ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

Δ.Π.Μ.Σ. «ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ»

<u>ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ</u>

Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΗΣ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ ΣΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΤΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗΣ ΚΑΙ ΑΠΩΛΕΙΩΝ ΤΩΝ ΚΟΚΚΩΔΩΝ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

ΜΑΡΙΟΣ Γ. ΦΟΥΡΛΑΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

ΑΙΜΙΛΙΟΣ ΣΙΔΕΡΙΔΗΣ

ΕΠΙΚΟΥΡΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Ε.Μ.Π

ΑΘΗΝΑ 2013

Ευχαριστίες

Στην εκπόνηση αυτής της μεταπτυχιακής εργασίας, η οποία συντάχθηκε στο πλαίσιο των μεταπτυχιακών σπουδών μου στη Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, στο Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών «Εφαρμοσμένη Μηχανική», είχα τη βοήθεια και τη συμπαράσταση ορισμένων ανθρώπων, τους οποίους θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά, τον καθένα ξεχωριστά.

Τον Επίκουρο Καθηγητή του ΕΜΠ, κύριο Σιδερίδη Αιμίλιο, για την ανάθεση της μεταπτυχιακής εργασίας, την αμέριστη συμπαράσταση, την πολύτιμη επιστημονική βοήθεια και τις χρήσιμες συμβουλές που έπαιξαν σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη της εργασίας αφενός αλλά και στην αποκόμιση γνώσεων στο ερευνητικό πεδίο των σύνθετων υλικών.

Τον συνάδελφο, συνοδοιπόρο και φίλο Ζάρπα Ηλία, για την άψογη συνεργασία, τη συμπαράσταση και την πολύτιμη βοήθεια που μου παρείχε καθ’ όλη τη διάρκεια εκπόνησης της παρούσας εργασίας.

Τέλος, την οικογένεια μου, για την αμέριστη συμπαράσταση και εμψύχωση σε όλο το διάστημα των μεταπτυχιακών μου σπουδών.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή – Σκοπός – Δομή Εργασίας

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Σύνθετα υλικά – Κοκκώδη υλικά

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Μηχανικές ιδιότητες σύνθετων υλικών

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Θεωρία Ενδιάμεσης φάσης

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Γεωμετρική μοντελοποίηση της κατανομής των εγκλεισμάτων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Ανάπτυξη μοντέλων ενδιάμεσης φάσης

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Προσεγγιστικός υπολογισμός του μέτρου ελαστικότητας

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Δυναμικό μέτρο ελαστικότητας

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

Σχολιασμός - Συμπεράσματα

Περίληψη

Ένα από τα σύγχρονα πεδία εφαρμογής της Μηχανικής είναι ως γνωστόν η μελέτη των σύνθετων υλικών, τα οποία βρίσκονται σε συνεχή εξέλιξη τα τελευταία χρόνια. Σε αυτή την κατηγορία υλικών ανήκουν τα κοκκώδη υλικά, των οποίων οι μηχανικές ιδιότητες επηρεάζονται από την πρόσφυση των εγκλεισμάτων και της μήτρας καθώς επίσης και την επίδραση των γειτονικών εγκλεισμάτων.

Σκοπός αυτής της μεταπτυχιακής εργασίας, είναι η ανάπτυξη ενός θεωρητικού μοντέλου ενδιάμεσης φάσης, η οποία δημιουργείται μεταξύ της μήτρας εποξειδικής ρητίνης και των εγκλεισμάτων, βασίζεται στη θεωρία ελαστικότητας και μπορεί να προσδιορίσει προσεγγιστικά τα στατικά μέτρα ελαστικότητας, καθώς και τα δυναμικά μετρά ελαστικότητας ενός σύνθετου κοκκώδους υλικού λαμβάνοντας υπόψη την περιεκτικότητα των εγκλεισμάτων κόκκου σιδήρου.

Το μοντέλο που αναπτύσσουμε προκύπτει από τη θεώρηση της κυβικής διάταξης των εγκλεισμάτων στο χώρο και στη συνέχεια με τη θεώρηση της ενδιάμεσης φάσης μεταξύ των εγκλεισμάτων και της μήτρας, το εξελίσσει σε ένα επταφασικό μοντέλο.

Χρησιμοποιώντας αυτό το επταφασικό μοντέλο και με τη βοήθεια της θεωρίας ελαστικότητας βρέθηκαν οι προσεγγιστικές εκφράσεις για τα στατικά μέτρα ελαστικότητας (μέτρο ελαστικότητας E, λόγος Poisson ν) του σύνθετου υλικού. Στην συνέχεια με τη χρήση της αρχής της αντιστοιχίας υπολογίσθηκαν τα δυναμικά μέτρα ελαστικότητας (μέτρο αποθήκευσης E'_c και μέτρο απωλειών E''_c). Οι θεωρητικές τιμές που προέκυψαν από τη θεωρητική ανάλυση συγκρίθηκαν με τις τιμές άλλων ερευνητών και με πειραματικά αποτελέσματα που ελήφθησαν από στατικά πειράματα εφελκυσμού και από πειράματα ταλαντώσεων σε διαφορετικές συχνότητες και σε συνθήκες περιβάλλοντος, από δοκίμια που αποτελούνται από κόκκους σιδήρου και εποξειδική ρητίνη.

Abstract

The study of composite materials is known as one of the most modern scopes of Engineering, which are in constant evolution in recent years. In this class of materials belong the granular materials, whose mechanical properties are affected by the adhesion between the inclusions and the matrix as well as the influence of adjacent inclusions.

Purpose of this thesis is to develop a theoretical model of interphase, which is created between the epoxy resin matrix and inclusions, based on the theory of elasticity and can determine approximately the static elastic moduli and dynamic elastic moduli of a composite granular material, considering the content of inclusions of iron grain.

The model we develop arises from viewing the cubic arrangement of inclusions in space and then, by the consideration of interphase between inclusions and matrix, evolves in a model which consists of seven phases.

Considering this model and using the theory of elasticity, the approximate expressions for the static elastic moduli (E-modulus, ratio Poisson v) of the composite were found. Then, using the correspondence principle, dynamic elastic moduli were calculated (storage modulus E'c and loss modulus E"c). The theoretical values obtained from the theoretical analysis were compared with those of other researchers and experimental results, which were obtained from static tensile tests and experiments in different oscillation frequencies and environmental conditions from specimens consisting of iron particles and epoxy resin.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή – Σκοπός – Δομή Εργασίας

1.1 Εισαγωγή

Ο όρος σύνθετο υλικό απλοϊκά σημαίνει ότι δύο ή περισσότερα υλικά συνδυαζόμενα μακροσκοπικά μπορούν να σχηματίσουν ένα νέο υλικό που συνήθως παρουσιάζει καλύτερες ιδιότητες από εκείνες των αρχικών υλικών και που συχνά ακόμη μπορεί να εμφανίζει και ιδιότητες τις οποίες κανένα από τα αρχικά υλικά δεν διέθετε.

Με βάση αυτό τον απλό ορισμό, μπορούμε να πούμε ότι ο άνθρωπος επινόησε και χρησιμοποίησε σύνθετα υλικά από τα πολύ παλιά χρόνια. Έτσι οι Εβραίοι χρησιμοποίησαν το άχυρο για να δώσουν μεγαλύτερη αντοχή στα λασπότουβλα. Οι Αιγύπτιοι χρησιμοποίησαν ένα είδος «κόντρα πλακέ» όταν κατάλαβαν ότι στρώματα ξύλου μπορούν να συνδυασθούν κατάλληλα ώστε να παρουσιάσουν ικανοποιητική αντοχή σε διάφορες κατευθύνσεις και να είναι ανθεκτικά στην διόγκωση και στη στρέβλωση που προκαλείται από την υγρασία. Επίσης στην Αίγυπτο και στην Μεσοποταμία εμφανίσθηκαν σχεδίες από καλάμι παπύρου «δεμένο» με άσφαλτο. Οι Ασσύριοι έφτιαξαν πλωτές γέφυρες με σανίδες εμποτισμένες με αδιάβροχη άσφαλτο. Στον Μεσαίωνα κατασκευάσθηκαν σπαθιά, ασπίδες και θώρακες από συνδυασμούς στρωμάτων διαφόρων μετάλλων και πιο πρόσφατα ινώδη σύνθετα υλικά, που έχουν μεγάλους λόγους αντοχής ανά βάρους και ακαμψίας ανά βάρους, χρησιμοποιήθηκαν σε κατασκευές στις οποίες το μικρό βάρος αποτελεί σημαντικό παράγοντα, όπως π.χ. σε αεροσκάφη και διαστημόπλοια.

Τα όσα αναφέρθηκαν παραπάνω μας δείχνουν ότι ο άνθρωπος από τα πρώτα βήματα της ζωής του είχε «διαισθανθεί» ότι συνδυάζοντας δύο ή περισσότερα υλικά μπορούσε να κατασκευάσει ένα τρίτο «σύνθετο υλικό», που ικανοποιούσε καλύτερα τις κατασκευαστικές του ανάγκες.

Η πορεία εξέλιξης των συνθέτων υλικών δεν παρουσιάζει την ίδια ταχύτητα διά μέσου των αιώνων. Μέχρι τον 19ο αιώνα μ.Χ. η εξέλιξη αυτή είναι πολύ μικρή και τα σύνθετα υλικά του 19ου αιώνα δεν απέχουν και πάρα πολύ από αυτά των αρχαίων Αιγυπτίων, Ελλήνων κ.λ.π. ούτε σε ποιότητα, ούτε σε μεθόδους κατασκευής. Η πραγματικά αλματώδης εξέλιξη των σύνθετων υλικών σημειώνεται τον 20ο αιώνα και θα μπορούσαμε να πούμε τα τελευταία 30 χρόνια και είναι συνέπεια μιας άλλης σημαντικής εξέλιξης: της εξέλιξης της επιστήμης των γιγαντιαίων μορίων των πολυμερών.

1.2 Σκοπός

Σκοπός της παρούσας εργασίας, είναι η ανάπτυξη ενός μοντέλου που βασίζεται στην θεωρία ελαστικότητας και μπορεί να προσδιορίσει προσεγγιστικά το μέτρο ελαστικότητας, τον λόγο Poisson και τα δυναμικά μετρά ελαστικότητας (αποθήκευσης και απωλειών) ενός σύνθετου κοκκώδους υλικού λαμβάνοντας υπόψη την περιεκτικότητα των εγκλεισμάτων κόκκου σιδήρου, καθώς επίσης και την ανάπτυξη της ενδιάμεσου φάσης που δημιουργείται μεταξύ της μήτρας εποξειδικής ρητίνης και των εγκλεισμάτων.

1.3 Δομή Εργασίας

Περιληπτικά το περιεχόμενο της μεταπτυχιακής εργασίας ανά κεφάλαιο είναι το ακόλουθο:

- Το πρώτο κεφάλαιο αποτελεί την εισαγωγή της μεταπτυχιακής εργασίας, παρουσιάζοντας τον σκοπό και την δομή της.
- Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται μια σύντομη παρουσίαση των σύνθετων υλικών.
- Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι μηχανικές ιδιότητες των σύνθετων υλικών.
- Στο τέταρτο κεφάλαιο περιγράφεται η ενδιάμεση φάση των σύνθετων υλικών καθώς επίσης τα υλικά, η πειραματική διαδικασία και ο προσδιορισμός της ειδικής θερμοκρασίας.
- Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η γεωμετρική μοντελοποίηση της κατανομής την εγκλεισμάτων στο σώμα της μήτρας.

- Στο έκτο κεφάλαιο υπολογίζουμε τις ακτίνες και τις κατ' όγκο περιεκτικότητες των φάσεων. Επίσης ανάπτυσσουμε τα μοντέλα υπολογισμού του μέτρου ελαστικότητας και του λόγου Poisson για κάθε ενδιάμεση φάση.
- Στο έβδομο κεφάλαιο υπολογίζεται με προσεγγιστικό τρόπο το μέτρο ελαστικότητας και ο λόγος Poisson του σύνθετου υλικού.
- Στο όγδοο κεφάλαιο γίνεται η παρουσίαση και ο υπολογισμός των δυναμικών μέτρων αποθήκευσης και απωλειών .
- Τέλος, στο ένατο κεφάλαιο γίνεται ο σχολιασμός των αποτελεσμάτων και δίνονται τα τελικά μας συμπεράσματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Σύνθετα Υλικά – Κοκκώδη Υλικά

2.1 Σύνθετα Υλικά

Οι ολοένα αυξανόμενες απαιτήσεις για ανθεκτικότερες και ελαφρότερες κατασκευές οδήγησαν στην ανάπτυξη νέων υλικών. Η αύξηση της αντοχής και η ταυτόχρονη μείωση του βάρους έχουν σαν τελικό αποτέλεσμα την εξοικονόμηση της ενέργειας. Έτσι, το χαρακτηριστικό μέγεθος των νέων υλικών είναι οι υψηλές, σε σχέση με τα παραδοσιακά υλικά, τιμές του λόγου αντοχή ανά βάρος. Τα νέα υλικά βρίσκουν εφαρμογή σε ένα πλήθος κατασκευαστικών κλάδων, όπως η αυτοκινητοβιομηχανία, η αεροδιαστημική καθώς επίσης και οι βιομηχανίες παραγωγής προϊόντων καθημερινής χρήσης. Στην κατηγορία των νέων αυτών υλικών με τις παραπάνω απαιτήσεις συγκαταλέγονται κυρίως τα **σύνθετα υλικά,** τα οποία ήδη παρουσιάζουν ευρύτατη εφαρμογή σε πολλούς κατασκευαστικούς τομείς.

Η βασική ιδέα της ανάπτυξης ενός σύνθετου υλικού είναι η ανάμιξη σε μακροσκοπική κλίμακα δύο ή περισσότερων υλικών και η δημιουργία ενός νέου υλικού με τελικές ιδιότητες διαφορετικές από τις αντίστοιχες των υλικών που το αποτελούν. Με την κατάλληλη επιλογή των αρχικών υλικών καθώς και της τεχνικής ανάμιξής τους μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα σύνθετο υλικό με τις επιθυμητές ιδιότητες.

Τα σύνθετα υλικά χαρακτηρίζονται από τη συνύπαρξη δυο τουλάχιστον μακροσκοπικώς διακρινόμενων συστατικών. Από τα συστατικά αυτά το ένα χαρακτηρίζεται ως **συστατικό ενίσχυσης ή έγκλεισμα** (filler) και προσδίδει στο σύνθετο υλικό βελτιωμένες μηχανικές ιδιότητες. Το δεύτερο συστατικό καλείται **μήτρα** (matrix). Συνήθως είναι χαμηλής πυκνότητας και η συμμετοχή του στο σύνθετο υλικό εξασφαλίζει τη μέγιστη δυνατή εκμετάλλευση των ιδιοτήτων του πρώτου συστατικού.

2.1.1 Πλεονεκτήματα Σύνθετων Υλικών

Οι *ιδιότητες* κάθε υλικού, κοινού ή σύνθετου, μπορούν να διακριθούν σε **μηχανικές και μη μηχανικές.** Μηχανικές ιδιότητες ενός υλικού είναι για παράδειγμα η ελαστική δυσκαμψία, η αντοχή σε στατικές καταπονήσεις, η ολκιμότητα, η στερρότητα, η σκληρότητα, το όριο κοπώσεως, το μέτρο ενδόσεως και χαλάρωσης. Στις μη μηχανικές ιδιότητες του υλικού που έχουν άμεση σημασία περιλαμβάνονται κυρίως οι φυσικές ιδιότητες όπως η πυκνότητα, η θερμική διαστολή και αγωγιμότητα, η αντοχή σε υδροθερμική διάβρωση και άλλες.

Έτσι, οι παράγοντες των σύνθετων υλικών ως προς τις οποίες τα καθιστούν ανώτερα από τα κοινά υλικά είναι:

1. *Η μηχανική αντοχή*,
2. *Η αντοχή σε διάβρωση*,
3. *Η αντοχή σε χρηστική φθορά*,
4. *Το κόστος*,
5. *Το βάρος*,
6. *Η συμπεριφορά σε κόπωση*,
7. *Η θερμική μόνωση*,
8. *Η θερμική αγωγιμότητα*,
9. *Η ακουστική μόνωση*.

Φυσικά, ένα σύνθετο υλικό δεν μπορεί να διαθέτει ταυτόχρονα όλες τις παραπάνω ιδιότητες και παράγοντες, αφού στην πράξη δεν υπάρχει ποτέ τέτοια απαίτηση και μάλιστα μερικές ιδιότητες είναι ασυμβίβαστες μεταξύ τους (π.χ. θερμική μόνωση και θερμική αγωγιμότητα). Κάθε σύνθετο υλικό κατασκευάζεται έτσι ώστε να διαθέτει έναν βέλτιστο συνδυασμό αυτών των ιδιοτήτων.

2.1.2 Ταξινόμηση των Σύνθετων Υλικών

Ανάλογα με τη μορφή του συστατικού ενίσχυσης, τα σύνθετα υλικά κατατάσσονται σε δυο μεγάλες κατηγορίες:

- Σύνθετα υλικά με ενίσχυση σωματιδίων ή **κοκκώδη σύνθετα υλικά.**
- Σύνθετα υλικά με ενίσχυση ινών ή **ινώδη σύνθετα υλικά.**

Μια άλλη κατηγοριοποίηση των σύνθετων υλικών έχει να κάνει με την προέλευση της μήτρας, Έτσι, χωρίζονται σε:

- Σύνθετα υλικά με **πλαστική μήτρα.**
- Σύνθετα υλικά με **μεταλλική μήτρα.**

2.2 Κοκκώδη Σύνθετα Υλικά

Τα κοκκώδη σύνθετα υλικά αποτελούνται από κόκκους ενός υλικού μέσα σε μήτρα ενός άλλου. Οι κόκκοι μπορεί να είναι μεταλλικοί ή όχι, όπως και η μήτρα. Έτσι, από αυτή την άποψη, μπορούμε να ταξινομήσουμε τα κοκκώδη υλικά σε τέσσερις δυνατούς συνδυασμούς.

- **Υλικά μη μεταλλικού εγκλείσματος εντός μη μεταλλικής μήτρας**

Παράδειγμα τέτοιου υλικού είναι το σκυρόδεμα (όχι το οπλισμένο). Το σκυρόδεμα αποτελείται από κόκκους άμμου και πέτρας δεμένους με ένα μίγμα τσιμέντου και νερού, το οποίο έχει αντιδράσει χημικά και έχει σκληρύνει. Η αντοχή του σκυροδέματος αποδίδεται στην ύπαρξη κόκκων πέτρας. Επίσης φλούδες μη μεταλλικών υλικών, όπως η μίκα ή το γυαλί, μπορούν να αποτελέσουν το κοκκώδες έγκλεισμα μιας γυάλινης ή πλαστικής μήτρας αντίστοιχα και με τον τρόπο αυτό να προκύψει, ένα σύνθετο υλικό αυτού του είδους.

- **Υλικά μεταλλικού εγκλείσματος εντός μη μεταλλικής μήτρας**

Πολλά υλικά αυτού του είδους έχουν κατασκευαστεί με σκοπό την αύξηση της θερμικής αγωγιμότητας, τη μείωση του συντελεστή θερμικής διαστολής και τη μείωση της φθοράς της μήτρας. Παράδειγμα, τέτοιου υλικού είναι έγκλεισμα χαλκού μέσα σε εποξειδική ρητίνη, που αυξάνει κατά πολύ την ηλεκτρική αγωγιμότητα αυτής. Επίσης είναι συνήθη τα σύνθετα υλικά με έγκλεισμα από μέταλλο υπό μορφή φλούδας.

- **Υλικά μεταλλικού εγκλείσματος εντός μεταλλικής μήτρας**

Τα υλικά αυτού του τύπου δεν είναι κράματα. Το μεταλλικό έγκλεισμα έχει μορφή κόκκων μέσα στη μήτρα και δεν είναι διαλυμένο μέσα σε αυτήν, όπως είναι στα κράματα. Σαν παράδειγμα για αυτήν την κατηγορία μπορούμε να αναφέρουμε τους κόκκους μόλυβδου εντός κραμάτων χαλκού και χάλυβα, που σκοπό έχουν τη βελτίωση της κατεργασιμότητας του κράματος στις εργαλειομηχανές.

- **Υλικά μη μεταλλικού εγκλείσματος εντός μεταλλικής μήτρας**

Μη μεταλλικά υλικά μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε μορφή κοκκώδους εγκλείσματος μέσα σε μεταλλική μήτρα. Τα προκύπτοντα υλικά ονομάζονται κεραμομέταλλα. Τα κεραμομέταλλα μπορούν να είναι δύο ειδών ανάλογα με το έγκλεισμα. Το πρώτο είδος είναι κεραμομέταλλα με κόκκους οξειδίου ενός μετάλλου πάνω σε μεταλλική μήτρα, τα οποία χρησιμοποιούνται στην κατασκευή εργαλείων και σε εφαρμογές υψηλής θερμοκρασίας όπου η αντίσταση στη διάβρωση είναι σημαντική. Το άλλο είδος είναι τα κεραμομέταλλα με κόκκους καρβιδίου ενός μετάλλου μέσα σε μεταλλική μήτρα. Έτσι το καρβίδιο του βολφραμίου μέσα σε μήτρα κοβαλτίου χρησιμοποιείται σε τμήματα μηχανών τα οποία απαιτούν μεγάλη αντοχή στην οξείδωση και στη διάβρωση, ενώ έχει συντελεστή θερμικής διαστολής παραπλήσιο με αυτόν του χάλυβα και έτσι είναι κατάλληλο για χρήσεις σε βαλβίδες κλπ. Επίσης το καρβίδιο του τιτανίου μέσα σε μήτρα νικελίου ή κοβαλτίου, χρησιμοποιείται συχνά σε εφαρμογές υψηλής θερμοκρασίας, όπως π.χ. σε διάφορα μέρη στροβιλομηχανών.

Τέλος τα κεραμομέταλλα χρησιμοποιούνται στους πυρηνικούς αντιδραστήρες σαν καύσιμα

2.3 Μήτρες

Η μήτρα για να ικανοποιήσει το ρόλο για τον οποίο είναι επιφορτισμένη, δηλαδή την μέγιστη εκμετάλλευση των ιδιοτήτων του εγκλείσματος, θα πρέπει να χαρακτηρίζεται από ολκιμότητα, ανθεκτικότητα και σχετική ευκαμψία. Οι πιο πάνω ιδιότητες θα πρέπει να παρουσιάζουν «συμβατότητα» με αυτές των ενισχυτικών υλικών. Τέλος για τη σωστή λειτουργία του σύνθετου υλικού, καθοριστικός παράγοντας είναι η καλή πρόσφυση κόκκου - μήτρας.

Οι μήτρες που χρησιμοποιούνται εκτενέστερα σήμερα είναι οι οργανικές, μεταλλικές και κεραμικές.

Οργανικές μήτρες

Οι Οργανικές μήτρες διακρίνονται σε:

1. Θερμοπλαστικές

Πρόκειται για πολυμερή που λόγω του χαμηλού τους κόστους χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές ευρείας κατανάλωσης. Αντιπροσωπευτικά παραδείγματα αποτελούν οι μήτρες πολυαιθυλενίου και πολυστυρενίου.

2. Θερμοσκληρυνόμενες

Χρησιμοποιούνται σε περιπτώσεις όπου απαιτούνται καλύτερες μηχανικές ιδιότητες. Σε αυτήν την κατηγορία ανήκουν οι πολυεστερικές ρητίνες, οι εποξειδικές ρητίνες και φαινολικές ρητίνες.

Μεταλλικές μήτρες

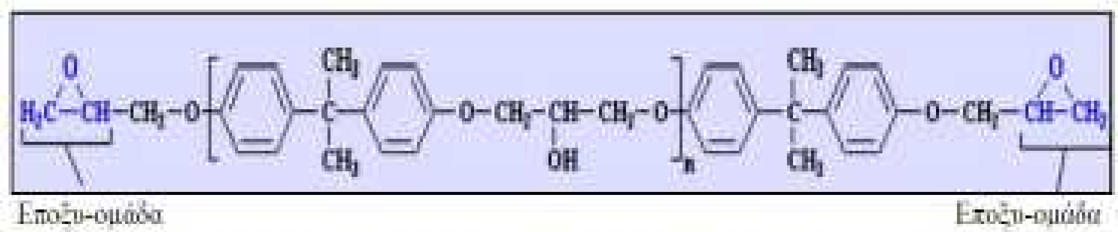
Οι μεταλλικές μήτρες βρίσκουν εφαρμογή για υψηλές θερμοκρασίες για τις οποίες δεν είναι επιτρεπτή η χρήση οργανικών μητρών. Οι μεταλλικές μήτρες σε σύγκριση με τις οργανικές παρουσιάζουν μεγαλύτερη ολκιμότητα και καλύτερες μηχανικές ιδιότητες, βελτιωμένη ελαστική δυσκαμψία, βελτιωμένη θερμική και ηλεκτρική αγωγιμότητα για ειδικές εφαρμογές.

Κεραμικές μήτρες

Τα κεραμικά υλικά είναι ψαθυρά και σκληρά, δύστηκτα, μεγάλης στιβαρότητας και μεγάλης αντοχής στην διάβρωση και τη χημική προσβολή, με αποτέλεσμα να παρουσιάζουν μεγάλο ενδιαφέρον στην περιοχή των σύνθετων υλικών. Το σημαντικότερο πρόβλημα που τίθεται από τη χρήση των κεραμικών μητρών αφορά τη συνάφεια κόκκων - μήτρας και προέρχεται από τις μεγάλες διαφορές του συντελεστή γραμμικής διαστολής μεταξύ κεραμικής μήτρας και εγκλεισμάτων.

2.4 Εποξειδικές ρητίνες

Με τον όρο εποξειδικές ρητίνες εννοούμε τη χημική ένωση η οποία σχηματίζεται με περισσότερα από ένα εποξείδια τα οποία συνδέονται μεταξύ τους υπό μορφή ευθείας ή δακτυλίου. Ως εποξείδιο ή εποξειδικό εννοούμε την χημική ομάδα που αποτελείται από ένα άτομο οξυγόνου, ενωμένο με δυο άτομα άνθρακα, που είναι ήδη ενωμένα με άτομα άλλων στοιχείων.



Σχήμα 2.1 Μορφή μη τροποποιημένης εποξειδικής ρητίνης.

2.4.1 Ιδιότητες Εποξειδικών ρητινών

Οι κυριότερες ιδιότητες των εποξειδικών ρητινών είναι οι εξής :

- Χαμηλή υδροσκοπικότητα και ικανοποιητική αντοχή στην επίδραση οξέων, βάσεων και πολλών οργανικών διαλυτών, χαμηλό ιξώδες (low viscocity), όπως και τα μείγματα τους με διάφορα πρόσθετα (πλαστικοποιητές) με αποτέλεσμα την εύκολη κατεργασία τους.

- Η επεξεργασία των ρητινών είναι εύκολη για θερμοκρασίες ανάμεσα σε 5°C και 150°C και εξαρτάται από την επιλογή του πρόσθετου.
- Καλές μηχανικές ιδιότητες και άριστη ηλεκτρική μόνωση.
- Υψηλή δύναμη συγκόλλησης που είναι από τις μεγαλύτερες που έχουν παρατηρηθεί στη σύγχρονη τεχνολογία πλαστικών.
- Καλή χημική αντίσταση που εξαρτάται από το πρόσθετο που χρησιμοποιείται. Έχουν πολύ καλή αντίσταση στα καυστικά και άριστα στα οξέα.
- Μικρή θερμική συστολή κατά τον πολυμερισμό και κατά τη διάρκεια της επεξεργασίας τους.

2.4.2 Εφαρμογές των Εποξειδικών Ρητινών

Οι ποικίλες ιδιότητες των εποξειδικών ρητινών έχουν ως αποτέλεσμα αυτές να χρησιμοποιούνται σε πολλές εφαρμογές. Μερικές από αυτές είναι οι εξής:

- Στην κατασκευή κτιρίων και αυτοκινητόδρομων και γενικά για κατασκευές όπου υπάρχουν απαιτήσεις για υψηλή χημική αντοχη.
- Σαν βασικό συγκολλητικό σκυροδέματος.
- Σαν συγκολλητικό σε δομικά μέρη της ατράκτου αεροσκαφών.
- Στην κατασκευή τριχών για πινέλα.
- Σαν συγκολλητικό πλαστικών και μεταλλικών κομματιών σε βάρκες και αυτοκίνητα, ώστε να υπάρχει πλήρης στεγανότητα.
- Σαν φυλλώδεις ρητίνες (laminated resins) για τη κατασκευή πλαισίων αεροσκαφών και πυραύλων.
- Τυπικές εφαρμογές χυτών εποξειδικών ρητινών αποτελούν οι κατασκευές ανθεκτικών σε χημικά, όπως αντλίες και σωλήνες, εργαλεία και μήτρες.
- Εξασφαλίζουν καλή πρόσφυση (προσκολληση) σε ξηρές και υγρές επιφάνειες και στερεοποιούνται ακόμη και κάτω από την επιφάνεια του

νερού. Η πρόσφυση εξασφαλίζεται πάνω σε όλα τα δομικά υλικά, όπως σκυρόδεμα, μέταλλα, μάρμαρα, πέτρα και ξύλο.

Υπάρχουν ακόμη ρητίνες δύο συστατικών (wetcome) για επαλείψεις υγρών και στερεών επιφανειών. Η ξηρή μεμβράνη που σχηματίζουν έχει πυρανασχετικές ιδιότητες και έτσι δεν επιτρέπουν την εξάπλωση της φωτιάς.

Οι ρητίνες αυτές χρησιμοποιούνται:

- Για υγρομόνωση, για προστασία και διακόσμηση δαπέδων, τοίχων και ορόφων σε οικοδομικούς και βιομηχανικούς χώρους.
- Σε επιφάνειες σκυροδέματος, πέτρας, σοβάδων, τούβλων, γύψου κ.ά.
- Για σύνδεση παλιού και νέου σκυροδέματος.
- Για την προστασία κτιρίων από διάβρωση και την υγρασία.
- Για υγρομόνωση πισινών και δεξαμενών.

2.5 Εγκλείσματα

Τα εγκλείσματα είναι ανόργανα υλικά που χρησιμοποιούνται μέσα στη μήτρα των εποξειδικών ρητινών, έχουν πολύ μικρές διαστάσεις και μορφή πούδρας σκόνης με μέση διάμετρο 0,015μ. Όσο αυξάνει η κατ' όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα, τόσο αυξάνει το ιξώδες και η ρητίνη μετατρέπεται από υγρό υλικό σε μια πιο στερεή μορφή.

Τα εγκλείσματα ρυθμίζουν το ιξώδες των ρητινών, ελαττώνουν το ποσοστό συστολής και το συντελεστή θερμικής διαστολής, ενώ ταυτόχρονα χρωματίζουν το σύνθετο. Τα εγκλείσματα πρέπει να είναι από χημικής απόψεως ουδέτερα ή ελαφρά βασικά και να μην αντιδρούν με τη ρητίνη ή το μέσο σκλήρυνσης. Το σημαντικότερο όμως πλεονέκτημα των εγκλεισμάτων είναι ότι ελαττώνουν το κόστος του σύνθετου με παράλληλο συνδυασμό καλύτερων ποιοτικών ιδιοτήτων.

Για καλύτερα αποτελέσματα, τα εγκλείσματα πρέπει να θερμαίνονται για την απομάκρυνση της υγρασίας και του αέρα, που τυχόν απορροφήθηκε, και μετά να ενσωματώνονται στη ρητίνη. Επίσης είναι σκόπιμη η χρησιμοποίηση κάποιου ειδικού μηχανήματος για πλήρη ανάμειξη.

2.5.1 Επίδραση των εγκλεισμάτων στις ιδιότητες των ρητινών

Η παρουσία εγκλεισμάτων στις ρητίνες γενικά αυξάνει το μέτρο ελαστικότητας σε αυτές, ενώ αντίθετα η παραμόρφωση θραύσης ελαττώνεται. Η μεταβολή αυτή είναι ανάλογη με την περιεκτικότητα της σε έγκλεισμα. Αυτό ισχύει για μετρήσεις σε θερμοκρασίες περιβάλλοντος.

- **Συστολή**

Η συστολή κατά τη διάρκεια σκλήρυνσης της ρητίνης ελαττώνεται ανάλογα με την αύξηση της περιεκτικότητας σε έγκλεισμα του σύνθετου υλικού. Αυτό οφείλεται στο ότι η ρητίνη αντικαθίσταται τοπικά από υλικό που δεν εμφανίζει μεταβολή στις διαστάσεις του, σε αντίθεση με την καθαρή ρητίνη.

- **Αντοχή σε χημικά αντιδραστήρια και σε διάβρωση**

Μερικά εγκλείσματα όπως π.χ. το ανθρακικό ασβέστιο μειώνουν την αντοχή των ρητινών σε οξέα ενώ άλλα όπως το αλουμίνιο μειώνουν την αντοχή αυτή σε υγρασία. Τα εγκλείσματα γενικά μειώνουν την ταχύτητα διάχυσης του νερού στα σύνθετα υλικά και επίσης συμμετέχουν στην διάβρωση των πολυμερών στην επαφή τους με τα μέταλλα.

Ιόντα που υπάρχουν στη στερεοποιημένη μήτρα μπορούν να μεταφέρουν γαλβανικά ρεύματα και να ενισχύσουν τη διάβρωση. Αυτό οφείλεται στην αύξηση της αγωγιμότητας του σύνθετου, λόγω της ικανότητας των εγκλεισμάτων να απελευθερώνουν ιόντα.

- **Ειδική πυκνότητα**

Τα εγκλείσματα που στην πλειοψηφία τους έχουν μεγαλύτερη πυκνότητα από τη ρητίνη, αυξάνουν την πυκνότητα των σύνθετων υλικών ανάλογα με την κατ' όγκο περιεκτικότητα τους. Έτσι η παρουσία των εγκλεισμάτων μειώνει αισθητά το κόστος του σύνθετου υλικού.

- **Ιξώδες**

Τα εγκλείσματα αυξάνουν το ιξώδες των εποξειδικών ρητινών. Η αύξηση αυτή είναι μεγαλύτερη με ινώδη και λιγότερο με κοκκώδη εγκλείσματα.

- **Συντελεστής θερμικής διαστολής**

Ο συντελεστής θερμικής διαστολής της στερεοποιημένης εποξειδικής ρητίνης ελαττώνεται με την αύξηση της κατ’ όγκο συγκέντρωσης σε εγκλείσματα. Η ελάττωση αυτή δεν είναι γραμμική.

- **Πρόσφυση**

Τα εγκλείσματα ελαττώνουν το βαθμό συστολής και έτσι αυξάνουν την ικανότητα πρόσφυσης των εποξειδικών ρητινών αποτελεσματικά.

- **Θερμική σταθερότητα**

Ενισχύεται με την παρουσία εγκλεισμάτων. Με τον όρο θερμική σταθερότητα, εννοούμε την κατάσταση του σύνθετου όταν δεν παρατηρούνται αλλοιώσεις στη δομή του συναρτήσει της θερμοκρασίας.

- **Θερμική αγωγιμότητα**

Τα εγκλείσματα αυξάνουν τη θερμική αγωγιμότητα των ρητινών, αν και σε μεγάλες περιεκτικότητες σε έγκλεισμα αυξάνουν την παρουσία φυσαλίδων αέρα μέσα στο σύνθετο, που ως γνωστόν αποτελούν θερμομονωτικά σώματα. Περισσότερο αυξάνεται η θερμική αγωγιμότητα στην περίπτωση των μεταλλικών ινών συγκριτικά με τα κοκκώδη μεταλλικά εγκλείσματα.

- **Αντοχή στη συμπίεση**

Τα κοκκώδη εγκλείσματα αυξάνουν την αντοχή σε συμπίεση λόγω της δυσκαμψίας που προκαλούν.

- **Συμπεριφορά στην κρούση**

Τα κοκκώδη εγκλείσματα επηρεάζουν την αντοχή σε κρούση των σκληρυνόμενων εποξειδικών ρητινών σε βαθμό που ποικίλει ανάλογα με τον τύπο του εγκλείσματος, τον τύπο της ρητίνης και το είδος της δοκιμής κρούσης. Γενικά τόσο τα κοκκώδη όσο και τα ινώδη εγκλείσματα ενισχύουν την αντοχή των ρητινών σε κρούση.

- **Συμπεριφορά στην κάμψη**

Τα κοκκώδη εγκλείσματα γενικά ελαττώνουν την αντοχή στην κάμψη και αυξάνουν το μέτρο ελαστικότητας σε κάμψη.

- **Σκληρότητα επιφάνειας - Αντίσταση στην τριβή**

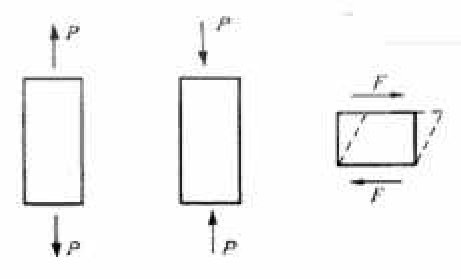
Τα εγκλείσματα αυξάνουν την σκληρότητα της επιφάνειας του σύνθετου και την αντίσταση τριβής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Μηχανικές ιδιότητες σύνθετων υλικών

3.1 Ελαστικές σταθερές (Ε,ν)

Όπως είναι γνωστό από την αντοχή των υλικών, ένα σύνθετο υλικό συνήθως μπορεί να καταπονηθεί με τρείς διαφορετικούς τρόπους, ανάλογα με την παραμόρφωση που τείνει να επιφέρει η επιβαλλόμενη τάση (σχήμα 3.1).



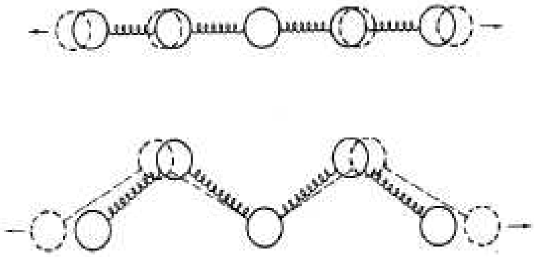
Σχήμα 3.1 Βασικές μηχανικές καταπονήσεις: εφελκυσμός, θλίψη, διάτμηση.

Έτσι αναφέρεται ενδεικτικά η εφελκυστική καταπόνηση (**εφελκυσμός**), η θλιπτική καταπόνηση (**θλίψη**) και η διατμητική καταπόνηση (**διάτμηση** ή **στρέψη**). Τα περισσότερα εξαρτήματα ή στοιχεία μηχανών καταπονούνται σε πιο σύνθετες καταπονήσεις οι οποίες αναλύονται σε απλούστερες. Όταν η τάση έχει διατηρηθεί κάτω από μια κρίσιμη τιμή (**όριο ελαστικότητας**) επιφέρει **ελαστικές παραμορφώσεις**, οι οποίες εξαλείφονται μετά την απόσυρση της δύναμης.

Σε ατομικό επίπεδο οι εν λόγω τάσεις προκαλούν επιμήκυνση ή συμπίεση των ατομικών δεσμών, που αντιστοιχούν στις παραμορφώσεις ελατηρίου (σχήμα 3.2). Η τάση που προκαλεί μια τέτοια ελαστική παραμόρφωση υπακούει στον Νόμο του Hooke :

$$\boldsymbol{\sigma = E\ \varepsilon} \qquad (3.1)$$

όπου ο συντελεστής αναλογίας ***Ε*** ονομάζεται μέτρο ελαστικότητας ή μέτρο του Young.

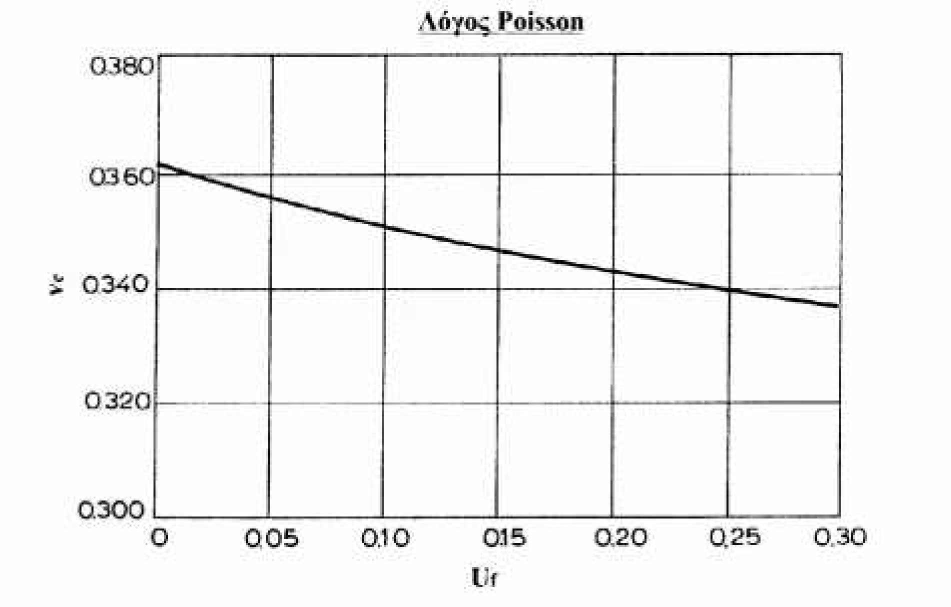


Σχήμα 3.2 Σχηματική αναπαράσταση της ελαστικής μηχανικής καταπόνησης σε ατομικό επίπεδο.

Σε ένα μακροσκοπικό στερεό η επιβολή εφελκυστικής καταπόνησης δεν οδηγεί μόνο σε παραμορφώσεις κατά τη διεύθυνση της τάσης, αλλά και κάθετα προς αυτήν. Όταν η επιβαλλόμενη τάση τείνει να επιμηκύνει το υλικό (κατά τη διεύθυνση x), είναι λογικό να μεταβάλλεται το πλάτος (y) αλλά και το πάχος (z) του υλικού. Ο λόγος της επιμέρους παραμόρφωσης ως προς αυτή τη διεύθυνση της τάσης λέγεται λόγος Poisson (ν) :

$$\neg = \frac{£_x}{£_z} = -\frac{£_y}{£_z} \qquad (3.2)$$

Το αρνητικό πρόσημο (-) στην σχέση (3.2) υπάρχει για να εξασφαλίζει τις θετικές τιμές του λόγου Poisson. Η γραφική παράσταση του λόγου Poisson v_c για τα σύνθετα υλικά συναρτήσει της κατ' όγκο περιεκτικότητας των εγκλεισμάτων U_f φαίνεται στο σχήμα (3.3) που ακολουθεί:



Σχήμα 3.3 Γραφική παράσταση λόγου Poisson για τα σύνθετα υλικά.

Ο λόγος του Poisson εκφράζεται με ένα θετικό αριθμό, ο οποίος πάντοτε είναι μικρότερος από 0,5. Ο λόγος αυτός για όλα τα υλικά παίρνει οριακά την τιμή 0,5 όταν αυτά δεν καταπονούνται με φορτία μέσα στην ελαστική περιοχή, στην περιοχή δηλαδή όπου ισχύει ο νόμος του Hooke, αλλά με φορτία μεγαλύτερα, που βρίσκονται δηλαδή στην πλαστική περιοχή.

Η παράμετρος ΔV/V (ανηγμένη μεταβολή του όγκου ή μέτρο διογκώσεως) σχετίζεται με τον λόγο του Poisson, με βάση τη σχέση:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1-2v}{E}(\pm_{i} + \pm_{y} + \pm_{z}) \qquad (3.3)$$

3.2 Μοντέλα και εκφράσεις για το Μέτρο Ελαστικότητας (Ε) κοκκωδών σύνθετων υλικών

Από πολλούς ερευνητές αναπτύχθηκαν διάφορα θεωρητικά μοντέλα για τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας. Τα μοντέλα αυτά και οι εξισώσεις που προέκυψαν, είναι άλλοτε απλά και άλλοτε πολύπλοκα ανάλογα με τις παραδοχές που ο καθένας χρησιμοποίησε. Εδώ αναφερόμαστε σε ορισμένα από αυτά τα μοντέλα.

3.2.1 Το μοντέλο του Counto

Το μοντέλο για τα σύνθετα υλικά δύο φάσεων το οποίο προτάθηκε από τον Counto [1] προϋποθέτει τέλεια πρόσφυση ανάμεσα στον κόκκο και τη μήτρα. Το μέτρο του σύνθετου υλικού , δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{1}{\mathrm{E}_c} = \frac{1-U_f^{1/2}}{E_m} + \frac{1}{\left(1-U_f^{1/2}\right)U_f E_m + E_f} \qquad (3.4)$$

όπου E_f, E_m, E_c οι κατ’ όγκο περιεκτικότητες του εγκλείσματος, της μήτρας και του σύνθετου υλικού αντιστοίχως. Αυτό το μοντέλο προβλέπει τα μέτρα ελαστικότητας και συμφωνεί με μια ευρεία σειρά από πειραματικά δεδομένα, κυρίως για υλικά από σκυρόδεμα.

3.2.2 Το μοντέλο του Paul

Στην προσεγγιστική λύση του Paul [2] τα συστατικά (οι φάσεις) του σύνθετου υλικού, υποτίθεται ότι είναι στην κατάσταση μακροσκοπικώς ομοιογενούς τάσης. Η πρόσφυση υποτίθεται ότι υπάρχει στην ενδιάμεση επιφάνεια ενός κυβικού εγκλείσματος, το οποίο είναι μέσα σε κυβική μήτρα. Όταν μια ομοιόμορφη τάση εφαρμοστεί στο σύνορο, το μέτρο ελαστικότητας του σύνθετου υλικού δίνεται από τη σχέση:

$$E_c = E_m \left\{ \frac{1+(m-1)U_f^{2/3}}{1+(m-1)\left(U_f^{2/3} - U_f\right)} \right\} \tag{3.5}$$

3.3 Μέτρα ελαστικότητας με σφαιρικά εγκλείσματα

Τα σφαιρικά εγκλείσματα είναι συνήθως αρκετά μεγάλα, έτσι ώστε η μέση απόσταση μεταξύ τους, ακόμα και για μεγάλες περιεκτικότητες, είναι μεγάλη αν συγκριθεί με τις τιμές της τετραγωνικής ρίζας της απόστασης μεταξύ των άκρων των μακρομορίων του πολυμερούς. Επίσης τα σωματίδια είναι τόσο απομακρυσμένα μεταξύ τους, που δε μπορούν να συνδέονται μαζί μέσω μιας απλής αλυσίδας πολυμερούς.

Για τα σύνθετα υλικά όπου το πάχος του στρώματος του πολυμερούς μεταξύ των σωματιδίων είναι πολύ μεγαλύτερο από το πάχος του οριακού στρώματος, η επίδραση του οριακού στρώματος στις διάφορες ιδιότητες μπορεί να αμεληθεί. Με βάση αυτή την υπόθεση έχουν προταθεί κατά καιρούς πολλές εξισώσεις που να περιγράφουν τη μηχανική συμπεριφορά συνθέτων υλικών με σφαιρικά εγκλείσματα.

Ο πρώτος που ασχολήθηκε με το Θέμα ήταν ο Einstein [3, 4, 5], όταν το 1906 έκανε παρατηρήσεις στο ιξώδες αιωρήματος στερεών σφαιρών διασπαρμένων σε κάποιο Νευτώνειο υγρό και κατέληξε στην εξίσωση:

$$E_c = E_m \left(1 + 2.5U_f\right) \tag{3.6}$$

Η εξίσωση αυτή ισχύει για μικρές περιεκτικότητες σε έγκλεισμα και για περιπτώσεις πλήρους συνοχής μεταξύ εγκλείσματος και μήτρας. Με τον όρο τέλεια συνοχή εννοούμε ότι δεν υπάρχει σχετική κίνηση μήτρας - σωματιδίων, κατά τη διάρκεια φόρτισης μέχρι κάποιου ορίου πάνω από το οποίο σπάει ο δεσμός μήτρας - σωματιδίου.

Προϋπόθεση για την παραπάνω εξίσωση είναι ότι το έγκλεισμα είναι σκληρότερο υλικό από τη μήτρα. Ο όγκος του εγκλείσματος είναι η σημαντική παράμετρος για την εξίσωση και όχι το βάρος του. Τέλος το μέγεθος των σωματιδίων δεν επηρεάζει την ενισχυτική τους δράση. Συνέχισαν την έρευνα οι Guth και Smallwood [6, 7] προτείνοντας την εξίσωση:

$$E_c = E_m \left(1 + 2.5U_f + 14.1U_f{}^2\right) \tag{3.7}$$

Αργότερα συνέχισε ο Kerner [8] με τη σχέση:

$$\frac{E_c}{E_m} = \frac{\dfrac{U_f G_f}{(7-5v_m)G_m + (8-10v_m)G_f} + \dfrac{U_m}{15(1-v_m)}}{\dfrac{U_f G_m}{(7-5v_m)G_m + (8-10v_m)G_f} + \dfrac{U_m}{15(1-v_m)}} \tag{3.8}$$

όπου G, το μέτρο διάτμησης και ν, ο λόγος Poisson.

Για εγκλείσματα πιο σκληρά από τη μήτρα η εξίσωση (3.8) απλοποιείται ως εξής:

$$\frac{E_c}{E_m} = 1 + \frac{U_f}{U_m} \frac{15(1-v_m)}{8-10v_m} \tag{3.9}$$

Στην πραγματικότητα δεν ισχύει η προϋπόθεση συνοχής μεταξύ μήτρας και εγκλείσματος όπως έχει ήδη προαναφερθεί σε παραπάνω παράγραφο. Τότε η πραγματική ενισχυτική δράση του εγκλείσματος είναι μικρότερη από αυτή που υπολογίζεται θεωρητικά και σε ακραίες περιπτώσεις μπορεί να ελαττώσει, παρά να αυξήσει το μέτρο ελαστικότητας του συνθέτου.

Ο Einstein [3, 4, 5], κατά τις παρατηρήσεις που έκανε το 1906 και αναφέρονται παραπάνω, κατέληξε πως όταν μεταξύ του αιωρήματος στερεών σφαιρών και του Νευτώνιου υγρού δεν υπάρχει τέλεια συνοχή ισχύει η εξίσωση:

$$E_c = E_m(1+U_f) \tag{3.10}$$

Εάν τα σωματίδια είναι φυσαλίδες αέρα ή βρίσκονται μέσα σε κενά τότε η εξίσωση Kerner [8] γράφεται:

$$\frac{1}{E_c} = \frac{1}{E_m} + \frac{U_f}{U_m}\frac{15(1-v_m)}{7-5v_m} \tag{3.11}$$

Στην περίπτωση που ο δεσμός εγκλείσματος - μήτρας είναι ασθενής, αυτός σπάει όταν εφαρμόσουμε κάποιο φορτίο. Τότε η μήτρα παραμορφώνεται περισσότερο από το έγκλεισμα με αποτέλεσμα το σχηματισμό κοιλοτήτων γύρω από το έγκλεισμα. Οι Sato και Furukawa [9] διατύπωσαν την ακόλουθη γι' αυτήν την περίπτωση, σχέση:

$$E_c = E_m\left\{\left[1+\frac{1}{2}\frac{¥^2}{1-¥}\right]\left[1-\frac{¥^3 k}{3}\left(\frac{1+¥-¥^2}{1-¥+¥^2}\right)\right]-\frac{¥^2 k}{3(1-¥)}\left(\frac{1+¥-¥^2}{1-¥+¥^2}\right)\right\} \tag{3.12}$$

όπου $¥ = U_f^{1/3}$ και k: συντελεστής πρόσφυσης (εγκλεισμάτων – μήτρας), ο οποίος παίρνει την τιμή 0 για τέλεια επαφή ενώ την τιμή 1 για όχι καλή επαφή.

Το μοντέλο του Voigt είναι το θεωρητικό κάτω φράγμα για το μέτρο ελαστικότητας του σύνθετου υλικού, ανεξάρτητα από την διαμόρφωση των φάσεων του υλικού.

$$E_c = \frac{E_f E_m}{E_m U_f + E_f U_m} \tag{3.13}$$

Επίσης , ο Takahashi [10] πρότεινε την παρακάτω πιο σύνθετη σχέση:

$$\frac{E_c}{E_m} = 1 + \frac{(1-v_m)U_f\left[E_f(1-2v_m)-E_m(1-v_f)+10(1+v_m)-E_m(1+v_f)\right]}{E_f(1+v_m)+2E_m(1-2v_f)+2E_f(4-5v_m)(1+v_m)+E_m(7-5v_m)(1+v_f)} \tag{3.14}$$

Μια βασική παραδοχή για τις παραπάνω θεωρίες είναι ότι τα εγκλείσματα δεν σχηματίζουν συσσωματώματα και αυτό οφείλεται στο ότι τα συσσωματώματα δημιουργούν κοιλότητες αέρα και έτσι ο φαινόμενος όγκος του εγκλείσματος είναι μεγαλύτερος του πραγματικού.

Για την περίπτωση ενάρξεως των συσσωματωμάτων ο Mooney [11] διετύπωσε την ακόλουθη εξίσωση:

$$\frac{E_c}{E_m} = \exp\left(\frac{2.5U_f}{1 - S \cdot U_f}\right) \tag{3.15}$$

όπου S ορίζεται από τη σχέση:

S = ¨~§¬ό«£¬-s ό¥©-s £¥©ª£ί±«~²-s / ®°~¥«~²§©όs ό¥©-s £¥©ª£ί±«~²-s

Η ελάχιστη τιμή του είναι η μονάδα. Σύμφωνα με πειραματικές μετρήσεις το S κυμαίνεται από 1.2 μέχρι 2.

Μια άλλη θεωρία που προτάθηκε από τους Eilers και Van – Dyck [12] περιγράφεται από την εξίσωση:

$$\frac{E_c}{E_m} = 1 + \frac{kU_f}{1 - S \cdot U_f} \tag{3.16}$$

όπου k και S είναι με τιμές 1.25 και 1.20 αντίστοιχα.

Στο Εργαστήριο Αντοχής Υλικών έχει γίνει μελέτη πάνω στο βαθμό πρόσφυσης μεταξύ μήτρας και εγκλείσματος. Με βάση τον ορισμό της ενδιάμεσης φάσης που έχει μελετηθεί προτείνεται το ακόλουθο μοντέλο για την περίπτωση των κοκκώδων εγκλεισμάτων. Ο δείκτης i αναφέρεται στην ενδιάμεση φάση και k είναι μια παράμετρος, που περιγράφει το βαθμό σύνδεσης μεταξύ εγκλείσματος και ενδιάμεσης φάσης:

$$E_c = E_f U_f k + E_m U_m + E_i U_i \tag{3.17}$$

Καλύτερη προσέγγιση του προβλήματος έγινε σε μελέτη του καθηγητή Π.Σ. Θεοχάρη [13,14], όπου προτείνεται μια σειρά μοντέλων στα οποία θεωρείται ότι αναπτύσσεται μια τρίτη ψευδο - φάση μήτρας και εγκλεισμάτων στη διάρκεια του πολυμερισμού της μήτρας.

Επίσης μια άλλη εξίσωση για το μέτρο ελαστικότητας συνθέτου υλικού με εγκλείσματα πρότειναν αργότερα οι E.Sideridis, P.S. Theocaris [15]:

$$\frac{2(1-2v_c)}{E_c}=\frac{2\lambda^2 U_f}{E_f}+\frac{1}{E_m}\frac{U_f(1-\lambda)^2(1+v_m)+2(\lambda U_f-1)^2(1-2v_m)}{1-U_f} \quad (3.18)$$

όπου τα νc και λ δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\frac{1}{v_c}=\frac{U_f}{v_f}+\frac{U_m}{v_m} \quad (3.19)$$

$$\lambda=\frac{3(1-\nu_m)E_f}{\left\{\left[2U_f(1-2v_m)+1+v_m\right]E_f+2(1-2v_f)(1-U_f)E_m\right\}} \quad (3.20)$$

Για την περιγραφή των βισκοελαστικών ιδιοτήτων ενός συστήματος δύο φάσεων, ο Takayanaki [16] εισήγαγε ένα ισοδύναμο μοντέλο που αντιπροσωπεύει την κατάσταση ανάμειξης ενός πολυμερούς μίγματος. Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό το μέτρο ελαστικότητας του συνθέτου υλικού στο οποίο τα σωματίδια διασκορπίζονται στην μήτρα εκφράζεται από την σχέση:

$$\frac{1}{E_c}=\left[\frac{\varphi}{(1-k)E_m+kE_f}\frac{1-\varphi}{E_m}\right] \quad (3.21)$$

όπου k και φ είναι παράμετροι που αντιπροσωπεύουν την κατάσταση της μίξης και την σύνθεση του δείγματος, από τους οποίους μόνο ο ένας είναι ανεξάρτητος και ο άλλος μπορεί να υπολογιστεί από τον τύπο:

$$k\varphi=U_f \quad (3.22)$$

Στην περίπτωση τώρα που η παραπάνω εξίσωση (3.21) καλείται να ικανοποιήσει ταυτόχρονα και την εξίσωση του Kerner (3.11) για την ενισχυτική δράση των σφαιρικών εγκλεισμάτων, τότε οι παράμετροι k και φ έχουν ειδικές τιμές:

$$k=\frac{2+3U_f}{5} \quad , \quad \varphi=\frac{5U_f}{2+3U_f} \quad (3.23\ \alpha,\beta)$$

3.4 Περιορισμοί Θεωρητικών μοντέλων σχετικά με το μέτρο ελαστικότητας των συνθέτων υλικών

Σε αυτό το σημείο πρέπει να τονισθεί ότι στην ανασκόπηση δεν έγινε καμιά προσπάθεια για να συζητηθούν οι προσεγγίσεις, αλλά να δειχθεί ένας αριθμός σε χρήσιμες θεωρητικές υποθέσεις που περιγράφουν τα μέτρα ελαστικότητας ενός συστήματος εγκλεισμάτων. Για τη λεπτομερή συζήτηση των θεωριών γίνεται αναφορά στους Hashin και Hill [17, 18].

Στην πράξη τα εγκλείσματα κόκκων δεν μπορούν τελείως να αποχωρισθούν το ένα από το άλλο και η ενίσχυση του στοιχείου μπορεί να είναι σε μικρή κλίμακα, στην πραγματικότητα όμως είναι ένα συσσωμάτωμα από μικρούς κόκκους. Έτσι λοιπόν ως απάντηση στο εφαρμοζόμενο φορτίο, η τάση θα κατανεμηθεί ομοιόμορφα ανάμεσα στους κόκκους και τα συσσωματώματα και η παραδοχή τάση ή ομοιόμορφη επιμήκυνση (παραμόρφωση) είναι καθαρά υπεραπλούστευση.

