

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ



ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ
ΣΤΗΝ ΙΑΤΡΙΚΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΗΣ

ΧΡΥΣΑΣ Φ. ΜΑΛΑΚΗ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ : ΔΡΟΣΟΣ ΓΚΙΝΤΙΔΗΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ, ΙΟΥΛΙΟΣ 2013



ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

ΣΤΗΝ ΙΑΤΡΙΚΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΗΣ

ΧΡΥΣΑΣ Φ. ΜΑΛΑΚΗ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ : ΔΡΟΣΟΣ ΓΚΙΝΤΙΔΗΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 5η Ιουλίου 2013.

Δ.ΓΚΙΝΤΙΔΗΣ

(ΥΠΟΓΡΑΦΗ)

.....

Κ. ΚΤΡΙΑΚΗ

(ΥΠΟΓΡΑΦΗ)

.....

Α. ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΠΟΥΛΟΣ

(ΥΠΟΓΡΑΦΗ)

.....

ΑΘΗΝΑ, ΙΟΥΛΙΟΣ 2013



ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

(ΥΠΟΓΡΑΦΗ)

.....

ΧΡΥΣΑ ΜΑΛΑΚΗ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΥΧΟΣ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ Ε.Μ.Π.

@ 2013 - All rights reserved

Ευχαριστίες

Θα ήθελα καταρχήν να ευχαριστήσω όλους όσους συνέβαλαν με οποιονδήποτε τρόπο στην επιτυχή εκπόνηση αυτής της διπλωματικής εργασίας. Θα πρέπει να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητή κ. Δρόσο Γκιντίδη για την επίβλεψη αυτής της διπλωματικής εργασίας. Ήταν πρόθυμος να με καθοδηγήσει σε κάθε σημείο για την διεκπεραίωση της διπλωματικής εργασίας.

Έπειτα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους καθηγητές της σχολής ΣΕΜΦΕ του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου που με καθοδήγησαν τα τελευταία πέντε χρόνια στο ευρύ αντικείμενο των εφαρμοσμένων μαθηματικών και φυσικών επιστημών.

Περίληψη

Τις τελευταίες δεκαετίες, η χρήση των μαθηματικών είναι αισθητή σε πολλές πτυχές της καθημερινότητάς μας, και ιδιαίτερα σημαντικός είναι ο ρόλος τους στο τομέα της ιατρικής. Στην παρούσα εργασία ασχοληθήκαμε με την ανάλυση των μαθηματικών μετασχηματισμών που χρησιμοποιούνται στην ιατρική απεικόνιση. Η κατασκευή της ιατρικής απεικόνισης γίνεται από μετρήσεις που πραγματοποιούνται από μηχανήματα ακτίνων X, τις οποίες επεξεργάζεται ο αντίστροφος μετασχηματισμός Radon. Ο μετασχηματισμός Radon είναι απαραίτητος για την κατασκευή του μαθηματικού μοντέλου που χρησιμοποιεί τις μετρήσεις που γίνονται στο μηχάνημα των ακτίνων X. Ωστόσο, για το ορίσουμε το μετασχηματισμό Radon πρέπει αρχικά να ορίσουμε το μετασχηματισμό Fourier. Επομένως, στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας εισάγουμε το μετασχηματισμό Fourier και επανεξετάζουμε μερικές από τις ιδιότητες του. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier ως ένα γραμμικό μετασχηματισμό των απειροδιάστατων γραμμικών διανυσματικών χώρων ορίζουμε το μετασχηματισμό Fourier και τον αντίστροφο του σε διάφορους χώρους των συναρτήσεων. Στο δεύτερο κεφάλαιο της εργασίας ορίζουμε το μετασχηματισμό Radon και αναλύουμε τις ιδιότητες του. Επίσης, εισάγουμε το κεντρικό θεώρημα τομής το οποίο συνδέει τους μετασχηματισμούς Fourier και Radon. Χρησιμοποιώντας αυτό το θεώρημα τομής παίρνουμε το τύπο της μεθόδου φίλτρου Back-Projection, όπου παρέχει έναν ακριβή αντίστροφο μετασχηματισμό Radon. Αυτός ο τύπος του αντίστροφου Radon αποτελεί βασικό στοιχείο στους αλγορίθμους ανακατασκευής που χρησιμοποιούνται στα σημερινά μηχανήματα ακτίνων X.

Τέλος, στο τρίτο κεφάλαιο μελετάμε το πρόβλημα ανακατασκευής αλγορίθμων για συγκεκριμένες διατάξεις που χρησιμοποιούνται στους σύγχρονους σαρωτές CT. Συγκεκριμένα, ορίζουμε τους αλγορίθμους των σαρωτών που χρησιμοποιούν δισδιάσταση τομή. Επιπλέον, περιγράφουμε την λειτουργία του κάθε σαρωτή υπό την γεωμετρική έννοια.

Λέξεις κλειδιά

Μετασχηματισμός Fourier, Συνέλιξη, Κεντρικό Θεώρημα Τομής, Τύπος Parseval, Μετασχηματισμός Hilbert, Αντίστροφος Μετασχηματισμός Radon

Abstract

In recent decades, the use of mathematics is felt in many aspects of our daily lives, and especially important is their role in the medical field. In this work we have dealt with the analysis of mathematical transforms used in medical imaging. Medical imaging is done by measurements made by X-ray machines, processed by the inversion of Radon transform. Radon transform is necessary for the construction of a mathematical model using the measurements made in the X-ray machine. However, to define the Radon transform must first define the Fourier transform.

Therefore, in the first chapter, we introduce the Fourier transform and review some of its properties. Using the properties of Fourier transform as a linear transform of infinite dimensional linear vector spaces we define the Fourier transform and its inverse in various spaces of functions. In the second chapter, we define the Radon transform and analyze its properties. Also, we introduce the central slice theorem which connects the Fourier and Radon transforms. Using this theorem we obtain the formula of method filter Back-Projection, which provides a precise inverse of Radon transform. This formula of inverse of Radon is a key element in the reconstruction algorithm used in the current X-ray machines.

Finally, in the third chapter we study the problem of reconstruction algorithms for specific devices used in modern scanners CT. Specifically, we define algorithms scanners using two-dimensional slices. Furthermore, we describe the operation of any scanner in the geometric sense.

Key Words

Fourier Transform, Convolution, Central Slice Theorem, Parseval Formula, Hilbert Transform, Inversion Radon Transform

Περιεχόμενα

1	Μετασχηματισμός Fourier	13
1.1	Εκθετική Συνάρτηση	13
1.2	Μετασχηματισμός Fourier Για Συναρτήσεις Μιας Μεταβλητής	15
1.3	Ομαλότητα και Ασυμπτωτική Συμπεριφορά	16
1.4	Τύπος Parseval	18
1.5	Μετασχηματισμός Fourier Στον L^2	19
1.6	Η Αρχή Αβεβαιότητας Του Heisenberg	21
1.7	Μετασχηματισμός Fourier Για Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών	25
1.8	Συνέλιξη	28
1.9	Μετατόπιση Αμετάβλητου Φιλτραρίσματος	31
2	Μετασχηματισμός Radon	33
2.1	Μετασχηματισμός Radon	33
2.2	Αντίστροφος Μετασχηματισμός Radon	36
2.3	Μέθοδος Φίλτρου Back-Projection	40
2.4	Μετασχηματισμός Hilbert	44
2.5	Προσεγγιστικός Αντίστροφος Για Το Μετασχηματισμό Radon	47
2.6	Συνέχεια του Μετασχηματισμού Radon Και Του Αντιστρόφου Του	50
2.7	Μετασχηματισμός Radon Για Πολλές Διαστάσεις	52
3	Ανακατασκευή Ακτίνων X	55
3.1	Εφαρμογή Των Ακτίνων X Στην Τομογραφία	55
3.2	Γεωμετρίες Του Σαρωτή	56
3.3	Ανακατασκευή Αλγορίθμων Για Παράλληλη Δέσμη	57
3.3.1	Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier Σε Παράλληλη Δέσμη	58
3.3.2	Μετασχηματισμός Back-Projection Σε Παράλληλη Δέσμη	59
3.4	Ανακατασκευή Αλγορίθμων Για Αποκλίνουσα Δέσμη	61
3.4.1	Γεωμετρία Αποκλίνουσας Δέσμης	62
3.4.2	Μετασχηματισμός Back-Projection Σε Αποκλίνουσα Δέσμη	64
3.4.3	Εφαρμογή Αλγορίθμου Της Αποκλίνουσας Δέσμης	66
3.4.4	Επεξεργασία Δεδομένων Για Σαρωτή Αποκλίνουσας Δέσμης	67

3.5	Εφαρμογή Σπειροειδούς Σαρωτή Στην Τομογραφία	67
3.5.1	Μέθοδος Παρεμβολής	67
3.5.2	Τύπος 3D-Ανακατασκευής	70

Κεφάλαιο 1

Μετασχηματισμός Fourier

1.1 Εκθετική Συνάρτηση

Ο μετασχηματισμός Fourier είναι ένα σημαντικό εργαλείο στα μαθηματικά, στη μηχανική και στις φυσικές επιστήμες. Ο μετασχηματισμός Fourier, που έχει ευρέως αξιοποιηθεί στο βιβλίο "Introduction to the Mathematics of Medical Imaging" Charles L. Epstein, είναι ένας αντιστρέψιμος, γραμμικός μετασχηματισμός με πολλές σημαντικές ιδιότητες. Για κάθε συνάρτηση $f(x)$, ο μετασχηματισμός Fourier μπορεί να συμβολίζεται ως $F(s)$, όπου το x και το s είναι αδιάστατα. Συχνά το x το θεωρούμε ως ένα μέτρο του χρόνου και το s ως αντίστροφο του χρόνου. Ο μετασχηματισμός Fourier ορίζεται ως:

$$F(s) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi isx} dx \quad (1.1.1)$$

ο οποίος είναι γνωστός ως προς τα εμπρός μετασχηματισμός, και ο αντίστροφος μετασχηματισμός ορίζεται από το τύπο:

$$f(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{2\pi isx} ds \quad (1.1.2)$$

Η εκθετική συνάρτηση αποτελεί βασικό παράγοντα για το μετασχηματισμό Fourier. Μια εκθετική συνάρτηση είναι απλά ένας μιγαδικός αριθμός. Η ακριβής σχέση ονομάζεται τύπος Euler και ορίζεται ως:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Οι πολικές συντεταγμένες (r, θ) αντιστοιχούν στο σημείο με ορθογώνιες συντεταγμένες $(r\cos\theta, r\sin\theta)$, άρα ο μιγαδικός αριθμός ορίζεται ως:

$$r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) = re^{i\vartheta}$$

Ένας θετικός αριθμός έχει ένα πραγματικό λογάριθμο, $s = \log r$, τέτοιο ώστε ο μιγαδικός αριθμός να εκφράζεται επίσης από τη σχέση:

$$z = e^{s+i\vartheta}$$

Πράγματι, έστω $z = re^{i\vartheta}$ τότε έχουμε:

$$\log z = \log re^{i\vartheta}$$

$$\log z = \log r + \log e^{i\vartheta}$$

$$\log z = s + i\vartheta$$

$$e^{\log z} = e^{s+i\vartheta}$$

$$z = e^{s+i\vartheta}$$

Παρατηρώντας τις παραπάνω πράξεις διαπιστώνουμε ότι ο λογάριθμος του z είναι ένας μιγαδικός αριθμός ορισμένος ως

$$\log z = s + i\vartheta = \log |z| + i \arctan\left(\frac{\Im z}{\Re z}\right)$$

Καθώς $\exp(2\pi i) = 1$, τότε το φανταστικό μέρος του $\log z$ προσδιορίζεται από ακέραια πολλαπλάσια του 2π . Χρησιμοποιώντας τη μιγαδική εκθετική συνάρτηση κατασκευάζουμε την οικογένεια συναρτήσεων, $\{e^{ixs} : s \in \mathbb{R}\}$. Μερικές φορές θεωρούμε το x ως μεταβλητή και το s ως παράμετρο, και άλλες φορές αυτοί οι ρόλοι εναλλάσσονται. Στη περίπτωση που θεωρούμε το s ως παράμετρο τότε παρατηρούμε ότι η e^{ixs} είναι μια περιοδική συνάρτηση, δηλαδή έχουμε:

$$\exp\left(i\left(x + \frac{2\pi}{s}\right)s\right) = \exp(ixs)$$

Σε φυσικές εφαρμογές η e^{ixs} περιγράφει μια κατάσταση ταλάντωσης με συχνότητα $\frac{s}{2\pi}$ και μήκος κύματος $\frac{2\pi}{s}$.

Επιπλέον, ένα σημαντικό χαρακτηριστικό της εκθετικής συνάρτησης είναι ότι ικανοποιεί μια συνήθεις διαφορική εξίσωση:

$$\partial_x e^{ixs} = ise^{ixs}.$$

Από αυτή την σχέση έχουμε ότι η e^{ixs} είναι ένα ιδιοδιάνυσμα με ιδιοτίμη is για το γραμμικό τελεστή ∂_x . Ο γραμμικός διαφορικός τελεστής με σταθερούς συντελεστές ορίζεται από:

$$\mathcal{D}f = \sum_{j=0}^m a_j \partial_x^j f$$

όπου οι σταθεροί συντελεστές $\{a_0, \dots, a_m\}$ είναι μιγαδικοί αριθμοί. Επομένως, αν θέσουμε $f = e^{ixs}$ στη παραπάνω σχέση τότε προκύπτει ότι για κάθε μιγαδικό αριθμό s ισχύει η σχέση:

$$\mathcal{D}e^{ixs} = \left[\sum_{j=0}^m a_j (is)^j e^{ixs}\right]$$

1.2 Μετασχηματισμός Fourier Για Συναρτήσεις Μιας Μεταβλητής

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη στο \mathbb{R}^n . Μια συνάρτηση f ονομάζεται *τοπικά απόλυτα ολοκληρώσιμη* εάν το ολοκλήρωμα

$$\int_{\|x\| < \mathcal{R}} |f(x)| dx \quad (1.2.1)$$

είναι ορισμένο και πεπερασμένο για κάθε \mathcal{R} , και η f ονομάζεται *απολύτως ολοκληρώσιμη* ή L^1 -συνάρτηση εάν ισχύει

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx < \infty \quad (1.2.2)$$

Το πεδίο ορισμού για το μετασχηματισμό Fourier είναι ο χώρος των L^1 -συναρτήσεων, όπου το σύνολο των L^1 -συναρτήσεων είναι ο διανυσματικός χώρος.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2.1

Ο μετασχηματισμός Fourier μιας L^1 -συνάρτησης f , ορισμένης στο \mathbb{R} , είναι η συνάρτηση $\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ η οποία δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-isx} dx \quad (1.2.3)$$

Συνεπώς, η χρησιμότητα για το μετασχηματισμό Fourier προέρχεται από το γεγονός ότι η f μπορεί να ανακατασκευαστεί από τη συνάρτηση \hat{f} .

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.2.1 (ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ FOURIER)

Υποθέτουμε ότι η f είναι μια L^1 -συνάρτηση και επίσης η \hat{f} ανήκει στον $L^1(\mathbb{R})$. Τότε έχουμε:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s)e^{isx} ds \quad (1.2.4)$$

Αυτή η σχέση ονομάζεται τύπος του αντίστροφου Fourier, όπου χρησιμοποιείται στην ιατρική απεικόνιση για την ανακατασκευή ενός αντικειμένου.

Συνήθως χρησιμοποιούμε το συμβολισμό:

$$\mathcal{F}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-isx} dx \quad (1.2.5)$$

$$\mathcal{F}^{-1}(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{isx} ds$$

Παρατηρώντας τις δύο παραπάνω σχέσεις διαπιστώνουμε ότι το να ανακτήσουμε την f από την \hat{f} είναι το ίδιο με το να προσδιορίσουμε την \hat{f} από την f . Πράγματι, αν $f_r(x) = f(-x)$, τότε έχουμε:

$$\mathcal{F}^{-1}(f) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(f_r) \quad (1.2.6)$$

Αυτή η συμμετρία χρησιμοποιείται σε πολλές ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier.

1.3 Ομαλότητα και Ασυμπτωτική Συμπεριφορά

Γνωρίζουμε ότι οι ιδιότητες της ομαλότητας μιας συνάρτησης, f , ορισμένης στο \mathbb{R}^n , σχετίζονται με τις ιδιότητες της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier \hat{f} και ομοίως, η ομαλότητα του μετασχηματισμού Fourier σχετίζεται με τις ιδιότητες της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς της f . Χωρίς καμία ομαλότητα έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.3.1 (ΛΗΜΜΑ RIEMANN-LEBESQUE)

Εάν η f είναι μια L^1 -συνάρτηση, τότε ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier \hat{f} είναι μια συνεχής συνάρτηση η οποία τείνει στο μηδέν καθώς το s τείνει στο $\pm \infty$. Δηλαδή, για $\eta \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\lim_{s \rightarrow \eta} \hat{f}(s) = \hat{f}(\eta) \text{ και}$$

$$\lim_{s \rightarrow \pm \infty} \hat{f}(s) = 0$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.3.1

Μια συνάρτηση f , ορισμένη στο \mathbb{R}^n , φθίνει όπως $\|x\|^{-a}$, $a > 0$, εάν υπάρχουν σταθερές \mathcal{C} και \mathcal{R} τέτοιες ώστε να ισχύει:

$$|f(x)| \leq \frac{\mathcal{C}}{\|x\|^a} \quad (1.3.1)$$

για $\|x\| > \mathcal{R}$.

