

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία η οποία εκπονήθηκε στα πλαίσια του μεταπτυχιακού προγράμματος « Δομοστατικός σχεδιασμός και ανάλυση των κατασκευών», επιχειρείται η μαθηματική μοντελοποίηση δύο βασικών συστημάτων αποσβέσεως της σεισμικής ενέργειας υψηλών κτιρίων, και κατόπιν, η εξαγωγή βασικών αριθμητικών αποτελεσμάτων ώστε να αξιολογηθεί η αποτελεσματικότητά τους.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Γ. Μιχάλτσο για τη σημαντική βοήθεια που μου παρείχε στην εκπόνηση της εργασίας, καθώς και για το ενδιαφέρον που επέδειξε ώστε να κατανοήσω όσο το δυνατόν καλύτερα το απαιτητικό σε γνώσεις επιστημονικό πεδίο με το οποίο ασχολείται αυτή.

## Περιεχόμενα

ΠΕΡΙΛΗΨΗ .....	2
ABSTRACT .....	4
1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ .....	5
1.1 Σκοπός .....	5
1.2 Γενικά .....	5
1.3 Ταξινόμηση Συστημάτων Ελέγχου .....	6
1.3.1 Συστήματα Παθητικού Ελέγχου.....	8
1.3.1.1 Συστήματα σεισμικής μόνωσης.....	9
1.3.1.2 Συστήματα απορρόφησης ενέργειας .....	10
1.3.1.3 Αποσβεστήρες μάζας.....	13
1.3.2 Συστήματα Ενεργητικού Ελέγχου – Ημιενεργητικά Συστήματα .....	14
1.3.3 Υβριδικά συστήματα .....	17
1.4 Παραδείγματα κατασκευών με Συστήματα Ελέγχου Απόκρισης .....	17
2. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ.....	19
2.1 Περιγραφή Μοντέλου .....	19
2.2 Ελεύθερη ταλάντωση δοκού εν προβόλω - Η δοκός αναφοράς .....	20
2.3 Το σύστημα δοκού – προβόλου με συγκεντρωμένες μάζες και σύστημα αποσβέσεως στη βάση .....	23
2.3.1 Η εξίσωση της σεισμικής κίνησης.....	28
2.4. Το σύστημα δοκού - προβόλου με συγκεντρωμένες μάζες χωρίς σύστημα αποσβέσεως .....	29
2.5 Το σύστημα δοκού – προβόλου με συγκεντρωμένες μάζες και σύστημα αποσβέσεως συντονισμένου αποσβεστήρα μάζας (T.M.D.) .....	32
3. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ .....	37
3.1 Ανάλυση διαγραμμάτων .....	50
4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ .....	52
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ .....	54
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ .....	56

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα διπλωματική εργασία, έχει ως σκοπό τη μαθηματική μοντελοποίηση και στη συνέχεια τη μελέτη ενός υψηλού κτιρίου, το οποίο προστατεύεται έναντι σεισμικής καταπόνησης με την κατασκευή δύο διαφορετικών συστημάτων σεισμικής μονώσεως, όπου το πρώτο τοποθετείται στη βάση του (**base isolation system**) ενώ το δεύτερο αφορά συντονισμένο αποσβεστήρα ολισθαίνουσας μάζας (**T.M.D.**) καθ' ύψος του.

Η δομή της εργασίας έχει ως εξής:

Στο **πρώτο κεφάλαιο** προσδιορίζεται ο σκοπός και το αντικείμενο της εργασίας, ενώ στη συνέχεια γίνεται βιβλιογραφική ανασκόπηση κατά την οποία πραγματοποιείται ταξινόμηση και κατόπιν ανάλυση των συστημάτων ελέγχου απορρόφησης ενέργειας στις κατασκευές. Η κατηγοριοποίηση αυτή γίνεται ανάλογα με τον τρόπο τροφοδοσίας τους με ενέργεια για την λειτουργία τους, την θέση τους στο δόμημα, και τον τρόπο δράσης τους σ' αυτό. Έτσι έχουμε τα παθητικά συστήματα ελέγχου, τα ενεργητικά, και τα υβριδικά, για την πρώτη κατηγορία ταξινόμησης, τα εξωτερικού και εσωτερικού τύπου, για την δεύτερη, και αυτά που μεταβάλλουν την δυσκαμψία της κατασκευής, αυξάνουν την απόσβεση ή αυτά που ανακατανέμουν τη μάζα της, για την τελευταία.

Με βάση την παραπάνω κατηγοριοποίηση, τα συστήματα τα οποία μελετά η εργασία αυτή, είναι παθητικά συστήματα εσωτερικού τύπου, και συγκεκριμένα αποσβεστήρες μάζας οι οποίοι συνδέονται με το κτίριο μέσω ελατηρίου και αποσβέστη (αμορτισέρ).

Στο **δεύτερο κεφάλαιο** πραγματοποιείται η μαθηματική μοντελοποίηση του κτιρίου, για τις περιπτώσεις όπου αυτό α) δεν είναι σεισμικά μονωμένο με σύστημα απόσβεσης, β) διαθέτει σύστημα αποσβέσεως στη βάση του, και τέλος, γ) διαθέτει σύστημα αποσβέσεως ολισθαίνουσας μάζας (T.M.D) σε κάποιο ύψος του.

Στο **τρίτο κεφάλαιο** πραγματοποιείται ο προγραμματισμός των τριών μοντέλων στο περιβάλλον του μαθηματικού λογισμικού «Mathematica, Έκδοση 4.1.», και γίνεται αριθμητική εφαρμογή για συγκεκριμένες διαστάσεις και αδρανειακά μεγέθη

της κατασκευής και χαρακτηριστικά των συστημάτων αποσβέσεως. Έτσι, παρουσιάζονται τα αντίστοιχα διαγράμματα απόκρισης της κατασκευής για δεδομένη εδαφική κίνηση στην οποία υποβάλλεται, για κάθε περίπτωση συστήματος απόσβεσης που εξετάστηκε .

Η εργασία ολοκληρώνεται με το **τέταρτο κεφάλαιο**, όπου επιχειρείται η ανάλυση των αποτελεσμάτων του κεφαλαίου 3, η εξαγωγή βασικών συμπερασμάτων για την αποτελεσματικότητα των συστημάτων αποσβέσεως που μοντελοποιήθηκαν και η μεταξύ τους σύγκριση.

**ABSTRACT**

This thesis deals with the isolation systems that have recently become popular for controlling the vibrations of multi-storey buildings. We try to simulate a high - rise building considering a cantilever beam with varying cross-section along its length, which has concentrated masses at different points of its height. We consider an isolation system composed by a spring and a damper, applied at the structure's foundation, in order to improve the structure's ability, and that, is compared with another isolation system of a T.M.D (tuned mass damper), placed on the structure's more effective position along its length.

The **first chapter** focuses on the classification of all kind of isolation systems, thus, we have the active, the passive and the hybrid ones. These are placed inside or outside the structure, and also can be classified according the way that they use to absorb the earthquake energy, by increasing the stiffness of the structure, the damping ratio, or else, redistributing the mass of it.

The **second chapter**, ventures to compose, analyze and solve the mathematical model of a high rise building a) without any isolation system, b) with an isolation system placed at the structure's base, composed by a spring and a damper, and with c) a tuned mass damper (T.M.D) which is placed at the top of the structure.

The **third chapter** deals with the programming of these three models, using the mathematical software "Mathematica, v.4.1". Numerical examples are presented and same useful results are gathered.

The final **fourth chapter** of this thesis, ventures to gather and analyze the results of the above examples, in order to compare the ability of the two isolation systems.

## 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

### 1.1 Σκοπός

Η παρούσα διπλωματική εργασία, έχει ως σκοπό τη μαθηματική μοντελοποίηση και στη συνέχεια τη μελέτη ενός υψηλού κτιρίου, το οποίο προστατεύεται έναντι σεισμικής καταπόνησης με την κατασκευή συστήματος σεισμικής μονώσεως στη βάση του (base isolation system) αλλά και με την τοποθέτηση συντονισμένου αποσβεστήρα μάζας καθ' ύψος του.

Η αποτελεσματικότητα αυτών των δύο συστημάτων ελέγχεται συγκρίνοντας τις παραμορφώσεις που θα υφίσταται η ίδια η κατασκευή, χωρίς αυτά τα συστήματα μονώσεως.

### 1.2 Γενικά

Η ανάγκη για την ανέγερση υψηλότερων, ελαφρότερων και πιο εύκαμπτων κατασκευών, που με την πάροδο των χρόνων γίνεται όλο και επιτακτικότερη, έγινε εφικτή με την ανάπτυξη της τεχνολογίας των υλικών, των μεθόδων παραγωγής και ανέγερσης, αλλά και λόγω της εξαιρετικής βελτίωσης των υπολογιστικών μεθόδων μέσω των ηλεκτρονικών υπολογιστών.

Το γεγονός αυτό, σε συνδυασμό με τις συνεχώς αυξανόμενες απαιτήσεις για ασφάλεια, άνεση και λειτουργικότητα, τόσο έναντι σπανιότερων καταστρεπτικών φορτίσεων (π.χ. έντονες σεισμικές διεγέρσεις), αλλά και συχνότερων, όπως οι ανεμοπιέσεις που δέχονται τα υψηλά κτίρια, οδήγησε τους μελετητές στην ανάπτυξη συστημάτων ελέγχου της απόκρισης των δομημάτων και των ταλαντώσεων τους (structural control systems).

Σύμφωνα με τις συμβατικές μεθόδους σχεδιασμού, ο έλεγχος της απόκρισης επιτυγχάνεται επιλέγοντας με κατάλληλο τρόπο την μάζα και την δυσκαμψία του δομήματος επηρεάζοντας έτσι τα βασικά δυναμικά χαρακτηριστικά του. Αντίθετα, σχεδιάζοντας μια κατασκευή με συστήματα ελέγχου, αυτός πραγματοποιείται κυρίως με την αύξηση της ενέργειας που αποσβένεται από το δόμημα, σε συνδυασμό ή όχι με την μεταβολή της μάζας ή και της δυσκαμψίας, γι' αυτό και τα

περισσότερα συστήματα ελέγχου έχουν σαν συνθετικό της ονομασίας του τον όρο αποσβέστης (damper).

Στα συμβατικά δομήματα η απορρόφηση της εισερχόμενης από την δυναμική διέγερση ενέργειας γίνεται από τα φέροντα (π.χ. δοκοί, υποστυλώματα) αλλά και τα μη φέροντα στοιχεία (π.χ. τοιχοπληρώσεις). Αποτέλεσμα αυτού, είναι τα καταπονούμενα στοιχεία να υφίστανται βλάβες με μεγάλο κόστος, τόσο όσον αφορά τα υλικά και τις απαιτούμενες εργασίες, αλλά και την συχνά απαιτούμενη διακοπή της λειτουργίας του δομήματος κατά την φάση της αποκατάστασης. Αντίθετα, σε δομήματα με τοποθετημένα συστήματα ελέγχου, το μεγαλύτερο ποσοστό της ενέργειας απορροφάται από τα συστήματα αυτά, με αποτέλεσμα σ'αυτά να παρουσιάζονται κατά κύριο λόγο οι βλάβες. Οι βλάβες στα συστήματα ελέγχου έχουν εν γένει πολύ μικρότερο κόστος καθώς δεδομένου ότι δεν έχουν σχεδιαστεί να αναλαμβάνουν φορτία βαρύτητας μπορούν ακίνδυνα να αφαιρεθούν από την κατασκευή, να επισκευασθούν ή να αντικατασταθούν και στη συνέχεια να επανατοποθετηθούν χωρίς να απαιτηθεί η διακοπή της χρήσης του δομήματος.

### 1.3 Ταξινόμηση Συστημάτων Ελέγχου

Η βασική κατηγοριοποίηση των συστημάτων ελέγχου είναι η εξής (Διάγραμμα 1.1):

i) Συστήματα παθητικού ελέγχου (Passive Control Devices)

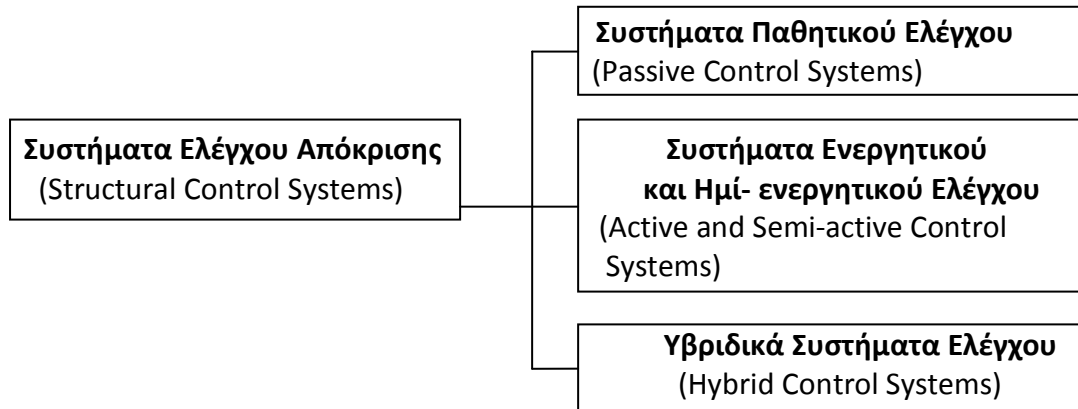
Τα συστήματα αυτά λειτουργούν χωρίς εξωτερική ενεργειακή τροφοδοσία και έχουν σχετικά μικρό κόστος.

ii) Συστήματα ενεργητικού ή ημιενεργητικού ελέγχου (Active or Semi-active Control Devices).

Τα συστήματα αυτά απαιτούν για την λειτουργία τους εξωτερική τροφοδοσία ενέργειας. Αποτελούν «έξυπνα» συστήματα και βασίζουν τη λειτουργία τους σε ηλεκτρονικά μέσα πολύ υψηλής τεχνολογίας.

iii) Υβριδικά συστήματα (Hybrid Control Devices).

Τα συστήματα αυτά αποτελούν συνδυασμό των δύο παραπάνω κατηγοριών, καθώς η εξωτερική τροφοδοσία ενέργειας δεν είναι απαραίτητη για τη λειτουργία τους, αλλά ενισχύει την αποδοτικότητά τους.



Διάγραμμα 1.1 Κατηγορίες Συστημάτων Ελέγχου Απόκρισης ως προς τον τρόπο τροφοδοσίας τους.

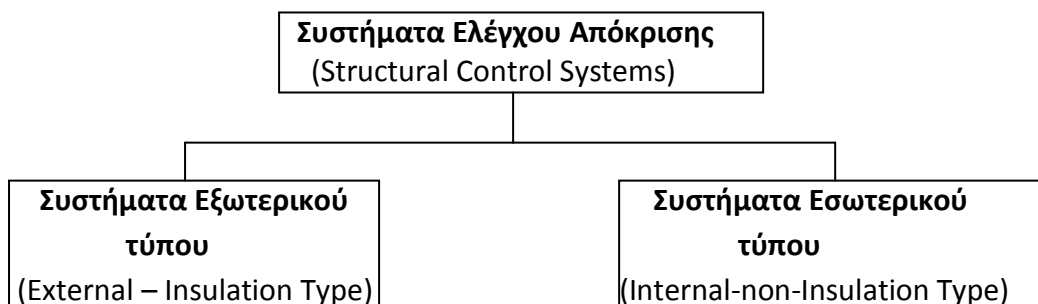
Με βάση τη θέση τοποθέτησής τους στο δόμημα, τα συστήματα ελέγχου διακρίνονται στις ακόλουθες κατηγορίες (Διάγραμμα 1.2):

i) Συστήματα εξωτερικού τύπου (External Insulation Type)

Τα συστήματα τοποθετούνται εξωτερικά της κατασκευής, με συνηθέστερη περίπτωση αυτή της σεισμικής μόνωσης, όπου τα συστήματα τοποθετούνται στη βάση του δομήματος.

ii) Συστήματα εσωτερικού τύπου (Internal – non- Insulation Type)

Τα συστήματα τοποθετούνται στο εσωτερικό του δομήματος. Αντιπροσωπευτικότερο παράδειγμα αυτών είναι τα συστήματα απορρόφησης ενέργειας (Energy Dissipation Devices).



Διάγραμμα 1.2 Κατηγορίες Συστημάτων Ελέγχου Απόκρισης με βάση τη θέση τους στο δόμημα.

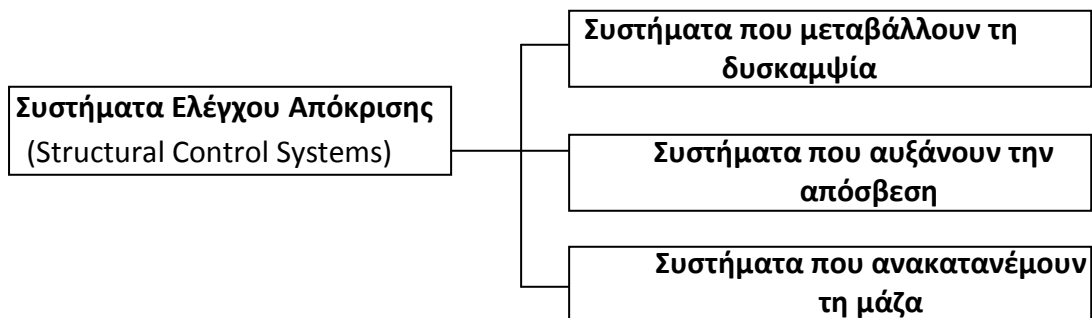


Τέλος, ανάλογα με τα δυναμικά τους χαρακτηριστικά και τον τρόπο δράσης τους τα συστήματα αποσβέσεως διακρίνονται στις ακόλουθες κατηγορίες (Διάγραμμα 1.3):

i) Συστήματα που επιδιώκουν την μεταβολή της δυσκαμψίας της κατασκευής, με στόχο η ιδιοπερίοδος του δομήματος να απομακρυνθεί από τις δεσπόζουσες περιόδους της εξωτερικής φόρτισης. Τέτοια είναι τα συστήματα σεισμικής μόνωσης των κατασκευών.

ii) Συστήματα που βασίζονται στην αύξηση της απόσβεσης του δομήματος, ώστε να επιτευχθεί ο έλεγχος των μετακινήσεων και των επιταχύνσεων του δομήματος.

iii) Συστήματα που επιδιώκουν την ανακατανομή της μάζας της κατασκευής, όπου η αρχή λειτουργίας τους είναι ανάλογη μ' αυτήν της πρώτης κατηγορίας καθώς και αυτά αποσκοπούν κυρίως στη μεταβολή των ιδιοπεριόδων του δομήματος.



Διάγραμμα 1.3 Κατηγορίες Συστημάτων Ελέγχου Απόκρισης με βάση την αρχή λειτουργίας τους.

### 1.3.1 Συστήματα Παθητικού Ελέγχου

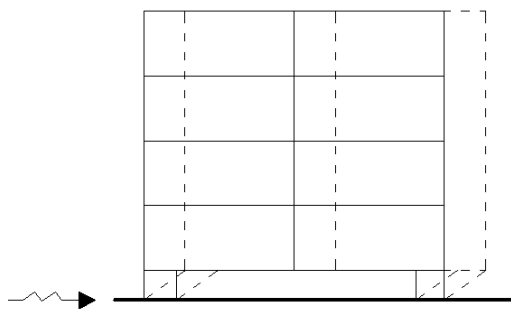
Όπως έχει ήδη αναφερθεί, τα συστήματα παθητικού ελέγχου δεν απαιτούν εξωτερική τροφοδοσία για την λειτουργία τους καθώς αποτελούν αδρανή συστήματα. Μπορούν να ταξινομηθούν στις ακόλουθες τρεις κατηγορίες:

- i) Συστήματα σεισμικής μόνωσης (Base Isolation Systems).
- ii) Συστήματα απορρόφησης ενέργειας (Energy Dissipation Devices).
- iii) Αποσβεστήρες μάζας (Mass Dampers).

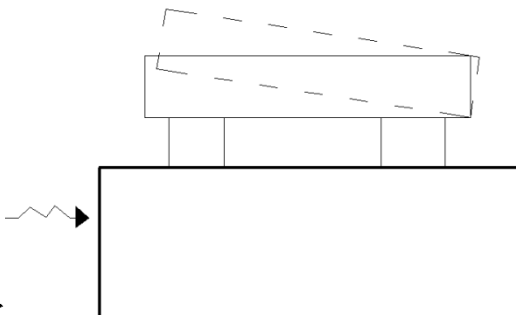
### 1.3.1.1 Συστήματα σεισμικής μόνωσης

Η σεισμική μόνωση επιτυγχάνεται με τη χρήση ειδικών συσκευών οι οποίες ονομάζονται μονωτήρες και τοποθετούνται μεταξύ καταστρώματος και βάθρων στην περίπτωση γεφυρών και στην διεπιφάνεια θεμελίωσης και ανωδομής, στην περίπτωση των κτιριακών έργων (Εικόνα 1.1).

Οι μονωτήρες λόγω της μικρής οριζόντιας δυσκαμψίας τους παραλαμβάνουν το μεγαλύτερο μέρος των μετακινήσεων, ενώ η ανωδομή παρουσιάζει πολύ μικρές σχετικές μετακινήσεις (inter-story drifts) και άρα μικρή καταπόνηση. Επιπρόσθετα, επειδή η κατακόρυφη δυσκαμψία των μονωτήρων είναι πολύ μεγάλη, βελτιώνεται και η ευστάθεια του δομήματος έναντι λικνισμού (rocking) (Εικόνα 1.2).



Εικόνα 1.1 Αρχή λειτουργίας σεισμικού μονωτήρα.



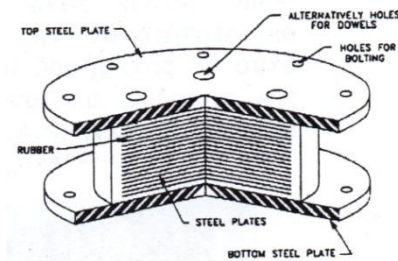
Εικόνα 1.2 Λειτουργία εφεδράνων έναντι λικνισμού.

Τα χαρακτηριστικότερα είδη μονωτήρων είναι τα ακόλουθα:

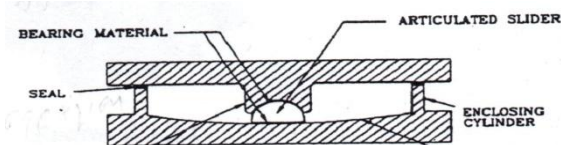
- i) Μονωτήρες με βάση το ελαστομερές (Εικόνα 1.3). Στην κατηγορία αυτή ανήκουν τα κοινά εφέδρανα από φυσικά ή συνθετικά υλικά χαμηλής απόσβεσης (ELB- Elastometallic Bearings).
- ii) Μονωτήρες ολίσθησης (Εικόνα 1.4). Χαρακτηριστικότερο παράδειγμα είναι τα συστήματα τριβής που βασίζονται στην αρχή του εκκρεμούς (FPS – Friction

Pendulum System). Σημειώνεται ότι τα συστήματα αυτά δεν αυξάνουν σημαντικά την απόσβεση του δομήματος όποτε, από την άποψη αυτή, δεν θεωρούνται ιδιαίτερως αποδοτικά.

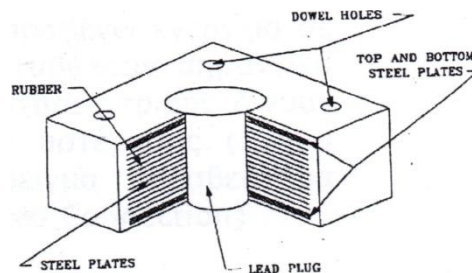
iii) Μονωτήρες με σημαντική απόσβεση (Εικόνα 1.5). Στους μονωτήρες αυτούς ανήκουν τα ελαστομερή εφέδρανα με πυρήνα μολύβδου για την αύξηση του λόγου απόσβεσης (LRB – Lead Rubber Bearings). Τα συστήματα αυτά συνδυάζουν τη μείωση της δυσκαμψίας με την αύξηση στο 10% με 20% της απόσβεσης του δομήματος της ανωδομής.



Εικόνα 1.3 Ελαστομερές εφέδρανο (ELB).



Εικόνα 1.4 Μονωτήρας ολίσθησης (FPS).



Εικόνα 1.5 Ελαστομερές εφέδρανο με πυρήνα μολύβδου (LRB).

### 1.3.1.2 Συστήματα απορρόφησης ενέργειας

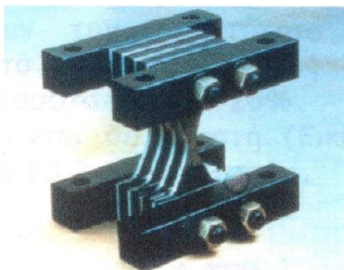
Πρόκειται για μικρές συσκευές οι οποίες χρησιμοποιούνται συνήθως στα χιαστί των υψηλών κτιρίων και σπανιότερα σε γέφυρες και εδράσεις γεφυρών. Τοποθετούνται στο δόμημα με σκοπό τη μείωση της καταπόνησης της κατασκευής. Τα χαρακτηριστικότερα είδη αυτών είναι τα ακόλουθα:

i) Μεταλλικοί αποσβεστήρες (Εικόνα 1.6α). Οι αποσβεστήρες του τύπου αυτού (Metallic Dampers) αποσβένουν ενέργεια μέσω της υστέρησης που εμφανίζουν τα μέταλλα όταν παραμορφώνονται καθώς εισέρχονται στην ανελαστική περιοχή

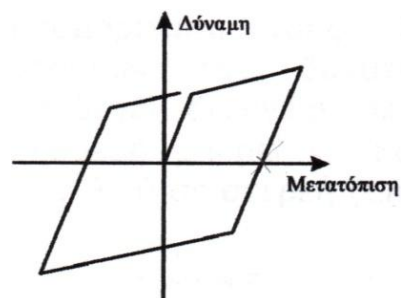
(Εικόνα 1.6β). Επιπρόσθετα, οι αποσβεστήρες αυτοί έχουν την ικανότητα να αυξάνουν και την δυσκαμψία της κατασκευής, γι' αυτό και συχνά ονομάζονται αποσβεστήρες επαύξησης της απόσβεσης και της δυσκαμψίας (A.D.A.S. – Added Damping and Stiffness). Επειδή η κατασκευή αυτών γίνεται από πολλά μεταλλικά ελάσματα τοποθετημένα το ένα δίπλα στο άλλο, συχνά στη βιβλιογραφία ονομάζονται και ως “κηρήθρες” (honeycomb dampers). Επίσης, στην ίδια κατηγορία μεταλλικών αποσβεστήρων, συγκαταλέγονται και τα συστήματα τα οποία τοποθετούνται στο κενό μεταξύ δύο πολύ κοντινών όμορων κτιρίων έτσι ώστε να αποτρέψουν την πιθανή σύγκρουση τους εξαιτίας κάποιας δυναμικής τους κίνησης. Η ονομασία τους είναι ανάλογη της μορφή τους, έτσι υπάρχουν οι αποσβεστήρες σχήματος καμπάνας, πόμολου, κτλ. (Εικόνα 1.6γ).

ii) Αποσβεστήρες τριβής (Εικόνα 1.7α). Οι αποσβεστήρες του τύπου αυτού (Friction Dampers) αποσβένουν ενέργεια μέσω της αναπτυσσόμενης τριβής. Έχουν τη δυνατότητα να αυξάνουν την ικανότητα απόσβεσης της κατασκευής κατά 10% έως 20% χωρίς ιδιαίτερη μεταβολή της ιδιοπεριόδου της. Οι αποσβεστήρες αυτού του τύπου δίνουν έναν ορθογώνιο τύπο βρόγχου υστέρησης (Εικόνα 1.7β). Η συνηθέστερη μορφή φέρει και διαμήκεις οπές όπου τοποθετούνται κοχλίες (S.B.S. – Slotted Bolted Connection).

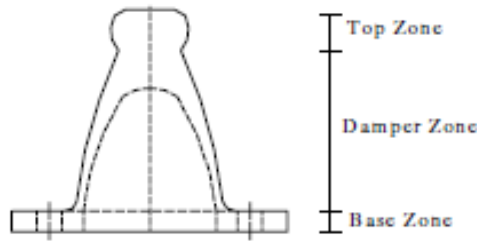
iii) Ιξώδεις και ιξωδοελαστικοί αποσβεστήρες (Εικόνα 1.8, Εικόνα 1.9, Εικόνα 1.10). Οι αποσβεστήρες του τύπου αυτού (Viscous and Viscoelastic Dampers), στηρίζονται στην ικανότητα διαφόρων πολυμερών, τα οποία βρίσκονται σε ρευστή ή στερεά κατάσταση, να αποσβένουν ενέργεια κατά την διατμητική παραμόρφωση τους και έτσι μπορούν να αυξήσουν την ικανότητα απόσβεσης της κατασκευής κατά 10% έως 20%.



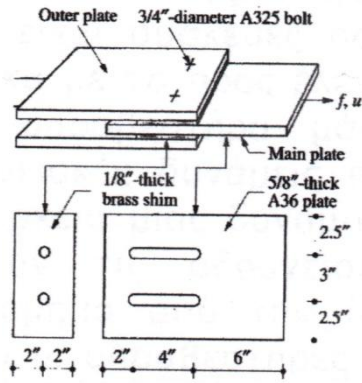
Εικόνα 1.6α Μεταλλικός αποσβεστήρας.



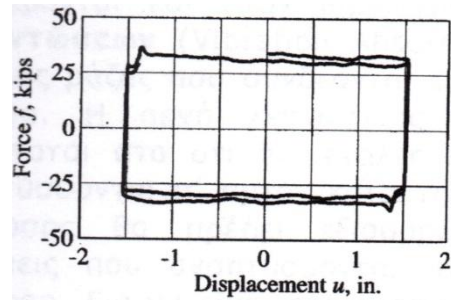
Εικόνα 1.6β Υστερητική συμπεριφορά μεταλλικών αποσβεστήρων.



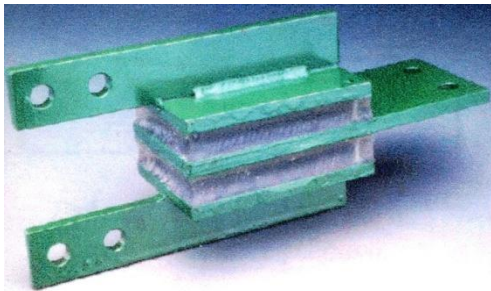
Εικόνα 1.6γ Μεταλλικός αποσβεστήρας σε σχήμα καμπάνας.



Εικόνα 1.7α Αποσβεστήρας τριβής.



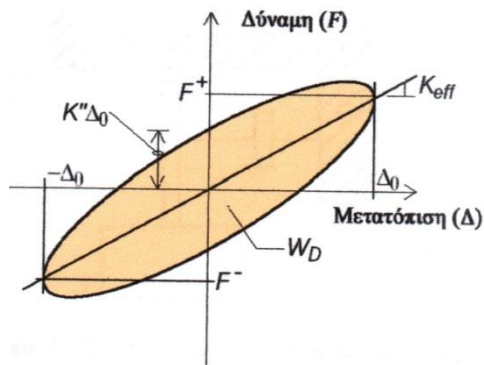
Εικόνα 1.7β Υστερητική συμπεριφορά αποσβεστήρα τριβής.



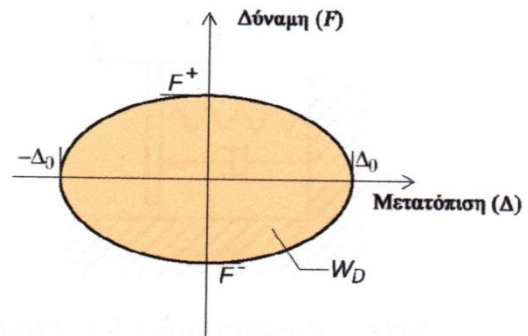
Εικόνα 1.8 Ιξωδοελαστικός αποσβεστήρας στερεού ρευστού.



Εικόνα 1.9 Ιξώδης αποσβεστήρας



Εικόνα 1.10 Συμπεριφορά ιξωδοελαστικών συστημάτων.



Εικόνα 1.11 Συμπεριφορά ιξωδών συστημάτων.

### 1.3.1.3 Αποσβεστήρες μάζας

Οι αποσβεστήρες μάζας (Mass Dampers), που πολλές φορές αναφέρονται και ως αποσβεστήρες ταλαντώσεων (Vibration Absorbers), είναι συσκευές πολύ μεγάλης μάζας που συνδέονται ελαστικά (μέσω ελατηρίων ή ενίοτε και αποσβεστήρων) με την κατασκευή. Η αρχή λειτουργίας του αποσβεστήρα μάζας συνίσταται στο ότι οι μεγάλες αδρανειακές δυνάμεις που αναπτύσσονται στον αποσβεστήρα κατά τη διάρκεια μιας δυναμικής διέγερσης θα πρέπει να εξισορροπήσουν τις αδρανειακές δυνάμεις που αναπτύσσονται στο δόμημα από την ίδια τη διέγερση.

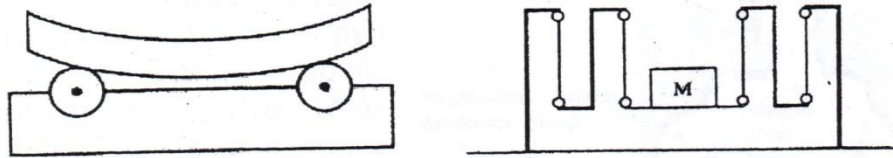
Για να είναι αποτελεσματικοί οι αποσβεστήρες μάζας, θα πρέπει η ιδιοσυχνότητα τους να βρίσκεται κοντά σε κάποια από τις ιδιοσυχνότητες του δομήματος, γι' αυτό και συχνά ονομάζονται **συντονισμένοι αποσβεστήρες μάζας (T.M.D – Tuned Mass Dampers)**. Στη περίπτωση που η μάζα του αποσβεστήρα είναι ρευστό (συνήθως νερό), έχουμε τους αποσβεστήρες συντονισμένων δεξαμενών ρευστών (**T.L.C.D – Tuned Liquid Column Dampers**).

