πράγματι

$$\begin{aligned} |h(v)| &\leq \int_0^T |\langle f, v\rangle_{H^{-1}, H_0^1}| dt + |(u_0, v(0))_{L^2(\Omega)}| \\ &\leq \left(\int_0^T \|f(t)\|^2_{H^{-1}(\Omega)}\right)^{1/2} \left(\int_0^T \|v(t)\|^2_{H^1(\Omega)}\right)^{1/2} + \|u_0\|_{L^2(\Omega)}\|v(0)\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \|f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}\|v\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|u_0\|_{L^2(\Omega)}\|v(0)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \left(\|f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} + \|u_0\|_{L^2(\Omega)}\right)\|v\|_V. \end{aligned}$$

Συνεπώς, ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Πορίσματος 25, άρα υπάρχει ασθενής λύση για το πρόβλημα μας. Θα δείξουμε τώρα ότι είναι και μοναδική.

Έστω u_1, u_2 δύο λύσεις, τότε με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε ότι

$$\langle (u_1 - u_2)_t, v\rangle + a(t; u_1 - u_2, v) = 0, \quad \text{για κάθε } v \in H_0^1(\Omega),$$

όπου η ισότητα ισχύει υπό την έννοια των κατανομών $D^*(0,T)$. Για $v = u_1 - u_2 \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$,

$$\int_0^t \left(\langle (u_1-u_2)_t, u_1-u_2 \rangle + a(s,u_1-u_2,u_1-u_2) \right) ds = 0 \Rightarrow$$
$$\int_0^t \left(\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\|u_1-u_2\|^2_{L^2(\Omega)} + a(s,u_1-u_2,u_1-u_2) \right) ds = 0.$$

Όμως, λόγω της πιεστικότητας $a(s,u_1-u_2,u_1-u_2) \geq 0$, άρα $\|(u_1-u_2)(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = 0$, για κάθε $t \in [0,T]$, συνεπώς $u_1 \equiv u_2$.

Κεφάλαιο 3

Γενίκευση του Θεωρήματος Lax-Milgram με μη πιεστική συνθήκη

3.1 Γενίκευση του Θεωρήματος Lax-Milgram με μη πιεστική συνθήκη σε χώρους Hilbert

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δείξουμε ότι γραμμικοί τελεστές από ένα χώρο Hilbert στον εαυτό του, οι οποίοι ικανοποιούν κάποιες γενικότερες συνθήκες πιεστικότητας είναι αντιστρέψιμοι.
Έστω ένας γραμμικός τελεστής $A : H \to H$, όπου H χώρος Hilbert. Ο A είχαμε ορίσει ότι θα ονομάζεται πιεστικός αν υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε $\langle Ax, x\rangle \geq c\|x\|^2$, για κάθε $x \in H$. Η συνθήκη αυτή μας επιβάλει το πρόσημο του $\langle Ax, x\rangle$ να παραμένει θετικό. Παρακάτω θα ορίσουμε συνθήκες ώστε να επιτρέπεται η αλλαγη του προσήμου, πράγμα που μας δίνει ένα γενικότερο αποτέλεσμα, καθώς η κλάση αυτών των τελεστών είναι μεγαλύτερη.
Θα δείξουμε ότι ικανοποιούνται τα επόμενα θεωρήματα.

Θεώρημα 28 *Έστω H χώρος Hilbert και $A : H \to H$ ένας γραμμικός τελεστής. Αν υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε*

$$\langle Ax, x\rangle + \|Ax\|\|x\| \geq c\|x\|^2, \quad \text{για κάθε } x \in X, \tag{3.1.1}$$

τότε ο A είναι φραγμένος και αντιστρέψιμος.

Θεώρημα 29 *Έστω H χώρος Hilbert, $A : H \to H$ ένας γραμμικός τελεστής, V ένας υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης k με $V = span\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$, P μια φραγμένη προβολή από τον H στον V και $\gamma > 0$. Αν υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε*

$$\langle Ax, x\rangle + \|Ax\|\|x\| + \gamma\|PAx\|\|x\| \geq c\|x\|^2, \quad \text{για κάθε } x \in X, \tag{3.1.2}$$

ή ισοδύναμα

$$\langle Ax, x\rangle + \|Ax\|\|x\| + \gamma(\sum_{j=1}^{k}\langle Ax, y_j\rangle^2)^{1/2}\|x\| \geq c\|x\|^2, \quad \text{για κάθε } x \in X,$$

τότε ο A είναι φραγμένος και αντιστρέψιμος.

Θεώρημα 30 *Έστω H χώρος Hilbert, $A : H \to H$ ένας γραμμικός τελεστής και K ένας συμπαγής γραμμικός τελεστής στον H. Αν υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε*

$$\langle Ax, x\rangle + \|Ax\|\|x\| + \|KAx\|\|x\| \geq c\|x\|^2, \quad \text{για κάθε } x \in X, \tag{3.1.3}$$

τότε ο A είναι φραγμένος και αντιστρέψιμος.

Τα παραπάνω θεωρήματα μπορούν να θεώρηθουν ως μη πιεστικές γενικέυσεις του Θεωρήματος Lax-Milgram και αποδείχθηκαν από τον J. Saint Raymond το 1997 (βλ. [20]). Για την αποδειξή τους θα χρειαστούμε κάποια Λήμματα.

Λήμμα 6 *Έστω A ένας γραμμικός τελεστής στον H που ικανοποιεί την (3.1.2). Τότε ο A είναι ένα προς ένα.*

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned} c\|x\|^2 &\leq \langle Ax, x\rangle + \|Ax\|\|x\| + \gamma\|PAx\|\|x\| \\ &\leq \|Ax\|\|x\| + \|Ax\|\|x\| + \gamma\|Ax\|\|x\| = (\gamma + 2)\|Ax\|\|x\|. \end{aligned}$$

Έτσι για $x \neq 0$ έχουμε $c\|x\| \leq (\gamma + 2)\|Ax\|$ και άρα αν $Ax = 0 \;\Rightarrow x = 0$, άτοπο. Δηλαδή $N(A) = \{0\}$. ∎