Αυτό μερικές φορές γράφεται και ως " $f = O(\|x\|^{-a})$ " καθώς η $\|x\|$ τείνει στο άπειρο.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.3.1

Έστω j θετικός ακέραιος αριθμός. Εάν η f έχει j ολοκληρώσιμες παραγώγους, τότε υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε η \hat{f} να ικανοποιεί την εκτίμηση

$$|\hat{f}(s)| \leq \frac{C}{(1+|s|)^j} \quad (1.3.2)$$

Επιπλέον, για $1 \leq l \leq j$, ο μετασχηματισμός Fourier της $f^{[l]}$ δίνεται από

$$\hat{f}^{[l]}(s) = (is)^l \hat{f}(s) \quad (1.3.3)$$

Με άλλα λόγια, ο ρυθμός με τον οποίο φθίνει η \hat{f} σχετίζεται με την ομαλότητα της f .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Υποθέτουμε ότι η f είναι μια L^1 -συνάρτηση με απόλυτα ολοκληρώσιμη πρώτη παράγωγο, δηλαδή

$$\int_{-\infty}^{\infty} [|f(x)| + |f'(x)|] dx < \infty$$

Εφόσον $s \neq 0$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την σχέση $\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g(x) dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g'(x) dx$, όπου f και g είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις, για να βρούμε το τύπο της \hat{f} :

$$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixs} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \frac{e^{-ixs}}{is} dx = \frac{1}{is} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-ixs} dx \quad (1.3.4)$$

Άρα, παρατηρούμε ότι

$$\hat{f}(s) = \frac{\hat{f}'(s)}{is}$$

Επειδή η f έχει j ολοκληρώσιμες παραγώγους επαναλαμβάνουμε την ολοκλήρωση (1.3.4) για j φορές, τότε προκύπτει:

$$\hat{f}(s) = \left[\frac{1}{is}\right]^j \hat{f}^{[j]}(s)$$

$$\hat{f}^{[l]}(s) = (is)^l \hat{f}(s)$$

1.4 Τύπος Parseval

Στις προηγούμενες υποενότητες ασχοληθήκαμε με τις L^1 -συναρτήσεις, όπου θεωρούσαμε το μετασχηματισμό Fourier ως ένα απόλυτα συγκλίνων ολοκλήρωμα. Αυτό, όμως, δε σημαίνει ότι ο μετασχηματισμός Fourier είναι απολύτως ολοκληρώσιμος. Είναι γεγονός ότι είναι δύσκολο να περιγράψουμε το εύρος του \mathcal{F} όταν το πεδίο ορισμού είναι $L^1(\mathbb{R})$. Επίσης, υπάρχουν αποκλίσεις μεταξύ της ομαλότητας της συνάρτησης και της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς του μετασχηματισμού Fourier. Συνεπώς, προτιμάμε πολλές φορές να εργαζόμαστε για το μετασχηματισμό Fourier στις τετραγωνικές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.4.1

Μια μιγαδική συνάρτηση f , ορισμένη στο \mathbb{R}^n , είναι L^2 ή τετραγωνικά ολοκληρώσιμη εάν

$$\|f\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx < \infty \quad (1.4.1)$$

Το σύνολο αυτών των συναρτήσεων, οι οποίες είναι ορισμένες στο $\|\cdot\|_{L^2}$, θα σημειώνεται ως $L^2(\mathbb{R}^n)$ όπου ο $L^2(\mathbb{R}^n)$ είναι γραμμικός χώρος.

Το εσωτερικό γινόμενο στο $L^2(\mathbb{R}^n)$ θα ορίζεται ως

$$\langle f, g \rangle_L = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\bar{g}(x) dx \quad (1.4.2)$$

Αυτός ο ορισμός ικανοποιεί την ανισότητα Cauchy-Schwarz.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.4.1

Εάν f και $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, τότε ισχύει:

$$|\langle f, g \rangle_{L^2}| \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2} \quad (1.4.3)$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.4.2 (ΤΥΠΟΣ PARSEVAL)

Εάν f είναι απολύτως ολοκληρώσιμη και τετραγωνικά ολοκληρώσιμη, τότε η \hat{f} είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη και ισχύει

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(s)|^2 \frac{ds}{2\pi} \quad (1.4.4)$$

ΛΗΜΜΑ 1.4.1

Υποθέτουμε ότι οι f και g είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις οι οποίες είναι $O(\|x\|^{-2})$ καθώς η $|x|$ τείνει στο άπειρο. Τότε έχουμε τη ταυτότητα

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\hat{g}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x)g(x) dx \quad (1.4.5)$$

1.5 Μετασχηματισμός Fourier Στον L^2

Ο τύπος Parseval, που έχει ευρέως αξιοποιηθεί στο βιβλίο "Introduction to the Mathematics of Medical Imaging" Charles L. Epstein, μας δείχνει ότι ο $L^2(\mathbb{R})$ συνδέεται με το μετασχηματισμό Fourier. Όταν ο $L^2(\mathbb{R})$ χρησιμοποιείται ως πεδίο ορισμού και ως πεδίο τιμών, τότε από το τύπο Parseval καταλαβαίνουμε ότι ο \mathcal{F} είναι ένας συνεχής γραμμικός μετασχηματισμός. Έτσι, εξαιτίας αυτού του αποτελέσματος μας δίνεται η δυνατότητα να επεκτείνουμε το μετασχηματισμό Fourier σε όλες τις συναρτήσεις του $L^2(\mathbb{R})$. Πράγματι, για κάθε $\mathcal{R} > 0$ ορίζουμε

$$\hat{f}_{\mathcal{R}}(s) = \int_{-\mathcal{R}}^{\mathcal{R}} f(x)e^{-ixs} dx \quad (1.5.1)$$

Χρησιμοποιώντας το τύπο Parseval, θεωρώντας $\mathcal{R}_1 < \mathcal{R}_2$, τότε έχουμε

$$\|\hat{f}_{\mathcal{R}_2} - \hat{f}_{\mathcal{R}_1}\|_{L^2}^2 = \int_{\mathcal{R}_1 \leq |x| \leq \mathcal{R}_2} |f(x)|^2 dx \quad (1.5.2)$$

Επειδή, όμως η f είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη τότε η αριστερή πλευρά του τύπου (1.5.2) τείνει στο μηδέν καθώς τα \mathcal{R}_1 και \mathcal{R}_2 τείνουν στο άπειρο. Ως εκ τούτου, εάν μετρήσουμε την απόσταση του $L^2(\mathbb{R})$, τότε οι συναρτήσεις $\langle \hat{f}_{\mathcal{R}} \rangle$ είναι ομαδοποιημένες όλο και πιο κόντα καθώς το \mathcal{R} τείνει στο ∞ . Δηλαδή, με άλλα λόγια, καταλαβαίνουμε ότι η $\langle \hat{f}_{\mathcal{R}} \rangle$ είναι μια L^2 -Cauchy ακολουθία (ή αλλιώς βασική ακολουθία). Άρα η $\langle \hat{f}_{\mathcal{R}} \rangle$ συγκλίνει σε ένα όριο καθώς το \mathcal{R} τείνει στο άπειρο, αυτό το όριο ορίζεται ως \hat{f} και συμβολίζεται ως \lim . Έτσι, έχουμε το ακόλουθο ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.5.1

Εάν η f είναι μια συνάρτηση στο $L^2(\mathbb{R})$, τότε ο μετασχηματισμός Fourier ορίζεται να είναι

$$\hat{f} = \lim_{\mathcal{R} \rightarrow \infty} \hat{f}_{\mathcal{R}} \quad (1.5.3)$$

όπου $\hat{f}_{\mathcal{R}}$ ορίζεται από το τύπο (1.5.1).

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.5.1

Ο μετασχηματισμός Fourier εκτείνεται να ορίσει μία συνεχή απεικόνιση από τον $L^2(\mathbb{R})$ στον εαυτό του. Εάν η $f \in L^2(\mathbb{R})$, τότε

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(s)|^2 ds \quad (1.5.4)$$

Αλλά, υπάρχουν συναρτήσεις στις οποίες ο μετασχηματισμός Fourier μιας συνάρτησης δε μπορεί να οριστεί άμεσα από το τύπο (1.2.4). Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = (1 + |x|)^{-3/4}$ δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμη, όμως είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη. Δηλαδή, ο \hat{f} δεν είναι απολύτως συγκλίνων ολοκλήρωμα.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.5.2 (ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ FOURIER ΣΤΟΝ $L^2(\mathbb{R})$)

Εάν η $f \in L^2(\mathbb{R})$ ορίζεται ως

$$f_{\mathcal{R}}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\mathcal{R}}^{\mathcal{R}} \hat{f}(s) e^{ixs} ds \quad (1.5.5)$$

τότε έχουμε $f = \lim_{\mathcal{R} \rightarrow \infty} f_{\mathcal{R}}$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ FOURIER

(i). ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ

$$\mathcal{F}(f + g) = \mathcal{F}(f) + \mathcal{F}(g)$$

$$\mathcal{F}(\alpha f) = \alpha \mathcal{F}(f), \alpha \in \mathbf{C}$$

(1.5.6)

(ii). ΑΛΛΑΓΗ ΚΛΙΜΑΚΑΣ

Ο μετασχηματισμός Fourier της $f(\alpha x)$, όπου η συνάρτηση f διαστέλλεται από το $\alpha \in \mathbb{R}$, δίνεται από:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha x) e^{-isx} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\frac{isy}{\alpha}} \frac{dy}{\alpha} \\ &= \frac{1}{\alpha} \hat{f}\left(\frac{s}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

(1.5.7)

(iii). ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ

Θεωρούμε ως f_t τη συνάρτηση f που μετατοπίζεται κατά t [π.χ $f_t(x) = f(x - t)$]. Ο μετασχηματισμός Fourier της f_t είναι:

$$\begin{aligned}\hat{f}_t(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x - t)e^{-isx} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-is(y+t)} dy \\ &= e^{-ist}\hat{f}(s)\end{aligned}\tag{1.5.8}$$

(iv). ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Εάν f είναι μια πραγματική συνάρτηση τότε ο μετασχηματισμός Fourier ικανοποιεί τη σχέση $\hat{f}(s) = \widehat{f}(-s)$. Αυτό μας δείχνει ότι ο μετασχηματισμός Fourier μιας πραγματικής συνάρτησης καθορίζεται πλήρως από τις τιμές για θετικές (ή αρνητικές) συχνότητες.

(v). ΑΡΤΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Εάν η f είναι μια πραγματική συνάρτηση και άρτια, τότε ο \hat{f} είναι πραγματική συνάρτηση. Ενώ, αν η f είναι μια πραγματική συνάρτηση και περιττή, τότε ο \hat{f} λαμβάνει φανταστικές τιμές. Στη περίπτωση που η f είναι μια άρτια συνάρτηση, τότε ο μετασχηματισμός Fourier είναι επίσης άρτιος και δίνεται από το τύπο:

$$\hat{f}(s) = 2 \int_0^{\infty} f(x) \cos(sx) dx\tag{1.5.9}$$

[ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ]

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη στο \mathbb{R}^n . Η f ονομάζεται άρτια αν ισχύει $f(x) = f(-x)$ και περιττή εάν ισχύει $f(x) = -f(-x)$.

1.6 Η Αρχή Αβεβαιότητας Του Heisenberg

Σ' αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με μερικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier οι οποίες είναι σε κάποια σημεία λιγότερες στοιχειώδεις απ' ότι θεωρούσαμε μέχρι τώρα. Έστω f μια συνάρτηση η οποία ανήκει είτε στον $L^1(\mathbb{R})$ είτε στον $L^2(\mathbb{R})$. Για κάθε $\mathcal{R} > 0$ ορίζεται από

$$f_{\mathcal{R}}(x) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{X}_{[-\mathcal{R}, \mathcal{R}]} \hat{f})(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\mathcal{R}}^{\mathcal{R}} \hat{f}(s) e^{ixs} ds\tag{1.6.1}$$

Όμως, η συνάρτηση $f_{\mathcal{R}}$ μπορεί να εκφραστεί άμεσα από το τύπο:

$$f_{\mathcal{R}}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{\sin(R(x-y))}{\pi(x-y)} dy \quad (1.6.2)$$

Εάν $f \in L^1(\mathbb{R})$ τότε ο τύπος (1.6.2) προκύπτει από την εισαγωγή του ορισμού \hat{f} στον ορισμό του ολοκληρώματος $f_{\mathcal{R}}$ εναλλάσσοντας τη τάξη των ολοκληρωμάτων. Τώρα, αν $f \in L^2(\mathbb{R})$ τότε ο τύπος (1.6.2) ακολουθεί από το τύπο: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\hat{g}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x)g(x) dx$ όπου οι συναρτήσεις f και g είναι $O(|x|^{-2})$ καθώς η $|x|$ τείνει στο άπειρο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.6.1 (ΑΡΧΗ ΕΝΤΟΠΙΣΜΟΥ)

Υποθέτουμε ότι έχουμε συνάρτηση f που ανήκει είτε στον $L^1(\mathbb{R})$ είτε στον $L^2(\mathbb{R})$. Εάν η f μηδενίζεται μέσα σ' ένα ανοικτό διάστημα που περιέχει το x_0 , τότε έχουμε:

$$\lim_{\mathcal{R} \rightarrow \infty} f_{\mathcal{R}}(x_0) = 0 \quad (1.6.3)$$

Όμως, αυτό που προκαλεί ιδιαίτερο ενδιαφέρον είναι η σχέση που έχουν μεταξύ τους τα $\text{supp} f$ και $\text{supp} \hat{f}$, ορίζουμε ως:

$$\text{supp} f = \overline{\{x \in \mathcal{X} | f(x) \neq 0\}} \quad (1.6.4)$$

όπου \mathcal{X} διανυσματικός χώρος. Δηλαδή, το $\text{supp} f$ είναι η κλειστότητα του συνόλου, όπου η συνάρτηση f δεν μηδενίζεται.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.6.1

Υποθέτουμε ότι η $\text{supp} f$ περιέχεται στο φραγμένο διάστημα $(-\mathcal{R}, \mathcal{R})$. Αν η \hat{f} έχει επίσης φραγμένο φορέα τότε $f \equiv 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Γνωρίζουμε ότι η σειρά $\sum_0^{\infty} \frac{(-ixs)^j}{j!}$ συγκλίνει στο e^{-ixs} ομοιόμορφα σε φραγμένα διαστήματα. Συνδυάζοντας αυτό το αποτέλεσμα με το γεγονός ότι η f έχει φραγμένο φορέα, τότε μπορούμε να εναλλάξουμε το ολοκλήρωμα με την συγκεκριμένη σειρά έτσι ώστε:

$$\begin{aligned} \hat{f}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixs} dx \\ &= \int_{-\mathcal{R}}^{\mathcal{R}} \sum_{j=0}^{\infty} f(x) \frac{(-ixs)^j}{j!} dx \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-is)^j}{j!} \int_{-\mathcal{R}}^{\mathcal{R}} f(x) x^j dx \end{aligned} \quad (1.6.5)$$

Επειδή γνωρίζουμε ότι :

$$\left| \int_{-\mathcal{R}}^{\mathcal{R}} f(x)(x)^j dx \right| \leq \mathcal{R}^j \int_{-\mathcal{R}}^{\mathcal{R}} |f(x)| dx \quad (1.6.6)$$

οι όροι της σειράς που αντιπροσωπεύουν φράζονται από τους όρους της σειράς που έχουν άπειρη ακτίνα σύγκλισης. Επομένως, η j δύναμη είναι:

$$\frac{1}{j!} \mathcal{R} |s|^j \int_{-\mathcal{R}}^{\mathcal{R}} |f(x)| dx \quad (1.6.7)$$

Ως εκ τούτου, η επέκταση της σειράς για την $\hat{f}(s)$ έχει επίσης άπειρη ακτίνα σύγκλισης. Αυτή η διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί έτσι ώστε να βρούμε την επέκταση Taylor της $\hat{f}(s)$ για το τυχαίο s_0 :

$$\begin{aligned} \hat{f}(s) &= \int_{-\mathcal{R}}^{\mathcal{R}} e^{-isx} f(x) e^{-is_0} e^{is_0x} dx \\ &= \int_{-\mathcal{R}}^{\mathcal{R}} e^{-i(s-s_0)x} f(x) e^{is_0x} dx \\ &= \int_{-\mathcal{R}}^{\mathcal{R}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[-i(s-s_0)x]^j}{j!} f(x) e^{is_0x} dx \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_{-\mathcal{R}}^{\mathcal{R}} \frac{[-i(s-s_0)x]^j}{j!} f(x) e^{is_0x} dx \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[-i(s-s_0)]^j}{j!} \int_{-\mathcal{R}}^{\mathcal{R}} f(x) x^j e^{is_0x} dx \end{aligned} \quad (1.6.8)$$

Αν θεωρήσουμε ως $\alpha_j^{s_0} = \int f(x) x^j e^{is_0x} dx$, τότε προκύπτει:

$$\hat{f}(s) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j^{s_0} \frac{[-i(s-s_0)]^j}{j!} \quad (1.6.9)$$

Αυτή η επέκταση ισχύει για όλα τα s . Υποθέτουμε ότι υπάρχει s τέτοιο ώστε $\vartheta_s^j \hat{f}(s_0) = 0$ για $j = 0, 1, 2, \dots$. Τότε έχουμε το εξής αποτέλεσμα:

Ο $\hat{f}(s) \equiv 0$ διότι όλοι οι συντελεστές, $\alpha_j^{s_0} = \vartheta_s^j \hat{f}(s_0)$, είναι ίσοι με μηδέν.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ 1.6.1

Η απόδειξη της πρότασης (1.6.1) μας δείχνει ότι εάν η f έχει φραγμένο φορέα σ' ένα πεπερασμένο διάστημα και οι παράγωγοι του \hat{f} μηδενίζονται σ' ένα σημείο τότε $f \equiv 0$. Η αρχή αβεβαιότητας του Heisenberg είναι αυτή που μπορεί καλύτερα να περιγράψει τη κατάσταση αυτή.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.6.2 (ΑΡΧΗ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑΣ ΤΟΥ HEISENBERG)

Αν f και $\vartheta_x f$ ανήκουν στο $L^2(\mathbb{R})$ τότε:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^2 |f(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} |s|^2 |\hat{f}(s)|^2 ds / 2\pi \geq 1/4 \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right]^2 \quad (1.6.10)$$

Για την απόδειξη αυτού του θεωρήματος θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν η f φθίνει αρκετά γρήγορα τότε κάνουμε την ολοκλήρωση εν μέρει για να βρούμε ότι:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x f f_x dx &= \frac{1}{2} (x f^2) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} f^2 dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f^2 dx \end{aligned} \quad (1.6.11)$$

Από ανισότητα Cauchy-Schwarz συνεπάγεται ότι:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} x f f_x dx \right| \leq \left[\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f_x|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.6.12)$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση (1.6.11), το τύπο Parseval και την εκτίμηση αυτή βρίσκουμε:

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 dx \leq \left[\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} s^2 |\hat{f}|^2 ds \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.6.13)$$

Επιπλέον, έχουμε ότι η διακύμανση της θέσης και της στιγμής δίνεται από:

$$\Delta x = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Delta s = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_x^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.6.14)$$

Η εκτίμηση της σχέσης $\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 dx \leq \left[\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} s^2 |\hat{f}|^2 ds \right]^{\frac{1}{2}}$ είναι ισοδύναμη με την σχέση $\Delta x \Delta s \geq \frac{1}{2}$. Για να καταλάβουμε καλύτερα τη σημασία αυτής της σχέσης, θεωρούμε ότι a, b μη αρνητικοί αριθμοί τότε αυτή η ανισότητα σημαίνει αριθμητικά-γεωμετρικά ότι:

$$ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$$

Συνδυάζοντας αυτό με την αρχή της αβεβαιότητας του Heisenberg δείχνουμε ότι $1 \leq (\Delta x)^2 + (\Delta s)^2$. Δηλαδή,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2 dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} [x^2 f^2 + f_x^2] dx \quad (1.6.15)$$

1.7 Μετασχηματισμός Fourier Για Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών

Ο μετασχηματισμός Fourier μπορεί να οριστεί και για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Αρχικά ορίζουμε τα x και s τα οποία ανήκουν στο \mathbb{R}^n .

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ και } \mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$$

Συνεπώς, και ο όγκος του χώρου Fourier ορίζεται ως $d\mathbf{s} = ds_1 ds_2 \dots ds_n$.

(i.) L^1 -ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.7.1

Εάν η f ανήκει στον $L^1(\mathbb{R}^n)$, τότε ο μετασχηματισμός Fourier \hat{f} της f ορίζεται ως

$$\hat{f}(\mathbf{s}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) e^{-i\langle \mathbf{s}, \mathbf{x} \rangle} d\mathbf{x} \quad (1.7.1)$$

για $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$.