Οι αποσβεστήρες μάζας έχουν αποδειχθεί πολύ αποτελεσματικοί, ιδιαίτερα στα υψηλά και εύκαμπτα δομήματα.

Παρακάτω, παρουσιάζονται διάφορα είδη αποσβεστήρων μάζας (Εικόνα 1.12, Εικόνα 1.13, Εικόνα 1.14):



Εικόνα 1.12 Εκκρεμές συνδεδεμένο μέσω αποσβεστήρα με το δόμημα – Ανεστραμμένο εκκρεμές συνδεδεμένο με το δόμημα μέσω ελατηρίου και αποσβεστήρα.



Εικόνα 1.13 Μάζα πάνω σε περιστροφικά εφέδρανα – Μάζα πάνω σε σύστημα εκκρεμών σε σχήμα μαιάνδρου για την εξοικονόμηση χώρου.



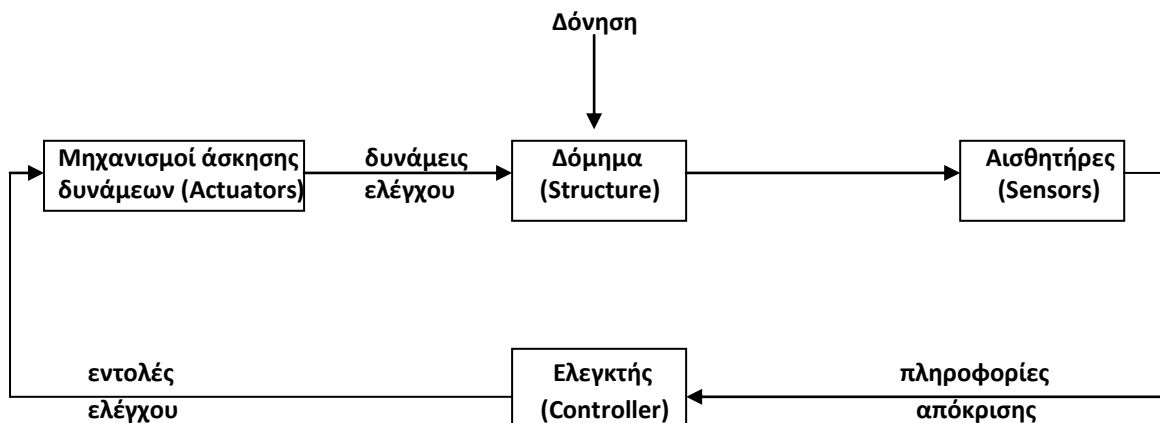
Εικόνα 1.14 Ελευθέρως ολισθαίνουσα μάζα συνδεδεμένη με ελατήριο και αποσβέστη – Μάζα συνδεδεμένη με ελαστομεταλλικά εφέδρανα.

### 1.3.2 Συστήματα Ενεργητικού Ελέγχου – Ημιενεργητικά Συστήματα

Τα συστήματα ενεργητικού ελέγχου παρουσιάζουν τις ακόλουθες βασικές διαφορές σε σχέση με τα παθητικά συστήματα:

- i) Σε αντίθεση με τα παθητικά συστήματα που αποτελούν αδρανείς συσκευές, τα ενεργητικά συστήματα απαιτούν μεγάλες ποσότητες ενέργειας ώστε να μπορούν να ασκήσουν επίσης μεγάλες αδρανειακές δυνάμεις στο δόμημα.
- ii) Μέρος ενός τυπικού συστήματος ενεργητικού ελέγχου αποτελούν οι αισθητήρες (sensors) που βρίσκονται τοποθετημένοι σε καίριες θέσεις του δομήματος ώστε να μετράνε σε πραγματικό χρόνο τα μεγέθη απόκρισης ή και τις δυνάμεις που αναπτύσσονται σ' αυτό.
- iii) Οι πληροφορίες που συλλέγονται από τους αισθητήρες επεξεργάζονται επίσης σε πραγματικό χρόνο από έναν ελεγκτή (controller) που είναι ένας ηλεκτρονικός υπολογιστής ο οποίος αποτελεί τον εγκέφαλο του συστήματος. Ο ελεγκτής με βάση τις πληροφορίες που δέχεται καθορίζει με ακρίβεια τις δυνάμεις που πρέπει να ασκηθούν μέσω ειδικών μηχανισμών (actuators) στο δόμημα ώστε να ελαχιστοποιηθεί η απόκριση του.

Τα συστήματα ενεργητικού ελέγχου συνήθως λειτουργούν αυτόματα, δηλαδή είναι επανατροφοδοτούμενα (feedback). Η αρχή λειτουργίας ενός τέτοιου συστήματος παρουσιάζεται στο παρακάτω διάγραμμα (Διάγραμμα 1.4):



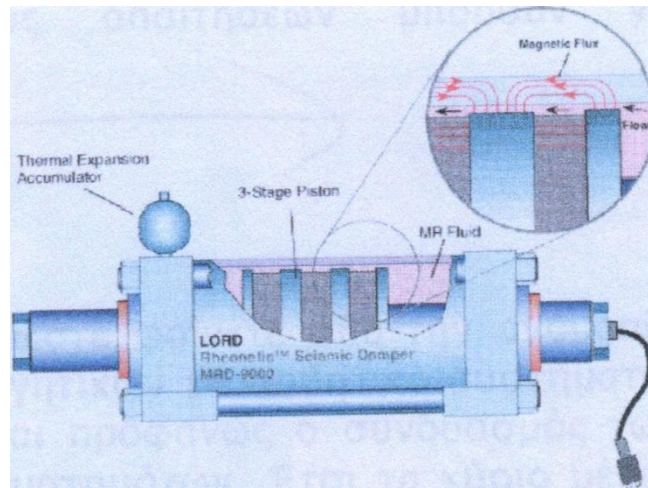
Διάγραμμα 1.4 Η αρχή λειτουργίας των συστημάτων ενεργητικού ελέγχου (feedback).

Τα ημι-ενεργητικά συστήματα (semi-active systems), έχουν την ίδια αρχή λειτουργίας με τα ενεργητικά, αλλά απαιτούν πολύ λιγότερη ενέργεια για την λειτουργία τους. Έτσι δεν μπορούν να ασκήσουν δυνάμεις αρκετά μεγάλες ώστε να διατηρήσουν ακίνητη την κατασκευή, αλλά ικανές μόνο να περιορίσουν την κίνηση της. Με άλλα λόγια τα ημι-ενεργητικά συστήματα μπορούν να αποσβέσουν, αλλά αδυνατούν να εισάγουν ενέργεια στην κατασκευή. Τα συστήματα αυτά είναι πιο απλά, πιο ανθεκτικά, πιο αξιόπιστα και πιο οικονομικά σε σχέση με τα ενεργητικά, ενώ η αποτελεσματικότητά τους είναι λίγο μικρότερη.

Η πιο χαρακτηριστική περίπτωση ημί-ενεργητικού αποσβεστήρα είναι οι αποσβεστήρες ελεγχόμενων υγρών (semi-active fluid dampers) (Εικόνα 1.15). Η λειτουργία τους στηρίζεται στην ικανότητα που έχουν ορισμένα ιξώδη ρευστά να αλλάζουν την πυκνότητά τους κάτω από ορισμένες συνθήκες. Η διαδικασία αυτή, που μπορεί να πραγματοποιηθεί σε ελάχιστο χρονικό διάστημα, (της τάξεως των milisec), λαμβάνει χώρα όταν τα ρευστά εκτεθούν σε μαγνητικό πεδίο στην



περίπτωση των μαγνητορρολογικών ρευστών (magnetoheological “MR” fluids) ή σε ηλεκτρικό πεδίο στην περίπτωση ηλεκτρορρολογικών ρευστών (electrorheological “ER” fluids).



Εικόνα 1.15 Αποσβεστήρας μαγνητορρολογικού υγρού βάρους 12 τόννων.

Ανακεφαλαιώνοντας, τα ενεργητικά και ημί-ενεργητικά συστήματα παρουσιάζουν τα ακόλουθα πλεονεκτήματα:

- i) Αυξημένη αποτελεσματικότητα στον έλεγχο της απόκρισης του δομήματος. Ο βαθμός αποτελεσματικότητας εξαρτάται από τον αριθμό των συσκευών ελέγχου που είναι εγκατεστημένοι στο δόμημα.
- ii) Εφαρμογή έναντι πολλών κινδύνων. Τα συστήματα ενεργητικού ελέγχου είναι αποτελεσματικά έναντι σχεδόν όλων των δυναμικών φορτίσεων π.χ. σεισμικές φορτίσεις, ανεμοπιέσεις.
- iii) Προσφέρουν μεγάλη ευελιξία στην ικανοποίηση των παραμέτρων σχεδιασμού. Μπορεί να δοθεί για παράδειγμα προτεραιότητα στην άνεση για μικρές ανεμοφορτίσεις ή στην ασφάλεια στην περίπτωση ισχυρών σεισμικών δονήσεων.

Όσον αφορά τα μειονεκτήματα, κυριότερο είναι η εξάρτηση από εξωτερικές πηγές ενέργειας, που δυστυχώς η λειτουργία τους δεν είναι πάντα αξιόπιστη, κατά τη διάρκεια ισχυρών διεγέρσεων όπου τα συστήματα ελέγχου καλούνται να

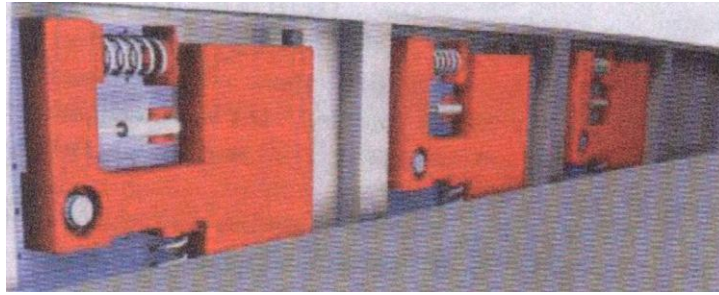
λειτουργήσουν. Το μειονέκτημα αυτό αίρεται σε μεγάλο βαθμό στην περίπτωση των ημί-ενεργητικών συστημάτων όπου λόγω των μικρότερων ενεργειακών τους απαιτήσεων μπορούν να λειτουργούν με μπαταρία.

### 1.3.3 Υβριδικά συστήματα

Τα υβριδικά συστήματα, αποτελούν συνδυασμό ενεργητικών με παθητικά συστήματα. Στόχος τους είναι προφανώς ο συνδυασμός των πλεονεκτημάτων αμφότερων των συστημάτων. Έτσι το κύριο μέρος της δύναμης ελέγχου μπορεί να ασκείται από το παθητικό μέρος και μικρές διορθώσεις με στόχο την βελτιστοποίηση της απόκρισης να πραγματοποιούνται από το ενεργητικό. Τα υβριδικά συστήματα παρουσιάζουν ακόμα, το πλεονέκτημα να διατηρούν μεγάλο μέρος της αποδοτικότητας τους και στην περίπτωση απώλειας της ενεργειακής τροφοδοσίας τους.

### 1.4 Παραδείγματα κατασκευών με Συστήματα Ελέγχου Απόκρισης

Ένα παράδειγμα χρήσεως παθητικού συστήματος απόσβεσης σε κατασκευή είναι αυτό των δύο πεζογεφυρών στο Bellagio του Las Vegas. Τα ανοίγματα αυτών είναι 46 και 38 μέτρα αντίστοιχα. Οι αρχιτεκτονικές απαιτήσεις οδήγησαν στην επιλογή καταστρωμάτων σχετικά μικρού ύψους των δύο μέτρων, με αποτέλεσμα να υπάρχει κίνδυνος συντονισμού των γεφυρών με την κίνηση των πεζών. Για τον λόγο αυτό, αποφασίστηκε η τοποθέτηση έξι αποσβεστήρων T.M.D σε κάθε πεζογέφυρα, 1330 Kgr. έκαστος (Εικόνα 1.16). Οι αποσβεστήρες συντονίστηκαν στις ιδιοσυχνότητες των γεφυρών, ύστερα από κατάλληλες μετρήσεις που έγιναν, απ' όπου διαπιστώθηκε επίσης ότι ο λόγος απόσβεσης των γεφυρών υπερδιπλασιάστηκε χάρις τα συστήματα απόσβεσης, και συγκεκριμένα αυξήθηκε από 0.6% σε 8%. Το συνολικό κόστος τοποθέτησης των συστημάτων απόσβεσης ήταν μικρότερο από αυτό που θα απαιτείτο για την ενίσχυση της φέρουσας ικανότητας των γεφυρών.



Εικόνα 1.16 Αποσβεστήρας καταστώματος γέφυρας.

Μία από τις πιο εντυπωσιακές εφαρμογές αποσβεστήρα μάζας με την αρχή του εκκρεμούς πραγματοποιήθηκε στο τρίτο υψηλότερο κτίριο του κόσμου, στην Ταϊπέι της Ταϊβάν (Ταιρει 101 skyscraper), ύψους 508μ (Εικόνα 1.17). Οι αναλύσεις που έγιναν έδειξαν πως οι μετακινήσεις που θα υφίστανται οι ανώτεροι όροφοι έναντι ανεμοπιέσεων θα ήταν 30% με 40% μεγαλύτερες από τις επιτρεπόμενες κατά τον έλεγχο λειτουργικότητας για χρήση γραφείων. Για την αντιμετώπιση του προβλήματος αυτού, επιλέχθηκε η λύση ενός αποσβεστήρα μάζας, βάρους 728 τόνων, ο οποίος έχει την λειτουργία εκκρεμούς που συνδέεται μέσω καλωδίων και αποσβεστήρων στους τελευταίους ορόφους του κτιρίου, ενώ χρησιμοποιήθηκε και ως αρχιτεκτονικό στοιχείο της κατασκευής καθώς είναι ορατός από τρεις ορόφους εστιατορίων και άλλων καταστημάτων (Εικόνα 1.18).



Εικόνα 1.17 Ουρανοξύστης Ταιρει 101.



Εικόνα 1.18 Αποσβεστήρας μάζας του κτιρίου βάρους 728 τόνων.

## 2. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Η παρούσα διπλωματική εργασία, έχει ως σκοπό τη μαθηματική μοντελοποίηση και στη συνέχεια τη μελέτη ενός υψηλού κτιρίου, το οποίο προστατεύεται έναντι σεισμικής καταπόνησης με την κατασκευή **α) συστήματος σεισμικής μονώσεως στη βάση** του (base isolation system) αλλά και **β) με την τοποθέτηση συντονισμένου αποσβεστήρα μάζας καθ' ύψος του**.

Η αποτελεσματικότητα αυτών των δύο συστημάτων ελέγχεται, συγκρίνοντας τις παραμορφώσεις που θα υφίσταται η ίδια η κατασκευή, χωρίς αυτά τα συστήματα μονώσεως.

### 2.1 Περιγραφή Μοντέλου

Το μοντέλο που θα μελετήσουμε στα πλαίσια της διπλωματικής αυτής είναι ένας πολυώροφος σχηματισμός που αποτελείται από  $(p)$  ορόφους, όπου τον εξομοιώνουμε με ένα σύστημα δοκού – προβόλου που έχει μάζα  $m(x)$  ανά μέτρο μήκους, και ροπή αδράνειας  $I(x)$ , ενώ στις θέσεις  $\alpha_i$  υπάρχουν συγκεντρωμένες μάζες  $M_i$  (Σχ. 2.1). Είναι κατασκευασμένο από ομογενές ισότροπο υλικό μέτρου ελαστικότητας  $E$ , ενώ η διατομή του προβόλου μεταβάλλεται καθ' ύψος, πράγμα που σημαίνει ότι και τα αδρανειακά χαρακτηριστικά της μεταβάλλονται συναρτήσει της αποστάσεως  $x$  κάθε διατομής από την βάση του προβόλου που θεωρούμε ως την αρχή του συστήματος συντεταγμένων. Η μάζα  $m(x)$  και η ροπή αδράνειας  $I(x)$  θεωρούμε ότι μεταβάλλονται με τους ακόλουθους νόμους:

$$I(x) = I_0 \left[ \rho_I(x) + \sum \frac{I_i}{I_0} \delta(x - \alpha_i) \right] = I_0 r_I(x) \quad (1\alpha)$$

$$\bar{m}(x) = A_0 \frac{\gamma}{g} \left[ \rho_m(x) + \sum g \frac{M_i}{A_0 \gamma} \delta(x - \alpha_i) \right] = A_0 \frac{\gamma}{g} r_m(x) \quad (1\beta)$$

όπου:

$\delta(x - \alpha_i)$  είναι η συνάρτηση του Dirac.

$A_0, I_0$  είναι οι τιμές εμβαδού διατομής και ροπής αδράνειας στην βάση ( $x = 0$ ).

$M_i, J_i$  είναι η μάζα και η στροφική ροπή αδράνειας της  $i$  συγκεντρωμένης μάζας.

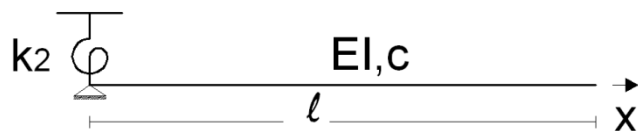
$\gamma$  είναι το ειδικό βάρος του υλικού της διατομής.

$\rho_m(\mathbf{x}), \rho_i(\mathbf{x})$  είναι δεδομένες συναρτήσεις που περιγράφουν την μεταβολή των αδρανειακών χαρακτηριστικών  $A, I$  του προβόλου.

Στην περίπτωση μας, το σύστημα δοκού-προβόλου με τις συγκεντρωμένες καθ' ύψος μάζες, είναι μερικώς πακτωμένο μέσω στροφικού ελατηρίου σταθεράς  $k_2$  με μάζα  $M_0$  στην έδραση του συστήματος, η οποία συνδέεται με το έδαφος μέσω συστήματος αποσβέσεως, που αποτελείται από γραμμικό ελατήριο σταθεράς  $k_1$  και ενός αποσβεστήρα σταθεράς απόσβεσης  $c_e$ .

## 2.2 Ελεύθερη ταλάντωση δοκού εν προβόλω - Η δοκός αναφοράς

Θεωρούμε τη δοκό – πρόβολο του σχήματος (σχ.2.2), μήκους  $\ell$ , μάζα  $m(x)$  ανά μέτρο μήκους, σταθερή ροπή αδράνειας  $I$ ,



Σχήμα 2.2 Η δοκός αναφοράς.

και σταθερά απόσβεσης  $c$ . Στην θέση της ελαστικής πάκτωσης ( $x=0$ ), υπάρχει ένα στροφικό ελατήριο, σταθεράς  $k_2$ .

Η εξίσωση ταλάντωσης, όταν δεν υπάρχει εξωτερική φόρτιση, δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$EIw''''(x,t) + c\dot{w}_o(x,t) + m\ddot{w}(x,t) = 0 \quad (2\alpha)$$

Για την επίλυση της εξίσωσης (2α) αναζητούμε λύση χωριζομένων μεταβλητών της μορφής:

$$w(x,t) = X(x)T(t) \quad (2\beta)$$

όπου την συνάρτηση  $X(x)$  ονομάζουμε συνάρτηση σχήματος και την  $T(t)$  συνάρτηση χρόνου. Εισάγοντας την σχέση (2β) στην διαφορική εξίσωση ταλάντωσης και υποθέτοντας ότι οι  $X(x)$  και  $T(t)$  είναι διάφορες του μηδενός παίρνουμε στην παρακάτω σχέση:

$$\frac{EI X''''(x)}{mX(x)} = -\frac{\ddot{T}(t) + \frac{c}{m} \dot{T}(t)}{T(t)} = \omega^2 \quad (2\gamma)$$

$$\text{Η οποία καταλήγει στις: } \left. \begin{aligned} EI X''''(x) - m\omega_n^2 X(x) &= 0 \\ \ddot{T}(t) + \omega_n^2 T(t) + \frac{c}{m} \dot{T}(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2\delta)$$

Η λύση της πρώτης είναι:

$$X_n(x) = d_1 \sin(\lambda_n x) + d_2 \cos(\lambda_n x) + d_3 \sinh(\lambda_n x) + d_4 \cosh(\lambda_n x) \quad (2\varepsilon)$$

$$\text{με: } \lambda_n^4 = \frac{m\omega_n^2}{EI}$$

και περιέχει τέσσερις αυθαίρετες σταθερές  $d_1, d_2, d_3, d_4$  οι οποίες προσδιορίζονται από τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος.

Οι συνοριακές συνθήκες του συστήματος δοκός-πρόβολος του σχήματος (σχ.2.2) είναι οι ακόλουθες:

$$\begin{aligned} EI X_n(0) &= 0 \\ EI X_n''(0) &= K_2 X_n'(0) \\ EI X_n'(l) &= 0 \\ EI X_n'''(l) &= 0 \end{aligned} \quad (2\zeta)$$

Αντικαθιστώντας τις συνθήκες αυτές στην εξίσωση της συναρτήσεως σχήματος καταλήγουμε στο ακόλουθο ομογενές αλγεβρικό σύστημα:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -\bar{k}_2 & -\lambda_n & -\bar{k}_2 & +\lambda_n \\ -\sin\lambda_n l & -\cos\lambda_n l & \sinh\lambda_n l & \cosh\lambda_n l \\ -\cos\lambda_n l & \sin\lambda_n l & \cosh\lambda_n l & \sinh\lambda_n l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = 0 \quad (2\eta)$$

$$\text{όπου: } \bar{k}_2 = \frac{k_2}{EI}$$

Επιλύοντας το παραπάνω πρόβλημα ιδιοτιμών καταλήγουμε στην εξίσωση ιδιοσυχνοτήτων:

$$\bar{k}_2 + \cosh \lambda_n l (\bar{k}_2 \cos \lambda_n l - \lambda_n \sin \lambda_n l) + \lambda_n \cos \lambda_n l \cdot \sin \lambda_n l = 0 \quad (2\theta)$$

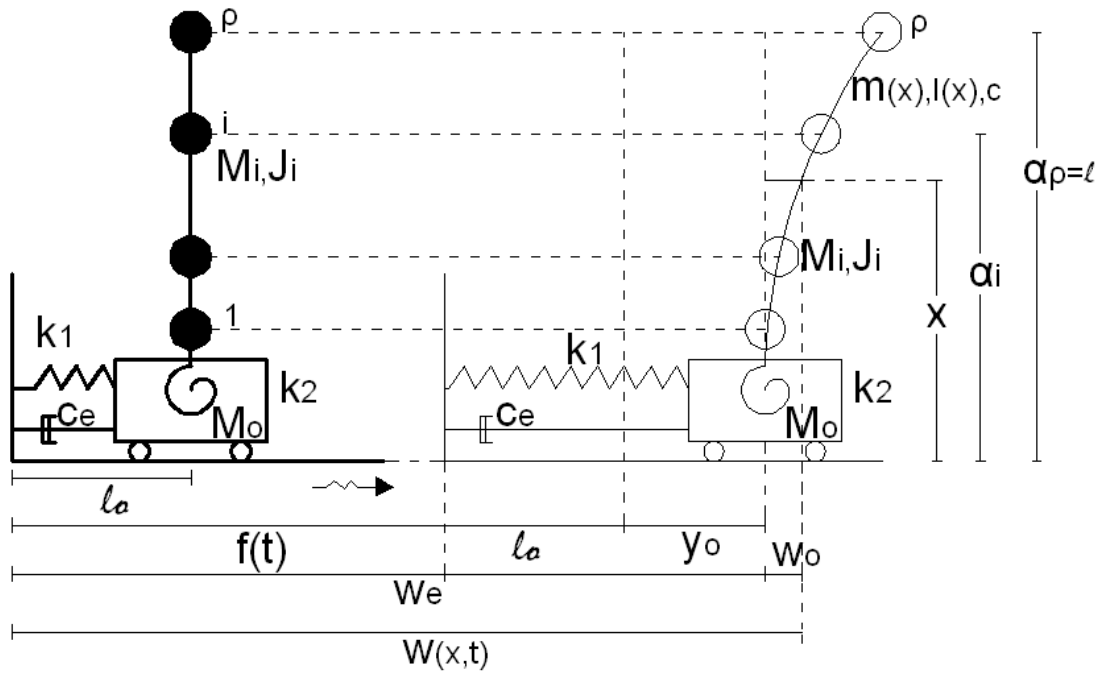
Από την (2θ) προσδιορίζεται το φάσμα των ιδιοσυχνοτήτων  $\omega$  του φορέα. Μπορούμε επομένως να βρούμε τις τιμές του  $\lambda$  που ικανοποιούν την εξίσωση συσχρότητας. Χρησιμοποιώντας τις τρεις πρώτες εξισώσεις του παραπάνω συστήματος είμαστε σε θέση να προσδιορίσουμε την ακριβή μορφή της συναρτήσεως σχήματος  $X(x)$  που δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$X_n = d_1 (\sin \lambda_n x + \frac{d_2}{d_1} \cos \lambda_n x + \frac{d_3}{d_1} \sinh \lambda_n x + \frac{d_4}{d_1} \cosh \lambda_n x) \quad (2\iota)$$

όπου:

$$\begin{aligned} \frac{d_2}{d_1} &= -\frac{\bar{k}_2 (\sin \lambda_n l + \sinh \lambda_n l)}{k_2 (\cos \lambda_n l + \cosh \lambda_n l) + 2\lambda_n \sinh \lambda_n l} \\ \frac{d_3}{d_1} &= -1 + \frac{2\lambda_n (\sin \lambda_n l + \sinh \lambda_n l)}{k_2 (\cos \lambda_n l + \cosh \lambda_n l) + 2\lambda_n \sinh \lambda_n l} \\ \frac{d_4}{d_1} &= -\frac{d_2}{d_1} \end{aligned} \quad (2\kappa)$$

**2.3 Το σύστημα δοκού – προβόλου με συγκεντρωμένες μάζες και σύστημα αποσβέσεως στη βάση**



Σχήμα 2.1 Σύστημα δοκού – προβόλου με συγκεντρωμένες μάζες και σύστημα αποσβέσεως στη βάση.

Θα θεωρήσουμε εδώ ότι το σύστημα δοκού – προβόλου του σχήματος 2.1 υπόκειται σε εδαφική κίνηση:

$$f=f(t) \tag{3α}$$

Η συνολική μετακίνηση του συστήματος απόσβεσης είναι:

$$w_e(t) = f(t) + l_o + y_o - l_o = f(t) + y_o(t) \tag{3β}$$

Οι δρώσες δυνάμεις στο σύστημα είναι οι δυνάμεις αδράνειας της κατασκευής:

$$M_o(\ddot{f} + \ddot{y}_o) + \int_0^l m(x)(\ddot{f} + \ddot{y}_o + \ddot{w}_o) dx \tag{4α}$$



Οι παραπάνω δυνάμεις πρέπει να ισορροπούνται από τις δυνάμεις επαναφοράς:

$$k_1 y_o + c_e \dot{y}_o \quad (4\beta)$$

Επομένως προκύπτει η εξίσωση:

$$[M_o + \int_0^l m(x) dx] \ddot{y}_o + c_e \dot{y}_o + k_1 y_o = -(M_o + \int_0^l m(x) dx) \ddot{f}(t) - \int_0^l m(x) \ddot{w}_o(x, t) dx$$

$$\text{ή } \ddot{y}_o + 2\beta_e \dot{y}_o + \omega_e^2 y_o = -\ddot{f}(t) - \frac{\omega_e^2}{k_1} \int_0^l m(x) \ddot{w}_o(x, t) dx, \quad (5\alpha)$$

$$\text{όπου } \beta_e = \frac{c_e}{2[M_o + \int_0^l m(x) dx]}, \omega_e^2 = \frac{k_1}{[M_o + \int_0^l m(x) dx]}$$

Η λύση της παραπάνω εξίσωσης δίδεται με το ολοκλήρωμα του Duhamel:

$$y_o(t) = -\frac{1}{\omega_e} \int_0^t e^{-\beta_e(t-\tau)} \left[ \ddot{f}(\tau) - \frac{\omega_e^2}{k_1} \int_0^l m(x) \ddot{w}_o(x, \tau) dx \right] \sin \bar{\omega}_e(t-\tau) d\tau$$

$$\text{όπου: } \bar{\omega}_e = \sqrt{\omega_e^2 - \beta_e^2} \quad (5\beta)$$

Η εξίσωση κίνησης της δοκού του σχήματος 2.1 δίδεται από την σχέση:

$$EI_y(x) w''(x, t)'' + \sum_{i=1}^p M_i g w'' H(\alpha_i - x) + c \dot{w} + [m(x) + \sum_{i=1}^p M_i \delta(x - a_i)] \ddot{w} + \sum_{i=1}^p J_{y_i} \ddot{w}'(x, t) \delta'(x - \alpha_i) = 0 \quad (6\alpha)$$

$$\text{όπου: } w = w_e + w_o = f(t) + y_o(t) + w_o(x, t) \quad (6\beta)$$

Εισάγοντας την εξίσωση (6β) στην εξίσωση (6α) λαμβάνουμε:

$$EI(x) w_o'''' + \sum_{i=1}^p M_i g w_o'' H(\alpha_i - x) + c \dot{w}_o + [m(x) + \sum_{i=1}^p M_i \delta(x - a_i)] \ddot{w}_o + \sum_{i=1}^p J_{y_i} \ddot{w}_o'(x, t) \delta'(x - \alpha_i) = -[m(x) + \sum_{i=1}^p M_i \delta(x - \alpha_i)] (\ddot{f} + \ddot{y}_o) - c(\dot{f} + \dot{y}_o) \quad (6\gamma)$$

όπου το  $y_o$  δίδεται από την εξίσωση (5β).

Οι εξισώσεις (6γ) και (5β) αποτελούν ένα ολοκληρωτικό διαφορικό σύστημα με αγνώστους τα  $w_o$  και  $y_o$ .

Αναζητούμε λύση της μορφής:

$$w_o(x, t) = \sum_n^p X_n(x) \cdot T_n(t) \quad (7\alpha)$$

όπου,  $T_p(t)$  συναρτήσεις του χρόνου, που θα προσδιοριστούν στη συνέχεια και  $X_n(t)$  συναρτήσεις του  $x$  τυχαία εκλεγμένες, που ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες. Στην παρούσα περίπτωση εκλέγουμε τις συναρτήσεις σχήματος της δοκού αναφοράς της παραγράφου 2.2.

Οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος είναι:

$$\begin{aligned} w_o(x, 0) = \dot{w}_o(x, 0) = 0 \\ y_o(0) = \dot{y}_o(0) = 0 \end{aligned} \quad (7\beta)$$

Εισάγοντας την (7α) στις (6γ) και (5β) λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} EI(x)X_n'''' \cdot T_n + \sum_{i=1}^p M_i g \left( \sum_n X_n'' T_n \right) H(\alpha_i - x) + c \sum_n X_n \dot{T}_n + [m(x) + \\ + \sum_{i=1}^p M_i \delta(x - \alpha_i)] \sum_n X_n \ddot{T}_n + \sum_{i=1}^p \{J_i (\sum_n X_n' \ddot{T}_n) \delta'(x - \alpha_i)\} = \quad \text{και} \\ -[m(x) + \sum_{i=1}^p M_i \delta(x - \alpha_i)] (\ddot{f} + \ddot{y}_o) - c(\dot{f} + \dot{y}_o) \\ y_o(t) = -\frac{1}{\omega_e} \int_0^t e^{-\beta_e(t-\tau)} \left\{ \ddot{f}(\tau) - \frac{\omega_e^2}{k_1} \int_0^l (m(x) \sum_{i=1}^p X_n \ddot{T}_n(\tau)) dx \right\} \sin \bar{\omega}_e(t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (8\alpha)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις παραπάνω εξισώσεις με  $X_k$  και ολοκληρώνοντας από 0 έως  $l$  λαμβάνουμε:

$$\sum_n \beta_{nk} T_n + \sum_{i=1}^p (M_i g \sum_n \gamma_{nk}(\alpha_i) T_n) + c \sum_n \delta_{nk} \ddot{T}_n + \sum_n \varepsilon_{nk} \ddot{T}_n + \sum_n \zeta_{nk}(\alpha_i) \ddot{T}_n = H_k(\ddot{f} + \ddot{y}_o) + \Theta_k(\dot{f} + \dot{y}_o)$$

$$y_o(t) = -\frac{1}{\omega_e} \int_0^t e^{-\beta_e(t-\tau)} \ddot{f}(\tau) \sin \bar{\omega}_e(t-\tau) d\tau + \frac{\bar{\omega}_e^{-2}}{k_1} \int_0^t \{e^{-\beta_e(t-\tau)} \sin \bar{\omega}_e(t-\tau) \sum_n A_n \ddot{T}_n(\tau)\} d\tau \quad (8\beta)$$

$$\beta_{nk} = \int_0^l (EI(x) X_n''')'' X_k dx$$

$$\gamma_{nk}(\alpha_i) = \int_0^{\alpha_i} X_n'' X_k dx$$

όπου:

$$\delta_{nk} = \int_0^l X_n X_k dx$$

$$\varepsilon_{nk} = \int_0^l m(x) X_n X_k dx + \sum_{i=1}^p M_i X_n(\alpha_i) X_k(\alpha_i)$$

και

(8γ)

$$\zeta_{nk}(\alpha_i) = -\sum_{i=1}^p J_i [X_n''(\alpha_i) X_k(\alpha_i) + X_n'(\alpha_i) X_k'(\alpha_i)]$$

$$H_k = -\int_0^l m(x) X_k dx - \sum_{i=1}^p M_i X_k(\alpha_i)$$

$$\Theta_k = -\int_0^l X_k dx$$

$$A_n = \int_0^l m(x) X_n dx$$

Προκειμένου να επιλυθεί το παραπάνω διαφορικό σύστημα των εξισώσεων, θα εφαρμοστεί ο μετασχηματισμός **Laplace**.

$$LT_n(t) = S_n(p)$$

$$\text{Θέτουμε: } Ly_o(t) = Y_o(p) \quad (9\alpha)$$

$$Lf(t) = F(p)$$

Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες της (7β) εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό Laplace και λόγω του θεωρήματος του Borel, έχουμε:

$$Y_o(p) = -\frac{1}{\omega_e} AP(p)p^2 F(p) + \frac{\overline{\omega}_e}{k_1} AP(p)p^2 \sum_n A_n S_n(p), \tag{9\beta}$$

όπου  $AP(p) = Le^{-\beta_e t} \sin \overline{\omega}_e t = \frac{\overline{\omega}_e}{\overline{\omega}_e^2 + (\beta_e + p)^2}$

Και η εξίσωση (8β) γίνεται:

$$\begin{aligned} \sum_n \beta_{nk} S_n(p) + \sum_{i=1}^{\rho} M_i g(\sum_n \gamma_{nk} S_n(p)) + c \sum_n p \delta_{nk} S_n(p) + \sum_n p^2 (\epsilon_{nk} + \zeta_{nk}) S_n(p) = \\ H_k p^2 F(p) + H_k p^2 \left(-\frac{1}{\omega_e} AP(p)p^2 F(p) + \frac{\overline{\omega}_e}{k_1} AP(p)p^2 \sum_n A_n S_n(p)\right) + \Theta_k p F(p) + \\ + \Theta_k p \left(-\frac{1}{\omega_e} AP(p)p^2 F(p) + \frac{\overline{\omega}_e}{k_1} AP(p)p^2 \sum_n A_n S_n(p)\right) \end{aligned} \tag{9\gamma}$$

ή

$$\begin{aligned} G_{11} S_1 + G_{12} S_2 + \dots + G_{1n} S_n = R_1 \\ G_{21} S_1 + G_{22} S_2 + \dots + G_{2n} S_n = R_2 \\ \dots \\ G_{k1} S_1 + G_{k2} S_2 + \dots + G_{kn} S_n = R_k \\ G_{n1} S_1 + G_{n2} S_2 + \dots + G_{nk} S_n = R_n \end{aligned} \tag{10\alpha}$$

όπου :

$$\begin{aligned} G_{kp} = \beta_{pk} + \left(\sum_{i=1}^{\rho} M_i g\right) \gamma_{pk} + c_p \delta_{pk} + p^2 (\epsilon_{pk} + \zeta_{pk}) - (H_k p^4 + \Theta_k p^3) \frac{\overline{\omega}_e}{k_1} A(p) \\ R_k = (H_k p^2 + \Theta_k p) F(p) - (H_k p^4 + \Theta_k p^3) \frac{AP(p) F(p)}{\overline{\omega}_e} \end{aligned} \tag{10\beta}$$

Η επίλυση του παραπάνω συστήματος εξισώσεων (10α) δίνει τους αγνώστους S(p) υπό την μορφή:

$$S_p(p) = \frac{N_j(p)}{Q_j(p)} \tag{11}$$

όπου N<sub>j</sub>(p) και Q<sub>j</sub>(p) είναι πολυώνυμα ως προς p, όπου το Q<sub>j</sub>(p) είναι ανώτερης τάξης από το N<sub>j</sub>(p). Έτσι, μπορεί να εφαρμοστεί ο τύπος του Heaviside, καταλήγοντας τελικά στην παρακάτω έκφραση για την συνάρτηση χρόνου T<sub>p</sub>(t):

$$T_p(t) = L^{-1}S_p(p) = L^{-1} \frac{N_j}{Q_j} = \sum_{g=1}^{\kappa} \frac{N_j(p_g) e^{p_g t}}{Q_j'(p_g)} \quad (12)$$

όπου,  $p_g$  είναι οι  $\kappa$  ρίζες για ( $g=1$  έως  $\kappa$ ) του πολυωνύμου  $Q_j(p)$ .