Λήμμα 7 *Έστω A ένας γραμμικός τελεστής στον H που ικανοποιεί την (3.1.2). Τότε για κάθε πραγματικό αριθμό $t \geq 0$ και για κάθε $x \in V^{\perp}$ ικανοποιείται η ακόλουθη ανισότητα*

$$\|(A+tI)x\| \geq \frac{c}{\gamma+2}\|x\|.$$

Απόδειξη. Εφόσον $x \in V^{\perp}$,

$$P(A+tI)x = PAx + tPx = PAx,$$

$$\begin{aligned}\langle (A+tI)x, x\rangle + \|(A+tI)x\|\|x\| &= \langle Ax, x\rangle + t\|x\|^2 + \|Ax+tx\|\|x\| \\ &\geq \langle Ax, x\rangle + t\|x\|^2 + \|Ax\|\|x\| - \|tx\|\|x\| \\ &= \langle Ax, x\rangle + \|Ax\|\|x\|.\end{aligned}$$

Έτσι

$$\begin{aligned}&\langle (A+tI)x, x\rangle + \|(A+tI)x\|\|x\| + \gamma\|P(A+tI)x\|\|x\| \\ &\qquad \geq \langle Ax, x\rangle + \|Ax\|\|x\| + \gamma\|PAx\|\|x\| \geq c\|x\|^2\end{aligned}$$

και εφόσον

$$\begin{aligned}&\langle (A+tI)x, x\rangle + \|(A+tI)x\|\|x\| + \gamma\|P(A+tI)x\|\|x\| \\ &\leq \|(A+tI)x\|\|x\| + \|(A+tI)x\|\|x\| + \gamma\|(A+tI)x\|\|x\| \\ &= (\gamma+2)\|(A+tI)x\|\|x\|\end{aligned}$$

έχουμε

$$(\gamma+2)\|(A+tI)x\|\|x\| \geq c\|x\|^2.$$

■

Πόρισμα 31 *Έστω A είναι ένας συνεχής γραμμικός τελεστής στον H που ικανοποιεί την (3.1.2). Τότε, για κάθε πραγματικό αριθμό $t \geq 0$, ο χώρος $(A+tI)(V^{\perp})$ είναι κλειστός στον H. Επιπλέον, $A+tI$ είναι ένα προς ένα στον $V^{\perp}$.*

Απόδειξη. Από το Λήμμα 7 έχουμε άμεσα $V^{\perp} \cap N(A+tI) = \{0\}$. Έτσι ο $A+tI$ είναι ένα προς ένα στον $V^{\perp}$. Έστω $\{u_n\}$ μια ακολουθία στον $(A+tI)(V^{\perp})$ που συγκλίνει σε κάποιο $u \in H$. Αν $u_n = (A+tI)x_n$ με $x_n \in V^{\perp}$, έχουμε από το Λήμμα 7

$$\|x_n - x_m\| \leq \frac{\gamma+2}{c}\|u_n - u_m\|.$$

Άρα η $\{x_n\}$ είναι ακολουθία Cauchy στον $V^{\perp}$ που είναι κλειστός υπόχωρος του H και συνεπώς η ακολουθία $\{x_n\}$ συγκλίνει σε κάποιο $x \in V^{\perp}$. Επιπλέον, ο A είναι συνεχής, άρα

$$(A+tI)x = \lim_{n\to\infty}(A+tI)x_n = \lim_{n\to\infty} u_n = u.$$

Έτσι $u \in (A+tI)(V^{\perp})$. ■

Λήμμα 8 *Έστω A ένας συνεχής γραμμικός τελεστής στον H που ικανοποιεί την (3.1.2). Τότε, για κάθε πραγματικό $t \geq 0$, ο χώρος $(A+tI)(V^{\perp})$ έχει συνδιάσταση k στον H.*

Απόδειξη. Θέτουμε $F = V^{\perp}$ και T το σύνολο

$$T = \{t \geq 0 : (A+tI)(F) \text{ να μην είναι συνδιάστασης } k\}$$

Θα δείξουμε ότι $T = \emptyset$.

Κατάρχήν, παρατηρούμε ότι για $t > \|A\|$, ο τελεστής $A+tI$ είναι αντιστρέψιμος στον H, διότι $\sigma(A) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|A\|\}$. Άρα ο $A+tI$ είναι ένα προς ένα και επί. Έτσι οι υπόχωροι $(A+tI)(F)$ και $(A+tI)(V)$ είναι συμπληρωματικοί και εφόσον $dim((A+tI)(V)) = dim(V) = k$ έχουμε ότι το t δεν ανήκει στο T. Δηλαδή, $T \subset [0, \|A\|]$.

Επομένως, αν T δεν είναι κενό, θα έχει ένα άνω φράγμα θ. Θα συμβολίζουμε με E_θ τον ορθογώνιο υπόχωρο του $(A+\theta I)(F)$ και ορίζουμε τον τελεστή S_t από τον $F \times E_\theta$ στον H ως εξής:

$$S_t(x,u) = (A+tI)x + u.$$

Τότε ο S_t είναι συνεχής για κάθε $t \geq 0$. Επιπλέον, ο S_θ είναι ένα προς ένα, καθώς $H = (A+\theta I)(F) \oplus E_\theta$ και από το Πόρισμα 31 ο $A+\theta I : F \to (A+\theta I)(F)$ είναι ένα προς ένα. Επίσης, ο S_θ είναι επί, άρα είναι αντιστρέψιμος.

Επειδή το σύνολο των αντιστρέψιμων τελεστών είναι ανοιχτό υποσύνολο των γραμμικών φραγμένων τελεστων, έχουμε ότι θα υπάρχει $\rho > 0$ τέτοιο ώστε S_t να είναι αντιστρέψιμος για κάθε $|t-\theta| < \rho$. Πράγματι, είναι γνωστό ότι κάθε τελεστης $T \in \mathcal{B}(H)$ με $\|S_\theta - T\| < \|S_\theta^{-1}\|^{-1}$ είναι αντιστρέψιμος. Άρα οι τελεστές S_t για τους οποίους ισχύει η σχέση $\|S_\theta - S_t\| < \|S_\theta^{-1}\|^{-1}$ είναι αντιστρέψιμοι, δηλαδή

$$\begin{aligned}\|S_\theta - S_t\| &= \sup_{\|x\|=\|u\|=1}\{\|(A+tI)x-(A+\theta I)x\|\} = \\ &= |t-\theta| \sup_{\|x\|=1}\{\|Ix\|\} = |t-\theta| < \|S_\theta^{-1}\|^{-1} \\ &\Rightarrow |t-\theta| < \|S_\theta^{-1}\|^{-1} = \rho.\end{aligned}$$

Συγκεκριμένα τώρα, για $t = \theta + \frac{\rho}{2} > \theta$, ο $(A+tI)(F)$ έχει συνδιάσταση k στον H. Επειδή ο S_t είναι αντιστρέψιμος, θα είναι επί και άρα $H = S_t(F \times E_\theta) = (A+tI)(F) + E_\theta$. Επίσης, $(A+tI)(F) \cap E_\theta = \{0\}$. Πράγματι, σε διαφορετική περίπτωση θα υπήρχε $x \in F$ τέτοιο ωστε $(A+tI)x \in E_\theta$ και άρα $S_t(x,0) = S_t(0,(A+tI)x) = (A+tI)x$. Όμως, ο S_t είναι ένα προς ένα, άτοπο.

