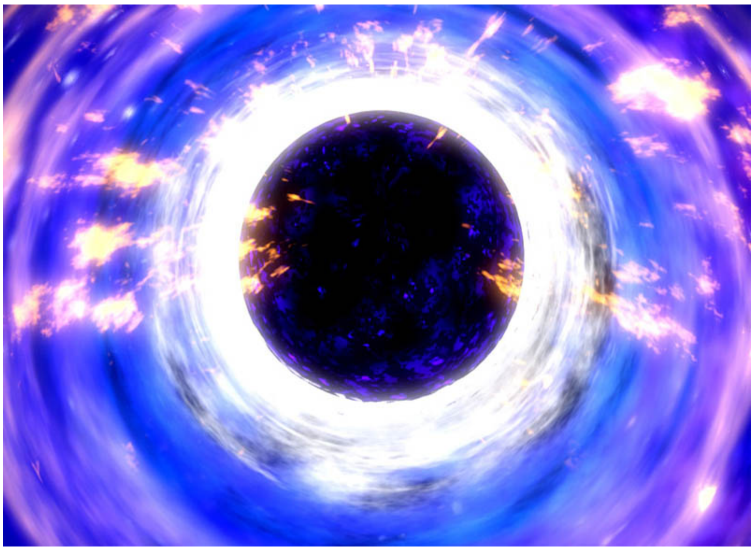
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Τμήμα Φυσικής

Ακτινοβολία Hawking



Διπλωματική Εργασία του: **Πιέρρου Ντελή**

Υπεύθυνος καθηγητής: **Κ. Αναγνωστόπουλος**

Αθήνα 3 Ιουλίου 2013

Abstract

In this thesis, I study quantum effects in curved Spacetime. I start with a mathematical introduction to differential geometry. I describe the transition from classical physics in flat to Physics curved spacetime. Furthermore, I prove the Einstein equation and I describe its static solution for a spherical distribution of mass, the solution of Schwarzschild. Then I describe the spacetime in a near region of Black Holes. Through the description of quantum fields in curved spacetime I examine the phenomenon of Hawking Radiation which is a phenomenon of particle emission caused in the region near the horizon of a Black Hole considering quantum corrections. The Hawking radiation is caused by the consideration of different bases for quantum state due to lack of Poincare symmetry. Similar radiation is being described by Unruh effect which explains how quantum fluctuations play a role in the detection of particles from an accelerated observer in vacuum. Because of Hawking radiation Black holes can evaporate something which was classically impossible. Therefore this phenomenon to construct a unified theory that describes and Quantum Mechanical Theory and the Theory of Gravity.

Περίληψη

Σε αυτήν την διπλωματική εργασία γίνεται μελέτη Κβαντικών Φαινομένων σε Καμπυλωμένο Χωρόχρονο. Κάνω μια μαθηματική εισαγωγή στην διαφορική Γεωμετρία. Περιγράφω την μετάβαση της κλασσικής φυσικής από τον επίπεδο στον καμπύλο χωρόχρονο. Έπιτα αναλύω την απόδειξη της εξίσωσης Einstein και περιγράφω την εύρεση της στατικής λύσης της για σφαιρική κατανομή μάζας, την λύση Schwarzschild. Ύστερα δίνω μια περιγραφή του χωρόχρονου γύρω από Μελανές Οπές μέσω διαφόρων μετασχηματισμών όπως Eddington-Finkelstein,Kruskal-Szekeres. Μέσω της περιγραφής των κβαντικών πεδίων σε επίπεδο και καμπύλο χωρόχρονο εξετάζω το φαινόμενο της Ακτινοβολιας Hawking το οποίο είναι ένα φαινόμενο εκπομπής σωματιδίων που προκαλείται στην περιοχή κοντά στον ορίζοντα Μελανών Οπών αν λάβουμε υπόψη μας κβαντικές διορθώσεις. Η ακτινοβολία Hawking προκαλείται από την θεώρηση διαφορετικών βάσεων για τις κβαντικες καταστάσεις λόγω έλλειψης συμμετρίας Poincare. Παρόμοια αποτελέσματα ακτινοβολίας περιγράφει το Φαινόμενο Unruh το οποίο εξηγεί πώς οι κβαντικές διακυμάνσεις παίζουνε ρόλο στην ανίχνευση σωματιδίων από επιταχυνόμενο παρατηρητή μέσα σε κενό. Λόγω της Ακτινοβολίας Hawking οι μελανές οπές μπορούνε να εξαχνωθούν κάτι που κλασσικά ήτανε αδύνατον. Επομένως το φαινόμενο αυτό μας δίνει ένα ακόμη έναυσμα να κατασκευάσουμε μια ενιαία θεωρία που να περιγράφει και την Κβαντομηχανική θεωρία και την θεωρία της Βαρύτητας.

Ευχαριστίες

Πρώτους από όλους θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου που μου στάθηκανε στις σπουδές μου και στην σταδιοδρομία μου τόσα χρόνια.Στην συνέχεια θα ήθελα να ευχαριστήσω τους καθηγητές μου για την καθοδήγησή τους στα βήματά μου μέσα στο Πεδίο της Φυσικής. Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον κύριο Κ. Αναγνωστόπουλο για τις πολύτιμες συμβουλές του στην διπλωματική μου εργασία. Επίσης ευχαριστώ τον συμφοιτητή μου Δημήτρη Μάγγο για τις αμέριστη βοήθειά του στην εργασία και στο XƎLaTeX. Ευχαριστώ επίσης όλους τους φίλους μου που ο καθένας συνέβαλε με ένα μικρό λιθαράκι στην εργασία αυτή. Τελειώνοντας θα ήθελα να ευχαριστήσω την κοπέλα μου που με υποστήριξε θερμά τα τελευταία χρόνια μου στην σχολή αυτή!

Στην κοπέλα και τους φίλους μου!!!

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Μαθηματικά Εργαλεία

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναπτύξουμε τα μαθηματικά εργαλεία που χρειαζόμαστε για να μελετήσουμε το φαινόμενο της Ακτινοβολίας $Hawking$. Για να μελετήσουμε το φαινόμενο αυτό πρέπει πρώτα να παρουσιάσουμε τα μαθηματικά εργαλεία της Γεωμετρίας σε χώρους που συμβαίνει το φαινόμενο αυτό. Τα φαινόμενα της φυσικής μπορούν να περιγραφούν από συντεταγμένες, όμως πρέπει να μένουν αναλλοίωτα (να μην αλλάζουν) κάτω από μετασχηματισμούς συντεταγμένων,δηλαδή *τα φαινόμενα να μην εξαρτώνται από το πώς τα περιγράφουμε*. Επίσης ο χώρος στον οποίο λαμβάνουν διάφορα φαινόμενα μπορεί να οριστεί από μία Πολλαπλότητα. Πολλαπλότητα είναι ο χώρος εκείνος ο οποίος τοπικά φαίνεται να είναι ίδιος με έναν n-διάστατο Ευκλείδειο χώρο. Πάμε λοιπόν να ορίσουμε με μαθηματικά τι σημαίνει Πολλαπλότητα και το πώς εργαζόμαστε επάνω σε αυτήν!

1.1 Απεικονίσεις

Ορισμός 1.1.1. Έστω δύο σύνολα X, Y. **Απεικόνιση** είναι ο κανόνας με τον οποίο αναθέτουμε το $y \in Y \forall x \in X$ και γράφουμε

$$f : X \to Y$$

Εάν η f ορίζεται από έναν συγκεκριμένο τύπο μπορούμε να γράφουμε:

$$f : x \mapsto f(x).$$

μπορούν να υπάρχουν δύο ή περισσότερα x που να αντιστοιχούν στο ίδιο $y \in Y$. Ένα υποσύνολο του X του οποίου τα στοιχεία απεικονίζονται στο $y \in Y$ κάτω από την f καλείται **αντίστροφη εικόνα** του y και συμβολίζεται με $f^{-1}(y) = \{x \in X | f(x) = y\}$.Το σύνολο X καλείται **πεδίο ορισμού** της απεικόνισης ενώ το Y καλείται **σύνολο τιμών** της απεικόνισης. Η **εικόνα** της απεικόνισης είναι $f(X) = \{y \in Y | y = f(x) \text{ για κάποια} x \in X\} \subset Y$.

Ορισμός 1.1.2. Εάν μία απεικόνιση ικανοποιεί μία συγκεκριμένη συνθήκη τότε παίρνει και ειδικό όνομα.

α) $f : X \mapsto Y$ καλείται **injective** αν $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

β) $f : X \mapsto Y$ καλείται **surjective** αν $\forall\ y \in Y\ \exists\ x : f(x) = y$

γ) $f : X \mapsto Y$ καλείται **bijective** αν ισχύουν τα δύο προηγούμενα

Αν μια συνάρτηση είναι απείρως φορές παράγωγίσιμη τότε καλείται "*smooth*". Ας υποθέσουμε ότι μία αλγεβρική δομή (ο πολλαπλασιασμός ή η πρόσθεση) είναι δοσμένες σε σύνολα X, Y . Εάν $f : X \to Y$ διατηρεί τις αλγεβρικές δομές, τότε η f καλείται **ομομορφισμός**. Για παράδειγμα έστω ότι στο X προσδίδεται ο πολλαπλασιασμός. Αν f είναι ένας ομομορφισμός, τότε διατηρεί τον πολλαπλασιασμό $\forall\ a, b \in X$ δηλαδή $f(ab) = f(a)f(b)$.Εάν ο ομομορφισμός f είναι και *bijective* , η f καλείται ένας **ισομορφισμός** και τοτε λέμε ότι είναι **ισομορφικο** του και συμβολίζουμε $X \cong Y$.

1.1.1 Μέθοδος Fourier

Μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση που έχει περίοδο $T = 2\pi$ μπορεί να αναπτυχθεί σε

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{1.1}$$

όπου:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-nx} dx \tag{1.2}$$

1.2 Διανυσματικοί Χώροι

1.2.1 Διανύσματα

Ορισμός 1.2.1. Διανυσματικός Χώρος (ή **Γραμμικός Χώρος**) V πάνω σε ένα πεδίο K είναι το σύνολο στο οποίο δύο διαδικασίες, η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός από ένα στοιχείο του K (καλείται ένα βαθμωτό) , ορίζονται. ($K = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$). τα στοιχεία του συνόλου καλούνται διανύσματα του Χώρου V και ικανοποιούν τα παρακάτω αξιώματα:

i) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

ii) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{u} + \vec{w})$

iii) $\exists\ \vec{0} : \vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$.

iv) $\forall\ \vec{u}, \exists\ -\vec{u} : \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.

$v)$ $c(\vec{u}+\vec{v})=c\vec{u}+c\vec{v}$.

$vi)$ $(c+d)\vec{u}=c\vec{u}+d\vec{u}$.

$vii)$ $(cd)\vec{u}=c(d\vec{u})$.

$viii)$ $1\vec{u}=\vec{u}$.

Έστω $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V$ και $c,d\in K$ και 1 είναι το μοναδιαίο στοιχείο του K. Έστω $\{\vec{v_i}\}$ είναι ένα σύνολο από k διανύσματα. Εάν η εξίσωση

$$x_1\vec{v_1}+x_2\vec{v_2}\cdots+x_k\vec{v_k}=\vec{0}$$

Έχει μη τετριμμένη λύση , $x_i\neq 0$ για κάποια i, το σύνολο $\{\vec{v_i}\}$ καλείται **γραμμικώς εξαρτημένο** ενώ αν έχει τετριμμένη λύση , $x_i=0$ για $\forall$ i,το σύνολο $\{\vec{v_i}\}$ καλείται **γραμμικώς ανεξάρτητο**.Ένα σύνολο γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων $\vec{e_i}$ καλείται βάση του V , αν κάθε στοιχείο $\vec{v}\in V$ γράφεται ως ένας μοναδικός συνδυασμός των $\vec{e_i}$

$$\vec{v}=v^1\vec{e_1}+v^2\vec{e_2}\cdots+v^n\vec{e_n}=v^i\vec{e_i}$$

Οι αριθμοί $v^i\in K$ καλούνται **συνιστώσες** του $\vec{v}$ μέσω της βάσης $\{\vec{e}^*i\}$. Αν είναι n ο αριθμός των στοιχείων της βάσης, η διάσταση του V είναι n, και συμβολίζεται με $dimV=n$. Και συμβολίζουμε τον n-διάστατο διανυσματικό χώρο πάνω στο K ως $V(n,K)$.Ένας τέτοιος χώρος θεωρείται ο $\mathbb{R}^n$.

Σαν γεωμετρικό αντικείμενο που είναι ένα διάνυσμα θα πρέπει να παραμένει αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς συντεταγμένων. Επομένως πρέπει να παραμένει αναλλοίωτο κάτω από τους μετασχηματισμούς $Poincare$ δηλαδή το σύνολο περιστροφών , προωθήσεων(στροφές χρόνου-χώρου) και μετατοπίσεων.

1.2.2 Γραμμικές Απεικονίσεις , Εικόνες και Πυρήνες

Ορισμός 1.2.2. Δοσμένων δυο διανυσματικών χώρων V,W μια απεικόνιση $f:V\mapsto W$ καλείται **γραμμική απεικόνιση** όταν ικανοποιεί

$$f(\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2)=\alpha_1 f(\vec{v}_1)+\alpha_2 f(\vec{v}_2)$$

για κάθε α_1 ,$\alpha_2\in K$ και $\vec{v}_1,\vec{v}_2\in V$.

Μια γραμμική απεικόνιση είναι ένα παράδειγμα ομομορφισμού η οποία διατηρεί το διανυσματικό άθροισμα και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό. Η **εικόνα** της f είναι $f(V)\subset W$ και πυρήνας της f είναι $\{\vec{v}\in|f(\vec{v})=\vec{0}\}$ και συμβολίζεται με imf $kerf$ αντίστοιχά Εάν ο W είναι ένα πεδίο K , τότε η f καλείται **γραμμική συνάρτηση**. Αν η f είναι ένας **ισομορφισμός** , ο V λέμε ότι είναι **ισομορφικος** με τον W και ανάποδα, συμβ. $V\cong W$. Ακολουθεί ότι $dimV=dimW$.Σπουδαίο είναι το γεγονός ότι όλοι οι n-διάστατοι διανυσματικοί χώροι είναι ισομορφικοί στον K^n και έτσι θεωρούνται ως ταυτοτικοί διανυσματικοί χώροι.Ο ισομορφισμός μεταξύ αυτών των διανυσματικών χώρων είναι ένα στοιχείο της ομάδας $GL(n,K)$.

1.2.3 Δυαδικός Διανυσματικός Χώρος

Έστω $f : V \rightarrow K$ είναι μια γραμμική συνάρτηση πάνω σε έναν διανυσματικό χώρο $V(n, K)$ πάνω στο πεδίο K. Έστω $\{\vec{e}^{*}i\}$ μια βάση και ένα αυθαίρετο διάνυσμα $\vec{v} = v^i \vec{e_i}$ από την γραμμικότητα της f έχουμε ότι $f(\vec{v}) = v^i f(\vec{e_i})$.΄Ετσι αν ξέρουμε την $f(\vec{e_i})$ για κάθε i τότε ξέρουμε το αποτέλεσμα της διαδικασίας f σε κάθε διάνυσμα! Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι το σύνολο των γραμμικών συναρτήσεων αποτελούν έναν διανυσματικό χώρο, και ονομαστικά ένας γραμμικός συνδυασμός δύο γραμμικών συναρτήσεων είναι επίσης γραμμική συνάρτηση,

$$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(\vec{v}) = \alpha_1 f_1(\vec{v}) + \alpha_2 f_2(\vec{v})$$

Ο γραμμικός αυτός χώρος καλείται **δυϊκός διανυσματικός χώρος** του $V(n, K)$ και συμβολίζεται με $V^*(n, K)$ ή απλά V^*. Οι διαστάσεις του V^* είναι ακριβώς ίδιες με του V για πεπερασμένο n και του εισάγουμε μια βάση $\{\vec{e}^{*i}\}$. Αφού το $\vec{e}^{*i}$ είναι μία γραμμική συνάρτηση τότε καθορίζεται πλήρως όταν του δώσουμε μία σχέση $\vec{e}^{*i}(\vec{e}_j)\ \forall\ j$. Διαλέγουμε λοιπόν,

$$\vec{e}^{*i}(\vec{e}_j) = \delta^i{}_j$$

. Κάθε γραμμική συνάρτηση ω , καλείται **δυϊκό διάνυσμα** και μπορεί να αναλυθεί σε συνιστώσες της βάσης $\{\vec{e}^{*i}\}$,

$$\omega = \omega_i \vec{e}^{*i}$$

. Η δράση του ω πάνω στο $\vec{v}$ μεταφράζεται ως το **εσωτερικό γινόμενο** μεταξύ μιας στήλης διανύσματος και μιας γραμμής διανύσματος ,

$$\omega(\vec{v}) = \omega_i \vec{e}^{*i}(v^j \vec{e_j}) = \omega_i v^j \vec{e}^{*i}(\vec{e}_j) = \omega_i v^i$$

. Το εσωτερικό γινόμενο συμβολίζεται και ως, ή $\langle | \rangle$ ή $\langle , \rangle : V^* \times V \rightarrow K$. Δηλαδή το δυϊκό διάνυσμα απεικονίζει ένα διάνυσμα σε ένα βαθμωτό.

1.2.4 Τανυστές

Ορισμός 1.2.3. Η γενίκευση του δυϊκού διανύσματος καλείται **Τανυστης** και ορίζεται ως το πολυγραμμικό αντικείμενο το οποίο απεικονίζει διαφορετικά διανύσματα και δυϊαδικά διανύσματα σε ένα βαθμωτό. Ο τανυστής τύπου (p, q) είναι μια πολυγραμμική απεικόνιση που απεικονίζει p δυϊκά διανύσματα και q διανύσματα στο $\mathbb{R}$,

$$T : \times^p V^* \times^q V \mapsto \mathbb{R} \tag{1.3}$$

Για παράδειγμα ένας τανυστής τύπου (0,1) απεικονίζει ένα διάνυσμα σε πραγματικό αριθμός επομένως αναγνωρίζεται ώς ένα δυϊκό διάνυσμα. Ένας τανυστής τύπου (1,0) είναι ένα διάνυσμα.Εάμ ο ω απεικονιζει δυο δυϊκά διανύσματα και ένα διάνυσμα σε ένα βαθμωτό , $\omega : V^* \times V^* \times V \mapsto \mathbb{R}$ είναι ένας τανυστής τύπου (1,2). Το σύνολο όλων των τανυστών τύπου (p,q) καλείται **τανυστικός χώρος** τύπου (p,q) και συμβ. $\mathcal{T}^p_q$. Το **τανυστικο γινόμενο** $\tau = \mu \otimes \nu \in \mathcal{T}^p_q \otimes \mathcal{T}^{p'}_{q'}$ και είναι στοιχείο του χώρου $\mathcal{T}^{p+p'}_{q+q'}$ και ορίζεται ως:

$$\tau(\omega_1, \ldots, \omega_p, \xi_1, \ldots, \xi'_p; u_1, \ldots, u_q, v_1, \ldots, v'_q) = \mu(\omega_1, \ldots, \omega_p; u_1, \ldots, u_q) \times \nu(\xi_1, \ldots, \xi'_p; v_1, \ldots, v'_q) \tag{1.4}$$

Εισάγοντας μία βάση για τους τανυστές τυπου (p,q)

$$\vec{e}_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{\mu_p} \otimes \vec{e^*}^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes \vec{e^*}^{\nu_q}$$

μπορούμε να εκφράσουμε τον τανυστή σε μορφή συνιστωσών.Έτσι γράφουμε

$$T = T^{\mu_1 \dots \mu_p}{}_{\nu_1 \dots \nu_q} \vec{e}_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{\mu_p} \otimes \vec{e^*}^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes \vec{e^*}^{\nu_q} \tag{1.5}$$

η μπορούμε να γράψουμε οτι:

$$T^{\mu_1 \dots \mu_p}{}_{\nu_1 \dots \nu_q} = T(\vec{e^*}^{\mu_1}, \dots, \vec{e^*}^{\mu_p}; \vec{e}_{\nu_1}, \dots, \vec{e}_{\nu_q}) \tag{1.6}$$

Ένας τανυστής σε έναν τετραδιάστατο χώρο θα έχει εν γένει 4^{p+q} συνιστώσες Ένας τανυστής δρά πάνω σε μία συλλογή από διανύσματα ($v^{(j)} \in V$) και δυαδικά διανύσματα ($\omega^{(i)} \in \Omega$) ως

$$T(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(p)}; v^{(1)}, \dots, v^{(q)}) = T^{\mu_1 \dots \mu_p}{}_{\nu_1 \dots \nu_q} \omega^{(1)}_{\mu_1} \dots \omega^{(p)}_{\mu_p} v^{(1)\nu_1} \dots v^{(q)\nu_q} \tag{1.7}$$

Άλλη μια διαδικασία που έχουν οι τανυστείς είναι αυτή που ονομάζεται *contraction* κατά την οποία απεικονίζεται ένας τανυστης τύπου (p,q) σε έναν τανυστη τύπου ($p-1$,$q-1$) και συμβολίζεται με

$$T^{\mu_1 \dots \lambda \dots \mu_p}{}_{\nu_1 \dots \lambda \dots \nu_q} = T(\vec{e^*}^{\mu_1}, \dots, \vec{e^*}^{\lambda}, \dots \vec{e^*}^{\mu_p}; \vec{e}_{\nu_1}, \dots, \vec{e}_{\lambda}, \dots \vec{e}_{\nu_q}) \tag{1.8}$$

1.2.5 Τοπολογικοί Χώροι

Η ποιο γενική δομή που υπάρχει σε χώρους είναι η έννοια του τοπολογικού χώρου. Ένας Μετρικός Χώρος είναι υποσύνολο μιας Πολλαπλότητας και μια Πολλαπλότητα είναι υποσύνολο ενός Τοπολογικού Χώρου.

Ορισμός 1.2.4. Έστω X ένα σύνολο και $\mathcal{J} = \{U_i | i \in I\}$ συμβολίζουμε μια συλλογή από υποσύνολα του X , όπου $I \subset \mathbb{N}$.Το ζεύγος (X,$\mathcal{J}$) καλείται τοπολογικός χώρος εφόσον ικανοποιεί τα παρακάτω:

i) $\varnothing, X \in \mathcal{J}$.

ii) Αν J είναι μια οποιαδήποτε συλλογή(ίσως άπειρη) του I η οικογένεια $\{U_j | j \in J\}$ ικανοποιεί $\cup_{j \in J} U_j \in \mathcal{J}$

iii) Εάν K είναι οποιοσδήποτε πεπερασμένη υποσυλλογή του I, τότε η οικογένεια $\{U_k | k \in K\}$ ικανοποιεί $\cap_{k \in K} U_k \in \mathcal{J}$

Το X καλείται μόνο του τυπολογικός χώρος. Τα U_i καλούνται ανοιχτά σύνολα και το $\mathcal{J}$ λέμε ότι προσδίδει μια **Τοπολογία** στον X .

Ορισμός 1.2.5. Έστω ότι ο $\mathcal{J}$ λέμε ότι προσδίδει μια **Τοπολογία** στον X . Τότε N καλείται **γειτονιά** ενός σημείου $x \in X$ εάν το N είναι υποσύνολο του X και N και περιέχει τουλάχιστον ένα ανοιχτό σύνολο U_i στο οποίο ανήκει το x.

Ορισμός 1.2.6. Χώρος $Hausdorff$ καλείται ένας χώρος (X,$\mathcal{J}$) αν για ένα αυθαίρετο ζευγάρι από διακριτά σημεία $x, x' \in X$, υπάρχει πάντα μια γειτονιά N του x και N' του x : $N \cap N' = \varnothing$. Οι χώροι στην φυσικοί είναι χώροι $Hausdorff$.

1.2.6 Ομοιομορφισμοί και Τοπολογικά Αναλλοίωτα

Ορισμός 1.2.7. Έστω X, Y τοπολογικοι Χώροι. Μια απεικόνιση $f : X \mapsto Y$ καλείται **ομοιομορφισμός** αν είναι συνεχής και έχει και αντίστροφο $f^{-1} : Y \mapsto X$ συνεχή.

Σημείωση! Δυο τοπολογικοί χώροι καλούνται ομοιομορφικοί μεταξύ τους αν μπορούμε να σχηματίσουμε τον έναν από τον άλλον με συνεχή τρόπο χωρίς να τους σχίσουμε ή να τους κολλήσουμε. Μαθηματικά αποδεικνύεται ότι κάθε τοπολογικός χώρος έχει τοπολογικά αναλλοίωτα δηλαδή διατηρεί αυτές τις ποσότητες ακόμη και αν η τοπολογία του αλλάξει. Ένα τέτοιο τοπολογικό αναλλοίωτο είναι η χαρακτηριστική του $Euler$ και ορίζεται ως

Ορισμός 1.2.8. Έστω $X \subset \mathbb{R}^3$ το οποίο είναι ομοιομορφικό με ένα πολύεδρο K.Τότε η χαρακτηριστική του $Euler$ χ(X) του X ορίζεται ως:
$\chi(X)$ = (# κορυφών του K) - (# ακμών του K) + (# προσόψεων του K)

Το θεώρημα των $Poincare - Alexander$ αποδεικνύει ότι η χαρακτηριστική του $Euler$ $\chi(X)$ είναι ανεξάρτητη του πολυέδρου K εάν το K είναι ομοιομορφικό με το $= X$.

Μερικά παραδείγματα χαρακτηριστικών $Euler$ είναι τα εξής:

i) Τετράεδρο $\chi(X) = 4 - 6 + 4 = 2$

ii) (Κύβος)Εξάεδρο $\chi(X) = 8 - 12 + 6 = 2$

iii) $\chi(line) = 2 - 1 + 0 = 1$

iv) $\chi(\bigcirc) = 0 - 0 + 0 = 0 = \chi(\square) = 4 - 4 + 0$ (ο κύκλος είναι ομοιομορφικός με το τετράγωνο)

v) $\chi(disk) = 0 - 0 + 1 = 1$

1.3 Μετρική

Ορισμός 1.3.1. Πάνω σε έναν χώρο μπορούμε να του ορίσουμε την λεγομένη **μετρική**. Το οποίο είναι ένα εργαλείο με το οποίο μπορούμε να μετράμε πάνω στον χώρο αποστάσεις

Ορισμός 1.3.2. Στον ευκλείδειο τρισδιάστατο χώρο ορίζουμε την απειροστή ποσότητα ως :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{1.9}$$

Το οποίο γράφεται και ως το εσωτερικό γινόμενο δυο διαφορικών μέσω της μετρικής

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{1.10}$$

όπου

$$dx^{\nu} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

και με **μετρική** να ορίζουμε την ποσότητα:

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

Προφανώς η μετρική είναι ένας τανυστής τύπου (0,2). Επίσης μπορούμε σε σφαιρικές συντεταγμένες να γράφουμε την μετρική κάνοντας των μετασχηματισμός:

$$\left.\begin{matrix} x = rsin\theta cos\phi \\ y = rsin\theta sin\phi \\ z = rcos\theta \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} dx = drsin\theta cos\phi + rcos\theta d\theta cos\phi - rsin\theta sin\phi d\phi \\ dy = drsin\theta sin\phi + rcos\theta d\theta sin\phi + rsin\theta cos\phi d\phi \\ dz = drcos\theta - rsin\theta d\theta \end{matrix}\right.$$

Επομένως το στοιχείο μήκους γίνεται:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \Leftrightarrow$$

$$ds^2 = (drsin\theta cos\phi + rcos\theta d\theta cos\phi - rsin\theta sin\phi d\phi)^2$$

$$+(drsin\theta sin\phi + rcos\theta d\theta sin\phi + rsin\theta cos\phi d\phi)^2$$

$$+(drcos\theta - rsin\theta d\theta)^2 \Leftrightarrow$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2\theta d\phi^2 \tag{1.13}$$

Επομένως η μετρική παίρνει την μορφή:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

όπου τώρα:

$$dx^{\nu} = \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \\ d\phi \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

Μπορούμε να ορίσουμε την αντίστροφη μετρική ($g^{\mu\nu}$)έτσι ώστε να παραμένει αναλλοίωτο το στοιχειώδες μήκος με την εξής σχέση ως:

$$g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} \tag{1.16}$$

όπου δ^{μ}_{ν} το δέλτα του $Kronecker$.

1.4 Πολλαπλότητα

Η πολλαπλότητα είναι εν γένει η γενίκευση της ιδέας των καμπυλών και των επιφανειών στον $\mathbb{R}^n$. Η καμπύλη στον 3-διάστατο Ευκλείδειο χώρο παραμετροποιείται τοπικά από μια παράμετρο t $(x(t), y(t), z(t))$ μοιάζοντας τοπικά με τον $\mathbb{R}$, ενώ χρειάζονται δυο παράμετροι u, v για να παραμετροποιήσουμε μια επιφάνεια $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ που τοπικά μοιάζει με τον $\mathbb{R}^2$.Αυτή η ιδιότητα γενικεύεται για μια πολλαπλότητα και έτσι δημιουργούνται τοπολογικοί χώροι που τοπικά θα μοιάζουν με τον $\mathbb{R}^m$.

1.4.1 Ορισμός

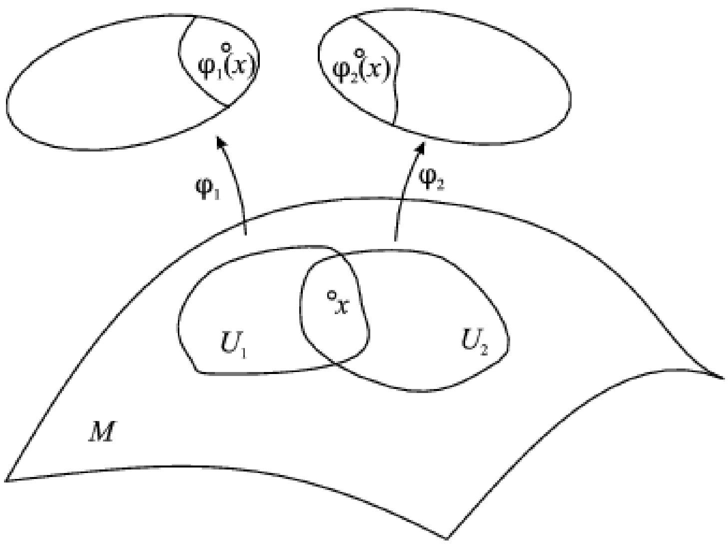
Ορισμός 1.4.1. Πολλαπλότητα $\mathcal{M}$ είναι ένας m-**διάστατη διαφορίσιμη πολλαπλότητα** όταν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

i) Η $\mathcal{M}$ είναι ένας τοπολογικός χώρος.

ii) Παρέχεται στην $\mathcal{M}$ μια οικογένεια από ζευγάρια $\{(U_i, \phi_i)\}$

iii) Το σύνολο $\{U_i\}$ είναι μια οικογένεια από ανοιχτά σύνολα που καλύπτουν την $M : \cup_i U_i = M$. Τα ϕ_i είναι Ομοιομορφισμοί από τα U_i στο ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$

iv) Δοθέντων των $U_1, U_2 : U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$, η *bijective* απεικόνιση $\psi_{12} = \phi_1\ \phi_2{}^{-1}$: $\phi_2(U_1 \cap U_2) \mapsto \phi_1(U_1 \cap U_2)$ είναι απειροστά διαφορισιμη.



Σχήμα 1.1: Διαφορίσιμη πολλαπλότητα

Τα (U_i, ϕ_i) καλούνται **χάρτης** η **σύνολο συντεταγμένων** ενώ το σύνολο $\{(U_i, \phi_i)\}$ καλείται **Άτλαντας**.Το υποσύνολο U_i καλείται η **γειτονιά συντεταγμένων** ενώ η ϕ_i καλείται **συνάρτηση συντεταγμένων**. Η ϕ_i αναπαρίσταται από m συναρτήσεις

$\{x^1(p), \ldots, x^m(p)\}$. Το σημείο p του $\mathcal{M}$ υφίσταται ανεξαρτήτως συντεταγμένων Ένα παράδειγμα σε 3-διάστατο χώρο θα μας πείσει γιατί χρειαζόμαστε παραπάνω από έναν χάρτες για να καλύψουν όλη την πολλαπλότητα!

Μαρκετιανή Προβολή. Ας πάρουμε το σύνολο S^2 στον $\mathbb{R}^3$ να ορίζεται από $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1$. Μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν χάρτη από ανοιχτά σύνολα U_1 , και να ορίζονται την σφαίρα εκτός τον βόρειο πόλο με στερεογραφική προβολή. Διαγράφοντας μια ευθεία γραμμή από τον από τον βόρειο πόλο στην επιφάνεια $x^3 = -1$.Τότε στο σημείο τομής της ευθείας αυτής με την σφαίρα αναθέτουμε τις συντεταγμένες (y^1, y^2) στο επίπεδο να είναι:

$$\phi_1(x^1, x^2, x^3) \equiv (y^1, y^2) = (\frac{2x^1}{1-x^3}, \frac{2x^2}{1-x^3}) \tag{1.17}$$

ομοίως μπορούμε να πάρουμε την στερεογραφική προβολή ως προς τον νότιο πόλο με το επίπεδο $x^3 = 1$ περιγράφοντας όλην την σφαίρα εκτός του νότιου πόλου.

$$\phi_2(x^1, x^2, x^3) \equiv (z^1, z^2) = (\frac{2x^1}{1+x^3}, \frac{2x^2}{1+x^3}) \tag{1.18}$$

Έτσι αυτοί οι δυο χάρτες μαζί καλύπτουν όλη την Πολλαπλότητα (S^2) και επικαλύπτονται μεταξύ τους στην περιοχή $-1 < x^3 < +1$.

1.5 Λογισμός Πάνω σε Πολλαπλότητες

Ορισμός 1.5.1. Διαφορική απεικόνιση . ́Εστω $f : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{N}$, με $\mathcal{M}$ m-πολλαπλότητα και $\mathcal{N}$ n-πολλαπλότητα. Τότε απεικονίζεται ένα σημείο $p \in \mathcal{M}$ σε ένα σημείο $f(p) \in \mathcal{N}$ με $f : p \mapsto f(p)$. Διαλέγοντας έναν χάρτη (U, ϕ) στον $\mathcal{M}$ και (V, ψ) στον $\mathcal{N}$ και $p \in U$, $f(p) \in V$.Τότε ισχύει ότι:

$$\psi f \phi^{-1} : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n \tag{1.19}$$

Τότε λέμε ότι ο $\mathcal{M}$ είναι διαφορομορφικός του $\mathcal{N}$

1.5.1 Διανύσματα σε Πολλαπλότητα

.

Ορισμός 1.5.2. Έστω η παράγωγος κατεύθυνσης μιας συνάρτησης $f(\gamma(t))$ κατά μήκος της καμπύλης $\gamma(t)$ στο $t = 0$ (τυχαίο σημείο p) σε τοπικό σύστημα σύστημα συντεταγμένων ως:

$$\left.\frac{df(\gamma(t))}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial f(\gamma(t))}{\partial x^\mu}\right|_{t=0} \left.\frac{dx^\mu(\gamma(t))}{dt}\right|_{t=0} \tag{1.20}$$

Δηλαδή με άλλα λόγια αντιστοιχούμε την $\frac{df(\gamma(t))}{dt}$ σε έναν διαφορικό τελεστή X :

$$X = X^\mu(\partial/\partial x^\mu), \text{με } X^\mu = dx^\mu(\gamma(t))/dt|_{t=0} \tag{1.21}$$

που δρά πάνω στην f:

$$X[f] = X^\mu(\partial/\partial x^\mu)[f] = \frac{df(\gamma(t))}{dt}\frac{dx^\mu(\gamma(t))}{dt}|_{t=0} \tag{1.22}$$

Έτσι όλα τα εφαπτομενικά διανύσματα που αντιστοιχούν σε όλες τις διαφορετικές καμπύλες που περνάνε από το σημείο p (καμπύλες με παράμετρο $t = 0$) αποτελούν τον **εφαπτόμενο χώρο** και συμβ. $T_p\mathcal{M}$. Ως διάνυσμα βάσης θεωρούμε το σύνολο των μερικών παραγώγων $\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\} = \{\partial_\mu\}$. Σαν γεωμετρικό αντικείμενο που είναι ένα διάνυσμα θα πρέπει να παραμένει αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς συντεταγμένων. Επομένως πρέπει να παραμένει αναλλοίωτο κάτω από τους μετασχηματισμούς *Poincare* δηλαδή το σύνολο περιστροφών , προωθήσεων(στροφές χρόνου-χώρου) και μετατοπίσεων. Έτσι μπορούμε να μετασχηματίσουμε από το ένα σύστημα αναφοράς στο άλλο με την απλή εξής διαδικασία:

$$X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \tilde{X}^\nu \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\nu} \tag{1.23}$$

και ο μετασχηματισμός είναι ο :

$$X^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu}\tilde{X}^\nu \tag{1.24}$$

1.5.2 Δυαδικά Διανύσματα σε πολλαπλότητα

Ορισμός 1.5.3. 1-Μορφές .Θεωρώντας τον εφαπτόμενο χώρο $T_p\mathcal{M}$ μπορούμε να ορίσουμε τον **δυαδικό εφαπτόμενο χώρο** $T_p^*\mathcal{M}$ ο οποίος περιέχει τα δυϊαδικά διανύσματα $\omega : T_p\mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$ τα οποία λέγονται και **1-μορφές**.

Ένα απλό παράδειγμα είναι το διαφορικό df μιας συνάρτηση $f \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$,με $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ ο χώρος συναρτήσεων πάνω στα σημεία της πολλαπλότητας, που δρά πάνω σε ένα διάνυσμα V:

$$\langle df, V\rangle \equiv V[f] = V^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \in \mathbb{R} \tag{1.25}$$

Αφού $df = \frac{\partial f}{\partial x^\mu}dx^\mu$ τότε ορίζουμε την βάση των 1-μορφών(του χώρου$T_p^*\mathcal{M}$) ως $\{dx^\mu\}$ και τότε:

$$\langle dx^\mu, \frac{\partial}{\partial x^\mu}\rangle = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu \tag{1.26}$$

έτσι μια αυθαίρετη 1-μορφή γράφεται:

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu \text{ ή } \tilde{\omega}_\nu d\tilde{x}^\nu \tag{1.27}$$

με τον μετασχηματισμό:

$$\omega_\mu = \tilde{\omega}_\nu \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\mu} \tag{1.28}$$

1.5.3 Τανυστές σε Πολλαπλότητα

Ορισμός 1.5.4. Όπως και στον επίπεδο χώρο($\mathbb{R}^n$) μπορούμε να ορίσουμε έναν (k,l) σαν μια πολυγραμμική απεικόνιση από μια συλλογή k δυαδικών διανυσμάτων και l διανυσμάτων στο $\mathbb{R}$ με συνιστώσες:

$$T^{\mu_1 \ldots \mu_k}{}_{\nu_1 \ldots \nu_l} = T(dx^{\mu_1}, \ldots, dx^{\mu_k}; \partial_{\nu_1}, \ldots, \partial_{\nu_l}) \tag{1.29}$$

που είναι ισοδύναμο με την έκφραση:

$$T = T^{\mu_1 \ldots \mu_k}{}_{\nu_1 \ldots \nu_l} \partial_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{\mu_k} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\nu_l} \tag{1.30}$$

Οι τανυστές αυτοί μετασχηματίζουν τους πάνω δείκτες σαν τον μετασχηματισμό των διανυσμάτων και τους κάτω δείκτες σαν αυτόν των δυαδικών διανυσμάτων επομένως γράφουμε:

$$T^{\mu_1{}' \ldots \mu_k{}'}{}_{\nu_1{}' \ldots \nu_l{}'} = \frac{\partial x^{\mu_1{}'}}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\mu_k{}'}}{\partial x^{\mu_k}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu_1{}'}} \cdots \frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial x^{\nu_l{}'}} T^{\mu_1 \ldots \mu_k}{}_{\nu_1 \ldots \nu_l} \tag{1.31}$$

Χρήσιμες ιδιότητες των τανυστών είναι:

1. $T^{ab}{}_{bc} = T^a{}_c$ **συστολή** και θεωρούμε άθροιση ως προς τον δείκτη b
2. $T_{(\mu_1 \ldots \mu_n)_\rho}{}^\sigma = \frac{1}{n!}(T_{\mu_1 \ldots \mu_n \rho}{}^\sigma +$ άθροισμα μεταθέσεων των δεικτών $\mu_1 \ldots \mu_n)$
3. $T_{[\mu_1 \ldots \mu_n]_\rho}{}^\sigma = \frac{1}{n!}(T_{\mu_1 \ldots \mu_n \rho}{}^\sigma -$ άθροισμα εναλλαγής προσήμου των μεταθέσεων των δεικτών $\mu_1 \ldots \mu_n)$

1.5.4 *Pullback* και Παράγωγοι $\mathfrak{Lie}$

Ορισμός 1.5.5. Θεωρώντας $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ δυο Πολλαπλότητες με μια γραμμική απεικόνιση $\phi : M \mapsto N$ και $f : \mathcal{N} \mapsto \mathbb{R}$ να είναι μια γραμμική συνάρτηση στον N.Η σύνθεση

$$\phi^* f \equiv f \circ \phi : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R} \tag{1.32}$$

καλείται το *pullback* της f από την ϕ^*.

Επειδή τα διανύσματα είναι τελεστές παραγώγισης "*smooth*" σε πραγματικούς αριθμούς τότε ορίζουμε την *pushforward* διαδικασία ενός διανύσματος.

Ορισμός 1.5.6. Έστω ένα διάνυσμα $V(p)$ είναι διάνυσμα του $\mathcal{M}$ ορίζουμε την *pushforward* του διανύσματος $\phi_* V$ στο σημείο $\phi(p)$ του με:

$$(\phi_* V)(f) = V(\phi^* f) \tag{1.33}$$

Ορισμός 1.5.7. Έστω μια απεικόνιση $\phi_t : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}$ Ορίζουμε παράγωγο $\mathfrak{Lie}$ ενός τανυστή T την ποσότητα:

$$\mathcal{L}_V T^{\mu_1 \ldots \mu_k}{}_{\nu_1 \ldots \nu_l} = \lim_{t \to 0} \left(\frac{\phi_t^* [T^{\mu_1 \ldots \mu_k}{}_{\nu_1 \ldots \nu_l}](\phi_t(p)) - T^{\mu_1 \ldots \mu_k}{}_{\nu_1 \ldots \nu_l}(p)}{t} \right) \tag{1.34}$$

Είναι παράγωγος $\mathfrak{Lie}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση και ακολουθεί το κανόνα *Leibniz* . Πάνω σε μία συνήθη συνάρτηση η παράγωγος $\mathfrak{Lie}$ γράφεται:

$$\mathcal{L}_V f = \lim_{t\to 0}(\frac{\phi_t^*[f(\phi_t(p))] - f(p)}{t}) = V(f) = V^\mu \partial_\mu f \tag{1.35}$$

Όμως επειδή η παράγωγος $\mathfrak{Lie}$ εξαρτάται από το πεδίο πάνω στο οποίο ορίζεται δεν μας προσφέρει την έννοια της παράλληλης μεταφοράς. Επομένως, είμαστε αναγκασμένοι να ορίσουμε μια άλλου είδους παράγωγος την Συναλλοίωτη παράγωγο η οποία θα μετατοπίζει το διάνυσμα παράλληλα με τον ευαυτό του κατά μια μικρή ποσότητα.

1.5.5 Συναλλοίωτη Παράγωγος

Επειδή η μερική παράγωγος (∂_ν) των τανυστών δεν είναι καλός τανυστής γιατί δεν μετασχηματίζεται σαν τανυστής διότι θεωρώντας μια 1-μορφή έχουμε ότι :

$$\partial_{\mu'} W_{\nu'} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} W_{\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} W_\nu) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}}(\frac{\partial}{\partial x^\mu} W_\nu) + W_\nu \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}}) \tag{1.36}$$

για να είναι καλός τανυστής θα έπρεπε να λείπει ο τελευταίος όρος,επομένως χρειαζόμαστε μια παράγωγο η οποία θα μας δίνει καλούς τανυστές. Αυτή είναι η **Συναλλοίωτη παράγωγος** και συμβολίζεται ∇_μ ή όταν δρά πάνω σε έναν τανυστή συμβολίζεται με $\nabla_\mu A_\nu = A_{\nu;\mu}$

Ορισμός 1.5.8. Συναλλοίωτη παράγωγος ορίζεται πάνω μια πολλαπλότητα ο τελεστής ο οποίος πηγαίνει έναν τανυστή τύπου (k, l) σε έναν τύπου $(k, l + 1)$ και απαιτώντας να ικανοποιεί τις ιδιότητές:

1. $\nabla(T + S) = \nabla T + \nabla S$
2. $\nabla(T \otimes S) = (\nabla T) \otimes S + T \otimes (\nabla S)$
3. $\nabla_\mu(T^\lambda{}_{\lambda\rho}) = (\nabla T)_\mu{}^\lambda{}_{\lambda\rho}$
4. $\nabla_\mu \phi = \partial_\mu \phi$

με T, S να είναι τανυστές ενώ το ϕ βαθμωτό δηλαδή τανυστή τύπου (0,0).

Ορισμός 1.5.9. Συναλλοίωτη παράγωγος διανύσματος:

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} V^\lambda \tag{1.37}$$

Ορισμός 1.5.10. Συναλλοίωτη παράγωγος δυαδικού διανύσματος:

$$\nabla_\mu \omega_\nu = \partial_\mu \omega_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\omega_\lambda \tag{1.38}$$

Ορισμός 1.5.11. Συναλλοίωτη παράγωγος τανυστή:

$$\begin{aligned}\nabla_\sigma T^{\mu_1\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l} &= \partial_\sigma T^{\mu_1\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l} \\ &+ \Gamma^{\mu_1}_{\sigma\lambda} T^{\lambda\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l} + \cdots + \Gamma^{\mu_k}_{\sigma\lambda} T^{\mu_1\ldots\lambda}{}_{\nu_1\ldots\nu_l} \\ &- \Gamma^\lambda_{\sigma\nu_1} T^{\mu_1\ldots\mu_k}{}_{\lambda\ldots\nu_l} - \cdots - \Gamma^\lambda_{\sigma\nu_1} T^{\mu_1\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\lambda}\end{aligned}$$

Έτσι από την απαίτηση το $\nabla_\mu V^\nu$ να μετασχηματίζεται σαν τανυστής έχουμε ότι:

$$\nabla_{\mu'} V^{\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \nabla_\mu V^\nu \tag{1.39}$$

Το αριστερό μέλος γράφεται

$$\nabla_{\mu'} V^{\nu'} = \partial_{\mu'} V^{\nu'} + \Gamma^{\nu'}_{\mu'\lambda'} V^{\lambda'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \partial_\mu (\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} V^\nu) + \Gamma^{\nu'}_{\mu'\lambda'} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} V^{\lambda'}$$

$$\nabla_{\mu'} V^{\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} (\partial_\mu \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu}) V^\nu + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} (\partial_\mu V^\nu) + \Gamma^{\nu'}_{\mu'\lambda'} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} V^{\lambda'}$$

δηλαδή:

$$\nabla_{\mu'} V^{\nu'} = \partial_{\mu'} V^{\nu'} + \Gamma^{\nu'}_{\mu'\lambda'} V^{\lambda'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} (\partial_\mu \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu}) V^\nu + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} (\partial_\mu V^\nu) + \Gamma^{\nu'}_{\mu'\lambda'} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} V^\lambda \tag{1.40}$$

Το δεξί της μέλος γίνεται:

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \nabla_\mu V^\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \partial_\mu V^\nu + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \Gamma^\nu_{\mu\lambda} V^\lambda \tag{1.41}$$

Εξισώνοντας τις δυο τελευταίες έχουμε ότι :

$$\Gamma^{\nu'}_{\mu'\lambda'} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} V^\lambda + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} (\partial_\mu \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu}) V^\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \Gamma^\nu_{\mu\lambda} V^\lambda \tag{1.42}$$

όμως ο δείκτης ν του δεύτερου όρου του αριστερού μέλους της εξίσωσης μπορεί και γίνεται λ γιατί είναι όρος αθροίσματος άρα οι συνιστώσες του διανύσματος φεύγουν:

$$\Gamma^{\nu'}_{\mu'\lambda'} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \Gamma^\nu_{\mu\lambda} - \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} (\partial_\mu \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu}) \tag{1.43}$$

το οποίο $\Gamma^\nu_{\mu\lambda}$ που ονομάζεται **Σύνδεσμος** δεν είναι τανυστής (γιατί δεν μετασχηματίζεται σαν τέτοιος) αλλά είναι φτιαγμένο έτσι ώστε ο συνδυασμός του με την παράγωγο να είναι!