Οι θεωρίες που ασχολούνται με συστήματα εγκλεισμάτων δέχονται ότι τα μέτρα ελαστικότητας για δεδομένο έγκλεισμα και μήτρα εξαρτώνται μόνο από την περιεκτικότητα σε όγκο του εγκλείσματος και όχι από το μέγεθος των κόκκων. Όμως γενικά το μέτρο αυξάνει όσο το μέγεθος των κόκκων μειώνεται. Οι Lewis και Nielsen [19] παραδέχονται ότι όσο το μέγεθος του κόκκου μειώνεται η επιφάνεια των κόκκων αυξάνεται παρέχοντας ένα πιο ενεργό επιφανειακό δεσμό μεταξύ των δύο φάσεων. Αυτό θα μπορούσε να συνοδευθεί από μια κλίση για την αύξηση συσσώρευσης των κόκκων (συσσωματώματα). Οι ιδιότητες των σύνθετων υλικών μπορούν επίσης να μεταβάλλονται, όταν αλλάζει το σχήμα (μορφή) κόκκου. Ο Bueche [20,21] παρατήρησε ότι διαφορετικές μορφές εγκλεισμάτων καταλήγουν σε διαφορετικές μηχανικές ιδιότητες. Το αποτέλεσμα ήταν ιδιαίτερα έντονο με μεγαλύτερους ή μη σφαιρικούς (μη σφαιροειδείς) κόκκους όπου ένας προτιμούμενος προσανατολισμός θα μπορούσε να τροποποιήσει τη συμπεριφορά παραμόρφωσης.

Ο Wu [22] απέδειξε θεωρητικά ότι κόκκοι σε μορφή δίσκου έδωσαν καλύτερη ενίσχυση από βελονοειδούς ή σφαιρικής μορφής κόκκους, αλλά αγνόησε την ανισοτροπία η οποία συνδέεται με τη χρήση μη σφαιρικών κόκκων σε σύνθετα υλικά.

Ο Chow [23] έχει ασχοληθεί με πρόβλημα για ευθυγραμμισμένους ελλειψοειδείς κόκκους και προέβλεψε το διάμηκες και εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας. Οι επιδράσεις από το μέγεθος του εγκλείσματος και από την επιφάνεια του εγκλείσματος αγνοήθηκαν. Όμως είναι απίθανο στην πράξη ότι τα εγκλείσματα μπορούν να διαταχθούν ομοιόμορφα με τρόπο που παραδέχεται ο Chow έτσι ώστε η πειραματική επιβεβαίωση των δύο θεωριών να είναι απαραίτητη.

Η κατανομή του μεγέθους των κόκκων επηρεάζει την περιεκτικότητα του εγκλείσματος στη μήτρα. Μίγματα από κόκκους με διαφορετικό μέγεθος εγκλεισμάτων μπορούν να διαταχθούν πιο πυκνά από εγκλείσματα ενός μεγέθους, διότι τα μικρά εγκλείσματα μπορούν να γεμίσουν το χώρο μεταξύ των στενά διατεταγμένων μεγάλων εγκλεισμάτων και να σχηματίσουν συσσωματώματα. Αυτοί οι κόκκοι που συσσωματώνονται είναι ικανοί να μεταφέρουν ένα μεγαλύτερο μέτρο ελαστικότητας για την ίδια περιεκτικότητα που προβλέπεται από τις περισσότερες θεωρίες.

Αυτή η επίδραση δημιουργείται όπου υπάρχει μια διαφορετική ενισχυτική ικανότητα άμμου, όπως έχει παρατηρηθεί από τους Ahmed και Jones [24]. Μια εμπειρική τροποποίηση στην εξίσωση Kerner η οποία περιλαμβάνει ένα συντελεστή αλληλεπίδρασης εγκλείσματος προτάθηκε από τον Dickie [25]. Κάθε μια από τις εξισώσεις εμφανίζεται ικανοποιητική στο να περιγράφει τα δεδομένα των διαφόρων ερευνητών.

Πρέπει να σημειωθεί το σχόλιο από τον Christensen [26] επάνω στην εξίσωση του Kerner, ότι το σαφές σφάλμα σ' αυτή την εξίσωση δεν μπορεί να δειχθεί λόγοι της συντομίας της παραγωγήσεως. Αυτό συνεπώς δημιουργεί αμφιβολίες στην εξίσωση του Kerner και στις επακόλουθες τροποποιήσεις.

Οι περισσότερες από τις θεωρίες οι οποίες εξηγούν την ενισχυτική δράση των εγκλεισμάτων παραδέχονται τέλεια πρόσφυση ανάμεσα στα εγκλείσματα και την πολυμερική μήτρα. Η περίπτωση της ελλιπούς προσφύσεως ήταν στην ελαστική περιοχή, όπως συζητήθηκε από τους Sato και Furukawa [9]. Αυτοί παραδέχονται ότι οι συνδεδεμένοι κόκκοι λειτουργούν ως οπές και προβλέπουν μείωση στα μέτρα ελαστικότητας με την αύξηση της περιεκτικότητας σε έγκλεισμα.

Μπορεί να υποστηριχθεί ότι οι μη συνδεδεμένοι κόκκοι δεν λειτουργούν εντελώς ως οπές, επειδή αυτοί συγκρατούν τη μήτρα από την κατάρρευση. Σε αυτή την περίπτωση το μέτρο ελαστικότητας συστήματος εγκλεισμάτων πρέπει να αυξάνει με την αύξηση περιεκτικότητας του εγκλείσματος, η οποία είναι η γενικώς αναμενόμενη συμπεριφορά.

Μια μεταβολή στην πρόσφυση μήτρας - εγκλεισμάτων έχει μικρότερη επίδραση στα μέτρα ελαστικότητας από ότι στην αντοχή. Το τελευταίο είναι περισσότερο εξαρτώμενο από την κατεργασία της επιφάνειας. Στην πραγματικότητα ο βαθμός πρόσφυσης δεν φαίνεται να είναι σημαντικός παράγοντας όσο οι δυνάμεις τριβής ανάμεσα στις φάσεις δεν υπερβαίνονται από την εφαρμοζόμενη τάση.

Οι Spanoudakis και Young [27] εξέτασαν εγκλείσματα γυαλιού σε εποξειδική ρητίνη και βρήκαν ότι οι καλύτερες συνολικές μηχανικές ιδιότητες αποκτήθηκαν από σύνθετα υλικά που περιείχαν κόκκους οι οποίοι είχαν εμβαπτισθεί σε ουσία (coupling agent) προς αύξηση της προσφύσεως μήτρας - εγκλείσματος.

Είναι ξεκάθαρο από τις προηγούμενες αναφορές ότι τα μέτρα ελαστικότητας ενός συστήματος εγκλεισμάτων είναι μια λεπτομερειακή συνάρτηση της μικροδομής, όπως επίσης και της ποιότητας πρόσφυσης μεταξύ των δύο φάσεων.

3.5 Δυναμικά μέτρα ελαστικότητας

Τα ιξωδοελαστικά, καθώς και τα σύνθετα υλικά, χρησιμοποιούνται εκτεταμένα σαν κατασκευαστικά υλικά. Για το λόγο αυτό απαραίτητος κρίνεται ο έλεγχος των υλικών αυτών πριν τη σχεδίαση των τελικών προϊόντων. Οι συνηθέστεροι έλεγχοι βασίζονται σε μετρήσεις:

- Ερπυσμού.
- Χαλάρωσης τάσεων.
- Δυναμομηχανικής φόρτισης.

Με τις παραπάνω μετρήσεις συλλέγουμε δεδομένα που σχετίζουν την τάση, την ανηγμένη παραμόρφωση, τη θερμοκρασία και τον χρόνο.

3.5.1 Δυναμομηχανική φόρτιση

Η δυναμομηχανική φόρτιση χρησιμοποιείται με σκοπό να ληφθούν πληροφορίες, με τις οποίες θα γίνει δυνατός ο διαχωρισμός της ελαστικής από την ιξώδη απόκριση των υλικών. Στα πειράματα δυναμομηχανικής φόρτισης η τάση ή η παραμόρφωση, αντί να είναι συναρτήσεις βήματος (step functions), είναι αρμονικές συναρτήσεις της γωνιακής συχνότητας ω. Τα αντίστοιχα δυναμικά μέτρα που μετράμε μέσω των πειραμάτων αυτών είναι συναρτήσεις του ω.

Με τα δυναμικά πειράματα, μελετούμε τη συμπεριφορά των υλικών όταν σε αυτά επιβάλλονται περιοδικά μεταβαλλόμενες δυνάμεις. Γενικά, η επιβαλλόμενη δύναμη καθώς και η προκύπτουσα παραμόρφωση είναι ημιτονοειδείς συναρτήσεις του χρόνου. Κατά τα δυναμικά πειράματα είναι δυνατόν να μετρήσουμε ταυτόχρονα ένα ελαστικό μέτρο και τη μήχανικη απόσβεση (mechanical damping). Το ελαστικό μέτρο μπορεί να είναι μέτρο διατμήσεως, μέτρο εφελκυσμού ή μέτρο διογκόσεως, ανάλογα με το πείραμα. Η μηχανική απόσβεση μας δίνει το μέτρο της ενέργειας που δαπανάται υπό τη μορφή θερμότητος κατά την παραμόρφωση του υλικού.

Μπορούμε γενικά, να κατατάξουμε τα σώματα σε τρεις κατηγορίες όσον αφορά την απόκριση τους στα δυναμικά πειράματα:

1. ***Τέλεια ελαστικά σώματα*:**

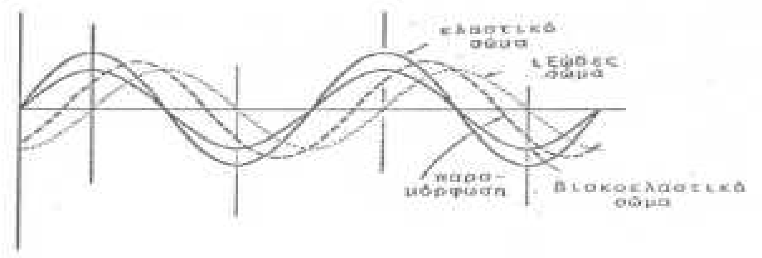
Δεν παρουσιάζουν μηχανική απόσβεση. Τα σχεδόν τέλεια ελαστικά σώματα αποθηκεύουν δυναμική ενέργεια όταν παραμορφώνονται. Η ενέργεια αυτή μετατρέπεται σε κινητική όταν αφαιρείται το εξωτερικό φορτίο και το σώμα επιστρέφει στις αρχικές του διαστάσεις.

2. ***Ιξώδη ρευστά σώματα:***

Αντίθετα, στην περίπτωση των ιξώδων ρευστών (viscous liquids) όλη η ενέργεια που χρησιμοποιήθηκε για την παραμόρφωση τους, μετατρέπεται σε θερμότητα. Αφού τα ρευστά δεν μπορούν να αποθηκεύσουν δυναμική ενέργεια, έτσι παρουσιάζουν μεγάλη δυναμική απόσβεση.

3. ***Βισκοελαστικά σώματα:***

Εμφανίζουν συμπεριφορά ενδιάμεση μεταξυ εκείνων των τέλειων ελαστικών σωμάτων και των ιξώδων ρευστών. Έτσι, όταν τα βισκοελαστικά σώματα παραμορφώνονται, ένα μέρος της ενέργειας αποθηκεύεται σε αυτά με τη μορφή δυναμικής ενέργειας και η υπόλοιπη ενέργεια μετετρέπεται σε θερμότητα. Η ενέργεια που χάνεται σαν θερμότητα, εκδηλώνεται ως μηχανική απόσβεση.



Σχήμα 3.4: Διάγραμμα χρόνου - τάσης για ελαστικό, ιξώδες και βισκοελαστικό σώμα.

Το πεδίο των δυναμικών μετρήσεων είναι σχετικά νέο, αλλά ήδη έχει καταστεί μία από τις πλέον σημαντικές τεχνικές τόσο από πρακτική, όσο και από επιστημονική άποψη. Με τη βοήθεια των δυναμικών πειραμάτων, μπορούμε να μετρήσουμε τη μεταβολη των δυναμικών ιδιοτήτων των υλικών, τόσο με τη μεταβολή της θερμοκρασίας, όσο και με τη μεταβολή της συχνότητας της φορτίσεως. Άλλωστε το μέτρο ελαστικότητας ή η ακαμψία (stiffness) ενός υλικού κάτω από συνθήκες λειτουργίας, είναι τα απαραίτητα στοιχεία για οποιαδήποτε κατασκευαστική εφαρμογή.

Τα δυναμικά πειράματα πλεονεκτούν έναντι των υπολοίπων μηχανικών πειραμάτων, καθώς καλύπτουν ευρύ φάσμα θερμοκρασιών σε μικρό χρονικό διάστημα και από τα αποτελέσματα τους μπορούμε να προβλέψουμε τη συμπεριφορά του υλικού, ενώ ταυτόχρονα, μπορούμε να υπολογίσουμε και άλλες μηχανικές ιδιότητες εκτός των δυναμικών.

Επιπλέον, τα δυναμικά πειράματα χρησιμεύουν στη μελέτη της μοριακης δομής των πολυμερών. Οι δυναμικές ιδιότητες είναι πολύ ευαίσθητες στις μεταβατικές θερμοκρασίες (glass transitions), την κρυσταλλικότητα, το είδος των χημικών δεσμών, τη συσσωμάτωση των μακρομορίων (molecular aggregation), και τα άλλα χαρακτηριστικά της μοριακής δομής των πολυμερικών αλυσίδων (polymer chains) καθώς και στη μορφολογία των πολυμερών. Τέλος τα δυναμικά πειράματα χρησιμεύουν στην ανάλυση της χημικής σύνθεσης των πολυμερών.

Τα δυναμικά πειράματα πρέπει να εκτελούνται σε ευρύ φάσμα θερμοκρασιών και συχνοτήτων. Βέβαια, χρήσιμες πληροφορίες μπορούμε να λάβουμε ακόμα και στην περίπτωση όπου μετρούμε τα δυναμικά μέτρα και τη μηχανική απόσβεση διατηρώντας τη συχνότητα σταθερή και μεταβάλλοντας τη θερμοκρασία. Στην περίπτωση που διατηρούμε τη συχνότητα σταθερή, είναι προτιμότερο η συχνότητα αυτή να είναι χαμήλη, της τάξης του 1 Hz, δεδομένου ότι τα δυναμικά μεγέθη που μετρόνται σε αυτές τις συχνότητες, μπορούν να συγκριθούν με τα αντίστοιχα στατικά μεγέθη.

3.5.2 Δυναμομηχανικές μετρήσεις

Είναι γνωστό ότι τα περισσότερα στερεά όταν υπόκεινται σε παραμόρφωση υπακούουν στο νόμο του Hooke:

$$\sigma = E\ \varepsilon$$

Υποθέτοντας ότι υποβάλλουμε το υλικό σε ημιτονοειδή φόρτιση, τότε και η προκύπτουσα ανηγμένη παραμόρφωση θα είναι ημιτονοειδούς μορφής, της ίδιας μάλιστα συχνότητας με διαφορά φάσης δ. Οπότε αν:

$$\sigma = \sigma_0 \sin(\omega t) \qquad (3.24)$$

τότε

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \sin(\omega t - \delta) \qquad (3.25)$$

όπου:

σ_0 = το πλάτος της τάσης
ω = η κυκλική συχνότητα, ω = 2πf
f = η συχνότητα ταλαντώσεων
t = χρόνος

Στην περίπτωση των δυναμικών πειραμάτων, τόσο η τάση όσο και η παραμόρφωση περιγράφονται από τα αντίστοιχα μιγαδικά μεγέθη, ως εξής:

$$\sigma^* = \sigma_0 e^{i\omega t} \tag{3.26}$$

$$\varepsilon^* = \varepsilon_0 e^{i(\omega t - \delta)} \tag{3.27}$$

οπότε μπορούμε να ορίσουμε το **μιγαδικό μέτρο ελαστικότητος Ε*** ως εξής:

$$E^* = E' + iE'' = \frac{\sigma^*}{\varepsilon^*} \tag{3.28}$$

και αντικαθιστώντας τα σ* και ε* από τους παραπάνω τύπους θα πάρουμε:

$$E^* = E' + iE'' = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} e^{i\delta} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\left(\cos\delta + i\sin\delta\right)$$

Επομένως, προκύπτει:

$$E' = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\cos\delta \tag{3.29}$$

και

$$E'' = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\sin\delta \tag{3.30}$$

Στις παραπάνω σχέσεις, το **Ε'** που είναι το πραγματικό μέρος του μιγαδικού μέτρου ελαστικότητος ονομάζεται **δυναμικό μέτρο ελαστικότητος,** ενώ το **Ε''** που είναι το φανταστικό μέρος του μιγαδικού μέτρου ελαστικότητας, ονομάζεται **μέτρο απωλειών**.

Η τάση που δεν βρίσκεται σε φάση με την παραμόρφωση, αναλύεται σε δύο συνιστώσες, η μία βρίσκεται σε φάση με την παραμόρφωση και η άλλη διαφέρει από αυτήν κατά φάση π/2. Έτσι μπορούμε να έχουμε έναν ποιοτικό προσδιορισμό των Ε' και Ε''.

- **Δυναμικό μέτρο Ελαστικότητας Ε'**

Το δυναμικό μέτρο ελαστικότητας Ε' είναι το πραγματικό μέρος του μιγαδικού μέτρου ελαστικότητας. Ισούται δε, με το λόγο μεταξύ του μέρους της τάσης που βρίσκεται σε φάση με την παραμόρφωση, προς την τιμή αυτής της παραμόρφωσης. Το δυναμικό μέτρο ελαστικότητας εκφράζει την ποσότητα της ενέργειας που λαμβάνεται και που εκλύεται από μία μονάδα κάποιου όγκου ενός σώματος σε διάρκεια μιας περιόδου. Για ταλαντώσεις σταθερού πλάτους η τιμή του δυναμικού μετρου ελαστικότητας Ε' αυξάνει (ή μένει σταθερη) με κάθε αντίστοιχη αύξηση της συχνότητας.

- **Μέτρο Απωλειών Ε''**

Το μέτρο απωλειών Ε'' είναι ο λόγος μεταξύ του μέρους της τάσης που βρίσκεται σε διαφορά φάσης π/2 με την παραμόρφωση, προς την τιμή της παραμόρφωσης. Το μέτρο απωλειών Ε'' εκφράζει το μέρος εκείνο της ενέργειας της ελαστικής ταλάντωσης που χάνεται υπό τη μορφή θερμότητας κατά τη διάρκεια μίας περιόδου ταλάντωσης. Όταν η διαφορά φάσης ανάμεσα στην τάση και την παραμόρφωση γίνεται μέγιστη, τότε το μέτρο απωλειών Ε'' λαμβάνει την μέγιστη τιμή. Κατά τον τρόπο αυτό, το μέτρο απωλειών Ε'' εκφράζει τη διασπορά της ενέργειας της ταλαντώσης σε ένα βισκοελαστικό (ή σε ένα σύνθετο) υλικό.

- **Σύνθετο (ή Μιγαδικό) Μέτρο Ελαστικότητας**

Ως σύνθετο (ή αλλιώς μιγαδικό μέτρο ελαστικότητος) ορίζεται ο μιγαδικός αριθμός:

$$E^* = E' + iE''$$

Με μέτρο :

$$\left|E^*\right| = \sqrt{\left(E'\right)^2 + \left(E''\right)^2} \qquad (3.31)$$

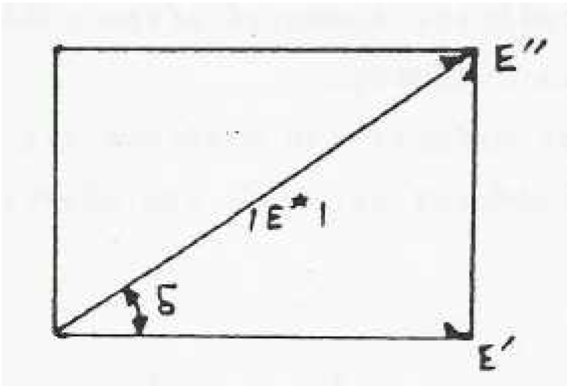
Από την άλλη μεριά, η σχέση μεταξύ του πλάτους των τιμών της τάσης και της παραμόρφωσης μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\frac{\pm_{-}}{£_{-}} = \sqrt{\left(E'\right)^2 + \left(E''\right)^2} \qquad (3.32)$$

Η διαφορά φάσης μεταξύ τάσης-παραμόρφωσης είναι καθορισμένη συνήθως από την κλίση των μηχανικών απωλειών.

$$\tan ¢ = \frac{E''}{E'} \qquad (3.33)$$

Οι σχέσεις μεταξύ του μιγαδικού μέτρου ελαστικότητας Ε* και της διαφοράς φάσης (τάσης – παραμόρφωσης) δ, μπορούν εύκολα να αποδοθούν απο το διανυσματικό διάγραμμα του παρακάτω σχήματος:



Σχήμα 3.5 Ανάλυση μιγαδικού μέτρου ελαστικότητας.

$$E' = \left|E^*\right| \cos ¢ \qquad (3.34)$$

$$E'' = \left|E^*\right| \sin ¢ \qquad (3.35)$$

Παρατηρούμε ότι, όπως προκύπτει και από τις παραπάνω σχέσεις, αν ένα σώμα είναι ιδανικά ελαστικό, τότε έχουμε διαφορά φάσης (τάσης – παραμόρφωσης) *δ=0* και $\left|E^*\right|$=*E'*. Απλούστερα δήλαδη, το μέτρο ελαστικότητας ενός σώματος είναι πραγματικός αριθμός μόνον εφόσον το σώμα είναι ιδανικά ελαστικό. Στην πραγματικότητα κανένα σώμα δεν είναι ιδανικά ελαστικό. Όλα τα στέρεα σώματα έχουν μαζί και ελαστικές και ιξώδεις ιδιότητες μέχρι ένα ορισμένο μέγεθος. Βέβαια, η ιξώδης συμπεριφορά σε πολλά από αυτά εκδηλώνεται τόσο αδύναμα, ώστε πρακτικά τα υλικά αυτά να θεωρούνται ιδανικά ελαστικά.

- **Αλλά σύνθετα μέτρα ελαστικότητας**

Μερικές φορές εισάγεται η έννοια του μιγαδικού μέτρου ενδόσεως

$$D^* = \frac{1}{E^*} = D' - iD'' \tag{3.36}$$

όπου το D' ονομάζεται δυναμικό μετρο ενδόσεως και το D'' ονομάζεται απώλεια ενδόσεως.

Ακολουθούν οι σχέσεις που συνδέουν τις συνιστώσες του σύνθετου μέτρου ενδόσεως με αυτές του σύνθετου μέτρου ελαστικότητας.

$$D^* = \frac{\frac{1}{E'} - i\frac{1}{E''}\tan\delta}{1+\tan^2\delta} \tag{3.37}$$

$$D' = \frac{\frac{1}{E'}}{1+\tan^2\delta} \tag{3.38}$$

$$D'' = \frac{\frac{\tan\delta}{E''}}{1+\tan^2\delta} \tag{3.39}$$

Για να περιγραφεί η βισκοελαστική συμπεριφορά ενός ισότροπου σώματος, χρειάζονται δύο ανεξάρτητες μιγαδικές σταθερές ελαστικότητας: το μιγαδικό μέτρο ελαστικότητος ***E**** και το μιγαδικό μέτρο διάτμησης ***G*.***

Δύο ακόμα σημαντικά μεγέθη είναι ο μιγαδικός λόγος του Poisson ***ν**** και το μιγαδικό μέτρο διόγκωσης ***K*.*** Τα δύο αυτά μεγέθη δίδινται από τις σχέσεις:

$$\nu^* = \nu' - i\nu'' = \frac{E^*}{2G^*} - 1 \tag{3.40}$$

$$K^* = K' + K'' = \frac{E^*}{3}\frac{1}{1-2\nu} \tag{3.41}$$

3.5.3 Δυναμικές μηχανικές ιδιότητες των συνθέτων υλικών

Οι χρονικά εξαρτημένες μηχανικές ιδιότητες των πολυμερών με ενίσχυση εγκλεισμάτων είναι διαφορετικές από εκείνες των μη ενισχυμένων. Τρεις είναι οι παράγοντες οι οποίοι επηρεάζουν κυρίως αυτές τις ιδιότητες :

- Οι ιδιότητες του επιφανειακού στρώματος του πολυμερούς.
- Ο σχηματισμός πρόσθετων δεσμών πολυμερούς-επιφάνειας.
- Η παρουσία εγκλεισμάτων.

Ειδικά για τις εποξειδικές ρητίνες οι οποίες χρησιμοποιούνται πολύ συχνά για μήτρα σύνθετων υλικών, έχει γίνει αρκετή έρευνα πάνω στη δυναμική μηχανική συμπεριφορά τους, όταν είναι ενισχυμένες με εγκλείσματα ή ίνες. Οι Dally και Broutman έκαναν έρευνα για την κόπωση αυτών των υλικών για συχνότητα μέχρι 40Hz. Ο Plunkett διερεύνησε τις πειραματικές μεθόδους για την μέτρηση του συντελεστη απόσβεσης και υπέδειξε κάποιες προφυλάξεις οι οποίες πρέπει να λαμβάνονται όταν γίνονται μετρήσεις. Ο Murayama ανέπτυξε μια νέα μέθοδο για την μέτρηση των δυναμικών μηχανικών ιδιοτήτων σε κάμψη των συνθέτων υλικών για διάφορες θερμοκρασίες. Επίσης, διάφοροι ερευνητές αναφέρουν αποτελέσματα για τα δυναμικά μέτρα ελαστικότητας και τον συντελεστη απόσβεσης ύστερα από πειράματα ταλαντώσεων που έγιναν σε δοκούς και ράβδους. Οι Schultz και Tsai αναφέρουν καλά αποτελέσματα για τα δυναμικά μέτρα ελαστικότητας, αλλά μόνο ποιοτική συμφωνία για τον συντελεστή απόσβεσης και μια ανώμαλη εξάρτηση από την συχνότητα.

3.6 Παράμετροι που χαρακτηρίζουν την αντοχή των κοκκωδών υλικών

Όπως έχει επισημανθεί από τον Nielsen [28] οι θεωρίες για την αντοχή των συνθέτων υλικών με εγκλείσματα είναι λιγότερο αναπτυγμένες από αυτές για τα μέτρα ελαστικότητας. Εκτός από την περίπτωση για ελαστικό (rubber) με εγκλείσματα, υπάρχουν σημαντικοί περιορισμοί.

3.6.1 Τάση Θραύσης

3.6.1.1 Μοντέλο του Broutman

Στην προσέγγιση του Broutman [29], υποτίθεται ότι το σύνθετο υλικό αστοχεί όταν ένα στοιχείο υποστεί θραύση ως αποτέλεσμα μιας συγκεντρώσεως τάσης γύρω από το έγκλεισμα. Έπεται ότι η αντοχή πίπτει ταχέως με την προσθήκη μικρών ποσοτήτων εγκλεισμάτων και παραμένει βασικά σε αυτό το επίπεδο με περαιτέρω προσθήκες εγκλεισμάτων.

Με αυτήν την υπόθεση αυτοί χρησιμοποίησαν την ανάλυση για πεπερασμένα στοιχεία για να μοντελοποιήσουν το σύνθετο υλικό και συσχέτισαν τα αποτελέσματα με τις πειραματικές αντοχές υλικού με εγκλείσματα από σφαίρα γυαλιού μέσα σε θερμοσκληρυνόμενη ρητίνη.

Οι θεωρητικές προβλέψεις δεν έχουν καλή σύμπτωση με τα πειραματικά δεδομένα διότι το μοντέλο αγνοεί αλληλεπίδραση κόκκων. Επιπλέον τα σύνθετα υλικά είναι πιθανόν να μην έχουν αστοχήσει ως αποτέλεσμα της αστοχίας του πρώτου στοιχείου.

3.6.1.2 Ο νόμος των δυνάμεων (The power law)

Η δεύτερη προσέγγιση υποθέτει ότι η αντοχή συνθέτου υλικού προσδιορίζεται από την (υπάρχουσα) έκταση της φέρουσας φορτίου μήτρας λόγω της παρουσίας του εγκλείσματος [30,31].

Στην περίπτωση μιας πτωχής προσφύσεως ανάμεσα στη μήτρα και το έγκλεισμα και της απουσίας συγκέντρωσης τάσεως στην ενδιάμεση επιφάνεια κόκκου - μήτρας, η αντοχή περιγράφεται από το νόμο δυνάμεως:

$$\sigma_{cu} = \sigma_{mu}(1 - aU_f{}^n) \qquad (3.42)$$

όπου σ_{cu} και σ_{mu} οι αντοχές (τάσεις θραύσεως) του συνθέτου και της μήτρας αντιστοίχως, α και n είναι σταθερές εξαρτώμενες από το υποτιθέμενο σχήμα κόκκου και την ταξινόμηση στο μοντέλο του συνθέτου.

Ο Nielsen [30] έχει εισηγηθεί έναν παράγοντα συγκεντρώσεως τάσεως, K με προτεινόμενη τιμή το 0,5. Για κυβικούς κόκκους μέσα σε κυβική μήτρα η προηγούμενη εξίσωση μπορεί να γραφεί ως:

$$\pm_{cu} = \pm_{mu}(1 - U_f^{\ 2/3})K \qquad (3.43)$$

Οι Nicolais και Narkis [31] θεώρησαν μια κυβική μήτρα ενισχυμένη με ομοιομόρφως διασκορπισμένους κόκκους όπου υποτίθεται ότι η θραύση γίνεται στην ελάχιστη εγκάρσια διατομή συνεχούς φάσεως. Η σχέση για την αντοχή δίνεται ως:

$$\pm_{cu} = \pm_{mu}(1 - 1,21 U_f^{\ 2/3}) \qquad (3.44)$$

Ο Piggott και Leidner [32] υποστήριξαν ότι η υποτιθέμενη ομοιόμορφη κατανομή των εγκλεισμάτων σε πάρα πολλά μοντέλα είχε μικρή πιθανότητα επιτεύξεως στην πράξη και προτείνουν μια εμπειρική σχέση:

$$\pm_{cu} = K \pm_{mu} - bU_f \qquad (3.45)$$

όπου K: συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων και b μια σταθερά εξαρτώμενη από την πρόσφυση κόκκου - μήτρας.

Ο Landon [33] πρότεινε μια εξίσωση όμοια:

$$\pm_{cu} = \pm_{mu}(1 - U_f) K U_f d \qquad (3.46)$$

όπου d είναι η μέση διάμετρος κόκκου και K είναι η κλίση στο διάγραμμα εφελκυόμενης αντοχής μέσης διαμέτρου κόκκου.

3.6.1.3 Η εξίσωση των Leidner – Woodhams

Μια απλούστερη αλλά πιο λεπτομερής προσέγγιση έχει αναπτυχθεί από τον Leidner [34] όπου το μοντέλο του σύνθετου υλικού αποτελείται από σφαιρικούς κόκκους μέσα σε μη ελαστική μήτρα. Για να εφαρμοστεί η θεωρία ενισχύσεως το μέγεθος κόκκου θα προσεγγισθεί στον κύλινδρο. Κατ’ αυτόν τον τρόπο μπορεί να προσδιορισθεί η κατανομή τάσεων στο έγκλεισμα στο σημείο θραύσεως.

Στην περίπτωση μη καλώς συνδεδεμένων κόκκων, η μεταβίβαση τάσεως ανάμεσα στον κόκκο και την μήτρα υποτίθεται ότι γίνεται ως αποτέλεσμα του συνδυασμού της τριβής μεταξύ κόκκου - μήτρας και των παραμενουσών θλιπτικών τάσεων οι οποίες ενεργούν επάνω στην ενδιάμεση επιφάνεια κόκκου - μήτρας.

Στην περίπτωση από καλά συνδεδεμένους κόκκους οι τάσεις μεταβιβάζονται δια μέσου μηχανισμού διάτμησης. Η μέγιστη τάση είναι στο κόκκο, συνεπώς εξαρτάται από την αντοχή του δεσμού κόκκου - μήτρας.

Η τελική εφελκυστική τάση (αντοχή) του συνθέτου ελήφθη απλά ως το άθροισμα του μεγίστου φορτίου που αναλαμβάνεται από την μήτρα και από το έγκλεισμα και δίνεται ως:

$$\pm_{cu} = (\pm_a + 0,83^2{}_m) + \pm_a K(1 - U_f) \qquad (3.47)$$

για καλή πρόσφυση μεταξύ των δύο φάσεων και

$$\pm_{cu} = 0,83\pm_{th} a U_f + k\pm_{mu}(1 - U_f) \qquad (3.48)$$

στην περίπτωση μη προσφύσεως μεταξύ των δύο φάσεων. Τα $σ_α$ και $σ_{mu}$ είναι η αντοχή του ενδιάμεσου επιφανειακού δεσμού και η αντοχή της μήτρας αντιστοίχως, $τ_m$ είναι η αντοχή σε διάτμηση της μήτρας, K είναι ο συντελεστής συγκεντρώσεως τάσεων , k είναι μια παράμετρος η οποία εξαρτάται από το μέγεθος και σχήμα των κόκκων, και $σ_{th}$ είναι η θλιπτική θερμική τάση η οποία ενεργεί επάνω στο σύνορο του κόκκου και α είναι ο συντελεστής τριβής.

Υπήρξαν προσπάθειες για τον συσχετισμό της αντοχής των συνθέτων υλικών ενισχυμένων με κόκκους με τη διάμετρο d των εγκλεισμάτων. Για παράδειγμα: ο Hojo [35,36] έχει βρει ότι η αντοχή εποξειδικής ρητίνης με εγκλείσματα πυριτίου ελαττώνεται όταν το μέγεθος κόκκου αυξάνει ακολουθώντας μια σχέση της μορφής:

$$\pm_{cu} = \pm_{mu} k d^{-1/2} \qquad (3.49)$$

όπου k είναι σταθερά και d είναι η μέση διάμετρος κόκκου.

Ο Schrager [37] πρότεινε κάποιο μοντέλο που περιγράφεται από εξίσωση διαφορετικής μορφής από τις προηγούμενες:

$$\sigma_{cu} = \sigma_{mu} \exp(-rU_f) \qquad (3.50)$$

με r = 2.66 που βρέθηκε πειραματικά.

Το μειονέκτημα αυτού του μοντέλου είναι ότι είναι ακριβώς για περιορισμένη περιοχή εγκλεισμάτων. Η Εξ.(3.46) είναι αντίστοιχη με εκείνη που προτάθηκε από τον Passmore [38] για την περίπτωση των πορωδών συστημάτων:

$$\sigma_{cu} = \sigma_{fo} \exp(-aP) \qquad (3.51)$$

όπου σ_{fo} είναι η αντοχή της μήτρας χωρίς πόρους, α μια σταθερά και P η κατ' όγκο περιεκτικότητα σε πόρους.

3.6.1.4 Περιορισμοί των θεωρητικών μοντέλων σχετικά με την αντοχή των σύνθετων υλικών.

Όπως προαναφέρθη, το μέγεθος των κόκκων επηρεάζει πολύ την αντοχή σε εφελκυσμό των συστημάτων. Γενικά η αντοχή σε εφελκυσμό αυξάνει με την ελάττωση του μεγέθους. Η αύξηση της ενδιάμεσης επιφάνειας μεταξύ δύο φάσεων παρέχει έναν πολύ αποτελεσματικό δεσμό στην επιφάνεια μεταξύ των δύο φάσεων και θεωρείται ότι είναι πολύ σημαντικός παράγοντας. Το μέγεθος κόκκου είναι επίσης σχετικό με την εξάρτηση από το μέγεθος της ατέλειας του υλικού.

Ο Goodier [39] έχει αποδείξει ότι το τασικό πεδίο κοντά σ' έναν κόκκο, είναι ανεξάρτητο από το μέγεθος του κόκκου. Όμως ο όγκος του πολυμερούς που υφίσταται συγκέντρωση τάσεων, αυξήθηκε με την αύξηση στο μέγεθος του κόκκου, άρα η πιθανότητα εύρεσης μιας μεγάλης ατέλειας αυξάνει με την αύξηση του μεγέθους του κόκκου.

Η επίδραση από την διεπιφανειακή (λεπτή επιφάνεια μεταξύ δύο φάσεων) πρόσφυση επί της αντοχής μπορεί να δικαιολογηθεί με όμοιο τρόπο εφόσον ένας αδύναμος δεσμός μεταξύ εγκλεισμάτων και μήτρας θα δράσει ως μια υπάρχουσα ατέλεια που θα παράγει μια κοιλότητα ίση με το μέγεθος της.

Η μορφή (σχήμα) εγκλείσματος αναμένεται να παίζει σημαντικό ρόλο στον προσδιορισμό της αντοχής του συστήματος εγκλεισμάτων. Όταν έχουμε εγκλείσματα τα οποία δεν έχουν κανονική μορφή, η εξασθένιση της αντοχής του συστήματος εγκλεισμάτων οφείλεται σε μεγάλη συγκέντρωση τάσεων που συζευγνύεται με επίδραση μεγέθους. Σε στρογγυλεμένες ρωγμές και εγκλείσματα, η συγκέντρωση τάσης είναι λιγότερο σημαντική παρά σε εγκλείσματα με οξείες (κοπτερές) γωνίες.

Η προαναφερθείσα αναφορά αποδεικνύει καθαρά ότι αυτά τα υπάρχοντα μοντέλα για την πρόβλεψη της αντοχής θέτουν ένα άνω όριο στην αντοχή ενός συστήματος εγκλεισμάτων.

Όταν γίνεται πρόβλεψη της αντοχής ενός υλικού με έγκλεισμα με την χρησιμοποίηση του νόμου των δυνάμεων (power law), η εκλογή των κατάλληλων σταθερών επηρεάζεται από το σχήμα των κόκκων και την διάταξη τους μέσα στο γεωμετρικό μοντέλο. Επιπλέον η συγκέντρωση τάσεων θα χαμηλώσει αυτές τις τιμές κατά ακαθόριστη ποσότητα.

Από την άλλη, στις αναλύσεις των Leidner και Woodhams [34], οι θερμικές τάσεις (σ_{th}) της αντοχής του δεσμού μήτρας – κόκκου, είναι δύσκολο να μετρηθούν για πραγματικά σύνθετα υλικά. Στις πολύ χαμηλές περιεκτικότητες κατ' όγκο U_f μπορούν να γίνουν εκτιμήσεις για τις θερμικές τάσεις, αλλά σε μεγαλύτερες περιεκτικότητες κατ' όγκο Uf οι υπολογισμοί περιπλέκονται από την παρουσία γειτονικών κόκκων.

3.6.2 Παραμόρφωση θραύσης

Παρακάτω αναφέρονται τα διάφορα θεωρητικά μοντέλα που έχουν προβλεφθεί από τους διάφορους ερευνητές για την Παραμόρφωση θραύσης. Ο Smith [40,41] πρότεινε τον παρακάτω τύπο με ε_c και ε_m την παραμόρφωση πραύσης του σύνθετου και της μήτρας αντίστοιχα:

$$£_c = £_m \left(1 - 1{,}106 U_f^{\,1/3}\right) \qquad (3.52)$$

Ο Bueche [20,21] πρότεινε μια αντίστοιχη εξίσωση χρησιμοποιώντας ένα μοντέλο από κυβικά σωματίδια σε κυβική διάταξη:

$$£_c = £_m \left(1 - U_f^{1/3}\right) \qquad (3.53)$$

Ο Nielsen [28,30] πρότεινε την εξίσωση που έχει την ίδια μορφή με την παραπάνω εξίσωση:

$$£_c = £_m \left(1 - U_f^{1/3}\right) \qquad (3.54)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις στηρίζονται περισσότερο στο πείραμα και λιγότερο στη θεωρία και συνοψίζουν τη συμπεριφορά τάσεων - παραμορφώσεων στα σύνθετα υλικά με κοκκώδες έγκλεισμα. Περιγράφουν την επίδραση διαφόρων παραγόντων, όπως της κατ’ όγκο περιεκτικότητας του εγκλείσματος, των συσσωματωμάτων του μεγέθους των σωματιδίων, του μέτρου πρόσφυσης μεταξύ μήτρας και εγκλείσματος στην μηχανική συμπεριφορά των σύνθετων υλικών.

3.6.3 Ο μηχανισμός της ενισχυτικής δράσης των εγκλεισμάτων στα πολυμερή.

Η ενσωμάτωση μέσα στη μήτρα του πολυμερούς πολύ λεπτών σωματιδίων ή ινωδών υλικών, ανόργανης ή οργανικής φύσης συνοδεύεται με αλλαγή των φυσικοχημικών, μηχανικών, θερμικών, ηλεκτρικών και άλλων ιδιοτήτων του υλικού, αν και η βασικότερη επιδίωξη μας είναι η βελτίωση των φυσικοχημικών ιδιοτήτων.

Ανάλογα με την αποτελεσματικότητα τους τα εγκλείσματα διακρίνονται σε ενεργά (είναι εκείνα που προκαλούν ενίσχυση) και σε αδρανή (είναι εκείνα που δεν βελτιώνουν τις ιδιότητες του υλικού, αλλά προκαλούν μόνο αλλαγή χρωματισμού και μείωση του κόστους).

Αναφορικά με τα ενεργά εγκλείσματα, μπορούμε να διακρίνουμε τη δραστηριότητα τους σε δομική, κινητική και θερμοδυναμική. Με τον όρο δομική δραστηριότητα εννοείται η ικανότητα του εγκλείσματος να επηρεάζει τη δομή του πολυμερούς. Έτσι με την ενσωμάτωση των εγκλεισμάτων στη μήτρα παρατηρούνται αλλαγές στο μέγεθος, στο σχήμα και στην κατανομή των δομικών μονάδων. Με τον όρο κινητική δραστηριότητα εννοείται η ικανότητα του εγκλείσματος να επηρεάζει διάφορες θερμοδυναμικές παραμέτρους του συνθέτου υλικού.

Η ενίσχυση του υλικού λόγω των εγκλεισμάτων μπορεί να συσχετισθεί με την ενέργεια W θραύσης του πολυμερούς. Μετριέται από το εμβαδόν της επιφάνειας κάτω από την καμπύλη τάσεων - παραμορφώσεων . Όπου L_b το μήκος του δοκιμίου στη θραύση L_0 το αρχικό μήκος και σ η επιβαλλόμενη τάση.

$$W = \int_{L_0}^{L_{bTo}} \pm \, dL \qquad (3.55)$$

Η αύξηση της ενέργειας θραύσης ανά μονάδα όγκου με την παρουσία εγκλεισμάτων μπορεί να θεωρηθεί σαν βασικό χαρακτηριστικό της ενισχυτικής δράσης των εγκλεισμάτων στα πολυμερή στην ελαστική κατάσταση.

Έτσι τα εγκλείσματα που αυξάνουν την ενέργεια θραύσης θεωρούνται ενεργά, ενώ εκείνα που δεν την αυξάνουν θεωρούνται αδρανή. Το μέγεθος της αύξησης ή της ελάττωσης εξαρτάται από τη φύση του εγκλείσματος.

Ένας άλλος τρόπος ελέγχου της ενισχυτικής δράσης των εγκλεισμάτων είναι η επίδραση τους στην αντοχή των συνθέτων υλικών. Αυτή η αντοχή επηρεάζεται από πολλούς παράγοντες λόγω της αλληλεπίδρασης μήτρας και εγκλείσματος. Ένας σημαντικός παράγοντας που επηρεάζει τις φυσικοχημικές και μηχανικές ιδιότητες του συνθέτου υλικού είναι η διαφοροποιούμενη δομή της ενδιάμεσης φάσης.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η μηχανική αντοχή του συνθέτου υλικού αυξάνει ανάλογα με την περιεκτικότητα και τη λεπτότητα του εγκλείσματος. Το θεωρητικό όριο της περιεκτικότητας σε έγκλεισμα καθορίζεται από το ποσό του εγκλείσματος που κάνει πιθανή την ύπαρξη κάποιας ενδιάμεσης φάσης ή ενδιάμεσου στρώματος μεταξύ των σωματιδίων.

Έτσι η ενίσχυση των πολυμερών με την προσθήκη λεπτών κοκκωδών σωματιδίων οφείλεται στο σχηματισμό ενός συνεχούς ενισχυτικού σκελετού, σαν το αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης των σωματιδίων μεταξύ τους.

Παράλληλα η αντοχή του συνθέτου υλικού αυξάνει με την περιεκτικότητα σε έγκλεισμα, με τη βέλτιστη (Optimum) περιεκτικότητα όπου προκαλείται κορεσμός των κέντρων προσρόφησης μακρομορίων επάνω στην επιφάνεια του εγκλείσματος.

3.6.4 Ενέργεια θραύσης - στερρότητα.

Οι δύο θεμελιώδεις τρόποι με τους οποίους τα υλικά αντιδρούν στην επιβολή εξωτερικών δυνάμεων είναι η αλλαγή του όγκου τους και η αλλαγή του σχήματος τους. Η αλλαγή όγκου ενός στοιχειώδους κύβου μπορεί να γίνει με ομοιόθετη αλλαγή όλων των γραμμικών του διαστάσεων και προφανώς θα πρέπει να εξαρτάται μόνον από τις ορθές συνιστώσες των τάσεων (δηλαδή των παραμορφώσεων). Στην περίπτωση αυτή ο στοιχειώδης κύβος διατηρεί το σχήμα του , αλλά με νέες διαστάσεις των ακμών του.

Η αλλαγή σχήματος μπορεί να επιτευχθεί με δύο τρόπους:

- Με αλλαγή των γωνιών του κύβου χωρίς αισθητή αλλαγή των γραμμικών του διαστάσεων (πχ. περίπτωση καθαρής διατμήσεως).
- Με μη ομοιόθετη αλλαγή των γραμμικών διαστάσεων του στοιχειώδους κύβου οπότε αυτός μετατρέπεται σε στοιχειώδες ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Αυτό βέβαια σημαίνει ότι μερικές γωνίες, θα αλλάξουν τιμή, όπως εκείνες των διαγωνίων του. Επομένως, η αλλαγή σχήματος επιτυγχάνεται και από ορθές, και από διατμητικές τάσεις και άρα παραμορφώσεις.

Για τις αλλαγές αυτές απαιτείται η καταβολή εξωτερικού έργου που προσφέρεται από τη μηχανή επιβολής των φορτίων. Το έργο αυτό αποθηκεύεται στο δοκίμιο ως ενέργεια παραμορφώσεων η οποία αποτελείται από δύο προσθετέους, έναν που αντιστοιχεί στην αλλαγή όγκου και ονομάζεται ενέργεια μεταβολής όγκου και έναν που αντιστοιχεί σε αλλαγές σχήματος ή στρέβλωση του υλικού και καλείται στροφική ενέργεια. Προφανώς το άθροισμα των δύο αυτών όρων παριστά το σύνολο της ενέργειας παραμορφώσεων που αποθηκεύτηκε στο υλικό και ισούται με το έργο των εξωτερικών δυνάμεων που δαπανήθηκε για τη φόρτιση του δοκιμίου.

Το εμβαδόν του χωρίου ανάμεσα στην καμπύλη σ - ε και τον άξονα των παραμορφώσεων παριστάνει τη συνολική πυκνότητα της ενέργειας των παραμορφώσεων που έχει αποθηκευτεί στο υλικό ή καταναλωθεί από αυτό από αρχή της φορτίσεως μέχρι τη στιγμή που η τάση είναι σ και η αντίστοιχη παραμόρφωση ε. Όταν το ζεύγος (σ,ε) αντιστοιχεί στο σημείο θραύσεως Θ του υλικού τότε η συνολική πυκνότητα της ενέργειας παραμορφώσεων καλείται στερρότητα (toughness) του υλικού και αποτελεί μέτρο της απαιτούμενης από το υλικό ενέργειας για τη θραύση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Θεωρία Ενδιάμεσης φάσης

4.1 Γενικά – Ορισμός Ενδιάμεσης φάσης (interphase)

Μεταξύ των σπουδαιότερων παραγόντων οι οποίοι προσδιορίζουν την βισκοελαστική συμπεριφορά των συνθέτων υλικών από πολυμερή είναι η προσρόφηση πολυμερικών μακρομορίων εντός των κόκκων των εγκλεισμάτων, όπως επίσης και η πρόσφυση μεταξύ μήτρας και εγκλεισμάτων. Η προσρόφηση των πολυμερικών μορίων εντός των κόκκων, είναι η κυρία αιτία για την δημιουργία διαφορετικών διαμορφώσεων των μακρομορίων στα περίχωρα των κόκκων. Η αλλαγή της μορφής των μακρομορίων προσδιορίζει την περιοχή της ενδιάμεσης φάσης, η οποία έχει διαφορετική δομή και ιδιότητες από την μήτρα. Έτσι η παρουσία εγκλεισμάτων μέσα στην πολυμερική μήτρα καταλήγει σε μια ατέλεια του πολυμερικού δικτύου.

Είναι γνωστό [41-48] ότι οι ιδιότητες κατά τη χαλάρωση των πολυμερικών συνθέτων υλικών επηρεάζονται πολύ από την ύπαρξη ενδιάμεσης φάσης. Από αυτή την άποψη είναι πολύ σημαντική η μελέτη της θερμικής συμπεριφοράς αυτών των συνθέτων και η διαλογή πληροφοριών οι οποίες αφορούν την δομή και τις ιδιότητες της ενδιάμεσης φάσης καθώς επίσης και την επίδρασή της στην βισκοελαστική συμπεριφορά του συνθέτου συστήματος.

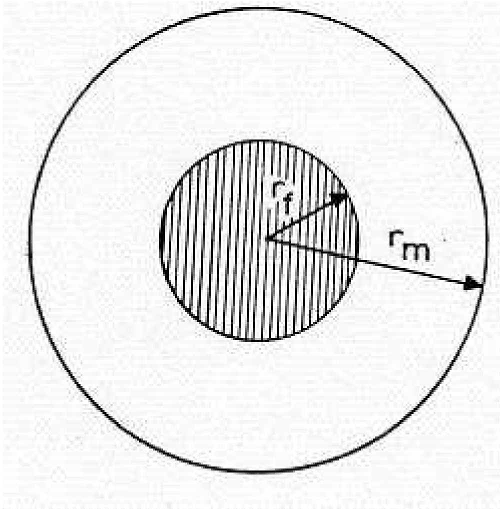
Όμως, η συμπεριφορά και οι ιδιότητες της ενδιάμεσης φάσης εξαρτώνται μεταξύ άλλων, από την πειραματική μέθοδο η οποία χρησιμοποιείται στις δοκιμές και αυτό διότι κάθε μία από τις πειραματικές μεθόδους χαρακτηρίζεται από τους δικούς της ιδιαίτερους περιορισμούς. Έτσι, κάθε μέθοδος τείνει να επιδείξει έναν ιδιαίτερο τύπο μοριακών κινήσεων ως συνέπεια των παραπάνω διαφορών, τα αποτελέσματα τα οποία λαμβάνονται από τις διαφορετικές μεθόδους είναι συχνά διαφορετικά, όταν συγκρίνονται μεταξύ τους. Το αποτέλεσμα αυτών των διαφορών είναι οι διαφορετικές τιμές για την θερμοκρασία μεταβάσεως στην υαλώδη κατάσταση, T_g, οι οποίες λαμβάνονται από διαφορετικές πειραματικές μεθόδους, όπως η θερμιδομετρία, διαστολομετρία, δυναμικές μετρήσεις κ.λ.π. [49, 50].

Επίσης, υπάρχουν διαφορές όσον αφορά την επίδραση της περιεκτικότητας των εγκλεισμάτων, U_f , στην θερμοκρασία T_g [51]. Αρκετοί ερευνητές βρήκαν ότι όταν αυξάνεται η περιεκτικότητα των κόκκων, αυξάνεται και η T_g, και ότι η σχέση αυτή είναι γραμμική. Άλλοι όμως βρήκαν ότι η T_g δεν επηρεάζεται σημαντικά από την περιεκτικότητα [52, 53, 54]. Μετρήσεις διαστολομετρίας οι οποίες έγιναν [55] σε ρητίνη ενισχυμένη με κόκκους μετάλλου έδειξαν ότι οι τιμές της T_g εξαρτώνται πολύ από την περιεκτικότητα του εγκλείσματος, και σε πολλές περιπτώσεις η T_g ελαττώνεται όταν αυξάνεται η περιεκτικότητα.

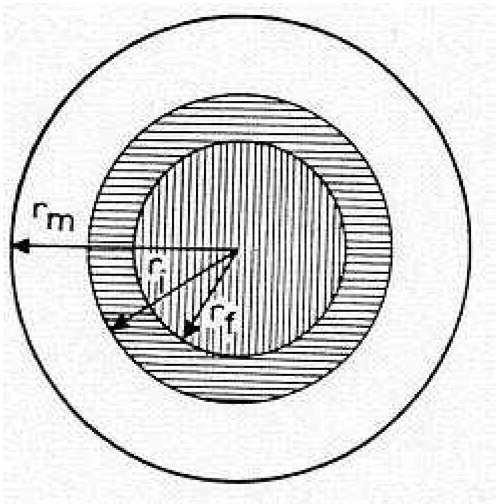
Στην περίπτωση μετρήσεων θερμιδομετρίας ή διαστολομετρίας μια παράμετρος η οποία επιδρά στη θέση των μεταβατικών θερμοκρασιών, είναι ο ρυθμός θέρμανσης. Έχει παρατηρηθεί [56, 57, 58] ότι, σε μετρήσεις D.S.C, η εξάρτηση από τον ρυθμό θέρμανσης, H, είναι τέτοια ώστε διαφορές της τάξεως των 15°C να μπορούν να παρατηρηθούν στις μεταβατικές θερμοκρασίες του πολυμερούς.

Στο Εργαστήριο Αντοχής Υλικών έχουν γίνει συστηματικές μετρήσεις θερμοχωρητικότητας επί δοκιμίων εποξειδικής ρητίνης και κόκκων σιδήρου [53]. Η επίδραση της περιεκτικότητας των εγκλεισμάτων και της διαμέτρου αυτών στην θερμική συμπεριφορά των δοκιμίων του συνθέτου υλικού έχει μελετηθεί εκτενώς. Έχει διερευνηθεί η επίδραση του ρυθμού θέρμανσης επί της T_g και έχει υπολογισθεί το πάχος και ο όγκος της ενδιάμεσης φάσης με βάση αυτές τις θερμικές μετρήσεις. Επίσης, έχουν γίνει ορισμένα πειράματα μικρότερης έκτασης (μία διάμετρος κόκκων) με δοκίμια εποξειδικής ρητίνης και κόκκους αλουμινίου για την διερεύνηση της επίδρασης της περιεκτικότητας, ρυθμού θέρμανσης και τον προσδιορισμό του πάχους της ενδιάμεσης φάσης.

Ένα μοντέλο με τρεις φάσεις, έγκλεισμα, μήτρα και ενδιάμεση φάση, το οποίο προκύπτει από το διφασικό μοντέλο (Σχήμα 4.1), με την ενδιάμεση φάση να έχει μεταβαλλόμενες ιδιότητες (μέτρο ελαστικότητας, λόγος Poisson, συντελεστής θερμικής διαστολής), έχει χρησιμοποιηθεί για τον θεωρητικό προσδιορισμό του μέτρου ελαστικότητας και συντελεστή θερμικής διαστολής του συνθέτου υλικού, με την εφαρμογή της θεωρίας ελαστικότητας (Σχήμα 4.2). Οι θεωρητικοί τύποι, οι οποίοι προέκυψαν με την εφαρμογή αυτού του μοντέλου, δύνανται να συγκριθούν με άλλους θεωρητικούς τύπους της βιβλιογραφίας καθώς επίσης και με πειραματικά αποτελέσματα.



Σχήμα 4.1 Μοντέλο Διφασικό (Έγκλεισμα-Μήτρα).



Σχήμα 4.2 Μοντέλο Τριφασικό (έγκλεισμα-ενδιάμεση φάση-μήτρα).

4.2 Υλικά και πειραματική διαδικασία

Τα υλικά των οποίων τα στοιχεία έχουν χρησιμοποιηθεί σ’ αυτήν την μελέτη είναι σύνθετα υλικά τα οποία κατασκευάσθηκαν στο Εργαστήριο Αντοχής Υλικών του Ε.Μ.Π. Η μήτρα των συνθέτων υλικών ήταν σε όλες τις περιπτώσεις εποξειδική ρητίνη του τύπου DGEBA (Diglycidyl Ether of Bisphenol A) με ισοδύναμο 185 - 192, με μοριακό βάρος μεταξύ 370 και 384, και με ιξώδες 15000 cP στους 25°C, πολυμεριζομένη εν ψυχρώ με 8% τριεθυλενική τετραμίνη. Οι ιδιότητες των συνιστωσών υλικών του συνθέτου υλικού μας φαίνονται στους ακόλουθους πίνακες (4.1 - 4.2).

Μέγεθος κόκκου (mm)	Ειδικός όγκος $\left(cm^3/100gr\right)$	Φαινόμενη πυκνότητα $\left(gr/cm^3\right)$
0,15	38-41	2,60-2,40

Πίνακας 4.1

Ιδιότητες της μήτρας και των εγκλεισμάτων

Ιδιότητες	Σύμβολα	Μονάδες	Σίδηρος	Ρητίνη
Σταθερές του Lame	λ μ	N / m^2 N / m^2	112×10^9 81×10^9	$3,34\times10^9$ $1,30\times10^9$
Μέτρο Ελαστικότητας	E	N / m^2	210×10^9	$3,53\times10^9$
Μέτρο Διογκώσεως	K	N / m^2	167×10^9	$4,21\times10^9$
Λόγος Poisson	ν	—	0,29	0,36
Πυκνότητα	ρ	gr / cm^3	7,80	1,19
Συντελεστής θερμικής διαστολής	α	C^{-1}	$15,00\times10^{-6}$	$65,26\times10^{-6}$

Πίνακας 4.2

Οι μηχανικές ιδιότητες της μήτρας *E* και *ν* έχουν μετρηθεί κατά την διάρκεια πειράματος ερπυσμού στους 20°C και σε χρόνο 15sec από την αρχή του πειράματος. Πρέπει να διευκρινισθεί ότι με a συμβολίζουμε τον συντελεστή θερμικής διαστολής για θερμοκρασίες κάτω της υαλώδους θερμοκρασίας T_g.

Όσον αφορά την παρασκευή των δοκιμίων, θερμαίνουμε το προπολυμερές στους 30°C περίπου για να ελαττωθεί η εσωτερική τριβή του και στην συνέχεια προσθέτουμε τις κατάλληλες ποσότητες αμίνης και μετάλλου. Ανακατώνουμε το μίγμα, και στη συνέχεια το τοποθετούμε σε κενό θάλαμο, έτσι ώστε να ελευθερωθούν όλες οι φυσαλίδες αέρος τις οποίες περιέχει το μίγμα.

Στη συνέχεια γίνεται απόχυση του μίγματος σ' ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο καλούπι από plexiglass, διαστάσεων 250*250*50 mm, το οποίο σφραγίσθηκε με ένα σκέπασμα από plexiglass, ούτως ώστε να είναι δυνατή η εκ' νέου ανάδευση του μίγματος για να έχουμε τελικά ένα όσο το δυνατότερο ομογενές προϊόν. Το μίγμα έμεινε μέσα στο καλούπι και σε θερμοκρασία περιβάλλοντος επί 24 ώρες. Στην συνέχεια, το στερεό πλέον σύνθετο υλικό, υποβλήθηκε σε θερμική κατεργασία διαρκείας 7 ημερών ως εξής:

Εισήχθη σε φούρνο, προγραμματισμένο, έτσι ώστε η θερμοκρασία να αυξάνει κατά 5°C/h, στη συνέχεια να παραμείνει σταθερά στους 100°C και τέλος να ελαττώνεται κατά 1°C/h έως τη θερμοκρασία του περιβάλλοντος.