Επομένως, τα $(A+tI)(F)$ και E_θ είναι συμπληρωματικοί υπόχωροι, άρα $dim(E_\theta) = k$.

Ομοίως, για $\theta - \rho < t \leq \theta$, ο S_t είναι αντιστρέψιμος, άρα οι $(A+tI)(F)$ και E_θ είναι συμπληρωματικοί και $dim(E_\theta) = k$, δηλαδή ο $(A+tI)(F)$ έχει συνδιάσταση k. Συνεπώς, θα πρέπει $\theta = \sup T \leq \theta - \rho$, άτοπο. Άρα $T = \emptyset$.

■

Θεώρημα 32 *Έστω A ένας συνεχής γραμμικός τελεστής στον H που ικανοποιεί την (3.1.2). Τότε ο A είναι αντιστρέψιμος.*

Απόδειξη. Από το Λήμμα 8, $A(V^\perp)$ είναι συνδιάστασης k. Από το Λήμμα 6 ο A είναι ένα προς ένα. Έτσι $A(V)$ έχει διάσταση k και $A(V^\perp) \cap A(V) = \{0\}$. Πράγματι, έστω $x \in A(V^\perp) \cap A(V)$, τότε υπάρχουν $u \in V^\perp, v \in V$ τέτοια ώστε $Au = Av = x$, ισοδύναμα $A(u-v) = 0$, δηλαδή $u - v \in N(A) = \{0\}$. Άρα $u = v$ και $V^\perp \cap V = \{0\}$, συνεπώς έχουμε ότι $u = v = 0$ και άρα $Au = Av = 0$, δηλαδή $x = 0$. Εφόσον, ο V έχει διάσταση k και ο A είναι γραμμικός, η διάσταση του $A(V)$ θα είναι k και αφού $A(V)$ και $A(V^{\perp})$ έχουν κενή τομή έχουμε ότι $A(H) = A(V) + A(V^{\perp}) = H$. Συνεπώς, επειδή ο A είναι συνεχής, ένα προς ένα από τον H επί του H, θα είναι αντιστρέψιμος. ■

Θεώρημα 33 *Έστω A και K συνεχείς τελεστές στον H, με τον K συμπαγή. Αν ο A ικανοποιεί την (3.1.3), τότε ο A είναι αντιστρέψιμος.*

Απόδειξη. Έστω $\gamma = \|K\|$. Παρατηρούμε ότι ο K^*K είναι συμπαγής καθώς το σύνολο των συμπαγών τελεστών είναι γνήσιο ιδεώδες του $\mathcal{B}(H)$. Επίσης είναι αυτοσυζυγής και θετικός, καθώς $\langle K^*Kx, x\rangle = \langle Kx, Kx\rangle = \|Kx\|^2 \geq 0, \quad$ για κάθε $x \in H$. Έτσι ορίζεται ο $K_1 = (K^*K)^{1/2}$ ο οποίος είναι συμπαγής, αυτοσυζυγής και θετικός με $\gamma = \|K\| = \|K_1\|$. Πράγματι, για κάθε $y \in H$,

$$\|K_1 y\|^2 = \langle K_1 y, K_1 y\rangle = \langle K_1^2 y, y\rangle = \langle K^*Ky, y\rangle = \langle Ky, Ky\rangle = \|Ky\|^2 \Rightarrow$$
$$\|K_1\| = \sup\{\frac{\|K_1 y\|}{\|y\|} : y \in H\} = \sup\{\frac{\|Ky\|}{\|y\|} : y \in H\} = \|K\|.$$

Επομένως, η (3.1.3) μπορεί να γραφτεί ως

$$\langle Ax, x\rangle + \|Ax\|\|x\| + \|K_1 Ax\|\|x\| \geq c\|x\|^2.$$

Έτσι χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο K είναι αυτοσυζυγής . Συνεπώς, θα υπάρχει μια ορθοκανονική ακολουθία $\{y_j\}$ και μια ακολουθία μη αρνητικών ιδιοτιμών $\{\lambda_j\}$ τέτοια ώστε, για κάθε $y \in H$,

$$\|Ky\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 \langle y, y_j\rangle^2.$$

Επιπλέον, η ακολουθία $\{\lambda_j\}$ συγκλίνει στο μηδέν. Θέτουμε $\varepsilon = \frac{c}{2\|A\|}$, τότε υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\lambda_j < \varepsilon$ για $j > k$. Επίσης, $\lambda_j \leq \gamma$, για κάθε $j \in \mathbb{N}$, διότι $\sigma(K) \subseteq [-\|K\|, \|K\|] \subseteq \mathbb{R}$. Τότε, για κάθε x στον H, έχουμε ότι

$$\|KAx\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 \langle Ax, y_j\rangle^2 \leq \sum_{j=1}^{k} \gamma^2 \langle Ax, y_j\rangle^2 + \sum_{j=k+1}^{\infty} \varepsilon^2 \langle Ax, y_j\rangle^2$$
$$\leq \gamma^2 \sum_{j=1}^{k} \langle Ax, y_j\rangle^2 + \varepsilon^2 \sum_{j=1}^{\infty} \langle Ax, y_j\rangle^2$$

$$\leq \gamma^2 \sum_{j=1}^{k} \langle Ax, y_j \rangle^2 + \varepsilon^2 \sum_{j=1}^{\infty} \langle Ax, y_j \rangle^2 \leq \gamma^2 \sum_{j=1}^{k} \langle Ax, y_j \rangle^2 + \varepsilon^2 \|Ax\|^2$$
$$\leq \gamma^2 \sum_{j=1}^{k} \langle Ax, y_j \rangle^2 + \varepsilon^2 \|A\|^2 \|x\|^2 \leq \gamma^2 \sum_{j=1}^{k} \langle Ax, y_j \rangle^2 + \frac{c^2}{4} \|x\|^2.$$

Δηλαδή

$$\|KAx\| \leq \frac{c}{2} \|x\| + \gamma \sqrt{\sum_{j=1}^{k} \langle Ax, y_j \rangle^2}$$