Επίσης μπορούμε να ορίσουμε δυο ακόμη ιδιότητες:

1. **torsion-free**: $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2!}(\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu}) \Leftrightarrow \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu}$

2. **metric-compatibility**: $\nabla_\sigma g_{\mu\nu} = 0$

Η τελευταία ιδιότητα μας επιτρέπει να καθορίσουμε με μοναδικό τρόπο τους συντελεστές $\Gamma^\lambda_{\nu\mu}$ σε σχέση με την μετρική. Έτσι φτιάχνουμε τους παρακάτω όρους:

$$\begin{aligned}
\nabla_\rho g_{\mu\nu} &= \partial_\rho g_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma_{\rho\mu} g_{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma_{\rho\nu} g_{\mu\sigma} = 0 \\
\nabla_\mu g_{\rho\nu} &= \partial_\mu g_{\rho\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\rho} g_{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} = 0 \\
\nabla_\nu g_{\rho\mu} &= \partial_\nu g_{\rho\mu} - \Gamma^\sigma_{\nu\rho} g_{\sigma\mu} - \Gamma^\sigma_{\nu\mu} g_{\rho\sigma} = 0
\end{aligned}$$

προσθέτοντας τις δυο τελευταίες και αφαιρώντας τες από την πρώτη έχουμε ότι:

$$0 = \partial_\rho g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\nu g_{\rho\mu} - \Gamma^\sigma_{\rho\mu} g_{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma_{\rho\nu} g_{\mu\sigma} + \Gamma^\sigma_{\mu\rho} g_{\sigma\nu} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} + \Gamma^\sigma_{\nu\rho} g_{\sigma\mu} + \Gamma^\sigma_{\nu\mu} g_{\rho\sigma}$$

$$\Leftrightarrow 0 = \partial_\rho g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\nu g_{\rho\mu} + 2\Gamma^\sigma_{\mu\nu} g_{\rho\sigma}$$

Που πολλαπλασιάζοντας με $g^{\rho\lambda}$ την προηγούμενη σχέση έχουμε ότι:

$$2\Gamma^\sigma_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} g^{\rho\lambda} = -g^{\rho\lambda}(\partial_\rho g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\nu g_{\rho\mu})$$

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} \delta^\lambda_\sigma = -\frac{1}{2} g^{\rho\lambda}(\partial_\rho g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\nu g_{\rho\mu})$$

και τελικά μας μένει η σχέση για τους συντελεστές που ονομάζονται τα σύμβολα $Christoffel$:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\lambda}(\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \tag{1.44}$$

Επίσης μπορούμε να ορίσουμε την απόκλιση ενός διανύσματος μέσω της Συναλλοίωτη παραγώγου για μια πολλαπλότητα ως :

$$\nabla_\mu V^\mu = \partial_\mu V^\mu + \Gamma^\mu_{\mu\sigma} V^\sigma \tag{1.45}$$

Όμως έχουμε ότι:

$$\Gamma^\mu_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\mu}(\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})$$

λόγω συμμετρικότητας της μετρικής $\Rightarrow$

$$\Gamma^\mu_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\mu} \partial_\nu g_{\sigma\mu}$$

Όμως γνωρίζουμε ότι για ένα πίνακα που μπορεί να γραφεί A που μπορεί να γραφεί στην μορφή e^L μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$A = e^L \Leftrightarrow det(A) = e^{tr(L)} \Leftrightarrow tr(L) = ln[det(A)]$$
$$\Leftrightarrow \partial_k[tr(L)] = \partial_k(ln[det(A)]) \Leftrightarrow tr(\partial_k L) = \partial_k(ln[det(A)])$$

όμως

$$\partial_k L = \partial_k[ln(A)] = A^{-1}\partial_k[A]$$

άρα έχουμε:

$$tr(A^{-1}\partial_k[A]) = \partial_k(ln[det(A)]) \tag{1.46}$$

Ο $g_{\mu\nu}$ γράφεται σε μορφή εκθετικού επομένως μπορούμε να γράψουμε το σύμβολο $Christoffel$ που έχει λέμε υποστεί *contraction* (γιατί δύο δείκτες του είναι ίδιοι και αθροίζονται) :

$$\Gamma^\mu_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\mu} \partial_\nu g_{\sigma\mu} = \frac{1}{2}\partial_\nu(ln[detg])$$
$$= \partial_\nu(ln[\sqrt{detg}]) = \frac{1}{\sqrt{detg}}\partial_\nu(\sqrt{detg})$$

άρα γράφουμε:

$$\nabla_k V^k = \partial_k V^k + \frac{1}{\sqrt{detg}} \partial_k(\sqrt{detg}) V^k = \frac{1}{\sqrt{detg}} \partial_k(\sqrt{detg} V^k) \tag{1.47}$$

Επομένως τώρα μπορούμε να ορίσουμε την γενικευμένη σχέση του Θεωρήματος Stokes για διανύσματα:

$$\int_{\Sigma} \nabla_k V^k \sqrt{detg} d^n x = \int_{\partial\Sigma} n_k V^k \sqrt{det\gamma} d^{n-1} x \tag{1.48}$$

με Σ να είναι ο n-χώρος στον οποίο ορίζεται το πεδίο V^k με μετρική $g^{\mu\nu}$ και $\partial\Sigma$ να είναι ο $(n-1)$-χώρος (σύνορο του χώρου Σ) και να έχει μετρική $\gamma^{\mu\nu}$ και κάθετα διανύσματα στην επιφάνεια $\partial\Sigma$ τα n^k!

Σημείωση Αυτό που προσφέρει η Συναλλοίωτη παράγωγος είναι να μας επιτρέπει να μετατοπίζουμε ένα διάνυσμα από ένα σημείο σε ένα άλλο μιας πολλαπλότητας και να παραμένει παράλληλο στον εαυτό του. Η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί είναι:

$$\nabla_\mu V^\nu = 0 \tag{1.49}$$

1.5.6 Παράλληλη Μετατόπιση

Παράλληλη μετατόπιση ενός διανύσματος σε έναν χώρο σημαίνει να το μετατοπίζουμε στο χώρο και το μέτρο του να παραμένει αμετάβλητο! Σε μία πολλαπλότητα ένας τανυστής (γενικευμένο διάνυσμα) μπορεί να μετατοπιστεί παράλληλα με τον εαυτό πάνω σε μια καμπύλη $x^\sigma(\lambda)$ σε επίπεδο χώρο του σύμφωνα με την σχέση:

$$\frac{d}{d\lambda} T^{\mu_1 \ldots \mu_k}{}_{\nu_1 \ldots \nu_l} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\mu} T^{\mu_1 \ldots \mu_k}{}_{\nu_1 \ldots \nu_l} = 0 \tag{1.50}$$

Έτσι για να υπολογίσουμε την παράλληλη μετατόπιση σε καμπύλο χωρόχρονο αντικαθιστούμε την παράγωγο με την Συναλλοίωτη παράγωγο με:

$$\frac{D}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \nabla_\mu \tag{1.51}$$

να ορίζεται ως η **παράγωγος κατεύθυνσης** και να είναι μια απεικόνιση από (k, l) τανυστές σε (k, l) .Έτσι ορίζουμε την σχέση

$$\frac{D}{d\lambda} T^{\mu_1 \ldots \mu_k}{}_{\nu_1 \ldots \nu_l} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \nabla_\mu T^{\mu_1 \ldots \mu_k}{}_{\nu_1 \ldots \nu_l} = 0 \tag{1.52}$$

Που ονομάζεται **εξίσωση παράλληλης μετατόπισης** και είναι μια καλώς ορισμένος τανυστής αφού και το διάνυσμα $dx^k/d\lambda$ και το ∇T είναι καλοί τανυστές .Για ένα διάνυσμα παίρνει την μορφή:

$$\frac{d}{d\lambda} V^k + \Gamma^k_{\sigma\rho} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} V^\rho = 0 \tag{1.53}$$

Μετά μπορούμε να πούμε ότι είναι μια πρώτης τάξης διαφορική εξίσωση που περιγράφει ένα αρχικών-τιμών πρόβλημα: δοθέν ενός τανυστή σε ένα σημείο κατά μια καμπύλη διαδρομής, υπάρχει μοναδική συνέχιση του τανυστή σε όλα τα υπόλοιπα σημεία της διαδρομής όταν επιλύεται η προηγούμενη σχέση. Λέμε ότι ο τανυστής μεταφέρεται παράλληλα.
Σημείωση 1 Για τα σύμβολα $Christoffel$ ($metric - compatible$ σύνδεσμος)ισχύει ότι:

$$\frac{D}{d\lambda}g_{\mu\nu} = \frac{dx^\sigma}{d\lambda}\nabla_\sigma g_{\mu\nu} = 0 \tag{1.54}$$

Σημείωση 2 Για δοθέν δυο διανύσματα V^μ, W^ν που μετατοπίζονται παράλληλα κατά μήκος μιας καμπύλης $x^\sigma(\lambda)$ έχουμε ότι το εσωτερικό τους γινόμενο θα είναι:

$$\begin{aligned}\frac{D}{d\lambda}(g_{\mu\nu}V^\mu W^\nu) &= (\frac{D}{d\lambda}g_{\mu\nu})V^\mu W^\nu + g_{\mu\nu}(\frac{D}{d\lambda}V^\mu)W^\nu + g_{\mu\nu}V^\mu(\frac{D}{d\lambda}W^\nu) \\ &= 0 + 0 + 0 = 0\end{aligned} \tag{1.55}$$

Αυτό σημαίνει ότι η παράλληλη μετατόπιση με έναν metric-compatible σύνδεσμο διατηρεί την νόρμα των διανυσμάτων , στην έννοια της ορθογονιότητας , και ούτω κάθε εξής.

1.5.7 Γεωδαισιακή

Με τον όρο γεωδαισιακή εννοούμε την γενίκευση της ευθείας γραμμής του Ευκλείδειου χώρου.

Ορισμός 1.5.12. Ευθεία γραμμή εννοούμε:
(I) τη συντομότερη διαδρομή μεταξύ δυο σημείων
(II) τη διαδρομή που μετατοπίζει παράλληλα το δικό της εφαπτόμενο διάνυσμα!!!

Οι δύο αυτοί ορισμοί συμπίπτουν αν ο σύνδεσμος που προκύπτει είναι τα σύμβολα $Christoffel$
Απόδειξη
Ξεκινάμε από τον δεύτερο ορισμό: Το εφαπτόμενο διάνυσμα μιας διαδρομής $x^\mu(\lambda)$ είναι το $dx^\mu/d\lambda$.Για να μετατοπίζεται παράλληλα ακολουθεί την σχέση:

$$\frac{D}{d\lambda}\frac{dx^\mu}{d\lambda} = (\frac{dx^k}{d\lambda}\nabla_k)\frac{dx^\mu}{d\lambda} = \frac{dx^k}{d\lambda}\partial_k\frac{dx^\mu}{d\lambda} + \frac{dx^k}{d\lambda}\Gamma^\mu_{k\sigma}\frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0$$

Που σημαίνει:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu_{k\sigma}\frac{dx^k}{d\lambda}\frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0 \tag{1.56}$$

Αποτελεί την γεωδαισιακή εξίσωση! Η οποία σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων τα σύμβολα $Christoffel$ (γιατί η μετρική έχει παντού μονάδα) εξαφανίζονται και τότε η γεωδαισιακή παίρνει την μορφή $\frac{d^2x^\mu}{d\lambda} = 0$ που αποτελεί εξίσωση ευθείας γραμμής.
Σημείωση Μπορούμε να δούμε ότι η γεωδαισιακή δεν αλλάζει κάτω από τον μετασχηματισμός $\lambda \to a\lambda + b$.Αυτός μας επιτρέπει να καθορίσουμε μια ολόκληρη

κλάση από παραμέτρους που μας δίνουν την ίδια γεωδαισιακή και ονομάζονται affine παράμετροι. Μπορούμε να έχουμε σαν παράμετρο πάντα τον ιδιόχρονο ή ιδιοαπόσταση της καμπύλης σε lightlike και spacelike γεωδαισιακές
Αν δούμε τον δεύτερο ορισμό τότε έχουμε:
Σε έναν Λορεντζιανό χώρο έχουμε ότι για να μετρήσουμε την απόσταση τότε υπολογίζουμε το στοιχειώδες μήκος μέσω του ολοκληρώματος (θα αναλύσουμε σε επόμενο κεφάλαιο τι είναι ο ιδιόχρονος και η τετραταχύτητα), επομένως η ελάχιστη διαδρομή δίνεται από την ελαχιστοποίηση του ολοκληρώματος:

$$\tau = \int (-ds^2)^{1/2} d\lambda = \int (-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda})^{1/2} d\lambda \tag{1.57}$$

Που η μεταβολή του ιδιόχρονου δίνεται:

$$\delta\tau = \int \delta(-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda})^{1/2} d\lambda \tag{1.58}$$

που είναι για $f = -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}$ της μορφής:

$$\delta\tau = \frac{1}{2} \int \delta\sqrt{f} d\lambda = \frac{1}{2} \int (f)^{-1/2} (\delta f) d\lambda \tag{1.59}$$

Μπορούμε να ορίσουμε ότι $\lambda = \tau$, $\frac{dx^\mu}{d\tau} = U^\mu$ τετραταχύτητα και τότε $f = -g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = 1$ Επομένως

$$\delta\tau = \frac{1}{2} \int \delta(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}) d\tau$$

$$\delta\tau = \frac{1}{2} \int \{(\delta g_{\mu\nu}) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + g_{\mu\nu} (\delta \frac{dx^\mu}{d\tau}) \frac{dx^\nu}{d\tau} + g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} (\delta \frac{dx^\nu}{d\tau})\} d\tau$$

για μετατοπίσεις της μορφής:

$$x^\mu \to x^\mu + \delta x^\mu$$
$$g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + \partial_\sigma g_{\mu\nu} \delta x^\sigma$$

έχουμε:

$$\delta\tau = \frac{1}{2} \int \{\partial_\sigma g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \delta x^\sigma + g_{\mu\nu} \frac{d(\delta x^\mu)}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{d(\delta x^\nu)}{d\tau}\} d\tau$$

Όμως τους δυο τελευταίους όρους μπορούμε να τους σπάσουμε και να γράψουμε ότι:

$$\frac{1}{2} \int g_{\mu\nu} \frac{d(\delta x^\mu)}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} d\tau = \overbrace{\frac{1}{2} \int \frac{d}{d\tau} (g_{\mu\nu} \delta x^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau}) d\tau}^{0 \text{ στο όριο}} - \frac{1}{2} \int \{(\frac{d}{d\tau} g_{\mu\nu}) \delta x^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} + g_{\mu\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} \delta x^\mu\} d\tau$$

$$= -\frac{1}{2} \int \{(\frac{dx^\sigma}{d\tau} \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \delta x^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} + g_{\mu\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} \delta x^\mu\} d\tau$$

$$\frac{1}{2}\int g_{\mu\nu}\frac{d(\delta x^\mu)}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}d\tau = -\frac{1}{2}\int\{(\frac{dx^\sigma}{d\tau}\partial_\sigma g_{\mu\nu})\frac{dx^\nu}{d\tau} + g_{\mu\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2}\}\delta x^\mu d\tau$$

και όπου $\mu \leftrightarrow \sigma$

$$\frac{1}{2}\int g_{\sigma\nu}\frac{d(\delta x^\sigma)}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}d\tau = -\frac{1}{2}\int\{\frac{dx^\mu}{d\tau}(\partial_\mu g_{\sigma\nu})\frac{dx^\nu}{d\tau} + g_{\sigma\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2}\}\delta x^\sigma d\tau \tag{1.60}$$

ομοίως ο άλλος όρος γίνεται:

$$\frac{1}{2}\int g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{d(\delta x^\nu)}{d\tau}d\tau = -\frac{1}{2}\int\{(\frac{dx^\sigma}{d\tau}\partial_\sigma g_{\mu\nu})\frac{dx^\mu}{d\tau} + g_{\mu\nu}\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}\}\delta x^\nu d\tau$$

όπου $\nu \leftrightarrow \sigma$ και γίνεται:

$$\frac{1}{2}\int g_{\mu\sigma}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{d(\delta x^\sigma)}{d\tau}d\tau = -\frac{1}{2}\int\{\frac{dx^\nu}{d\tau}(\partial_\nu g_{\mu\sigma})\frac{dx^\mu}{d\tau} + g_{\mu\sigma}\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}\}\delta x^\sigma d\tau \tag{1.61}$$

Επομένως γράφουμε την μεταβολή:

$$\delta\tau = \frac{1}{2}\int\{(\partial_\sigma g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\sigma\nu} - \partial_\nu g_{\mu\sigma})\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} - g_{\sigma\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2} - g_{\mu\sigma}\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}\}\delta x^\sigma d\tau$$

οι δυο τελευταίοι όροι λόγω αντισυμμετρικότητας της μετρικής είναι ίδιοι επομένως έχουμε:

$$\delta\tau = \frac{1}{2}\int\{(\partial_\sigma g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\sigma\nu} - \partial_\nu g_{\mu\sigma})\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} - 2g_{\sigma\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2}\}\delta x^\sigma d\tau$$

$$\delta\tau = -\int\{\frac{1}{2}(\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} + g_{\sigma\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2}\}\delta x^\sigma d\tau \tag{1.62}$$

Στέλνωντας την μεταβολή του ιδιόχρονου στο 0 έχουμε ότι:

$$\frac{1}{2}(\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} + g_{\sigma\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2}\}\delta x^\sigma = 0$$

$$g^{\sigma\rho}g_{\sigma\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2} + \frac{1}{2}g_{\sigma\rho}(\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

$$\frac{d^2x^\rho}{d\tau^2} + \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \tag{1.63}$$

Που είναι ακριβώς η ίδια γεωδαισιακή με τα σύμβολα $Christoffel$ όπως τα έχουμε ορίσει!

1.6 Riemannian Γεωμετρία

Ορίζοντας την πολλαπλότητα ως έναν τοπολογικό χώρο Μπορούμε τώρα να την εφοδιάσουμε με μια μετρική η οποία μας βοηθάει να μετράμε αποστάσεις και άλλα παράγωγα μεγέθη του χώρου αυτού. Αυτή την μετρική την θεωρούμε σαν γενίκευση της μετρικής που ορίσαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο την θεωρούμε συμμετρική αλλά σε έναν τοπολογικό χώρο όπως είναι η πολλαπλότητα η μετρική εξαρτάται από την θέση στην οποία ορίζεται. Το επόμενο βήμα είναι να ορίσουμε την Συναλλοίωτη παράγωγο η οποία μας επιτρέπει να μεταφέρουμε παράλληλα διανύσματα από έναν σημείο της πολλαπλότητας σε άλλο. Έπιτα ορίζουμε δυο νέα μεγέθη τον τανυστή καμπυλότητας και στρέψης. Όλα αυτά τα αντικείμενα ορίζονται από τα στοιχεία της γεωμετρίας και όχι από στοιχεία γεωμετρίας μεγαλύτερης διάστασης που μέσα σε αυτήν μελετάμε την εν λόγω γεωμετρία. Γιαυτό τον λόγο η *Riemaniann* γεωμετρία ονομάζεται **εσωτερική**.

1.6.1 Τανυστής Καμπυλότητας και Στρέψης

Σε αυτού του είδους την γεωμετρία μπορούμε να υπολογίσουμε τον τανυστή καμπυλότητας *Riemann* και τον τανυστή Στρέψης δηλαδή το πόσο διαφέρει ένας τανυστής από τον εαυτό του όταν ακολουθεί δυο διαφορετικές διαδρομές μεταξύ δυο σημείων της πολλαπλότητας. Αφού με την Συναλλοίωτη παράγωγο μπορούμε να μετατοπίζουμε ένα διάνυσμα απειροστά από την θέση , τότε θα υπολογίσουμε τον μεταθέτη δυο συναλοίωτων παραγώγων ενός διανύσματος ,από τις οποίες η κάθε μια θα μεταφέρει το διάνυσμα σε διαφορετική κατεύθυνση για να υπολογίσουμε το κατά πόσο αλλάζει το διάνυσμα όταν ακολουθεί αυτές τις δυο διαφορετικές διαδρομές για να πάει από το ένα σημείο της πολλαπλότητας στο άλλο.

$$
\begin{aligned}
[\nabla_a, \nabla_b]V^c &= \nabla_a \nabla_b V^c - \nabla_b \nabla_a V^c \\
&= \partial_a \nabla_b V^c - \Gamma^s_{ab} \nabla_s V^c + \Gamma^c_{as} \nabla_b V^s - \partial_b \nabla_a V^c + \Gamma^s_{ba} \nabla_s V^c - \Gamma^c_{bs} \nabla_a V^s \\
&= \partial_a \partial_b V^c + \partial_a (\Gamma^c_{bs} V^s) - \Gamma^s_{ab} \partial_s V^c - \Gamma^s_{ab} \Gamma^c_{sp} V^p + \Gamma^c_{as} \partial_b V^s + \Gamma^c_{as} \Gamma^s_{bp} V^p \\
&- \partial_b \partial_a V^c - \partial_b (\Gamma^c_{as} V^s) + \Gamma^s_{ba} \partial_s V^c + \Gamma^s_{ba} \Gamma^c_{sp} V^p - \Gamma^c_{bs} \partial_a V^s - \Gamma^c_{bs} \Gamma^s_{ap} V^p \\
&= (\partial_a \Gamma^c_{bs}) V^s - \Gamma^s_{ab} \partial_s V^c - \Gamma^s_{ab} \Gamma^c_{sp} V^p + \Gamma^c_{ap} \Gamma^p_{bs} V^s \\
&- (\partial_b \Gamma^c_{as}) V^s + \Gamma^s_{ba} \partial_s V^c + \Gamma^s_{ba} \Gamma^c_{sp} V^p - \Gamma^c_{bp} \Gamma^p_{as} V^s \\
&= (\partial_a \Gamma^c_{bs} - \partial_b \Gamma^c_{as} + \Gamma^c_{ap} \Gamma^p_{bs} - \Gamma^c_{bp} \Gamma^p_{as}) V^s - 2\Gamma^s_{[ab]} \nabla_s V^c \Leftrightarrow
\end{aligned}
$$

$$[\nabla_a, \nabla_b]V^c = \mathcal{R}^c{}_{sab} V^c - \mathcal{T}^s_{ab} \nabla_s V^c \tag{1.64}$$

Ορισμός 1.6.1. Τελικά δηλαδή υπολογίσαμε τον **Τανυστής Καμπυλότητας** Riemann:

$$\mathcal{R}^c{}_{sab} = \partial_a \Gamma^c_{bs} - \partial_b \Gamma^c_{as} + \Gamma^c_{ap} \Gamma^p_{bs} - \Gamma^c_{bp} \Gamma^p_{as} \tag{1.65}$$

Ο οποίος υπολογίζει το πόσο διαφέρει έναν διάνυσμα από τον εαυτό του όταν ακολουθεί μια κλειστή καμπύλη από παράλληλες μετατοπίσεις

Ορισμός 1.6.2. Και τον τανυστή **Στρέψης** :

$$\mathcal{T}^s_{ab} = \Gamma^s_{ab} - \Gamma^s_{ba} \tag{1.66}$$

Ο οποίος υπολογίζει το ποσό κατά το οποίο ο μεταθέτης του διανύσματος είναι ανάλογος της συναλλοίωτης παραγώγου του διανύσματος!Αυτό μας δείχνει το κατά πόσο το διάνυσμα που μεταφέραμε είναι παράλληλο με το διάνυσμα όταν θα το μεταφέραμε στο εφαπτόμενο επίπεδο. Κάθε απόκλιση από αυτήν την σύγκριση μας δίνει μη μηδενικό τανυστή στρέψης.

1.6.2 Ιδιότητες του τανυστή Riemann

Ο τανυστής καμπυλότητας *Riemann* με κατεβασμένους όλους τους δείκτες γράφεται:

$$\mathcal{R}_{abcd} = g_{as}\mathcal{R}^s{}_{bcd} \tag{1.67}$$

Από κατασκευής βάση ορισμού ο τανυστής *Riemann* έχει τις εξής αλγεβρικές ιδιότητες:

1. $\mathcal{R}_{abcd} = -\mathcal{R}_{abdc}$

2. $\mathcal{R}_{abcd} = -\mathcal{R}_{bacd}$

3. $\mathcal{R}^a{}_{bcd} + \mathcal{R}^a{}_{dbc} + \mathcal{R}^a{}_{cdb} = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} \mathcal{R}^a{}_{[bcd]} = 0$

4. $\mathcal{R}_{abcd} = \mathcal{R}_{cdab}$

Αυτές οι ταυτότητες μας βοηθούν στην καταμέτρηση των ανεξάρτητων συνιστωσών ενός τανυστή *Riemann* σε n-διαστάσεις!

Λόγω της ταυτότητας 1 μπορούμε να πούμε ότι ο $\mathcal{R}_{abcd}$ είναι ένας αντισυμμετρικός πίνακας τύπου με $\frac{n(n-1)}{2}$ ανεξάρτητα στοιχεία ομοίως λόγω για την σχέση δύο είναι ένας αντισυμμετρικός πίνακας με $\frac{n(n-1)}{2}$ ανεξάρτητα στοιχεία και λόγω της 4 είναι ένας συμμετρικός πίνακας με $\frac{m(m+1)}{2}$ με $m = \frac{n(n-1)}{2}$ άρα $\frac{\frac{n(n-1)}{2}(\frac{n(n-1)}{2}+1)}{2} = \frac{1}{8}[n(n-1)](n^2-n+2) = \frac{1}{8}(n^4-2n^3-3n^2-2n)$ ανεξάρτητα στοιχεία. Και η ταυτότητα 3 εξασφαλίζει για έναν πλήρως αντισυμμετρικό τανυστή στους 4-ης τάξης να έχει : $\frac{1}{8}(n^4-2n^3-3n^2-2n) - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} = \frac{1}{12}n^2(n^2-1)$ ανεξάρτητες συνιστώσες!

Στην Γενική Θεωρεία σχετικότητας ο τανυστής έχει $4^4 = 256$ συνιστώσες και λόγω του ορισμού και των ιδιοτήτων του περιορίζεται σε $12^{-1}4^2(4^2-1) = 20$ ανεξάρτητες συνιστώσες.

Αν δράσουμε με ένα μεταθέτη συναλλοίωτων αλλά *non−torsion−free* συνδέσμων έχουμε:

$$
\begin{aligned}
[\nabla_a, \nabla_b] A^{\mu_1 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \dots \nu_l} = & -\mathcal{T}^{\lambda}_{ab} T^{\mu_1 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \dots \nu_l} \\
& + \mathcal{R}^{\mu_1}{}_{\lambda ab} A^{\lambda \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \dots \nu_l} + \dots + \mathcal{R}^{\mu_k}{}_{\lambda ab} A^{\mu_1 \dots \lambda}{}_{\nu_1 \dots \nu_l} \\
& - \mathcal{R}^{\lambda}{}_{\nu_1 ab} A^{\mu_1 \dots \mu_k}{}_{\lambda \dots \nu_l} - \dots - \mathcal{R}^{\lambda}{}_{\nu_l ab} A^{\mu_1 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \dots \lambda}
\end{aligned}
$$

1.6.3 Τανυστής και Βαθμωτό Ricci

Ορισμός 1.6.3. Μπορούμε να ορίσουμε από τον τανυστή *Riemann* τον τανυστή *Ricci* ως την συστολή στον 1(πάνω) και 3(κάτω) δείκτη ως:

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = \mathcal{R}^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu} \tag{1.68}$$

και το βαθμωτό Ricci ως την συστολή του τανυστή *Ricci*:

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}^{\sigma}{}_{\sigma} = g^{\sigma\kappa} \mathcal{R}_{\kappa\sigma} \tag{1.69}$$

1.6.4 Ταυτότητα Bianchi

Δρώντας με τον μεταθέτη των συναλοίωτων παραγώγων πάνω σε έναν τανυστή (0,2) για μια πολλαπλότητα που έχει μηδενική στρέψη (*torsion − free* ιδιότητα) παίρνουμε τα εξής:

$$
\begin{aligned}
[\nabla_\mu, \nabla_\nu] T_{\kappa\lambda} &= \nabla_\mu \nabla_\nu T_{\kappa\lambda} - \nabla_\nu \nabla_\mu T_{\kappa\lambda} \\
&= \partial_\mu (\nabla_\nu T_{\kappa\lambda}) - \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} \nabla_\sigma T_{\kappa\lambda} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\kappa} \nabla_\nu T_{\sigma\lambda} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda} \nabla_\nu T_{\kappa\sigma} \\
& \quad - \partial_\nu (\nabla_\mu T_{\kappa\lambda}) + \Gamma^{\sigma}_{\nu\mu} \nabla_\sigma T_{\kappa\lambda} + \Gamma^{\sigma}_{\nu\kappa} \nabla_\mu T_{\sigma\lambda} + \Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda} \nabla_\mu T_{\kappa\sigma} \\
&= \partial_\mu (\partial_\nu T_{\kappa\lambda} - \Gamma^{\rho}_{\nu\kappa} T_{\rho\lambda} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} T_{\kappa\rho}) \\
& \quad - \Gamma^{\sigma}_{\mu\kappa} (\partial_\nu T_{\sigma\lambda} - \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} T_{\rho\lambda} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} T_{\sigma\rho}) - \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda} (\partial_\nu T_{\kappa\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\kappa} T_{\rho\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} T_{\kappa\rho}) \\
& \quad - \partial_\nu (\partial_\mu T_{\kappa\lambda} - \Gamma^{\rho}_{\mu\kappa} T_{\rho\lambda} - \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} T_{\kappa\rho}) \\
& \quad + \Gamma^{\sigma}_{\nu\kappa} (\partial_\mu T_{\sigma\lambda} - \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} T_{\rho\lambda} - \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} T_{\sigma\rho}) + \Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda} (\partial_\mu T_{\kappa\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\mu\kappa} T_{\rho\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} T_{\kappa\rho}) \\
&= (-\partial_\mu \Gamma^{\rho}_{\nu\kappa} + \partial_\nu \Gamma^{\rho}_{\mu\kappa} + \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\mu\kappa} - \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\nu\kappa}) T_{\rho\lambda} \\
& \quad + (-\partial_\mu \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} + \partial_\nu \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} + \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda} - \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda}) T_{\kappa\rho} \\
&= \mathcal{R}^{\rho}{}_{\kappa\nu\mu} T_{\rho\lambda} + \mathcal{R}^{\rho}{}_{\lambda\nu\mu} T_{\kappa\rho} = -\mathcal{R}^{\rho}{}_{\kappa\mu\nu} T_{\rho\lambda} - \mathcal{R}^{\rho}{}_{\lambda\mu\nu} T_{\kappa\rho}
\end{aligned}
$$

δηλαδή:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] T_{\kappa\lambda} = -\mathcal{R}^{\rho}{}_{\kappa\mu\nu} T_{\rho\lambda} - \mathcal{R}^{\rho}{}_{\lambda\mu\nu} T_{\kappa\rho} \tag{1.70}$$

Εφαρμόζουμε την παραπάνω σχέση σε έναν τανυστή της μορφής $\nabla_\nu V_\mu$ Τότε:

$$
\begin{aligned}
[\nabla_\lambda, \nabla_\kappa] \nabla_\nu V_\mu &= -\mathcal{R}^{\sigma}{}_{\mu\lambda\kappa} \nabla_\nu V_\sigma - \mathcal{R}^{\sigma}{}_{\nu\lambda\kappa} \nabla_\sigma V_\mu \\
V_{\mu;\nu;\kappa;\lambda} - V_{\mu;\nu;\lambda;\kappa} &= \mathcal{R}^{\sigma}{}_{\mu\kappa\lambda} V_{\sigma;\nu} + \mathcal{R}^{\sigma}{}_{\nu\kappa\lambda} V_{\mu;\sigma}
\end{aligned}
$$

Υπολογίζουμε την ποσότητα :

$$I = V_{\mu;\nu;\kappa;\lambda} - V_{\mu;\nu;\lambda;\kappa} + \text{άθροισμα κυκλικών μεταθέσεων των } \nu\kappa\lambda$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= V_{\mu;\nu;\kappa;\lambda} - V_{\mu;\nu;\lambda;\kappa} + V_{\mu;\lambda;\nu;\kappa} - V_{\mu;\kappa;\nu;\lambda} + V_{\mu;\kappa;\lambda;\nu} - V_{\mu;\lambda;\kappa;\nu} \\
&= (V_{\mu;\nu;\kappa} - V_{\mu;\kappa;\nu})_{;\lambda} + (V_{\mu;\kappa;\lambda} - V_{\mu;\lambda;\kappa})_{;\nu} + (V_{\mu;\lambda;\nu} - V_{\mu;\nu;\lambda})_{;\kappa} \\
&= (\mathcal{R}^{\sigma}{}_{\mu\nu\kappa} V_\sigma)_{;\lambda} + (\mathcal{R}^{\sigma}{}_{\mu\kappa\lambda} V_\sigma)_{;\nu} + (\mathcal{R}^{\sigma}{}_{\mu\lambda\nu} V_\sigma)_{;\kappa} \\
&= \mathcal{R}^{\sigma}{}_{\mu\nu\kappa;\lambda} V_\sigma + \mathcal{R}^{\sigma}{}_{\mu\nu\kappa} V_{\sigma;\lambda} + \mathcal{R}^{\sigma}{}_{\mu\kappa\lambda;\nu} V_\sigma + \mathcal{R}^{\sigma}{}_{\mu\kappa\lambda} V_{\sigma;\nu} + \mathcal{R}^{\sigma}{}_{\mu\lambda\nu;\kappa} V_\sigma + \mathcal{R}^{\sigma}{}_{\mu\lambda\nu} V_{\sigma;\kappa}
\end{aligned}$$

Όμως μπορούμε το άθροισμα αυτό να το γράψουμε και:

$$\begin{aligned}
I_2 &= V_{\mu;\nu;\kappa;\lambda} - V_{\mu;\nu;\lambda;\kappa} + V_{\mu;\lambda;\nu;\kappa} - V_{\mu;\kappa;\nu;\lambda} + V_{\mu;\kappa;\lambda;\nu} - V_{\mu;\lambda;\kappa;\nu} \\
I_2 &= \mathcal{R}^{\sigma}{}_{\mu\kappa\lambda} V_{\sigma;\nu} + \mathcal{R}^{\sigma}{}_{\nu\kappa\lambda} V_{\mu;\sigma} + \mathcal{R}^{\sigma}{}_{\mu\nu\kappa} V_{\sigma;\lambda} + \mathcal{R}^{\sigma}{}_{\lambda\nu\kappa} V_{\mu;\sigma} + \mathcal{R}^{\sigma}{}_{\mu\lambda\nu} V_{\sigma;\kappa} + \mathcal{R}^{\sigma}{}_{\kappa\lambda\nu} V_{\mu;\sigma}
\end{aligned}$$

όμως

$$\begin{gathered}
I_1 = I_2 \Leftrightarrow \\
(\mathcal{R}^{\sigma}{}_{\mu\nu\kappa;\lambda} + \mathcal{R}^{\sigma}{}_{\mu\kappa\lambda;\nu} + \mathcal{R}^{\sigma}{}_{\mu\lambda\nu;\kappa}) V_\sigma = (\mathcal{R}^{\sigma}{}_{\nu\kappa\lambda} + \mathcal{R}^{\sigma}{}_{\lambda\nu\kappa} + \mathcal{R}^{\sigma}{}_{\kappa\lambda\nu}) V_{\mu;\sigma} \\
(\mathcal{R}^{\sigma}{}_{\mu\nu\kappa;\lambda} + \mathcal{R}^{\sigma}{}_{\mu\kappa\lambda;\nu} + \mathcal{R}^{\sigma}{}_{\mu\lambda\nu;\kappa}) V_\sigma = (0) V_{\mu;\sigma} \Leftrightarrow
\end{gathered}$$

$$\mathcal{R}^{\sigma}{}_{\mu\nu\kappa;\lambda} + \mathcal{R}^{\sigma}{}_{\mu\kappa\lambda;\nu} + \mathcal{R}^{\sigma}{}_{\mu\lambda\nu;\kappa} = 0 \tag{1.71}$$

Η τελευταία ονομάζεται **ταυτότητα** *Bianchi* και γράφεται σύμφωνα με τις ταυτότητες πιο συνοπτικά:

$$\begin{gathered}
\mathcal{R}^{\sigma}{}_{\mu[\nu\kappa;\lambda]} = 0 \Leftrightarrow \\
\mathcal{R}_{\sigma\mu[\nu\kappa;\lambda]} = 0 \Leftrightarrow \\
(\text{ επειδή } \mathcal{R}_{\sigma\mu\nu\kappa} = \mathcal{R}_{\nu\kappa\sigma\mu} \text{ }) \Leftrightarrow \\
\nabla_{[\lambda} \mathcal{R}_{\nu\kappa]\sigma\mu} = 0
\end{gathered}$$

Η καλύτερα:

$$\nabla_{[\lambda} \mathcal{R}_{\rho\sigma]\mu\nu} = 0 \tag{1.72}$$

1.6.5 Τανυστής Einstein

Μέσω της ταυτότητας *Bianchi* Μπορούμε να ορίσουμε τον τανυστή καμπυλότητας *Einstein*:

$$\text{(επειδή } \nabla_s g_{\mu\nu} = 0 \text{ από την ταυτότητα } Bianchi \text{ έχουμε:)}$$
$$(g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} \mathcal{R}_{\mu\nu\kappa\lambda})_{;\sigma} + (g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} \mathcal{R}_{\mu\nu\lambda\sigma})_{;\kappa} + (g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} \mathcal{R}_{\mu\nu\sigma\kappa})_{;\lambda} = 0$$
$$\text{(όμως έχουμε ότι :}$$
$$g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} \mathcal{R}_{\mu\nu\kappa\lambda} = g^{\nu\lambda} \mathcal{R}^{\kappa}{}_{\nu\kappa\lambda} = g^{\nu\lambda} \mathcal{R}_{\nu\lambda} = \mathcal{R}$$
$$g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} \mathcal{R}_{\mu\nu\lambda\sigma} = -g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} \mathcal{R}_{\nu\mu\lambda\sigma} = -g^{\mu\kappa} \mathcal{R}_{\mu\sigma}$$
$$g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} \mathcal{R}_{\mu\nu\sigma\kappa} = -g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} \mathcal{R}_{\mu\nu\kappa\sigma} = -g^{\nu\lambda} \mathcal{R}_{\nu\sigma}$$
$$\text{) άρα έχουμε:}$$
$$\mathcal{R}_{;\sigma} - (g^{\mu\kappa} \mathcal{R}_{\mu\sigma})_{;\kappa} - (g^{\nu\lambda} \mathcal{R}_{\nu\sigma})_{;\lambda} = 0$$
$$\text{αλλάζοντας δείκτες } \nu \leftrightarrow \mu, \lambda \leftrightarrow \kappa \text{ στον τελευταίο όρο έχουμε:}$$
$$\mathcal{R}_{;\sigma} - 2(g^{\mu\kappa} \mathcal{R}_{\mu\sigma})_{;\kappa} = 0$$
$$[\text{όμως } \mathcal{R}_{;\sigma} = \delta^{\kappa}_{\sigma} \mathcal{R}_{;\kappa} = g^{\mu\kappa} g_{\mu\sigma} \mathcal{R}_{;\kappa} = (g^{\mu\kappa} g_{\mu\sigma} \mathcal{R})_{;\kappa}\ ]$$
$$(g^{\mu\kappa} g_{\mu\sigma} \mathcal{R} - 2 g^{\mu\kappa} \mathcal{R}_{\mu\sigma})_{;\kappa} = 0$$
$$g^{\mu\kappa} (g_{\mu\sigma} \mathcal{R} - 2 \mathcal{R}_{\mu\sigma})_{;\kappa} = 0$$
$$\text{ορίζοντας } -2G_{\mu\sigma} = g_{\mu\sigma} \mathcal{R} - 2\mathcal{R}_{\mu\sigma} \text{τότε:}$$
$$-2 g^{\mu\kappa} G_{\mu\sigma;\kappa} = 0 \leftrightarrow g^{\mu\kappa} \nabla_{\kappa} G_{\mu\sigma} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\nabla^{\mu} G_{\mu\sigma} = 0 \tag{1.73}$$

$$\textbf{Τανυστής Einstein } G_{\mu\nu} = \mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R} \tag{1.74}$$

Ο τανυστής *Einstein* υπακούει πάντα αυτήν την διαφορική εξίσωση σε κάθε γεωμετρία

1.6.6 Συμμετρίες και Διάνυσμα Killing

Στο κεφάλαιο αυτό συζητάμε το θέμα των συμμετριών διαφόρων χώρων. Την φύση είναι δύσκολο να την περιγράψουμε ακριβώς γιατί μπορεί να περιέχει πολλύπλοκες μορφές. Με την εφεύρεση των συμμετριών μπορούμε να περιγράψουμε ένα αντικείμενο "πρόχειρα" με την έννοια ότι δεν το περιγράφουμε ακριβώς αλλά μια προσέγγιση μέσω μιας συμμετρίας αυτού και στην συνέχεια ότι ατέλειές έχει μπορούμε να τις προσθέσουμε σαν μια μικρή απόκλιση από την συμμετρία αυτή. Για παράδειγμα στο διάστημα ένα άστρο κατά προσέγγιση μπορεί να θεωρηθεί ως μια συμμετρική σφαίρα αν και στην πραγματικότητα στην επιφάνειά του γίνονται συχνά εκρήξεις που το κάνουν να χάνει αυτήν την συμμετρία. Στην Γενική θεωρεία Σχετικότητας έχουμε μεγαλύτερη ανάγκη αυτών των συμμετριών,παρότι λιγότερο στον ηλεκτρομαγνητισμό, γιατί η φύση των μη γραμμικών εξισώσεων *Einstein* είναι δύσκολο να λυθούν επακριβώς.

Ορισμός 1.6.4. Θεωρούμε λοιπόν ότι μια πολλαπλότητα διακατέχεται από **συμμετρία** όταν η μετρική της παραμένει αναλλοίωτη κάτω από κάποιον μετασχηματισμό που απεικονίζει την πολλαπλότητα στον εαυτό της: Η μετρική είναι ίδια από το ένα σημείο της πολλαπλότητας σε άλλο.

Επίσης μπορεί διαφορετικοί τανυστές να έχουνε διαφορετικές συμμετρίες Οι συμμετρίες της μετρικής καλούνται **ισομετρίες**.Μια μετρική λοιπόν έχει ισομετρία κάτω από μια συντεταγμένη ($x^{\sigma*}$) όταν η μετρική είναι ανεξάρτητη από την συναρτήση της συντεταγμένης γιατί τότε συνεπάγεται συμμετρία της μετρικής κάτω από οποιαδήποτε μετάθεση με μια σταθερά της εν λόγω συντεταγμένης:

$$\partial_{\sigma*} g_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow x^{\sigma*} \to x^{\sigma*} + a^{\sigma*} \ \forall \mu, \nu \ \text{ είναι ισομετρία} \tag{1.75}$$

Θεωρώντας την γεωδαισιακή πάνω σε μια πολλαπλότητα και θεωρόντας την γενίκευση της ταχύτητας $U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ και της ορμής $p^\mu = mU^\mu$ κάνουμε τον παρακάτω συλλογισμό:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0 \Leftrightarrow \frac{dx^\nu}{d\tau}\partial_\nu \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{dx^\nu}{d\tau}\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0 \Leftrightarrow$$
$$m\frac{dx^\nu}{d\tau}\partial_\nu m\frac{dx^\mu}{d\tau} + m\frac{dx^\nu}{d\tau}\Gamma^\mu_{\nu\lambda}m\frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0 \Leftrightarrow m\frac{dx^\nu}{d\tau}(\partial_\nu m\frac{dx^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}m\frac{dx^\lambda}{d\tau}) = 0 \Leftrightarrow$$
$$p^\nu(\partial_\nu p^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}p^\lambda) = 0 \Leftrightarrow$$

$$p^\nu \nabla_\nu p^\mu = 0 \tag{1.76}$$

Η προηγούμενη σχέση είναι η γεωδαισιακή εκφρασμένοι στην μορφή γενικευμένης ορμής. Από την προηγούμενη μπορούμε να βγάλουμε τα εξής συμπεράσματα:

$$\Rightarrow p^\nu(\partial_\nu p_\mu - \Gamma^\lambda_{\nu\mu}p^\lambda) = 0 \Leftrightarrow p^\nu \partial_\nu p_\mu + p^\nu \Gamma^\lambda_{\nu\mu}p_\lambda = 0$$

όμως παίρνοντας τα δυο μέλη ξεχωριστά έχουμε:

$$p^\nu \partial_\nu p_\mu = m\frac{dx^\nu}{d\tau}\partial_\nu p_\mu = m\frac{dp_\mu}{d\tau}$$

ενώ για το δεύτερο μέλος έχουμε

$$\Gamma^\lambda_{\nu\mu}p_\lambda p^\nu = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\partial_\nu g_{\sigma\mu} + \partial_\mu g_{\sigma\nu} - \partial_\sigma g_{\nu\mu})p_\lambda p^\nu$$
$$= \frac{1}{2}(\partial_\nu g_{\sigma\mu} + \partial_\mu g_{\sigma\nu} - \partial_\sigma g_{\nu\mu})p^\sigma p^\nu$$

(λόγω συμμετρίας του τανυστή$p^\sigma p^\nu$θα έχουμε:)

$$= \frac{1}{2}(\partial_\mu g_{\sigma\nu})p^\sigma p^\nu$$

Τότε

$$m\frac{dp_\mu}{d\tau} = \frac{1}{2}(\partial_\mu g_{\sigma\nu})p^\sigma p^\nu \tag{1.77}$$

Έτσι όταν έχουμε μια ισομετρία στην κατεύθυνση $x^{\sigma*}$ τότε έχουμε την παρακάτω σχέση γίνεται:

$$\partial_{\sigma*} g_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \frac{dp_{\sigma*}}{d\tau} = 0 \tag{1.78}$$

Μπορούμε τώρα να εισάγουμε το διάνυσμα *killing* στην κατεύθυνση $x^{\sigma*}$ το οποίο αντιστοιχεί σε μια ισομετρία ως εξής:

$$K = \partial_{\sigma*} \Leftrightarrow K^{\mu} = (\partial_{\sigma*})^{\mu} = \delta^{\mu}_{\sigma*} \tag{1.79}$$

Τότε γράφουμε:

$$p_{\sigma*} = K^{\nu} p_{\nu} = K_{\nu} p^{\nu} \tag{1.80}$$

Και έτσι μπορούμε να γράψουμε μια ισομετρία στην μορφή:

$$\frac{dp_{\sigma*}}{d\tau} = 0 \Leftrightarrow p^{\mu} \nabla_{\mu}(K_{\nu} p^{\nu}) = 0 \tag{1.81}$$

Η δεύτερη σχέση γράφεται ως:

$$\begin{aligned} p^{\mu} \nabla_{\mu}(K_{\nu} p^{\nu}) &= p^{\mu}(\nabla_{\mu} K_{\nu}) p^{\nu} + p^{\mu} K_{\nu} (\nabla_{\mu} p_{\nu}) \\ &= p^{\mu} p^{\nu} \nabla_{\mu} K_{\nu} \\ &= p^{\mu} p^{\nu} \nabla_{(\mu} K_{\nu)} \end{aligned}$$

Έτσι η **Εξίσωση Killing** γράφεται:

$$\nabla_{(\mu} K_{\nu)} = 0 \tag{1.82}$$

μέσω των παραγώγων Lie μπορούμε να δείξουμε ότι η εξίσωση αυτή συνεπάγεται αναλλοίωτη μετρική κάτω από το πεδίο *killing* :

$$\mathcal{L}_K g_{\mu\nu} = K^{\sigma} \nabla_{\sigma} g_{\mu\nu} + (\nabla_{\mu} K^{\lambda}) g_{\lambda\nu} + (\nabla_{\nu} K^{\lambda}) g_{\mu\lambda} = \nabla_{\mu} K_{\nu} + \nabla_{\nu} K_{\mu}$$

$$\mathcal{L}_K g_{\mu\nu} = 0 \text{ Αναλλοίωτη μετρική} \tag{1.83}$$

Κεφάλαιο 2

Εξισώσεις Κίνησης NLH

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε την κλασσική θεωρεία που περιγράφει την φύση και κυρίως τις κινήσεις των σωματίων μέσα σε αυτή. Τα προβλήματα που δίνει η φύση είναι προβλήματα δυναμικής και για την περιγραφή αυτών χρειαζόμαστε εξισώσεις οι οποίες να αποδίδουν όλα τα φυσικά χαρακτηριστικά του συστήματος. Τέτοιες εξισώσεις είναι οι εξισώσεις **Newton** (διαφορικές εξισώσεις 2-βαθμού ως προς την παράμετρο του χρόνου).Ωστόσο μια διαφορετική προσέγγιση των εξισώσεων αυτών αποτελούν οι εξισώσεις **Lagrange** και **Hamilton** οι οποίες είναι γενίκευση των εξισώσεων του $Newton$ και μας αποδίδουν μια εικόνα μόνο των ελεύθερων βαθμών ελευθερίας του προβλήματος με την βοήθεια των εξισώσεων περιορισμών της κίνησης.