Επειδή η f είναι απολύτως ολοκληρώσιμη στο \mathbb{R}^n , το ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί σαν επαναλαμβανόμενο ολοκλήρωμα

$$\hat{f}(\mathbf{s}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) e^{-i\langle \mathbf{s}, \mathbf{x} \rangle} d\mathbf{x} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) e^{ix_1 s_1} dx_1 \dots e^{ix_n s_n} dx_n \quad (1.7.2)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.7.1 (ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER)

Έστω ότι η f είναι L^1 -συνάρτηση ορισμένη στο \mathbb{R}^n . Αν η \hat{f} ανήκει επίσης στον $L^1(\mathbb{R}^n)$, τότε

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{[2\pi]^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\mathbf{s}) e^{i\mathbf{x}\mathbf{s}} d\mathbf{s} \quad (1.7.3)$$

(ii.) ΟΜΑΛΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.7.2

Για $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, ένας δείκτης πολλών μεταβλητών, ορίζεται ως

$$\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n! \text{ και } |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \quad (1.7.4)$$

Η συνάρτηση $|\alpha|$ καλείται μήκος της α . Πολλοί χρήσιμα εργαλεία είναι και οι ακόλουθες συμβάσεις:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^\alpha &= x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \\ \vartheta_{\mathbf{x}}^\alpha &= \vartheta_{x_1}^{\alpha_1} \vartheta_{x_2}^{\alpha_2} \dots \vartheta_{x_n}^{\alpha_n} \end{aligned} \quad (1.7.5)$$

1.7. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER ΓΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ 27

ΛΗΜΜΑ 1.7.1 (RIEMANN-LEBESGUE)

Έστω ότι η f είναι μια L^1 -συνάρτηση στο \mathbb{R}^n , τότε η \hat{f} είναι μια συνεχής συνάρτηση και $\lim_{|\mathbf{s}| \rightarrow \infty} \hat{f}(\mathbf{s}) = 0$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.7.1

Εάν η f είναι μια συνεχής L^1 -συνάρτηση με απολύτως ολοκληρώσιμες συνεχείς j -παραγώγους, τότε έχουμε

$$\mathcal{F}(\vartheta_{x_j} f)(\mathbf{s}) = i s_j \mathcal{F}(f)(\mathbf{s}) \quad (1.7.6)$$

Συνεπώς, υπάρχει σταθερά C_n τέτοια ώστε εάν η f έχει συνεχής ολοκληρώσιμη βαθμίδα, τότε ο \hat{f} ικανοποιεί την εκτίμηση:

$$|\hat{f}(\mathbf{s})| \leq \frac{C_n \int_{\mathbb{R}^n} (|f| + \|\nabla f\|) d\mathbf{x}}{(1 + \|\mathbf{s}\|)} \quad (1.7.7)$$

(iii). L^2 -ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.7.2 (ΤΥΠΟΣ PARSEVAL)

Εάν η f είναι απολύτως ολοκληρώσιμη και τετραγωνικά ολοκληρώσιμη, τότε έχουμε:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = \frac{1}{[2\pi]^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\mathbf{s})|^2 d\mathbf{s} \quad (1.7.8)$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.7.2 (L^2 -ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ)

Έστω $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ και ορίζεται ως

$$f_{\mathcal{R}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{[2\pi]^n} \int_{\|\mathbf{s}\| < \mathcal{R}} \hat{f}(\mathbf{s}) e^{i\mathbf{x}\mathbf{s}} d\mathbf{s} \quad (1.7.9)$$

τότε έχουμε $\lim_{\mathcal{R} \rightarrow \infty} f_{\mathcal{R}}$.

ΛΗΜΜΑ 1.7.2

Έστω $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, τότε έχουμε:

$$\langle f_{\mathcal{R}}, g \rangle = \int_{\|\mathbf{s}\| < \mathcal{R}} \hat{f}(\mathbf{s}) \overline{\hat{g}(\mathbf{s})} d\mathbf{s} \quad (1.7.10)$$

1.8 Συνέλιξη

Γενικά, είναι προτιμότερο να εργαζόμαστε με μια ομαλή συνάρτηση αλλά συνήθως τα διαθέσιμα δεδομένα περιέχουν θόρυβο. Με αυτό εννοούμε ότι το μετρούμενο σήμα είναι της μορφής: $f = s + \epsilon n$, όπου ϵ είναι ένας (μικρός) αριθμός και n είναι η συνάρτηση η οποία δημιουργεί το θόρυβο. Ο θόρυβος αντιπροσωπεύεται από μια ταχέως μεταβαλλόμενη συνάρτηση που είναι τοπικά κοντά στο μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε x και για αρκετό μεγάλο δ , ο μέσος όρος

$$\frac{1}{\delta} \int_x^{x+\delta} n(y) dy$$

είναι μικρός σε σύγκριση με το μέγεθος του n .

Επειδή, η s είναι μια ομαλή συνάρτηση, το ανάλογο μέσο όρο της s πρέπει να είναι κοντά στο $s(x)$. Επομένως, η μετακίνηση του μέσου όρου της f ορίζεται ως:

$$\mathcal{M}_\delta(f)(x) = \frac{1}{\delta} \int_x^{x+\delta} f(y) dy \quad (1.8.1)$$

Εάν ο θόρυβος είναι τυχαίος, έτσι ώστε το δ να λαμβάνεται μικρό, τότε η $\mathcal{M}_\delta(f)$ πρέπει να είναι κοντά στο s . Όμως, υπάρχει ένας πιο ευέλικτος τρόπος να εκφράσουμε το τρόπο με τον οποίο λειτουργεί η $\mathcal{M}_\delta(f)(x)$.

Αρχικά, ορίζουμε τη συνάρτηση βάρους, όπου $m_\delta = \frac{1}{\delta}$ σε περίπτωση που $x \in [-\delta, 0]$ και σε κάθε άλλη περίπτωση $m_\delta(x) = 0$. Επομένως, έχουμε ότι η μετακίνηση του μέσου όρου είναι

$$\mathcal{M}_\delta(f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) m_\delta(x - y) dy \quad (1.8.2)$$

Από αυτή τη σχέση καταλαβαίνουμε ότι η τιμή της $\mathcal{M}_\delta(f)(x)$ βρίσκεται λαμβάνοντας τη συνάρτηση βάρους κατά μήκος του άξονα. Και αυτή η συνάρτηση βάρους είναι μόνο μια επιλογή. Θα ήταν οφέλιμο αν χρησιμοποιούσαμε διαφορετική συνάρτηση βάρους. Συνεπώς, έστω w μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση, τότε ορίζουμε ως w -μετακίνηση μέσου όρου βάρους το ολοκλήρωμα

$$\mathcal{M}_w(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) w(x - y) dy \quad (1.8.3)$$

Τα κύρια χαρακτηριστικά της σχέσης $f \mapsto \mathcal{M}_w(f)$ είναι ότι:

- (1.) είναι γραμμική στην f ,
- (2.) το βάρος που εκχωρείται στην $f(y)$ στην έξοδο $\mathcal{M}_w(f)$ εξαρτάται μόνο από τη διαφορά $x - y$.

Έτσι, αυτό επιβεβαιώνει το γεγονός ότι πρόκειται για διγραμμική μορφή των συναρτήσεων f και w . Το αποτέλεσμα αυτό ονομάζεται *γινόμενο συνέλιξης* και συμβολίζεται ως $f * w$. Η συνέλιξη συνδέεται με το μετασχηματισμό Fourier, και αυτό γιατί έχει αποτελεσματικούς αλγόριθμους για τη προσέγγιση του μετασχηματισμού Fourier και του αντιστρόφου του.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.8.1

Εάν η f είναι μια L^1 - συνάρτηση ορισμένη στο \mathbb{R}^n και g είναι μια φραγμένη, τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση τότε το *γινόμενο συνέλιξης* είναι μια συνάρτηση ορισμένη στο \mathbb{R}^n και βρίσκεται από το ολοκλήρωμα

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) dy \quad (1.8.4)$$

Στο *γινόμενο συνέλιξης* ισχύει η τριγωνική ανισότητα

$$\|f * g\|_{\infty} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{\infty} \quad (1.8.5)$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.8.1

Υποθέτουμε ότι f και g είναι ολοκληρώσιμες και η g είναι φραγμένη. Τότε το $f * g$ είναι απολύτως ολοκληρώσιμο και

$$\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1} \quad (1.8.6)$$

Η πρόταση αυτή μας λέει ότι το *γινόμενο συνέλιξης* επεκτείνεται στο να ορίσει μια διγραμμική απεικόνιση του $L^1(\mathbb{R}^n) \times L^1(\mathbb{R}^n)$ στον $L^1(\mathbb{R}^n)$ το οποίο ικανοποιεί τη σχέση (1.8.6).

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.8.2

Έστω, ότι f_1, f_2, f_3 ανήκουν στο $L^1(\mathbb{R}^n)$, τότε ισχύουν οι ακόλουθες ταυτότητες:

$$\begin{aligned} f_1 * f_2 &= f_2 * f_1 \\ f_1 * (f_2 + f_3) &= f_1 * f_2 + f_1 * f_3 \\ f_1 * (f_2 * f_3) &= (f_1 * f_2) * f_3 \end{aligned} \quad (1.8.7)$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ 1.8.1

Εάν η συνέλιξη ορίζεται χωρίς να “αντανακλά” τη δεύτερη συνάρτηση μέσω της προέλευσης, δηλαδή αν ισχύει $f * g(x) = \int f(y)g(y-x) dy$, τότε το γινόμενο συνέλιξης δε θα είναι αντιμεταθετικό αλλά θα ικανοποιεί τη σχέση $f * g(x) = g * f(-x)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.8.1

Θεωρούμε ότι f και g είναι L^1 -συναρτήσεις. Τότε

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g) \tag{1.8.8}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η συνέλιξη $f * g$ είναι μια L^1 -συνάρτηση και επακόλουθα έχει μετασχηματισμό Fourier. Επειδή, όμως, η $f(x-y)g(y)$ είναι μια L^1 -συνάρτηση της (x, y) , τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * g)(s) &= \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x) e^{-i\langle s, x \rangle} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) e^{-i\langle s, x \rangle} dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(t)g(y) e^{-i\langle s, (y+t) \rangle} dt dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(t)g(y) e^{-i\langle sy+st \rangle} dt dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(t)g(y) e^{-isy} e^{-ist} dt dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{-ist} dt \int_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{-isy} dx \\ &= \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g) \end{aligned}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ 1.8.2

Το παραπάνω θεώρημα μας οδηγεί στο εξής συμπέρασμα: Αν η $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ και $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, τότε το $f * g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Με τη προϋπόθεση ότι η \hat{g} είναι φραγμένη συνάρτηση έτσι ώστε το $\hat{f}\hat{g} \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

1.9 Μετατόπιση Αμετάβλητου Φιλτραρίσματος

Η διαδικασία που καθορίζει τις εισόδους και εξόδους καλείται φιλτράρισμα. Αρκετές εισοδοί και έξοδοι αντιπροσωπεύονται από συναρτήσεις ως φιλτράρισμα μιας απεικόνισης, έτσι θα εννοούμε ένα χώρο συναρτήσεων σε ένα άλλο χώρο. Επίσης, στη περίπτωση που ο χώρος των συναρτήσεων είναι γραμμικός τότε και το φιλτράρισμα ονομάζεται γραμμικό. Στη πράξη, αρκετές εφαρμογές φιλτραρίσματος δίνονται από τη συνέλιξη με μια σταθερή συνάρτηση.

Άρα, αν $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, τότε η

$$\mathcal{C}_\psi(g) = \psi * g \quad (1.9.1)$$

ορίζεται ως φιλτράρισμα.

Το φιλτράρισμα το οποίο τοποθετεί φραγμένες εισόδους σε φραγμένες εξόδους καλείται σταθερό φίλτρο. Επιπλέον, τα φιλτραρίσματα όπου ορίζονται από συνέλιξη έχουν μια φυσική ιδιότητα: “Η μετατόπιση παραμένει αμετάβλητη”.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.9.1

Για $\tau \in \mathbb{R}^n$ η μετατόπιση της f από τ είναι η συνάρτηση f_τ , ορισμένη από

$$f_\tau = f(x - \tau) \quad (1.9.2)$$

Ένα φιλτράρισμα \mathcal{A} , σχεδιάζοντας συναρτήσεις ορισμένες στο \mathbb{R}^n σε συναρτήσεις ορισμένες στο \mathbb{R}^n καλείται μετατόπιση αμετάβλητου φιλτραρίσματος αν

$$\mathcal{A}(f_\tau) = (\mathcal{A}f)_\tau \quad (1.9.3)$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΑΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΦΙΛΤΡΑΡΙΣΜΑΤΟΣ

(i). ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ

$$\mathcal{A}_\tau(f)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} - \tau)$$

(ii). ΑΛΛΑΓΗ ΚΛΙΜΑΚΑΣ

$$\mathcal{A}_\epsilon(f)(\mathbf{x}) = \frac{1}{\epsilon^n} f\left(\frac{\mathbf{x}}{\epsilon}\right)$$

(iii). ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΜΕ ΜΙΑ ΣΤΗΝΑΡΤΗΣΗ

$$\mathcal{A}_\psi(f) = \psi f$$

(iv). ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΗ

$$\mathcal{D}(f)(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x})$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.9.1

Το φιλτράρισμα ορισμένο από συνέλιξη είναι μετατοπικά αμετάβλητο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\psi(f_\tau)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x-y)f(y-\tau) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x-\tau-w)f(w) dw \\ &= \mathcal{C}_\psi(f)(x-\tau) \end{aligned} \tag{1.9.4}$$

όπου θέσαμε $w = y - \tau$.

Τέλος, κάθε μετατόπιση αμετάβλητου γραμμικού φιλτραρίσματος μπορεί να ανακατασκευαστεί από συνέλιξη.

Κεφάλαιο 2

Μετασχηματισμός Radon

2.1 Μετασχηματισμός Radon

Ο μετασχηματισμός Radon είναι σημαντικός για τις μετρήσεις που πραγματοποιούνται στις ακτίνες X.

Θεωρούμε το $\mathbb{R} \times \mathcal{S}^1$ ως το χώρο προσανατολισμένων γραμμών στο \mathbb{R}^2 , το ζευγάρι (t, ω) αντιστοιχεί στη γραμμή

$$l_{t,\omega} = \{\mathbf{x} : \langle \omega, \mathbf{x} \rangle = t\} = \{t\omega + s\hat{\omega} : s \in \mathbb{R}\}$$

Το $\hat{\omega}$ είναι το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στο ω με κατεύθυνση που καθορίζεται από

$$\det(\omega\hat{\omega}) > 0$$

Θεωρώντας το σημείο $\omega \in \mathcal{S}^1$ ως $\omega(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$ μπορούμε να ορίσουμε το $\mathbb{R} \times \mathcal{S}^1$ ως το $\mathbb{R} \times [0, 2\pi)$. Έτσι, με αυτή τη ισοδυναμία μπορεί το dx να χρησιμοποιηθεί σαν γραμμικό στοιχείο στη \mathcal{S}^1 -κατεύθυνση, και στη συνέχεια ορίζεται ως $d\omega$. Το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης h στο $\mathbb{R} \times \mathcal{S}^1$ δίνεται από

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \omega(\theta)) dt d\theta$$

το οποίο συχνά ορίζεται ως

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \omega) dt d\theta$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1.1

Το σύνολο $L^2(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^1)$ αποτελείται από τοπικά ολοκληρώματα, πραγματικών συναρτήσεων για τα οποία το τετραγωνικό ολοκλήρωμα,

$$\|h\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^1)}^2 = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |h(t, \omega(\theta))|^2 dt d\theta \quad (2.1.1)$$

είναι πεπερασμένο.

Μια συνάρτηση h στο $\mathbb{R} \times \mathcal{S}^1$ είναι συνεχής αν η $h(t, \theta) = h(t, \omega)$ είναι 2π -περιοδική στο θ και συνεχής στο $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$. Ομοίως, η h είναι διαφορίσιμη εάν είναι 2π -περιοδική και διαφορίσιμη στο $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$. Ο μετασχηματισμός Radon της f στο (t, ω) ορίζεται από το ολοκλήρωμα

$$\mathcal{R}f(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t\omega + s\hat{\omega}) ds. \quad (2.1.2)$$

Επειδή $l_{t, \omega}$ και $l_{-t, -\omega}$ είναι ίδια γραμμή, τότε ο μετασχηματισμός Radon είναι μια άρτια συνάρτηση

$$\mathcal{R}f(-t, -\omega) = \mathcal{R}f(t, \omega) \quad (2.1.3)$$

Ο μετασχηματισμός Radon έχει πολλές ιδιότητες ανάλογες με το μετασχηματισμό Fourier. Υποθέτουμε ότι f και g είναι συναρτήσεις με φραγμένο φορέα, έτσι έχουμε τύπο που αφορά το γινόμενο συνέλιξης $\mathcal{R}(f * g)$ στα $\mathcal{R}f$ και $\mathcal{R}g$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.1.1

Έστω f και g τμηματικά συνεχείς συναρτήσεις με φραγμένο φορέα. Τότε

$$\mathcal{R}[f * g](t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}f(s, \omega) \mathcal{R}g(t - s, \omega) ds \quad (2.1.4)$$

Έστω v διάνυσμα στο \mathbb{R}^2 , η μετατόπιση της f κατά v είναι η συνάρτηση $f_v(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} - v)$. Έτσι υπάρχει μια σχέση μεταξύ του μετασχηματισμού Radon της f και της f_v .

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.1.2

Έστω f μια τμηματικά συνεχής συνάρτηση με φραγμένο φορέα. Τότε

$$\mathcal{R}f_v(t, \omega) = \mathcal{R}f(t - \langle \omega, v \rangle, \omega) \quad (2.1.5)$$

Χρησιμοποιώντας το τύπο (2.1.5), σχετίζουμε το μετασχηματισμό Radon της f ως μερική παράγωγο.

ΛΗΜΜΑ 2.1.1

Εάν f είναι μια συνάρτηση με φραγμένο φορέα και συνεχείς πρώτης τάξης μερικές παραγώγους, τότε ο $\mathcal{R}f(t, \omega)$ είναι διαφορίσιμος στο t και

$$\mathcal{R}\partial_x f(t, \omega) = \omega_1 \partial_t \mathcal{R}f(t, \omega)$$

$$\mathcal{R}\partial_y f(t, \omega) = \omega_2 \partial_t \mathcal{R}f(t, \omega)$$

(2.1.6)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θα εργαστούμε για τη x παράγωγο, η απόδειξη για τη y παράγωγο είναι ίδια.

Έστω $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$. Η x -μερική παράγωγο της f ορίζεται από

$$\partial_x f(\mathbf{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h\mathbf{e}_1 + \mathbf{x}) - f(\mathbf{x})}{-h}$$

Από τη σχέση (2.1.5) και τη γραμμικότητα του μετασχηματισμού Radon, προκύπτει ότι

$$\mathcal{R}\left[\frac{f(h\mathbf{e}_1 + \mathbf{x}) - f(\mathbf{x})}{-h}\right](t, \omega) = \frac{\mathcal{R}f(t - h\omega_1, \omega) - \mathcal{R}f(t, \omega)}{-h}$$

και καθώς $h \rightarrow 0$ αποδεικνύεται ο τύπος (2.1.6).