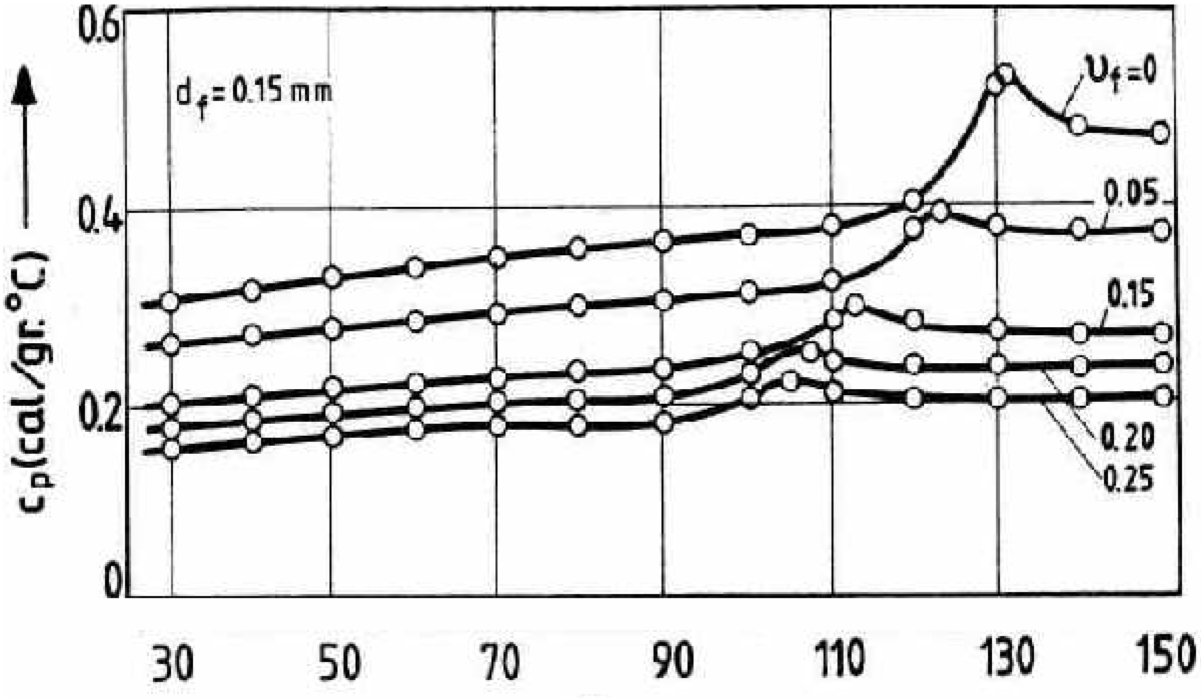
Με αυτόν τον τρόπο, επιτυγχάνεται πλήρης πολυμερισμός της μήτρας, σ' ένα διάστημα που το σύνθετο υλικό να μη παρουσιάζει έντονη βισκοελαστική συμπεριφορά.

Δοκίμια με διάμετρο 4mm και πάχους 1 - 1,50mm κόπηκαν από κάθε υλικό με διαφορετική περιεκτικότητα και διάμετρο κόκκων του μετάλλου. Οι μετρήσεις έγιναν με την βοήθεια ενός θερμικού αναλυτή (DSC) Du-Pont 900. Η τοποθέτηση των δοκιμίων έγινε όταν η συσκευή ήταν σε θερμοκρασία περιβάλλοντος και μετά η αύξηση της θερμοκρασίας έγινε με σταθερό ρυθμό. Για να μελετηθεί η επίδραση του ρυθμού θέρμανσης χρησιμοποιήθηκαν τρεις διαφορετικοί ρυθμοί θέρμανσης (5,10 και

205$°C/\min$). Η περιεκτικότητα των εγκλεισμάτων σε σίδηρο μεταβάλλεται από 5% έως 25%.

4.3 Προσδιορισμός του πάχους της ενδιάμεσης φάσης

Η μεταβολή της ειδικής θερμότητας $\left(C_p\right)$ με την θερμοκρασία για κόκκους σιδήρου με d_f=150μm, εξετάζεται για πέντε περιεκτικότητες (U_f = 0, 0,05, 0,10, 0,15, 0,20, 0,25) με ρυθμό θέρμανσης H_r = 5$°C/\min$. Από το (Σχήμα 4.3) παρατηρούμε όχι μόνο μια μεταβολή στην θέση της μεταβατικής περιοχής, η οποία εκδηλώνεται με μια απότομη μεταβολή στην ειδική θερμότητα, αλλά επίσης και μια μείωση της ΔC_p στην υαλώδη μεταβατική περιοχή όταν αυξάνεται η περιεκτικότητα του εγκλείσματος.



Σχήμα 4.3 Μεταβολή ειδικής θερμότητας για κόκκους σιδήρου.

Όταν η περιεκτικότητα των εγκλεισμάτων αυξάνεται, το ποσοστό των μακρομορίων τα οποία χαρακτηρίζονται από μειωμένη κινητικότητα επίσης αυξάνεται, έτσι ώστε ο αριθμός των μακρομορίων, τα οποία συμμετέχουν στην διαδικασία της υαλώδους μεταβατικής θερμοκρασίας T_g να ελαττώνεται. Αυτό είναι ισοδύναμο με μια αύξηση του όγκου της ενδιάμεσης φάσης και οδηγεί στο συμπέρασμα, ότι δηλαδή υπάρχει μια σχέση μεταξύ της ΔC_p και του όγκου της ενδιάμεσης φάσης [59] , η οποία εκφράζεται ως εξής:

$$\lambda = 1 - \frac{\Delta C_p^f}{\Delta C_p^0} \tag{4.1}$$

Όπου ΔC_p^f και ΔC_p^0 *είναι* τα άλματα (απότομη μεταβολή) της ειδικής θερμότητας στην μεταβατική περιοχή για το ενισχυμένο και μη ενισχυμένο πολυμερές αντιστοίχως, ενώ *λ* είναι μία σταθερά η οποία πολλαπλασιάζεται με την περιεκτικότητα του εγκλείσματος U_f ώστε να ληφθεί υπ’ όψιν η συνεισφορά του όγκου της ενδιάμεσης φάσης στην θερμομηχανική συμπεριφορά του συνθέτου υλικού.

Εάν r_f , r_i , r_m συμβολίζουν τις εξωτερικές ακτίνες του εγκλείσματος, της ενδιάμεσης φάσης και της μήτρας αντιστοίχως, τότε οι όγκοι των τριών φάσεων δίνονται ως εξής:

$$U_f = \frac{r_f^3}{r_m^3} \tag{4.2}$$

$$U_i = \frac{r_i^3 - r_f^3}{r_m^3} \tag{4.3}$$

$$U_m = \frac{r_m^3 - r_i^3}{r_m^3} \tag{4.4}$$

$$U_f + U_i + U_m = 1 \tag{4.5}$$

Για να προσδιορισθεί η ακτίνα του σφαιρικού τμήματος το οποίο αντιστοιχεί στην ενδιάμεση φάση εκφράζουμε αυτό ως $r_i = r_f + \Delta r_i$, όπου Δr_i το πάχος της ενδιάμεσης φάσης και χρησιμοποιούμε την σχέση η οποία δίνεται από τον Lipatov [60].

$$\frac{\left(r_f + \Delta r_i\right)^3}{r_f^3} - 1 = \frac{\lambda U_f}{1 - U_f} \tag{4.6}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Γεωμετρική μοντελοποίηση της κατανομής των εγκλεισμάτων

5.1 Γενικά

Τα μικροδομικά - γεωμετρικά μοντέλα μελέτης των μηχανικών ιδιοτήτων των σύνθετων υλικών με εγκλείσματα, βασίζονται κυρίως στις εξής παραδοχές:

- Μια τυπική γεωμετρική δομή υιοθετείται για την εξομοίωση της διάταξης των εγκλεισμάτων στο χώρο. Συνήθως μία σφαίρα ή ένας κύλινδρος.

- Οι υπολογισμοί που γίνονται κατά τη μελέτη του μοντέλου, είναι βασισμένοι στη συνήθη γεωμετρία και τοπολογία.

- Οι φάσεις του σύνθετου υλικού θεωρούνται ελαστικά, ομογενή και ισότροπα υλικά.

- Ο αριθμός των εγκλεισμάτων είναι μεγάλος και η κατανομή τους ομοιόμορφη, έτσι ώστε το σύνθετο υλικό να μπορεί να θεωρηθεί ομοιογενές και ισότροπο.

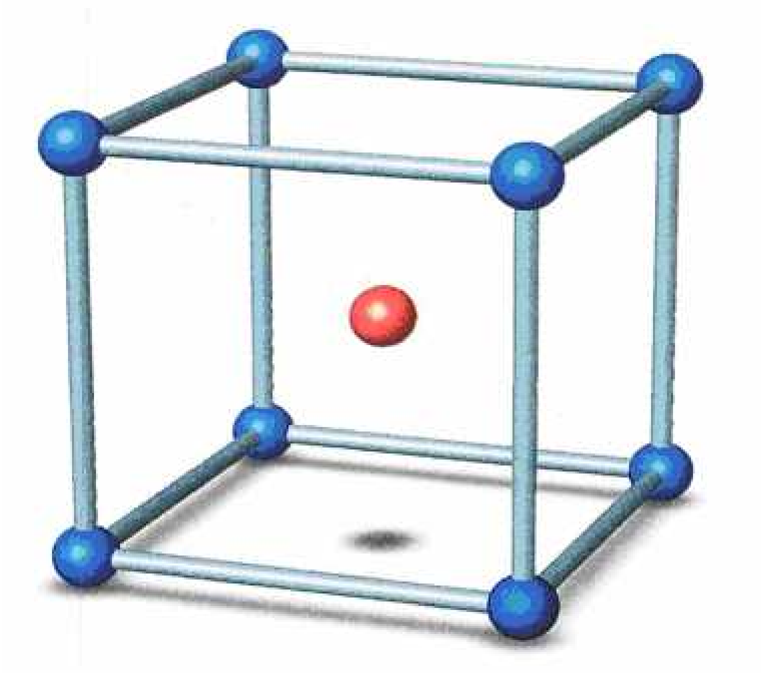
- Οι παραμορφώσεις που αναπτύσσονται στο σύνθετο υλικό είναι αρκετά μικρές ώστε να μπορεί να θεωρηθεί ότι ισχύουν οι γραμμικές σχέσεις τάσεων παραμορφώσεων.

Στην παρούσα εργασία θα θεωρήσουμε ότι τα βασικά δομικά κύτταρα του σύνθετου υλικού έχουν κυβική μορφή, ενώ τα εγκλείσματα που έχουν τέλειο σφαιρικό σχήμα ακτίνας $\boldsymbol{r_f = 75\ \mu m}$ κατανέμονται με διάφορους τρόπους στο χώρο, δίνοντας έτσι τρία διαφορετικά κυβικά μοντέλα.

Τέλος κάθε ένα από αυτά τα μοντέλα θα προσομοιώνεται με ένα αντίστοιχο σφαιρικό πολυφασικό μοντέλο για λόγους απλούστευσης της κατανομής των τάσεων στο δομικό κύτταρο, και άρα απλούστευσης των υπολογισμών (λόγω και της σφαιρικής συμμετρίας).

5.2 Τετραφασικό κυβικό μοντέλο 1

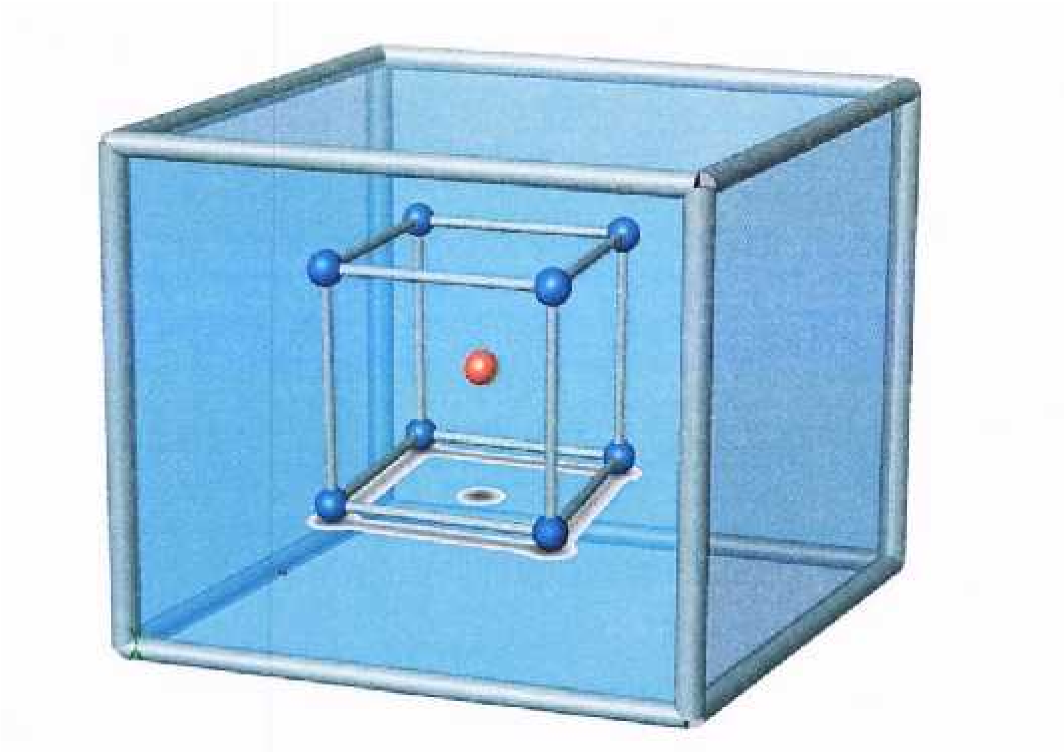
Πρώτο μας βήμα είναι η θεώρηση του τρόπου με τον οποίο κατανέμονται οι κόκκοι (σφαιρικά εγκλείσματα) στη μάζα της μήτρας. Θεωρούμε λοιπόν ότι **8 σφαιρικά εγκλείσματα καταλαμβάνουν τις κορυφές ενός κύβου** που έχει ακμή μήκους l, και **1 σφαιρικό έγκλεισμα καταλαμβάνει το κέντρο βάρους του κύβου**. Το δομικό αυτό μοντέλο επαναλαμβάνεται με πλήρη συμμετρία στο χώρο. Το τμήμα μεταξύ των σφαιρών αναπαριστά τη μήτρα του σύνθετου υλικού.



Σχήμα 5.1 : Κυβικό μοντέλο 1.

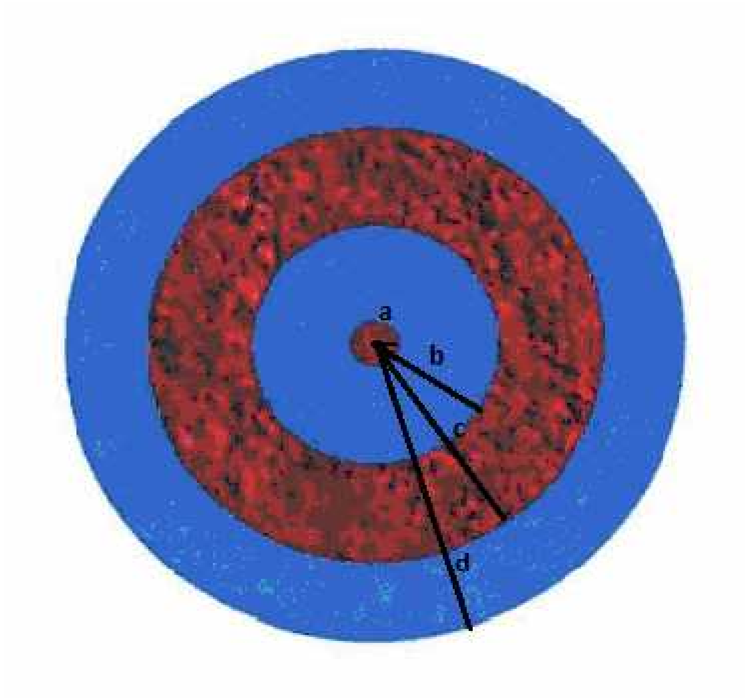
Στη συνέχεια για να απλουστεύσουμε τη μελέτη μας, θα αναγάγουμε το παραπάνω κυβικό μοντέλο σε ένα «ισοδύναμο» σφαιρικό μοντέλο, για να μπορέσουμε να εκμεταλλευτούμε τη σφαιρική συμμετρία και τις περαιτέρω απλοποιήσεις που θα προκύψουν από αυτή.

Ο κύβος που περιγράψαμε παραπάνω με ακμή l, θεωρούμε ότι περιέχεται μέσα σε έναν άλλο κύβο ο οποίος έχει ακμή 2l, δημιουργώντας έτσι το «δομικό κύτταρο» του σώματος το οποίο επαναλαμβάνεται συμμετρικά σε όλη τη μάζα του σύνθετου υλικού μας.



Σχήμα 5.2 : Κυβικό μοντέλο 1.

Τον κύβο με ακμή μήκους 2l θα τον αναγάγουμε στη συνέχεια σε ένα τετραφασικό σφαιρικό μοντέλο που αποτελείται από 4 ομόκεντρες σφαίρες με ακτίνες a, b, c, d αντίστοιχα ($a < b < c < d$).



Σχήμα 5.3 : Προσομοίωση κυβικού μοντέλου 1 με αντίστοιχο σφαιρικό μοντέλο (σε τομή).

Σε αυτό το μοντέλο, η δεύτερη και η τέταρτη φάση (μπλε), που τις αποτελούν ο σφαιρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα a και εξωτερική ακτίνα b, καθώς και ο σφαιρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα c και εξωτερική d, αντιπροσωπεύουν το υλικό της μήτρας. Ο σφαιρικός φλοιός με ακτίνα a καθώς και εκείνος με εσωτερική ακτίνα b και εξωτερική ακτίνα c, δηλαδή η πρώτη και η τρίτη μας φάση (κόκκινο), αντιπροσωπεύουν το σύνολο των σφαιρών, δηλαδή των εγκλεισμάτων.

Ο όγκος του κύβου ακμής 2l θα είναι:

$$V_{2l} = (2l)^3 \quad \Rightarrow \quad V_{2l} = 8l^3 \qquad (5.1)$$

Για κάθε σύνθετο υλικό γνωρίζουμε την **κατ' όγκο περιεκτικότητα U_f των εγκλεισμάτων** καθώς και την ακτίνα τους **r_f.** Για τον κύβο με ακμή 2l, η **κατ' όγκο περιεκτικότητα U_f** θα προκύπτει ως ο λόγος του όγκου των σφαιρών που βρίσκονται στις κορυφές του κύβου και της μίας σφαίρας που βρίσκεται στο κέντρο βάρους του κύβου, προς το συνολικό όγκο του κύβου με ακμή 2l, δηλαδή:

$$U_f = \frac{8\frac{4}{3}® r_f^{\,3} + \frac{4}{3}® r_f^{\,3}}{(2l)^3} \quad \Rightarrow \quad U_f = \frac{36}{24l^3}® r_f^{\,3} \quad \Rightarrow$$
$$l = r_f \sqrt[3]{\frac{3®}{2U_f}} \qquad (5.2)$$

Ο όγκος του κύβου με ακμή 2l, στο σφαιρικό μοντέλο αντιπροσωπεύεται από τον όγκο της σφαίρας με ακτίνα d, οπότε έχουμε:

$$\left(2l\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \mathrm{d}^3 \quad \Rightarrow \quad d = l\sqrt[3]{\frac{8\cdot 3}{4®}} = l\sqrt[3]{\frac{6}{®}} \qquad (5.3)$$

και από την εξίσωση (5.2) έχουμε:

$$\mathrm{d} = r_f \sqrt[3]{\frac{3®}{2\mathrm{U}_f}}\sqrt[3]{\frac{6}{®}} = r_f \sqrt[3]{\frac{9}{\mathrm{U}_f}} \qquad (5.4)$$

Θεωρούμε τον κύβο ακμής l. Η απόσταση από το κέντρο βάρους του κύβου μέχρι μία εκ των κορυφών του, όπως προκύπτει από την γεωμετρία έχει μήκος:

$$w = l\,\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (5.5)$$

Η απόσταση w, αντιπροσωπεύει την απόσταση του κέντρου βάρους του κύβου από τα κέντρα των σφαιρών που βρίσκονται στις κορυφές του κύβου.

Η πρώτη μας φάση αποτελείται από το σφαιρικό έγκλεισμα που βρίσκεται στο κέντρο βάρους του κύβου. Οπότε θα ισχύει:

$$a = r_f \qquad (5.6)$$

Θεωρούμε ότι ο σφαιρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα b και εξωτερική ακτίνα c, κατανέμεται ισοογκικά εκατέρωθεν της σφαιρικής επιφάνειας που ορίζει η ακτίνα w. Με αφετηρία την επιφάνεια αυτή, η τρίτη φάση «απλώνεται» έτσι ώστε να ισχύει:

$$\frac{4}{3}\circledR(c^3-w^3)=\frac{4}{3}(w^3-b^3) \quad \Rightarrow \quad (c^3+b^3)=2w^3 \tag{5.7}$$

Ο όγκος όμως της τρίτης φάσης ισούται με τον όγκο των 8 σφαιρικών εγκλεισμάτων που βρίσκονται στις κορυφές του κύβου. Άρα έχω:

$$\frac{4}{3}\circledR(c^3-b^3)=8\frac{4}{3}\circledR {r_f}^3 \quad \Rightarrow \quad (c^3-b^3)=8{r_f}^3 \tag{5.8}$$

Από τις εξισώσεις (5.7) και (5.8), προσθέτοντας τις κατά μέλη έχουμε:

$$c=\sqrt[3]{w^3+4{r_f}^3} \tag{5.9}$$

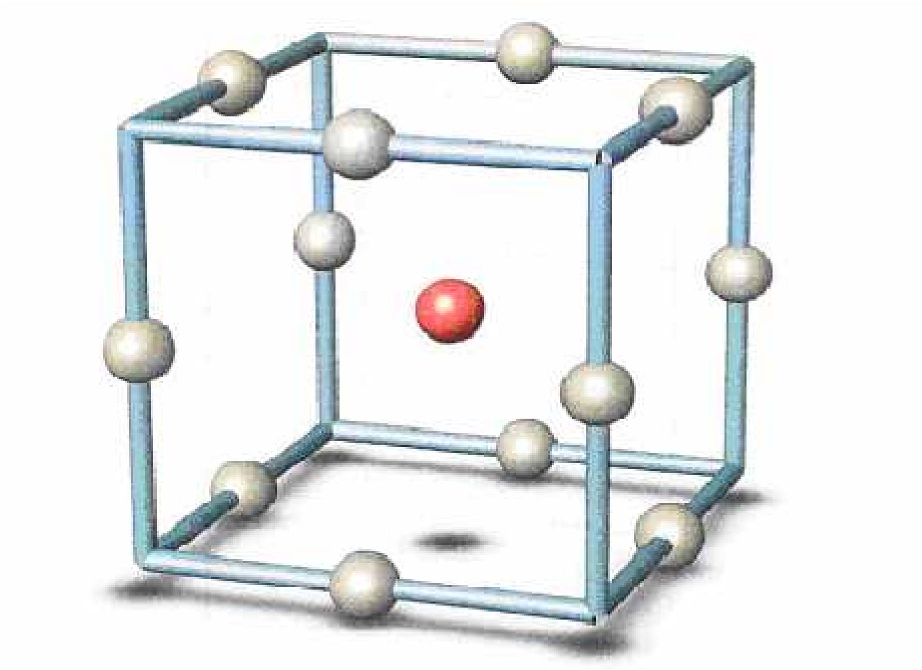
ενώ αφαιρώντας τις κατά μέλη έχουμε:

$$b=\sqrt[3]{w^3-4{r_f}^3} \tag{5.10}$$

Εκφράσαμε λοιπόν τις ακτίνες a, b, c, d συναρτήσει των γνωστών μας μεγεθών **U_f** και **rf.**

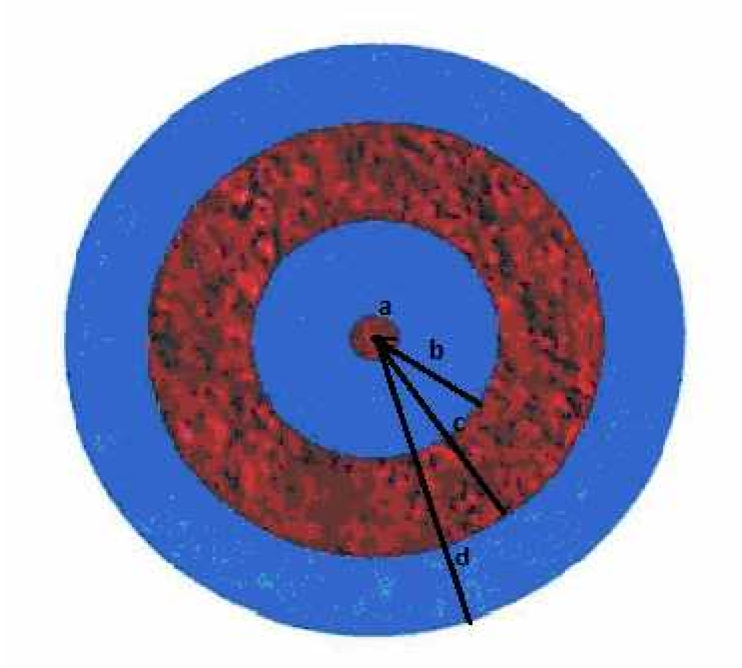
5.3 Τετραφασικό κυβικό μοντέλο 2

Σε αυτό το μοντέλο θεωρούμε ότι υπάρχουν **12 εγκλείσματα** στα μέσα των ακμών του κύβου και **1 έγκλεισμα** στο κέντρο βάρους του κύβου.



Σχήμα 5.4 : Κυβικό μοντέλο 2.

Το εικονιζόμενο μοντέλο ανάγεται σε ισοδύναμο σφαιρικό τετραφασικό μοντέλο, τομή του οποίου φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



Σχήμα 5.5 : Προσομοίωση κυβικού μοντέλου 2 με αντίστοιχο σφαιρικό μοντέλο.

Η κατ' όγκο περιεκτικότητα $\mathbf{U_f}$ των εγκλεισμάτων είναι:

$$U_f = \frac{12\frac{4}{3}\circledR r_f^{\,3} + \frac{4}{3}\circledR r_f^{\,3}}{(2l)^3} \Rightarrow U_f = \frac{52}{24l^3}\circledR r_f^{\,3} \Rightarrow$$
$$l = r_f\sqrt[3]{\frac{13\circledR}{6U_f}} \qquad (5.11)$$

Ο όγκος του κύβου με ακμή 2l, στο κυβικό μοντέλο αντιπροσωπεύεται στο σφαιρικό από τον όγκο της σφαίρας με ακτίνα d, οπότε λοιπόν έχουμε:

$$\left(2l\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \mathrm{d}^3 \Rightarrow d = l\sqrt[3]{\frac{8\cdot 3}{4\circledR}} = l\sqrt[3]{\frac{6}{\circledR}} \qquad (5.12)$$

και από την εξίσωση (5.12) έχω:

$$\mathrm{d} = r_f\sqrt[3]{\frac{13\circledR}{6U_f}}\sqrt[3]{\frac{6}{\circledR}} = r_f\sqrt[3]{\frac{13}{U_f}} \qquad (5.13)$$

Θεωρούμε τον κύβο με ακμή l. Η απόσταση από το κέντρο βάρους του κύβου μέχρι τα μέσα των σφαιριδίων, που βρίσκονται στα μέσα των ακμών του, όπως προκύπτει από την γεωμετρία έχει μήκος:

$$w = l\,\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad (5.14)$$

Η πρώτη μας φάση αποτελείται από το σφαιρικό έγκλεισμα που βρίσκεται στο κέντρο βάρους του κύβου. Οπότε θα ισχύει:

$$a = r_f \qquad (5.15)$$

Η τρίτη φάση αποτελείται από τα 12 σφαιρικά εγκλείσματα. Οπότε για τον όγκο της τρίτης φάσης ισχύει:

$$\frac{4}{3}\circledR(c^3 - b^3) = 12\frac{4}{3}\circledR r_f^{\,3} \Rightarrow (c^3 - b^3) = 12r_f^{\,3} \qquad (5.16)$$

Θεωρούμε τώρα, ότι ο σφαιρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα b και εξωτερική ακτίνα c, δηλαδή η τρίτη φάση, κατανέμεται ισοογκικά εκατέρωθεν της σφαιρικής επιφάνειας που ορίζει η ακτίνα w. Με αφετηρία την επιφάνεια αυτή, η τρίτη φάση «απλώνεται» έτσι ώστε να ισχύει:

$$\frac{4}{3}® (c^3 - w^3) = \frac{4}{3}(w^3 - b^3) \quad \Rightarrow \quad (c^3 + b^3) = 2w^3 \tag{5.17}$$

Από τις εξισώσεις (5.16) και (5.17), προσθέτοντας τις κατά μέλη έχουμε:

$$c = \sqrt[3]{w^3 + 6{r_f}^3} \tag{5.18}$$

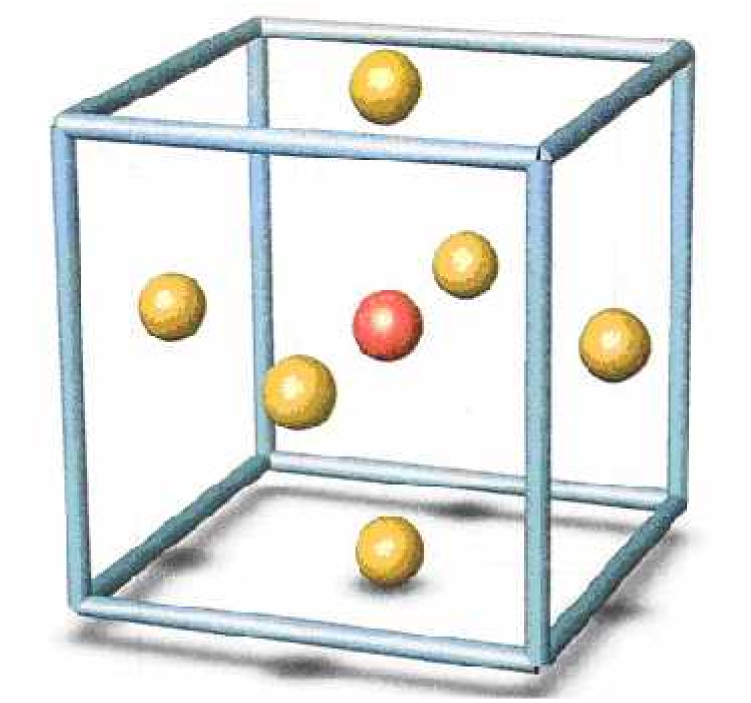
ενώ αφαιρώντας τις κατά μέλη έχουμε:

$$b = \sqrt[3]{w^3 - 6{r_f}^3} \tag{5.19}$$

Εκφράσαμε λοιπόν τις ακτίνες a, b, c, d συναρτήσει των γνωστών μας μεγεθών **U_f** και **rf.**

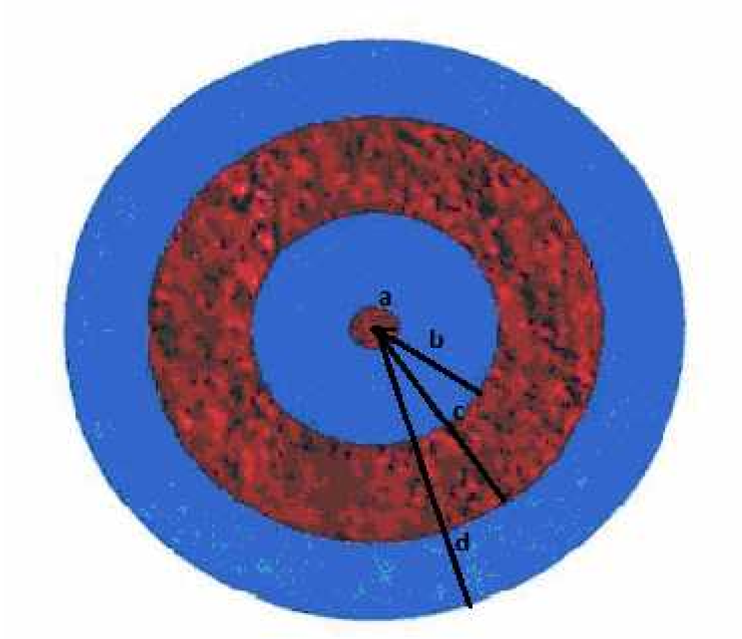
5.4 Τετραφασικό κυβικό μοντέλο 3

Σε αυτό το μοντέλο θεωρούμε ότι υπάρχουν **6 εγκλείσματα** στα μέσα των πλευρών του κύβου και **1 έγκλεισμα** στο κέντρο βάρους του κύβου.



Σχήμα 5.6 : Κυβικό μοντέλο 3

Το εικονιζόμενο μοντέλο ανάγεται σε ισοδύναμο σφαιρικό τετραφασικό μοντέλο, η τομή του οποίου φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



Σχήμα 5.7 : Προσομοίωση κυβικού μοντέλου 3 με αντίστοιχο σφαιρικό μοντέλο.

Η κατ' όγκο περιεκτικότητα $\mathbf{U_f}$ των κόκκων είναι:

$$U_f = \frac{6\frac{4}{3}® r_f^{\,3} + \frac{4}{3}® r_f^{\,3}}{(2l)^3} \quad \Rightarrow \quad U_f = \frac{28}{24l^3}® r_f^{\,3} \qquad (5.20)$$
$$\Rightarrow \quad l = r_f \sqrt[3]{\frac{7®}{6U_f}}$$

Ο όγκος του κύβου με ακμή 2l στο κυβικό μοντέλο, αντιπροσωπεύεται στο σφαιρικό από τον όγκο της σφαίρας με ακτίνα d, οπότε λοιπόν έχουμε:

$$\left(2l\right)^3 = \frac{4}{3}® d^3 \quad \Rightarrow \quad d = l\sqrt[3]{\frac{8\cdot 3}{4®}} = l\sqrt[3]{\frac{6}{®}} \qquad (5.21)$$

και από την εξίσωση (5.20) έχω:

$$\mathrm{d} = r_f \sqrt[3]{\frac{®}{U_f}}\sqrt[3]{\frac{6}{®}} = r_f \sqrt[3]{\frac{6}{U_f}} \qquad (5.22)$$

Θεωρούμε τον κύβο ακμής l. Η απόσταση από το κέντρο βάρους του κύβου μέχρι τα μέσα των σφαιριδίων, που κατανέμονται στα μέσα των πλευρών του, όπως προκύπτει από την γεωμετρία έχει μήκος:

$$w = \frac{l}{2} \qquad (5.23)$$

Η πρώτη μας φάση αποτελείται από το σφαιρικό έγκλεισμα που βρίσκεται στο κέντρο βάρους του κύβου. Οπότε θα ισχύει:

$$a = r_f \qquad (5.24)$$

Η τρίτη φάση αποτελείται από τα σφαιρικά εγκλείσματα. Οπότε για τον όγκο της τρίτης φάσης ισχύει:

$$\frac{4}{3}\text{®}\,(c^3 - b^3) = 6\frac{4}{3}\text{®}\,r_f^{\ 3} \quad \Rightarrow \quad (c^3 - b^3) = 6r_f^{\ 3} \qquad (5.25)$$

Θεωρούμε ότι ο σφαιρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα b και εξωτερική ακτίνα c, η τρίτη φάση δηλαδή, κατανέμεται ισοογκικά εκατέρωθεν της σφαιρικής επιφάνειας που ορίζει η ακτίνα w. Με αφετηρία την επιφάνεια αυτή, η τρίτη φάση «απλώνεται» έτσι ώστε να ισχύει:

$$\frac{4}{3}\text{®}\,(c^3 - w^3) = \frac{4}{3}(w^3 - b^3) \quad \Rightarrow \quad (c^3 + b^3) = 2w^3 \qquad (5.26)$$

Από τις εξισώσεις (5.25) και (5.26), προσθέτοντας τις κατά μέλη έχουμε:

$$c = \sqrt[3]{w^3 + 3r_f^{\ 3}} \qquad (5.27)$$

ενώ αφαιρώντας τις κατά μέλη έχουμε:

$$b = \sqrt[3]{w^3 - 3r_f^{\ 3}} \qquad (5.28)$$

Εκφράσαμε λοιπόν τις ακτίνες a, b, c, d συναρτήσει των γνωστών μας μεγεθών **U_f** και **rf.**

5.5 Γεωμετρικοί περιορισμοί

Στο παρόν κεφάλαιο θα εξετάσουμε τους γεωμετρικούς περιορισμούς που προκύπτουν από το κάθε κυβικό μοντέλο, λόγω της διάταξης των μορίων του σιδήρου που θεωρούμε κάθε φορά. Επειδή η ανάπτυξη της ενδιάμεσου φάσεως γίνεται μέσα στην περιοχή της μήτρας (γι' αυτό άλλωστε μπορεί να θεωρηθεί και σαν αλλοιωμένη μήτρα) δεν προσθέτει κάποιον επιπλέον γεωμετρικό περιορισμό σχετικά με τις μέγιστες δυνατές περιεκτικότητες που μπορεί να έχουμε στο κάθε μοντέλο. Για αυτό και θα τους εξετάσουμε στα τριφασικά μοντέλα μας, αγνοώντας και την επίδραση της ενδιάμεσου φάσεως.

5.5.1 Τετραφασικό κυβικό μοντέλο 1

$$b > 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{w^3 - 4r_f^{\;3}} > 0 \Leftrightarrow w^3 - 4r_f^{\;3} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(l\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 - 4r_f^{\;3} > 0 \Leftrightarrow \left(r_f \sqrt[3]{\frac{9®}{6U_f}} \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 - 4r_f^{\;3} > 0 \Leftrightarrow \frac{9®}{6U_f} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 > 4 \Leftrightarrow$$

$$U_f < \frac{9®}{24} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 \Leftrightarrow$$

$$U_f < 0,765196$$

$$a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3 \Leftrightarrow r_f^{\;3} < w^3 - 4r_f^{\;3} \Leftrightarrow$$

$$r_f^{\;3} < \frac{9®}{6U_f} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 r_f^{\;3} - 4r_f^{\;3} \Leftrightarrow U_f < \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 \frac{9}{30}® \Leftrightarrow$$

$$U_f < 0,612157$$

$$c < d \Leftrightarrow c^3 < d^3 \Leftrightarrow w^3 + 4r_f^{\;3} < r_f^{\;3} \frac{9}{U_f} \Leftrightarrow$$

$$\frac{9®}{6U_f} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 r_f^{\;3} + 4r_f^{\;3} < \frac{9}{U_f} r_f^{\;3} \Leftrightarrow U_f < \left[6 - ® \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 \right] \frac{9}{24} \Leftrightarrow$$

$$U_f < 1,48$$

Άρα πρέπει **U_f < $U_{f,\,min}$** , δηλαδή θα πρέπει **U_f < 0,612157.**

5.5.2 Τετραφασικό κυβικό μοντέλο 2

$$b > 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{w^3 - 6{r_f}^3} > 0 \Leftrightarrow w^3 - 6{r_f}^3 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(l \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 - 6{r_f}^3 > 0 \Leftrightarrow \left(r_f \sqrt[3]{\frac{13\text{®}}{6U_f}} \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 - 6{r_f}^3 > 0 \Leftrightarrow \frac{13\text{®}}{6U_f} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 > 6 \Leftrightarrow$$

$$U_f < \frac{13\text{®}}{36} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 \Leftrightarrow U_f < 0,401093$$

$$a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3 \Leftrightarrow {r_f}^3 < w^3 - 6{r_f}^3 \Leftrightarrow$$

$${r_f}^3 < \frac{13\text{®}}{6U_f} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 {r_f}^3 - 6{r_f}^3 \Leftrightarrow U_f < \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 \frac{13}{42} \text{®} \Leftrightarrow$$

$$U_f < 0,343794$$

$$c < d \Leftrightarrow c^3 < d^3 \Leftrightarrow w^3 + 6{r_f}^3 < {r_f}^3 \frac{13}{U_f} \Leftrightarrow$$

$$\frac{13\text{®}}{6U_f} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 {r_f}^3 + 6{r_f}^3 < \frac{13}{U_f} {r_f}^3 \Leftrightarrow U_f < \left[6 - \text{®} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 \right] \frac{13}{36} \Leftrightarrow$$

$$U_f < 1,76$$

Άρα πρέπει **U_f < $U_{f,\,min}$** , δηλαδή θα πρέπει **U_f < 0 ,343794.**

5.5.3 Τεραφασικό κυβικό μοντέλο 3

$$b > 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{w^3 - 3r_f^{\,3}} > 0 \Leftrightarrow w^3 - 3r_f^{\,3} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(l\frac{1}{2}\right)^3 - 3r_f^{\,3} > 0 \Leftrightarrow \left(r_f \sqrt[3]{\frac{7®}{6U_f}}\frac{1}{2}\right)^3 - 3r_f^{\,3} > 0 \Leftrightarrow \frac{7®}{6U_f}\left(\frac{1}{2}\right)^3 > 3 \Leftrightarrow$$

$$U_f < \frac{7®}{18}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow U_f < 0{,}152716$$

$$a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3 \Leftrightarrow r_f^{\,3} < w^3 - 3r_f^{\,3} \Leftrightarrow$$

$$r_f^{\,3} < \frac{7®}{6U_f}\left(\frac{1}{2}\right)^3 r_f^{\,3} - 3r_f^{\,3} \Leftrightarrow U_f < \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{7}{24}® \Leftrightarrow$$

$$U_f < 0{,}114537$$

$$c < d \Leftrightarrow c^3 < d^3 \Leftrightarrow w^3 + 3r_f^{\,3} < r_f^{\,3}\frac{7}{U_f} \Leftrightarrow$$

$$\frac{7®}{6U_f}\left(\frac{1}{2}\right)^3 r_f^{\,3} + 3r_f^{\,3} < \frac{7}{U_f} r_f^{\,3} \Leftrightarrow U_f < \left[6 - ®\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]\frac{7}{18} \Leftrightarrow$$

$$U_f < 2{,}18$$

Άρα πρέπει **U_f < $U_{f,\,min}$** , δηλαδή θα πρέπει **U_f < 0,114537.**

Τελικά οι μέγιστες δυνατές περιεκτικότητες σε κόκκους σιδήρου για κάθε μοντέλο είναι :

	Κυβικό Μοντέλο 1	**Κυβικό Μοντέλο 2**	**Κυβικό Μοντέλο 3**
Μέγιστη Δυνατή Περιεκτικότητα U_f	**61,22%**	**34,38%**	**11,45%**

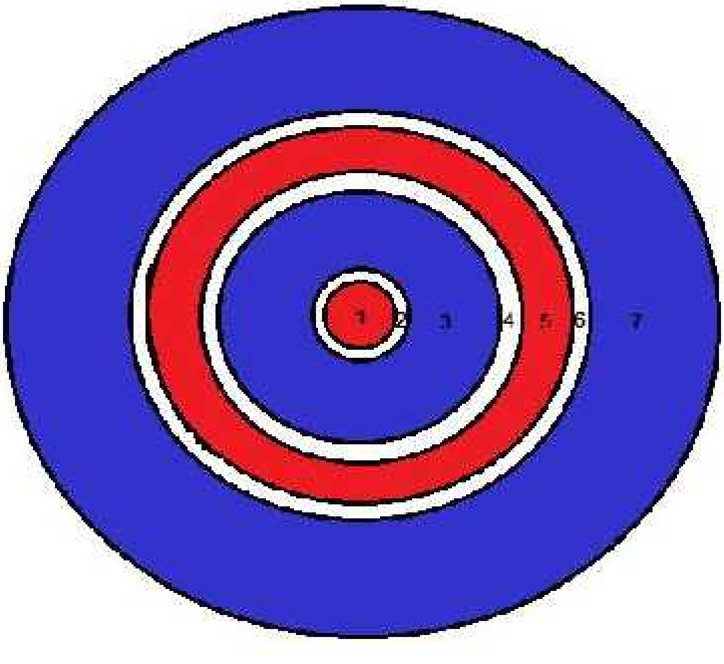
Πίνακας 5.1 : Μέγιστες δυνατές περιεκτικότητες σε κόκκους σιδήρου για κάθε μοντέλο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Ανάπτυξη μοντέλων ενδιάμεσης φάσης

6.1 Υπολογισμός ακτινών του ισοδύναμου επταφασικού μοντέλου

Το επταφασικό μοντέλο που χρησιμοποιούμε αποτελείται από δύο περιοχές εγκλεισμάτων κόκκων σιδήρου (περιοχές 1 & 5) και δύο περιοχές μήτρας εποξειδικής ρητίνης (περιοχές 3 & 7). Ανάμεσα σε αυτές θεωρούμε ότι αναπτύσσεται η περιοχή της ενδιάμεσης φάσης (περιοχές 2, 4 & 6).



Σχήμα 6.1: Το επταφασικό μοντέλο.

Το μέσο μέτρο ελαστικότητας στις ενδιάμεσες φάσεις και ο μέσος λόγος Poisson που τους αντιστοιχεί, E_2, E_4, E_6 και ν_2, ν_4, ν_6 αντίστοιχα, χρειάζεται αρχικά να προσδιορισθούν όπως και οι ακτίνες που αντιστοιχούν στα όρια της κάθε περιοχής, ώστε στη συνέχεια να γίνει εφικτός ο υπολογισμός του μέτρου ελαστικότητας E_c του σύνθετου υλικού καθώς και ο λόγος Poisson ν_c.

Κατά τα άλλα γνωρίζουμε ότι:

$$E_1 = E_5 = E_f = 210 \text{ GPa}$$

και

$$E_3 = E_7 = E_m = 3{,}5 \text{ GPa}$$

Αν με $\mathbf{U_f}$ συμβολίσουμε τη συνολική κατ' όγκο περιεκτικότητα του εγκλείσματος, με $\mathbf{U_i}$ τη συνολική κατ' όγκο περιεκτικότητα της ενδιάμεσης φάσης και με $\mathbf{U_m}$ τη συνολική κατ' όγκο περιεκτικότητα της μήτρας τότε θα ισχύει ότι:

$$\mathbf{U_f = U_1 + U_5}$$

$$\mathbf{U_i = U_2 + U_4 + U_6}$$

και

$$\mathbf{Um = U_3 + U_7}$$

Επίσης θα ισχύει ότι: $\mathbf{Um = 1 - U_f - U_i}$.

Κάνοντας λοιπόν τη παραδοχή ότι η ενδιάμεση φάση μπορεί να θεωρηθεί ως αλλοιωμένη μήτρα και ότι η αναλογία της σε σχέση με το υλικό του εγκλείσματος θα είναι σταθερή και στις τρεις περιοχές εμφάνισής της, θα ισχύει ότι:

$$\frac{U_{i,1}}{U_{m,1}} = \frac{U_{i,2}}{U_{m,1}} = \frac{U_{i,3}}{U_{m,2}} = \frac{U_{i,1}+U_{i,2}+U_{i,3}}{U_{m,1}+U_{m,2}} = \frac{U_i}{U_m} = \frac{U_i}{1-U_f-U_i} = k \qquad (6.1)$$

Από την προηγούμενη σχέση προκύπτουν τα παρακάτω:

$$U_{i,1} = kU_{m,1} \Rightarrow \frac{\frac{4}{3}\text{®}\left(r_2^3 - r_1^3\right)}{\frac{4}{3}\text{®}r_7^3} = k\,\frac{\frac{4}{3}\text{®}\left(r_3^3 - r_2^3\right)}{\frac{4}{3}\text{®}r_7^3} \Rightarrow \left(r_2^3 - r_1^3\right) = k\left(r_3^3 - r_2^3\right) \Rightarrow$$

$$r_2 = \sqrt[3]{\frac{kr_3^3 + r_1^3}{k+1}} \qquad (6.2)$$

$$U_{i,2} = kU_{m,1} \Rightarrow \frac{\frac{4}{3}\circledR\left(r_4^3 - r_3^3\right)}{\frac{4}{3}\circledR r_7^3} = k\frac{\frac{4}{3}\circledR\left(r_3^3 - r_2^3\right)}{\frac{4}{3}\circledR r_7^3} \Rightarrow \left(r_4^3 - r_3^3\right) = k\left(r_3^3 - r_2^3\right) \Rightarrow$$

$$\mathrm{r}_4 = \sqrt[3]{(\mathrm{k}+1)\,\mathrm{r}_3^3 - \mathrm{kr}_2^3} \tag{6.3}$$

$$U_{i,3} = kU_{m,2} \Rightarrow \frac{\frac{4}{3}\circledR\left(r_6^3 - r_5^3\right)}{\frac{4}{3}\circledR r_7^3} = k\frac{\frac{4}{3}\circledR\left(r_7^3 - r_6^3\right)}{\frac{4}{3}\circledR r_7^3} \Rightarrow \left(r_6^3 - r_5^3\right) = k\left(r_7^3 - r_6^3\right) \Rightarrow$$

$$r_6 = \sqrt[3]{\frac{kr_7^3 + r_5^3}{k+1}} \tag{6.4}$$

Οι ακτίνες των φάσεων 1, 3, 5, 7 βρίσκονται στο κεφάλαιο 4 για κάθε κυβικό μοντέλο. Επιπλέον οι ακτίνες με ονομασία a, b, c και d αντιστοιχούν στις ακτίνες r_1, r_3, r_5 και r_7.

Για τις κατ’ όγκο περιεκτικότητες των φάσεων θα ισχύει κατά τα γνωστά:

$$U_{f,1} = U_1 = \frac{\frac{4}{3}\circledR r_1^3}{\frac{4}{3}\circledR r_7^3} = \frac{r_1^3}{r_7^3} \tag{6.5}$$

$$U_{i,1} = U_2 = \frac{\frac{4}{3}\circledR\left(r_2^3 - r_1^3\right)}{\frac{4}{3}\circledR r_7^3} = \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_7^3} \tag{6.6}$$

$$U_{m,1} = U_3 = \frac{\frac{4}{3}\circledR\left(r_3^3 - r_2^3\right)}{\frac{4}{3}\circledR r_7^3} = \frac{r_3^3 - r_2^3}{r_7^3} \tag{6.7}$$

$$U_{i,2} = U_4 = \frac{\frac{4}{3}\circledR\left(r_4^3 - r_3^3\right)}{\frac{4}{3}\circledR r_7^3} = \frac{r_4^3 - r_3^3}{r_7^3} \tag{6.8}$$

$$U_{f,2} = U_5 = \frac{\frac{4}{3}\circledR \left(r_5^3 - r_4^3 \right)}{\frac{4}{3}\circledR r_7^3} = \frac{r_5^3 - r_4^3}{r_7^3} \tag{6.9}$$

$$U_{i,3} = U_6 = \frac{\frac{4}{3}\circledR \left(r_6^3 - r_5^3 \right)}{\frac{4}{3}\circledR r_7^3} = \frac{r_6^3 - r_5^3}{r_7^3} \tag{6.10}$$

$$U_{m,2} = U_7 = \frac{\frac{4}{3}\circledR \left(r_7^3 - r_6^3 \right)}{\frac{4}{3}\circledR r_7^3} = \frac{r_7^3 - r_6^3}{r_7^3} \tag{6.11}$$

Τελικά έχουμε τις εξής σχέσεις για τις ακτίνες των σφαιρικών δακτυλίων κάθε μοντέλου:

- **Κυβικό μοντέλο 1**

$$r_1 = a = r_f \tag{6.12}$$

$$r_2 = \sqrt[3]{\frac{kr_3^3 + r_1^3}{k+1}} = \sqrt[3]{\frac{k\left(w^3 - 4r_f^{\ 3} \right) + r_f^{\ 3}}{k+1}} \tag{6.13}$$

$$r_3 = b = \sqrt[3]{w^3 - 4r_f^{\ 3}} \tag{6.14}$$

$$r_4 = \sqrt[3]{\left(\mathrm{k}+1\right) r_3^3 - \mathrm{k}\, r_2^3} \tag{6.15}$$

$$r_5 = c = \sqrt[3]{w^3 + 4r_f^{\ 3}} \tag{6.16}$$

$$r_6 = \sqrt[3]{\frac{kr_7^3 + r_6^3}{k+1}} \tag{6.17}$$

$$r_7 = d = r_f \sqrt[3]{\frac{\circledR}{U_f}} \sqrt[3]{\frac{6}{\circledR}} = r_f \sqrt[3]{\frac{6}{U_f}} \qquad (6.18)$$

- **Κυβικό μοντέλο 2**

$$r_1 = a = r_f \qquad (6.19)$$

$$r_2 = \sqrt[3]{\frac{kr_3^3 + r_1^3}{k+1}} \qquad (6.20)$$

$$r_3 = b = \sqrt[3]{w^3 - 6r_f^{\ 3}} \qquad (6.21)$$

$$r_4 = \sqrt[3]{(k+1)r_3^3 - kr_2^3} \qquad (6.22)$$

$$r_5 = c = \sqrt[3]{w^3 + 6r_f^{\ 3}} \qquad (6.23)$$

$$r_6 = \sqrt[3]{\frac{kr_7^3 + r_5^3}{k+1}} \qquad (6.24)$$

$$r_7 = d = r_f \sqrt[3]{\frac{\circledR}{U_f}} \sqrt[3]{\frac{6}{\circledR}} = r_f \sqrt[3]{\frac{13}{U_f}} \qquad (6.25)$$

- **Κυβικό μοντέλο 3**

$$r_1 = a = r_f \qquad (6.26)$$

$$r_2 = \sqrt[3]{\frac{kr_3^3 + r_1^3}{k+1}} \quad (6.27)$$

$$r_3 = b = \sqrt[3]{w^3 - 3r_f^{\ 3}} \quad (6.28)$$

$$r_4 = \sqrt[3]{(k+1)\, r_3^3 - kr_2^3} \quad (6.29)$$

$$r_5 = c = \sqrt[3]{w^3 + 3r_f^{\ 3}} \quad (6.30)$$

$$r_6 = \sqrt[3]{\frac{kr_7^3 + r_5^3}{k+1}} \quad (6.31)$$

$$r_7 = d = r_f \sqrt[3]{\frac{\text{®}}{U_f}} \sqrt[3]{\frac{6}{\text{®}}} = r_f \sqrt[3]{\frac{7}{U_f}} \quad (6.32)$$

Στον ακόλουθο πίνακα 6.1, παρουσιάζονται τα πειραματικά δεδομένα της σύνδεσης των κατ’ όγκων περιεκτικοτήτων των εγκλεισμάτων και της ενδιάμεσης φάσης. Έτσι σε κάθε σύσταση $\mathbf{U_f}$ αντιστοιχεί μια σύσταση $\mathbf{U_i}$ για το σύνολο της ενδιάμεσης φάσης. Έτσι έχουμε τα εξής ζεύγη:

$\mathbf{U_f}$	$\mathbf{U_i}$
0,05	0,0013
0,1	0,004
0,15	0,013
0,2	0,028
0,25	0,05

Πίνακας 6.1

Όποτε χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις για κάθε ζεύγος τιμών ($\mathbf{U_f}$**,** $\mathbf{U_i}$) υπολογίζονται οι ακτίνες στα όρια της κάθε ενδιάμεσης φάσης καθώς και οι αντίστοιχες τους κατ’ όγκο περιεκτικότητες.

Στους παρακάτω πίνακες παρουσιάζονται συνοπτικά τα αποτελέσματα που προέκυψαν σε κάθε περίπτωση σύστασης. Όλες οι ακτίνες είναι σε μm.

Κυβικό Μοντέλο 1

U_f	U_i	r_1 (μm)	r_2 (μm)	r_3 (μm)	r_4 (μm)	r_5 (μm)	r_6 (μm)	r_7 (μm)
0,05	0,0013	75	76,8747	288,9399	289,0694	301,8315	301,9472	369,9318
0,1	0,004	75	77,7418	223,8543	224,173	244,3674	244,6331	293,6151
0,15	0,013	75	80,4760	190,5234	191,4311	217,5122	218,2194	256,4964
0,2	0,028	75	83,1014	168,2756	170,0463	201,16	202,4537	233,0424
0,25	0,05	75	85,5163	151,4599	154,3611	189,9123	191,9094	216,3374

Πίνακας 6.2

Ενώ η περιεκτικότητα της κάθε φάσης είναι:

U_f	U_i	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	U_7
0,05	0,0013	0,008333	0,000641	0,46752	0,000641	0,041667	0,000018	0,48118
0,1	0,004	0,016667	0,001896	0,424599	0,001896	0,083333	0,000208	0,471401
0,15	0,013	0,025	0,005886	0,378942	0,005886	0,125	0,001228	0,458058
0,2	0,028	0,033333	0,012011	0,33115	0,012011	0,166667	0,003978	0,44085
0,25	0,05	0,041667	0,022	0,281395	0,022	0,208333	0,006	0,418605

Πίνακας 6.3

Κυβικό Μοντέλο 2

U_f	U_i	r_1 (μm)	r_2 (μm)	r_3 (μm)	r_4 (μm)	r_5 (μm)	r_6 (μm)	r_7 (μm)
0,05	0,0013	75	76,37999	260,8778	260,994	283,631	284,1227	478,6878
0,1	0,004	75	76,84772	196,7103	196,9851	233,1525	234,2961	379,9348
0,15	0,013	75	78,3043	161,7351	162,4741	210,2432	213,3424	331,9036
0,2	0,028	75	79,15874	136,4448	137,7596	196,633	202,44	301,5544
0,25	0,05	75	79,13007	115,1272	116,9492	187,468	196,7103	279,9383

Πίνακας 6.4

Ενώ η περιεκτικότητα της κάθε φάσης είναι:

U_f	U_i	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	U_7
0,05	0,0013	0,004062	0,000216	0,157803	0,000216	0,045938	0,000868	0,790897
0,1	0,004	0,008275	0,000583	0,130514	0,000583	0,091725	0,002834	0,765486
0,15	0,013	0,013132	0,001593	0,10258	0,001593	0,136868	0,009814	0,73442
0,2	0,028	0,018088	0,002704	0,074546	0,002704	0,181912	0,022592	0,697454
0,25	0,05	0,022586	0,003355	0,046972	0,003355	0,227414	0,04329	0,653028

Πίνακας 6.5

Κυβικό Μοντέλο 3

U_f	U_i	r_1 (μm)	r_2 (μm)	r_3 (μm)	r_4 (μm)	r_5 (μm)	r_6 (μm)	r_7 (μm)
0,05	0,0013	75	75,17606	137,4724	137,525	172,459	173,2822	389,4371
0,1	0,004	75	75,0643	87,33814	87,38556	147,3223	149,0983	309,0964
0,15	0,013	75	74,63606	28,13271	25,27898	136,6825	141,2067	270,0206
0,2	0,028	75	73,47249	-66,9215	-68,7508	130,6778	138,7341	245,33
0,25	0,05	75	71,19648	-78,9921	-82,1241	126,7925	139,075	227,7442

Πίνακας 6.6

Ενώ η περιεκτικότητα της κάθε φάσης είναι:

U_f	U_i	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	U_7
0,05	0,0013	0,007143	5,04E-05	0,036795	5,04E-05	0,042857	0,0011992	0,911905
0,1	0,004	0,014286	3,68E-05	0,008237	3,68E-05	0,085714	0,0039264	0,887763
0,15	0,013	0,021429	-0,00031	-0,01999	-0,00031	0,128571	0,01331	0,8573
0,2	0,028	0,028571	-0,00171	-0,04716	-0,00171	0,173139	0,02971	0,81916
0,25	0,05	0,035714	-0,00516	-0,07228	-0,00516	0,219448	0,055163	0,772275

Πίνακας 6.7

Στο κυβικό μοντέλο 3 παρατηρούμε ότι για κατ’ όγκο περιεκτικότητα εγκλεισμάτων μεγαλύτερη από 0,15, οι τιμές διάφορων ακτίνων και περιεκτικοτήτων βγαίνουν αρνητικές. Αυτό είναι αναμενόμενο αφού στο προηγούμενο κεφάλαιο αποδείξαμε ότι η μέγιστη κατ’ όγκο περιεκτικότητα των εγκλεισμάτων του κυβικού μοντέλου 3 είναι $\mathbf{U_{f,\ max} = 0,1145}$. Δεν έχει νόημα λοιπόν, σε αυτό το μοντέλο, άρα, να μιλάμε για κατ’ όγκο περιεκτικότητα εγκλεισμάτων μεγαλύτερη από **0,1145**.

