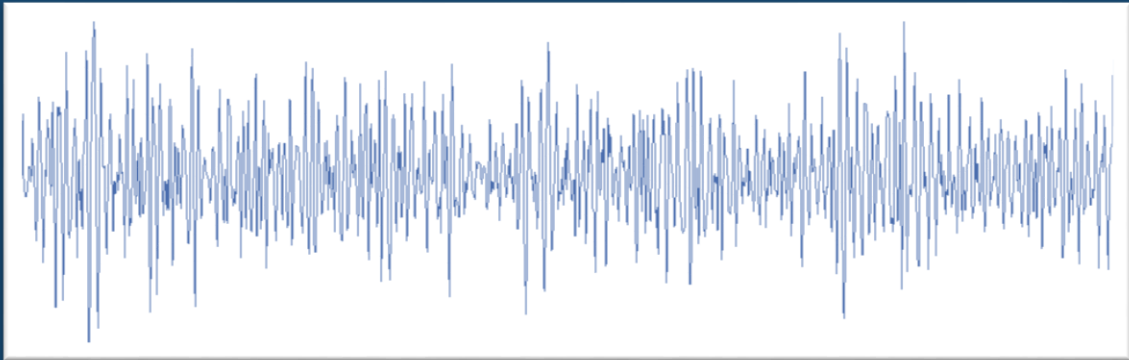




ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ  
“ΝΑΥΤΙΚΗ & ΘΑΛΑΣΣΙΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ & ΕΠΙΣΤΗΜΗ”

*Ανάλυση και μοντελοποίηση χρονοσειρών ανύψωσης της  
ελεύθερης επιφάνειας της θάλασσας*



**Analysis and modelling of sea surface elevation**

**ΜΑΡΤΖΙΚΟΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ**  
**ΑΘΗΝΑ 2013**

Ευχαριστώ πολύ όλους όσους με στήριξαν και με υπέμειναν όλο αυτό τον καιρό, αλλά κυρίως αυτούς που με έμαθαν να επιμένω στην πραγματοποίηση των στόχων μου. Ειδικότερα, θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα μου Δρ. Τακβόρ Σουκισιάν, κύριο ερευνητή του Ελληνικού Κέντρου Θαλασσίων Ερευνών, για την υποδειγματική καθοδήγηση και συνεργασία καθώς και για το χρόνο που διέθεσε στη προσπάθεια αυτή.

Λόγω του μεγάλου όγκου δεδομένων και της αποκλειστικής χρήσης του λογισμικού MATLAB, η εργασία δε θα ερχόταν εις πέρας αν αρκετοί Η/Υ δε λειτουργούσαν παράλληλα. Η συμβολή του επιβλέποντα αλλά και αγαπημένων προσώπων υπήρξε και εδώ καταλυτική.

Ευχαριστώ επίσης τους κ. Σ. Μαυράκο και κ. Κ. Μπελιμπασάκη, καθηγητή και αναπληρωτή καθηγητή, αντίστοιχα, της σχολής Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών του Ε.Μ.Π., για την εμπιστοσύνη που μου έδειξαν και την υποστήριξη τους.

## Abstract

The prevalent theory of time series and autoregressive moving average (ARMA) models is used for analyzing and modelling wave data. Sea surface elevation has always been recorded but rarely analyzed. The bulk of this research focuses on the significant wave height in connection with a frequency domain.

The purpose of this research is, on the basis of a time-scale, to probe into a sample of 50.825 recordings of this phenomenon taken from 4 different parts of the Aegean and Ionian seas in Greece between 2000 and 2010. The data derive from measurements on the spot of floating and coastal measuring stations which constitute the POSEIDON system of the Hellenic Center of Marine Research (HCMR). Time series are ergodic and stationary. The main objective of this project is, by using Box-Jenkins methods, the formation of a model that will allow us to describe satisfactorily the process of elevation. We proceed to a profound inquiry concerning the relation among other spectral parameters such as the significant wave height  $H_{mo}$ , the main direction  $M_{dir}$  and the spectral peak period  $T_p$ . Statistical analysis, mean and standard deviation are estimated and described in detail.

Subsequently, we fit analytical ARMA(p,q) models to all possible parameter combinations  $p, q = \{0,1,2,3,4,5\}$  for all the time series. The diagnostic and suitability check of the model is carried out according to the AIC and BIC information criteria the small value of which is taken into account as far as the selection of the best model is concerned. Thus, the results show that the ARMA(2,5) model is the best choice for the description of the stochastic process of elevation. After identifying and comparing the six most commonly occurring models, an attempt is being made to detect a possible relation between those models, the significant height and the period. The classification of the results depends on the source of data and the models in use.

The bulk of this research is mainly based on the use of MATLAB (MathWorks) and STATISTICA (StatSoft).

**Keywords:** sea surface elevation, time series, ARMA modeling, significant wave height, main direction, wave period.

## Περίληψη

Η ευρέως διαδεδομένη θεωρία των χρονοσειρών και των ARMA αυτοπαλίνδρομων υποδειγμάτων κινητού μέσου χρησιμοποιούνται για την ανάλυση κυματικών δεδομένων. Η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας της θάλασσας είναι ένα από τα φαινόμενα που καταγράφεται συχνά, αλλά σπάνια μελετάται στο σύνολο της. Το μεγαλύτερο μέρος της έρευνας επικεντρώνεται στο σημαντικό ύψος κύματος και η ανάλυση γίνεται κυρίως στο πεδίο των συχνοτήτων.

Σε αυτή την εργασία αναλύεται, στο πεδίο του χρόνου, ένα δείγμα 50.825 καταγραφών της ανύψωσης που συγκεντρώνεται από τέσσερις διαφορετικές περιοχές του Αιγαίου και του Ιονίου, κατά τη χρονική περίοδο από 2000 έως 2010. Τα δεδομένα προέρχονται από επιτόπιες μετρήσεις πλωτών ή παράκτιων μετρητικών σταθμών, από το σύστημα ΠΟΣΕΙΔΩΝ του ΕΛ.ΚΕ.Θ.Ε.. Οι χρονοσειρές των δεδομένων είναι στάσιμες και εργοδικές. Κάνοντας χρήση της μεθοδολογίας Box – Jenkins επιδιώκεται η εύρεση ενός κατάλληλου υποδείγματος για την επαρκή περιγραφή της διαδικασίας που παράγει αυτά τα δεδομένα. Ερευνάται διεξοδικότερα αν η επιλογή του αντικειμενικότερου υποδείγματος σχετίζεται με το σημαντικό ύψος  $H_{m_0}$ , την περίοδο  $T_p$  και την κύρια κατεύθυνση διάδοσης των κυματισμών  $M_{dir}$ . Γίνεται στατιστική ανάλυση των φασματικών αυτών παραμέτρων, υπολογίζοντας τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση τους.

Γίνεται προσαρμογή υποδειγμάτων ARMA(p, q) στη κάθε μια χρονοσειρά του δείγματος για όλους τους συνδυασμούς παραμέτρων  $p, q = \{0,1,2,3,4,5\}$ . Ο διαγνωστικός έλεγχος και η καταλληλότητα του υποδείγματος γίνεται μέσω των κριτηρίων πληροφορίας AIC και BIC, επιλέγοντας ως πιο αξιόπιστο το υπόδειγμα με τη μικρότερη τιμή στα κριτήρια αυτά. Από τα αποτελέσματα προκύπτει ότι το ARMA(2,5) είναι καταλληλότερο για την πλειοψηφία του δείγματος και άρα ο πιο ασφαλής τρόπος για την περιγραφή της στοχαστικής διαδικασίας της ανύψωσης. Παρ' όλα αυτά εντοπίζονται τα έξι πιο συχνά εμφανιζόμενα υποδείγματα και γίνεται σύγκριση των παραμέτρων τους, εντοπίζοντας τελικά μια πιθανή σχέση τους με το σημαντικό ύψος και την περίοδο. Τα αποτελέσματα κατηγοριοποιούνται ανάλογα με την περιοχή της δειγματοληψίας και ανάλογα το υπόδειγμα και παρουσιάζονται λεπτομερώς.

Η εργασία ολοκληρώθηκε κάνοντας χρήση του λογισμικού MATLAB (MathWorks) και στατιστικού πακέτου STATISTICA (Statsoft)

### Λέξεις κλειδιά:

Ανύψωση ελεύθερης επιφάνειας της θάλασσας, χρονοσειρές, ARMA υποδείγματα, σημαντικό ύψος, περίοδος κύματος, κύρια κατεύθυνση.

## Περιεχόμενα

1.	Εισαγωγή. Σκοπός της εργασίας.....	4
2.	Στοιχεία θεωρίας χρονοσειρών.....	7
	i. Στοχαστικές Διαδικασίες.....	7
	ii. Χρονοσειρές.....	8
	iii. Υποδείγματα ARMA.....	12
3.	Ανάλυση χρονοσειρών.....	25
4.	Δεδομένα.....	28
5.	Μεθοδολογία.....	30
6.	Παρουσίαση αποτελεσμάτων - Στατιστική ανάλυση δεδομένων.....	33
7.	Συμπεράσματα – Προτάσεις.....	56
8.	Παράρτημα.....	58
9.	Βιβλιογραφικές παραπομπές .....	71



## 1. Εισαγωγή. Σκοπός της εργασίας

Η «παράλογη αποτελεσματικότητα των Μαθηματικών στις Φυσικές Επιστήμες» απασχολεί για δεκαετίες τους φιλοσοφικούς κύκλους των επιστημών, ωστόσο η χρήση τους παραμένει ο πληρέστερος, προς στιγμήν, τρόπος για την ερμηνεία των Φυσικών Επιστημών. Μαθηματικές σχέσεις διέπουν τα φυσικά φαινόμενα, παρ' όλου που τα θεμέλια των Μαθηματικών είναι ανεξάρτητα από τις φυσικές θεωρίες. Και αυτό συμβαίνει κυρίως γιατί οι Φυσικές Επιστήμες περιορίζονται κατά κύριο λόγο στα φαινόμενα που μπορούν να περιγραφούν ικανοποιητικά με μαθηματικό φορμαλισμό<sup>1</sup>.

Οι ανεμογενείς θαλάσσιοι επιφανειακοί κυματισμοί μελετώνται ως αιτιοκρατικό (ντετερμινιστικό), ως στοχαστικό είτε ως χασοτικό φαινόμενο καθώς η πραγματοποίηση τους δε δίνει πάντα το ίδιο αποτέλεσμα αλλά εμπεριέχει μια τυχαιότητα<sup>2</sup>. Η μορφολογία μιας καταγραφής της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας της θάλασσας, λόγω ανεμογενών κυματισμών, είναι μια κυματομορφή ακανόνιστου σχήματος<sup>3</sup>. Συνήθως μετράται και καταγράφεται από κάποιο όργανο ή απλά παρατηρείται δια όψης. Αν επικεντρωθούμε σε ένα στιγμιότυπο αυτής της κυματομορφής, τότε εύκολα διακρίνεται το βασικό συστατικό της, «το κύμα», αλλά και τα χαρακτηριστικά της μεγέθη που είναι το ύψος, το μήκος, η περίοδος και η κύρια κατεύθυνση της διάδοσης των κυματισμών.

Στη δεκαετία 1950 - 1960 λόγω της πολυπλοκότητας του φαινομένου, η στατιστική σταθερότητα έδωσε τη θέση της στη στοχαστική θεώρηση<sup>4</sup>. Σύμφωνα με τα παραπάνω, αν η συνάρτηση της ανύψωσης συμβολίζεται με  $\eta(t)$  τότε κάθε καταγραφή  $\eta(t_1)$ , τη χρονική στιγμή  $t_1$ , αποτελεί ένα σύνολο συναρτήσεων που θα μπορούσαν να παρατηρηθούν υπό τις ίδιες συνθήκες. Αυτό άμεσα δικαιολογεί τη θεώρηση της ως στοχαστική διαδικασία. Από στοχαστικής πλευράς η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας, δεν μελετάται αυτή καθαυτή αλλά ως σύνολο παραμέτρων των πολλών διαδοχικών κυμάτων, όπως είναι το σημαντικό ύψος και η περίοδος. Αν η μελέτη γίνεται συναρτήσει του χρόνου εξετάζονται ως στατιστικά μεγέθη ενώ διαφορετικά ως φασματικά μεγέθη, αν η μελέτη γίνεται στο πεδίο των συχνοτήτων. Στη κλίμακα του χρόνου κάθε σύνολο παρατηρήσεων,  $\{\eta(t_1), \eta(t_2), \dots\}$  θεωρείται μια χρονοσειρά και έτσι η θεωρία των χρονοσειρών καθίσταται σημαντική για την ερμηνεία του φαινομένου. Σκοπός μιας τέτοιας προσέγγισης είναι η εύρεση ενός υποδείγματος που περιγράφει ικανοποιητικά τη διαδικασία από την οποία προέκυψαν οι παρατηρήσεις και ερμηνεύει επαρκώς το υπό μελέτη φαινόμενο.

Η ανάλυση χρονοσειρών λοιπόν, στηρίζεται σε δεδομένα (χρονοσειρές) που δίνονται με χρονική διάταξη και προσπαθεί με χρήση διάφορων μεθόδων, να διερευνήσει το μηχανισμό που παράγει τη χρονοσειρά, να εκτιμήσει τα χαρακτηριστικά του, να αναπτύξει ένα προτεινόμενο υπόδειγμα για να τον περιγράψει και στη συνέχεια να επιδιώξει την πρόβλεψη της εξέλιξης του, δηλαδή τις επόμενες τιμές της χρονοσειράς. Τα υποδείγματα χρονοσειρών υποθέτουν πως υπάρχει κάποια δομή και επιδιώκουν να εντοπίσουν και να εκφράσουν

<sup>1</sup> Κιουστελίδης (2002), σελ. 462-465.

<sup>2</sup> Σουμισιάν

<sup>3</sup> Αθανασούλης (2003), σελ 1.4 – 1.

<sup>4</sup> Σουμισιάν κ.α. (2007), σελ. Α-10.



μαθηματικά τις συσχετίσεις μεταξύ των παρατηρήσεων. Ευρέως διαδεδομένη είναι η θεωρία γραμμικών υποδειγμάτων, όπου πιο συνηθισμένα είναι τα αυτοπαλίνδρομα AR, τα κινητού μέσου MA και τα μικτά υποδείγματα ARMA. Η μεθοδολογία που έχει επίσης καθιερωθεί είναι αυτή των Box-Jenkins (1970).

Στη βιβλιογραφία το θέμα προσεγγίζεται διεξοδικά από τον Spanos (1983) που περιγράφει τα τρία διαφορετικά υποδείγματα AR, MA, & ARMA και εξετάζει τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματά τους για την περιγραφή κυματικών δεδομένων και την εφαρμογή τους σε προβλήματα υπεράκτιας μηχανικής. Η ανάλυση της στοχαστικής διαδικασίας της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας, επικεντρωμένη κυρίως στο ύψος του κύματος επιδιώκεται και από τον Sobey (1995). Η έρευνα καταλήγει στο ότι τα υποδείγματα ARMA περιγράφουν επαρκώς τα κυματικά δεδομένα που αναλύθηκαν. Σε άλλες περιπτώσεις όπως των Li & Karrem(1993), Soares & Ferreira (1996), Stefanakos & Athanassoulis(2001), Ho & Yim (2003) και Ozger (2010) χρησιμοποιείται η μεθοδολογία των γραμμικών ARMA μοντέλων, προκειμένου να ερμηνευτεί η διαδικασία που παράγει τις καταγραφές του σημαντικού ύψους κύματος, να συμπληρωθούν τα κενά (NaN) που πιθανόν να έχουν δημιουργηθεί κατά την καταγραφή, όπως επίσης και να βρεθεί συσχέτιση μεταξύ των καταλοίπων (σφαλμάτων). Οι μελέτες αυτές αναφέρονται κυρίως στο πεδίο των συχνοτήτων, αναλύοντας τις φασματικές παραμέτρους της ανύψωσης και όχι στο φαινόμενο της ανύψωσης. Ωστόσο η χρήση των ARMA γραμμικών υποδειγμάτων είναι εμφανής σε κάθε περίπτωση.

Χρησιμοποιώντας λοιπόν μια ευρέως διαδεδομένη μεθοδολογία της θεωρίας των χρονοσειρών, η αρχική ιδέα της εργασίας ήταν να γίνει στατιστική ανάλυση χρονοσειρών της ανύψωσης, μελετώντας το φαινόμενο στο σύνολο του και όχι απομονώνοντας μια παράμετρο. Η μελέτη της ολότητας του φαινομένου της ανύψωσης σπάνια πραγματοποιείται, ωστόσο βρίσκει εφαρμογή στην κατανομή του ύψους του κύματος και ταυτόχρονα σχετίζεται άμεσα με την κυματική ενέργεια που επίσης δεν μελετάται ακόμη ευρέως. Η εργασία λοιπόν, βασίστηκε σε κυματικά δεδομένα της περιόδου 2000-2011 που αναφέρονται στην ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας της θάλασσας. Επιλέχτηκε ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα του πληθυσμού, πλήρες και αμερόληπτο, από τέσσερις περιοχές του ελληνικού θαλάσσιου χώρου του Άθω, της Σαντορίνης, της Πύλου και της Σκύρου. Τα δεδομένα προέρχονται από επιτόπιες μετρήσεις πλωτών ή παράκτιων μετρητικών σταθμών, από το σύστημα ΠΟΣΕΙΔΩΝ του ΕΛ.ΚΕ.Θ.Ε. Η δειγματοληψία γίνεται ανά δευτερόλεπτο επί 17 λεπτά και επαναλαμβάνεται κάθε τρεις ώρες.

Σκοπός της εργασίας είναι η εύρεση ενός υποδείγματος που να έχει τη βέλτιστη κατά το δυνατόν προσαρμογή στα δεδομένα που θα αναλυθούν. Επιδιώκεται η εφαρμογή αναλυτικών υποδειγμάτων ARMA (p,q) για κάθε δυνατό συνδυασμό των παραμέτρων p, q με  $p, q \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  σε κάθε μια χρονοσειρά. Βάσει των κριτηρίων πληροφωρίας AIC και BIC γίνεται έλεγχος καταλληλότητας αυτών για τη κάθε μια χρονοσειρά και υπολογίζονται τα ποσοστά εμφάνισης, οι συχνότητες και οι σχετικές συχνότητες των επικρατέστερων υποδειγμάτων όλου του δείγματος. Για κάθε επικρατέστερο υπόδειγμα γίνεται στατιστική ανάλυση των αντίστοιχων φασματικών παραμέτρων, του σημαντικού ύψους  $H_{m0}$ , της περιόδου  $T_p$  και της κύριας κατεύθυνσης  $M_{dir}$  του κύματος. Εξετάζονται επίσης πιθανές τάσεις και συσχετίσεις της κάθε παραμέτρου με την επιλογή του υποδείγματος. Τέλος τα αποτελέσματα κατηγοριοποιούνται ως προς την περιοχή αλλά και ως προς το υπόδειγμα και παρουσιάζονται.

Η εργασία στηρίζεται στο μεγαλύτερο μέρος της στη χρήση του λογισμικού MATLAB και του στατιστικού πακέτου STATISTICA.



Η εργασία έχει την εξής δομή,

1. Εισαγωγή – Σκοπός εργασίας
2. Στοιχεία θεωρίας χρονοσειρών  
Γίνεται αναφορά στις στοχαστικές διαδικασίες και κάποιες χαρακτηριστικές ιδιότητες τους. Παρουσιάζεται η βασική θεωρία των χρονοσειρών, βασικές έννοιες και ιδιότητες τους. Στη συνέχεια γίνεται εισαγωγή στη θεωρία των γραμμικών υποδειγμάτων. Αναφέρονται τα αυτοπαλίδρομα υποδείγματα  $AR(p)$ , τα υποδείγματα κινούμενου μέσου  $MA(q)$  και τα μικτά υποδείγματα  $ARMA(p,q)$ .
3. Ανάλυση χρονοσειρών  
Παρουσιάζεται συνοπτικά η μεθοδολογία Box-Jenkins με τα στάδια της.
4. Δεδομένα  
Περιγράφονται τα κυματικά δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν στην εργασία, τα χαρακτηριστικά στοιχεία τους και ο τρόπος που έχει πραγματοποιηθεί η δειγματοληψία τους.
5. Μεθοδολογία  
Εφαρμογή της θεωρίας χρονοσειρών και της μεθοδολογίας Box-Jenkins στα δεδομένα της εργασίας και περιγραφή της διαδικασίας που ακολουθήθηκε για την προσαρμογή υποδειγμάτων και των έλεγχο καταλληλότητας τους.
6. Παρουσίαση αποτελεσμάτων - Στατιστική ανάλυση δεδομένων.  
Τα αποτελέσματα της προσαρμογής υποδειγμάτων παρουσιάζονται αναλυτικά και πραγματοποιείται στατιστική ανάλυση των φασματικών παραμέτρων των χρονοσειρών του κάθε υποδείγματος,
7. Συμπεράσματα - προτάσεις  
Συζητούνται συνολικά τα αποτελέσματα, κάποια συμπεράσματά τους και η πιθανή μετέπειτα εξέλιξη της εργασίας.
8. Παράρτημα  
Παρατίθενται οι εντολές και ο κώδικας του MATLAB, που χρησιμοποιήθηκε για την ολοκλήρωση της εργασίας.
9. Βιβλιογραφικές παραπομπές





## 2. Στοιχεία θεωρίας χρονοσειρών

### ι. Στοχαστικές διαδικασίες

Οι περισσότερες φυσικές διεργασίες στη καθημερινότητα μας εμπεριέχουν μια τυχαιότητα στη δομή και εξέλιξη τους. Στηριζόμενοι σε αυτή την τυχαιότητα - στοχαστικότητα, ο όρος Στοχαστική Διαδικασία χρησιμοποιείται για να περιγράψει ένα στατιστικό φαινόμενο που εξελίσσεται στο χρόνο σύμφωνα με τους νόμους των Πιθανοτήτων. Ορίζεται ως μια συλλογή τυχαίων μεταβλητών που διατάσσονται στο χρόνο που μπορεί να είναι διακριτός ή συνεχής. Συμβολίζεται ως  $X(t)$  αν ο χρόνος είναι συνεχής (συνήθως  $-\infty < t < +\infty$ ) και ως  $X_t$ , αν ο χρόνος είναι διακριτός (συνήθως  $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )<sup>5</sup>. Η στοχαστική διαδικασία (ή στοχαστική ανέλιξη) λοιπόν είναι μια άπειρη ακολουθία τυχαίων μεταβλητών  $X_1, X_2, \dots, X_t$ . Αξίζει να σημειωθεί ότι η θεωρία τυχαίων μεταβλητών δεν παρέχει τα μέσα για την εξέταση φαινομένων που είναι τυχαία και εξελίσσονται στο χρόνο, όπως συμβαίνει σε πολλά φυσικά συστήματα. Αυτό μάλιστα ήταν το κίνητρο για την ανάπτυξη της θεωρίας των στοχαστικών διαδικασιών.