2.1 Εξισώσεις Newton

Για να περιγράψουμε τις εξισώσεις του $Newton$ για τις βασικές κινήσεις σημειακού σωματίου πρέπει να δούμε ορίσουμε τις εξής Ποσότητες (όπου με έντονη γραφή εννοούμε διανυσματική μορφή μεγέθους σε Ευκλείδειο Χώρο):

Θέση $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$

Ταχύτητα $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$

Ορμή $\mathbf{p} = m\frac{d\mathbf{x}}{dt}$

Δύναμη $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$

Στροφορμή $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$

Ροπή $\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$

Ενέργεια $E = T(\mathbf{x}, \frac{d\mathbf{x}}{dt}, t) + V(\mathbf{x}, \frac{d\mathbf{x}}{dt}, t)$

Όπου με m εννοούμε την μάζα του σωματιδίου, T και V η κινητική και δυναμική ενέργεια του σωματίου αντίστοιχα.

Ορισμός 2.1.1. Ο πρώτος Νόμος του $Newton$ λέει ότι σε ένα σωματίδιο που δεν του ασκείται καμία δύναμη το σωματίδιο συνεχίζει και κινείται με την ίδια ταχύτητα:

$$\sum \mathbf{F} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(\frac{d\mathbf{x}}{dt}) = 0 \Leftrightarrow \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \text{σταθερή} \tag{2.1}$$

Αν σε ένα σύστημα αναφοράς ισχύει ο νόμος αυτός καλείται Αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

Ορισμός 2.1.2. Ο 2 Νόμος του $Newton$ λέει η συνισταμένη των δυνάμεων ισούται με την χρονική μεταβολή της ορμής του:

Ο ορισμός της δύναμης είναι αυτή η εξίσωση $Newton$ που περιγράφει την κίνηση των σωματίων:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\frac{d\mathbf{x}}{dt})$$

$$\Leftrightarrow \text{...(για μάζα που δεν μεταβάλλεται με τον χρόνο)...} \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{F} = m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \quad \text{Εξίσωση Newton} \tag{2.2}$$

Έπειτα έχουμε ότι το έργο ($Work$) που προκαλεί μια δύναμη και ορίζεται ως το ολοκλήρωμα της δύναμης πάνω σε μια καμπύλη $C(\alpha,\beta)$ με $\alpha,\beta)$ εννοούμε τα άκρα της καμπύλης:

$$W = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{x} = \int_C m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\cdot\frac{d\mathbf{x}}{dt}dt = \int_C m\frac{d}{dt}[\frac{1}{2}(\frac{d\mathbf{x}}{dt})^2]dt = \frac{m}{2}(\frac{d\mathbf{x}(\beta)}{dt})^2 - \frac{m}{2}(\frac{d\mathbf{x}(\alpha)}{dt})^2$$

Σε περίπτωση που το ολοκλήρωμα αυτό είναι μηδέν για κάποια καμπύλη τότε λέμε ότι η δύναμη αυτή καλείται συντηρητική πάνω σε αυτήν την καμπύλη. Από το θεώρημα $Stokes$ όπου για μια επιφάνεια S που έχει ως όριο την καμπύλη C έχουμε ότι:

$$W = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{x} = \int_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{S} = 0 \Rightarrow \nabla\times\mathbf{F} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{F} = -\nabla V \tag{2.3}$$

Ορισμός 2.1.3. Ο 3 Νόμος του Νεύτωνα λέει ότι σε κάθε ασκούμενη δύναμη αντιστοιχεί μια ίσου μέτρου αλλά αντίθετης κατεύθυνσης δύναμη!

2.2 Φορμαλισμός Lagrange

2.2.1 Σύνδεσμος

Οι γενίκευση των εξισώσεων του Newton για την κίνηση σωματίου γίνεται με το να εισάγουμε περιορισμούς των εξισώσεων αυτών. Οι περιορισμοί αυτοί είναι εξισώσεις που επιβάλλονται από την γεωμετρία του προβλήματος και ονομάζονται **σύνδεσμοι.**(π.χ. κίνησης σφαιρικού σωματιδίου πάνω σε μια επιφάνεια). Οι εξισώσεις των συνδέσμων για (N-σωματίων προβλήματα) ορίζονται ως:

$$f_k(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N, \dot{\mathbf{x}}_1, \ldots, \dot{\mathbf{x}}_N; t) = 0 \quad , k = 1, 2, ..., K \tag{2.4}$$

Με $\dot{Q}$ αναπαρίσταται η παράγωγος της ποσότητας Q ως προς τον χρόνο. Στην περίπτωση που ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις συνδέσμων απαλλαχθούν από την εξάρτηση των ταχυτήτων για n-**διάστατα** προβλήματα τότε ισχύει:

$$f_k(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N; t) = 0 \;\; k = 1, 2, ..., K < nN \text{ με } \;\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \tag{2.5}$$

και ονομάζονται **ολόνομοι σύνδεσμοι.**Εισάγοντας στο σύστημα εξισώσεων του $Newton$ τις εξισώσεις των συνδέσμων τότε το σύστημά μας πλέον απαλλάσσεται από ,ίσως επαρκή για εμάς , αριθμό μεταβλητών και να μένουν μόνο οι ένας μειωμένος αριθμός συντεταγμένων οι οποίες ονομάζονται **γενικευμένες συντεταγμένες** (ο αριθμός των οποίων είναι ίσος με το Βαθμό Ελευθερίας του συστήματος). Χρησιμοποιώντας τις γενικευμένες συντεταγμένες προσδιορίζουμε την κίνηση του σώματος λαμβάνοντας υπόψη όλους τους δυνατούς περιορισμούς.

2.2.2 Εξισώσεις κίνησης

Έστω

$f(\mathbf{x}; t) = 0$ Εξίσωση συνδέσμου

$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}+\mathbf{C}$ (**F** γνωστή εξωτερική Δύναμη και **C** άγνωστη δύναμη των συνδέσμων)

Η δύναμη που προέρχεται από τους συνδέσμους θέλουμε να είναι άεργη οπότε την παίρνουμε κάθετη στην επιφάνεια κίνησης του σωματίου, ενώ υποθέτουμε ότι η εξωτερική δύναμη παράγεται από κάποιο δυναμικό:

$$\mathbf{C} = \lambda(t)\nabla f(\mathbf{x}; t) \tag{2.6}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}; t) = -\nabla V(\mathbf{x}; t) \tag{2.7}$$

Άρα

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla V(\mathbf{x}; t) + \lambda(t)\nabla f(\mathbf{x}; t) \xrightarrow{\dot{\mathbf{x}}\cdot} m\dot{\mathbf{x}} \cdot \ddot{\mathbf{x}} = -\dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla V(\mathbf{x}; t) + \dot{\mathbf{x}} \cdot \lambda(t)\nabla f(\mathbf{x}; t) \tag{2.8}$$

Γενικά για ένα μέγεθος (διανυσματικό ή βαθμωτό) $Q(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}; t)$ ισχύει ότι:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{x}}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial t} \tag{2.9}$$

Εδώ έχουμε ότι

$$\frac{dV(\mathbf{x}; t)}{dt} = \dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla V(\mathbf{x}; t) + \frac{\partial V(\mathbf{x}; t)}{\partial t}$$

$$\frac{df(\mathbf{x}; t)}{dt} = \dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla f(\mathbf{x}; t) + \frac{\partial f(\mathbf{x}; t)}{\partial t} = 0 \quad \text{Ολόνομος}$$

Επομένως:

$$m\frac{d}{dt}(\frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{2}) = -\frac{dV(\mathbf{x};t)}{dt} + \frac{\partial V(\mathbf{x};t)}{\partial t} - \lambda(t)\frac{\partial f(\mathbf{x};t)}{\partial t} \Rightarrow$$
$$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 + V(\mathbf{x};t)) \equiv \frac{dE}{dt} = \frac{\partial V(\mathbf{x};t)}{\partial t} - \lambda(t)\frac{\partial f(\mathbf{x};t)}{\partial t}$$

Για αριθμό συνδέσμων έχουμε:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial V(\mathbf{x};t)}{\partial t} - \sum_{k=1} \lambda_k(t)\frac{\partial f_k(\mathbf{x};t)}{\partial t} \tag{2.10}$$

Δηλαδή η ενέργεια του συστήματος Αλλάζει όταν η επιφάνεια μεταβάλλεται με τον χρόνο για δυναμικά ανεξαρτήτου χρόνου:

$$\frac{dE}{dt} = -\sum_{k=1}^{N} \lambda_k(t)\frac{\partial f_k(\mathbf{x};t)}{\partial t} \tag{2.11}$$

Παίρνοντας την εξίσωση για το i_{th}-σωμάτιο και πολλαπλασιάζοντάς την με το i_{th}-κάθετο στις δυνάμεις $\mathbf{C}_i$ και άρα εφαπτόμενο στην επιφάνεια παίρνουμε τα εξής:

$$m_i\ddot{\mathbf{x}}_i - \mathbf{F}_i = -\lambda_k(t)\nabla_i f_k(\mathbf{x};t) \xrightarrow{\mathbf{E}_i}$$
$$\mathbf{E}_i(m_i\ddot{\mathbf{x}}_i - \mathbf{F}_i) = -\mathbf{E}_i\lambda_k(t)\nabla_i f_k(\mathbf{x};t) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{E}_i(m_i\ddot{\mathbf{x}}_i - \mathbf{F}_i) = 0 \text{ } \textbf{Αρχή d'Alembert} \tag{2.12}$$

Από την αρχή **d'Alembert** προκύπτουν nN-K ανεξάρτητες εξισώσεις. Οι οποίες ορίζουν το σύστημα των γενικευμένων συντεταγμένων:

$$q^\alpha = q^\alpha(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_N; t) \;\; \text{με} \;\; \alpha = 1, \ldots, (nN-K) \;\; \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(q^1, q^2, \ldots, q^{nN-K}; t) \tag{2.13}$$

Για $J = det(\frac{\partial q^\alpha}{\partial x^b}) \neq 0$ Επίσης αφού τα $\mathbf{E}_i$ αφού είναι εφαπτόμενα στην επιφάνεια(κάθετα στους συνδέσμους) Θα τα θέσουμε για $nN-K$ σταθερές ϵ ως :

$$\mathbf{E}_i = \epsilon^\alpha\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha} \tag{2.14}$$

Τότε θα έχουμε:

$$\mathbf{E}_i\nabla^i f_k(\mathbf{x};t) = \epsilon^\alpha\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha}\nabla^i f_k(\mathbf{x};t) = \epsilon^\alpha\frac{\partial f_k(\mathbf{x};t)}{\partial q^\alpha} = 0 \tag{2.15}$$

το οποίο ισχύει γιατί το f_k εξαρτάται μόνο από τα q^α , $\alpha = nN-K, \ldots, nN$

$$\mathbf{F}_i \cdot \epsilon^\alpha\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha} = -\nabla_i V(\mathbf{x};t)\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha} = -\frac{\partial V(\mathbf{x};t)}{\partial q^\alpha}$$

Επίσης

$$\ddot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha} = \frac{d}{dt}[\dot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha}] - \dot{\mathbf{x}}_i \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha}$$

Αλλά

$$\mathbf{v}_i \equiv \dot{\mathbf{x}}_i = \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}^\alpha} = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_i}{\partial \dot{q}^\alpha} = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha}$$

Και μην ξεχνάμε ότι:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha \partial q^\beta}\dot{q}^\beta + \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha}) = \frac{d}{dq^\alpha}(\frac{\partial^2 \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha \partial q^\beta}\dot{q}^\beta + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t}) = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q^\alpha}$$

Επομένως γράφουμε ότι:

$$m_i\ddot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^\alpha} = \frac{d}{dt}(m_i\mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}^\alpha}) - m_i\mathbf{v}_i\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q^\alpha} =$$
$$= \frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha}) - \frac{\partial T}{\partial q^\alpha}$$

όπου $= \frac{1}{2}m_i v_i^2$ είναι η συνολική Κινητική ενέργεια όλων των σωματίων με μάζα m_i.Έτσι η Αρχή d'Alembert γίνεται:

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha}) - \frac{\partial T}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial V(\mathbf{x};t)}{\partial q^\alpha} = 0$$

αφού για το δυναμικό ισχύει $V \neq V(\dot{q}^\alpha) \Leftrightarrow \dfrac{\partial V}{\partial \dot{q}^\alpha} = 0$ άρα

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha}) - \frac{\partial T}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial V(\mathbf{x};t)}{\partial q^\alpha}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}^\alpha} = 0$$

ορίζοντας $L = T - V$ **Λαγραντζιανή** συνάρτηση του συστήματος τότε η προηγούμενη σχέση γράφεται:

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0 \tag{2.16}$$

Ονομάζονται **Euler-Lagrange Εξισώσεις** , αλλά γράφονται και στην μορφή αναλυτικότερα:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^\alpha \partial \dot{q}^\beta}\ddot{q}^\beta + \frac{\partial^2 L}{\partial q^\alpha \partial \dot{q}^\beta}\dot{q}^\beta + \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{q}^\beta} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0 \tag{2.17}$$

είναι οι εξισώσεις κίνησης των N-σωματιδίων που βρίσκονται μέσα σε K-συνδέσμους.

2.2.3 Αρχή Ελαχίστης Δράσης ή Αρχή Hamilton

Η μορφή των εξισώσεων $Euler - Lagrange$ μοιάζουν με μεταβαλλόμενες εξισώσεις που προκύπτουν από το Πρόβλημα Μεταβολών του τομέα των Μαθηματικών.

Έτσι στην φύση μπορούμε να ορίσουμε την **Δράση** ενός φυσικού συστήματος την ποσότητα S , Θα δείξουμε ότι οι εξισώσεις $Euler - Lagrange$ προκύπτουν από την ελαχιστοποίηση της δράσης.Υποθέτωντας αρχικό, τελικό χρόνο t_i, t_f αντίστοιχα και την θέση του σωματίου $q(t)$ τότε:

$$S(q; t_i, t_f) = \int_{t_i}^{t_f} L(q, \dot{q}, t)dt \tag{2.18}$$

το $S = S[q(t)]$ και το καλούμε συναρτησοειδές.Για να ελαχιστοποιείται η S θα πρέπει $\delta S = 0$ όμως:

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_{t_i}^{t_f} \delta L dt = \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial q(t)} \delta q(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \delta \dot{q}(t) \right) dt = \\
&= \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial q(t)} \delta q(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \frac{d(\delta q(t))}{dt} \right) dt = \\
&= \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial q(t)} \delta q(t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \right] \delta q(t) \right) dt + \int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \delta q(t) \right) dt = \\
&= \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial q(t)} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \right] \right) \delta q(t) dt + \cancelto{0}{\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \delta q(t) \right]_{t_i}^{t_f}}
\end{aligned}$$

στα άκρα της τροχιάς $\delta q(t_i) = \delta q(t_f) = 0$. Επομένως για αυθαίρετο $\delta q(t)$ μένει ότι:

$$\delta S = 0 \Leftrightarrow \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial q(t)} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \right] \right) \delta q(t) dt = 0 \Leftrightarrow \tag{2.19}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q(t)} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \right] = 0 \tag{2.20}$$

Μερικές φορές οι $E - L$ εξισώσεις μας προσφέρουν μια σταθερά της κίνησης με έναν απλό τρόπο. Αν μια από τις γενικευμένες συντεταγμένες δεν παρουσιάζεται στην $Lagrangian$ του προβλήματος τότε:

$$\frac{\partial L}{\partial q^\beta} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\beta} = 0 \Leftrightarrow$$

$$p_\beta = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\beta} \tag{2.21}$$

ονομάζεται **Γενικευμένη Συζυγής Ορμή**.Δηλαδή αν μια γενικευμένη μεταβλητή είναι ασήμαντη τότε η συζυγής της μεταβλητή μας δίνει ένα σύνολο από αναλλοίωτες υποπολλαπλότητες. Δηλαδή αν η αρχική φάση ενός σημείου βρίσκεται πάνω σε μια υποπολλαπλότητα της οποίας η εξίσωση είναι $p_\beta =$σταθερό τότε η κίνηση παραμένει πάνω στην υποπολλαπλότητα.

2.2.4 Θεώρημα Noether

Θεωρώντας συνεχείς μετασχηματισμούς $q \to \psi(q)$ τότε μια μεταβολή στην Lagrangian θα μας δώσει:

$$L_\epsilon(q,\dot{q};t) = L\left(\psi(q), \frac{\partial}{\partial t}\psi q; t\right) + \dot{\Phi}(q,\epsilon;t)$$

$$\frac{dL_\epsilon}{d\epsilon} = \left[\frac{dL(q,\dot{q};t)}{dq^\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{dL(q,\dot{q};t)}{d\dot{q}^\alpha}\right]\frac{\partial\psi(q)}{\partial\epsilon} + \frac{d}{dt}\left(\frac{dL(q,\dot{q};t)}{d\dot{q}^\alpha}\delta q^\alpha\right) + \delta\dot{\Phi}(q,\dot{q};t)$$

αν ισχύουν οι εξισώσεις $E-L$ τότε ο πρώτος όρος πεθαίνει και μένει

$$\delta L_\epsilon = \frac{d}{dt}\frac{dL(q,\dot{q};t)}{d\dot{q}^\alpha}\dot{q}^\alpha - \frac{d}{dt}\delta\Phi = 0 \Rightarrow$$

$$\Gamma = \frac{dL(q,\dot{q};t)}{d\dot{q}^\alpha}\dot{q}^\alpha - \delta\Phi \quad \text{Σταθερά κίνησης} \tag{2.22}$$

Δηλαδή για κάθε τοπικό μετασχηματισμό που αφήνει αναλλοίωτη την $Lagrangian$ υποκρύπτεται μια διατηρήσιμη ποσότητα.

2.3 Φορμαλισμός Hamilton

2.3.1 Hamiltonian-ή

Μπορούμε την Lagrangian του συστήματος να την γράψουμε στην μορφή:

$$\hat{L}(q,p;t) = L(q,\dot{q};t) \text{ τότε έχουμε δυο μεταβλητές για παραγώγιση q,p}$$

$$\frac{\partial\hat{L}}{\partial q^a} = \frac{\partial L}{\partial q^a} + \frac{\partial L}{\partial\dot{q}^b}\frac{\partial\dot{q}^b}{\partial q^a} = \frac{\partial L}{\partial q^a} + p_b\frac{\partial\dot{q}^b}{\partial q^a} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial\hat{L}}{\partial q^a} - p_b\frac{\partial\dot{q}^b}{\partial q^a} = \frac{\partial L}{\partial q^a} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial q^a}\left(\hat{L} - p_b\dot{q}^b\right) = \frac{\partial L}{\partial q^a}$$

$$\frac{\partial\hat{L}}{\partial p^a} = \frac{\partial L}{\partial\dot{q}^b}\frac{\partial\dot{q}^b}{\partial p^a} = p_b\frac{\partial\dot{q}^b}{\partial p^a} = \frac{\partial}{\partial p^a}(p_b\dot{q}^b) - \frac{\partial p_b}{\partial p^a}\dot{q}^b \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial p^a}(\hat{L} - p_b\dot{q}^b) = -\dot{q}^a$$

$$\text{θέτουμε} \quad H(q,p;t) = p_b\dot{q}^b - \hat{L}(q,p;t) \quad \textbf{Hamiltonian} \text{ του συστήματος} \tag{2.23}$$

Και ορίζουμε τις **Κανονικές Εξισώσεις Hamilton** ως:

$$\frac{\partial H(q,p;t)}{\partial q^a} = -\frac{\partial L(q,p;t)}{\partial q^a} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial L(q,p;t)}{\partial\dot{q}^a} = -\frac{d}{dt}p_a = \dot{p}_a \tag{2.24}$$

$$\frac{\partial H(q,p;t)}{\partial p^a} = \frac{\partial}{\partial p^a}\left(p_b\dot{q}^b - \hat{L}(q,p;t)\right) = \dot{q}^a \tag{2.25}$$

$$\frac{\partial H(q,p;t)}{\partial t} = -\frac{\partial L(q,p;t)}{\partial t} \tag{2.26}$$

2.4 Φορμαλισμός Lagrange-Hamilton Σε Πεδία

Η θεωρεία Πεδίου είναι ακριβώς ο φορμαλισμός Lagrange με την διαφορά ότι μεταβαίνουμε από το σύνολο των γενικευμένων συντεταγμένων σε ένα σύνολο χωροχρονικά αναλλοίωτων πεδίων , και η δράση γίνεται το συναρτησοειδές αυτών των πεδίων:

$$q^i(t) \to \Phi^i(x^\mu)$$
$$S \to S[\Phi^i]$$

Στην θεωρία Πεδίου η Lagrangian-ή μπορεί να εκφραστεί ως το ολοκλήρωμα της Lagrangian-ής Πυκνότητας που είναι μια συνάρτηση των πεδίων και των παραγώγων τους:

$$L = \int d^{n-1}x \mathcal{L}(\Phi^i, \partial_\mu \Phi^i) \tag{2.27}$$

Τότε η δράση γίνεται:

$$S = \int d^0 x L = \int d^n x \mathcal{L}(\Phi^i, \partial_\mu \Phi^i) \tag{2.28}$$

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange προκύπτουν όταν χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο μεταβολών με το να μεταβάλουμε το πεδίο $\Phi^i(x^\mu)$:

$$\Phi^i(x^\mu) \to \Phi^i(x^\mu) + \delta\Phi^i(x^\mu) \tag{2.29}$$

$$\partial_\mu \Phi^i \to \partial_\mu \Phi^i + \delta(\partial_\mu \Phi^i) = \partial_\mu \Phi^i + \partial_\mu(\delta\Phi^i) \tag{2.30}$$

Για αρκετά μικρό $\delta\Phi^i$ μπορούνε να αναπτύξουμε με Taylor την Lagrangian-ή κάτω από την μεταβολή:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Phi^i, \partial_\mu \Phi^i) &\to \mathcal{L}(\Phi^i + \delta\Phi^i, \partial_\mu \Phi^i + \partial_\mu \delta\Phi^i) = \\ &= \mathcal{L}(\Phi^i, \partial_\mu \Phi^i) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^i}\delta\Phi^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \delta\Phi^i)}\delta(\partial_\mu \delta\Phi^i) \end{aligned}$$

Έτσι η δράση μεταβάλλεται κατά $S \to S + \delta S$ με:

$$\delta S = \int d^n x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^i}\delta\Phi^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \delta\Phi^i)}\delta(\partial_\mu \delta\Phi^i)\right] = \int d^n x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^i}\delta\Phi^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \delta\Phi^i)}\partial_\mu(\delta\Phi^i)\right]$$

$$\delta S = \int d^n x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^i}\delta\Phi^i - \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \delta\Phi^i)}\right)\delta\Phi^i + \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \delta\Phi^i)}\delta\Phi^i\right)\right]$$

όμως σύμφωνα με το θεώρημα Stokes ο τελευταίο όρος μας δίνει την συνάρτηση στο όριο που την θεωρούμε 0

$$\delta S = \int d^n x \delta\Phi^i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^i} - \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \delta\Phi^i)}\right)\right] + \cancelto{0}{\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \delta\Phi^i)}\delta\Phi^i\right)_{boundary}}$$

Θέλουμε η μεταβολή της δράσης να μηδενίζεται για αυθαίρετα μικρή μεταβολή του $\delta\Phi^i$επομένως παίρνουμε :

$$\frac{\partial S}{\partial \delta\Phi^i} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \delta\Phi^i)} = 0 \tag{2.31}$$

Που είναι οι **Εξισώσεις Euler-Lagrange για τα Πεδία**

Κεφάλαιο 3

Φυσική Σε επίπεδο Χωρόχρονο

Στο κεφάλαιο αυτό θα εισάγουμε μερικά στοιχεία της Ειδικής Θεωρίας της σχετικότητας που περιγράφουν το Επίπεδο Χώρο. Με τον όρο επίπεδο εννοούμε εκείνον στο οποίο ο τανυστής καμπυλότητας Riemann μηδενίζεται δηλαδή δεν υφίσταται καμπυλότητα. Σύμφωνα με αυτήν την Θεωρεία ο χώρος και ο χρόνος συνδυάζονται μαζί και είναι αλληλένδετοι. Η Νευτώνια Μηχανική και η Ειδική Θεωρεία Σχετικότητας είναι και οι δυο δομές του χωροχρόνου που με δυναμικά συστήματα περιγράφουν την φύση. Στην Νευτώνια Μηχανική ο χρόνος είναι Απόλυτος. Ενώ στην ειδική σχετικότητα η έννοια του χρόνου ως απόλυτου εγκαταλείπεται και ο χρόνος αποτελεί μια μεταβλητή του δυναμικού Προβλήματος.

3.1 Χωρόχρονος

Πριν την ειδική θεωρεία της σχετικότητας επικρατούσε η Θεωρεία του Γαλιλαίου όπου ο χρόνος ήτανε Απόλυτος. Οπότε για ένα σημείο που περιγράφεται σε ένα ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς με μηδενική ταχύτητα και σε ένα αδρανειακό σύστημα που κινείται με σταθερή ταχύτητα v στην κατεύθυνση του άξονα-x τότε έχουμε τον παρακάτω **μετασχηματισμό του Γαλιλαίου**:

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned}$$

Που σημαίνει ότι η πληροφορία από το ένα σύστημα αναφοράς στο άλλο μεταδίδεται ακαριαία. Αυτό όμως δεν συμβαδίζει με τα πειραματικά δεδομένα. Η θεώρηση του Einstein ότι η πληροφορία μεταδίδεται στο κενό με την ταχύτητα του Φωτός μας οδηγεί σε μια καινούρια αρχή. Αξιωματικά λοιπόν έχουμε την **Αρχή της Σχετικότητας** που λέει:

> "Πανομοιότυπα Πειράματα που διεξάγονται σε διαφορετικά αδρανειακά συστήματα αναφοράς παράγουν πανομοιότυπα αποτελέσματα."

Επομένως η πληροφορία από ένα σημείο σημείο στο άλλο μεταδίδεται με κάποιο όριο. Το όριο αυτό στο κενό είναι η ταχύτητα του φωτός "c". Επομένως χρειάζεται να εισάγουμε τον χώρο Minkowski που περιγράφει έναν τέτοιο χώρο.

3.2 Χώρος Minkowski

Το στοιχείο μήκος του χώρου Minkowski είναι:

$$ds^2 = -(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -c^2dt^2 + d\vec{r}^2 \tag{3.1}$$

όπου $\vec{r} = (x, y, z)$ με μετρική:

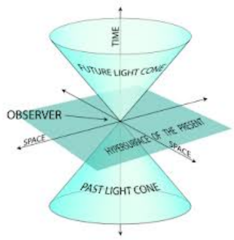
$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Οι φωτεινές ακτίνες ταξιδεύουν στον χώρο Minkowski με ταχύτητα c επομένως $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = -c^2 + \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 = -c^2 + c^2 = 0 \Leftrightarrow ds^2 = 0$.Έτσι οι φωτεινές ακτίνες ορίζουν τον λεγόμενο κώνο φωτός στον χώρο Minkowski όπως φαίνεται στο σχήμα και μπορεί να χωρίσει τον χώρο ανάλογα με το στοιχείο μήκους του ως:

$ds^2 < 0$ χρονοειδής

$ds^2 = 0$ φωτοειδής

$ds^2 > 0$ χωροειδής



Σχήμα 3.1: Κώνος φωτός

Μπορούμε να δούμε ότι η κλίση των φωτοειδών τροχιών υπολογίζεται ως εξής σε σφαιρικές συντεταγμένες:

$$ds^2 = 0 = -d(ct)^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2) \xrightarrow{\theta,\phi=\text{σταθερές}} \left(\frac{dt}{dr}\right)^2 = \frac{1}{c^2}$$

Που σε Φυσικές Μονάδες (c=1) έχουμε ότι:

$$\frac{dt}{dr} = \pm 1 \tag{3.3}$$

Έτσι η κλίση της φωτοειδής επιφάνειας μπορεί να βρεθεί από την μετρική σε σφαιρικές συντεταγμένες Στον χώρο Minkowski κάθε σημείο ονομάζεται **γεγονός**.Και κάθε καμπύλη καλείται **κοσμική γραμμή**.Ο μελλοντικός/παρελθοντικός χώρος ενός σημείου βρίσκεται εντός του κώνου φωτός. Πάνω σε κάθε κοσμική γραμμή μπορούμε να ορίσουμε μια παράμετρο. Για τις χρονοειδές και φωτοειδές καμπύλες (καμπύλες εντός και πάνω στον κώνο φωτός) μπορούμε να ορίσουμε την παράμετρο τ που ονομάζεται ιδιόχρονος και ισούται με:

$$d\tau^2 = -\frac{ds^2}{c^2} \tag{3.4}$$

3.3 Μετασχηματισμός Lorentz

Έστω ένα σύστημα αναφοράς S που περιγράφει την μετρούμενη απόσταση με το στοιχειώδες μήκος:

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{3.5}$$

Και ένα S' που κινείται με σταθερή ταχύτητά κατά τον άξονα-x του συστήματος S'.Οι άξονες του S' είναι προσανατολισμένοι με εκείνων του S.Τότε το στοιχείο μήκος θα πρέπει να παραμένει αναλλοίωτο σύμφωνα με την αρχή της Σχετικότητας:

$$ds'^2 = -c^2dt'^2 + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 \tag{3.6}$$

Θεωρούμε ότι τα x', y', z', t' αλλάζουν σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} x' &= ax + bt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= ex + gt \end{aligned}$$

Αν παραγωγίσουμε έχουμε:

$$dx' = adx + bdt \quad dy' = dy \quad dz' = dz \quad dt' = edx + gdt$$

Για $dx' = 0 \Leftrightarrow V = \frac{dx}{dt} = -\frac{b}{a}$.Για $dx = 0 \Leftrightarrow dt' = gdt$, $dx' = bdt \Leftrightarrow -V = \frac{dx'}{dt'} = \frac{b}{g}$. Τότε $g = a$, $b = -Vg$. Υψώνουμε τα τονούμενα διαφορικά στο τετράγωνό και τα τοποθετούμε στο τονούμενο στοιχείο μήκους:

$$ds'^2 = -c^2(g^2 - \frac{b^2}{c^2})dt^2 + (a^2 - c^2e^2)dx^2 + 2(ab - c^2ge)dtdx + dy^2 + dz^2$$

Για να είναι $ds^2 \equiv ds'^2$ πρέπει:

$$\left.\begin{array}{c} g^2-\frac{b^2}{c^2}=1 \\ a^2-c^2e^2=1 \\ ab-c^2ge=0 \end{array}\right\} \begin{array}{c} c^2a^2-b^2=c^2 \\ a^2-c^2e^2=1 \\ ab=c^2ae \end{array}\right\} \begin{array}{c} c^2a^2-c^4e^2=c^2 \\ a^2-c^2e^2=1 \\ b=c^2e \end{array}\right\} \begin{array}{c} a^2-c^2e^2=1 \\ a^2-c^2e^2=1 \\ b=c^2e \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{c} a^2-c^2e^2=1 \\ b=c^2e \\ \text{αλλά από πριν } b=-Va \end{array}\right\} \begin{array}{c} a^2-c^2e^2=1 \\ e=-\frac{V}{c^2}a \\ b=-Va \end{array}\right\} \begin{array}{c} a^2-\frac{V^2}{c^2}a^2=1 \\ e=-\frac{V}{c^2}a \\ b=-Va \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{c} a=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \\ e=-\frac{V}{c^2}a \\ b=-Va \ , \ a=g \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Επομένως}} \left\{\begin{array}{c} x'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}x-\frac{V}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}t \\ y'=y \\ z'=z \\ t'=\frac{-\frac{V}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}x+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}t \end{array}\right\}$$

Η για πιο συμπαγή μορφή ορίζουμε $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$ και $\beta = \frac{V}{c}$ Τότε

$$\left.\begin{array}{c} x'=\gamma(x-\beta ct) \\ y'=y \\ z'=z \\ t'=\gamma(t-\frac{\beta}{c}x) \end{array}\right\} \textbf{Μετασχηματισμοί Lorentz} \tag{3.7}$$

Μπορούμε επίσης να ορίσουμε ότι: $\beta = tanh\psi$ με $\begin{array}{c}\gamma\beta = sinh\psi \\ \gamma = cosh\psi\end{array}$ τότε μπορούμε να ορίσουμε τον μετασχηματισμό Lorentz σε μορφή Πινάκων:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cosh\psi & -\frac{1}{c}sinh\psi & 0 & 0 \\ -csinh\psi & cosh\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

Που μας θυμίζει τις στροφές στο επίπεδο. Εδώ οι στροφές γίνονται σε μια χωρική και την χρονική διάσταση. Επομένως Αυτοί οι μετασχηματισμοί έχουν ειδικό όνομα **Προωθήσεις Lorentz**.Και συμβολίζονται στον άξονα-x με:

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} cosh\psi & -\frac{1}{c}sinh\psi & 0 & 0 \\ -csinh\psi & cosh\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma/c & 0 & 0 \\ -c\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

3.4 Τετρανύσματα

Εφόσον ο χωρόχρονος περιγράφεται από τέσσερις μεταβλητές ορίζουμε τα **συναλλοίωτα** διανύσματα ως $x = x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$ όπου οι συνιστώσες του ορίζονται ως x^μ όπου ο ελληνικός δείκτης ($\mu = 0, 1, 2, 3$) τρέχει σε όλους τους δείκτες ενώ ορίζουμε ο λατινικός δείκτης $i = 1, 2, 3$ τρέχει σε χωρικούς δείκτες. Τότε το τετράνυσμα γράφεται $x^\mu = (x^0, x^i)$ Λόγω της αναλλοίωτης ποσότητας ορίζουμε το **ανταλλοίωτο** διάνυσμα $x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (-x^0, x^1, x^2, x^3) = (-ct, x, y, z)$ Έτσι ώστε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων γράφεται:

$$x^2 = x^\mu x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x^0 x_0 + x^1 x_1 + x^2 x_2 + x^3 x_3 = \tag{3.10}$$

$$= -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = -(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2 \tag{3.11}$$

3.4.1 Τετραπαράγωγος

Η γενικευμένη παράγωγος γίνεται:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^i}) = (\frac{\partial}{\partial (ct)}, \frac{\partial}{\partial \vec{x}}) \tag{3.12}$$

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_i}) = (\frac{\partial}{\partial (-ct)}, \frac{\partial}{\partial \vec{x}}) \tag{3.13}$$

3.4.2 Τετραταχύτητα

Ορίζουμε την τετραταχύτητα ως την μεταβολή του χωρικού τετρανύσματος ως προς τον ιδιόχρονο τ:

$$u^\mu = (\frac{d(ct)}{d\tau}, \frac{dx^i}{d\tau}) = (\frac{cdt}{d\tau}, \frac{dt}{d\tau}\frac{dx^i}{dt}) = (c\gamma, \gamma V^i) = (u^0, u^i) \tag{3.14}$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε ότι:

$$d\tau^2 = -\frac{ds^2}{c^2} = dt^2 - \frac{dr^2}{c^2} \Leftrightarrow \frac{d\tau^2}{dt^2} = 1 - \frac{1}{c^2}\frac{d\vec{r}^2}{dt^2} = 1 - \frac{V^2}{c^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{dt^2}{d\tau^2} = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \equiv \gamma \tag{3.15}$$

Γράφοντας την ταχύτητα στις τρείς διαστάσεις ως $\vec{V} \equiv V^i \equiv V$ για πιο ελαφρύ συμβολισμό, η τετραταχύτητα γράφεται:

$$u^\mu = (\frac{d(ct)}{d\tau}, \frac{cdt}{d\tau}\frac{dx^i}{dt}) = (\gamma c, \gamma V) = (u^0, u^i) \tag{3.16}$$

Γράφοντας την νόρμα της τετατραχύτητας βρίσκουμε:

$$u^\mu u_\mu = -(u^0)^2 + (u^i)^2 = -c^2\gamma^2 + \gamma^2 V^2 = -\gamma^2(c^2 - V^2)$$
$$= -c^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-1} (1 - \frac{V^2}{c^2}) = -1$$

Γνωρίζουμε όμως ότι το εσωτερικό γινόμενο γράφεται και στην μορφή σύμφωνα με την μετρική:

$$u^2 = u^\mu u_\mu = \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -c^2 \tag{3.17}$$

Ή σε γεωμετρικέ μονάδες ($c = 1$)

$$u^2 = u^\mu u_\mu = \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -1 \tag{3.18}$$

3.4.3 Τετραεπιτάχυνση

Η τετραεπιτάχυνση ορίζεται ως:

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = (\frac{d^2(ct)}{d\tau^2}, \frac{d^2(ct)}{d\tau^2}\frac{dx^i}{dt}) \tag{3.19}$$

3.4.4 Τετραορμή

Όπως και στην νευτώνεια μηχανική μπορούμε και εδώ να ορίσουμε την τετραορμή ως:

$$p^\mu = m u^\mu = (m\gamma c, m\gamma V) \tag{3.20}$$

Η τετραορμή νορμαλίζεται όπως και η τετραορμή επομένως:

$$p^2 = p^\mu p_\mu = -m^2 c^2 \gamma^2 + m^2 \gamma^2 V^2 = -m^2 c^2 \tag{3.21}$$

Βλέπουμε ότι η μηδενική συνιστώσα της τετραορμής για μικρές ταχύτητες μπορεί να γραφεί:

$$c c\gamma = \frac{mc}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2}} = mc(1 + \frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2} + \dots) = mc + \frac{1}{2}\frac{m}{c}V^2 + \dots \tag{3.22}$$

Ο δεύτερος όρος βλέπουμε ότι είναι ο ίδιος με την κινητική Ενέργεια διαιρεμένος κατά c.Επομένως αν ερμηνεύσουμε ότι ο πρώτος όρος είναι ο όρος **Ενέργειας ηρεμίας** διαιρεμένος δια c του σωματίου έχουμε ότι η τετραορμή μπορεί να γραφεί στην μορφή:

$$p^\mu = \gamma(mc, \vec{p}) = (1 + \frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2} + \dots)(mc, m\vec{V}) = (\frac{E_{tot}}{c}, \vec{p}) \tag{3.23}$$

Για δεύτερης τάξης προσέγγισης ως προς V. Επομένως για το εσωτερικό γινόμενο μπορούμε να πούμε άμα το αναπτύξουμε ότι:

$$p^2 = -(p^0)^2 + (\vec{p})^2 \;\Leftrightarrow\; -m^2c^2 = -\frac{E_{tot}}{c^2} + (\vec{p})^2 \Leftrightarrow$$
$$E_{tot}^2 = (\vec{p}c)^2 + (mc^2)^2 \tag{3.24}$$

Που καλείται **Σχετικιστική Ενέργεια**

3.4.5 Τετρακυματάνυσμα

Μέσω της τετραορμής μπορούμε να ορίσουμε το τετρακυματάνυσμα k^μ:

$$p^\mu = \hbar k^\mu \Leftrightarrow k^\mu = \frac{1}{\hbar}p^\mu = \frac{1}{\hbar}(E/c, \vec{p}) = \frac{1}{\hbar}(\hbar\omega/c, \hbar\vec{k}) = (\omega/c, \vec{k}) \tag{3.25}$$

3.5 Η Παρατήρηση

Μας ενδιαφέρει οι παρατηρητές να παρατηρούν τα γεγονότα στο δικό τους σύστημα αναφοράς πρέπει να ορίσουμε της 4 μοναδιαίες κατευθύνσεις στο λεγόμενο σύστημα εργαστηρίου $\{\mathbf{e}_{\hat{0}}, \mathbf{e}_{\hat{1}}, \mathbf{e}_{\hat{2}}, \mathbf{e}_{\hat{3}}\}$. Πάνω στην κοσμική γραμμή του παρατηρητή υπάρχει το ρολόι που μετράει σε ιδιόχρονο. Ετσι ορίζουμε ως την χρονική κατεύθυνση να πάρουμε την τετραταχύτητα που είναι εφαπτόμενη στην κοσμική γραμμή κατευθύνσεις.

$$\mathbf{e}_{\hat{0}} = u_{obs} \tag{3.26}$$

και να διαλέξουμε αυθαίρετα άλλες τρεις χωρικές κάθετες μεταξύ τους και κάθετες στην τετραταχύτητα του παρατηρητή. Μπορούμε λοιπόν την τετραορμή κάποιου σωματίου να την εκφράσουμε στο σύστημα συντεταγμένων του εργαστηρίου του παρατηρητή:

$$p = p^{\hat{\mu}}\mathbf{e}_{\hat{\mu}} \tag{3.27}$$

Επομένως οι συνιστώσες του τετρανύσματος της ορμής του σωματίου που θα μετράει ο παρατηρητής θα γράφονται στην μορφή προβολής:

$$p^{\hat{0}} = -p \cdot \mathbf{e}_{\hat{0}} \ , \ p^{\hat{1}} = p \cdot \mathbf{e}_{\hat{1}} \ , \ p^{\hat{2}} = p \cdot \mathbf{e}_{\hat{2}} \ , \ p^{\hat{3}} = p \cdot \mathbf{e}_{\hat{3}} \tag{3.28}$$

Επομένως μετρώντας την τετραορμή ενός σωματιδίου σε ηρεμία στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς θα έχει τετραορμή

$$p = (m, 0, 0, 0) \tag{3.29}$$

Ενώ η χρονική συνιστώσα του παρατηρητή θα ισούται με την τετραταχύτητά του.

$$\mathbf{e}_{\hat{0}} = u_{obs} = (\gamma, \gamma V, 0, 0) \tag{3.30}$$

Επομένως η ενέργεια που μετράει ο παρατηρητής θα είναι:

$$E = -p \cdot \mathbf{e}_{\hat{0}} = m\gamma \tag{3.31}$$

3.6 Πεδία στην Ειδική Σχετικότητα

Θεωρούμε την Κλασσική Θεωρεία Πεδίου όπου διεγέρσεις των πεδίο παρατηρούνται σαν σωματίδια. Τα Βαθμωτά Πεδία γεννούν σωματίδια με μηδενικό spin , ενώ τα διανυσματικά Πεδία και άλλοι τανυστές δημιουργούν μεγαλύτερου βαθμού spin. Αν το πεδίο είναι και μιγαδικό τότε θα είχε δυο βαθμούς ελευθερίας επομένως θα ερμηνευόταν σαν σωμάτιο-αντισωμάτιο.Τα πραγματικά πεδία είναι από μόνα του αντισωματίδια παραδείγματος χάρι ένα ουδέρο π-μεσόνιο. Θεωρώντας την κλασική μηχανική ενός πραγματικού βαθμωτού πεδίου για το οποίο η Λαγκραντζιανή του είναι μια τοπική συνάρτηση του χωροχρόνου που περιλαμβάνει συνεισφορές από:

1. Κινητική Ενέργεια: $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$
2. Ενεργειακή Βαθμίδα: $\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2$
3. Δυναμική Ενέργεια: $V(\phi)$

Παρόλου που η δυναμική ενέργεια είναι αναλλοίωτη κατά Lorentz οι δυο άλλες δεν είναι αλλά μπορούμε μαζί να τις συνδυάσουμε για να είναι με την μορφή:

$$-\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi) = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 \tag{3.32}$$

Η λαγκρανζιανή πυκνότητα θα είναι:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi) - V(\phi) \tag{3.33}$$

Για να βρούμε τις εξισώσεις Euler Lagrange υπολογίζουμε:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = -\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\phi)}[\frac{1}{2}\eta^{\rho\sigma}(\partial_\rho\phi)(\partial_\sigma\phi)] = -\frac{1}{2}\eta^{\rho\sigma}[\delta^\mu_\rho(\partial_\sigma\phi) + (\partial_\rho\phi)\delta^\mu_\sigma] = -\eta^{\mu\nu}\partial_\nu\phi$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = -\frac{dV}{d\phi}$$

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi - \frac{dV}{d\phi} = 0 \tag{3.34}$$

Για μετρική του επίπεδου χώρου παίρνουμε:

$$\ddot{\phi} - \partial^2\phi + \frac{dV}{d\phi} = 0 \tag{3.35}$$

Επιλέγοντας δυναμικό απλού αρμονικού ταλαντωτή $V = \frac{1}{2}m^2\phi^2$ καταλήγουμε στην:

$$\Box\phi - m^2\phi = 0 \tag{3.36}$$

που είναι η εξίσωση **Klein-Gordon** μια γραμμική διαφορική εξίσωση που έχει ως λύση πλήρες σύνολο επίπεδων κυμάτων, με $\Box = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = -\partial_t^2 + \nabla^2$

3.7 Τανυστής Ενέργειας-Ορμης

Ο τανυστή τάσεων του Cauchy στις τρεις διαστάσεις γράφεται

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \tag{3.37}$$

με τον ένα δείκτη να δείχνει την επιφάνεια άσκησης της τάσης και τον άλλο να δείχνει την κατεύθυνση. Ο **Τανυστής Ενέργειας- ορμής** είναι η γενίκευση του τανυστή τάσεων του Cauchy σε χωροχρονικές συντεταγμένες:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T_{00} & T_{01} & T_{02} & T_{03} \\ T_{10} & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{30} & T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \tag{3.38}$$

Όπου οι επιπλέον δείκτες ερμηνεύονται ως:

1. $T_{00} = \rho_m$ πυκνότητα ενέργειας
2. $T_{i0} = \pi_i$ πυκνότητα ορμής στην κατεύθυνση i
3. $T_{0i} = \frac{\Delta p_i}{\Delta A \cdot \Delta t}$ ενεργειακή ροή στην κατεύθυνση i

Ο τανυστής ενέργειας Ροής μπορεί να γραφεί στην μορφή:

$$T^{\mu\nu} = \rho_m U^\mu U^\nu \tag{3.39}$$

Για ιδανικά ρευστά ο τανυστής ενέργειας ορμής γράφεται:

$$T^{\mu\nu} = (\rho_m + P)U^\mu U^\nu + P\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix} \tag{3.40}$$

όπου P είναι η πίεση της ύλης.Ο τανυστής ενέργεια-ορμής, λοιπόν, περιγράφει την ύλη ενός σώματος. Ο τανυστής αυτός είναι φτιαγμένος έτσι ώστε να διατηρείται επομένως:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{3.41}$$

Αναλυόντας την παραπάνω εξίσωση και προβάλλοντας την πάνω στην τετραταχύτητα έχουμε:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu(\rho_m + P)U^\mu U^\nu + (\rho_m + P)(\nu\partial_\mu U^\mu + U^\mu\partial_\mu U^\nu) + \partial^\nu P$$

$$\text{έχουμε ότι } U^\nu U_\nu = -1 \Leftrightarrow U_\nu\partial_\mu U^\nu = \frac{1}{2}\partial_\mu(U^\nu U_\nu) = 0 \text{ και}$$

$$U_\nu\partial_\mu(\rho_m + P)U^\mu U^\nu + U_\nu\partial^\nu P = -(\partial_\mu\rho_m)U^\mu - \cancel{(\partial_\mu P)U^\mu} + \cancel{U_\nu\partial^\nu P} = -(\partial_\mu\rho_m)U^\mu \text{ και}$$

$$U_\nu(\rho_m + P)(\nu\partial_\mu U^\mu + U^\mu\partial_\mu U^\nu) = -\rho_m\partial_\mu U^\mu - P\partial_\mu U^\mu + \cancelto{0}{U_\nu(\rho_m + P)U^\mu\partial_\mu U^\nu}$$
$$= -\rho_m\partial_\mu U^\mu - P\partial_\mu U^\mu$$

δηλαδή έχουμε ότι:

$$U_\nu\partial_\mu T^{\mu\nu} = -(\partial_\mu\rho_m)U^\mu - \rho_m\partial_\mu U^\mu - P\partial_\mu U^\mu$$
$$U_\nu\partial_\mu T^{\mu\nu} = -\partial_\mu(\rho_m U^\mu) - P\partial_\mu U^\mu$$

Η εξίσωση διατήρησης γίνεται:

$$-\partial_\mu(\rho_m U^\mu) - P\partial_\mu U^\mu = 0$$

Σε μη-σχετικιστική όριο έχουμε $U^\mu = (1, \vec{V}), \vec{V} << 1$

επειδή οι πιέσεις γίνονται ασήμαντες σε αυτό το όριο$P << \rho_m$

$$\partial_\mu(\rho_m U^\mu) = 0 \Leftrightarrow \partial_\mu(\rho_m, \rho_m\vec{V}) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\partial_t\rho_m + \nabla(\rho_m\vec{V}) = 0$$

Που είναι η γνωστή σε όλους **εξίσωση διατήρησης μάζας**!