### 2.3.1 Η εξίσωση της σεισμικής κίνησης

Στις εφαρμογές θα χρησιμοποιήσουμε μια απλοποιημένη μορφή εδαφικής μετακίνησης όπως η ακόλουθη η οποία όμως εκφράζει περισσότερο την εδαφική κίνηση μετά το πρώτο πλήγμα κατά την εκδήλωση του σεισμού.

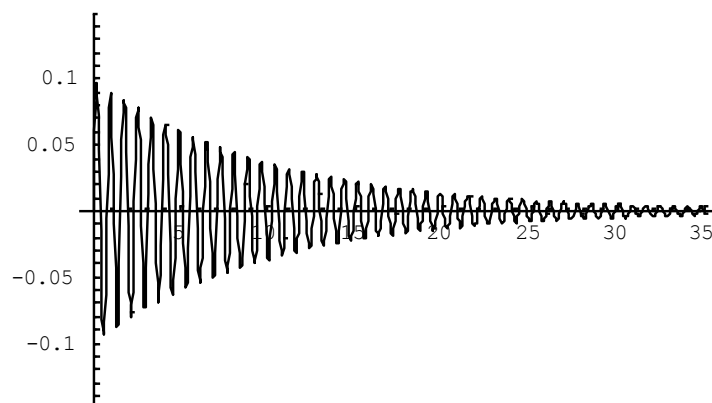
Εξίσωση εδαφικής μετακίνησης (κοντινού σεισμού):  $f(t) = \delta \cdot e^{-\alpha t} \sin(\Omega t)$

Υπολογίζονται:  $\dot{f}(t) = \delta \cdot e^{-\alpha t} (-\alpha \sin(\Omega t) + \Omega \cos(\Omega t))$

$$\ddot{f}(t) = \delta \cdot e^{-\alpha t} (-\alpha^2 \sin(\Omega t) - 2\alpha\Omega \cos(\Omega t) - \Omega^2 \sin(\Omega t))$$

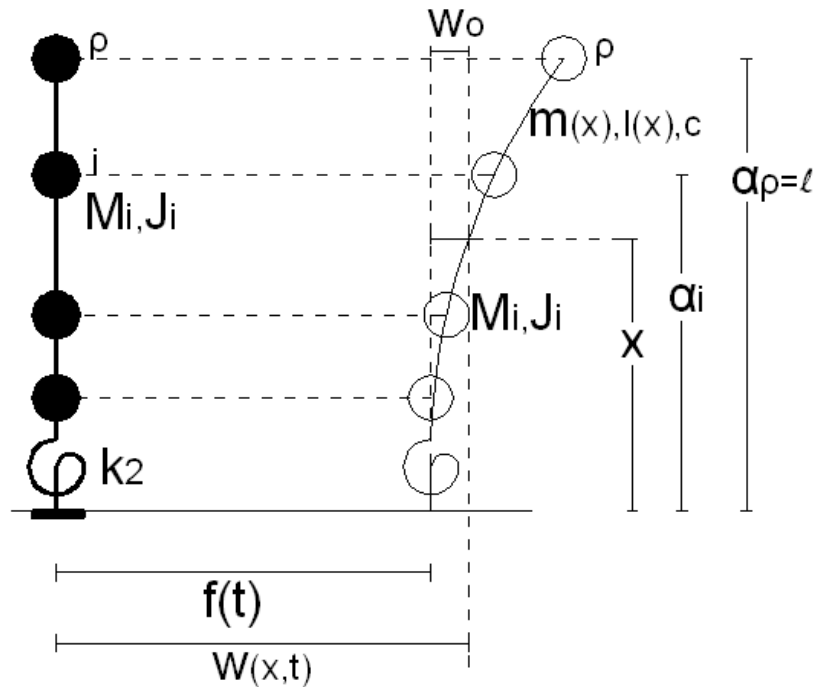
και ακόμα:  $L(e^{-\alpha t} \sin(\Omega t)) = \frac{p\Omega}{(p+\alpha)^2 + \Omega^2}$

$$L(e^{-\alpha t} \cos(\Omega t)) = \frac{p(p+\alpha)}{(p+\alpha)^2 + \Omega^2}$$



Σχήμα 2.3 Αρμονική σεισμική διέγερση του συστήματος.

**2.4. Το σύστημα δοκού - προβόλου με συγκεντρωμένες μάζες χωρίς σύστημα αποσβέσεως**



Σχήμα 2.4 Σύστημα δοκού-προβόλου με συγκεντρωμένες μάζες χωρίς σύστημα απόσβεσης

Η εξίσωση κινήσεως του σχήματος 2.4 χωρίς σύστημα αποσβέσεως ( $C_e=0$ ) είναι η εξής:

$$EI_y(x)w''(x,t)'' + \sum_{i=1}^p M_i g w'' H(\alpha_i - x) + c\dot{w} + \bar{m}(x)\ddot{w} + \sum_{i=1}^p J_i \ddot{w}'(x,t)\delta'(x - \alpha_i) = 0$$

όπου όμως:  $w(x,t) = f(t) + w_o(x,t)$  (12α,β)

Εισάγοντας την (12β) στην (12α), λαμβάνουμε:

$$EI(x)w_o'''' + \sum_{i=1}^p M_i g w_o'' H(\alpha_i - x) + c\dot{w}_o + m(x)\ddot{w}_o + \sum_{i=1}^p J_i \ddot{w}_o'(x,t)\delta'(x - \alpha_i) = -m(x)\ddot{f} - c\dot{f} \quad (12\gamma)$$

Αναζητούμε και πάλι λύση χωριζομένων μεταβλητών της μορφής:

$$w_o(x,t) = \sum_n X_n(x) \cdot T_n(t) \quad (13\alpha)$$

όπου  $T_n(t)$  είναι η χρονική συνάρτηση που θα προσδιορίσουμε και  $X_n(x)$  η αντίστοιχη ιδιομορφή μιας δοκού χωρίς συγκεντρωμένες μάζες με ελαστική πάκτωση, όπως αυτή του σχήματος 2.2. Η έκφραση  $X_n$  δίδεται από τις σχέσεις (2ι), (2κ).

Εισάγοντας την (13α) στην (12γ) λαμβάνουμε:

$$\sum_n EI(x)X_n'''' \cdot T_n + \sum_{i=1}^p M_i g(\sum_n X_n'' T_n) H(\alpha_i - x) + c \sum_n X_n \dot{T}_n + m(x) \sum_n X_n \ddot{T}_n + \sum_{i=1}^p \{J_i (\sum_n X_n' \ddot{T}_n) \delta'(x - \alpha_i)\} = -m(x)\ddot{f} - c\dot{f} \quad (13\beta)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (13β) επί  $X_k$  και ολοκληρώνοντας από 0 έως  $l$  λαμβάνουμε:

$$\int_0^l \sum_n EI(x)X_n'''' X_k \cdot T_n dx + \int_0^l \{ \sum_{i=1}^p M_i g(\sum_n X_n'' X_k T_n) H(\alpha_i - x) \} dx + c \int_0^l \sum_n X_n X_k \dot{T}_n dx + \int_0^l m(x) \sum_n X_n X_k \ddot{T}_n dx + \int_0^l \{ J_i (\sum_n X_n' X_k \ddot{T}_n) \delta'(x - \alpha_i) \} dx = -\ddot{f} \int_0^l m(x) X_k dx - c\dot{f} \int_0^l X_k dx \quad (13\gamma)$$

Με τους συμβολισμούς της (8γ) η παραπάνω γράφεται:

$$\sum_n \beta_{nk} T_n + \sum_{i=1}^p (M_i g \sum_n \gamma_{nk}(\alpha_i) T_n) + c \sum_n \delta_{nk} \dot{T}_n + \sum_n E_{nk} \ddot{T}_n + \sum_n \zeta_{nk}(\alpha_i) \ddot{T}_n = H_k \ddot{f} + c \cdot \Theta_k \dot{f} \quad (13\delta)$$

$$\text{όπου: } E_{nk} = \int_0^l m(x) X_n X_k dx$$

Εφαρμόζοντας και πάλι τον μετασχηματισμό Laplace με αρχικές συνθήκες:

$$w_o(x, 0) = \dot{w}_o(x, 0) = 0 \quad (14\alpha)$$

$$f(0) = \dot{f}(0) = 0$$

$$\text{και τους συμβολισμούς: } \begin{aligned} LT_n(t) &= S_n(p) \\ Lf(t) &= F(p) \end{aligned} \quad (14\beta)$$

η (13δ) γράφεται τελικώς:

$$\sum_n \beta_{nK} S(p) + \sum_{i=1}^p (M_i g \sum_n \gamma_{nK}(\alpha_i) S(p)) + c \cdot p \sum_n \delta_{nK} S(p) + p^2 \sum_n E_{nK} S(p) + p^2 \sum_n \zeta_{nK}(\alpha_i) S(p) = c \cdot p \cdot \Theta_K F + H_K p^2 F \quad (14\gamma)$$

και τελικώς λαμβάνουμε το σύστημα (10α) όπου όμως είναι:

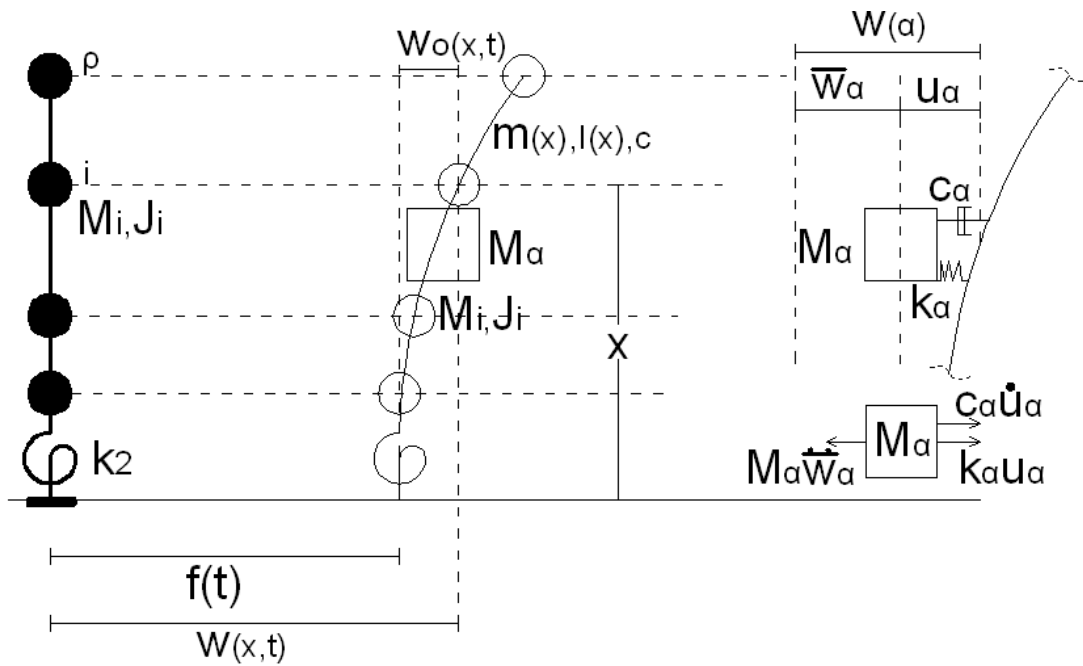
$$G_{K\zeta} = \beta_{\zeta K} + \left( \sum_{i=n}^p M_i g \right) \gamma_{pK} + c \cdot p \cdot \delta_{pK} + p^2 (E_{pK} + \zeta_{pK}) \quad (14\delta)$$

$$R_K = c \cdot p \cdot \Theta_K + p^2 \cdot H_K$$

Επιλύοντας το παραπάνω σύστημα (10α), λαμβάνουμε τα  $S_\zeta$  ( $\zeta = 1$  έως  $n$ ) και επομένως:  $T_\zeta = L^{-1} S_\zeta$  (15)



**2.5 Το σύστημα δοκού – προβόλου με συγκεντρωμένες μάζες και σύστημα αποσβέσεως συντονισμένου αποσβεστήρα μάζας (T.M.D.)**



Σχήμα 2.5 Σύστημα δοκού – προβόλου με συγκεντρωμένες μάζες και σύστημα αποσβεστήρα μάζας καθ’ ύψος.

Στο κεφάλαιο αυτό θα προσδιορίσουμε το μαθηματικό μοντέλο ενός συστήματος δοκού – προβόλου με συγκεντρωμένες καθ’ ύψος μάζες, στο οποίο τοποθετείται συντονισμένος αποσβεστήρας μάζας στη θέση (α) (T.M.D - Tuned Mass Damper).

Θεωρούμε ότι το σύστημα του σχήματος 2.5 το οποίο υπόκειται σε εδαφική κίνηση που περιγράφεται από την εξίσωση (3α).

Για την περίπτωση αυτή με το σύστημα αποσβέσεως συντονισμένου αποσβεστήρα (TMD), το σύστημα της ολισθαίνουσας μάζας στη βάση της δοκού παραλείπεται. Επομένως ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$M_{\alpha} \ddot{w}_{\alpha} = k_{\alpha} u_{\alpha} + c_{\alpha} \dot{u}_{\alpha} \tag{16\alpha}$$

Από το σχήμα 2.5 προκύπτει:  $\bar{w}_{\alpha} = w(\alpha, t)_{\alpha}$  ή  $\ddot{\bar{w}}_{\alpha} = \ddot{w}(\alpha, t) - \ddot{u}_{\alpha}$ , οπότε η εξίσωση (16α) γίνεται:

$M_\alpha [\ddot{w}_\alpha(\alpha, t) - \ddot{u}_\alpha] = k_\alpha u_\alpha + c_\alpha \dot{u}_\alpha$ , και τελικώς έχουμε:

$$\ddot{u}_\alpha + 2\beta_\alpha \dot{u}_\alpha + \omega_\alpha^2 u_\alpha = \ddot{w}(\alpha, t) \quad (16\beta)$$

$$\text{όπου: } \beta_\alpha = \frac{C_\alpha}{2M_\alpha}, \omega_\alpha^2 = \frac{k_\alpha}{M_\alpha}$$

Η εξίσωση ταλάντωσης τους συστήματος του σχήματος 2.5 δίδεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$EI(x)w''(x, t)'' + \sum_{i=1}^p M_i g w'' H(\alpha_i - x) + c\dot{w} + \bar{m}(x)\ddot{w} + \sum_{i=1}^p J_i \ddot{w}'(x, t)\delta'(x - \alpha_i) + M_\alpha \ddot{w}_\alpha \delta(x - \alpha) = 0 \quad (17\alpha)$$

$$\text{όπου: } w(x, t) = f(t) + w_o(x, t) \quad (17\beta)$$

Επιπρόσθετα, ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\ddot{w}_\alpha \delta(x - \alpha) = (\ddot{w}(\alpha, t) - \ddot{u}_\alpha)\delta(x - \alpha) - \ddot{u}_\alpha$$

$$\text{όποτε προκύπτει τελικά: } \ddot{w}_\alpha \delta(x - \alpha) = \ddot{w}(x, t)\delta(x - \alpha) - \ddot{u}_\alpha \quad (17\gamma)$$

Εισάγοντας την (17β) στην (17α), λαμβάνοντας υπόψη την (17γ), προκύπτει:

$$EI(x)w_o'''' + \sum_{i=1}^p M_i g w_o'' H(\alpha_i - x) + c\dot{w}_o + \bar{m}(x)\ddot{w}_o + \sum_{i=1}^p J_i \ddot{w}_o' \delta'(x - \alpha_i) + M_\alpha \ddot{w}_o \delta(x - \alpha) = -c\dot{f} - (\bar{m}(x) + M_\alpha)\ddot{f} + M_\alpha \ddot{u}_\alpha \quad (17\delta)$$

$$\text{και } \ddot{u}_\alpha + 2\beta_\alpha \dot{u}_\alpha + \omega_\alpha^2 u_\alpha = \ddot{w}_o(x, t)\delta(x - \alpha) + \ddot{f}(t) \quad (17\epsilon)$$

Οι εξισώσεις (17δ) και (17ε) αποτελούν ένα διαφορικό σύστημα εξισώσεων με αγνώστους τα  $w_o$  και  $u_\alpha$ .

$$\text{Αναζητούμε λύση της μορφής: } w_o(x, t) = \sum_n X_n(x) \cdot T_n(t) \quad (18\alpha)$$

όπου  $T_n(t)$  είναι συνάρτηση του χρόνου που θα προσδιορίσουμε, και  $X_n(x)$  είναι οι ιδιομορφές που αντιστοιχούν στην απλή δοκό του σχήματος 2.2, χωρίς συγκεντρωμένες μάζες και για  $f(t)=0$ . Η έκφραση των  $X_n(x)$  δίδεται από την εξίσωση (2ε).

Εισάγοντας την (18α) στις (17δ) και (17ε), προκύπτει:

$$\sum_n EI(x)X_n'''' \cdot T_n + \sum_{i=1}^p \{M_i g(\sum_n X_n'' T_n) H(\alpha_i - x)\} + c \sum_n X_n \dot{T}_n + \bar{m}(x) \sum_n X_n \ddot{T}_n + \quad (18\beta)$$

$$+ \sum_{i=1}^p \{J_i (\sum_n X_n' \ddot{T}_n) \delta'(x - \alpha_i) + M_\alpha \sum_n X_n \ddot{T}_n \delta(x - \alpha_i)\} = -c\dot{f} - (\bar{m} + M_\alpha)\ddot{f} + M_\alpha \ddot{u}_\alpha$$

$$\ddot{u}_\alpha + 2\beta_\alpha \dot{u}_\alpha + \omega_\alpha^2 u_\alpha = \ddot{f}(t) + \sum_n X_n \ddot{T}_n \delta(x - \alpha) \quad (18\gamma)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις ανωτέρω εξισώσεις με  $X_k$  και ολοκληρώνοντας από 0 έως  $H$ , προκύπτει:

$$\sum_n \beta_{nk} T_n + \sum_{i=1}^p (M_i g \sum_n \gamma_{nk}(\alpha_i) T_n) + c \sum_n \delta_{nk} \dot{T}_n + \sum_n \varepsilon_{nk} \ddot{T}_n + \sum_n \zeta_{nk}(\alpha_i) \ddot{T}_n + M_\alpha \sum_n N_{nk} \ddot{T}_n = \quad (19\alpha)$$

$$c\Theta_k \dot{f} - \Lambda_k \ddot{f} + M_\alpha \Theta_k \ddot{u}_\alpha$$

$$\ddot{u}_\alpha + 2\beta_\alpha \dot{u}_\alpha + \omega_\alpha^2 u_\alpha = \ddot{f} + \sum_n N_{nk} \ddot{T}_n$$

όπου  $\beta_{nk}$ ,  $\gamma_{nk}$ ,  $\delta_{nk}$ ,  $\varepsilon_{nk}$ ,  $\zeta_{nk}$ , είναι σχέσεις από την εξίσωση (8γ) και:

$$N_{nk} = X_n(\alpha) X_k(\alpha) \quad (19\beta)$$

$$\Lambda_{nk} = \int_0^H \bar{m}(x) X_k dx + M_\alpha X_k(\alpha)$$

Οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος είναι:

$$w_o(x, 0) = \dot{w}_o(x, 0) = 0 \quad (20\alpha)$$

$$u_o(0) = \dot{u}_o(0) = 0$$

Προκειμένου να επιλυθεί το παραπάνω διαφορικό σύστημα των εξισώσεων, θα εφαρμοστεί ο μετασχηματισμός **Laplace**.

$$LT_n(t) = S_n(p)$$

$$\text{Θέτουμε: } Lu_o(t) = U_o(p) \quad (20\beta)$$

$$Lf(t) = F(p)$$

και ακόμα ισχύει:

$$\begin{aligned}
 L\dot{T}_n(t) &= pS_n(p), L\ddot{T}_n(t) = p^2S_n(p) \\
 L\dot{U}_\alpha(t) &= pU(p), L\ddot{U}_\alpha(t) = p^2U(p) \\
 L\dot{f}(t) &= pF(p), L\ddot{f}(t) = p^2F(p)
 \end{aligned}
 \tag{20\gamma}$$

Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό Laplace στην εξίσωση (19α) προκύπτει:

$$\sum_n \beta_{nk} S_n + \sum_{i=1}^p (M_i g \sum_n \gamma_{nk}(\alpha_i) S_n) + cp \sum_n \delta_{nk} S_n + p^2 \sum_n \varepsilon_{nk} S_n + p^2 \sum_n \zeta_{nk}(\alpha_i) S_n + p^2 M_\alpha \sum_n N_{nk} S_n = cp\Theta_k F - p^2 \Lambda_k F + p^2 M_\alpha \Theta_k U$$

$$(p^2 + 2\beta_\alpha p + \omega_\alpha^2)U = p^2 F + p^2 \sum_n N_{nk} S_n$$

ή τελικώς:

$$\sum_n \beta_{nk} S_n + \sum_{i=1}^p (M_i g \sum_n \gamma_{nk}(\alpha_i) S_n) + cp \sum_n \delta_{nk} S_n + p^2 \sum_n \varepsilon_{nk} S_n + p^2 \sum_n \zeta_{nk}(\alpha_i) S_n + p^2 M_\alpha \sum_n N_{nk} S_n = (cp\Theta_k F - p^2 \Lambda_k) F + p^2 M_\alpha \Theta_k U$$

$$U = \frac{p^2}{p^2 + 2\beta_\alpha p + \omega_\alpha^2} (F + \sum_n N_{nk} S_n)$$

(21α,β)

Εισάγοντας την (21β) στην (21α) προκύπτει τελικά το ακόλουθο σύστημα

εξισώσεων:

$$\begin{aligned}
 G_{11}S_1 + G_{12}S_2 + \dots + G_{1n}S_n &= R_1 \\
 G_{21}S_1 + G_{22}S_2 + \dots + G_{2n}S_n &= R_2 \\
 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
 G_{k1}S_1 + G_{k2}S_2 + \dots + G_{kn}S_n &= R_k \\
 G_{n1}S_1 + G_{n2}S_2 + \dots + G_{nk}S_n &= R_n
 \end{aligned}
 \tag{22\alpha}$$

όπου:

$$\begin{aligned}
 G_{kp} &= \beta_{pk} + \left( \sum_{i=1}^p M_i g \gamma_{pk}(\alpha_i) \right) + cp\delta_{pk} + p^2(\varepsilon_{pk} + \sum_{i=1}^p \zeta_{pk}(\alpha_i)) + p^2 M_\alpha N_{nk} \left( 1 - \frac{p^2 \Theta_k}{p^2 + 2\beta_\alpha p + \omega_\alpha^2} \right) \\
 R_k &= (cp\Theta_k - p^2 \Lambda_{nk})F
 \end{aligned}
 \tag{22\beta}$$

Επιλύοντας το παραπάνω σύστημα (10α), λαμβάνουμε τα  $S_z$  ( $z= 1$  έως  $n$ ) και

επομένως:  $T_z = L^{-1}S_z$  (22γ)

### 3. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Θα θεωρήσουμε ένα υψηλό κτίριο με τα εξής στοιχεία:

**Ύψος κτιρίου:**  $H=200\text{m}$ .

**Ροπή αδράνειας:**  $I_0=500\text{ m}^4$  έως  $1300\text{ m}^4$ .

**Μάζα ανά μέτρο μήκους:**  $m_0=630\text{kg}^*/\text{m}$ .

**Κατανομημένες μάζες (μάζες ορόφων):**  $M_i=240000\text{kg}^*$

στις θέσεις:  $\alpha_1=40\text{m}$ .,  $\alpha_2=80\text{m}$ .,  $\alpha_3=120\text{m}$ .,  $\alpha_4=160\text{m}$ .,  $\alpha_5=200\text{m}$ .

**Μάζα θεμελίωσης:**  $M_0=600000\text{kg}^*$ .

**Μάζα αποσβεστήρα στη θέση ( $\alpha$ ) καθ' ύψος του κτιρίου:**

$M_\alpha=400000\text{kg}^*$ .

**Στροφική μαζική ροπή αδράνειας συγκεντρωμένων μαζών:**

$J_i=20 \times 10^6 \text{kg}^* \text{m}^4$ .

**Σταθερά ελαστικής πάκτωσης:**  $\bar{k}_2 = \frac{k_2}{EI} = 1$

Η επίλυση του προβλήματος ώστε να προσδιοριστεί η απόκριση του κτιρίου για δεδομένη εδαφική κίνηση  $f(t)$ , πραγματοποιήθηκε στο περιβάλλον του λογισμικού «**Mathematica v.4.1**», όπου κατασκευάστηκαν αντίστοιχα προγράμματα για τον προσδιορισμό των ιδιοσυχνοτήτων και των ιδιομορφών της απλής δοκού – προβόλου του (σχ.2.2), του βέλους  $w(x,t)$  του συστήματος του (σχ.2.1) με σύστημα απόσβεσης στη θεμελίωση, του συστήματος του (σχ.2.3) χωρίς σύστημα απόσβεσης, και του συστήματος του (σχ.2.4) με σύστημα αποσβέσεως ολισθαίνουσας μάζας στο σημείο ( $\alpha$ ) καθ' ύψος του κτιρίου.

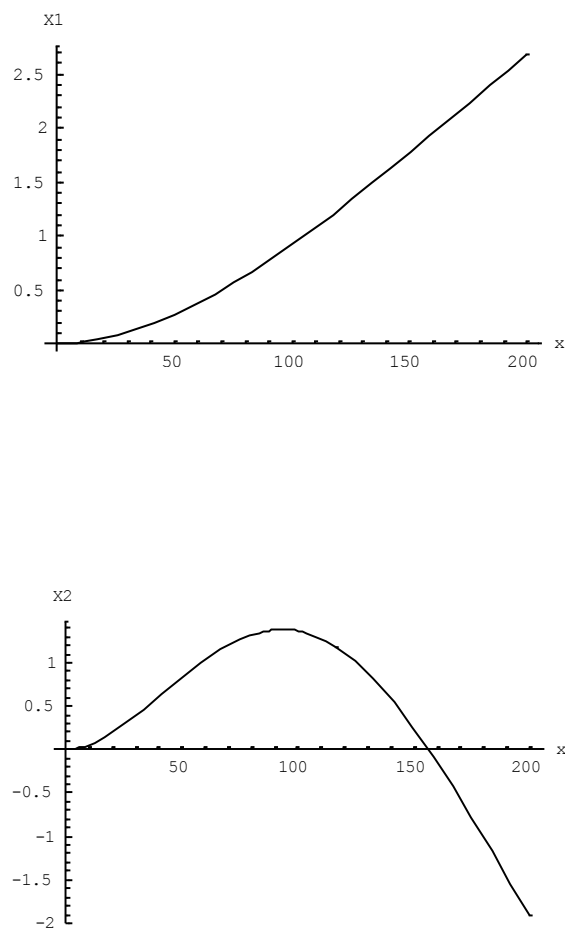
Η διαδικασία που ακολουθήθηκε είναι ο προσδιορισμός των ιδιοσυχνοτήτων και των ιδιομορφών της απλής δοκού – προβόλου(πρόγραμμα 1,2), με τις ίδιες συνοριακές συνθήκες με αυτές του συστήματος με τις συγκεντρωμένες μάζες, και

στην συνέχεια ο προσδιορισμός της απόκρισης των συστημάτων με ή χωρίς απόσβεση (πρόγραμμα 3,4,5).

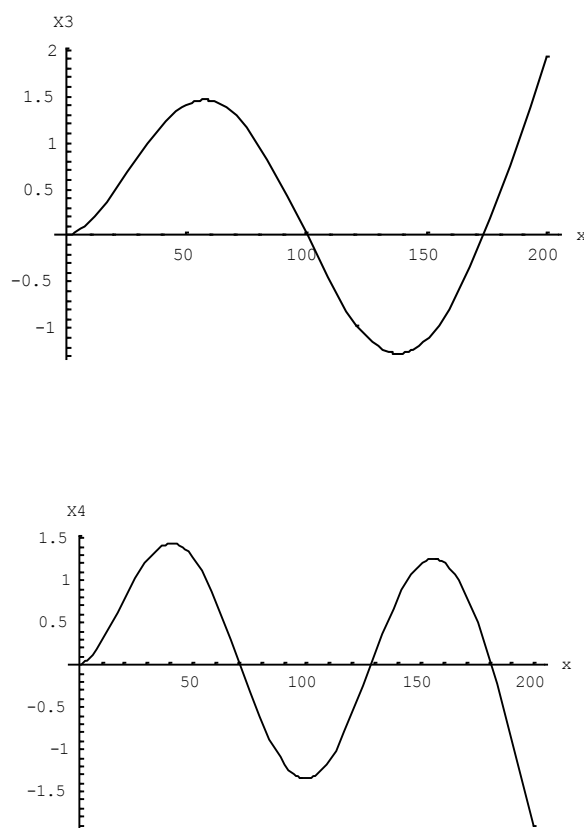
Επομένως, οι τέσσερις ιδιοσυχνότητες που προέκυψαν για την απλή δοκό - πρόβολο (παράρτημα – πρόγραμμα 1), είναι οι εξής:

$$\lambda_{n1}=0.009329 \quad \lambda_{n2}=0.023356 \quad \lambda_{n3}=0.039086 \quad \lambda_{n4}=0.054718$$

Αντίστοιχα, οι τέσσερις πρώτες ιδιομορφές που προέκυψαν (παράρτημα – πρόγραμμα 2) παρουσιάζονται στα παρακάτω διαγράμματα (Σχ.4.1):

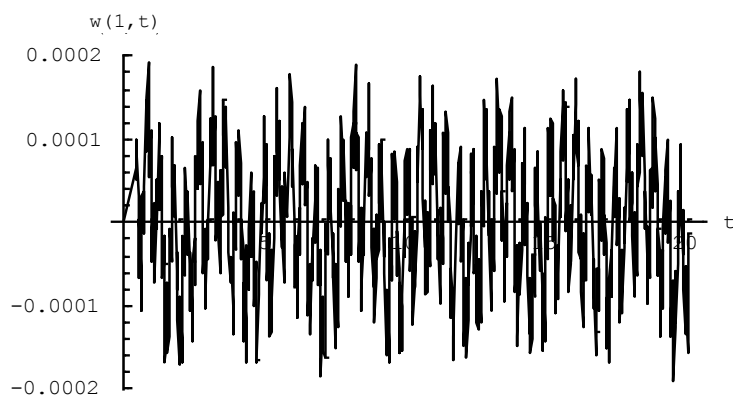


Σχήμα 3.1 Οι τέσσερις πρώτες ιδιομορφές της απλής δοκού – προβόλου.