6.2 Ελαστικές σταθερές για την ενδιάμεση φάση

Η φυσική συμπεριφορά του συστήματος εξαρτάται ξεχωριστά από τις ιδιότητες του εγκλείσματος και της μήτρας, όπως επίσης και από την αλληλεπίδρασή τους. Αυτή η αλληλεπίδραση είναι δυνατό να ληφθεί υπόψη υπό τη μορφή της ενδιάμεσης φάσης, η οποία δημιουργείται κατά την παραγωγή του σύνθετου υλικού και παίζει ένα πολύ σημαντικό ρόλο στη γενική θερμομηχανική συμπεριφορά του σύνθετου υλικού.

Γενικώς, το μέτρο ελαστικότητας E_i και ο λόγος Poisson v_i της ενδιάμεσης φάσης μπορούν να εκφρασθούν ως ένα πολυώνυμο n βαθμού με μεταβλητή την ακτίνα r.

Δηλαδή:

$E_i\left(r\right)=f\left(r\right)$ και $v_i(r)=g\left(r\right)$

ή

$$E_i\left(r\right)=Ar^n+Br^{n-1}+Cr^{n-2}+\dots,\quad v_i\left(r\right)=A'r^n+B'r^{n-1}+C'r^{n-2}+\dots$$

όπου $r_{f,1}\le r\le r_{i,1}$, $r_{m,1}\le r\le r_{i,2}$ και $r_{f,2}\le r\le r_{i,3}$ για κάθε ενδιάμεση φάση.

Στη μελέτη αυτή, για λόγους απλούστευσης, λαμβάνουμε υπ’ όψιν τη γραμμική, την υπερβολική καθώς και την παραβολική μεταβολή των $E_i\left(r\right)$ και $v_i\left(r\right)$.

Θεωρούμε ότι $E_m \le E_i(r) \le E_f$ και $v_f \le v_i(r) \le v_m$, όταν $r_{f,1} \le r \le r_{i,1}$, $r_{m,1} \le r \le r_{i,2}$ και $r_{f,2} \le r \le r_{i,3}$ για κάθε ενδιάμεση φάση. Επειδή στο επταφασικό μοντέλο έχουμε 3 ενδιάμεσες φάσεις, οι οριακές συνθήκες τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε είναι:

- Για την πρώτη ενδιάμεση φάση (βλέπε περιοχή 2, σχήμα 6.1):

Στο $r = r_{f,1}$: $E_i(r) = \text{¦}\, E_f$ και $v_i(r) = \P\, v_f$

Στο $r = r_{i,1}$: $E_i(r) = E_m$ και $v_i(r) = v_m$

- Για τη δεύτερη ενδιάμεση φάση (βλέπε περιοχή 4, σχήμα 6.1):

Στο $r = r_{m,1}$: $E_i(r) = E_m$ και $v_i(r) = v_m$

Στο $r = r_{i,2}$: $E_i(r) = \text{¦}\, E_f$ και $v_i(r) = \P\, v_f$

- Για την τρίτη ενδιάμεση φάση (βλέπε περιοχή 6, σχήμα 6.1):

Στο $r = r_{f,2}$: $E_i(r) = \text{¦}\, E_f$ και $v_i(r) = \P\, v_f$

Στο $r = r_{i,3}$: $E_i(r) = E_m$ και $v_i(r) = v_m$

Δεχόμαστε δηλαδή, ότι τα **E_i (r)** και **v_i (r)** της ενδιάμεσης φάσης στο όριο αυτής με την μήτρα είναι ίσα με **E_m** και **v_m** αντιστοίχως, αφού θεωρούμε ότι η ενδιάμεση φάση είναι μια περιοχή αλλοιωμένης μήτρας. Επίσης, στο όριο αυτής με το έγκλεισμα είναι τμήμα των **E_f** και **v_f** αντιστοίχως, που εκφράζεται με τους συντελεστές **η** και **ξ**. Όμως, για να εκτιμήσουμε τη μέγιστη δυνατή επίδραση της ενδιάμεσης φάσης, **θα θεωρήσουμε ότι τα E_i (r) και v_i (r) στο όριο αυτής με το έγκλεισμα είναι ίσα με E_f και v_f αντιστοίχως, δηλαδή ότι η = ξ = 1.**

6.2.1 Γραμμικό Μοντέλο

Σύμφωνα με αυτήν τη γραμμική μεταβολή τα $E_i(r)$ και $v_i(r)$ μεταβάλλονται ως εξής:

$E_i(r) = A + Br$ και $v_i(r) = A' + B'r$ με $r_{f,1} \le r \le r_{i,1}$, $r_{m,1} \le r \le r_{i,2}$ και $r_{f,2} \le r \le r_{i,3}$ για κάθε ενδιάμεση φάση.

Εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες που έχουμε αναφέρει πιο πάνω και για τις 3 ενδιάμεσες φάσεις, υπολογίζουμε τις σταθερές **A, B, A΄, B΄.** Έτσι προκύπτει ότι:

- Για την πρώτη ενδιάμεση φάση:

$$A = ¦E_f - \frac{¦E_f - E_m}{r_{f,1} - r_{i,1}} r_{f,1} \quad , \quad B = \frac{¦E_f - E_m}{r_{f,1} - r_{i,1}}$$

$$A' = ¶¬_f - \frac{¶¬_f - ¬_m}{r_{f,1} - r_{i,1}} r_{f,1} \quad , \quad B' = \frac{¶¬_f - ¬_m}{r_{f,1} - r_{i,1}}$$

- Για τη δεύτερη ενδιάμεση φάση:

$$A = ¦E_f - \frac{¦E_f - E_m}{r_{i,2} - r_{m,1}} r_{i,2} \quad , \quad B = \frac{¦E_f - E_m}{r_{i,2} - r_{m,1}}$$

$$A' = ¶¬_f - \frac{¶¬_f - ¬_m}{r_{i,2} - r_{m,1}} r_{i,2} \quad , \quad B' = \frac{¶¬_f - ¬_m}{r_{i,2} - r_{m,1}}$$

- Για την τρίτη ενδιάμεση φάση:

$$A = ¦E_f - \frac{¦E_f - E_m}{r_{f,2} - r_{i,3}} r_{f,2} \quad , \quad B = \frac{¦E_f - E_m}{r_{f,2} - r_{i,3}}$$

$$A' = ¶¬_f - \frac{¶¬_f - ¬_m}{r_{f,2} - r_{i,3}} r_{f,2} \quad , \quad B' = \frac{¶¬_f - ¬_m}{r_{f,2} - r_{i,3}}$$

Επιπλέον υπολογίζουμε την μέση τιμή του μέτρου ελαστικότητας και του λόγου Poisson της κάθε ενδιάμεσης φάσης.

- Για την πρώτη ενδιάμεση φάση έχουμε:

$$\overline{E_i} = \frac{1}{V}\int_{r_{f,1}}^{r_{i,1}} E_i(r)\,dV = \frac{1}{V}\int_{r_{f,1}}^{r_{i,1}} (A + Br) 4® r^2 dr = \frac{1}{V} 4® \left[A\frac{r^3}{3} + B\frac{r^4}{4} \right]_{r_{f,1}}^{r_{i,1}}$$

$$\overline{¬_i} = \frac{1}{V}\int_{r_{f,1}}^{r_{i,1}} ¬_i(r)\,dV = \frac{1}{V}\int_{r_{f,1}}^{r_{i,1}} (A' + B'r) 4® r^2 dr = \frac{1}{V} 4® \left[A'\frac{r^3}{3} + B'\frac{r^4}{4} \right]_{r_{f,1}}^{r_{i,1}}$$

- Για τη δεύτερη ενδιάμεση φάση έχουμε:

$$\overline{E_i} = \frac{1}{V}\int_{r_{m,1}}^{r_{i,2}} E_i(r)\,dV = \frac{1}{V}\int_{r_{m,1}}^{r_{i,2}} (A+Br)4\circledR r^2 dr = \frac{1}{V}4\circledR\left[A\frac{r^3}{3}+B\frac{r^4}{4}\right]_{r_{m,1}}^{r_{i,2}}$$

$$\overline{\neg_i} = \frac{1}{V}\int_{r_{m,1}}^{r_{i,2}} \neg_i(r)\,dV = \frac{1}{V}\int_{r_{m,1}}^{r_{i,2}} (A'+B'r)4\circledR r^2 dr = \frac{1}{V}4\circledR\left[A'\frac{r^3}{3}+B'\frac{r^4}{4}\right]_{r_{m,1}}^{r_{i,2}}$$

- Για τη τρίτη ενδιάμεση φάση έχουμε:

$$\overline{E_i} = \frac{1}{V}\int_{r_{f,2}}^{r_{i,3}} E_i(r)\,dV = \frac{1}{V}\int_{r_{f,2}}^{r_{i,3}} (A+Br)4\circledR r^2 dr = \frac{1}{V}4\circledR\left[A\frac{r^3}{3}+B\frac{r^4}{4}\right]_{r_{f,2}}^{r_{i,3}}$$

$$\overline{\neg_i} = \frac{1}{V}\int_{r_{f,2}}^{r_{i,3}} \neg_i(r)\,dV = \frac{1}{V}\int_{r_{f,2}}^{r_{i,3}} (A'+B'r)4\circledR r^2 dr = \frac{1}{V}4\circledR\left[A'\frac{r^3}{3}+B'\frac{r^4}{4}\right]_{r_{f,2}}^{r_{i,3}}$$

Όπου dV ο όγκος της στοιχειώδους περιοχής της ενδιάμεσης φάσης και ισούται με:

$$V = \frac{4}{3}\circledR r^3 \Rightarrow dV = 4\circledR r^2 dr$$

Επομένως προκύπτει:

- Για την πρώτη ενδιάμεση φάση έχουμε:

$$\overline{E_i} = \frac{4\circledR}{V}\left[\frac{A}{3}\left(r_{i,1}^3 - r_{f,1}^3\right) + \frac{B}{4}\left(r_{i,1}^4 - r_{f,1}^4\right)\right]$$

$$\overline{\neg_i} = \frac{4\circledR}{V}\left[\frac{A'}{3}\left(r_{i,1}^3 - r_{f,1}^3\right) + \frac{B'}{4}\left(r_{i,1}^4 - r_{f,1}^4\right)\right]$$

- Για τη δεύτερη ενδιάμεση φάση έχουμε:

$$\overline{E_i} = \frac{4\circledR}{V}\left[\frac{A}{3}\left(r_{i,2}^3 - r_{m,1}^3\right) + \frac{B}{4}\left(r_{i,2}^4 - r_{m,1}^4\right)\right]$$

$$\overline{\neg_i} = \frac{4\circledR}{V}\left[\frac{A'}{3}\left(r_{i,2}^3 - r_{m,1}^3\right) + \frac{B'}{4}\left(r_{i,2}^4 - r_{m,1}^4\right)\right]$$

- Για την τρίτη ενδιάμεση φάση έχουμε:

$$\overline{E_i} = \frac{4\text{®}}{V}\left[\frac{A}{3}\left(r_{i,3}^{3} - r_{f,2}^{3}\right) + \frac{B}{4}\left(r_{i,3}^{4} - r_{f,2}^{4}\right)\right]$$

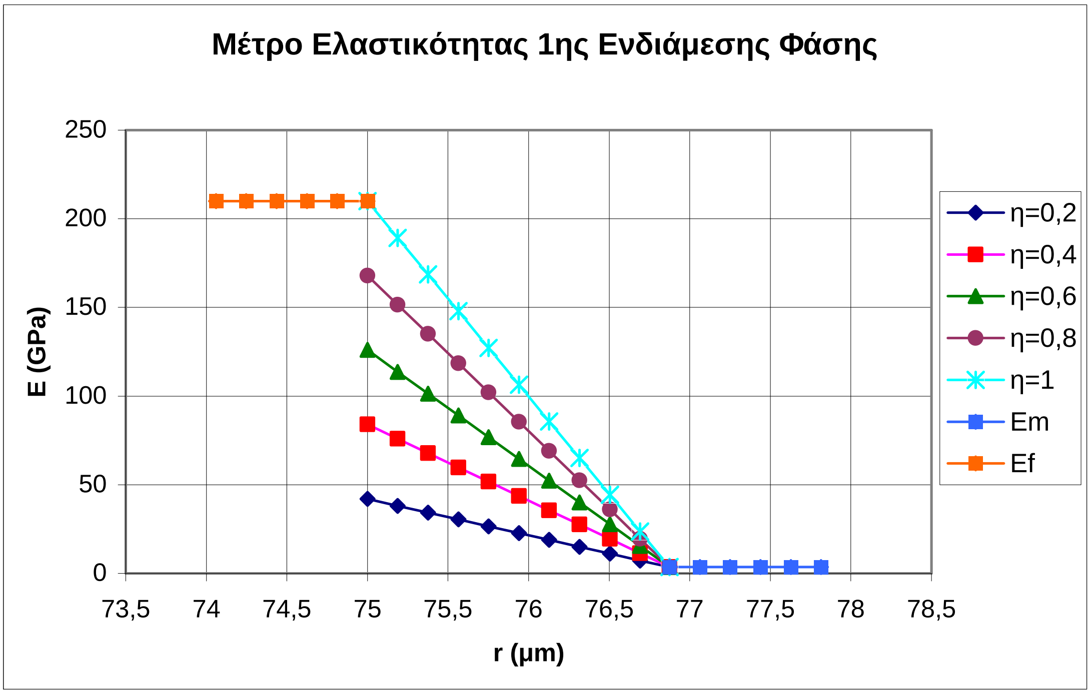
$$\overline{\neg}_i = \frac{4\text{®}}{V}\left[\frac{A'}{3}\left(r_{i,3}^{3} - r_{f,2}^{3}\right) + \frac{B'}{4}\left(r_{i,3}^{4} - r_{f,2}^{4}\right)\right]$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε και παρουσιάζουμε στους ακόλουθους πίνακες και διαγράμματα, τις τιμές του μέτρου ελαστικότητας και του λόγου Poisson και για τις 3 ενδιάμεσες φάσεις, ενδεικτικά για το **κυβικό μοντέλο 1**. Για το μέτρο Ελαστικότητας χρησιμοποιούμε μειωτικό συντελεστή **η** και για το λόγο Poisson χρησιμοποιούμε μειωτικό συντελεστή **ξ**, ο οποίος για λόγους απλούστευσης θεωρούμε ότι παίρνει την τιμή **1**.

- Για την πρώτη ενδιάμεση φάση έχουμε:

r (μm)	**Μέτρο Ελαστικότητας 1ης Ενδιάμεσης Φάσης E (GPa)**				
	η = 0,2	**η = 0,4**	**η = 0,6**	**η = 0,8**	**η = 1**
75	42	84	126	168	210
75,188	38,1421	75,9301	113,718	151,506	189,294
75,376	34,2841	67,8602	101,436	135,012	168,589
75,564	30,4262	59,7904	89,1545	118,519	147,883
75,752	26,5682	51,7205	76,8727	102,025	127,177
75,94	22,7103	43,6506	64,5909	85,5312	106,471
76,128	18,8524	35,5807	52,3091	69,0374	85,7658
76,316	14,9944	27,5108	40,0273	52,5437	65,0601
76,504	11,1365	19,441	27,7454	36,0499	44,3544
76,692	7,27856	11,3711	15,4636	19,5561	23,6487
76,8747	3,53	3,53	3,53	3,53	3,53

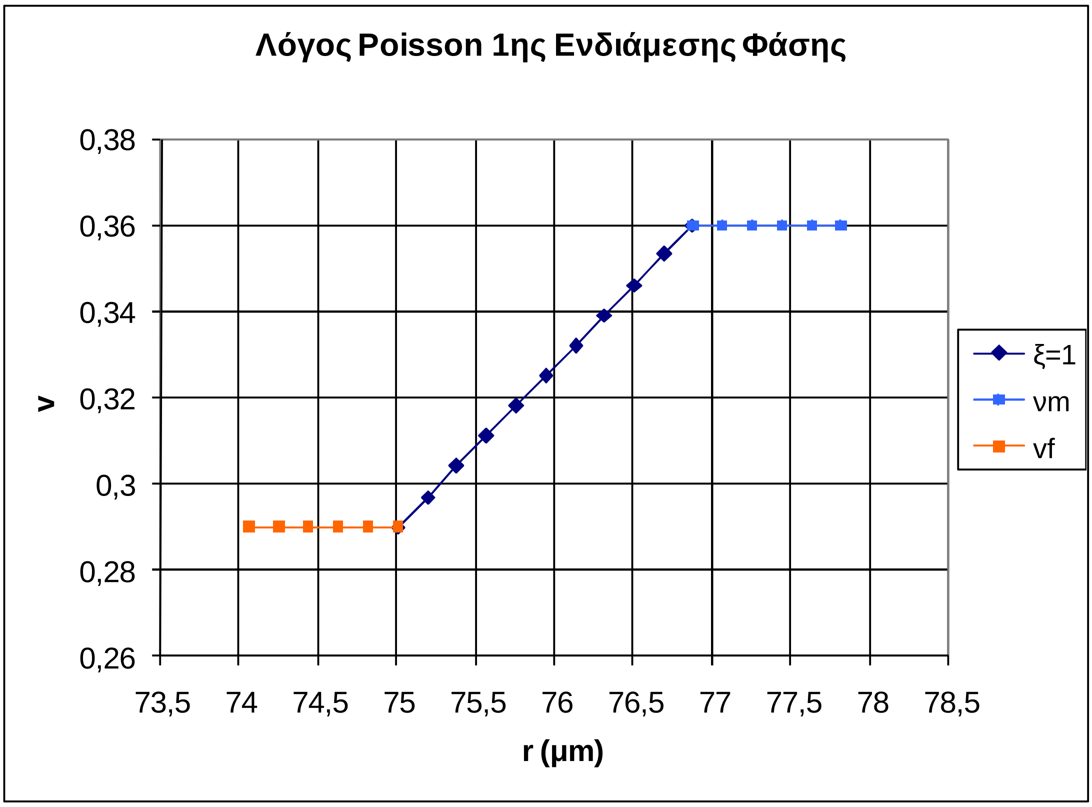
Πίνακας 6.8



Διάγραμμα 6.1

r (μm)	Λόγος Poisson ν ξ = 1
75	0,29
75,188	0,297
75,376	0,304
75,564	0,311
75,752	0,318
75,94	0,325
76,128	0,332
76,316	0,339
76,504	0,346
76,692	0,353
76,8747	0,36

Πίνακας 6.9

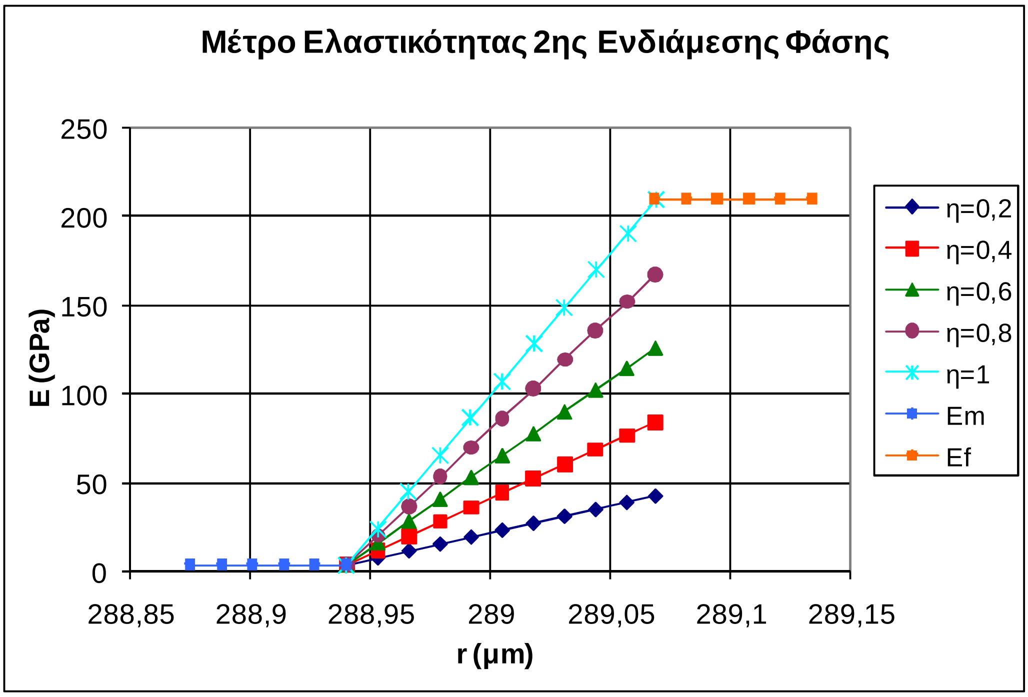


Διάγραμμα 6.2

- Για τη δεύτερη ενδιάμεση φάση έχουμε:

r (μm)	Μέτρο Ελαστικότητας 2ης Ενδιάμεσης Φάσης Ε (GPa)				
	η = 0,2	η = 0,4	η = 0,6	η = 0,8	η = 1
288,94	3,53	3,53	3,53	3,53	3,53
288,953	7,40682	11,6394	15,8719	20,1045	24,3371
288,966	11,2836	19,7488	28,2139	36,679	45,1441
288,979	15,1605	27,8581	40,5558	53,2535	65,9512
288,992	19,0373	35,9675	52,8978	69,828	86,7582
289,005	22,9141	44,0769	65,2397	86,4025	107,565
289,018	26,7909	52,1863	77,5816	102,977	128,372
289,031	30,6678	60,2957	89,9236	119,551	149,179
289,044	34,5446	68,405	102,266	136,126	169,986
289,057	38,4214	76,5144	114,607	152,7	190,793
289,069	42	84	126	168	210

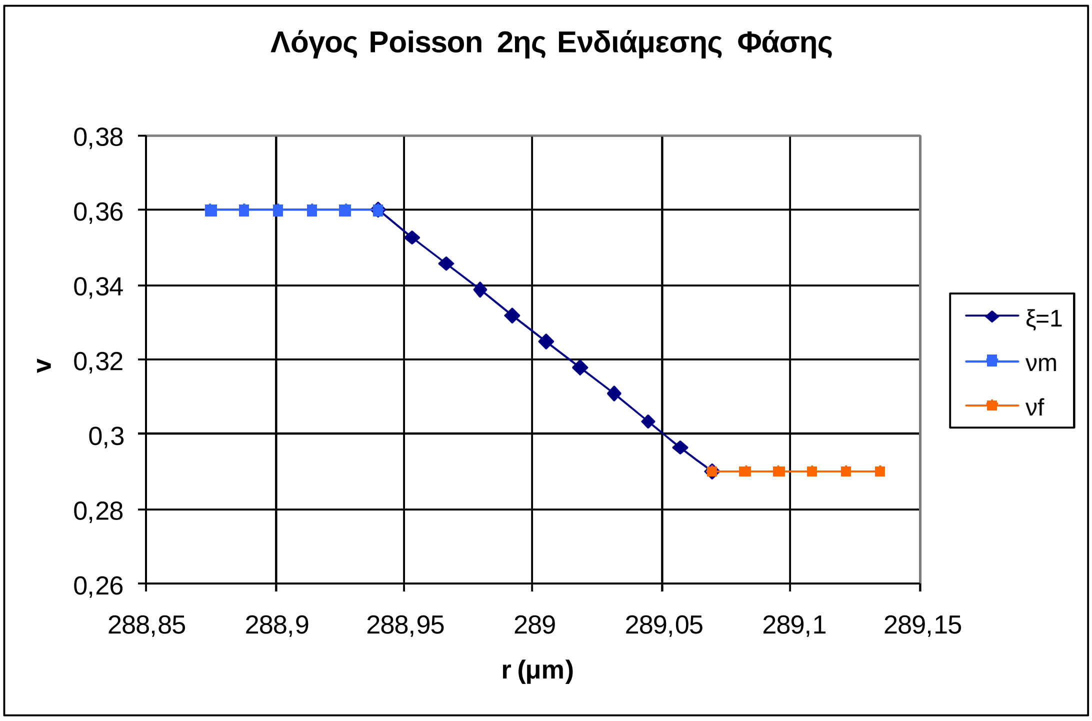
Πίνακας 6.10



Διάγραμμα 6.3

r (μm)	Λόγος Poisson ν ξ = 1
288,94	0,36
288,953	0,353
288,966	0,346
288,979	0,339
288,992	0,332
289,005	0,325
289,018	0,318
289,031	0,311
289,044	0,304
289,057	0,297
289,069	0,29

Πίνακας 6.11

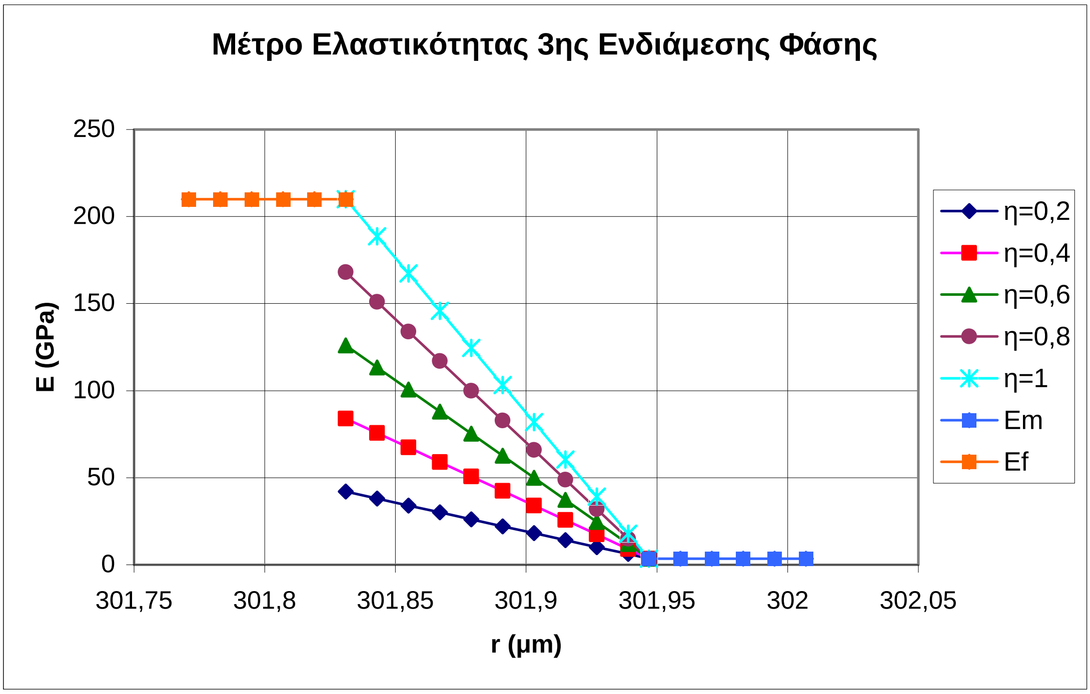


Διάγραμμα 6.4

- Για τη τρίτη ενδιάμεση φάση έχουμε:

r (μm)	Μέτρο Ελαστικότητας 3ης Ενδιάμεσης Φάσης Ε (GPa)				
	η = 0,2	η = 0,4	η = 0,6	η = 0,8	η = 1
301,831	42	84	126	168	210
301,843	38,02034	75,67552	113,3307	150,9859	188,641
301,855	34,04069	67,35103	100,6614	133,9717	167,2821
301,867	30,06103	59,02655	87,99207	116,9576	145,9231
301,879	26,08138	50,70207	75,32276	99,94345	124,5641
301,891	22,10172	42,37759	62,65345	82,92931	103,2052
301,903	18,12207	34,0531	49,98414	65,91517	81,84621
301,915	14,14241	25,72862	37,31483	48,90103	60,48724
301,927	10,16276	17,40414	24,64552	31,8869	39,12828
301,939	6,183103	9,079655	11,97621	14,87276	17,76931
301,947	3,53	3,53	3,53	3,53	3,53

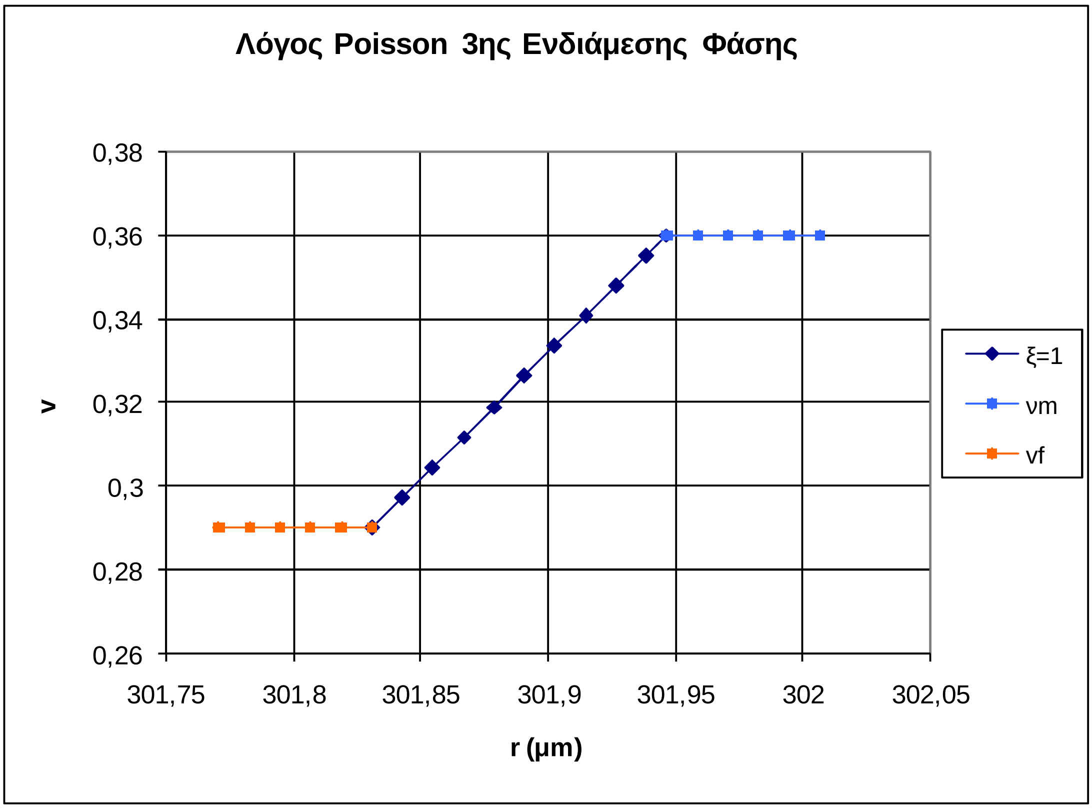
Πίνακας 6.12



Διάγραμμα 6.5

r (μm)	Λόγος Poisson v
	ξ = 1
301,831	0,29
301,843	0,297241
301,855	0,304483
301,867	0,311724
301,879	0,318966
301,891	0,326207
301,903	0,333448
301,915	0,34069
301,927	0,347931
301,939	0,355172
301,947	0,36

Πίνακας 6.13



Διάγραμμα 6.6

6.2.2 Παραβολικό Μοντέλο (2ης τάξης)

Σύμφωνα με την παραβολική μεταβολή τα $E_i(r)$ και $v_i(r)$ μεταβάλλονται ως εξής:

$E_i(r) = Ar^2 + Br + C$ και $v_i(r) = A'r^2 + B'r + C'$ με $r_{f,1} \le r \le r_{i,1}$, $r_{m,1} \le r \le r_{i,2}$ και $r_{f,2} \le r \le r_{i,3}$ για κάθε ενδιάμεση φάση.

Για τον υπολογισμό των **A, B, C** και **A΄, B΄, C΄**, εκτός από τις προαναφερθείσες οριακές συνθήκες θα θεωρήσουμε ότι η $E_i(r)$ παρουσιάζει ελάχιστο και η $v_i(r)$ παρουσιάζει μέγιστο για τις θέσεις $r = r_{i,1}$, $r = r_{m,1}$ και $r = r_{i,3}$. Δηλαδή:

Για την πρώτη ενδιάμεση φάση στο $r = r_{i,1}$ έχουμε:

$$\frac{dE_i(r)}{dr} = 0 \quad \text{με} \quad \frac{d^2E_i(r)}{dr^2} > 0$$

και

$$\frac{dv_i(r)}{dr} = 0 \quad \text{με} \quad \frac{d^2v_i(r)}{dr^2} < 0$$

Για τη δεύτερη ενδιάμεση φάση στο $r = r_{m,1}$ έχουμε:

$$\frac{dE_i(r)}{dr} = 0 \quad \text{με} \quad \frac{d^2E_i(r)}{dr^2} > 0$$

και

$$\frac{dv_i(r)}{dr} = 0 \quad \text{με} \quad \frac{d^2v_i(r)}{dr^2} < 0$$

Για την τρίτη ενδιάμεση φάση στο $r = r_{i,3}$ έχουμε :

$$\frac{dE_i(r)}{dr} = 0 \quad \text{με} \quad \frac{d^2E_i(r)}{dr^2} > 0$$

και

$$\frac{dv_i(r)}{dr} = 0 \quad \text{με} \quad \frac{d^2v_i(r)}{dr^2} < 0$$

Έτσι βρίσκουμε τις σταθερές για την πρώτη ενδιάμεση φάση:

$$A = \frac{\text{¦}\, E_f - E_m}{\left(r_{f,1} - r_{i,1}\right)^2} \quad , \quad A' = \frac{\text{¶¬}_f - \text{¬}_m}{\left(r_{f,1} - r_{i,1}\right)^2}$$

$$B = -\frac{2r_i\left(\text{¦}\, E_f - E_m\right)}{\left(r_{f,1} - r_{i,1}\right)^2} \quad , \quad B' = -\frac{2r_i\left(\text{¶¬}_f - \text{¬}_m\right)}{\left(r_{f,1} - r_{i,1}\right)^2}$$

$$C=\frac{\text{¦}\,E_f r_{i,1}^2+E_m r_{f,1}^2-2E_m r_{f,1} r_{i,1}}{\left(r_{f,1}-r_{i,1}\right)^2} \quad , \quad C'=\frac{\text{¶¬}_f r_{i,1}^2+\text{¬}_m r_{f,1}^2-2\text{¬}_m r_{f,1} r_{i,1}}{\left(r_{f,1}-r_{i,1}\right)^2}$$

Για τη δεύτερη ενδιάμεση φάση:

$$A=\frac{\text{¦}\,E_f-E_m}{\left(r_{i,2}-r_{m,1}\right)^2} \quad , \quad A'=\frac{\text{¶¬}_f-\text{¬}_m}{\left(r_{i,2}-r_{m,1}\right)^2}$$

$$B=-\frac{2r_{m,1}\left(\text{¦}\,E_f-E_m\right)}{\left(r_{i,2}-r_{m,1}\right)^2} \quad , \quad B'=-\frac{2r_{m,1}\left(\text{¶¬}_f-\text{¬}_m\right)}{\left(r_{i,2}-r_{m,1}\right)^2}$$

$$C=\frac{\text{¦}\,E_f r_{m,1}^2+E_m r_{i,2}^2-2E_m r_{i,2} r_{m,1}}{\left(r_{i,2}-r_{m,1}\right)^2} \quad , \quad C'=\frac{\text{¶¬}_f r_{m,1}^2+\text{¬}_m r_{i,2}^2-2\text{¬}_m r_{i,2} r_{m,1}}{\left(r_{i,2}-r_{m,1}\right)^2}$$

Για την τρίτη ενδιάμεση φάση:

$$A=\frac{\text{¦}\,E_f-E_m}{\left(r_{f,2}-r_{i,3}\right)^2} \quad , \quad A'=\frac{\text{¶¬}_f-\text{¬}_m}{\left(r_{f,2}-r_{i,3}\right)^2}$$

$$B=-\frac{2r_{i,3}\left(\text{¦}\,E_f-E_m\right)}{\left(r_{f,2}-r_{i,3}\right)^2} \quad , \quad B'=-\frac{2r_{i,3}\left(\text{¶¬}_f-\text{¬}_m\right)}{\left(r_{f,2}-r_{i,3}\right)^2}$$

$$C=\frac{\text{¦}\,E_f r_{i,3}^2+E_m r_{f,2}^2-2E_m r_{f,2} r_{i,3}}{\left(r_{f,2}-r_{i,3}\right)^2} \quad , \quad C'=\frac{\text{¶¬}_f r_{i,3}^2+\text{¬}_m r_{f,2}^2-2\text{¬}_m r_{f,2} r_{i,3}}{\left(r_{f,2}-r_{i,3}\right)^2}$$

Επιπλέον υπολογίζουμε την μέση τιμή του μέτρου ελαστικότητας και του λόγου Poisson της ενδιάμεσης φάσης.

- Για την πρώτη ενδιάμεση φάση έχουμε:

$$\overline{E_i} = \frac{1}{V}\int_{r_{f,1}}^{r_{i,1}} E_i(r)\,dV = \frac{1}{V}\int_{r_{f,1}}^{r_{i,1}}\left(Ar^2+Br+C\right)4\text{®}r^2dr = \frac{1}{V}4\text{®}\left[A\frac{r^5}{5}+B\frac{r^4}{4}+C\frac{r^3}{3}\right]_{r_{f,1}}^{r_{i,1}}$$

$$\overline{\neg}_i = \frac{1}{V}\int_{r_{f,1}}^{r_{i,1}} \neg_i(r)\,dV = \frac{1}{V}\int_{r_{f,1}}^{r_{i,1}}\left(A'r^2+B'r+C'\right)4\text{®}r^2dr = \frac{1}{V}4\text{®}\left[A'\frac{r^5}{5}+B'\frac{r^4}{4}+C'\frac{r^3}{3}\right]_{r_{f,1}}^{r_{i,1}}$$

- Για τη δεύτερη ενδιάμεση φάση έχουμε:

$$\overline{E_i} = \frac{1}{V}\int_{r_{m,1}}^{r_{i,2}} E_i(r)\,dV = \frac{1}{V}\int_{r_{m,1}}^{r_{i,2}}\left(Ar^2+Br+C\right)4\text{®}r^2dr = \frac{1}{V}4\text{®}\left[A\frac{r^5}{5}+B\frac{r^4}{4}+C\frac{r^3}{3}\right]_{r_{m,1}}^{r_{i,2}}$$

$$\overline{\neg}_i = \frac{1}{V}\int_{r_{m,1}}^{r_{i,2}} \neg_i(r)\,dV = \frac{1}{V}\int_{r_{m,1}}^{r_{i,2}}\left(A'r^2+B'r+C'\right)4\text{®}r^2dr = \frac{1}{V}4\text{®}\left[A'\frac{r^5}{5}+B'\frac{r^4}{4}+C'\frac{r^3}{3}\right]_{r_{m,1}}^{r_{i,2}}$$

- Για την τρίτη ενδιάμεση φάση έχουμε:

$$\overline{E_i} = \frac{1}{V}\int_{r_{f,2}}^{r_{i,3}} E_i(r)\,dV = \frac{1}{V}\int_{r_{f,2}}^{r_{i,3}}\left(Ar^2+Br+C\right)4\text{®}r^2dr = \frac{1}{V}4\text{®}\left[A\frac{r^5}{5}+B\frac{r^4}{4}+C\frac{r^3}{3}\right]_{r_{f,2}}^{r_{i,3}}$$

$$\overline{\neg}_i = \frac{1}{V}\int_{r_{f,2}}^{r_{i,3}} \neg_i(r)\,dV = \frac{1}{V}\int_{r_{f,2}}^{r_{i,3}}\left(A'r^2+B'r+C'\right)4\text{®}r^2dr = \frac{1}{V}4\text{®}\left[A'\frac{r^5}{5}+B'\frac{r^4}{4}+C'\frac{r^3}{3}\right]_{r_{f,2}}^{r_{i,3}}$$

Έτσι αντικαθιστώντας προκύπτει:

- Για την πρώτη ενδιάμεση φάση:

$$\overline{E_i} = \frac{4\text{®}}{V}\left[\frac{A}{5}\left(r_{\S,1}^5 - r_{f,1}^5\right) + \frac{B}{4}\left(r_{\S,1}^4 - r_{f,1}^4\right) + \frac{C}{3}\left(r_{\S,1}^3 - r_{f,1}^3\right)\right]$$

$$\overline{\neg}_i = \frac{4\text{®}}{V}\left[\frac{A'}{5}\left(r_{\S,1}^5 - r_{f,1}^5\right) + \frac{B'}{4}\left(r_{\S,1}^4 - r_{f,1}^4\right) + \frac{C'}{3}\left(r_{\S,1}^3 - r_{f,1}^3\right)\right]$$

- Για τη δεύτερη ενδιάμεση φάση:

$$\overline{E_i} = \frac{4®}{V}\left[\frac{A}{5}\left(r_{§,2}^5 - r_{m,1}^5\right) + \frac{B}{4}\left(r_{§,2}^4 - r_{m,1}^4\right) + \frac{C}{3}\left(r_{§,2}^3 - r_{m,1}^3\right)\right]$$

$$\overline{¬_i} = \frac{4®}{V}\left[\frac{A'}{5}\left(r_{§,2}^5 - r_{m,1}^5\right) + \frac{B'}{4}\left(r_{§,2}^4 - r_{m,1}^4\right) + \frac{C'}{3}\left(r_{§,2}^3 - r_{m,1}^3\right)\right]$$

- Για την τρίτη ενδιάμεση φάση:

$$\overline{E_i} = \frac{4®}{V}\left[\frac{A}{5}\left(r_{§,3}^5 - r_{f,2}^5\right) + \frac{B}{4}\left(r_{§,3}^4 - r_{f,2}^4\right) + \frac{C}{3}\left(r_{§,3}^3 - r_{f,2}^3\right)\right]$$

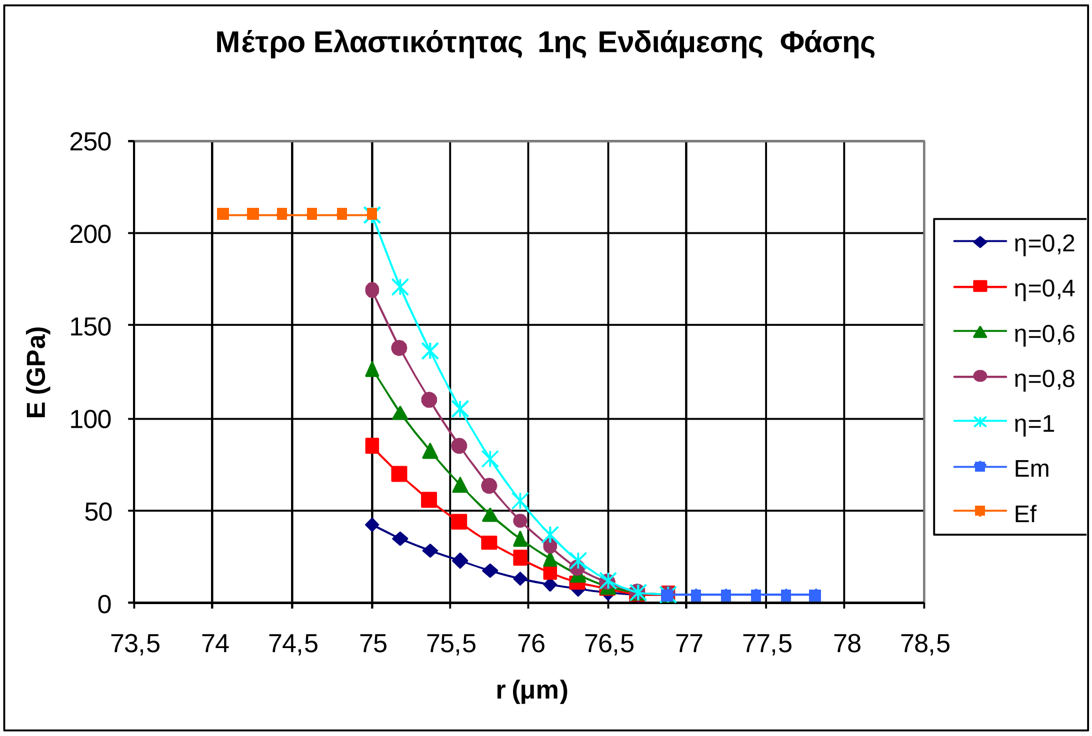
$$\overline{¬_i} = \frac{4®}{V}\left[\frac{A'}{5}\left(r_{§,3}^5 - r_{f,2}^5\right) + \frac{B'}{4}\left(r_{§,3}^4 - r_{f,2}^4\right) + \frac{C'}{3}\left(r_{§,3}^3 - r_{f,2}^3\right)\right]$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε και παρουσιάζουμε στους ακόλουθους πίνακες και διαγράμματα, τις τιμές του μέτρου ελαστικότητας και του λόγου Poisson και για τις 3 ενδιάμεσες φάσεις, ενδεικτικά για το **κυβικό μοντέλο 1**. Για το μέτρο ελαστικότητας χρησιμοποιούμε μειωτικό συντελεστή **η** και για το λόγο Poisson χρησιμοποιούμε μειωτικό συντελεστή **ξ**, ο οποίος για λόγους απλούστευσης θεωρούμε ότι παίρνει την τιμή **1**.

- Για την πρώτη ενδιάμεση φάση έχουμε:

r (μm)	**Μέτρο Ελαστικότητας 1ης Ενδιάμεσης Φάσης E (GPa)**				
	η = 0,2	**η = 0,4**	**η = 0,6**	**η = 0,8**	**η = 1**
75	42	84	126	168	210
75,188	34,671	68,67	102,67	136,67	170,665
75,376	28,116	54,958	81,799	108,64	135,483
75,564	22,334	42,864	63,394	83,924	104,454
75,752	17,327	32,389	47,452	62,515	77,5777
75,94	13,093	23,533	33,974	44,414	54,8544
76,128	9,6328	16,296	22,958	29,621	36,284
76,316	6,9465	10,677	14,407	18,137	21,8666
76,504	5,034	6,676	8,318	9,96	11,602
76,692	3,8953	4,294	4,6928	5,0916	5,49039
76,8747	3,53	3,53	3,53	3,53	3,53

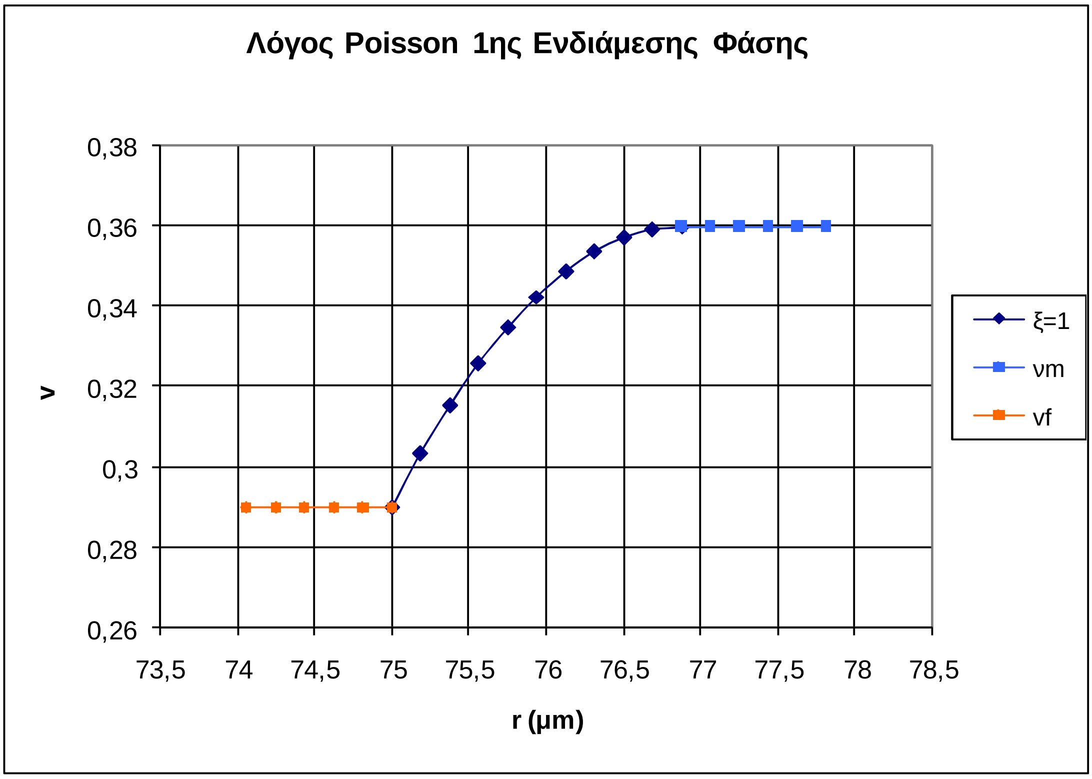
Πίνακας 6.14



Διάγραμμα 6.7

r (μm)	Λόγος Poisson v ξ = 1
75	0,29
75,188	0,30334
75,376	0,31526
75,564	0,32578
75,752	0,3349
75,94	0,3426
76,128	0,3489
76,316	0,35378
76,504	0,35726
76,692	0,35934
76,8747	0,36

Πίνακας 6.15

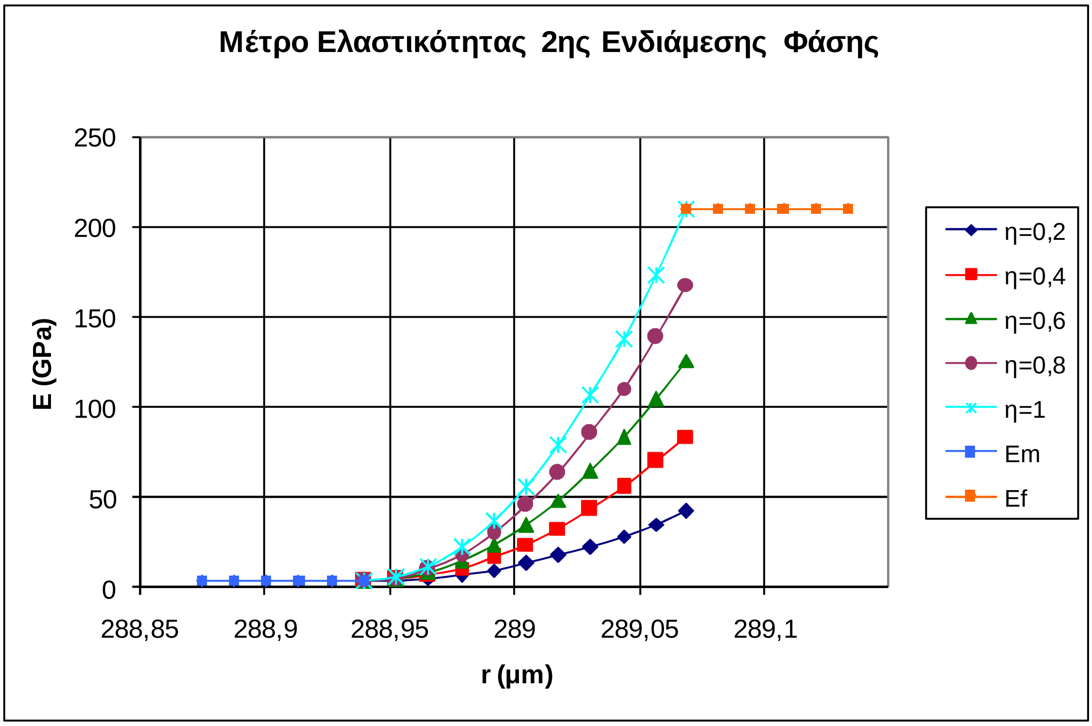


Διάγραμμα 6.8

- Για τη δεύτερη ενδιάμεση φάση έχουμε:

r (μm)	Μέτρο Ελαστικότητας 2ης Ενδιάμεσης Φάσης Ε (GPa)				
	η = 0,2	η = 0,4	η = 0,6	η = 0,8	η = 1
288,94	3,53	3,53	3,53	3,53	3,53
288,953	3,9207	4,3472	4,7738	5,2003	5,6268
288,966	5,0927	6,7989	8,505	10,211	11,917
288,979	7,0462	10,885	14,724	18,563	22,402
288,992	9,781	16,606	23,43	30,255	37,079
289,005	13,297	23,961	34,624	45,287	55,951
289,018	17,595	32,95	48,305	63,661	79,016
289,031	22,674	43,574	64,474	85,375	106,27
289,044	28,534	55,832	83,131	110,43	137,73
289,057	35,176	69,725	104,27	138,82	173,37
289,069	42	84	126	168	210

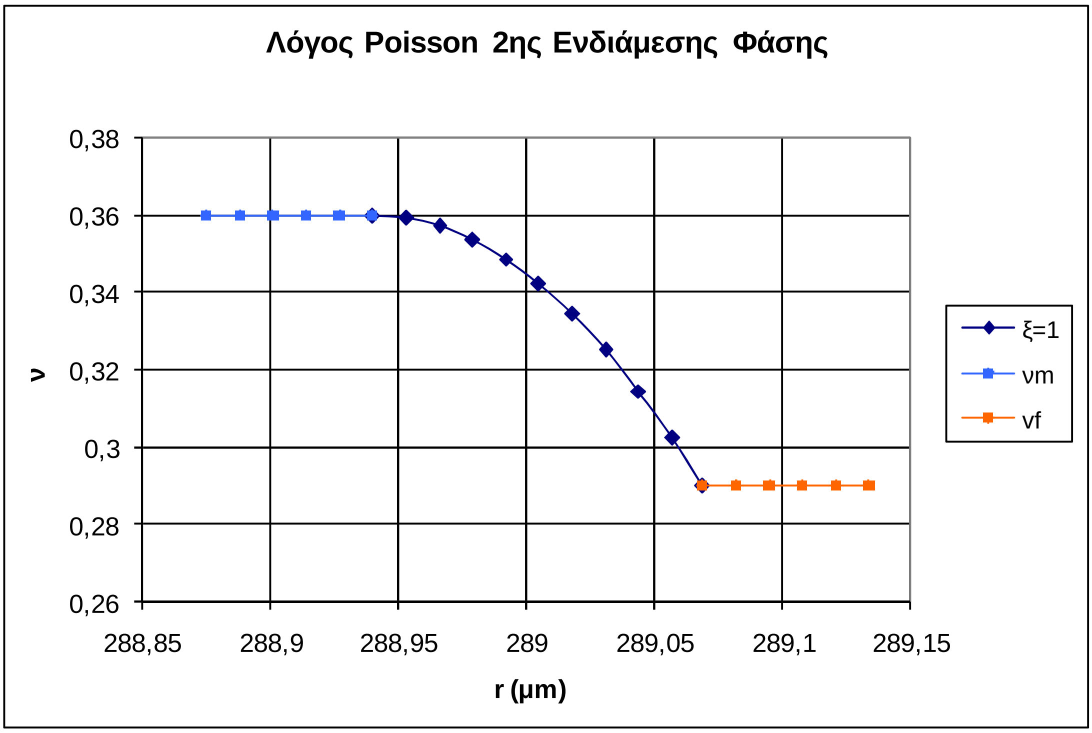
Πίνακας 6.16



Διάγραμμα 6.9

r (μm)	Λόγος Poisson ν ξ = 1
288,94	0,36
288,953	0,3593
288,966	0,3572
288,979	0,3536
288,992	0,3486
289,005	0,3422
289,018	0,3344
289,031	0,3252
289,044	0,3145
289,057	0,3024
289,069	0,29

Πίνακας 6.17

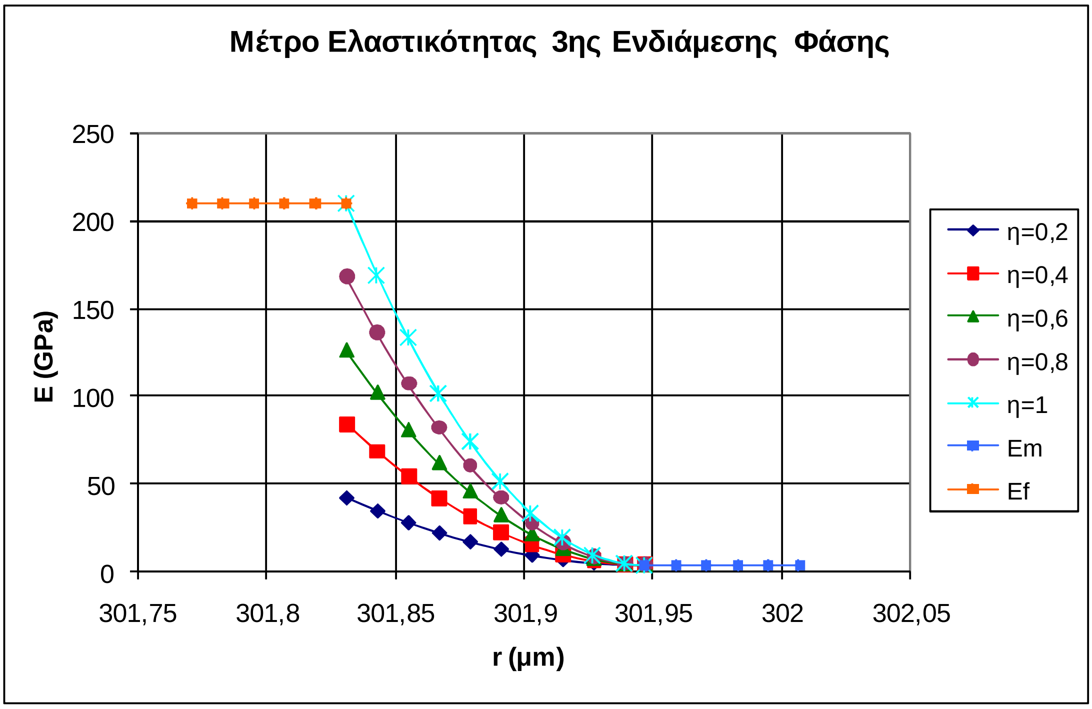


Διάγραμμα 6.10

- Για τη τρίτη ενδιάμεση φάση έχουμε:

r (μm)	Μέτρο Ελαστικότητας 3ης Ενδιάμεσης Φάσης E (GPa)				
	η = 0,2	η = 0,4	η = 0,6	η = 0,8	η = 1
301,831	42	84	126	168	210
301,843	34,45238	68,21219	101,972	135,7318	169,4916
301,855	27,72813	54,14668	80,56523	106,9838	133,4023
301,867	21,82727	41,80348	61,7797	81,75592	101,7321
301,879	16,74977	31,18259	45,61541	60,04823	74,48105
301,891	12,49566	22,28401	32,07235	41,8607	51,64905
301,903	9,064923	15,10773	21,15053	27,19334	33,23615
301,915	6,457562	9,653757	12,84995	16,04615	19,24234
301,927	4,673579	5,922093	7,170606	8,41912	9,667633
301,939	3,712973	3,912735	4,112497	4,312259	4,512021
301,947	3,53	3,53	3,53	3,53	3,53

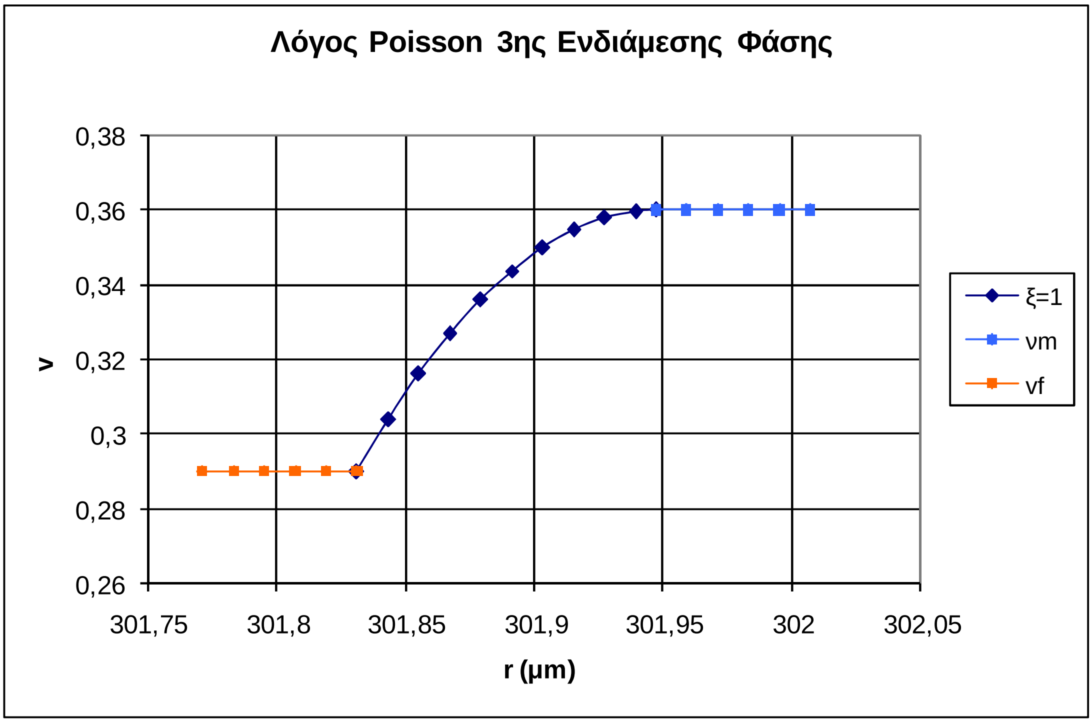
Πίνακας 6.18



Διάγραμμα 6.11

r (μm)	Λόγος Poisson ν
	ξ = 1
301,831	0,29
301,843	0,303734
301,855	0,315969
301,867	0,326706
301,879	0,335945
301,891	0,343686
301,903	0,349929
301,915	0,354673
301,927	0,357919
301,939	0,359667
301,947	0,36

Πίνακας 6.19



Διάγραμμα 6.12

6.2.3 Υπερβολικό Μοντέλο

Σύμφωνα με αυτήν την μεταβολή τα $E_i(r)$ και $\nu_i(r)$ μεταβάλλονται ως εξής:

$$E_i(r) = A + \frac{B}{r} \quad \text{και} \quad \nu_i(r) = A' + \frac{B'}{r}$$

Εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες που αναφέρθηκαν παραπάνω, προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις για τις σταθερές **A , A΄** και **B, B΄** και για τις 3 ενδιάμεσες φάσεις:

- Για την πρώτη ενδιάμεση φάση έχουμε:

$$A = ¦E_f - \frac{r_{i,1}}{r_{i,1} - r_{f,1}}\left(¦E_f - E_m\right) \quad , \quad A' = ¶¬_f - \frac{r_{i,1}}{r_{i,1} - r_{f,1}}\left(¶¬_f - ¬_m\right)$$

$$B=\frac{r_{i,1}r_{f,1}}{r_{i,1}-r_{f,1}}\left(\text{¦}\,E_f-E_m\right)\quad ,\quad B'=\frac{r_{i,1}r_{f,1}}{r_{i,1}-r_{f,1}}\left(\text{¶}\neg_f-\neg_m\right)$$

- Για τη δεύτερη ενδιάμεση φάση έχουμε:

$$A=\text{¦}\,E_f-\frac{r_{m,1}}{r_{m,1}-r_{i,2}}\left(\text{¦}\,E_f-E_m\right)\quad ,\quad A'=\text{¶}\neg_f-\frac{r_{m,1}}{r_{m,1}-r_{i,2}}\left(\text{¶}\neg_f-\neg_m\right)$$

$$B=\frac{r_{m,1}r_{i,2}}{r_{m,1}-r_{i,2}}\left(\text{¦}\,E_f-E_m\right)\quad ,\quad B'=\frac{r_{m,1}r_{i,2}}{r_{m,1}-r_{i,2}}\left(\text{¶}\neg_f-\neg_m\right)$$

- Για την τρίτη ενδιάμεση φάση έχουμε:

$$A=\text{¦}\,E_f-\frac{r_{i,3}}{r_{i,3}-r_{f,2}}\left(\text{¦}\,E_f-E_m\right)\quad ,\quad A'=\text{¶}\neg_f-\frac{r_{i,3}}{r_{i,3}-r_{f,2}}\left(\text{¶}\neg_f-\neg_m\right)$$

$$B=\frac{r_{i,3}r_{f,2}}{r_{i,3}-r_{f,2}}\left(\text{¦}\,E_f-E_m\right)\quad ,\quad B'=\frac{r_{i,3}r_{f,2}}{r_{i,3}-r_{f,2}}\left(\text{¶}\neg_f-\neg_m\right)$$

Επιπλέον υπολογίζουμε την μέση τιμή του μέτρου ελαστικότητας και του λόγου Poisson της κάθε ενδιάμεσης φάσης.