και από την (3.1.3) έχουμε

$$\langle Ax, x \rangle + \|Ax\| \|x\| + \gamma \sqrt{\sum_{j=1}^{k} \langle Ax, y_j \rangle^2} \|x\| \geq$$
$$\langle Ax, x \rangle + \|Ax\| \|x\| + \left(\|KAx\| - \frac{c}{2} \|x\| \right) \|x\| \geq \frac{c}{2} \|x\|^2.$$

Επομένως, ο A ικανοποιεί την (3.1.2) (με $c/2$ αντί για c). Τότε ισχύουν τα συμπεράσματα του Θεωρήματος 32. ■

Αν υποθέσουμε ότι ο A δεν είναι συνεχής. Θα συμβολίζουμε με W τον κλειστό υπόχωρο του H που ορίζεται ως εξής

$$W = \{ w \in H : \text{υπάρχει ακολουθία } \{x_n\} \text{ τέτοια ώστε } \lim_{n \to \infty} x_n = 0 \text{ και } \lim_{n \to \infty} Ax_n = w \}.$$

Λήμμα 9 *Έστω X και Y δύο χώροι Banach και Φ μια συνεχής γραμμική απεικόνιση από τον X επί του Y. Τότε για κάθε κλειστό γραμμικό υπόχωρο G του X τέτοιος ώστε $N(\Phi) \subset G$, το $\Phi(G)$ είναι κλειστό στον Y.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα Ανοιχτής Απεικόνισης η Φ είναι ανοικτή απεικόνιση. Έτσι $\Phi(X \setminus G)$ είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του Y. Παρατηρούμε ότι

$$\Phi(X \setminus G) = \Phi(X) \setminus \Phi(G) = Y \setminus \Phi(G).$$

Άρα το $\Phi(G)$ είναι κλειστό. ■

Για ένα γραμμικό τελεστή A στον H, θα συμβολίζουμε με q την ορθογώνια προβολή επί του $W^{\perp}$ και θέτουμε $A' = qA$.

Λήμμα 10 *Ο A' είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με G_A (αντίστοιχα $G_{A'}$) το γράφημα του A (αντίστοιχα A') στον $H \times H$. Αν $\Phi(x,y) = (x, qy)$, έχουμε $G_{A'} = \Phi(G_A)$. Εξ' ορισμού του W, έχουμε $W_0 = \{0\} \times W \subset \overline{G_A}$(πρακτικά το W περιέχει οριακά σημεία του $A(H)$), έτσι $G_A + W_0 \subset \overline{G_A}$. Αντίστροφα, αν $(x,y) \in \overline{G_A}$, τότε υπάρχει ακολουθία $\{(x_n, y_n)\}$ στο G_A που συγκλίνει στο (x,y). Τότε $(x_n - x, Ax_n - Ax) \in G_A,\ x_n - x \to 0$ και $A(x_n - x) = Ax_n - Ax \to y - Ax$. Άρα $y - Ax \in W$ και $(x,y) = (x, Ax) + (0, y - Ax) \in G_A + W_0$. Συνεπώς, $\overline{G_A} = G_A + W_0$. Εφόσον τώρα $\overline{G_A} \supset W_0 = N(\Phi)$, από το Λήμμα 9 έχουμε ότι $\Phi(\overline{G_A})$ είναι κλειστό, αλλά

$$\Phi(\overline{G_A}) = \Phi(G_A + (\{0\} \times W)) = \Phi(G_A) + \Phi(W_0) = \Phi(G_A) = G_{A'}.$$

Έτσι αφού $G_{A'}$ είναι κλειστό από Θεώρημα κλειστού γραφήματος, ο A' είναι συνεχής. ■

Λήμμα 11 *Αν ο A ικανοποιεί την (3.1.2) ή την (3.1.3), τοτε και ο A' την ικανοποιεί.*

Απόδειξη. Επειδή ο τελεστής γP είναι πεπερασμένης τάξης, θα είναι συμπαγής, άρα αρκεί να δείξουμε το Λήμμα για την περίπτωση που ικανοποιείται η (3.1.3). Έστω $x \in H$. Τότε $w = A'x - Ax \in W$, διότι $w = qAx - Ax \perp W^{\perp} \Rightarrow w \in W$. Συνεπώς, θα υπάρχει ακολουθία $\{x_n\}$ με $x_n \to 0$, τέτοια ώστε $w = \lim_{n\to\infty} Ax_n$. Εφαρμόζοντας τώρα την (3.1.3) στο $x + x_n$, έχουμε

$$\langle A(x+x_n), x+x_n\rangle + \|A(x+x_n)\|\|x+x_n\| + \|KA(x+x_n)\|\|x+x_n\| \geq c\|x+x_n\|^2$$

και παίρνοντας $n \to \infty$

$$\langle Ax + w, x\rangle + \|Ax+w\|\|x\| + \|K(Ax+w)\|\|x\| \geq c\|x\|^2 \Rightarrow$$
$$\langle A'x, x\rangle + \|A'x\|\|x\| + \|KA'x\|\|x\| \geq c\|x\|^2.$$

Άρα ο A' ικανοποιεί την (3.1.3). ■

Θα αποδείξουμε τώρα το Θεώρημα 30:

Απόδειξη. Αν ο A ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 30, τότε ο A' είναι συνεχής από το Λήμμα 10 και ικανοποιεί την (3.1.3) από το Λήμμα 11. Έτσι ο A' είναι αντιστρέψιμος από το Θεώρημα 33. Συγκεκριμένα,

$$H = A'(H) = q(A(H)) \subset W^{\perp}.$$

Έτσι $W^{\perp} = H, q = I$ και $A' = qA = A$. Συνεπώς, ο A είναι συνεχής και αντιστρέψιμος. ∎

Τώρα η απόδειξη του Θεωρήματος 29 είναι άμεση.

Απόδειξη. Αν ο A ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 29, τότε ικανοποιεί την (3.1.2). Αφού ο γP είναι συμπαγής τελεστής, το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 30. ∎

Τέλος, αν ένας τελεστής ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 28, τότε θα ικανοποιεί και τις υποθέσεις του Θεωρήματος 29. Άρα είναι συνεχής και αντιστρέψιμος.

3.2 Γενίκευση του Θεωρήματος Lax-Milgram με μη πιεστική συνθήκη σε χώρους Banach

Στην προηγούμενη παράγραφο δώσαμε τρεις συνθήκες για τις οποίες αποδείξαμε την αντιστρεψιμότητα του A σε ένα χώρο Hilbert. Θα αναφέρουμε παρακάτω ανάλογες συνθήκες που μας εξασφαλίζουν την αντιστρεψιμότητα του A σε χώρους Banach. Τα αποτελέσματα αυτά είναι των Δ. Δριβαλιάρη και Ν. Γιαννακάκη (βλ. [8]).