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.1.3

Θεωρούμε ότι η f έχει φραγμένο φορέα και συνεχείς μερικές παραγώγους τάξης k . Τότε ο $\mathcal{R}f(t, \omega)$ είναι k -φορές διαφορίσιμος στο t και, για μη αρνητικούς ακεραίους i, j με $i + j \leq k$ έχουμε

$$\mathcal{R}[\partial_x^i \partial_y^j](t, \omega) = \omega_1^i \omega_2^j \partial_t^{i+j} \mathcal{R}f(t, \omega) \quad (2.1.7)$$

Θεωρούμε $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ άκαμπτη περιστροφή του επιπέδου. Η \mathbf{A} είναι γραμμική απεικόνιση τέτοια ώστε να ισχύει

$$\langle \mathbf{A}v, \mathbf{A}w \rangle = \langle v, w \rangle, \forall v, w \in \mathbb{R}^2$$

Αν η f είναι τμηματικά συνεχής συνάρτηση με φραγμένο φορέα, τότε

$$f_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{A}\mathbf{x})$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.1.4

Έστω \mathbf{A} άκαμπτη περιστροφή του \mathbb{R}^2 και f τμηματικά συνεχής συνάρτηση με φραγμένο φορέα. Τότε

$$\mathcal{R}f_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \mathcal{R}f(t, \mathbf{A}\omega) \quad (2.1.8)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για την απόδειξη είναι χρήσιμο ότι $\langle \mathbf{A}\omega, \mathbf{A}\hat{\omega} \rangle = \langle \omega, \hat{\omega} \rangle = 0$ και συνεπώς

$$\begin{aligned} \mathcal{R}f_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t\mathbf{A}\omega + s\mathbf{A}\hat{\omega}) ds \\ &= \mathcal{R}f(t, \mathbf{A}\omega) \end{aligned} \tag{2.1.9}$$

2.2 Αντίστροφος Μετασχηματισμός Radon

Ο μετασχηματισμός Fourier είναι χρήσιμος για να αντιστρέψουμε το μετασχηματισμό Radon. Στην ιατρική απεικόνιση η σχέση που συνδέει το μετασχηματισμό Fourier με το μετασχηματισμό Radon ονομάζεται *κεντρικό θεώρημα τομής*.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2.1 (ΚΕΝΤΡΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΜΗΣ)

Έστω f απολύτως ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο πεδίο ορισμού της \mathcal{R} . Για κάθε πραγματικό αριθμό r και μοναδιαίο διάνυσμα ω , έχουμε τη σχέση

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}f(t, \omega) e^{-itr} dt = \hat{f}(r\omega) \tag{2.2.1}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του μετασχηματισμού Radon και υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα προκύπτει ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}f(t, \omega) e^{-itr} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t\omega + s\hat{\omega}) e^{-itr} ds dt \tag{2.2.2}$$

Αυτό το ολοκλήρωμα είναι απολύτως συγκλίνων, και συνεπώς θέτουμε $\mathbf{x} = t\omega + s\hat{\omega}$. Ελέγχουμε ότι η Ιακωβιανή ορίζουσα είναι ίση με το 1 και θέτουμε $t = \langle \mathbf{x}, \omega \rangle$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t\omega + s\hat{\omega}) e^{-itr} ds dt &= \int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}) e^{-i\langle \mathbf{x}, \omega \rangle r} d\mathbf{x} \\ &= \hat{f}(r\omega) \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Θεωρούμε συνάρτηση $h(t, \omega)$ ορισμένη στο $\mathbb{R} \times \mathcal{S}^1$, τότε για 1-διάσταση μετασχηματισμού Fourier, η h ορίζεται ως

$$\tilde{h}(r, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \omega) e^{-itr} dt \quad (2.2.4)$$

Εάν $h(t, \omega)$ ανήκει στον $L^2(\mathbb{R})$ για σταθερό ω , τότε ο τύπος Parseval για 1-διάσταση δίνει ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t, \omega)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{h}(r, \omega)|^2 dr \quad (2.2.5)$$

Ο τύπος Parseval για 2D-μετασχηματισμό Fourier και το κεντρικό θεώρημα τομής δίνουν το τύπο Parseval για το μετασχηματισμό Radon στο \mathbb{R}^2 .

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.2.1 (PARSEVAL ΓΙΑ ΤΟ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟ RADON ΣΤΟ \mathbb{R}^2)

Έστω f ανήκει στο πεδίο ορισμού του μετασχηματισμού Radon και είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη. Τότε

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = \frac{1}{[2\pi]^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\mathcal{R}}f(r, \omega)|^2 |r| dr d\omega \quad (2.2.6)$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ 2.2.1

Από το τύπο (2.2.6) καταλαβαίνουμε ότι ο \mathcal{R} δεν έχει επέκταση μιας συνεχούς απεικόνισης του $L^2(\mathbb{R}^2)$ στον $L^2(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^1)$ και έτσι επίσης ο \mathcal{R}^{-1} δε μπορεί να είναι συνεχής απεικόνιση του $L^2(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^1)$ στον $L^2(\mathbb{R}^2)$. Αυτός ο ισχυρισμός προκύπτει από

$$\|h\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^1)}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{h}(r, \omega)|^2 dr d\omega$$

Επειδή $|r| \in (0, \infty)$ στο τύπο (2.2.6), τότε εκεί δεν υπάρχει σταθέρα \mathcal{M} τέτοια ώστε η εκτίμηση,

$$\|\mathcal{R}f\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^1)} \leq \mathcal{M} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

να είναι έγκυρη για την f στο πυκνό υποσύνολο του $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Για να εκφράσουμε το τύπο Parseval ως ένα ολοκλήρωμα στο χώρο των προσανατολισμένων γραμμών, ορίζουμε τη $\frac{1}{2}$ -παράγωγο

$$\mathcal{D}_{\frac{1}{2}} \mathcal{R}f(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathcal{R}}f(r, \omega) |r|^{\frac{1}{2}} e^{irt} dr$$

Τότε ο τύπος Parseval μπορεί να γραφτεί ως

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f|^2 dx dy = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty |\mathcal{D}_{\frac{1}{2}} \mathcal{R}f(t, \omega)|^2 dt d\omega \quad (2.2.7)$$

Από αυτό καταλαβαίνουμε ότι για να βρούμε το μετασχηματισμό Radon μιας τετραγωνικά ολοκληρώσιμης συνάρτησης στο χώρο των γραμμών θα πρέπει να βρούμε την $\frac{1}{2}$ -παράγωγο. Όπως ο μετασχηματισμός Fourier έτσι και ο μετασχηματισμός Radon δε μπορεί να οριστεί σε όλο τον $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Το κεντρικό θεώρημα και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier, (1.7.3), δίνουν τον αντίστροφο μετασχηματισμό Radon.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2.2 (ΤΥΠΟΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ RADON)

Εάν η f είναι απολύτως ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο πεδίο ορισμού του μετασχηματισμού Radon και η \hat{f} είναι απολύτως ολοκληρώσιμη, τότε

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{[2\pi]^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty e^{ir(\mathbf{x}, \omega)} \tilde{\mathcal{R}}f(r, \omega) |r| dr d\omega \quad (2.2.8)$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ 2.2.2

Ο τύπος (2.2.8) χρησιμεύει για το προσδιορισμό της f από το μετασχηματισμό Radon. Αυτός ο τύπος αποτελεί ένα μαθηματικό μοντέλο για τις ακτίνες X στην ιατρική απεικόνιση. Δηλαδή:

- Θεωρούμε 2D τομή από 3D αντικείμενο, από τη μεριά της φυσικής αυτό που μας ενδιαφέρει είναι ο συντελεστής απόσβεσης της f της 2D τομής. Σύμφωνα με το νόμο του Beer, η ένταση $I_{(t, \omega)}$ των ακτίνων X (δοσμένη ενέργεια) που διανύεται κατά μήκος της γραμμής, $l_{(t, \omega)}$, αποσβένει. Δηλαδή, έχουμε τη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dI_{(t, \omega)}}{ds} = -fI_{(t, \omega)},$$

όπου s είναι το μήκος τόξου της γραμμής.

- Συγκρίνοντας την ένταση της προσπίπτουσας δέσμης των ακτίνων X με αυτή που εκπέμπεται, υπολογίζουμε το μετασχηματισμό Radon της f :

$$\mathcal{R}f(t, \omega) = -\log \frac{I_{0, (t, \omega)}}{I_{i, (t, \omega)}}$$

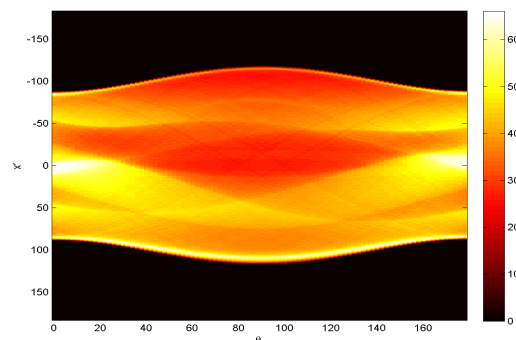
Χρησιμοποιώντας το τύπο (2.2.8), ο συντελεστής απόσβεσης της f ανακατασκευάζεται από τις μετρήσεις.

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Radon είναι χρήσιμος για την ανάπτυξη πρακτικών αλγόριθμων. Ένα πολύ καλό παράδειγμα αποτελεί το μοντέλο Shepp-Logan, το οποίο είναι ένα πρότυπο για ανακατασκευές που έχει ευρέως αξιοποιηθεί στο βιβλίο "Introduction to the Mathematics of Medical Imaging", Charles L. Epstein.

Αρχικά, δημιουργούμε το μοντέλο Shepp-Logan που έχει περιοχές διαφορετικής απόσβεσης.



Στη συνέχεια υπολογίζουμε το μετασχηματισμό Radon του ειδώλου του εγκεφάλου για κάποιο σύνολο γωνιών, το οποίο κάθε φορά ορίζεται απ' εμάς. Η παρακάτω εικόνα εμφανίζει πως είναι ο μετασχηματισμός Radon για $0 \leq \theta \leq 180$ με 90 προβολές.

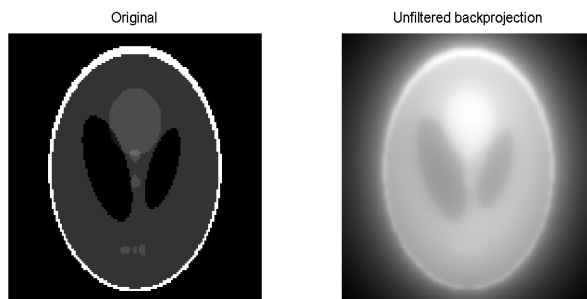


Τέλος, ανακατασκευάζουμε το είδωλο από τα δεδομένα προβολής που δημιουργήθηκαν παραπάνω.



2.3 Μέθοδος Φίλτρου Back-Projection

Ένα βασικό πρόβλημα στην απεικόνιση με ακτίνες X είναι ότι η δισδιάστατη εικόνα που λαμβάνεται από ένα τρισδιάστατο αντικείμενο είναι θολή, και αυτό οφείλεται στις παρεμβολές από άλλες δομές του 3D αντικειμένου. Δηλαδή έχουμε την εξής εικόνα :



Η μέθοδος Back-Projection μας βοήθησε να λύσουμε το πρόβλημα της θολής εικόνας. Ο τύπος του αντίστροφου μετασχηματισμού μπορεί να κατανοηθεί καλύτερα ως μια διαδικασία δύο βημάτων:

1. Το ολοκλήρωμα της ακτίνας μπορεί να ερμηνευτεί ως φίλτρο εφαρμοσμένο στο μετασχηματισμό Radon. Το φίλτρο δρά μόνο στη παράμετρο $t = \langle \mathbf{x}, \omega \rangle$ και η έξοδος του φίλτρου ορίζεται ως

$$\mathcal{GR}f(\mathbf{t}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathcal{R}}f(\mathbf{r}, \omega) e^{i\mathbf{r}\mathbf{t}} |\mathbf{r}| d\mathbf{r} \quad (2.3.1)$$

2. Το ολοκλήρωμα της γωνίας ερμηνεύεται ως Back-Projection του φιλτραρισμένου μετασχηματισμού Radon. Η συνάρτηση f ορίζεται ως

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (\mathcal{GR})f(\langle \mathbf{x}, \omega \rangle, \omega) d\omega \quad (2.3.2)$$

Για το λόγο αυτό πολλές φορές ο αντίστροφος μετασχηματισμός Radon λέγεται φιλτραρισμένος Back-Projection.

Το Back-Projection είναι εννοιολογικά και υπολογιστικά απλό, ενώ το φιλτράρισμα απαιτεί περισσότερη προσεχτική ανάλυση. Αν παραλείψουμε το $|\mathbf{r}|$ παράγοντα, τότε έχουμε μονοδιάστατο αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier εφαρμοσμένο στο $\tilde{\mathcal{R}}f$, όπου η f δίνεται από

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{[2\pi]^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{r}\langle \mathbf{x}, \omega \rangle} \hat{f}(\mathbf{r}\omega) d\mathbf{r} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \mathcal{R}f(\langle \mathbf{x}, \omega \rangle, \omega) d\omega \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier της παραγώγου μιας συνάρτησης g είναι ίσος με το μετασχηματισμό Fourier της g πολλαπλασιασμένο με το $i\xi$, δηλαδή έχουμε $\hat{\partial}_t g(t) = (i\xi)\hat{g}(\xi)$. Χρησιμοποιώντας το τύπο του αντίστροφου (2.2.8) προκύπτει ότι έχουμε r αντί $|r|$, και έτσι ο τύπος (2.3.3) γίνεται:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \partial_t \mathcal{R}f(\langle \mathbf{x}, \omega \rangle, \omega) d\omega \quad (2.3.4)$$

Αυτός είναι ο μετασχηματισμός Back-Projection της t -παραγώγου του $\mathcal{R}f$. Στο τύπο (2.3.3) εμφανίζεται, όμως, η $|r|$ και όχι το r . Για να υπολογίσουμε τη διαφορά ανάμεσα στη $|r|$ και το r , χρησιμοποιούμε μια άλλη συνάρτηση που εξαρτάται μόνο από μια μεταβλητή, η οποία λέγεται μετασχηματισμός Hilbert. Η συνάρτηση signum ορίζεται ως

$$\text{sgn}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} > 0 \\ 0, & \mathbf{r} = 0 \\ -1, & \mathbf{r} < 0 \end{cases} \quad (2.3.5)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.3.1

Έστω g μια L^2 -συνάρτηση ορισμένη στο \mathbb{R} . Ο μετασχηματισμός Hilbert της g ορίζεται ως

$$\mathcal{H}g = \mathcal{F}^{-1}(\text{sgn}(\hat{g})) \quad (2.3.6)$$

Εάν η \hat{g} είναι απολύτως ολοκληρώσιμη, τότε

$$\mathcal{H}g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\mathbf{r}) \text{sgn}(\mathbf{r}) e^{it\mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad (2.3.7)$$

Ο μετασχηματισμός Hilbert της g είναι η συνάρτηση της οποίας ο μετασχηματισμός Fourier είναι η $\text{sgn}(\hat{g})$. Για να υπολογίσουμε το $\mathcal{H}g(t_0)$, οπού t_0 δοσμένο, πρέπει να γνωρίζουμε τι γίνεται στη συνάρτηση $g(t)$ για κάθε t .

Έστω $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$ και $(Y, \langle \cdot, \cdot \rangle_Y)$ εσωτερικά γινόμενα και $\mathbf{A} : X \rightarrow Y$ γραμμικός χώρος, τότε ο συμπληρωματικός του \mathbf{A} , $\mathbf{A}^* : Y \rightarrow X$ ορίζεται ως

$$\langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_Y = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}^*\mathbf{y} \rangle_X \text{ για κάθε } \mathbf{x} \in X \text{ και } \mathbf{y} \in Y$$

Εάν χρησιμοποιήσουμε το L^2 -εσωτερικό γινόμενο για συναρτήσεις στο \mathbb{R}^2 τότε το εσωτερικό γινόμενο για συναρτήσεις στο $\mathbb{R} \times S^1$, συμβατό με τον $L^2(\mathbb{R} \times S^1)$ ορισμένο στη (2.1.1), είναι

$$\langle h, k \rangle_{\mathbb{R} \times S^1} = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \omega) k(t, \omega) dt d\omega. \quad (2.3.8)$$

Τότε η μέθοδος Back-Projection είναι $[4\pi]^{-1}$ φορές συμπλήρωμα του μετασχηματισμού Radon. Επίσης, ο μετασχηματισμός Radon δεν επεκτείνεται για να ορίσει συνεχή απεικόνιση του $L^2(\mathbb{R}^2)$ στον $L^2(\mathbb{R} \times S^1)$. Πράγματι, έστω f συνάρτηση με φραγμένο φορέα στο \mathbb{R}^2 και h συνάρτηση με φραγμένο φορέα στο $\mathbb{R} \times S^1$, τότε έχουμε:

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{R}f, h \rangle_{\mathbb{R} \times S^1} &= \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}f(\mathbf{t}, \omega) h(\mathbf{t}, \omega) dt d\omega \\
&= \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{t}\omega + s\hat{\omega}) h(\mathbf{t}, \omega) ds dt d\omega
\end{aligned} \tag{2.3.9}$$

Θέτουμε $\mathbf{x} = \mathbf{t}\omega + s\hat{\omega}$ τέτοιο ώστε

$$\mathbf{t} = \langle \mathbf{x}, \omega \rangle.$$

Εναλλάζοντας τα ω - και τα \mathbf{x} - ολοκληρώματα παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{R}f, h \rangle_{\mathbb{R} \times S^1} &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} f(\mathbf{x}) h(\langle \mathbf{x}, \omega \rangle, \omega) d\omega d\mathbf{x} \\
&= \langle f, \mathcal{R}^* h \rangle_{\mathbb{R}^2}
\end{aligned} \tag{2.3.10}$$

Αυτό επιβεβαιώνει ότι η Back-Projection είναι $[4\pi]^{-1}$ φορές συμπλήρωμα του μετασχηματισμού Radon. Επιπλέον, η σχέση $\mathcal{R}^* \neq \mathcal{R}^{-1}$ μας εξασφαλίζει ότι ο \mathcal{R} δεν είναι ένας ενιαίος μετασχηματισμός του $L^2(\mathbb{R}^2)$ στον $L^2(\mathbb{R} \times S^1)$.

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό Back-Projection της f με το συμπλήρωμά της, μαζί με το τύπο του Parseval (1.7.8) τότε προκύπτει μια σχέση που συνδέει τα $\widehat{\mathcal{R} * \mathcal{R}} f$ και \hat{f} .