Παρακάτω αναφέρονται κάποιες ιδιότητες των στοχαστικών διαδικασιών.

#### Στασιμότητα.

Μια στοχαστική διαδικασία είναι στάσιμη όταν οι ιδιότητες της δεν επηρεάζονται από μια αλλαγή στην αρχή μετρήσεως του χρόνου. Ασθενώς στάσιμη ή στάσιμη 2<sup>ης</sup> τάξεως, όταν τα στατιστικά χαρακτηριστικά (μέση τιμή, διακύμανση) παραμένουν αναλλοίωτα στο χρόνο, ενώ οι συνδιακυμάνσεις εξαρτώνται μόνο από την υστέρηση<sup>6</sup>.

Έστω η στοχαστική διαδικασία  $\{X_1, X_2, X_3, \dots, X_t\}$  τότε,

$$\text{μέση τιμή } \mu_t = E(X_t)$$

$$\text{διακύμανση } \sigma^2 = E(X_t - \mu_t)^2$$

συνδιακύμανση μεταξύ  $X_{t_1}, X_{t_2}$

$$\gamma(t_1, t_2) = E(X_{t_1} - \mu_{t_1})(X_{t_2} - \mu_{t_2})$$

συσχέτιση,

$$\rho(t_1, t_2) = \frac{\gamma(t_1, t_2)}{\sqrt{\sigma_{t_1}^2} \sqrt{\sigma_{t_2}^2}}$$

<sup>5</sup> Chatfield (2000), σελ. 33.

<sup>6</sup> Wei (1990), σελ. 7.



## Εργοδικότητα

Μια στοχαστική διαδικασία λέγεται εργοδική, όταν τα στατιστικά χαρακτηριστικά της παραμένουν τα ίδια σε όλες τις δυνατές πραγματοποιήσεις (ταυτόχρονες ή άλλου χρόνου) της μεταβλητής. Κάθε στάσιμη 2<sup>ης</sup> τάξεως στοχαστική διαδικασία θεωρείται συνήθως εργοδική<sup>7</sup>.

Όταν επιτυγχάνεται η στασιμότητα και η εργοδικότητα της στοχαστικής διαδικασίας τότε μέσω ενός κατάλληλου μεγέθους δείγματος μπορεί να επιτευχθούν «καλές» εκτιμήσεις των στατιστικών μεγεθών της.

## Κανονικότητα

Μια στοχαστική διαδικασία θεωρείται κανονική ή Gaussian, όταν για κάθε τάξη  $n$  η κοινή κατανομή είναι  $n$  – διάστατη κατανομή Gauss (Κανονική κατανομή). Η διακύμανση γύρω από τη μέση τιμή ακολουθεί την Κανονική κατανομή. Η κανονική στοχαστική διαδικασία είναι στάσιμη.

## ii. Χρονοσειρές

Αν  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_t$  είναι πραγματοποιήσεις των τυχαίων μεταβλητών  $X_1, X_2, \dots, X_t$ , τότε με τον όρο *χρονοσειρά* εννοούμε το σύνολο των παρατηρήσεων  $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_t\}$ . Η καθεμία από αυτές καταγράφεται στο συγκεκριμένο χρόνο  $t$  και προέρχεται από την καταγραφή της τιμής μιας τυχαίας μεταβλητής  $X$  κατά την εξέλιξη της στο χρόνο. Έτσι μια χρονοσειρά  $t$  διαδοχικών παρατηρήσεων  $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_t\}$  θεωρείται<sup>8</sup> μια συγκεκριμένη πραγματοποίηση μιας στοχαστικής διαδικασίας  $\{X_t\}$ .

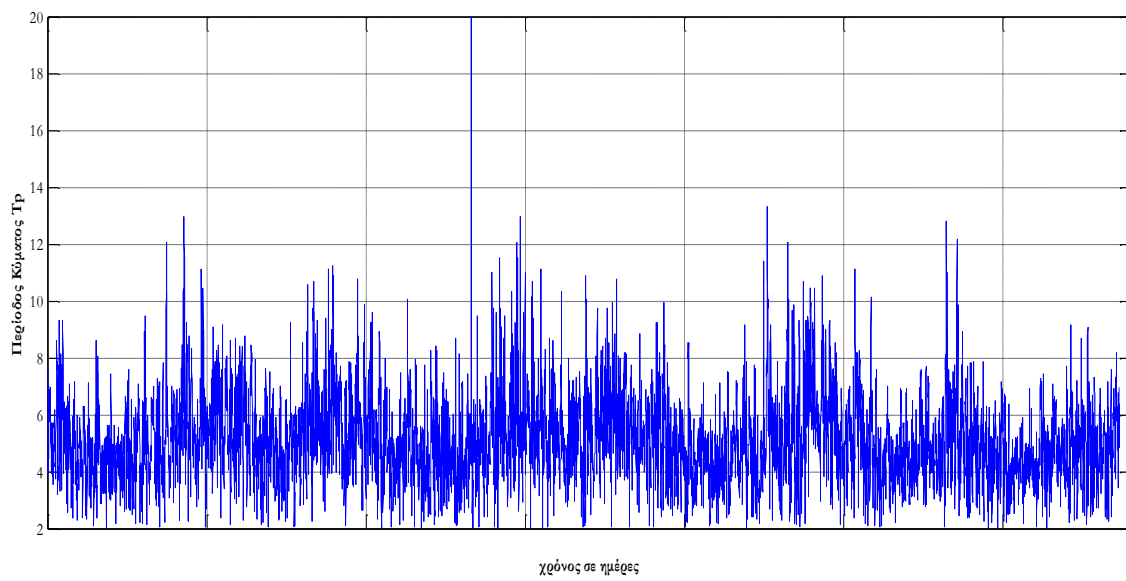
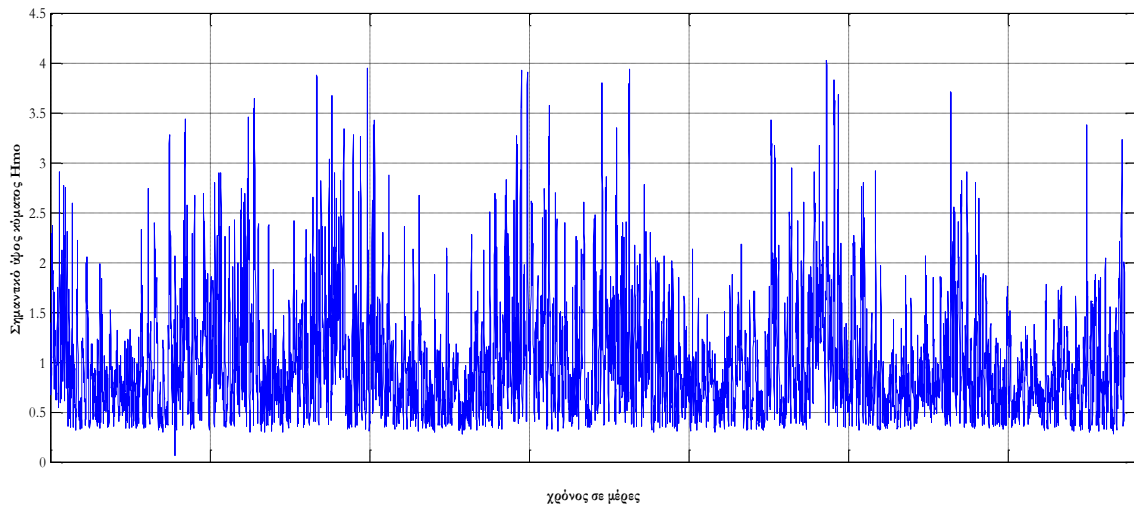
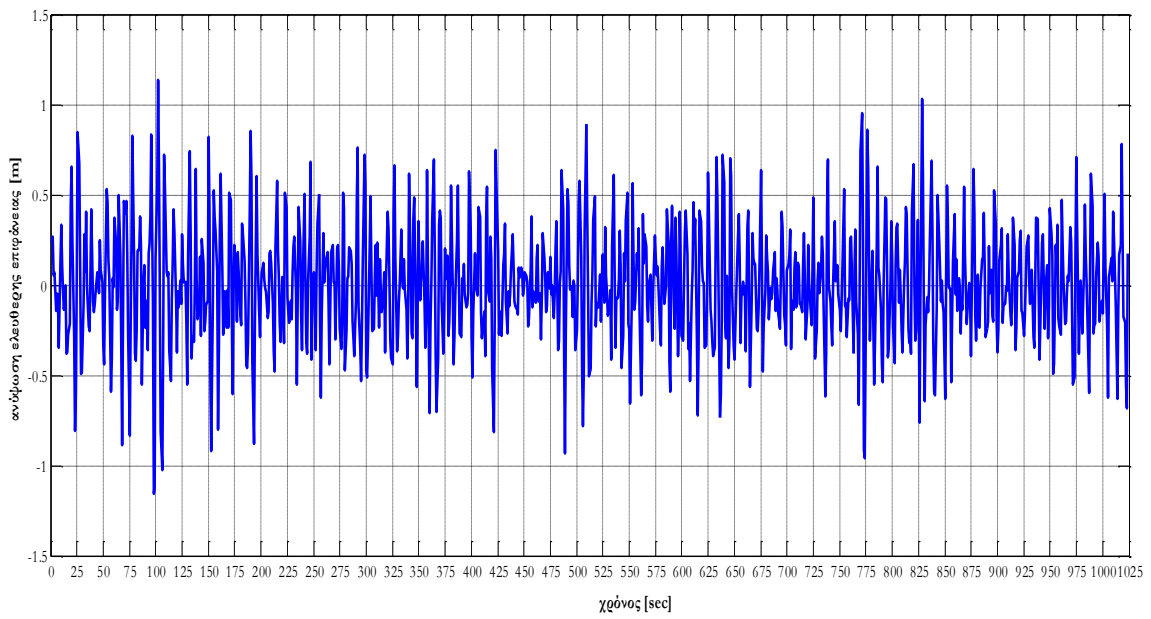
Οι έννοιες της στασιμότητας, εργοδικότητας και κανονικότητας των στοχαστικών διαδικασιών, ορίζονται όμοια στη θεωρία των χρονοσειρών.

Τοποθετώντας στους άξονες τις τιμές  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_t$ , συναρτήσει του χρόνου που έχουν καταγραφεί, δημιουργείται η γραφική παράσταση της χρονοσειράς που παρουσιάζει την εξέλιξη της μεταβλητής  $X$  μέσα στο χρόνο. Από τη μορφή της εύκολα μπορεί να ανιχνευτεί, η συστηματική επανάληψη ή συμπεριφορά που πιθανόν υπάρχει στο μηχανισμό της.

Παρακάτω παρουσιάζονται κάποια παραδείγματα χρονοσειρών. Από την περιοχή του Άθω, παρουσιάζεται μια χρονοσειρά της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας της θάλασσας σε διάρκεια περίπου 1200 sec στις 14/1/2001, η χρονοσειρά του σημαντικού ύψους κύματος και της περιόδου των κυμάτων κατά τη χρονική περίοδο 2001-2008.

<sup>7</sup> Wei (1990), σελ. 18.

<sup>8</sup> Χρήστου(2011), σελ. 736.





Μια χρονοσειρά εμφανίζει **τάση** (trend) όταν η μεταβολή της μέσης τιμής της, για περιορισμένο χρονικό διάστημα, δεν είναι σταθερή αλλά για διαδοχικά διαστήματα παρουσιάζει αύξηση, μείωση ή χαρακτηριστικές αυξομειώσεις. Φαινόμενα σαν αυτά ενδεχομένως σε περίπτωση που δεν είναι αντιπροσωπευτικά ή δε σχετίζονται με το υπό μελέτη σύστημα αφαιρούνται. Έτσι η τάση απαλείφεται και η μελέτη γίνεται στη νέα χρονοσειρά που προκύπτει.

**Υστέρηση**  $k$  (lag) ορίζεται, η απόλυτη τιμή της χρονικής διαφοράς  $|(t+k) - k|$  δυο όρων  $x_{t+k}$ ,  $x_k$  της χρονικής σειράς.

Έστω η χρονοσειρά  $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ , τότε

$$\text{μέση τιμή } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n x_t$$

$$\text{διακύμανση } s_x^2 = \sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (x_t - \bar{x})^2$$

αυτοδιακύμανση

$$c_\tau = \hat{\gamma}(k) = \frac{1}{n} \sum_{t=\tau+1}^n (x_t - \bar{x})(x_{t-k} - \bar{x})$$

αυτοσυσχέτιση

$$r_\tau = \hat{\rho}(k) = \frac{c(\tau)k}{c(0)} = \frac{c(k)}{s_x^2} = \frac{\sum_{t=k+1}^n (x_t - \bar{x})(x_{t-k} - \bar{x})}{\sum_{t=1}^n (x_t - \bar{x})^2}$$

Στην παρούσα εργασία, υποθέτουμε ότι η μια χρονοσειρά  $x_t$ ,  $t \in T$  θα είναι ασθενώς στάσιμη. Δηλαδή ισχύουν,

Μέση τιμή:  $E(X_t) = \mu$ , ανεξάρτητη του χρόνου

Διασπορά:  $V(X_t) = \sigma^2$ , ανεξάρτητη του χρόνου

Διακύμανση:  $\text{Cov}(X_t, X_{t+k}) = \gamma_k$ , ανεξάρτητη του χρόνου,

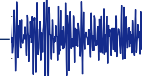
εξαρτάται από τη χρονική διαφορά  $(t+k) - t = k$  που λέγεται υστέρηση (lag)

Η διακύμανση  $\text{Cov}(X_t, X_{t+k})$  αναφέρεται και ως αυτοσυνδιακύμανση  $\gamma_k$  (autocovariance).

$$\gamma_k = E(X_t - \mu)(X_{t+k} - \mu) = \text{Cov}(X_t, X_{t+k})$$

Είναι προφανές ότι για  $\tau = 0$ ,  $\gamma_0 = V(X_t) = \sigma^2$  και  $\gamma_k = \gamma_{-k}$

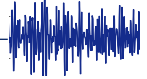
Επειδή η διασπορά των παρατηρήσεων είναι σταθερή, μπορούμε στη συνέχεια να θεωρήσουμε το συντελεστή αυτοσυσχέτισης,



$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$
$$\rho_0 = 1 \text{ και } \rho_k = \rho_{-k}$$

Η σχέση που υπάρχει μεταξύ του συντελεστή  $\rho_k$  και στο  $k$ , ονομάζεται συνάρτηση αυτοσυσχετίσεως (autocorrelation function) και η γραφική της παράσταση, διάγραμμα αυτοσυσχετίσεως (correlogram). Παρόμοια ορίζεται και η συνάρτηση αυτοσυνδιακύμανσης. Το διάγραμμα αυτοσυσχετίσεως είναι συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων και στην πράξη παίρνουμε μόνο το θετικό μισό της συνάρτησης (εφόσον  $\rho_k = \rho_{-k}$ ). Η σημασία της συνάρτησης αυτοσυσχετίσεως είναι μεγάλη, γιατί δείχνει τόσο το βαθμό (ένταση) της συσχέτισης των όρων της χρονοσειράς όσο και τη χρονική διάρκεια της “μνήμης” της χρονοσειράς. Δηλαδή από πόσους προηγούμενους όρους εξαρτάται ένας όρος της χρονοσειράς.

Ο κυριότερος στόχος στην ανάλυση χρονοσειρών είναι η επιλογή και προσαρμογή κατάλληλου υποδείγματος που να προσεγγίζει ικανοποιητικά τα δεδομένα και να περιγράφει το μηχανισμό της στοχαστικής διαδικασίας από την οποία προέκυψε η συγκεκριμένη σειρά, καθώς και η χρησιμοποίηση του υποδείγματος για πρόβλεψη. Τα υποδείγματα χρονοσειρών υποθέτουν πως υπάρχουν συσχετίσεις στη χρονοσειρά, μεταξύ των μεταβλητών και προσπαθούν να εκφράσουν μαθηματικά αυτές τις συσχετίσεις. Γι’ αυτό ένα πρώτο και σημαντικό στάδιο στην ανάλυση χρονοσειρών είναι η διερεύνηση και περιγραφή των συσχετίσεων καθώς και άλλων χαρακτηριστικών της χρονοσειράς. Απαραίτητος επίσης είναι ο έλεγχος της διαδικασίας και του υποδείγματος ώστε η πρόγνωση να είναι όσο το δυνατόν πιο αξιόπιστη.



### iii. Υποδείγματα ARMA

#### Αυτοπαλίνδρομα υποδείγματα AR(1)

Η γενική μορφή ενός υποδείματος AR(1) είναι:

$$x_t = \varphi_0 + \varphi_1 x_{t-1} + \varepsilon_t,$$

ή εναλλακτικά

$$\varepsilon_t = (1 - \varphi_1 B)x_t,$$

όπου  $\varphi(B) = 1 - \varphi_1 B$  το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του AR(1).

Η μεταβλητή  $\varepsilon_t$  αντιπροσωπεύει το σφάλμα τη χρονική στιγμή  $t$ . Ισχύει  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ ,  $E(\varepsilon_t) = 0$ ,  $E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2$ ,  $E(\varepsilon_t \varepsilon_k) = 0$  και θεωρείται **Gaussian λευκός θόρυβος** (white noise). Υποθέτοντας ότι είτε ο μέσος είναι μηδέν, είτε ότι οι μεταβλητές εκφράζονται ως αποκλίσεις από τους μέσους, η τελευταία σχέση γίνεται  $x_t = \varphi_1 x_{t-1} + \varepsilon_t$ , όπου  $x_t = X_t - EX_t = X_t - \mu$ . Ακόμη ισχύουν<sup>9</sup>,

$$\varphi_0 = (1 - \varphi_1)\mu$$

$$\mu = \frac{\varphi_0}{1 - \varphi_1}$$

$$\gamma_0 = V(x_t) = E(X_t - \mu)^2 = \frac{\sigma^2}{1 - \varphi_1^2}$$

$$\gamma_k = \text{Cov}(x_t, x_{t-k}) = E(X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu) = \varphi_1^k \gamma_0$$

$$\rho_s = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \varphi_1^k$$

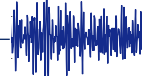
Για να είναι η σειρά στάσιμη, θα πρέπει  $|\varphi_1| < 1$  και σε αυτή την περίπτωση ισχύει

$$x_t = \varepsilon_t + \varphi_1 \varepsilon_{t-1} + \varphi_1^2 \varepsilon_{t-2} + \varphi_1^3 \varepsilon_{t-3} + \dots$$

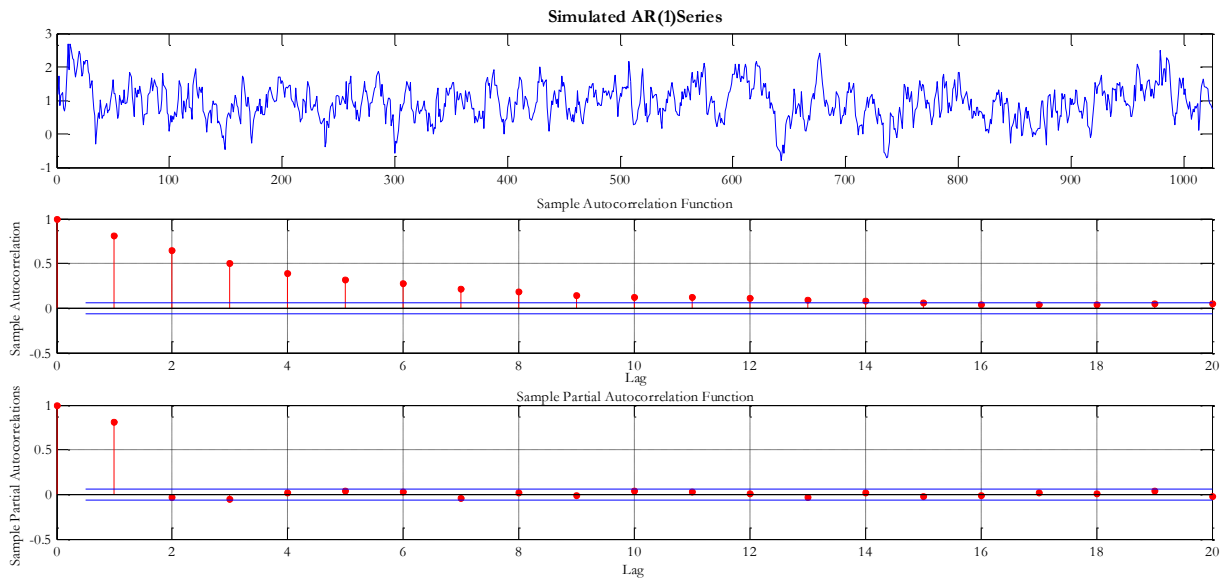
Για  $\varphi_1 > 0$ , η συνάρτηση αυτοσυσχετίσεως αρχίζοντας από τη μονάδα, αφού  $\rho_0 = 1$ , φθίνει γεωμετρικά και τείνει προς το μηδέν καθώς το  $k$  αυξάνει. Για  $\varphi_1 < 0$ , πάλι θα τείνει προς το μηδέν αλλά με εναλλασσόμενο πρόσημο.