Έστω X ένας χώρος Banach. Θα συμβολίζουμε με $J : X \to 2^{X^*}$ τη δυϊκή απεικόνιση από τον X που ορίζεται ως

$$J(x) = \{x^* \in X^* | \langle x^*, x\rangle = \|x\|^2 \text{και } \|x^*\| = \|x\|\}.$$

Θεώρημα 34 *Έστω $A : X \to X$ ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής. Αν υπάρχει τελεστής $F : X \to X$ πεπερασμένης τάξης και $c > 0, \gamma > 0$ σταθερές τέτοιες ώστε, για κάθε $x \in X$, υπάρχει $x^* \in J(x)$ με*

$$\langle x^*, Ax\rangle + \|Ax\|\|x\| + \gamma\|FAx\|\|x\| \geq c\|x\|^2. \tag{3.2.1}$$

Τότε ο A είναι αντιστρέψιμος.

Παρατηρούμε ότι αν υπάρχει σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε $x \in X$, να υπάρχει $x^* \in J(x)$ με

$$\langle x^*, Ax\rangle + \|Ax\|\|x\| \geq c\|x\|^2 \tag{3.2.2}$$

τότε ισχύει το Θεώρημα 34 και άρα ο A είναι αντιστρέψιμος. Η συνθήκη αυτή είναι ανάλογη της (3.1.1). Όπως επίσης αν υπάρχει πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος V του X, μια φραγμένη γραμμική προβολή από τον X επί του V, $c > 0$ και $\gamma > 0$ ώστε, για κάθε $x \in X$, να υπάρχει $x^* \in J(x)$ με

$$\langle x^*, Ax\rangle + \|Ax\|\|x\| + \gamma\|PAx\|\|x\| \geq c\|x\|^2, \tag{3.2.3}$$

τότε ισχύει το Θεώρημα 34 και άρα ο A είναι αντιστρέψιμος. Η συνθήκη αυτή είναι ανάλογη της (3.1.2).

Για να αποδείξουμε το Θεώρημα αυτό θα χρειαστεί πρώτα να αποδείξουμε κάποια λήμματα.

Λήμμα 12 *Έστω A ένας γραμμικός τελεστής που ικανοποιεί την (3.2.1). Τότε, για κάθε x,*

$$\|Ax\| \geq \frac{c}{2+\gamma\|F\|}\|x\|.$$

Απόδειξη. Έστω $x \in X$, τότε για το $x^* \in J(x)$ της συνθήκης (3.2.1) έχουμε

$$c\|x\|^2 \leq \langle x^*, Ax\rangle + \|Ax\|\|x\| + \gamma\|FAx\|\|x\| \leq (2+\gamma\|F\|)\|Ax\|\|x\|$$

και άρα

$$\|Ax\| \geq \frac{c}{2+\gamma\|F\|}\|x\|.$$

■

Θα συμβολίζουμε από εδώ και πέρα ως M τον υπόχωρο $N(F)$. Καθώς ο F είναι τελεστής πεπερασμένης τάξης, ο M θα έχει πεπερασμένη συνδιάσταση. Επειδή ο M είναι κλειστός υπόχωρος πεπερασμένης συνδιάστασης θα υπάρχει N πεπερασμένης διάστασης ώστε
$X = M \oplus N$.Θα δείξουμε τωρα ότι αν ο A ικανοποιεί την συνθήκη (3.2.1), τότε, για κάθε $t > 0$, ο $A + tI$ ικανοποιεί την συνθήκη (3.2.1) πάνω στο M.

Λήμμα 13 *Έστω A ένας γραμμικός τελεστής που ικανοποιεί την συνθήκη (3.2.1). Τότε, για κάθε $x \in M$, υπάρχει $x^* \in J(x)$ τέτοιο ώστε, για κάθε $t > 0$,*

$$\langle x^*, (A+tI)x\rangle + \|(A+tI)x\|\|x\| + \gamma\|F(A+tI)x\|\|x\| \geq c\|x\|^2.$$

Απόδειξη. Έστω $t > 0$. Αν $x \in M$, τότε $Fx = 0$. Επομένως, αν $x^* \in J(x)$ είναι αυτό που αντιστοιχεί στο x από την (3.2.1), έχουμε

$$\begin{aligned}
\langle x^*, Ax + tx\rangle &+ \|(A+tI)x\|\|x\| + \gamma\|F(A+tI)x\|\|x\| \\
&\geq \langle x^*, Ax\rangle + t\|x\|^2 + (\|Ax\| - t\|x\|)\|x\| + \gamma\|FAx\|\|x\| \\
&= \langle x^*, Ax\rangle + \|Ax\|\|x\| + \gamma\|FAx\|\|x\| \ \ (\text{από την } (3.2.1)) \\
&\geq c\|x\|^2.
\end{aligned}$$

■

Από τα Λήμματα 12 και 13 έχουμε

Λήμμα 14 *Έστω A ένας γραμμικός τελεστής που ικανοποιεί την συνθήκη (3.2.1). Τότε, για κάθε $x \in M$ και $t > 0$,*

$$\|(A+tI)x\| \geq \frac{c}{2+\gamma\|F\|}\|x\|.$$

Λήμμα 15 *Έστω A ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής που ικανοποιεί την (3.2.1). Τότε ο $A + tI$ έχει κλειστό σύνολο τιμών, για κάθε $t \geq 0$.*

Απόδειξη. Επειδή ο A είναι φραγμένος, από το Λήμμα 12 θα έχουμε ότι ο A έχει κλειστό σύνολο τιμων, καθώς είναι κάτω φραγμένος. Επιπλέον, από το Λήμμα 14 έχουμε ότι για όλα $t > 0$, το $(A + tI)(M)$ είναι κλειστό. Επίσης ο N είναι πεπερασμένης διάστασης και άρα ο $(A + tI)(N)$ θα είναι πεπερασμένης διάστασης. Συνεπώς,

$$(A+tI)(X) = (A+tI)(M) + (A+tI)(N)$$

θα είναι κλειστός, καθώς αποδεικνύεται γενικά ότι το άθροισμα ενός κλειστού υπόχωρου με ένα πεπερασμένης διάστασης υπόχωρο είναι κλειστός υπόχωρος. ■

Ένας φραγμένος τελεστής ο οποίος ικανοποιεί την (3.2.1) από το Λήμμα 12 έχουμε ότι είναι ένα προς ένα. Στόχος μας είναι να δείξουμε ότι είναι και επί. Για την απόδειξη αυτού θα χρειαστούμε την επόμενη Πρόταση της οποίας η απόδειξη βασίζεται στο παρακάτω Λήμμα