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.3.1

Θεωρούμε ότι f είναι μια απολύτως ολοκληρώσιμη και τετραγωνικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο πεδίο ορισμού του μετασχηματισμού Radon. Τότε

$$\frac{r}{4\pi} \widehat{\mathcal{R} * \mathcal{R}} f(\mathbf{r}\omega) = \hat{f}(\mathbf{r}\omega) \tag{2.3.11}$$

Από την πρόταση αυτή έχουμε ότι αν η f είναι τμηματικά συνεχής με φραγμένο φορέα τότε

$$\hat{f}(\mathbf{r}\omega) = \frac{r}{4\pi} \widehat{\mathcal{R} * \mathcal{R}} f(\mathbf{r}\omega). \tag{2.3.12}$$

Αν \hat{f} είναι απολύτως ολοκληρώσιμη, τότε ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier δίνεται από

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{[2\pi]^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{r}{4\pi} \overbrace{\mathcal{R} * \mathcal{R}} f(\mathbf{r}\omega) e^{i\langle \mathbf{r}\omega, \mathbf{x} \rangle} \mathbf{r} \, d\mathbf{r} \, d\omega \\ &= \frac{1}{[2\pi]^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\|\xi\|}{4\pi} \overbrace{\mathcal{R} * \mathcal{R}} f(\xi) e^{i\langle \xi, \mathbf{x} \rangle} \, d\xi \end{aligned} \tag{2.3.13}$$

2.4 Μετασχηματισμός Hilbert

Ο μετασχηματισμός Hilbert ορίζεται ως

$$\mathcal{H}f = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(\xi) \operatorname{sgn}(\xi))$$

από το οποίο προκύπτει ότι

$$\hat{\mathcal{H}}f(\xi) = \operatorname{sgn}(\xi) \hat{f}(\xi)$$

Γενικά, ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier ενός γινομένου είναι μια συνέλιξη, δηλαδή έχουμε

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}\hat{g}) = f * g$$

Αν υπήρχε μια καλά ορισμένη συνάρτηση h τέτοια ώστε $\hat{h}(\xi) = \operatorname{sgn}(\xi)$, τότε ο μετασχηματισμός Hilbert θα ήταν $h * f$. Αλλά, η signum συνάρτηση δεν είναι μετασχηματισμός Fourier μιας καλά ορισμένης συνάρτησης, αφού δε τείνει στο μηδέν καθώς $|\xi| \rightarrow \infty$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.4.1

Θεωρούμε $\langle \phi_\epsilon \rangle$ ομοιόμορφη φραγμένη οικογένεια τοπικών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων που συγκλίνει τμηματικά στο $\operatorname{sgn}(\xi)$ καθώς $\epsilon \rightarrow 0$. Εάν f είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη, τότε ο μετασχηματισμός Hilbert της f δίνεται από το όριο

$$\mathcal{H}f(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}^{-1}(\phi_\epsilon \hat{f})$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ 2.4.1

Αν η f είναι ομαλή ώστε ο \hat{f} να φθίνει, τότε ο $\mathcal{H}f(t)$ δίνεται από το τμηματικό όριο

$$\mathcal{H}f(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{\epsilon}(\xi) \hat{f}(\xi) e^{it\xi} \frac{d\xi}{2\pi}$$

Χρησιμοποιώντας μέρος της οικογένειας των συναρτήσεων $\langle \phi_{\epsilon} \rangle$, μπορούμε να βρούμε μια αναπαράσταση του \mathcal{H} ως συνέλιξη. Τροποποιούμε τη συνάρτηση signum θέτοντας

$$\phi_{\epsilon}(\xi) = \hat{h}_{\epsilon}(\xi) \stackrel{\text{op}}{=} \text{sgn}(\xi) e^{-\epsilon|\xi|}, \epsilon > 0$$

Αυτή η οικογένεια ικανοποιεί την υπόθεση του θεωρήματος. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της \hat{h}_{ϵ} είναι

$$h_{\epsilon} = \frac{i}{\pi} \frac{t}{t^2 + \epsilon^2}$$

Η συνάρτηση h_{ϵ} συμπεριφέρεται όπως το $\frac{1}{t}$ καθώς το $t \rightarrow \infty$. Για κάθε $\epsilon > 0$ μπορούμε να ορίσουμε το μετασχηματισμό Hilbert:

$$\mathcal{H}_{\epsilon}f = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}\hat{h}_{\epsilon}) = f * h_{\epsilon} \quad (2.4.1)$$

Από το θεώρημα συνεπάγεται ότι αν η f είναι L^2 - συνάρτηση τότε το $h_{\epsilon} * f$ συγκλίνει στο $\mathcal{H}f$. Έστω το $\epsilon \rightarrow 0$ τότε η h_{ϵ} συγκλίνει τμηματικά στο $i[t\pi]^{-1}$. Δηλαδή, αν η f είναι ομαλή τότε έχουμε

$$\mathcal{H}f(t) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s)}{t-s} ds \quad (2.4.2)$$

Επειδή το $\frac{1}{|t|}$ δεν είναι ολοκληρώσιμο κοντά στο 0 τότε το ολοκλήρωμα στη σχέση (2.5.2) δεν είναι απολύτως συγκλίνων. Έτσι, χρησιμοποιώντας την αρχή του Cauchy προκύπτει

$$\mathcal{H}f(t) = \frac{i}{\pi} P.V.(f * \frac{1}{s}) = \frac{i}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{f(t-s)}{s} ds]. \quad (2.4.3)$$

Έστω ότι η f έχει φραγμένο φορέα και είναι ομαλή. Αν η t βρίσκεται εκτός της f που έχει φραγμένο φορέα τότε το ολοκλήρωμα στη σχέση (2.5.2) είναι απολύτως συγκλίνων. Αν, όμως, το t βρίσκεται εντός στον φραγμένο φορέα της f τότε θεωρώντας ότι το $\frac{1}{s}$ είναι περιττό, έχουμε

$$(\int_{-R}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^R) \frac{ds}{s} = 0$$

Πολλαπλασιάζοντας με $f(t)$ έχουμε:

$$(\int_{-R}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^R) f(t) \frac{ds}{s} = 0$$

Έστω ότι ο φραγμένος φορέας της f είναι $[-\frac{R}{2}, \frac{R}{2}]$ και το t ανήκει σε αυτό το διάστημα, τότε

$$(\int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{\infty}) \frac{f(t-s)}{s} ds = (\int_{-R}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^R) [\frac{f(t-s) - f(t)}{s}] ds \quad (2.4.4)$$

Έαν η f είναι διαφορίσιμη, τότε το ολοκλήρωμα (2.5.4) παραμένει φραγμένο καθώς το $\epsilon \rightarrow 0$ και συνεπώς έχουμε

$$P.V.(f * \frac{1}{s})(t) = \int_{-R}^R \frac{f(t-s) - f(s)}{s} ds, t \in [-\frac{R}{2}, \frac{R}{2}] \quad (2.4.5)$$

Έστω $\alpha > 0$ τέτοιο ώστε η f να ικανοποιεί τη συνθήκη α -Holder,

$$\frac{|f(t) - f(s)|}{|t-s|^\alpha} \leq \mathcal{M}, \quad (2.4.6)$$

τότε το ολοκλήρωμα στη σχέση (2.4.4) είναι απολύτως συγκλίνων.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.4.2

Αν η f είναι συνάρτηση με φραγμένο φορέα και ικανοποιεί τη (2.4.6) για $\alpha > 0$ τότε έχουμε

$$\mathcal{H}(f) = \frac{i}{\pi} P.V.(f * \frac{1}{s}) \quad (2.4.7)$$

ΣΥΝΕΠΕΙΑ 2.4.1

Αν η f είναι α -Holder συνεχής συνάρτηση με φραγμένο φορέα στο $[-\frac{R}{2}, \frac{R}{2}]$, τότε για t που ανήκει σε αυτό το διάστημα έχουμε

$$\mathcal{H}f(t) = \frac{i}{\pi} \int_{-R}^R \frac{f(t-s) - f(t)}{s} ds \quad (2.4.8)$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο Parseval, μπορούμε να βρούμε τις ιδιότητες που έχει ο μετασχηματισμός Hilbert στον L^2 .

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.4.1

Αν η $f \in L^2$, τότε ο $\mathcal{H}f \in L^2(\mathbb{R})$ και ισχύει

$$\|f\|_{L^2} = \|\mathcal{H}f\|_{L^2}$$

Επίσης, ο μετασχηματισμός Hilbert μπορεί να οριστεί καλά στους L^p -χώρους καθώς και στους Holder-χώρους.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.4.2

Για κάθε $1 < p < \infty$, ο μετασχηματισμός Hilbert επεκτείνεται να ορίσει φραγμένο χώρο $\mathcal{H} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^p(\mathbb{R})$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.4.3

Έστω η f είναι α -Holder συνεχής συνάρτηση για $\alpha \in (0, 1)$ και δεν ανήκει εντός φραγμένου διαστήματος. Τότε και ο $\mathcal{H}f$ είναι α -Holder συνεχής.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ 2.4.2

Για $\alpha = 1$ η πρόταση (2.4.3) δεν ισχύει. Διότι εκεί υπάρχουν διαφορίσιμες συναρτήσεις f τέτοιες ώστε ο $\mathcal{H}f$ δεν είναι 1-Holder συνεχής.

2.5 Προσεγγιστικός Αντίστροφος Για Το Μετασχηματισμό Radon

Για να αντιστρέψουμε το μετασχηματισμό Radon χρειάζεται να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Hilbert της παραγώγου. Τα δεδομένα από τις μετρήσεις είναι μια συνάρτηση, g_m , στο χώρο των γραμμών. Αλλά, επειδή τα μετρούμενα δεδομένα είναι σπάνια διαφορίσιμα, τότε για τον αντίστροφο Radon υπολογίζουμε το $\partial_t g_m$. Κάθε προσέγγιση του μετασχηματισμού Hilbert οδηγεί στη προσέγγιση του αντίστροφου μετασχηματισμού Radon.

Γνωρίζουμε ότι για την συνέλιξη ισχύει

$$\partial_x(f * g) = \partial_x f * g = f * \partial_x g$$

Χρησιμοποιώντας το τύπο (2.4.1), παίρνουμε μια προσέγγιση του μετασχηματισμού Radon:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^\pi \mathcal{H}_\epsilon(\partial_t \mathcal{R}f)(\langle \mathbf{x}, \omega \rangle, \omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^\pi h_\epsilon * (\partial_t \mathcal{R}f)(\langle \mathbf{x}, \omega \rangle, \omega) d\omega \end{aligned}$$

(2.5.1)

Χρησιμοποιώντας το τύπο για το h_ϵ και ότι ισχύει $f * \partial_t g = \partial_t f * g$, προκύπτει

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty \mathcal{R}f(s, \omega) \partial_t h_\epsilon(\langle \mathbf{x}, \omega \rangle - s) \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty [\mathcal{R}f(s, \omega) \frac{\epsilon^2 - (t-s)^2}{(\epsilon^2 + (t-s)^2)^2} ds]_{t=\langle \mathbf{x}, \omega \rangle} d\omega \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

Αυτό που έχουμε κάνει στη σχέση (2.5.2) είναι ότι έχουμε μετακινήσει τη t -παράγωγο από την ενδεχομένως μέτρηση θορύβου του $\mathcal{R}f$ πάνω στην ομαλή συνάρτηση h_ϵ . Αυτό σημαίνει ότι δε χρειάζεται να προσεγγίσουμε τις παραγώγους του $\mathcal{R}f$.

Σε πολλές εφαρμογές, η συνέλιξη, οι παράγωγοι και ο μετασχηματισμός Hilbert υπολογίζονται χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση του μετασχηματισμού Fourier.

Έστω $\hat{\psi}(r)$ μια φραγμένη άρτια συνάρτηση που ικανοποιεί τις συνθήκες

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(0) &= 1 \\ \hat{\psi}(\mathbf{r}) &= 0, |\mathbf{r}| > W \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

Για δοσμένη l συνάρτηση στο $\mathbb{R} \times S^1$ ορίζουμε

$$\mathcal{G}_\psi(l)(\mathbf{t}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \tilde{l}(\mathbf{r}, \omega) e^{i\mathbf{r}\mathbf{t}} \hat{\psi}(\mathbf{r}) |\mathbf{r}| d\mathbf{r} \quad (2.5.4)$$

και

$$\mathcal{R}_\psi^{-1}l(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \mathcal{G}_\psi(l)(\langle \mathbf{x}, \omega \rangle, \omega) d\omega \quad (2.5.5)$$

Θέτουμε $f_\psi = \mathcal{R}_\psi^{-1} \circ \mathcal{R}f$.

Έστω συναρτήσεις $f \in \mathbb{R}^2$ και $g \in \mathbb{R}^2$, τότε χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.1.4) έχουμε

$$\mathcal{R}[f * g](t, \omega) = \int_{-\infty}^\infty \mathcal{R}f(t - \tau, \omega) \mathcal{R}g(\tau, \omega) d\tau \quad (2.5.6)$$

2.5. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΓΙΑ ΤΟ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟ RADON 49

Χρησιμοποιώντας τη συνέλιξη για το μετασχηματισμό Fourier, προκύπτει ότι

$$\tilde{\mathcal{R}}f * g(\mathbf{r}, \omega) = \tilde{\mathcal{R}}f(\mathbf{r}, \omega)\tilde{\mathcal{R}}g(\mathbf{r}, \omega) \quad (2.5.7)$$

Θεωρούμε ότι η g είναι μια ακτινική συνάρτηση τέτοια ώστε το $\mathcal{R}g$ να είναι ανεξάρτητο του ω . Ο τύπος του φιλτραρισμένου Back-Projection για $f * g$ είναι

$$f * g(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty \tilde{\mathcal{R}}f(\mathbf{r}, \omega)\tilde{\mathcal{R}}g(\mathbf{r})e^{i\mathbf{r}(\mathbf{x}, \omega)} |\mathbf{r}| d\mathbf{r} d\omega \quad (2.5.8)$$

Συγκρίνοντας τη σχέση (2.5.8) με το ορισμό της f_ψ παρατηρούμε ότι αν μπορούμε να βρούμε την ακτινική συνάρτηση k_ψ , ορισμένη στο \mathbb{R}^2 , τέτοια ώστε

$$\mathcal{R}(k_\psi)(\mathbf{t}, \omega) = \psi(\mathbf{t})$$

τότε

$$f_\psi(\mathbf{x}) = k_\psi * f(\mathbf{x}). \quad (2.5.9)$$

όπου

$$k_\psi(\rho) = -\frac{1}{\pi} \int_\rho^\infty \frac{\psi'(\mathbf{t})}{\sqrt{\mathbf{t}^2 - \rho^2}} d\mathbf{t} \quad (2.5.10)$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.5.1

Έστω ότι η $\hat{\psi}$ ικανοποιεί τις συνθήκες (2.5.3) και ψ είναι απολύτως ολοκληρώσιμη. Τότε

$$f_\psi(\mathbf{x}) = k_\psi * f(\mathbf{x})$$

όπου η k_ψ δίνεται από (2.5.10).

ΣΗΜΕΙΩΣΗ 2.5.1

Αντικαθιστώντας την f με την f_ψ παράγεται θολή εικόνα. Αυξάνοντας όμως το φράγμα της $\hat{\psi}$, αυξάνεται η ψ και συνεπώς και η k_ψ . Αυτό μειώνει τη θόλωση καθώς επίσης και το θόρυβο στα δεδομένα.

2.6 Συνέχεια του Μετασχηματισμού Radon Και Του Αντιστρόφου Του

Προκειμένου η διαδικασία των μετρήσεων στις ακτίνες X να είναι ευσταθής, θα πρέπει η απεικόνιση $f \mapsto \mathcal{R}f$ να είναι συνεχής. Συγκεκριμένα, όσο "λιγότερο" συνεχής είναι η απεικόνιση τόσο περισσότερο "ευαίσθητες" είναι οι μετρήσεις, διότι μπορούν να αλλάξουν κατά την είσοδό τους. Όσο αφορά τον αντίστροφο μετασχηματισμό, $h \mapsto \mathcal{R}^{-1}$ και εκεί είναι σημαντική η συνέχεια, διότι οι συνέπειες των σφαλμάτων στα μετρούμενα δεδομένα επηρεάζουν την ανακατασκευή της εικόνας.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.6.1

Έστω ότι $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ και υποθέτουμε ότι η f βρίσκεται εντός του δίσκου ακτίνας L . Τότε, για κάθε ω , έχουμε την εκτίμηση

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{R}f(t, \omega)|^2 dt \leq 2L \|f\|_{L^2}^2. \quad (2.6.1)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz. Επειδή η f βρίσκεται εντός του δίσκου ακτίνας L τότε έχουμε ότι ο $\mathcal{R}f$ είναι ίσος με

$$\mathcal{R}f(t, \omega) = \int_{-L}^L f(t\omega + s\hat{\omega}) ds$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{R}f(t, \omega)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-L}^L f(t\omega + s\hat{\omega}) ds \right|^2 dt \\ &\leq 2L \int_{-L}^L \int_{-L}^L |f(t\omega + s\hat{\omega})|^2 ds dt \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

Η πρόταση αυτή μας λέει ότι αν η f βρίσκεται εντός φραγμένου συνόλου τότε μπορούμε όχι μόνο να ελέγχουμε όλο τον L^2 του $\mathcal{R}f$ αλλά επίσης τον L^2 κάθε κατεύθυνσης, ω .