Κεφάλαιο 4

Φυσική Σε καμπύλο Χωρόχρονο

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε μερικά στοιχεία της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας. Σύμφωνα με αυτήν η κάθε είδους μάζα προκαλεί καμπύλωση του χωρόχρονου γύρω της. Επομένως πρέπει να μελετήσουμε την φυσική γύρω από τέτοια αντικείμενα που προκαλούν καμπύλωση στον χωρόχρονο. Η Γενική Σχετικότητα είναι η γενίκευση της Νευτώνειας Θεωρίας για την Βαρύτητα.

4.1 Νευτώνεια Βαρύτητα

4.1.1 Νόμος Παγκόσμιας Έλξης

Η θεωρία του Νεύτωνα για τον Νόμο της Παγκόσμια Έλξης διατυπώνεται ως εξής:

"Κάθε σώμα στο σύμπαν έλκει κάθε άλλο σώμα στο σύμπαν με δύναμη ανάλογη με το γινόμενο των μαζών τους και αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασής μεταξύ τους."

$$\mathbf{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \tag{4.1}$$

Όπου G είναι μια παγκόσμια σταθερά και σύμφωνα με τα Πειράματα του Henry Cavendish το 1798 και σύμφωνα με μοντερνες μετρήσεις η τιμή της είναι:

$$G = 6.67428 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2} \tag{4.2}$$

Όπως είδαμε και στο κεφάλαιο 2 μια συντηρητική δύναμη μπορεί να γραφεί σε μορφή βαθμίδας κάποιου δυναμικού:

$$F = -m\nabla\Phi \tag{4.3}$$

Τότε το βαρυτικό δυναμικό είναι της μορφής:

$$\Phi = G\frac{M}{r} \tag{4.4}$$

Επομένως σύμφωνα με τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα και τον Νόμο της Βαρύτητας έχουμε για ένα σώμα που ταξιδεύει με το να ασκείται πάνω του Μόνο το βαρυτικό πεδίο κάποιου Ουράνιου σώματος την σχέση:

$$m_I \mathbf{a} = -m_G \nabla \Phi \tag{4.5}$$

Σύμφωνα με τα πειράματα του Γαλιλαίου στον Πύργο της Πίζας αποδείχθηκε ότι βαρυτική και η αδρανειακή μάζα είναι ίσες εφόσον δυο σώματα με διαφορετικές μάζες φτάνουν ταυτόχρονα στο έδαφος. Επομένως:

$$m_I = m_G \tag{4.6}$$

και

$$\mathbf{a} = -\nabla \Phi \tag{4.7}$$

Αυτή είναι η αρχή ισοδυναμίας από την οποία διέπονται τα σώματα της φύσης.

4.1.2 Εξίσωση Νεύτωνα για το βαρυτικό πεδίο

Στην γενική περίπτωση που δεν πρόκειται για ένα σωματίδιο μάζας m που δημιουργεί βαρυτικό πεδίο αλλά μια κατανομή μάζας $\rho_m(\mathbf{r})$ έχουμε:

$$\Phi(\mathbf{r}) = -G \int \frac{\rho_m(\mathbf{r'})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r'}|} d^3 r' \tag{4.8}$$

Τότε το βαρυτικό πεδίο ορίζεται από ένα βαθμωτό δυναμικό και ισχύει η σχέση:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho_m(r) \tag{4.9}$$

Η οποία είναι η εξίσωση του Νεύτωνα για το βαρυτικό πεδίο και είναι ανάλογη του νόμου του Gauss για το ηλεκτρικό πεδίο. Ένα παράδειγμα θα μας πείσει.

Παράδειγμα 4.1.1. Για ένα βαρυτικό σώμα το οποίο έχει μια ακτινική κατανομή πυκνότητα μάζας $\rho_m(r)$ τότε η μάζα του δίνεται από την σχέση

$$M(\mathbf{r}) = \int \rho_m(\mathbf{r}) d^3 r = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho_m(r) r^2 sin\theta dr d\theta d\phi = 4\pi \int \rho(r) r^2 dr \tag{4.10}$$

Τότε το δυναμικό του θα είναι της μορφής:

$$\Phi = G\frac{M(r)}{r} = 4\pi G \int \rho_m(r) r dr \tag{4.11}$$

Επομένως η βαθμίδα του δυναμικού αυτού μας δίνει:

$$\nabla \Phi = 4\pi G r \rho_m(r) \Leftrightarrow \tag{4.12}$$
$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho_m(r) \tag{4.13}$$

4.2 Γενική Θεωρία της Σχετικότητας

Η γενική θεωρεία της σχετικότητας γενικεύει την Θεωρία του Νεύτωνα για την βαρύτητα.

4.2.1 Αρχές Γενικής Θεωρίας Σχετικότητας

Η γενική Θεωρία της Σχετικότητας διέπεται από τις εξής αρχές Ισοδυναμίας:

1. *Ασθενής Αρχή Ισοδυναμίας*
   Η αδρανειακή και η Βαρυτική Μάζα είναι ίσες

2. *Αρχή Ισοδυναμίας Einstein*
   Τοπικά στον χωρόχρονο οι νόμοι της φυσικής ελαττώνονται σε εκείνους της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας όπου η βαρύτητα θεωρείται αμελητέα.

3. *Ισχυρή Αρχή Ισοδυναμίας*
   Το αποτέλεσμα ενός τοπικού πειράματος(βαρυτικό ή όχι) σε ένα freely falling εργαστήριο είναι ανεξάρτητο της ταχύτητας και της θέσης του εργαστηρίου στον χωρόχρονο.

Σύμφωνα με την Αρχή ισοδυναμίας του Einstein τοπικά θα μπορούμε να έχουμε μετρική του χώρου αυτήν του Minkowski ενώ αποκλίσεις από αυτήν θα είναι μηδαμινές:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \ , \ \partial_\rho g_{\mu\nu} = 0$$

Επομένως η γεωμετρία χαρακτηρίζεται από κάποια πολλαπλότητα που τοπικά θα μοιάζει με τον χωροχρόνο που περιγράφει ο χώρος Minkowski Όλη αυτήν την Φιλοσοφία μπορούμε να την συμμαζέψουμε σε μια συνταγή γνωστή ως **Αρχή Ελαχίστης Ζεύξης**:

1. Πάρε έναν νόμο του επίπεδου χωρόχρονου
2. Γράψε τον σε αναλλοίωτη από συντεταγμένες μορφή (τανυστική μορφή)
3. Ισχυρίσου ότι ο προκύπτον νόμος ισχύει σε καμπύλο χωρόχρονο.

Επομένως Παίρνουμε την εξίσωση της ευθείας:

$$\frac{d^2x^\mu}{dl^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{dx^\nu}{dl}\partial_\nu \frac{dx^\mu}{dl} = 0 \xrightarrow{\partial_\nu \to \nabla_\nu} \frac{dx^\nu}{dl}\nabla_\nu \frac{dx^\mu}{dl} = 0$$

Η οποία αποτελεί την γεωδαισιακή καμπύλη!Έτσι και για την βαρύτητα θα πρέπει να πάρουμε την τροχιά του σωματιδίου σε ένα βαρυτικό πεδίο σύμφωνα με τον Νεύτωνα και να εξάγουμε μια εξίσωση ,την εξίσωση του Einstein για την βαρύτητα, που θα έχει ως όριο τις εξισώσεις του Νεύτωνα.

4.2.2 Νευτώνιο Όριο

Στο Νευτώνιο όριο τα σωματίδια θα πρέπει:

1. Να κινούνται με ταχύτητα μικρότερη της ταχύτητας του Φωτός
2. Το βαρυτικό πεδίο να είναι ασθενές (για να μπορεί να θεωρηθεί σαν διαταραχή του Χωρόχρονου)
3. Το βαρυτικό Πεδίο να είναι Στατικό (Να μην αλλάζει με τον χρόνο)

Η αργή κίνηση των σωματιδίων ερμηνεύεται σε ως:

$$\frac{dx^i}{dt} \ll c^2 \Leftrightarrow \frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{d(ct)}{d\tau}$$

και η γεωδαισιακή τότε γίνεται

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{00}c^2\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + 2\Gamma^\mu_{0i}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)\left(\frac{dx^i}{d\tau}\right) + \Gamma^\mu_{ii}\left(\frac{dx^i}{d\tau}\right)\left(\frac{dx^i}{d\tau}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + c^2\Gamma^\mu_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0$$

Στατικό Πεδίο έχουμε όταν $\partial_0 g_{\mu\nu} = 0$ και τα σχετικά Σύμβολα Christofell γίνονται

$$\Gamma^\mu_{00} = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}(\partial_0 g_{\lambda 0} + \partial_0 g_{0\lambda} - \partial_\lambda g_{00}) = -\frac{1}{2}g^{\mu\lambda}\partial_\lambda g_{00} \tag{4.14}$$

Το ασθενές βαρυτικό πεδίο φαίνεται από το ότι μπορούμε να σπάσουμε την μετρική σε έναν όρο που είναι η μετρική του Minkowski και μια μικρή διαταραχή:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\ ,\ |h_{\mu\nu}| \ll 1 \tag{4.15}$$

Για την αντίστροφη μετρική:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \phi^{\mu\nu}\ ,\ |\phi^{\mu\nu}| \ll 1$$

ομως έχουμε ότι: $g^{\mu\nu}g_{\nu\sigma} = \delta^\mu_\sigma \Leftrightarrow$

$$(\eta^{\mu\nu} + \phi^{\mu\nu})(\eta_{\nu\sigma} + h_{\nu\sigma}) = \delta^\mu_\sigma \Leftrightarrow \eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\sigma} + \eta^{\mu\nu}h_{\nu\sigma} + \phi^{\mu\nu}\eta_{\nu\sigma} + \cancelto{0}{\phi^{\mu\nu}h_{\nu\sigma}} = \delta^\mu_\sigma$$

$$\delta^\mu_\sigma + h^\mu{}_\sigma + \phi^\mu{}_\sigma + 0 = \delta^\mu_\nu \Leftrightarrow \phi^\mu{}_\sigma = -h^\mu{}_\sigma \Leftrightarrow \eta^{\nu\sigma}\phi^\mu{}_\sigma = -\eta^{\nu\sigma}h^\mu{}_\sigma \Leftrightarrow \phi^{\mu\nu} = -h^{\mu\nu}$$

Επομένως:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}\ ,\ |h^{\mu\nu}| \ll 1 \tag{4.16}$$

Τα σχετικά Σύμβολα Christoffel γίνονται:

$$\Gamma^\mu_{00} = -\frac{1}{2}(\eta^{\mu\lambda} - h^{\mu\lambda})\partial_\lambda(\eta_{00} + h_{00}) =$$

$$-\frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda}\partial_\lambda\eta_{00} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda}\partial_\lambda h_{00} + \frac{1}{2}h^{\mu\lambda}\partial_\lambda\eta_{00} + \cancelto{0}{\frac{1}{2}h^{\mu\lambda}\partial_\lambda h_{00}} \Leftrightarrow$$

$$\Gamma^{\mu}_{00} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda}\partial_{\lambda}h_{00} \tag{4.17}$$

Έτσι αντικαθιστούμε στην Γεωδαισιακή και έχουμε:

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2} = c^2\frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda}\partial_{\lambda}h_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{d^2x_{\mu}}{d\tau^2} = c^2\frac{1}{2}\partial_{\mu}h_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \tag{4.18}$$

Η $\mu = 0$ συνιστώσα δίνει:

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{dt}{d\tau} = \text{ σταθερό} \tag{4.19}$$

Αφού το χωροειδές κομμάτι της μετρική είναι ο μοναδιαίος πίνακας $3x3$ τότε η χωροειδής συνιστώσα μας δίνει:

$$\frac{d^2x_i}{d\tau^2} = c^2\frac{1}{2}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2\partial_i h_{00} \Leftrightarrow \tag{4.20}$$

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = c^2\frac{1}{2}\nabla h_{00} \text{ Νευτώνιο Όριο} \tag{4.21}$$

Όπου στο τελευταίο βήμα αντικαταστήσαμε το σύμβολο ($\partial_i = \nabla$) και πολλαπλασιάσαμε με $\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2$.Έτσι η σχέση 4.21 μας θυμίζει την εξίσωση του Νεύτωνα για την βαρύτητα αν αντικαταστήσουμε $h_{00} = -2\frac{\Phi}{c^2}$ το βαρυτικό δυναμικό.Επομένως η συνιστώσα της μετρικής γράφεται:

$$g_{00} = -(1 - 2\frac{\Phi}{c^2}) \tag{4.22}$$

ή λόγω του ΝΕυτώνιου Βαρυτικού Πεδίου 4.4

$$g_{tt} = -(1 - \frac{2GM}{c^2r}) \tag{4.23}$$

4.2.3 Εξίσωση Einstein

Η γενίκευση της Εξίσωσης Poisson θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει στο ένα μέλος παραγώγους δεύτερης τάξης της μετρικής και στο αριστερό μέλος έναν τανιστή ο οποίος να περιγράφει την ύλη(Τανυστής Ενέργειας-Ορμής).Επομένως

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho \rightarrow [\nabla^2 g]_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu} \tag{4.24}$$

όπου k μια αυθαίρετη σταθερά. Μια μαντεψιά θα ήτανε να δράσουμε με την d'Alambertian $\Box = \nabla^{\mu}\nabla_{\mu}$ πάνω στην μετρική $g_{\mu\nu}$ αλλά αυτό είναι ταυτοτικά μηδέν για από την ιδιότητα metric compatibility.Υπάρχει μια ποσότητα που δεν είναι μηδέν και κατασκευάζεται από δεύτερες (και πρώτες) παραγώγους της μετρικής αυτή είναι ο τανυστής καμπυλότητας Riemann $R^{\rho}_{\mu\sigma\nu}$.Όμως δεν έχει του σωστούς δείκτες. Αλλά μπορούμε να πάρουμε την συστολή που είναι ο τανυστής Ricci $R_{\mu\nu}$

$$R_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu} \tag{4.25}$$

Όμως η ενέργεια διατηρείται επομένως έχουμε:

$$\nabla^{\mu} T_{\mu\nu} = 0 \tag{4.26}$$

Αλλά από την ταυτότητα Bianchi έχουμε ότι:

$$\nabla^{\mu}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}) = 0 \tag{4.27}$$

επομένως

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = k T_{\mu\nu} \tag{4.28}$$

Για να προσδιορίσουμε την σταθερά k θα πρέπει να πάρουμε την συστολή και στα δυο μέλη της εξίσωσης:

$$g^{\nu\mu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\nu\mu} g_{\mu\nu} = k g^{\nu\mu} T_{\mu\nu} \Leftrightarrow$$
$$R - 4\frac{1}{2} R = T$$

για τέσσερις διαστάσεις έχουμε: $g^{\nu\mu} g_{\mu\nu} = \delta^{\nu}_{\nu} = 4$

$$R = -kT \tag{4.29}$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση αυτή τότε μπορούμε να γράψουμε την 4.28 ως:

$$R_{\mu\nu} = k(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu}) \tag{4.30}$$

και να δούμε αν η παραπάνω εξίσωση προσδιορίζει την εξίσωση poisson στο νευτώνιο όριο. Θεωρώντας ένα ιδανικό ρευστό όπως είναι η Γή ή ο Ήλιος ο τανυστής ενέργεια ορμής είναι:

$$T_{\mu\nu} = (c^2 \rho + p) U_{\mu} U_{\nu} + p g_{\mu\nu} \tag{4.31}$$

Στο νευτώνιο όριο επίσης μπορούμε να απαλείψουμε την πίεση p διότι η πίεση ενός σώματος γίνεται συμαντική όταν τα σωμάτια που το απαρτίζουν ταξιδεύουν σε ταχύτητες κοντά στην ταχύτητα του φωτός. Άρα:

$$T_{\mu\nu} = c^2 \rho U_{\mu} U_{\nu} \tag{4.32}$$

Στο σύστημα κέντρου μάζας του ρευστού έχουμε για ένα στατικό σώμα:

$$U^{\mu} = (U^0, 0, 0, 0) \tag{4.33}$$

Έχουμε από τις εξισώσεις 4.15 , 4.16ότι:

$$g_{00} = -1 + h_{00}$$
$$g^{00} = -1 - h^{00}$$

Όμως την χρονική συνιστώσα της τετραταχύτητας μπορούμε να την φτιάξουμε να είναι ίση σύμφωνα με τον νορμαλισμό των τετρανυσμάτων σε 4D χωρόχρονο ($g_{\mu\nu}U^{\mu}U^{\nu} = -1$):

$$g_{00}U^0U^0 = -1 \Leftrightarrow (U^0)^2 = -\frac{1}{-1+h_{00}} \Leftrightarrow$$

$$U^0 = \frac{1}{\sqrt{1-h_{00}}} \backsimeq 1 + \frac{1}{2}h_{00}$$

$$U_0 \equiv g_{00}U^0 = (-1+h_{00})(1+\frac{1}{2}h_{00}) = -1 - \frac{1}{2}h_{00} + h_{00} + \frac{1}{2}(h_{00})^2 \backsimeq -1 + \frac{1}{2}h_{00}$$

Επειδή όμως θεωρούμε ότι η πυκνότητα ενέργειας θεωρείται μικρή(Ο χωρόχρονος γίνεται επίπεδος καθώς το $\rho \to 0$).Άρα τότε παίρνουμε ότι $h_{00} = 0$ άρα $U^0 \backsimeq 1$, $U_0 \backsimeq -1$ και τότε η χρονική συνιστώσα του τανυστή ενέργεια ορμής γίνεται:

$$T_{00} = c^2\rho \text{ και η συστολή της } T = g^{00}T_{00} = -c^2\rho$$

Άρα τότε:

$$R_{00} = k(T_{00} - \frac{1}{2}Tg_{00}) = k[c^2\rho - \frac{1}{2}(-c^2\rho)(-1)] = kc^2\frac{1}{2}\rho \tag{4.34}$$

Όμως σύμφωνα με την σχέση του τανυστή καμπυλότητας Riemann έχουμε ότι:

$$\text{αφού} R^0{}_{000} = 0 \text{τότε πρέπει να υπολογίσουμε μόνο}$$

$$R^i{}_{0j0} = \partial_j\Gamma^i_{00} - \partial_0\Gamma^i_{j0} + \Gamma^i_{j\lambda}\Gamma^\lambda_{00} - \Gamma^i_{0\lambda}\Gamma^\lambda_{j0}$$

$$\text{όμως για στατικά πεδία: } \partial_0\Gamma^i_{j0} = 0$$

$$\text{και επειδή τα σύμβολα } \Gamma \text{ είναι πρώτης τάξης ως προς την μετρική } \quad (\Gamma)^2 \backsimeq 0$$

$$R^i{}_{0i0} = \partial_i\Gamma^i_{00} = \partial_i[\frac{1}{2}g^{i\lambda}(\partial_0 g_{\lambda 0} + \partial_0 g_{\lambda 0} - \partial_\lambda g_{00})] = -\frac{1}{2}\partial_i g^{i\lambda}\partial_\lambda g_{00} = -\frac{1}{2}\delta^i_j\partial_i\partial_j h_{00}$$

$$R_{00} \equiv R^i{}_{0i0} = -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00} \tag{4.35}$$

Επομένως:

$$\nabla^2 h_{00} = -kc^2\rho \xrightarrow{h_{00}=-\frac{2\Phi}{c^2}} \nabla^2\Phi = -\frac{1}{2}kc^4\rho \tag{4.36}$$

Που είναι η εξίσωση Poisson για $k = 8\pi G/c^4$. Επομένως η εξίσωση της **Γενικής Θεωρίας Σχετικότητας** , **Εξίσωση Einstein**

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{4.37}$$

Λέμε ότι αποτελούν τις πεδιακές εξισώσεις Einstein όπου το πεδίο είναι η μετρική που διαδίδεται στον χωρόχρονο. Επίσης η εξίσωση Einstein μπορεί να γραφεί όπως δείξαμε και στην μορφή:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \Leftrightarrow R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu})$$

$$\text{Σε περιοχές που δεν υπάρχει ύλη έχουμε: } T_{\mu\nu} = 0$$

Που μας επιτρέπει να δούμε την εξίσωση Einstein στο κενό είναι:

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{4.38}$$

4.3 Μετρική Schwarzschild

Η εξίσωση Einstein περιγράφει πώς η καμπυλότητα ,που είναι μια ποσότητα στενά συνδεδεμένη με την μετρική , συσχετίζεται με την ύπαρξη ύλης ή όχι. Δηλαδή η ύπαρξη ύλης προκαλεί καμπύλωση στον χώρο μια διαφορετική έννοια της βαρύτητάς εξίσωση Einstein είναι δύσκολο να λυθεί αναλυτικά. Μια προσέγγιση λύσης που περιλαμβάνει διάφορες υποθέσεις(στατική , σφαιρικά συμμετρική λύση έξω από την μάζα στο κενό) είναι ικανοποιητική σύμφωνα με τα πειράματα να προβλέψει την κίνηση σωματίων γύρω από μια μάζα ενός ουράνιου αντικειμένου.

4.3.1 Επίλυση της Εξίσωσης Einstein στο Κενό

Εφόσον μας ενδιαφέρει η κίνηση σωμάτων έξω από έναν ουράνιο αντικείμενο με σφαιρικά συμμετρική κατανομή μάζας τότε πρέπει να λύσουμε την Εξίσωση Einstein στο Κενό. Μια απλοποιημένου είδους λύση της $R_{\mu\nu} = 0$ είναι η Schwarzschild μετρική η οποία είναι στατική λύση ενός σφαιρικά συμμετρικού αντικειμένου.

Στατική Αναλλοίωτη κάτω από $t \to -t \Leftrightarrow \;\; g_{\mu\nu} \neq g_{\mu\nu}(dtdx^i + dx^i dt, dx^i dx^j)$

Σφαιρική Αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς των :$(\theta,\phi)\Leftrightarrow ds^2 = ds^2(d\Omega^2)$

όπου $d\Omega^2 = d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2$. Η λύση πρέπει να γίνεται μετρική Minkoswki σε κάποιο όριο($r \to +\infty$). Άρα μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε τα διαφορικά τις μετρικής Minkoswki με αυθαίρετους συντελεστές που εξαρτούνται από την ακτινική μεταβλητή. Άρα η μορφή της μετρικής θα είναι:

$$ds^2 = -e^{2a(r)}dt^2 + e^{2b(r)}dr^2 + e^{2c(r)}r^2 d\Omega^2 \tag{4.39}$$

Διαλέξαμε μορφή εκθετικών για να μην αλλάζει η μορφή των προσήμων. Μπορούμε να ορίσουμε ότι:

$$\bar{r} = e^{c(r)}r \;,\; d\bar{r} = e^c dr + e^c r dc = \left(1 + r\frac{dc}{dr}\right) e^c dr \tag{4.40}$$

Τότε

$$ds^2 = -e^{2a(r)}dt^2 + \left(1 + r\frac{dc}{dr}\right)^{-2} e^{2b(r)-2c(r)}d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2 \tag{4.41}$$

Όμως μπορούμε να ξαναονομάζουμε τα παρακάτω σύμβολά ως:

$\bar{r} \to r$

$\left(1 + r\frac{dc}{dr}\right)^{-2} e^{2b(r)-2c(r)} \to e^{2b(r)}$

Τότε μας μένει ότι:

$$ds^2 = -e^{2a(r)}dt^2 + e^{2b(r)}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{4.42}$$

με μετρική προφανώς:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{2a(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2b(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 sin^2\theta \end{pmatrix} \;,\; g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{-2a(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2b(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-2} sin^{-2}\theta \end{pmatrix} \tag{4.43}$$

Υπολογίζουμε τα Σύμβολα Christoffel ως:

$$\Gamma^t_{tt} = \frac{1}{2}g^{t\rho}(\partial_t g_{\rho t} + \partial_t g_{t\rho} - \partial_\rho g_{tt}) = \frac{1}{2}g^{tt}\partial_t g_{tt} = \frac{1}{2}(-e^{-2a(r)})(\partial_t a[r])(-e^{2a(r)}) = 0$$
$$\Gamma^t_{tr} = \frac{1}{2}g^{t\rho}(\partial_t g_{\rho r} + \partial_r g_{\rho t} - \partial_\rho g_{tr}) = \frac{1}{2}g^{tt}(\partial_t g_{tr} + \partial_r g_{tt} - \partial_t g_{tr}) = \frac{1}{2}g^{tt}\partial_r g_{tt} = \frac{1}{2}(-e^{2a})(2\partial_r a)e^{2a} = \partial_r a$$
$$\Gamma^r_{tt} = \frac{1}{2}g^{rr}(\partial_t g_{tr} + \partial_t g_{rt} - \partial_r g_{tt}) = -\frac{1}{2}g^{rr}\partial_r g_{tt} = -\frac{1}{2}(e^{2b})(\partial_r a)(-e^{-2a}) = e^{2(a-b)}\partial_r a$$
$$\Gamma^r_{tr} = \frac{1}{2}g^{rr}(\partial_t g_{rr} + \partial_r gtr - \partial_r g_{tr}) = 0$$
$$\Gamma^t_{t\theta} = \frac{1}{2}g^{tt}(\partial_t g_{t\theta} + \partial_\theta gtt - \partial_t g_{t\theta}) = 0$$
$$\Gamma^t_{rr} = \frac{1}{2}g^{tt}(\partial_r g_{tr} + \partial_r gtr - \partial_t g_{rr}) = 0$$
$$\Gamma^\theta_{tt} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(\partial_t g_{\theta t} + \partial_t g\theta t - \partial_\theta g_{tt}) = 0$$
$$\Gamma^r_{rr} = \frac{1}{2}g^{rr}(\partial_r g_{rr} + \partial_r grr - \partial_r g_{rr}) = \frac{1}{2}g^{rr}\partial_r g_{rr} = \frac{1}{2}(e^{-2b})(2\partial_r b)e^{2b} = \partial_r b$$
$$\Gamma^\theta_{\theta\theta} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(\partial_\theta g_{\theta\theta} + \partial_\theta g_{\theta\theta} - \partial_\theta g_{\theta\theta}) = 0$$
$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(\partial_r g_{\theta\theta} + \partial_\theta g_{\theta r} - \partial_\theta g_{r\theta}) = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}\partial_r g_{\theta\theta} = \frac{1}{2}r^{-2}(\partial_r r^2) = \frac{1}{2}r^{-2}(2r) = \frac{1}{r}$$
$$\Gamma^\phi_{r\phi} = \frac{1}{2}g^{\phi\phi}(\partial_r g_{\phi\phi} + \partial_\phi g_{\phi r} - \partial_\phi g_{r\phi}) = \frac{1}{2}g^{\phi\phi}\partial_r g_{\phi\phi} = \frac{1}{2}(r^{-2}sin^{-2}\theta)(\partial_r[r^2 sin^2\theta]) = \frac{1}{2}r^{-2}(2r) = \frac{1}{r}$$
$$\Gamma^\phi_{\phi\phi} = \frac{1}{2}g^{\phi\phi}(\partial_\phi g_{\phi\phi} + \partial_\phi g_{\phi\phi} - \partial_\phi g_{\phi\phi}) = 0$$
$$\Gamma^\theta_{r\phi} = \Gamma^r_{\theta\phi} = \Gamma^\phi_{r\theta} = \Gamma^\theta_{t\phi} = \Gamma^\phi_{t\theta} = \Gamma^t_{\phi\theta} = \Gamma^t_{r\phi} = \Gamma^\phi_{rt} = \Gamma^r_{t\phi} = \Gamma^t_{r\theta} = \Gamma^\theta_{rt} = \Gamma^r_{t\theta} = 0$$
$$\Gamma^r_{\theta\theta} = \frac{1}{2}g^{rr}(\partial_\theta g_{r\theta} + \partial_\theta g_{r\theta} - \partial_r g_{\theta\theta}) = \frac{1}{2}g^{rr}(-\partial_r g_{\theta\theta}) = \frac{1}{2}e^{-2b}(-\partial_r r^2) = -re^{-2b}$$
$$\Gamma^r_{\phi\phi} = \frac{1}{2}g^{rr}(\partial_\phi g_{r\phi} + \partial_\phi g_{r\phi} - \partial_r g_{\phi\phi}) = \frac{1}{2}g^{rr}(-\partial_r g_{\phi\phi}) = \frac{1}{2}e^{-2b}(-\partial_r[r^2 sin^2\theta]) = -re^{-2b}sin^2\theta$$
$$\Gamma^\phi_{\theta\theta} = \frac{1}{2}g^{\phi\phi}(\partial_\theta g_{\phi\theta} + \partial_\theta g_{\phi\theta} - \partial_\phi g_{\theta\theta}) = 0$$
$$\Gamma^\theta_{\phi\phi} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(\partial_\phi g_{\theta\phi} + \partial_\phi g_{\theta\phi} - \partial_\theta g_{\phi\phi}) = \frac{1}{2}r^{-2}(-\partial_\theta[r^2 sin^2\theta]) = \frac{1}{2}r^{-2}(-r^2 2sin\theta cos\theta) = -sin\theta cos\theta$$
$$\Gamma^\theta_{\phi\theta} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(\partial_\phi g_{\theta\theta} + \partial_\theta g_{\theta\phi} - \partial_\theta g_{\phi\theta}) = 0$$
$$\Gamma^\phi_{\phi\theta} = \frac{1}{2}g^{\phi\phi}(\partial_\phi g_{\phi\theta} + \partial_\theta g_{\phi\phi} - \partial_\phi g_{\phi\theta}) = \frac{1}{2}r^{-2}sin^{-2}\theta(\partial_\theta[r^2 sin^2\theta]) = \frac{1}{2}(r^{-2}sin^{-2}\theta)(r^2 2sin\theta cos\theta) = \frac{cos\theta}{sin\theta}$$

Από αυτά τα σύμβολα Christoffel μπορούμε να υπολογίσουμε τις μη μηδενικές συνιστώσες του τανυστή Riemman ως εξής:

$$\begin{aligned}
R^t{}_{rtr} &= \partial_t\Gamma^t_{rr} - \partial_r\Gamma^t_{tr} + \Gamma^t_{t\rho}\Gamma^\rho_{rr} - \Gamma^t_{r\rho}\Gamma^\rho_{tr} \\
&= 0 - \partial_r\partial_r a + \Gamma^t_{tt}\Gamma^t_{rr} + \Gamma^t_{tr}\Gamma^r_{rr} + \Gamma^t_{t\theta}\Gamma^\theta_{rr} + \Gamma^t_{t\phi}\Gamma^\phi_{rr} - \Gamma^t_{rt}\Gamma^t_{tr} - \Gamma^t_{rr}\Gamma^r_{tr} - \Gamma^t_{r\theta}\Gamma^\theta_{tr} - \Gamma^t_{r\phi}\Gamma^\phi_{tr} \\
&= -\partial_r^2 a + \Gamma^t_{tr}\Gamma^r_{rr} - \Gamma^t_{rt}\Gamma^t_{tr} = -\partial_r^2 a + \partial_r a\partial_r b - (\partial_r a)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R^t{}_{\theta t\theta} &= \partial_t\Gamma^t_{\theta\theta} - \partial_\theta\Gamma^t_{t\theta} + \Gamma^t_{t\rho}\Gamma^\rho_{\theta\theta} - \Gamma^t_{\theta\rho}\Gamma^\rho_{t\theta} \\
&= 0 - 0 + \Gamma^t_{tt}\Gamma^t_{\theta\theta} + \Gamma^t_{tr}\Gamma^r_{\theta\theta} + \Gamma^t_{t\theta}\Gamma^\theta_{\theta\theta} + \Gamma^t_{t\phi}\Gamma^\phi_{\theta\theta} - \Gamma^t_{\theta t}\Gamma^t_{t\theta} - \Gamma^t_{\theta r}\Gamma^r_{t\theta} - \Gamma^t_{\theta\theta}\Gamma^\theta_{t\theta} - \Gamma^t_{\theta\phi}\Gamma^\phi_{t\theta} \\
&= \Gamma^t_{tr}\Gamma^r_{\theta\theta} = (\partial_r a)(-re^{-2b}) = -re^{-2b}\partial_r a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R^t{}_{\phi t\phi} &= \partial_t\Gamma^t_{\phi\phi} - \partial_\phi\Gamma^t_{t\phi} + \Gamma^t_{t\rho}\Gamma^\rho_{\phi\phi} - \Gamma^t_{\phi\rho}\Gamma^\rho_{t\phi} \\
&= 0 - 0 + \Gamma^t_{tt}\Gamma^t_{\phi\phi} + \Gamma^t_{tr}\Gamma^r_{\phi\phi} + \Gamma^t_{t\theta}\Gamma^\theta_{\phi\phi} + \Gamma^t_{t\phi}\Gamma^\phi_{\phi\phi} - \Gamma^t_{\phi t}\Gamma^t_{t\phi} - \Gamma^t_{\phi r}\Gamma^r_{t\phi} - \Gamma^t_{\phi\theta}\Gamma^\theta_{t\phi} - \Gamma^t_{\phi\phi}\Gamma^\phi_{t\phi} \\
&= \Gamma^t_{tr}\Gamma^r_{\phi\phi} = (\partial_r a)(-re^{-2b}sin^2\theta) = -re^{-2b}sin^2\theta\partial_r a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R^r{}_{\theta r\theta} &= \partial_r\Gamma^r_{\theta\theta} - \partial_\theta\Gamma^r_{r\theta} + \Gamma^r_{r\rho}\Gamma^\rho_{\theta\theta} - \Gamma^r_{\theta\rho}\Gamma^\rho_{r\theta} \\
&= \partial_r(-re^{-2b}) - 0 + \Gamma^r_{rt}\Gamma^t_{\theta\theta} + \Gamma^r_{rr}\Gamma^r_{\theta\theta} + \Gamma^r_{r\theta}\Gamma^\theta_{\theta\theta} + \Gamma^r_{r\phi}\Gamma^\phi_{\theta\theta} - \Gamma^r_{\theta t}\Gamma^t_{r\theta} - \Gamma^r_{\theta r}\Gamma^r_{r\theta} - \Gamma^r_{\theta\theta}\Gamma^\theta_{r\theta} - \Gamma^r_{\theta\phi}\Gamma^\phi_{r\theta} \\
&= \partial_r(-re^{-2b}) + \Gamma^r_{rr}\Gamma^r_{\theta\theta} - \Gamma^r_{\theta\theta}\Gamma^\theta_{r\theta} = -e^{-2b} + 2r\partial_r be^{-2b} + \partial_r b(-re^{-2b}) - (\frac{1}{r})(-re^{-2b}) = re^{-2b}\partial_r b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R^r{}_{\phi r\phi} &= \partial_r\Gamma^r_{\phi\phi} - \partial_\phi\Gamma^r_{r\phi} + \Gamma^r_{r\rho}\Gamma^\rho_{\phi\phi} - \Gamma^r_{\phi\rho}\Gamma^\rho_{r\phi} \\
&= \partial_r(-re^{-2b}sin^2\theta) - 0 + \Gamma^r_{rt}\Gamma^r_{\phi\phi} + \Gamma^r_{rr}\Gamma^r_{\phi\phi} + \Gamma^r_{r\theta}\Gamma^\theta_{\phi\phi} + \Gamma^r_{r\phi}\Gamma^\phi_{\phi\phi} - \Gamma^r_{\phi t}\Gamma^t_{r\phi} - \Gamma^r_{\phi r}\Gamma^r_{r\phi} - \Gamma^r_{\phi\theta}\Gamma^\theta_{r\phi} - \Gamma^r_{\phi\phi}\Gamma^\phi_{r\phi} \\
&= \partial_r(-re^{-2b}sin^2\theta) - \Gamma^r_{\phi\phi}\Gamma^\phi_{r\phi} = -e^{-2b}sin^2\theta + 2r\partial_r be^{-2b}sin^2\theta - (-re^{-2b}sin^2\theta)\frac{1}{r} = 2rsin^2\theta e^{-2b}\partial_r b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R^\theta{}_{\phi\theta\phi} &= \partial_\theta\Gamma^\theta_{\phi\phi} - \partial_\phi\Gamma^\theta_{\theta\phi} + \Gamma^\theta_{\theta\rho}\Gamma^\rho_{\phi\phi} - \Gamma^\theta_{\phi\rho}\Gamma^\rho_{\theta\phi} \\
&= \partial_\theta\Gamma^\theta_{\phi\phi} - 0 + \Gamma^\theta_{\theta t}\Gamma^t_{\phi\phi} + \Gamma^\theta_{\theta r}\Gamma^r_{\phi\phi} + \Gamma^\theta_{\theta\theta}\Gamma^\theta_{\phi\phi} + \Gamma^\theta_{\theta\phi}\Gamma^\phi_{\phi\phi} - \Gamma^\theta_{\phi t}\Gamma^t_{\theta\phi} - \Gamma^\theta_{\phi r}\Gamma^r_{\theta\phi} - \Gamma^\theta_{\phi\theta}\Gamma^\theta_{\theta\phi} - \Gamma^\theta_{\phi\phi}\Gamma^\phi_{\theta\phi} \\
&= \partial_\theta\Gamma^\theta_{\phi\phi} + \Gamma^\theta_{\theta r}\Gamma^r_{\phi\phi} - \Gamma^\theta_{\phi\phi}\Gamma^\phi_{\theta\phi} = \partial_\theta(-sin\theta cos\theta) + \frac{1}{r}(-re^{-2b}sin^2\theta) - (-sin\theta cos\theta)\frac{cos\theta}{sin\theta} \\
&= -cos^2\theta + sin^2\theta - e^{-2b}sin^2\theta + cos^2\theta = (1-e^{-2b})sin^2\theta
\end{aligned}$$

Για να υπολογίσουμε τις συνιστώσες του τανυστή καμπυλότητας Ricci πρέπει να κάνουμε την γνωστή συστολή του τανυστή Riemann. Επομένως έχουμε:

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu} \tag{4.44}$$

Θα εκμεταλλευτούμε τις ιδιότητες του τανυστή Riemann:

$$R_{abcd} \overbrace{=}^{I_1} -R_{abdc} \overbrace{=}^{I_2} -(-R_{badc}) = R_{badc} \tag{4.45}$$

$$R_{tt} = \cancelto{0}{R^t{}_{ttt}} + R^r{}_{trt} + R^\theta{}_{t\theta t} + R^\phi{}_{t\phi t}$$

$$\begin{aligned}
R_{rtrt} &= R_{trtr} = g_{tt}R^t{}_{rtr} \Rightarrow R^r{}_{trt} = g^{rr}R_{rtrt} = g^{rr}g_{tt}R^t{}_{rtr} \\
R^r{}_{trt} &= e^{-2b}e^{2a}[\partial_r a\partial_r b - \partial_r^2 a - (\partial_r a)^2] = e^{2(a-b)}[\partial_r a\partial_r b - \partial_r^2 a - (\partial_r a)^2] \\
R_{\theta t\theta t} &= R_{t\theta t\theta} = g_{tt}R^t{}_{\theta t\theta} \Rightarrow R^\theta{}_{t\theta t} = g^{\theta\theta}R_{\theta t\theta t} = g^{\theta\theta}g_{tt}R^t{}_{\theta t\theta} \\
R^\theta{}_{t\theta t} &= r^{-2}(-e^{2a})(-re^{-2b}\partial_r a) = e^{2(a-b)}\frac{\partial_r a}{r} \\
R_{\phi t\phi t} &= R_{t\phi t\phi} = g_{tt}R^t{}_{\phi t\phi} \Rightarrow R^\phi{}_{t\phi t} = g^{\phi\phi}R_{\phi t\phi t} = g^{\phi\phi}g_{tt}R^t{}_{\phi t\phi} \\
R^\phi{}_{t\phi t} &= (r^{-2}sin^{-2}\theta)(-e^{2a})(-re^{-2b}sin^2\theta\partial_r a) = e^{2(a-b)}\frac{\partial_r a}{r}
\end{aligned}$$

$$R_{tt} = e^{2(a-b)}[\partial_r a\partial_r b - \partial_r^2 a - (\partial_r a)^2 + \frac{2}{r}\partial_r a]$$

$$R_{rr} = R^t{}_{rtr} + \cancelto{0}{R^r{}_{rrr}} + R^\theta{}_{r\theta r} + R^\phi{}_{r\phi r}$$

$$\begin{aligned}
R_{\theta r\theta r} &= R_{r\theta r\theta} = g_{rr}R^r{}_{\theta r\theta} \Rightarrow R^\theta{}_{r\theta r} = g^{\theta\theta}R_{\theta r\theta r} = g^{\theta\theta}g_{rr}R^r{}_{\theta r\theta} \\
R^\theta{}_{r\theta r} &= (r^{-2})(e^{2b})re^{-2b}\partial_r b = \frac{1}{r}\partial_r b \\
R_{\phi r\phi r} &= R_{r\phi r\phi} = g_{rr}R^r{}_{\phi r\phi} \Rightarrow R^\phi{}_{r\phi r} = g^{\phi\phi}R_{\phi r\phi r} = g^{\phi\phi}g_{rr}R^r{}_{\phi r\phi} \\
R^\phi{}_{r\phi r} &= \frac{e^{2b}}{r^2sin^2\theta}(rsin^2\theta e^{-2b}\partial_r b) = \frac{1}{r}\partial_r b \\
R^t{}_{rtr} &= \partial_r a\partial_r b - \partial_r^2 a - (\partial_r a)^2
\end{aligned}$$

$$R_{rr} = \partial_r a\partial_r b - \partial_r^2 a - (\partial_r a)^2 + \frac{2}{r}\partial_r b$$

$$R_{\theta\theta} = R^t{}_{\theta t\theta} + R^r{}_{\theta r\theta} + \cancelto{0}{R^\theta{}_{\theta\theta\theta}} + R^\phi{}_{\theta\phi\theta}$$

$$\begin{aligned}
R_{\phi\theta\phi\theta} &= R_{\theta\phi\theta\phi} = g_{\theta\theta}R^\theta{}_{\phi\theta\phi} \Rightarrow R^\phi{}_{\theta\phi\theta} = g^{\phi\phi}R_{\phi\theta\phi\theta} = g^{\phi\phi}g_{\theta\theta}R^\theta{}_{\phi\theta\phi} \\
R^\phi{}_{\theta\phi\theta} &= (r^2)(r^{-2}sin^{-2}\theta)(1-e^{-2b})sin^2\theta = 1-e^{-2b} \\
R^t{}_{\theta t\theta} &= -re^{-2b}\partial_r a \ , \ R^r{}_{\theta r\theta} = re^{-2b}\partial_r b
\end{aligned}$$

$$R_{\theta\theta} = -re^{-2b}\partial_r a + re^{-2b}\partial_r b + 1 - e^{-2b} = 1 + e^{-2b}[r(\partial_r b - \partial_r a) - 1]$$

$$\begin{aligned}
R_{\phi\phi} &= R^t{}_{\phi t\phi} + R^r{}_{\phi r\phi} + R^\theta{}_{\phi\theta\phi} + \cancelto{0}{R^\phi{}_{\phi\phi\phi}} \\
&= -re^{-2b}sin^2\theta\partial_r a - re^{-2b}sin^2\theta\partial_r b + (1-e^{-2b})sin^2\theta \Leftrightarrow \\
R_{\phi\phi} &= \left(1 - e^{-2b}[1 - r(\partial_r b - \partial_r a)]\right) sin^2\theta \equiv R_{\theta\theta}sin^2\theta
\end{aligned}$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε και το βαθμωτό τανυστή Ricci ο οποίος θα μας χρειαστεί αργότερα:

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{tt}R_{tt} + g^{rr}R_{rr} + g^{\theta\theta}R_{\theta\theta} + g^{\phi\phi}R_{\phi\phi}$$

$$g^{tt}R_{tt} = (-e^{-2a})e^{2(a-b)}[\partial_r a\partial_r b - \partial_r^2 a - (\partial_r a)^2 + \frac{2}{r}\partial_r a] = -e^{-2b}[\partial_r a\partial_r b - \partial_r^2 a - (\partial_r a)^2 + \frac{2}{r}\partial_r a]$$

$$g^{rr}R_{rr} = e^{-2b}[\partial_r a\partial_r b + \partial_r^2 a - (\partial_r a)^2 + \frac{2}{r}\partial_r b]$$

$$\left.\begin{array}{c} g^{tt}R_{tt} \\ g^{rr}R_{rr} \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 2e^{-2b}[\partial_r a\partial_r b - \partial_r^2 a - (\partial_r a)^2 + \frac{1}{r}\partial_r b - \frac{1}{r}\partial_r a]$$

$$\begin{aligned}
g^{\theta\theta}R_{\theta\theta} + g^{\phi\phi}R_{\phi\phi} &= g^{\theta\theta}R_{\theta\theta} + g^{\phi\phi}R_{\theta\theta}sin^2\theta = 2r^{-2}R_{\theta\theta} \\
&= 2e^{-2b}[r^{-1}\partial_r b - r^{-1}\partial_r a - r^{-2} + \frac{e^{2b}}{r^2}]
\end{aligned}$$

Προσθέτωντάς τα καταλήγουμε στο ότι:

$$R = -2e^{-2b}\left[\partial_r^2 a + (\partial_r a)^2 - \partial_r a\partial_r b + \frac{2}{r}(\partial_r a - \partial_r b) + \frac{1}{r^2}(1 - e^{2b})\right] \tag{4.46}$$

Οι εξισώσεις στο κενό είναι $R_{\mu\nu} = 0 \ \forall \mu,\nu = \{t,r,\theta,\phi\}$. Αφού τα R_{tt}, R_{rr} θα πρέπει να εξαφανίζονται ανεξάρτητα το ένα από το άλλο.Διαλλέγουμε τότε και την σχέση $e^{2(b-a)}R_{tt} + R_{rr} = 0$ Τότε έχουμε ότι:

$$e^{2(b-a)}R_{tt} + R_{rr} = 0 \Leftrightarrow 0 = \frac{2}{r}(\partial_r a + \partial_r b) \Leftrightarrow \partial_r a = -\partial_r b \Leftrightarrow$$

$$a = -b + \cancelto{0}{c}, \text{ όπου } c \text{ μια σταθερά}$$

Όπου θέσαμε $c = 0$ με το να ξαναονομάσουμε την συνιστώσα του χρόνου ως $t \to e^{-c}t$.Επίσης από την εξίσωση κενού έχουμε:

$$R_{\theta\theta} = 0 \Leftrightarrow e^{2a}[2r\partial_r a + 1] = 1 \Leftrightarrow \partial_r(re^{2a}) = 1 \Leftrightarrow re^{2a} = r - R_s \Leftrightarrow$$

$$e^{2a} = 1 - \frac{R_s}{r} \tag{4.47}$$

όπου R_s μια σταθερά που πρέπει να προσδιορίσουμε.Τότε έχουμε ότι:

$$e^{-2b} = 1 - \frac{R_s}{r} \Leftrightarrow e^{2b} = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1}$$

Επομένως:

$$ds^2 = -\left(1-\frac{R_s}{r}\right)dt^2 + \left(1-\frac{R_s}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{4.48}$$

Μπορούμε να επαληθεύσουμε για την λύση 4.47 ότι:

$$a = \frac{1}{2}ln\left(1-\frac{R_s}{r}\right)$$

$$\partial_r a = 2^{-1}\left(1-\frac{R_s}{r}\right)^{-1}(-\partial_r R_s r^{-1}) = 2^{-1}\left(1-\frac{R_s}{r}\right)^{-1}(-R_s - r^{-2}) = \frac{R_s}{2r^2\left(1-\frac{R_s}{r}\right)}$$

$$\partial_r^2 a = \frac{R_s}{2}\partial_r\left[r^{-2}\left(1-\frac{R_s}{r}\right)^{-1}\right] = \frac{R_s}{2}\left[-2r^{-3}\left(1-\frac{R_s}{r}\right)^{-1} + r^{-2}\left(1-\frac{R_s}{r}\right)^{-2}(\partial_r R_s r^{-1})\right]$$

$$\partial_r^2 a = \frac{-R_s}{r^3\left(1-\frac{R_s}{r}\right)} + \frac{-R_s^2}{2r^4\left(1-\frac{R_s}{r}\right)^2}$$

$$R_{rr} = \partial_r a \partial_r b - \partial_r^2 a - (\partial_r a)^2 + \frac{2}{r}\partial_r b \xrightarrow{a=-b} R_{rr} = -2(\partial_r a)^2 - \partial_r^2 a - \frac{2}{r}\partial_r a$$

$$R_{rr} = -2\left[\frac{R_s}{2r^2\left(1-\frac{R_s}{r}\right)}\right]^2 - \frac{-R_s}{r^3\left(1-\frac{R_s}{r}\right)} - \frac{-R_s^2}{2r^4\left(1-\frac{R_s}{r}\right)^2} - \frac{2}{r}\frac{R_s}{2r^2\left(1-\frac{R_s}{r}\right)}$$

$$R_{rr} = 0 \Leftrightarrow R_{tt} = 0$$

Το μόνο που μένει να κάνουμε είναι να ερμηνεύσουμε την σταθερά R_s.Επειδή στο Νευτώνιο Όριο πρέπει η λύση να περιγράφει την Newtonian Βαρύτητα τότε αφού είχαμε ότι η μετρική έπρεπε να έχει συνιστώσα την :

$$g_{tt} = -\left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right) \tag{4.49}$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$R_s = \frac{2GM}{c^2} \tag{4.50}$$

Για να απλοποιήσουμε τις πράξεις μας πολλές φορές θεωρούμε c=1.Επομένως:

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)dt^2 + \left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2) \tag{4.51}$$

Που είναι η σφαιρικά συμμετρική , στατική λύση της εξίσωσης Einstein στο κενό. Η λύση αυτή αποκαλείται **Schwarzschild Μετρική**. Με αυτό το στοιχειώδες μήκος είναι δυνατό να περιγράψουμε διάφορες μετρίσιμες ποσότητες (όπως οι τροχιές , ενέργεια , στροφορμή κ.λ.π.) σωματίων που κινούνται γύρω από Σφαιρικά Βαρυτικά σώματα. Το πρόβλημα όμως που παρουσιάζει αυτό το στοιχειώδες μήκος είναι ότι πάυει να περιγράφει σωστά την γεωμετρία όταν η ακτινική απόσταση γίνεται 0 η 2GM. Και αποκαλούμε ότι η μετρική παρουσιάζει απροσδιοριστία σε 0 και 2GM. Αργότερα θα δούμε ότι η ακτίνα 2GM δεν είναι παρά μια "ψευδαίσθηση" και ότι με έναν μετασχηματισμό μπορεί το στοιχείο μήκους να περιγράψει σε τέτοιες αποστάσεις την γεωμετρία. Παρά ταύτα εμείς θέλουμε να περιγράψουμε την Γεωμετρία γύρω από τέτοια βαρυτικά σώματα μακρυά από την ακτίνα 2GM επομένως η μετρική αυτή είναι παραπάνω από ικανοποιητική.