Λήμμα 16 *Έστω X χώρος Banach. Αν M είναι κλειστός υπόχωρος του X με συνδιάσταση n, τότε υπάρχει προβολή Q τέτοια ώστε $N(Q) = M$ και $\|Q\| \leq 2n$.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε το αποτέλεσμα με επαγωγή. Όταν M έχει συνδιάσταση ένα, τότε είναι εύκολο να κατασκευάσουμε προβολή Q τέτοια ώστε $N(Q) = M$ και $\|Q\| \leq 2$. Υποθέτουμε τώρα ότι για κάθε χώρο Banach X και κάθε υπόχωρο του M με συνδιάσταση $n-1$ υπάρχει φραγμένη προβολή $Q : X \to X$ με $N(Q) = M$ και $\|Q\| \leq 2(n-1)$. Έστω X ένας χώρος Banach και M υπόχωρος συνδιάστασης n. Τότε υπάρχουν $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ γραμμικώς ανεξάρτητα με

$$X = M \oplus span\{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Έστω $M_1 = M \oplus span\{x_1\}$. Τότε προφανώς η συνδιάσταση του M_1 είναι $n-1$. Επομένως, από την επαγωγική υπόθεση, υπάρχει φραγμένη προβολή Q_1 με $N(Q_1) = M_1$ και
$\|Q_1\| \leq 2(n-1)$. Έστω τώρα $M_2 = M \oplus Q_1(X)$. Είναι προφανές ότι η συνδιάσταση του M_2 είναι ένα. Επομένως, από το βασικό βήμα της επαγωγής, υπάρχει φραγμένη προβολή Q_2 με $N(Q_2) = M_2$ και $\|Q_2\| \leq 2$. Αν $Q = Q_1 + Q_2$, τότε Q είναι μια προβολή με $N(Q) = M$ και $\|Q\| \leq 2n$. ■

Πρόταση 35 *Έστω A ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής που ικανοποιεί την (3.2.1). Αν, για κάποιο $t_0 \geq 0$, ο υπόχωρος $(A + t_0 I)(M)$ έχει συνδιάσταση n, τότε το ίδιο ισχύει και για κάθε υπόχωρο $(A + tI)(M)$, για όλα τα t με $|t - t_0| < \delta$, όπου $\delta = c/\left((2 + \gamma\|F\|)(1 + 2n)\right)$.*

Απόδειξη. Εφόσον η συνδιάσταση του $(A+t_0I)(M)$ είναι n, από το Λήμμα 16, μπορούμε να βρούμε προβολή Q τέτοια ώστε $N(Q) = (A + t_0I)(M)$ και $\|Q\| \leq 2n$. Έστω $y \in X$. Τότε, για κάθε $z \in X$, υπάρχει μοναδικό $x \in M$ τέτοιο ώστε

$$y + (t_0 - t)z = (A + t_0I)x + Q(y + (t_0 - t)z).$$

Συνεπώς, μπορούμε να ορίσουμε τον τελεστή $T : X \to X$ με $Tz = x$. Θα δείξουμε τώρα ότι ο

T είναι συστολή. Έστω $z_1, z_2 \in X$. Από το Λήμμα 14 και για t όπως στην υπόθεση έχουμε

$$\begin{aligned}
\|Tz_1 - Tz_2\| = \|x_1 - x_2\| &\leq \frac{2+\gamma\|F\|}{c}\|(A+t_0I)(x_1-x_2)\| \\
&\leq \frac{2+\gamma\|F\|}{c}|t-t_0|\|I-Q\|\|z_1-z_2\| \\
&\leq \frac{2+\gamma\|F\|}{c}|t-t_0|(1+\|Q\|)\|z_1-z_2\| \\
&\leq \frac{(2+\gamma\|F\|)(1+2n)}{c}|t-t_0|\|z_1-z_2\| \\
&< \|z_1-z_2\|.
\end{aligned}$$

Από το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Banach([4]), ο T έχει μοναδικό σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει μοναδικό $x \in X$ τέτοιο ώστε

$$Tx = x.$$

Καθώς ο T παίρνει τιμές στο M, έχουμε ότι υπάρχει μοναδικό $x \in M$ τέτοιο ώστε

$$y = (A+tI)x + Q(y + (t_0 - t)x).$$

Εφόσον το y ήταν τυχαίο και η αναπαράσταση μοναδική έχουμε ότι

$$X = (A+tI)(M) \oplus Q(X)$$

και άρα η συνδιάσταση του $(A+tI)(M)$ είναι n. ∎

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $codim(M) = dim(N) = n$ και θα αποδείξουμε το Θεώρημα 34

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι ο A είναι επί. Για $t_0 > \|A\|$, ο $A + t_0I$ είναι αντιστρέψιμος και έτσι η συνδιάσταση του $(A+t_0I)(M)$ είναι n. Από την Πρόταση 35 έχουμε ότι

$$codim(A+tI)(M) = n, \text{ για κάθε } t \text{ με } |t-t_0| < \delta.$$

Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία αυτή, καθώς το δ είναι ανεξάρτητο από το t, έχουμε ότι

$$codim(A(M)) = n.$$

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει ο A είναι ένα προς ένα, άρα $A(M) \cap A(N) = \{0\}$ και $dimA(N) = n$. Επειδή $A(X) = A(M) + A(N)$ και από το Λήμμα 15 η εικόνα του A είναι κλειστή, θα πρέπει $X = A(X)$. ∎

Θεώρημα 36 *Έστω X χώρος Banach που ικανοποιεί την approximation property και $A : X \to X$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Αν υπάρχει $K : X \to X$ συμπαγής τελεστής και $c > 0, \gamma > 0$ σταθερές τέτοιες ώστε, για κάθε $x \in X$, να υπάρχει $x^* \in J(x)$ με*

$$\langle x^*, Ax \rangle + \|Ax\|\|x\| + \gamma \|KAx\|\|x\| \geq c\|x\|^2. \tag{3.2.4}$$

Τότε ο A είναι αντιστρέψιμος.