Εν ολίγοις μέσω ενός υποδείματος AR(1) εκφράζεται μια χρονοσειρά  $x_t$  ως άθροισμα μιας σταθεράς  $\varphi_0$ , μιας προηγούμενης παρατήρησης  $x_{t-1}$  και μιας χρονοσειράς λευκού θορύβου  $\varepsilon_t$ ,

<sup>9</sup> Χρήστου (2011), σελ. 748 κ. εξ.



π.χ.  $x_t = 0.2 + 0.8x_{t-1} + \varepsilon_t$



Η (θεωρητική) αυτοσυσχέτιση εξασθενεί εκθετικά και υπάρχει μια μόνο μη μηδενική μερική αυτοσυσχέτιση για υστέρηση 1. Στην πράξη όταν δεν είναι γνωστή η τάξη του υποδείγματος, η ACF και η PACF βοηθούν στην αναγνώριση ενός AR(1) υποδείγματος, όταν παρατηρείται ότι η αυτοσυσχέτιση εξασθενεί εκθετικά και υπάρχει μια σημαντική μερική αυτοσυσχέτιση. Εδώ λόγω του σφάλματος που υπεισέρχεται στους υπολογισμούς η δειγματική αυτοσυσχέτιση δε φθίνει στο μηδέν<sup>10</sup>.

### Αυτοπαλίνδρομα υποδείγματα AR(2)

Η γενική μορφή ενός υποδείγματος AR(2) είναι:

$$x_t = \varphi_0 + \varphi_1 x_{t-1} + \varphi_2 x_{t-2} + \varepsilon_t$$

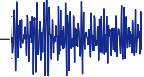
ή εναλλακτικά

$$\varepsilon_t = \varphi(B)x_t,$$

όπου  $\varphi(B) = 1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2$  το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του AR(2).

Όπου και πάλι ισχύουν αντίστοιχα,

<sup>10</sup>Makridakis et al. (1998), σελ. 338.



$$\varphi_0 = (1 - \varphi_1)\mu$$

$$\mu = \frac{\varphi_0}{1 - \varphi_1 - \varphi_2}$$

$$\gamma_0 = V(x_t) = E(X_t - \mu)^2 = \varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_2 + \sigma^2 = \frac{1 - \varphi_2}{(1 + \varphi_2)(1 - \varphi_1 - \varphi_2)(1 + \varphi_1 - \varphi_2)}\sigma^2$$

$$\gamma_k = \text{Cov}(x_t, x_{t-k}) = E(X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu) = \varphi_1\gamma_{k-1} + \varphi_2\gamma_{k-2} \text{ (αν } k > 0)$$

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \varphi_1\rho_{k-1} + \varphi_2\rho_{k-2} \text{ (αν } k > 0)$$

Αφού όμως  $\rho_0 = 1$  και  $\rho_{-1} = \rho_1$  η τελευταία σχέση δίνει,

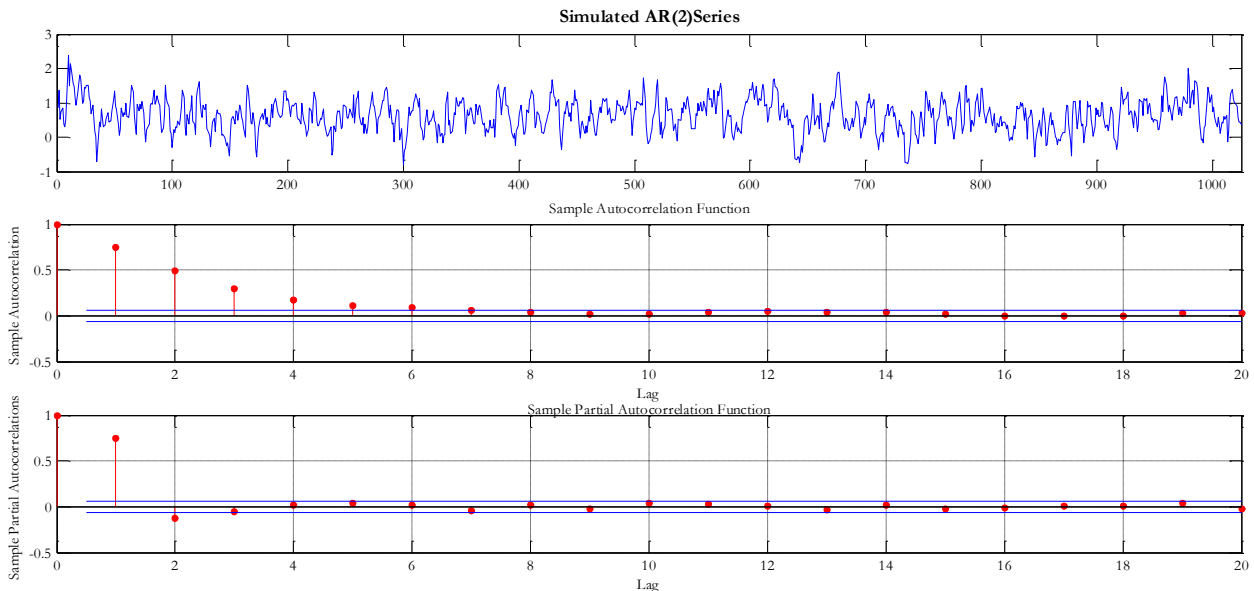
$$\begin{cases} \rho_1 = \varphi_1 + \varphi_2\rho_1 \\ \rho_2 = \varphi_1\rho_1 + \varphi_2 \end{cases} \Rightarrow \rho_1 = \frac{\varphi_1}{1 - \varphi_2} \text{ και } \rho_2 = \varphi_2 + \frac{\varphi_1^2}{1 - \varphi_2}$$

Αν η χρονοσειρά είναι στάσιμη, θα ισχύουν:

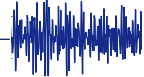
$$\varphi_1 + \varphi_2 < 1, \quad -\varphi_1 + \varphi_2 < 1, \quad -1 < \varphi_2 < 1$$

Η συνάρτηση αυτοσυσχετίσεως αποσβάνει στο μηδέν με τη μορφή ημιτονοειδούς κύματος καθώς αυξάνεται η υστέρηση  $k$  και επίσης παρουσιάζονται δυο σημαντικές μερικές αυτοσυσχετίσεις.

π.χ.  $x_t = 0.2 + 0.8x_{t-1} - 0.1x_{t-2} + \varepsilon_t$







### Αυτοπαλίνδρομα υποδείγματα AR(p)

Η γενική μορφή ενός υποδείγματος AR(p) είναι:

$$x_t = \varphi_0 + \varphi_1 x_{t-1} + \varphi_2 x_{t-2} + \dots + \varphi_p x_{t-p} + \varepsilon_t$$

ή εναλλακτικά

$$\varepsilon_t = \varphi(B)x_t,$$

όπου  $\varphi(B) = 1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \dots - \varphi_p B^p$  το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του AR(p).

Όπου ισχύουν αντίστοιχα,

$$\mu = \frac{\varphi_0}{1 - \varphi_1 - \varphi_2 - \dots - \varphi_p}$$

$$\gamma_0 = \varphi_1 \gamma_1 + \varphi_2 \gamma_2 + \dots + \varphi_p \gamma_p + \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{1 - \varphi_1 \rho_1 - \varphi_2 \rho_2 - \dots - \varphi_p \rho_p}$$

$$\gamma_k = \varphi_1 \gamma_{k-1} + \varphi_2 \gamma_{k-2} + \varphi_p \gamma_{k-p} \quad (\alpha \nu \ k > 0)$$

$$\rho_k = \varphi_1 \rho_{k-1} + \varphi_2 \rho_{k-2} + \dots + \varphi_p \rho_{k-p} \quad (\alpha \nu \ k > 0)$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις, που συνιστούν ένα σύστημα, οι λύσεις του οποίου δίνουν τις αυτοσυσχετίσεις, συναρτήσει των συντελεστών αυτοπαλινδρομίσσεως  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$ :

$$\rho_1 = \varphi_1 + \rho_1 \varphi_2 + \rho_2 \varphi_3 + \dots + \rho_{p-1} \varphi_p$$

$$\rho_2 = \rho_1 \varphi_1 + \varphi_2 + \rho_1 \varphi_3 + \dots + \rho_{p-2} \varphi_p$$

$$\rho_3 = \rho_2 \varphi_1 + \rho_1 \varphi_2 + \varphi_3 + \dots + \rho_{p-3} \varphi_p$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$\rho_p = \rho_{p-1} \varphi_1 + \rho_{p-2} \varphi_2 + \rho_{p-3} \varphi_3 + \dots + \varphi_p$$

Με χρήση πινάκων το παραπάνω σύστημα γράφεται,

$$\alpha \nu \ \Pi = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \rho_{p-3} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_p \end{bmatrix} \qquad \mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_p \end{bmatrix}$$

τότε  $\mathbf{R} = \mathbf{\Pi} \mathbf{\Phi}$  και  $\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Pi}^{-1} \mathbf{R}$



## Μερική αυτοσυσχέτιση

Η μερική αυτοσυσχέτιση (partial autocorrelation function) ανάμεσα στην  $x_t$  και στην  $x_{t-s}$  αναφέρεται στη συσχέτιση ανάμεσα τους, αφαιρώντας τις γραμμικές επιδράσεις των ενδιάμεσων μεταβλητών  $x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_{t-(k-1)}$ . Αν  $\rho_{kk}$  ο συντελεστής μερικής αυτοσυσχετίσεως  $k$ , για  $k = 1, 2, \dots$ , μπορούμε να υπολογίσουμε κάθε ένα από αυτούς λύνοντας το σύστημα  $R = \Pi\Phi$  αν αντικαταστήσουμε τους συντελεστές αυτοπαλινδρομίσεως  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_p$  με τους  $\rho_{11}, \rho_{22}, \rho_{33}, \dots, \rho_{pp}$ . Με χρήση πινάκων,

6

Όπου τελικά προκύπτουν τα εξής,

$$\begin{aligned} \rho_{11} &= \rho_1 \\ \rho_{22} &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} \\ \rho_{33} &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_3 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} \quad \text{κ.ο.κ} \end{aligned}$$

Οι συντελεστές  $\rho_{kk}$  αποτελούν τη συνάρτηση μερικής αυτοσυσχέτισης τάξης  $k$  και για τον υπολογισμό του, όταν τα  $\rho_k$  είναι άγνωστα, χρησιμοποιούμε οι αντίστοιχες εκτιμήσεις  $\hat{\rho}_k$  από το δείγμα. Με βάση τις εκτιμήσεις αυτές, μπορεί γίνει έλεγχος σημαντικότητας των παραμέτρων στον πληθυσμό. Συνολικά από το δείγμα εκτιμώνται οι ποσότητες, που ορίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\sum_{t=1}^T x_t}{T} \quad \text{για το } \mu \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{\sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})^2}{T} \quad \text{για το } \sigma^2 \\ \hat{\gamma}_k &= \frac{\sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x})}{T} \quad \text{για το } \gamma_k \\ \hat{\rho}_k &= \frac{\sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x})}{\sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})^2} \quad \text{για το } \rho_k \end{aligned}$$



Είναι προφανές ότι για μια  $AR(p)$  διαδικασία η συνάρτηση μερικής αυτοσυσχέτισης είναι μηδέν για  $k > p$  σύμφωνα με το ορισμό της. Καθένας από αυτούς τους συντελεστές  $\rho_{kk}$  περιγράφει τη σημαντικότητα της τελευταίας μεταβλητής του υποδείγματος. Αν ο  $\rho_{kk}$  είναι σημαντικά διάφορος του μηδενός, τότε το υπόδειγμα  $k$  τάξεως είναι προτιμότερο από το υπόδειγμα  $k - 1$  τάξης για την ανάλυση της χρονοσειράς. Σε αντίθετη περίπτωση παραμένουμε στο υπόδειγμα τάξης  $k - 1$ . Αν η τάξη που προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα είναι  $p$ , τότε θα ισχύει:

$$\rho_{kk} \neq 0 \text{ για } k \leq p \text{ και } \rho_{kk} = 0 \text{ για } k > p$$

Ο έλεγχος σημαντικότητας του  $\rho_{kk}$  στηρίζεται στο παρακάτω θεώρημα:

Αν η χρονική σειρά είναι τάξης  $p$  τότε,

$$\hat{\rho}_k \sim N\left(0, \frac{1}{T}\right)$$

$$\hat{\rho}_{kk} \sim N\left(0, \frac{1}{T}\right) \text{ για } k \geq p + 1$$

Έτσι η υπόθεση  $H_0 : \rho_{kk} = 0$  απορρίπτεται σε στάθμη σημαντικότητας  $\alpha$ , έναντι της  $H_1 : \rho_{kk} \neq 0$  αν  $|\hat{\rho}_{kk}| > \frac{2}{\sqrt{T}}$ , όπου  $T$  το μέγεθος (πλήθος στοιχείων) της χρονικής σειράς.

Επομένως ο υπολογισμός των  $\rho_{kk}$  έχει πρακτική σημασία στην εκτίμηση της τάξης του υποδείγματος. Αν για παράδειγμα ο συντελεστής  $\rho_{22}$  είναι σημαντικός, ενώ ο  $\rho_{33}$  δεν είναι, τότε η τάξη του υποδείγματος θα είναι 2.

### Υποδείγματα Κινούμενου μέσου MA(1)

Ένα υπόδειγμα κινούμενου μέσου, τάξης ένα, έχει τη μορφή :

$$x_t = \theta_0 + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}, \text{ όπου}$$

$$E(\varepsilon_t) = 0 \text{ και } \text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$$

Εναλλακτικά θα μπορούσε να γραφεί και ως

$$x_t = (1 - \theta_1 B)\varepsilon_t,$$

όπου  $\theta(B) = 1 - \theta_1 B$  το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του MA(1).

Είναι πάντα στάσιμη χρονοσειρά αφού γράφεται ως πεπερασμένο άθροισμα λευκού θορύβου  $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}$ . Για  $|\theta| < 1$  η παραπάνω σχέση μπορεί να μετατραπεί ως εξής:

$$\varepsilon_t = (1 - \theta_1 B)^{-1} x_t$$

$$\text{ή } \varepsilon_t = (1 - \theta_1 B + \theta_1^2 B^2 - \theta_1^3 B^3 + \dots)$$

Και αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να ορίσουμε το λευκό θόρυβο  $\varepsilon_t$  γνωρίζοντας την  $x_t$  και όλες τις προηγούμενες της. Η ιδιότητα αυτή λέγεται αντιστρεψιμότητα (invertibility) και αν



ισχύει σημαίνει πως μπορούμε να αντιστρέψουμε το πολώνυμο  $\theta(B)$ . Μια χρονοσειρά που περιγράφεται από ένα MA(1), είναι αντιστρέψιμη αν περιγράφεται ισοδύναμα από ένα AR( $\infty$ ). Παρόμοια και κάθε στάσιμη χρονοσειρά AR(1) είναι αντιστρέψιμη αφού μπορεί να μετατραπεί σε MA( $\infty$ ).

Για το MA(1) ισχύουν επίσης τα παρακάτω,

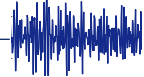
$$\begin{aligned} E(x_t) &= \mu \\ \gamma_0 = V(x_t) &= (1 + \theta_1^2)\sigma^2 \\ \gamma_1 = \text{Cov}(x_t, x_{t-s}) &= \theta_1\sigma^2 \\ \gamma_s &= 0 \text{ για } s > 1 \\ \rho_1 &= \frac{\theta_1}{1 + \theta_1^2} \\ \rho_s &= 0 \text{ για } s > 1 \\ \theta(B) \end{aligned}$$

Δηλαδή όλες οι (θεωρητικές) αυτοδιακυμάνσεις και οι αυτοσυσχετίσεις είναι μηδέν εκτός της πρώτης. Αυτό σημαίνει ότι η «μνήμη» της χρονοσειράς δεν υπερβαίνει τη μια περίοδο. Δηλαδή, μια οποιαδήποτε τιμή, έστω  $x_t$  συσχετίζεται με την προηγούμενη  $x_{t-1}$  ή την επόμενη  $x_{t+1}$  αλλά δε συσχετίζεται με καμία άλλη. Όσο αφορά τη μερική αυτοσυσχέτιση, ισχύει

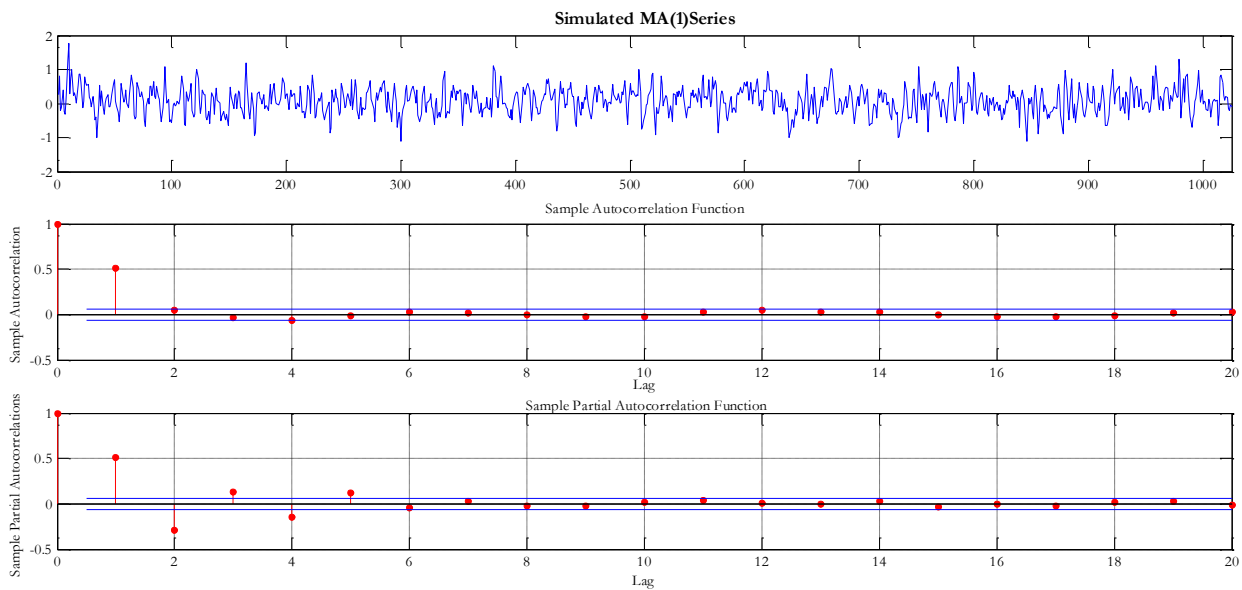
$$\begin{aligned} \rho_{11} = \rho_1 &= \frac{\theta_1}{1 + \theta_1^2} \\ \rho_{22} &= \frac{-\rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = \frac{-\theta_1^2}{1 + \theta_1^2 + \theta_1^4} \\ \rho_{33} &= \frac{-\rho_1^3}{1 - 2\rho_1^2} = \frac{-\theta_1^3}{1 + \theta_1^2 + \theta_1^4 + \theta_1^6} \\ \text{και γενικά, } \rho_{ss} &= \frac{-\theta_1^s(1 - \theta_1^2)}{1 - \theta_1^{2(s+1)}} \quad s > 0 \end{aligned}$$

Η συνάρτηση μερικής αυτοσυσχέτισης φθίνει εκθετικά με υστέρηση  $s$ , είτε μονότονα για  $\theta_1 < 0$  (και άρα  $\rho_1 > 0$ ) ή εναλλασσόμενα γύρω από το μηδέν για  $\theta_1 > 0$  (και άρα  $\rho_1 < 0$ ).

Εν ολίγοις ένα MA(1) θα εκφράζει μια χρονοσειρά  $x_t$  όταν αυτή προκύπτει ως άθροισμα μια σταθεράς  $\theta_0$ , μιας χρονοσειράς λευκού θορύβου και μιας προηγούμενης παρατήρησης  $\varepsilon_{t-1}$  του λευκού θορύβου,



π.χ.  $x_t = 0.1 + \varepsilon_t + 0.7\varepsilon_{t-1}$



### Υποδείγματα Κινούμενου μέσου MA(2)

Κινούμενο μέσου τάξης δυο λέγεται το υπόδειγμα:

$$x_t = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2}$$

όπου  $E(\varepsilon_t) = 0$  και  $\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$ . Εναλλακτικά θα μπορούσε να γραφεί και ως

$$x_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2)\varepsilon_t,$$

όπου  $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2$  το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του MA(2).