- Για την πρώτη ενδιάμεση φάση έχουμε:

$$\overline{E_i}=\frac{1}{V}\int_{r_{f,1}}^{r_{i,1}}E_i\left(r\right)dV=\frac{1}{V}\int_{r_{f,1}}^{r_{i,1}}\left(A+\frac{B}{r}\right)4\text{®}r^2dr=\frac{4\text{®}}{V}\int_{r_{f,1}}^{r_{i,1}}\left(Ar^2+Br\right)dr$$

$$\overline{\neg}_i=\frac{1}{V}\int_{r_{f,1}}^{r_{i,1}}\neg_i\left(r\right)dV=\frac{1}{V}\int_{r_{f,1}}^{r_{i,1}}\left(A'+\frac{B'}{r}\right)4\text{®}r^2dr=\frac{4\text{®}}{V}\int_{r_{f,1}}^{r_{i,1}}\left(A'r^2+B'r\right)dr$$

- Για τη δεύτερη ενδιάμεση φάση έχουμε:

$$\overline{E_i}=\frac{1}{V}\int_{r_{m,1}}^{r_{i,2}}E_i\left(r\right)dV=\frac{1}{V}\int_{r_{m,1}}^{r_{i,2}}\left(A+\frac{B}{r}\right)4\text{®}r^2dr=\frac{4\text{®}}{V}\int_{r_{m,1}}^{r_{i,2}}\left(Ar^2+Br\right)dr$$

$$\overline{\neg}_i=\frac{1}{V}\int_{r_{m,1}}^{r_{i,2}}\neg_i\left(r\right)dV=\frac{1}{V}\int_{r_{m,1}}^{r_{i,2}}\left(A'+\frac{B'}{r}\right)4\text{®}r^2dr=\frac{4\text{®}}{V}\int_{r_{m,1}}^{r_{i,2}}\left(A'r^2+B'r\right)dr$$

- Για την τρίτη ενδιάμεση φάση έχουμε:

$$\overline{E_i} = \frac{1}{V}\int_{r_{f,2}}^{r_{i,3}} E_i\left(r\right)dV = \frac{1}{V}\int_{r_{f,2}}^{r_{i,3}}\left(A+\frac{B}{r}\right)4\text{®}\,r^2dr = \frac{4\text{®}}{V}\int_{r_{f,2}}^{r_{i,3}}\left(Ar^2+Br\right)dr$$

$$\overline{\neg_i} = \frac{1}{V}\int_{r_{f,2}}^{r_{i,3}} \neg_i\left(r\right)dV = \frac{1}{V}\int_{r_{f,2}}^{r_{i,3}}\left(A' + \frac{B'}{r}\right)4\text{®}\,r^2dr = \frac{4\text{®}}{V}\int_{r_{f,2}}^{r_{i,3}}\left(A'r^2+B'r\right)dr$$

Άρα τελικά έχουμε:

- Για την πρώτη ενδιάμεση φάση:

$$\overline{E_i} = \frac{4\text{®}}{V}\left[\frac{A}{3}\left(r_{i,1}^3 - r_{f,1}^3\right) + \frac{B}{2}\left(r_{i,1}^2 - r_{f,1}^2\right)\right]$$

$$\overline{\neg_i} = \frac{4\text{®}}{V}\left[\frac{A'}{3}\left(r_{i,1}^3 - r_{f,1}^3\right) + \frac{B'}{2}\left(r_{i,1}^2 - r_{f,1}^2\right)\right]$$

- Για τη δεύτερη ενδιάμεση φάση:

$$\overline{E_i} = \frac{4\text{®}}{V}\left[\frac{A}{3}\left(r_{m,1}^3 - r_{i,2}^3\right) + \frac{B}{2}\left(r_{m,1}^2 - r_{i,2}^2\right)\right]$$

$$\overline{\neg_i} = \frac{4\text{®}}{V}\left[\frac{A'}{3}\left(r_{m,1}^3 - r_{i,2}^3\right) + \frac{B'}{2}\left(r_{m,1}^2 - r_{i,2}^2\right)\right]$$

- Για την τρίτη ενδιάμεση φάση:

$$\overline{E_i} = \frac{4\text{®}}{V}\left[\frac{A}{3}\left(r_{i,3}^3 - r_{f,2}^3\right) + \frac{B}{2}\left(r_{i,3}^2 - r_{f,2}^2\right)\right]$$

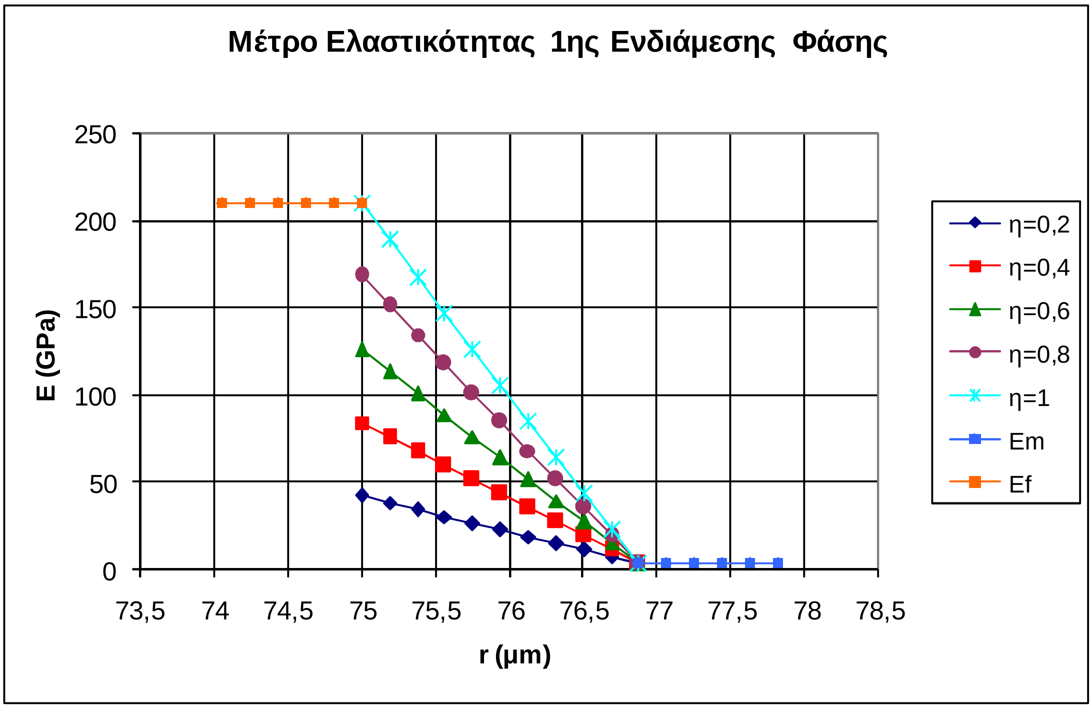
$$\overline{\neg_i} = \frac{4\text{®}}{V}\left[\frac{A'}{3}\left(r_{i,3}^3 - r_{f,2}^3\right) + \frac{B'}{2}\left(r_{i,3}^2 - r_{f,2}^2\right)\right]$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε και παρουσιάζουμε στους ακόλουθους πίνακες και διαγράμματα, τις τιμές του μέτρου Ελαστικότητας και του λόγου Poisson και για τις 3 ενδιάμεσες φάσεις, ενδεικτικά για το **κυβικό μοντέλο 1**. Για το μέτρο Ελαστικότητας χρησιμοποιούμε μειωτικό συντελεστή **η** και για το λόγο Poisson χρησιμοποιούμε μειωτικό συντελεστή **ξ**, ο οποίος για λόγους απλούστευσης θεωρούμε ότι παίρνει την τιμή **1**.

- Για την πρώτη ενδιάμεση φάση έχουμε:

r (μm)	**Μέτρο Ελαστικότητας 1ης Ενδιάμεσης Φάσης Ε (GPa)**				
	η = 0,2	**η = 0,4**	**η = 0,6**	**η = 0,8**	**η = 1**
75	42	84	126	168	210
75,188	38,056	75,749	113,44	151,14	188,83
75,376	34,131	67,539	100,95	134,36	167,765
75,564	30,225	59,37	88,515	117,66	146,805
75,752	26,34	51,242	76,145	101,05	125,95
75,94	22,473	43,154	63,835	84,516	105,197
76,128	18,625	35,106	51,586	68,067	84,5473
76,316	14,797	27,097	39,398	51,698	63,999
76,504	10,987	19,128	27,269	35,411	43,5518
76,692	7,1959	11,198	15,2	19,203	23,2048
76,8747	3,53	3,53	3,53	3,53	3,53

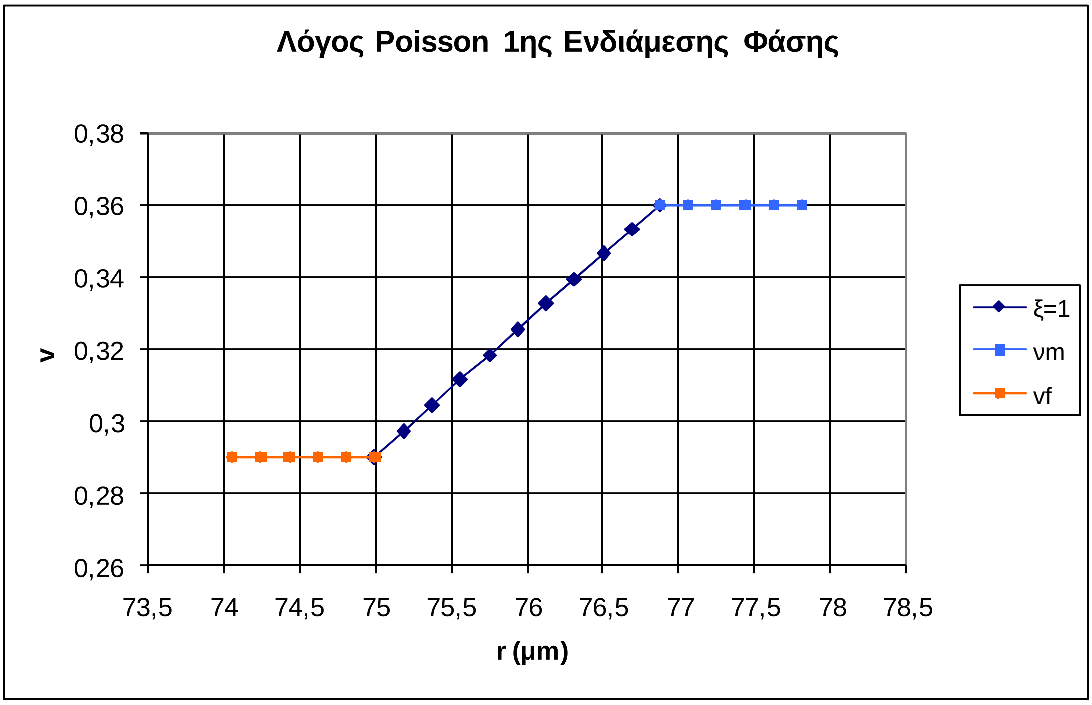
Πίνακας 6.20



Διάγραμμα 6.13

r (μm)	Λόγος Poisson ν ξ = 1
75	0,29
75,188	0,297177
75,376	0,304319
75,564	0,311425
75,752	0,318496
75,94	0,325532
76,128	0,332533
76,316	0,339499
76,504	0,346431
76,692	0,35333
76,8747	0,36

Πίνακας 6.21

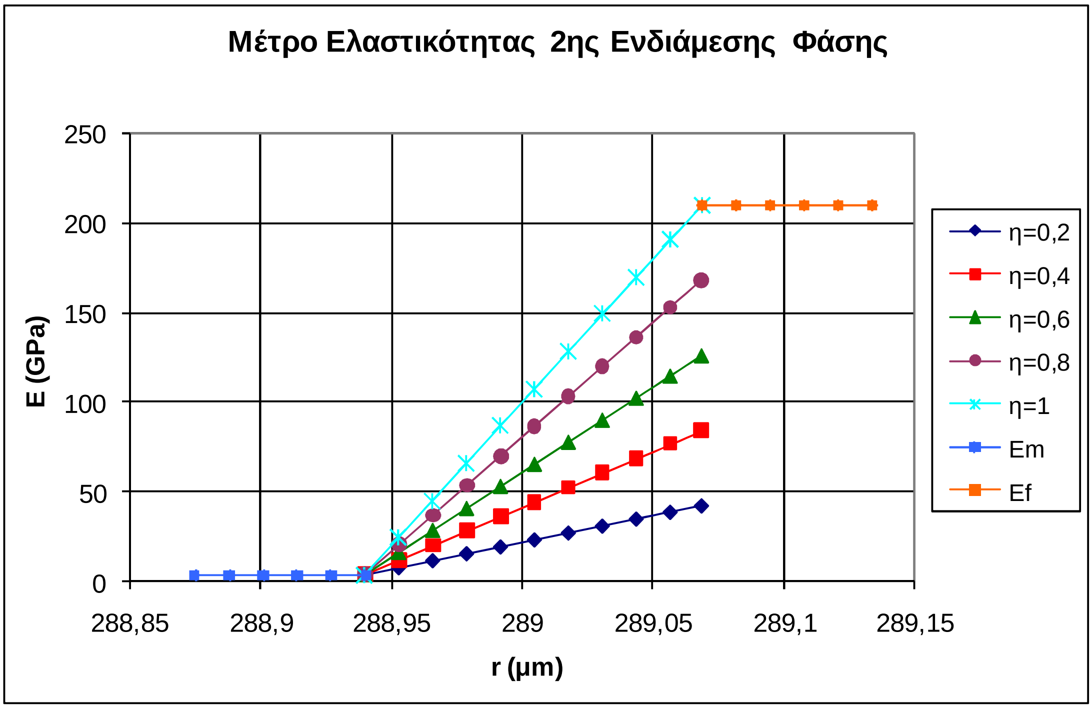


Διάγραμμα 6.14

- Για τη δεύτερη ενδιάμεση φάση έχουμε:

r (μm)	Μέτρο Ελαστικότητας 2ης Ενδιάμεσης Φάσης E (GPa)				
	η = 0,2	η = 0,4	η = 0,6	η = 0,8	η = 1
288,94	3,53	3,53	3,53	3,53	3,53
288,953	7,4084	11,643	15,877	20,111	24,345
288,966	11,286	19,755	28,223	36,691	45,159
288,979	15,164	27,866	40,567	53,269	65,971
288,992	19,041	35,976	52,911	69,846	86,78
289,005	22,918	44,086	65,253	86,421	107,59
289,018	26,795	52,195	77,595	102,99	128,39
289,031	30,671	60,303	89,935	119,57	149,2
289,044	34,547	68,411	102,27	136,14	170
289,057	38,423	76,517	114,61	152,71	190,8
289,069	42	84	126	168	210

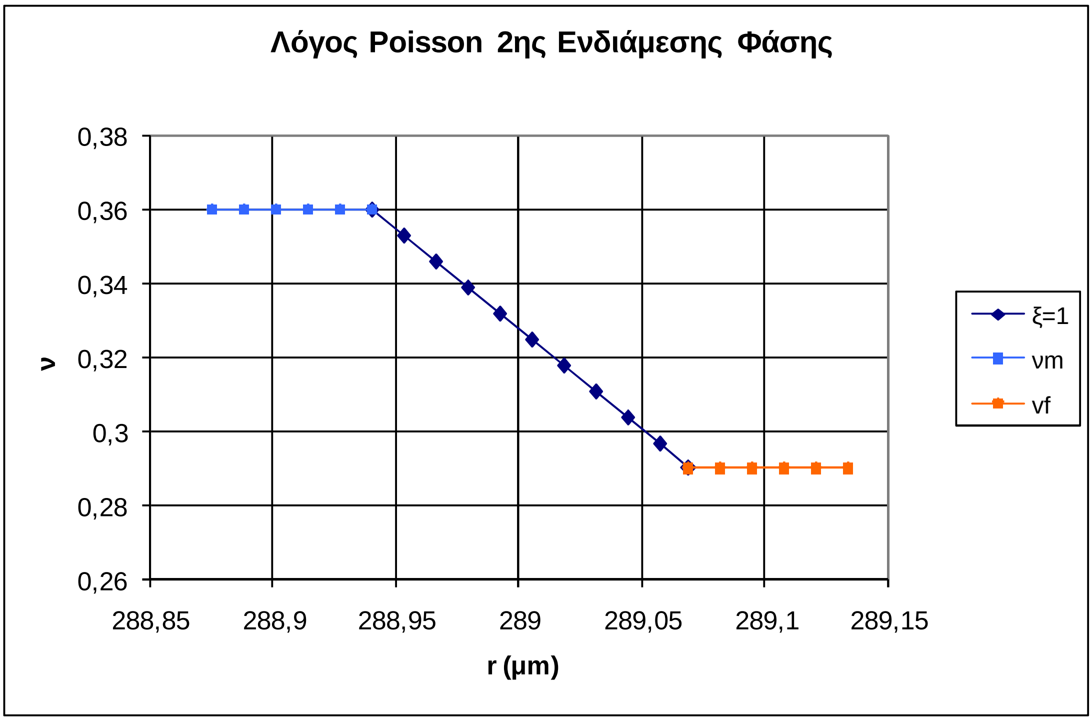
Πίνακας 6.22



Διάγραμμα 6.15

r (μm)	Λόγος Poisson v
	ξ = 1
288,94	0,36
288,953	0,353
288,966	0,346
288,979	0,339
288,992	0,332
289,005	0,325
289,018	0,318
289,031	0,311
289,044	0,304
289,057	0,297
289,069	0,29

Πίνακας 6.23

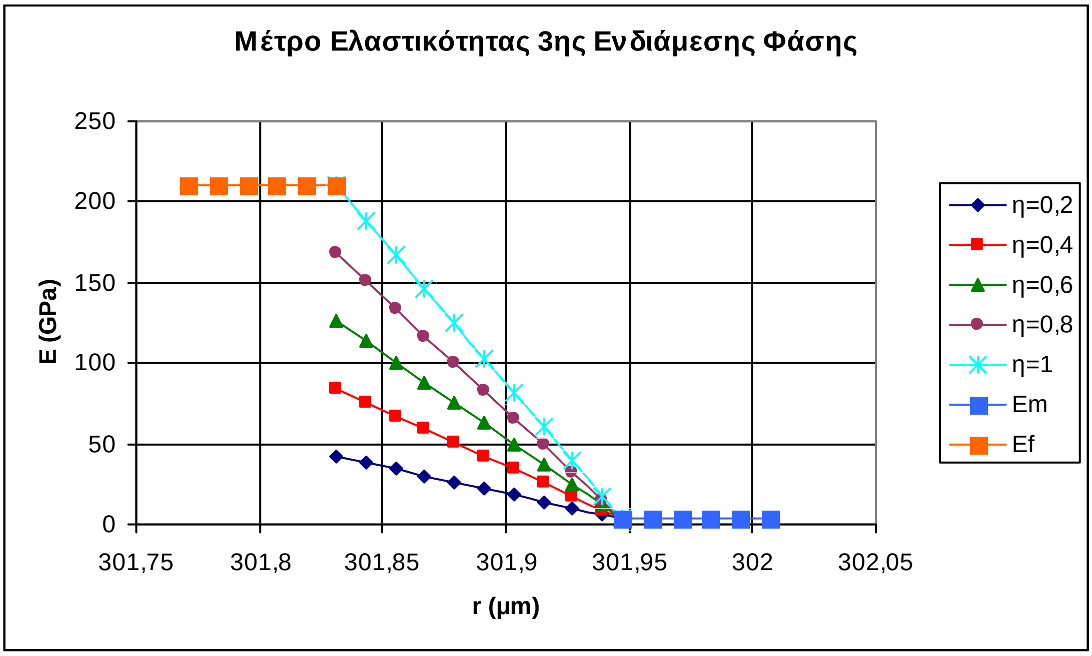


Διάγραμμα 6.16

- Για την τρίτη ενδιάμεση φάση έχουμε:

r (μm)	Μέτρο Ελαστικότητας 3ης Ενδιάμεσης Φάσης Ε (GPa)				
	η = 0,2	η = 0,4	η = 0,6	η = 0,8	η = 1
301,831	42	84	126	168	210
301,843	38,01897	75,67265	113,3263	150,98	188,6337
301,855	34,03826	67,34596	100,6537	133,9614	167,269
301,867	30,05787	59,01993	87,982	116,9441	145,9061
301,879	26,07779	50,69457	75,31134	99,92812	124,5449
301,891	22,09803	42,36987	62,6417	82,91353	103,1854
301,903	18,11859	34,04582	49,97306	65,90029	81,82753
301,915	14,13946	25,72244	37,30543	48,88841	60,47139
301,927	10,16065	17,39973	24,6388	31,87788	39,11696
301,939	6,182154	9,07767	11,97319	14,8687	17,76422
301,947	3,53	3,53	3,53	3,53	3,53

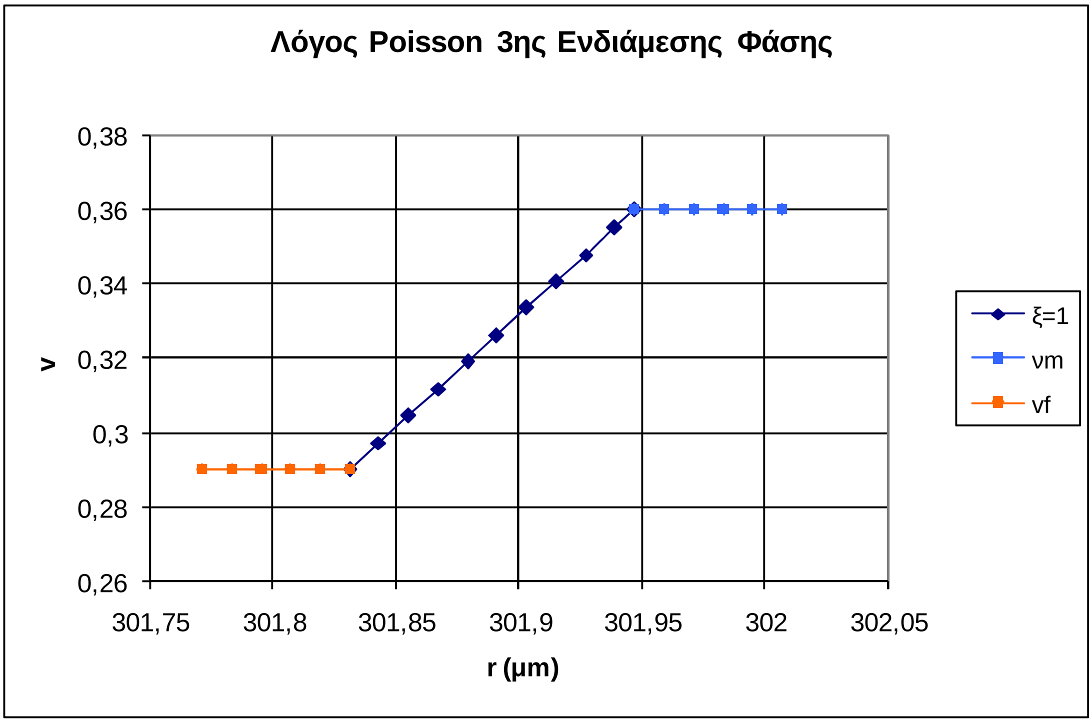
Πίνακας 6.24



Διάγραμμα 6.17

r (μm)	Λόγος Poisson v
	ξ = 1
301,831	0,29
301,843	0,297244
301,855	0,304487
301,867	0,31173
301,879	0,318972
301,891	0,326214
301,903	0,333455
301,915	0,340695
301,927	0,347935
301,939	0,355174
301,947	0,36

Πίνακας 6.25



Διάγραμμα 6.18

6.2.4 Σχολιασμός Πινάκων και Διαγραμμάτων

Στους προηγούμενους πίνακες και διαγράμματα, παρατηρούμε ότι η τιμή του μέτρου ελαστικότητας Ε μειώνεται και η τιμή του λόγου Poison ν αντίστοιχα αυξάνεται, καθώς η ακτίνα r αυξάνεται σταδιακά. Αυτό το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο, όσο πλησιάζουμε προς την μήτρα και ταυτόχρονα απομακρυνόμαστε από το έγκλεισμα. Παρατηρούμε επίσης ότι στα άκρα των ενδιάμεσων φάσεων του επταφασικού μας μοντέλου, το μέτρο Ε ισούται με E_f και E_m και ο λόγος ν ισούται με v_f και v_m αντίστοιχα, όταν εφαρμόζουμε τις οριακές συνθήκες η = ξ = 1.

6.3 Σύγκριση Μοντέλων για τις οριακές συνθήκες η = ξ = 1

Στους πίνακες και τα διαγράμματα που ακολουθούν, παρουσιάζεται μια σύγκριση μεταξύ των μοντέλων μας, τόσο για το μέτρο ελαστικότητας Ε, όσο και για το λόγο Poisson ν, για την 1η, 2η και 3η ενδιάμεση φάση του επταφασικού μας μοντέλου. Η σύγκριση αυτή γίνεται στα πλαίσια της μέγιστης επίδρασης της ενδιάμεσης φάσης, δηλαδή για τις οριακές συνθήκες η = ξ = 1.

- Για το μέτρο ελαστικότητας Ε της 1ης ενδιάμεσης φάσης έχουμε:

r (μm)	Μέτρο Ελαστικότητας 1ης Ενδιάμεσης Φάσης για η = 1 (GPa)		
	Γραμμικό	**Παραβολικό**	**Υπερβολικό**
75	210	210	210
75,188	189,294	170,665	188,8298
75,376	168,589	135,483	167,7652
75,564	147,883	104,454	146,8055
75,752	127,177	77,5777	125,9497
75,94	106,471	54,8544	105,1973
76,128	85,7658	36,284	84,54728
76,316	65,0601	21,8666	63,99905
76,504	44,3544	11,602	43,55181
76,692	23,6487	5,49039	23,20481
76,87467	3,53	3,53	3,53

Πίνακας 6.26

- Για το μέτρο ελαστικότητας Ε της 2ης ενδιάμεσης φάσης έχουμε:

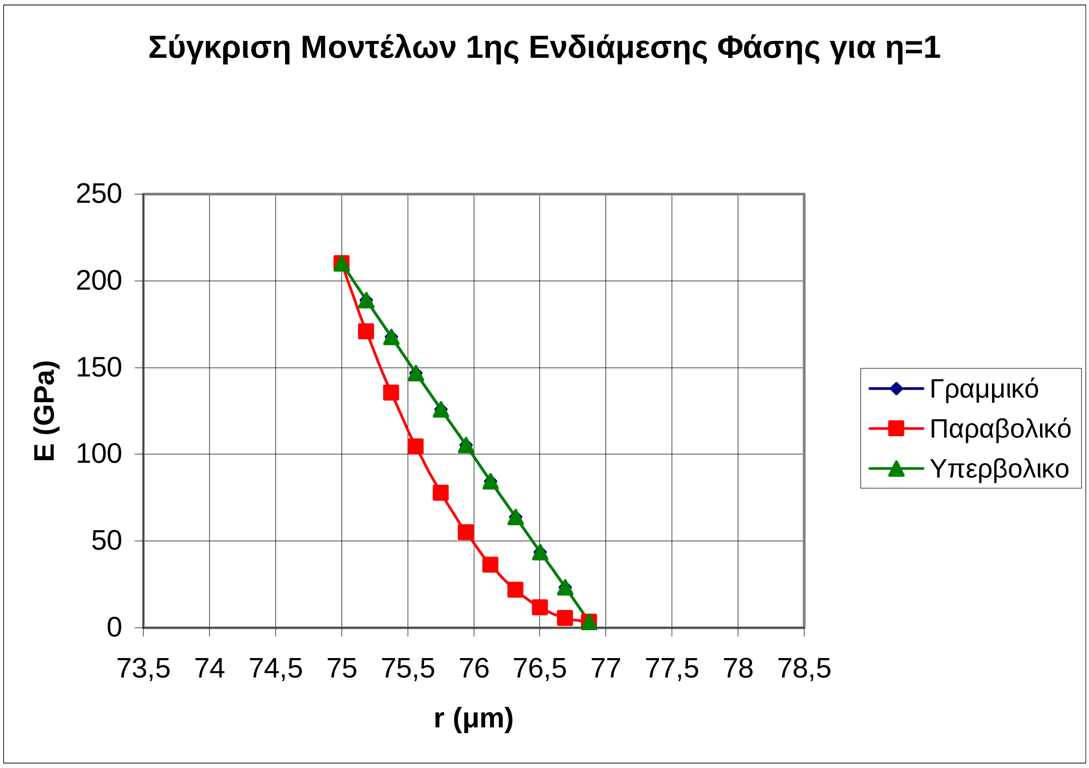
r (μm)	Μέτρο Ελαστικότητας 2ης Ενδιάμεσης Φάσης για η = 1 (GPa)		
	Γραμμικό	**Παραβολικό**	**Υπερβολικό**
288,94	3,53	3,53	3,53
288,953	24,3371	5,62683	24,3454
288,966	45,1441	11,9173	45,1589
288,979	65,9512	22,4015	65,9706
288,992	86,7582	37,0794	86,7804
289,005	107,565	55,9509	107,588
289,018	128,372	79,0161	128,394
289,031	149,179	106,275	149,199
289,044	169,986	137,727	170,001
289,057	190,793	173,374	190,801
289,069	210	210	210

Πίνακας 6.27

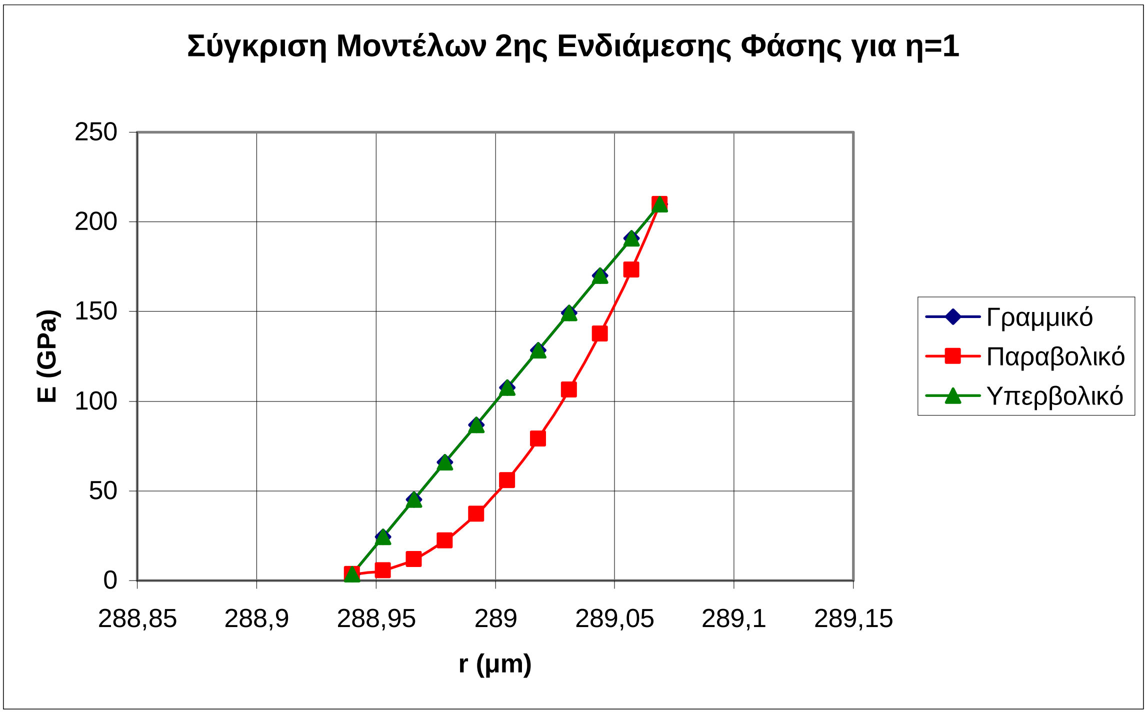
• Για το μέτρο ελαστικότητας Ε της 3ης ενδιάμεσης φάσης έχουμε:

r (μm)	Μέτρο Ελαστικότητας 3ης Ενδιάμεσης Φάσης για η = 1 (GPa)		
	Γραμμικό	Παραβολικό	Υπερβολικό
301,831	210	210	210
301,843	188,64103	169,4916	188,6337
301,855	167,28207	133,4023	167,269
301,867	145,9231	101,7321	145,9061
301,879	124,56414	74,48105	124,5449
301,891	103,20517	51,64905	103,1854
301,903	81,846207	33,23615	81,82753
301,915	60,487241	19,24234	60,47139
301,927	39,128276	9,667633	39,11696
301,939	17,76931	4,512021	17,76422
301,947	3,53	3,53	3,53

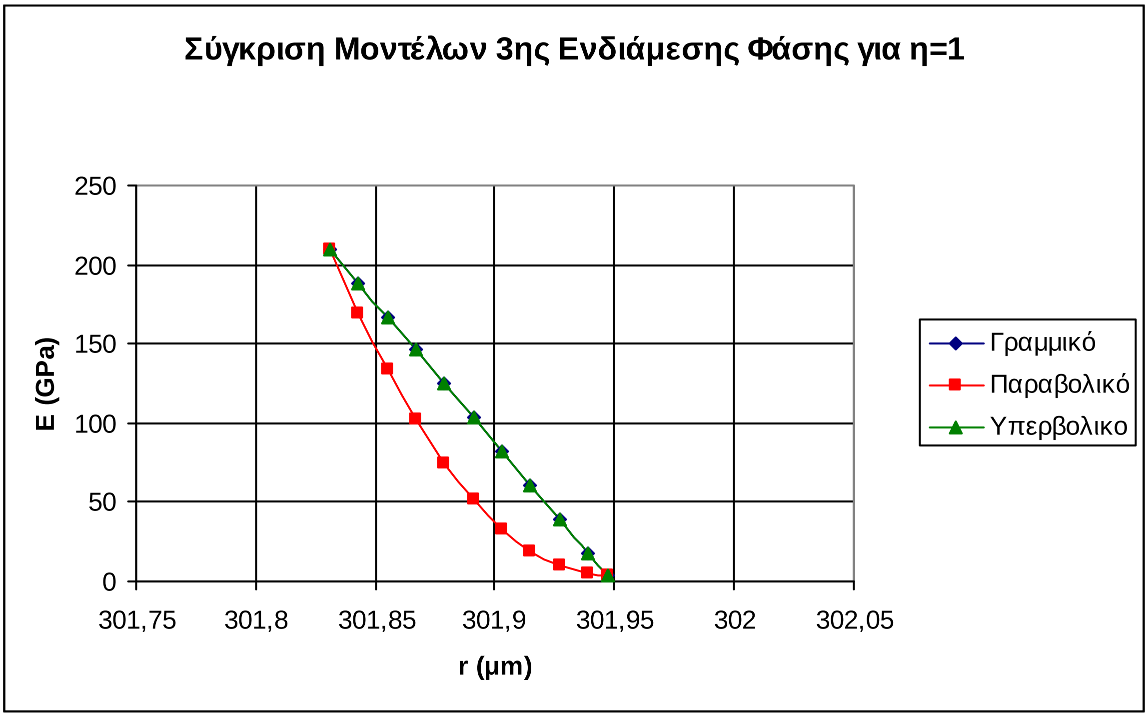
Πίνακας 6.28



Διάγραμμα 6.19



Διάγραμμα 6.20



Διάγραμμα 6.21

Από τις 3 προηγούμενες γραφικές παραστάσεις του μέτρου ελαστικότητας E και των τριών ενδιάμεσων φάσεων παρατηρούμε ότι, το γραμμικό και το υπερβολικό μοντέλο σχεδόν ταυτίζονται. Αυτό συμβαίνει γιατί το πάχος και των τριών ενδιάμεσων φάσεων είναι πολύ μικρό (1,87467 μm για την πρώτη, 0,129 μm για τη δεύτερη και 0,116 μm για την τρίτη).

- Για τον λόγο Poisson ν της 1ης ενδιάμεσης φάσης έχουμε:

r (μm)	Λόγος Poisson 1^{ης} Ενδιάμεσης Φάσης για ξ = 1		
	Γραμμικό	Παραβολικό	Υπερβολικό
75	0,29	0,29	0,29
75,188	0,297	0,30334	0,297177
75,376	0,304	0,31526	0,304319
75,564	0,311	0,32578	0,311425
75,752	0,318	0,3349	0,318496
75,94	0,325	0,3426	0,325532
76,128	0,332	0,3489	0,332533
76,316	0,339	0,35378	0,339499
76,504	0,346	0,35726	0,346431
76,692	0,353	0,35934	0,35333
76,87467	0,36	0,36	0,36

Πίνακας 6.29

- Για τον λόγο Poisson ν της 2ης ενδιάμεσης φάσης έχουμε:

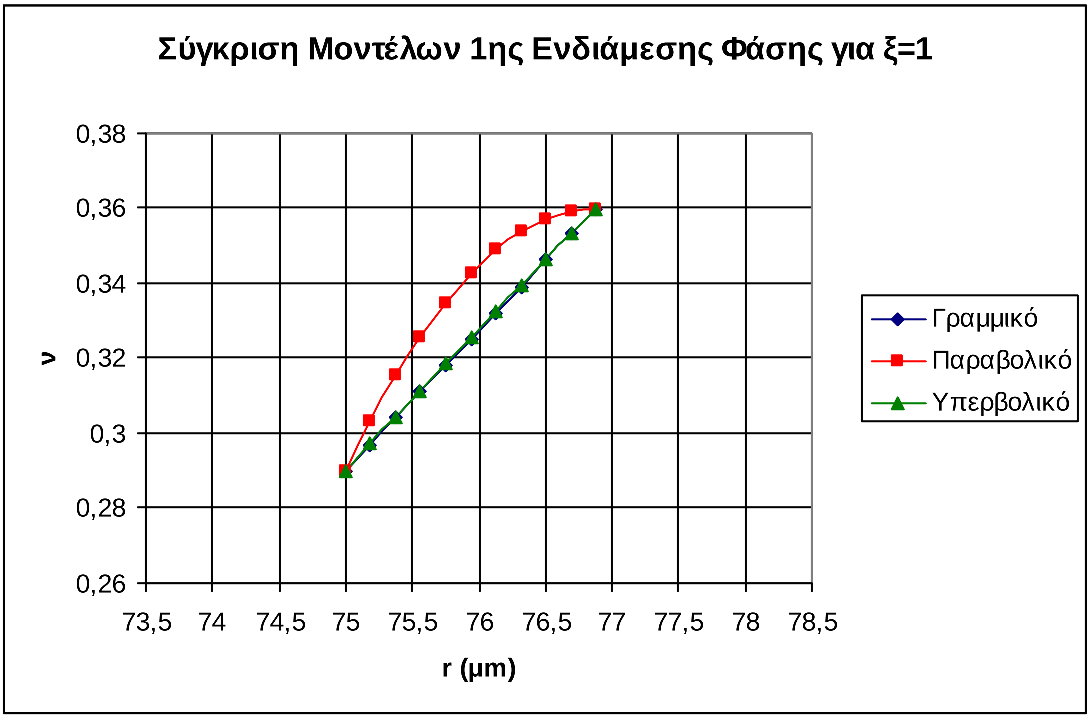
r (μm)	**Λόγος Poisson 2ης Ενδιάμεσης Φάσης για ξ = 1**		
	Γραμμικό	**Παραβολικό**	**Υπερβολικό**
288,94	0,36	0,36	0,36
288,953	0,353	0,3593	0,353
288,966	0,346	0,3572	0,346
288,979	0,339	0,3536	0,339
288,992	0,332	0,3486	0,332
289,005	0,325	0,3422	0,325
289,018	0,318	0,3344	0,318
289,031	0,311	0,3252	0,311
289,044	0,304	0,3145	0,304
289,057	0,297	0,3024	0,297
289,069	0,29	0,29	0,29

Πίνακας 6.30

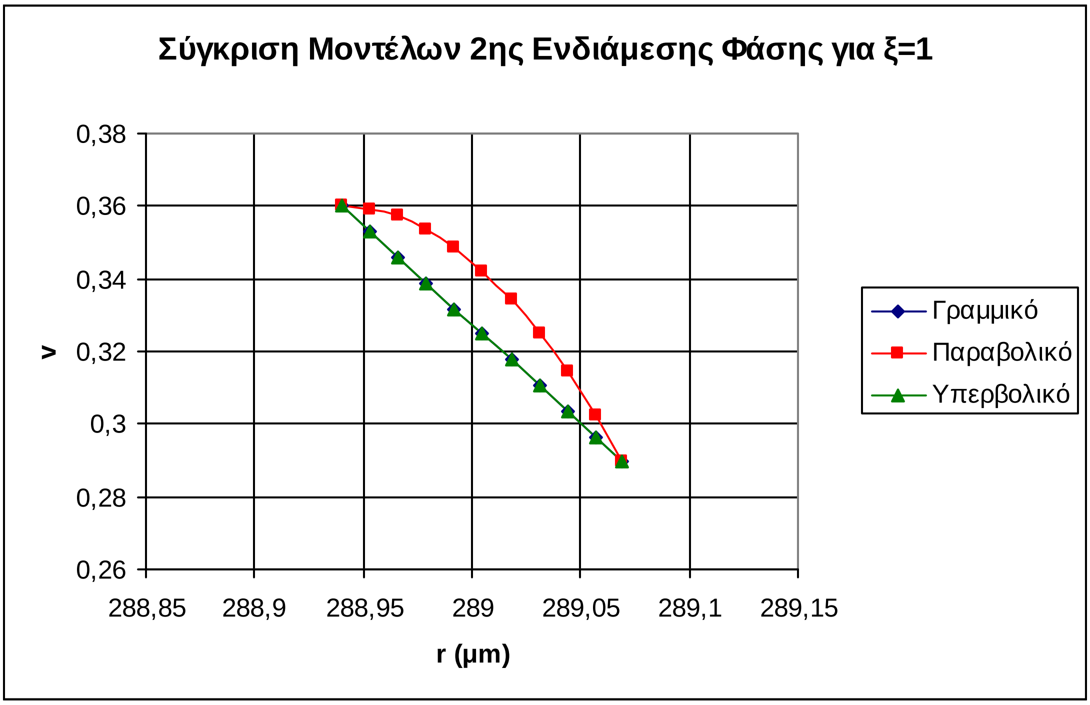
- Για τον λόγο Poisson ν της 3ης ενδιάμεσης φάσης έχουμε:

r (μm)	**Λόγος Poisson 1ης Ενδιάμεσης Φάσης για ξ = 1**		
	Γραμμικό	**Παραβολικό**	**Υπερβολικό**
301,831	0,29	0,29	0,29
301,843	0,297241	0,303734	0,297244
301,855	0,304483	0,315969	0,304487
301,867	0,311724	0,326706	0,31173
301,879	0,318966	0,335945	0,318972
301,891	0,326207	0,343686	0,326214
301,903	0,333448	0,349929	0,333455
301,915	0,34069	0,354673	0,340695
301,927	0,347931	0,357919	0,347935
301,939	0,355172	0,359667	0,355174
301,947	0,36	0,36	0,36

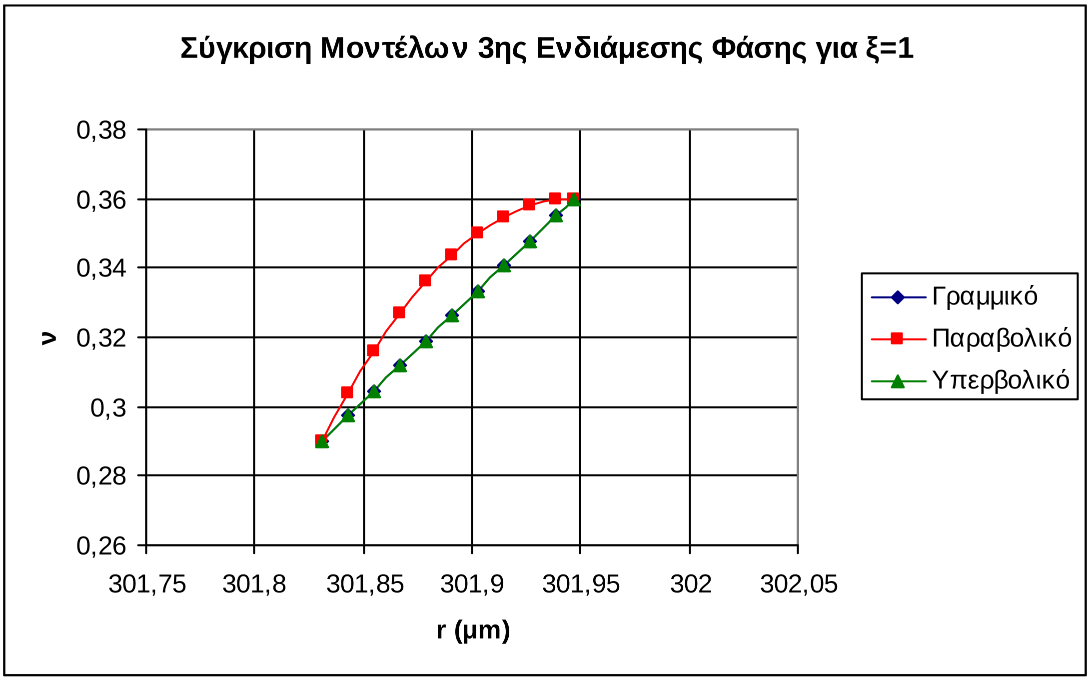
Πίνακας 6.31



Διάγραμμα 6.22



Διάγραμμα 6.23



Διάγραμμα 6.24

Από τις 3 προηγούμενες γραφικές παραστάσεις σύγκρισης των μοντέλων μας για τον λόγο Poisson, παρατηρούμε ότι το γραμμικό και το παραβολικό μοντέλο σχεδόν ταυτίζονται. Αυτό συμβαίνει γιατί το πάχος και των τριών ενδιάμεσων φάσεων είναι πολύ μικρό (1,87467 μm για την πρώτη, 0,129 μm για τη δεύτερη και 0,116 μm για την τρίτη).

Επιπλέον, ο λόγος Poisson v σε σχέση με το μέτρο ελαστικότητας E, όπως έχουμε παρατηρήσει και από τα προηγούμενα διαγράμματα, δεν μεταβάλλεται ιδιαίτερα.

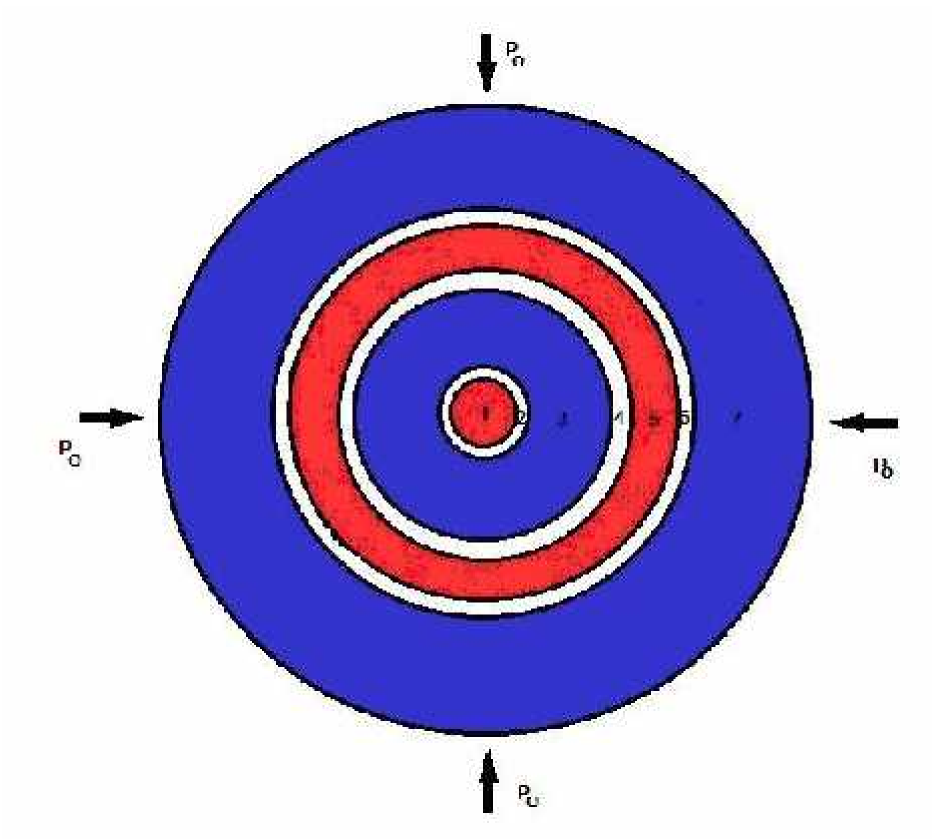
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Προσεγγιστικός υπολογισμός του μέτρου ελαστικότητας

7.1 Προσεγγιστικός υπολογισμός επταφασικού μοντέλου

Θεωρούμε ένα επταφασικό μοντέλο, το οποίο θα αποτελείται από επτά φάσεις αντί για τέσσερις, δηλαδή όσες ήταν οι φάσεις στα μοντέλα που αναλύσαμε σε προηγούμενα κεφάλαια, για λόγους απλούστευσης.

Στο προσεγγιστικό μοντέλο, το σύνθετο υλικό αποτελείται από επτά φάσεις οι οποίες απεικονίζουν τα εγκλείσματα (περιοχή 1 & 5), τη μήτρα (περιοχή 3 & 7) και τις ενδιάμεσες φάσεις (περιοχή 2, 4 & 6).



Σχήμα 7.1: Το επταφασικό μοντέλο.

Για την εύρεση των σχέσεων οι οποίες θα μας δώσουν την έκφραση για το μέτρο ελαστικότητας του συνθέτου υλικού, θα εφαρμοσθεί παρακάτω η θεωρία ελαστικότητας στο αντιπροσωπευτικό στοιχείο όγκου των επτά ομόκεντρων σφαιρών, το οποίο θεωρείται ότι έχει κατά μέσο όρο τις ιδιότητες του κοκκώδους σύνθετου υλικού. Επίσης, λόγω της σφαιρικής συμμετρίας του εφαρμοζόμενου εξωτερικού φορτίου P_o, οι τάσεις και οι παραμορφώσεις είναι συναρτήσεις μόνο της ακτίνας r, μη εξαρτώμενες από τις επιμέρους γωνίες θ και φ.