Όπως παρατηρούμε η συνθήκη (3.2.4) είναι γενίκευση της συνθήκης (3.1.3) σε χώρους Banach.
Απόδειξη. Καθώς ο X έχει την approximation property (δηλαδή κάθε συμπαγής τελεστής στον X είναι όριο ακολουθίας τελεστών πεπερασμένης τάξης) και ο K είναι συμπαγής, για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει ένας τελεστής πεπερασμένης τάξης F τέτοιος ώστε $\|K - F\| < \epsilon$. Επομένως,

$$\|Kx\| - \epsilon\|x\| < \|Fx\|, \text{για κάθε } x \in X.$$

Από την παραπάνω ανισότητα και τη (3.2.4) έχουμε, για κάθε $x \in X$,

$$\begin{aligned} \langle x^*, Ax \rangle + \|Ax\|\|x\| + \|FAx\|\|x\| &> \langle x^*, Ax \rangle + \|Ax\|\|x\| + \|KAx\|\|x\| - \epsilon\|Ax\|\|x\| \\ &> \langle x^*, Ax \rangle + \|Ax\|\|x\| + \|KAx\|\|x\| - \epsilon\|A\|\|x\|^2 \\ &\geq (c - \epsilon\|A\|)\|x\|^2. \end{aligned}$$

Για $\epsilon < c/\|A\|$ έχουμε άμεσα ότι ο A ικανοποιεί την (3.2.1). Συνεπώς, είναι αντιστρέψιμος από το Θεώρημα 34. ∎

Παράρτημα Α'

Παράρτημα

Α'.1 Αρχή Ελαχίστου

Θεώρημα 37 *Έστω V ένας ανακλαστικός χώρος Banach και $K \subseteq V$ φραγμένο και w-κλειστό. Αν $f : K \to \mathbb{R}$ είναι w-l.s.c, τότε υπάρχει $u \in K$ τέτοιο ώστε $f(u) = \inf_{v \in K} f(v)$.*

Απόδειξη. Έστω

$$a = \inf_{v \in K} f(v)$$

Εξ' ορισμού του infimum, θα υπάρχει ακολουθία $\{u_n\} \subseteq K$ με $f(u_n) \to a$, καθώς $n \to \infty$. Εφόσον το K είναι φραγμένο, η $\{u_n\} \subseteq K$ θα είναι φραγμένη στον V. Όμως, ο V είναι ανακλαστικός, άρα θα υπάρχει υπακολουθία $\{u_{n_k}\} \subseteq \{u_n\}$ τέτοια ώστε $u_{n_k} \xrightarrow{w} u \in V$. Επειδή όμως το K είναι ασθενώς κλειστό, έχουμε ότι $u \in K$ και η f είναι w-l.s.c, άρα

$$a \leq f(u) \leq \liminf f(u_{n_k}) = a.$$

Η πρώτη ανισότητα ισχύει διότι $u \in K$ και $a = \inf_{v \in K} f(v)$ και η δεύτερη διότι η $\{f(u_{n_k})\}$ είναι υπακολουθία της αρχικής $\{f(u_n)\}$ που συγκλίνει στο a.
Άρα $f(u) = a$ και αυτό το u είναι ο ελαχιστοποιητής (minimizer).Σημειώνουμε επίσης ότι η απόδειξη αυτή δείχνει ότι $a > -\infty$. ∎

Ορισμός 5 *Έστω V ένας χώρος με νόρμα, $K \subseteq V$. Μια απεικόνιση $f : V \to \mathbb{R}$ είναι πιεστική στο K αν*

$$f(v) \to +\infty, \text{ καθώς } \|v\| \to +\infty, \ v \in K.$$

Θεώρημα 38 *Έστω V ανακλαστικός χώρος Banach και $K \subseteq V$ w-κλειστό. Αν $f : K \to \mathbb{R}$ είναι w-l.s.c. και πιεστική στο K, τότε υπάρχει $u \in K$ τέτοιο ώστε $f(u) = \inf_{v \in K} f(v)$.*

Απόδειξη. Έστω $v_0 \in K$ και $K_0 = \{v \in K : f(v) \leq f(v_0)\}$. Επειδή η f είναι πιεστική το K_0 είναι φραγμένο. Πράγματι, αν ήταν μη φραγμένο, θα υπήρχε $\{v_n\} \subseteq K_0$ τέτοια ώστε $\|v_n\| \to +\infty$. Όμως, $f(v_n) \leq f(v_0)$, για κάθε $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim f(v_n) \leq f(v_0)$ και η f είναι πιεστική, άτοπο. Άρα K_0 φραγμένο.

Επειδή το K είναι w-κλειστό και η f w-l.s.c., το K_0 είναι w-κλειστό.

Πράγματι, έστω $\{v_n\} \subseteq K_0$ με $v_n \xrightarrow{w} v$, τότε $f(v) \leq \liminf f(v_n) \leq f(v_0)$ και K w-κλειστό άρα $v \in K$. Συνεπώς, $v \in K_0$.

Το πρόβλημα $\inf_{v \in K} f(v)$ είναι ισοδύναμο με το $\inf_{v \in K_0} f(v)$, όπου το τελευταίο έχει λύση από το Θεώρημα 37. ■

Θεώρημα 39 *Υποθέτουμε ότι $K \neq \emptyset$ κλειστό, κυρτό υποσύνολο του χώρου Hilbert V, $f \in V^*$. Έστω*

$$E(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 - f(v), \text{ για κάθε } v \in V$$

Τότε υπάρχει μοναδικό $u \in K$ έτσι ώστε

$$E(u) = \inf_{v \in K} E(v).$$

Το u αυτό καλείται ελαχιστοποιητής (minimizer) και χαρακτηρίζεται μοναδικά από την ανισότητα

$$u \in K, \ \ (u, v-u) \geq f(v-u), \text{ για κάθε } v \in K.$$

Επιπρόσθετα, αν K είναι υπόχωρος του V, τότε u είναι ισοδύναμα ορισμένο απο

$$u \in K, \ \ (u, v) = f(v), \text{ για κάθε } v \in K.$$

Απόδειξη. Επειδή το K είναι κλειστό και κυρτό, θα είναι και ασθενώς κλειστό. Παρατηρούμε ότι το E είναι w-l.s.c(ασθενώς κάτω ημισυνεχές). Πράγματι, έστω $\{u_n\}_n \subseteq K$ τέτοια ώστε $u_n \xrightarrow{w} u$, τότε $f(u_n) \to f(u)$ επειδή $f \in V^*$ (εξόρισμού της $w-$συγκλισης). Επιπλέον, από το Θεώρημα Banach-Steinhaus ([4]) ισχύει για την νόρμα η ανισότητα

$$\|u\| \leq \liminf \|u_n\|.$$

Άρα

$$\begin{aligned}\liminf E(u_n) &= \liminf \left(\frac{1}{2}\|u_n\|^2 - f(u_n)\right) \geq \frac{1}{2}\liminf \|u_n\|^2 - \liminf f(u_n) \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - f(u) = E(u).\end{aligned}$$