4.3.2 Γεωδαισιακές της Λύσης Schwarzschild

Ένα βήμα που πρέπει να κάνουμε για να κατανοήσουμε την καινούρια μετρική είναι να δούμε την μορφή των γεωδαισιακών της. Έξω, λοιπόν, από την ακτίνα 2GM (μακρυά από τις απροσδιοριστίες της μετρικής) μπορούμε να υπολογίσουμε τις γεωδαισιακές. Χρειαζόμαστε τα μη μηδενικά σύμβολα Christofell που τα υπολογίζουμε από την μετρική:

$$
\begin{gathered}
\Gamma^t_{tr} = \tfrac{1}{2} g^{tt}(\cancel{\partial_t g_{tr}} + \partial_r g_{tt} - \cancel{\partial_t g_{tr}}) = \tfrac{-1}{2}\left(1-\tfrac{2GM}{r}\right)^{-1}\left[-\partial_r\left(1-\tfrac{2GM}{r}\right)\right] = \frac{-\frac{-2GM}{r^2}}{2\left(1-\frac{2GM}{r}\right)} = \frac{GM}{r(r-2GM)} \\
\Gamma^r_{tt} = \tfrac{1}{2} g^{rr}(\cancelto{0}{\partial_t g_{rt}} + \cancelto{0}{\partial_t g_{rt}} - \partial_r g_{tt}) = \tfrac{1}{2}\left(1-\tfrac{2GM}{r}\right)\partial_r\left(1-\tfrac{2GM}{r}\right) = \tfrac{-1}{2}\left(1-\tfrac{2GM}{r}\right)\tfrac{-2GM}{r^2} = \frac{GM(r-2GM)}{r^3} \\
\Gamma^r_{rr} = \tfrac{1}{2} g^{rr}\partial_r g_{rr} = \tfrac{1}{2}\left(1-\tfrac{2GM}{r}\right)\partial_r\left[\left(1-\tfrac{2GM}{r}\right)^{-1}\right] = \frac{-\cancel{\left(1-\frac{2GM}{r}\right)}}{2\left(1-\frac{2GM}{r}\right)^{\cancel{2}}}\left(-\tfrac{-2GM}{r^2}\right) = \frac{-GM}{r(r-2GM)} \\
\Gamma^\theta_{r\theta} = \tfrac{1}{2} g^{\theta\theta}(\partial_r g_{\theta\theta} + \cancel{\partial_\theta g_{\theta r}} - \cancel{\partial_\theta g_{r\theta}}) = \tfrac{1}{2} r^{-2} 2r = \tfrac{1}{r} \\
\Gamma^\phi_{r\phi} = \tfrac{1}{2} g^{\phi\phi}(\partial_r g_{\phi\phi} + \cancel{\partial_\phi g_{\phi r}} - \cancel{\partial_\phi g_{r\phi}}) = \tfrac{1}{2} r^{-2}\cancel{sin^{-2}\theta}\; 2r\; \cancel{sin^2\theta} = \tfrac{1}{r} \\
\Gamma^r_{\theta\theta} = \tfrac{1}{2} g^{rr}(\cancel{\partial_\theta g_{r\theta}} + \cancel{\partial_\theta g_{r\theta}} - \partial_r g_{\theta\theta}) = \tfrac{1}{2}\left(1-\tfrac{2GM}{r}\right)(-2r) = (r-2GM) \\
\Gamma^r_{\phi\phi} = \tfrac{1}{2} g^{rr}(\cancel{\partial_\phi g_{r\phi}} + \cancel{\partial_\phi g_{r\phi}} - \partial_r g_{\phi\phi}) = \tfrac{-1}{2}\left(1-\tfrac{2GM}{r}\right) 2r\; sin^2\theta = -(r-2GM)sin^2\theta \\
\Gamma^\theta_{\phi\phi} = \tfrac{1}{2} g^{\theta\theta}(\cancel{\partial_\phi g_{\theta\phi}} + \cancel{\partial_\phi g_{\theta\phi}} - \partial_\theta g_{\phi\phi}) = \tfrac{1}{2} r^{-2}(-r^2 sin\theta cos\theta) = -sin\theta cos\theta \\
\Gamma^\phi_{\theta\phi} = \tfrac{1}{2} g^{\phi\phi}(\partial_\theta g_{\phi\phi} + \cancel{\partial_\phi g_{\phi\theta}} - \cancel{\partial_\phi g_{\theta\phi}}) = \tfrac{1}{2}(r^{-2} sin^{-2}\theta)(-r^2 sin\theta cos\theta) = \tfrac{cos\theta}{sin\theta}
\end{gathered}
$$

Τώρα λοιπόν μπορούμε να υπολογίσουμε τις γεωδαισιακές εξισώσεις σύμφωνα με την 1.56. Επομένως έχουμε:

$$
\left.\begin{gathered}
\frac{d^2t}{d\lambda^2} + 2\Gamma^t_{tr}\frac{dt}{d\lambda}\frac{dr}{d\lambda} = 0 \\
\frac{d^2r}{d\lambda^2} + \Gamma^r_{tt}\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + \Gamma^r_{rr}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \Gamma^r_{\theta\theta}\left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 + \Gamma^r_{\phi\phi}\left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = 0 \\
\frac{d^2\theta}{d\lambda^2} + \Gamma^\theta_{\phi\phi}\left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 + 2\Gamma^\theta_{r\theta}\frac{dr}{d\lambda}\frac{d\theta}{d\lambda} = 0 \\
\frac{d^2\phi}{d\lambda^2} + 2\Gamma^\phi_{\theta\phi}\frac{d\theta}{d\lambda}\frac{d\phi}{d\lambda} + 2\Gamma^\phi_{r\phi}\frac{dr}{d\lambda}\frac{d\phi}{d\lambda} = 0
\end{gathered}\right\} \Leftrightarrow
$$

$$
\left\{\begin{gathered}
\frac{d^2t}{d\lambda^2} + \frac{2GM}{r(r-2GM)}\frac{dt}{d\lambda}\frac{dr}{d\lambda} = 0 \\
\frac{d^2r}{d\lambda^2} + \frac{GM}{r^3}(r-2GM)\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + \frac{-GM}{r(r-2GM)}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + (r-2GM)\left[\left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 + sin^2\theta\left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2\right] = 0 \\
\frac{d^2\theta}{d\lambda^2} - sin\theta cos\theta\left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 + \frac{2}{r}\frac{dr}{d\lambda}\frac{d\theta}{d\lambda} = 0 \\
\frac{d^2\phi}{d\lambda^2} + 2\frac{cos\theta}{sin\theta}\frac{d\theta}{d\lambda}\frac{d\phi}{d\lambda} + \frac{2}{r}\frac{dr}{d\lambda}\frac{d\phi}{d\lambda} = 0
\end{gathered}\right.
$$

Αυτές οι τέσσερις εξισώσεις αποτελούν τις Γεωδαισιακές Εξισώσεις της μετρική Schwarzchild.Αντί να επιλύσουμε αυτές τις εξισώσεις που η δυσκολία είναι αρκετά μεγάλη, μπορούμε να απλοποιήσουμε τα πράγματα δουλεύοντας με τις συμμετρίες της μετρική Schwarzchild. Ξέρουμε ότι υπάρχουνε 4 killing διανύσματα: 3 για την σφαιρική συμμετρία και ένα για τις συμμετρίες μετατόπισης του χρόνου.Καθένα από αυτά οδηγεί σε μια σταθερά κίνησης ενός ελεύθερου σωματίου. Ξέρουμε από την 1.81 ότι για οποιοδήποτε διάνυσμα killing έχουμε ότι:

$$K_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \text{σταθερό} \tag{4.52}$$

Επιπλέον έχουμε από την 1.55 ότι το εσωτερικό γινόμενο είναι σταθερό:

$$\epsilon = -g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} \tag{4.53}$$

Επιπλέον μπορούμε να επιλέξουμε για ένα σωμάτιο με μάζα $\lambda = \tau$ επομένως η προηγουμένη σχέση γράφεται $\epsilon = -g_{\mu\nu}U^{\mu}U^{\nu} = +1$.Των σωματίων με μηδενική μάζα η τροχιά που ακολουθούν είναι πάνω σε φωτοειδή επιφάνειες επομένως έχουν μηδενικό εσωτερικό γινόμενο ταχυτήτων $\epsilon = 0$.Μπορούμε να δούμε στον επίπεδο χώρο ότι η συμμετρία της μετατόπισης του χρόνου οδηγεί στην διατήρηση της μάζας , ενώ η διατήρηση των τριών χωρικών περιστροφών οδηγεί σε διατήρηση της 3-Στροφορμής (μέτρο και 2 κατεύθυνσης). Το ίδιο ισχύει και για την μετρική Schwarzchild. Η διατήρηση της κατεύθυνσης της στροφορμής σε ένα επίπεδο συνεπάγεται ότι το σωμάτιο κάνει τροχιά πάνω σε ένα επίπεδο επομένως μπορούμε να διαλέξουμε το επίπεδο αυτό να είναι για :

$$\theta = \frac{\pi}{2} \tag{4.54}$$

Έτσι μας μένουν δυο διανύσματα Killing την ενέργειας και του μέτρου της στροφορμής.Η ενέργεια αναδύεται από το Killing:

$$K^{\mu} = (\partial_t)^{\mu} = (1, 0, 0, 0) \tag{4.55}$$

Ενώ το Killing διάνυσμα από το οποίο αναδύεται η διατήρηση της ποσότητας της στροφορμής είναι:

$$R^{\mu} = (\partial_{\phi})^{\mu} = (0, 0, 0, 1) \tag{4.56}$$

Μπορούμε να πάρουμε και για τα δυο διανύσματα με πολλαπλασιασμό με τις συνιστώσες της μετρικής Schwarzchild τα ίδια διανύσματα με κάτω δείκτες:

$$g_{\nu\mu}K^{\mu} = g_{\nu\mu}(\partial_t)^{\mu} = \begin{pmatrix} -\left(1-\frac{2GM}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1-\frac{2GM}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & & r^2 & 0 \\ 0 & & 0 & r^2 sin^2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (-\left(1-\frac{2GM}{r}\right), 0, 0, 0)$$

$$g_{\nu\mu}R^{\mu} = g_{\nu\mu}(\partial_{\phi})^{\mu} = \begin{pmatrix} -\left(1-\frac{2GM}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1-\frac{2GM}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & & r^2 & 0 \\ 0 & & 0 & r^2 sin^2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (0, 0, 0, r^2 sin^2\theta)$$

Επομένως:

$$K_{\mu} = (-\left(1-\frac{2GM}{r}\right), 0, 0, 0) \tag{4.57}$$

$$R_{\mu} = (0, 0, 0, r^2 sin^2\theta) \tag{4.58}$$

Εφόσον μας ενδιαφέρουν επιφάνειες με $sin\theta = 1$ τότε οι διατηρήσιμες ποσότητες είναι οι:

$$E = -K_{\mu}\frac{dx^{\mu}}{d\lambda} = \left(1-\frac{2GM}{r}\right)\frac{dt}{d\lambda} \tag{4.59}$$

$$L = R_{\mu}\frac{dx^{\mu}}{d\lambda} = r^2\frac{d\phi}{d\lambda} \tag{4.60}$$

Για άμαζα σωμάτια αυτές οι ποσότητες θεωρούνται η διατήρηση της ενέργειας και της στροφορμής ενώ για σωμάτια με μάζα αυτές οι ποσότητες είναι οι ενέργεια και η στροφορμή ανά μονάδα μάζας. Επομένως αναπτύσσοντάς την 4.53 έχουμε ότι:

$$-\epsilon = -\left(1-\frac{2GM}{r}\right)\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + \left(1-\frac{2GM}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 \tag{4.61}$$

Πολλαπλασιάζοντας με $\left(1-\frac{2GM}{r}\right)$ και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις για την ενέργεια και την στροφορμή έχουμε ότι:

$$-\epsilon\left(1-\frac{2GM}{r}\right) = -\left(1-\frac{2GM}{r}\right)^2\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \left(1-\frac{2GM}{r}\right)r^2\left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 \Leftrightarrow$$
$$-\epsilon\left(1-\frac{2GM}{r}\right) = -E^2 + \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \left(1-\frac{2GM}{r}\right)\frac{L^2}{r^2} \Leftrightarrow$$

$$E^2 - \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - \left(1-\frac{2GM}{r}\right)\left(\epsilon + \frac{L^2}{r^2}\right) = 0 \tag{4.62}$$

Επομένως έχουμε μια εξίσωση που μας δίνει την τροχιά $r = r(\lambda)$. Η οποία μπορεί να γραφτεί σε απλούστερη μορφή χρησιμοποιώντας της σχέσεις:

$$\mathcal{E}_{eff} = \frac{1}{2}E^2$$
$$\mathcal{V}_{eff}(r) = \frac{1}{2}\epsilon + \epsilon\frac{GM}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GML^2}{r^3}$$

να προκύπτει ότι:

$$\mathcal{E}_{eff} = \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \mathcal{V}_{eff}(r) \tag{4.63}$$

Η οποία είναι μια εξίσωση ενός κλασσικού σωματίου με μοναδιαία μάζα και ενέργεια $\mathcal{E}$ που κινείται σε ένα μονοδιάστατο συναμικό $\mathcal{V}$. Με αυτόν τον τρόπο λοιπόν περιγράφουμε τις τροχιές σωματίων γύρω από Βαρυτικά σώματα μακρυά από την ακτίνα 2GM που προκαλεί κατάρρευση της μετρικής.

4.4 Μελανές Οπές

Το κεφάλαιο αυτό φιλοδοξεί να δώσει μια πλήρη περιγραφή των εξισώσεων που αποτελούν την περιγραφή των φυσικών οντοτήτων που αποκαλούνται **Μαύρες Τρύπες** ή **Μελανές Οπές**. Αυτές οι φυσικές Οντότητες έχουν παρατηρηθεί στην Φύση. Είναι μέχρι τώρα Γιγάντια σώματα της τάξεως Αστέρων και η κύρια ιδιότητά τους είναι να έλκουν και να παγιδεύουν αντικείμενα ακόμη και τα πιο γρήγορα από αυτά όπως ένα Φωτόνιο. Αυτή η περιγραφή των Μελανών Οπών βρίσκεται στα πλαίσια της Κλασσικής Φυσικής.

4.4.1 Μελανές Οπές Schwarzschild

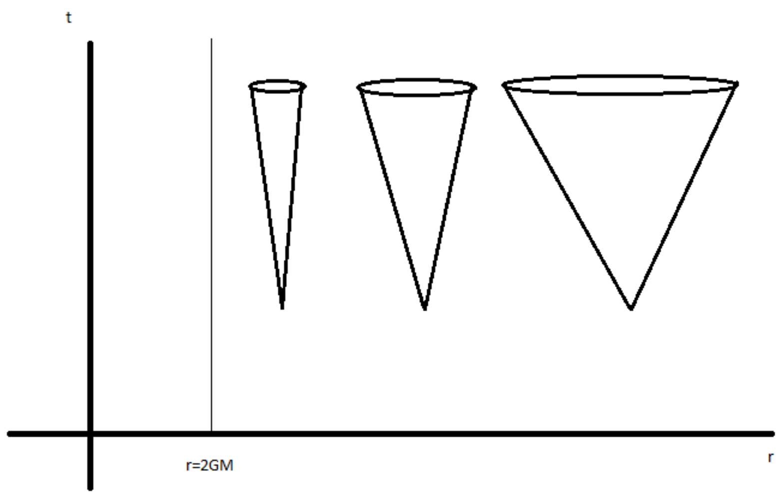
Οι **Μελανές Οπές** μπορούν να περιγραφούν από την μετρική Schwarzchild αν αντιμετωπίσουμε την απροσδιοριστία στην ακτίνα 2GM. Ένας τρόπος για να κατανοήσουμε την γεωμετρία ενός τέτοιου Αντικειμένου είναι να εξερευνήσουμε την δομή του χωρόχρονου όπως ορίζεται από τον κώνο Φωτός. Έτσι, λοιπόν, θεωρούμε φωτοειδής καμπύλες για τις οποίες θεωρούμε σταθερά τις συντεταγμένες θ,ϕ και $ds^2 = 0$:

$$ds^2 = 0 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 \tag{4.64}$$

Από το οποίο μπορούμε να δούμε ότι η κλίση των φωτοειδών τροχιών στο διάγραμμα t-r δίνεται από την σχέση:

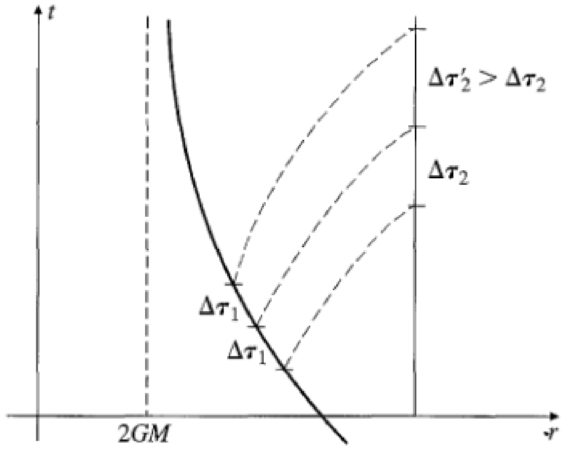
$$\frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \tag{4.65}$$

Για μεγάλα r η κλίση φαίνεται να ± 1 όπως στον Επίπεδο Χώρο. Όσο πλησιάζουμε όμως την ακτίνα 2GM βλέπουμε ότι η κλίση απειρίζεται όπως φαίνεται στο σχήμα 4.1 και ο κώνος φωτός φαίνεται να "κλίνει" . Επομένως οι φωτεινές ακτίνες φαίνεται να μην φτάνουνε στο $r = 2GM$. Όμως αυτό είναι μια "ψευδαίσθηση" διότι μια φωτεινή ακτίνα (ή ένα σωμάτιο με μάζα) φτάνει στην ακτίνα 2GM, όμως ένας παρατηρητής δεν θα μπορεί να το παρατηρήσει.



Σχήμα 4.1: Διάγραμμα σε συντεταγμένες Schwarzschild, ο κώνος φωτός φαίνεται να κλίνει καθώς πλησιάζουμε την ακτίνα $r = 2GM$.

Εάν ένας ατρόμητος Παρατηρητής έπεφτε προς την μαύρη τρύπα , στέλνοντας σήματα σε εμάς όλη την ώρα, τα σήματα θα έρχονταν σε εμάς ολοένα και περισσότερο αργά όπως φαίνεται στο σχήμα 4.2.



Σχήμα 4.2: Παρατηρητής που πέφτει προς το κέντρο της Μελανές οπής και στέλνει σήματα προς παρατηρητή που στέκεται σε σταθερό r έξω από την μελανή οπή. Εικόνα παρμένη από το [5]

Καθώς ο παρατηρητής πλησιάζει την $r = 2GM$, κάθε διάστημα ιδιόχρονού του $\Delta\tau_1$ θα αντιστοιχεί σε ολοένα και μεγαλύτερα διαστήματα $\Delta\tau_2$ στο δικιά μας θέση. Αυτό θα συνεχιζόταν για πάντα και δεν θα βλέπαμε τον παρατηρητή ποτέ να περνάει από το $r = 2GM$, αλλά θα τον βλέπαμε να κινείται σε αυτό όλο και πιο αργά (και να γίνεται ολοένα και πιο κόκκινος). Το ότι δεν τον βλέπουμε να πέφτει είναι λογικό αλλά το ότι η τροχιά του δεν φτάνει ποτέ το σημείο οφείλεται στις συντεταγμένες. Επομένως μπορούμε να βρούμε έναν μετασχηματισμό στον οποίο να φτάνει το σημείο 2GM. Το πρόβλημά με αυτές τις συντεταγμένες έγκειται στο γεγονός ότι η κλίση τείνει στο άπειρο($\frac{dt}{dr}$) καταμήκος των φωτοειδών ακτινικών γεωδαισιακών κοντά στο 2GM : η προσέγγιση της ακτίνας 2GM στην κατεύθυνση r γίνεται ολοένα και πιο αργά σε σχέση με τον χρόνο t. Αυτό που μπορούμε να κάνουμε είναι να αντικαταστήσουμε την συντεταγμένη t με μια που να πηγαίνει πιο αργά κατά μήκος των φωτοειδών γεωδιασιακών. Η σχέση 4.65 μπορεί να λυθεί ως:

$$t = \pm r^* + \text{σταθερά} \tag{4.66}$$

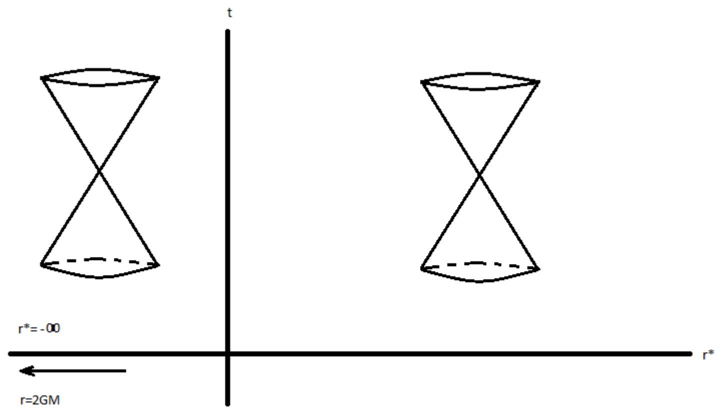
όπου η **συντεταγμένη χελώνας r*** ορίζεται ως:

$$r^* = r + 2GMln\left(\frac{r}{2GM} - 1\right) \tag{4.67}$$

Η συντεταγμένη χελώνας σχετίζεται με την r όταν $r \geq 2GM$ αλλά πέρα από αυτό δεν μας κάνει). Έτσι σε συντεταγμένες χελώνας η μετρική Schwarzschild γίνεται:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)(-dt^2 + dr^{*2}) + r^2 d\Omega^2 \tag{4.68}$$

όπου το r είναι συναρτήσει του r^*. Τώρα λοιπόν ο κώνος φωτός δεν κλίνει αλλά η θέση $r = 2GM$ τείνει στο $r^* \to -\infty$ όπως φαίνεται στο σχήμα 4.3.Επιπλέον καμία συνιστώσα της μετρικής δεν απειρίζεται στο $r = 2GM$ (αλλά οι g_{tt} , $g_{r^*r^*}$ μηδενίζονται). Το τίμημα που πληρώνουμε είναι ότι η επιφάνεια $r = 2GM$ που μας ενδιαφέρει να τραβιέται στη καινούρια συντεταγμένη στο αρνητικό άπειρο. Η επόμενη κίνησή μας, λοιπόν, είναι να ορίσουμε συντεταγμένες που θα προσαρμόζονται στις φωτοειδές γεωδαισιακές. Έστω ότι:



Σχήμα 4.3: Διάγραμμα των συντεταγμένων χρόνου και συντεταγμένης Χελώνας με την απροσδιοριστίας $r = 2GM$ να απομακρύνεται στο άπειρο

$$\begin{aligned} v &= t + r^* \\ u &= t - r^* \end{aligned} \tag{4.69}$$

Τότε τα σωμάτια που πέφτουν στο κέντρο σε φωτοειδείς γεωδαισιακές χαρακτηρίζονται από $v =$σταθερό ($\frac{dt}{dr^*} = -1$) ενώ τα σωμάτια που βγαίνουν χαρακτηρίζονται από $u =$σταθερό ($\frac{dt}{dr^*} = +1$). Τώρα κάνουμε τον μετασχηματισμό

$$\begin{aligned} &r^* \to r \\ &t \to v = t + r^* = t + r + 2GMln\left(\frac{r}{2GM} - 1\right) \end{aligned}$$

Για τις οποίες έχουμε τα διαφορικά:

$$v = t + r + 2GMln\left(\frac{r}{2GM} - 1\right) \Leftrightarrow dv = dt + dr[1 + \cancel{2GM}\left(\frac{r}{2GM} - 1\right)^{-1}\frac{1}{\cancel{2GM}}] \Leftrightarrow$$

$$dt = dv - dr\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \Leftrightarrow dt^2 = dv^2 + dr^2\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-2} - 2\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dvdr$$

και από την μετρική Schwarzschild:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \text{ έχουμε: } \Leftrightarrow$$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dv^2 - dr^2\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} + 2dvdr + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2 \tag{4.70}$$

Αυτές είναι οι γνωστές **Eddington-Finkelstein Συντεταγμένες**. Μπορούμε να δούμε ότι παρόλο που η g_{vv} εξαφανίζεται στο $r = 2GM$ δεν υπάρχει πραγματικός εκφυλισμός της μετρική και η ορίζουσα:

$$g = detg_{\mu\nu} = det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 sin^2\theta \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} det \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 sin^2\theta \end{pmatrix} = -r^4 sin^2\theta$$

$$g = -r^4 sin^2\theta \tag{4.71}$$

Η οποία είναι τέλεια για $r = 2GM$. Έτσι η ορίζουσα είναι αναστρέφουσα και βλέπουμε γιατί η $r = 2GM$ είναι απλά μια *απροσδιοριστία συντεταγμένης* στο αρχικό μας σύστημα συντεταγμένων (t,r,ϑ,φ). Στις Eddington-Finkelstein Συντεταγμένες η συνθήκη για ακτινικές φωτοειδής καμπύλες είναι:

$$\frac{dv}{dr} = \begin{cases} 0, & (\text{Φωτεινές ακτίνες κινούμενες ακτινικά προς το κέντρο}) \\ 2\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}, & \begin{pmatrix} \text{Ακτινικές φωτεινές ακτίνες} \\ \text{κινούμενες προς τα έξω } r > 2GM \\ \text{κινούμενες προς τα μέσα } r < 2GM) \end{pmatrix} \end{cases} \tag{4.72}$$

Σε αυτό λοιπόν το σύστημα ο κώνος φωτός παραμένει καλό στο $r = 2GM$, και η επιφάνεια έχει πεπερασμένη τιμή συντεταγμένης. Δεν υπάρχει πρόβλημα για διαδρομές φωτοειδών ή χρονοειδών σωματίων να περνούν την επιφάνεια. Από την άλλη όμως, παρόλο που ο κώνος δεν κλίνει , γέρνει προς την κατεύθυνση της μειούμενης ακτίνας. Όπως φαίνεται στο σχήμα **??**. Έτσι στο σημείο $r = 2GM$

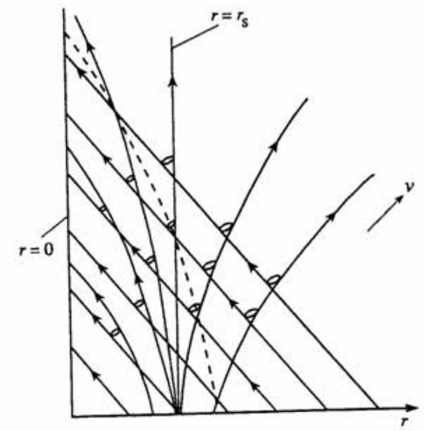


Figure 4.3. Trajectories of light rays (full lines) and an inward-falling particle (broken line) moving radially near a black hole.

τοπικά δεν υπάρχει πρόβλημα , αλλά σε παγκόσμιο επίπεδο λειτουργεί σαν επιφάνεια με κανέναν γυρισμό-μόλις ένα σωμάτιο το περάσει , δεν μπορεί να γυρίσει πίσω. Έτσι ορίζεται ο **Ορίζοντας Γεγονότων** και για την λύση Schwarzschild είναι στο $r = 2GM$. Αφού τίποτε δεν μπορεί να διαφύγει από τον ορίζοντα γεγονότων, τότε δεν μπορούμε να δούμε τίποτα σχετικά με το τι συμβαίνει μέσα σε αυτόν εξού και το όνομα **Μελανή Οπή**.

4.4.2 Διαγράμματα Kruskal και Penrose

Ο προηγούμενος μετασχηματισμός $t \to v$ μας εξάλειψε το πρόβλημα με τον κώνο φωτός όμως μας περιόριζε στο να κάνουμε διαδρομές προς τα μέσα του Ορίζοντα Γεγονότων ακολουθώντας χρονοειδές καμπύλες προς το μέλλον. Όμως εμείς είχαμε ξεκινήσει με μετρική που να έχει συμμετρία στην μετατόπιση στον χρόνο. Επομένως άμα διαλέξουμε $t \to u$ τότε η μετρική γίνεται:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) du^2 - 2dudr + r^2 d\Omega^2 \tag{4.73}$$

Αυτήν την φορά περνούμε τον Ορίζοντα Γεγονότων ακολουθώντας χρονοειδής καμπύλες προς το παρελθόν. Αυτό είναι μια έκπληξη: εφόσον μπορούμε είτε προς το μέλλον είτε προς το παρελθόν χρονοειδής καμπύλες στο $r = 2GM$ και να καταλήγουμε σε διαφορετικά μέρη. Αυτό το περιμένουμε από την σχέση 4.69 εάν κρατήσουμε σταθερό το v και μειώσουμε το r πρέπει το $t \to +\infty$, ενώ αν κρατήσουμε σταθερό το u και μειώσουμε την r τότε πρέπει $t \to -\infty$ (η συντεταγμένη χελώνας r^* πάει στο $-\infty$ για $r \to 2GM$). Έτσι κάναμε επέκταση του χωρόχρονου σε δυο κατευθύνσεις έναν στο μέλλον και ένα στο παρελθόν. Ένα επόμενο βήμα θα ήτανε να ακολουθήσουμε χωροειδής γεωδαισιακές για να δούμε εάν μπορούμε να καλύψουμε άλλες περιοχές. Αλλά καλά θα ήτανε να ορίσουμε συντεταγμένες που θα είναι καλές σε όλο τον χωρόχρονο. Μια πρώτη μαντεψιά είναι να χρησιμοποιήσουμε και τις δυο συντεταγμένες v,u τότε θα έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} v = t + r^* \\ u = t - r^* \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} t = \frac{1}{2}(v+u) \\ r^* = \frac{1}{2}(v-u) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} dt = \frac{1}{2}(dv+du) \\ dr\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} = \frac{1}{2}(dv-du) \end{array}\right\}$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} dt^2 = \frac{1}{4}(dv^2 + du^2 + 2dudv) \\ dr^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^2 \frac{1}{4}(dv^2 + du^2 - 2dudv) \end{array}\right.$$

Επομένως η μετρική γίνεται:

$$ds^2 = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)(dvdu + dudv) + r^2 d\Omega^2 \tag{4.74}$$

όπου το r δίνεται από την σχέση:

$$\frac{1}{2}(v-u) = r + 2GMln\left(\frac{r}{2GM} - 1\right) \tag{4.75}$$

Δηλαδή ξαναορίσαμε τον εκφυλισμό που είχαμε στην αρχή : σε αυτές τις συντεταγμένες r=2GM είναι "άπειρα μακρυά"(είτε σε $u \to +\infty$, είτε σε $v \to -\infty$). Το μόνο που έχουμε να κάνουμε τώρα είναι να αλλάξουμε τις συντεταγμένες έτσι ώστε να τραβάμε τα άπειρα αυτά σημεία σε πεπερασμένες τιμες.Μια καλή επιλογή είναι:

$$\left.\begin{array}{r} v' = e^{v/4GM} \\ u' = -e^{-u/4GM} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} v' = e^{(t+r)/4GM + \frac{1}{2}ln(r/2GM-1)} \\ u' = -e^{-(t-r)/4GM - \frac{1}{2}ln(r/2GM-1)} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \tag{4.76}$$

$$\begin{cases} v' = \left(\frac{r}{2GM} - 1\right)^{1/2} e^{(t+r)/4GM} \\ u' = -\left(\frac{r}{2GM} - 1\right)^{1/2} e^{(r-t)/4GM} \end{cases} \tag{4.77}$$

Επομένως σε συντεταγμένες (v',u',θ,ϕ) η μετρική Schwarzschild γίνεται:

$$ds^2 = -\frac{16G^3M^3}{r} e^{-r/2GM}(dv'du' + du'dv') + r^2 d\Omega^2 \tag{4.78}$$

Επιτέλους η φύση της μη-απροσδιοριστία στο $r = 2GM$ έγινε εντελώς προφανής. Σε αυτήν την μορφή η μετρική συμπεριφέρεται ειδικά στον Ορίζοντα Γεγονότων. Και οι δυο συντεταγμένες v',u' είναι φωτοειδής, με την έννοια οι μερικές παράγωγοί τους $\frac{\partial}{\partial v'}$, $\frac{\partial}{\partial u'}$ είναι φωτοειδή διανύσματα! Αυτό είναι εν γένει σωστό, εφόσον η συλλογή από διανύσματα μερικών παραγώγων (2 φωτοειδή και δυο χωροειδή) σε ένα σύστημα συντεταγμένων δουλεύει σαν μια τέλεια βάση του εφαπτόμενου χώρου. Επειδή όμως βολευόμαστε να δουλεύουμε σε συστήματα όπου η μια συνιστώσα είναι χρονοειδής και οι άλλες τρείς χωροειδής, ορίζουμε τις συντεταγμένες:

$$T = \frac{1}{2}(v' + u') = \left(\frac{r}{2GM} - 1\right)^{1/2} e^{r/4GM} sinh\left(\frac{t}{4GM}\right) \tag{4.79}$$

$$R = \frac{1}{2}(v' - u') = \left(\frac{r}{2GM} - 1\right)^{1/2} e^{r/4GM} cosh\left(\frac{t}{4GM}\right) \tag{4.80}$$

Με τις οποίες μπορούμε να υπολογίσουμε τις ποσότητες για να μετασχηματίσουμε την μετρική:

$$\left.\begin{array}{l} v' = T + R \\ u' = T - R \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} dv' = dT + dR \\ du' = dT - dR \end{array}\right\} \Leftrightarrow dv'du' = dT^2 - dR^2 \Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{2}(dv'du' + du'dv') = dT^2 - dR^2$$

Επομένως η μετρική γίνεται:

$$ds^2 = \frac{32G^3M^3}{r} e^{-r/2GM}(-dT^2 + dR^2) + r^2 d\Omega^2 \tag{4.81}$$

όπου το r καθορίζεται από την:

$$T^2 - R^2 = \left(1 - \frac{r}{2GM}\right) e^{r/2GM} \tag{4.82}$$

Οι συντεταγμένες (T,R,θ,ϕ) είναι γνωστές ως συντεταγμένες **Kruskal ή Kruskal-Szekeres**. Όπως και οι (t,r^*) συντεταγμένες, η ακτινικές φωτοειδής καμπύλες ακολουθούν, όπως και στον επίπεδο χώρο,την σχέση:

$$T = \pm R + \text{σταθερά} \tag{4.83}$$

Αντιθέτως όμως με τις (t,r^*) συντεταγμένες, ο Ορίζοντας Γεγονότων $r = 2GM$ δεν είναι απείρως μακρυά αλλά ορίζεται από την:

$$T = \pm R \tag{4.84}$$

Η οποία είναι φωτοειδής επιφάνεια. Επίσης μπορούμε να ορίσουμε τις επιφάνειες με r=σταθερά από την σχέση:

$$T^2 - R^2 = \text{σταθερά} \tag{4.85}$$

οι οποίες παρουσιάζονται σαν υπερβολικές στο επίπεδος R-T. Επιπλέον, οι επιφάνειες σταθερού χρόνου t δίνονται από την :

$$\frac{T}{R} = tanh\left(\frac{t}{4GM}\right) \tag{4.86}$$

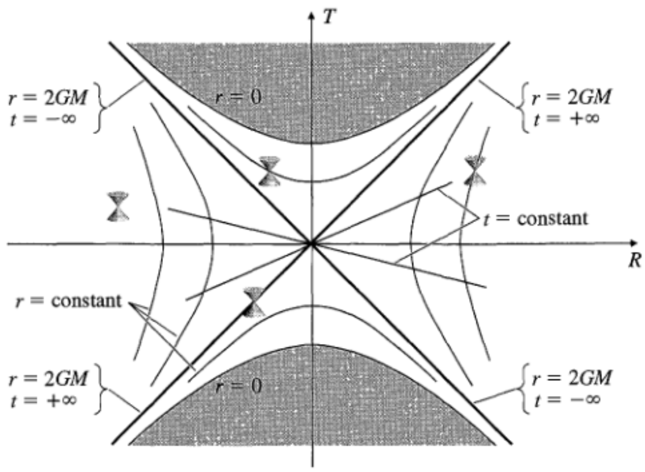
η οποία ορίζει ευθείες γραμμές που περνάνε από την αρχή των αξόνων με κλίση tanh(t/4GM). Για $t \to \pm\infty$ η 4.86 γίνεται όπως η 4.84 : γιαυτόν τον λόγο η επιφάνεια $t \to \pm\infty$ είναι ίδια με την επιφάνεια $r = 2GM$.

Οι συντεταγμένες (T,R) θα έπρεπε να επιτρέπεται να παίρνουν όλες τις τιμές χωρίς να κτυπούν την απροσδιοριστία r=0: Η επιτρεπόμενη περιοχή είναι:

$$\begin{array}{c} -\infty \leq R \leq +\infty \\ T^2 < R^2 + 1 \end{array} \tag{4.87}$$

(αφού $1 = \left(1 - \frac{r}{2GM}\right) e^{r/2GM}|_{r=0}$). Τώρα μπορούμε να σχεδιάζουμε το διάγραμμα επιπέδου T-R (με φιξαρισμένα τα θ,ϕ), γνωστό ως Kruskal Διάγραμμα, όπως φαίνεται στο 4.4.

Κάθε σημείο είναι μια 3-διάστατη σφαίρα. Το διάγραμμα αυτό αποτελεί την Μέγιστη Επέκταση της Schwarzschild γεωμετρίας: οι συντεταγμένες καλύπτουν ολόκληρο αυτό που θεωρούμε Πολλαπλότητα της Λύσης. Το διάγραμμα αυτό χωρίζεται σε 4 περιοχές. Από τις οποίες Η Ι είναι η περιοχή όπου ο χώρος περιγράφεται από τις συντεταγμένες μας. Αυτή η περιοχή είναι ασυμπτωτικά επίπεδη και είναι ο χώρος στον οποίο ζούμε. Ο χώρος ΙΙ είναι αυτός που ονομάζουμε Μαύρη Τρύπα δηλαδή ότι παιρνάει την διαχωριστική επιφάνεια δεν μπορεί να επιστρέψει πίσω. Ο Χώρος ΙΙΙ είναι αυτό που, αποκαλούμε Λευκή Τρύπα. Ένα αντικείμενο που δεν έχει παρατηρηθεί στην φύση και αυτό που κάνει είναι να παράγει σωματίδια έξω από την περιοχή αλλά να μην μπορεί να δεχθεί καθόλου μέσα. Και η IV είναι μια περιοχή που θα μπορούσαμε να την φτάσουμε μόνο με χωροειδή διαδρομή και είναι ένας καθρέπτης της πραγματικής περιοχής που ζούμε.



Σχήμα 4.4: Διάγραμμα Kruskal. Εικόνα παρμένη από το [5]

Διάγραμμα Penrose Όσο και ελκυστικό να φαίνεται το διάγραμμα Kruskal είναι χρήσιμο να γίνει κατάρρευση της Schwarzschild λύσης σε μια πεπερασμένη περιοχή κατασκευάζοντας το Σύμμορφο Διάγραμμα της. Ξεκινάμε παίρνοντας την φωτοειδή Version των συντεταγμένων Kruskal, όπου η μετρική:

$$ds^2 = -\frac{16G^3M^3}{r}e^{-r/2GM}(dv'du' + du'dv') + r^2d\Omega^2 \tag{4.88}$$

και το r καθορίζεται από την:

$$v'u' = -\left(\frac{2GM}{r} - 1\right)e^{r/2GM} \tag{4.89}$$

Τώρα ορίζουμε δυο νέες συντεταγμένες ώστε να μπορέσουμε να φέρουμε τους απειρισμούς σε πεπερασμένες τιμές:

$$\begin{aligned} v'' &= arctan\left(\frac{v'}{\sqrt{2GM}}\right) \\ u'' &= arctan\left(\frac{u'}{\sqrt{2GM}}\right) \end{aligned} \tag{4.90}$$

Με πεδία ορισμού τα εξής:

$$\begin{gathered} -\tfrac{\pi}{2} < v'' < +\tfrac{\pi}{2} \\ -\tfrac{\pi}{2} < u'' < +\tfrac{\pi}{2} \\ -\tfrac{\pi}{2} < v'' + u'' < +\tfrac{\pi}{2} \end{gathered}$$

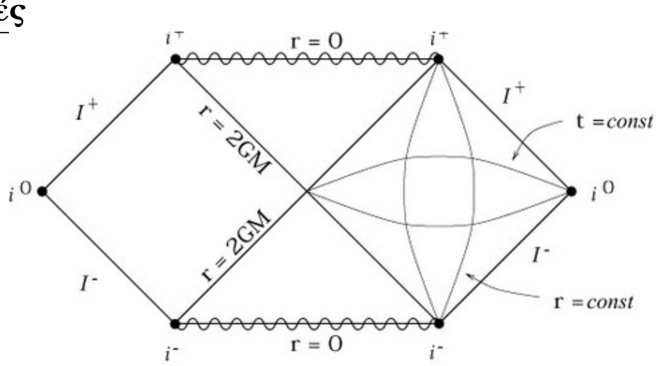
Έτσι, λοιπόν, μπορούμε να σχεδιάσουμε το διάγραμμα Penrose στο σχήμα 4.5 Το διάγραμμα που κατασκευάσαμε καλείται **Διάγραμμα Penrose**.