Η MA(2) είναι πάντα στάσιμη και αντιστρέψιμη όταν:

$$\begin{aligned} \theta_2 + \theta_1 &< 1 \\ \theta_2 - \theta_1 &< 1 \\ -1 &< \theta_2 < 1 \end{aligned}$$

Ακόμη ισχύουν,

$$\begin{aligned} E(x_t) &= \mu \\ \gamma_0 &= (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma^2 \\ \gamma_1 &= (\theta_1 + \theta_2\theta_1)\sigma^2 & \rho_1 &= \frac{\theta_1 + \theta_2\theta_1}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \\ \gamma_2 &= \theta_2\sigma^2 & \rho_2 &= \frac{\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \\ \gamma_k &= 0 \text{ για } k > 2 & \rho_k &= 0 \text{ για } k > 2 \end{aligned}$$



Όσο αφορά τη μερική αυτοσυσχέτιση, ισχύει

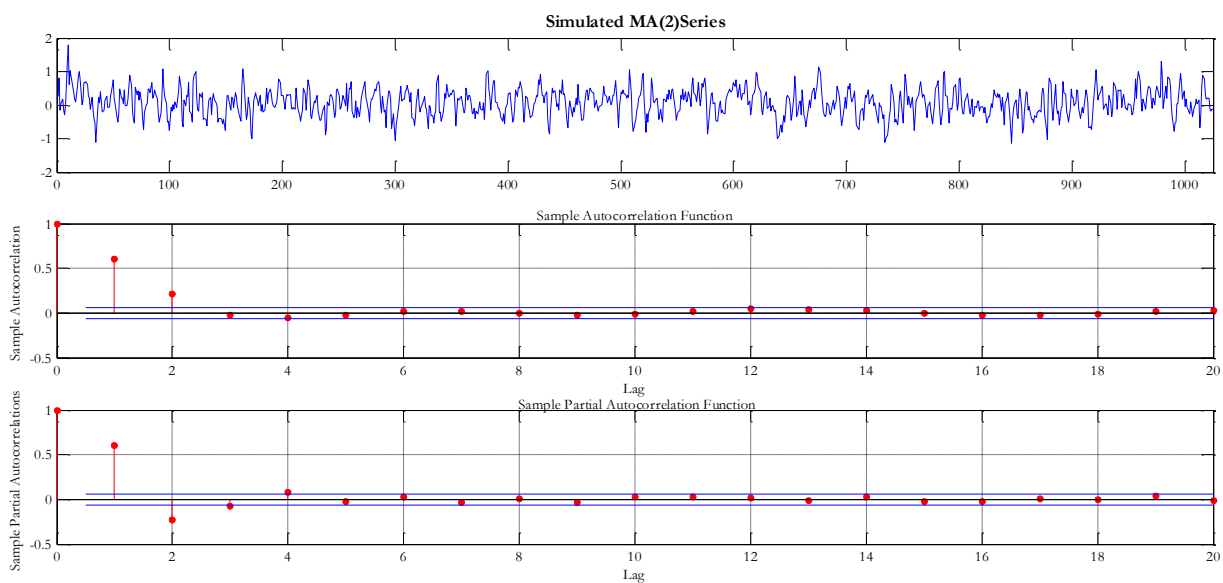
$$\rho_{11} = \rho_1 = \frac{\theta_1}{1 + \theta_1^2}$$

$$\rho_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}$$

$$\rho_{33} = \frac{\rho_3 - \rho_1 \rho_2 (2 - \rho_2)}{1 - \rho_2^2 - 2\rho_1^2 (1 - \rho_2)}$$

κ.ο.κ

π.χ.  $x_t = 0.1 + \varepsilon_t + 0.7\varepsilon_{t-1} - 0.3\varepsilon_{t-2}$



### Υποδείγματα Κινούμενου μέσου MA(q)

Κινούμενο μέσου τάξης q λέγεται το υπόδειγμα:

$$x_t = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q\varepsilon_{t-q} \quad ,$$

$$\text{όπου } E(\varepsilon_t) = 0 \text{ και } \text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 .$$

Εναλλακτικά θα μπορούσε να γραφεί και ως,

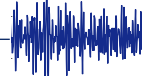
$$x_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q)\varepsilon_t,$$

όπου  $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$  το χαρακτηριστικό πολώνυμο του MA(q).

Στη γενική περίπτωση της MA(q), η αντιστρεψιμότητα εξασφαλίζεται όταν οι ρίζες της πολωνομικής εξίσωσης

$$1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q = 0,$$

είναι κατά απόλυτη τιμή μικρότερες από τη μονάδα.



Ακόμη ισχύουν,

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2) \sigma^2 \\ \gamma_k &= (\theta_k + \theta_{k+1}\theta_1 + \theta_{k+2}\theta_2 + \dots + \theta_q\theta_{q-k}) \sigma^2 \quad \text{για } k > 1, \dots, q \quad \text{και} \quad \gamma_k = 0 \quad \text{για } k > q \\ \varrho_k &= \frac{\theta_k + \theta_{k+1}\theta_1 + \theta_{k+2}\theta_2 + \dots + \theta_q\theta_{q-k}}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2} \quad \text{για } k > 1, \dots, q \quad \text{και} \quad \varrho_k = 0 \quad \text{για } k > q \end{aligned}$$

Γενικά οι αυτοδιακυμάνσεις και συνεπώς η συνάρτηση αυτοσυσχετίσεως είναι μηδέν μετά από  $q$  υστερήσεις, όπως εξάλλου συμβαίνει και στα μοντέλα AR, παρ' όλου που αυτά εκτείνονται στο άπειρο. Αντίθετα η συνάρτηση μερικής αυτοσυσχετίσεως στα μοντέλα AR( $p$ ) μηδενίζεται μετά από  $p$  υστερήσεις, ενώ για τα MA( $q$ ) εκτείνεται στο άπειρο. Λόγω αυτού, είναι πολλές φορές δύσκολο να καθοριστεί η τάξη του υποδείγματος που περιγράφει τη χρονοσειρά, με βάση και μόνο τη συνάρτηση αυτοσυσχετίσεως. Ως ένα πρόσθετο κριτήριο για το σκοπό αυτό, χρησιμοποιείται η συνάρτηση μερικής αυτοσυσχετίσεως. Οι συντελεστές μερικής αυτοσυσχετίσεως, δίνονται από τον τύπο:

$$\varrho_{ss} = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccccc} 1 & \varrho_1 & \varrho_2 & \dots & \varrho_{k-2} & \varrho_1 \\ \varrho_1 & 1 & \varrho_1 & \dots & \varrho_{k-3} & \varrho_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varrho_{k-1} & \varrho_{k-2} & \varrho_{k-3} & \dots & \varrho_1 & \varrho_k \end{array} \right| \\ \hline \left| \begin{array}{cccccc} 1 & \varrho_1 & \varrho_2 & \dots & \varrho_{k-2} & \varrho_{k-1} \\ \varrho_1 & 1 & \varrho_1 & \dots & \varrho_{k-3} & \varrho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varrho_{k-1} & \varrho_{k-2} & \varrho_{k-3} & \dots & \varrho_1 & 1 \end{array} \right| \end{array}$$

Οι αυτοσυσχετίσεις για  $k \leq q$  θα είναι σημαντικές ενώ για  $k > q$  δε θα είναι σημαντικές. Ο έλεγχος της σημαντικότητας των αυτοσυσχετίσεων μπορεί να γίνει ακριβώς με τον ίδιο τρόπο όπως στα μοντέλα AR. Όταν έχει καθοριστεί η τάξη της χρονοσειράς, οι παράμετροι μπορούν να υπολογιστούν από τις σχέσεις που συνδέουν τις αυτοσυσχετίσεις με τις παραμέτρους, αντικαθιστώντας τις αυτοσυσχετίσεις  $\varrho_k$  με τις εκτιμήσεις  $\varrho_{kk}$  του δείγματος.

### Αυτοπαλίνδρομα Υπόδειγματα Κινούμενου Μέσου (ή Μικτά Υποδείγματα) ARMA(1,1)

Ένα ARMA (1,1) ορίζεται ως εξής:

$$x_t = \varphi_0 + \varphi_1 x_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

η εναλλακτικά

$$(1 - \varphi B) x_t = (1 - \theta B) \varepsilon_t \quad \text{ή} \quad x_t = \frac{(1 - \theta B)}{(1 - \varphi B)} \varepsilon_t$$

Με συνθήκη στασιμότητας για  $|\varphi| < 1$  και συνθήκη αντιστρεψιμότητας για  $|\theta| < 1$ . Ακόμη ισχύουν,



$$\gamma_0 = \frac{1 + \theta_1^2 - 2\varphi_1\theta_1}{1 - \varphi_1^2} \sigma^2$$

$$\gamma_1 = \frac{(1 - \varphi_1\theta_1)(\varphi_1 - \theta_1)}{1 - \varphi_1^2} \sigma^2$$

$$\gamma_k = \varphi_1 \gamma_{k-1} \text{ για } k \geq 2$$

$$\varrho_1 = \frac{(1 - \varphi_1\theta_1)(\varphi_1 - \theta_1)}{1 + \theta_1^2 - 2\varphi_1\theta_1}$$

$$\varrho_k = \varphi_1 \varrho_{k-1} \text{ για } k \geq 2$$

Με συνθήκες στασιμότητας και αντιστρεψιμότητας του υποδείγματος, ως προς τις αυτοσυσχετίσεις,

$$|\varrho_2| < |\varrho_1|$$

$$\varrho_2 > \varrho_1(2\varrho_1 + 1) \text{ για } \varrho_1 < 0$$

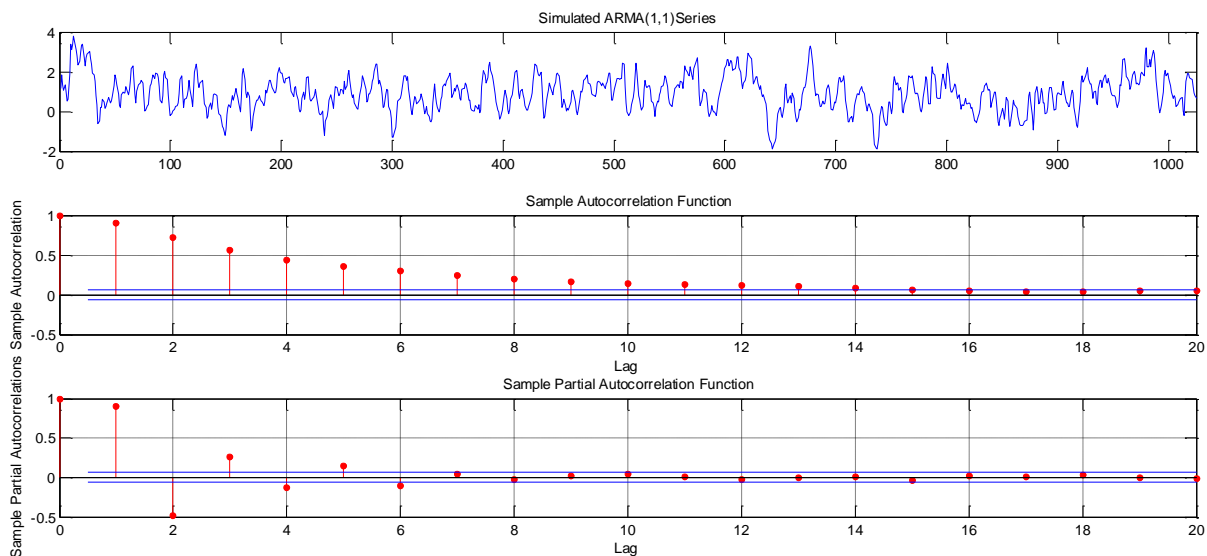
$$\varrho_2 > \varrho_1(2\varrho_1 - 1) \text{ για } \varrho_1 > 0$$

Η συνάρτηση αυτοσυσχετίσεως για το ARMA(1,1) φθίνει γεωμετρικά καθώς αυξάνεται το  $k$ . Η μείωση ξεινά από το  $\varrho_1$  και όχι από το  $\varrho_0=1$  όπως στη περίπτωση του AR(1). Η συνάρτηση μερικής αυτοσυσχετίσεως, συμπεριφέρεται όπως στο MA(1) και φθίνει επίσης γεωμετρικά. Οι συντελεστές μερικής αυτοσυσχετίσεως, υπολογίζονται όπως και στην περίπτωση ενός AR(p).

$$\varrho_{11} = \varrho_1$$

$$\varrho_{22} = \frac{\varrho_2 - \varrho_1^2}{1 - \varrho_1^2} = \frac{\varphi_1\varrho_1 - \varrho_1^2}{1 - \varrho_1^2} \text{ κ.ο.κ}$$

π.χ.  $x_t = 0.2 + 0.8x_{t-1} + \varepsilon_t + 0.7\varepsilon_{t-1}$







## Αυτοπαλίνδρομα Υπόδειγματα Κινούμενου Μέσου ARMA(p,q)

Ένα ARMA (p,q) ορίζεται ως εξής:

$$x_t = \varphi_0 + \varphi_1 x_{t-1} + \varphi_2 x_{t-2} + \dots + \varphi_p x_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} .$$

Η εναλλακτικά,

$$\varphi(B)x_t = \theta(B)\varepsilon_t$$

Όπου  $\varphi(B) = 1 - \varphi_1 B - \dots - \varphi_p B^p$  και  $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$  τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα της MA(p) και AR(q). Περιέχει το AR μέρος τάξης p και το MA μέρος τάξης q. Ισοδύναμα μπορεί να θεωρηθεί σαν AR(p) με σφάλματα που ακολουθούν MA(q) ή σαν MA(q) με σφάλματα που ακολουθούν AR(p). Προσπαθώντας την αποφυγή μεγάλων τάξεων για κάθε AR ή MA υπόδειγμα, επιδιώκεται ο παραπάνω συνδυασμός, αναλύοντας μια χρονοσειρά σε δύο μέρη, το αιτιοκρατικό και το στοχαστικό αντίστοιχα. Έτσι ένα στοιχείο της χρονοσειράς για κάθε χρονική στιγμή t ορίζεται από το γραμμικό συνδυασμό p προηγούμενων στοιχείων της χρονοσειράς και q προηγούμενων στοιχείων λευκού θορύβου, που δηλώνουν τις τυχαίες διακυμάνσεις (εξωτερικές επιδράσεις στο υπό μελέτη σύστημα) τις τελευταίες q χρονικές στιγμές<sup>11</sup>.

Από τα προηγούμενα, η σειρά είναι, στάσιμη, όταν οι ρίζες της  $\varphi(B)=0$  είναι έξω από το μοναδιαίο κύκλο και αντιστρέψιμη, όταν οι ρίζες της  $\theta(B)=0$  είναι έξω από το μοναδιαίο κύκλο.

Οι πρώτες q αυτοσυσχετίσεις, για  $k \leq q$  εξαρτώνται από τους συντελεστές του AR όσο και από MA τμήματος. Για  $k > q$ , οι αυτοσυνδιακυμάνσεις και οι αυτοσυσχετίσεις είναι ίδιες με αυτές μιας AR(p) χρονοσειράς, δηλαδή:

$$\gamma_k = \varphi_1 \gamma_{k-1} + \varphi_2 \gamma_{k-2} + \dots + \varphi_p \gamma_{k-p} \quad \text{για } k > q$$

$$\rho_k = \varphi_1 \rho_{k-1} + \varphi_2 \rho_{k-2} + \dots + \varphi_p \rho_{k-p} \quad \text{για } k > q$$

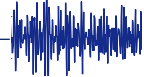
Γενικότερα η συνάρτηση αυτοσυσχετίσεως μιας ARMA(p,q) χρονοσειράς συμπεριφέρεται όπως μιας AR(p), ενώ η συνάρτηση μερικής αυτοσυσχετίσεως όπως μιας MA(q) για  $s > q - p$ .

Η μορφή της συνάρτησης αυτοσυσχετίσεως και μερικής αυτοσυσχετίσεως, δίνεται συνοπτικά για κάθε υπόδειγμα στον παρακάτω πίνακα.

<sup>11</sup> Κουγιουμτζής, σελ. 63.



Χρονοσειρά	Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης ( $\rho_k$ )	Συνάρτηση Μερικής Αυτοσυσχέτισης ( $\rho_{kk}$ )
<b>AR(1)</b>	Φθίνει εκθετικά: στα θετικά αν $\varphi_1 > 0$  Εναλλάσσει το πρόσημο ξεκινώντας από τα αρνητικά αν $\varphi_1 < 0$	Σημαντική τιμή για lag=1 και μετά μηδενίζεται.  Θετική τιμή αν $\varphi_1 > 0$ και αρνητική αν $\varphi_1 < 0$
<b>AR(p)</b>	Φθίνει εκθετικά ή ακολουθώντας ημιτονοειδή συμπεριφορά	Σημαντικές τιμές για υστέρηση = 1, ..., p μετά μηδενίζεται
<b>MA(1)</b>	Σημαντική τιμή για lag=1 και μετά μηδενίζεται.  Θετική τιμή αν $\theta_1 < 0$ και αρνητική αν $\theta_1 > 0$	Φθίνει εκθετικά: προς τα αρνητικά αν $\theta_1 > 0$ .  Εναλλάσσει πρόσημο ξεκινώντας από τα θετικά αν $\theta_1 < 0$
<b>MA(q)</b>	Σημαντικές τιμές για υστέρηση = 1, ..., q και μετά μηδενίζεται	Φθίνει εκθετικά ή αποσβήνει ακολουθώντας ημιτονοειδή συμπεριφορά. Εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τα $\theta_1, \dots, \theta_q$
<b>ARMA(p,q)</b>	Φθίνει εκθετικά	Φθίνει εκθετικά

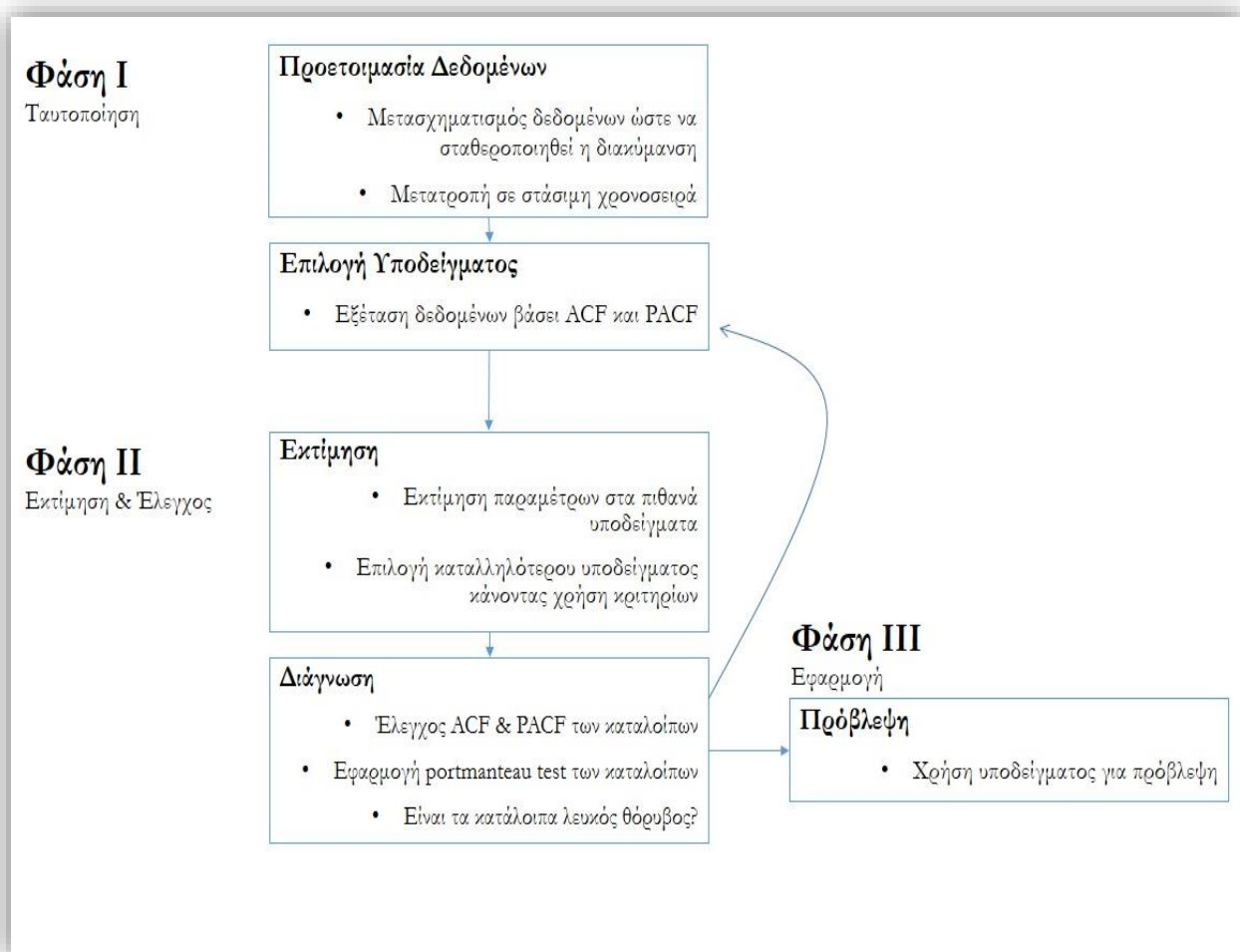


### 3. Ανάλυση Χρονοσειρών

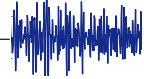
Θεωρώντας ότι η χρονοσειρά αποτελεί τη πραγματοποίηση μια στοχαστικής διαδικασίας, γίνεται προσπάθεια προσαρμογής κάποιων γραμμικών υποδειγμάτων στη χρονοσειρά ώστε στη συνέχεια να γίνει πρόβλεψη των τιμών μέσω αυτού. Το υπόδειγμα αποτελεί την εκτίμηση της στοχαστικής διαδικασίας που παράγει τη εκάστοτε παρατηρούμενη χρονοσειρά.