Η λύση του προβλήματος δίνεται από την τασική συνάρτηση:

$$\Phi = \frac{k_1}{r} + k_2 r^2 \tag{7.1}$$

Κάθε μια από τις επτά φάσεις του μοντέλου μας έχει τη δική της τασική συνάρτηση:

$$\Phi_1 = \frac{A}{r} + Br^2 \tag{7.2}$$

$$\Phi_2 = \frac{C}{r} + Dr^2 \tag{7.3}$$

$$\Phi_3 = \frac{F}{r} + Hr^2 \tag{7.4}$$

$$\Phi_4 = \frac{K}{r} + Lr^2 \tag{7.5}$$

$$\Phi_5 = \frac{M}{r} + Nr^2 \tag{7.6}$$

$$\Phi_6 = \frac{P}{r} + Qr^2 \tag{7.7}$$

$$\Phi_7 = \frac{S}{r} + Tr^2 \tag{7.8}$$

Στην θέση ***r = 0***, πρέπει η τασική μας συνάρτηση να μην απειρίζεται. Οπότε, για ***r = 0*** θα πρέπει ***A = 0***. Άρα η εξίσωση (7.2) γίνεται:

$$\Phi_1 = Br^2 \qquad (7.9)$$

Οι μετατοπίσεις δίνονται από τη σχέση:

$$u = \frac{1}{2G} grad\Phi \qquad (7.10)$$

Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας οι μετατοπίσεις κατά τις διευθύνσεις φ και θ είναι μηδενικές. Άρα έχουμε:

$$u_{\Phi} = u_{-} = 0$$

Οι ακτινικές μετατοπίσεις για κάθε φάση είναι :

$$u_{r,1} = \frac{Br}{G_1} = \frac{2Br(1+v_1)}{E_1} \qquad (7.11)$$

$$u_{r,2} = \frac{-\frac{C}{r^2} + 2Dr}{2G_2} = \left(-\frac{C}{r^2} + 2Dr\right)\left(\frac{1+v_2}{E_2}\right) \qquad (7.12)$$

$$u_{r,3} = \frac{-\frac{F}{r^2} + 2Hr}{2G_3} = \left(-\frac{F}{r^2} + 2Hr\right)\left(\frac{1+v_3}{E_3}\right) \qquad (7.13)$$

$$u_{r4} = \frac{-\frac{K}{r^2} + 2Lr}{2G_4} = \left(-\frac{K}{r^2} + 2Lr\right)\left(\frac{1+v_4}{E_4}\right) \qquad (7.14)$$

$$u_{r,5} = \frac{-\frac{M}{r^2} + 2Nr}{2G_5} = \left(-\frac{M}{r^2} + 2Nr\right)\left(\frac{1+v_5}{E_5}\right) \qquad (7.15)$$

$$u_{r,6}=\frac{-\frac{P}{r^2}+2Qr}{2G_6}=\left(-\frac{P}{r^2}+2Qr\right)\left(\frac{1+v_6}{E_6}\right) \qquad (7.16)$$

$$u_{r,7}=\frac{-\frac{S}{r^2}+2Tr}{2G_7}=\left(-\frac{S}{r^2}+2Tr\right)\left(\frac{1+v_7}{E_7}\right) \qquad (7.17)$$

Οι παραμορφώσεις δίνονται από τους ακόλουθους τύπους :

$$\pounds_r=\frac{\partial u_r}{\partial r} \qquad (7.18)$$

$$\pounds_{-}=\frac{u_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_{-}}{\partial -}=\frac{u_r}{r}+\frac{1}{r}0=\frac{u_r}{r} \qquad (7.19)$$

$$\pounds_{\cdot\cdot}=\frac{u_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_{\cdot\cdot}}{\partial \cdot\cdot}=\frac{u_r}{r}+\frac{1}{r}0=\frac{u_r}{r} \qquad (7.20)$$

$$G=\frac{E}{2(1+v)} \qquad (7.21)$$

Έτσι οι παραμορφώσεις για κάθε φάση είναι:

$$\pounds_{r,1}=\pounds_{-,1}=\pounds_{\cdot\cdot,1}=\frac{2B(1+v_1)}{E_1} \qquad (7.22)$$

$$\pounds_{r,2}=\left(\frac{2C}{r^3}+2D\right)\left(\frac{1+v_2}{E_2}\right) \qquad (7.23)$$

$$\pounds_{-,2}=\pounds_{\cdot\cdot,2}=\left(-\frac{C}{r^3}+2D\right)\left(\frac{1+v_2}{E_2}\right) \qquad (7.24)$$

$$\pounds_{r,3} = \left(\frac{2F}{r^3} + 2H \right) \left(\frac{1 + v_3}{E_3} \right) \tag{7.25}$$

$$\pounds_{-,3} = \pounds_{\cdot\cdot,3} = \left(-\frac{F}{r^3} + 2H \right) \left(\frac{1 + v_3}{E_3} \right) \tag{7.26}$$

$$\pounds_{r,4} = \left(\frac{2K}{r^3} + 2L \right) \left(\frac{1 + v_4}{E_4} \right) \tag{7.27}$$

$$\pounds_{-,4} = \pounds_{\cdot\cdot,4} = \left(-\frac{K}{r^3} + 2L \right) \left(\frac{1 + v_4}{E_4} \right) \tag{7.28}$$

$$\pounds_{r,5} = \left(\frac{2M}{r^3} + 2N \right) \left(\frac{1 + v_5}{E_5} \right) \tag{7.29}$$

$$\pounds_{-,5} = \pounds_{\cdot\cdot,5} = \left(-\frac{M}{r^3} + 2N \right) \left(\frac{1 + v_5}{E_5} \right) \tag{7.30}$$

$$\pounds_{r,6} = \left(\frac{2P}{r^3} + 2Q \right) \left(\frac{1 + v_6}{E_6} \right) \tag{7.31}$$

$$\pounds_{-,6} = \pounds_{\cdot\cdot,6} = \left(-\frac{P}{r^3} + 2Q \right) \left(\frac{1 + v_6}{E_6} \right) \tag{7.32}$$

$$\pounds_{r,7} = \left(\frac{2S}{r^3} + 2T \right) \left(\frac{1 + v_7}{E_7} \right) \tag{7.33}$$

$$\pounds_{-,7} = \pounds_{\cdot\cdot,7} = \left(-\frac{S}{r^3} + 2T \right) \left(\frac{1 + v_7}{E_7} \right) \tag{7.34}$$

Οι ορθές τάσεις υπολογίζονται από τις σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων, [61]:

$$\sigma_r = \frac{E}{1+v}\varepsilon_r + \frac{Ev}{(1+v)(1-2v)}e \tag{7.35}$$

$$e = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_\phi \tag{7.36}$$

Όποτε για όλες τις φάσεις θα έχουμε:

$$\sigma_{r,1} = \frac{E_1}{1+v_1}\varepsilon_{r,1} + \frac{E_1 v_1}{(1+v_1)(1-2v_1)}e = \frac{E_1}{1+v_1}\varepsilon_{r,1} + \frac{E_1 v_1}{(1+v_1)(1-2v_1)}(\varepsilon_{r,1} + \varepsilon_{\theta,1} + \varepsilon_{\phi,1})$$

$$= \frac{E_1}{1+v_1}2B\frac{1+v_1}{E_1} + 3\frac{E_1 v_1}{(1+v_1)(1-2v_1)}2B\frac{1+v_1}{E_1} = 2B + \frac{6Bv_1}{1-2v_1} \Rightarrow \sigma_{r,1} = \frac{2B(1+v_1)}{1-2v_1}$$

$$\sigma_{r,1} = \sigma_{\phi,1} = \sigma_{\theta,1} = \frac{2B(1+v_1)}{1-2v_1} \tag{7.37}$$

$$\sigma_{r,2} = \frac{E_2}{1+v_2}\varepsilon_{r,2} + \frac{E_2 v_2}{(1+v_2)(1-2v_2)}(\varepsilon_{r,2} + \varepsilon_{\theta,2} + \varepsilon_{\phi,2}) \Rightarrow$$

$$\sigma_{r,2} = \frac{E_2}{1+v_2}\left(\frac{2C}{r^3} + 2D\right)\frac{1+v_2}{E_2} + \frac{E_2 v_2}{(1+v_2)(1-2v_2)}\left[\left(\frac{2C}{r^3} + 2D\right)\frac{1+v_2}{E_2} + 2\left(-\frac{C}{r^3} + 2D\right)\frac{1+v_2}{E_2}\right] \Rightarrow$$

$$\sigma_{r,2} = \frac{2C}{r^3} + 2D + \frac{v_2}{1-2v_2}\left[\frac{2C}{r^3} + 2D - \frac{2C}{r^3} + 4D\right] \Rightarrow$$

$$\sigma_{r,2} = \frac{2C}{r^3} + 2D + \frac{v_2}{1-2v_2}6D \Rightarrow \sigma_{r,2} = \frac{2C}{r^3} + 2D\frac{(1+v_2)}{1-2v_2}$$

$$\sigma_{r,2} = \frac{2C}{r^3} + \frac{2D(1+v_2)}{1-2v_2} \tag{7.38}$$

$$\sigma_{\theta,2} = \frac{E_2}{1+v_2}\varepsilon_{\theta,2} + \frac{E_2 v_2}{(1+v_2)(1-2v_2)}(\varepsilon_{r,2} + 2\varepsilon_{\theta,2}) \Rightarrow$$

$$\frac{E_2}{1+v_2}\left(-\frac{C}{r^3}+2D\right)\frac{1+v_2}{E_2} + \frac{E_2 v_2}{(1+v_2)(1-2v_2)}\left[\left(\frac{2C}{r^3}+2D\right)\frac{1+v_2}{E_2} + 2\left(-\frac{C}{r^3}+2D\right)\frac{1+v_2}{E_2}\right] \Rightarrow$$

$$\sigma_{\theta,2} = -\frac{C}{r^3} + 2D + \frac{v_2}{1-2v_2}\left[2D+4D\right] \Rightarrow$$

$$\sigma_{\theta,2} = -\frac{C}{r^3} + 2D\frac{(1-2v_2)}{1-2v_2} + \frac{v_2}{1-2v_2}6D \Rightarrow \sigma_{\theta,2} = -\frac{C}{r^3} + 2D\frac{(1+v_2)}{1-2v_2} = \sigma_{\varphi,2}$$

$$\sigma_{\theta,2} = -\frac{C}{r^3} + \frac{2D(1+v_2)}{1-2v_2} = \sigma_{\varphi,2} \qquad (7.39)$$

Αντίστοιχα λοιπόν έχουμε και για τις υπόλοιπες ορθές τάσεις:

$$\sigma_{r,3} = \frac{2F}{r^3} + \frac{2H(1+v_3)}{1-2v_3} \qquad (7.40)$$

$$\sigma_{\theta,3} = -\frac{F}{r^3} + \frac{2H(1+v_3)}{1-2v_3} = \sigma_{\varphi,3} \qquad (7.41)$$

$$\sigma_{r,4} = \frac{2K}{r^3} + \frac{2L(1+v_4)}{1-2v_4} \qquad (7.42)$$

$$\sigma_{\theta,4} = -\frac{K}{r^3} + \frac{2L(1+v_4)}{1-2v_4} = \sigma_{\varphi,4} \qquad (7.43)$$

$$\sigma_{r,5} = \frac{2M}{r^3} + \frac{2N(1+v_5)}{1-2v_5} \qquad (7.44)$$

$$\sigma_{\theta,5} = -\frac{M}{r^3} + \frac{2N(1+v_5)}{1-2v_5} = \sigma_{\varphi,5} \qquad (7.45)$$

$$\sigma_{r,6} = \frac{2P}{r^3} + \frac{2Q(1+v_6)}{1-2v_6} \qquad (7.46)$$

$$\pm_{-,6} = -\frac{P}{r^3} + \frac{2Q(1+v_6)}{1-2v_6} = \pm_{¨,6} \qquad (7.47)$$

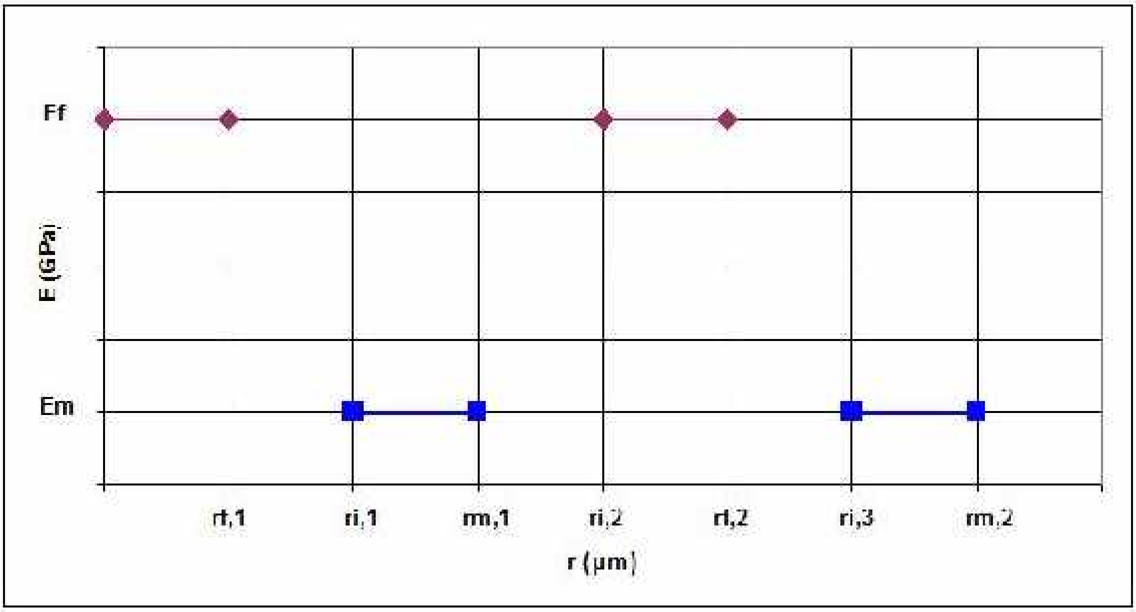
$$\pm_{r,7} = \frac{2S}{r^3} + \frac{2T(1+v_7)}{1-2v_7} \qquad (7.48)$$

$$\pm_{-,7} = -\frac{S}{r^3} + \frac{2T(1+v_7)}{1-2v_7} = \pm_{¨,7} \qquad (7.49)$$

Στη μελέτη αυτή, λαμβάνουμε υπόψη μας την γραμμική μεταβολή των $E_i(r)$ και $v_i(r)$ (Κεφάλαιο 6), που θεωρείται από τις πιο αντιπροσωπευτικές μεταβολές.

Οι οριακές συνθήκες τις οποίες λοιπόν θα χρησιμοποιήσουμε θα είναι:

- Στο $r = r_{f.1} = r_1$ έχουμε $E_i(r) = ηE_f$ και $v_i(r) = ξν_f$
- Στο $r = r_{i.1} = r_2$ έχουμε $E_i(r) = E_m$ και $v_i(r) = ν_m$
- Στο $r = r_{m.1} = r_3$ έχουμε $E_i(r) = E_m$ και $v_i(r) = ν_m$
- Στο $r = r_{i.2} = r_4$ έχουμε $E_i(r) = ηE_f$ και $v_i(r) = ξν_f$
- Στο $r = r_{f.2} = r_5$ έχουμε $E_i(r) = ηE_f$ και $v_i(r) = ξν_f$
- Στο $r = r_{i.3} = r_6$ έχουμε $E_i(r) = E_m$ και $v_i(r) = ν_m$



Όπως είδαμε και στα προηγούμενα κεφάλαια, η τελική τιμή του μέτρου ελαστικότητας του σύνθετου υλικού εξαρτάται σε πολύ μικρό βαθμό από τον συντελεστή η. Έτσι λοιπόν, για λόγους απλούστευσης θεωρούμε το η = 1.

Οπότε προκύπτουν οι εξής συνοριακές συνθήκες των ορθών τάσεων και μετατοπίσεων σύμφωνα με τις σχέσεις (7.11 - 7.17 και 7.37 - 7.49):

- **Για r = $r_{f.1}$ = r_1 έχω: $\sigma_{r,1} = \sigma_{r,2}$ και $u_{r,1} = u_{r,2}$**

$$\frac{2B(1+v_1)}{1-2v_1} = \frac{2C}{r^3} + \frac{2D(1+v_2)}{1-2v_2} \Rightarrow$$
$$\frac{2B(1+v_f)}{1-2v_f} = \frac{2C}{r_1^3} + \frac{2D(1+v_f)}{1-2v_f} \tag{7.50}$$

όπου $G = \dfrac{E}{2(1+v)}$, και

$$\frac{2Br(1+v_1)}{E_1} = \left(-\frac{C}{r^2} + 2Dr\right)\frac{(1+v_2)}{E_2} \Rightarrow$$
$$\frac{2Br_1(1+v_f)}{E_f} = \left(-\frac{C}{r^2} + 2Dr_1\right)\left(\frac{1+v_f}{E_f}\right) \tag{7.51}$$

- **Για r = $r_{i.1}$ = r_2 έχω: $\sigma_{r,2} = \sigma_{r,3}$ και $u_{r,2} = u_{r,3}$**

$$\frac{2C}{r^3} + \frac{2D(1+v_2)}{1-2v_2} = \frac{2F}{r^3} + \frac{2H(1+v_3)}{1-2v_3} \Rightarrow$$
$$\frac{2C}{r_2^3} + \frac{2D(1+v_m)}{1-2v_m} = \frac{2F}{r_2^3} + \frac{2H(1+v_m)}{1-2v_m} \tag{7.52}$$

και

$$\left(-\frac{C}{r^2}+2Dr\right)\left(\frac{1+v_2}{E_2}\right)=\left(-\frac{F}{r^2}+2Hr\right)\left(\frac{1+v_3}{E_3}\right)\Rightarrow$$
$$\left(-\frac{C}{r_2^{\,2}}+2Dr_2\right)\left(\frac{1+v_m}{E_m}\right)=\left(-\frac{F}{r_2^{\,2}}+2Hr_2\right)\left(\frac{1+v_m}{E_m}\right) \quad (7.53)$$

- **Για r = $r_{m,1}$ = r_3 έχω: $\sigma_{r,3}=\sigma_{r,4}$ και $u_{r,3}=u_{r,4}$**

$$\frac{2F}{r^3}+\frac{2H(1+v_3)}{1-2v_3}=\frac{2K}{r^3}+\frac{2L(1+v_4)}{1-2v_4}\Rightarrow$$
$$\frac{2F}{r_3^{\,3}}+\frac{2H(1+v_m)}{1-2v_m}=\frac{2K}{r_3^{\,3}}+\frac{2L(1+v_m)}{1-2v_m} \quad (7.54)$$

και

$$\left(-\frac{F}{r^2}+2Hr\right)\left(\frac{1+v_3}{E_3}\right)=\left(-\frac{K}{r^2}+2Lr\right)\left(\frac{1+v_4}{E_4}\right)\Rightarrow$$
$$\left(-\frac{F}{r_3^{\,2}}+2Hr_3\right)\frac{(1+v_m)}{E_m}=\left(-\frac{K}{r_3^{\,2}}+2Lr_3\right)\frac{(1+v_m)}{E_m} \quad (7.55)$$

- **Για r = $r_{i.2}$ = r_4 έχω: $\sigma_{r,4}=\sigma_{r,5}$ και $u_{r,4}=u_{r,5}$**

$$\frac{2K}{r^3}+\frac{2L(1+v_4)}{1-2v_4}=\frac{2M}{r^3}+\frac{2N(1+v_5)}{1-2v_5}\Rightarrow$$
$$\frac{2K}{r_4^{\,3}}+\frac{2L(1+v_f)}{1-2v_f}=\frac{2M}{r_4^{\,3}}+\frac{2N(1+v_f)}{1-2v_f} \quad (7.56)$$

και

$$\left(-\frac{K}{r^2}+2Lr\right)\left(\frac{1+v_4}{E_4}\right)=\left(-\frac{M}{r^2}+2Nr\right)\left(\frac{1+v_5}{E_5}\right)\Rightarrow$$
$$\left(-\frac{K}{r_4^{\,2}}+2Lr_4\right)\left(\frac{1+v_f}{E_f}\right)=\left(-\frac{M}{r_4^{\,2}}+2Nr_4\right)\left(\frac{1+v_f}{E_f}\right) \quad (7.57)$$

- **Για r = $r_{f.2}$ = r_5 έχω: $\sigma_{r,5}=\sigma_{r,6}$ και $u_{r,5}=u_{r,6}$**

$$\frac{2M}{r^3}+\frac{2N(1+v_5)}{1-2v_5}=\frac{2P}{r^3}+\frac{2Q(1+v_6)}{1-2v_6}\Rightarrow$$
$$\frac{2M}{r_5^3}+\frac{2N(1+v_f)}{1-2v_f}=\frac{2P}{r_5^3}+\frac{2Q(1+v_f)}{1-2v_f} \quad (7.58)$$

και

$$\left(-\frac{M}{r^2}+2Nr\right)\left(\frac{1+v_5}{E_5}\right)=\left(-\frac{P}{r^2}+2Qr\right)\left(\frac{1+v_6}{E_6}\right)\Rightarrow$$
$$\left(-\frac{M}{r_5^2}+2Nr_5\right)\left(\frac{1+v_f}{E_f}\right)=\left(-\frac{P}{r_5^2}+2Qr_5\right)\left(\frac{1+v_f}{E_f}\right) \quad (7.59)$$

- **Για r = $r_{i.3}$ = r_6 έχω: $\sigma_{r,6}$ = $\sigma_{r,7}$ και $u_{r,6}$ = $u_{r,7}$**

$$\frac{2P}{r^3}+\frac{2Q(1+v_6)}{1-2v_6}=\frac{2S}{r^3}+\frac{2S(1+v_7)}{1-2v_7}\Rightarrow$$
$$\frac{2P}{r_6^3}+\frac{2Q(1+v_m)}{1-2v_m}=\frac{2S}{r_6^3}+\frac{2T(1+v_m)}{1-2v_m} \quad (7.60)$$

και

$$\left(-\frac{P}{r^2}+2Qr\right)\left(\frac{1+v_6}{E_6}\right)=\left(-\frac{S}{r^2}+2Tr\right)\left(\frac{1+v_7}{E_7}\right)\Rightarrow$$
$$\left(-\frac{P}{r_6^2}+2Qr_6\right)\left(\frac{1+v_m}{E_m}\right)=\left(-\frac{S}{r_6^2}+2Tr_6\right)\left(\frac{1+v_m}{E_m}\right) \quad (7.61)$$

Για r = $r_{m.2}$ = r_7 έχω: $\sigma_{r,6}$ = -P_o , όπου P_o η εξωτερική πίεση που ασκείται στο σφαιρικό επταφασικό μοντέλο.

$$\frac{2S}{r_7^3}+\frac{2T(1+v_m)}{1-2v_m}=-P_0 \quad (7.62)$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα των εξισώσεων (7.50 - 7.62) με τη βοήθεια του υπολογιστικού προγράμματος MATLAB, προκύπτουν οι εξής λύσεις των σταθερών:

A, C, F, K, M, P, S = 0

B, D, H , L, N, Q, T = $\dfrac{-P_0(1-2v_m)}{2(1+v_m)}$

Τώρα αντικαθιστούμε στις σχέσεις των τάσεων τις τιμές των σταθερών που υπολογίσαμε και έχουμε:

(7.63)

$$\pm_{r,2} = \pm_{-,2} = \pm_{\ddot{},2} = \frac{2(1+v_{i,1})}{(1-2v_{i,1})}\left(-P_0\frac{(1-2v_m)}{2(1+v_m)}\right) \quad (7.64)$$

$$\pm_{r,3} = \pm_{-,3} = \pm_{\ddot{},3} = \frac{2(1+v_m)}{(1-2v_m)}\left(-P_0\frac{(1-2v_m)}{2(1+v_m)}\right) = -P_0 \quad (7.65)$$

$$\pm_{r,4} = \pm_{-,4} = \pm_{\ddot{},4} = \frac{2(1+v_{i,2})}{(1-2v_{i,2})}\left(-P_0\frac{(1-2v_m)}{2(1+v_m)}\right) \quad (7.66)$$

$$\pm_{r,5} = \pm_{-,5} = \pm_{\ddot{},5} = \frac{2(1+v_f)}{(1-2v_f)}\left(-P_0\frac{(1-2v_m)}{2(1+v_m)}\right) \quad (7.67)$$

$$\pm_{r,6} = \pm_{-,6} = \pm_{\ddot{},6} = \frac{2(1+v_{i,3})}{(1-2v_{i,3})}\left(-P_0\frac{(1-2v_m)}{2(1+v_m)}\right) \quad (7.68)$$

$$\pm_{r,7} = \pm_{-,7} = \pm_{\ddot{},7} = \frac{2(1+v_m)}{(1-2v_m)}\left(-P_0\frac{(1-2v_m)}{2(1+v_m)}\right) = -P_0 \quad (7.69)$$

Στις παραμορφώσεις επίσης έχουμε:

$$\pounds_{r,1} = \pounds_{-,1} = \pounds_{\cdot\cdot,1} = -P_0 \frac{(1-2v_m)}{(1+v_m)} \frac{(1+v_f)}{E_f} \quad (7.70)$$

$$\pounds_{r,2} = \pounds_{-,2} = \pounds_{\cdot\cdot,2} = -P_0 \frac{(1-2v_m)(1+v_{i,1})}{\mathrm{E}_{i,1}(1+v_m)} \quad (7.71)$$

$$\pounds_{r,3} = \pounds_{-,3} = \pounds_{\cdot\cdot,3} = -P_0 \frac{(1-2v_m)}{E_m} \quad (7.72)$$

$$\pounds_{r,4} = \pounds_{-,4} = \pounds_{\cdot\cdot,4} = -P_0 \frac{(1-2v_m)(1+v_{i,2})}{\mathrm{E}_{i,2}(1+v_m)} \quad (7.73)$$

$$\pounds_{r,5} = \pounds_{-,5} = \pounds_{\cdot\cdot,5} = -P_0 \frac{(1-2v_m)}{(1+v_m)} \frac{(1+v_f)}{E_f} \quad (7.74)$$

$$\pounds_{r,6} = \pounds_{-,6} = \pounds_{\cdot\cdot,6} = -P_0 \frac{(1-2v_m)(1+v_{i,3})}{\mathrm{E}_{i,3}(1+v_m)} \quad (7.75)$$

$$\pounds_{r,7} = \pounds_{-,7} = \pounds_{\cdot\cdot,7} = -P_0 \frac{(1-2v_m)}{E_m} \quad (7.76)$$

Για τον προσδιορισμό του μέτρου ελαστικότητας $\mathbf{E_c}$ του κοκκώδους σύνθετου υλικού, θα εφαρμοσθεί η συνθήκη ισορροπίας ενέργειας στο επταφασικό σφαιρικό μοντέλο. Δηλαδή η ενέργεια που σχετίζεται με την μήτρα, το έγκλεισμα και την ενδιάμεση φάση. Έτσι λοιπόν έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{U_c}\frac{P_0^2}{K_c}dU_c &= \frac{1}{2}\int_{U_1}(\sigma_{r,1}\varepsilon_{r,1}+\sigma_{\theta,1}\varepsilon_{\theta,1}+\sigma_{\varphi,1}\varepsilon_{\varphi,1})dU_c+\frac{1}{2}\int_{U_2}(\sigma_{r,2}\varepsilon_{r,2}+\sigma_{\theta,2}\varepsilon_{\theta,2}+\sigma_{\varphi,2}\varepsilon_{\varphi,2})dU_c \\
&+\frac{1}{2}\int_{U_3}(\sigma_{r,3}\varepsilon_{r,3}+\sigma_{\theta,3}\varepsilon_{\theta,3}+\sigma_{\varphi,3}\varepsilon_{\varphi,3})dU_c+\frac{1}{2}\int_{U_4}(\sigma_{r,4}\varepsilon_{r,4}+\sigma_{\theta,4}\varepsilon_{\theta,4}+\sigma_{\varphi,4}\varepsilon_{\varphi,4})dU_c+ \\
&+\frac{1}{2}\int_{U_5}(\sigma_{r,5}\varepsilon_{r,5}+\sigma_{\theta,5}\varepsilon_{\theta,5}+\sigma_{\varphi,5}\varepsilon_{\varphi,5})dU_c+\frac{1}{2}\int_{U_6}(\sigma_{r,6}\varepsilon_{r,6}+\sigma_{\theta,6}\varepsilon_{\theta,6}+\sigma_{\varphi,6}\varepsilon_{\varphi,6})dU_c \\
&+\frac{1}{2}\int_{U_7}(\sigma_{r,7}\varepsilon_{r,7}+\sigma_{\theta,7}\varepsilon_{\theta,7}+\sigma_{\varphi,7}\varepsilon_{\varphi,7})dU_c
\end{aligned}
\tag{7.77}
$$

Όπου $K_c = \dfrac{E_c}{3(1-2v_c)}$ είναι το μέτρο διόγκωσης του συνθέτου υλικού.

Επίσης έχουμε ότι: $U = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ και $dU = 4\pi r^2 dr$.

Άρα θα έχουμε στη συνέχεια:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{r_7} 3\frac{P_0^{\,2}}{K_c}\frac{(1-2v_c)}{E_c}r^2dr &= \int_0^{r_1}(\sigma_{r,1}\varepsilon_{r,1}+\sigma_{\theta,1}\varepsilon_{\theta,1}+\sigma_{\varphi,1}\varepsilon_{\varphi,1})r^2dr+\int_{r_1}^{r_2}(\sigma_{r,2}\varepsilon_{r,2}+\sigma_{\theta,2}\varepsilon_{\theta,2}+\sigma_{\varphi,2}\varepsilon_{\varphi,2})r^2dr \\
&+\int_{r_2}^{r_3}(\sigma_{r,3}\varepsilon_{r,3}+\sigma_{\theta,3}\varepsilon_{\theta,3}+\sigma_{\varphi,3}\varepsilon_{\varphi,3})r^2dr+\int_{r_3}^{r_4}(\sigma_{r,4}\varepsilon_{r,4}+\sigma_{\theta,4}\varepsilon_{\theta,4}+\sigma_{\varphi,4}\varepsilon_{\varphi,4})r^2dr+ \\
&+\int_{r_4}^{r_5}(\sigma_{r,5}\varepsilon_{r,5}+\sigma_{\theta,5}\varepsilon_{\theta,5}+\sigma_{\varphi,5}\varepsilon_{\varphi,5})r^2dr+\int_{r_5}^{r_6}(\sigma_{r,6}\varepsilon_{r,6}+\sigma_{\theta,6}\varepsilon_{\theta,6}+\sigma_{\varphi,6}\varepsilon_{\varphi,6})r^2dr \\
&+\int_{r_6}^{r_7}(\sigma_{r,7}\varepsilon_{r,7}+\sigma_{\theta,7}\varepsilon_{\theta,7}+\sigma_{\varphi,7}\varepsilon_{\varphi,7})r^2dr
\end{aligned}
$$

Υπολογίζουμε τα επιμέρους ολοκληρώματα:

$$
\int_0^{r_7}\frac{3P_0^{\,2}(1-2v_c)}{E_c}r^2dr = \frac{3P_0^{\,2}(1-2v_c)}{E_c}\int_0^{r_7}r^2dr = \frac{3P_0^{\,2}(1-2v_c)}{E_c}\frac{r_7^{\,3}}{3} = \frac{P_0^{\,2}(1-2v_c)r_7^{\,3}}{E_c}
$$

$$\int_0^{r_1}(\pm_{r,1}£_{r,1}+\pm_{-,1}£_{-,1}+\pm_{\cdot\cdot,1}£_{\cdot\cdot,1})r^2dr=3\int_0^{r_1}(-P_0)\frac{2(1+v_f)}{(1-2v_f)}\frac{(1-2v_m)}{2(1+v_m)}\left[\frac{1-2v_m}{(1+v_m)}\frac{1+v_f}{E_f}(-P_0)\right]r^2dr=$$

$$=\frac{P_0{}^2(1+v_f)^2(1-2v_m)^2r_1^3}{(1-2v_f)(1+v_m)^2E_f}$$

$$\int_{r_1}^{r_2}(\pm_{r,2}£_{r,2}+\pm_{-,2}£_{-,2}+\pm_{\cdot\cdot,2}£_{\cdot\cdot,2})r^2dr=3\int_{r_1}^{r_2}\frac{2(1+v_{i,1})}{(1-2v_{i,1})}\left[-P_0\frac{1-2v_m}{2(1+v_m)}\right]\left[-P_0\frac{(1+v_{i,1})(1-2v_m)}{E_{i,1}(1+v_m)}\right]r^2dr$$

$$=3P_0{}^2\frac{(1-2v_m)^2}{(1+v_m)^2}\int_{r_1}^{r_2}\frac{(1+v_{i,1})^2}{E_{i,1}(1-2v_{i,1})}r^2dr$$

$$\int_{r_2}^{r_3}(\pm_{r,3}£_{r,3}+\pm_{-,3}£_{-,3}+\pm_{\cdot\cdot,3}£_{\cdot\cdot,3})r^2dr=3\int_{r_2}^{r_3}P_o{}^2\frac{(1-2v_m)}{E_m}r^2dr$$

$$=P_0{}^2\frac{(1-2v_m)}{E_m}(r_3{}^3-r_2{}^3)$$

$$\int_{r_3}^{r_4}(\pm_{r,4}£_{r,4}+\pm_{-,4}£_{-,4}+\pm_{\cdot\cdot,4}£_{\cdot\cdot,4})r^2dr=3\int_{r_3}^{r_4}\frac{2(1+v_{i,2})}{(1-2v_{i,2})}\left[-P_0\frac{1-2v_m}{2(1+v_m)}\right]\left[-P_0\frac{(1+v_{i,2})(1-2v_m)}{E_{i,2}(1+v_m)}\right]r^2dr$$

$$=3P_0{}^2\frac{(1-2v_m)^2}{(1+v_m)^2}\int_{r_3}^{r_4}\frac{(1+v_{i,2})^2}{E_{i,2}(1-2v_{i,2})^2}r^2dr$$

$$\int_{r_4}^{r_5}(\pm_{r,5}£_{r,5}+\pm_{-,5}£_{-,5}+\pm_{\cdot\cdot,5}£_{\cdot\cdot,5})r^2dr=3\int_{r_4}^{r_5}(-P_0)\frac{(1-2v_m)}{(1+v_m)}\frac{(1+v_f)}{E_f}\left[\frac{(1-2v_m)}{2(1+v_m)}\frac{2(1+v_f)}{(1-2v_f)}(-P_0)\right]r^2dr=$$

$$=P_0{}^2\frac{(1-2v_m)^2(1+v_f)^2}{(1+v_m)^2(1-2v_f)E_f}\left(r_5{}^3-r_4{}^3\right)$$

$$\int_{r_5}^{r_6}(\pm_{r,6}£_{r,6}+\pm_{-,6}£_{-,6}+\pm_{\cdot\cdot,6}£_{\cdot\cdot,6})r^2dr=3\int_{r_5}^{r_6}\frac{2(1+v_{i,3})}{(1-2v_{i,3})}\left[-P_0\frac{1-2v_m}{2(1+v_m)}\right]\left[-P_0\frac{(1+v_{i,3})(1-2v_m)}{E_{i,3}(1+v_m)}\right]r^2dr$$

$$=3P_0^{\,2}\frac{(1-2v_m)^2}{(1+v_m)^2}\int_{r_5}^{r_6}\frac{(1+v_{i,3})^2}{E_{i,3}(1-2v_{i,3})}r^2dr$$

$$\int_{r_6}^{r_7}(\pm_{r,7}£_{r,7}+\pm_{-,7}£_{-,7}+\pm_{\cdot\cdot,7}£_{\cdot\cdot,7})r^2dr=3\int_{r_6}^{r_7}P_o^{\,2}\frac{(1-2v_m)}{E_m}r^2dr=P_o^{\,2}\frac{(1-2v_m)}{E_m}(r_7^{\,3}-r_6^{\,3})$$

Άρα τελικά έχουμε:

$$\frac{P_0^2(1-2v_c)r_7^3}{E_c}=\frac{P_0^2(1+v_f)^2(1-2v_m)^2r_1^3}{(1-2v_f)(1+v_m)^2E_f}+3P_0^2\frac{(1-2v_m)^2}{(1+v_m)^2}\int_{r_1}^{r_2}\frac{(1+v_{i,1})^2}{E_{i,1}(1-2v_{i,1})}r^2dr+$$
$$P_0^2\frac{(1-2v_m)}{E_m}(r_3^3-r_2^3)+3P_0^2\frac{(1-2v_m)^2}{(1+v_m)^2}\int_{r_3}^{r_4}\frac{(1+v_{i,2})^2}{E_{i,2}(1-2v_{i,2})^2}r^2dr+$$
$$P_0^2\frac{(1-2v_m)^2(1+v_f)^2}{(1+v_m)^2(1-2v_f)E_f}(r_5^3-r_4^3)+3P_0^2\frac{(1-2v_m)^2}{(1+v_m)^2}\int_{r_5}^{r_6}\frac{(1+v_{i,3})^2}{E_{i,3}(1-2v_{i,3})}r^2dr+\qquad(7.78)$$
$$P_o^2\frac{(1-2v_m)}{E_m}(r_7^3-r_6^3)$$

Ισχύει όμως από το Κεφάλαιο 6 ότι:

$$U_{f,1}=U_1=\frac{\frac{4}{3}®(r_1^3)}{\frac{4}{3}®\left(r_7^3\right)}=\frac{r_1^3}{r_7^3}$$

$$U_{i,1}=U_2=\frac{\frac{4}{3}®(r_2^3-r_1^3)}{\frac{4}{3}®\left(r_7^3\right)}=\frac{r_2^3-r_1^3}{r_7^3}$$

$$U_{m,1} = U_3 = \frac{\frac{4}{3}\text{®}\,(r_3^3 - r_2^3)}{\frac{4}{3}\text{®}\left(r_7^3\right)} = \frac{r_3^3 - r_2^3}{r_7^3}$$

$$U_{i,2} = U_4 = \frac{\frac{4}{3}\text{®}\,(r_4^3 - r_3^3)}{\frac{4}{3}\text{®}\left(r_7^3\right)} = \frac{r_4^3 - r_3^3}{r_7^3}$$

$$U_{f,2} = U_5 = \frac{\frac{4}{3}\text{®}\,(r_5^3 - r_4^3)}{\frac{4}{3}\text{®}\left(r_7^3\right)} = \frac{r_5^3 - r_4^3}{r_7^3}$$

$$U_{i,3} = U_6 = \frac{\frac{4}{3}\text{®}\,(r_6^3 - r_5^3)}{\frac{4}{3}\text{®}\left(r_7^3\right)} = \frac{r_6^3 - r_5^3}{r_7^3}$$

$$U_{m,2} = U_7 = \frac{\frac{4}{3}\text{®}\,(r_7^3 - r_6^3)}{\frac{4}{3}\text{®}\left(r_7^3\right)} = \frac{r_7^3 - r_6^3}{r_7^3}$$

$$U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7 = 1$$

όπου με αντικατάσταση των παραπάνω κατ’ όγκο περιεκτικοτήτων και διαιρώντας με $P_o^2 r_7^3$ θα έχουμε:

$$\frac{(1-2v_c)}{E_c}=\frac{(1+v_f)^2(1-2v_m)^2U_1}{(1-2v_f)(1+v_m)^2E_f}+3\frac{(1-2v_m)^2U_2}{(1+v_m)^2(r_2^3-r_1^3)}\int_{r_1}^{r_2}\frac{(1+v_{i,1})^2}{E_{i,1}(1-2v_{i,1})}r^2dr+$$
$$\frac{(1-2v_m)}{E_m}U_3+3\frac{(1-2v_m)^2U_4}{(1+v_m)^2(r_4^3-r_3^3)}\int_{r_3}^{r_4}\frac{(1+v_{i,2})^2}{E_{i,2}(1-2v_{i,2})^2}r^2dr+$$
$$\frac{(1-2v_m)^2(1+v_f)^2}{(1+v_m)^2(1-2v_f)E_f}U_5+3\frac{(1-2v_m)^2U_6}{(1+v_m)^2(r_6^3-r_5^3)}\int_{r_5}^{r_6}\frac{(1+v_{i,3})^2}{E_{i,3}(1-2v_{i,3})}r^2dr+ \quad (7.79)$$
$$\frac{(1-2v_m)}{E_m}U_7$$

Τώρα επειδή $U_m=U_{m,1}+U_{m,2}=U_3+U_7$ και $U_f=U_{f,1}+U_{f,2}=U_1+U_5$ η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$\frac{(1-2v_c)}{E_c}=\frac{(1+v_f)^2(1-2v_m)^2U_f}{(1-2v_f)(1+v_m)^2E_f}+3\frac{(1-2v_m)^2U_{i,1}}{(1+v_m)^2(r_2^3-r_1^3)}\int_{r_1}^{r_2}\frac{(1+v_{i,1})^2}{E_{i,1}(1-2v_{i,1})}r^2dr$$
$$+\frac{(1-2v_m)}{E_m}U_m+3\frac{(1-2v_m)^2U_{i,2}}{(1+v_m)^2(r_4^3-r_3^3)}\int_{r_3}^{r_4}\frac{(1+v_{i,2})^2}{E_{i,2}(1-2v_{i,2})^2}r^2dr \quad (7.80)$$
$$+3\frac{(1-2v_m)^2U_{i,3}}{(1+v_m)^2(r_6^3-r_5^3)}\int_{r_5}^{r_6}\frac{(1+v_{i,3})^2}{E_{i,3}(1-2v_{i,3})}r^2dr$$

Ο λόγος Poisson του σύνθετου υλικού προκύπτει από τον νόμο των φάσεων και είναι:

$$\begin{aligned}v_c&=v_1U_1+v_2U_2+v_3U_3+v_4U_4+v_5U_5+v_6U_6+v_7U_7=\\&=v_{f,1}U_{f,1}+v_{i,1}U_{i,1}+v_{m,1}U_{m,1}+v_{i,2}U_{i,2}+v_{f,2}U_{f,2}+v_{i,3}U_{i,3}+v_{m,2}U_{m,2}\end{aligned} \quad (7.81)$$

Άρα ο λόγος Poisson του σύνθετου υλικού γράφεται ως εξής:

$$\nu_c = \nu_1 U_1 + \frac{3}{{r_7}^3}\int_{r_1}^{r_2} \nu_2(r) r^2 dr + \nu_3 U_3 + \frac{3}{{r_7}^3}\int_{r_3}^{r_4} \nu_4(r) r^2 dr + \nu_5 U_5$$

$$+ \frac{3}{{r_7}^3}\int_{r_5}^{r_6} \nu_6(r) r^2 dr + \nu_7 U_7 =$$

$$\nu_{f,1} U_{f,1} + \frac{3}{{r_7}^3}\int_{r_1}^{r_2} \nu_{i,1}(r) r^2 dr + \nu_{m,1} U_{m,1} + \frac{3}{{r_7}^3}\int_{r_3}^{r_4} \nu_{i,2}(r) r^2 dr + \nu_{f,2} U_{f,2} \quad (7.82)$$

$$+ \frac{3}{{r_7}^3}\int_{r_5}^{r_6} \nu_{i,3}(r) r^2 dr + \nu_{m,2} U_{m,2}$$

Κεφάλαιο 8

Δυναμικό μέτρο ελαστικότητας

8.1 Προσεγγιστικός υπολογισμός του δυναμικού μέτρου Ελαστικότητας

Το δυναμικό μέτρο Ελαστικότητας [62], για ένα βισκοελαστικό υλικό, δίνεται από τον τύπο:

$$E^{*} = E' + iE'' \tag{8.1}$$

όπου ***E΄*** το μέτρο αποθήκευσης και ***E΄΄*** το μέτρο απωλειών του σύνθετου υλικού.

Κατ' αναλογία με το μέτρο ελαστικότητας $\boldsymbol{E^{*}}$, μπορούμε να έχουμε και το δυναμικό μέτρο διάτμησης $\boldsymbol{G^{*}}$, καθώς και τον δυναμικό λόγο Poisson $\boldsymbol{v^{*}}$.

$$G^{*} = G' + iG'' \tag{8.2}$$

$$v^{*} = v' - iv'' \tag{8.3}$$

Ισχύει επίσης ότι:

$$E^{*} = 2G^{*}\left(1 + v^{*}\right) \tag{8.4}$$

Αν τώρα στην τελευταία σχέση (8.4), αντικαταστήσουμε τις προηγούμενες σχέσεις (8.1, 8.2, 8.3), και θεωρήσουμε ότι το έγκλεισμα είναι ελαστικό υλικό (κόκκος σίδερου $\boldsymbol{E''_f = 0}$) μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές του λόγου Poisson της μήτρας και του εγκλείσματος αντίστοιχα:

$$v'_m = \frac{E'_m G'_m + E''_m G''_m - 2\left(G'^2_m + G''^2_m\right)}{2\left(G'^2_m + G''^2_m\right)} \tag{8.5}$$

$$v''_m = \frac{E'_m G''_m + E''_m G'_m}{2\left(G'^2_m + G''^2_m\right)} \tag{8.6}$$

$$\neg''_f = \frac{E'_f - 2G'_f}{2G'_f} \tag{8.7}$$

$$\neg''_f = 0 \tag{8.8}$$

Για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε το δυναμικό μέτρο ελαστικότητας, χρησιμοποιούμε τον τύπο (7.80) από το προηγούμενο κεφάλαιο, όπου αντικαθιστώντας τα μέτρα ελαστικότητας και τους λόγους Poisson για τη μήτρα και τα εγκλείσματα με τα αντίστοιχα δυναμικά. Έτσι η σχέση μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\frac{\left(1-2v_c^*\right)}{E_c^*} = \frac{\left(1-2v_m^*\right)}{E_m^*}U_m + \frac{\left(1-2v_m^*\right)^2\left(1+v_f^*\right)^2}{\left(1+v_m^*\right)^2\left(1-2v_f^*\right)E_f^*}U_f + \frac{3\left(1-2v_m^*\right)^2 U_{i,1}}{\left(1+v_m^*\right)^2\left(r_2^3-r_1^3\right)}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\left(1+v_{i,1}^*\right)^2}{E_{i,1}^*\left(1-2v_{i,1}^*\right)}r^2dr + \frac{3\left(1-2v_m^*\right)^2 U_{i,2}}{\left(1+v_m^*\right)^2\left(r_4^3-r_3^3\right)}\int_{r_3}^{r_4}\frac{\left(1+v_{i,2}^*\right)^2}{E_{i,2}^*\left(1-2v_{i,2}^*\right)}r^2dr + \frac{3\left(1-2v_m^*\right)^2 U_{i,3}}{\left(1+v_m^*\right)^2\left(r_6^3-r_5^3\right)}\int_{r_5}^{r_6}\frac{\left(1+v_{i,3}^*\right)^2}{E_{i,3}^*\left(1-2v_{i,3}^*\right)}r^2dr \tag{8.9}$$

Αναλύοντας τώρα τον κάθε όρο της σχέσης (8.9) σύμφωνα με τις προηγούμενες σχέσεις θα έχουμε ως εξής:

- Το πρώτο μέρος γίνεται:

$$\frac{1-2\neg_c^*}{E_c^*} = \frac{1-2\left(v_c'-iv_c''\right)}{E_c'+iE_c''} = \frac{1-2v_c'+2iv_c''}{E_c'+iE_c''} = \frac{\left(1-2v_c'\right)E_c'+2E_c''v_c''}{E_c'^2+E_c''^2} + i\,\frac{2E_c'v_c''-\left(1-2v_c'\right)E_c''}{E_c'^2+E_c''^2}$$

- Ο πρώτος όρος του δεύτερου μέρους γίνεται:

$$\frac{1-2\neg_m^*}{E_m^*}U_m = \frac{1-2\left(\neg_m'-i\neg_m''\right)}{E_m'+iE_m''}U_m =$$

$$= \left\{\frac{\left[\left(1-2\neg_m'\right)E_m'+2\neg_m''E_m''\right]+i\left[2\neg_m''E_m'-\left(1-2\neg_m'\right)E_m''\right]}{E_m'^2+E_m''^2}\right\}U_m =$$

$$= \frac{C+iD}{E_m'^2+E_m''^2}U_m$$

όπου: $C=\left(1-2\nu'_m\right)E'_m+2\nu''_mE''_m$ και $D=2\nu''_mE'_m-\left(1-2\nu'_m\right)E''_m$

- Ο δεύτερος όρος του δεύτερου μέρους γίνεται:

$$\frac{\left(1+\nu_f^*\right)^2}{1-2\nu_f^*}\left(\frac{1-2\nu_m^*}{1+\nu_m^*}\right)^2\frac{U_f}{E_f^*}=\frac{\left(1+\nu'_f\right)^2}{1-2\nu'_f}\left(\frac{1-2\left(\nu'_m-i\nu''_m\right)}{1+\left(\nu'_m-i\nu''_m\right)}\right)^2\frac{U_f}{E'_f}=$$

$$=\frac{\left(1+\nu'_f\right)^2}{1-2\nu'_f}\frac{\left(2\nu'_m-1\right)^2-4\nu''^2_m-4i\left(2\nu'_m-1\right)}{\left(1+\nu'_m\right)^2+\nu''^2_m-2i\left(1+\nu'_m\right)\nu''_m}\frac{U_f}{E'_f}=$$

$$=\frac{\left(1+\nu'_f\right)^2}{1-2\nu'_f}\left(A+iB\right)\frac{U_f}{E'_f}$$

όπου: $A=\dfrac{\left(1-\nu'_m-2\nu'^2_m-2\nu''^2_m\right)^2-9\nu''^2_m}{\left[\left(1+\nu'_m\right)^2+\nu''^2_m\right]^2}$ και $B=\dfrac{6\left(1-\nu'_m-2\nu'^2_m-2\nu''^2_m\right)\nu''_m}{\left[\left(1+\nu'_m\right)^2+\nu''^2_m\right]^2}$

- Ο τρίτος όρος του δεύτερου μέρους γίνεται:

$$3\frac{\left(1-2\nu_m^*\right)^2}{\left(1+\nu_m^*\right)^2}\frac{U_{i,1}}{r_2^3-r_1^3}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\left(1+\nu_{i,1}^*\right)^2}{\left(1-2\nu_{i,1}^*\right)E_{i,1}^*}r^2dr=3\left(\frac{1-2\left(\nu'_m-i\nu''_m\right)}{1+\left(\nu'_m-i\nu''_m\right)}\right)^2\frac{U_{i,1}}{r_2^3-r_1^3}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\left(1+\nu'_{i,1}-i\nu''_{i,1}\right)^2}{\left[1-2\left(\nu'_{i,1}-i\nu''_{i,1}\right)\right]\left(E'_{i,1}+iE''_{i,1}\right)}r^2dr=$$

$$=3\frac{U_{i,1}}{r_2^3-r_1^3}\left(A+iB\right)\int_{r_1}^{r_2}\frac{F+iH}{E'^2_{i,1}+E''^2_{i,1}}r^2dr=$$

$$=3\frac{U_{i,1}}{r_2^3-r_1^3}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\left(AF+BH\right)-i\left(AH-BF\right)}{E'^2_{i,1}+E''^2_{i,1}}r^2dr$$

όπου:

$$F=\frac{\left[\left(1+\nu'_{i,1}\right)^2-\nu''^2_{i,1}\right]\left[\left(1-2\nu'_{i,1}\right)E'_{i,1}-2\nu''_{i,1}E''_{i,1}\right]-2\left(1+\nu'_{i,1}\right)\nu''_{i,1}\left[\left(1-2\nu'_{i,1}\right)E''_{i,1}+2\nu''_{i,1}E'_{i,1}\right]}{\left[\left(1-2\nu'_{i,1}\right)^2+4\nu''^2_{i,1}\right]}$$

και

$$H=\frac{\left[2\left(1+\neg'_{i,1}\right)^{2}\neg''_{i,1}\right]\left[\left(1-2\neg'_{i,1}\right)E'_{i,1}-2\neg''_{i,1}E''_{i,1}\right]+\left[\left(1-2\neg'_{i,1}\right)+2\neg''_{i,1}E'_{i,1}\right]\left[\left(1+\neg'_{i,1}\right)^{2}-\neg''^{2}_{i,1}\right]}{\left[\left(1-2\neg'_{i,1}\right)^{2}+4\neg''^{2}_{i,1}\right]}$$

- Ο τέταρτος όρος του δεύτερου μέρους γίνεται:

$$3\frac{\left(1-2\neg^{*}_{m}\right)^{2}}{\left(1+\neg^{*}_{m}\right)^{2}}\frac{U_{i,2}}{r_4^3-r_3^3}\int_{r_3}^{r_4}\frac{\left(1+\neg^{*}_{i,2}\right)^{2}}{\left(1-2\neg^{*}_{i,2}\right)E^{*}_{i,2}}r^2dr=3\left(\frac{1-2\left(\neg'_{m}-i\neg''_{m}\right)}{1+\left(\neg'_{m}-i\neg''_{m}\right)}\right)^{2}\frac{U_{i,2}}{r_4^3-r_3^3}\int_{r_3}^{r_4}\frac{\left(1+\neg'_{i,2}-i\neg''_{i,2}\right)^{2}}{\left[1-2\left(\neg'_{i,2}-i\neg''_{i,2}\right)\right]\left(E'_{i,2}+iE''_{i,2}\right)}r^2dr=$$

$$=3\frac{U_{i,2}}{r_4^3-r_3^3}\left(A+iB\right)\int_{r_3}^{r_4}\frac{K+iL}{E'^{2}_{i,2}+E''^{2}_{i,2}}r^2dr=$$

$$=3\frac{U_{i,2}}{r_4^3-r_3^3}\int_{r_3}^{r_4}\frac{\left(AK+BL\right)-i\left(AL-BK\right)}{E'^{2}_{i,2}+E''^{2}_{i,2}}r^2dr$$

όπου:

$$K=\frac{\left[\left(1+\neg'_{i,2}\right)^{2}-\neg''^{2}_{i,2}\right]\left[\left(1-2\neg'_{i,2}\right)E'_{i,2}-2\neg''_{i,2}E''_{i,2}\right]-2\left(1+\neg'_{i,2}\right)\neg''_{i,2}\left[\left(1-2\neg'_{i,2}\right)E''_{i,2}+2\neg''_{i,2}E'_{i,2}\right]}{\left[\left(1-2\neg'_{i,2}\right)^{2}+4\neg''^{2}_{i,2}\right]}$$

και

$$L=\frac{\left[2\left(1+\neg'_{i,2}\right)^{2}\neg''_{i,2}\right]\left[\left(1-2\neg'_{i,2}\right)E'_{i,2}-2\neg''_{i,2}E''_{i,2}\right]+\left[\left(1-2\neg'_{i,2}\right)+2\neg''_{i,2}E'_{i,2}\right]\left[\left(1+\neg'_{i,2}\right)^{2}-\neg''^{2}_{i,2}\right]}{\left[\left(1-2\neg'_{i,2}\right)^{2}+4\neg''^{2}_{i,2}\right]}$$

- Ο πέμπτος όρος του δεύτερου μέρους γίνεται:

$$3\frac{\left(1-2\nu_m^*\right)^2}{\left(1+\nu_m^*\right)^2}\frac{U_{i,3}}{r_6^3-r_5^3}\int_{r_5}^{r_6}\frac{\left(1+\nu_{i,3}^*\right)^2}{\left(1-2\nu_{i,3}^*\right)E_{i,3}^*}r^2dr=3\left(\frac{1-2\left(\nu'_m-i\nu''_m\right)}{1+\left(\nu'_m-i\nu''_m\right)}\right)^2\frac{U_{i,3}}{r_6^3-r_5^3}\int_{r_5}^{r_6}\frac{\left(1+\nu'_{i,3}-i\nu''_{i,3}\right)^2}{\left[1-2\left(\nu'_{i,3}-i\nu''_{i,3}\right)\right]\left(E'_{i,3}+iE''_{i,3}\right)}r^2dr=$$

$$=3\frac{U_{i,3}}{r_6^3-r_5^3}\left(A+iB\right)\int_{r_5}^{r_6}\frac{M+iN}{E'^2_{i,3}+E''^2_{i,3}}r^2dr=$$

$$=3\frac{U_{i,3}}{r_6^3-r_5^3}\int_{r_5}^{r_6}\frac{\left(AM+BN\right)-i\left(AN-BM\right)}{E'^2_{i,3}+E''^2_{i,3}}r^2dr$$

όπου:

$$M=\frac{\left[\left(1+\nu'_{i,3}\right)^2-\nu''^2_{i,3}\right]\left[\left(1-2\nu'_{i,3}\right)E'_{i,3}-2\nu''_{i,3}E''_{i,3}\right]-2\left(1+\nu'_{i,3}\right)\nu''_{i,3}\left[\left(1-2\nu'_{i,3}\right)E''_{i,3}+2\nu''_{i,3}E'_{i,3}\right]}{\left[\left(1-2\nu'_{i,3}\right)^2+4\nu''^2_{i,3}\right]}$$

και

$$N=\frac{\left[2\left(1+\nu'_{i,3}\right)^2\nu''_{i,3}\right]\left[\left(1-2\nu'_{i,3}\right)E'_{i,3}-2\nu''_{i,3}E''_{i,3}\right]+\left[\left(1-2\nu'_{i,3}\right)+2\nu''_{i,3}E'_{i,3}\right]\left[\left(1+\nu'_{i,3}\right)^2-\nu''^2_{i,3}\right]}{\left[\left(1-2\nu'_{i,3}\right)^2+4\nu''^2_{i,3}\right]}$$

Από τη σχέση (8.9) μετά την ανάλυση των όρων θα έχουμε ότι:

- Το πραγματικό μέρος της εξίσωσης (8.9) είναι:

$$\begin{aligned}\frac{\left(1-2v'_c\right)E'_c+2E''_cv''_c}{E'^2_c+E''^2_c}&=\frac{CU_m}{E'^2_m+E''^2_m}+\frac{A\left(1+\nu'_f\right)^2}{1-2\nu'_f}\frac{U_f}{E'_f}\\&+3\frac{U_{i,1}}{r_2^3-r_1^3}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\left(AF+BH\right)}{E'^2_{i,1}+E''^2_{i,1}}r^2dr\\&+3\frac{U_{i,2}}{r_4^3-r_3^3}\int_{r_3}^{r_4}\frac{\left(AK+BL\right)}{E'^2_{i,2}+E''^2_{i,2}}r^2dr\\&+3\frac{U_{i,3}}{r_6^3-r_5^3}\int_{r_5}^{r_6}\frac{\left(AM+BN\right)}{E'^2_{i,3}+E''^2_{i,3}}r^2dr\\&=T\end{aligned}\qquad(8.10)$$

- Το φανταστικό μέρος της εξίσωσης (8.9) είναι:

$$\begin{aligned}\frac{2\nu_c''E_c'-\left(1-2\nu_c'\right)E_c''}{E_c'^2+E_c''^2} &= \frac{DU_m}{E_m'^2+E_m''^2}+\frac{B\left(1+\nu_f'\right)^2}{1-2\nu_f'}\frac{U_f}{E_f'} \\ &-3\frac{U_{i,1}}{r_2^3-r_1^3}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\left(AH-BF\right)}{E_{i,1}'^2+E_{i,1}''^2}r^2dr \\ &-3\frac{U_{i,2}}{r_4^3-r_3^3}\int_{r_3}^{r_4}\frac{\left(AL-BK\right)}{E_{i,2}'^2+E_{i,2}''^2}r^2dr \\ &-3\frac{U_{i,3}}{r_6^3-r_5^3}\int_{r_5}^{r_6}\frac{\left(AM-BN\right)}{E_{i,3}'^2+E_{i,3}''^2}r^2dr \\ &=W\end{aligned} \tag{8.11}$$

Επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων (8.10 - 8.11) θα έχουμε ότι:

$$E_c'=\frac{\left(1-2\nu_c'\right)T-2\nu_c''W}{T^2+W^2} \tag{8.12}$$

$$E_c''=\frac{\left(1-2\nu_c'\right)W+2\nu_c''T}{T^2+W^2} \tag{8.13}$$

Ο λόγος Poisson ν_c του σύνθετου υλικού μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας των νόμο των φάσεων οπότε γίνεται ως εξής:

$$\begin{aligned}\nu_c' &= \nu_f'U_f+\nu_m'U_m+\nu_{i,1}'\left(r\right)U_{i,1}+\nu_{i,2}'\left(r\right)U_{i,2}+\nu_{i,3}'\left(r\right)U_{i,3}= \\ &=\nu_f'U_f+\nu_m'U_m+\frac{3U_{i,1}}{r_2^3-r_1^3}\int_{r_1}^{r_2}\nu_{i,1}'\left(r\right)r^2dr+\frac{3U_{i,2}}{r_4^3-r_3^3}\int_{r_3}^{r_4}\nu_{i,2}'\left(r\right)r^2dr \\ &+\frac{3U_{i,3}}{r_6^3-r_5^3}\int_{r_5}^{r_6}\nu_{i,3}'\left(r\right)r^2dr\end{aligned} \tag{8.14}$$

$$
\begin{aligned}
\neg_c'' &= \neg_m'' U_m + \neg_{i,1}''(r)U_{i,1} + \neg_{i,2}''(r)U_{i,2} = \\
&= \neg_m'' U_m + \frac{3U_{i,1}}{r_2^3 - r_1^3}\int_{r_1}^{r_2}\neg_{i,1}''(r)r^2dr + \frac{3U_{i,2}}{r_4^3 - r_3^3}\int_{r_1}^{r_2}\neg_{i,2}''(r)r^2dr \\
&+ \frac{3U_{i,3}}{r_6^3 - r_5^3}\int_{r_5}^{r_6}\neg_{i,3}''(r)r^2dr
\end{aligned} \tag{8.15}
$$