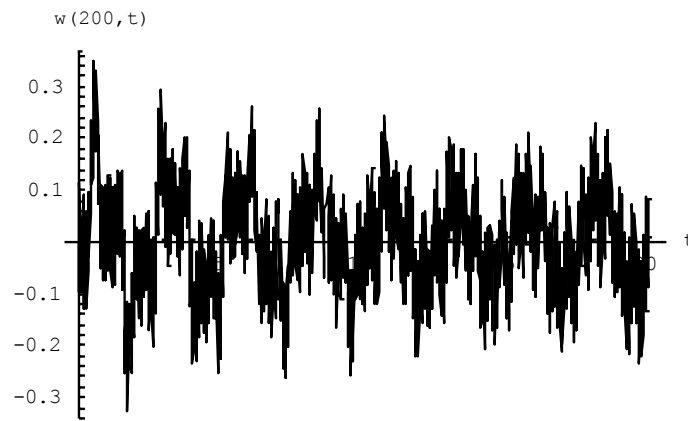
Σχήμα 3.1 Οι τέσσερις πρώτες ιδιομορφές της απλής δοκού – προβόλου.

Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας το πρόγραμμα για τη κατασκευή χωρίς σύστημα αποσβέσεως, βρίσκουμε για  $x=1\text{m}$ . και  $x=200\text{m}$ ., τα παρακάτω διαγράμματα για  $I_0=500\text{m}^4$  και  $I_0=1300\text{m}^4$ , (Σχ.4.2, Σχ.4.3), (παράρτημα – πρόγραμμα 3).

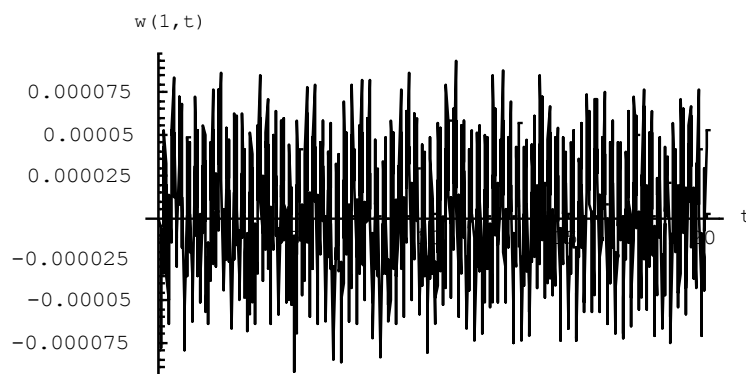


Σχήμα 3.2α. Παραμορφώσεις κατασκευής χωρίς σύστημα απόσβεσης για  $I_0=500\text{m}^4$  στη θέση  $x=1\text{m}$ .

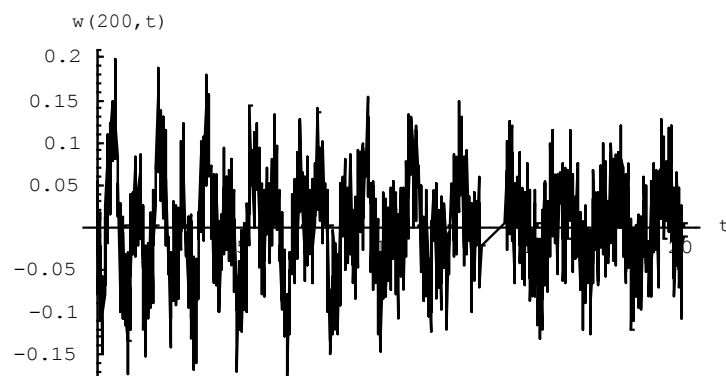




Σχήμα 3.2β Παραμορφώσεις κατασκευής χωρίς σύστημα απόσβεσης για  $I_0=500\text{m}^4$  στη θέση  $x=200\text{m}$ .



Σχήμα 3.2γ Παραμορφώσεις κατασκευής χωρίς σύστημα απόσβεσης για  $I_0=1300\text{m}^4$  στη θέση  $x=1\text{m}$ .

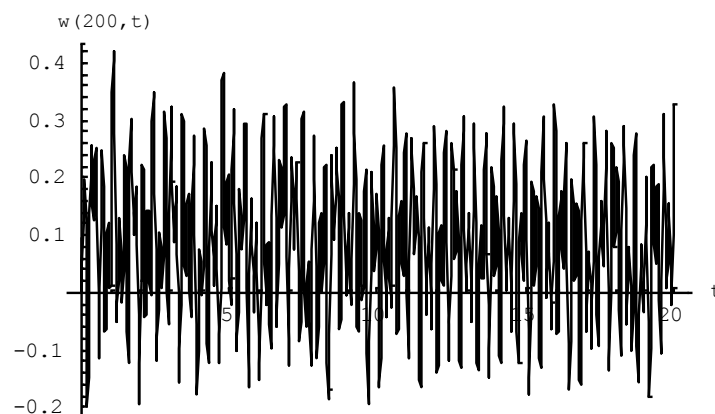


Σχήμα 3.2δ Παραμορφώσεις κατασκευής χωρίς σύστημα απόσβεσης για  $I_0=1300\text{m}^4$  στη θέση  $x=200\text{m}$ .

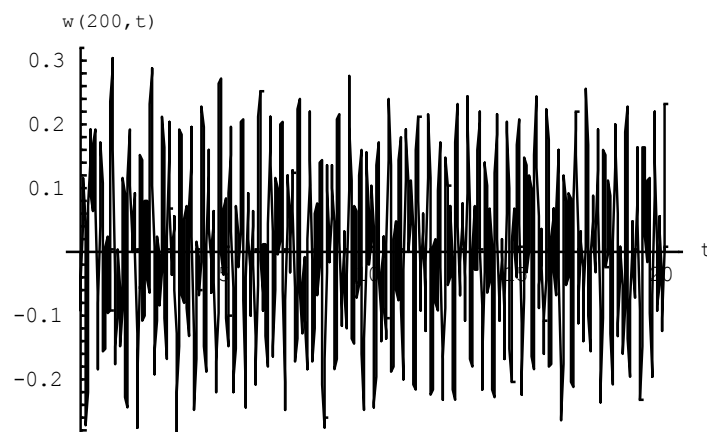
Θα μελετήσουμε τώρα την κατασκευή με σύστημα αποσβέσεως, αποτελούμενο από ελατήριο σταθεράς  $k_1$  και αμορτισέρ σταθεράς απόσβεσης  $C_e$ , (παράρτημα – πρόγραμμα 4).

Θα προσδιορίσουμε αρχικά την τιμή της σταθεράς  $k_1$  πάνω από την οποία το σύστημα μειώνει τις παραμορφώσεις, ή αλλιώς, είναι δραστικό.

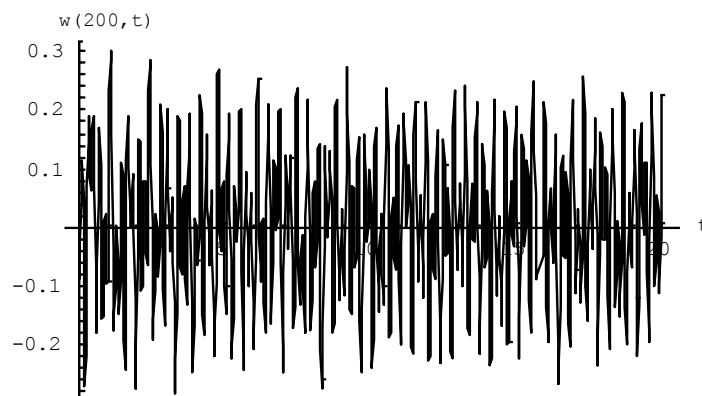
Για την περίπτωση κατασκευής με ροπή αδράνειας  $I_o=500 \text{ m}^4$ , προκύπτουν τα παρακάτω διαγράμματα για διάφορες τιμές της  $k_1$  και της σταθεράς απόσβεσης  $C_e$  (Σχ. 3.6α, 3.6β, 3.6γ, 3.6δ):



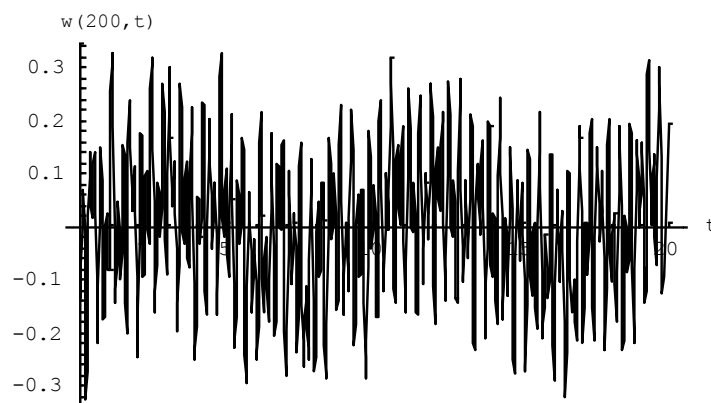
Σχήμα 3.3α Παραμορφώσεις κατασκευής με σύστημα απόσβεσης για  $I_o=500 \text{ m}^4$  με  $K_1=1000$ ,  $C_e=10$ .



Σχήμα 3.3β Παραμορφώσεις κατασκευής με σύστημα απόσβεσης για  $I_o=500 \text{ m}^4$  με  $K_1=10000$ ,  $C_e=10$ .

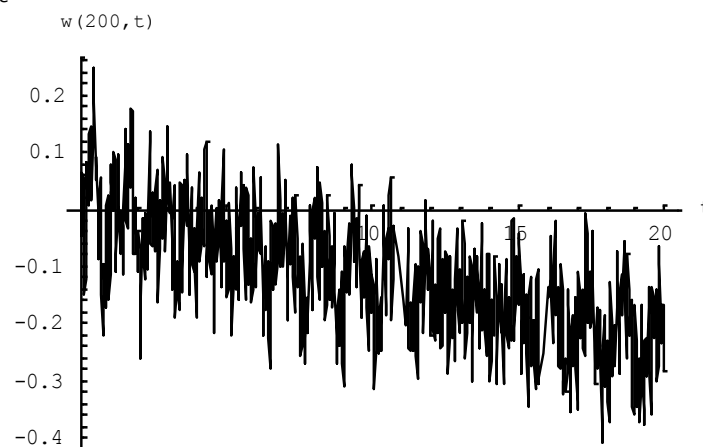


Σχήμα 3.3γ Παραμορφώσεις κατασκευής με σύστημα απόσβεσης για  $I_o=500\text{m}^4$  με  $K_1=100000$ ,  $C_e=10$ .

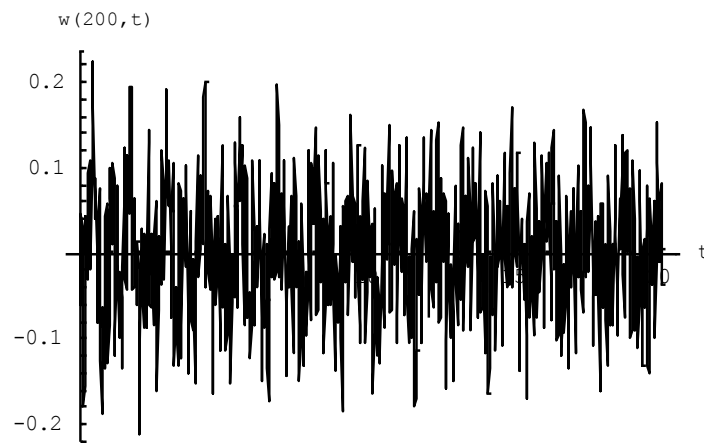


Σχήμα 3.3δ Παραμορφώσεις κατασκευής με σύστημα απόσβεσης για  $I_o=500\text{m}^4$  με  $K_1=100000$ ,  $C_e=100$ .

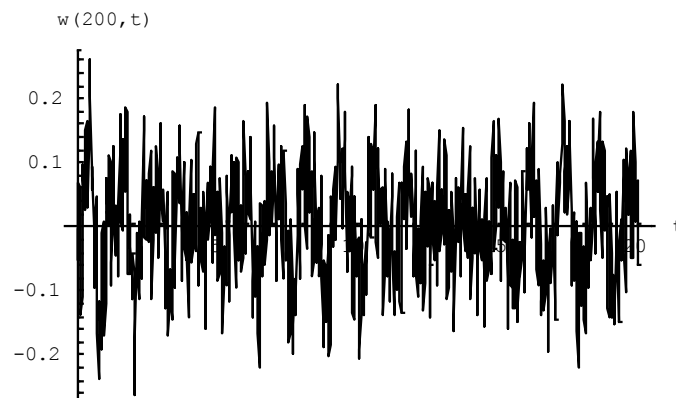
Αντιστοίχως, για την περίπτωση κατασκευής με ροπή αδράνειας  $I_o=1300\text{m}^4$ , προκύπτουν τα παρακάτω διαγράμματα για διάφορες τιμές της  $K_1$  και της σταθεράς απόσβεσης  $C_e$ :



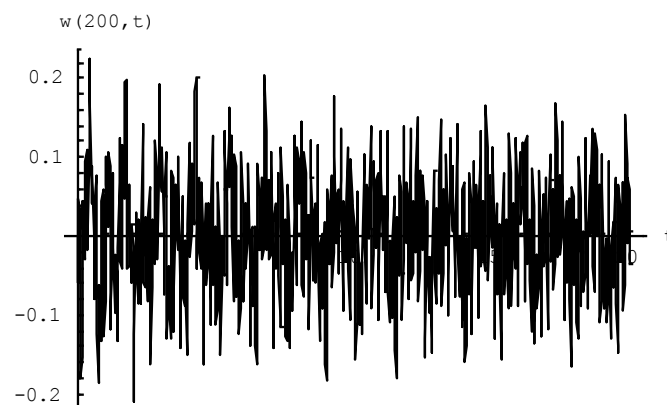
Σχήμα 3.4α Παραμορφώσεις κατασκευής με σύστημα απόσβεσης για  $I_o=1300\text{m}^4$  με  $K_1=1000$ ,  $C_e=10$ .



Σχήμα 3.4β Παραμορφώσεις κατασκευής με σύστημα απόσβεσης για  $I_0=1300\text{m}^4$  με  $K_1=10000$ ,  $C_e=10$ .



Σχήμα 3.4γ Παραμορφώσεις κατασκευής με σύστημα απόσβεσης για  $I_0=1300\text{m}^4$  με  $K_1=100000$ ,  $C_e=10$ .

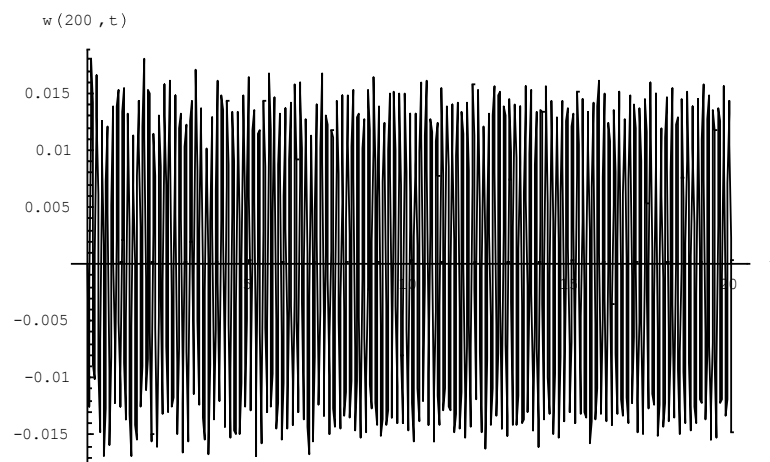


Σχήμα 3.4δ Παραμορφώσεις κατασκευής με σύστημα απόσβεσης για  $I_0=1300\text{m}^4$  με  $K_1=100000$ ,  $C_e=100$ .

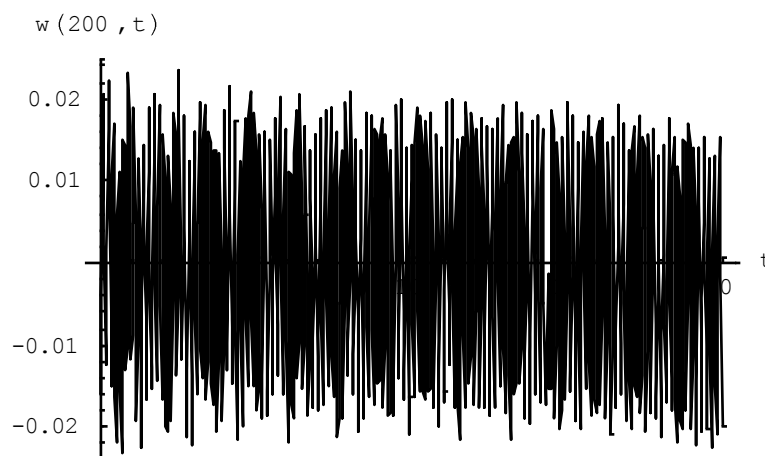
Τέλος, μελετήσαμε την κατασκευή αποτελούμενη από σύστημα αποσβέσεως, συντονισμένου αποσβεστήρα μάζας (T.M.D), συνδεδεμένο με την κατασκευή μέσω γραμμικού ελατηρίου και αποσβεστήρα (αμορτισέρ), το οποίο τοποθετήθηκε σε διάφορες θέσεις καθ' ύψος του κτιρίου ώστε να ελεγχθεί η αποτελεσματικότητα του (παράρτημα – πρόγραμμα 5).

Για το λόγο αυτό, υπολογίστηκαν τα διαγράμματα παραμορφώσεων της κατασκευής για διαφορετικές θέσεις τοποθέτησης του συστήματος αποσβέσεως, για διαφορετικές τιμές της μάζας του, και για διάφορες τιμές της σταθεράς  $k$  και  $c_a$  του ελατηρίου και αποσβεστήρα, αντίστοιχα. Τα διαγράμματα που προέκυψαν είναι τα εξής:

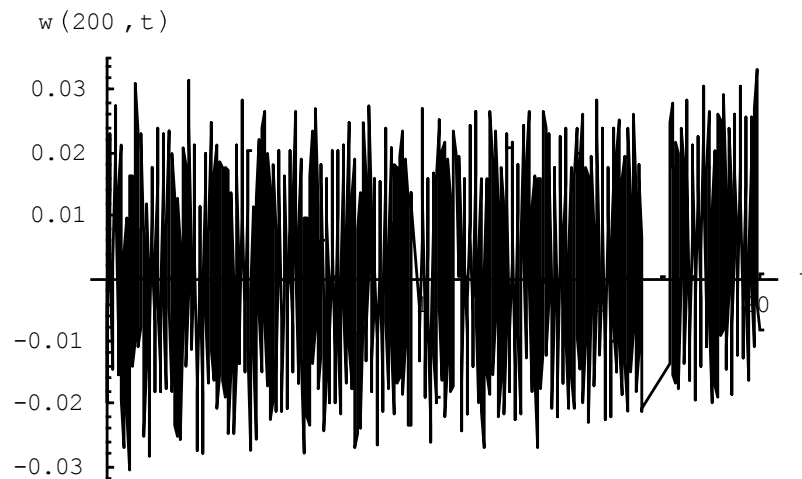
- Μεταβάλλοντας τη μάζα του συστήματος αποσβέσεως (έλεγχος στη κορυφή του φορέα για  $X=200m$ .):



Σχήμα 3.5 Παραμορφώσεις κατασκευής με σύστημα απόσβεσης ολισθαίνουσας μάζας -T.M.D ( $M_a=400tn.$ ) στη θέση  $x_a=200m$ . με  $K_a=100$ ,  $C_a=10$ .



Σχήμα 3.6 Παραμορφώσεις κατασκευής με σύστημα απόσβεσης ολισθαίνουσας μάζας -T.M.D ( $M_a=600tn.$ ) στη θέση  $x_a=200m$ . με  $K_a=100$ ,  $C_a=10$ .

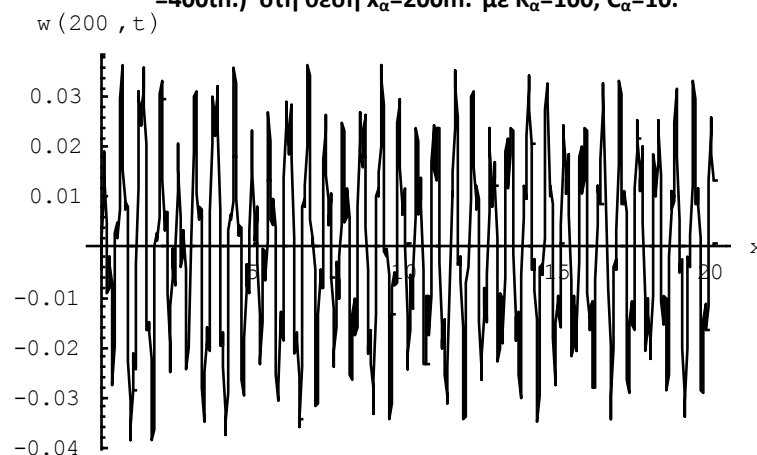


Σχήμα 3.7 Παραμορφώσεις κατασκευής με σύστημα απόσβεσης ολισθαίνουσας μάζας -T.M.D ( $M_\alpha = 800\text{tn.}$ ) στη θέση  $x_\alpha = 200\text{m.}$  με  $K_\alpha = 100$ ,  $C_\alpha = 10$ .

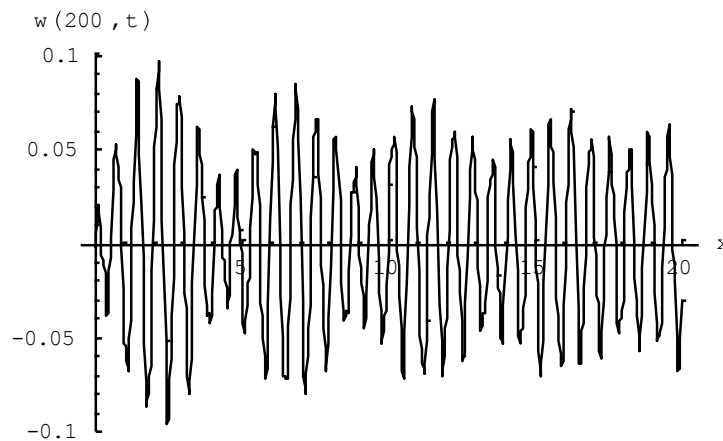
- Μεταβάλλοντας τη θέση τοποθέτησης του συστήματος αποσβέσεως (έλεγχος στην κορυφή του φορέα για  $X=200\text{m.}$ ):



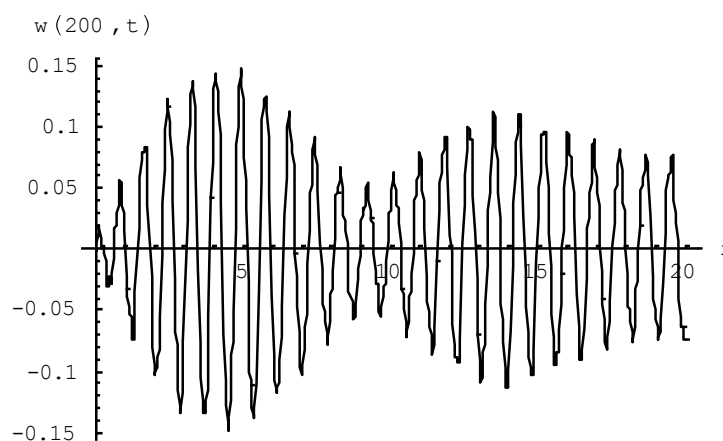
Σχήμα 3.8 Παραμορφώσεις κατασκευής με σύστημα απόσβεσης ολισθαίνουσας μάζας -T.M.D ( $M_\alpha = 400\text{tn.}$ ) στη θέση  $x_\alpha = 200\text{m.}$  με  $K_\alpha = 100$ ,  $C_\alpha = 10$ .



Σχήμα 3.9 Παραμορφώσεις κατασκευής με σύστημα απόσβεσης ολισθαίνουσας μάζας -T.M.D ( $M_\alpha = 400\text{tn.}$ ) στη θέση  $x_\alpha = 160\text{m.}$  με  $K_\alpha = 100$ ,  $C_\alpha = 10$ .

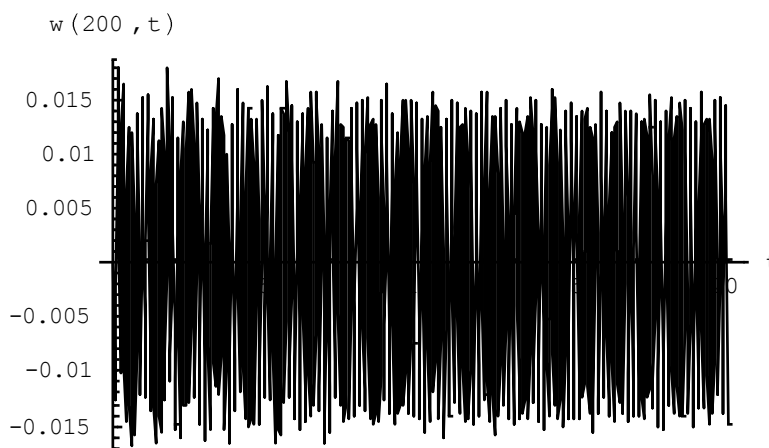


Σχήμα 3.10 Παραμορφώσεις κατασκευής με σύστημα απόσβεσης ολισθαίνουσας μάζας -T.M.D ( $M_\alpha=400\text{tn.}$ ) στη θέση  $x_\alpha=150\text{m.}$  με  $K_\alpha=100$ ,  $C_\alpha=10$ .

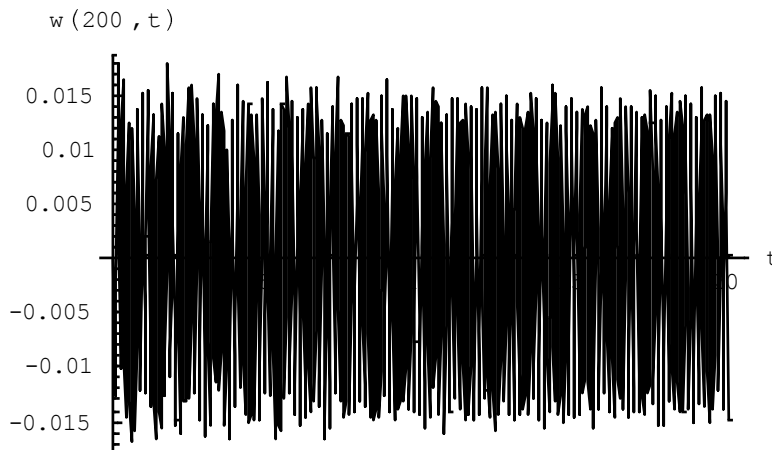


Σχήμα 3.11 Παραμορφώσεις κατασκευής με σύστημα απόσβεσης ολισθαίνουσας μάζας -T.M.D ( $M_\alpha=400\text{tn.}$ ) στη θέση  $x_\alpha=130\text{m.}$  με  $K_\alpha=100$ ,  $C_\alpha=10$ .

- Μεταβάλλοντας τα χαρακτηριστικά του ελατηρίου και του αποσβεστήρα του συστήματος ( $K_\alpha$ ,  $C_\alpha$ ) (έλεγχος στην κορυφή του φορέα για  $X=200\text{m.}$ ):



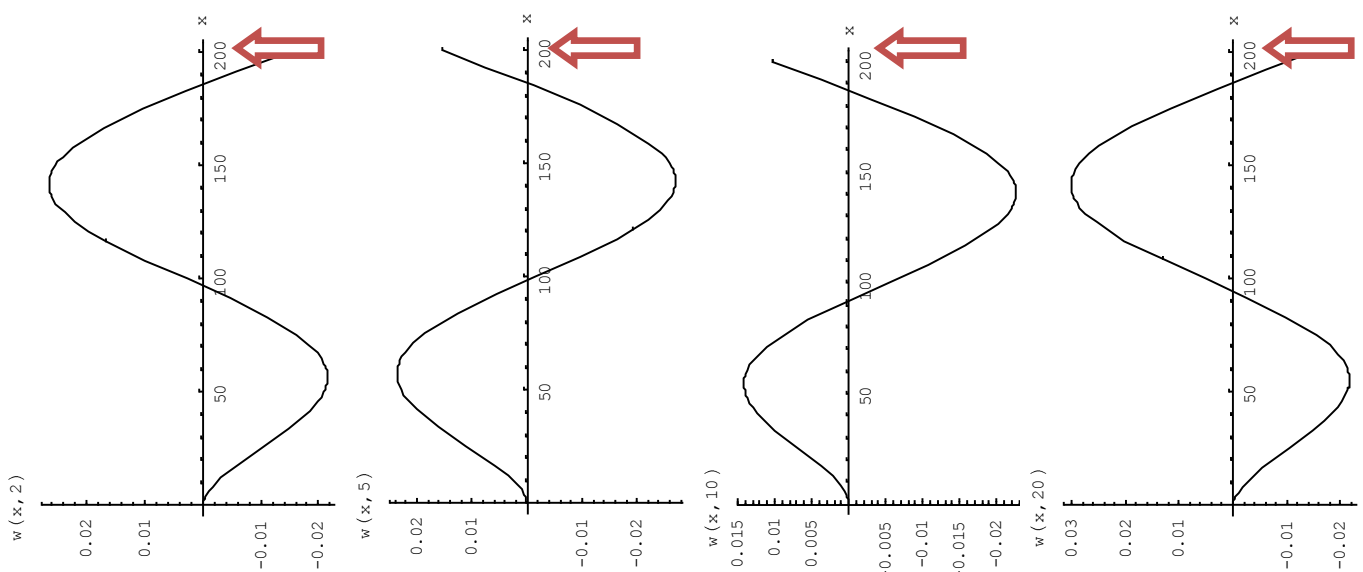
Σχήμα 3.12 Παραμορφώσεις κατασκευής με σύστημα απόσβεσης ολισθαίνουσας μάζας -T.M.D ( $M_\alpha=400\text{tn.}$ ) στη θέση  $x_\alpha=200\text{m.}$  με  $K_\alpha=100$ ,  $C_\alpha=10$ .