Η μεθοδολογία των Box-Jenkins, περιλαμβάνει τρία στάδια μέσω των οποίων προσδιορίζεται το κατάλληλο υπόδειγμα:

- α) την ταυτοποίηση (identification),
- β) την εκτίμηση (estimation),
- γ) το διαγνωστικό έλεγχο (diagnostic checking) και στη συνέχεια
- δ) την πρόβλεψη.<sup>12</sup>



<sup>12</sup> Makridakis et al. (1998), σελ. 314.



**Η ταυτοποίηση** επιτυγχάνεται αρχικά ελέγχοντας τη μορφή του διαγράμματος της χρονοσειράς, για ασυνήθιστες παρατηρήσεις και μετασχηματίζοντας τα δεδομένα, αν είναι απαραίτητο, για να σταθεροποιηθεί η διακύμανση. Στη συνέχεια γίνεται εξέταση των αυτοσυσχετίσεων και μερικών αυτοσυσχετίσεων του δείγματος.

Αν η αυτοσυσχέτιση για κάθε υστέρηση είναι στατιστικά ασήμαντη, η χρονοσειρά μπορεί να θεωρηθεί λευκός θόρυβος και η προσαρμολογία οποιουδήποτε υποδείγματος δεν έχει νόημα.

Αν το διάγραμμα (time plot) δείχνει τα δεδομένα να διαχέονται οριζοντίως γύρω από μια σταθερή μέση τιμή ή ισοδύναμα οι αυτοσυσχετίσεις συγκλίνουν ταχύτατα προς το μηδέν ή γύρω από αυτό, τότε η χρονοσειρά είναι στάσιμη. Αντίθετα αν το διάγραμμα δεν έχει οριζόντια κατεύθυνση ή η αυτοσυσχέτιση είναι ισχυρή και φθίνει με αργό ρυθμό, τότε δεν είναι στάσιμη. Στην περίπτωση που δεν είναι, μετατρέπεται σε στάσιμη, με μια διαδικασία διαφορίσης, παίρνοντας τις πρώτες ή τις δεύτερες κ.ο.κ διαφορές.

Όταν επιτευχθεί η στασιμότητα, εξετάζονται εκ νέου οι αυτοσυσχετίσεις και αν δεν υπάρχουν σημαντικές τιμές μετά από κάποια υστέρηση  $q$  τότε ένα υπόδειγμα  $MA(q)$  ίσως είναι καταλληλότερο. Αν το ίδιο μοτίβο επαναλαμβάνεται στις μερικές αυτοσυσχετίσεις μετά από κάποια υστέρηση  $p$ , τότε το υπόδειγμα μπορεί να είναι  $AR(p)$ . Αν εξακολουθεί να μην είναι ξεκάθαρο «δια όψη» το καταλληλότερο υπόδειγμα, ίσως είναι απαραίτητο ένα μικτό υπόδειγμα  $ARMA(p, q)$ .

**Η εκτίμηση**, αναφέρεται στις τιμές των  $p$  παραμέτρων της  $AR$  διαδικασίας και των  $q$  παραμέτρων της  $MA$  διαδικασίας, που συνιστούν το  $ARMA$  υπόδειγμα.

**Ο διαγνωστικός έλεγχος**, πραγματοποιείται προσαρμολοζοντας το υπόδειγμα και ελέγχοντας την καταλληλότητά του. Στην ανάλυση των χρονοσειρών η επιλογή και η επάρκεια του ταυτίζεται συνήθως με τις ασφαλείς προβλέψεις που προκύπτουν από το υπόδειγμα στη συνέχεια. Αν το υπόδειγμα αντλεί όλη την πληροφορία της χρονοσειράς τότε εκφράζει ικανοποιητικά τη διαδικασία από την οποία προέρχονται τα δεδομένα. Ο έλεγχος που γίνεται κυρίως είναι έλεγχος ανεξαρτησίας στη χρονοσειρά των υπολοίπων<sup>13</sup>, αν δηλαδή τα κατάλοιπα (residuals : υπόλοιπα ή σφάλματα) αυτοσυσχετίζονται ή είναι λευκός θόρυβος.

Στην πράξη δεν υπάρχει η έννοια του βέλτιστου υποδείγματος αντιθέτως ίσως υπάρχουν αρκετά που έχουν ικανοποιητικά αποτελέσματα. Π.χ. Ένα  $ARMA(p, q)$  μικρής τάξης προσαρμολοζεται εξίσου καλά με ένα  $AR(p)$  ή  $MA(q)$  μεγάλης τάξης. Ωστόσο οι μεγάλες τάξεις αποφεύγονται γιατί εκτός από πληροφορία συνήθως υπεισέρχεται και θόρυβος.

Το ίδιο μειονέκτημα έχει η υπερπροσαρμογή (overfitting), όπου ο έλεγχος ενός υποδείγματος  $ARMA(p, q)$ , επιτυγχάνεται συγκρίνοντάς το με ένα άλλο μεγαλύτερης τάξεως (overfitting), δηλαδή  $ARMA(p+1, q)$  ή  $ARMA(p, q+1)$ . Αν το εκτιμώμενο υπόδειγμα περιγράφει επαρκώς τη διαδικασία που παρήγαγε τα δεδομένα και τα κατάλοιπα της προσαρμολογής είναι λευκός θόρυβος, τότε το ίδιο αναμένεται να ισχύει και για τις μεγαλύτερες τάξεις. Αυξάνοντας την τάξη του υποδείγματος, μειώνεται το άθροισμα των τετραγώνων των καταλοίπων(σφαλμάτων), αλλά μειώνονται και οι βαθμοί ελευθερίας, αφού εκτιμώνται περισσότεροι παράμετροι. Δεν υπάρχει λοιπόν μόνο «κέρδος» από την προσθήκη μεταβλητών αλλά και «κόστος».

<sup>13</sup> Κουγιουμτζής, σελ. 59 κ. εξ.

Ο έλεγχος των καταλοίπων γίνεται με το κριτήριο των Ljung και Box (Q test), τον έλεγχο σημαντικών αυτοσυσχετίσεων Portmanteau, τη μέθοδο ροπών, ελαχίστων τετραγώνων και η χρήση τους εξαρτάται από το προτεινόμενο υπόδειγμα.



Δuo ευρέως διαδεδομένα κριτήρια για την επιλογή του υποδείγματος είναι το κριτήριο πληροφοριών<sup>14</sup> Akaike (Akaike Information Criterion) ή AIC και το κριτήριο Μπεϋζιανής πληροφορίας (Bayesian Information Criterion) ή BIC.

$$\text{AIC} = -2 \log L + 2m$$

$$\text{BIC} = -2 \log L + m \log(T),$$

T, το πλήθος των στοιχείων της χρονοσειράς

L η μέγιστη πιθανοφάνεια

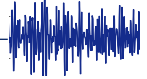
m, το πλήθος των παραμέτρων που εκτιμώνται (p+q+1).

Προσαρμόζοντας υποδείγματα κάθε συνδυασμού παραμέτρων, υπολογίζονται τα παραπάνω κριτήρια και συγκρίνοντας τις τιμές τους, επιλέγεται το υπόδειγμα με τη μικρότερη τιμή σε αυτά.

---

<sup>14</sup> Box (1994), σελ. 201.

Υπάρχουν και νεότερες εκτιμήσεις των κριτηρίων βλ. Shumway (2011) σελ. 52.



## 4. Δεδομένα

Ας θεωρήσουμε  $\eta(t)$  τη συνάρτηση της ανύψωσης σε ένα σταθερό σημείο της αδιατάρακτης επιφάνειας της θάλασσας. Η καταγραφή της ανύψωσης συνίσταται σε μία ακανόνιστη αλληλουχία «κορυφών» και «κοιλιάδων» που αντιστοιχούν σε τοπικά μέγιστα και ελάχιστα της συνάρτησης. Το φαινόμενο μελετάται πλήρως μέσω της θεωρίας των στάσιμων, εργοδικών και κανονικών στοχαστικών διαδικασιών. Η κάθε καταγραφή θεωρείται ως μια από τις πολλές καταγραφές που θα μπορούσε να συμβούν στο ίδιο σημείο και υπό τις ίδιες συνθήκες, αποτελεί δηλαδή μια από τις άπειρες δυνατές πραγματοποιήσεις της στοχαστικής διαδικασίας. Η στοχαστική θεώρηση των ανεμογενών κυματισμών συνίσταται στην αναπαράσταση της ανύψωσης μέσω ενός αθροίσματος συνημιτονοειδών συναρτήσεων με τυχαίες και ομοιόμορφα κατανεμημένες φάσεις.

$$\eta(t; \beta) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \cos(\omega_i t + \varphi_i(\beta))$$

Όπου  $\omega_i$  οι διαφορετικές συχνότητες,  $\varphi_i$  οι γωνίες των φάσεων,  $\alpha_i$  τα πλάτη, ενώ το  $\beta$  χρησιμοποιείται για να διαφοροποιεί την κάθε πραγματοποίηση της στοχαστικής διαδικασίας  $\eta(t; \beta)$ . Η εργοδικότητα επιτρέπει τη στατιστική μελέτη της στοχαστικής διαδικασίας από μια μόνο πραγματοποίηση της<sup>15</sup>.

Αν  $\eta_i = \{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_n\}$  είναι μια σειρά  $t$  διαδοχικών καταγραφών του φαινομένου της ανύψωσης, τότε αποτελεί μια συγκεκριμένη πραγματοποίηση της διαδικασίας άρα μια χρονοσειρά.

Η εργασία βασίζεται σε δεδομένα της δεκαετίας 2000-2011 που αναφέρονται στην ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας της θάλασσας για τέσσερις περιοχές στο ελληνικό θαλάσσιο χώρο. Τα δεδομένα προέρχονται από επιτόπιες μετρήσεις πλωτών ή παράκτιων μετρητικών σταθμών, από το σύστημα ΠΟΣΕΙΔΩΝ του ΕΛ.ΚΕ.Θ.Ε.. Περαιτέρω επεξεργασία και ανάλυση επιτυγχάνεται αντλώντας πληροφορίες για το σημαντικό ύψος  $H_{m_0}$ , την κύρια κατεύθυνση των κυματισμών  $M_{dir}$ , όπως επίσης και την περίοδο που αντιστοιχεί στην κορυφή φάσματος  $T_p$ .

- Σημαντικό Ύψος  $H_{m_0} \approx 4\sqrt{m_0}$ , όπου  $m_0$  είναι η φασματική ροπή μηδενικής τάξης.

Το αντίστοιχο στατιστικό μέγεθος ορίζεται πάνω στην καταγραφή την ανύψωσης της θάλασσας, αναδιατάσσοντας μια ακολουθία των υψών κύματος  $H_1, H_2, \dots, H_N$  έστω κατά φθίνουσα τάξη και λαμβάνοντας το μέσο όρο του  $1/3$  των υψηλότερων υψών κύματος, δηλαδή<sup>16</sup>

$$H_{m_0} = \frac{\sum_{i=1}^{[N/3]} H_{i:N}}{[N/3]}, \quad [N/3] = \text{ακέραιο μέρος του } N/3$$

<sup>15</sup> Σουκισιάν κ.α (2007), σελ. Α6-11.

<sup>16</sup> Το ίδιο, σελ 13.



- Περίοδος  $T_p = \frac{1}{\omega_p}$  με  $\left. \frac{dS_{\eta_j}(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_p} = 0$ ,

όπου  $\omega_p$  είναι η συχνότητα κορυφής φάσματος και  $m_j$  για  $j=0,1,2,3,4$  είναι οι φασματικές ροπές  $j$ -τάξης.

- Κατεύθυνση Κύματος  $M_{dir}$ , υπολογίζεται ως δεξιόστροφη γωνία σε μοίρες με αρχή την κατεύθυνση του Βορρά.

Η δειγματοληψία των δεδομένων έχει πραγματοποιηθεί σε αργή κλίμακα χρόνου<sup>17</sup>, οι καταγραφές γίνονται ανά δευτερόλεπτο για τη διάρκεια 17 λεπτών και επαναλαμβάνεται κάθε τρεις ώρες.

Η ακριβή γεωγραφική θέση των σταθμών όπου έγιναν οι καταγραφές είναι,

Περιοχή	Γεωγραφικό πλάτος	Γεωγραφικό μήκος
Άθως	40.06°	24.60°
Σαντορίνη	36.25°	25.46°
Σκύρος	38.98°	24.48°
Πύλος	36.87°	21.66°

---

<sup>17</sup> Σουκισιάν κ.α (2007), σελ. Α6.

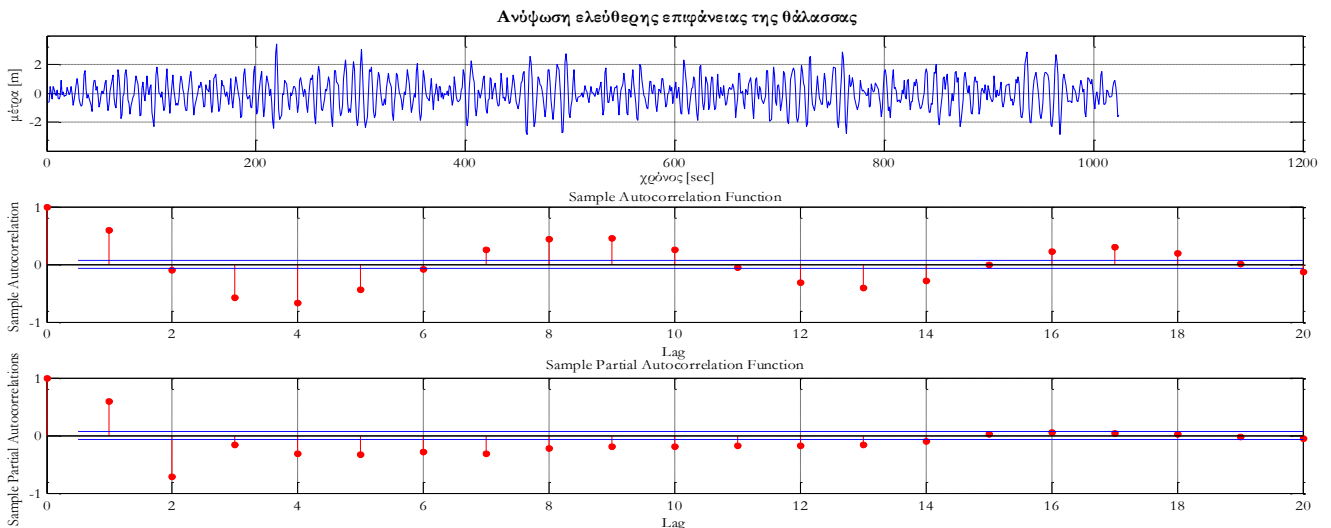


## 5. Μεθοδολογία

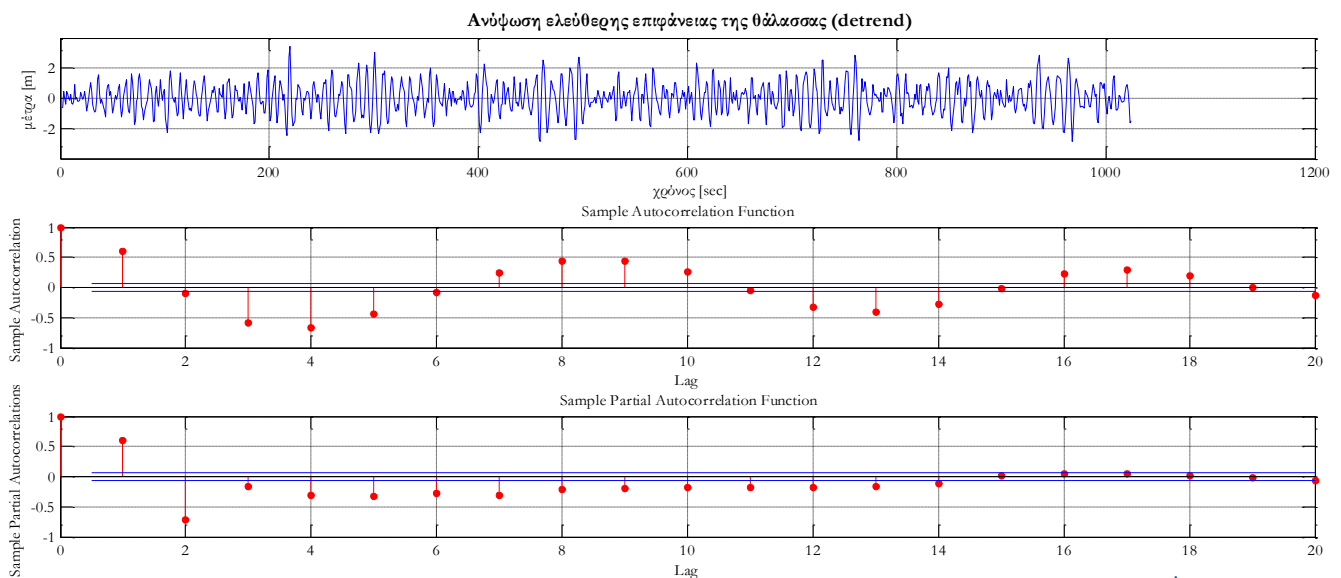
Χρησιμοποιώντας το λογισμικό MATLAB (MathWorks), αναλύθηκαν συνολικά 50.825 χρονοσειρές. Η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε είναι η εξής,

### A) Απαλοιφή τάσης, έλεγχος στασιμότητας

Λειτουργώντας μεμονωμένα το διάγραμμα μιας χρονοσειράς δε δείχνει να υπάρχει κάποια τάση, το σχήμα εκτείνεται οριζόντια και ομαλά γύρω από τη μέση τιμή που είναι το μηδέν. Οι αυτοσυσχετίσεις συγκλίνουν προς το μηδέν ή γύρω από αυτό. Άρα η χρονοσειρά επιβεβαιώνεται οπτικά ότι είναι στάσιμη.



Για τυπικούς λόγους ωστόσο, αφαιρείται η τάση (detrend.m), η μέση τιμή μικραίνει ελάχιστα προσεγγίζοντας περισσότερο το 0. Τα διαγράμματα γίνονται εκ νέου χωρίς όμως να υπάρχει κάποια ουσιαστική διαφορά.







Ελέγχοντας τα διαγράμματα των αυτοσυσχετίσεων καμία πληροφορία δεν αντλείται για το προτεινόμενο υπόδειγμα που θα μπορούσε να περιγράψει τη διαδικασία της χρονοσειράς. Αυτό εκ πρώτης σημαίνει ότι ένα AR(p) ή MA(q) υπόδειγμα ίσως δε είναι κατάλληλο, οπότε ίσως είναι απαραίτητο ένα μικτό υπόδειγμα APMA (p, q).

Επιπρόσθετα, επειδή το πλήθος των υπό μελέτη χρονοσειρών είναι αρκετά μεγάλο, ο οπτικός έλεγχος απορρίπτεται κυρίως για εξοικονόμηση χρόνου.

## B) Προσαρμογή υποδειγμάτων και Διαγνωστικός Έλεγχος

Προκειμένου να γίνει εκτίμηση των παραμέτρων του υποδείγματος, προσαρμόζονται σε κάθε χρονοσειρά (fitting.m) υποδείγματα ARMA(p,q) για όλους τους συνδυασμούς από  $p=1$  έως 5 και  $q=1$  έως 5. Στη συνέχεια ο διαγνωστικός έλεγχος της καταλληλότητας των υποδειγμάτων πραγματοποιείται μέσω των κριτηρίων πληροφορίας AIC και BIC. Υπολογίζεται για κάθε υπόδειγμα το κριτήριο και επιλέγεται η μικρότερη τιμή του. Ο συνδυασμός των παραμέτρων p, q που δίνει τη μικρότερη τιμή του κριτηρίου, σημειώνεται ως ο καταλληλότερος για την κάθε χρονοσειρά και αποθηκεύεται. Η διαδικασία συνεχίζεται για την επόμενη χρονοσειρά και στη συνέχεια για τις χρονοσειρές της επόμενης περιοχής. Σε περίπτωση που η διαδικασία δεν μπορεί να ανιχνεύσει το κατάλληλο υπόδειγμα, η χρονοσειρά παρακάμπτεται και σημειώνεται ως σφάλμα. Ο απαιτούμενος χρόνος της διαδικασίας για μια χρονοσειρά 1024 στοιχείων είναι περίπου 110sec.

Τα δεδομένα είναι χωρισμένα σε αρχεία ανά περιοχή και τη χρονική περίοδο που πραγματοποιήθηκε η δειγματοληψία.

### Άθως:

2001-2007 : 7.738 χρονοσειρές

2007-2011 : 7.416 χρονοσειρές

### Σαντορίνη:

2000-2007 : 13.458 χρονοσειρές,

2007-2008 : 2.494 χρονοσειρές,

2008-2011 : 7.265 χρονοσειρές,

### Πύλος:

2007-2011 : 6.081 χρονοσειρές,

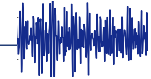
### Σκύρος:

2007-2011 : 6.373 χρονοσειρές,

Τα αποτελέσματα ( $W_{final}$ ) είναι πίνακες, που ως στοιχεία έχουν το συνδυασμό των παραμέτρων (p, q) στη θέση της κάθε χρονοσειράς που έγινε αναλήψη και αποθηκεύονται για κάθε αρχείο δεδομένων. Στη συνέχεια για συνολική επισκόπηση τα αποτελέσματα κατηγοριοποιούνται ανά περιοχή αλλά και βάσει υποδείγματος.

Εντοπίζονται (frequency pq.m) τα έξι πιο συχνά εμφανιζόμενα υποδείγματα, σε όλο τον πληθυσμό και στη συνέχεια εντοπίζονται τα λάθη που παρακάμπει η διαδικασία (error.m).