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.6.2

Έστω $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ και θεωρούμε ότι η f βρίσκεται εντός δίσκου ακτίνας L . Τότε, για κάθε ω , έχουμε την εκτίμηση

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\mathcal{R}f(t, \omega)|^2}{\sqrt{L^2 - t^2}} dt \leq 2 \|f\|_{L^2}^2. \quad (2.6.3)$$

2.6. ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ RADON ΚΑΙ ΤΟΥ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ ΤΟΥ 51

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Παρατηρούμε ότι

$$f(x, y) = \chi_{[0, L^2]}(x^2 + y^2) f(x, y).$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz για $|t| \leq L$, έχουμε την εκτίμηση

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}f(t, \omega)|^2 &= \left| \int_{-L}^L f(t\omega + s\hat{\omega}) \chi_{[0, L^2]}(x^2 + y^2) (s^2 + t^2) dt \right|^2 \\ &\leq 2 \int_{-L}^L |f(t\omega + s\hat{\omega})|^2 ds \int_0^{\sqrt{L^2 - t^2}} ds \\ &= 2\sqrt{L^2 - t^2} \int_{-L}^L |f(t\omega + s\hat{\omega})|^2 ds \end{aligned} \quad (2.6.4)$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \frac{|\mathcal{R}f(t, \omega)|^2}{\sqrt{L^2 - t^2}} dt &\leq \int_{-L}^L \frac{2\sqrt{L^2 - t^2}}{\sqrt{L^2 - t^2}} \int_{-L}^L |f(t\omega + s\hat{\omega})|^2 ds dt \\ &= 2\|f\|_{L^2}^2 \end{aligned} \quad (2.6.5)$$

Ο μετασχηματισμός Radon για ομαλές συναρτήσεις $\langle f_n \rangle$ ικανοποιεί την εκτίμηση

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{R}f_n(t, \omega)|^2 dt \leq 2L\|f_n\|_{L^2}^2$$

και

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{R}f_n(\mathbf{r}, \omega)|^2 |\mathbf{r}| d\mathbf{r} d\omega = \|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2.$$

Αυτό, όμως, που προκαλεί ιδιαίτερο ενδιαφέρον είναι η συνέχεια του αντίστροφου μετασχηματισμού Radon. Για να υπολογίσουμε το σφάλμα της ανακατασκευασμένης εικόνας θα χρειαστεί να υπολογίσουμε:

$$\mathcal{R}^{-1}\mathbf{R}f_m - f = \mathcal{R}^{-1}(\mathbf{R}f_m - \mathcal{R}f)$$

όπου ο $\mathbf{R}f_m$ προσέγγιση του $\mathcal{R}f$. Αυτός ο υπολογισμός δεν είναι παντά εύκολο να πραγματοποιηθεί, διότι ίσως ο $\mathbf{R}f_m$ δεν ανήκει στο πεδίο τιμών του μετασχηματισμού Radon. Αν ο $\mathbf{R}f_m(t, \omega)$ δεν έχει L^2 - $\frac{1}{2}$ -παράγωγο στη t -κατεύθυνση, επειδή

$$\int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\mathbf{R}}f_m(\mathbf{r}, \omega)|^2 |\mathbf{r}| d\mathbf{r} d\omega = \infty$$

τότε σύμφωνα με το τύπο Parseval (2.2.6) ο $\mathbf{R}f_m$ δεν είναι μετασχηματισμός Radon μιας συνάρτησης που ανήκει στον $L^2(\mathbb{R}^2)$. Για να ελεγχθεί το L^2 -σφάλμα,

$$\|\mathcal{R}^{-1}(\mathbf{R}f_m - \mathcal{R}f)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)},$$

είναι απαραίτητο οι μετρήσεις να έχουν $\frac{1}{2}$ -παράγωγο και η διαφορά

$$\|D_{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}f_m - \mathcal{R}f)\|_{L^2(\mathbb{R} \times S^{-1})}$$

να είναι μικρή. Όμως, πρακτικά αυτό είναι αδύνατον. Έτσι, θα χρησιμοποιούμε ένα κατά προσέγγιση αντίστροφο, ορισμένο ως \mathcal{R}_ψ^{-1} όπου ψ κανονικοποιημένη συνάρτηση. Αυτή είναι μια άρτια συνάρτηση η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες

$$\hat{\psi}(0) = 1$$

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}) = 0, |\mathbf{r}| > W$$

(2.6.6)

Αυτό επιβεβαιώνει ότι η ακτινική συνάρτηση k_ψ που ορίζεται στη (2.5.10) είναι πεδίο ορισμού του μετασχηματισμού Radon και

$$\mathcal{R}k_\psi = \psi.$$

Και σε αυτή την περίπτωση έχουμε,

$$\mathcal{R}_\psi^{-1}\mathcal{R}f = k_\psi * f. \quad (2.6.7)$$

2.7 Μετασχηματισμός Radon Για Πολλές Διαστάσεις

Ο μετασχηματισμός Radon στο \mathbb{R}^n είναι παρόμοιος με το μετασχηματισμό Radon στο \mathbb{R}^2 . Έστω ω μοναδιαίο διάνυσμα στο \mathbb{R}^n και $t \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε το ζευγάρι (t, ω) που αντιστοιχεί στη γραμμή

$$l_{t,\omega} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{x}, \omega \rangle = t\}.$$

Για να ορίσουμε το μετασχηματισμό Radon επιλέγουμε διανύσματα $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}\}$ τέτοια ώστε

$$\langle \omega, \mathbf{e}_j \rangle = 0$$

$$\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{ij}$$

,

όπου $i, j = 1, \dots, n-1$.

Τα n -διανύσματα $\langle \omega, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1} \rangle$ είναι μια ορθοκανονική βάση στο \mathbb{R}^n . Ορίζουμε νέες ορθογώνιες συντεταγμένες (t, s_1, \dots, s_{n-1}) στο \mathbb{R}^n θέτοντας

$$\mathbf{x} = t\omega + \sum_{j=1}^{n-1} s_j \mathbf{e}_j.$$

Ο μετασχηματισμός Radon για n -διάσταση ορίζεται από

$$\mathcal{R}f(t, \omega) = \int_{l_{t, \omega}} f d\sigma_{n-1} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(t\omega + \sum s_j \mathbf{e}_j) ds_1 \cdots ds_{n-1}$$

Ο μετασχηματισμός Radon είναι άρτια συνάρτηση, δηλαδή ισχύει

$$\mathcal{R}f(t, \omega) = \mathcal{R}f(-t, -\omega)$$

και αυτό αποδεικνύεται από το γεγονός ότι ισχύει $l_{t, \omega} = l_{-t, -\omega}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.7.1 (ΚΕΝΤΡΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΜΗΣ)

Έστω f απολύτως ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο \mathbb{R}^n . Για κάθε πραγματικό αριθμό r και μοναδιαίο διάνυσμα ω , έχουμε τη σχέση

$$\tilde{R}f(r, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}f(t, \omega) e^{-itr} dt = \hat{f}(r\omega).$$

Το κεντρικό θεώρημα τομής και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier δίνουν τον αντίστροφο μετασχηματισμό Radon.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.7.2 (ΤΥΠΟΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ RADON)

Έστω f ομαλή συνάρτηση με φραγμένο φορέα στο \mathbb{R}^n . Τότε

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2(2\pi)^n} \int_{S^{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{R}f(r, \omega) r^{n-1} e^{ir\langle \omega, \mathbf{x} \rangle} dr d\omega.$$

Κεφάλαιο 3

Ανακατασκευή Ακτίνων X

Γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός Radon της f , ορισμένη στο $\mathbb{R} \times S^1$ δίνεται από

$$\mathcal{R}f(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t\omega + s\hat{\omega}) ds.$$

Μέσα σε ένα μηχάνημα CT ακτίνων X, ο $\mathcal{R}f$ θεωρείται μια προσέγγιση σε ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων. Σ' αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με το πως ο αντίστροφος μετασχηματισμός Radon οδηγεί στη μέθοδο για την κατά προσέγγιση ανακατασκευής της f από πραγματικές μετρήσεις. Τη μέθοδο αυτή την ονομάζουμε *αλγόριθμο ανακατασκευής*. Δηλαδή, θα παρουσιάσουμε πως παράγεται ο αλγόριθμος ανακατασκευής που χρησιμοποιείται στους περισσότερους σύγχρονους σαρωτές CT. Συγκεκριμένα, θα παρουσιάσουμε την εφαρμογή των ακτίνων X στην τομογραφία και στη συνέχεια θα περιγράψουμε τα κριτήρια που χρησιμοποιούνται στους σύγχρονους σαρωτές CT.

3.1 Εφαρμογή Των Ακτίνων X Στην Τομογραφία

Ο νόμος Beer, που γνωρίζουμε από τη φυσική, αποτελεί βάση στις ακτίνες X στην τομογραφία. Ένα αντικείμενο D σε \mathbb{R}^3 συνδέεται με το συντελεστή απόσβεσης $\mu(x)$. Η $\mu(x)$ είναι μια μη αρνητική συνάρτηση που περιγράφει τη πιθανότητα εάν ένα φωτόνιο από μια δοσμένη ενέργεια, η οποία συναντάει το αντικείμενο στο σημείο \mathbf{x} , απορροφάται ή διασπάται. Ο νόμος Beer είναι αυτός που περιγράφει την αλλαγή της έντασης λόγω της δέσμης ακτίνων, η οποία αποτελείται από πολλά φωτόνια που βρίσκονται στη γραμμή l στο \mathbb{R}^3 . Ως l έχουμε ορίσει τη γραμμή

$$l_{t,\omega} = \{\mathbf{x} : \langle \omega, \mathbf{x} \rangle = t\} = \{t\omega + s\hat{\omega} : s \in \mathbb{R}\}$$

Αν, όμως, $\Omega \in \mathcal{S}$ είναι η κατεύθυνση της l και \mathbf{x}_0 είναι σημείο της l , τότε η γραμμή γίνεται:

$$l = \{s\Omega + \mathbf{x}_0 : s \in \mathbb{R}\}.$$

Έστω $\mathcal{I}(\mathbf{s})$ η ένταση της δέσμης φωτονίων στο σημείο $\mathbf{s}\Omega + \mathbf{x}_0$. Συνεπώς, ο νόμος Beer γίνεται:

$$\frac{d\mathcal{I}}{ds}(\mathbf{s}) = -\mu(\mathbf{s}\Omega + \mathbf{x}_0)\mathcal{I}(\mathbf{s})$$

Έστω $\mathbf{s} \in [\alpha, b]$, θεωρώντας ως $\mathcal{I}(\alpha)$ και $\mathcal{I}(b)$ την εισερχόμενη και εξερχόμενη ένταση αντίστοιχα, προκύπτει ότι:

$$\log \left[\frac{\mathcal{I}(\alpha)}{\mathcal{I}(b)} \right] = \int_{\alpha}^b \mu(\mathbf{s}\Omega + \mathbf{x}_0) ds \quad (3.1.1)$$

Η τομογραφία ασχολείται με μεθόδους για το προσδιορισμό της εσωτερικής δομής δισδιάστατων τομών ενός τρισδιάστατου αντικειμένου.

Θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων το $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Επομένως, τα δεδομένα που αποθηκεύονται στο μηχάνημα CT ακτίνων X είναι προσεγγίσεις στο μετασχηματισμό Radon από δισδιάστατη τομή της συνάρτησης μ σε x_3 -κατεύθυνση. Άρα οι συνάρτησεις

$$f_c(x_1, x_2) = \mu(x_1, x_2, c) \quad (3.1.2)$$

βρίσκονται από καθορισμένες συντεταγμένες. Με τις μετρήσεις της συνάρτησης f_c μπορούμε να ανακατασκευάσουμε. Αλλά ένα μηχάνημα CT ακτίνων X μπορεί μόνο να υπολογίσει ένα πεπερασμένο αριθμό ολοκληρωμάτων της γραμμής. Έτσι, σε ένα απλό μοντέλο για πραγματικές μετρήσεις έχουμε ένα πεπερασμένο σύνολο τιμών, $\{c_1, \dots, c_n\}$ τέτοια ώστε οι μετασχηματισμοί Radon των συναρτήσεων, $\{f_{c_1}, \dots, f_{c_n}\}$ δειγματοποιούνται κατά μήκος ενός πεπερασμένου συνόλου γραμμών $\{l_{t_j, \omega_j} : j = 1, \dots, P\}$. Το μηχάνημα είναι αυτό που θα καθορίσει ποια ολοκληρώματα της γραμμής υπολογίζονται. Επομένως, σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τη μελέτη των αλγορίθμων για την ανακατασκευή μιας δισδιάστατης τομής. Αφού το μηχάνημα βαθμονομείται, οι θέσεις στο χώρο που αντιστοιχούν στις διάφορες τομές και οι γραμμές εντός μιας τομής είναι γνωστές εκ των προτέρων.

3.2 Γεωμετρίες Του Σαρωτή

Η δομή της ανακατασκευής του αλγορίθμου προσδιορίζεται από δείγματα του $\mathcal{R}f$ που είναι διαθέσιμα. Υπάρχουν δύο είδη μηχανημάτων CT ακτίνων X που χρησιμοποιούν δισδιάστατες τομές: (α) σαρωτής παράλληλης δέσμης και (β) σαρωτής αποκλίνουσας δέσμης, οι οποίοι έχουν ευρέως αξιοποιηθεί στο βιβλίο "Introduction to the Mathematics of Medical Imaging", Charles L. Epstein.

Στο σαρωτή παράλληλης δέσμης προσεγγίζουμε δείγματα του $\mathcal{R}f$ υπολογισμένα σε πεπερασμένο σύνολο κατευθύνσεων, $\{\omega(k\Delta\theta)\}$ για $k = 0, \dots, M$ όπου

$$\Delta\theta = \frac{\pi}{M+1}$$

και

$$\omega(k\Delta\theta) = (\cos(k\Delta\theta), \sin(k\Delta\theta))$$

Ο σαρωτής παράλληλης δέσμης λειτουργεί ως εξής:

Ο μετασχηματισμός Radon υπολογίζει τα ολοκληρώματα της γραμμής από πολλαπλές πηγές κατά μήκος παράλληλων τροχιών σε μια ορισμένη κατεύθυνση. Οι τροχίες είναι ισapéχουσες. Άρα, ο μετασχηματισμός Radon λαμβάνει πολλαπλές, παράλληλες προεξόχες διασταύρωσης της εικόνας από διαφορετικές γωνίες με περιστροφή γύρω από την πηγή στο κέντρο της εικόνας.

Ο σαρωτής αποκλίνουσας δέσμης λειτουργεί με διαφορετικό τρόπο, δηλαδή:

Μια σημειακή πηγή των ακτίνων X κινείται γύρω από ένα κύκλο με κέντρο το αντικείμενο που μετράται. Η πηγή πάλλεται σε μια διακριτή ακολουθία γωνιών, και οι μετρήσεις από το $\mathcal{R}f$ αποθηκεύονται για πεπερασμένη οικογένεια γραμμών που διέρχονται μέσω της πηγής. Σε μηχανήματα αυτού του τύπου, τα δεδομένα συλλέγονται από ανιχνευτές που συνήθως τοποθετούνται σε ένα κυκλικό τόξο. Εφόσον όλες οι ακτίνες περνάνε διαμέσου μιας θέσης πηγής, η γωνιακή παράμετρος είναι η γωνία, ϕ , ανάμεσα στη δοσμένη ακτίνα και τη κεντρική ακτίνα. Έστω ότι η πηγή βρίσκεται σε απόσταση D και η κεντρική ακτίνα βρίσκεται σε γωνία ψ από το θετικό x -άξονα. Η γωνιακή παράμετρο της γραμμής υπολογίζεται από

$$\theta = \psi + \phi - \frac{\pi}{2} \quad (3.2.1)$$

όπου οι θετικές γωνίες υπολογίζονται αριστερόστροφα.

3.3 Ανακατασκευή Αλγορίθμων Για Παράλληλη Δέσμη

Για να ορίσουμε τον συγκεκριμένο αλγόριθμο θεωρούμε ότι όλα τα δεδομένα τα υπολογίζουμε από ένα πεπερασμένο σύνολο γωνιών. Σε αυτή τη περίπτωση τα δεδομένα θα είναι

$$\{\mathcal{R}f(t, \omega(k\Delta\theta))\}$$

όπου $k = 0, \dots, M$, $t \in [-L, L]$ και $\Delta\theta = \frac{\pi}{M+1}$.

Με αυτά τα δεδομένα μπορούμε να εφαρμόσουμε το κεντρικό θεώρημα τομής για να υπολογίσουμε τα γωνιακά δείγματα από δισδιάστατο μετασχηματισμό Fourier της f ,

$$\hat{f}(\mathbf{r}\omega(k\Delta\theta)) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}f(\mathbf{t}, \omega(k\Delta\theta)) e^{-i\mathbf{r}\mathbf{t}} d\mathbf{t} \quad (3.3.1)$$

Η πολική συντεταγμένη μπορεί να είναι είτε θετική είτε αρνητική. Στη περίπτωση που $\mathbf{r} < 0$ τότε έχουμε

$$\hat{f}(\mathbf{r}\omega(\theta)) = \hat{f}(|\mathbf{r}|\omega(\theta + \pi)) \quad (3.3.2)$$

3.3.1 Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier Σε Παράλληλη Δέσμη

Γνωρίζουμε ότι ο τύπος του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier σε πολικές συντεταγμένες δίνεται από

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{[2\pi]^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \hat{f}(\mathbf{r}\omega) e^{i\mathbf{r}\langle(x,y),\omega\rangle} \mathbf{r} d\mathbf{r} d\omega \\ &= \frac{1}{[2\pi]^2} \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\mathbf{r}\omega) e^{i\mathbf{r}\langle(x,y),\omega\rangle} |\mathbf{r}| d\mathbf{r} d\omega \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Ο τύπος (3.3.3) μας παροτρύνει στη χρήση του τύπου δισδιάστατου αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier για την ανακατασκευή της f . Χρησιμοποιώντας το άθροισμα Riemann σε γωνιακή κατεύθυνση προκύπτει

$$f(x, y) \approx \frac{1}{4\pi(M+1)} \sum_{k=0}^M \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\mathbf{r}\omega(k\Delta\theta)) e^{i\mathbf{r}\langle(x,y),\omega(k\Delta\theta)\rangle} |\mathbf{r}| d\mathbf{r} \quad (3.3.4)$$

Οι πραγματικές τιμές είναι τα δείγματα $\{\mathcal{R}f(jd, \omega(k\Delta\theta))\}$ από $\{\mathcal{R}f(\mathbf{t}, \omega(k\Delta\theta))\}$. Εφόσον η απόσταση του δείγματος είναι d , το χρησιμοποιημένο εύρος του δείγματος των δεδομένων είναι $\frac{2\pi}{d}$. Αυτά τα δείγματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό προσεγγίσεων στα ακόλουθα δείγματα του μετασχηματισμού Fourier της f ,

$$\hat{f}(\mathbf{r}_j\omega(k\Delta\theta)), \mathbf{r}_j \in \{0, \pm\eta, \pm 2\eta, \dots, \pm N\eta\} \quad (3.3.5)$$

όπου $\eta = \frac{1}{N} \frac{\pi}{d} = \frac{\pi}{L}$.

3.3.2 Μετασχηματισμός Back-Projection Σε Παράλληλη Δέσμη

Χρησιμοποιώντας το κεντρικό θεώρημα τομής ο τύπος (3.3.3) γίνεται

$$f(x, y) = \frac{1}{[2\pi]^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{R}f(\mathbf{r}, \omega) |\mathbf{r}| e^{i\mathbf{r} \cdot (x, y, \omega)} d\mathbf{r} d\omega. \quad (3.3.6)$$

Θεωρώντας το \mathbf{r} ως γραμμικό αμετάβλητο φίλτρο που ενεργεί στη \mathbf{t} -μεταβλητή,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\mathcal{R}f)(\mathbf{t}, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{R}f(\mathbf{r}, \omega) |\mathbf{r}| e^{i\mathbf{r} \cdot \mathbf{t}} d\mathbf{r} \\ &= -i\mathcal{H}\partial_t \mathcal{R}f(\mathbf{t}, \omega) \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

οδηγούμαστε στο τύπο του φιλτραρισμένου Back-Projection

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \mathcal{G}(\mathcal{R}f)((x, y), \omega), \omega d\omega \quad (3.3.8)$$

Ο τύπος (3.3.8) προσεγγίζει τον αντίστροφο με διαφορετικό τρόπο. Ο μετασχηματισμός Radon αρχικά φιλτράρεται,

$$\mathcal{G}\mathcal{R}f(\mathbf{t}, \omega) = -i\mathcal{H}\partial_t \mathcal{R}f(\mathbf{t}, \omega),$$

και τότε ο Back-Projection βρίσκει την f στο (x, y) . Η σχέση $\mathcal{R}f \mapsto \mathcal{G}\mathcal{R}f$ είναι ένα μονοδιάστατο γραμμικό αμετάβλητο φίλτρο. Στο σαρωτή παράλληλης δέσμης, τα δεδομένα για δοσμένο ω που ορίζουν μόνο μια προβολή αποθηκεύονται με τη σειρά από τη πηγή-ανιχνευτή σε μια σταθερή θέση. Μόλις τα δεδομένα έχουν αποθηκευτεί, τότε αυτά μπορούν να φιλτραριστούν. Ένα μεγάλο μέρος της επεξεργασίας γίνεται από την στιγμή που όλα τα δεδομένα για μια τομή έχουν αποθηκευτεί. Υποθέτοντας, όπως πριν, ότι η δειγματοληψία πραγματοποιείται μόνο για καθορισμένη γωνιακή μεταβλητή, τότε τα δεδομένα που καθορίζονται για σαρωτή παράλληλης δέσμης θα είναι τα δείγματα

$$\{\mathcal{R}f(\mathbf{t}, \omega(k\Delta\theta)) : k = 0, \dots, M\}.$$

Σε αλγόριθμο φιλτραρισμένου Back-Projection, κάθε προβολή, $\mathcal{R}f(\mathbf{t}, \omega(k\Delta\theta))$, φιλτράρεται αμέσως αφού υπολογιστεί, δίνοντας $\mathcal{G}\mathcal{R}f(\mathbf{t}, \omega(k\Delta\theta))$. Όταν όλα τα δεδομένα έχουν αποθηκευτεί και φιλτραριστεί τότε η εικόνα κατά προσέγγιση ανακατασκευάζεται με τη χρήση του αθροίσματος Riemann κατά προσέγγιση στο Back-Projection:

$$\tilde{f}(x, y) = \frac{1}{2(M+1)} \sum_{k=0}^M \mathcal{GR}f(\langle(x, y), \omega(k\Delta\theta)\rangle, \omega(k\Delta\theta)) \quad (3.3.9)$$

Η χρησιμότητα αυτού του αλγορίθμου είναι να αποφασίσουμε πώς θα προσεγγίσουμε το φίλτρο \mathcal{G} στα δεδομένα που δειγματοποιούνται στα \mathbf{t} και ω .