- i^+ = Μελλοντικό Χρονοειδές Άπειρο ($T_P = \frac{\pi}{4}$, $R_P = \frac{\pi}{4}$)
- i^0 = Χωροειδές Άπειρο ($T_P = 0$, $R_P = \frac{\pi}{2}$)
- i^- = Παρελθοντικό Χρονοειδές Άπειρο ($T_P = -\frac{\pi}{4}$, $R_P = \frac{\pi}{4}$)
- I^+ = Μελλοντικό φωτοειδές Άπειρο ($0 < T_P < \frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4} < R_P < \frac{\pi}{2}$)
- I^- = Παρελθοντικό φωτοειδές Άπειρο ($-\frac{\pi}{4} < T_P < 0$, $\frac{\pi}{4} < R_P < \frac{\pi}{2}$)

Το (v'',u'') κομμάτι της μετρικής είναι σύμμορφο με αυτό της Μετρικής Minkowski. Σε αυτές τις καινούριες συντεταγμένες η απροσδιοριστία r=0 είναι ευθείες γραμμές που πηγαίνουν από το Χρονοειδές 'Απειρο της μια ασυμπτωτικής περιοχής στο Χρονοειδές Άπειρο της άλλης ασυμπτωτικής Περιοχής

4.4.3 Επιφανειακή Βαρύτητα

Η επιφανειακή πυκνότητα είναι μια έκφραση της βαρύτητας του ορίζοντα μιας μαύρης τρύπας. Μπορεί να ορισθεί είτε μέσω των διανυσματικών πεδίων killing που είναι ορθογώνιο στον Ορίζοντα ,είτε εναλλακτικά μέσω της 4-ταχύτητας και της 4-επιτάχυνσης ενός ελευθέρου σωματίου.



Σχήμα 4.5: Διάγραμμα Penrose

Επιφανειακή Βαρύτητα μέσω διανυσματικών πεδίων killing Ο ορίζοντας της μαύρης τρύπας είναι μια *φωτοειδής επιφάνεια*. Αυτό μπορεί να φανεί μέσω των διαγραμμάτων Kruskal.Το το ότι μια επιφάνεια είναι φωτοειδής σημαίνει ότι οποιοδήποτε κάθετο διάνυσμα της επιφάνειας είναι *φωτοειδές*.Θεωρώντας το διάνυσμα killing που γεννά μετατοπίσεις στον χρόνο $k = k^a e_a$ με $k^a = (1, 0, 0, 0)$ και άρα $k = \partial_t$. Αυτό το διάνυσμα είναι κάθετο στον Ορίζοντα άρα $k_a k^a = 0$ Τότε και η συναλοίωτη παράγωγός του θα είναι σταθερή $\nabla^a(k_\mu k^\mu) =$ σταθερή και άρα κάθετη στο ορίζοντα. Επομένως υπάρχει μια σταθερά κ η οποία ονομάζεται *επιφανειακή βαρύτητα* τέτοια ώστε:

$$\nabla^a(k_\mu k^\mu) = -2\kappa k^a \tag{4.91}$$

Σύμφωνα με τον κανόνα αλυσίδας , της εξίσωσης killing και κατεβάζοντας τους δείκτες μπορούμε να γράψουμε την παραπάνω σχέση ως:

$$k^\mu \nabla_a k_\mu = -k^\mu \nabla_\mu k_a = -\kappa k_a \tag{4.92}$$

Προκύπτει επίσης από το θεώρημα του Frobenius ότι ένα διάνυσμα k^a είναι κάθετο σε μια υπερηφάνειά όταν:

$$k_{[\mu} \nabla_\nu k_{\rho]} = 0 \tag{4.93}$$

Έτσι μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$\begin{gathered}
k_\mu \nabla_\nu k_\rho - k_\nu \nabla_\mu k_\rho + k_\nu \nabla_\rho k_\mu - k_\rho \nabla_\nu k_\mu + k_\rho \nabla_\mu k_\nu - k_\mu \nabla_\rho k_\nu = 0 \Leftrightarrow \\
-k_\mu \nabla_\rho k_\nu + k_\nu \nabla_\rho k_\mu + k_\nu \nabla_\rho k_\mu + k_\rho \nabla_\mu k_\nu + k_\rho \nabla_\mu k_\nu - k_\mu \nabla_\rho k_\nu = 0 \Leftrightarrow \\
-\cancel{2} k_\mu \nabla_\rho k_\nu + \cancel{2} k_\nu \nabla_\rho k_\mu + \cancel{2} k_\rho \nabla_\mu k_\nu = 0 \Leftrightarrow \\
k_\mu \nabla_\nu k_\rho + k_\nu \nabla_\rho k_\mu + k_\rho \nabla_\mu k_\nu = 0 \Leftrightarrow \\
k_\mu \nabla_\nu k_\rho - k_\nu \nabla_\mu k_\rho + k_\rho \nabla_\mu k_\nu = 0 \Leftrightarrow \\
2k_{[\mu} \nabla_{\nu]} k_\rho + k_\rho \nabla_\mu k_\nu = 0 \Leftrightarrow
\end{gathered}$$

$$k_\rho \nabla_\mu k_\nu = -2k_{[\mu} \nabla_{\nu]} k_\rho \tag{4.94}$$

Κάνουμε τώρα την *συστολή* με $\nabla^\mu k^\nu$ έχουμε:

$$k_\rho(\nabla^\mu k^\nu)(\nabla_\mu k_\nu) = -2(\nabla^\mu k^\nu)(k_{[\mu}\nabla_{\nu]})k_\rho \Rightarrow \text{Για το δεύτερο μέλος έχουμε:}$$
$$(\nabla^\mu k^\nu)(k_{[\mu}\nabla_{\nu]}) = (\nabla^\mu k^\nu)\frac{1}{2!}(k_\mu\nabla_\nu - k_\nu\nabla_\mu) = \frac{1}{2!}(\nabla^\mu k^\nu k_\mu \nabla_\nu - \nabla^\mu k^\nu k_\nu \nabla_\mu)$$
$$= \frac{1}{2!}(\nabla^\mu k^\nu k_\mu \nabla_\nu + \nabla^\nu k^\mu k_\nu \nabla_\mu) = \text{σύμφωνα με την } 4.92$$
$$= \frac{1}{2!}(\kappa k^\nu \nabla_\nu + \kappa k^\mu \nabla_\mu) = \kappa k^\mu \nabla_\mu \text{επομένως έχουμε} \Rightarrow$$
$$\left.\begin{array}{r} k_\rho(\nabla^\mu k^\nu)(\nabla_\mu k_\nu) = -2\kappa k^\mu \nabla_\mu k_\rho \\ \text{όμως } \nabla^a(k^b k_b) = 2k_b\nabla^a k^b = -2\kappa k^a \Leftrightarrow k_b\nabla^b k^a = \kappa k^a \end{array}\right\} k_\rho(\nabla^\mu k^\nu)(\nabla_\mu k_\nu) = -2\kappa^2 k_\rho$$

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2}(\nabla^\mu k^\nu)(\nabla_\mu k_\nu) \tag{4.95}$$

Μια σχέση λοιπόν για να υπολογίζουμε μέσω των διανυσμάτων killing την **επιφανειακή καμπυλότητα** ενός Ορίζοντα(Γεγονότων). Επειδή η μετρική Schwarzschild είναι διαγώνια τότε το διάνυσμα killing χρονικής μετατόπισης είναι:

$$k^a = \delta^a_t \Leftrightarrow g^{ab}k_b = g^{ab}\delta_{bt} \Leftrightarrow$$
$$k_c = g_{ca}g^{ab}\delta_{bt} = g_{ct} \Leftrightarrow$$

$$k^a = \delta^a_t = (1,0,0,0) \leftrightarrow k_a = g_{at} = (-\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right), 0, 0, 0) \tag{4.96}$$

Σύμφωνα με την μετρική έχουμε ότι $\partial_\mu k_\nu \neq 0 \ \forall \mu, \nu = t, r$. Επομένως

$$\partial_\mu k_\nu = \partial_r k_t = \partial_r g_{tt} \tag{4.97}$$

Από την εξίσωση killing έχουμε

$$\nabla_\mu k_\nu = -\nabla_\nu k_\mu \Leftrightarrow \nabla_r k_t = \partial_r k_t - \Gamma^t_{tr} k_t \overbrace{=}^{\partial_t k_r = 0} -(\partial_t k_r - \Gamma^t_{tr} k_t) = -\nabla_t k_r$$
$$\Leftrightarrow \Gamma^t_{tr} = +\frac{1}{2}g^{tt}\partial_r g_{tt} \text{ Επομένως } \nabla_r k_t = -\nabla_t k_r = -(0 - \Gamma^t_{tr} k_t)$$

$$\kappa = \sqrt{-\frac{1}{2}(\nabla^\mu k^\nu)(\nabla_\mu k_\nu)} = \sqrt{-\cancelto{0}{\frac{1}{2}(\nabla^t k^t)(\nabla_t k_t)} - \frac{1}{2}(\nabla^t k^r)(\nabla_t k_r) - \frac{1}{2}(\nabla^r k^t)(\nabla_r k_t) - \cancelto{0}{\frac{1}{2}(\nabla^r k^r)(\nabla_r k_r)}}$$
$$\kappa = \sqrt{-(\nabla^t k^r)(\nabla_t k_r)} = \sqrt{-g^{ta}g^{rb}(\nabla_a k_b)(\nabla_t k_r)} = \sqrt{-g^{tt}g^{rr}(\nabla_t k_r)(\nabla_t k_r)} = \sqrt{-g^{tt}g^{rr}(\nabla_t k_r)^2}$$
$$\kappa = \sqrt{-g^{tt}g^{rr}(\Gamma^t_{tr}k_t)^2} = \sqrt{\cancel{-g^{tt}g^{rr}}(\Gamma^t_{tr}g_{tt})^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\cancel{g^{tt}}(\partial_r g_{tt})\cancel{g_{tt}}\right)^2}$$
$$\kappa = \frac{1}{2}\partial_r\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)c^2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{-2GM}{r^2}\right) = \frac{GM}{r^2}$$

Επομένως στον **ορίζοντα** της **Schwarzschild μετρικής** όπου $r = 2GM/c^2$ η **επιφανειακή βαρύτητα** είναι:

$$\kappa = \frac{c^4}{4GM} \tag{4.98}$$

Κεφάλαιο 5

Κβαντομηχανική

Στο κεφάλαιο αυτό θα εισάγουμε μερικές αρχές τις Κβαντικής Μηχανικής οι οποίες είναι απαραίτητες για να εξετάσουμε το Φαινόμενο της Ακτινοβολίας του Hawking. Σύμφωνα με τα νέα ευρήματα της Κβαντομηχανικής στον κενό χώρο δημιουργούνται Κβαντικές Διακυμάνσεις. Κενό χώρο έχουμε στο Διάστημα στον οποίο ζούνε τα Αντικείμενα που περιγράψαμε προηγουμένως, οι Μελανές Οπές. Η Ακτινοβολία Hawking που προέρχεται από την περιοχή γύρω από τις μαύρες τρύπες οφείλεται στις Κβαντικές διακυμάνσεις του κενού χώρου. Η Κβαντομηχανική είναι μια θεωρία που αναπτύχθηκε στα μέσα του 1920. Είναι μια θεωρία η οποία εξηγεί μια σειρά από πειράματα τα οποία δεν εξηγούνταν σύμφωνα με κλασσικές Θεωρήσεις. Στο κεφάλαιο αυτό θα θεωρήσουμε natural Units όπου $c = 1$.Κάθε φυσική Θεωρία που περιγράφει ένα κλασσικό ή κβαντομηχανικό σύστημα διέπεται 4 από τις εξής ερωτήσεις:

1. Ποιές είναι οι πιθανές καταστάσεις του συστήματος? Στην Κλασσική είναι το σύνολο των συντεταγμένων και των ορμών.

2. Τί μπορούμε να παρατηρήσουμε από το σύστημα? Κάθε συνάρτηση των συντεταγμένων και των ορμών.

3. Πώς εξελίσσεται το σύστημα? Εύρεση των εξισώσεων κίνησης.

Για να εδραιώσουμε τις παραπάνω ιδέες θεωρούμε τον Απλό Αρμονικό Ταλαντωτή. Ένα σωμάτιο που κινείται μονοδιάστατα υπό την επήρεια τετραγωνικού δυναμικού. Η κατάσταση του σωματίου είναι η συντεταγμένη x και η ορμή του p. Για να πάρουμε τις εξισώσεις κίνησης σωματίου μάζας m=1(για απλοποίηση), ξεκινούμε με την Lagrangian-ή του συστήματος:

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\omega^2 x^2 \tag{5.1}$$

μέσω των εξισώσεων Euler-Lagrange βρίσκουμε τις εξισώσεις κίνησης:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{5.2}$$

Αργότερα θέλουμε να κάνουμε την μετάβαση στην Κβαντομηχανική και εκεί δουλεύουμε με Hamiltonian-ή. Επομένως μέσω του μετασχηματισμού Legendre:

$$H = p\dot{x} - L \tag{5.3}$$

όπου η ορμή ικανοποιεί:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} \tag{5.4}$$

Έτσι έχουμε την Hamiltonian-ή του αρμονικού ταλαντωτή:

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 \tag{5.5}$$

Με τις εξισώσεις Hamilton να περιγράφουν την εξίσωση κίνησης:

$$\frac{dx}{dt} = \partial_p H = p, \quad \frac{dp}{dt} = -\partial_x H = -\omega^2 x \tag{5.6}$$

Και οι εξισώσεις Hamilton και οι Euler-Lagrange επιλύονται από την μιγαδικής μορφή:

$$x(t) = x_0 e^{i\omega t + a_0} \tag{5.7}$$

όπου x_0 είναι το πλάτος ταλάντωσης και a_0 είναι η φάση. Μπορούμε, στο τέλος, να πάρουμε το πραγματικό μέρος για την φυσική απάντηση!

5.1 Αρχές Κβαντομηχανικής

Τώρα στρεφόμαστε στην κβαντομηχανική. Παρόλο που η κβαντομηχανική είναι μια διαφορετική θεωρεία θα πρέπει να απαντάει στις ίδιες ερωτήσεις, αλλά οι απαντήσεις παίρνουν μια διαφορετική μορφή:

1. Η κατάσταση του συστήματος απεικονίζεται ως ένα στοιχείο του χώρου Hillbert. Μαθηματικά μιλώντας, ο χώρος Hillbert είναι ένας μιγαδικός διανυσματικός χώρος σε αυτόν κάθε στοιχείο καλείται ket και συμβολίζεται με $|\psi\rangle$ και το μιγαδικό συζυγές του bra και συμβολίζεται με $\langle\psi|$ και είναι εφοδιασμένος με το μιγαδικό εσωτερικό γινόμενο με τις ιδιότητες:

   (α′) $\langle\psi_2|\psi_1\rangle^* = \langle\psi_1|\psi_2\rangle$

   (β′) $\langle ax_1 + bx_2|y\rangle = a\langle x_1|y\rangle + b\langle b|y\rangle$

   (γ′) $\langle x|x\rangle \geq 0$

2. Τα παρατηρήσιμα μεγέθη απεικονίζονται από αυτοσυζυγής ή αλλιώς Hermitian τελεστές του χώρου Hillbert

   $$A^\dagger = A \tag{5.8}$$

   όπου ο $A^\dagger$ ικανοποιεί:

   $$\langle\psi_2|A\psi_1\rangle = \langle A^\dagger\psi_2|\psi_1\rangle \tag{5.9}$$

   Υπάρχουνε και τελεστές που δεν είναι Hermitian αλλά δεν απεικονίζουν παρατηρήσιμα μεγέθη και τέτοιοι μεταθέτες δεν μετατίθενται. Υπάρχει ένα σύνολο από μεταθετικών παρατηρήσιμων μεγεθών που απεικονίζουν τα πάντα σε ένα σύστημα.

3. Η εξέλιξη ενός συστήματος απεικονίζεται με δυο τρόπους: Σαν μια μοναδιακή εξέλιξη του διανύσματος κατάστασης του χώρου Hillbert (Εικόνα Schrodinger), ή διατηρώντας την κατάσταση ως σταθερά και επιτρέποντας στο παρατηρήσιμο να εξελίσσεται σύμφωνα με τις εξισώσεις κίνησης (Εικόνα Heisenberg).

5.1.1 Κβαντικός ΑΑΤ Εικόνα Schrodinger

Παίρνουμε πάλι το παράδειγμα του Απλού Αρμονικού Ταλαντωτή (ΑΑΤ), θεωρώντας πρώτα την εικόνα του Schrodenger, κατά την οποία οι καταστάσεις απεικονίζονται από μιγαδικές κυματοσυναρτήσεις που εξελίσσονται με τον χρόνο όπως $\psi(x,t)$. Η κυματοσυνάρτηση είναι το σύνολο από συνιστώσες του διανύσματος κατάστασης $|\psi\rangle$ εκφραζόμενες σε "Δέλτα-συναρτήσιακή βάση θέσης" $|x\rangle$, έτσι $|\psi(t)\rangle = \int dx \psi(x,t)|x\rangle$. Ο κανονική κβάντωση δημιουργείται με το να εισάγουμε τις σχέσης κανονικής μετάθεσής:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i \tag{5.10}$$

όπου $\hat{x}$ είναι ο τελεστής θέσης και $\hat{p}$ ο τελεστής ορμής. Για τις καταστάσεις που απεικονίζονται με κυματοσυναρτήσεις που εξαρτώνται από το x και t, έχουμε ότι ο $\hat{x}$ είναι απλά το x, ενώ για τον $\hat{p}$ έχουμε:

$$\hat{p} = -i\partial_x \tag{5.11}$$

Έτσι ο τελεστής της Hamiltonian-ής γράφεται:

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\partial_x^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 \tag{5.12}$$

Και η εξίσωση κίνησης γίνεται:

$$\hat{H}\psi = i\partial_t \psi \tag{5.13}$$

Η οποία αποκαλείται **Εξίσωση Schrodinger**. Αφού η Hamiltonian είναι χρονοανεξάρτητη μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μέθοδο χωριζόμενων μεταβλητών επομένως, $\psi(x,t) = f(t)g(x)$. Η λύση τότε έρχεται σε διακριτά σύνολα με δείκτη έναν ακέραιο $n \geq 0$, και βρίσκουμε(νορμαλίζοντας):

$$\psi_n(x,t) = e^{(1/2)\omega x^2} H_n(\sqrt{\omega}x) e^{iE_n t} \tag{5.14}$$

όπου H_n είναι τα πολυώνυμα Hermite βαθμού n, και:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\omega \tag{5.15}$$

Οι καταστάσεις είναι όλες ιδιοκαταστάσεις της Hamiltonian-ής $\hat{H}$, και E_n είναι οι ιδιοενέργιες. Μια αυθαίρετη κατάσταση του αρμονικού ταλαντωτή μπορεί να γραφεί σαν μια υπέρθεση ιδιοκαταστάσεων,

$$\psi(x,t) = \sum_n c_n \psi_n(x,t) \tag{5.16}$$

για κάποιο σύνολο από κατάλληλες νορμαλισμένες σταθερές c_n.

Υπάρχει ένας αριθμός από συμαντικές πτυχές του κβαντικού Ταλαντωτή που περιέχονται σε αυτήν την έκφραση. Υπάρχει οι διακριτό φάσμα των ενεργειακών ιδιοκαταστάσεων, γιαυτό και ονομάζεται "Κβαντική" ("Quantum") μηχανική(παρόλο που μπορείς να βρείς συστήματα με συνεχές φάσμα). Υπάρχει η Θεμελιώδης κατάσταση και επιπλέον σύνολο διεγερμένων καταστάσεων μοναδικά καθορισμένα με δείκτη που αντιστοιχεί από την δικιά τους ενεργειακή ιδιοτιμή. Η θεμελιώδης κατάσταση είναι:

$$E_0 = \frac{1}{2}\omega \tag{5.17}$$

Είναι ενδιαφέρον να σημειώσουμε ότι η ελάχιστη τιμή του κλασσικού συστήματος θα ήτανε 0 για x=0 και p=0. Η κβαντική όμως θεμελιώδης Ενέργεια μπορεί να περιοριστεί από την Αρχή Απροσδιοριστίας του Heisenberg, που απαγορεύει σε εμάς να οριοθετήσουμε μια κατάσταση σε έναν μικρού μεγέθους τόπο ταυτόχρονα και με την θέση και με την ορμή: έτσι υπάρχει ένα μικρού είδους "κουνήματος" του ταλαντωτή, που οδηγεί σε μη μηδενική θεμελιώδους κατάστασης ενέργεια. Θα μπορούσαμε ωστόσο να χρησιμοποιήσουμε το δυναμικό $V(x) = \frac{1}{2}\omega^2 x^2 - \frac{1}{2}\omega$ που θα οδηγούσε σε μηδενική θεμελιώδη κατάσταση για την κβαντομηχανική Ενώ η θεμελιώδης ενέργεια του κλασσικού προβλήματος θα ήτανε $-\frac{1}{2}$. Η Κβαντομηχανική δεν επιμένει σε μη μηδενική θεμελιώδη κατάσταση αλλά να αλλάξει την Ενέργεια από την κλασσική Τιμή.

5.1.2 Τελεστές Δημιουργίας και Καταστροφής

Ένας διαφορετικός τρόπος να λύσουμε τον Απλό Αρμονικό Ταλαντωτή είναι να εισάγουμε τους τελεστές δημιουργίας και καταστροφής $\hat{a}^\dagger$ και $\hat{a}$ αντίστοιχα.

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega\hat{x} + i\hat{p}), \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega\hat{x} - i\hat{p}) \tag{5.18}$$

έτσι ώστε:

$$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad \hat{p} = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \tag{5.19}$$

Επομένως μπορούμε να υπολογίσουμε:

$$\begin{aligned}
[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]\psi = \hat{a}\hat{a}^\dagger\psi - \hat{a}^\dagger\hat{a}\psi &= \frac{1}{2\omega}[(\omega\hat{x} + i\hat{p})(\omega\hat{x} - i\hat{p})\psi - (\omega\hat{x} - i\hat{p})(\omega\hat{x} + i\hat{p})\psi] = \\
&= \frac{1}{2\omega}[(\cancel{\omega^2\hat{x}^2 + \hat{p}^2} + i\omega\hat{p}\hat{x} - i\omega\hat{x}\hat{p})\psi - (\cancel{\omega^2\hat{x}^2 + \hat{p}^2} - i\omega\hat{p}\hat{x} + i\omega\hat{x}\hat{p})\psi] = \\
&= \frac{1}{2\omega}[2i\omega\hat{p}\hat{x}\psi - 2i\omega\hat{x}\hat{p}\psi] = i\hat{p}\hat{x}\psi - i\hat{x}\hat{p}\psi = i(-i\partial_x)(x\psi) - ix(-i\partial_x\psi) \Leftrightarrow \\
[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]\psi = \partial_x(x\psi) - x\partial_x\psi &= (\partial_x x)\psi = \psi \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

Επομένως η σχέσης μετάθεσης των τελεστών δημιουργίας και καταστροφής είναι:

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \tag{5.20}$$

και η καινούρια έκφραση για την Hamiltonian είναι:

$$H = \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)\omega \tag{5.21}$$

Οι τελεστές δημιουργίας και καταστροφής μετατίθενται με την Hamiltonian-ή μέσω των:

$$[\hat{H}, \hat{a}] = -\omega \hat{a}^\dagger \tag{5.22}$$

$$[\hat{H}, \hat{a}^\dagger] = +\omega \hat{a} \tag{5.23}$$

Συγκρίνοντας την σχέση της Hamiltonian με τους τελεστές δημιουργίας και καταστροφής και την Hamiltonian στην μορφή των ιδιοενεργειών 5.15, εμπνεόμαστε να ορίσουμε την τελεστή αρίθμησης:

$$\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a} \tag{5.24}$$

Ας δούμε τώρα που οφείλεται το όνομα των τελεστών δημιουργίας και καταστροφής. Θεωρούμε την ιδιοκατάσταση$|n\rangle$ τότε για τον τελεστή αρίθμησης έχουμε:

$$\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle \tag{5.25}$$

Τώρα παίζουμε με τους κανόνες μετάθεσης:

$$\begin{aligned}
[\hat{H}, \hat{a}^\dagger] = \hat{H}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{H} = \omega(\hat{n}\hat{a}^\dagger + \frac{1}{2}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{n} - \frac{1}{2}\hat{a}^\dagger) = \omega \hat{n}\hat{a}^\dagger - \omega \hat{a}^\dagger \hat{n} \Leftrightarrow \\
\hat{n}\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\omega}\left([\hat{H}, \hat{a}^\dagger] + \omega \hat{a}^\dagger \hat{n}\right) = \frac{1}{\omega}\left(\omega \hat{a}^\dagger + \omega \hat{a}^\dagger \hat{n}\right) = \hat{a}^\dagger(1 + \hat{n}) \\
[\hat{H}, \hat{a}] = \hat{H}\hat{a} - \hat{a}\hat{H} = \omega(\hat{n}\hat{a} + \frac{1}{2}\hat{a} - \hat{a}\hat{n} - \frac{1}{2}\hat{a}) = \omega \hat{n}\hat{a} - \omega \hat{a}\hat{n} \Leftrightarrow \\
\hat{n}\hat{a} = \frac{1}{\omega}\left([\hat{H}, \hat{a}] + \omega \hat{a}\hat{n}\right) = \frac{1}{\omega}\left(-\omega \hat{a} + \omega \hat{a}\hat{n}\right) = \hat{a}(-1 + \hat{n})
\end{aligned}$$

Επομένως δρώντας πάνω στις ιδιοκαταστάσεις $|\psi\rangle$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\hat{n}\hat{a}^\dagger|n\rangle = \hat{a}^\dagger(1 + \hat{n})|n\rangle = \hat{a}^\dagger(1 + n)|n\rangle = (n + 1)\hat{a}^\dagger|n\rangle \\
\hat{n}\hat{a}|n\rangle = \hat{a}(-1 + \hat{n})|n\rangle = \hat{a}(-1 + n)|n\rangle = (n - 1)\hat{a}|n\rangle
\end{aligned}$$

Άρα:

$$\hat{n}\hat{a}^\dagger|n\rangle = (n + 1)\hat{a}^\dagger|n\rangle \tag{5.26}$$

$$\hat{n}\hat{a}|n\rangle = (n - 1)\hat{a}|n\rangle \tag{5.27}$$

Έτσι όταν δρα ο $\hat{a}^\dagger$ στην κατάσταση $|n\rangle$ δίνει άλλη μια ιδιοκατάσταση του $\hat{n}$ με ιδιοτιμή αυξημένη κατά 1, ενώ όταν δρα ο $\hat{a}$ δίνει ιδιοκατάσταση με ιδιοτιμή μειωμένη κατά 1. Όπως πριν οι τιμές ≥ 0 έτσι μπορεί να ορισθεί η κατάσταση κενού(χαμηλότερη κατάσταση) ικανοποιώντας την:

$$\hat{a}|0\rangle = 0 \tag{5.28}$$

Από αυτήν την κατάσταση κατασκευάζουμε όλες τις υπόλοιπες ιδιοκαταστάσεις με αλλεπάλληλες δράσεις των τελεστών δημιουργίας:

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\hat{a}^\dagger\right)^n|0\rangle \tag{5.29}$$

Ο τελεστής αρίθμησης μετρά τις διεγέρσεις πάνω από την Θεμελιώδη κατάσταση. Το σύνολο των ιδιοκαταστάσεων $|n\rangle$ δρα ως βάση: επομένως κάθε κατάσταση είναι κατάλληλος γραμμικός συνδυασμός των καταστάσεων αυτών. Μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$\hat{a}|n\rangle = \hat{a}\frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\hat{a}^\dagger\right)^n|0\rangle = \hat{a}\hat{a}^\dagger\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{(n-1)!}}\left(\hat{a}^\dagger\right)^{n-1}|0\rangle = \hat{a}\hat{a}^\dagger\frac{1}{\sqrt{n}}|n-1\rangle$$

$$= ([\hat{a},\hat{a}^\dagger] + \hat{a}^\dagger\hat{a})\frac{1}{\sqrt{n}}|n-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}(1+\hat{n})|n-1\rangle = \frac{1+n-1}{\sqrt{n}}|n-1\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$

ομοίως

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \hat{a}^\dagger\frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\hat{a}^\dagger\right)^n|0\rangle = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}}\left(\hat{a}^\dagger\right)^{n+1}|0\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

Επομένως έχουμε ότι:

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \tag{5.30}$$

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \tag{5.31}$$

και η ενεργειακή κατάσταση δίνεται από την 5.15. Η βάση των καταστάσεων επιλέγεται να είναι χρονοανεξάρτητη, έτσι ώστε το φυσικό σύστημα να υπακούει την Εξίσωση Schrodinger η οποία θα περιγράφεται από την κατάσταση:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n e^{-iE_n t}|n\rangle \tag{5.32}$$

με c_n σταθεροί συντελεστές.

5.1.3 Εικόνα Heisenberg

Για να κάνουμε την μετάβαση στην Θεωρεία πεδίου καλό είναι να μεταβούμε από την Εικόνα Schrodinger στην Εικόνα Heisenberg όπου οι καταστάσεις είναι καθορισμένες ενώ εξελίσσονται σύμφωνα με τον χρόνο οι μεταθέτες. Δεδομένου της εξίσωσης Schrodinger, κάθε κατάσταση γράφεται επίσημα ως καθορισμένη αρχική κατάσταση στην οποία δρα ένας χρονικά εξαρτώμενος μοναδιακός τελεστής $U(t)$ ($U^\dagger U = 1$:

$$|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle \tag{5.33}$$

όπου

$$U(t) = e^{-i\int H dt} \tag{5.34}$$

Στην εικόνα του Schrodinger η έκφραση για τον στοιχείο πίνακα ενός χρονοεξαρτώμενου τελεστή A μεταξύ δυο χρονοεξαρτώμενων καταστάσεων $|\psi_1(t)\rangle$, $|\psi_2(t)\rangle$ μπορεί να γραφεί στην εικόνα του Heisenberg στην έκφραση του χρονοεξαρτώμενου τελεστή A(t) σε χρονοανεξάρτητες καταστάσεις:

$$\begin{aligned}\langle\psi_2(t)|A|\psi_1(t)\rangle = \langle U(t)\psi_2(0)|A|U(t)\psi_1(0)\rangle &= \langle\psi_2(0)|U^\dagger(t)AU(t)|\psi_1(0)\rangle \\ &= \langle\psi_2(0)|A(t)|\psi_1(0)\rangle\end{aligned} \tag{5.35}$$

όπου καθαρά έχουμε ότι στην Εικόνα Heisenberg ο τελεστής δίνεται από:

$$A(t) = U^{\dagger}(t) A U(t) \tag{5.36}$$

Αυτός λοιπόν ο τελεστής υπακούει την **Εξίσωση κίνησης Heisenberg**:

$$\frac{dA(t)}{dt} = i[H, A(t)] \tag{5.37}$$

η οποία αντικαθιστά την εξίσωση Schrodinger στην εικόνα αυτή. Για τον Απλό Αρμονικό Ταλαντωτή έχουμε ότι:

$$\frac{d\hat{a}}{dt} = -i\omega\hat{a}, \quad \frac{d\hat{a}^{\dagger}}{dt} = i\omega\hat{a}^{\dagger} \tag{5.38}$$

με λύσεις:

$$\hat{a}(t) = e^{-i\omega t}\hat{a}(0), \quad \hat{a}^{\dagger}(t) = e^{-i\omega t}\hat{a}^{\dagger}(0) \tag{5.39}$$

Έτσι προκύπτει άμεσα ότι:

$$|n\rangle(t) = \hat{a}^{\dagger}(t)\hat{a}(t) = \hat{a}^{\dagger}(0)\hat{a}(0) \tag{5.40}$$

που αντικατοπτρίζει το γεγονός ότι ο τελεστής αρίθμησης διατηρείται!

Αν υποθέσουμε στον ταλαντωτή μας ότι δρα σε αυτόν μια ένα εξωτερικό δυναμικό για κάποιο χρονικό διάστημα δηλαδή:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}\omega^2\hat{x}^2 + \hat{V}_{ext}(t) \tag{5.41}$$

όπου το εξωτερικό δυναμικό εξαφανίζεται έξω από το διάστημα:

$$\hat{V}_{ext}(t) = \begin{cases} 0 & t < t_1 \\ \hat{V}_{ext}(t) & t_1 \leq t \leq t_2 \\ 0 & t > t_2 \end{cases} \tag{5.42}$$

Μπορούμε να πούμε ότι υπάρχει ένα σύνολο από καταστάσεις που έχουν ενεργειακές ιδιοκαταστάσεις σε παλιές στιγμές και δεν θα μοιάζουν καθόλου έτσι στο μέλλον τις καλούμε "καταστάσεις που εισέρχονται" με την ιδιότητα:

$$\hat{n}(t < t_1)|n_{in}\rangle = n|n_{in}\rangle \tag{5.43}$$

Και υπάρχει και ξεχωριστό σύνολο καταστάσεων που θα έχει ενεργειακές ιδιοτιμές σε νεότερες στιγμές, αποκαλούμενες "εξερχόμενες καταστάσεις":

$$\hat{n}(t > t_2)|n_{out}\rangle = n|n_{out}\rangle \tag{5.44}$$

Και τα δυο τα σύνολα υπάρχουν όλες τις στιγμές, αλλά μετατρέπονται σε ενεργειακές ιδιοκαταστάσεις στους κατάλληλους χρόνους(κατάλληλες ασυμπτωτικές περιοχές). Αφού και τα δυο σχηματίζουν μια βάση σε όλο τον χώρο Hillbert, τότε μπορούμε να γράψουμε την μια ως γραμμικό συνδυασμό της άλλης:

$$|n_{out}\rangle = \sum_m \langle m_{in}|n_{out}\rangle |m_{in}\rangle \tag{5.45}$$

Οι μιγαδικοί αριθμοί $\langle m_{in}|n_{out}\rangle$ είναι στοιχεία πίνακα που, κατά κύριο λόγο, υπολογίζονται από την Hamiltonian-ή 5.41, ο πίνακα αυτός αποκαλείται **S-Πίνακας**. Ένας παρατηρητής εφοδιασμένος με έναν τρόπο να ανιχνεύει διεγέρσεις του ταλαντωτή θα μπορούσε να βρει ότι ο αριθμός διεγέρσεων άλλαξε από το εξωτερικό δυναμικό, και ο S-Πίνακας κωδικοποιεί την αναγκαία πληροφορία που χαρακτηρίζει αυτές τις αλλαγές μεταξύ του ασυμπτωτικού παρελθόντος και ασυμπτωτικού μέλλοντος. Στην σωματιδιακή φυσική τον ρόλο του εξωτερικού δυναμικού τον παίζουν οι αλληλεπιδράσεις των σωματιδίων σε περιγραφή των τροχιών το ρόλο του εξωτερικού δυναμικού τον παίζει η καμπυλότητας του Χωρόχρονου.

5.1.4 Κβαντική Στατιστική

Τα τελευταία πορίσματα της στατιστικής μηχανικής μας δίνουν ότι η Πιθανότητα p_rγια κάποιο σωματίδιο να βρίσκεται σε μια κατάσταση με ενέργεια ϵ_r είναι:

$$p_r \propto e^{-\beta\epsilon_r} \tag{5.46}$$

όπου $\beta = (Tk_B)^{-1}$ και T είναι η θερμοκρασία και k_B η σταθερά Boltzmann. Για να βρούμε την σταθερά κανονικοποίησης C της πιθανότητας πρέπει να αθροίζουμε σε όλες τις πιθανές καταστάσεις:

$$1 = \sum_{r=1}^{\infty} p_r = \sum_{r=1}^{\infty} Ce^{-\beta\epsilon_r} = C\sum_{r=1}^{\infty} e^{-\beta\epsilon_r} \Leftrightarrow C = \left(\sum_{r=1}^{\infty} e^{-\beta\epsilon_r}\right)^{-1}$$

Επομένως :

$$p_r = \frac{e^{-\beta\epsilon_r}}{\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\beta\epsilon_k}} \tag{5.47}$$

όπου

$$Z = \sum_{r=1}^{\infty} e^{-\beta\epsilon_r} \tag{5.48}$$

είναι η συνάρτηση επιμερισμού. Η μέση τιμή ενός στατιστικού μεγέθους όπως παραδείγματος χάρη ο αριθμός κατάληψης της κατάστασης s για N καταστάσεις θα γράφεται:

$$\langle n_s\rangle = \frac{\sum_{n_1,n_2,\dots,n_N} n_s e^{-\beta(n_1\epsilon_1+n_2\epsilon_2+\dots+n_N\epsilon_N)}}{\sum_{n_1,n_2,\dots,n_N} e^{-\beta(n_1\epsilon_1+n_2\epsilon_2+\dots+n_N\epsilon_N)}} \tag{5.49}$$

δηλαδή:

$$
\begin{aligned}
\langle n_s \rangle &= \frac{\sum_{n_1,n_2,\dots,n_N} n_s e^{-\beta(n_1\epsilon_1+n_2\epsilon_2+\cdots+n_N\epsilon_N)}}{\sum_{n_1,n_2,\dots,n_N} e^{-\beta(n_1\epsilon_1+n_2\epsilon_2+\cdots+n_N\epsilon_N)}} \\
&= \frac{\left(\sum_{n_s} n_s e^{-\beta n_s\epsilon_s}\right)\cancel{\left(\sum_{n_1,n_2,\dots,n_{s-1},n_{s+1},\dots,n_N} e^{-\beta(n_1\epsilon_1+n_2\epsilon_2+\cdots+n_{s-1}\epsilon_{s-1}+n_{s+1}\epsilon_{s+1}+n_N\epsilon_N)}\right)}}{\left(\sum_{n_s} e^{-\beta n_s\epsilon_s}\right)\cancel{\left(\sum_{n_1,n_2,\dots,n_{s-1},n_{s+1},\dots,n_N} e^{-\beta(n_1\epsilon_1+n_2\epsilon_2+\cdots+n_{s-1}\epsilon_{s-1}+n_{s+1}\epsilon_{s+1}+n_N\epsilon_N)}\right)}}
\end{aligned}
$$

$$
\langle n_s \rangle = \frac{\sum_{n_s} n_s e^{-\beta n_s\epsilon_s}}{\sum_{n_s} e^{-\beta n_s\epsilon_s}} \tag{5.50}
$$

το οποίο γράφεται:

$$
\frac{\sum_{n_s} n_s e^{-\beta n_s\epsilon_s}}{\sum_{n_s} e^{-\beta n_s\epsilon_s}} = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\epsilon_s}\left[ln\left(\sum_{n_s} e^{-\beta n_s\epsilon_s}\right)\right]
$$

όμως το άθροισμα:

$$
\sum_{n_s} e^{-\beta n_s\epsilon_s} = 1 + e^{-\beta\epsilon_s} + e^{-2\beta\epsilon_s} + \cdots = \frac{1}{1-e^{-\beta\epsilon_s}}
$$

επομένως:

$$
\begin{aligned}
\langle n_s \rangle &= -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\epsilon_s}\left[ln\left(\frac{1}{1-e^{-\beta\epsilon_s}}\right)\right] = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\epsilon_s}\left[ln\left(1-e^{-\beta\epsilon_s}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\beta}\frac{\beta e^{-\beta\epsilon_s}}{1-e^{-\beta\epsilon_s}} = \frac{e^{-\beta\epsilon_s}}{1-e^{-\beta\epsilon_s}} = \frac{1}{e^{\beta\epsilon_s}-1}
\end{aligned}
$$

Τελικά

$$
\langle n_s \rangle = \frac{1}{e^{\beta\epsilon_s}-1} \tag{5.51}
$$

που για ενέργεια φωτονίου $\epsilon_s = \hbar\omega_s$ και $\beta = 1/Tk_B$ έχουμε:

$$
\langle n_s \rangle = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{Tk_B}}-1} \tag{5.52}
$$

είναι η Θερμική κατανομή του Planck.

5.2 Κβαντική Θεωρία Πεδίου

Η κβαντική θεωρία πεδίου είναι μια κβαντική θεωρία που αντί για το ζευγάρι θέσης και ορμής η θεωρία αυτή προάγει σε τελεστές το ζευγάρι πεδίο και γενικευμένη ορμή, έπειτα η θεωρία αυτή χτίζεται όμοια με μια κβαντική θεωρία.

5.2.1 Κβαντική Θεωρία Πεδίου σε Επίπεδο ΧωρόΧρονο

Ξεκινάμε με την κλασσική Θεωρία Πεδίου, όπου σε αυτήν την περίπτωση το πραγματικό βαθμωτό πεδίο $\phi(x^\mu)$ σε επίπεδο χωρόχρονο όμως σε n-διαστάσεις. Η Δράση είναι το χωροχρονικό ολοκλήρωμα της Lagrangian-ής Πυκνότητας, $S = \int d^n x \mathcal{L}$, και θεωρούμε την Lagrangian-ή πυκνότητα Klein-Gordon σε γενικευμένες n διαστάσεις:

$$\mathcal{L}_{KG} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{5.53}$$

δεν χρειάζεται να λάβουμε υπόψη μας τον συντελεστή στοιχειώδους όγκου $\sqrt{|det(g)|}$ διότι χρησιμοποιούμε αδρανειακές συντεταγμένες Minkowski χώρου με μετρική:

$$ds^2 = -dt^2 + d\mathbf{x}^2 \tag{5.54}$$

όπου το $\mathbf{x}$ είναι σε n-1 διαστάσεις. Τότε προκύπτουν οι εξισώσεις Klein-Gordon από τις εξισώσεις Euler-Lagrange:

$$\Box\phi - m^2\phi = 0 \tag{5.55}$$

Μεταφράζουμε σε Hamiltonian-ή περιγραφή τις παραπάνω εξισώσεις. Η συζυγής ορμή για το πεδίο είναι απλά η παράγωγος της Lagrangian-ής Πυκνότητας σε σχέση με την χρονική παράγωγο του πεδίου:

$$\pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} \tag{5.56}$$

Για την Lagragnian-ή Klein-Gordon είναι:

$$\pi = \dot{\phi} \tag{5.57}$$

Φυσικά, αναφερόμενοι σε χρονική παράγωγο σημαίνει ότι διαλέγουμε συγκεκριμένο αδρανειακό σύστημα: συνεπώς, η Hamiltonian διαδικασία υποχρεωτικά παραβιάζει το αναλλοίωτο του Lorentz. Αν είμαστε προσεκτικοί όμως μπορούμε να έχουμε παρατηρήσιμες ποσότητες που στην προκύπτουσα θεωρία να είναι Αναλλοίωτο κατά Lorentz. Μπορούμε να εκφράσουμε την Hamiltonian-ή μέσω της Hamiltonian-ής πυκνότητας:

$$H = \int d^n x \mathcal{H} \tag{5.58}$$

και τώρα ο μετασχηματισμός Legendre συνδέει την Hamiltonian-ή πυκνότητα με την Lagrangian-ή πυκνότητα:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\phi,\pi) &= \pi\dot{\phi} - \mathcal{L}(\phi,\partial_\mu\phi) \\ &= \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2\end{aligned} \tag{5.59}$$

όπου $(\nabla\phi)^2 = \delta^{ij}(\partial_i\phi)(\partial_j\phi)$. Η αντιστοιχία μεταξύ αυτής της θεωρίας πεδίου και του αρμονικού ταλαντωτή είναι:

η τιμή του πεδίου $\phi(x)$ παίζει τον ρόλο της x

η ορμή του πεδίου $\pi(x)$ αντί της ορμής p

αντί δηλαδή των δυο αριθμών x, p σε κάποια χρονική στιγμή, έχουμε τις τιμές των πεδίων $\phi(x^i), \pi(x^i)$ σε όλον των χώρο σε μια χρονική στιγμή ως αρχική συνθήκη

προκύπτει ένας επιπλέον όρος της κλίσης του πεδίου , ενώ στον αρμονικό ταλαντωτή λείπει ένας τέτοιος όρος, Αλλά ο φορμαλισμός είναι ο ίδιος

Η $\phi(x^\mu)$ *δεν* είναι μια κυματική συνάρτηση, αλλά μια δυναμική μεταβλητή, που γενικεύει τον βαθμό ελευθερίας x στην περίπτωση του αρμονικού ταλαντωτή. Στην εικόνα του Schrodinger για την κβάντωση της θεωρίας πεδίου, θα ορίζαμε μια μιγαδικό συναρτησοειδές $\Psi[\phi(x^\mu)]$, το οποίο θα αναπαριστούσε την πιθανότητα να βρεθεί το πεδίο σε κάθε διαμόρφωση. Αντιθέτως θα χρησιμοποιήσουμε την εικόνα του Heisenberg, έτσι κύριο μέλη μας θα είναι να μετατρέψουμε το πεδίο ϕ σε κβαντικό τελεστή. Έτσι πρέπει να λύσουμε την εξίσωση Klein-Gordon για να βρούμε την μορφή του πεδίου:

$$\phi(x^\mu) = \phi_0 e^{ik^\mu x_\mu} = \phi_0 e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x}} \tag{5.60}$$

η οποία είναι η μορφή του επιπέδου κύματος. Η συχνότητα πρέπει να ικανοποιεί την σχέση διασποράς:

$$\omega^2 = \mathbf{k}^2 + m^2 \tag{5.61}$$

Αυτή η λύση της εξίσωσης μοιάζει πολύ με την λύση του Κβαντικού Ταλαντωτή με την διαφορά όμως ότι η συχνότητα στον Κβαντικό ταλαντωτή είναι μοναδική. Στην Θεωρία πεδίου όμως εμφανίζεται λύση με $\omega = \omega(\mathbf{k})$ δηλαδή ένα σύνολο από παραμετροποίησης από το $\mathbf{k}$ και 2 διαφορετικά πρόσημα λόγω του τετραγώνου.