Για κάθε επικρατέστερο υπόδειγμα εντοπίζονται οι θέσεις των χρονοσειρών που περιγράφονται επαρκώς με αυτά (idx.m).



### Γ) Στατιστική Ανάλυση Φασματικών Παραμέτρων

Περνώντας στα συμπληρωματικά δεδομένα του κάθε αρχείου, χρησιμοποιούνται οι πληροφορίες του Σημαντικού Ύψους  $H_{m0}$ , της περιόδου  $T_p$  και της Κύριας Κατεύθυνσης του κύματος  $M_{dir}$ , και που αντιστοιχεί σε κάθε μια χρονοσειρά του δείγματος αλλά και σε κάθε περιοχή.

Υπολογίζεται η μέση τιμή (mean) και η τυπική απόκλιση (standard deviation) του Σημαντικού Ύψους  $H_{m0}$  και της Περιόδου  $T_p$  για κάθε υπόδειγμα (stat\_6.m), για το δείγμα (stat\_sample.m) και για κάθε περιοχή (stat\_total.m).

$$\text{mean : } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\text{standard deviation : } s = \left( \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ ή } \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Σε κάποια αρχεία δεδομένων οι τιμές των παραπάνω βαθμωτών φασματικών παραμέτρων λείπουν, έχοντας αντικατασταθεί από τη τιμή -9999,99023 που φυσικά δεν ανταποκρίνεται στα πραγματικά δεδομένα του υπό μελέτη συστήματος. Οι τιμές αυτές θεωρούνται missing values και απαλείφονται (NaN.m) θεωρώντας ότι δεν επηρεάζουν τη συνολική εικόνα του φαινομένου.

Γίνονται τα ιστογράμματα για τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση του σημαντικού ύψους (MHmoSHmo\_graph.m) και της περιόδου (MTpSTp\_graph.m) για κάθε υπόδειγμα και περιοχή.

Κατασκευάζονται κυκλικά διαγράμματα σχετικών συχνοτήτων για την κατεύθυνση του κύματος (Mdir\_graph.m) σε κάθε περιοχή. Για το διάγραμμα της κατεύθυνσης τα δεδομένα μετατράπηκαν σε rad (rad.m).

Τέλος, κατηγοριοποιημένα ανά υπόδειγμα παρουσιάζονται τα ραβδογράμματα σχετικών συχνοτήτων του σημαντικού ύψους, της περιόδου και τα κυκλικά διαγράμματα της κατεύθυνσης στις τέσσερις περιοχές. Όπως επίσης και οι κατευθύνσεις των κυμάτων, σε κάθε υπόδειγμα.

Στα γραφήματα, ο τύπος της κατανομής σχετικών συχνοτήτων, περιγράφεται ελέγχοντας κατά πόσο η κατανομή είναι συμμετρική ή ασύμμετρη και στην περίπτωση που δεν είναι ελέγχοντας το μεγαλύτερο μέρος της κατανομής αν είναι προς τα δεξιά ή προς τα αριστερά. Για τον παραπάνω έλεγχο χρησιμοποιούνται οι συντελεστές λοξότητας (coefficient of skewness) και ο συντελεστής κύρτωσης (coefficient of kurtosis), που θεωρούνται γενικεύσεις της διασποράς. (skewness.m)

$$\text{skewness : } \alpha_3 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{s^3}$$

$$\text{kurtosis : } \alpha_4 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{s^4}$$



- Αν  $\alpha_3 > 0$ , οι περισσότερες τιμές βρίσκονται δεξιά της επικρατούσας τιμής – κορυφής (αντίθετα αν  $\alpha_3 < 0$ ).
- Αν  $\alpha_4 > 3$  η κατανομή λέγεται λεπτόκυρτη, αντίθετα λέγεται πλατύκυρτη.
- Αν  $\alpha_4 = 3$ , η κατανομή δεν είναι ούτε υπερβολικά μυτερή ούτε πλατιά και προσεγγίζεται από την κανονική κατανομή.<sup>18</sup>

Ακόμη είναι γνωστό ότι η μέση τιμή μετακινείται αντίθετα από την κατεύθυνση της λοξότητας. Μάλιστα αν και θεωρείται η σημαντικότερη από τα μέτρα κεντρικής τάσης, επηρεάζεται πάρα πολύ από τις πολύ μεγάλες ή τις πολύ μικρές τιμές του δείγματος και μπορεί πολλές φορές να δημιουργήσει λάθος εντύπωση. Αντίθετα η διάμεσος δεν επηρεάζεται από τις ακραίες τιμές. Επιβάλλεται λοιπόν η σύγκριση και αυτών των παραμέτρων.

---

<sup>18</sup> Μπόρα – Σέντα (1999), σελ. 134.



## 6. Παρουσίαση αποτελεσμάτων - Στατιστική ανάλυση δεδομένων

Στην περιοχή του Άθω, αναλύθηκαν 15154 χρονοσειρές, δεκαέξι από τις οποίες δεν προσαρμόστηκαν σε κανένα υπόδειγμα που εφαρμόστηκε. Τα σφάλματα αντιπροσωπεύουν το 0,1% του δείγματος άρα δεν λαμβάνονται υπόψιν. Το υπόδειγμα ARMA(2,5) είναι το επικρατέστερο, καθώς για το 14,65% του δείγματος δηλαδή 2221 χρονοσειρές, αξιολογήθηκε βάσει των κριτηρίων AIC/BIC ως το πιο κατάλληλο για την περιγραφή της στοχαστικής διαδικασίας που τις αναπαράγει. Το 14,08% του δείγματος μοντελοποιείται επαρκώς με το υπόδειγμα ARMA(2, 4) ενώ κάθε άλλο υπόδειγμα είναι λιγότερο συχνό και κατάλληλο για μικρότερο πλήθος χρονοσειρών.

Άθως 2001-2011 Υπόδειγμα	Πλήθος χρονοσειρών	Ποσοστό επί του δείγματος
ARMA(2,4)	2134	14.08%
<b>ARMA(2,5)</b>	2221	14.65%
ARMA(3,4)	1506	9.93%
ARMA(3,5)	1285	8.48%
ARMA(5,2)	635	4.2%
ARMA(5,4)	1096	7.2%
Σύνολο	15154	
<b>Σφάλματα</b>	16	0.1%

Στην περιοχή της Σαντορίνης, το δείγμα ήταν το μεγαλύτερο σε αριθμό παρατηρήσεων. Οι καταγραφές αφορούν χρονική περίοδο 2000-2011, περιλαμβάνουν 23217 χρονοσειρές εκ των οποίων το 0.05% δεν ήταν συμβατό στη διαδικασία εκτίμησης του υποδείγματος. Από αυτές 3775 χρονοσειρές, δηλαδή ένα ποσοστό 16.16% προς όλο το δείγμα, περιγράφεται αποτελεσματικότερα με το υπόδειγμα ARMA (2,5), αφήνοντας δεύτερο το ARMA (2,4) με ποσοστό εμφάνισης 11.35%.

Σαντορίνη 2000-2011 Υπόδειγμα	Πλήθος χρονοσειρών	Ποσοστό επί του δείγματος
ARMA(2,4)	2636	11.35%
<b>ARMA(2,5)</b>	3775	16.26%
ARMA(3,4)	1327	5.71%



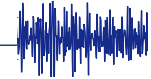
ARMA(3,5)	2126	9.15%
ARMA(5,2)	1491	6.42%
ARMA(5,4)	2325	10.01%
Σύνολο	23217	
<b>Σφάλματα</b>	11	0.05%

Στην περιοχή της Πύλου, τα δεδομένα αφορούν τη πενταετία 2007-2011, αποτελούνται από 6081 χρονοσειρές και μόλις τρία σφάλματα. Το 12.81% του δείγματος, δηλαδή 779 χρονοσειρές, περιγράφονται επαρκώς με το υπόδειγμα ARMA(5,4) και το 12.02% με το υπόδειγμα ARMA (2,5).

Πύλος 2007-2011 Υπόδειγμα	Πλήθος χρονοσειρών	Ποσοστό επί του δείγματος
ARMA(2,4)	614	10,09%
ARMA(2,5)	731	12,02%
ARMA(3,4)	461	7,58%
ARMA(3,5)	411	6,76%
ARMA(5,2)	73	1,2%
<b>ARMA(5,4)</b>	779	12,81%
Σύνολο	6081	
<b>Σφάλματα</b>	2	0,03%

Στην περιοχή της Σκύρου, τα δεδομένα επίσης αναφέρονται στη πενταετία 2007-2011 και συνίστανται από 6373 χρονοσειρές, με μόνο τρεις (0.03%) να θεωρούνται ως σφάλματα. Το συχνότερο υπόδειγμα είναι και πάλι το ARMA(2,5) με ποσοστό εμφάνισης επί του δείγματος 17.16%, δηλαδή 1094 χρονοσειρές. Ενώ 738 χρονοσειρές μοντελοποιούνται επαρκώς με το ARMA(2,4).

Σκύρος 2007-2011 Υπόδειγμα	Πλήθος χρονοσειρών	Ποσοστό επί του δείγματος
ARMA(2,4)	738	11,58%
<b>ARMA(2,5)</b>	1094	17,16%
ARMA(3,4)	231	3,62%
ARMA(3,5)	398	6,24%



ARMA(5,2)	709	11,12%
ARMA(5,4)	427	6,7%
Σύνολο	6373	
Σφάλματα	2	0,03%

Συνολικά αναλύθηκαν 50825 χρονόσειρες που αφορούν την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας της θάλασσας. Οι καταγραφές έχουν γίνει κατά τη διάρκεια των ετών 2000 - 2011 σε τέσσερις περιοχές του ελληνικού θαλάσσιου χώρου. Από το δείγμα αυτό, μόνο 31 χρονόσειρές δηλαδή ένα ποσοστό 0.06%, δεν ήταν συμβατές στη διαδικασία ελέγχου της καταλληλότητας του υποδείγματος και παρακάμφθηκαν. Το υπόδειγμα που περιγράφει επαρκώς τη διαδικασία από την οποία προέκυψαν οι χρονόσειρές και εμφανίζεται πιο συχνά στο δείγμα, είναι το ARMA(2,5). Το ποσοστό εμφάνισης αυτού είναι 15.39%, δηλαδή προσαρμόζεται επιτυχώς σε 7821 χρονόσειρές. Στη συνέχεια για 6122 χρονόσειρές (12.04%) φαίνεται να είναι καταλληλότερο το υπόδειγμα ARMA(2,4) και τρίτο σε συχνότητα εμφάνισης έρχεται το ARMA(5,4) για το 9.1% του δείγματος. Ο πίνακας παρακάτω περιγράφει αναλυτικά τις συχνότητες εμφάνισης των έξι επικρατέστερων υποδειγμάτων.

Συνολικά αποτελέσματα 2000-2011 Υπόδειγμα	Πλήθος χρονόσειρών	Ποσοστό επί του δείγματος
ARMA(2,4)	6122	12.04%
<b>ARMA(2,5)</b>	7821	15.39%
ARMA(3,4)	3525	6.93%
ARMA(3,5)	4220	8.3%
ARMA(5,2)	2901	5.7%
ARMA(5,4)	4627	9.1%
Σύνολο	50825	
<b>Σφάλματα</b>	31	0.06%

Σύμφωνα λοιπόν με τη θεωρία των γραμμικών ARMA υποδειγμάτων, μια από τις παρακάτω μορφές είναι η πιο «ασφαλή» επιλογή.

ARMA(2,4)

$$\eta_t = \varphi_0 + \varphi_1\eta_{t-1} + \varphi_2\eta_{t-2} + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} + \theta_3\varepsilon_{t-3} + \theta_4\varepsilon_{t-4}.$$

ARMA(2,5)

$$\eta_t = \varphi_0 + \varphi_1\eta_{t-1} + \varphi_2\eta_{t-2} + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} + \theta_3\varepsilon_{t-3} + \theta_4\varepsilon_{t-4} + \theta_5\varepsilon_{t-5}.$$

ARMA(3,4)

$$\eta_t = \varphi_0 + \varphi_1\eta_{t-1} + \varphi_2\eta_{t-2} + \varphi_3\eta_{t-3} + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} + \theta_3\varepsilon_{t-3} + \theta_4\varepsilon_{t-4}.$$



ARMA(3,5)

$$\eta_t = \varphi_0 + \varphi_1\eta_{t-1} + \varphi_2\eta_{t-2} + \varphi_3\eta_{t-3} + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} + \theta_3\varepsilon_{t-3} + \theta_4\varepsilon_{t-4} + \theta_5\varepsilon_{t-5}.$$

ARMA(5,2)

$$\eta_t = \varphi_0 + \varphi_1\eta_{t-1} + \varphi_2\eta_{t-2} + \varphi_3\eta_{t-3} + \varphi_4\eta_{t-4} + \varphi_5\eta_{t-5} + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2}.$$

ARMA(5,4)

$$\eta_t = \varphi_0 + \varphi_1\eta_{t-1} + \varphi_2\eta_{t-2} + \varphi_3\eta_{t-3} + \varphi_4\eta_{t-4} + \varphi_5\eta_{t-5} + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} + \theta_3\varepsilon_{t-3} + \theta_4\varepsilon_{t-4}.$$

Ταξινομώντας τις χρονοσειρές σύμφωνα με τα έξι αυτά επικρατέστερα υποδείγματα, συγκεντρώθηκαν για κάθε μια χρονοσειρά η τιμή του Σημαντικού Ύψους ( $H_{m0}$ ), της περιόδου ( $T_p$ ) και της Κατεύθυνσης του Κύματος ( $M_{dir}$ ). Στη συνέχεια επιδιώκεται η στατιστική ανάλυση των αντίστοιχων αυτών βαθμωτών φασματικών παραμέτρων σε κάθε περιοχή. Πρώτα για όλο το δείγμα και έπειτα για κάθε ένα υπόδειγμα που προέκυψε από την προηγούμενη μελέτη.

Η μέση τιμή του Σημαντικού Ύψους του δείγματος κυμαίνεται μεταξύ 0.9751 m. και 1.1742 m. αναδεικνύοντας στην περιοχή της Πύλου τη μέγιστη τιμή με μεγάλη διαφορά από τις άλλες τρεις περιοχές. Το ελάχιστο μέσο σημαντικό ύψος ανήκει στην περιοχή της Σαντορίνης κάτι που επιβεβαιώνεται και σε κάθε υπόδειγμα. Οι χρονοσειρές που περιγράφονται επαρκώς από τα υποδείγματα ARMA(2,4), ARMA(5,2) παρουσιάζουν σε κάθε περιοχή χαμηλότερη μέση τιμή σε σχέση με αυτή του δείγματος, μάλιστα για το ARMA(5,2) παρατηρούνται οι μικρότερες τιμές, με την ελάχιστη (0.5886m) να ανήκει στην περιοχή της Πύλου. Αξιοσημείωτη είναι η συμπεριφορά των δεδομένων στην κατηγορία του ARMA(2,4) όπου παρατηρείται μια ομοιομορφία στη μέση τιμή κάθε περιοχής γύρω στα 0.8m. Αντίθετα τα υποδείγματα ARMA(2,5), ARMA(3,5) και ARMA(5,4) παρουσιάζουν κατά πολύ μεγαλύτερη μέση τιμή σε κάθε περιοχή από αυτή του δείγματος, με μεγάλες διαφορές μεταξύ των περιοχών κάτι που είναι πιο εμφανές στο ARMA(5,4) και τις μέγιστες τιμές να εμφανίζονται στο ARMA(3,5).

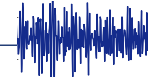
Η τυπική απόκλιση είναι ένας δείκτης που δείχνει αν οι τιμές της μεταβλητής που καταγράφεται κυμαίνονται γύρω από την μέση τιμή ή υπάρχουν μεγάλες αποκλίσεις από αυτήν. Σε γενικές γραμμές αυτό φαίνεται να ισχύει κατά κόρον στην περιοχή της Σαντορίνης όπου συναντάται η μικρότερη τιμή στην περίπτωση κάθε υποδείγματος. Γενικά στο σύνολο του δείγματος η τυπική απόκλιση κυμαίνεται μεταξύ 0.5377m και 0.8132m. Σε χαμηλότερα πλαίσια κυμαίνεται στις περιπτώσεις των υποδειγμάτων ARMA(2,4), ARMA(3,4) και ARMA(5,2) ενώ είναι κατά πολύ μεγαλύτερη για τις χρονοσειρές των υποδειγμάτων ARMA(2,5), ARMA(3,5) και ARMA(5,4) φτάνοντας στην περιοχή της Πύλου τα 0.9616m για το ARMA(5,4) το οποίο είναι το επικρατέστερο υπόδειγμα της περιοχής.

Το επικρατέστερο υπόδειγμα ARMA(2,5) ειδικά για τις περιοχές Άθω, Σαντορίνης και Σκύρου, φαίνεται να περιγράφει καλύτερα χρονοσειρές που η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση του Σημαντικού Ύψους είναι μεγάλη. Όσον αφορά τη μέση τιμή κυμαίνεται μεταξύ (1.27-1.47m) και είναι μεγαλύτερη από αυτή του δείγματος δεν περιλαμβάνει τις πιο ακραίες τιμές, αλλά ούτε και μεγάλες διαφορές ανά περιοχή. Παρόμοια συμπεριφορά φαίνεται να έχει το υπόδειγμα ARMA(5,4) που αξιολογήθηκε ως καταλληλότερο για τις χρονοσειρές της Πύλου, δείχνοντας μια προτίμηση στις υψηλές τιμές των δυο αυτών παραμέτρων. Αντίθετα το δεύτερο επικρατέστερο υπόδειγμα ARMA(2,4), περιγράφει επαρκώς χρονοσειρές που έχουν μέση τιμή και τυπική απόκλιση Σημαντικού Ύψους μικρότερες του δείγματος. Η μέση τιμή είναι σχεδόν σταθερή στις τέσσερις περιοχές, κυμαίνεται μεταξύ 0.81-0.84m.

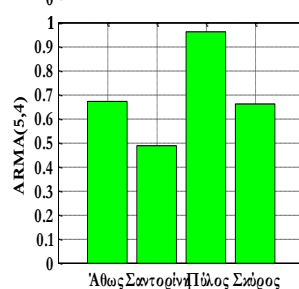
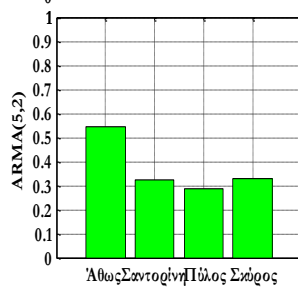
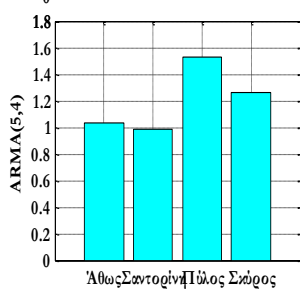
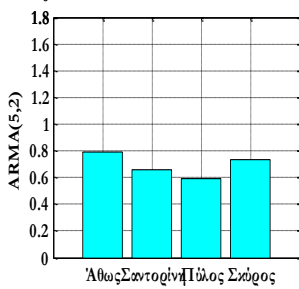
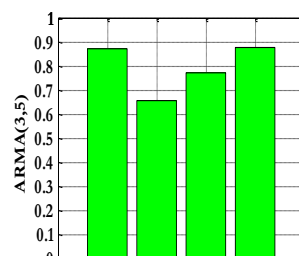
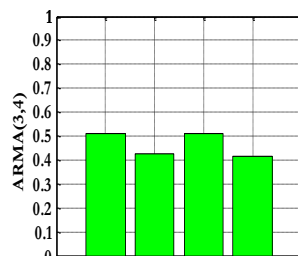
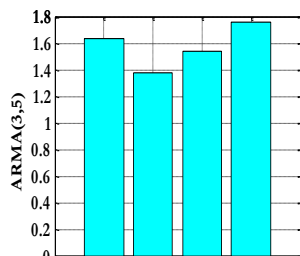
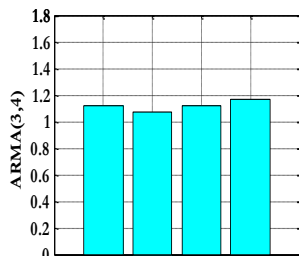
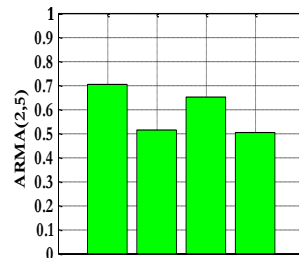
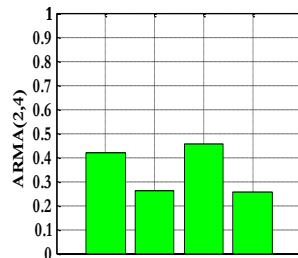
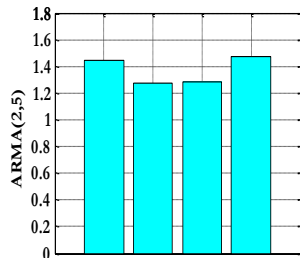
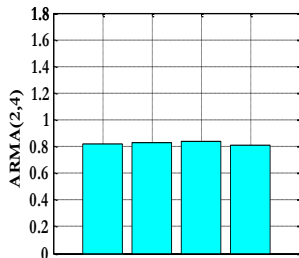
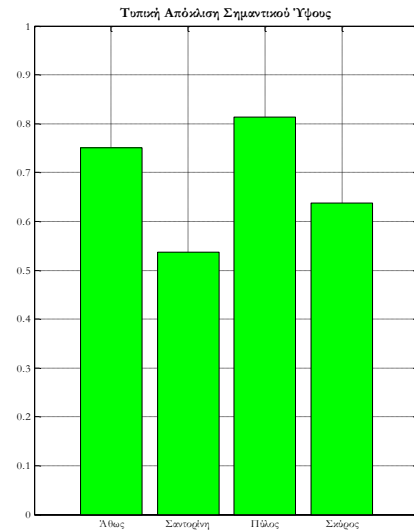
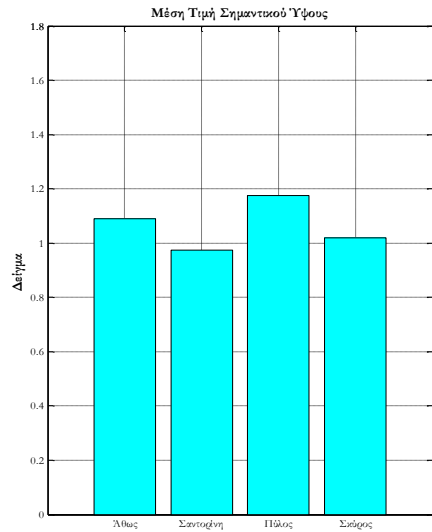


	Μέση τιμή Σημαντικού ύψους [m]	Τυπική Απόκλιση Σημαντικού ύψους [m]
<b>Δείγμα</b>		
Άθως	1.0898	0.7507
Σαντορίνη	0.9751	0.5377
Πύλος	1.1742	0.8132
Σκύρος	1.0183	0.6376
<b>ARMA(2,4)</b>		
Άθως	0.8238	0.4180
Σαντορίνη	0.8278	0.2605
Πύλος	0.8363	0.4556
Σκύρος	0.8136	0.2529
<b>ARMA(2,5)</b>		
<b>Άθως</b>	1.4412	0.7031
<b>Σαντορίνη</b>	1.2722	0.5141
Πύλος	1.2853	0.6500
<b>Σκύρος</b>	1.4698	0.5035
<b>ARMA(3,4)</b>		
Άθως	1.1160	0.5131
Σαντορίνη	1.0670	0.4243
Πύλος	1.1195	0.5091
Σκύρος	1.1650	0.4169
<b>ARMA(3,5)</b>		
Άθως	1.6358	0.8717
Σαντορίνη	1.3799	0.6562
Πύλος	1.5336	0.7708
Σκύρος	1.7584	0.8753





<b>ARMA(5,2)</b>		
Άθως	0.7917	0.5466
Σαντορίνη	0.6603	0.3212
Πύλος	0.5886	0.2874
Σκύρος	0.7383	0.3281
<b>ARMA(5,4)</b>		
Άθως	1.0323	0.6696
Σαντορίνη	0.9831	0.4894
<b>Πύλος</b>	1.5283	0.9616
Σκύρος	1.2606	0.6597



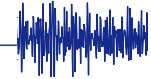


Στη συνέχεια εξετάζεται η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της Περιόδου  $T_p$  (spectral peak period). Τα δεδομένα έχουν και πάλι κατηγοριοποιηθεί βάσει περιοχής αλλά και υποδείγματος.