Σχήμα 3.13 Παραμορφώσεις κατασκευής με σύστημα απόσβεσης ολισθαίνουσας μάζας -T.M.D ( $M_{\alpha}=400tn.$ ) στη θέση  $x_{\alpha}=200m.$  με  $K_{\alpha}=1000, C_{\alpha}=100.$

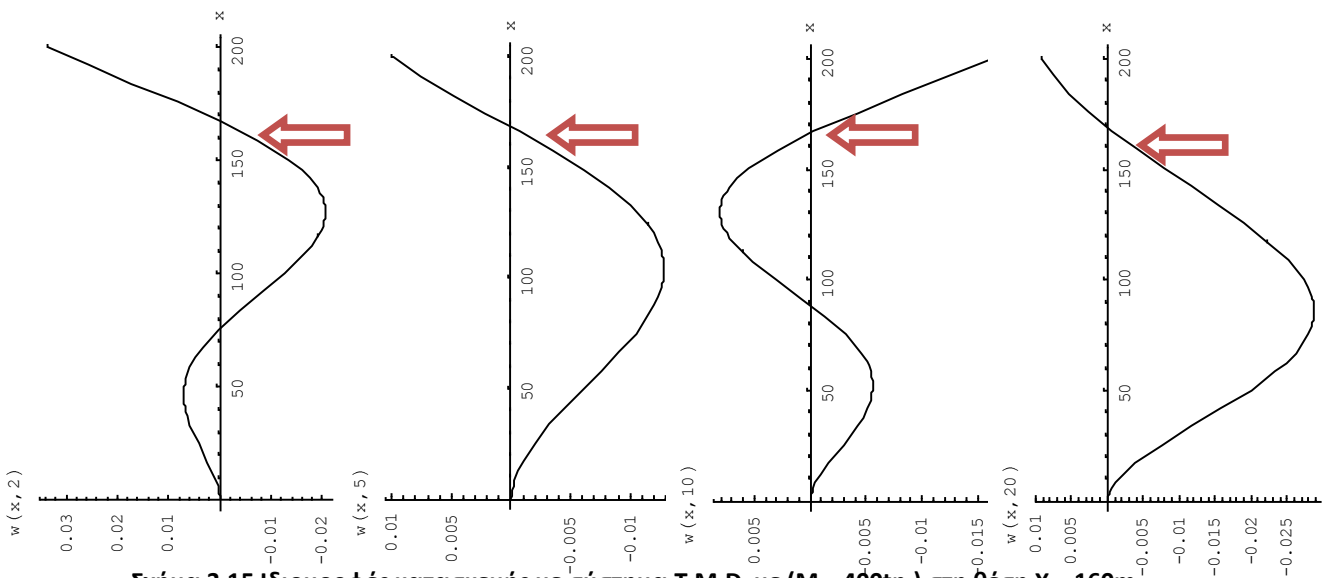
Επιπροσθέτως, υπολογίσθηκαν και τα διαγράμματα (ιδιομορφές) του φορέα με το σύστημα απόσβεσης T.M.D, για συγκεκριμένες χρονικές στιγμές επιβολής της σεισμικής διέγερσης ( $t=2, t=5, t=10, t=20 \text{ sec.}$ ), για τις διαφορετικές θέσεις τοποθέτησης και τις διαφορετικές μάζες του συστήματος T.M.D που εξετάστηκαν παραπάνω, έτσι ώστε να φανεί το πώς επηρεάζεται η απόκριση του συστήματος. Τα διαγράμματα που προέκυψαν είναι τα εξής:

- Για τις διαφορετικές θέσεις τοποθέτησης του συστήματος T.M.D:

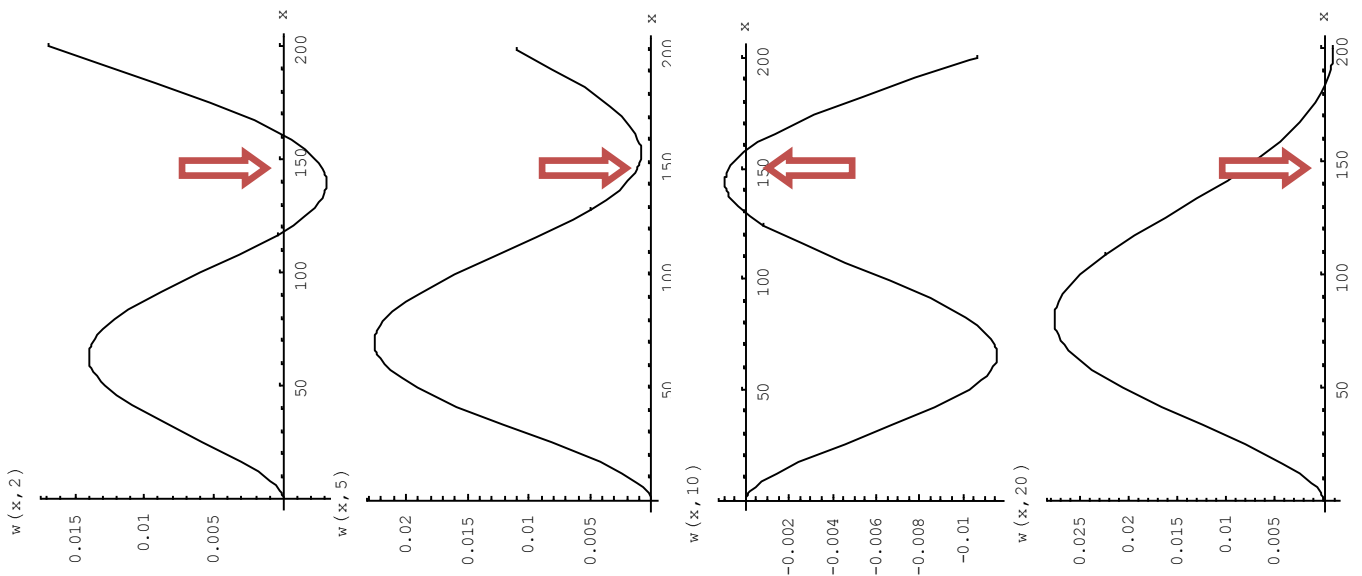


Σχήμα 3.14 Ιδιομορφές κατασκευής με σύστημα T.M.D με ( $M_{\alpha}=400tn.$ ) στη θέση  $x_{\alpha}=200m.$

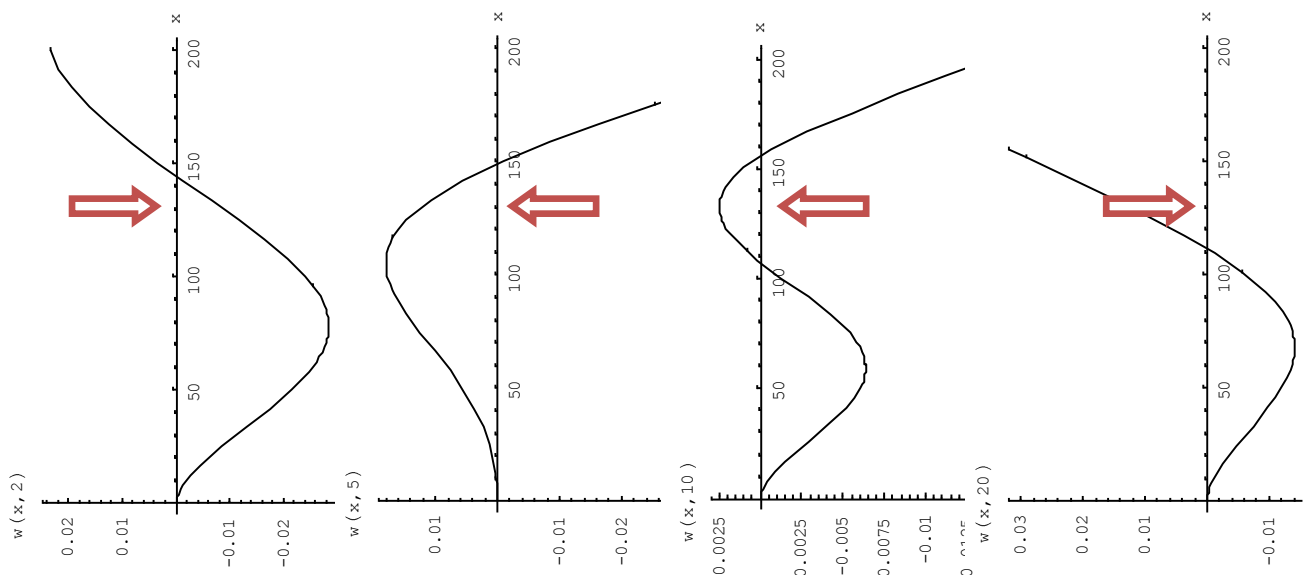




Σχήμα 3.15 Ιδιομορφές κατασκευής με σύστημα T.M.D με ( $M_\alpha=400\text{tn.}$ ) στη θέση  $X_\alpha=160\text{m}$ .

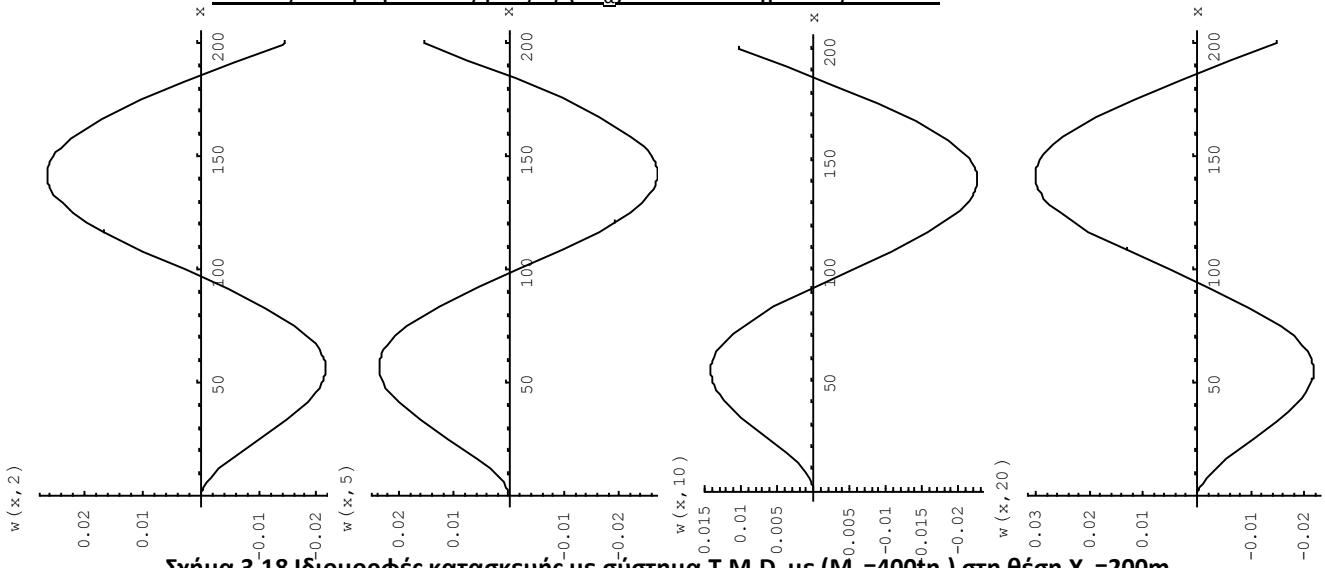


Σχήμα 3.16 Ιδιομορφές κατασκευής με σύστημα T.M.D με ( $M_\alpha=400\text{tn.}$ ) στη θέση  $X_\alpha=150\text{m}$ .

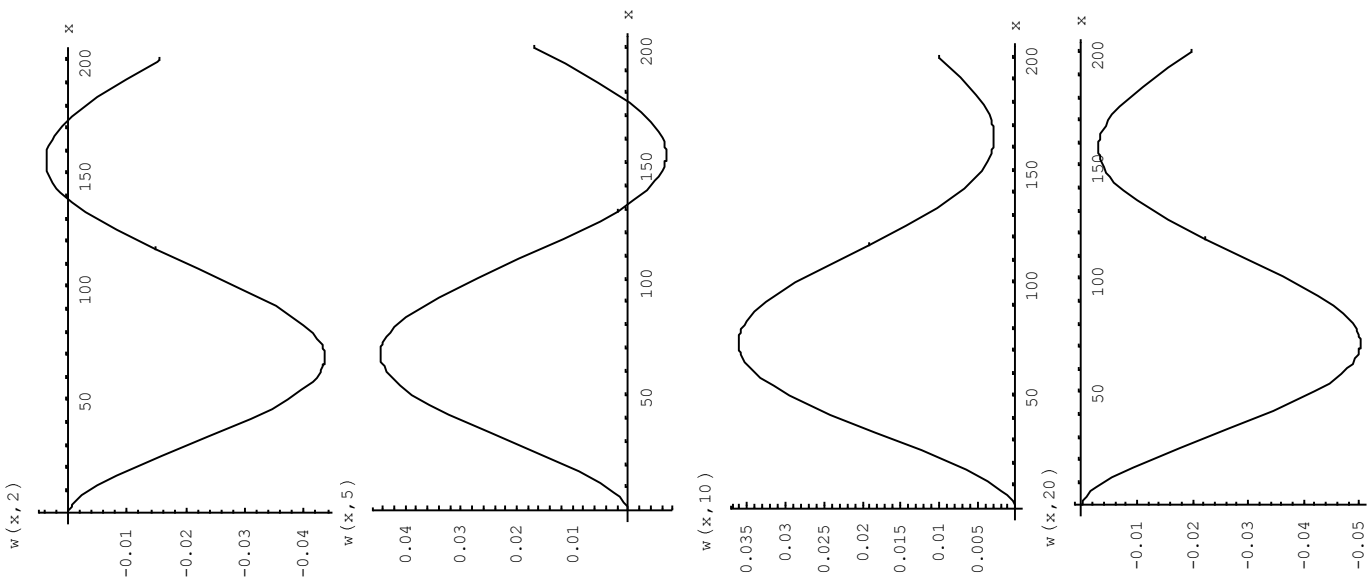


Σχήμα 3.17 Ιδιομορφές κατασκευής με σύστημα T.M.D με ( $M_\alpha=400\text{tn.}$ ) στη θέση  $X_\alpha=130\text{m}$ .

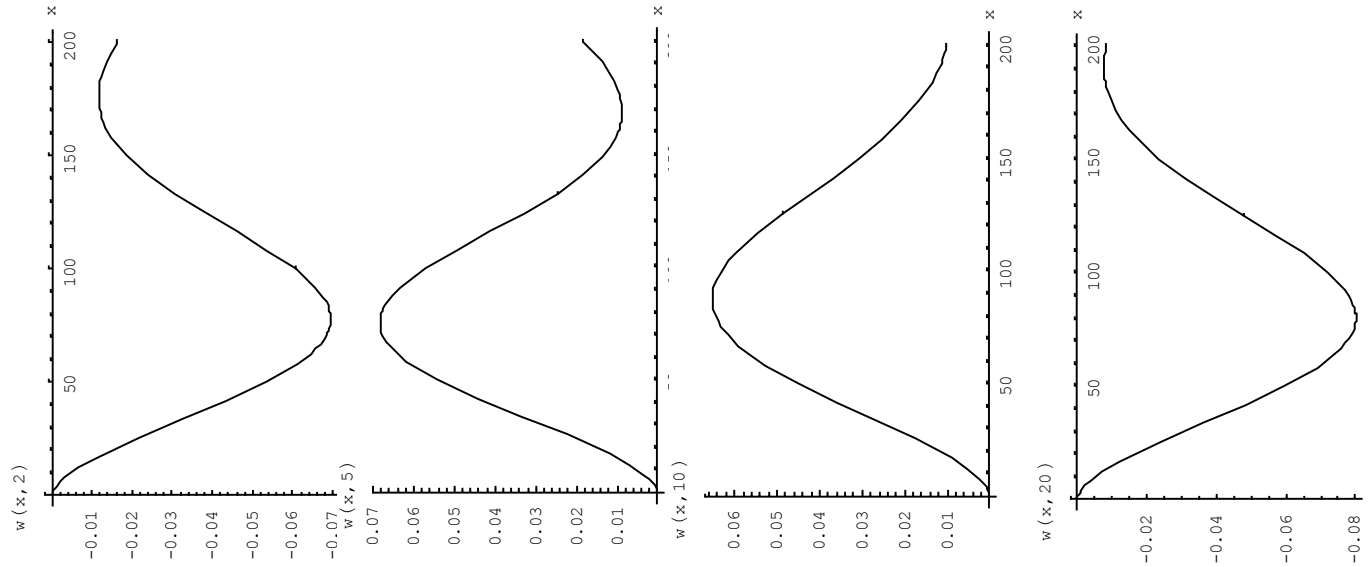
- Για τις διαφορετικές μάζες ( $M_\alpha$ ) του συστήματος T.M.D:



Σχήμα 3.18 Ιδιομορφές κατασκευής με σύστημα T.M.D με ( $M_\alpha=400tn.$ ) στη θέση  $X_\alpha=200m.$



Σχήμα 3.19 Ιδιομορφές κατασκευής με σύστημα T.M.D με ( $M_\alpha=600tn.$ ) στη θέση  $X_\alpha=200m.$



Σχήμα 3.20 Ιδιομορφές κατασκευής με σύστημα T.M.D με ( $M_\alpha=800tn.$ ) στη θέση  $X_\alpha=200m.$

### 3.1 Ανάλυση διαγραμμάτων

Από τα παραπάνω διαγράμματα, συμπεραίνουμε ότι για να είναι το σύστημα αποσβέσεως στη βάση του κτιρίου **δραστικό**, οπότε και να μειώνει τις παραμορφώσεις στην κατασκευή όταν αυτή διαθέτει σύστημα απόσβεσης, θα πρέπει η σταθερά του ελατηρίου  $k_1$  να είναι μεγαλύτερη από 10.000 ( $k_1 > 10.000$ ) για την κατασκευή με ροπή αδράνειας  $I_0 = 500 \text{ m}^4$ , και μεγαλύτερη από 100.000 ( $k_1 > 100.000$ ), για την κατασκευή με ροπή αδράνειας  $I_0 = 1300 \text{ m}^4$ . Παρατηρούμε δε, ότι για την περίπτωση κτιρίου με ροπή αδρανείας  $I_0 = 1300 \text{ m}^4$  το σύστημα αποσβέσεως στη θεμελίωση με  $k_1 = 1000$  και  $C_e = 10$  δεν μπορεί να “συγκρατήσει” το κτίριο από την επιβολή της εδαφικής κίνησης, γι’ αυτό και το αντίστοιχο διάγραμμα (Σχ.3.4α), μετά από κάποια χρονική στιγμή ( $t$ ), παίρνει μόνο αρνητικές τιμές στο βέλος κάμψης, αποδεικνύοντας την αστοχία του συστήματος απόσβεσης που δεν μπορεί να συγκρατήσει το σύστημα και έτσι το κτίριο μετακινείται μόνο προς μία κατεύθυνση.

Η σύγκριση των διαγραμμάτων απόκρισης της κατασκευής όταν διαθέτει σύστημα αποσβέσεως T.M.D, με τα αντίστοιχα όταν διαθέτει σύστημα αποσβέσεως στη βάση, και όταν αυτή δεν είναι σεισμικά μονωμένη δίνει τα εξής αποτελέσματα:

α) Η μείωση των παραμορφώσεων στην κορυφή της κατασκευής όταν αυτή διαθέτει σύστημα T.M.D, σε σχέση με το σύστημα απόσβεσης στη βάση είναι της τάξης του 30% έως 60%.

β) Η μείωση των παραμορφώσεων στην κορυφή της κατασκευής όταν αυτή διαθέτει σύστημα T.M.D, σε σχέση με όταν δεν διαθέτει σύστημα απόσβεσης είναι της τάξης του 60% έως 80%.

γ) Η μείωση των παραμορφώσεων στο μέσον του ύψους της κατασκευής ( $X=100\text{m.}$ ) όταν το σύστημα T.M.D τοποθετείται στην κορυφή είναι της τάξης του 26%, απ’ όταν τοποθετείται στο ύψος των 130m., και 37.5% απ’ όταν τοποθετείται στο ύψος των 150m.

δ) Η μείωση των παραμορφώσεων στην κορυφή της κατασκευής η οποία διαθέτει σύστημα αποσβέσεως T.M.D, τοποθετημένο στην κορυφή της, όταν αυτό

είναι μάζας  $M_\alpha = 400\text{tn}$ . είναι της τάξης του 11% σε σχέση με αντίστοιχο σύστημα με μάζα  $M_\alpha = 600\text{tn}$ ., ενώ για σύστημα T.M.D με μάζα  $M_\alpha = 800\text{tn}$ ., είναι της τάξης του 38%.

ε) Η μείωση των παραμορφώσεων στην κορυφή της κατασκευής η οποία διαθέτει σύστημα αποσβέσεως T.M.D, τοποθετημένο στην κορυφή της, για σταθερά ελατηρίου  $k_\alpha=1000$  και συντελεστή αποσβεστήρα  $C_a = 10$  είναι της τάξης του 7%, σε σχέση με αντίστοιχο σύστημα με  $k_\alpha=100$  και  $C_a = 10$ .

#### 4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Από τα παραπάνω διαγράμματα καταλήγουμε στα ακόλουθα συμπεράσματα:

1) Τα δύο συστήματα αποσβέσεως με συνδυασμό ελατηρίου και αποσβεστήρα επηρεάζουν την ταλάντωση του συστήματος που μελετήσαμε.

2) Η επιρροή ενός συστήματος απόσβεσης στη βάση του κτιρίου αντιστοιχεί στη μείωση των παραμορφώσεων το πολύ κατά 8% έως 10% σε λυγερές κατασκευές, ενώ το ποσοστό μειώνεται στο 1% έως 4% στις δύσκαμπτες κατασκευές.

3) Το παραπάνω σύστημα είναι αποτελεσματικότερο σε λυγερές κατασκευές, ενώ σε πλέον δύσκαμπτες δεν έχει ιδιαίτερα αποτελέσματα.

4) Για να αυξηθεί η αποτελεσματικότητα και σε δύσκαμπτες κατασκευές πρέπει να καταφύγουμε σε συνδυασμούς πλέον δαπανηρούς όσον αφορά τα ελατήρια και τους αποσβέστες για συστήματα αποσβέσεως στη βάση.

5) Εάν χρησιμοποιήσουμε ασθενέστερα ελατήρια από τα απαιτούμενα για το σύστημα αποσβέσεως στη βάση, η κατασκευή αποκτά κινητικότητα, αφού προφανώς το σύστημα δεν μπορεί να την συγκρατήσει.

6) Το σύστημα απόσβεσης συντονισμένου αποσβεστήρα μάζας με ελατήριο και αποσβεστήρα (T.M.D) στην κορυφή του κτιρίου κρίνεται ιδιαίτερα αποτελεσματικό αφού επιτυγχάνεται σημαντική μείωση των παραμορφώσεων έως και 80% σε σχέση με την κατασκευή χωρίς μόνωση.

7) Το σύστημα απόσβεσης συντονισμένου αποσβεστήρα μάζας με ελατήριο και αποσβεστήρα (T.M.D) στην κορυφή του κτιρίου κρίνεται ιδιαίτερα αποτελεσματικό αφού επιτυγχάνεται σημαντική μείωση των παραμορφώσεων έως και 60% σε σχέση με την κατασκευή με σύστημα αποσβέσεως στη βάση.

8) Η επιρροή του μεγέθους της μάζας στο σύστημα αποσβέσεως T.M.D είναι μεγάλη, αφού για  $M_{\alpha} = 800\text{tn}$ . έχουμε αύξηση των παραμορφώσεων κατά 38% σε σχέση με σύστημα T.M.D με  $M_{\alpha} = 400\text{tn}$ . , και τούτο οφείλεται στο ότι η

ιδιοσυχνότητα του συστήματος απόσβεσης  $\omega = \sqrt{\frac{k_{\alpha}}{M_{\alpha}}}$  απομακρύνεται από την πρώτη ιδιοσυχνότητα της κατασκευής, επομένως δεν επηρεάζει ιδιαίτερα αυτήν.

9) Η επιρροή του σημείου στο οποίο τοποθετείται το σύστημα T.M.D καθ' ύψος του κτιρίου, είναι σημαντική αφού μεταβάλλει τις παραμορφώσεις από 26% έως και 37.5%, για τις διαφορετικές θέσεις εφαρμογής που εξετάσαμε.

10) Η επιρροή των ελατηρίων και των αποσβεστών στο σύστημα αποσβέσεως T.M.D αντιστοιχεί σε μείωση των παραμορφώσεων κατά 7%, με την επιλογή ισχυρότερων ελατηρίων και αποσβεστών.

**ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

1. Γ.Θ. Μιχάλτσος "Ελαφρές Μεταλλικές Κατασκευές – Μέθοδοι Υπολογισμού", 1994, Εκδόσεις Παπασωτηρίου, Αθήνα.
2. Γ.Θ. Μιχάλτσος "Προβλήματα Δυναμικής των Σιδηρών Γεφυρών", 2005, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα.
3. Α.Ν. Κουνάδης "Δυναμική των Συνεχών Ελαστικών Συστημάτων", 1989, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα.
4. Ι.Θ. Κατσικαδέλης "Δυναμική των Κατασκευών, Τόμος Ι, Τόμος ΙΙ", 2002, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα.
5. Moutinho, C. "An alternative methodology for designing tuned mass dampers to reduce seismic vibrations in building structures", 2012, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 41 (14) , pp. 2059-2073.
6. Sugimura, Y., Goto, W., Tanizawa, H., Nagasaku, T., Saito, K., Ninomiya, T. "Response control effect of hi-rised steel building structure using tuned viscous mass dampers", 2012, *AIJ Journal of Technology and Design* 18(39), 441-446.
7. Patil, V.B., Jangid, R.S. "Optimum multiple tuned mass dampers for the wind excited benchmark building", 2011, *Journal of Civil Engineering and Management* 17(4), 540-557.
8. Saidi, I., Gad, E.F., Wilson, J.L., Haritos, N. "Development of passive viscoelastic damper to attenuate excessive floor vibrations", 2011, *Engineering Structures* 33 (12) , pp. 3317-3328.
9. Amini, F., Doroudi, R., "Control of a building complex with magneto-rheological dampers and tuned mass damper", 2010, *Structural Engineering and Mechanics* 36 (2) , pp. 181-195.
10. Moon, K.S., "Vertically distributed multiple tuned mass dampers in tall buildings: Performance analysis and preliminary design", 2010, *Structural Design of Tall and Special Buildings* 19 (3) , pp. 347-366.

11. Matta, E., De Stefano, A. "**Seismic performance of pendulum and translational roof-garden TMD's**", 2009, *Mechanical Systems and Signal Processing* 23 (3) , pp. 908-921.
12. Hijmissen, J.W., Van Horsen, W.T. "**On aspects of damping for a vertical beam with a tuned mass damper at the top**", 2007, *Nonlinear Dynamics* 50 (1-2) , pp. 169-190.
13. Wang, A.-P., Lin, Y.-H. "**Vibration control of a tall building subjected to earthquake excitation**", 2007, *Journal of Sound and Vibration* 299 (4-5) , pp. 757-773.
14. Xu, J.-Y., Lei, J.-Y. "**Vibration control effect of roof garden as a TMD in mid-rise building**", 2005, *Journal of Natural Disasters* 14 (4) , pp. 154-157.
15. Miranda, J.C. "**On tuned mass dampers for reducing the seismic response of structures**", 2005, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 34 (7) , pp. 847-865.
16. Nagashima, I. "**Optimal displacement feedback control law for active tuned mass damper**", 2001, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 30 (8) , pp. 1221-1242.
17. Arfiadi, Y., Hadi, M.N.S. "**Passive and active control of three-dimensional buildings**", 2000, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 29 (3) , pp. 377-396 .



## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

(Προγραμματισμός στο περιβάλλον του λογισμικού **Mathematica v.4.1**)

```

ClearAll[a11, a12, a13, a14, a21, a22, a23, a24,
  a31, a32, a33, a34, a41, a42, a43, a44, k2, λ, L, A, B]
a11 = 0;
a12 = 1;
a13 = 0;
a14 = 1;

a21 = -k2;
a22 = -λ;
a23 = -k2;
a24 = λ;

a31 = -Sin[λ * L];
a32 = -Cos[λ * L];
a33 = Sinh[λ * L];
a34 = Cosh[λ * L];

a41 = -Cos[λ * L];
a42 = Sin[λ * L];
a43 = Cosh[λ * L];
a44 = Sinh[λ * L];

A = {{a11, a12, a13, a14}, {a21, a22, a23, a24},
  {a31, a32, a33, a34}, {a41, a42, a43, a44}};
B = Det[A];

k2 = 1;
L = 200;
Plot[B, {λ, 0, 0.015}]
FindRoot[B == 0, {λ, 0.005}]
Plot[B, {λ, 0, 0.025}]
FindRoot[B == 0, {λ, 0.02}]
Plot[B, {λ, 0.025, 0.035}]
FindRoot[B == 0, {λ, 0.035}]
Plot[B, {λ, 0.035, 0.055}]
FindRoot[B == 0, {λ, 0.055}]
Plot[B, {λ, 0.055, 0.075}]
FindRoot[B == 0, {λ, 0.07}]

```

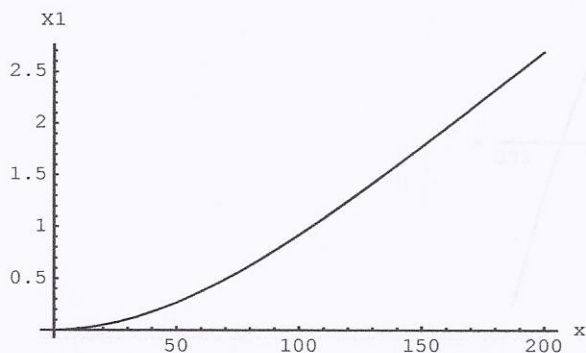
```

ClearAll[λ, L, k2, c1, c2, c3, c4, A]
eqns = {c2 + c4 == 0, k2 * c1 + λ * c2 + k2 * c3 - λ * c4 == 0,
  -Sin[λ * L] * c1 - Cos[λ * L] * c2 + Sinh[λ * L] * c3 + Cosh[λ * L] * c4 == 0};
A = Solve[eqns, {c2, c3, c4}];
FullSimplify[A];
ClearAll[x, X, c1, c2, c3, c4, λ, k2, L]
k2 = 1;
L = 200;
d1 = 1;
d2 = -  $\frac{c1 k2 (\sin[L \lambda] + \sinh[L \lambda])}{k2 (\cos[L \lambda] + \cosh[L \lambda]) + 2 \lambda \sinh[L \lambda]}$ ;
d3 = c1  $\left( -1 + \frac{2 \lambda (\sin[L \lambda] + \sinh[L \lambda])}{k2 (\cos[L \lambda] + \cosh[L \lambda]) + 2 \lambda \sinh[L \lambda]} \right)$ ;
d4 =  $\frac{c1 k2 (\sin[L \lambda] + \sinh[L \lambda])}{k2 (\cos[L \lambda] + \cosh[L \lambda]) + 2 \lambda \sinh[L \lambda]}$ ;
λ = 0.009329
X = d1 * Sin[λ * x] + d2 * Cos[λ * x] + d3 * Sinh[λ * x] + d4 * Cosh[λ * x]
Plot[X, {x, 0, L}, AxesLabel → {"x", "X1"}]
ClearAll[X, x, λ]
λ = 0.023356
X = d1 * Sin[λ * x] + d2 * Cos[λ * x] + d3 * Sinh[λ * x] + d4 * Cosh[λ * x]
Plot[X, {x, 0, L}, AxesLabel → {"x", "X2"}]
ClearAll[X, x, λ]
λ = 0.039085
X = d1 * Sin[λ * x] + d2 * Cos[λ * x] + d3 * Sinh[λ * x] + d4 * Cosh[λ * x]
Plot[X, {x, 0, L}, AxesLabel → {"x", "X3"}]
ClearAll[X, x, λ]
λ = 0.054718
X = d1 * Sin[λ * x] + d2 * Cos[λ * x] + d3 * Sinh[λ * x] + d4 * Cosh[λ * x]
Plot[X, {x, 0, L}, AxesLabel → {"x", "X4"}]

```

0.009329

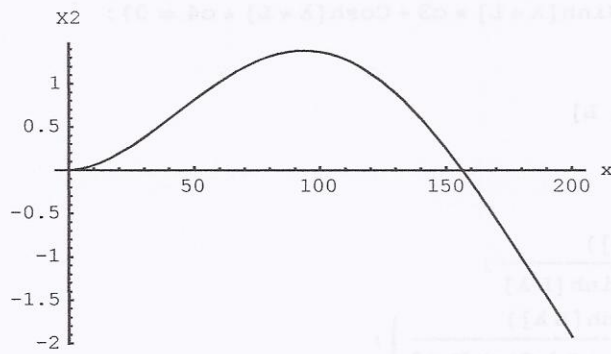
-1.33613 Cos[0.009329 x] + 1.33613 Cosh[0.009329 x] +  
Sin[0.009329 x] - 0.975071 Sinh[0.009329 x]



- Graphics -

0.023356

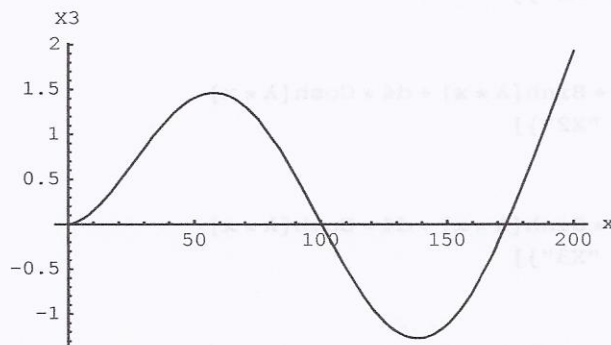
$$-0.938034 \text{ Cos}[0.023356 x] + 0.938034 \text{ Cosh}[0.023356 x] + \text{Sin}[0.023356 x] - 0.956183 \text{ Sinh}[0.023356 x]$$



- Graphics -

0.039085

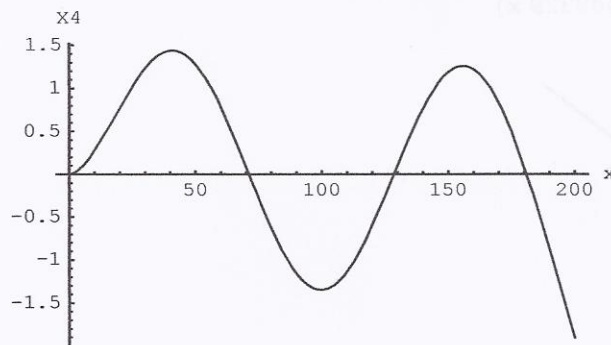
$$-0.928218 \text{ Cos}[0.039085 x] + 0.928218 \text{ Cosh}[0.039085 x] + \text{Sin}[0.039085 x] - 0.927441 \text{ Sinh}[0.039085 x]$$



- Graphics -

0.054718

$$-0.901329 \text{ Cos}[0.054718 x] + 0.901329 \text{ Cosh}[0.054718 x] + \text{Sin}[0.054718 x] - 0.901362 \text{ Sinh}[0.054718 x]$$



- Graphics -

```

ClearAll[x, b, H, a1, a2, a3, a4, a5, mo, Io, m, g, Iy, Iy1, Iy2, M, Jo, c, Eb]
Eb = 2.1 * 1010;
H = 200;
a1 = 40;
a2 = 80;
a3 = 120;
a4 = 160;
a5 = 200;
mo = 630;
Io = 500
m = mo * (1 -  $\frac{x}{2 * H}$ );
g = 10;
Iy = Io * (1 -  $\frac{x}{2 * H}$ )4;
Iy1 = D[Iy, x];
Iy2 = D[Iy1, x];
M = 240 000;
Jo = 20 * 106;
k2 = 1;
c = 0.5;

```

```

ClearAll[x, c1, c2, c3, c4, λ, X1, X1a, d1X1, d2X1, d3X1,
d4X1, Xa11, Xa21, Xa31, Xa41, Xa51, d1Xa11, d1Xa21, d1Xa31,
d1Xa41, d1Xa51, d2Xa11, d2Xa21, d2Xa31, d2Xa41, d2Xa51]
λ = 0.009329192374498124;
c1 = 1;
c2 = -  $\frac{c1 k2 (\text{Sin}[H \lambda] + \text{Sinh}[H \lambda])}{k2 (\text{Cos}[H \lambda] + \text{Cosh}[H \lambda]) + 2 \lambda \text{Sinh}[H \lambda]}$ ;
c3 = c1 (  $-1 + \frac{2 \lambda (\text{Sin}[H \lambda] + \text{Sinh}[H \lambda])}{k2 (\text{Cos}[H \lambda] + \text{Cosh}[H \lambda]) + 2 \lambda \text{Sinh}[H * \lambda]}$  );
c4 =  $\frac{c1 k2 (\text{Sin}[H \lambda] + \text{Sinh}[H \lambda])}{k2 (\text{Cos}[H \lambda] + \text{Cosh}[H \lambda]) + 2 \lambda \text{Sinh}[H \lambda]}$ ;

X1 = c1 * Sin[λ * x] + c2 * Cos[λ * x] + c3 * Sinh[λ * x] + c4 * Cosh[λ * x];
X1a = c1 * Sin[λ * a] + c2 * Cos[λ * a] + c3 * Sinh[λ * a] + c4 * Cosh[λ * a];
Xa11 = c1 * Sin[λ * a1] + c2 * Cos[λ * a1] + c3 * Sinh[λ * a1] + c4 * Cosh[λ * a1];
Xa21 = c1 * Sin[λ * a2] + c2 * Cos[λ * a2] + c3 * Sinh[λ * a2] + c4 * Cosh[λ * a2];
Xa31 = c1 * Sin[λ * a3] + c2 * Cos[λ * a3] + c3 * Sinh[λ * a3] + c4 * Cosh[λ * a3];
Xa41 = c1 * Sin[λ * a4] + c2 * Cos[λ * a4] + c3 * Sinh[λ * a4] + c4 * Cosh[λ * a4];
Xa51 = c1 * Sin[λ * a5] + c2 * Cos[λ * a5] + c3 * Sinh[λ * a5] + c4 * Cosh[λ * a5];
d1Xa11 =
c1 * λ * Cos[λ * a1] - c2 * λ * Sin[λ * a1] + c3 * λ * Cosh[λ * a1] + c4 * λ * Sinh[λ * a1];
d1Xa21 = c1 * λ * Cos[λ * a2] - c2 * λ * Sin[λ * a2] +
c3 * λ * Cosh[λ * a2] + c4 * λ * Sinh[λ * a2];
d1Xa31 = c1 * λ * Cos[λ * a3] - c2 * λ * Sin[λ * a3] +
c3 * λ * Cosh[λ * a3] + c4 * λ * Sinh[λ * a3];
d1Xa41 = c1 * λ * Cos[λ * a4] - c2 * λ * Sin[λ * a4] +
c3 * λ * Cosh[λ * a4] + c4 * λ * Sinh[λ * a4];
d1Xa51 = c1 * λ * Cos[λ * a5] - c2 * λ * Sin[λ * a5] +