Για να μπορέσουμε τώρα να υπολογίσουμε τα δυναμικά μέτρα, χρειαζόμαστε τις τιμές ***E'ᵢ*** , ***E''ᵢ*** **,** ***v'ᵢ*** , ***v''ᵢ*** και των τριών ενδιάμεσων φάσεων. Όπως και στο κεφάλαιο 6, λαμβάνουμε υπόψη μας ότι το δυναμικό μέτρο ελαστικότητας και ο δυναμικός λόγος Poisson για κάθε ενδιάμεση φάση μεταβάλλονται είτε γραμμικά είτε παραβολικά είτε υπερβολικά. Για κάθε μια περίπτωση θα έχουμε:

1. Γραμμική μεταβολή

Το δυναμικό μέτρο ελαστικότητας για την πρώτη ενδιάμεση φάση δίνεται από τον τύπο:

$$
E_{i,1}^* = \frac{E_f^*\left(r_{i,1} - r\right) + E_m^*\left(r - r_{f,1}\right)}{r_{i,1} - r_{f,1}} \tag{8.16}
$$

όπου το πραγματικό και φανταστικό μέρος είναι:

$$
E_{i,1}' = \frac{\left(E_f' r_{i,1} + E_m' r_{f,1}\right) - \left(E_f' - E_m'\right)r}{r_{i,1} - r_{f,1}} \tag{8.17}
$$

$$
E_{i,1}'' = \frac{E_m''\left(r - r_{f,1}\right)}{r_{i,1} - r_{f,1}} \tag{8.18}
$$

ομοίως για τον λόγο Poisson έχουμε:

$$
\neg_{i,1}' = \frac{\left(\neg_f' r_{i,1} - \neg_m' r_{f,1}\right) - \left(\neg_f' - \neg_m'\right)r}{r_{i,1} - r_{f,1}} \tag{8.19}
$$

$$\neg''_{i,2} = \frac{\neg''_m \left(r - r_{f,1} \right)}{r_{i,1} - r_{f,1}} \qquad (8.20)$$

Το δυναμικό μέτρο ελαστικότητας για τη δεύτερη ενδιάμεση φάση δίνεται από τον τύπο:

$$E^*_{i,2} = \frac{E^*_m \left(r_{i,2} - r \right) + E^*_f \left(r - r_{m,1} \right)}{r_{i,2} - r_{m,1}} \qquad (8.21)$$

όπου το πραγματικό και φανταστικό μέρος είναι:

$$E'_{i,2} = \frac{\left(E'_m r_{i,2} + E'_f r_{m,1} \right) - \left(E'_m - E'_f \right) r}{r_{i,2} - r_{m,1}} \qquad (8.22)$$

$$E''_{i,2} = \frac{E''_m \left(r_{i,2} - r \right)}{r_{i,2} - r_{m,1}} \qquad (8.23)$$

ομοίως για τον λόγο Poisson θα έχουμε:

$$\neg'_{i,2} = \frac{\left(\neg'_m r_{i,2} - \neg'_f r_{m,1} \right) - \left(\neg'_m - \neg'_f \right) r}{r_{i,2} - r_{m,1}} \qquad (8.24)$$

$$\neg''_{i,2} = \frac{\neg''_m \left(r_{i,2} - r \right)}{r_{i,2} - r_{m,1}} \qquad (8.25)$$

Το δυναμικό μέτρο ελαστικότητας για την τρίτη ενδιάμεση φάση δίνεται από τον τύπο:

$$E^*_{i,3} = \frac{E^*_f \left(r_{i,3} - r \right) + E^*_m \left(r - r_{f,2} \right)}{r_{i,3} - r_{f,2}} \qquad (8.26)$$

όπου το πραγματικό και φανταστικό μέρος είναι:

$$E'_{i,3} = \frac{\left(E'_f r_{i,3} + E'_m r_{f,2}\right) - \left(E'_f - E'_m\right) r}{r_{i,3} - r_{f,2}} \tag{8.27}$$

$$E''_{i,3} = \frac{E''_m \left(r - r_{f,2}\right)}{r_{i,3} - r_{f,3}} \tag{8.28}$$

ομοίως για τον λόγο Poisson έχουμε:

$$\neg'_{i,3} = \frac{\left(\neg'_f r_{i,3} - \neg'_m r_{f,2}\right) - \left(\neg'_f - \neg'_m\right) r}{r_{i,3} - r_{f,2}} \tag{8.29}$$

$$\neg''_{i,3} = \frac{\neg''_m \left(r - r_{f,2}\right)}{r_{i,3} - r_{f,2}} \tag{8.30}$$

2. Υπερβολική μεταβολή

Το δυναμικό μέτρο ελαστικότητας για την πρώτη ενδιάμεση φάση δίνεται από τον τύπο:

$$E^*_{i,1} = \frac{\left(E^*_m r_{i,1} - E^*_f r_{f,1}\right) r + \left(E^*_f - E^*_m\right) r_{i,1} r_{f,1}}{\left(r_{i,1} - r_{f,1}\right) r} \tag{8.31}$$

όπου το πραγματικό και φανταστικό μέρος είναι:

$$E'_{i,1} = \frac{\left(E'_m r_{i,1} - E'_f r_{f,1}\right) r + \left(E'_f - E'_m\right) r_{i,1} r_{f,1}}{\left(r_{i,1} - r_{f,1}\right) r} \tag{8.32}$$

$$E''_{i,1} = \frac{E''_m r_{i,1} \left(r - r_{f,1}\right)}{\left(r_{i,1} - r_{f,1}\right) r} \tag{8.33}$$

ομοίως για τον λόγο Poisson έχουμε:

$$\neg'_{i,1} = \frac{\left(\neg'_m r_{i,1} - \neg'_f r_{f,1}\right) r + \left(\neg'_f - \neg'_m\right) r_{i,1} r_{f,1}}{\left(r_{i,1} - r_{f,1}\right) r} \tag{8.34}$$

$$\neg''_{i,1} = \frac{\neg''_m r_{i,1}\left(r - r_{f,1}\right)}{\left(r_{i,1} - r_{f,1}\right)r} \tag{8.35}$$

Το δυναμικό μέτρο ελαστικότητας για τη δεύτερη ενδιάμεση φάση δίνεται από τον τύπο:

$$E^*_{i,2} = \frac{E^*_f r_{i,2} - E^*_m r_{m,1}}{r_{i,2} - r_{m,1}} + \frac{\left(E^*_m - E^*_f\right) r_{i,2} r_{m,1}}{\left(r_{i,2} - r_{m,1}\right) r} \tag{8.36}$$

όπου το πραγματικό και φανταστικό μέρος είναι:

$$E'_{i,2} = \frac{\left(E'_f r_{i,2} - E'_m r_{m,1}\right) r + \left(E'_m - E'_f\right) r_{i,2} r_{m,1}}{\left(r_{i,2} - r_{m,1}\right) r} \tag{8.37}$$

$$E''_{i,2} = \frac{E''_m r_{m,1}\left(r_{i,2} - r\right)}{\left(r_{i,2} - r_{m,1}\right) r} \tag{8.38}$$

ομοίως για τον λόγο Poisson έχουμε:

$$\neg'_{i,2} = \frac{\left(\neg'_f r_{i,2} - \neg'_m r_{m,1}\right) r + \left(\neg'_m - \neg'_f\right) r_{i,2} r_{m,1}}{\left(r_{i,2} - r_{m,1}\right) r} \tag{8.39}$$

$$\neg''_{i,2} = \frac{\neg''_m r_m \left(r_{i,2} - r\right)}{\left(r_{i,2} - r_{m,1}\right) r} \tag{8.40}$$

Το δυναμικό μέτρο ελαστικότητας για την τρίτη ενδιάμεση φάση δίνεται από τον τύπο:

$$E^*_{i,3} = \frac{\left(E^*_m r_{i,3} - E^*_f r_{f,2}\right) r + \left(E^*_f - E^*_m\right) r_{i,3} r_{f,2}}{\left(r_{i,3} - r_{f,2}\right) r} \tag{8.41}$$

όπου το πραγματικό και φανταστικό μέρος είναι:

$$E'_{i,3} = \frac{\left(E'_m r_{i,3} - E'_f r_{f,2}\right) r + \left(E'_f - E'_m\right) r_{i,3} r_{f,2}}{\left(r_{i,3} - r_{f,2}\right) r} \tag{8.42}$$

$$E''_{i,3} = \frac{E''_m r_{i,3}\left(r - r_{f,2}\right)}{\left(r_{i,3} - r_{f,2}\right) r} \tag{8.43}$$

ομοίως για τον λόγο Poisson έχουμε:

$$\neg'_{i,3} = \frac{\left(\neg'_m r_{i,3} - \neg'_f r_{f,2}\right) r + \left(\neg'_f - \neg'_m\right) r_{i,3} r_{f,2}}{\left(r_{i,3} - r_{f,2}\right) r} \tag{8.44}$$

$$\neg''_{i,3} = \frac{\neg''_m r_{i,3}\left(r - r_{f,2}\right)}{\left(r_{i,3} - r_{f,2}\right) r} \tag{8.45}$$

3. Παραβολική μεταβολή

Το δυναμικό μέτρο ελαστικότητας για την πρώτη ενδιάμεση φάση δίνεται από τον τύπο:

$$E^*_{i,1} = \frac{\left(E^*_f - E^*_m\right)\left(r - 2r_{i,1}\right) r + E^*_f r_{i,1}^2 + E^*_m r_{f,1}^2 - 2E^*_m r_{i,1} r_{f,1}}{\left(r_{i,1} - r_{f,1}\right)^2} \tag{8.46}$$

όπου το πραγματικό και φανταστικό μέρος είναι:

$$E'_{i,1} = \frac{\left(E'_f - E'_m\right)\left(r - 2r_{i,1}\right) r + E'_f r_{i,1}^2 + E'_m r_{f,1}^2 - 2E'_m r_{i,1} r_{f,1}}{\left(r_{i,1} - r_{f,1}\right)^2} \tag{8.47}$$

$$E''_{i,1} = \frac{E''_m \left[r_{f,1}^2 - 2r_{i,1} r_{f,1} - r\left(r - 2r_{i,1}\right)\right]}{\left(r_{i,1} - r_{f,1}\right)^2} \tag{8.48}$$

ομοίως για τον λόγο Poisson έχουμε:

$$\neg'_{i,1} = \frac{\left(\neg'_f - \neg'_m\right)\left(r - 2r_{i,1}\right)r + \neg'_f r_{i,1}^2 + \neg'_m r_{f,1}^2 - 2\neg'_m r_{i,1} r_{f,1}}{\left(r_{i,1} - r_{f,1}\right)^2} \qquad (8.49)$$

$$\neg''_{i,1} = \frac{\neg''_m\left[r_{f,1}^2 - 2r_{i,1}r_{f,1} - r\left(r - 2r_{i,1}\right)\right]}{\left(r_{i,1} - r_{f,1}\right)^2} \qquad (8.50)$$

Το δυναμικό μέτρο ελαστικότητας για την δεύτερη ενδιάμεση φάση δίνεται από τον τύπο:

$$E^*_{i,2} = \frac{\left(E^*_f - E^*_m\right)\left(r - 2r_{m,1}\right)r + E^*_f r_{m,1}^2 + E^*_m r_{i,2}^2 - 2E^*_m r_{i,2} r_{m,1}}{\left(r_{i,2} - r_{m,1}\right)^2} \qquad (8.51)$$

όπου το πραγματικό και φανταστικό μέρος είναι:

$$E'_{i,2} = \frac{\left(E'_f - E'_m\right)\left(r - 2r_{m,1}\right)r + E'_f r_{m,1}^2 + E'_m r_{i,2}^2 - 2E'_m r_{i,2} r_{m,1}}{\left(r_{i,2} - r_{m,1}\right)^2} \qquad (8.52)$$

$$E''_{i,2} = \frac{E''_m\left[r_{i,2}^2 - 2r_{i,2}r_{m,1} - r\left(r - 2r_{m,1}\right)\right]}{\left(r_{i,2} - r_{m,1}\right)^2} \qquad (8.53)$$

ομοίως για τον λόγο Poisson έχουμε:

$$\neg'_{i,2} = \frac{\left(\neg'_f - \neg'_m\right)\left(r - 2r_{m,1}\right)r + \neg'_f r_{m,1}^2 + \neg'_m r_{i,2}^2 - 2\neg'_m r_{i,2} r_{m,1}}{\left(r_{i,2} - r_{m,1}\right)^2} \qquad (8.54)$$

$$\neg''_{i,2} = \frac{\neg''_m\left[r_{i,2}^2 - 2r_{i,2}r_{m,1} - r\left(r - 2r_{m,1}\right)\right]}{\left(r_{i,2} - r_{m,1}\right)^2} \qquad (8.55)$$

Το δυναμικό μέτρο ελαστικότητας για την τρίτη ενδιάμεση φάση δίνεται από τον τύπο:

$$E_{i,3}^{*}=\frac{\left(E_f^{*}-E_m^{*}\right)\left(r-2r_{i,3}\right)r+E_f^{*}r_{i,3}^{2}+E_m^{*}r_{f,2}^{2}-2E_m^{*}r_{i,3}r_{f,2}}{\left(r_{i,3}-r_{f,2}\right)^{2}} \tag{8.56}$$

όπου το πραγματικό και φανταστικό μέρος είναι:

$$E_{i,3}'=\frac{\left(E_f'-E_m'\right)\left(r-2r_{i,3}\right)r+E_f'r_{i,3}^{2}+E_m'r_{f,2}^{2}-2E_m'r_{i,3}r_{f,2}}{\left(r_{i,3}-r_{f,2}\right)^{2}} \tag{8.57}$$

$$E_{i,3}''=\frac{E_m''\left[r_{f,2}^{2}-2r_{i,3}r_{f,2}-r\left(r-2r_{i,3}\right)\right]}{\left(r_{i,3}-r_{f,2}\right)^{2}} \tag{8.58}$$

ομοίως για τον λόγο Poisson έχουμε:

$$\neg_{i,3}'=\frac{\left(\neg_f'-\neg_m'\right)\left(r-2r_{i,3}\right)r+\neg_f'r_{i,3}^{2}+\neg_m'r_{f,2}^{2}-2\neg_m'r_{i,3}r_{f,2}}{\left(r_{i,3}-r_{f,2}\right)^{2}} \tag{8.59}$$

$$\neg_{i,3}''=\frac{\neg_m''\left[r_{f,2}^{2}-2r_{i,3}r_{f,2}-r\left(r-2r_{i,3}\right)\right]}{\left(r_{i,3}-r_{f,2}\right)^{2}} \tag{8.60}$$

Για να κάνουμε τους υπολογισμούς μας πιο εύκολους, θεωρούμε ότι ο λόγος Poisson έχει μόνο πραγματικό μέρος. Δηλαδή ισχύει ότι:

$$\neg_f^{*}=\neg_f'=\neg_f,\quad \neg_m^{*}=\neg_m'=\neg_m,\quad \neg_i^{*}\left(r\right)=\neg_i'\left(r\right)=\neg_i\left(r\right),\quad \neg_c^{*}=\neg_c'=\neg_c \tag{8.61}$$

Έτσι η εξίσωση (8.9) γράφεται:

$$\frac{\left(1-2v_c\right)}{E_c^*}=\frac{\left(1-2v_m\right)}{E_m^*}U_m+\frac{\left(1-2v_m\right)^2\left(1+v_f\right)^2}{\left(1+v_m\right)^2\left(1-2v_f\right)E_f^*}U_f+$$

$$\frac{3\left(1-2v_m\right)^2U_{i,1}}{\left(1+v_m\right)^2\left(r_2^3-r_1^3\right)}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\left(1+v_{i,1}\right)^2}{E_{i,1}^*\left(1-2v_{i,1}\right)}r^2dr+\frac{3\left(1-2v_m\right)^2U_{i,2}}{\left(1+v_m\right)^2\left(r_4^3-r_3^3\right)}\int_{r_3}^{r_4}\frac{\left(1+v_{i,2}\right)^2}{E_{i,2}^*\left(1-2v_{i,2}\right)}r^2dr+ \qquad (8.62)$$

$$\frac{3\left(1-2v_m\right)^2U_{i,3}}{\left(1+v_m\right)^2\left(r_6^3-r_5^3\right)}\int_{r_5}^{r_6}\frac{\left(1+v_{i,3}\right)^2}{E_{i,3}^*\left(1-2v_{i,3}\right)}r^2dr$$

Αναλύοντας τώρα κάθε όρο της εξίσωσης όπως κάναμε και πριν θα έχουμε:

$$\frac{\left(1-2v_c\right)}{E_c'+iE_c''}=\frac{\left(1-2v_m\right)}{E_m'+iE_m''}U_m+\frac{\left(1-2v_m\right)^2\left(1+v_f\right)^2}{\left(1+v_m\right)^2\left(1-2v_f\right)E_f'}U_f+$$

$$\frac{3\left(1-2v_m\right)^2U_{i,1}}{\left(1+v_m\right)^2\left(r_2^3-r_1^3\right)}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\left(1+v_{i,1}\right)^2}{\left(E_{i,1}'+iE_{i,1}''\right)\left(1-2v_{i,1}\right)}r^2dr+\frac{3\left(1-2v_m\right)^2U_{i,2}}{\left(1+v_m\right)^2\left(r_4^3-r_3^3\right)}\int_{r_3}^{r_4}\frac{\left(1+v_{i,2}\right)^2}{\left(E_{i,2}'+iE_{i,2}''\right)\left(1-2v_{i,2}\right)}r^2dr \qquad (8.63)$$

$$\frac{3\left(1-2v_m\right)^2U_{i,3}}{\left(1+v_m\right)^2\left(r_6^3-r_5^3\right)}\int_{r_5}^{r_6}\frac{\left(1+v_{i,3}\right)^2}{\left(E_{i,3}'+iE_{i,3}''\right)\left(1-2v_{i,3}\right)}r^2dr$$

Εκτελώντας τώρα τις πράξεις και διαχωρίζοντας το πραγματικό από το φανταστικό μέρος της σχέσης (8.63) θα έχουμε ότι:

- Το πραγματικό μέρος της εξίσωσης (8.63) είναι:

$$\frac{\left(1-2\nu_c'\right)E_c'}{E_c'^2+E_c''^2}=\frac{\left(1-2\nu_m\right)E_m'}{E_m'^2+E_m''^2}U_m+\frac{\left(1-2\nu_m\right)^2\left(1+\nu_f\right)^2}{\left(1+\nu_m\right)^2\left(1-2\nu_f\right)}\frac{U_f}{E_f'}$$
$$+3\frac{U_{i,1}\left(1-2\nu_m\right)^2}{\left(r_2^3-r_1^3\right)\left(1+\nu_m\right)^2}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\left(1+\nu_{i,1}\right)^2E_{i,1}'}{\left(1-2\nu_{i,1}\right)\left(E_{i,1}'^2+E_{i,1}''^2\right)}r^2dr$$
$$+3\frac{U_{i,2}\left(1-2\nu_m\right)^2}{\left(r_4^3-r_3^3\right)\left(1+\nu_m\right)^2}\int_{r_3}^{r_4}\frac{\left(1+\nu_{i,2}\right)^2E_{i,2}'}{\left(1-2\nu_{i,2}\right)\left(E_{i,2}'^2+E_{i,2}''^2\right)}r^2dr \qquad (8.64)$$
$$+3\frac{U_{i,3}\left(1-2\nu_m\right)^2}{\left(r_6^3-r_5^3\right)\left(1+\nu_m\right)^2}\int_{r_5}^{r_6}\frac{\left(1+\nu_{i,3}\right)^2E_{i,3}'}{\left(1-2\nu_{i,3}\right)\left(E_{i,3}'^2+E_{i,3}''^2\right)}r^2dr$$
$$=Z$$

- Το φανταστικό μέρος της εξίσωσης (8.9) είναι:

$$\frac{\left(1-2\nu_c\right)E_c''}{E_c'^2+E_c''^2}=\frac{\left(1-2\nu_m\right)E_m''}{E_m'^2+E_m''^2}U_m+3\frac{U_{i,1}\left(1-2\nu_m\right)^2}{\left(r_2^3-r_1^3\right)\left(1+\nu_m\right)^2}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\left(1+\nu_{i,1}\right)^2E_{i,1}''}{\left(1-2\nu_{i,1}\right)\left(E_{i,1}'^2+E_{i,1}''^2\right)}r^2dr$$
$$+3\frac{U_{i,2}\left(1-2\nu_m\right)^2}{\left(r_4^3-r_3^3\right)\left(1+\nu_m\right)^2}\int_{r_3}^{r_4}\frac{\left(1+\nu_{i,2}\right)^2E_{i,2}''}{\left(1-2\nu_{i,2}\right)\left(E_{i,2}'^2+E_{i,2}''^2\right)}r^2dr \qquad (8.65)$$
$$+3\frac{U_{i,3}\left(1-2\nu_m\right)^2}{\left(r_6^3-r_5^3\right)\left(1+\nu_m\right)^2}\int_{r_5}^{r_6}\frac{\left(1+\nu_{i,3}\right)^2E_{i,3}''}{\left(1-2\nu_{i,3}\right)\left(E_{i,3}'^2+E_{i,3}''^2\right)}r^2dr$$
$$=Y$$

Επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων (8.64 - 8.65) θα έχουμε ότι:

$$E_c'=\frac{\left(1-2\nu_c\right)Z}{Z^2+Y^2} \qquad (8.66)$$

$$E_c''=\frac{\left(1-2\nu_c\right)Y}{Z^2+Y^2} \qquad (8.67)$$

8.2 Παρουσίαση αποτελεσμάτων του δυναμικού μέτρου Ελαστικότητας υπό σταθερή θερμοκρασία Τ

Από τη σχέση (8.14) της προηγουμένης ενότητας υπολογίζουμε το λόγο Poisson $\mathbf{v_c}$ του σύνθετου υλικού, ενδεικτικά για το κυβικό μοντέλο 1 και τη γραμμική μεταβολή του λόγου Poisson $\mathbf{v_i}$ των 3 ενδιάμεσων φάσεων. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα:

$\mathbf{U_f}$	$\mathbf{v_c}$
0,05	0,356
0,1	0,353
0,15	0,349
0,2	0,348
0,25	0,347

Πίνακας 8.1

Παρατηρούμε από τον πίνακα ότι ο λόγος Poisson $\mathbf{v_c}$ μειώνεται όσο αυξάνεται η κατ΄ όγκο περιεκτικότητα των εγκλεισμάτων. Αυτό είναι αναμενόμενο, αφού η αύξηση της περιεκτικότητας των εγκλεισμάτων οδηγεί σύμφωνα με τον νόμο τον φάσεων, σε αύξηση του όρου που σχετίζεται με την περιεκτικότητα των εγκλεισμάτων και σε ταυτόχρονη μείωση του όρου που σχετίζεται με την περιεκτικότητα της μήτρας. Η μήτρα παραμένει το κύριο συστατικό του σύνθετου υλικού, συνεπώς αυτή η μείωση είναι υπεύθυνη για την πτώση του λόγου Poisson $\mathbf{v_c}$ του σύνθετου υλικού.

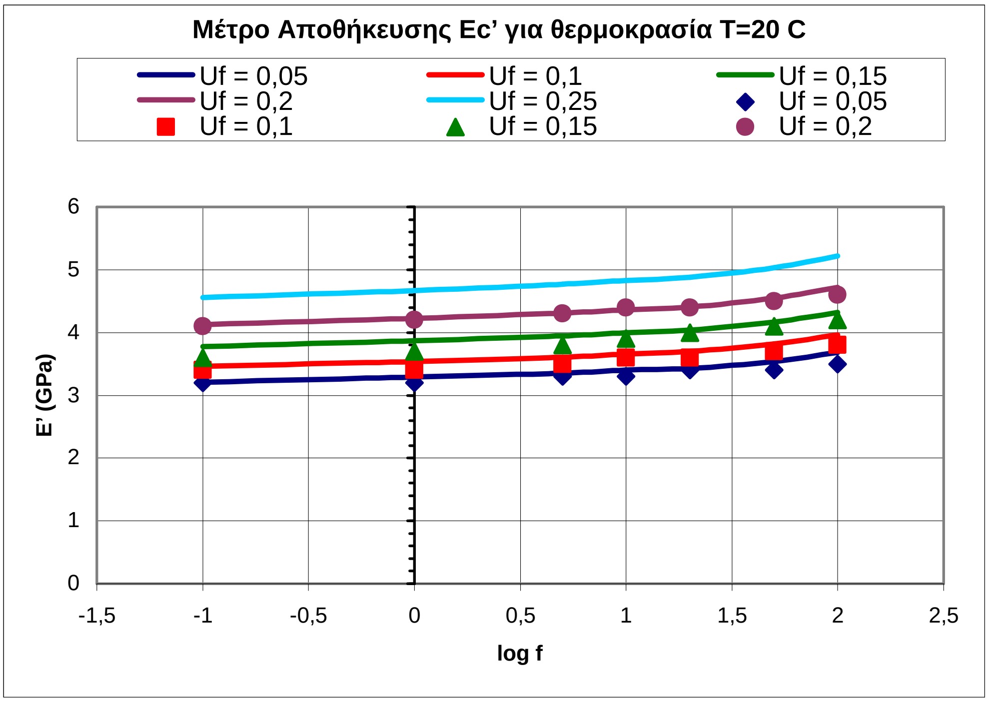
Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (8.66 – 8.67) μπορούμε να υπολογίσουμε τις θεωρητικές τιμές του δυναμικού μέτρου αποθήκευσης E'_c και του δυναμικού μέτρου απωλειών E''_c υπό την επίδραση της συχνότητας **f**, για διαφορετικές κατ' όγκο περιεκτικότητες εγκλεισμάτων $\mathbf{U_f}$ υπό σταθερή θερμοκρασία περιβάλλοντος (T = 20 ^oC). Από τη βιβλιογραφία [63] παίρνουμε και τις πειραματικές τιμές για τις ίδιες συχνότητες και περιεκτικότητες εγκλεισμάτων.

Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στους ακόλουθους πίνακες και διαγράμματα, όπου οι γραμμές χαρακτηρίζουν τις θεωρητικές καμπύλες και τα μεμονωμένα σημεία τις πειραματικές τιμές για κάθε περιεκτικότητας $\mathbf{U_f}$.

- Συγκεκριμένα για το δυναμικό μέτρο αποθήκευσης ***E'c*** έχουμε:

		U_f = 0.05		U_f = 0.1		U_f = 0.15		U_f = 0.2		U_f = 0.25	
		Θεωρ.	Πειρ.	Θεωρ.	Πειρ.	Θεωρ.	Πειρ.	Θεωρ.	Πειρ.	Θεωρ.	Πειρ.
f (Hz)	Logf	E'_c (GPa)	E'_c (GPa)	E'_c (GPa)	E'_c (GPa)	E'_c (GPa)	E'_c (GPa)	E'_c (GPa)	E'_c (GPa)	E'_c (GPa)	E'_c (GPa)
0,1	-1	3,21	3,2	3,46	3,4	3,78	3,6	4,13	4,1	4,56	-
1	0	3,29	3,2	3,54	3,4	3,87	3,7	4,23	4,2	4,67	-
5	0,7	3,35	3,3	3,61	3,5	3,95	3,8	4,31	4,3	4,77	-
10	1	3,4	3,3	3,66	3,6	4	3,9	4,37	4,4	4,83	-
20	1,3	3,43	3,4	3,7	3,6	4,04	4	4,41	4,4	4,88	-
50	1,7	3,54	3,4	3,82	3,7	4,17	4,1	4,55	4,5	5,03	-
100	2	3,68	3,5	3,96	3,8	4,32	4,2	4,72	4,6	5,22	-

Πίνακας 8.2



Διάγραμμα 8.1: Μεταβολή του μέτρου αποθήκευσης E'_c, συναρτήσει της συχνότητας για διαφορετικές κατ' όγκο περιεκτικότητες εγκλείσματος.

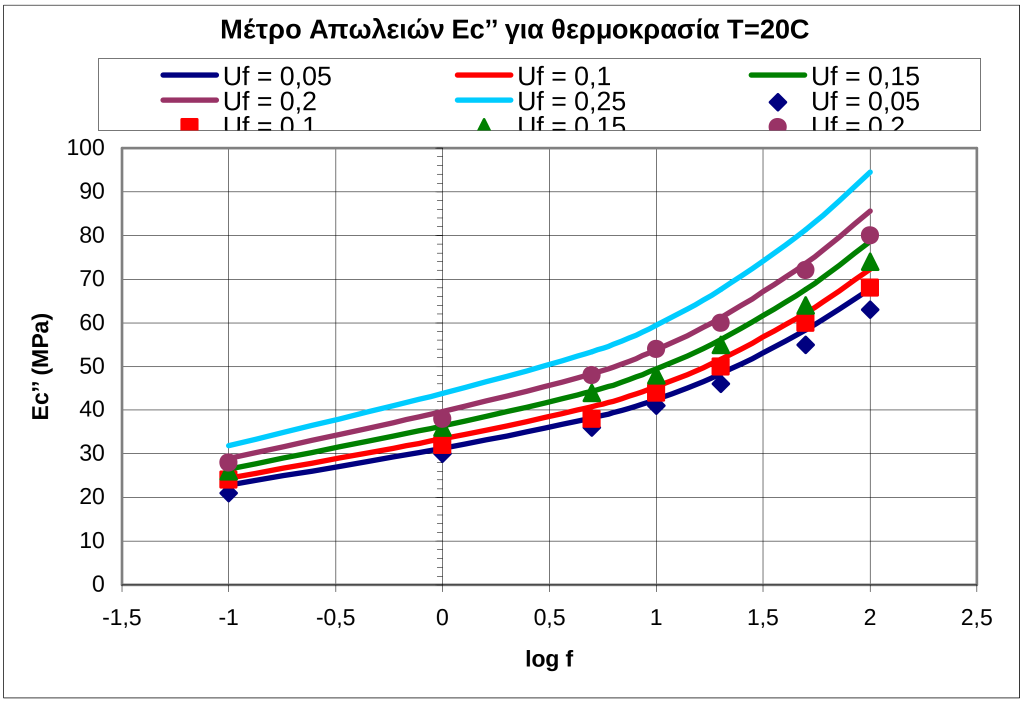
Σύμφωνα λοιπόν με το διάγραμμα (8.1), μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το μέτρο αποθήκευσης ***E'c*** αυξάνει σταδιακά καθώς αυξάνει η κατ' όγκο περιεκτικότητα εγκλείσματος **U_f** και η συχνότητα **f**. Επίσης παρατηρούμε ότι οι καμπύλες του διαγράμματος είναι σχεδόν παράλληλες. Αυτή την συμπεριφορά, μπορούμε επίσης να την παρατηρήσουμε και στα πειραματικά αποτελέσματα, τα οποία βρίσκονται σε συμφωνία με τις προβλεπόμενες θεωρητικές τιμές. Αυτό επιβεβαιώνει το γεγονός ότι η μήτρα παραμένει το κύριο συστατικό του σύνθετου υλικού και εξασφαλίζει τη μέγιστη δυνατή εκμετάλλευση των ιδιοτήτων του εγκλείσματος, και ότι το έγκλεισμα είναι το συστατικό ενίσχυσης που προσδίδει στο σύνθετο υλικό βελτιωμένες μηχανικές ιδιότητες.

Γενικά δηλαδή, μπορούμε να πούμε ότι με την αύξηση της συχνότητας f και της κατ' όγκου περιεκτικότητας U_f, αυξάνει το μέτρο αποθήκευσης E'_c του σύνθετου υλικού.

- Για το δυναμικό μέτρο απωλειών ***E''c*** έχουμε:

		U_f = 0.05		U_f = 0.1		U_f = 0.15		U_f = 0.2		U_f = 0.25	
		Θεωρ.	Πειρ.	Θεωρ.	Πειρ.	Θεωρ.	Πειρ.	Θεωρ.	Πειρ.	Θεωρ.	Πειρ.
f (Hz)	Logf	E''_c (MPa)	E''_c (MPa)	E''_c (MPa)	E''_c (MPa)	E''_c (MPa)	E''_c (MPa)	E''_c (MPa)	E''_c (MPa)	E''_c (MPa)	E''_c (MPa)
0,1	-1	22,8	21	24,37	24	26,51	26	28,89	28	31,91	-
1	0	31,32	30	33,47	32	36,4	36	39,66	38	43,8	-
5	0,7	38,16	36	40,77	38	44,34	44	48,3	48	53,35	-
10	1	42,55	41	45,44	44	49,41	48	53,83	54	59,45	-
20	1,3	48,39	46	51,66	50	56,18	55	61,2	60	67,59	-
50	1,7	58,31	55	62,21	60	67,65	64	73,68	72	81,36	-
100	2	67,82	63	72,3	68	78,6	74	85,59	80	94,51	-

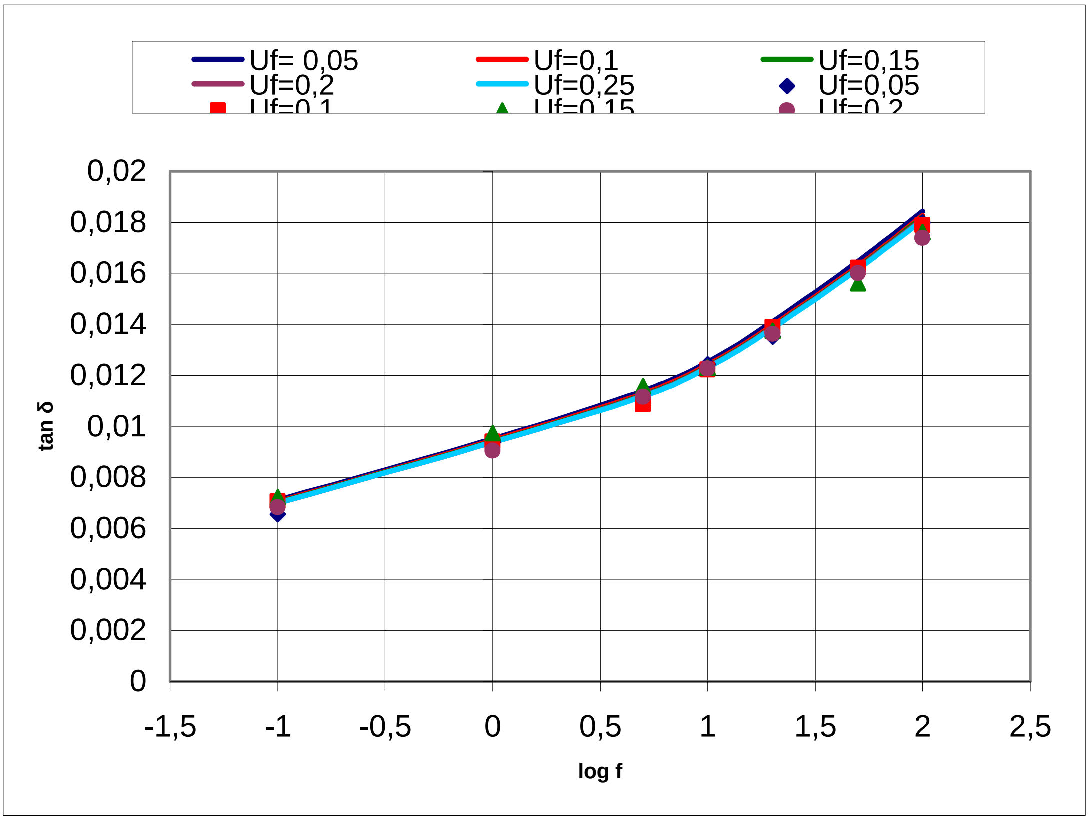
Πίνακας 8.3



Διάγραμμα 8.2 : Μεταβολή του μέτρου απωλειών E''_c, συναρτήσει της συχνότητας για διαφορετικές κατ' όγκο περιεκτικότητες εγκλείσματος.

Ανάλογα συμπεράσματα μπορούμε να εξάγουμε και για το μέτρο απωλειών του σύνθετου υλικού E''_c, του οποίου η μεταβολή με βάση τη συχνότητα παρουσιάζεται στο διάγραμμα (8.2). Γενικά παρατηρούμε ότι η παρουσία εγκλείσματος συμβάλλει στην αύξηση του μέτρου απωλειών E''_c στο σύνθετο υλικό, λόγω της ενισχυτικής δράσης που παρουσιάζει, εξαιτίας της σχετικά άκαμπτης ανόργανης δομής του. Η βασική διαφορά με το μέτρο αποθήκευσης E'_c είναι ότι το μέτρο απωλειών του σύνθετου υλικού αυξάνει πιο απότομα με την αύξηση της συχνότητας f και ότι η συμφωνία μεταξύ θεωρητικών τιμών και πειραματικών αποτελεσμάτων εξαλείφεται καθώς αυξάνουν η συχνότητα f και η κατ' όγκο περιεκτικότητα U_f.

Από τη σχέση $\tan \delta = \frac{E''}{E'}$ (3.33) μπορούμε να υπολογίσουμε τις θεωρητικές καθώς και τις πειραματικές τιμές της ***tanδ*** υπό την επίδραση της συχνότητας **f**, για διαφορετικές κατ' όγκο περιεκτικότητες εγκλεισμάτων U_f υπό σταθερή θερμοκρασία περιβάλλοντος (T = 20 ^oC).



Διάγραμμα 8.3 : Μεταβολή της tanδ συναρτήσει της συχνότητας για διαφορετικές κατ' όγκο περιεκτικότητες εγκλείσματος.

Στο διάγραμμα (8.3) παρατηρούμε ότι η μεταβολή της tanδ συναρτήσει της συχνότητας f είναι το ίδιο σχεδόν για κάθε διαφορετική κατ' όγκο περιεκτικότητα εγκλεισμάτων, και ακόμα ότι έχουμε συμφωνία ανάμεσα στις θεωρητικές και στις πειραματικές τιμές.

8.3 Παρουσίαση αποτελεσμάτων του δυναμικού μέτρου Ελαστικότητας υπό σταθερή συχνότητα f

Από τις σχέσεις (8.66 – 8.67) μπορούμε να υπολογίσουμε τις θεωρητικές τιμές του δυναμικού μέτρου αποθήκευσης E'_c και του δυναμικού μέτρου απωλειών E''_c υπό την επίδραση της θερμοκρασίας T, για διαφορετικές κατ' όγκο περιεκτικότητες των εγκλεισμάτων U_f και για σταθερή συχνότητας **f** (δηλαδή για συχνότητες f = 0.1 – 1 – 10 – 50 Hz). Από τη βιβλιογραφία [64] παίρνουμε και τις πειραματικές τιμές για τις ίδιες συχνότητες και περιεκτικότητες εγκλεισμάτων.

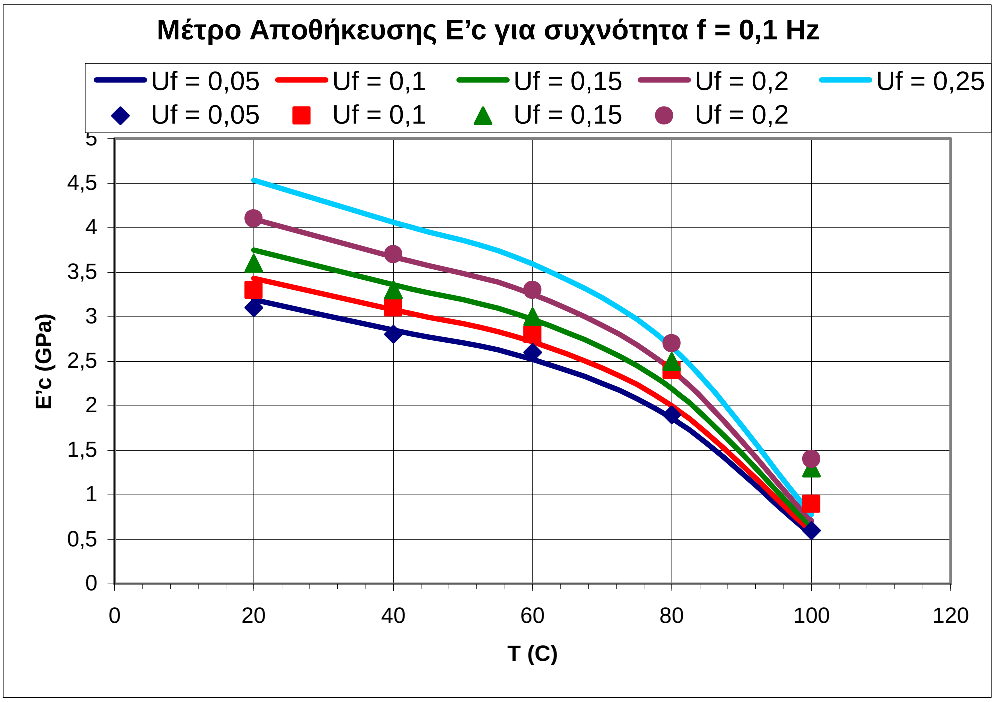
Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στους ακόλουθους πίνακες και διαγράμματα, όπου οι γραμμές χαρακτηρίζουν τις θεωρητικές καμπύλες και τα μεμονωμένα σημεία τις πειραματικές τιμές για κάθε περιεκτικότητας U_f .

- Συγκεκριμένα για το δυναμικό μέτρο αποθήκευσης ***E'c*** έχουμε:

Για σταθερή συχνότητα f = 0.1 Hz

f = 0.1 Hz	U_f = 0.05		U_f = 0.1		U_f = 0.15		U_f = 0.2		U_f = 0.25	
	Θεωρ.	Πειρ.	Θεωρ.	Πειρ.	Θεωρ.	Πειρ.	Θεωρ.	Πειρ.	Θεωρ.	Πειρ.
T (^oC)	E'_c (GPa)	E'_c (GPa)	E'_c (GPa)	E'_c (GPa)	E'_c (GPa)	E'_c (GPa)	E'_c (GPa)	E'_c (GPa)	E'_c (GPa)	E'_c (GPa)
20	3,19	3,1	3,43	3,3	3,75	3,6	4,1	4,1	4,53	-
40	2,85	2,8	3,08	3,1	3,36	3,3	3,67	3,7	4,06	-
60	2,52	2,6	2,72	2,8	2,97	3	3,25	3,3	3,59	-
80	1,86	1,9	2	2,4	2,19	2,5	2,4	2,7	2,66	-
100	0,55	0,6	0,59	0,9	0,64	1,3	0,71	1,4	0,78	-

Πίνακας 8.4

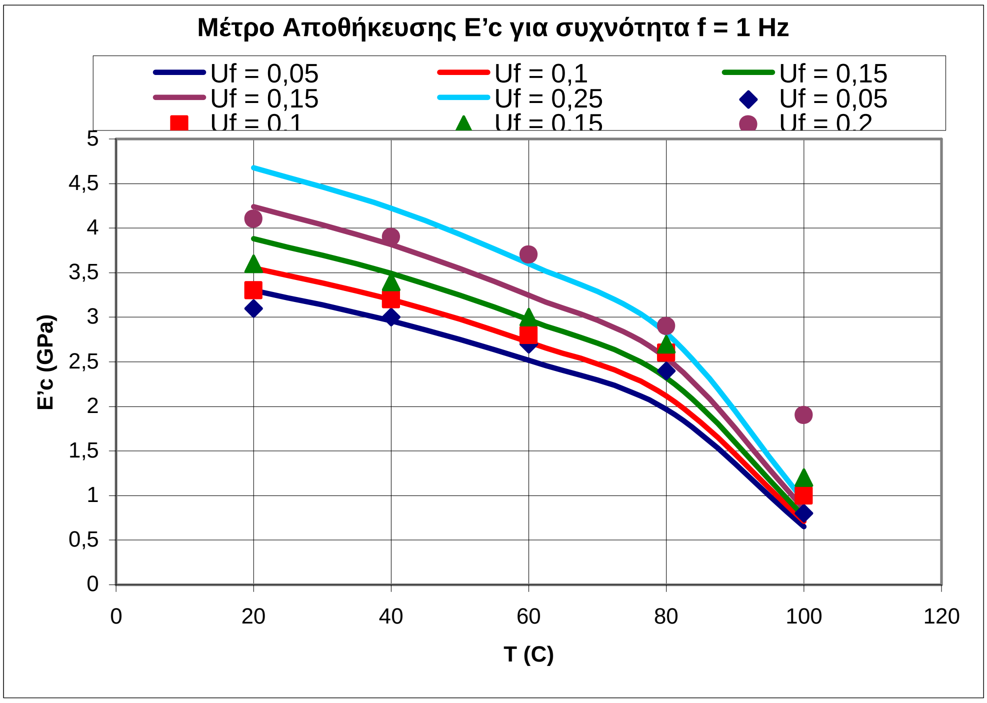


Διάγραμμα 8.4 : Μεταβολή του μέτρου αποθήκευσης E'_c, συναρτήσει της θερμοκρασίας για διαφορετικές κατ' όγκο περιεκτικότητες εγκλείσματος.

Για σταθερή συχνότητα f = 1 Hz

f = 1 Hz	**U_f = 0.05**		**U_f = 0.1**		**U_f = 0.15**		**U_f = 0.2**		**U_f = 0.25**	
	Θεωρ.	**Πειρ.**	**Θεωρ.**	**Πειρ.**	**Θεωρ.**	**Πειρ.**	**Θεωρ.**	**Πειρ.**	**Θεωρ.**	**Πειρ.**
T (^{o}C)	**E'_c (GPa)**	**E'_c (GPa)**	**E'_c (GPa)**	**E'_c (GPa)**	**E'_c (GPa)**	**E'_c (GPa)**	**E'_c (GPa)**	**E'_c (GPa)**	**E'_c (GPa)**	**E'_c (GPa)**
20	3,3	3,1	3,55	3,3	3,88	3,6	4,24	4,1	4,68	-
40	2,96	3	3,2	3,2	3,49	3,4	3,81	3,9	4,22	-
60	2,52	2,7	2,72	2,8	2,97	3	3,25	3,7	3,6	-
80	1,97	2,4	2,12	2,6	2,32	2,7	2,54	2,9	2,82	-
100	0,65	0,8	0,71	1	0,77	1,2	0,85	1,9	0,94	-

Πίνακας 8.5

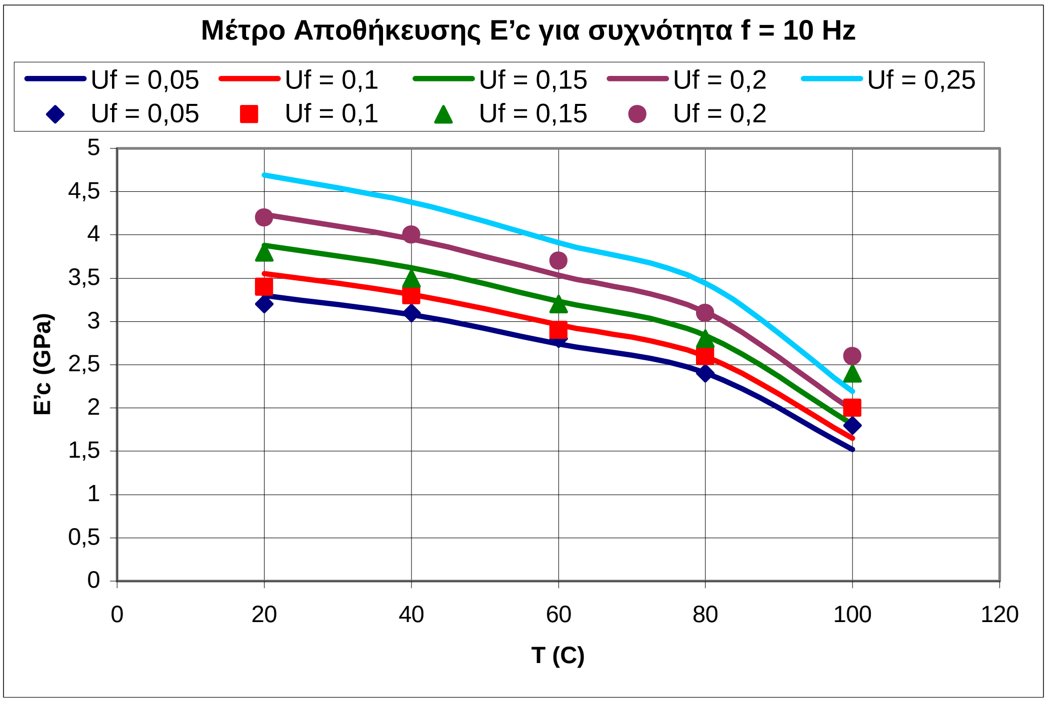


Διάγραμμα 8.5: Μεταβολή του μέτρου αποθήκευσης E'_c, συναρτήσει της θερμοκρασίας για διαφορετικές κατ' όγκο περιεκτικότητες εγκλείσματος.

Για σταθερή συχνότητα f = 10 Hz

f = 10 Hz	U_f = 0.05		U_f = 0.1		U_f = 0.15		U_f = 0.2		U_f = 0.25	
	Θεωρ.	Πειρ.	Θεωρ.	Πειρ.	Θεωρ.	Πειρ.	Θεωρ.	Πειρ.	Θεωρ.	Πειρ.
T (^oC)	E'_c (GPa)	E'_c (GPa)	E'_c (GPa)	E'_c (GPa)	E'_c (GPa)	E'_c (GPa)	E'_c (GPa)	E'_c (GPa)	E'_c (GPa)	E'_c (GPa)
20	3,3	3,2	3,55	3,4	3,88	3,8	4,24	4,2	4,69	-
40	3,08	3,1	3,31	3,3	3,62	3,5	3,96	4	4,38	-
60	2,74	2,8	2,96	2,9	3,23	3,2	3,53	3,7	3,91	-
80	2,41	2,4	2,6	2,6	2,84	2,8	3,11	3,1	3,44	-
100	1,52	1,8	1,65	2	1,81	2,4	1,98	2,6	2,19	-

Πίνακας 8.6

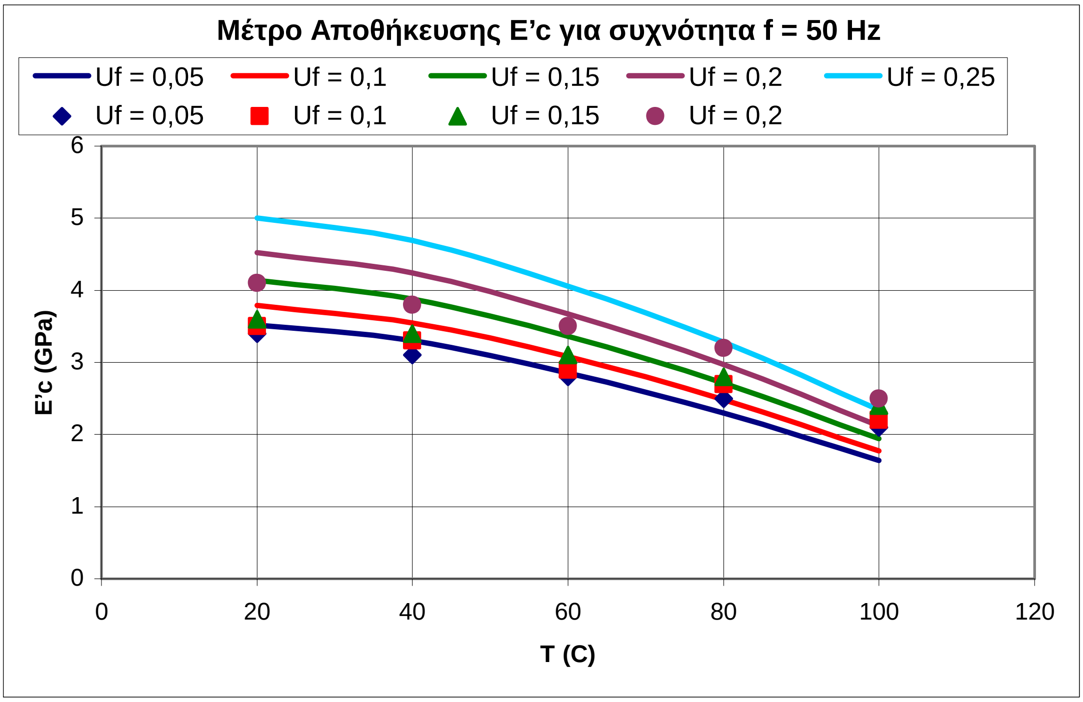


Διάγραμμα 8.6: Μεταβολή του μέτρου αποθήκευσης E'_c, συναρτήσει της θερμοκρασίας για διαφορετικές κατ' όγκο περιεκτικότητες εγκλείσματος.

Για σταθερή συχνότητα f = 50 Hz

f = 50 Hz	U_f = 0.05		U_f = 0.1		U_f = 0.15		U_f = 0.2		U_f = 0.25	
	Θεωρ.	Πειρ.	Θεωρ.	Πειρ.	Θεωρ.	Πειρ.	Θεωρ.	Πειρ.	Θεωρ.	Πειρ.
T (^{o}C)	E'_c (GPa)	E'_c (GPa)	E'_c (GPa)	E'_c (GPa)	E'_c (GPa)	E'_c (GPa)	E'_c (GPa)	E'_c (GPa)	E'_c (GPa)	E'_c (GPa)
20	3,52	3,4	3,79	3,5	4,14	3,6	4,52	4,1	5	-
40	3,3	3,1	3,55	3,3	3,88	3,4	4,24	3,8	4,69	-
60	2,85	2,8	3,08	2,9	3,36	3,1	3,67	3,5	4,06	-
80	2,3	2,5	2,48	2,7	2,71	2,8	2,97	3,2	3,28	-
100	1,64	2,1	1,77	2,2	1,94	2,4	2,12	2,5	2,34	-

Πίνακας 8.7



Διάγραμμα 8.7: Μεταβολή του μέτρου αποθήκευσης E'_c, συναρτήσει της θερμοκρασίας για διαφορετικές κατ' όγκο περιεκτικότητες εγκλείσματος.

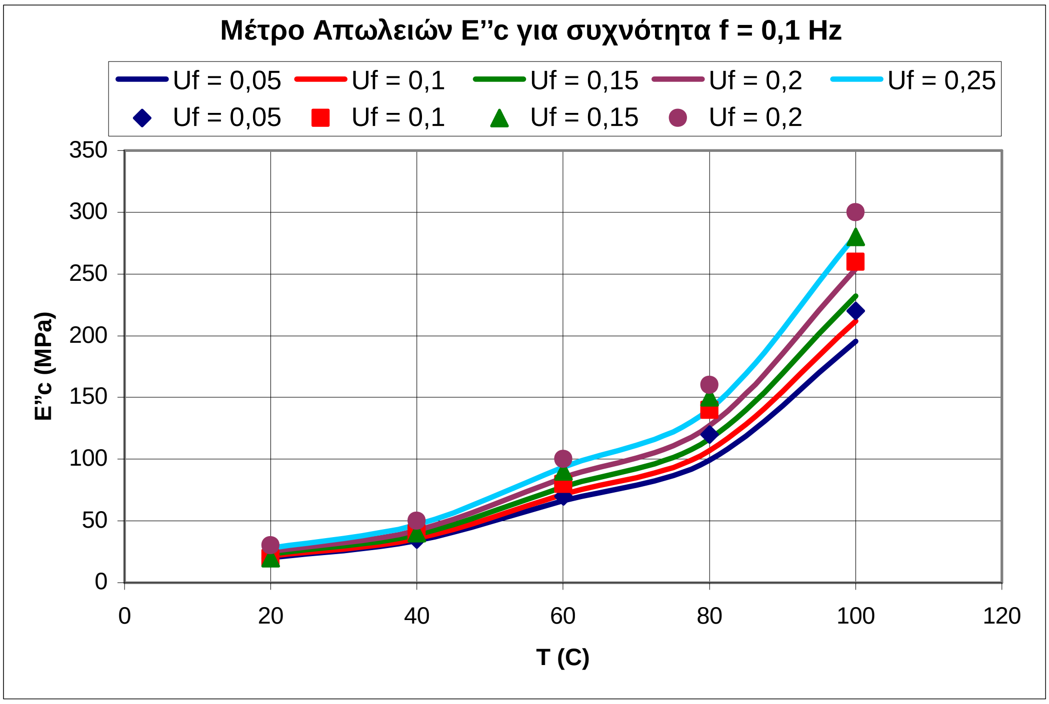
Στα διαγράμματα (8.4 – 8.5 – 8.6 – 8.7) παρουσιάζεται η μεταβολή του μέτρου αποθήκευσης **E'_c** συναρτήσει της θερμοκρασίας για διαφορετικές κατ' όγκο περιεκτικότητες εγκλείσματος. Από αυτά τα διαγράμματα παρατηρούμε ότι το μέτρο αποθήκευσης αυξάνεται με την αύξηση της κατ' όγκο περιεκτικότητας των εγκλεισμάτων. Για χαμηλές θερμοκρασίες αυτό το φαινόμενο είναι εντονότερο αφού το σύνθετο υλικό βρίσκεται στην υαλώδη κατάσταση του και έτσι η συμπεριφορά είναι πιο ελαστική. Στις υψηλότερες θερμοκρασίες το σύνθετο υλικό προσεγγίζει την μεταβατική περιοχή και έτσι μετατρέπεται σε βισκοέλαστικο. Συνεπώς η συμβολή των εγκλεισμάτων σιδήρου γίνεται πιο αδύνατη. Για τους ίδιους λόγους στις χαμηλότερες θερμοκρασίες τα πειραματικά αποτελέσματα συμφωνούν καλύτερα με τις θεωρητικές καμπύλες. Όμως, το πειραματικό μέτρο αποθήκευσης **E'_c** διαφοροποιείται από το θεωρητικό όσο η κατ' όγκο περιεκτικότητα των εγκλεισμάτων αυξάνεται. Ο κύριος λόγος αυτού του φαινόμενου φαίνεται να είναι ότι το θεωρητικό μοντέλο δεν λαμβάνει υπόψη του την αλληλεπίδραση την γειτονικών σωματιδίων. Επιπλέον, υπενθυμίζουμε ότι δεν υπάρχει τέλεια πρόσφυση μεταξύ εγκλεισμάτων και μήτρας, όπου μεταξύ τους υπάρχει η ενδιάμεση φάση, η οποία είναι μια περιοχή αλλοιωμένης μήτρας ατελούς συγκόλλησης και έντονων μηχανικών καταπόνησεων. Τέλος δημιουργούνται υψηλές και ιδιόμορφες τάσεις λόγω της γεωμετρίας των εγκλεισμάτων καθώς και της ύπαρξης κενών και μικρορωγμών. Η παρουσία των εγκλεισμάτων, από την άλλη μεριά, περιορίζει την επιμέρους μοριακή κινητικότητα της πολυμερούς μήτρας λόγω της απορρόφησης της αλληλεπίδρασης μεταξύ των επιφανειακών πολυμερών στρωμάτων και των εγκλεισμάτων.