Επιπλέον, το E είναι πιεστικό, πράγματι

$$E(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 - f(v) \geq \frac{1}{2}\|v\|^2 - \|f\|\|v\| \geq \frac{1}{2}\|v\|^2 \Rightarrow E(v) \to +\infty, \text{ καθώς} \|v\| \to +\infty.$$

Από το Θεώρημα 38 εφόσον $E : K \to \mathbb{R}$ w-l.s.c, πιεστικό και το K είναι $w-$κλειστό, θα υπάρχει $u \in K$ τέτοιο ώστε $E(u) = \inf_{v\in K} E(v)$. Από Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz ([14],[21]) επειδή $f \in V^*$ θα υπάρχει $g \in V$:

$$f(v) = (g, v), \quad \text{για κάθε } v \in V.$$

Άρα

$$E(v) = \frac{1}{2}(v, v) - f(u) = \frac{1}{2}(v, v) - (g, v), \ \ \text{για κάθε } v \in V.$$

Παρατηρούμε όμως ότι

$$(g - v, g - v) = (g, g) - 2(g, v) + (v, v).$$

Άρα η ελαχιστοποίηση της $(g - v, g - v)$ ως προς v ισοδυναμεί με την ελαχιστοποίηση της $(v, v) - 2(g, v)$, η οποία ισοδυναμεί με την ελαχιστοποίηση της $\frac{1}{2}(v, v) - (g, v) = E(v)$. Επομένως, αν $u \in K$ είναι ελαχιστοποιητής της $E(v), v \in K$ τότε ισοδύναμα $u \in K$ είναι ελαχιστοποιητής της $(g - v, g - v)$ στο K, δηλαδή

$$(g - u, g - u)^{1/2} = \min_{v\in K}(g - v, g - v)^{1/2} \Leftrightarrow \|g - u\| = \min_{v\in K}\|g - v\|.$$

Άρα το $u = P_K g$ συνεπώς θα ικανοποιεί την ανισότητα

$$(g-u, v-u) \leq 0, \ \ \text{για κάθε } v \in K \ \ \Leftrightarrow (u, v-u) \geq (g, v-u), \ \ \text{για κάθε } v \in K.$$

Όμως, $(g, v-u) = f(v-u)$, άρα $(u, v-u) \geq f(v-u)$, για κάθε $v \in K$. Αν τώρα το K είναι υπόχωρος το $u - v \in K$ και στην παραπάνω σχέση βάζουμε όπου v το $u - v$, άρα

$$(u, -v) \geq f(-v) \Rightarrow -(u, v) \geq -f(v) \Rightarrow (u, v) \leq f(v), \ \ \text{για κάθε } v \in K.$$

Όπως επίσης και $u + v \in K$, άρα αν πάλι βάλουμε όπου v το $u + v$ θα έχουμε $(u, v) \geq f(v)$, για κάθε $v \in K$. Άρα τελικά $f(v) = (u, v)$, για κάθε $v \in K$. ■

Βιβλιογραφία

[1] K.Atkinson,W.Han, *Theoretical Numerical Analysis*(3rd ed.), Springer,2009.

[2] H.Attouch,G.Buttazzo, G.Michaille *Variational Analysis in Sobolev Spaces and BV spaces, Application to PDEs and Optimization*, MPS-SIAM,2006.

[3] Babuška, I., Aziz, A.K., *Survey lectures on the mathematical foundations of the finite element methodwith the collaboration of G. Fix and R.B. Kellogg*, Math. Found. Finite Elem.Method, 1-359,1972

[4] H.Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*,Springer,2000

[5] F.Brezzi, *On the existance,uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multipliers*, Rev.Francaise Automat. Informat. Recherche Operetionalle Ser Rouge 8, no.R-2, 129-151,1974

[6] M.Chipot, *Elements of Nonlinear Analysis, Birkhäuser Advanced Texts*,2000

[7] L.Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 1998

[8] D. Drivaliaris, N. Yannakakis *Surjectivity of Linear Operators from a Banach space into itself*,Bull.Austral.Math.Soc. 76, 143-154,2007

[9] T.L.Hayden, *The extension of bilinear funtionals*, Pacific Journal of Math. 22, 99-108,1967

[10] T.L.Hayden, *Representation theorems in reflexive Banach spaces*, Math. Z. 104, 405-406,1968

[11] S.Hildebrandt, E.Wienholtz, *Constructive Proofs of Representation Theorems in Separable Hilbert Space*, Comm.Pure Appl.Math.17 369-373,1964

[12] S. Kesavan, *Topics in Functional Analysis and Applications*, New Age Internatinal Limited,Publishers , 1989.

[13] D.A. Klyusin,S.I. Lyashko, D.A. Nomirovskii, Yu.I. Petunin, V.V. Semenov, *Generalized Solutions of Operator Equations and Extreme Elements*,Springer,2012

[14] R. Larsen, *Functional Analysis*, Marcel Dekker, 1973.

[15] P.Lax, *Functional Analysis*, John Wiley and Sons,Inc.,2002

[16] P.Lax, A.Milgram, *Parabolic equations*, Annals of Mathematics Studies, no.33,167-190 Princeton University Press,1954

[17] J.L.Lions, *Sur les problèmes mixtes pourcertains systèmes paraboliques dans des ouverts non cylindriques*, Ann.Inst.Fourier, Grenoble 7,143-182,1957

[18] R.Nochetto, K.Siebert, A. Veeser *Theory of Adaptive Finite Methods: An indroduction*,409-542, Springer,2009

[19] W.V.Petryshyn, *Construction proof of Lax-Milgram lemma and its application to non-K-p.d. abstract and differential operator equations*, J.Soc.Indust.Appl.Math.Ser.B Numer.Anal.2, 404-420,1965

[20] J.Saint Raymond, *A generalization of Lax-Milgram's theorem*, Mathematiche(Catania) 52,149-1571997

[21] W. Rudin, *Functional Analysis (2nd ed.)* , McGraw-Hill, 1991.

[22] R.E.Showalter, *Monotone Operators in Banach Spaces and Nonlinear Partial Differential Equations* , American Mathematical Society, 1996.

[23] G. Stampacchia, *Formes bilineaires coercitives sur les ensembles convexes* , C.R.Acad.Sci.Paris, 258 4413-4416, 1964.

[24] A. Taylor, *Introduction to Function Analysis* , John Wiley and Sons, 2nd ed., 1958.

[25] J.Xu, L.Zikatanov *Some observations on Babuška and Brezzi theories* , Numer.Math. 94(1), 195-202(2003).