Στις εφαρμογές η προσέγγιση προς τη συνάρτηση μεταφοράς της \mathcal{G} επιλέγεται να είναι μια προσέγγιση στο $|\mathbf{r}|$. Συμβολίζουμε ως $\hat{\phi}$ τη προσέγγιση της συνάρτησης μεταφοράς και ορίζουμε

$$\mathcal{Q}_\phi f(\mathbf{t}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathcal{R}}f(\mathbf{r}, \omega) \hat{\phi}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{r}\mathbf{t}} d\mathbf{r} \quad (3.3.10)$$

Προκειμένου το \mathcal{Q} να προσεγγίσει το \mathcal{G} , η διαφοροποίηση της συνάρτησης μεταφοράς $\hat{\phi}$ πρέπει να παρέχει 'προσέγγιση' στο $|\mathbf{r}|$ σε φραγμένο φορέα των δεδομένων. Με αυτό εννοούμε ότι αν, για παράδειγμα, η $|\mathbf{r}|$ είναι μια άρτια πραγματική τιμή τότε και η $\hat{\phi}$ είναι μια άρτια πραγματική συνάρτηση. Για να έχουμε σταθερό αλγόριθμο και όσο γίνεται να απομακρύνουμε το θόρυβο, είναι σημαντικό η $\hat{\phi}$ να τείνει στο μηδέν καθώς η $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$.

Όταν η ϕ επιλεγεί, τότε ο φιλτραρισμένος μετασχηματισμός Radon δίνεται από

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_\phi f(\mathbf{t}, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}f(s, \omega) \phi(\mathbf{t} - s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathcal{R}}f(\mathbf{r}, \omega) \hat{\phi}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{r}\mathbf{t}} d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

Άρα, για συγκεκριμένα δεδομένα η προσέγγιση της ανακατασκευής, ορισμένη ως ϕ , θα είναι

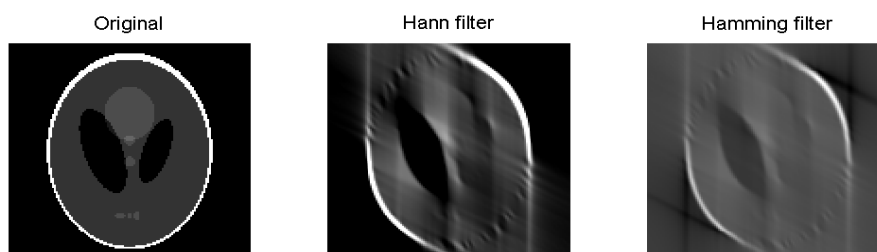
$$f_\phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \mathcal{Q}_\phi f(\langle(x, y), \omega\rangle, \omega) d\omega \quad (3.3.12)$$

Επομένως, επιλέγουμε μια συναρτησή ϕ τέτοια ώστε να βελτιώσουμε μερικά σημεία της ανακατασκευής. Δηλαδή, η εικόνα να είναι περισσότερο αποδοτική και με λιγότερο θόρυβο. Η συνάρτηση ϕ συχνά αναφέρεται ως *παράμετρος* η οποία μπορεί να προσαρμοστεί για συγκεκριμένους σκοπούς. Στη βιβλιογραφία της απεικόνισης, η $\hat{\phi}$ εκφράζεται ως γινόμενο

$$\hat{\phi}(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) |\mathbf{r}|.$$

Εδώ το A είναι μια συνάρτηση η οποία τείνει στο μηδέν καθώς $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$.

Οι παρακάτω εικόνες είναι ανακατασκευές του ειδώλου Shepp-Logan με φιλτραρισμένο Back- Projection για διαφορετικά A .



3.4 Ανακατασκευή Αλγορίθμων Για Αποκλίνουσα Δέσμη

Σ' αυτή τη παράγραφο θα ασχοληθούμε με την ανακατασκευή αλγορίθμων σε σαρωτή αποκλίνουσας δέσμης. Ο σαρωτής παράλληλης δέσμης αποτελείται από μετρήσεις του $\mathcal{R}f$ για μια οικογένεια παράλληλων γραμμών, και συνεπώς το κεντρικό θεώρημα τομής εφαρμόζεται για να δώσει μια προσέγγιση του μετασχηματισμού Fourier του συντελεστή απόσβεσης. Ενώ, ο σαρωτής αποκλίνουσας δέσμης αποτελείται από δείγματα του $\mathcal{R}f$ για μια οικογένεια γραμμών που διέρχονται από ένα σημείο, και έτσι το κεντρικό θεώρημα τομής δεν εφαρμόζεται άμεσα.

3.4.1 Γεωμετρία Αποκλίνουσας Δέσμης

Ως S δηλώνουμε το σημείο τομής των γραμμών από μια οπτική γωνία. Αυτό το S βρίσκεται σε απόσταση D από την αρχή των αξόνων. Η κεντρική ακτίνα, που προέρχεται από το σημείο S και περνά από το $(0, 0)$, δημιουργεί γωνία β με το θετικό άξονα y . Οι άλλες γραμμές που περνάνε διαμέσου του S σε γωνία γ , δημιουργούνται με την κεντρική ακτίνα. Αυτοί οι παράμετροι ορίζουν τις συντεταγμένες ενός υποσύνολου του χώρου των περιστρεφόμενων γραμμών. Συνδέονται με τις (t, θ) μεταβλητές από

$$\theta = \gamma + \beta$$

και

$$t = D \sin \gamma$$

(3.4.1)

Οι (β, γ) ονομάζονται *συντεταγμένες αποκλίνουσας δέσμης*.

Ο τύπος της κατά προσέγγιση ανακατασκευής που χρησιμοποιείται στο αλγόριθμο της αποκλίνουσας δέσμης είναι της μορφής,

$$f_\phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \int_{-L}^L \mathcal{R}f(t, \theta) \phi(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dx d\theta, \quad (3.4.2)$$

όπου ϕ η συνάρτηση φιλτραρίσματος που χρησιμοποιήσαμε στο σαρωτή παράλληλης δέσμης. Στο τύπο (3.4.2) οι διαφορετικές γραμμές κατά τη διαδικασία φιλτραρίσματος εξαρτιούνται μόνο από την απόσταση που έχουν από το σημείο (x, y) . Μπορούμε, επίσης, να χρησιμοποιήσουμε πολικές συντεταγμένες, το (\mathbf{r}, ϕ) ανήκει στο επίπεδο της ανακατασκευής, έτσι έχουμε

$$(x, y) = (r \cos \phi, r \sin \phi).$$

Στο σαρωτή αποκλίνουσας δέσμης θα ορίσουμε ως συνάρτηση φιλτραρίσματος την κ . Αυτή η συνάρτηση θα είναι ομαλή και θα αποσβένει στο άπειρο. Επομένως, σε πολικές συντεταγμένες, ο τύπος (3.4.2) γίνεται

$$f_\kappa(r, \phi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-L}^L \mathcal{R}f(t, \theta) \kappa(r \cos(\theta - \phi) - t) dt d\theta. \quad (3.4.3)$$

Χρησιμοποιούμε τη σχέση (3.4.1) για να βρούμε την f_κ σε συντεταγμένες αποκλίνουσας δέσμης. Συνεπώς, έχουμε

$$f_\kappa(r, \phi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\gamma_L}^{\gamma_L} \mathcal{R}f(D \sin \gamma, \beta + \gamma) \kappa(r \cos(\beta + \gamma - \phi) - D \sin \gamma) D \cos \gamma d\gamma d\beta. \quad (3.4.4)$$

Η συνάρτηση είναι φραγμένη σε δίσκο ακτίνας L . Τα όρια της ολοκλήρωσης, $\pm\gamma_L$, επιλέχθηκαν έτσι ώστε οι γραμμές, που αντιστοιχούν στις παράμετρους,

$$\{(\beta, \gamma) : \beta \in [0, 2\pi), -\gamma_L \leq \gamma \leq \gamma_L\}$$

να περιλαμβάνουν όλες τις τέμνουσες D_L . Η συνολική γωνία $2\gamma_L$ ονομάζεται *αποκλίνουσα γωνία*. Τα δεδομένα τα οποία αποθηκεύονται σε ένα μηχάνημα αποκλίνουσας δέσμης είναι μια προσέγγιση στο χώρο δειγμάτων των (β, γ) - συντεταγμένων. Θέτουμε

$$Pf(\beta, \gamma) = \mathcal{R}f(D \sin \gamma, \beta + \gamma),$$

τότε ο τύπος (3.4.4) γίνεται

$$f_\kappa(r, \phi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\gamma_L}^{\gamma_L} Pf(\beta, \gamma) \kappa(r \cos(\beta + \gamma - \phi) - D \sin \gamma) D \cos \gamma d\gamma d\beta.$$

Από τριγωνομετρική ταυτότητα έχουμε

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta),$$

τότε προκύπτει

$$r \cos(\beta + \gamma - \phi) - D \sin \gamma = r \cos(\beta - \phi) \cos \gamma - [r \sin(\beta - \phi) + D] \sin \gamma. \quad (3.4.5)$$

Έστω $l(r, \phi, \beta)$ είναι η απόσταση από το σημείο S στο σημείο (x, y) και έστω γ' η γωνία ανάμεσα στις ακτίνες \overline{SO} και $\overline{S(x, y)}$. Έχουμε

$$l \cos \gamma' = D + r \sin(\beta - \phi), \quad (3.4.6)$$

$$l \sin \gamma' = r \cos(\beta - \phi). \quad (3.4.7)$$

Άρα η απόσταση l και η γωνία γ' δίνονται από

$$l(r, \phi, \beta) = ([D + r \sin(\beta - \phi)]^2 + [r \cos(\beta - \phi)]^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\gamma'(r, \phi, \beta) = \tan^{-1} \frac{r \cos(\beta - \phi)}{D + r \sin(\beta - \phi)}.$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.4.5) και (3.4.7) έχουμε

$$r \cos(\beta + \gamma - \phi) - D \sin \gamma = l(r, \phi, \beta) \sin(\gamma'(r, \phi, \beta) - \gamma). \quad (3.4.8)$$

Συνεπώς, χρησιμοποιώντας όλες τις παραπάνω σχέσεις ο τύπος της f_κ γίνεται

$$f_\kappa(r, \phi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\gamma_L}^{\gamma_L} Pf(\beta, \gamma) \kappa(l(r, \phi, \beta) \sin(\gamma'(r, \phi, \beta) - \gamma)) D \cos \gamma d\gamma d\beta. \quad (3.4.9)$$

3.4.2 Μετασχηματισμός Back-Projection Σε Αποκλίνουσα Δέσμη

Θεωρούμε ότι ισχύει $\hat{\kappa}(\xi) \approx |\xi|$ για μικρές τιμές της $|\xi|$. Έστω χ_ϵ οικογένεια συναρτήσεων με φραγμένο φορέα τέτοια ώστε να ισχύει

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \chi_\epsilon = 1$$

για κάθε ξ .

Παρατηρώντας την σχέση (3.4.4) δείχνουμε ότι η ακριβής ανακατασκευή της συνάρτησης στο D_L λαμβάνεται ως το όριο

$$f(r, \phi) =$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\gamma_L}^{\gamma_L} Pf(\beta, \gamma) D \cos(\gamma) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{il \sin(\gamma' - \gamma)\xi} |\xi| \chi_\epsilon(\xi) d\xi \right] d\gamma d\beta.$$

Το β -ολοκληρώμα είναι ένα σταθμισμένος Back-Projection και αβλαβής. Στη συνέχεια θα αναλύσουμε τα γ και ξ ολοκληρώματα. Έστω $h(\gamma)$ φραγμένη συνάρτηση με φραγμένο φορέα και θετούμε

$$H(\gamma') = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \int_{-\gamma_L}^{\gamma_L} h(\gamma) D \cos(\gamma) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{il \sin(\gamma' - \gamma)\xi} |\xi| \chi_\epsilon(\xi) d\xi \right] d\gamma d\beta.$$

Αλλάζουμε τις συντεταγμένες του ξ -ολοκληρώματος, θέτοντας

$$\eta = \left[\frac{l \sin(\gamma' - \gamma)}{\gamma' - \gamma} \right] \xi.$$

Έτσι, προκύπτει

$$H(\gamma') = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \int_{-\gamma_L}^{\gamma_L} \int_{-\infty}^{\infty} h(\gamma) \left[\frac{\gamma' - \gamma}{l \sin(\gamma' - \gamma)} \right]^2 |\eta| \chi_\epsilon(\eta \left[\frac{\gamma' - \gamma}{l \sin(\gamma' - \gamma)} \right]) e^{i(\gamma' - \gamma)\eta} d\eta d\gamma.$$

Η συνάρτηση $h(\gamma)$ έχει φραγμένο φορέα, και επομένως η διάταξη του ολοκληρώματος μπορεί να εναλλαχθεί. Τότε έχουμε

$$H(\gamma') = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\gamma_L}^{\gamma_L} h(\gamma) \left[\frac{\gamma' - \gamma}{l \sin(\gamma' - \gamma)} \right]^2 |\eta| e^{i(\gamma' - \gamma)\eta} d\gamma d\eta.$$

Αυτός είναι ο ακριβής τύπος για τη διαδικασία του φιλτραρίσματος σε συντεταγμένες αποκλίνουσας δέσμης. Μια προσέγγιση αυτού του ολοκληρώματος, διαφορετική από (3.4.9), δίνεται από

$$H_\epsilon(\gamma') = \frac{1}{2} \int_{-\gamma_L}^{\gamma_L} h(\gamma) \left[\frac{\gamma' - \gamma}{l \sin(\gamma' - \gamma)} \right]^2 \kappa_\epsilon(\gamma' - \gamma) d\gamma,$$

όπου

$$\kappa_\epsilon(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\eta| \chi_\epsilon(\eta) e^{i\eta\gamma} d\eta.$$

Με αυτούς τους υπολογισμούς βρίσκουμε ότι μια προσέγγιση της $f(r, \phi)$ δίνεται από

$$f_\kappa(r, \phi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\gamma_L}^{\gamma_L} P f(\beta, \gamma) \left[\frac{\gamma' - \gamma}{l \sin(\gamma' - \gamma)} \right]^2 \kappa(\gamma' - \gamma) D \cos \gamma d\gamma d\beta,$$

όπου το κ έχει επιλεχθεί έτσι ώστε να ισχύει $\hat{\kappa}(\xi) \approx |\xi|$. Έπισης ο τύπος μπορεί να γραφτεί και ως

$$f_g(r, \phi) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{l^2(r, \phi, \beta)} \int_{-\gamma_L}^{\gamma_L} P f(\beta, \gamma) g(\gamma' - \gamma) D \cos \gamma d\gamma d\beta,$$

όπου

$$g(\gamma) = \frac{1}{2} \left[\frac{\gamma}{\sin \gamma} \right]^2 \kappa(\gamma).$$

Για να ερμηνεύσουμε αυτό το τύπο ως σταθμισμένο Back-Projection θέτουμε

$$Q(g)f(\beta, \gamma') = \int_{2\pi} P f(\beta, \gamma - \gamma') g(\gamma) d\gamma,$$

$$f_g(r, \phi) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{l^2(r, \phi, \beta)} Q_g f(\beta, \gamma') d\beta.$$

(3.4.10)

Σ' αυτή τη περίπτωση έχουμε

$$P' f(\beta, \gamma) = P f(\beta, \gamma) D \cos \gamma$$

και

$$\gamma'(r, \phi, \beta) = \tan^{-1} \left[\frac{r \cos(\beta - \phi)}{D + r \sin(\beta - \phi)} \right].$$

3.4.3 Εφαρμογή Αλγορίθμου Της Αποκλίνουσας Δέσμης

Χρησιμοποιώντας τους τύπους (3.4.10), μπορούμε να περιγράψουμε ένα αλγόριθμο για την ανακατασκευή εικόνας, καλά προσαρμοσμένη στη γεωμετρία του σαρωτή αποκλίνουσας δέσμης. Τα δεδομένα της αποκλίνουσας δέσμης είναι

$$Pf(\beta_j, n\alpha),$$

όπου

$$\beta_j = \frac{2\pi j}{M+1},$$

$$j = 0, \dots, M$$

και n ακέραιες τιμές. Η εικόνα, η οποία έχει ευρέως αξιοποιηθεί στο βιβλίο "Introduction to the Mathematics of Medical Imaging", Charles L. Epstein, ανακατασκευάζεται σε τρία βήματα.

- ΒΗΜΑ 1: Αντικαθιστούμε τις μετρήσεις με σταθμισμένες μετρήσεις, δηλαδή πολλαπλασιάζουμε με το $D \cos n\alpha$ για να πάρουμε

$$P'f(\beta_j, n\alpha) = Pf(\beta_j, n\alpha)D \cos n\alpha$$

- ΒΗΜΑ 2: Κάνουμε συνέλιξη των δεδομένων της σταθμισμένης προβολής $P'f(\beta_j, n\alpha)$ με $g(n\alpha)$ για να παράγουμε τη προβολή του φιλτραρίσματος:

$$Q_g \tilde{f}(\beta_j, n\alpha) = \alpha [P'f(\beta_j, \cdot) \star g](n\alpha),$$

όπου

$$g(n\alpha) = \frac{1}{2} \left(\frac{n\alpha}{\sin n\alpha} \right)^2 \kappa(n\alpha)$$

Η συνάρτηση φιλτραρίσματος κ επιλέχθηκε σύμφωνα με τα κριτήρια που χρησιμοποιήσαμε για την επιλογή της ϕ στη περίπτωση της παράλληλης δέσμης. Δηλαδή, πρέπει να είναι πραγματική, άρτια και να αποσβένει στο άπειρο. Επίσης, για κάθε ξ ισχύει $\hat{\kappa}(\xi) \approx |\xi|$.