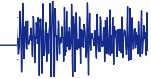
Το δείγμα γενικά παρουσιάζει μέση τιμή της Περιόδου  $T_p$  μεταξύ 4.9 και 6.1 sec. Η μέγιστη τιμή εντοπίζεται πάντα στην περιοχή της Πύλου, ενώ οι άλλες τρεις περιοχές έχουν σε κάθε περίπτωση πολύ μικρές διαφορές μεταξύ τους. Σε χαμηλότερα επίπεδα κυμαίνεται η μέση περίοδος στις χρονοσειρές των υποδειγμάτων ARMA(2,4) ARMA(5,2), ενώ στα υπόλοιπα είναι πάντα μεγαλύτερη. Οι πιο ακραίες τιμές είναι στο ARMA(3,5) μεγαλύτερες ή ίσες των 6sec.

Όσον αφορά την απόκλιση των τιμών της περιόδου από τη μέση τιμή, αυτή κυμαίνεται στο δείγμα περίπου από 1.35 ως 1.7sec. Πιο συγκεκριμένα όλα τα υποδείγματα έχουν τυπική απόκλιση μικρότερη από αυτή του δείγματος εκτός από το ARMA(3,5), ARMA(5,4) που συγκεντρώνουν τις μεγαλύτερες τιμές. Μάλιστα στο ARMA(5,4) εντοπίζονται οι μέγιστες τιμές περίπου 1.9sec. Η περιοχή της Πύλου διατηρεί εξέχουσα θέση, μιας και οι αποκλίσεις είναι σχεδόν πάντα μεγαλύτερες από των άλλων περιοχών.

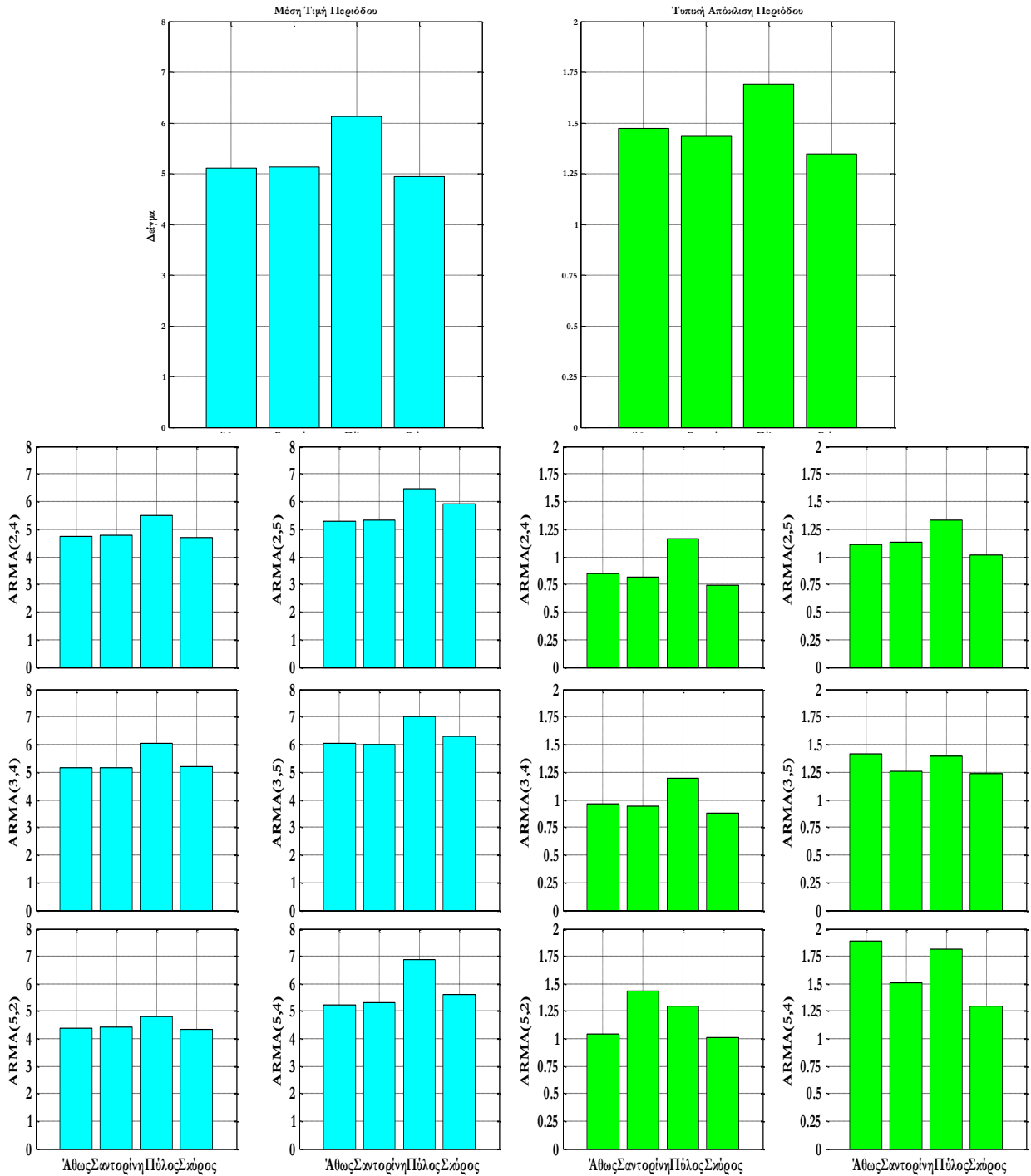
Το επικρατέστερο υπόδειγμα ARMA(2,5) περιγράφει χρονοσειρές με μεγάλες, αλλά όχι ακραίες, μέσες τιμές περιόδου  $T_p$ , ως προς το δείγμα. Αντίθετα οι τυπικές αποκλίσεις τους είναι σχετικά μικρότερες από αυτές του συνόλου. Το ARMA(2,4) εφαρμόζει καλύτερα σε χρονοσειρές που έχουν μέση τιμή αλλά και τυπική απόκλιση περιόδου  $T_p$  μικρότερες από αυτές του δείγματος. Η τυπική απόκλιση μάλιστα εδώ είναι η ελάχιστη που εμφανίζεται.

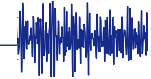


	Μέση τιμή Περιοδου $T_p$ [sec]	Τυπική Απόκλιση Περιοδου $T_p$ [sec]
<b>Δείγμα</b>		
Άθως	5.1133	1.4738
Σαντορίνη	5.1381	1.4357
Πύλος	6.1265	1.6912
Σκύρος	4.9420	1.3488
<b>ARMA(2,4)</b>		
Άθως	4.7555	0.8456
Σαντορίνη	4.7742	0.8165
Πύλος	5.4757	1.1674
Σκύρος	4.7058	0.7387
<b>ARMA(2,5)</b>		
<b>Άθως</b>	5.2742	1.1115
<b>Σαντορίνη</b>	5.3247	1.1339
Πύλος	6.4657	1.3310
<b>Σκύρος</b>	5.9139	1.0183
<b>ARMA(3,4)</b>		
Άθως	5.1554	0.9580
Σαντορίνη	5.1431	0.9413
Πύλος	6.0427	1.1912
Σκύρος	5.2127	0.8840
<b>ARMA(3,5)</b>		
Άθως	6.0275	1.4139
Σαντορίνη	5.9957	1.2586
Πύλος	6.9913	1.3955
Σκύρος	6.3098	1.2403



<b>ARMA(5,2)</b>		
Άθως	4.3781	1.0414
Σαντορίνη	4.4175	1.4288
Πύλος	4.8015	1.2920
Σκύρος	4.3376	1.0080
<b>ARMA(5,4)</b>		
Άθως	5.2161	1.8913
Σαντορίνη	5.3137	1.5036
<b>Πύλος</b>	6.8867	1.8181
Σκύρος	5.6104	1.2951

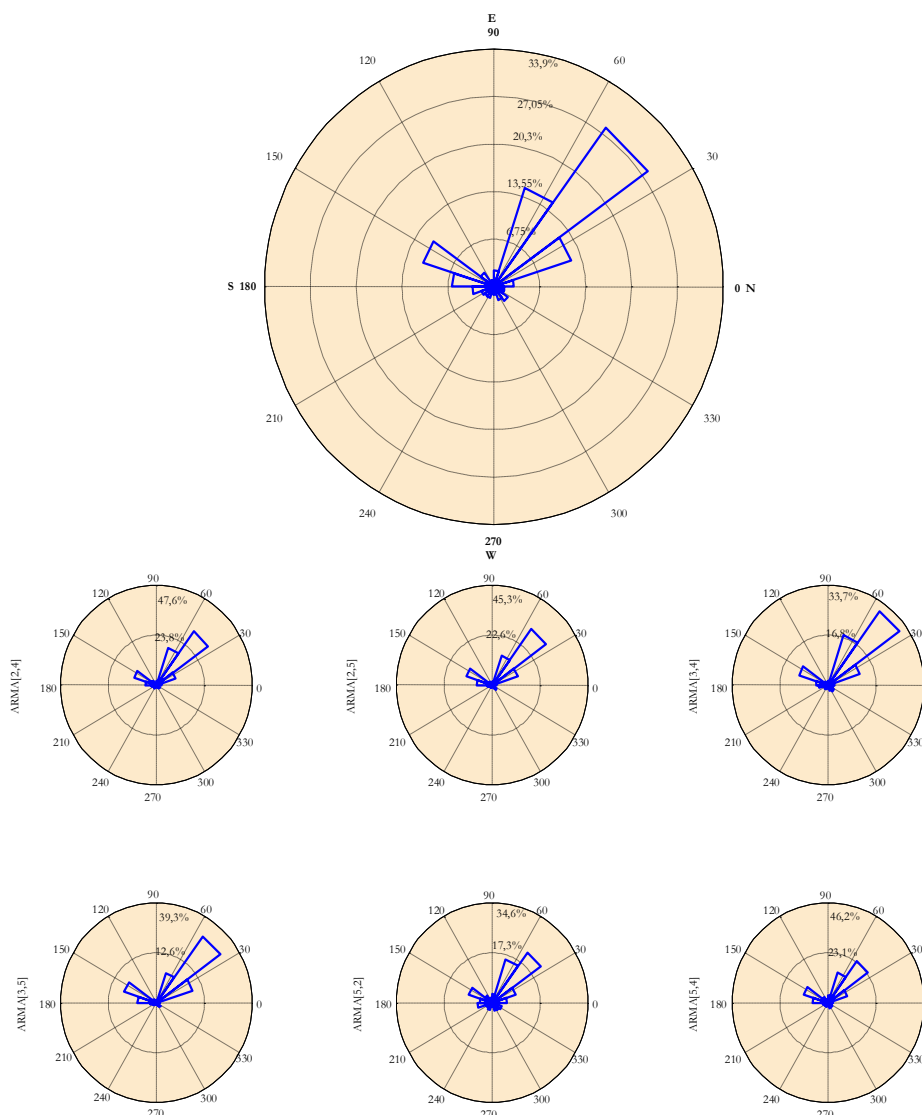




Η επόμενη παράμετρος που μελετάται είναι η κατεύθυνση του κύματος  $M_{dir}$ , για τις χρονοσειρές κάθε περιοχής αλλά και τις χρονοσειρές του κάθε υποδείγματος. Το διάγραμμα της κατεύθυνσης λειτουργεί σαν δεξιόστροφα προσανατολισμένο κυκλικό ιστόγραμμα, με αρχή τις  $0^\circ$  που αντιστοιχούν στη κατεύθυνση του Βορρά. Οι διαστάσεις του κάθε κυκλικού τομέα αντιπροσωπεύουν τη κατεύθυνση του κύματος και τη συχνότητα εμφάνισης αυτού. Ο κάθε εσωτερικός κυκλικός δακτύλιος αντιπροσώπευει συγκεκριμένο πλήθος χρονοσειρών.

Στην περιοχή του Άθω, το δείγμα υποδεικνύει ως κύρια κατεύθυνση κύματος περίπου  $50^\circ$  και γενικότερα ΒΑ με κάποια μικρή συχνότητα κυμάτων στα ΝΝΑ. Οι χρονοσειρές του κάθε υποδείγματος, εμφανίζουν σε γενικές γραμμές την ίδια συμπεριφορά με το δείγμα. Η μόνη διαφορά εγκίπεται στο πλήθος των χρονοσειρών της κάθε περίπτωσης που όμως είναι ήδη γνωστό. Παραμένοντας λοιπόν έντονη η παρουσία κυμάτων με κατεύθυνση στις  $50^\circ$ , στο υποδείγμα ARMA(2,4), ARMA(3,4), ARMA(5,2), άνεμοι με κατεύθυνση  $60^\circ$  φαίνεται να έχουν μια σημαντική παρουσία. Ενώ επίσης στα υποδείγματα ARMA(5,2), ARMA(5,4) εμφανίζονται μια μικρή συχνότητα κυμάτων και προς τις υπόλοιπες κατευθύνσεις που κάνει την κατανομή να απλώνεται.

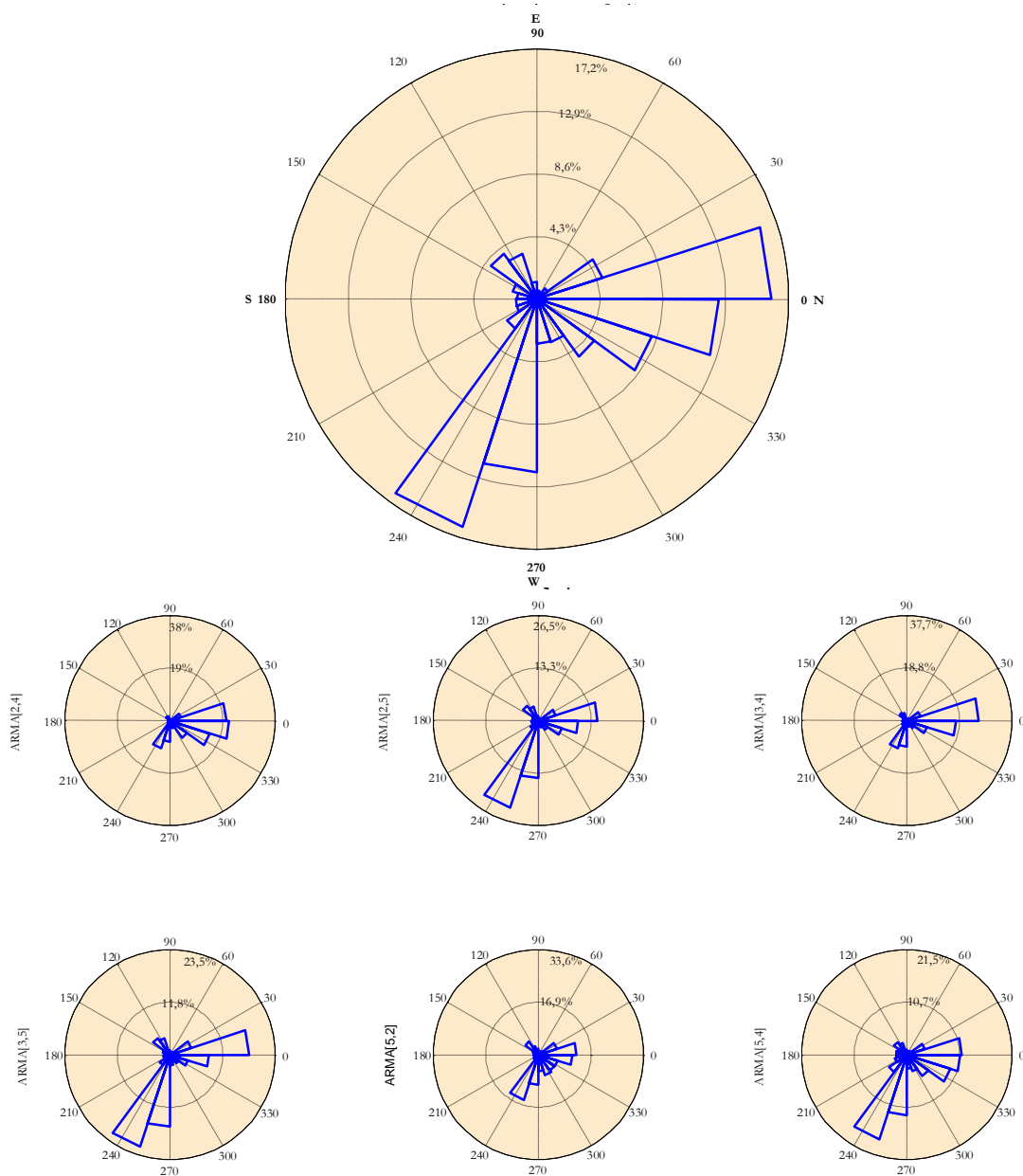
Κατεύθυνση κυμάτων Άθως



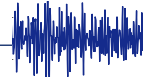


Στην περιοχή της Σαντορίνης, τα κύματα έχουν κατεύθυνση κυρίως μεταξύ Β και Δ, δηλαδή 230° έως 20°. Πιο συχνές είναι οι κατευθύνσεις μεταξύ 0-20° και 235-255°. Πιο αναλυτικά οι χρονοσειρές των υποδειγμάτων ARMA(2,5), ARMA(3,5), ARMA(5,2), ARMA(5,4) έχουν την ίδια συμπεριφορά με το δείγμα. Παρ' όλα αυτά στο ARMA(2,5), ARMA(3,5), ARMA(5,4), φαίνονται πιο συχνοί οι ΔΔΑ κυματισμοί (240°) ενώ στα ARMA(2,4), ARMA(3,4) πιο συχνοί αυτοί με κατεύθυνση προς το Β. Στα ARMA(5,2), ARMA(5,4) η κατανομή απλώνεται και πάλι.