```

```

c3 * λ * Cosh[λ * a5] + c4 * λ * Sinh[λ * a5];
d2Xa11 = -c1 * λ2 * Sin[λ * a1] - c2 * λ2 * Cos[λ * a1] +
c3 * λ2 * Sinh[λ * a1] + c4 * λ2 * Cosh[λ * a1];
d2Xa21 = -c1 * λ2 * Sin[λ * a2] - c2 * λ2 * Cos[λ * a2] +
c3 * λ2 * Sinh[λ * a2] + c4 * λ2 * Cosh[λ * a2];
d2Xa31 = -c1 * λ2 * Sin[λ * a3] - c2 * λ2 * Cos[λ * a3] +
c3 * λ2 * Sinh[λ * a3] + c4 * λ2 * Cosh[λ * a3];
d2Xa41 = -c1 * λ2 * Sin[λ * a4] - c2 * λ2 * Cos[λ * a4] +
c3 * λ2 * Sinh[λ * a4] + c4 * λ2 * Cosh[λ * a4];
d2Xa51 = -c1 * λ2 * Sin[λ * a5] - c2 * λ2 * Cos[λ * a5] +
c3 * λ2 * Sinh[λ * a5] + c4 * λ2 * Cosh[λ * a5];
d1X1 = D[X1, x];
d2X1 = D[d1X1, x];
d3X1 = D[d2X1, x];
d4X1 = D[d3X1, x];
(*
Plot[X1, {x, 0, H}]
*)
ClearAll[x, c1, c2, c3, c4, λ, X2, X2a, d1X2, d2X2, d3X2,
d4X2, Xa12, Xa22, Xa32, Xa42, Xa52, d1Xa12, d1Xa22, d1Xa32,
d1Xa42, d1Xa52, d2Xa12, d2Xa22, d2Xa32, d2Xa42, d2Xa52]
λ = 0.02335640759426411` ;
c1 = 1;
c2 = -  $\frac{c1 k2 (\text{Sin}[H \lambda] + \text{Sinh}[H \lambda])}{k2 (\text{Cos}[H \lambda] + \text{Cosh}[H \lambda]) + 2 \lambda \text{Sinh}[H \lambda]}$  ;
c3 = c1  $\left( -1 + \frac{2 \lambda (\text{Sin}[H \lambda] + \text{Sinh}[H \lambda])}{k2 (\text{Cos}[H \lambda] + \text{Cosh}[H \lambda]) + 2 \lambda \text{Sinh}[H \lambda]} \right)$  ;
c4 =  $\frac{c1 k2 (\text{Sin}[H \lambda] + \text{Sinh}[H \lambda])}{k2 (\text{Cos}[H \lambda] + \text{Cosh}[H \lambda]) + 2 \lambda \text{Sinh}[H \lambda]}$  ;
X2 = c1 * Sin[λ * x] + c2 * Cos[λ * x] + c3 * Sinh[λ * x] + c4 * Cosh[λ * x];
X2a = c1 * Sin[λ * a] + c2 * Cos[λ * a] + c3 * Sinh[λ * a] + c4 * Cosh[λ * a];
Xa12 = c1 * Sin[λ * a1] + c2 * Cos[λ * a1] + c3 * Sinh[λ * a1] + c4 * Cosh[λ * a1];
Xa22 = c1 * Sin[λ * a2] + c2 * Cos[λ * a2] + c3 * Sinh[λ * a2] + c4 * Cosh[λ * a2];
Xa32 = c1 * Sin[λ * a3] + c2 * Cos[λ * a3] + c3 * Sinh[λ * a3] + c4 * Cosh[λ * a3];
Xa42 = c1 * Sin[λ * a4] + c2 * Cos[λ * a4] + c3 * Sinh[λ * a4] + c4 * Cosh[λ * a4];
Xa52 = c1 * Sin[λ * a5] + c2 * Cos[λ * a5] + c3 * Sinh[λ * a5] + c4 * Cosh[λ * a5];
d1Xa12 =
c1 * λ * Cos[λ * a1] - c2 * λ * Sin[λ * a1] + c3 * λ * Cosh[λ * a1] + c4 * λ * Sinh[λ * a1];
d1Xa22 = c1 * λ * Cos[λ * a2] - c2 * λ * Sin[λ * a2] +
c3 * λ * Cosh[λ * a2] + c4 * λ * Sinh[λ * a2];
d1Xa32 = c1 * λ * Cos[λ * a3] - c2 * λ * Sin[λ * a3] +
c3 * λ * Cosh[λ * a3] + c4 * λ * Sinh[λ * a3];
d1Xa42 = c1 * λ * Cos[λ * a4] - c2 * λ * Sin[λ * a4] +
c3 * λ * Cosh[λ * a4] + c4 * λ * Sinh[λ * a4];
d1Xa52 = c1 * λ * Cos[λ * a5] - c2 * λ * Sin[λ * a5] +
c3 * λ * Cosh[λ * a5] + c4 * λ * Sinh[λ * a5];
d2Xa12 = -c1 * λ2 * Sin[λ * a1] - c2 * λ2 * Cos[λ * a1] +
c3 * λ2 * Sinh[λ * a1] + c4 * λ2 * Cosh[λ * a1];
d2Xa22 = -c1 * λ2 * Sin[λ * a2] - c2 * λ2 * Cos[λ * a2] +

```

```

c3 * λ2 * Sinh[λ * a2] + c4 * λ2 * Cosh[λ * a2];
d2Xa32 = -c1 * λ2 * Sin[λ * a3] - c2 * λ2 * Cos[λ * a3] +
c3 * λ2 * Sinh[λ * a3] + c4 * λ2 * Cosh[λ * a3];
d2Xa42 = -c1 * λ2 * Sin[λ * a4] - c2 * λ2 * Cos[λ * a4] +
c3 * λ2 * Sinh[λ * a4] + c4 * λ2 * Cosh[λ * a4];
d2Xa52 = -c1 * λ2 * Sin[λ * a5] - c2 * λ2 * Cos[λ * a5] +
c3 * λ2 * Sinh[λ * a5] + c4 * λ2 * Cosh[λ * a5];
d1X2 = D[X2, x];
d2X2 = D[d1X2, x];
d3X2 = D[d2X2, x];
d4X2 = D[d3X2, x];
(*
Plot[X2, {x, 0, H}]
*)
ClearAll[x, c1, c2, c3, c4, λ, X3, X3a, d1X3, d2X3, d3X3,
d4X3, Xa13, Xa23, Xa33, Xa43, Xa53, d1Xa13, d1Xa23, d1Xa33,
d1Xa43, d1Xa53, d2Xa13, d2Xa23, d2Xa33, d2Xa43, d2Xa53]
λ = 0.03908579240939283` ;
c1 = 1;
c2 = -  $\frac{c1 k2 (\text{Sin}[H \lambda] + \text{Sinh}[H \lambda])}{k2 (\text{Cos}[H \lambda] + \text{Cosh}[H \lambda]) + 2 \lambda \text{Sinh}[H \lambda]}$  ;
c3 = c1  $\left( -1 + \frac{2 \lambda (\text{Sin}[H \lambda] + \text{Sinh}[H \lambda])}{k2 (\text{Cos}[H \lambda] + \text{Cosh}[H \lambda]) + 2 \lambda \text{Sinh}[H \lambda]} \right)$  ;
c4 =  $\frac{c1 k2 (\text{Sin}[H \lambda] + \text{Sinh}[H \lambda])}{k2 (\text{Cos}[H \lambda] + \text{Cosh}[H \lambda]) + 2 \lambda \text{Sinh}[H \lambda]}$  ;
X3 = c1 * Sin[λ * x] + c2 * Cos[λ * x] + c3 * Sinh[λ * x] + c4 * Cosh[λ * x];
X3a = c1 * Sin[λ * a] + c2 * Cos[λ * a] + c3 * Sinh[λ * a] + c4 * Cosh[λ * a];
Xa13 = c1 * Sin[λ * a1] + c2 * Cos[λ * a1] + c3 * Sinh[λ * a1] + c4 * Cosh[λ * a1];
Xa23 = c1 * Sin[λ * a2] + c2 * Cos[λ * a2] + c3 * Sinh[λ * a2] + c4 * Cosh[λ * a2];
Xa33 = c1 * Sin[λ * a3] + c2 * Cos[λ * a3] + c3 * Sinh[λ * a3] + c4 * Cosh[λ * a3];
Xa43 = c1 * Sin[λ * a4] + c2 * Cos[λ * a4] + c3 * Sinh[λ * a4] + c4 * Cosh[λ * a4];
Xa53 = c1 * Sin[λ * a5] + c2 * Cos[λ * a5] + c3 * Sinh[λ * a5] + c4 * Cosh[λ * a5];
d1Xa13 =
c1 * λ * Cos[λ * a1] - c2 * λ * Sin[λ * a1] + c3 * λ * Cosh[λ * a1] + c4 * λ * Sinh[λ * a1];
d1Xa23 = c1 * λ * Cos[λ * a2] - c2 * λ * Sin[λ * a2] +
c3 * λ * Cosh[λ * a2] + c4 * λ * Sinh[λ * a2];
d1Xa33 = c1 * λ * Cos[λ * a3] - c2 * λ * Sin[λ * a3] +
c3 * λ * Cosh[λ * a3] + c4 * λ * Sinh[λ * a3];
d1Xa43 = c1 * λ * Cos[λ * a4] - c2 * λ * Sin[λ * a4] +
c3 * λ * Cosh[λ * a4] + c4 * λ * Sinh[λ * a4];
d1Xa53 = c1 * λ * Cos[λ * a5] - c2 * λ * Sin[λ * a5] +
c3 * λ * Cosh[λ * a5] + c4 * λ * Sinh[λ * a5];
d2Xa13 = -c1 * λ2 * Sin[λ * a1] - c2 * λ2 * Cos[λ * a1] +
c3 * λ2 * Sinh[λ * a1] + c4 * λ2 * Cosh[λ * a1];
d2Xa23 = -c1 * λ2 * Sin[λ * a2] - c2 * λ2 * Cos[λ * a2] +
c3 * λ2 * Sinh[λ * a2] + c4 * λ2 * Cosh[λ * a2];
d2Xa33 = -c1 * λ2 * Sin[λ * a3] - c2 * λ2 * Cos[λ * a3] +
c3 * λ2 * Sinh[λ * a3] + c4 * λ2 * Cosh[λ * a3];
d2Xa43 = -c1 * λ2 * Sin[λ * a4] - c2 * λ2 * Cos[λ * a4] +

```

```

c3 * λ2 * Sinh[λ * a4] + c4 * λ2 * Cosh[λ * a4];
d2Xa53 = -c1 * λ2 * Sin[λ * a5] - c2 * λ2 * Cos[λ * a5] +
c3 * λ2 * Sinh[λ * a5] + c4 * λ2 * Cosh[λ * a5];
d1X3 = D[X3, x];
d2X3 = D[d1X3, x];
d3X3 = D[d2X3, x];
d4X3 = D[d3X3, x];
(*
Plot[X3, {x, 0, H}]
*)
ClearAll[A11, A12, A13, A21, A22, A23, A31, A32, A33, Ba111, Ba112, Ba113, Ba121,
Ba122, Ba123, Ba131, Ba132, Ba133, Ba211, Ba212, Ba213, Ba221, Ba222, Ba223,
Ba231, Ba232, Ba233, Ba311, Ba312, Ba313, Ba321, Ba322, Ba323, Ba331, Ba332,
Ba333, Ba411, Ba412, Ba413, Ba421, Ba422, Ba423, Ba431, Ba432, Ba433, Ba511,
Ba512, Ba513, Ba521, Ba522, Ba523, Ba531, Ba532, Ba533, Γ11, Γ12, Γ13, Γ21,
Γ22, Γ23, Γ31, Γ32, Γ33, Δ11, Δ12, Δ13, Δ21, Δ22, Δ23, Δ31, Δ32, Δ33, E11,
E12, E13, E21, E22, E23, E31, E32, E33, Z1, Z2, Z3, H1, H2, H3, Θ1, Θ2, Θ3]
A11 = NIntegrate[Eb * Iy * d4X1 * X1, {x, 0, H}] + NIntegrate[
2 * Eb * Iy1 * d3X1 * X1, {x, 0, H}] + NIntegrate[Eb * Iy2 * d2X1 * X1, {x, 0, H}];
A12 = NIntegrate[Eb * Iy * d4X2 * X1, {x, 0, H}] + NIntegrate[2 * Eb * Iy1 * d3X2 * X1,
{x, 0, H}] + NIntegrate[Eb * Iy2 * d2X2 * X1, {x, 0, H}];
A13 = NIntegrate[Eb * Iy * d4X3 * X1, {x, 0, H}] + NIntegrate[2 * Eb * Iy1 * d3X3 * X1,
{x, 0, H}] + NIntegrate[Eb * Iy2 * d2X3 * X1, {x, 0, H}];
A21 = NIntegrate[Eb * Iy * d4X1 * X2, {x, 0, H}] + NIntegrate[2 * Eb * Iy1 * d3X1 * X2,
{x, 0, H}] + NIntegrate[Eb * Iy2 * d2X1 * X2, {x, 0, H}];
A22 = NIntegrate[Eb * Iy * d4X2 * X2, {x, 0, H}] + NIntegrate[2 * Eb * Iy1 * d3X2 * X2,
{x, 0, H}] + NIntegrate[Eb * Iy2 * d2X2 * X2, {x, 0, H}];
A23 = NIntegrate[Eb * Iy * d4X3 * X2, {x, 0, H}] + NIntegrate[2 * Eb * Iy1 * d3X3 * X2,
{x, 0, H}] + NIntegrate[Eb * Iy2 * d2X3 * X2, {x, 0, H}];
A31 = NIntegrate[Eb * Iy * d4X1 * X3, {x, 0, H}] + NIntegrate[2 * Eb * Iy1 * d3X1 * X3,
{x, 0, H}] + NIntegrate[Eb * Iy2 * d2X1 * X3, {x, 0, H}];
A32 = NIntegrate[Eb * Iy * d4X2 * X3, {x, 0, H}] + NIntegrate[2 * Eb * Iy1 * d3X2 * X3,
{x, 0, H}] + NIntegrate[Eb * Iy2 * d2X2 * X3, {x, 0, H}];
A33 = NIntegrate[Eb * Iy * d4X3 * X3, {x, 0, H}] + NIntegrate[2 * Eb * Iy1 * d3X3 * X3,
{x, 0, H}] + NIntegrate[Eb * Iy2 * d2X3 * X3, {x, 0, H}];

Ba111 = -NIntegrate[d2X1 * X1, {x, 0, a1}];
Ba112 = -NIntegrate[d2X2 * X1, {x, 0, a1}];
Ba113 = -NIntegrate[d2X3 * X1, {x, 0, a1}];
Ba121 = -NIntegrate[d2X1 * X2, {x, 0, a1}];
Ba122 = -NIntegrate[d2X2 * X2, {x, 0, a1}];
Ba123 = -NIntegrate[d2X3 * X2, {x, 0, a1}];
Ba131 = -NIntegrate[d2X1 * X3, {x, 0, a1}];
Ba132 = -NIntegrate[d2X2 * X3, {x, 0, a1}];
Ba133 = -NIntegrate[d2X3 * X3, {x, 0, a1}];
Ba211 = -NIntegrate[d2X1 * X1, {x, 0, a2}];
Ba212 = -NIntegrate[d2X2 * X1, {x, 0, a2}];
Ba213 = -NIntegrate[d2X3 * X1, {x, 0, a2}];
Ba221 = -NIntegrate[d2X1 * X2, {x, 0, a2}];
Ba222 = -NIntegrate[d2X2 * X2, {x, 0, a2}];
Ba223 = -NIntegrate[d2X3 * X2, {x, 0, a2}];

```



```

Ba231 = -NIntegrate[d2X1 * X3, {x, 0, a2}];
Ba232 = -NIntegrate[d2X2 * X3, {x, 0, a2}];
Ba233 = -NIntegrate[d2X3 * X3, {x, 0, a2}];
Ba311 = -NIntegrate[d2X1 * X1, {x, 0, a3}];
Ba312 = -NIntegrate[d2X2 * X1, {x, 0, a3}];
Ba313 = -NIntegrate[d2X3 * X1, {x, 0, a3}];
Ba321 = -NIntegrate[d2X1 * X2, {x, 0, a3}];
Ba322 = -NIntegrate[d2X2 * X2, {x, 0, a3}];
Ba323 = -NIntegrate[d2X3 * X2, {x, 0, a3}];
Ba331 = -NIntegrate[d2X1 * X3, {x, 0, a3}];
Ba332 = -NIntegrate[d2X2 * X3, {x, 0, a3}];
Ba333 = -NIntegrate[d2X3 * X3, {x, 0, a3}];
Ba411 = -NIntegrate[d2X1 * X1, {x, 0, a4}];
Ba412 = -NIntegrate[d2X2 * X1, {x, 0, a4}];
Ba413 = -NIntegrate[d2X3 * X1, {x, 0, a4}];
Ba421 = -NIntegrate[d2X1 * X2, {x, 0, a4}];
Ba422 = -NIntegrate[d2X2 * X2, {x, 0, a4}];
Ba423 = -NIntegrate[d2X3 * X2, {x, 0, a4}];
Ba431 = -NIntegrate[d2X1 * X3, {x, 0, a4}];
Ba432 = -NIntegrate[d2X2 * X3, {x, 0, a4}];
Ba433 = -NIntegrate[d2X3 * X3, {x, 0, a4}];
Ba511 = -NIntegrate[d2X1 * X1, {x, 0, a5}];
Ba512 = -NIntegrate[d2X2 * X1, {x, 0, a5}];
Ba513 = -NIntegrate[d2X3 * X1, {x, 0, a5}];
Ba521 = -NIntegrate[d2X1 * X2, {x, 0, a5}];
Ba522 = -NIntegrate[d2X2 * X2, {x, 0, a5}];
Ba523 = -NIntegrate[d2X3 * X2, {x, 0, a5}];
Ba531 = -NIntegrate[d2X1 * X3, {x, 0, a5}];
Ba532 = -NIntegrate[d2X2 * X3, {x, 0, a5}];
Ba533 = -NIntegrate[d2X3 * X3, {x, 0, a5}];

Γ11 = NIntegrate[X1 * X1, {x, 0, H}];
Γ12 = NIntegrate[X2 * X1, {x, 0, H}];
Γ13 = NIntegrate[X3 * X1, {x, 0, H}];
Γ21 = NIntegrate[X1 * X2, {x, 0, H}];
Γ22 = NIntegrate[X2 * X2, {x, 0, H}];
Γ23 = NIntegrate[X3 * X2, {x, 0, H}];
Γ31 = NIntegrate[X1 * X3, {x, 0, H}];
Γ32 = NIntegrate[X2 * X3, {x, 0, H}];
Γ33 = NIntegrate[X3 * X3, {x, 0, H}];

Δ11 = NIntegrate[m * X1 * X1, {x, 0, H}] +
M * (Xa11 * Xa11 + Xa21 * Xa21 + Xa31 * Xa31 + Xa41 * Xa41 + Xa51 * Xa51);
Δ12 = NIntegrate[m * X2 * X1, {x, 0, H}] +
M * (Xa12 * Xa11 + Xa22 * Xa21 + Xa32 * Xa31 + Xa42 * Xa41 + Xa52 * Xa51);
Δ13 = NIntegrate[m * X3 * X1, {x, 0, H}] +
M * (Xa13 * Xa11 + Xa23 * Xa21 + Xa33 * Xa31 + Xa43 * Xa41 + Xa53 * Xa51);
Δ21 = NIntegrate[m * X1 * X2, {x, 0, H}] +
M * (Xa11 * Xa12 + Xa21 * Xa22 + Xa31 * Xa32 + Xa41 * Xa42 + Xa51 * Xa52);
Δ22 = NIntegrate[m * X2 * X2, {x, 0, H}] +
M * (Xa12 * Xa12 + Xa22 * Xa22 + Xa32 * Xa32 + Xa42 * Xa42 + Xa52 * Xa52);

```

$$\begin{aligned} \Delta 23 &= \text{NIntegrate}[m * X3 * X2, \{x, 0, H\}] + \\ & M * (Xa13 * Xa12 + Xa23 * Xa22 + Xa33 * Xa32 + Xa43 * Xa42 + Xa53 * Xa52); \\ \Delta 31 &= \text{NIntegrate}[m * X1 * X3, \{x, 0, H\}] + \\ & M * (Xa11 * Xa13 + Xa21 * Xa23 + Xa31 * Xa33 + Xa41 * Xa43 + Xa51 * Xa53); \\ \Delta 32 &= \text{NIntegrate}[m * X2 * X3, \{x, 0, H\}] + \\ & M * (Xa12 * Xa13 + Xa22 * Xa23 + Xa32 * Xa33 + Xa42 * Xa43 + Xa52 * Xa53); \\ \Delta 33 &= \text{NIntegrate}[m * X3 * X3, \{x, 0, H\}] + \\ & M * (Xa13 * Xa13 + Xa23 * Xa23 + Xa33 * Xa33 + Xa43 * Xa43 + Xa53 * Xa53); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E11 &= -J_0 * ((d2Xa11 * Xa11 + d1Xa11 * d1Xa11) + \\ & (d2Xa21 * Xa21 + d1Xa21 * d1Xa21) + (d2Xa31 * Xa31 + d1Xa31 * d1Xa31) + \\ & (d2Xa41 * Xa41 + d1Xa41 * d1Xa41) + (d2Xa51 * Xa51 + d1Xa51 * d1Xa51)); \\ E12 &= -J_0 * ((d2Xa12 * Xa11 + d1Xa12 * d1Xa11) + (d2Xa22 * Xa21 + d1Xa22 * d1Xa21) + \\ & (d2Xa32 * Xa31 + d1Xa32 * d1Xa31) + (d2Xa42 * Xa41 + d1Xa42 * d1Xa41) + \\ & (d2Xa52 * Xa51 + d1Xa52 * d1Xa51)); \\ E13 &= -J_0 * ((d2Xa13 * Xa11 + d1Xa13 * d1Xa11) + (d2Xa23 * Xa21 + d1Xa23 * d1Xa21) + \\ & (d2Xa33 * Xa31 + d1Xa33 * d1Xa31) + (d2Xa43 * Xa41 + d1Xa43 * d1Xa41) + \\ & (d2Xa53 * Xa51 + d1Xa53 * d1Xa51)); \\ E21 &= -J_0 * ((d2Xa11 * Xa12 + d1Xa11 * d1Xa12) + (d2Xa21 * Xa22 + d1Xa21 * d1Xa22) + \\ & (d2Xa31 * Xa32 + d1Xa31 * d1Xa32) + (d2Xa41 * Xa42 + d1Xa41 * d1Xa42) + \\ & (d2Xa51 * Xa52 + d1Xa51 * d1Xa52)); \\ E22 &= -J_0 * ((d2Xa12 * Xa12 + d1Xa12 * d1Xa12) + (d2Xa22 * Xa22 + d1Xa22 * d1Xa22) + \\ & (d2Xa32 * Xa32 + d1Xa32 * d1Xa32) + (d2Xa42 * Xa42 + d1Xa42 * d1Xa42) + \\ & (d2Xa52 * Xa52 + d1Xa52 * d1Xa52)); \\ E23 &= -J_0 * ((d2Xa13 * Xa12 + d1Xa13 * d1Xa12) + (d2Xa23 * Xa22 + d1Xa23 * d1Xa22) + \\ & (d2Xa33 * Xa32 + d1Xa33 * d1Xa32) + (d2Xa43 * Xa42 + d1Xa43 * d1Xa42) + \\ & (d2Xa53 * Xa52 + d1Xa53 * d1Xa52)); \\ E31 &= -J_0 * ((d2Xa11 * Xa13 + d1Xa11 * d1Xa13) + (d2Xa21 * Xa23 + d1Xa21 * d1Xa23) + \\ & (d2Xa31 * Xa33 + d1Xa31 * d1Xa33) + (d2Xa41 * Xa43 + d1Xa41 * d1Xa43) + \\ & (d2Xa51 * Xa53 + d1Xa51 * d1Xa53)); \\ E32 &= -J_0 * ((d2Xa12 * Xa13 + d1Xa12 * d1Xa13) + (d2Xa22 * Xa23 + d1Xa22 * d1Xa23) + \\ & (d2Xa32 * Xa33 + d1Xa32 * d1Xa33) + (d2Xa42 * Xa43 + d1Xa42 * d1Xa43) + \\ & (d2Xa52 * Xa53 + d1Xa52 * d1Xa53)); \\ E33 &= -J_0 * ((d2Xa13 * Xa13 + d1Xa13 * d1Xa13) + (d2Xa23 * Xa23 + d1Xa23 * d1Xa23) + \\ & (d2Xa33 * Xa33 + d1Xa33 * d1Xa33) + (d2Xa43 * Xa43 + d1Xa43 * d1Xa43) + \\ & (d2Xa53 * Xa53 + d1Xa53 * d1Xa53)); \end{aligned}$$

$$H1 = \text{NIntegrate}[X1, \{x, 0, H\}];$$

$$H2 = \text{NIntegrate}[X2, \{x, 0, H\}];$$

$$H3 = \text{NIntegrate}[X3, \{x, 0, H\}];$$

$$\textcircled{11} = X1a * X1a;$$

$$\textcircled{12} = X2a * X1a;$$

$$\textcircled{13} = X3a * X1a;$$

$$\textcircled{21} = X1a * X2a;$$

$$\textcircled{22} = X2a * X2a;$$

$$\textcircled{23} = X3a * X2a;$$

$$\textcircled{31} = X1a * X3a;$$

$$\textcircled{32} = X2a * X3a;$$

$$\textcircled{33} = X3a * X3a;$$

```

ClearAll[ω, f, F, E, G11, G12, G13, G21, G22, G23, G31, G32, G33,
R1, R2, R3, S1, S2, S3, z, L1, L2, L3, SS1, SS2, SS3, T1, T2, T3]
f = 0.1 * e-0.1*t * Sin[8 * t];
F = LaplaceTransform[f, t, p];

G11 = A11 + 5 * M * g * (Ba111 + Ba211 + Ba311 + Ba411 + Ba511) + c * p * Γ11 + p2 * (Δ11 + E11);
G12 = A12 + 5 * M * g * (Ba112 + Ba212 + Ba312 + Ba412 + Ba512) + c * p * Γ12 + p2 * (Δ12 + E12);
G13 = A13 + 5 * M * g * (Ba113 + Ba213 + Ba313 + Ba413 + Ba513) + c * p * Γ13 + p2 * (Δ13 + E13);

G21 = A21 + 5 * M * g * (Ba121 + Ba221 + Ba321 + Ba421 + Ba521) + c * p * Γ21 + p2 * (Δ21 + E21);
G22 = A22 + 5 * M * g * (Ba122 + Ba222 + Ba322 + Ba422 + Ba522) + c * p * Γ22 + p2 * (Δ22 + E22);
G23 = A23 + 5 * M * g * (Ba123 + Ba223 + Ba323 + Ba423 + Ba523) + c * p * Γ22 + p2 * (Δ22 + E22);

G31 = A31 + 5 * M * g * (Ba131 + Ba231 + Ba331 + Ba431 + Ba531) + c * p * Γ32 + p2 * (Δ32 + E32);
G32 = A32 + 5 * M * g * (Ba132 + Ba232 + Ba332 + Ba432 + Ba532) + c * p * Γ32 + p2 * (Δ32 + E32);
G33 = A33 + 5 * M * g * (Ba133 + Ba233 + Ba333 + Ba433 + Ba533) + c * p * Γ32 + p2 * (Δ32 + E32);

R1 = -c * H1 * p * F - @1 * p2 * F;
R2 = -c * H2 * p * F - @2 * p2 * F;
R3 = -c * H3 * p * F - @3 * p2 * F;
eqns = {G11 * S1 + G12 * S2 + G13 * S3 == R1,
G21 * S1 + G22 * S2 + G23 * S3 == R2, G31 * S1 + G32 * S2 + G33 * S3 == R3};
z = Solve[eqns, {S1, S2, S3}];
L1 = {S1} = {S1} /. z;
L2 = {S2} = {S2} /. z;
L3 = {S3} = {S3} /. z;
SS1 = Evaluate[Part[L1, 1]];
SS2 = Evaluate[Part[L2, 1]];
SS3 = Evaluate[Part[L3, 1]];

T1 = InverseLaplaceTransform[SS1, p, t];
T2 = InverseLaplaceTransform[SS2, p, t];
T3 = InverseLaplaceTransform[SS3, p, t];
ClearAll[x, λ1, λ2, λ3, X1, X2, X3, w, ddf]
λ1 = 0.009329192374498124;
λ2 = 0.023356;
λ3 = 0.039085;
X1 = c1 * Sin[λ1 * x] + c2 * Cos[λ1 * x] + c3 * Sinh[λ1 * x] + c4 * Cosh[λ1 * x];
X2 = c1 * Sin[λ2 * x] + c2 * Cos[λ2 * x] + c3 * Sinh[λ2 * x] + c4 * Cosh[λ2 * x];
X3 = c1 * Sin[λ3 * x] + c2 * Cos[λ3 * x] + c3 * Sinh[λ3 * x] + c4 * Cosh[λ3 * x];
Plot[f, {t, 0, 35}, PlotRange → {-0.15, 0.15}]
ddf = D[f, {t, 2}];
Plot[ddf, {t, 0, 35}, PlotRange → {-7, 7}]
ClearAll[x, w]
x = 1
w = X1 * T1 + X2 * T2 + X3 * T3;
Plot[w, {t, 0, 20}, AxesLabel → {"t", "w(1, t)"}]
ClearAll[x, w]

```

x = 200

w = X1 \* T1 + X2 \* T2 + X3 \* T3;

Plot[w, {t, 0, 20}, AxesLabel -> {"t", "w(200,t)"}]

```
ClearAll[w, t, X1, X2, X3, T1, T2, T3, w];
w = X1 * T1 + X2 * T2 + X3 * T3;
Plot[w, {t, 0, 20}, AxesLabel -> {"t", "w(200,t)"}]
```

```

ClearAll[x, b, H, a1, a2, a3, a4, a5, mo,
  Io, m, g, Iy, Iy1, Iy2, M, Mo, Jo, k1, k2, ce, c]
Eb = 2.1 * 1010;
H = 200;
a1 = 40;
a2 = 80;
a3 = 120;
a4 = 160;
a5 = 200;
mo = 630;
Io = 1300
m = mo * (1 -  $\frac{x}{2 * H}$ );
g = 10;
Iy = Io * (1 -  $\frac{x}{2 * H}$ )4;
Iy1 = D[Iy, x];
Iy2 = D[Iy1, x];
M = 240 000;
Mo = 600 000;
Jo = 20 * 106;
k1 = 100 000;
k2 = 1;
ce = 100;
c = 0.5;
ClearAll[x, c1, c2, c3, c4, λ, X1, d1X1, d2X1, d3X1,
  d4X1, Xa11, Xa21, Xa31, Xa41, Xa51, d1Xa11, d1Xa21, d1Xa31,
  d1Xa41, d1Xa51, d2Xa11, d2Xa21, d2Xa31, d2Xa41, d2Xa51]
λ = 0.00935995;
c1 = 1;
c2 = -  $\frac{c1 k2 (\text{Sin}[H \lambda] + \text{Sinh}[H \lambda])}{k2 (\text{Cos}[H \lambda] + \text{Cosh}[H \lambda]) + 2 \lambda \text{Sinh}[H \lambda]}$ ;
c3 = c1 (  $-1 + \frac{2 \lambda (\text{Sin}[H \lambda] + \text{Sinh}[H \lambda])}{k2 (\text{Cos}[H \lambda] + \text{Cosh}[H \lambda]) + 2 \lambda \text{Sinh}[H * \lambda]}$  );
c4 =  $\frac{c1 k2 (\text{Sin}[H \lambda] + \text{Sinh}[H \lambda])}{k2 (\text{Cos}[H \lambda] + \text{Cosh}[H \lambda]) + 2 \lambda \text{Sinh}[H \lambda]}$ ;
X1 = c1 * Sin[λ * x] + c2 * Cos[λ * x] + c3 * Sinh[λ * x] + c4 * Cosh[λ * x];
Xa11 = c1 * Sin[λ * a1] + c2 * Cos[λ * a1] + c3 * Sinh[λ * a1] + c4 * Cosh[λ * a1];
Xa21 = c1 * Sin[λ * a2] + c2 * Cos[λ * a2] + c3 * Sinh[λ * a2] + c4 * Cosh[λ * a2];
Xa31 = c1 * Sin[λ * a3] + c2 * Cos[λ * a3] + c3 * Sinh[λ * a3] + c4 * Cosh[λ * a3];
Xa41 = c1 * Sin[λ * a4] + c2 * Cos[λ * a4] + c3 * Sinh[λ * a4] + c4 * Cosh[λ * a4];
Xa51 = c1 * Sin[λ * a5] + c2 * Cos[λ * a5] + c3 * Sinh[λ * a5] + c4 * Cosh[λ * a5];
d1Xa11 =
  c1 * λ * Cos[λ * a1] - c2 * λ * Sin[λ * a1] + c3 * λ * Cosh[λ * a1] + c4 * λ * Sinh[λ * a1];
d1Xa21 = c1 * λ * Cos[λ * a2] - c2 * λ * Sin[λ * a2] +
  c3 * λ * Cosh[λ * a2] + c4 * λ * Sinh[λ * a2];
d1Xa31 = c1 * λ * Cos[λ * a3] - c2 * λ * Sin[λ * a3] +
  c3 * λ * Cosh[λ * a3] + c4 * λ * Sinh[λ * a3];
d1Xa41 = c1 * λ * Cos[λ * a4] - c2 * λ * Sin[λ * a4] +
  c3 * λ * Cosh[λ * a4] + c4 * λ * Sinh[λ * a4];