Ωστόσο, μπορούμε να γράψουμε την πιο γενική λύση σχηματίζοντας ένα πλήρες, ορθοκανονικό σύνολο από Τρόπους ταλάντωσης (Διαφορετικά ω) σε όρους έτσι ώστε κάθε λύση να εκφράζεται από αυτούς. Έτσι για να έχει νόημα το ορθοκανονικό ορίζουμε ένα εσωτερικό γινόμενο στον χώρο των λύσεων της εξίσωσης Klein-Gordon. Παρόλο που οι λύσει από μόνες τους είναι συναρτήσεις του χωρόχρονου, το κατάλληλο εσωτερικό γινόμενο εκφράζεται σαν ολοκλήρωμα σε μια καθορισμένης-στιγμής-Υπερεπιφάνειας Σ_t,

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = -i \int_{\Sigma_t} (\phi_1 \partial_t \phi_2^* - \phi_2^* \partial_t \phi_1) d^{n-1}x \tag{5.62}$$

Μπορούμε να δούμε ότι αυτό το εσωτερικό γινόμενο είναι ανεξάρτητο της υπερεπιφάνειας Σ_t που καλύπτει έναν όγκο V:

$$
\begin{aligned}
\langle\phi_1,\phi_2\rangle_{\Sigma_{t1}} - \langle\phi_1,\phi_2\rangle_{\Sigma_{t2}} &= -i\int_{\Sigma_{t1}\bigcup\Sigma_{t2}}(\phi_1\partial_t\phi_2^* - \phi_2^*\partial_t\phi_1)d^{n-1}x \\
&\text{Χρησιμοποιώντας το γενικευμένο Θεώρημα Stokes} \\
&= -i\int_{V_1\bigcup V_2}\partial_t(\phi_1\partial_t\phi_2^* - \phi_2^*\partial_t\phi_1)d^nx \\
&= -i\cancelto{0}{\int_{V_1\bigcup V_2}(\partial_t\phi_1\partial_t\phi_2^* - \partial_t\phi_2^*\partial_t\phi_1)d^nx} \\
&- i\int_{V_1\bigcup V_2}(\phi_1\partial_t^2\phi_2^* - \phi_2^*\partial_t^2\phi_1)d^nx \\
&= -i\int_{V_1\bigcup V_2}\left[\phi_1\phi_2^*(-m^2+\nabla^2) - \phi_2^*\phi_1(-m^2+\nabla^2)\right]d^nx = 0 \Leftrightarrow
\end{aligned}
$$

$$
\langle\phi_1,\phi_2\rangle_{\Sigma_{t1}} = \langle\phi_1,\phi_2\rangle_{\Sigma_{t2}} \tag{5.63}
$$

Εφαρμόζοντας το εσωτερικό γινόμενο σε δυο επίπεδα κύματα διαφορετικών κυματανυσμάτων παίρνουμε την εξής έκφραση:

$$
\begin{aligned}
\langle e^{ik_1^\mu x_\mu}, e^{ik_2^\mu x_\mu}\rangle &= -i\int_{\Sigma_t}(e^{-i\omega_1 t+i\mathbf{k}_1\mathbf{x}}\partial_t e^{i\omega_2 t-i\mathbf{k}_2\mathbf{x}} - e^{i\omega_2 t-i\mathbf{k}_2\mathbf{x}}\partial_t e^{-i\omega_1 t+i\mathbf{k}_1\mathbf{x}})d^{n-1}x \\
&= (\omega_2+\omega_1)e^{-i(\omega_1-\omega_2)t}\int_{\Sigma_t}e^{i(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\mathbf{x}}d^{n-1}x \\
&= (\omega_2+\omega_1)e^{-i(\omega_1-\omega_2)t}(2\pi)^{n-1}\delta^{(n-1)}(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)
\end{aligned}
$$

έτσι το εσωτερικό γινόμενο εξαφανίζεται εκτός αν έχουμε χωρικό-κυματάνυσμα $\mathbf{k}$, ή ανάλογα συχνότητα ω, ίδιο και για τους δυο τρόπους. Έτσι το ορθοκανονικό σύνολο από Τρόπους δίνονται από:

$$
f_{\mathbf{k}}(x^\mu) = \frac{e^{ik^\mu x_\mu}}{[(2\pi)^{n-1}2\omega]^{1/2}} \tag{5.64}
$$

όπου το k^μ ικανοποιεί την 5.61, έτσι ώστε:

$$
\langle f_{\mathbf{k}_1}, f_{\mathbf{k}_2}\rangle = \delta^{(n-1)}(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2) \tag{5.65}
$$

δεδομένου της σχέσης διασποράς 5.61, το $\mathbf{k}$ καθορίζει τις συχνότητα με το ένα πρόσημο. Η στρατηγική μας θα είναι να επιμένουμε η συχνότητα ω να είναι πάντα θετική συμπεριλαμβανομένου των μιγαδικών συζυγών Τρόπων $f_{\mathbf{k}}^*(x^\mu)$. Οι τρόποι $f_{\mathbf{k}}$ χαρακτηρίζονται ως "Θετικής-Συχνότητας" όταν ικανοποιούν την:

$$
\partial_t f_{\mathbf{k}} = -i\omega f_{\mathbf{k}}, \qquad \omega > 0 \tag{5.66}
$$

ενώ οι $f_{\mathbf{k}}^*$ τρόποι χαρακτηρίζονται ως "Αρνητικής-Συχνότητας" όταν:

$$
\partial_t f_{\mathbf{k}}^* = i\omega f_{\mathbf{k}}^*, \qquad \omega > 0 \tag{5.67}
$$

οι μιγαδικοί συζυγοί Τρόποι είναι ορθογώνιοι στους αρχικούς:

$$\langle f_{\mathbf{k}_1}, f^*_{\mathbf{k}_2} \rangle = 0 \tag{5.68}$$

και ορθοκανονικοί μεταξύ τους αλλά αρνητική νόρμα:

$$\langle f^*_{\mathbf{k}_1}, f^*_{\mathbf{k}_2} \rangle = -\delta^{(n-1)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \tag{5.69}$$

Μαζί, οι τρόποι $f_{\mathbf{k}}$ και $f^*_{\mathbf{k}}$ σχηματίζουν πλήρες σύνολο, με όρους που μπορούμε να αναπτύξουμε πάνω τους κάθε λύση της εξίσωσης Klein-Gordon.

Για να κάνουμε κανονική κβάντωση σε αυτήν την Θεωρία Πεδίου, προάγουμε τις κλασσικές μεταβλητές (τα πεδία και τις συζυγοίς ορμές τους) σε τελεστές που δρουν στον χώρο Hillbert, και επιβάλλουμε κανονικές σχέσεις μετάθεσης σε ίσες-χρονικά Υπερεπιφάνειες:

$$\begin{aligned}
&[\phi(t,\mathbf{x}), \phi(t,\mathbf{x}')] = 0 \\
&[\pi(t,\mathbf{x}), \pi(t,\mathbf{x}')] = 0 \\
&[\phi(t,\mathbf{x}), \pi(t,\mathbf{x}')] = i\delta^{(n-1)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')
\end{aligned} \tag{5.70}$$

Στην Θεωρία πεδίου χρειαζόμαστε να καθορίσουμε ότι το πεδίο και η ορμή του μετατίθενται μεταξύ τους σε όλον τον χώρο: για τον μονοδιάστατο ταλαντωτή αυτό είναι εγγενές, αφού υπάρχει μια συντεταγμένη και μια ορμή, καθένα από τα οποία πρέπει να μετατίθεται με τον εαυτό του. Η συνάρτηση δέλτα υπονοεί ότι οι τελεστές σε ίδιους χρόνους μετατίθενται παντού εκτός όταν συμπίπτουν οι χωρικές συνιστώσες: αυτό το γεγονός πηγάζει από την απαίτηση της αιτιότητας (τελεστές χωρικά διαχωρισμένοι δεν επηρεάζουν ο ένας την δράση του άλλου).

Αφού οι λύσης της Klein-Gordon αναπτύσσονται στου τρόπους ταλάντωσης,

$$\phi(t,\mathbf{x}) = \int d^{n-1}k\, [a(\mathbf{k}) f_{\mathbf{k}}(t,\mathbf{x}) + a^*(\mathbf{k}) f^*_{\mathbf{k}}(t,\mathbf{x})] \tag{5.71}$$

έτσι θα γίνεται και για τον κβαντικό τελεστή πεδίου $\phi(t,\mathbf{x})$, με το να προάγουμε τους συντελεστές των Τρόπων σε τελεστές πεδίου $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}$ και $\hat{a}_{\mathbf{k}}$, έτσι:

$$\phi(t,\mathbf{x}) = \int d^{n-1}k \left[\hat{a}_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}}(t,\mathbf{x}) + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} f^*_{\mathbf{k}}(t,\mathbf{x})\right] \tag{5.72}$$

βάζοντας την ποσότητα αυτή στις σχέσεις μετάθεσης μπορούμε να βρούμε τις σχέσεις μετάθεσης για τους τελεστές $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}$ και $\hat{a}_{\mathbf{k}}$:

$$\begin{aligned}
&[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}] = 0 \\
&[\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'}] = 0 \\
&[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'}] = \delta^{(n-1)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')
\end{aligned} \tag{5.73}$$

Η διαφορά με τις σχέσεις μετάθεσεις του Κβαντικού Ταλαντωτή είναι, προφανώς, ότι υπάρχει ένας άπειρος αριθμός από τέτοιες τελεστές εξαιτίας του $\mathbf{k}$. Οι "Θετικής-Συχνότητας" τρόποι είναι συντελεστές των τελεστών καταστροφής, ενώ οι "Αρνητικής-Συχνότητας" Τρόποι ταλάντωσης είναι συντελεστές των τελεστών δημιουργίας.

Όπως και στον Κβαντικό Ταλαντωτή, χρησιμοποιούμε τους τελεστές δημιουργίας και καταστροφής για να ορίσουμε μια βάση του χώρου Hillbert οι καταστάσεις βάσεις ήτανε οι ιδιοκαταστάσεις του τελεστή αρίθμισης. Η ίδια διαδικασία δουλεύει και για το βαθμωτό πεδίο, με την διαφορά ότι κρατάμε διαφορετικούς αριθμούς διέγερσης για κάθε χωρικό κυματάνυσμα $\mathbf{k}$. Υπάρχει μοναδική κατάσταση κενού $|0\rangle$, που χαρακτηρίζεται από το ότι καταστρέφεται για κάθε $\hat{a}_{\mathbf{k}}$:

$$\hat{a}_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0 \qquad \forall\ \mathbf{k} \tag{5.74}$$

Η κατάσταση με $n_{\mathbf{k}}$ σωμάτια με ίδια ορμή $\mathbf{k}$ δημιουργείται από επαναλαμβανόμενες δράσεις του $\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}$:

$$|n_{\mathbf{k}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_{\mathbf{k}}!}}\left(\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\right)^{n_{\mathbf{k}}}|0\rangle \tag{5.75}$$

ενώ η κατάσταση με n_i διεγέρσεις των διαφορετικών $\mathbf{k}_i$ θα είναι:

$$|n_1, n_2, \ldots, n_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1!, n_2!, \ldots, n_j!}}\left(\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}_1}\right)^{n_{\mathbf{k}_1}}\left(\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}_2}\right)^{n_{\mathbf{k}_2}}\ldots\left(\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}_j}\right)^{n_{\mathbf{k}_j}}|0\rangle \tag{5.76}$$

Δρώντας σε μια τέτοια κατάσταση, οι τελεστές δημιουργίας και καταστροφής θα αλλάζουν τους αριθμούς διέγερσης:

$$\begin{aligned}\hat{a}_{\mathbf{k}_i}|n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots, n_j\rangle &= \sqrt{n_i}|n_1, n_2, \ldots, n_i - 1, \ldots, n_j\rangle \\ \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}_i}|n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots, n_j\rangle &= \sqrt{n_i + 1}|n_1, n_2, \ldots, n_i + 1, \ldots, n_j\rangle\end{aligned} \tag{5.77}$$

Μπορούμε να ορίσουμε τον τελεστή αρίθμησης για κάθε κυματάνυσμα:

$$\hat{n}_{\mathbf{k}} = \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}} \tag{5.78}$$

ο οποίος υπακούει την :

$$\hat{n}_{\mathbf{k}_i}|n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots, n_j\rangle = n_i|n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots, n_j\rangle \tag{5.79}$$

οι καταστάσεις που είναι ιδιοκαταστάσεις του τελεστή αρίθμησης σχηματίζουν μια βάση για όλον τον Hillbert χώρο, γνωστή ως **Βάση Fock**: ο χώρος κατασκευάζεται από άλλη βάση(Fock) αλλά παραμένει ο ίδιος χώρος(Hillbert).

Πώς όμως συμπεριφέρεται ο Χώρος Hilbert κάτω από τους μετασχηματισμούς Lorentz? Αρχικά εκμεταλλευτήκαμε την συμμετρία του χώρου Minkowski χρησιμοποιώντας την απλή λύση των επιπέδων κυμάτων για την εξίσωσης Klein-Gordon. Τώρα θεωρούμε την προώθηση με ταχύτητα $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$, που οδηγεί στον μετασχηματισμό των συντεταγμένων x^{μ}:

$$t' = \gamma t - \gamma\mathbf{v}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}' = \gamma\mathbf{x} - \gamma\mathbf{v}t \tag{5.80}$$

και ο αντίστροφος μετασχηματισμός δίνεται από:

$$t = \gamma t' + \gamma\mathbf{v}\mathbf{x}', \qquad \mathbf{x} = \gamma\mathbf{x}' + \gamma\mathbf{v}t' \tag{5.81}$$

Η χρονική παράγωγος των Τρόπων στο προωθημένο σύστημα θα είναι:

$$\begin{aligned}\partial_{t'} f_{\mathbf{k}} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial t'} \partial_\mu f_{\mathbf{k}} \\ &= \gamma(-i\omega) f_{\mathbf{k}} + \gamma \mathbf{v} \cdot (i\mathbf{k}) f_{\mathbf{k}} \\ &= -i\omega' f_{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

όπου

$$\omega' = \gamma\omega - \gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} \tag{5.82}$$

αυτή είναι, απλά, η συχνότητα στο προωθημένο σύστημα αναφοράς. Καθαρό είναι το γεγονός ότι αν μια κατάσταση που περιγράφει μια συλλογή σωματίων με συγκεκριμένες ορμές προωθείται σε μια κατάσταση που περιγράφει τα ίδια σωμάτια με προωθημένες ορμές. Η συνάρτηση του Τρόπου που ήτανε "Θετικής-Συχνότητα" στο αρχικό σύστημα, είναι ακόμη "Θετική- Συχνότητας" στο καινούριο σύστημα, αλλά με προωθημένη συχνότητα. Σε Minkowskian Χώρο, οι Τρόποι κατηγοριοποιούνται σε "Θετικής- και Αρνητικής-Συχνότητας" σύμφωνα με την χρονική κατεύθυνση, που είναι ένα διάνυσμα Killing. Αφού τα διανύσματα Killing σχετίζονται με τους Μετασχηματισμούς lorentz σε Χώρο Minkowski, επομένως ένας τρόπος που θα είναι Θετικής Συχνότητας σε ένα σύστημα αναφοράς θα είναι πάλι θετικής Συχνότητας σε προωθημένο και οι παρατηρητές θα συμφωνούν στον Αριθμό σωματίων που θα παρατηρούν. Τότε, ο συνολικός τελεστής αρίθμησης και για τα δυο συστήματα συμπίπτει και ειδικότερα η κατάσταση κενού συμπτίπτει.

Μπορούμε να εκφράσουμε την Hamiltonian-ή :

$$H = \int d^{n-1}x \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \right] \tag{5.83}$$

σε όρους τελεστών δημιουργίας και καταστροφής όπως και με τον Κβαντικό Ταλαντωτή. Επομένως παίρνουμε κάθε όρο ξεχωριστά.

$$\begin{aligned}\int d^{n-1}x\phi^2 &= \int d^{n-1}x d^{n-1}k d^{n-1}k' (\hat{a}_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} f^*_{\mathbf{k}})(\hat{a}_{\mathbf{k}'} f_{\mathbf{k}'} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'} f^*_{\mathbf{k}'}) \\ &= \int d^{n-1}x d^{n-1}k d^{n-1}k' (\hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}'} f_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}'} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}'} f^*_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}'} \\ &\qquad + \hat{a}_{\mathbf{k}'}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'} f_{\mathbf{k}} f^*_{\mathbf{k}'} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'} f^*_{\mathbf{k}} f^*_{\mathbf{k}'})\end{aligned}$$

Επομένως υπολογίζουμε κάθε όρο χωριστά και έχουμε:

$$\begin{aligned}\int d^{n-1}x d^{n-1}k' \hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}'} f_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}'} &= \int d^{n-1}x d^{n-1}k' \hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}'} \frac{e^{-i(\omega+\omega')t} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{x}}}{2(2\pi)^{n-1}\sqrt{\omega\omega'}} \\ &= \int d^{n-1}k' \hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}'} \frac{e^{-i(\omega+\omega')t}}{2\sqrt{\omega\omega'}} \delta^{(n-1)}(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \\ &= \hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{-\mathbf{k}} \frac{e^{-2i\omega t}}{2\omega}\end{aligned}$$

$$\int d^{n-1}xd^{n-1}k'\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}'}f^*_{\mathbf{k}}f_{\mathbf{k}'} = \int d^{n-1}xd^{n-1}k'\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}'}\frac{e^{-i(-\omega+\omega')t}e^{i(-\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{x}}}{2(2\pi)^{n-1}\sqrt{\omega\omega'}}$$
$$= \int d^{n-1}k'\hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}'}\frac{e^{-i(-\omega+\omega')t}}{2\sqrt{\omega\omega'}}\delta^{(n-1)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$$
$$= \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}}\frac{1}{2\omega}$$

$$\int d^{n-1}xd^{n-1}k'\hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'}f_{\mathbf{k}}f^*_{\mathbf{k}'} = \int d^{n-1}xd^{n-1}k'\hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'}\frac{e^{-i(\omega-\omega')t}e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{x}}}{2(2\pi)^{n-1}\sqrt{\omega\omega'}}$$
$$= \int d^{n-1}k'\hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}'}\frac{e^{-i(\omega-\omega')t}}{2\sqrt{\omega\omega'}}\delta^{(n-1)}(-\mathbf{k}+\mathbf{k}')$$
$$= \hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\frac{1}{2\omega}$$

$$\int d^{n-1}xd^{n-1}k'\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'}f^*_{\mathbf{k}}f^*_{\mathbf{k}'} = \int d^{n-1}xd^{n-1}k'\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'}\frac{e^{i(\omega+\omega')t}e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{x}}}{2(2\pi)^{n-1}\sqrt{\omega\omega'}}$$
$$= \int d^{n-1}k'\hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}'}\frac{e^{i(\omega+\omega')t}}{2\sqrt{\omega\omega'}}\delta^{(n-1)}(\mathbf{k}+\mathbf{k}')$$
$$= \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}^\dagger_{-\mathbf{k}}\frac{e^{2i\omega t}}{2\omega}$$

Επομένως συνολικά ο όρος του δυναμικού είναι:

$$\frac{1}{2}m^2\int d^{n-1}x\phi^2 = \int d^{n-1}k\frac{m^2}{4\omega}\left[\hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{-\mathbf{k}}e^{-2i\omega t} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}^\dagger_{-\mathbf{k}}e^{2i\omega t}\right] \tag{5.84}$$

Για τον κινητικό όρο έχουμε ότι :

$$\dot{\phi} = \hat{a}_{\mathbf{k}}\dot{f}_{\mathbf{k}} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\dot{f}^*_{\mathbf{k}} = i\omega(-\hat{a}_{\mathbf{k}}f_{\mathbf{k}} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}f^*_{\mathbf{k}})$$
$$\nabla\phi = \hat{a}_{\mathbf{k}}(\nabla f_{\mathbf{k}}) + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}(\nabla f^*_{\mathbf{k}}) = ik(\hat{a}_{\mathbf{k}}f_{\mathbf{k}} - \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}f^*_{\mathbf{k}})$$

Επομένως έχουμε για τον κινητικό όρο με χρονική παράγωγο:

$$\int d^{n-1}x\dot{\phi}^2 = \int d^{n-1}xd^{n-1}kd^{n-1}k'(-\omega\omega')(-\hat{a}_{\mathbf{k}}f_{\mathbf{k}} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}f^*_{\mathbf{k}})(-\hat{a}_{\mathbf{k}'}f_{\mathbf{k}'} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'}f^*_{\mathbf{k}'})$$
$$= \int d^{n-1}xd^{n-1}kd^{n-1}k'(-\omega\omega')(\hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}'}f_{\mathbf{k}}f_{\mathbf{k}'} - \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}'}f^*_{\mathbf{k}}f_{\mathbf{k}'}$$
$$- \hat{a}_{\mathbf{k}'}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'}f_{\mathbf{k}}f^*_{\mathbf{k}'} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'}f^*_{\mathbf{k}}f^*_{\mathbf{k}'})$$

Παίρνοντας κάθε όρο χωριστά πάλι έχουμε:

$$\int d^{n-1}xd^{n-1}k'(-\omega\omega')\hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}'}f_{\mathbf{k}}f_{\mathbf{k}'} = \int d^{n-1}xd^{n-1}k'(-\omega\omega')\hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}'}\frac{e^{-i(\omega+\omega')t}e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{x}}}{2(2\pi)^{n-1}\sqrt{\omega\omega'}}$$
$$= \int d^{n-1}k'(-\omega\omega')\hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}'}\frac{e^{-i(\omega+\omega')t}}{2\sqrt{\omega\omega'}}\delta^{(n-1)}(\mathbf{k}+\mathbf{k}')$$
$$= (-\omega^2)\hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{-\mathbf{k}}\frac{e^{-2i\omega t}}{2\omega}$$
$$= \frac{-\omega}{2}\hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{-\mathbf{k}}e^{-2i\omega t}$$

$$\begin{aligned}
\int d^{n-1}xd^{n-1}k'(\omega\omega')\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}'}f^*_{\mathbf{k}}f_{\mathbf{k}'} &= \int d^{n-1}xd^{n-1}k'(\omega\omega')\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}'}\frac{e^{-i(-\omega+\omega')t}e^{i(-\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{x}}}{2(2\pi)^{n-1}\sqrt{\omega\omega'}} \\
&= \int d^{n-1}k'(\omega\omega')\hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}'}\frac{e^{-i(-\omega+\omega')t}}{2\sqrt{\omega\omega'}}\delta^{(n-1)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \\
&= (\omega^2)\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}}\frac{1}{2\omega} \\
&= \frac{\omega}{2}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int d^{n-1}xd^{n-1}k'(\omega\omega')\hat{a}_{\mathbf{k}'}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'}f_{\mathbf{k}}f^*_{\mathbf{k}'} &= \int d^{n-1}xd^{n-1}k'(\omega\omega')\hat{a}_{\mathbf{k}'}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'}\frac{e^{-i(\omega-\omega')t}e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{x}}}{2(2\pi)^{n-1}\sqrt{\omega\omega'}} \\
&= \int d^{n-1}k'(\omega\omega')\hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}'}\frac{e^{-i(\omega-\omega')t}}{2\sqrt{\omega\omega'}}\delta^{(n-1)}(-\mathbf{k}+\mathbf{k}') \\
&= (\omega^2)\hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\frac{1}{2\omega} \\
&= \frac{\omega}{2}\hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int d^{n-1}xd^{n-1}k'(-\omega\omega')\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'}f^*_{\mathbf{k}}f^*_{\mathbf{k}'} &= \int d^{n-1}xd^{n-1}k'(-\omega\omega')\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'}\frac{e^{i(\omega+\omega')t}e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{x}}}{2(2\pi)^{n-1}\sqrt{\omega\omega'}} \\
&= \int d^{n-1}k'(-\omega\omega')\hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}'}\frac{e^{i(\omega+\omega')t}}{2\sqrt{\omega\omega'}}\delta^{(n-1)}(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \\
&= (-\omega^2)\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}^\dagger_{-\mathbf{k}}\frac{e^{2i\omega t}}{2\omega} \\
&= \frac{-\omega}{2}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}^\dagger_{-\mathbf{k}}e^{2i\omega t}
\end{aligned}$$

Τελικά για τον κινητικό όρο με χρονική παράγωγο:

$$\frac{1}{2}\int d^{n-1}x\dot{\phi}^2 = \frac{1}{2}\int d^{n-1}k\frac{\omega^2}{2\omega}\left[-\hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{-\mathbf{k}}e^{-2i\omega t} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}} - \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}^\dagger_{-\mathbf{k}}e^{2i\omega t}\right] \tag{5.85}$$

Ενώ για τον κινητικό όρο με παράγωγο-κλίσης έχουμε:

$$\begin{aligned}
\int d^{n-1}x(\nabla\phi)^2 &= \int d^{n-1}xd^{n-1}kd^{n-1}k'(-kk')(\hat{a}_{\mathbf{k}}f_{\mathbf{k}} - \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}f^*_{\mathbf{k}})(\hat{a}_{\mathbf{k}'}f_{\mathbf{k}'} - \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'}f^*_{\mathbf{k}'}) \\
&= \int d^{n-1}xd^{n-1}kd^{n-1}k'(-kk')(\hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}'}f_{\mathbf{k}}f_{\mathbf{k}'} - \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}'}f^*_{\mathbf{k}}f_{\mathbf{k}'} \\
&\qquad - \hat{a}_{\mathbf{k}'}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'}f_{\mathbf{k}}f^*_{\mathbf{k}'} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'}f^*_{\mathbf{k}}f^*_{\mathbf{k}'})
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\int d^{n-1}x(\nabla\phi)^2 = \frac{1}{2}\int d^{n-1}k\left(\frac{\mathbf{k}^2}{2\omega}\right)\left[\hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{-\mathbf{k}}e^{-2i\omega t} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}^\dagger_{-\mathbf{k}}e^{2i\omega t}\right] \tag{5.86}$$

Αθροίζοντας τους όρους της Hamiltonian-ής και χρησιμοποιώντας για τους τελευταίους όρους την σχέση $\omega^2 = \mathbf{k}^2 + m^2$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2}\int d^{n-1}k \left[\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\right]\omega \\
&= \frac{1}{2}\int d^{n-1}k \left[2\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}} - \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\right]\omega \\
&= \frac{1}{2}\int d^{n-1}k \left(2\hat{n}_{\mathbf{k}} + [\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}]\right)\omega \\
&= \int d^{n-1}k \left[\hat{n}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2}\delta^{(n-1)}(\mathbf{k}-\mathbf{k})\right]\omega
\end{aligned}$$

$$H = \int d^{n-1}k \left[\hat{n}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2}\delta^{(n-1)}(0)\right]\omega \tag{5.87}$$

Όπως περιμέναμε, οι ενεργειακές ιδιοκαταστάσεις θα είναι εκείνες με καθορισμένο αριθμό από διεγέρσεις, που κάθε μία θα κουβαλάει και μια ενέργεια ω. Οι διεγέρσεις της βάσης Fock ερμηνεύονται ως σωματίδια. Έτσι γεννιούνται τα σωμάτια στην Κβαντική Θεωρεία πεδίου: οι ενεργειακές ιδιοκαταστάσεις είναι μια συλλογή από σωμάτια με καθορισμένες ορμές. Ο όρος $\delta^{(n-1)}(0)$ παράγει έναν απειρισμό στην Hamiltonian-ή, όμως δεν μας πειράζει διότι εμάς μας ενδιαφέρει μόνο διαφορές ενεργειών. Ωστόσο ο όρος αυτός είναι ανάλογος της θεμελιώδους Ενέργειας του Κβαντικού Ταλαντωτή.

5.2.2 Κβαντική Θεωρία Πεδίου σε Καμπύλο ΧωρόΧρονο

Γενικεύουμε την Θεωρεία μας με το να αντικαθιστούμε την κανονική παράγωγο με την συναλλοίωτη (την εκφράζουμε σε αναλλοίωτη μορφή κάτω από συντεταγμένες) και απαιτούμε να είναι αληθινές στον καμπύλο χωρόχρονο. Ξεκινάμε με την Lagrangian-ή Πυκνότητα:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left(-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \xi R\phi^2\right) \tag{5.88}$$

εκτός από τον προφανή λόγο της ρίζας όπου $g = det(g)$ εισάγαμε και την απευθείας σύζευξη με τον βαθμωτό καμπυλότητας Ricci R, που παραμετροποιείται από την σταθερά ξ. Η επιλογή μας εδώ θα είναι το **Minimal Coupling**, δηλαδή:

$$\xi = 0 \tag{5.89}$$

Ύστερα κβαντώνουμε την θεωρία μας. Η συζυγής ορμή είναι:

$$\pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla_0\phi)} \tag{5.90}$$

που για την Lagrangian-ή 5.88 γίνεται:

$$\pi = \sqrt{-g}\nabla_0\phi = \sqrt{-g}\partial_0\phi = \sqrt{-g}\dot{\phi} \tag{5.91}$$

Απαιτούμε τις σχέσεις μετάθεσης:

$$
\begin{aligned}
&[\phi(t,\mathbf{x}),\phi(t,\mathbf{x}')] = 0\\
&[\pi(t,\mathbf{x}),\pi(t,\mathbf{x}')] = 0\\
&[\phi(t,\mathbf{x}),\pi(t,\mathbf{x}')] = \frac{i}{\sqrt{-g}}\delta^{(n-1)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')
\end{aligned}
\tag{5.92}
$$

η εξίσωση κίνησης του βαθμωτού πεδίου γίνεται:

$$\Box\phi - m^2\phi - \xi R\phi = 0 \tag{5.93}$$

Εδώ το τετράγωνο έχει ορισμό: $\Box = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$. Για μια χωρική υπερεπιφάνεια Σ με επαγώμενη μετρική γ_{ij} και με μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα n^μ, το εσωτερικό γινόμενο για τις λύσεις δίνεται από:

$$\langle\phi_1,\phi_2\rangle = -i\int_\Sigma(\phi_1\nabla_\mu\phi_2^* - \phi_2^*\nabla_\mu\phi_1)n^\mu\sqrt{-\gamma}d^{n-1}x \tag{5.94}$$

Το οποίο είναι ανεξάρτητο επιλογής του Σ.

$$
\begin{aligned}
\langle\phi_1,\phi_2\rangle_{\Sigma_1} - \langle\phi_1,\phi_2\rangle_{\Sigma_2} &= -i\int_{\Sigma_1\bigcup\Sigma_2}(\phi_1\nabla_\mu\phi_2^* - \phi_2^*\nabla_\mu\phi_1)n^\mu\sqrt{|\gamma|}d^{n-1}x\\
&= -i\int_{V_1\bigcup V_2}\nabla^\mu(\phi_1\nabla_\mu\phi_2^* - \phi_2^*\nabla_\mu\phi_1)\sqrt{|g|}d^n x
\end{aligned}
$$

όμως η συναλλοίωτη παράγωγος για βαθμωτά γίνεται κανονική παράγωγος, επομένως η ολοκληρωταία ποσότητα γίνεται:

$$
\begin{aligned}
\nabla^\mu(\phi_1\partial_\mu\phi_2^* - \phi_2^*\partial_\mu\phi_1) &= \nabla^\mu\phi_1\partial_\mu\phi_2^* - \nabla^\mu\phi_2^*\partial_\mu\phi_1 + \phi_1\nabla^\mu\partial_\mu\phi_2^* - \phi_2^*\nabla^\mu\partial_\mu\phi_1\\
&= \cancel{\partial^\mu\phi_1\partial_\mu\phi_2^*} - \cancel{\partial_\mu\phi_2^*\partial^\mu\phi_1} + \phi_1\nabla^\mu\nabla_\mu\phi_2^* - \phi_2^*\nabla^\mu\nabla_\mu\phi_1\\
&= \phi_1\Box\phi_2^* - \phi_2^*\Box\phi_1\\
&= \phi_1(m^2+\xi R)\phi_2^* - \phi_2^*(m^2+\xi R)\phi_1 = 0
\end{aligned}
$$

Επομένως το ολοκλήρωμα είναι μηδέν. Άρα:

$$\langle\phi_1,\phi_2\rangle_{\Sigma_1} = \langle\phi_1,\phi_2\rangle_{\Sigma_2} \tag{5.95}$$

Έπειτα για να συνεχίσουμε την διαδικασία Κβάντωσης πρέπει να ορίσουμε “Θετικης- και Αρνητικής- Συχνότητας” Τρόπους για να αναπτύξουμε τις Λύσεις μας. Επειδή ο Καμπύλος χωρόχρονος **δεν διέπεται από τις συμμετρίες που προσφέρουν οι μετασχηματισμοί Poincare**, παρά μόνον από τις Περιστροφές Lorentz, τότε δεν θα υπάρχει κάποιο χρονοειδές διάνυσμα Killing εν γένει παντού, δεν θα μπορούμε να βρούμε λύσεις που να χωρίζονται σε χρονοανεξάρτητους και χωροανεξάρτητους όρους, και έτσι δεν θα μπορούμε να κατηγοριοποιήσουμε σε Θετικής- και Αρνητικής- Συχνότητας Τρόπους. Μπορούμε να ορίσουμε ένα σύνολο Βάσης από Τρόπους, αλλά το πρόβλημα είναι ότι **θα υπάρχουν γενικά πολλά τέτοια σύνολα βάσης και δεν θα υπάρχει τρόπος να προτιμήσουμε το ένα από το άλλο**, και έτσι να προκύπτει ότι η **έννοια του κενού και του τελεστή αρίθμησης να εξαρτάται από το σύνολο βάσης των Τρόπων που διαλέγουμε**.

Θεωρούμε έναν χωρόχρονο που ασυμπτωτικά είναι επίπεδος και διαχωρίζεται σε τρεις περιοχές. Στην πρώτη περιοχή είναι επίπεδος και διέπεται από ένα ορισμένο Τρόπο f που καθορίζει τον αριθμό των εισερχόμενων σωματίων, μια δεύτερη περιοχή που είναι καμπύλου χωρόχρονου και μια τρίτη περιοχή που είναι πάλι επίπεδη και χαρακτηρίζεται από έναν διαφορετικό Τρόπο g που καθορίζει τον αριθμό των εξερχόμενων σωματίων. Για να δούμε τι συμβαίνει, λοιπόν, αναλύουμε μαθηματικά το θέμα. Διαλέγουμε, λοιπόν, ένα πλήρες ορθοκανονικό σύνολο βάσης Τρόπων με Θετική-Συχνότητα $\{f_i\}$ της 5.93.

$$\langle f_j, f_{j'} \rangle = \delta_{jj'} \tag{5.96}$$

Τότε το $\{f_i^*\}$ θα είναι το πλήρες σύνολο Αρνητική-Συχνότητας.

$$\langle f_j^*, f_{j'}^* \rangle = -\delta_{jj'} \tag{5.97}$$

και επίσης:

$$\langle f_j, f_{j'}^* \rangle = 0 \tag{5.98}$$

Τότε το σύνολο $\{f_j, f_j^*\}$ σχηματίζει ένα πλήρες σύνολο λύσεων της 5.93 εξίσωσης κύματος σε όρους που θα μπορούμε να αναπτύξουμε μια αυθαίρετη λύση. Γράφουμε, λοιπόν, τον τελεστή ϕ ως άθροισμα από τελεστές δημιουργίας και καταστροφής

$$\phi = \sum_j \left(\hat{a}_j f_j + \hat{a}_j^\dagger f_j^* \right) \tag{5.99}$$

όπου ο δείκτης j μπορεί να είναι συνεχής ή διακριτός. Αντικαθιστούμε στους κανόνες μετάθεσης 5.92 και παίρνουμε για τους τελεστές δημιουργίας και καταστροφής:

$$\begin{aligned} [\hat{a}_j, \hat{a}_{j'}] &= 0 \\ [\hat{a}_j^\dagger, \hat{a}_{j'}^\dagger] &= 0 \\ [\hat{a}_j, \hat{a}_{j'}^\dagger] &= \delta_{jj'} \end{aligned} \tag{5.100}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσης μετάθεσης των τελεστών δημιουργίας και καταστροφής και τις σχέσεις ορθοκανονικότητας των Τρόπων πρέπει να ικανοποιούνται οι σχέσεις 5.92, απόδειξη:

$$\begin{aligned} [\phi, \phi'] &= [\sum_j \left(a_j f_j + a_j^\dagger f_j^* \right), \sum_{j'} \left(a_{j'} f_{j'} + a_{j'}^\dagger f_{j'}^* \right)] \Leftrightarrow \\ [\phi, \phi'] &= \sum_{jj'} \left(\cancelto{0}{[a_j, a_{j'}]} f_j f_{j'} + [a_j, a_{j'}^\dagger] f_j f_{j'}^* + [a_j^\dagger, a_{j'}] f_j^* f_{j'} + \cancelto{0}{[a_j^\dagger, a_{j'}^\dagger]} f_j^* f_{j'}^* \right) \Leftrightarrow \\ [\phi, \phi'] &= \sum_{jj'} \left(\delta_{jj'} f_j f_{j'}^* - \delta_{jj'} f_j^* f_{j'} \right) = \sum_j \left(f_j f_j^* - f_j^* f_j \right) = 0 \Leftrightarrow \\ [\phi, \phi'] &= 0 \end{aligned} \tag{5.101}$$

$$
\begin{aligned}
&[\pi,\pi'] = [(\sqrt{-g}i\omega)\sum_j \left(a_j^\dagger f_j^* - a_j f_j\right), (\sqrt{-g}i\omega')\sum_{j'} \left(a_{j'}^\dagger f_{j'}^* - a_{j'} f_{j'}\right)] \Leftrightarrow \\
&[\pi,\pi'] = (-g\omega\omega')\sum_{jj'} \left(\cancelto{0}{[a_j,a_{j'}]} f_j f_{j'} - [a_j,a_{j'}^\dagger] f_j f_{j'}^* - [a_j^\dagger,a_{j'}] f_j^* f_{j'} + \cancelto{0}{[a_j^\dagger,a_{j'}^\dagger]} f_j^* f_{j'}^*\right) \Leftrightarrow \\
&[\pi,\pi'] = (-g\omega\omega')\sum_{jj'} \left(-\delta_{jj'} f_j f_{j'}^* + \delta_{jj'} f_j^* f_{j'}\right) \Leftrightarrow \\
&[\pi,\pi'] = 0
\end{aligned}
\tag{5.102}
$$

και

$$
\begin{aligned}
&[\phi,\pi'] = [\phi,\sqrt{-g}\dot{\phi}] = \sqrt{-g}[\sum_j \left(a_j f_j + a_j^\dagger f_j^*\right), \sum_{j'} \left(a_{j'} \dot{f}_{j'} + a_{j'}^\dagger \dot{f}_{j'}^*\right)] \Leftrightarrow \\
&[\phi,\pi'] = \sum_{jj'} \sqrt{-g}\left([a_j,a_{j'}] f_j \dot{f}_{j'} + [a_j,a_{j'}^\dagger] f_j \dot{f}_{j'}^* + [a_j^\dagger,a_{j'}] f_j^* \dot{f}_{j'} + [a_j^\dagger,a_{j'}^\dagger] f_j^* \dot{f}_{j'}^*\right) \Leftrightarrow \\
&[\phi,\pi'] = \sum_{jj'} \sqrt{-g}\left([a_j,a_{j'}^\dagger] f_j \dot{f}_{j'}^* + [a_j^\dagger,a_{j'}] f_j^* \dot{f}_{j'}\right) = -ii\sum_{jj'} \sqrt{-g}\left(\delta_{jj'} f_j \dot{f}_{j'}^* - \delta_{jj'} f_j^* \dot{f}_{j'}\right) \Leftrightarrow \\
&[\phi,\pi'] = \frac{i}{\sqrt{-g}}\delta_{jj'}
\end{aligned}
\tag{5.103}
$$

Έτσι θα υπάρχει μια κατάσταση Κενού $|0_f\rangle$ που θα καταστρέφεται από τους τελεστές καταστροφής:

$$\hat{a}_j|0_f\rangle = 0 \ \forall \ j \tag{5.104}$$

Από αυτήν την κατάσταση κενού ορίζουμε μια ολόκληρη βάση Fock για τον χώρο Hillbert. Όπως πριν, μια κατάσταση με $n_f j$ διεγέρσεις δημιουργείται από επαναλαμβανόμενες δράσης του τελεστή δημιουργίας $\hat{a}_j^\dagger$:

$$|n_{\mathbf{k}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_{\mathbf{k}}!}}\left(\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger\right)^{n_{\mathbf{k}}}|0_f\rangle \tag{5.105}$$

και ομοίως για κάθε διέγερση μπορούμε να ορίσουμε τον τελεστή αρίθμησης για κάθε Τρόπο:

$$\hat{n}_{fj} = \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j \tag{5.106}$$

Ο δείκτης f μας θυμίζει ότι έχουμε να κάνουμε με το σύνολο των τρόπων f_j.

Εφόσον οι Τρόποι δεν είναι μοναδικοί μπορούμε να ορίσουμε ένα εναλλακτικό σύνολο τρόπων g_j με τις ιδιότητες που έχουν και οι αρχικοί μας τρόποι, συμπεριλαμβανομένου των συζυγών τρόπων (g_j^*) που να σχηματίζουν βάση για έναν αυθαίρετο τελεστή πεδίου:

$$\phi = \sum_j \left(\hat{b}_j g_j + \hat{b}_j^\dagger g_j^*\right) \tag{5.107}$$

Υπάρχουν πάλι τελεστές δημιουργίας και καταστροφή $\hat{b}_j$,$\hat{b}_j^\dagger$ που ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης:

$$\begin{aligned}
[\hat{b}_j, \hat{b}_{j'}] &= 0 \\
[\hat{b}_j^\dagger, \hat{b}_{j'}^\dagger] &= 0 \\
[\hat{b}_j, \hat{b}_{j'}^\dagger] &= \delta_{jj'}
\end{aligned} \tag{5.108}$$

και θα υπάρχει μια κατάσταση κενού $|0_g\rangle$ που θα καταστρέφεται από τον τελεστή καταστροφής:

$$\hat{b}_j|0_g\rangle = 0 \ \forall \ j \tag{5.109}$$

Πάλι κατασκευάζεται βάση Fock και με επαναλαμβανόμενες δράσης του τελεστή δημιουργίας πάνω στο κενό και έτσι αναπαρίστανται οι διεγέρσεις του συστήματος. Επίσης ορίζεται ο τελεστής αρίθμησης:

$$\hat{n}_{gj} = \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j \tag{5.110}$$

Αυτό λοιπόν που χάσαμε από την μετάβαση από τον επίπεδο στον καμπύλο χώρο είναι το γεγονός ότι δεν μπορούμε να διαλέξουμε μοναδικό Τρόπο για την περιγραφή μιας αυθαίρετης λύσης. Στην γενική περίπτωση λοιπόν θεωρούμε έναν παρατηρητή που να ορίζει τα σωμάτια με το σύνολο των εισερχόμενων Τρόπων f_j και έναν άλλον με το σύνολο των εξερχόμενων Τρόπων g_j, τυπικά θα διαφωνούν για το πόσα σωμάτια παρατηρεί ο καθένας. Για να φανεί αυτό αναπτύσσουμε το ένα είδος Τρόπου στο άλλο:

$$\begin{aligned}
f_i &= \sum_j \left(\alpha_{ij} g_j + \beta_{ij} g_j^*\right) \\
g_i &= \sum_j \left(\alpha_{ij}^* f_j - \beta_{ij} f_j^*\right)
\end{aligned} \tag{5.111}$$

ο μετασχηματισμός από το ένα σύνολο στο άλλο είναι γνωστός ως **μετασχηματισμός Bogolubov**, οι πίνακες α_{ij} και β_{ij} ονομάζονται **συντελεστές Bogolubov**. Μπορούμε να αποδείξουμε ότι:

$$\langle f_j, f_{j'}\rangle = \delta_{jj'} \Leftrightarrow \delta_{jj'} = i\int d^{n-1}x n^\mu \left(f_{j'}^* \partial_\mu f_j - f_j \partial_\mu f_{j'}^*\right) = i\int d\Sigma^\mu \left(f_{j'}^* \partial_\mu f_j - f_j \partial_\mu f_{j'}^*\right)$$

$$\delta_{jj'} = i\int d\Sigma^\mu \sum_{kl} \left([\alpha_{j'l}^* g_l^* + \beta_{j'l}^* g_l]\partial_\mu[\alpha_{jk} g_k + \beta_{jk} g_k^*] - [\alpha_{jk} g_k + \beta_{jk} g_k^*]\partial_\mu[\alpha_{j'l}^* g_l^* + \beta_{j'l}^* g_l]\right)$$

Το εσωτερικό του αθροίσματος γίνεται:

$$\begin{aligned}
&= \alpha_{j'l}^*\alpha_{jk} g_l^* \partial_\mu g_k + \alpha_{j'l}^*\beta_{jk} g_l^* \partial_\mu g_k^* + \beta_{j'l}^*\alpha_{jk} g_l \partial_\mu g_k + \beta_{j'l}^*\beta_{jk} g_l \partial_\mu g_k^* \\
&\quad - \alpha_{jk}\alpha_{j'l}^* g_k \partial_\mu g_l^* - \alpha_{jk}\beta_{j'l}^* g_k \partial_\mu g_l - \beta_{jk}\alpha_{j'l}^* g_k^* \partial_\mu g_l^* - \beta_{jk}\beta_{j'l}^* g_k^* \partial_\mu g_l \\
&= \alpha_{j'l}^*\alpha_{jk}\left[g_l^* \partial_\mu g_k - g_k \partial_\mu g_l^*\right] + \alpha_{j'l}^*\beta_{jk}\left[g_l^* \partial_\mu g_k^* - g_k^* \partial_\mu g_l^*\right] \\
&\quad + \beta_{j'l}^*\alpha_{jk}\left[g_l \partial_\mu g_k - g_k \partial_\mu g_l\right] + \beta_{j'l}^*\beta_{jk}\left[g_l \partial_\mu g_k^* - g_k^* \partial_\mu g_l\right]
\end{aligned}$$

Επομένως έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\delta_{jj'} &= i\int d\Sigma^\mu \sum_{kl}\left(\alpha^*_{j'l}\alpha_{jk}\left[g_l^*\partial_\mu g_k - g_k\partial_\mu g_l^*\right] + \alpha^*_{j'l}\beta_{jk}\left[g_l^*\partial_\mu g_k^* - g_k^*\partial_\mu g_l^*\right]\right)\\
&+ i\int d\Sigma^\mu \sum_{kl}\left(\beta^*_{j'l}\alpha_{jk}\left[g_l\partial_\mu g_k - g_k\partial_\mu g_l\right] + \beta^*_{j'l}\beta_{jk}\left[g_l\partial_\mu g_k^* - g_k^*\partial_\mu g_l\right]\right)\\
&= \sum_{kl}\left(\alpha^*_{j'l}\alpha_{jk}\langle g_k, g_l^*\rangle + \alpha^*_{j'l}\beta_{jk}\langle g_k^*, g_l\rangle + \beta^*_{j'l}\alpha_{jk}\langle g_k, g_l^*\rangle + \beta^*_{j'l}\beta_{jk}\langle g_k^*, g_l^*\rangle\right)\\
&= \sum_{kl}\left(\alpha^*_{j'l}\alpha_{jk}\delta_{kl} + \alpha^*_{j'l}\beta_{jk}\cdot 0 + \beta^*_{j'l}\alpha_{jk}\cdot 0 + \beta^*_{j'l}\beta_{jk}(-\delta_{kl})\right)\\
&= \sum_{kl}\left(\alpha^*_{j'l}\alpha_{jk}\delta_{kl} - \beta^*_{j'l}\beta_{jk}\delta_{kl}\right)\\
&= \sum_{k}\left(\alpha^*_{j'k}\alpha_{jk} - \beta^*_{j'k}\beta_{jk}\right) \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

Που τελικά μας μένει ότι:

$$\delta_{jj'} = \sum_k \left(\alpha^*_{j'k}\alpha_{jk} - \beta^*_{j'k}\beta_{jk}\right) \tag{5.112}$$

ομοίως αποδεικνύεται ότι:

$$0 = \sum_k \left(\alpha_{jk}\beta_{j'k} - \beta_{jk}\alpha_{j'k}\right) \tag{5.113}$$