- Επίσης για το δυναμικό μέτρο απωλειών ***E''_c*** έχουμε:

Για σταθερή συχνότητα f = 0.1 Hz

f = 0.1 Hz	U_f = 0.05		U_f = 0.1		U_f = 0.15		U_f = 0.2		U_f = 0.25	
	Θεωρ.	Πειρ.	Θεωρ.	Πειρ.	Θεωρ.	Πειρ.	Θεωρ.	Πειρ.	Θεωρ.	Πειρ.
T (^oC)	E''_c (MPa)	E''_c (MPa)	E''_c (MPa)	E''_c (MPa)	E''_c (MPa)	E''_c (MPa)	E''_c (MPa)	E''_c (MPa)	E''_c (MPa)	E''_c (MPa)
20	20,11	20	21,5	20	23,3	20	25,5	30	28,2	-
40	34,03	35	35,9	40	39	40	42,5	50	46,9	-
60	66,58	70	71,5	80	77,8	90	84,9	100	93,8	-
80	99,19	120	107	140	116,5	150	127,3	160	140,7	-
100	195,7	220	212	260	232,1	280	254	300	281,2	-

Πίνακας 8.8

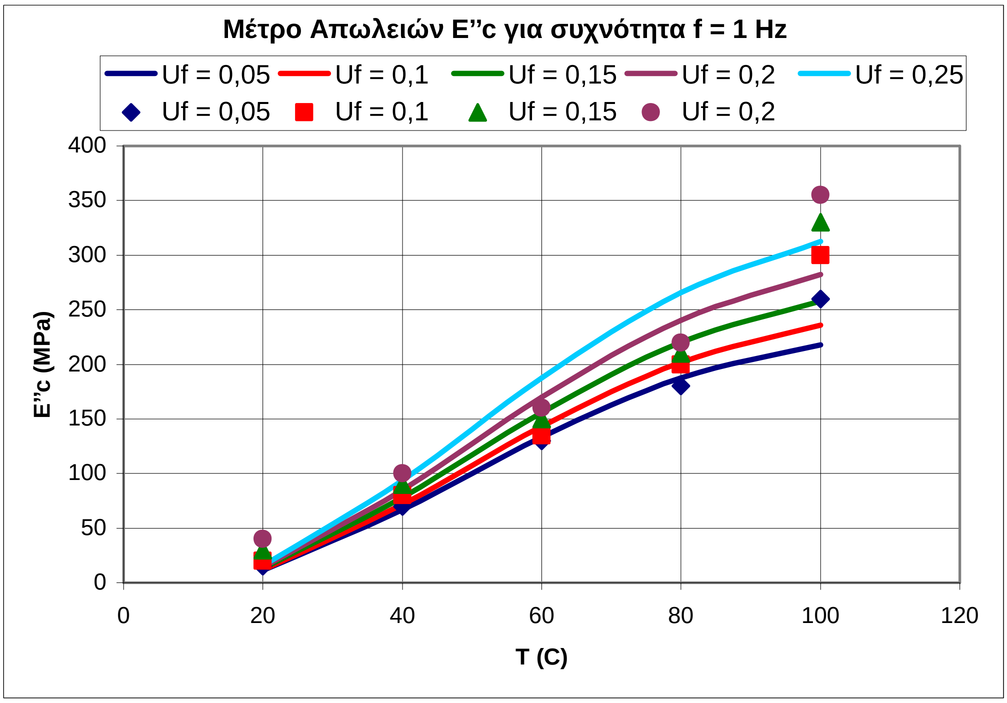


Διάγραμμα 8.8: Μεταβολή του μέτρου απωλειών E''$_c$, συναρτήσει της συχνότητας για διαφορετικές κατ' όγκο περιεκτικότητες εγκλείσματος.

Για σταθερή συχνότητα f = 1 Hz

f = 1 Hz	U_f = 0.05		U_f = 0.1		U_f = 0.15		U_f = 0.2		U_f = 0.25	
	Θεωρ.	Πειρ.	Θεωρ.	Πειρ.	Θεωρ.	Πειρ.	Θεωρ.	Πειρ.	Θεωρ.	Πειρ.
T (^oC)	E''$_c$ (MPa)	E''$_c$ (MPa)	E''$_c$ (MPa)	E''$_c$ (MPa)	E''$_c$ (MPa)	E''$_c$ (MPa)	E''$_c$ (MPa)	E''$_c$ (MPa)	E''$_c$ (MPa)	E''$_c$ (MPa)
20	11,19	15	11,95	20	13	30	14,16	40	15,64	-
40	66,88	70	71,61	80	77,92	90	84,95	100	93,85	-
60	133,2	130	142,9	135	155,6	150	169,8	160	187,7	-
80	187,6	180	201,9	200	220,2	210	240,4	220	265,8	-
100	217,7	260	235,7	300	258	330	282,3	355	312,5	-

Πίνακας 8.9

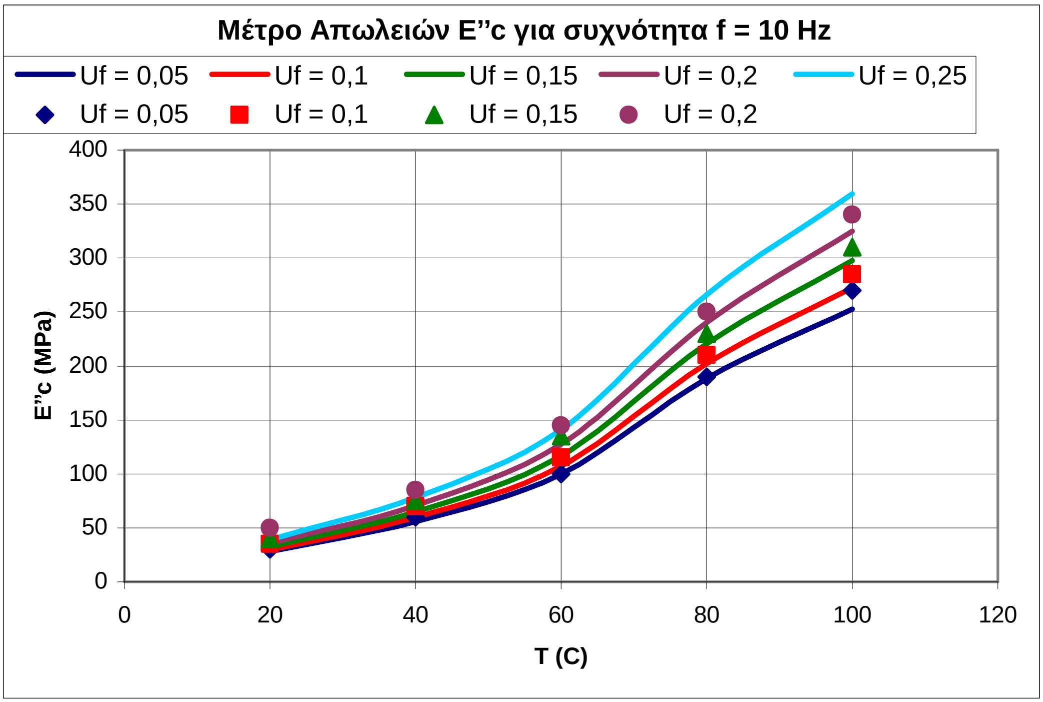


Διάγραμμα 8.9: Μεταβολή του μέτρου απωλειών E’’$_c$, συναρτήσει της συχνότητας για διαφορετικές κατ’ όγκο περιεκτικότητες εγκλείσματος.

Για σταθερή συχνότητα f = 10 Hz

f = 10 Hz	U_f = 0.05		U_f = 0.1		U_f = 0.15		U_f = 0.2		U_f = 0.25	
	Θεωρ.	Πειρ.	Θεωρ.	Πειρ.	Θεωρ.	Πειρ.	Θεωρ.	Πειρ.	Θεωρ.	Πειρ.
T (^{o}C)	E’’$_c$ (MPa)	E’’$_c$ (MPa)	E’’$_c$ (MPa)	E’’$_c$ (MPa)	E’’$_c$ (MPa)	E’’$_c$ (MPa)	E’’$_c$ (MPa)	E’’$_c$ (MPa)	E’’$_c$ (MPa)	E’’$_c$ (MPa)
20	27,96	30	29,88	35	32,5	40	35,41	50	39,11	-
40	55,8	60	59,71	70	64,96	75	70,8	85	78,21	-
60	100	100	107,3	115	116,8	135	127,4	145	140,8	-
80	188,4	190	202,4	210	220,4	230	240,5	250	265,8	-
100	252,6	270	272,5	285	297,5	310	325	340	359,5	-

Πίνακας 8.10

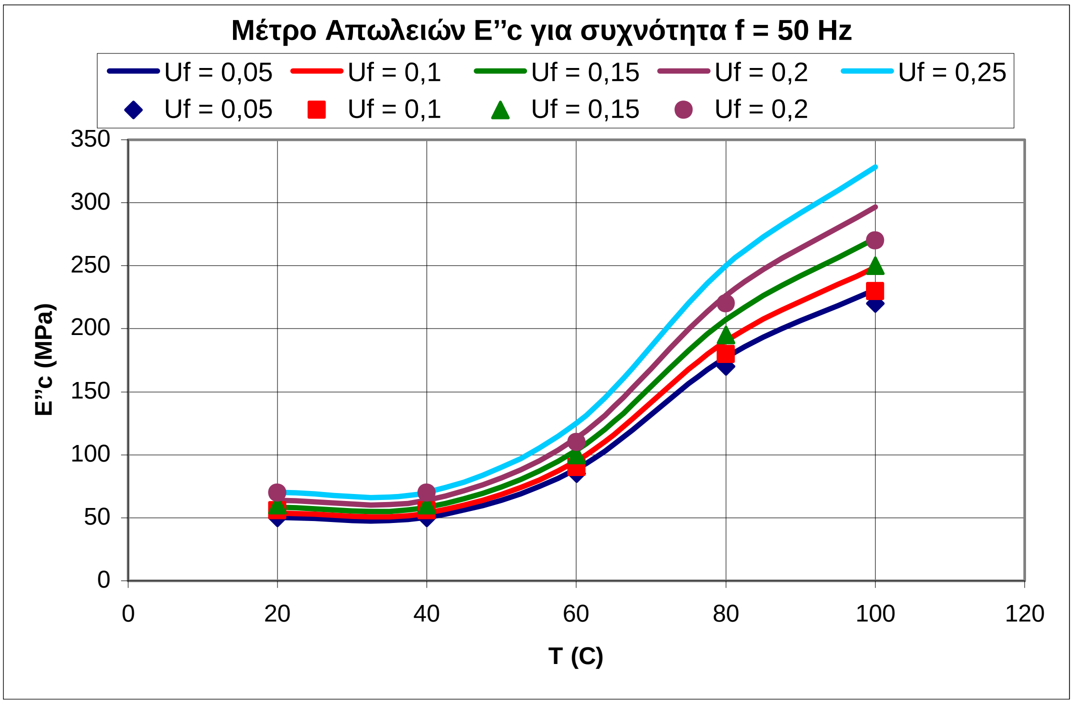


Διάγραμμα 8.10: Μεταβολή του μέτρου απωλειών E''$_c$, συναρτήσει της συχνότητας για διαφορετικές κατ' όγκο περιεκτικότητες εγκλείσματος.

Για σταθερή συχνότητα f = 50 Hz

f = 50 Hz	U_f = 0.05		U_f = 0.1		U_f = 0.15		U_f = 0.2		U_f = 0.25	
	Θεωρ.	Πειρ.	Θεωρ.	Πειρ.	Θεωρ.	Πειρ.	Θεωρ.	Πειρ.	Θεωρ.	Πειρ.
T (^{o}C)	E''$_c$ (MPa)	E''$_c$ (MPa)	E''$_c$ (MPa)	E''$_c$ (MPa)	E''$_c$ (MPa)	E''$_c$ (MPa)	E''$_c$ (MPa)	E''$_c$ (MPa)	E''$_c$ (MPa)	E''$_c$ (MPa)
20	50,45	50	53,83	56	58,54	60	63,76	70	70,41	-
40	50,33	50	53,79	56	58,5	60	63,74	70	70,4	-
60	89,08	85	95,44	90	103,9	100	113,2	110	125,1	-
80	177,1	170	190,4	180	207,4	195	226,3	220	250,2	-
100	230,9	220	249	230	271,7	250	296,8	270	328,3	-

Πίνακας 8.11



Διάγραμμα 8.11: Μεταβολή του μέτρου απωλειών E''$_c$, συναρτήσει της συχνότητας για διαφορετικές κατ' όγκο περιεκτικότητες εγκλείσματος.

Στα διαγράμματα (8.8 – 8.9 – 8.10 – 8.11) παρουσιάζεται η μεταβολή του μέτρου απωλειών **E''$_c$** συναρτήσει της θερμοκρασίας για διαφορετικές κατ' όγκο περιεκτικότητες εγκλείσματος. Παρατηρούμε ότι το μέτρο απωλειών **E''$_c$** αυξάνεται με την αύξηση της κατ' όγκο περιεκτικότητας των εγκλεισμάτων, καθώς και την αύξηση της θερμοκρασίας και ότι στην περιοχή της υαλώδους κατάστασης, δηλαδή σε χαμηλότερες θερμοκρασίες, έχουμε καλύτερη συμφωνία μεταξύ πειραματικών και θεωρητικών δεδομένων. Επίσης παρατηρούμε ότι στις υψηλότερες θερμοκρασίες το μέτρο απωλειών **E''$_c$** παίρνει πολύ μεγάλες τιμές. Επιπλέον, στις υψηλότερες θερμοκρασίες το σύνθετο υλικό προσεγγίζει την μεταβατική περιοχή και έτσι μετατρέπεται σε βισκοέλαστικο. Συνεπώς η συμβολή των εγκλεισμάτων σιδήρου γίνεται πιο αδύνατη και για αυτό τον λόγο, στις χαμηλότερες θερμοκρασίες τα πειραματικά αποτελέσματα συμφωνούν καλύτερα με τα θεωρητικά αποτελέσματα. Όμως, το πειραματικό μέτρο απωλειών **E''$_c$** διαφοροποιείται από το θεωρητικό όσο η κατ' όγκο περιεκτικότητα των εγκλεισμάτων αυξάνεται. Ο κύριος λόγος αυτού του φαινόμενου φαίνεται να είναι ότι το θεωρητικό μοντέλο δεν λαμβάνει υπόψη του την αλληλεπίδραση την γειτονικών σωματιδίων. Επιπλέον, υπενθυμίζουμε ότι δεν υπάρχει τέλεια πρόσφυση μεταξύ εγκλεισμάτων και μήτρας, όπου μεταξύ τους υπάρχει η ενδιάμεση φάση, η οποία είναι μια περιοχή αλλοιωμένης μήτρας ατελούς συγκόλλησης και μηχανικών καταπόνησεων. Τέλος δημιουργούνται υψηλές και ιδιόμορφες τάσεις λόγω της γεωμετρίας των εγκλεισμάτων καθώς και της ύπαρξης κενών και μικρορωγμών. Η παρουσία των εγκλεισμάτων, από την άλλη μεριά, περιορίζει την επιμέρους μοριακή κινητικότητα της πολυμερούς μήτρας λόγω της απορρόφησης της αλληλεπίδρασης μεταξύ των επιφανειακών πολυμερών στρωμάτων και των εγκλεισμάτων.

8.4 Σύγκριση των αποτελεσμάτων του μοντέλου της ενδιάμεσης φάσης με μοντέλα άλλων ερευνητών

Στο κεφάλαιο 3 και συγκεκριμένα στην παράγραφο 3.3 αναφέρουμε, στις σχέσεις (3.6 – 3.21), όλες εκείνες τις εξισώσεις που έχουν προταθεί από διάφορους ερευνητές, οι οποίοι έχουν υπολογίσει το στατικό μέτρο ελαστικότητας ***E*c** ενός σύνθετου υλικού.

Για να μπορέσουμε να συγκρίνουμε τώρα τα αποτελέσματα που έχουμε υπολογίσει για τα δυναμικά μετρά αποθήκευσης ***E'*c** και απωλειών ***E''*c**, με το μοντέλο της ενδιάμεσης φάσης που έχουμε αναπτύξει στην παρούσα εργασία, με αυτά των διαφόρων ερευνητών που έχουμε αναφέρει στην παράγραφο 3.3, πρέπει να εφαρμόσουμε στις σχέσεις (3.6 – 3.21) την αρχή της αντιστοιχίας. Χρησιμοποιώντας αυτή την αρχή, αντιστοιχούμε το στατικό μέτρο ελαστικότητας με το αντίστοιχο δυναμικό μέτρο $\left(E_j \quad \rightarrow \quad E_j^* = E_j' + iE_j''\right)$.

Έτσι η εξίσωση (3.6) του Einstein [3,4,5] γίνεται:

$$E_c' = \left(1 + 2.5U_f\right)E_m' \text{ και } E_c'' = \left(1 + 2.5U_f\right)E_m'' \qquad (8.68\ \alpha,\beta)$$

Όμοια η εξίσωση (3.7) των Guth και Smallwood [6,7] μετασχηματίζεται ως εξής:

$$E_c' = E_m'\left(1 + 2.5U_f + 14.1U_f^2\right) \text{ και } E_c'' = E_m''\left(1 + 2.5U_f + 14.1U_f^2\right) \qquad (8.69\ \alpha,\beta)$$

Επίσης η έκφραση (3.9) του Kerner [8] δίνεται από τους τύπους:

$$E_c' = \left\{1 + \frac{U_f}{U_m}\left[\frac{15\left(1-v_m\right)}{8-10v_m}\right]\right\}E_m' \qquad (8.70\ \alpha)$$

και

$$E_c'' = \left\{1 + \frac{U_f}{U_m}\left[\frac{15\left(1-v_m\right)}{8-10v_m}\right]\right\}E_m'' \qquad (8.70\ \beta)$$

Όμοια η εξίσωση (3.15) του Mooney [11] σύμφωνα με την αρχή της αντιστοιχίας γίνεται:

$$E_c' = \left[\exp\left(\frac{2.5U_f}{1-SU_f}\right)\right]E_m' \text{ και } E_c'' = \left[\exp\left(\frac{2.5U_f}{1-SU_f}\right)\right]E_m'' \qquad (8.71\ α,β)$$

όπου S ορίζεται από τη σχέση :

$$S = \frac{\text{¨~§¬ό«£¬-s ό¥©-s £¥©ª£ί±«~²-s}}{\text{®°~¥«~²§©όs ό¥©-s £¥©ª£ί±«~²-s}}$$

Η ελάχιστη τιμή του είναι η μονάδα. Σύμφωνα με πειραματικές μετρήσεις το S κυμαίνεται από 1.2 μέχρι 2.

Όσον αφορά την εξίσωση (3.12) των Sato και Furukawa [9] μετασχηματίζεται ως εξής:

$$E_c' = T \cdot E_m' \quad \text{και} \quad E_c'' = T \cdot E_m'' \qquad (8.72\ α,β)$$

Όπου $T = \left\{\left[1+\frac{1}{2}\frac{¥^2}{1-¥}\right]\left[1-\frac{¥^3 k}{3}\left(\frac{1+¥-¥^2}{1-¥+¥^2}\right)\right] - \frac{¥^2 k}{3(1-¥)}\left(\frac{1+¥-¥^2}{1-¥+¥^2}\right)\right\}$ (8.73)

Η σχέση (3.13) από το μοντέλο του Voigt με την αρχή της αντιστοίχησης μας δίνει:

$$E_c' = \frac{E_f'\left[E_m'\left(E_m'U_f + E_f'U_m\right) + E_m''^2 U_f\right]}{\left(E_m'U_f + E_f'U_m\right)^2 + \left(E_m''U_f\right)^2} \qquad (8.74\ α)$$

και

$$E_c' = \frac{E_f'\left[E_m''\left(E_m'U_f + E_f'U_m\right) - E_m'E_m''U_f\right]}{\left(E_m'U_f + E_f'U_m\right)^2 + \left(E_m''U_f\right)^2} \qquad (8.74\ β)$$

Τέλος η εξίσωση (3.21) του Takayanagi [16] μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\frac{E_c'}{E_c'^2 + E_c''^2} = \frac{¨\left[(1-k)E_m' + kE_f'\right]}{\left[(1-k)E_m' + kE_f'\right]^2 + \left[(1-k)E_m''\right]^2} + \frac{(1-¨)E_m'}{E_m'^2 + E_m''^2} = P \qquad (8.75\ α)$$

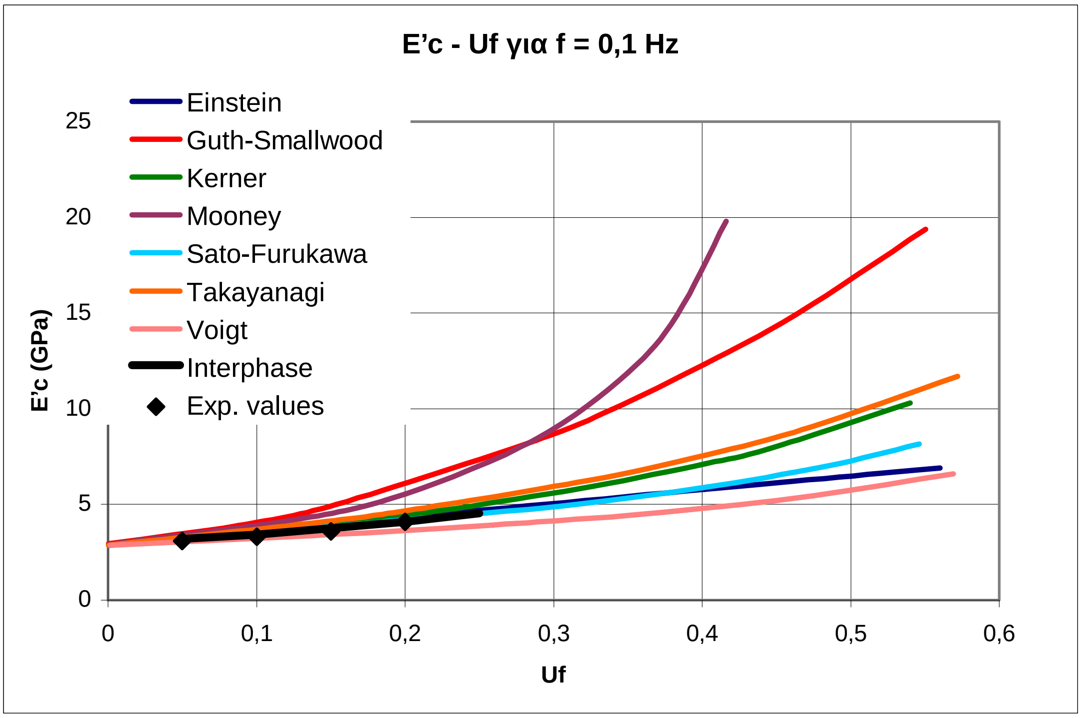
και

$$\frac{E_c'}{E_c'^2+E_c''^2}=\frac{\text{¨}\left[(1-k)E_m''\right]}{\left[(1-k)E_m'+kE_f'\right]^2+\left[(1-k)E_m''\right]^2}+\frac{(1-\text{¨})E_m''}{E_m'^2+E_m''^2}=Q \qquad (8.75\ \beta)$$

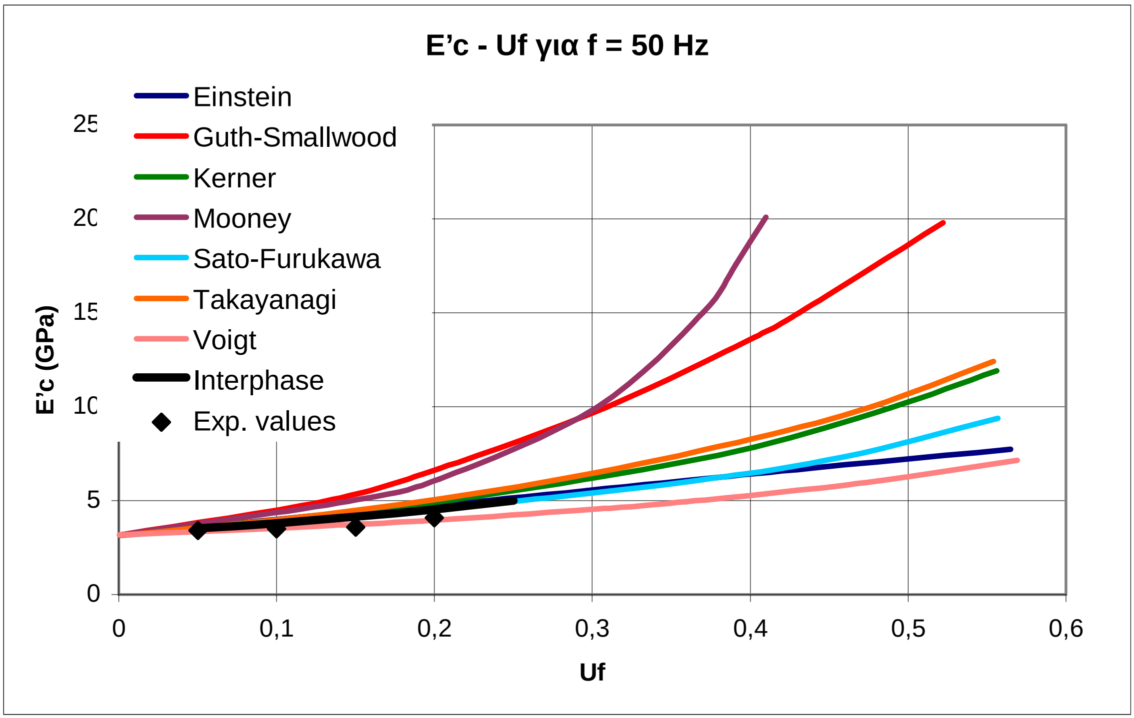
Και επιλύοντας το παραπάνω σύστημα έχουμε:

$$E_c'=\frac{P}{P^2+Q^2} \quad \text{και} \quad E_c''=\frac{Q}{P^2+Q^2} \qquad (8.76\ \alpha,\beta)$$

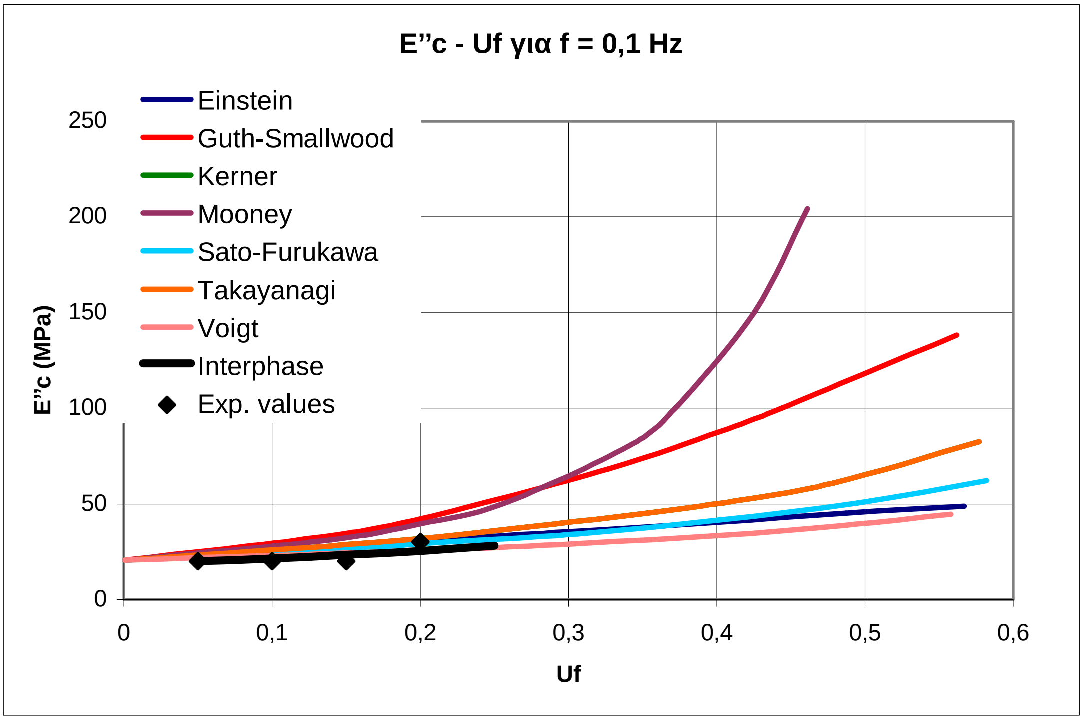
Σύμφωνα με τις παραπάνω σχέσεις (8.68 – 8.76) των διαφόρων ερευνητών, τα αποτελέσματα του θεωρητικού μοντέλου που έχουμε παρουσιάσει στην προηγούμενη παράγραφο 8.2, καθώς και τα πειραματικά δεδομένα, παρουσιάζουμε στα ακόλουθα διαγράμματα την επίδραση της μεταβολής της κατ' όγκο περιεκτικότητας των εγκλεισμάτων στα δυναμικά μέτρα αποθήκευσης **E'$_c$** και απωλειών **E''$_c$**, συγκρίνοντας τις καμπύλες ενδεικτικά για τις συχνότητες f=0.1 Hz και f = 50 Hz αντίστοιχα.



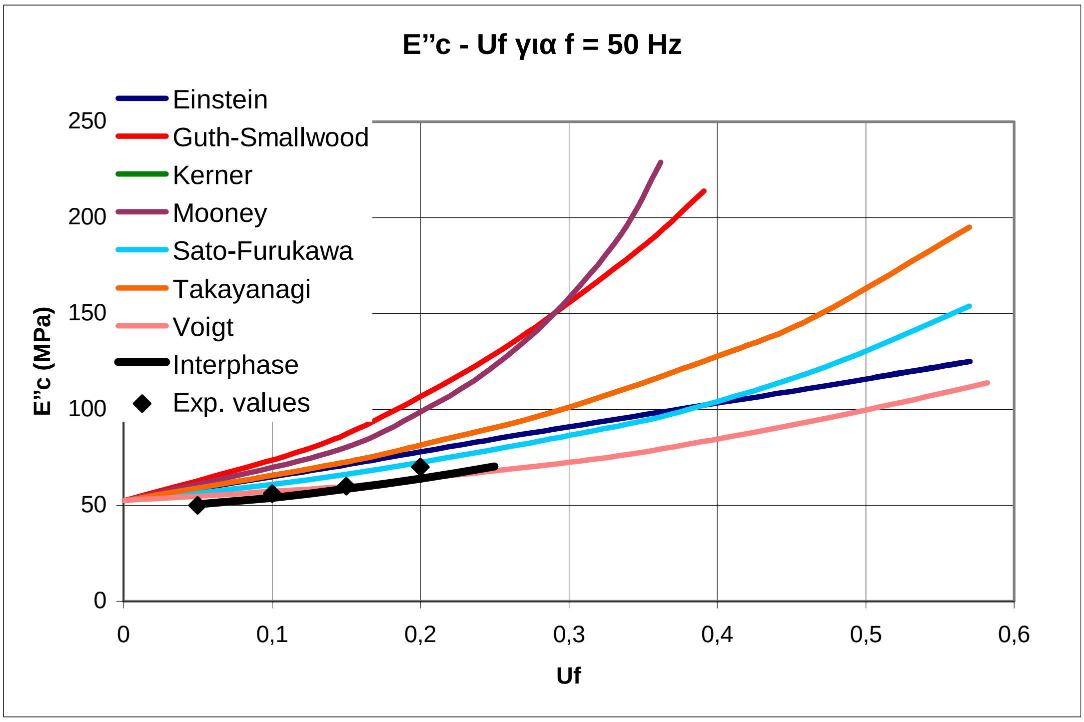
Διάγραμμα 8.12: Σύγκριση του μέτρου Αποθήκευσης E'$_c$ των μοντέλων των διαφόρων ερευνητών συναρτήσει της κατ' όγκο περιεκτικότητας εγκλείσματος για συχνότητα f = 0.1 Hz.



Διάγραμμα 8.13: Σύγκριση του μέτρου Αποθήκευσης E'_c των μοντέλων των διαφόρων ερευνητών συναρτήσει της κατ' όγκο περιεκτικότητας εγκλείσματος για συχνότητα f = 50 Hz.



Διάγραμμα 8.14: Σύγκριση του μέτρου Απωλειών E''_c των μοντέλων των διαφόρων ερευνητών συναρτήσει της κατ' όγκο περιεκτικότητας εγκλείσματος για συχνότητα f = 0.1 Hz.



Διάγραμμα 8.15: Σύγκριση του μέτρου Απωλειών E''_c των μοντέλων των διαφόρων ερευνητών συναρτήσει της κατ' όγκο περιεκτικότητας εγκλείσματος για συχνότητα f = 50 Hz.

Στα παραπάνω διαγράμματα (8.12 – 8.13) παρουσιάζεται το δυναμικό μέτρο αποθήκευσης E'_c και στα διαγράμματα (8.14 – 8.15) το δυναμικό μέτρο απωλειών E''_c για τα διάφορα μοντέλα της βιβλιογραφίας, (όπου υπολογίζονται τα δυναμικά μέτρα σύμφωνα με τις σχέσεις (8.68 – 8.76) αντίστοιχα), που έχουμε περιγράψει προηγουμένως και τα συγκρίνουμε με το θεωρητικό μοντέλο της ενδιάμεσης φάσης, καθώς επίσης και με τα πειραματικά μας δεδομένα.

Παρατηρούμε ότι με την αύξηση της κατ' όγκο περιεκτικότητας των εγκλεισμάτων στο σύνθετο υλικό και τα δύο δυναμικά μέτρα (αποθήκευσης E'_c και απωλειών E''_c) αυξάνονται.

Η βασική αιτία ύπαρξης της ενδιάμεσης φάσης είναι η αύξηση του βαθμού πολυμερισμού της μήτρας στα επιφανειακά στρώματα κατά την επαφή της με τα εγκλείσματα. Είναι γνωστό ότι στα επιφανειακά στρώματα η μοριακή κινητικότητα των αλυσίδων και των τμημάτων μειώνεται ως αποτέλεσμα λόγω περιορισμών της διαμόρφωσης. Η ύπαρξη ενός τέτοιου σκληρού στρώματος μπορεί να θεωρηθεί σαν μια άλλη αιτία της αύξησης των δύο δυναμικών μέτρων ως αποτέλεσμα της εμφανούς αύξησης των εγκλεισμάτων.

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα που προκύπτουν από το μοντέλο της ενδιάμεσης φάσης με τις υπάρχουσες θεωρίες παρατηρούμε ότι το μοντέλο Voigt είναι το χαμηλότερο. Οι ημι-εμπειρικές εκφράσεις των Mooney και Guth - Smallwood δίνουν πολύ υψηλές τιμές. Επίσης, παρόλο που το μοντέλο του Einstein δίνει πολύ καλά αποτελέσματα, δεν μπορεί να θεωρηθεί τόσο ρεαλιστικό, λόγω της γραμμικής μεταβολής του μέτρου αποθήκευσης και απωλειών ως προς την μεταβολή της κατ' όγκου περιεκτικότητας των εγκλεισμάτων. Το μοντέλο της ενδιάμεσης φάσης παρέχει ικανοποιητική συμφωνία με τα πειραματικά αποτελέσματα για χαμηλές κατ' όγκο περιεκτικότητες. Επίσης, καλή συμφωνία παρέχεται στις εκφράσεις που έδωσαν οι Takayanagi, Kerner και Sato – Furukawa. Επιπλέον μπορεί να παρατηρηθεί, ότι τα αποτελέσματα του μοντέλου της ενδιάμεσης φάσης είναι πολύ κοντά με εκείνα που δίνουν οι Sato – Furukawa για κατ' όγκο περιεκτικότητες των εγκλεισμάτων έως $U_f = 0.25$. Τέλος οι προβλέψεις των Takayanagi και Kerner συμπίπτουν για όλες τις κατ' όγκο περιεκτικότητες εγκλεισμάτων.

Στα διαγράμματα 8.14 και 8.15 για το δυναμικό μέτρο απωλειών E''_c, παρατηρούμε ότι η συμφωνία μεταξύ των θεωρητικών εκτιμήσεων του μοντέλου της ενδιάμεσης φάσης και των πειραματικών αποτελεσμάτων χάνεται με την με την αύξηση της κατ' όγκου περιεκτικότητας των εγκλεισμάτων.

Η διαφωνία μεταξύ των θεωρητικών προβλέψεων με τα πειραματικά αποτελέσματα τόσο για το μέτρο αποθήκευσης E'_c, όσο και για το μέτρο απωλειών E''_c έχει διαπιστωθεί και οι πιθανές αιτίες και διορθώσεις έχουν προταθεί στην βιβλιογραφία. Αυτό το πρόβλημα είναι συνήθως σοβαρό για μεγάλες κατ' όγκο περιεκτικότητες εγκλεισμάτων.

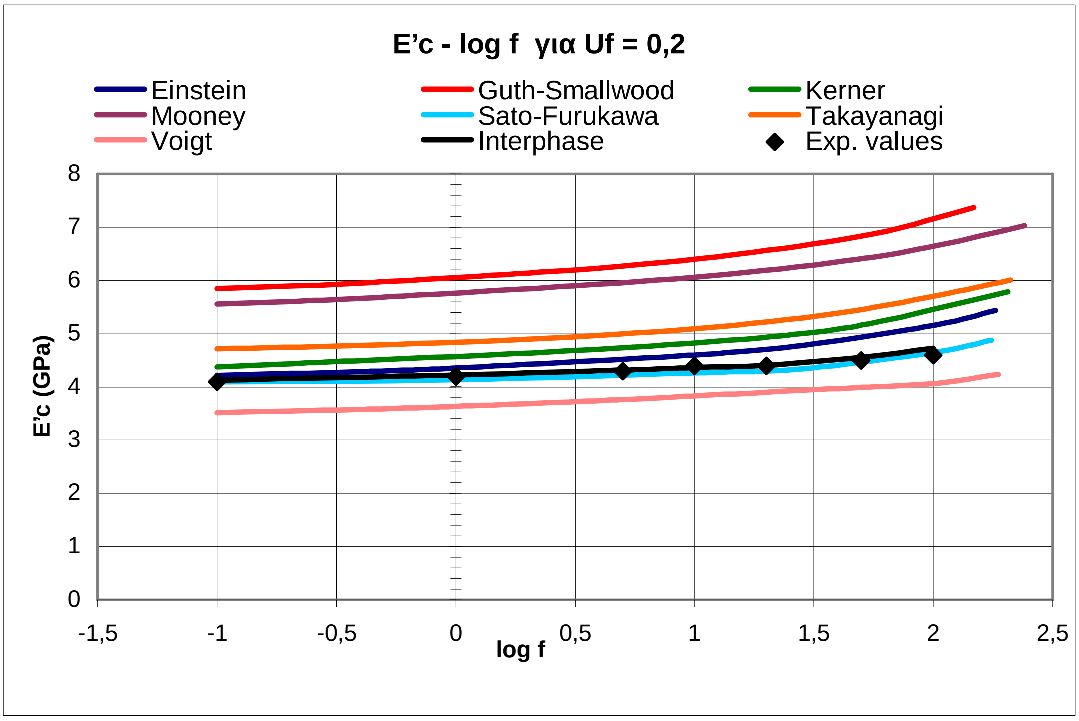
Ο λόγος έλλειψης συμφωνίας των διαφόρων θεωρητικών μοντέλων και των πραγματικών υλικών μπορεί να αποδοθεί σε τουλάχιστον δύο λόγους που σχετίζονται με την έλλειψη της τελειότητας των πραγματικών υλικών :

1. Στην πρόσφυση των επιφανειών των εγκλεισμάτων με αυτήν της μήτρας.
2. Στην ανομοιόμορφη συσσώρευση των εγκλεισμάτων στο εσωτερικό της μήτρας που οφείλεται στη φύσης της μήτρας.

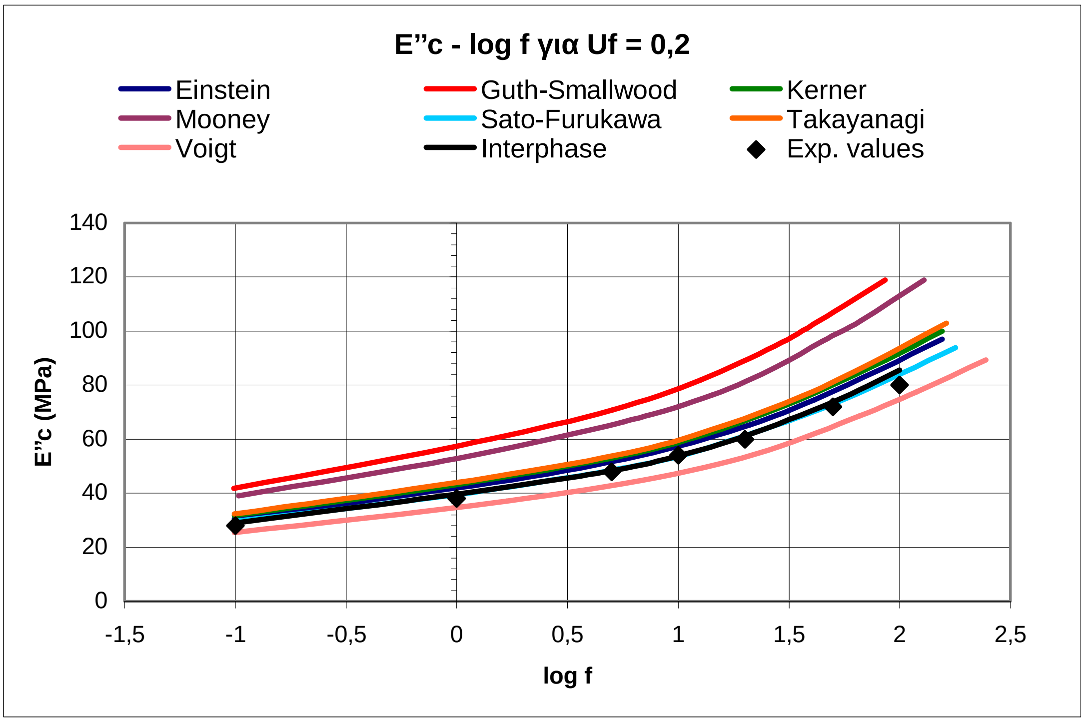
Κάθε ένας από τους παραπάνω λόγους θεωρείται σαν εξήγηση για την αποτυχία του θεωρητικού μοντέλου να προβλέψει με ακρίβεια το μέτρο ελαστικότητας του σύνθετου υλικού. Λαμβάνοντας υπόψη τώρα την ενδιάμεση φάση στο μοντέλο μας, σκοπός μας είναι να δείξουμε την έλλειψη τέλειας επαφής των εγκλεισμάτων με την μήτρα και συνεπώς ατέλεια του υλικού. Η ενδιάμεση φάση για παράδειγμα, εξασφαλίζει την συνέχεια των τάσεων και των παραμορφώσεων.

Άλλο ένα σημείο που μπορούμε να παρατηρήσουμε στα διαγράμματα (8.12 - 8.15) είναι οι διαφορές μεταξύ των θεωρητικών προβλέψεων για υψηλότερες κατ' όγκο περιεκτικότητες. Το φαινόμενο αυτό εμφανίζεται γιατί τα πεδία τάσεων και παραμορφώσεων μεταξύ των γειτονικών μορίων έχουν ισχυρότερη αλληλεπίδραση και ως εκ τούτου οι θεωρητικές εκφράσεις δεν μπορούν να εφαρμοστούν με ακρίβεια.

Στα ακόλουθα διαγράμματα (8.16 – 8.17) παρουσιάζεται η μεταβολή του μέτρου αποθήκευσης E'_c και μέτρου απωλειών E''c συναρτήσει της συχνότητας f για σταθερή κατ' όγκο περιεκτικότητα εγκλείσματος U_f = 0.20 όπου επαληθεύονται με μεγαλύτερη σαφήνεια τα συμπεράσματα τα οποία αναπτύξαμε προηγουμένως.



Διάγραμμα 8.15 : Σύγκριση του μέτρου αποθήκευσης E'_c των μοντέλων των διαφόρων ερευνητών συναρτήσει της συχνότητα f για κατ' όγκο περιεκτικότητας εγκλεισμάτων U_f = 0.20.



Διάγραμμα 8.16 : Σύγκριση του μέτρου απωλειών E''_c των μοντέλων των διαφόρων ερευνητών συναρτήσει της συχνότητα f για κατ' όγκο περιεκτικότητας εγκλεισμάτων U_f = 0.20.

Σε αυτά τα διαγράμματα παρατηρούμε ότι οι υψηλότερες τιμές έχουν προβλεφθεί από τους Mooney και Guth – Smallwood ενώ οι χαμηλότερες λαμβάνονται από το μοντέλο του Voigt. Επιπλέον μπορεί να θεωρηθεί ότι υπάρχει καλή συμφωνία μεταξύ τον μοντέλων Takayanagi και Kerner, καθώς επίσης μεταξύ των θεωρητικού μοντέλου της ενδιάμεσης φάσης και του μοντέλου των Sato – Furukawa. Η τελευταία αυτή παρατήρηση είναι αναμενόμενη επειδή το μοντέλο των Sato – Furukawa λαμβάνει υπόψη την επίδραση της ουσιαστικής πρόσφυσης των εγκλεισμάτων και της μήτρας, χρησιμοποιώντας τον συντελεστή πρόσφυσης k όπως περιγράφεται από την σχέση (8.72).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Το πρόβλημα της επίδρασης των διαφόρων παραμέτρων στις ελαστικές σταθερές ενός σύνθετου υλικού εξετάσθηκε στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία με τη βοήθεια ενός αρχικά τετραφασικού μοντέλου και το οποίο λαμβάνει υπόψη την επίδραση της προσφύσεως κόκκων και μήτρας με τη μορφή της ενδιάμεσης φάσης, μια περιοχής αλλοιωμένης μήτρας, όπως επίσης και την επίδραση της γειτνιάσεως των εγκλεισμάτων. Το μοντέλο αυτό προέκυψε με τη θεώρηση της κυβικής διάταξης των εγκλεισμάτων στο χώρο και στη συνέχεια με τη θεώρηση της ενδιάμεσης φάσης μεταξύ των εγκλεισμάτων και της μήτρας, εξελίσσεται σε ένα επταφασικό μοντέλο.

Χρησιμοποιώντας αυτό το επταφασικό μοντέλο και με τη βοήθεια της θεωρίας ελαστικότητας βρέθηκαν οι προσεγγιστικές εκφράσεις για τα στατικά μέτρα ελαστικότητας (μέτρο ελαστικότητας E, λόγος Poisson ν) του σύνθετου υλικού. Στην συνέχεια με τη χρήση της αρχής της αντιστοιχίας υπολογίσθηκαν τα δυναμικά μέτρα ελαστικότητας (μέτρο αποθήκευσης E'_c και μέτρο απωλειών E''_c). Οι θεωρητικές τιμές που προέκυψαν από τη θεωρητική ανάλυση συγκρίθηκαν με τις τιμές άλλων ερευνητών και με πειραματικά αποτελέσματα που ελήφθησαν από στατικά πειράματα εφελκυσμού και από πειράματα ταλαντώσεων σε διαφορετικές συχνότητες και σε συνθήκες περιβάλλοντος, από δοκίμια που αποτελούνται από κόκκους σιδήρου και εποξειδική ρητίνη. Η σύγκριση δείχνει ότι το μοντέλο που αναπτύχθηκε προσεγγίζει σε μεγάλο βαθμό την πραγματικότητα και ότι οι επιδράσεις την γειτνιάσεως των κόκκων καθώς και η δημιουργία της ενδιάμεσης φάσης, δημιουργούν κάποιες μικρές αποκλίσεις.

Τα γενικά συμπεράσματα στα οποία καταλήγουμε είναι τα εξής:

- Τα πειραματικά δεδομένα πρακτικά προσεγγίζονται από τα αποτελέσματα που πήραμε από το επταφασικό μοντέλο που θεωρήσαμε για τον υπολογισμό τόσο του δυναμικού μέτρου αποθήκευσης E_c' του σύνθετου υλικού, όσο και του μέτρου απωλειών E_c''. Επομένως οι τύποι του επταφασικού μοντέλου που κατασκευάσαμε μπορούν να χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των E_c' και E_c'', προσδίδοντας μάλιστα και μεγάλη ακρίβεια αποτελεσμάτων.

- Αυξανομένης της κατ' όγκου περιεκτικότητας σε εγκλείσματα για σταθερή συχνότητα φόρτισης ή σταθερής θερμοκρασίας, αυξάνεται τόσο το δυναμικό μέτρο αποθήκευσης, όσο και το μέτρο απωλειών του σύνθετου υλικού.

- Αυξανομένης της συχνότητας της ημιτονοειδούς φόρτισης, για σταθερή θερμοκρασία και για σταθερή κατ' όγκο περιεκτικότητα σε εγκλείσματα, αυξάνεται τόσο το δυναμικό μέτρο αποθήκευσης, όσο και το μέτρο απωλειών του σύνθετου υλικού.

- Αυξανομένης της θερμοκρασίας, για σταθερή συχνότητα και για σταθερή κατ' όγκο περιεκτικότητα σε εγκλείσματα, μειώνεται το δυναμικό μέτρο αποθήκευσης E'_c του σύνθετου υλικού ενώ το μέτρο απωλειών E''_c αυξάνεται, ενώ φαίνεται πως το επταφασικό μοντέλο προσεγγίζει με ικανοποιητική ακρίβεια τα πειραματικά δεδομένα.

- Το επταφασικό μοντέλο, προσεγγίζει καλύτερα από κάποια άλλα θεωρητικά μοντέλα (Einstein, Guth - Smallwood, Kerner, Mooney, Takayanagi, Sato - Furukawa, Voigt) τα πειραματικά δεδομένα που αφορούν τις σχέσεις :

    - των E'_c - U_f με σταθερή συχνότητα φόρτισης
    - των E''_c - U_f με σταθερή συχνότητα φόρτισης
    - των E'_c - logf με σταθερή κατ' όγκο περιεκτικότητα σε εγκλείσματα
    - των E''_c - logf με σταθερή κατ' όγκο περιεκτικότητα σε εγκλείσματα

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. **Counto (1964)**, Mag. Concr. Res 16, p. 129.
2. **Paul (1960)**, Trans Amer. Inst. Mech. Eng. 36, p. 218.
3. **A. Einstein (1905)**, "Uber die von Molekularkinetischen theorie der. Warme Geforderte Bewegung von in Ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen", Ann Physic, Vol. 17, p. 549.
4. **A. Einstein (1906)**, "Eine Neue Bestimmung der Molekuldimensionen", Ann Physic, Vol 19, p. 289.
5. **A. Einstein (1911)**, "Berichtigung zu meiner Arbeit Eine neue Bestimmung der Molekuldimensionen", Vol. 34, p. 591.
6. **Guth (1945)**, J. Appl. Phys 15, p. 20.
7. **H.M. Smallwood (1944)**, "Limiting Law of the Reinforcement of Rubber", Jnl.Appl. Phys, Vol. 15, pp. 758 – 762.
8. **E.H. Kerner (1956)**, "The Elastic and Thermoelastic Properties of Composite Media", Proc. Phys. Soc. 698, pp. 808 – 813.
9. **Y. Sato and Furukawa (1962)**, "A Molecular Theory of Filler Reinforcement based upon the conception of the internal Deformation", Rubber Chem. Technol., Vol. 35, pp. 857 – 862.
10. **K. Takahashi, M. Ikeda, K. Harakawa and K. Tanaka (1978)**, "Analysis of the Effect of Intefacial Slippage on the Elastic Moduli of a Particle – Filled Polymer", Jnl. Pol. Phys. Ed., Vol. 16, pp. 415 – 421.
11. **M Mooney (1951)**, "The Viscosity of a Concentrated Suspension of Spherical Particles", Jnl. Colloid Sci. Vol. 6, pp. 162 – 169.
12. **H. Eilers and Van Dyck (1941)**, kolloid Z, Vol. 97, pp. 313-318.
13. **P.S. Theocharis (1984)**, "The Adhesion Quality and the Extent of the Mesophase in Particulates", Jnl. of Reinforced Plastics and Composites, Vol. 3, pp. 2304 – 2331.
14. **P.S. Theocharis (1985)**, "The Mesophase and its influence on the Mechanical Behaviour of Composites", Advances in Polymer Science 66, Springer - Verlag Berlin, pp. 149 – 186.
15. **P.S. Theocharis and E. Sideridis (1984)**, "The Elastic Moduli of Particulate – Filled Polymers", Journal of Applied Polymer Science, Vol. 29, pp. 2997-3011.

16. **M. Takayanagi, S. Uemura and S. Minami (1964)**, J. Polym. Sci. C. No 5, pp 113 – 122.
17. **Z. Hashin and B. W. Rosen (1964)**, J. Appl. Mech. 31 p. 223.
18. **R. Hill, J. Mech (1965)**, Phys. Solids 13 p. 213.
19. **T .Lewis and L. Nielsen (1970)**, J. Appl. Polym. Sci. 14 p. 1449.
20. **F. Bueche (1960)**, "Molecular Basis for the Mullins Effect", Jnl. Appl. Polym. Sci., Vol. 4, pp. 107-114.
21. **A. M. Bueche (1957)**, J. Polym. Sci. 25 p.139.
22. **T. T. Wu**, Int. J. Solids Struc. 2 **(1966)** I.
23. **T. S. Chow (1978),** J. Polym. Phys. 16 p. 959.
24. **S. Ahmed and F. R. Jones (1988)**, Composites 19 p. 277.
25. **R. Λ. Dickie (1973**), J. Aρρl. Polym. Sci., 17 p. 454.
26. **R.M. Christensen (1979)**, "Mechanics of Composite Materials", Wiley New York.
27. **J. Spanoudakis and R. J. Young (1984)**, J. Mater. Sci. 19 p. 487.
28. **L. E. Nielsen (1966)**, J. Appl. Polym. Sci. 10 p. 97.
29. **J. Broutman and R.H. Krock (1967)**, "Modem Composite Materials" (Addison Weskey), Reading. Mass.
30. **L. F. Nielsen (1967)**, J. Compos. Mater. 1 p. 100.
31. **L. Nicolais and M. Narkis (1971)**, ibid 11 p. 194.
32. **M. R. Piggott and J. Leidner (1974)**, J. Appl. Polym. Sci. 18 p. 1619.
33. **G. Landon, G. Lewis and G. Boden (1977)**, J. Mater. Sci 12 p. 1605.
34. **J. Leidner and R. T. Woodhams (1974)**, J. Appl. Polym. Sci. 18 p. 1639.
35. **H. Hojo and W. Toyoshima (1973)**, 31st ANTEC, SPE Montreal, Canada (Teehnomic, 1973), p. 163.
36. **H. Hojo, W. Tanura and N. Kawanura (1974)**, Polym. Eng. Sci. 14 p. 604.
37. **M.Schrager (1978)**, Jnl, Appl.Pol. Sci., Vol 32, p 2379.
38. **Passmore (1989)**, J. Aρρl. Polym. Sci., 17.
39. **S.P. Timoshenko and J.N. Goodier (1983)**, "Theory of Elasticity", Mc Graw-Hill.
40. **T.L. Smith (1959)**, Trans. Soc. Rheol., 3, p. 113
41. **T.L. Smith (1961)**, Rubber Chem. Tech., 34, p.123.

42. **Yu.S. Lipatov and T.E Geller (1966)**, Vysokomol, Soedin, 8, p. 592.
43. **Yu.S. Lipatov and V.F. Babich (1968)**, Vysokomol, Soedin, B10, p. 848.
44. **Yu.S. Lipatov and F.G. Fabulyak (1972)**, J. Appl. Polym. Sci., 16, p.2131.
45. **Yu.S. Lipatov (1973)**, Plaste Kautschuk, 10, p. 738.
46. **Yu.S. Lipatov, V.F. Babich and V.F. Rosovizky (1974)**, J. Appl. Polym. Sci., 18, p. 1213.
47. **Yu.S. Lipatov and L.M. Sergeeva (1974)**, Adsorpion of Polymer, New York.
48. **Yu.S. Lipatov, V.F. Babich and V.F. Rosovozky (1976)**, J. Appl. Polymer Sci., 20, p. 1787.
49. **G.C. Papanicolaou and P.S. Theocaris(1979)**, Colloid and Polymer Sci., 257, 3, p. 239.
50. **P.S. Theocaris and G.C. Papanicolaou (1980)**, Colloid and Polymer Sci., 258, 9, p. 1044.
51. **R.F. Landel and T.L. Smith (1961)**, American Rocket Society Jnl., p. 599.
52. **S. Turner (1965)**, Appl. Mat. Res., p. 10.
53. **C.W. Van Der Wal, H.W. Bree and F.R. Schwarzl (1965)**, J. Appl. Pol. Sci., 9, p. 2143.
54. **C.A. Kumins and J. Roteman (1963)**, J. Pol. Sci., 1-A, p. 527.
55. **G.C. Papanicolaou, S.A. Paipetis and P.S. Theocaris (1977)**, J. Appl. Pol. Sci., 21, p. 689.
56. **S. Strella and P.F. Erhardt (1969)**, J. Appl. Pol. Sci., 13, p. 1373.
57. **S. Strella (1963)**, J. Appl. Pol. Sci., 7, p. 569.
58. **S. Strella (1963)**, J. Appl. Pol. Sci., 7, p. 1281.
59. **Αιμ. Σιδερίδης (1998)**, "Μελέτη της θερμομηχανικής συμπεριφοράς των κοκκωδών και ινωδών συνθέτων υλικών διά της θεωρίας της ενδιαμέσου φάσεως", Διδακτορική διατριβή, ΕΜΠ.
60. **E. Sideridis, P.S. Theocaris and G.C Papanicolaou (1986)**, "The elastic modulus of particulate composites using the concept of a mesophase" Rheol Acta 25, pp. 350 – 358.

61. **Yu.S. Lipatov (1977)**, Physical Chemistry of Filled Polymers, Translated from the Russian by R.J. Moseley, International Polymer Science and Technology Monograph No 2, Originally Published “Khimiya”, Moscow.
62. **Γ.Ι . Τσαμασφύρος (1991)**, Μηχανική Παραμορφωσίμων Σωμάτων Ι, Εκδόσεις Συμμετρία.
63. **E. Sideridis (1986)**, “The Dynamic Moduli of Particulate – Filled Polymers as Defined by Concept of Interphase”, Composites Science and Technology, Vol. 27, pp. 305 – 322.
64. **E. Sideridis, P.S. Theocaris and E. Kontou (1986)**, “Dynamic Mechanical Properties of Particulates: Application to Iron – Epoxy Composites”, Polymer Composites, Feb 1986. Vol, No 1, 1-7.
65. **G. Spathis, E. Kontou and P.S. Theocaris (1984)**, “Dynamic Mechanical Properties of an Iron – Epoxy Particulate Composite”, Journal of Rheology, 28(2), 161 – 175.