- ΒΗΜΑ 3: Παρουσιάζουμε ένα σταθμισμένο Back-Projection για κάθε προβολή φιλτραρίσματος:

$$\tilde{f}_g(x_m, y_l) \approx \Delta\beta \sum_{k=0}^M \frac{1}{r^2(x_m, y_l, \beta_k)} Q_g f(\beta_k, \gamma'(x_m, y_l, \beta_k)).$$

3.4.4 Επεξεργασία Δεδομένων Για Σαρωτή Αποκλίνουσας Δέσμης

Από τον ορισμό του αλγορίθμου έχουμε ότι τα δεδομένα αποθηκεύονται για $\beta \in [0, 2\pi)$. Αυτό σημαίνει ότι κάθε προβολή υπολογίζεται δύο φορές, όπως τα δύο ζεύγη των συντεταγμένων της αποκλίνουσας δέσμης (β_1, γ_1) και (β_2, γ_2) που ορίζονται στην ίδια γραμμή αν και μόνο αν

$$\gamma_1 = -\gamma_2,$$

$$\beta_1 - \gamma_1 = \beta_2 - \gamma_2 + \pi \Rightarrow \beta_1 = \beta_2 + 2\gamma_1 + \pi$$

(3.4.11)

Σ' ένα μηχάνημα παράλληλης δέσμης αρκεί να αποθηκευτούν τα δεδομένα για $\theta \in [0, \pi)$, έτσι ομοίως έχουμε ότι και για ένα μηχάνημα αποκλίνουσας δέσμης δε χρειάζεται να έχουμε μετρήσεις για όλα τα $\beta \in [0, 2\pi)$.

Ο μετασχηματισμός Radon ικανοποιεί

$$\mathcal{R}f(t, \theta) = \mathcal{R}f(-t, \pi + \theta).$$

Σε συντεταγμένες αποκλίνουσας δέσμης αυτό είναι ισοδύναμο με

$$Pf(\beta, \gamma) = Pf(\beta + 2\gamma + \pi, -\gamma).$$

3.5 Εφαρμογή Σπειροειδούς Σαρωτή Στην Τομογραφία

Όλα τα μηχανήματα αξονικής τομογραφίας δεύτερης, τρίτης, τέταρτης γενιάς αποθηκεύουν τα δεδομένα μιας τομής σε μια στιγμή. Γι' αυτό το λόγο μπορούμε να αγνοήσουμε τη x_3 -μεταβλητή και να ανακατασκευάσουμε κάθε δισδιάστατη τομή ξεχωριστά. Στις αρχές του 1990 μια νέα κατασκευή εισήχθη, που λέγεται σπειροειδής ή ελικοειδής σαρωτής CT. Τα πιο σύγχρονα νοσοκομεία χρησιμοποιούν σήμερα σπειροειδή σαρωτή CT.

3.5.1 Μέθοδος Παρεμβολής

Η πηγή ακτίνας X και οι ανιχνευτές τοποθετούνται σε μια εξέδρα η οποία περιστρέφεται σε ένα επίπεδο που ονομάζεται *επίπεδο τομής P*. Ο ασθενής τοποθετείται σ' ένα επίπεδο σε ορθές γωνίες προς το επίπεδο τομής. Με ένα συμβατό σαρωτή, τα δεδομένα μιας τομής υπολογίζονται με το επίπεδο να παραμένει σταθερό και η πηγή-ανιχνευτής της εξέδρας να

περιστρέφεται.

Έστω $P(\beta, \gamma, z')$ η προβολή αποκλίνουσας δέσμης των δεδομένων για τη τομή με $x_3 = z'$. Μόλις αυτά τα δεδομένα αποθηκευτούν τότε η πηγή-ανιχνευτής της εξέδρας σταματάει και έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε την $P(\beta, \gamma, z' + \Delta z)$ όπου Δz είναι μια σταθερή τιμή που είναι κάθετη στο P . Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται τόσες φορές όσες χρειάζεται για να αποθηκευτούν όλες οι απαιτούμενες τομές, δίνοντας το σύνολο δεδομένων

$$\mathcal{D}_{third} = \{P(\beta, \gamma, z' + m\Delta z) : \beta \in [0, 2\pi), -\gamma_L \leq \gamma \leq \gamma_L, m = 1, 2, \dots, M\}$$

Για κάθε τιμή m , τα δείγματα $P(\beta, \gamma, z' + m\Delta z)$ μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να ανακατασκευάσουμε μια προσέγγιση της τομής $\mu(x, y, z' + m\Delta z)$. Εξαιτίας του ξεκινήματος και της παύσης της περιστροφής της εξέδρας και της μετακίνησης του ασθενή στο επίπεδο, η μέθοδος αποθήκευσης των δεδομένων είναι αργή. Η μετακίνηση του ασθενή αποτελεί ένα σημαντικό πρόβλημα σε εφαρμογές αξονικών τομογραφιών των ακτίνων X. Επομένως, για να περιορίσουμε όσο γίνεται αυτή τη συνέπεια, είναι απαραίτητο να βρούμε ταχύτερες μεθόδους για την απόκτηση δεδομένων.

Μια μέθοδος είναι ο σπειροειδής σαρωτής CT, που έχει ευρέως αξιοποιηθεί στο βιβλίο "Introduction to the Mathematics of Medical Imaging", Charles L. Epstein. Σύμφωνα με αυτή την μέθοδο, η πηγή-ανιχνευτής της εξέδρας περιστρέφεται συνεχώς ενώ ο ασθενής συνεχώς έλκεται διαμέσου του δακτυλίου πηγή-ανιχνευτής. Το μοντέλο το οποίο υπολογίζεται είναι το σύνολο των προβολών

$$\mathcal{D}_{spiral} = \{P(\beta, \gamma, z(\beta)) : \beta \in [\beta_{min}, \beta_{max}], -\gamma_L \leq \gamma \leq \gamma_L\}$$

Εδώ το β είναι ένας πραγματικός αριθμός χωρίς να περιορίζεται στο $[0, 2\pi)$, και η συνάρτηση $z(\beta)$ είναι η x_3 -συντεταγμένη του επιπέδου τομής όταν η πηγή έχει περιστραφεί μέσω της γωνίας β . Συνήθως, το επίπεδο μετακινείται με μια σταθερή ταχύτητα έτσι ώστε να ισχύει $z(\beta) = c\beta + z'$. Από την πλευρά του ασθενούς πάνω στο επίπεδο, η πηγή ανιχνεύει ένα σπειροειδές σε τρισδιάστατο χώρο

$$\{(D \cos \beta, D \sin \beta, z(\beta)) : \beta \in [-\beta_{min}, \beta_{max}]\}$$

Υπό την έννοια των μαθηματικών, το σύνολο δεδομένων \mathcal{D}_{spiral} δεν αρκεί για να ανακατασκευάσουμε μια ενιαία δισδιάστατη τομή της μ και αυτό γιατί είναι μια συνάρτηση δύο μόνο μεταβλητών. Ωστόσο, χρησιμοποιώντας την παρεμβολή, μπορούμε να προσεγγίσουμε δεδομένα της τομής για μια ενιαία τομή και να χρησιμοποιήσουμε αλγόριθμους ανακατασκευής (που αναπτύξαμε στις παραγράφους (3.3) και (3.4)) για να βρούμε μια προσέγγιση για $\mu(x, y, z)$. Υπάρχουν πολλοί τρόποι για να ορίσουμε τη παρεμβολή δεδομένων, P_{interp} , από τις μετρήσεις που έγιναν σε μηχανήμα σπειροειδούς σαρωτή. Θεωρούμε ότι το επίπεδο κινείται με μια σταθερή γραμμική ταχύτητα και η εξέδρα περιστρέφεται με μια σταθερή γωνιακή ταχύτητα τέτοια ώστε

$$\partial_\beta z = c$$

Η πιο απλή προσέγγιση είναι να προσομοιώσουμε τα δεδομένα για ένα κομμάτι τομής στο οποίο το β κυμαίνεται μέσω 2π ακτίνων χρησιμοποιώντας μετρήσεις για β που κυμαίνεται μέσω 4π ακτίνων. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να προσομοιώσουμε δεδομένα αποκλίνουσας δέσμης για τομή όπου

$$x_3 = z_0 = z(\beta_0).$$

Χρησιμοποιούμε τις μετρήσεις

$$\{P(\beta, \gamma, z_0 + c(\beta - \beta_0)) : \beta \in [\beta_0 - 2\pi, \beta_0 + 2\pi], -\gamma_L \leq \gamma \leq \gamma_L\}$$

για να δημιουργήσουμε το σύνολο δεδομένων της παρεμβολής

$$\{P_{intrap}(\beta, \gamma, z_0) : \beta \in [\beta_0, \beta_0 + 2\pi], -\gamma_L \leq \gamma \leq \gamma_L\}.$$

Αυτό θα μπορούσε να επιτευχθεί, χρησιμοποιώντας γραμμική παρεμβολή, θέτοντας

$$P_{intrap}(\beta, \gamma, z_0) = \left(\frac{\beta - \beta_0}{2\pi}\right)P(\beta, \gamma, z_0 + c(\beta - \beta_0)) + \quad (3.5.1)$$

$$\left(\frac{2\pi + \beta_0 - \beta}{2\pi}\right)P(\beta - 2\pi, \gamma, z_0 + c(\beta - 2\pi - \beta_0)),$$

για $\beta \in [\beta_0, \beta_0 + 2\pi]$. Ο αλγόριθμος για το μετασχηματισμό Back-Projection της αποκλίνουσας δέσμης μπορεί να εφαρμοστεί στο $P(\beta, \gamma, z_0)$ για να βρούμε μια προσέγγιση ανακατασκευής για $\mu(x, y, z_0)$.

Αυτή, όμως, η προσέγγιση έχει μερικά προβλήματα. Το πιο προφανές είναι ότι τα δεδομένα της παρεμβολής είναι ασυνεπείς. Αυτό είναι αναπόφευκτο, επειδή για κάθε τιμή της β , τα δεδομένα της προβολής βρίσκονται από διαφορετική συνάρτηση. Αυτό το πρόβλημα είναι περισσότερο σαφές στη πρώτη και τελευταία σάρωση: Το σχήμα της παρεμβολής καθορίζει

$$P_{intrap}(\beta_0, \gamma, z_0) = P(\beta_0 - 2\pi, \gamma, z_0 - 2\pi c),$$

$$P_{intrap}(\beta_0 + 2\pi, \gamma, z_0) = P(\beta_0, \gamma, z_0).$$

(3.5.2)

Αυτές οι δύο συναρτήσεις είναι διαφορετικές, ενώ αν τα δεδομένα προβολής ήταν από την ίδια συνάρτηση τότε αυτές θα ήταν ίδιες. Άλλο πρόβλημα είναι ότι η ανακολουθία σε δεδομένα παράγει αντικείμενα μέσα στις ανακατασκευασμένες εικόνες οι οποίες εμφανίζονται ως ραμβώσεις. Η σοβαρότητα αυτού του προβλήματος είναι ανάλογη με το c :

όσο πιο γρήγορα κινείται το επίπεδο, τόσο πιο πολύ ποικίλλουν οι μεμονωμένες μετρήσεις.

Αν το επίπεδο είναι σταθερό κατά την διάρκεια της απόκτησης της τομής, τότε το πάχος της τομής, $2\Delta mm$, καθορίζεται από το πάχος της δέσμης της ακτίνας X και από το μέγεθος του ανιχνευτή. Για ένα μηχάνημα σπειροειδούς σαρωτή, η τομή εξαρτάται από το πάχος της δέσμης, το σχέδιο της παρεμβολής και από μια νέα παράμετρο η οποία ονομάζεται κλίση. Αν το επίπεδο κινείται με σταθερή ταχύτητα $u \frac{mm}{s}$ και ο χρόνος περιστροφής της εξέδρας είναι ρ seconds, τότε η κλίση είναι αδιάστατος αριθμός που ορίζεται από

$$p = \frac{u}{2\Delta} \times \rho.$$

Αυτό είναι το πολλαπλάσιο του πάχους της τομής με την προϋπόθεση ότι η πηγή κάνει μια πλήρη περιστροφή της εξέδρας. Αν η κλίση είναι μικρότερη από 1, τότε η ανατομία που εμπλέκεται με την μέτρηση στο β επικαλύπτει την μέτρηση στο $\beta + 2\pi$. Αν η κλίση είναι μεγαλύτερη από 1, τότε αυτές οι πλάκες δεν συμπίπτουν. Μια μικρή κλίση οδηγεί σε λιγότερη ασυνέπεια στα δεδομένα και λιγότερη αποτελεσματικότητα στην τομή. Αυτό επίσης αυξάνει το χρόνο που απαιτείται για να σαρώσουμε μια μεγάλη περιοχή. Αλλά υπάρχουν συμβιβασμοί μεταξύ του χρόνου σάρωσης, πάχος τομής και της συνέπειας των δεδομένων.

Όσο αφορά τους αλγόριθμους της αποκλίνουσας δέσμης, εξαιτίας της συμμετρίας του μετασχηματισμού Radon οι μετρήσεις της $P(\beta, \gamma, z_0)$ για β που κυμαίνονται από β_0 έως $\beta_0 + \pi + 2\gamma_L$ είναι ικανοποιητικές για να εφαρμοστούν στον αλγόριθμο του μετασχηματισμού Back-Projection για την αποκλίνουσα δέσμη. Χρησιμοποιώντας αυτό το γεγονός, τα σχήματα της παρεμβολής που χρησιμοποιούνται στις μετρήσεις του σπειροειδούς σαρωτή για β κυμαίνονται σε διάστημα μήκους $2(\pi + 2\gamma_L)$.

3.5.2 Τύπος 3D-Ανακατασκευής

Οι μέθοδοι παρεμβολής που περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο αφορούν σπειροειδή σαρωτή που προσομοιώνει συμβατά δεδομένα σάρωσης. Όμως, υπάρχουν μεθόδους οι οποίες χρησιμοποιούν τρισδιάστατο σύνολο δεδομένων άμεσα για να ανακατασκευάσουν μια εικόνα. Αυτή η προσέγγιση απαιτεί διαφορετικούς αλγόριθμους ανακατασκευής. Για κάθε θέση της πηγή-ανιχνευτής της εξέδρας τα μηχανήματα σάρωσης επεξεργάζονται δείγματα των γραμμών ολοκληρωμάτων μ για γραμμές που βρίσκονται σε μια δισδιάστατη οικογένεια, αυτή ονομάζεται κωνική δέσμη δεδομένων.

Ο μετασχηματισμός της κωνικής δέσμης είναι μια απεικόνιση από συναρτήσεις που ανήκουν στο \mathbb{R}^3 σε συναρτήσεις που ανήκουν στο $\mathbb{R}^3 \times S^2$ και ορίζεται από το ολοκλήρωμα:

$$Df(\mathbf{y}, \theta) = \int_0^\infty f(\mathbf{y} + \mathbf{t}\theta) dt \quad (3.5.3)$$

Το όρια του ολοκληρώματος είναι 0 και ∞ . Επειδή η πηγή της ακτίνας X βρίσκεται έξω από το αντικείμενο που απεικονίζεται, τα δεδομένα που αποθηκεύονται σε κάθε μηχανήμα ακτίνας X μπορούν να μοντελοποιηθούν ως δείγματα του μετασχηματισμού κωνικής δέσμης, με σημεία πηγής \mathbf{y} που βρίσκονται κατά μήκος μιας καμπύλης στο \mathbb{R}^3 . Σ' αυτή τη παράγραφο θα ασχοληθούμε με την περίπτωση που η πηγή κινείται κατά μήκος ενός έλικα που περιστρέφεται γύρω από το αντικείμενο που απεικονίζεται.

Αν θ και ω είναι ορθογώνια μοναδιαία διανύσματα τότε ορίζουμε

$$\nabla_{\theta} Df(\mathbf{y}, \omega) = \partial_t Df(\mathbf{y}, t\theta + \sqrt{1-t^2}\omega) \Big|_{t=0}. \quad (3.5.4)$$

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ

Ο 3D μετασχηματισμός Radon της f είναι η συνάρτηση στο $\mathbb{R} \times S^2$ που ορίζεται από

$$\mathcal{R}f(\mathbf{s}, \omega) = \int_{\{\mathbf{x}:\mathbf{x}\cdot\omega=\mathbf{s}\}} f(\mathbf{x}) dA. \quad (3.5.5)$$

Σημαντικό για το τύπο της 3D ανακατασκευής είναι το θεώρημα Grangeat.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.5.1 (ΤΥΠΟΣ GRANGEAT)

Αν f είναι μια συμπαγής συνάρτηση στο \mathbb{R}^3 και το $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ ικανοποιεί τη σχέση $\mathbf{y} \cdot \theta$, τότε

$$\partial_s \mathcal{R}f(\mathbf{s}, \theta) = \int_{\theta^\perp \cap S^2} \nabla_{\theta} Df(\mathbf{y}, \omega) d\omega. \quad (3.5.6)$$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Ο σπειροειδής σαρωτής δίνει καλύτερα αποτελέσματα από τους σαρωτές παράλληλης και αποκλίνουσας δέσμης. Εξάλλου, πραγματοποιείται μεγάλη έρευνα στις μεθόδους ανακατασκευής ενός αντικειμένου έτσι ώστε να είναι ταχύτερες και με λιγότερα δεδομένα. Η βάση αυτών των μεθόδων είναι οι μετασχηματισμοί Fourier και Radon.

Βιβλιογραφία

- [1] Ronald N. Bracewell, *The Fourier Transform and Its Applications*, 2nd revised edition, McGraw-Hill, New York, 1986.
- [2] Richard Courant and David Hilbert, *Methods of Mathematical Physics, I and II*, Wiley, New York, 1953.
- [3] John D' Angelo and Douglas West, *Matheamtical Thinking, Problem-Solving and Proofs*, 2nd ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ,2000.
- [4] Yu. L. Ershov, S. S. Goncharov, A. Nerode, J. B. Remmel, and V. W. Marek, *Handbook of Recursive Mathematics, vol. 2 of Recursive Algebra, Analysis and Combinatorics*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 138, North Holland, Amsterdam, 1998.
- [5] I. M. Gelfand, M.I. Graev, and N. Ya. Vilenkin, *Generalized Functions, vol. 5. Integral Geometry and representation Theory. translated from the Russian by Eugene Saletan*, Academic Press, New York-London, 1970.
- [6] Gabor T. Herman, *Image Reconstruction From Projections*, Academic Press, New York, 1980.
- [7] A. Katsevich, *An improved exact filtered backprojection algorithm for spiral computed tomography*, Advances in Applied Mathematics 32(2004), 681-697.
- [8] Joseph B. Keller, *Inverse problems*, American Math. Monthly 83 (1976), 107-118.
- [9] R. M. Lewitt, *Reconstruction algorithms: Transform methods*, Proceedings of the IEEE 71 (1983), no. 3, 390-408.
- [10] Program Matlab, *R2008α*, 2008.