Αφού ορίζοντας τον τελεστή $\phi\overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu\psi = \psi^*\partial_\mu\phi - \phi\partial_\mu\psi^*$έχουμε

$$\begin{aligned}
&0 = \langle f_i, f_j^*\rangle \Leftrightarrow 0 = i\int d\Sigma^\mu f_j \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu f_i \Leftrightarrow\\
&0 = i\int d\Sigma^\mu \sum_{kl}\left[(\alpha_{jk}g_k + \beta_{jk}g_k^*)\overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu(\alpha_{il}g_l + \beta_{il}g_l^*)\right]\\
&0 = i\int d\Sigma^\mu \sum_{kl}\left[\alpha_{jk}\alpha_{il}g_k\overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu g_l + \alpha_{jk}\beta_{il}g_k\overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu g_l^* + \beta_{jk}\alpha_{il}g_k^*\overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu g_l + \beta_{jk}\beta_{il}g_k^*\overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu g_l^*\right]\\
&0 = \sum_{kl}\left[\alpha_{jk}\alpha_{il}\cancelto{0}{\langle g_l, g_k^*\rangle} + \alpha_{jk}\beta_{il}\langle g_l^*, g_k^*\rangle + \beta_{jk}\alpha_{il}\langle g_l, g_k\rangle + \beta_{jk}\beta_{il}\cancelto{0}{\langle g_l^*, g_k\rangle}\right]\\
&0 = \sum_{kl}\left[\alpha_{jk}\beta_{il}(-\delta_{lk} + \beta_{jk}\alpha_{il}\delta_{lk}\right]\\
&0 = \sum_{l}\left[-\alpha_{jl}\beta_{il} + \beta_{jl}\alpha_{il}\right]
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την ορθοκανονικότητα των συναρτήσεων των Τρόπων μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\alpha_{ij} &= \langle f_i, g_j\rangle\\
\beta_{ij} &= -\langle f_i, g_j^*\rangle
\end{aligned} \tag{5.114}$$

Μπορούμε να το αποδείξουμε αυτό ως εξής, θεωρούμε $g_i = \sum_j \left(c_{ij} f_j + d_{ij} f_j^*\right)$:

$$
\begin{aligned}
\langle f_i, g_j \rangle &= \sum_{j'} \langle f_i, c_{ij'} f_{j'} + d_{ij'} f_{j'}^* \rangle = \sum_{j'} (c_{ij'} \langle f_i, f_{j'} \rangle + d_{ij'} \langle f_i, f_{j'}^* \rangle) \\
\langle f_i, g_j \rangle &= \sum_{j'} c_{ij'} \delta_{jj'} = c_{ij} \text{ όμως} \\
\langle f_i, g_j \rangle &= \sum_{j'} \langle \alpha_{ij'} g_{j'} + \beta_{ij'} g_{j'}^*, g_j \rangle = \sum_{j'} (\alpha_{ij'} \langle g_{j'} | g_j \rangle + \beta_{ij'} \langle g_{j'}^*, g_j \rangle) \\
\langle f_i, g_j \rangle &= \sum_{j'} \alpha_{ij'} \delta_{jj'} = \alpha_{ij} \\
\text{άρα} \quad & c_{ij} = \alpha_{ij} = \langle f_i, g_j \rangle
\end{aligned}
$$

ομοίως δείχνουμε:

$$
\begin{aligned}
\langle f_i, g_j^* \rangle &= \sum_{j'} \langle f_i, c_{ij'}^* f_{j'}^* + d_{ij'}^* f_{j'} \rangle = \sum_{j'} (c_{ij'}^* \langle f_i, f_{j'}^* \rangle + d_{ij'}^* \langle f_i, f_{j'} \rangle) \\
\langle f_i, g_j^* \rangle &= \sum_{j'} d_{ij'} \delta_{jj'} = d_{ij} \text{ όμως} \\
\langle f_i, g_j^* \rangle &= \sum_{j'} \langle \alpha_{ij'} g_{j'} + \beta_{ij'} g_{j'}^*, g_j^* \rangle = \sum_{j'} (\alpha_{ij'} \langle g_{j'}, g_j^* \rangle + \beta_{ij'} \langle g_{j'}^*, g_j^* \rangle) \\
\langle f_i, g_j^* \rangle &= \sum_{j'} \beta_{ij'} (-\delta_{jj'}) = -\beta_{ij} \\
\text{άρα} \quad & d_{ij} = -\beta_{ij} = \langle f_i, g_j^* \rangle
\end{aligned}
$$

Επίσης εφόσον $\hat{a}_i = \langle \phi, f_i \rangle$ και $\hat{b}_i = \langle \phi, g_i \rangle$ μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$
\hat{a}_i = \sum_k \left(\alpha_{ik}^* \hat{b}_k - \beta_{ik}^* \hat{b}_k^\dagger \right) \tag{5.115}
$$

$$
\hat{b}_k = \sum_i \left(\alpha_{ik} \hat{a}_i + \beta_{ik}^* \hat{a}_i^\dagger \right) \tag{5.116}
$$

Απόδειξη:

$$
\begin{aligned}
\hat{a}_i = \langle \phi, f_i \rangle = i \int d\Sigma^\mu (f_i^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi) &= i \int d\Sigma^\mu \sum_{kj} \left[(\alpha_{ik}^* g_k^* + \beta_{ik}^* g_k) \overleftrightarrow{\partial}_\mu (\hat{b}_j g_j + \hat{b}_j^\dagger g_j^*) \right] \\
= \sum_{kj} i \int d\Sigma^\mu & \left[\alpha_{ik}^* \hat{b}_j g_k^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu g_j + \alpha_{ik}^* \hat{b}_j^\dagger g_k^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu g_j^* + \beta_{ik}^* \hat{b}_j g_k \overleftrightarrow{\partial}_\mu g_j + \beta_{ik}^* \hat{b}_j^\dagger g_k \overleftrightarrow{\partial}_\mu g_j^* \right] \\
= \sum_{kj} & \left[\alpha_{ik}^* \hat{b}_j \langle g_j, g_k \rangle + \alpha_{ik}^* \hat{b}_j^\dagger \cancelto{0}{\langle g_j^*, g_k \rangle} + \beta_{ik}^* \hat{b}_j \cancelto{0}{\langle g_j, g_k^* \rangle} + \beta_{ik}^* \hat{b}_j^\dagger \langle g_j^*, g_k^* \rangle \right] \\
= \sum_{kj} & \left[\alpha_{ik}^* \hat{b}_j \delta_{jk} + \beta_{ik}^* \hat{b}_j^\dagger (-\delta_{jk}) \right] = \sum_k \left[\alpha_{ik}^* \hat{b}_k - \beta_{ik}^* \hat{b}_k^\dagger \right]
\end{aligned}
$$

ομοίως:

$$\begin{aligned}
\hat{b}_k = \langle \phi, g_i \rangle = i \int d\Sigma^\mu g_i^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi &= i \int d\Sigma^\mu \sum_{jk} \Big[(\alpha_{ij} f_j^* - \beta_{ij}^* f_j) \overleftrightarrow{\partial}_\mu (\hat{a}_k f_k + \hat{a}_k^\dagger f_k^*) \Big] \\
&= \sum_{jk} i \int d\Sigma^\mu \Big[\alpha_{ij} \hat{a}_k f_j^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu f_k + \alpha_{ij} \hat{a}_k^\dagger f_j^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu f_k^* - \beta_{ij}^* \hat{a}_k f_j \overleftrightarrow{\partial}_\mu f_k - \beta_{ij}^* \hat{a}_k^\dagger f_j \overleftrightarrow{\partial}_\mu f_k^* \Big] \\
&= \sum_{jk} \Big[\alpha_{ij} \hat{a}_k \langle f_k, f_j \rangle + \alpha_{ij} \hat{a}_k^\dagger \cancelto{0}{\langle f_k^*, f_j \rangle} - \beta_{ij}^* \hat{a}_k \cancelto{0}{\langle f_k | f_j^* \rangle} - \beta_{ij}^* \hat{a}_k^\dagger \langle f_k^* | f_j^* \rangle \Big] \\
&= \sum_{jk} \Big[\alpha_{ij} \hat{a}_k \delta kj - \beta_{ij}^* \hat{a}_k^\dagger (-\delta_{kj}) \Big] = \sum_k \Big[\alpha_{ik} \hat{a}_k + \beta_{ik}^* \hat{a}_k^\dagger \Big]
\end{aligned}$$

Τώρα μπορούμε να υποθέσουμε το γεγονός ότι όταν το σύστημα είναι στην κατάσταση κενού-f $|0_f\rangle$ δεν παρατηρούνται f-σωμάτια, αλλά θα θέλαμε να γνωρίσουμε πόσα σωμάτια ένας παρατηρητής παρατηρητή που χρησιμοποιεί g-Τρόπους. Γιαυτόν τον λόγο υπολογίζουμε την αναμενόμενη τιμή του τελεστή αρίθμησης-g που δρα πάνω στο κενό-f:

$$\begin{aligned}
\langle 0_f | \hat{n}_{gi} | 0_f \rangle &= \langle 0_f | \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i | 0_f \rangle \\
&= \langle 0_f | \sum_j \Big(\alpha_{ji}^* \hat{a}_j^\dagger + \beta_{ji} \hat{a}_j \Big) \sum_k \Big(\alpha_{ki} \hat{a}_k + \beta_{ki}^* \hat{a}_k^\dagger \Big) | 0_f \rangle \\
&= \sum_{jk} \langle 0_f | \Big(\alpha_{ji}^* \hat{a}_j^\dagger + \beta_{ji} \hat{a}_j \Big) \Big(\alpha_{ki} \hat{a}_k + \beta_{ki}^* \hat{a}_k^\dagger \Big) | 0_f \rangle \\
&= \sum_{jk} \langle 0_f | \alpha_{ji}^* \alpha_{ki} \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_k + \alpha_{ji}^* \beta_{ki}^* \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_k^\dagger + \beta_{ji} \alpha_{ki} \hat{a}_j \hat{a}_k + \beta_{ji} \beta_{ki}^* \hat{a}_j \hat{a}_k^\dagger | 0_f \rangle \\
&= \sum_{jk} \langle 0_f | \beta_{ji} \beta_{ki}^* \hat{a}_j \hat{a}_k^\dagger | 0_f \rangle = \sum_{jk} \beta_{ji} \beta_{ki}^* \langle 0_f | \hat{a}_j \hat{a}_k^\dagger | 0_f \rangle \\
&= \sum_{jk} \beta_{ji} \beta_{ki}^* \langle 0_f | \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_k + \delta_{jk} | 0_f \rangle = \sum_{jk} \beta_{ji} \beta_{ki}^* \delta_{jk} \langle 0_f | 0_f \rangle \\
&= \sum_j \beta_{ji} \beta_{ji}^* = \sum_j |\beta_{ji}|^2
\end{aligned}$$

$$\langle 0_f | \hat{n}_{gi} | 0_f \rangle = \sum_j |\beta_{ji}|^2 \tag{5.117}$$

Εάν δηλαδή κάποιοι από τους συντελεστές είναι μη μηδενικοί, δηλαδή αν προκύψουν ανάμεικτες Θετικής- και Αρνητικής- Συχνότητας Λύσεις, τότε γεννιούνται σωματίδια στο κενό-f που παρατηρεί ο παρατηρητής με τρόπο-g.

5.3 Ακτινοβολία Hawking

Τώρα μετά από πολύ κόπο είμαστε σε θέση να αναπτύξουμε το φαινόμενο της **Ακτινοβολίας Hawking**. Κλασσικά δείξαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο ότι οι μελανές οπές μόνο “ρουφούν”αντικείμενα εξαιτίας του ορίζοντα γεγονότων που παγιδεύει όλα τα εισερχόμενα αντικείμενα και κανένα από αυτά δεν μπορεί να αποδράσει. Στο κεφάλαιο αυτό θα περιγράψουμε πως το Φαινόμενο της Ακτινοβολίας Hawking που περιγράφει πως οι Μελανές Οπές ακτινοβολούν σωματίδια με θερμική κατανομή Planck σύμφωνα με την κβαντική στατιστική. Μια προσπάθεια ερμηνείας του φαινομένου Hawking είναι μέσω του Φαινόμενου Unruh το οποίο εξηγεί πως ένας επιταχυνόμενος Παρατηρητής στο κενό θα λούζεται από σωμάτια θερμοκρασίας ίδιας με εκείνης της ακτινοβολίας Hawking με την διαφορά ότι η επιφανειακή βαρύτητα αντικαθίσταται από την επιτάχυνση τους παρατηρητή, το οποίο φαινόμενο δεν θα εξετάσουμε εδώ.

5.3.1 Φαινόμενο Hawking

Η πιο απλούστατη περίπτωση είναι να θεωρήσουμε ένα άμαζο βαθμωτό πεδίο στον χωρόχρονο Schwarzschild. Θεωρούμε ότι η μαύρη τρύπα έχει σχηματιστεί κάποια στιγμή στο παρελθόν με βαρυτική κατάρρευση. Το διάγραμμα ενός καταρρέοντος αστεριού (σχηματισμός Μαύρης Τρύπας) αναπαρίσταται στο σχήμα 5.1. Αυτό όχι μόνο είναι εφικτό αλλά και αποφεύγουμε το πρόβλημα των συνοριακών συνθηκών στον Παρελθοντικό Ορίζοντα που θα προέκυπτε αν θεωρούσαμε ολόκληρο τον χωρόχρονο Schwarzschild.

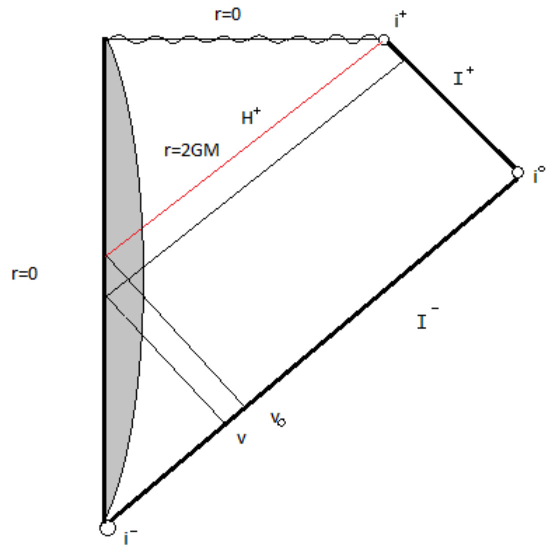
Θεωρούμε ότι καθόλου σωμάτια δεν παρουσιάζονται πριν αρχίσει η κατάρρευση. Σε αυτήν την περίπτωση, η κβαντική κατάσταση του κενού είναι η $|\psi\rangle = |0_{in}\rangle$. Οι εισερχόμενοι-Τρόποι $f_{\omega lm}$, είναι καθαρής Θετικής-Συχνότητας στον $\mathcal{I}^-$, έτσι $f_{\omega lm} \propto e^{-i\omega v}$ καθώς $v \to -\infty$, όπου $v = t + r^*$ είναι η προηγμένη χρονική συντεταγμένη. Ομοίως, οι εξερχόμενοι-Τρόποι $g_{\omega lm}$ είναι καθαρής Θετικής-Συχνότητας στον $\mathcal{I}^+$, έτσι $g_{\omega lm} \propto e^{-i\omega u}$ καθώς $u \to +\infty$ όπου $u = t - r^*$ είναι η καθυστερημένη χρονική συντεταγμένη. Έτσι βρίσκουμε τις σχέσεις μεταξύ των δυο συνόλων με σκοπό να υπολογίσουμε τους συντελεστές Bogoliubov και να καθορίσουμε την παραγωγή σωματίων. Ευτυχώς, δεν χρειάζεται να λύσουμε την κυματική εξίσωση $g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi = 0$ για τους Τρόπους παντού στον χωρόχρονο για να καθορίσουμε τους συντελεστές Bogoliubov. Ενδιαφερόμαστε για εκπομπή σωματίων σε καθυστερημένους χρόνους(πολύ μετά την κατάρρευση).

Αυτοί κυριαρχούνται από Τρόπους που έφυγαν από το $\mathcal{I}^-$ με πολύ μεγάλη συχνότητα (μικρό ν), διαδόθηκαν μέσα από το καταρρεόμενο σώμα μόλις πριν σχηματιστεί ο ορίζοντας, και τότε υπέστησαν ένα μεγάλο redshift στον δρόμο τους για το $\mathcal{I}^+$. Επειδή οι τρόποι είχαν μια τεράστια Συχνότητα κατά την διάρκεια του περάσματος από το σώμα, μπορούμε να περιγράψουμε την διάδοσή τους με χρήση της *γεωμετρικής οπτικής*.

Μια $v =$*σταθερά* εισερχόμενη ακτίνα περνά μέσα από το σώμα και μετατρέπεται σε $u =$*σταθερά* εξερχόμενη ακτίνα, όπου $u = g(v)$, ή ισοδύναμα, $v = g^{-1}(u) \equiv G(u)$. Σύμφωνα με *προσέγγιση γεωμετρικής οπτικής* οδηγούμαστε στην ακόλουθη ασυμπτωτική μορφή των Τρόπων:

$$f_{\omega lm} \sim \frac{Y_{lm}(\theta,\phi)}{r\sqrt{4\pi\omega}} \times \begin{cases} e^{-i\omega v}, & \text{στον } \mathcal{I}^- \\ e^{-i\omega G(u)}, & \text{στον } \mathcal{I}^+ \end{cases} \tag{5.118}$$

$$g_{\omega lm} \sim \frac{Y_{lm}(\theta,\phi)}{r\sqrt{4\pi\omega}} \times \begin{cases} e^{-i\omega u}, & \text{στον } \mathcal{I}^+ \\ e^{-i\omega g(v)}, & \text{στον } \mathcal{I}^- \end{cases} \tag{5.119}$$



Σχήμα 5.1: Το διάγραμμα Penrose του χωρόχρονου της μαύρης τρύπας σχηματίζεται από βαρυτική κατάρρευση. Οι σκιασμένες περιοχές είναι το εσωτερικό του καταρρεόντος σώματος, η γραμμή $r = 0$ στα αριστερά είναι η κοσμική γραμμή του κέντρου του σώματος, η γραμμή $r = 0$ στην κορυφή του διαγράμματος είναι η απροσδιοριστία της καμπυλότητας, και H^+ είναι ο Μελλοντικός Ορίζοντας Γεγονότων. Μια εισερχόμενη φωτεινή ακτίνα με $v < v_0$ από το $\mathcal{I}^-$ περνά μέσα από το σώμα και δραπετεύει στο I^+ σαν μια u =σταθερά φωτεινή ακτίνα. Οι εισερχόμενες ακτίνες με $v > v_0$ δεν δραπετεύουν από τον ορίζοντα και διαδοχικά καταφθάνουν στην απροσδιοριστία.

όπου $Y_{lm}(\theta, \phi)$ είναι οι γνωστές σφαιρικές αρμονικές. Σύμφωνα με τον Hawking έχουμε ένα γενικό επιχείρημα για την διαδρομή της ακτίνας που οδηγεί στο γεγονός ότι

$$u = G(v) = -4GMln\left(\frac{v - v_0}{K}\right) \text{ ή} \tag{5.120}$$

$$v = g(u) = v_0 - Ke^{-u/4GM} \tag{5.121}$$

όπου M είναι η μάζα της Μελανής Οπής, K μια σταθερά και v_0 είναι η οριακή τιμή του v για την οποία οι ακτίνες περνούν από το σώμα πριν σχηματιστεί ο ορίζοντας. Η εξαγωγή εδώ όμως θα γίνει στην ειδική περίπτωση του λεπτού κελύφους. Ο χωρόχρονος μέσα στο κέλυφος είναι επίπεδος και περιγράφεται από την μετρική:

$$ds^2 = -dT^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{5.122}$$

Έτσι, στο εσωτερικό, μπορούμε να κάνουμε τον εξής μετασχηματισμό:

$$V = T + r \quad \text{και} \quad U = T - r \tag{5.123}$$

που είναι οι φωτοειδής συντεταγμένες και είναι σταθερές σε εισερχόμενες και εξερχόμενες ακτίνες, αντίστοιχα. Στο εξωτερικό του κελύφους περιγράφουμε τον χωρόχρονο σύμφωνα με Schwarzschild μετρική:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \qquad (5.124)$$

Όπως έχει σημειωθεί και νωρίτερα, οι φωτοειδείς συντεταγμένες εδώ είναι οι $v = t + r^*$ και $u = t - r^*$, όπου

$$r^* = r + 2GMln\left(\frac{r}{2GM} - 1\right) \qquad (5.125)$$

είναι οι "συντεταγμένη χελώνας". Έστω r=R(t) περιγράφει την ιστορία του κελύφους. Η μετρική σε τρισδιάστατη υπερεπιφάνεια πρέπει να είναι ίδια και για τις δυο μεριές τους κελύφους.(Η εσωτερική γεωμετρία πρέπει να ταιριάζει). Αυτό οδηγεί για σταθερά στερεά διαφορική γωνία στην συνθήκη:

$$\left.\begin{array}{r} \frac{ds^2_{ins}}{dT^2} = -1 + \frac{dR^2}{dT^2} \\ \frac{ds^2_{out}}{dT^2} = -\left(\frac{R-2GM}{R}\right)\frac{dt^2}{dT^2} + \left(\frac{R-2GM}{R}\right)^{-1}\frac{dR^2}{dT^2} \end{array}\right\} \overset{\frac{ds^2_{ins}}{dT^2} = \frac{ds^2_{out}}{dT^2}}{\Leftrightarrow}$$

$$1 - \left(\frac{dR}{dT}\right)^2 = \left(\frac{R-2GM}{R}\right)\left(\frac{dt}{dT}\right)^2 - \left(\frac{R-2GM}{R}\right)^{-1}\left(\frac{dR}{dT}\right)^2 \qquad (5.126)$$

Υπάρχει και μια δεύτερη συνθήκη επαφής, η οποία λέει ότι η εξωτερική γεωμετρία κάθε μεριάς πρέπει να ταιριάζει στην υπερεπιφάνεια. Αυτό οδηγεί στον προσδιορισμό του όρου $R(t)$ σε όρους του τανυστή Ενέργειας-Ορμής. Για τους σκοπούς μας όμως, η εξίσωση αυτή δεν χρειάζεται, και μπορούμε να θεωρήσουμε μια αυθαίρετη ιστορία ακτίνας $R(t)$.

Υπάρχουν τώρα τρεις ακόμη συνθήκες που πρέπει να προσδιοριστούν:

1. Η σχέση μεταξύ των τιμών των φωτοειδών συντεταγμένων v και V για εισερχόμενες ακτίνες.

2. Η σχέση μεταξύ των V και U στο κέντρο του κέλυφους.

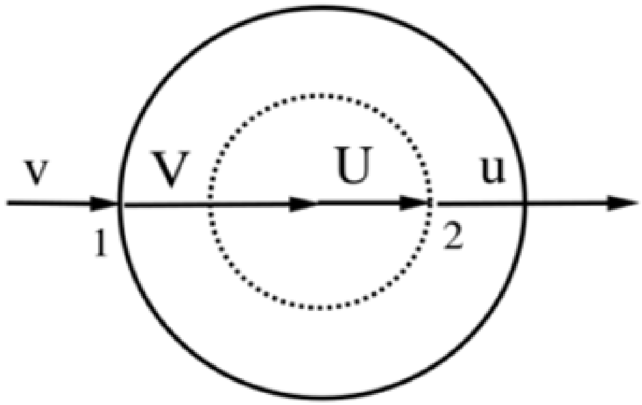
3. Η σχέση μεταξύ των U και u για τις εξερχόμενες ακτίνες.

Αυτή η αλληλουχία των σχέσεων αντικατοπτρίζεται στο σχήμα 5.2.

Βήμα 1 Θεωρούμε ότι οι φωτοειδής ακτίνες μπαίνουν στο κέλυφος σε ακτίνα R_1, που είναι πεπερασμένα μεγαλύτερη του Ορίζοντα Γεγονότων $2GM$. Σε αυτό το σημείο, τα $1-(R/2GM)$ και dR/dT είναι πεπερασμένα και προσεγγιστικά σταθερά. Έτσι και το dt/dT είναι προσεγγιστικά σταθερό και τότε $t = CT$. Ομοίως, η r^* είναι γραμμική συνάρτηση του r ($r^* = Dr$) στην γειτονιά του $r = R_1$. Έτσι, συμπεράνουμε ότι:

$$V(v) = C^{-1}t + D^{-1}r = av + b \qquad (5.127)$$

σε μια γειτονιά του $v = v_0$ και όπου a, b, C, D αυθαίρετες σταθερές.



Σχήμα 5.2: Μια εισερχόμενη ακτίνα μπαίνει στον καταρρεόμενο κέλυφος (κύκλος 1), παιρνά από την αρχή (r=0) και βγαίνει σαν μια εξερχόμενη ακτίνα από τον κύκλο 2, που είναι η συρρικνωμένη ακτίνα. Οι εν λόγω ακτίνες είναι καταρρέοντα και εκρύγνοντα σφαιρικά κελύφη φωτός. Εικόνα παρμένη από το [7]

Βήμα 2 Το ταίριασμα των φωτοειδών συντεταγμένων στο κέντρο του κελύφους είναι πολύ απλό. Επειδή $V = T + r$ και $U = T - r$ για $r = 0$:

$$U(V) = V \tag{5.128}$$

Βήμα 3 Τώρα θεωρούμε ότι η ακτίνα εξέρχεται από το κέλυφος. Ενδιαφερόμαστε για ακτίνες που βγαίνουν όταν το R είναι κοντά στο 2GM. Έστω T_0 να είναι ο χρόνος στο R=2GM. (Σημειώστε ότι αυτό συμβαίνει σε πεπερασμένο χρόνο όπως το βλέπει ένας παρατηρητής στο εσωτερικό του κέλυφους.) Τότε κοντά στο $T = T_0$:

$$R(T) \approx 2GM + A(T_0 - T) \tag{5.129}$$

όπου A μια σταθερά. Αν εισάγουμε αυτήν την προσεγγιστική ακτίνα στην συνθήκη 5.126 παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\frac{R-2GM}{R}\left(\frac{dt}{dT}\right)^2 &= \left(\frac{R-2GM}{R}\right)^{-1}\left(\frac{dR}{dT}\right)^2 + [1-\left(\frac{dR}{dT}\right)^2] \\
\Leftrightarrow \left(\frac{dt}{dT}\right)^2 &= \left(\frac{R-2GM}{R}\right)^{-2}\left(\frac{dR}{dT}\right)^2 + [1-\left(\frac{dR}{dT}\right)^2]\cancelto{0}{\left(\frac{R-2GM}{R}\right)^{-1}} \text{ κοντά στο 2GM} \Leftrightarrow \\
\left(\frac{dt}{dT}\right)^2 &\approx \left(\frac{R-2GM}{R}\right)^{-2}\left(\frac{dR}{dT}\right)^2 = \left(\frac{2GM + A(T_0-T) - 2GM}{2GM + A(T_0-T)}\right)^{-2}(-A)^2 \\
&= A^2\left(\frac{A(T_0-T)}{2GM + \cancelto{0}{A(T_0-T)}}\right)^{-2} \text{ κοντά στο 2GM}
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{dt}{dT}\right)^2 \approx \frac{(2GM)^2}{(T_0-T)^2} \tag{5.130}$$

που υπονοεί ότι:

$$t \sim -2GMln\left(\frac{T_0 - T}{B}\right), \quad T \to T_0 \tag{5.131}$$

Ομοίως, καθώς $T \to T_0$, έχουμε ότι:

$$r^* \sim 2GMln\left(\frac{r - 2GM}{2GM}\right) \sim 2GMln\left[\frac{A(T_0 - T)}{2GM}\right] \tag{5.132}$$

και τότε συνεπάγεται ότι:

$$u = t - r^* \sim -4GM\ ln\left(\frac{T_0 - T}{B'}\right) \text{ ή } T = T_0 - B'e^{-u/4GM} \tag{5.133}$$

όπου B, B' σταθερές.Ώστόσο σε αυτό το όριο έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} U = T - r = T - R(T) \sim (1 + A)T - 2GM - AT_0 \\ \sim (1 + A)T \sim (1 + A)B'e^{-u/4GM} \end{aligned}$$

$$U \sim Le^{-u/4GM} \tag{5.134}$$

όπου L μια σταθερά. Τα αποτελέσματά αυτά είναι ίδια με εκείνα του Hawking αν κάνουμε τον παρακάτω υπολογισμό:

$$\begin{aligned} V = U \Leftrightarrow av + b &= (1 + A)T - 2M - AT_0 \\ &\overset{b=-v_0}{=} av - v_0 = (1 + A)T - (2M + AT_0) \\ &\overset{a=1+A \text{ και } v_0=2M+AT_0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} v = T \\ v_0 \propto T_0 \end{cases} \\ &\overset{B' \to K}{\Rightarrow} u = -4GM\ ln\left(\frac{v_0 - v}{K}\right) \end{aligned}$$

και επομένως

$$v = v_0 - Ke^{-u/(4GM)}$$

Σχόλιο Παρόλο που η προσέγγισή μας είναι ειδική για λεπτό κέλυφος μπορούμε να αντιληφθούμε ότι αυτό γενικεύεται διότι η κρίσιμη λογαριθμική εξάρτηση που κυβερνά την ασυμπτωτική μορφή του $u(v)$ έρχεται από το τελευταίο βήμα του ταιριάσματος. Αυτό το βήμα αντικατοπτρίζει το μεγάλο redshift που βιώνει η εξερχόμενη ακτίνα όταν περνά από μέσα από το καταρρεόμενο σώμα, που είναι ουσιαστικά ανεξάρτητο από την εσωτερική γεωμετρία. Μπορούμε να φανταστούμε ότι χωρίζουμε ένα γενικά σφαιρικό αστέρι σε συνεχόμενε στρώσεις από καταρρεόμενα κελύφη. Καθώς οι φωτοειδής ακτίνες μπαίνουν και βγαίνουν από κάθε κέλυφος κάθε φωτοειδής συντεταγμένη θα είναι μια γραμμική εξάρτηση από την επόμενη, μέχρι να φτάσουμε στην έξοδο από το τελευταίο κέλυφος. Σε αυτό το σημείο, η καθυστερημένης χρονική συντεταγμένη u στο εξωτερικού του χωρόχρονου είναι λογαριθμικής συνάρτηση των προηγούμενων συντεταγμένων, και έτσι προκύπτει μια λογαριθμική συνάρτηση του v όπως δίνεται από την 5.120.

Από την 5.121 μπορούμε να δούμε ότι οι εξερχόμενοι-Τρόποι, όταν ανατρέξουμε πίσω στο $\mathcal{I}^-$, έχει την μορφή:

$$g_{\omega lm} \sim \begin{cases} e^{4GMi\omega \ ln[(v_0-v)/K]}, & v < v_0 \\ 0, & v > v_0 \end{cases} \tag{5.135}$$

μπορούμε να βρούμε τους συντελεστές Bogoliubov με το να μετασχηματίζουμε μέσω Fourier την συνάρτηση:

$$g_{\omega lm} = \int_0^{+\infty} d\omega' \left(\alpha^*_{\omega'\omega lm} f_{\omega' lm} - \beta_{\omega'\omega lm} f^*_{\omega' lm}\right) \tag{5.136}$$

εδώ χρησιμοποιήσαμε τον συμβολισμό $\alpha_{\omega'\omega lm} = \alpha_{\omega' lm,\omega lm}$ και $\beta_{\omega'\omega lm} = \beta_{\omega' lm,\omega lm}$, ο οποίος είναι συμβατός με το γεγονός ότι η εξάρτηση από τις γωνιακές συντεταγμένες πρέπει να είναι ίδιος για κάθε όρο της παραπάνω εξίσωσης. Έτσι, εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμός Fourier:

$$\alpha^*_{\omega'\omega lm} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \int_{-\infty}^{v_0} dv e^{i\omega' v} e^{4GMi\omega \ ln[(v_0-v)/K]} \tag{5.137}$$

και

$$\beta_{\omega'\omega lm} = -\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \int_{-\infty}^{v_0} dv e^{-i\omega' v} e^{4GMi\omega \ ln[(v_0-v)/K]} \tag{5.138}$$

ή ισοδύναμα:

$$\alpha^*_{\omega'\omega lm} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} e^{i\omega v_0} \int_0^{+\infty} dv' e^{-i\omega' v'} e^{4GMi\omega \ ln[v'/K]} \tag{5.139}$$

και

$$\beta_{\omega'\omega lm} = -\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} e^{i\omega v_0} \int_0^{+\infty} dv' e^{i\omega' v'} e^{4GMi\omega \ ln[v'/K]} \tag{5.140}$$

όπου $v' = v_0 - v$.

Και τα δυο παραπάνω ολοκληρώματα είναι αναλυτικά παντού εκτός από τον αρνητικό πραγματικό άξονα του Μιγαδικού χώρου, όπου το brunch cut της λογαριθμική συνάρτησης εμφανίζεται. Έτσι:

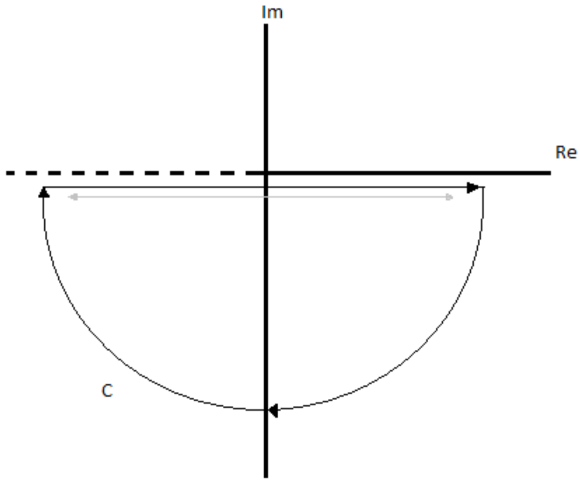
$$\oint_C dv' e^{-i\omega' v'} e^{4GMi\omega \ ln[v'/K]} = 0 \tag{5.141}$$

όπου η ολοκλήρωση γίνεται γύρω από την κλειστή καμπύλη C όπως παριστάνεται στο σχήμα 5.3. Μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} dv' e^{-i\omega' v'} e^{4GMi\omega \ ln[v'/K]} &= -\lim_{\epsilon\to 0} \int_0^{+\infty} dv' e^{i\omega' v'} e^{4GMi\omega \ ln[-v'/K - i\epsilon]} \\ &= -e^{4\pi GM\omega} \int_0^{+\infty} dv' e^{i\omega' v'} e^{4GMi\omega \ ln[v'/K]} \end{aligned} \tag{5.142}$$

όπου στο πρώτο βήμα χρησιμοποιήσαμε την 5.141 και την αλλαγή μεταβλητής $v' \to -v'$. Στο δεύτερο βήμα χρησιμοποιήσαμε την σχέση:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon\to 0} ln[-v'/K - i\epsilon] &= \lim_{\epsilon\to 0} ln[(v'/K + i\epsilon)(-1)] = ln[(v'/K] + ln[-1] \\ &= ln[v'/K] + ln[e^{-i\pi}] = -i\pi + ln[v'/K] \end{aligned}$$



Σχήμα 5.3: Εδώ απεικονίζεται γραφικά το κλείστο γράφημα της ολοκλήρωσης της εξίσωσης 5.141. *Το γεγονός ότι αυτό το ολοκλήρωμα εξαφανίζεται υπονοεί για τα ολοκλήρωματα ότι τα μήκη κάθε ευθύγραμμου τμήματος της γκρί γραμμής είναι ίσα, και αυτό υπονοεί την πρώτη ισότητα της* 5.142

Η 5.142 γίνεται σύμφωνα με τις 5.139 και 5.140:

$$|\alpha_{\omega'\omega lm}| = e^{4\pi GM\omega}|\beta_{\omega'\omega lm}| \tag{5.143}$$

Η συνθήκη για τους συντελεστές bogoliubov 5.112 γίνεται για συνεχή δείκτη:

$$\sum_{\omega'} \left(|\alpha_{\omega'\omega lm}|^2 - |\beta_{\omega'\omega lm}|^2\right) = \sum_{\omega'} \left(e^{8\pi GM\omega} - 1\right) |\beta_{\omega'\omega lm}|^2 = 1 \tag{5.144}$$

που λύνεται για

$$\sum_{\omega'} |\beta_{\omega'\omega lm}|^2 = \left(e^{8\pi GM\omega} - 1\right)^{-1} \tag{5.145}$$

Επομένως ο τελεστής αρίθμησης που δρα στο κενό-f σε τρόπους$g_{\omega lm}$ δίνεται από την σχέση 5.117, γίνεται:

$$N_{\omega lm} = \sum_{\omega'} |\beta_{\omega'\omega lm}|^2 = \frac{1}{e^{8\pi GM\omega} - 1} \tag{5.146}$$

Το οποίο σύμφωνα με την στατιστική Φυσική είναι το θερμικό φάσμα του Planck 5.52 με θερμοκρασία:

$$T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi GMk_B} \tag{5.147}$$

που είναι η **Θερμοκρασία Hawking**. Στο τελευταίο βήμα επαναφέραμε την σταθερά c^3 που προκύπτει το c^2 από την αλλαγή $GM \to GM/c^2$ και $v \to ct + r$ και $u \to ct - r$

5.3.2 Συζήτηση

Καταλήξαμε λοιπόν στο γεγονός η Ακτινοβολία Hawking είναι μια ακτινοβολία που προέρχεται από περιοχές κοντά στον ορίζοντα Γεγονότων των Μελανών Οπών. Δηλαδή, μέσω μιας διαδικασία κβαντικής διόρθωσης, βλέπουμε πως παράγονται σωματίδια κοντά στον ορίζοντα της Μελανής οπής και εκπέμπονται με θερμική κατανομή Planck. Οι σταθερές στην φυσική είναι:

$$G = 6.673 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$$

$$\hbar = 1.054 \times 10^{-34} Js$$

$$k_B = 1.380 \times 10^{-23} Jk^{-1}$$

$$c = 2.997 \times 10^8 ms^{-1}$$

Αντικαθιστώντας τις σταθερές στην σχέση της θερμοκρασίας Hawking προκύπτει ότι:

$$T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M k_B} \approx \frac{1.054 \times 10^{-34} Js \times (2.997 \times 10^8 ms^{-1})^3}{8 \times 3.141 \times 6.674 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2} \times 1.380 \times 10^{-23} Jk^{-1}} \frac{1}{M}$$

Επομένως η θερμοκρασία Hawking για ενώ σώμα μάζας M είναι:

$$T_H \approx \frac{1.227 \times 10^{23} kg}{M(kg)} K \tag{5.148}$$

Γνωρίζουμε, επίσης ότι η επιφανειακή βαρύτητα $\kappa = c^4 (4GM)^{-1}$ και έχουμε:

$$T_H = \frac{\kappa \hbar}{2\pi c k_B} \tag{5.149}$$

Δηλαδή η Θερμοκρασία της ακτινοβολίας μιας μαύρης τρύπας είναι ανάλογη της επιφανειακής της βαρύτητας! Αυτό ταιριάζει με το Φαινόμενο **Unruh** που λέει ότι ένας επιταχυνόμενος παρατηρητής παρατηρεί σωματίδια στο κενό.

Επίσης σύμφωνα με τους νόμους της Θερμοδυναμικής αν προσθέσουμε μια ποσότητα θερμότητας σε μια Μελανή οπή, η εντροπίας της τότε είναι:

$$dS = \frac{dQ}{T_H} = 8\pi M dQ \tag{5.150}$$

σε γεωμετρικοποιημένες μονάδες ($G = \hbar = c = k_B = 1$) και θερμότητα που μεταφέρεται προκαλεί αύξηση της μάζας της $dQ = dM$.

$$dS = d(4\pi M^2) \tag{5.151}$$

Όμως η ακτίνας της Μελανής Οπής είναι διπλάσια της μάζας της σε γεωμετρικοποιημένες μονάδες σχέση 4.50:

$$S_{BH} = \pi R_{BH}^2 = \frac{A_{BH}}{4} \tag{5.152}$$

Επομένως η εντροπία στην επιφάνεια μιας Μελανής Οπής είναι Ανάλογη του Εμβαδού της. Υποθέτωντας ότι μια μικρή Μελανή Οπή έχει μηδενική εντροπία, τότε η σταθερά ολοκλήρωσης μηδενίζεται. Το να σχηματίσει κανείς μια μαύρη τρύπα είναι ο πιο οικονομικός τρόπος να συμπιέσει μια μάζα σε μια περιοχή, και η εντροπία θα είναι επίσης ένα όριο πληροφορίας που περιέχει ένα οποιοδήποτε τέτοιο σφαιρικό αντικείμενο. Η τελευταία σχέση υποδεικνύει ότι η φυσική περιγραφή μιας βαρυτικής θεωρίας ενός σωματίου μπορεί να κωδικοποιηθεί με κάποιο τρόπο στην επιφάνεια του.

5.3.3 Περαιτέρω συζητήσεις για το Μέλλον...

Με το σκεπτικό ότι οι Μελανές Οπές εκπέμπουν ακτινοβολία είναι ανοιχτό το ενδεχόμενο να ενδέχεται οι μαύρες τρέπες να εξαυλώνονται σε βάθος χρόνου. Αυτό θα συμβαίνει για όλων των ειδών τις Μελανές Οπές ανεξαρτήτως μεγέθους. Το φαινόμενο αυτό όμως θα είναι πιο δραστικό σε Μελανές Οπές μικρής μάζας η οποία(μικρή μάζα) θα αυξάνει πολύ την θερμοκρασία και επομένως την ποσότητα ακτινοβολίας της μελανής οπής. Επομένως οι μικρές μελανές οπές ενδέχεται να έχουν πολύ μικρό χρόνο ζωής. Μπορούμε να παράξουμε τον νόμο της σχέσης του χρόνου εξάχνωσης της Μελανής Οπής σε σχέση με την μάζα της.

Θεωρούμε μια μη περιστρεφόμενη αφόρτιστη Μελανή Οπή που περιγράφεται από την γεωμετρία Schwarzschild. Ξεκινάμε από τον νόμο των **Stefan-Boltzmann** που λέει ότι η ισχύς της ακτινοβολίας ενός μελανός σώματος είναι:

$$P = A_s \epsilon \sigma T_H^4 \tag{5.153}$$

όπου για ένα τέλειο μέλαν σώμα ο συντελεστής απόδοσης είναι: $\epsilon = 1$. Επιπλέον η A_S είναι η επιφάνεια μελανής οπής ακτίνας Schwarzschild:

$$A_S = 4\pi R_S^2 = 4\pi \left(\frac{2GM}{c^2}\right)^2 = \frac{16\pi G^2 M^2}{c^4} \tag{5.154}$$

επιπλέον η σταθερά Stefan-Boltzmann δίνεται από την σχέση:

$$\sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{60\hbar^3 c^2} \tag{5.155}$$

ενώ η ενέργεια του φάσματος του μέλαν σώματος που εξαρτάται από την θερμοκρασία θα δίνεται:

$$E = k_B T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi GM} \tag{5.156}$$

Αντικαθιστούμε τώρα τις ποσότητες που υπολογίσαμε στον νόμο της ισχύς και έχουμε

$$P = A_s \epsilon \sigma T_H^4 = \left(\frac{16\pi G^2 M^2}{c^4}\right)\left(\frac{\pi^2 k_B^4}{60\hbar^3 c^2}\right)\left(\frac{\hbar c^3}{8\pi GM}\right)^4$$

Που θα μας δώσει τελικά τον νόμο **Stefan-Boltzmann-Schwarzschild-Hawking** ισχύος:

$$P = \frac{\hbar c^6}{15360\pi G^2 M^2} \tag{5.157}$$

Μπορούμε να συμμαζέψουμε όλες τις σταθερές σε μία σταθερά εξάνχωσης:

$$K_{ev} = \frac{\hbar c^6}{15360\pi G^2} = 3.562 \times 10^{32}\ Watt\ kg^2 \tag{5.158}$$

εφόσον ο νόμος ισχύος της ακτινοβολίας Hawking δίνει τον ρυθμό εξάχνωσης, απώλεια ενέργειας της μελανής Οπής, γράφουμε:

$$P = -\frac{dE_{BH}}{dt} = \frac{K_{ev}}{M^2} \tag{5.159}$$

Εφόσον η συνολική ενέργεια της μελανής οπής σχετίζεται με την μάζα της μέσω της σχέσης ενέργειας-μάζας του Einstein προκύπτει ότι

$$E_{BH} = Mc^2$$
$$P = -\frac{dE_{BH}}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(Mc^2\right) = -c^2 - \frac{dM}{dt}$$

επομένως παίρνουμε μια σχέση της μορφής:

$$-c^2\frac{dM}{dt} = \frac{K_{ev}}{M^2}$$

που είναι μια χωριζομένων μεταβλητών διαφορική εξίσωση η οποία επιλύεται ώς εξής:

$$\int_{M_{BH}}^{0} M^2 dM = -\frac{K_{ev}}{c^2}\int_0^{t_{ev}} dt$$

Η οποία μας δίνει τον νόμο χρόνου- μάζας εξάχνωσης των μελανών οπών:

$$t_{ev} = \frac{c^2 M_{BH}^3}{3K_{ev}} \tag{5.160}$$

Αντικαθυστώντας την σταθερά εξάχνωσης έχουμε:

$$t_{ev} = \frac{c^2 M_{BH}^3}{3K_{ev}} = \frac{c^2 M_{BH}^3}{3}\frac{15360\pi G^2}{\hbar c^6} = \frac{5120\pi G^2 M_{BH}^3}{\hbar c^4}$$

και αντικαθυστώντας όλες τις σταθερές παίρνουμε μια σχέση:

$$t_{ev} = 8.410 \times 10^{-17}\left[\frac{M_{BH}}{kg}\right]^3 sec \tag{5.161}$$

Μπορούμε τώρα να κατασκευάσουμε έναν πίνακα που να έχει μια συλλογή από πιθανές μάζες μελανών οπών και τους χρόνους εξάχνωσής τους:

Object	$M_{BH}(kg)$	$M_{BH}(eV)$	$M_{BH}(M_{\odot})$	$t(sec)$	$t(y)$
Sun	2×10^{30}	$10^{60} Giga$	10^{0}	$6,7 \times 10^{74}$	2×10^{67}
Primodial Black Hole	10^{11}	-	10^{-19}	$8,4 \times 10^{16}$	$2,6 \times 10^{9}$
Planck Mass	$2,17 \times 10^{-8}$	$1,22 \times 10^{19} G$	-	8×10^{-48}	-
Mass produced in Cern	$3,5 \times 10^{-24}$	$2 Terra$	-	$3,8 \times 10^{-87}$	-
Proton Mass	$1,7 \times 10^{-27}$	$1 Giga$	-	$4,7 \times 10^{-98}$	-

Παρατηρούμε από αυτόν τον πίνακα ότι μια μελανή οπή για να εξαχνωθεί χρειάζεται πάρα, μα πάρα πολλά δισεκατομήρια χρόνια. Ενώ για μια μελανή οπής που θα εξανχώνεται σε χρονικό διάστημα όση η ηλικία του σύμπαντος, της τάξεως δηλδή των δισεκατομμυρίων χρόνων θα έχει μάζα περίπου 10^{-20} της μάζας του ήλιου μας. Επιπλέον μπορούμε να δούμε ότι Μελανές οπές μάζας της τάξεως σωματιδίων που προκύπτουν στο Cern ή μάζες της τάξεως πρωτονίων ή τάξεως της μάζας του planck θα εξαχνώνονται σε πολύ μικρά κλάσματα του δευτερολέπτου. Επομένως θα εξαφανίζονται γρήγορα.

Βιβλιογραφία

[1] Mikio Nakahara - *Geometry, Topology and Physics*. Graduate student series in physics.Bristol: Adam Hilger, 1990

[2] Bernanrd Schutz - *Geometrical Methods of Mathematical Physics*. Cambridge: University Press, 1999

[3] Jorge V. Jose, Eugene J. Saletan - *Classical Dynamics: A contemporary Approach*.Cambridge: University Press, 1998

[4] Sean M. Carroll - *Space Time and Geometry*. San Francisco:Addison Wesley, 2004

[5] James B. Hartle - *GRAVITY An Introduction to Einstein's General Relativity*. San Francisco:Addison Wesley, 2003

[6] Stefen W. Hawking - *"Particle creation by Black Holes"*. University of Cambridge: Springer-Verlag, 12 April 1975: 199-213

[7] L. H. Ford - *"Quantum Field Theory in Curved Spacetime"*. Massachusetts: Tufts University, 30 July 1997