```

```

d1Xa51 = c1 * λ * Cos[λ * a5] - c2 * λ * Sin[λ * a5] +
  c3 * λ * Cosh[λ * a5] + c4 * λ * Sinh[λ * a5] ;
d2Xa11 = -c1 * λ2 * Sin[λ * a1] - c2 * λ2 * Cos[λ * a1] +
  c3 * λ2 * Sinh[λ * a1] + c4 * λ2 * Cosh[λ * a1] ;
d2Xa21 = -c1 * λ2 * Sin[λ * a2] - c2 * λ2 * Cos[λ * a2] +
  c3 * λ2 * Sinh[λ * a2] + c4 * λ2 * Cosh[λ * a2] ;
d2Xa31 = -c1 * λ2 * Sin[λ * a3] - c2 * λ2 * Cos[λ * a3] +
  c3 * λ2 * Sinh[λ * a3] + c4 * λ2 * Cosh[λ * a3] ;
d2Xa41 = -c1 * λ2 * Sin[λ * a4] - c2 * λ2 * Cos[λ * a4] +
  c3 * λ2 * Sinh[λ * a4] + c4 * λ2 * Cosh[λ * a4] ;
d2Xa51 = -c1 * λ2 * Sin[λ * a5] - c2 * λ2 * Cos[λ * a5] +
  c3 * λ2 * Sinh[λ * a5] + c4 * λ2 * Cosh[λ * a5] ;
d1X1 = D[X1, x] ;
d2X1 = D[d1X1, x] ;
d3X1 = D[d2X1, x] ;
d4X1 = D[d3X1, x] ;
(*
Plot[X1, {x, 0, H}]
*)
ClearAll[x, c1, c2, c3, c4, λ, X2, d1X2, d2X2, d3X2, d4X2]
λ = 0.023356;
c1 = 1;
c2 = -  $\frac{c1 k^2 (\text{Sin}[H \lambda] + \text{Sinh}[H \lambda])}{k^2 (\text{Cos}[H \lambda] + \text{Cosh}[H \lambda]) + 2 \lambda \text{Sinh}[H \lambda]}$  ;
c3 = c1  $\left( -1 + \frac{2 \lambda (\text{Sin}[H \lambda] + \text{Sinh}[H \lambda])}{k^2 (\text{Cos}[H \lambda] + \text{Cosh}[H \lambda]) + 2 \lambda \text{Sinh}[H \lambda]} \right)$  ;
c4 =  $\frac{c1 k^2 (\text{Sin}[H \lambda] + \text{Sinh}[H \lambda])}{k^2 (\text{Cos}[H \lambda] + \text{Cosh}[H \lambda]) + 2 \lambda \text{Sinh}[H \lambda]}$  ;
X2 = c1 * Sin[λ * x] + c2 * Cos[λ * x] + c3 * Sinh[λ * x] + c4 * Cosh[λ * x] ;
Xa12 = c1 * Sin[λ * a1] + c2 * Cos[λ * a1] + c3 * Sinh[λ * a1] + c4 * Cosh[λ * a1] ;
Xa22 = c1 * Sin[λ * a2] + c2 * Cos[λ * a2] + c3 * Sinh[λ * a2] + c4 * Cosh[λ * a2] ;
Xa32 = c1 * Sin[λ * a3] + c2 * Cos[λ * a3] + c3 * Sinh[λ * a3] + c4 * Cosh[λ * a3] ;
Xa42 = c1 * Sin[λ * a4] + c2 * Cos[λ * a4] + c3 * Sinh[λ * a4] + c4 * Cosh[λ * a4] ;
Xa52 = c1 * Sin[λ * a5] + c2 * Cos[λ * a5] + c3 * Sinh[λ * a5] + c4 * Cosh[λ * a5] ;
d1Xa12 =
  c1 * λ * Cos[λ * a1] - c2 * λ * Sin[λ * a1] + c3 * λ * Cosh[λ * a1] + c4 * λ * Sinh[λ * a1] ;
d1Xa22 = c1 * λ * Cos[λ * a2] - c2 * λ * Sin[λ * a2] +
  c3 * λ * Cosh[λ * a2] + c4 * λ * Sinh[λ * a2] ;
d1Xa32 = c1 * λ * Cos[λ * a3] - c2 * λ * Sin[λ * a3] +
  c3 * λ * Cosh[λ * a3] + c4 * λ * Sinh[λ * a3] ;
d1Xa42 = c1 * λ * Cos[λ * a4] - c2 * λ * Sin[λ * a4] +
  c3 * λ * Cosh[λ * a4] + c4 * λ * Sinh[λ * a4] ;
d1Xa52 = c1 * λ * Cos[λ * a5] - c2 * λ * Sin[λ * a5] +
  c3 * λ * Cosh[λ * a5] + c4 * λ * Sinh[λ * a5] ;
d2Xa12 = -c1 * λ2 * Sin[λ * a1] - c2 * λ2 * Cos[λ * a1] +
  c3 * λ2 * Sinh[λ * a1] + c4 * λ2 * Cosh[λ * a1] ;
d2Xa22 = -c1 * λ2 * Sin[λ * a2] - c2 * λ2 * Cos[λ * a2] +
  c3 * λ2 * Sinh[λ * a2] + c4 * λ2 * Cosh[λ * a2] ;
d2Xa32 = -c1 * λ2 * Sin[λ * a3] - c2 * λ2 * Cos[λ * a3] +

```

```

c3 * λ2 * Sinh[λ * a3] + c4 * λ2 * Cosh[λ * a3];
d2Xa42 = -c1 * λ2 * Sin[λ * a4] - c2 * λ2 * Cos[λ * a4] +
c3 * λ2 * Sinh[λ * a4] + c4 * λ2 * Cosh[λ * a4];
d2Xa52 = -c1 * λ2 * Sin[λ * a5] - c2 * λ2 * Cos[λ * a5] +
c3 * λ2 * Sinh[λ * a5] + c4 * λ2 * Cosh[λ * a5];
d1X2 = D[X2, x];
d2X2 = D[d1X2, x];
d3X2 = D[d2X2, x];
d4X2 = D[d3X2, x];
(*
Plot[X2, {x, 0, H}]
*)
ClearAll[x, c1, c2, c3, c4, λ, X3, d1X3, d2X3, d3X3, d4X3]
λ = 0.039085;
c1 = 1;
c2 = - $\frac{c1 k2 (\text{Sin}[H \lambda] + \text{Sinh}[H \lambda])}{k2 (\text{Cos}[H \lambda] + \text{Cosh}[H \lambda]) + 2 \lambda \text{Sinh}[H \lambda]}$ ;
c3 = c1  $\left( -1 + \frac{2 \lambda (\text{Sin}[H \lambda] + \text{Sinh}[H \lambda])}{k2 (\text{Cos}[H \lambda] + \text{Cosh}[H \lambda]) + 2 \lambda \text{Sinh}[H * \lambda]} \right)$ ;
c4 =  $\frac{c1 k2 (\text{Sin}[H \lambda] + \text{Sinh}[H \lambda])}{k2 (\text{Cos}[H \lambda] + \text{Cosh}[H \lambda]) + 2 \lambda \text{Sinh}[H \lambda]}$ ;
X3 = c1 * Sin[λ * x] + c2 * Cos[λ * x] + c3 * Sinh[λ * x] + c4 * Cosh[λ * x];
Xa13 = c1 * Sin[λ * a1] + c2 * Cos[λ * a1] + c3 * Sinh[λ * a1] + c4 * Cosh[λ * a1];
Xa23 = c1 * Sin[λ * a2] + c2 * Cos[λ * a2] + c3 * Sinh[λ * a2] + c4 * Cosh[λ * a2];
Xa33 = c1 * Sin[λ * a3] + c2 * Cos[λ * a3] + c3 * Sinh[λ * a3] + c4 * Cosh[λ * a3];
Xa43 = c1 * Sin[λ * a4] + c2 * Cos[λ * a4] + c3 * Sinh[λ * a4] + c4 * Cosh[λ * a4];
Xa53 = c1 * Sin[λ * a5] + c2 * Cos[λ * a5] + c3 * Sinh[λ * a5] + c4 * Cosh[λ * a5];
d1Xa13 =
c1 * λ * Cos[λ * a1] - c2 * λ * Sin[λ * a1] + c3 * λ * Cosh[λ * a1] + c4 * λ * Sinh[λ * a1];
d1Xa23 = c1 * λ * Cos[λ * a2] - c2 * λ * Sin[λ * a2] +
c3 * λ * Cosh[λ * a2] + c4 * λ * Sinh[λ * a2];
d1Xa33 = c1 * λ * Cos[λ * a3] - c2 * λ * Sin[λ * a3] +
c3 * λ * Cosh[λ * a3] + c4 * λ * Sinh[λ * a3];
d1Xa43 = c1 * λ * Cos[λ * a4] - c2 * λ * Sin[λ * a4] +
c3 * λ * Cosh[λ * a4] + c4 * λ * Sinh[λ * a4];
d1Xa53 = c1 * λ * Cos[λ * a5] - c2 * λ * Sin[λ * a5] +
c3 * λ * Cosh[λ * a5] + c4 * λ * Sinh[λ * a5];
d2Xa13 = -c1 * λ2 * Sin[λ * a1] - c2 * λ2 * Cos[λ * a1] +
c3 * λ2 * Sinh[λ * a1] + c4 * λ2 * Cosh[λ * a1];
d2Xa23 = -c1 * λ2 * Sin[λ * a2] - c2 * λ2 * Cos[λ * a2] +
c3 * λ2 * Sinh[λ * a2] + c4 * λ2 * Cosh[λ * a2];
d2Xa33 = -c1 * λ2 * Sin[λ * a3] - c2 * λ2 * Cos[λ * a3] +
c3 * λ2 * Sinh[λ * a3] + c4 * λ2 * Cosh[λ * a3];
d2Xa43 = -c1 * λ2 * Sin[λ * a4] - c2 * λ2 * Cos[λ * a4] +
c3 * λ2 * Sinh[λ * a4] + c4 * λ2 * Cosh[λ * a4];
d2Xa53 = -c1 * λ2 * Sin[λ * a5] - c2 * λ2 * Cos[λ * a5] +
c3 * λ2 * Sinh[λ * a5] + c4 * λ2 * Cosh[λ * a5];
d1X3 = D[X3, x];
d2X3 = D[d1X3, x];

```

```

d3X3 = D[d2X3, x];
d4X3 = D[d3X3, x];
(*
Plot[X3, {x, 0, H}]
*)
ClearAll[A11, A12, A13, A21, A22, A23, A31, A32, A33, Ba111, Ba112, Ba113, Ba121,
Ba122, Ba123, Ba131, Ba132, Ba133, Ba211, Ba212, Ba213, Ba221, Ba222, Ba223,
Ba231, Ba232, Ba233, Ba311, Ba312, Ba313, Ba321, Ba322, Ba323, Ba331, Ba332,
Ba333, Ba411, Ba412, Ba413, Ba421, Ba422, Ba423, Ba431, Ba432, Ba433, Ba511,
Ba512, Ba513, Ba521, Ba522, Ba523, Ba531, Ba532, Ba533, Γ11, Γ12, Γ13, Γ21,
Γ22, Γ23, Γ31, Γ32, Γ33, Δ11, Δ12, Δ13, Δ21, Δ22, Δ23, Δ31, Δ32, Δ33, E11,
E12, E13, E21, E22, E23, E31, E32, E33, Z1, Z2, Z3, H1, H2, H3, Θ1, Θ2, Θ3]
A11 = NIntegrate[Eb * Iy * d4X1 * X1, {x, 0, H}] + NIntegrate[
2 * Eb * Iy1 * d3X1 * X1, {x, 0, H}] + NIntegrate[Eb * Iy2 * d2X1 * X1, {x, 0, H}];
A12 = NIntegrate[Eb * Iy * d4X2 * X1, {x, 0, H}] + NIntegrate[2 * Eb * Iy1 * d3X2 * X1,
{x, 0, H}] + NIntegrate[Eb * Iy2 * d2X2 * X1, {x, 0, H}];
A13 = NIntegrate[Eb * Iy * d4X3 * X1, {x, 0, H}] + NIntegrate[2 * Eb * Iy1 * d3X3 * X1,
{x, 0, H}] + NIntegrate[Eb * Iy2 * d2X3 * X1, {x, 0, H}];
A21 = NIntegrate[Eb * Iy * d4X1 * X2, {x, 0, H}] + NIntegrate[2 * Eb * Iy1 * d3X1 * X2,
{x, 0, H}] + NIntegrate[Eb * Iy2 * d2X1 * X2, {x, 0, H}];
A22 = NIntegrate[Eb * Iy * d4X2 * X2, {x, 0, H}] + NIntegrate[2 * Eb * Iy1 * d3X2 * X2,
{x, 0, H}] + NIntegrate[Eb * Iy2 * d2X2 * X2, {x, 0, H}];
A23 = NIntegrate[Eb * Iy * d4X3 * X2, {x, 0, H}] + NIntegrate[2 * Eb * Iy1 * d3X3 * X2,
{x, 0, H}] + NIntegrate[Eb * Iy2 * d2X3 * X2, {x, 0, H}];
A31 = NIntegrate[Eb * Iy * d4X1 * X3, {x, 0, H}] + NIntegrate[2 * Eb * Iy1 * d3X1 * X3,
{x, 0, H}] + NIntegrate[Eb * Iy2 * d2X1 * X3, {x, 0, H}];
A32 = NIntegrate[Eb * Iy * d4X2 * X3, {x, 0, H}] + NIntegrate[2 * Eb * Iy1 * d3X2 * X3,
{x, 0, H}] + NIntegrate[Eb * Iy2 * d2X2 * X3, {x, 0, H}];
A33 = NIntegrate[Eb * Iy * d4X3 * X3, {x, 0, H}] + NIntegrate[2 * Eb * Iy1 * d3X3 * X3,
{x, 0, H}] + NIntegrate[Eb * Iy2 * d2X3 * X3, {x, 0, H}];

Ba111 = -NIntegrate[d2X1 * X1, {x, 0, a1}];
Ba112 = -NIntegrate[d2X2 * X1, {x, 0, a1}];
Ba113 = -NIntegrate[d2X3 * X1, {x, 0, a1}];
Ba121 = -NIntegrate[d2X1 * X2, {x, 0, a1}];
Ba122 = -NIntegrate[d2X2 * X2, {x, 0, a1}];
Ba123 = -NIntegrate[d2X3 * X2, {x, 0, a1}];
Ba131 = -NIntegrate[d2X1 * X3, {x, 0, a1}];
Ba132 = -NIntegrate[d2X2 * X3, {x, 0, a1}];
Ba133 = -NIntegrate[d2X3 * X3, {x, 0, a1}];
Ba211 = -NIntegrate[d2X1 * X1, {x, 0, a2}];
Ba212 = -NIntegrate[d2X2 * X1, {x, 0, a2}];
Ba213 = -NIntegrate[d2X3 * X1, {x, 0, a2}];
Ba221 = -NIntegrate[d2X1 * X2, {x, 0, a2}];
Ba222 = -NIntegrate[d2X2 * X2, {x, 0, a2}];
Ba223 = -NIntegrate[d2X3 * X2, {x, 0, a2}];
Ba231 = -NIntegrate[d2X1 * X3, {x, 0, a2}];
Ba232 = -NIntegrate[d2X2 * X3, {x, 0, a2}];
Ba233 = -NIntegrate[d2X3 * X3, {x, 0, a2}];
Ba311 = -NIntegrate[d2X1 * X1, {x, 0, a3}];
Ba312 = -NIntegrate[d2X2 * X1, {x, 0, a3}];

```



```

Ba313 = -NIntegrate[d2X3 * X1, {x, 0, a3}];
Ba321 = -NIntegrate[d2X1 * X2, {x, 0, a3}];
Ba322 = -NIntegrate[d2X2 * X2, {x, 0, a3}];
Ba323 = -NIntegrate[d2X3 * X2, {x, 0, a3}];
Ba331 = -NIntegrate[d2X1 * X3, {x, 0, a3}];
Ba332 = -NIntegrate[d2X2 * X3, {x, 0, a3}];
Ba333 = -NIntegrate[d2X3 * X3, {x, 0, a3}];
Ba411 = -NIntegrate[d2X1 * X1, {x, 0, a4}];
Ba412 = -NIntegrate[d2X2 * X1, {x, 0, a4}];
Ba413 = -NIntegrate[d2X3 * X1, {x, 0, a4}];
Ba421 = -NIntegrate[d2X1 * X2, {x, 0, a4}];
Ba422 = -NIntegrate[d2X2 * X2, {x, 0, a4}];
Ba423 = -NIntegrate[d2X3 * X2, {x, 0, a4}];
Ba431 = -NIntegrate[d2X1 * X3, {x, 0, a4}];
Ba432 = -NIntegrate[d2X2 * X3, {x, 0, a4}];
Ba433 = -NIntegrate[d2X3 * X3, {x, 0, a4}];
Ba511 = -NIntegrate[d2X1 * X1, {x, 0, a5}];
Ba512 = -NIntegrate[d2X2 * X1, {x, 0, a5}];
Ba513 = -NIntegrate[d2X3 * X1, {x, 0, a5}];
Ba521 = -NIntegrate[d2X1 * X2, {x, 0, a5}];
Ba522 = -NIntegrate[d2X2 * X2, {x, 0, a5}];
Ba523 = -NIntegrate[d2X3 * X2, {x, 0, a5}];
Ba531 = -NIntegrate[d2X1 * X3, {x, 0, a5}];
Ba532 = -NIntegrate[d2X2 * X3, {x, 0, a5}];
Ba533 = -NIntegrate[d2X3 * X3, {x, 0, a5}];

Γ11 = NIntegrate[X1 * X1, {x, 0, H}];
Γ12 = NIntegrate[X2 * X1, {x, 0, H}];
Γ13 = NIntegrate[X3 * X1, {x, 0, H}];
Γ21 = NIntegrate[X1 * X2, {x, 0, H}];
Γ22 = NIntegrate[X2 * X2, {x, 0, H}];
Γ23 = NIntegrate[X3 * X2, {x, 0, H}];
Γ31 = NIntegrate[X1 * X3, {x, 0, H}];
Γ32 = NIntegrate[X2 * X3, {x, 0, H}];
Γ33 = NIntegrate[X3 * X3, {x, 0, H}];

Δ11 = NIntegrate[m * X1 * X1, {x, 0, H}] +
      M * (Xa11 * Xa11 + Xa21 * Xa21 + Xa31 * Xa31 + Xa41 * Xa41 + Xa51 * Xa51);
Δ12 = NIntegrate[m * X2 * X1, {x, 0, H}] +
      M * (Xa12 * Xa11 + Xa22 * Xa21 + Xa32 * Xa31 + Xa42 * Xa41 + Xa52 * Xa51);
Δ13 = NIntegrate[m * X3 * X1, {x, 0, H}] +
      M * (Xa13 * Xa11 + Xa23 * Xa21 + Xa33 * Xa31 + Xa43 * Xa41 + Xa53 * Xa51);
Δ21 = NIntegrate[m * X1 * X2, {x, 0, H}] +
      M * (Xa11 * Xa12 + Xa21 * Xa22 + Xa31 * Xa32 + Xa41 * Xa42 + Xa51 * Xa52);
Δ22 = NIntegrate[m * X2 * X2, {x, 0, H}] +
      M * (Xa12 * Xa12 + Xa22 * Xa22 + Xa32 * Xa32 + Xa42 * Xa42 + Xa52 * Xa52);
Δ23 = NIntegrate[m * X3 * X2, {x, 0, H}] +
      M * (Xa13 * Xa12 + Xa23 * Xa22 + Xa33 * Xa32 + Xa43 * Xa42 + Xa53 * Xa52);
Δ31 = NIntegrate[m * X1 * X3, {x, 0, H}] +
      M * (Xa11 * Xa13 + Xa21 * Xa23 + Xa31 * Xa33 + Xa41 * Xa43 + Xa51 * Xa53);
Δ32 = NIntegrate[m * X2 * X3, {x, 0, H}] +

```

```

M * (Xa12 * Xa13 + Xa22 * Xa23 + Xa32 * Xa33 + Xa42 * Xa43 + Xa52 * Xa53) ;
Δ33 = NIntegrate[m * X3 * X3, {x, 0, H}] +
M * (Xa13 * Xa13 + Xa23 * Xa23 + Xa33 * Xa33 + Xa43 * Xa43 + Xa53 * Xa53) ;

E11 = -Jo * ((d2Xa11 * Xa11 + d1Xa11 * d1Xa11) +
(d2Xa21 * Xa21 + d1Xa21 * d1Xa21) + (d2Xa31 * Xa31 + d1Xa31 * d1Xa31) +
(d2Xa41 * Xa41 + d1Xa41 * d1Xa41) + (d2Xa51 * Xa51 + d1Xa51 * d1Xa51)) ;
E12 = -Jo * ((d2Xa12 * Xa11 + d1Xa12 * d1Xa11) + (d2Xa22 * Xa21 + d1Xa22 * d1Xa21) +
(d2Xa32 * Xa31 + d1Xa32 * d1Xa31) + (d2Xa42 * Xa41 + d1Xa42 * d1Xa41) +
(d2Xa52 * Xa51 + d1Xa52 * d1Xa51)) ;
E13 = -Jo * ((d2Xa13 * Xa11 + d1Xa13 * d1Xa11) + (d2Xa23 * Xa21 + d1Xa23 * d1Xa21) +
(d2Xa33 * Xa31 + d1Xa33 * d1Xa31) + (d2Xa43 * Xa41 + d1Xa43 * d1Xa41) +
(d2Xa53 * Xa51 + d1Xa53 * d1Xa51)) ;
E21 = -Jo * ((d2Xa11 * Xa12 + d1Xa11 * d1Xa12) + (d2Xa21 * Xa22 + d1Xa21 * d1Xa22) +
(d2Xa31 * Xa32 + d1Xa31 * d1Xa32) + (d2Xa41 * Xa42 + d1Xa41 * d1Xa42) +
(d2Xa51 * Xa52 + d1Xa51 * d1Xa52)) ;
E22 = -Jo * ((d2Xa12 * Xa12 + d1Xa12 * d1Xa12) + (d2Xa22 * Xa22 + d1Xa22 * d1Xa22) +
(d2Xa32 * Xa32 + d1Xa32 * d1Xa32) + (d2Xa42 * Xa42 + d1Xa42 * d1Xa42) +
(d2Xa52 * Xa52 + d1Xa52 * d1Xa52)) ;
E23 = -Jo * ((d2Xa13 * Xa12 + d1Xa13 * d1Xa12) + (d2Xa23 * Xa22 + d1Xa23 * d1Xa22) +
(d2Xa33 * Xa32 + d1Xa33 * d1Xa32) + (d2Xa43 * Xa42 + d1Xa43 * d1Xa42) +
(d2Xa53 * Xa52 + d1Xa53 * d1Xa52)) ;
E31 = -Jo * ((d2Xa11 * Xa13 + d1Xa11 * d1Xa13) + (d2Xa21 * Xa23 + d1Xa21 * d1Xa23) +
(d2Xa31 * Xa33 + d1Xa31 * d1Xa33) + (d2Xa41 * Xa43 + d1Xa41 * d1Xa43) +
(d2Xa51 * Xa53 + d1Xa51 * d1Xa53)) ;
E32 = -Jo * ((d2Xa12 * Xa13 + d1Xa12 * d1Xa13) + (d2Xa22 * Xa23 + d1Xa22 * d1Xa23) +
(d2Xa32 * Xa33 + d1Xa32 * d1Xa33) + (d2Xa42 * Xa43 + d1Xa42 * d1Xa43) +
(d2Xa52 * Xa53 + d1Xa52 * d1Xa53)) ;
E33 = -Jo * ((d2Xa13 * Xa13 + d1Xa13 * d1Xa13) + (d2Xa23 * Xa23 + d1Xa23 * d1Xa23) +
(d2Xa33 * Xa33 + d1Xa33 * d1Xa33) + (d2Xa43 * Xa43 + d1Xa43 * d1Xa43) +
(d2Xa53 * Xa53 + d1Xa53 * d1Xa53)) ;

Z1 = NIntegrate[m * X1, {x, 0, H}] + M * (Xa11 + Xa21 + Xa31 + Xa41 + Xa51) ;
Z2 = NIntegrate[m * X2, {x, 0, H}] + M * (Xa12 + Xa22 + Xa32 + Xa42 + Xa52) ;
Z3 = NIntegrate[m * X3, {x, 0, H}] + M * (Xa13 + Xa23 + Xa33 + Xa43 + Xa53) ;

H1 = NIntegrate[X1, {x, 0, H}] ;
H2 = NIntegrate[X2, {x, 0, H}] ;
H3 = NIntegrate[X3, {x, 0, H}] ;

Θ1 = NIntegrate[m * X1, {x, 0, H}] + M * (Xa11 + Xa21 + Xa31 + Xa41 + Xa51) ;
Θ2 = NIntegrate[m * X2, {x, 0, H}] + M * (Xa12 + Xa22 + Xa32 + Xa42 + Xa52) ;
Θ3 = NIntegrate[m * X3, {x, 0, H}] + M * (Xa13 + Xa23 + Xa33 + Xa43 + Xa53) ;

ClearAll[ω, βe, f, F, E, G11, G12, G13, G21, G22, G23, G31, G32,
G33, R1, R2, R3, S1, S2, S3, z, L1, L2, L3, SS1, SS2, SS3, T1, T2, T3]

βe = 
$$\frac{ce}{2 * (Mo + NIntegrate[m, \{x, 0, H\}] + 5 * M)}$$
 ;
ω = 
$$\sqrt{\frac{k1}{(Mo + NIntegrate[m, \{x, 0, H\}] + 5 * M)}}$$
 ;

```

```

N[βe]
N[ω]
f = 0.1 * e-0.1*t * Sin[10 * t];
F = LaplaceTransform[f, t, p];
Ξ =  $\frac{\omega}{\omega^2 + (\beta e + p)^2}$ ;
G11 = A11 + 5 * M * g * (Ba111 + Ba211 + Ba311 + Ba411 + Ba511) +
      c * p * Γ11 + p2 * (Δ11 + E11) -  $\frac{\omega}{k1}$  * (Z1 * p4 + H1 * p3) * Θ1 * Ξ;
G12 = A12 + 5 * M * g * (Ba112 + Ba212 + Ba312 + Ba412 + Ba512) +
      c * p * Γ12 + p2 * (Δ12 + E12) -  $\frac{\omega}{k1}$  * (Z1 * p4 + H1 * p3) * Θ2 * Ξ;
G13 = A13 + 5 * M * g * (Ba113 + Ba213 + Ba313 + Ba413 + Ba513) +
      c * p * Γ13 + p2 * (Δ13 + E13) -  $\frac{\omega}{k1}$  * (Z1 * p4 + H1 * p3) * Θ3 * Ξ;

G21 = A21 + 5 * M * g * (Ba121 + Ba221 + Ba321 + Ba421 + Ba521) +
      c * p * Γ21 + p2 * (Δ21 + E21) -  $\frac{\omega}{k1}$  * (Z2 * p4 + H2 * p3) * Θ1 * Ξ;
G22 = A22 + 5 * M * g * (Ba122 + Ba222 + Ba322 + Ba422 + Ba522) +
      c * p * Γ22 + p2 * (Δ22 + E22) -  $\frac{\omega}{k1}$  * (Z2 * p4 + H2 * p3) * Θ2 * Ξ;
G23 = A23 + 5 * M * g * (Ba123 + Ba223 + Ba323 + Ba423 + Ba523) +
      c * p * Γ22 + p2 * (Δ22 + E22) -  $\frac{\omega}{k1}$  * (Z2 * p4 + H2 * p3) * Θ3 * Ξ;

G31 = A31 + 5 * M * g * (Ba131 + Ba231 + Ba331 + Ba431 + Ba531) +
      c * p * Γ32 + p2 * (Δ32 + E32) -  $\frac{\omega}{k1}$  * (Z3 * p4 + H3 * p3) * Θ1 * Ξ;
G32 = A32 + 5 * M * g * (Ba132 + Ba232 + Ba332 + Ba432 + Ba532) +
      c * p * Γ32 + p2 * (Δ32 + E32) -  $\frac{\omega}{k1}$  * (Z3 * p4 + H3 * p3) * Θ2 * Ξ;
G33 = A33 + 5 * M * g * (Ba133 + Ba233 + Ba333 + Ba433 + Ba533) +
      c * p * Γ32 + p2 * (Δ32 + E32) -  $\frac{\omega}{k1}$  * (Z3 * p4 + H3 * p3) * Θ3 * Ξ;

R1 = c * (Z1 * p2 + H1 * p) * F - (Z1 * p4 + H1 * p3) *  $\frac{\Xi * F}{\omega}$ ;
R2 = c * (Z2 * p2 + H2 * p) * F - (Z2 * p4 + H2 * p3) *  $\frac{\Xi * F}{\omega}$ ;
R3 = c * (Z3 * p2 + H3 * p) * F - (Z3 * p4 + H3 * p3) *  $\frac{\Xi * F}{\omega}$ ;

eqns = {G11 * S1 + G12 * S2 + G13 * S3 == R1,
        G21 * S1 + G22 * S2 + G23 * S3 == R2, G31 * S1 + G32 * S2 + G33 * S3 == R3};
z = Solve[eqns, {S1, S2, S3}];
L1 = {S1} = {S1} /. z;
L2 = {S2} = {S2} /. z;
L3 = {S3} = {S3} /. z;
SS1 = Evaluate[Part[L1, 1]];
SS2 = Evaluate[Part[L2, 1]];

```

```

SS3 = Evaluate[Part[L3, 1]];

T1 = InverseLaplaceTransform[SS1, p, t];
T2 = InverseLaplaceTransform[SS2, p, t];
T3 = InverseLaplaceTransform[SS3, p, t];
ClearAll[x, λ1, λ2, λ3, X1, X2, X3, w, ddf]
λ1 = 0.009329;
λ2 = 0.023356;
λ3 = 0.039085;
X1 = c1 * Sin[λ1 * x] + c2 * Cos[λ1 * x] + c3 * Sinh[λ1 * x] + c4 * Cosh[λ1 * x];
X2 = c1 * Sin[λ2 * x] + c2 * Cos[λ2 * x] + c3 * Sinh[λ2 * x] + c4 * Cosh[λ2 * x];
X3 = c1 * Sin[λ3 * x] + c2 * Cos[λ3 * x] + c3 * Sinh[λ3 * x] + c4 * Cosh[λ3 * x];
Plot[f, {t, 0, 35}, PlotRange → {-0.15, 0.15}]
ddf = D[f, {t, 2}];
Plot[ddf, {t, 0, 35}, PlotRange → {-7, 7}]
x = 1
w = X1 * T1 + X2 * T2 + X3 * T3;
Plot[w, {t, 0, 20}, AxesLabel → {"t", "w(1,t)"}]
ClearAll[x, w]
x = 200
w = X1 * T1 + X2 * T2 + X3 * T3;
Plot[w, {t, 0, 20}, AxesLabel → {"t", "w(200,t)"}]

```

```

ClearAll[x, b, H, a1, a2, a3, a4, a5, mo, a,
  Io, m, g, Iy, Iy1, Iy2, M, a, Ma, ca, ka, Jo, c, Eb, k2]
Eb = 2.1 * 1010;
H = 200;
a1 = 40;
a2 = 80;
a3 = 120;
a4 = 160;
a5 = 200;
mo = 630;
Io = 500;
m = mo * (1 -  $\frac{x}{2 * H}$ );
g = 10;
Iy = Io * (1 -  $\frac{x}{2 * H}$ )4;
Iy1 = D[Iy, x];
Iy2 = D[Iy1, x];
M = 240 000;
a = 200;
Ma = 400 000;
ca = 10;
ka = 100;
Jo = 20 * 106;
k2 = 1;
c = 0.5;
ClearAll[x, c1, c2, c3, c4, λ, X1, X1a, d1X1, d2X1, d3X1,
  d4X1, Xa11, Xa21, Xa31, Xa41, Xa51, d1Xa11, d1Xa21, d1Xa31,
  d1Xa41, d1Xa51, d2Xa11, d2Xa21, d2Xa31, d2Xa41, d2Xa51]
λ = 0.009329192374498124` ;
c1 = 1;
c2 = -  $\frac{c1 k2 (\text{Sin}[H \lambda] + \text{Sinh}[H \lambda])}{k2 (\text{Cos}[H \lambda] + \text{Cosh}[H \lambda]) + 2 \lambda \text{Sinh}[H \lambda]}$ ;
c3 = c1  $\left( -1 + \frac{2 \lambda (\text{Sin}[H \lambda] + \text{Sinh}[H \lambda])}{k2 (\text{Cos}[H \lambda] + \text{Cosh}[H \lambda]) + 2 \lambda \text{Sinh}[H * \lambda]} \right)$ ;
c4 =  $\frac{c1 k2 (\text{Sin}[H \lambda] + \text{Sinh}[H \lambda])}{k2 (\text{Cos}[H \lambda] + \text{Cosh}[H \lambda]) + 2 \lambda \text{Sinh}[H \lambda]}$ ;
X1 = c1 * Sin[λ * x] + c2 * Cos[λ * x] + c3 * Sinh[λ * x] + c4 * Cosh[λ * x];
X1a = c1 * Sin[λ * a] + c2 * Cos[λ * a] + c3 * Sinh[λ * a] + c4 * Cosh[λ * a];
Xa11 = c1 * Sin[λ * a1] + c2 * Cos[λ * a1] + c3 * Sinh[λ * a1] + c4 * Cosh[λ * a1];
Xa21 = c1 * Sin[λ * a2] + c2 * Cos[λ * a2] + c3 * Sinh[λ * a2] + c4 * Cosh[λ * a2];
Xa31 = c1 * Sin[λ * a3] + c2 * Cos[λ * a3] + c3 * Sinh[λ * a3] + c4 * Cosh[λ * a3];
Xa41 = c1 * Sin[λ * a4] + c2 * Cos[λ * a4] + c3 * Sinh[λ * a4] + c4 * Cosh[λ * a4];
Xa51 = c1 * Sin[λ * a5] + c2 * Cos[λ * a5] + c3 * Sinh[λ * a5] + c4 * Cosh[λ * a5];
d1Xa11 =
  c1 * λ * Cos[λ * a1] - c2 * λ * Sin[λ * a1] + c3 * λ * Cosh[λ * a1] + c4 * λ * Sinh[λ * a1];
d1Xa21 = c1 * λ * Cos[λ * a2] - c2 * λ * Sin[λ * a2] +
  c3 * λ * Cosh[λ * a2] + c4 * λ * Sinh[λ * a2];
d1Xa31 = c1 * λ * Cos[λ * a3] - c2 * λ * Sin[λ * a3] +
  c3 * λ * Cosh[λ * a3] + c4 * λ * Sinh[λ * a3];

```

```

d1Xa41 = c1 * λ * Cos[λ * a4] - c2 * λ * Sin[λ * a4] +
c3 * λ * Cosh[λ * a4] + c4 * λ * Sinh[λ * a4];
d1Xa51 = c1 * λ * Cos[λ * a5] - c2 * λ * Sin[λ * a5] +
c3 * λ * Cosh[λ * a5] + c4 * λ * Sinh[λ * a5];
d2Xa11 = -c1 * λ2 * Sin[λ * a1] - c2 * λ2 * Cos[λ * a1] +
c3 * λ2 * Sinh[λ * a1] + c4 * λ2 * Cosh[λ * a1];
d2Xa21 = -c1 * λ2 * Sin[λ * a2] - c2 * λ2 * Cos[λ * a2] +
c3 * λ2 * Sinh[λ * a2] + c4 * λ2 * Cosh[λ * a2];
d2Xa31 = -c1 * λ2 * Sin[λ * a3] - c2 * λ2 * Cos[λ * a3] +
c3 * λ2 * Sinh[λ * a3] + c4 * λ2 * Cosh[λ * a3];
d2Xa41 = -c1 * λ2 * Sin[λ * a4] - c2 * λ2 * Cos[λ * a4] +
c3 * λ2 * Sinh[λ * a4] + c4 * λ2 * Cosh[λ * a4];
d2Xa51 = -c1 * λ2 * Sin[λ * a5] - c2 * λ2 * Cos[λ * a5] +
c3 * λ2 * Sinh[λ * a5] + c4 * λ2 * Cosh[λ * a5];
d1X1 = D[X1, x];
d2X1 = D[d1X1, x];
d3X1 = D[d2X1, x];
d4X1 = D[d3X1, x];
(*
Plot[X1, {x, 0, H}]
*)
ClearAll[x, c1, c2, c3, c4, λ, X2, X2a, d1X2, d2X2, d3X2,
d4X2, Xa12, Xa22, Xa32, Xa42, Xa52, d1Xa12, d1Xa22, d1Xa32,
d1Xa42, d1Xa52, d2Xa12, d2Xa22, d2Xa32, d2Xa42, d2Xa52]
λ = 0.023356;
c1 = 1;
c2 = -  $\frac{c1 k2 (\text{Sin}[H \lambda] + \text{Sinh}[H \lambda])}{k2 (\text{Cos}[H \lambda] + \text{Cosh}[H \lambda]) + 2 \lambda \text{Sinh}[H \lambda]}$ ;
c3 = c1  $\left( -1 + \frac{2 \lambda (\text{Sin}[H \lambda] + \text{Sinh}[H \lambda])}{k2 (\text{Cos}[H \lambda] + \text{Cosh}[H \lambda]) + 2 \lambda \text{Sinh}[H \lambda]} \right)$ ;
c4 =  $\frac{c1 k2 (\text{Sin}[H \lambda] + \text{Sinh}[H \lambda])}{k2 (\text{Cos}[H \lambda] + \text{Cosh}[H \lambda]) + 2 \lambda \text{Sinh}[H \lambda]}$ ;
X2 = c1 * Sin[λ * x] + c2 * Cos[λ * x] + c3 * Sinh[λ * x] + c4 * Cosh[λ * x];
X2a = c1 * Sin[λ * a] + c2 * Cos[λ * a] + c3 * Sinh[λ * a] + c4 * Cosh[λ * a];
Xa12 = c1 * Sin[λ * a1] + c2 * Cos[λ * a1] + c3 * Sinh[λ * a1] + c4 * Cosh[λ * a1];
Xa22 = c1 * Sin[λ * a2] + c2 * Cos[λ * a2] + c3 * Sinh[λ * a2] + c4 * Cosh[λ * a2];
Xa32 = c1 * Sin[λ * a3] + c2 * Cos[λ * a3] + c3 * Sinh[λ * a3] + c4 * Cosh[λ * a3];
Xa42 = c1 * Sin[λ * a4] + c2 * Cos[λ * a4] + c3 * Sinh[λ * a4] + c4 * Cosh[λ * a4];
Xa52 = c1 * Sin[λ * a5] + c2 * Cos[λ * a5] + c3 * Sinh[λ * a5] + c4 * Cosh[λ * a5];
d1Xa12 =
c1 * λ * Cos[λ * a1] - c2 * λ * Sin[λ * a1] + c3 * λ * Cosh[λ * a1] + c4 * λ * Sinh[λ * a1];
d1Xa22 = c1 * λ * Cos[λ * a2] - c2 * λ * Sin[λ * a2] +
c3 * λ * Cosh[λ * a2] + c4 * λ * Sinh[λ * a2];
d1Xa32 = c1 * λ * Cos[λ * a3] - c2 * λ * Sin[λ * a3] +
c3 * λ * Cosh[λ * a3] + c4 * λ * Sinh[λ * a3];
d1Xa42 = c1 * λ * Cos[λ * a4] - c2 * λ * Sin[λ * a4] +
c3 * λ * Cosh[λ * a4] + c4 * λ * Sinh[λ * a4];
d1Xa52 = c1 * λ * Cos[λ * a5] - c2 * λ * Sin[λ * a5] +
c3 * λ * Cosh[λ * a5] + c4 * λ * Sinh[λ * a5];
d2Xa12 = -c1 * λ2 * Sin[λ * a1] - c2 * λ2 * Cos[λ * a1] +

```

```

c3 * λ2 * Sinh[λ * a1] + c4 * λ2 * Cosh[λ * a1];
d2Xa22 = -c1 * λ2 * Sin[λ * a2] - c2 * λ2 * Cos[λ * a2] +
c3 * λ2 * Sinh[λ * a2] + c4 * λ2 * Cosh[λ * a2];
d2Xa32 = -c1 * λ2 * Sin[λ * a3] - c2 * λ2 * Cos[λ * a3] +
c3 * λ2 * Sinh[λ * a3] + c4 * λ2 * Cosh[λ * a3];
d2Xa42 = -c1 * λ2 * Sin[λ * a4] - c2 * λ2 * Cos[λ * a4] +
c3 * λ2 * Sinh[λ * a4] + c4 * λ2 * Cosh[λ * a4];
d2Xa52 = -c1 * λ2 * Sin[λ * a5] - c2 * λ2 * Cos[λ * a5] +
c3 * λ2 * Sinh[λ * a5] + c4 * λ2 * Cosh[λ * a5];
d1X2 = D[X2, x];
d2X2 = D[d1X2, x];
d3X2 = D[d2X2, x];
d4X2 = D[d3X2, x];
(*
Plot[X2, {x, 0, H}]
*)
ClearAll[x, c1, c2, c3, c4, λ, X3, X3a, d1X3, d2X3, d3X3,
d4X3, Xa13, Xa23, Xa33, Xa43, Xa53, d1Xa13, d1Xa23, d1Xa33,
d1Xa43, d1Xa53, d2Xa13, d2Xa23, d2Xa33, d2Xa43, d2Xa53]
λ = 0.039085;
c1 = 1;
c2 = -  $\frac{c1 k2 (\text{Sin}[H \lambda] + \text{Sinh}[H \lambda])}{k2 (\text{Cos}[H \lambda] + \text{Cosh}[H \lambda]) + 2 \lambda \text{Sinh}[H \lambda]}$ ;
c3 = c1  $\left( -1 + \frac{2 \lambda (\text{Sin}[H \lambda] + \text{Sinh}[H \lambda])}{k2 (\text{Cos}[H \lambda] + \text{Cosh}[H \lambda]) + 2 \lambda \text{Sinh}[H * \lambda]} \right)$ ;
c4 =  $\frac{c1 k2 (\text{Sin}[H \lambda] + \text{Sinh}[H \lambda])}{k2 (\text{Cos}[H \lambda] + \text{Cosh}[H \lambda]) + 2 \lambda \text{Sinh}[H \lambda]}$ ;
X3 = c1 * Sin[λ * x] + c2 * Cos[λ * x] + c3 * Sinh[λ * x] + c4 * Cosh[λ * x];
X3a = c1 * Sin[λ * a] + c2 * Cos[λ * a] + c3 * Sinh[λ * a] + c4 * Cosh[λ * a];
Xa13 = c1 * Sin[λ * a1] + c2 * Cos[λ * a1] + c3 * Sinh[λ * a1] + c4 * Cosh[λ * a1];
Xa23 = c1 * Sin[λ * a2] + c2 * Cos[λ * a2] + c3 * Sinh[λ * a2] + c4 * Cosh[λ * a2];
Xa33 = c1 * Sin[λ * a3] + c2 * Cos[λ * a3] + c3 * Sinh[λ * a3] + c4 * Cosh[λ * a3];
Xa43 = c1 * Sin[λ * a4] + c2 * Cos[λ * a4] + c3 * Sinh[λ * a4] + c4 * Cosh[λ * a4];
Xa53 = c1 * Sin[λ * a5] + c2 * Cos[λ * a5] + c3 * Sinh[λ * a5] + c4 * Cosh[λ * a5];
d1Xa13 =
c1 * λ * Cos[λ * a1] - c2 * λ * Sin[λ * a1] + c3 * λ * Cosh[λ * a1] + c4 * λ * Sinh[λ * a1];
d1Xa23 = c1 * λ * Cos[λ * a2] - c2 * λ * Sin[λ * a2] +
c3 * λ * Cosh[λ * a2] + c4 * λ * Sinh[λ * a2];
d1Xa33 = c1 * λ * Cos[λ * a3] - c2 * λ * Sin[λ * a3] +
c3 * λ * Cosh[λ * a3] + c4 * λ * Sinh[λ * a3];
d1Xa43 = c1 * λ * Cos[λ * a4] - c2 * λ * Sin[λ * a4] +
c3 * λ * Cosh[λ * a4] + c4 * λ * Sinh[λ * a4];
d1Xa53 = c1 * λ * Cos[λ * a5] - c2 * λ * Sin[λ * a5] +
c3 * λ * Cosh[λ * a5] + c4 * λ * Sinh[λ * a5];
d2Xa13 = -c1 * λ2 * Sin[λ * a1] - c2 * λ2 * Cos[λ * a1] +
c3 * λ2 * Sinh[λ * a1] + c4 * λ2 * Cosh[λ * a1];
d2Xa23 = -c1 * λ2 * Sin[λ * a2] - c2 * λ2 * Cos[λ * a2] +
c3 * λ2 * Sinh[λ * a2] + c4 * λ2 * Cosh[λ * a2];
d2Xa33 = -c1 * λ2 * Sin[λ * a3] - c2 * λ2 * Cos[λ * a3] +

```

```

c3 * λ2 * Sinh[λ * a3] + c4 * λ2 * Cosh[λ * a3];
d2Xa43 = -c1 * λ2 * Sin[λ * a4] - c2 * λ2 * Cos[λ * a4] +
c3 * λ2 * Sinh[λ * a4] + c4 * λ2 * Cosh[λ * a4];
d2Xa53 = -c1 * λ2 * Sin[λ * a5] - c2 * λ2 * Cos[λ * a5] +
c3 * λ2 * Sinh[λ * a5] + c4 * λ2 * Cosh[λ * a5];
d1X3 = D[X3, x];
d2X3 = D[d1X3, x];
d3X3 = D[d2X3, x];
d4X3 = D[d3X3, x];
(*
Plot[X3, {x, 0, H}]
*)
ClearAll[A11, A12, A13, A21, A22, A23, A31, A32, A33, Ba111, Ba112, Ba113,
Ba121, Ba122, Ba123, Ba131, Ba132, Ba133, Ba211, Ba212, Ba213, Ba221,
Ba222, Ba223, Ba231, Ba232, Ba233, Ba311, Ba312, Ba313, Ba321, Ba322,
Ba323, Ba331, Ba332, Ba333, Ba411, Ba412, Ba413, Ba421, Ba422, Ba423,
Ba431, Ba432, Ba433, Ba511, Ba512, Ba513, Ba521, Ba522, Ba523, Ba531,
Ba532, Ba533, Γ11, Γ12, Γ13, Γ21, Γ22, Γ23, Γ31, Γ32, Γ33, Δ11, Δ12, Δ13,
Δ21, Δ22, Δ23, Δ31, Δ32, Δ33, E11, E12, E13, E21, E22, E23, E31, E32, E33, Z1,
Z2, Z3, H1, H2, H3, Θ11, Θ12, Θ13, Θ21, Θ22, Θ23, Θ31, Θ32, Θ33, Λ1, Λ2, Λ3]

A11 = NIntegrate[Eb * Iy * d4X1 * X1, {x, 0, H}] + NIntegrate[
2 * Eb * Iy1 * d3X1 * X1, {x, 0, H}] + NIntegrate[Eb * Iy2 * d2X1 * X1, {x, 0, H}];
A12 = NIntegrate[Eb * Iy * d4X2 * X1, {x, 0, H}] + NIntegrate[2 * Eb * Iy1 * d3X2 * X1,
{x, 0, H}] + NIntegrate[Eb * Iy2 * d2X2 * X1, {x, 0, H}];
A13 = NIntegrate[Eb * Iy * d4X3 * X1, {x, 0, H}] + NIntegrate[2 * Eb * Iy1 * d3X3 * X1,
{x, 0, H}] + NIntegrate[Eb * Iy2 * d2X3 * X1, {x, 0, H}];
A21 = NIntegrate[Eb * Iy * d4X1 * X2, {x, 0, H}] + NIntegrate[2 * Eb * Iy1 * d3X1 * X2,
{x, 0, H}] + NIntegrate[Eb * Iy2 * d2X1 * X2, {x, 0, H}];
A22 = NIntegrate[Eb * Iy * d4X2 * X2, {x, 0, H}] + NIntegrate[2 * Eb * Iy1 * d3X2 * X2,
{x, 0, H}] + NIntegrate[Eb * Iy2 * d2X2 * X2, {x, 0, H}];
A23 = NIntegrate[Eb * Iy * d4X3 * X2, {x, 0, H}] + NIntegrate[2 * Eb * Iy1 * d3X3 * X2,
{x, 0, H}] + NIntegrate[Eb * Iy2 * d2X3 * X2, {x, 0, H}];
A31 = NIntegrate[Eb * Iy * d4X1 * X3, {x, 0, H}] + NIntegrate[2 * Eb * Iy1 * d3X1 * X3,
{x, 0, H}] + NIntegrate[Eb * Iy2 * d2X1 * X3, {x, 0, H}];
A32 = NIntegrate[Eb * Iy * d4X2 * X3, {x, 0, H}] + NIntegrate[2 * Eb * Iy1 * d3X2 * X3,
{x, 0, H}] + NIntegrate[Eb * Iy2 * d2X2 * X3, {x, 0, H}];
A33 = NIntegrate[Eb * Iy * d4X3 * X3, {x, 0, H}] + NIntegrate[2 * Eb * Iy1 * d3X3 * X3,
{x, 0, H}] + NIntegrate[Eb * Iy2 * d2X3 * X3, {x, 0, H}];

Ba111 = -NIntegrate[d2X1 * X1, {x, 0, a1}];
Ba112 = -NIntegrate[d2X2 * X1, {x, 0, a1}];
Ba113 = -NIntegrate[d2X3 * X1, {x, 0, a1}];
Ba121 = -NIntegrate[d2X1 * X2, {x, 0, a1}];
Ba122 = -NIntegrate[d2X2 * X2, {x, 0, a1}];
Ba123 = -NIntegrate[d2X3 * X2, {x, 0, a1}];
Ba131 = -NIntegrate[d2X1 * X3, {x, 0, a1}];
Ba132 = -NIntegrate[d2X2 * X3, {x, 0, a1}];
Ba133 = -NIntegrate[d2X3 * X3, {x, 0, a1}];
Ba211 = -NIntegrate[d2X1 * X1, {x, 0, a2}];
Ba212 = -NIntegrate[d2X2 * X1, {x, 0, a2}];

```



```

Ba213 = -NIntegrate[d2X3 * X1, {x, 0, a2}];
Ba221 = -NIntegrate[d2X1 * X2, {x, 0, a2}];
Ba222 = -NIntegrate[d2X2 * X2, {x, 0, a2}];
Ba223 = -NIntegrate[d2X3 * X2, {x, 0, a2}];
Ba231 = -NIntegrate[d2X1 * X3, {x, 0, a2}];
Ba232 = -NIntegrate[d2X2 * X3, {x, 0, a2}];
Ba233 = -NIntegrate[d2X3 * X3, {x, 0, a2}];
Ba311 = -NIntegrate[d2X1 * X1, {x, 0, a3}];
Ba312 = -NIntegrate[d2X2 * X1, {x, 0, a3}];
Ba313 = -NIntegrate[d2X3 * X1, {x, 0, a3}];
Ba321 = -NIntegrate[d2X1 * X2, {x, 0, a3}];
Ba322 = -NIntegrate[d2X2 * X2, {x, 0, a3}];
Ba323 = -NIntegrate[d2X3 * X2, {x, 0, a3}];
Ba331 = -NIntegrate[d2X1 * X3, {x, 0, a3}];
Ba332 = -NIntegrate[d2X2 * X3, {x, 0, a3}];
Ba333 = -NIntegrate[d2X3 * X3, {x, 0, a3}];
Ba411 = -NIntegrate[d2X1 * X1, {x, 0, a4}];
Ba412 = -NIntegrate[d2X2 * X1, {x, 0, a4}];
Ba413 = -NIntegrate[d2X3 * X1, {x, 0, a4}];
Ba421 = -NIntegrate[d2X1 * X2, {x, 0, a4}];
Ba422 = -NIntegrate[d2X2 * X2, {x, 0, a4}];
Ba423 = -NIntegrate[d2X3 * X2, {x, 0, a4}];
Ba431 = -NIntegrate[d2X1 * X3, {x, 0, a4}];
Ba432 = -NIntegrate[d2X2 * X3, {x, 0, a4}];
Ba433 = -NIntegrate[d2X3 * X3, {x, 0, a4}];
Ba511 = -NIntegrate[d2X1 * X1, {x, 0, a5}];
Ba512 = -NIntegrate[d2X2 * X1, {x, 0, a5}];
Ba513 = -NIntegrate[d2X3 * X1, {x, 0, a5}];
Ba521 = -NIntegrate[d2X1 * X2, {x, 0, a5}];
Ba522 = -NIntegrate[d2X2 * X2, {x, 0, a5}];
Ba523 = -NIntegrate[d2X3 * X2, {x, 0, a5}];
Ba531 = -NIntegrate[d2X1 * X3, {x, 0, a5}];
Ba532 = -NIntegrate[d2X2 * X3, {x, 0, a5}];
Ba533 = -NIntegrate[d2X3 * X3, {x, 0, a5}];

Γ11 = NIntegrate[X1 * X1, {x, 0, H}];
Γ12 = NIntegrate[X2 * X1, {x, 0, H}];
Γ13 = NIntegrate[X3 * X1, {x, 0, H}];
Γ21 = NIntegrate[X1 * X2, {x, 0, H}];
Γ22 = NIntegrate[X2 * X2, {x, 0, H}];
Γ23 = NIntegrate[X3 * X2, {x, 0, H}];
Γ31 = NIntegrate[X1 * X3, {x, 0, H}];
Γ32 = NIntegrate[X2 * X3, {x, 0, H}];
Γ33 = NIntegrate[X3 * X3, {x, 0, H}];

Δ11 = NIntegrate[m * X1 * X1, {x, 0, H}] +
      M * (Xa11 * Xa11 + Xa21 * Xa21 + Xa31 * Xa31 + Xa41 * Xa41 + Xa51 * Xa51);
Δ12 = NIntegrate[m * X2 * X1, {x, 0, H}] +
      M * (Xa12 * Xa11 + Xa22 * Xa21 + Xa32 * Xa31 + Xa42 * Xa41 + Xa52 * Xa51);
Δ13 = NIntegrate[m * X3 * X1, {x, 0, H}] +
      M * (Xa13 * Xa11 + Xa23 * Xa21 + Xa33 * Xa31 + Xa43 * Xa41 + Xa53 * Xa51);

```

```

Δ21 = NIntegrate[m * X1 * X2, {x, 0, H}] +
  M * (Xa11 * Xa12 + Xa21 * Xa22 + Xa31 * Xa32 + Xa41 * Xa42 + Xa51 * Xa52);
Δ22 = NIntegrate[m * X2 * X2, {x, 0, H}] +
  M * (Xa12 * Xa12 + Xa22 * Xa22 + Xa32 * Xa32 + Xa42 * Xa42 + Xa52 * Xa52);
Δ23 = NIntegrate[m * X3 * X2, {x, 0, H}] +
  M * (Xa13 * Xa12 + Xa23 * Xa22 + Xa33 * Xa32 + Xa43 * Xa42 + Xa53 * Xa52);
Δ31 = NIntegrate[m * X1 * X3, {x, 0, H}] +
  M * (Xa11 * Xa13 + Xa21 * Xa23 + Xa31 * Xa33 + Xa41 * Xa43 + Xa51 * Xa53);
Δ32 = NIntegrate[m * X2 * X3, {x, 0, H}] +
  M * (Xa12 * Xa13 + Xa22 * Xa23 + Xa32 * Xa33 + Xa42 * Xa43 + Xa52 * Xa53);
Δ33 = NIntegrate[m * X3 * X3, {x, 0, H}] +
  M * (Xa13 * Xa13 + Xa23 * Xa23 + Xa33 * Xa33 + Xa43 * Xa43 + Xa53 * Xa53);

E11 = -Jo * ((d2Xa11 * Xa11 + d1Xa11 * d1Xa11) +
  (d2Xa21 * Xa21 + d1Xa21 * d1Xa21) + (d2Xa31 * Xa31 + d1Xa31 * d1Xa31) +
  (d2Xa41 * Xa41 + d1Xa41 * d1Xa41) + (d2Xa51 * Xa51 + d1Xa51 * d1Xa51));
E12 = -Jo * ((d2Xa12 * Xa11 + d1Xa12 * d1Xa11) + (d2Xa22 * Xa21 + d1Xa22 * d1Xa21) +
  (d2Xa32 * Xa31 + d1Xa32 * d1Xa31) + (d2Xa42 * Xa41 + d1Xa42 * d1Xa41) +
  (d2Xa52 * Xa51 + d1Xa52 * d1Xa51));
E13 = -Jo * ((d2Xa13 * Xa11 + d1Xa13 * d1Xa11) + (d2Xa23 * Xa21 + d1Xa23 * d1Xa21) +
  (d2Xa33 * Xa31 + d1Xa33 * d1Xa31) + (d2Xa43 * Xa41 + d1Xa43 * d1Xa41) +
  (d2Xa53 * Xa51 + d1Xa53 * d1Xa51));
E21 = -Jo * ((d2Xa11 * Xa12 + d1Xa11 * d1Xa12) + (d2Xa21 * Xa22 + d1Xa21 * d1Xa22) +
  (d2Xa31 * Xa32 + d1Xa31 * d1Xa32) + (d2Xa41 * Xa42 + d1Xa41 * d1Xa42) +
  (d2Xa51 * Xa52 + d1Xa51 * d1Xa52));
E22 = -Jo * ((d2Xa12 * Xa12 + d1Xa12 * d1Xa12) + (d2Xa22 * Xa22 + d1Xa22 * d1Xa22) +
  (d2Xa32 * Xa32 + d1Xa32 * d1Xa32) + (d2Xa42 * Xa42 + d1Xa42 * d1Xa42) +
  (d2Xa52 * Xa52 + d1Xa52 * d1Xa52));
E23 = -Jo * ((d2Xa13 * Xa12 + d1Xa13 * d1Xa12) + (d2Xa23 * Xa22 + d1Xa23 * d1Xa22) +
  (d2Xa33 * Xa32 + d1Xa33 * d1Xa32) + (d2Xa43 * Xa42 + d1Xa43 * d1Xa42) +
  (d2Xa53 * Xa52 + d1Xa53 * d1Xa52));
E31 = -Jo * ((d2Xa11 * Xa13 + d1Xa11 * d1Xa13) + (d2Xa21 * Xa23 + d1Xa21 * d1Xa23) +
  (d2Xa31 * Xa33 + d1Xa31 * d1Xa33) + (d2Xa41 * Xa43 + d1Xa41 * d1Xa43) +
  (d2Xa51 * Xa53 + d1Xa51 * d1Xa53));
E32 = -Jo * ((d2Xa12 * Xa13 + d1Xa12 * d1Xa13) + (d2Xa22 * Xa23 + d1Xa22 * d1Xa23) +
  (d2Xa32 * Xa33 + d1Xa32 * d1Xa33) + (d2Xa42 * Xa43 + d1Xa42 * d1Xa43) +
  (d2Xa52 * Xa53 + d1Xa52 * d1Xa53));
E33 = -Jo * ((d2Xa13 * Xa13 + d1Xa13 * d1Xa13) + (d2Xa23 * Xa23 + d1Xa23 * d1Xa23) +
  (d2Xa33 * Xa33 + d1Xa33 * d1Xa33) + (d2Xa43 * Xa43 + d1Xa43 * d1Xa43) +
  (d2Xa53 * Xa53 + d1Xa53 * d1Xa53));

H1 = NIntegrate[X1, {x, 0, H}];
H2 = NIntegrate[X2, {x, 0, H}];
H3 = NIntegrate[X3, {x, 0, H}];

@11 = X1a * X1a;
@12 = X2a * X1a;
@13 = X3a * X1a;
@21 = X1a * X2a;
@22 = X2a * X2a;
@23 = X3a * X2a;

```

$$\Theta_{31} = X_{1a} * X_{3a};$$

$$\Theta_{32} = X_{2a} * X_{3a};$$

$$\Theta_{33} = X_{3a} * X_{3a};$$

$$\Lambda_1 = NIntegrate[m * X_1, \{x, 0, H\}] + M * (X_{a11} + X_{a21} + X_{a31} + X_{a41} + X_{a51}) + Ma * X_{1a};$$

$$\Lambda_2 = NIntegrate[m * X_2, \{x, 0, H\}] + M * (X_{a12} + X_{a22} + X_{a32} + X_{a42} + X_{a52}) + Ma * X_{2a};$$

$$\Lambda_3 = NIntegrate[m * X_3, \{x, 0, H\}] + M * (X_{a13} + X_{a23} + X_{a33} + X_{a43} + X_{a53}) + Ma * X_{3a};$$

```
ClearAll[ωa, βa, f, F, E, G11, G12, G13, G21, G22, G23, G31, G32,
  G33, R1, R2, R3, S1, S2, S3, z, L1, L2, L3, SS1, SS2, SS3, T1, T2, T3]
```

$$f = 0.1 * e^{-0.1 * t} * \text{Sin}[8 * t];$$

$$F = \text{LaplaceTransform}[f, t, p];$$

$$\beta a = \frac{c a}{2 * M a};$$

$$\omega a = \sqrt{\frac{k a}{M a}};$$

$$G_{11} = A_{11} + 5 * M * g * (B_{a111} + B_{a211} + B_{a311} + B_{a411} + B_{a511}) + \\ c * p * \Gamma_{11} + p^2 * (\Delta_{11} + E_{11}) + p^2 * M a * \Theta_{11} * \left(1 - \frac{p^2 * H_1}{p^2 + 2 * \beta a * p + \omega a^2}\right);$$

$$G_{12} = A_{12} + 5 * M * g * (B_{a112} + B_{a212} + B_{a312} + B_{a412} + B_{a512}) + c * p * \Gamma_{12} + \\ p^2 * (\Delta_{12} + E_{12}) + p^2 * M a * \Theta_{12} * \left(1 - \frac{p^2 * H_1}{p^2 + 2 * \beta a * p + \omega a^2}\right);$$

$$G_{13} = A_{13} + 5 * M * g * (B_{a113} + B_{a213} + B_{a313} + B_{a413} + B_{a513}) + c * p * \Gamma_{13} + \\ p^2 * (\Delta_{13} + E_{13}) + p^2 * M a * \Theta_{13} * \left(1 - \frac{p^2 * H_1}{p^2 + 2 * \beta a * p + \omega a^2}\right);$$

$$G_{21} = A_{21} + 5 * M * g * (B_{a121} + B_{a221} + B_{a321} + B_{a421} + B_{a521}) + \\ c * p * \Gamma_{21} + p^2 * (\Delta_{21} + E_{21}) + p^2 * M a * \Theta_{21} * \left(1 - \frac{p^2 * H_2}{p^2 + 2 * \beta a * p + \omega a^2}\right);$$

$$G_{22} = A_{22} + 5 * M * g * (B_{a122} + B_{a222} + B_{a322} + B_{a422} + B_{a522}) + c * p * \Gamma_{22} + \\ p^2 * (\Delta_{22} + E_{22}) + p^2 * M a * \Theta_{22} * \left(1 - \frac{p^2 * H_2}{p^2 + 2 * \beta a * p + \omega a^2}\right);$$

$$G_{23} = A_{23} + 5 * M * g * (B_{a123} + B_{a223} + B_{a323} + B_{a423} + B_{a523}) + c * p * \Gamma_{23} + \\ p^2 * (\Delta_{23} + E_{23}) + p^2 * M a * \Theta_{23} * \left(1 - \frac{p^2 * H_2}{p^2 + 2 * \beta a * p + \omega a^2}\right);$$

$$G_{31} = A_{31} + 5 * M * g * (B_{a131} + B_{a231} + B_{a331} + B_{a431} + B_{a531}) + \\ c * p * \Gamma_{31} + p^2 * (\Delta_{31} + E_{31}) + p^2 * M a * \Theta_{31} * \left(1 - \frac{p^2 * H_3}{p^2 + 2 * \beta a * p + \omega a^2}\right);$$

$$G_{32} = A_{32} + 5 * M * g * (B_{a132} + B_{a232} + B_{a332} + B_{a432} + B_{a532}) + c * p * \Gamma_{32} + \\ p^2 * (\Delta_{32} + E_{32}) + p^2 * M a * \Theta_{32} * \left(1 - \frac{p^2 * H_3}{p^2 + 2 * \beta a * p + \omega a^2}\right);$$

$$G_{33} = A_{33} + 5 * M * g * (B_{a133} + B_{a233} + B_{a333} + B_{a433} + B_{a533}) + c * p * \Gamma_{33} +$$

```

p2 * (Δ33 + E33) + p2 * Ma * @33 *  $\left(1 - \frac{p^2 * H3}{p^2 + 2 * \beta a * p + \omega a^2}\right)$ ;

R1 = -c * H1 * p * F - λ1 * p2 * F;
R2 = -c * H2 * p * F - λ2 * p2 * F;
R3 = -c * H3 * p * F - λ3 * p2 * F;
eqns = {G11 * S1 + G12 * S2 + G13 * S3 == R1,
        G21 * S1 + G22 * S2 + G23 * S3 == R2, G31 * S1 + G32 * S2 + G33 * S3 == R3};
z = Solve[eqns, {S1, S2, S3}];
L1 = {S1} = {S1} /. z;
L2 = {S2} = {S2} /. z;
L3 = {S3} = {S3} /. z;
SS1 = Evaluate[Part[L1, 1]];
SS2 = Evaluate[Part[L2, 1]];
SS3 = Evaluate[Part[L3, 1]];

T1 = InverseLaplaceTransform[SS1, p, t];
T2 = InverseLaplaceTransform[SS2, p, t];
T3 = InverseLaplaceTransform[SS3, p, t];
ClearAll[x, λ1, λ2, λ3, X1, X2, X3, w, ddf]
λ1 = 0.009329192374498124` ;
λ2 = 0.023356;
λ3 = 0.039085;
X1 = c1 * Sin[λ1 * x] + c2 * Cos[λ1 * x] + c3 * Sinh[λ1 * x] + c4 * Cosh[λ1 * x];
X2 = c1 * Sin[λ2 * x] + c2 * Cos[λ2 * x] + c3 * Sinh[λ2 * x] + c4 * Cosh[λ2 * x];
X3 = c1 * Sin[λ3 * x] + c2 * Cos[λ3 * x] + c3 * Sinh[λ3 * x] + c4 * Cosh[λ3 * x];
Plot[f, {t, 0, 35}, PlotRange → {-0.15, 0.15}]
ddf = D[f, {t, 2}];
Plot[ddf, {t, 0, 35}, PlotRange → {-7, 7}]
ClearAll[x, w]
x = 1
w = X1 * T1 + X2 * T2 + X3 * T3;
Plot[w, {t, 0, 20}, AxesLabel → {"t", "w(1,t)"}]
ClearAll[x, w]
x = 200
w = X1 * T1 + X2 * T2 + X3 * T3;
Plot[w, {t, 0, 20}, AxesLabel → {"t", "w(200,t)"}]

```