Κατεύθυνση κυμάτων Σαντορίνης

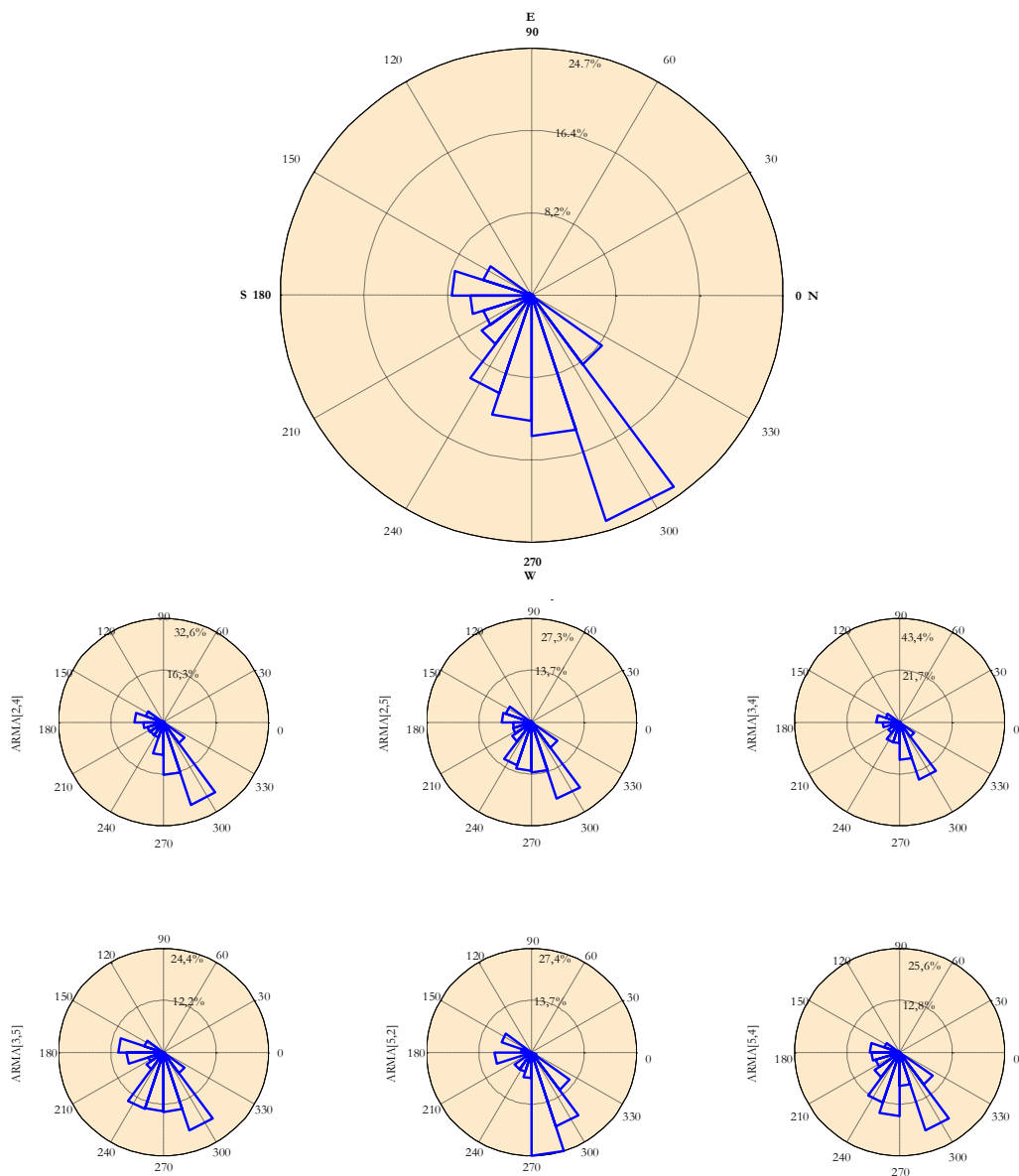


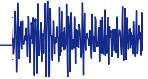




Στην περιοχή της Πύλου, οι κυματισμοί έχουν κυρίως κατεύθυνση μεταξύ  $180^\circ$  και  $310^\circ$  δηλαδή Α και ΔΔΒ, με πιο έντονη την παρουσία αυτών κοντά στις  $300^\circ$ . Το μοτίβο επαναλαμβάνεται σε όλα τα υποδείγματα. Πιο αναλυτικά τα ARMA(2,4), ARMA(2,5) σχεδόν ταυτίζονται με την εικόνα που παρουσιάζει το δείγμα. Στο ARMA(5,2) πιο συχνό είναι οι άνεμοι με κατεύθυνση  $270-290^\circ$ .

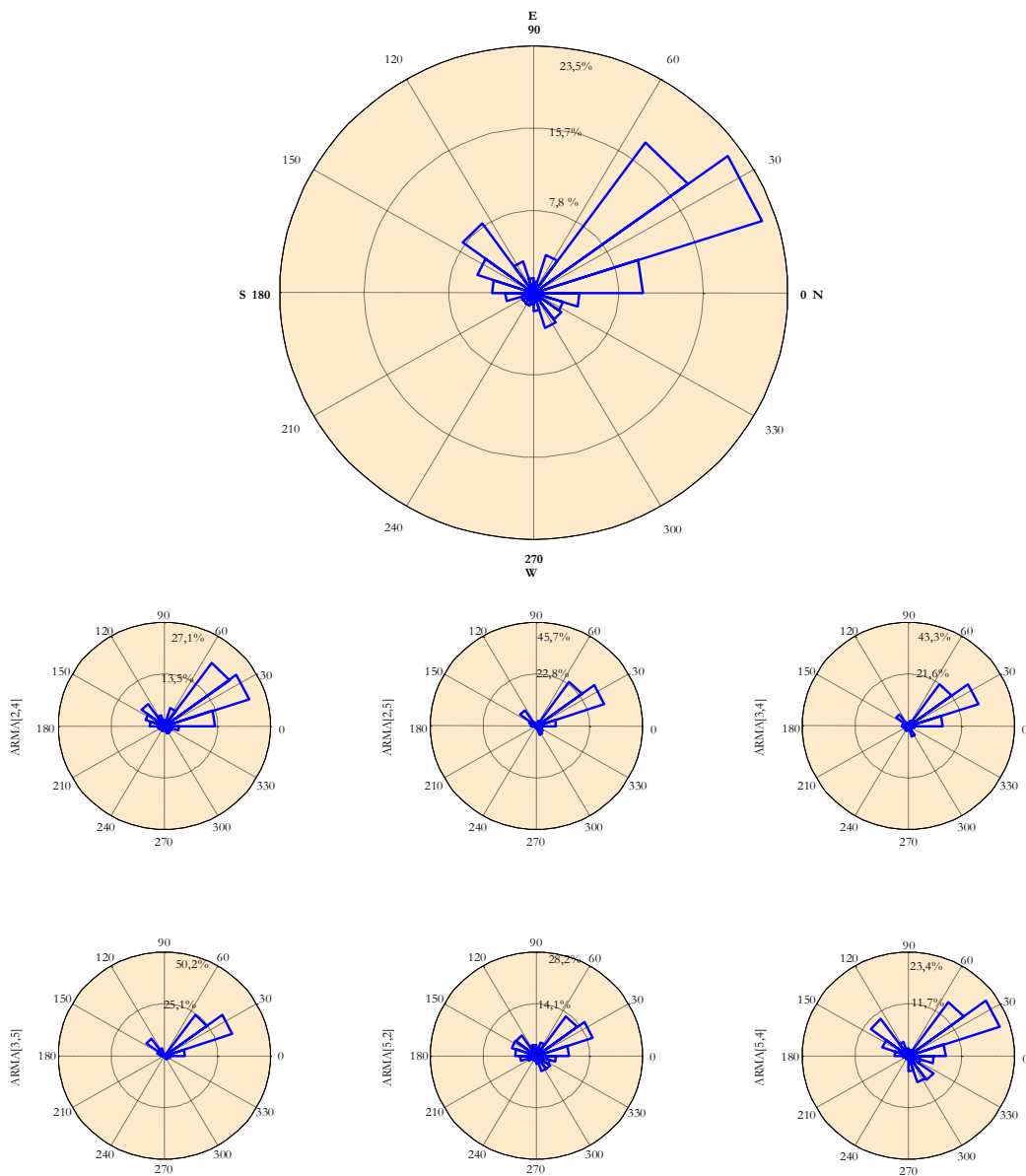
### Κατεύθυνση κυμάτων Πύλου

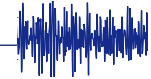




Στην περιοχή της Σκύρου, το δείγμα υποδεικνύει μια μεγάλη συχνότητα κυματισμών με κατεύθυνση μεταξύ 0 και 150° (B μέχρι NA) με πιο συχνούς στη κατεύθυνση 20 - 55°. Η ίδια εικόνα παρουσιάζεται και στις περιπτώσεις των υποδειγμάτων. Πιο αναλυτικά οι χρονοσειρές των υποδειγμάτων ARMA(2,4), ARMA(5,2) και ARMA(5,4) έχουν την ίδια συμπεριφορά με το δείγμα. Ενώ τα υπόλοιπα υποδείγματα παρουσιάζουν κυρίως κυματισμούς με κατεύθυνση περίπου στις 25°.

### Κατεύθυνση κυμάτων Σκύρου





Καταλήγοντας, σημειώνεται ότι δεν φαίνεται να υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ της επιλογής του υποδείγματος για τις χρονοσειρές της ανύψωσης και τη κατεύθυνση των κυμάτων. Τα υποδείγματα κάθε περιοχής ακολουθούν με μικρές αποκλίσεις την συμπεριφορά του δείγματος της εκάστοτε περιοχής, χωρίς να φαίνεται κάποια τάση ή επαναληπτικότητα.

Κλείνοντας γίνεται μια προσπάθεια συνολικής επισκόπησης των τριών φασματικών παραμέτρων που ήδη μελετήθηκαν, η κατηγοριοποίηση γίνεται τώρα ανά υπόδειγμα.

Παρουσιάζονται λοιπόν η κατεύθυνση του κύματος, το σημαντικό ύψος κύματος και η περίοδος για κάθε ένα από τα έξι επικρατέστερα ARMA υποδείγματα και στις τέσσερις περιοχές που αναλύθηκαν.

Στις χρονοσειρές του δείγματος, όπου το υπόδειγμα ARMA(2,4) κρίθηκε πιο κατάλληλο το σημαντικό ύψος κύματος και η περίοδος κυμαίνονται γύρω από τη μέση τιμή τους χωρίς όμως μεγάλες αποκλίσεις. Η κατανομή τους δεν απλώνεται πολύ και παρουσιάζει μια σημαντική κύρτωση (λεπτόκυρτη). Οι περισσότερες τιμές βρίσκονται δεξιά ή κοντά στην επικρατούσα τιμή - αυτή της κορυφής. Εκτός από την περίπτωση της Σκύρου, όπου η κατανομή συχνοτήτων του σημαντικού ύψους απλώνεται περισσότερο (πλατύκυρτη) και της περιόδου οι περισσότερες τιμές είναι προς τα αριστερά της κορυφής. Οι τιμές του σημαντικού ύψους είναι κυρίως μικρότερες από 1.5m και οι τιμές της περιόδου κυρίως μικρότερες από 7m.

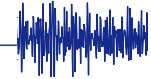
Στην περίπτωση του υποδείγματος ARMA(2,5) οι παράμετροι κινούνται σε μεγαλύτερα μεγέθη από πριν. Το σημαντικό ύψος και η περίοδος κυμαίνονται γύρω από τη μέση τιμή τους, με τις περισσότερες τιμές να είναι δεξιά της κορυφής (επικρατούσα τιμή), εκτός από τη περίοδο της Πύλου και της Σκύρου (αρνητική λοξότητα). Εδώ οι κατανομές απλώνονται αρκετά σε σχέση με πριν αλλά και πάλι θεωρούνται λεπτόκυρτες. Οι τιμές του σημαντικού ύψους είναι κυρίως μικρότερες από 2.5m και οι τιμές της περιόδου κυρίως μικρότερες από 8m.

Στο υπόδειγμα ARMA(3,4) οι παράμετροι κινούνται και πάλι σε χαμηλότερα μεγέθη από το ARMA(2,5). Οι τιμές κυμαίνονται σε ευρύ φάσμα γύρω από την τιμή της κορυφής αλλά μόνο η περιοχή του Άθω και το σημαντικό ύψος της Σκύρου θεωρούνται πλατύκυρτες κατανομές. Οι περισσότερες τιμές άλλοτε εντοπίζονται δεξιά της κορυφής και άλλοτε αριστερά. Οι τιμές του σημαντικού ύψους και της περιόδου είναι κυρίως μικρότερες από αυτές του ARMA(2,5).

Οι κατανομές σχετικών συχνοτήτων στο ARMA(3,5) απλώνονται και πάλι αρκετά γύρω από τη μέση τιμή, αλλά μόνο στη περιοχή της Σκύρου θεωρούνται πλατύκυρτες. Οι περισσότερες τιμές βρίσκονται δεξιά της επικρατούσας τιμής, εκτός από τις περιπτώσεις της περιόδου της Πύλου και της Σκύρου. Αξιοσημείωτη επίσης είναι η παρουσία μεγαλύτερων τιμών στο σημαντικό ύψος. Οι τιμές του σημαντικού ύψους και της περιόδου είναι μεγαλύτερες από αυτές του ARMA(2,5).

Στο ARMA(5,2) οι κατανομές λεπταίνουν και πάλι και οι παράμετροι κυμαίνονται σε μικρότερα μεγέθη όπως στο ARMA(2,4). Ακόμη παρατηρείται ότι οι περισσότερες τιμές βρίσκονται δεξιότερα της κορυφής. Εμφανίζονται επίσης ακραίες τιμές. Οι τιμές του σημαντικού ύψους και της περιόδου είναι μικρές, όπως στο ARMA(2,4).

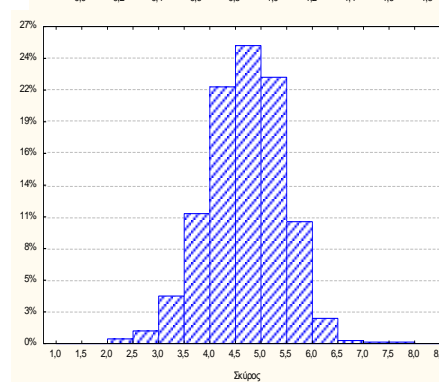
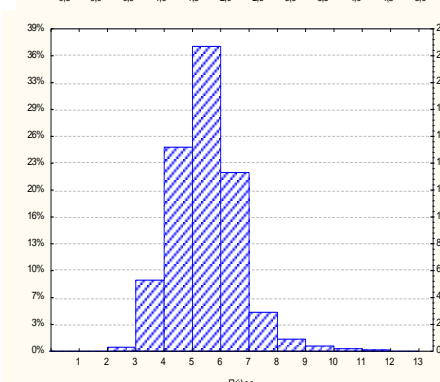
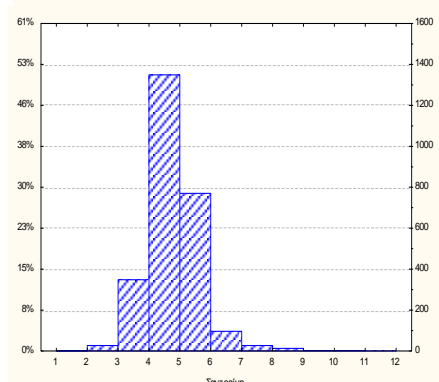
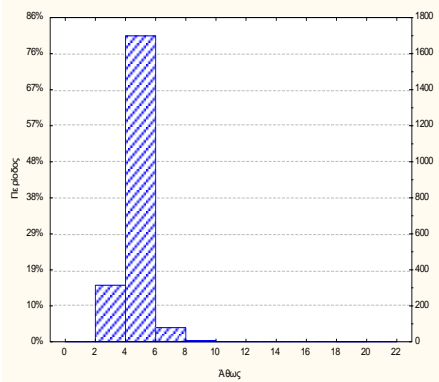
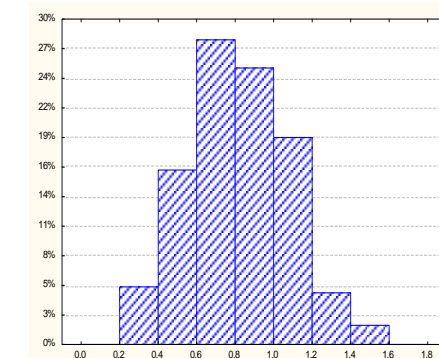
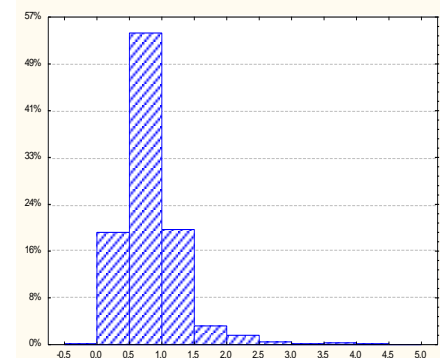
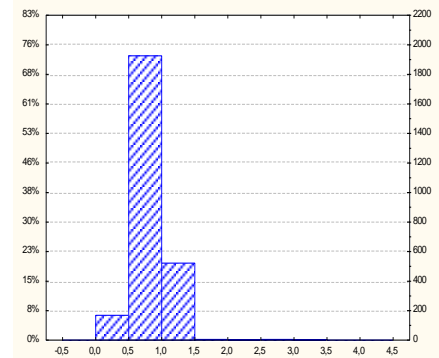
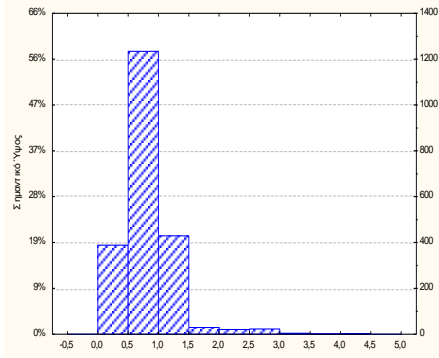
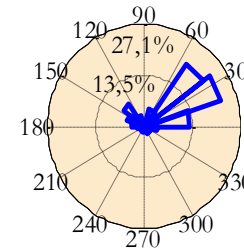
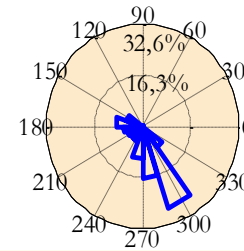
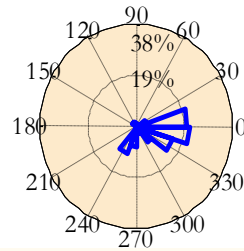
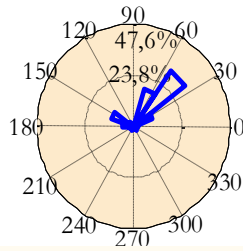
Χωρίς μεγάλες διαφορές από το προηγούμενο υπόδειγμα, το ARMA(5,4) παρουσιάζει κατανομές σχετικών συχνοτήτων σε ένα ευρύτερο φάσμα τιμών από πριν. Θεωρούνται κυρίως



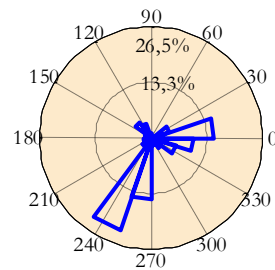
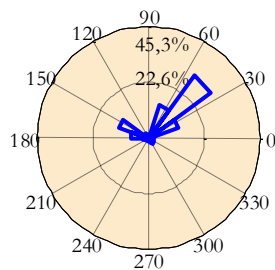
λεπτόκυρτες εκτός από την περίοδο της Πύλου και της Σκύρου που απλώνονται αρκετά(πλατύκυρτες). Οι περισσότερες τιμές βρίσκονται δεξιότερα της κορυφής. Οι ακραίες τιμές είναι περισσότερες, κυρίως στη Πύλο και τη Σκύρο. Οι τιμές του σημαντικού ύψους και της περιόδου είναι μεγάλες αλλά όχι τόσο ακραίες όσο του ARMA(3,5).

Η κατεύθυνση του κύματος ούτε σε αυτή την επισκόπηση, βρέθηκε να έχει κάποια επαναληπτική συμπεριφορά, που να είναι αξιοσημείωτη. Το ίδιο επιβεβαιώνεται και στο τελευταίο διάγραμμα όπου παρουσιάζονται μόνο οι κατευθύνσεις των χρονοσειρών που έχουν υποδείξει τα έξι επικρατέστερα υποδείγματα χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η περιοχή.

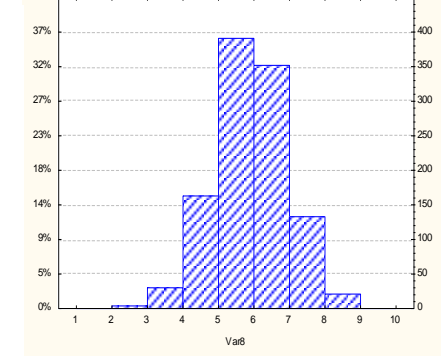
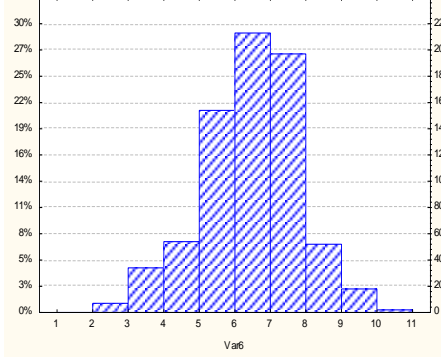
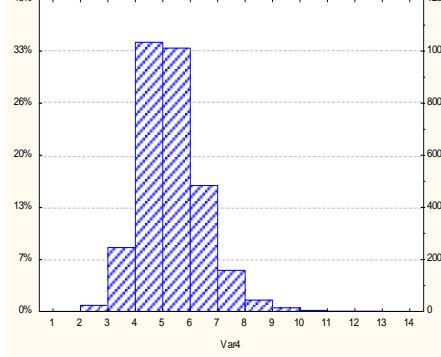
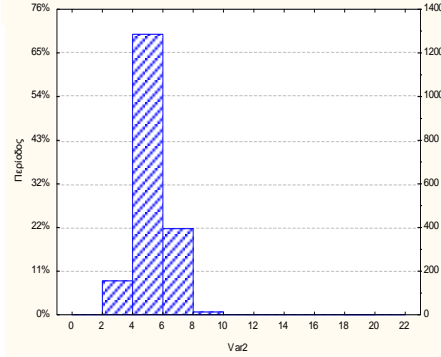
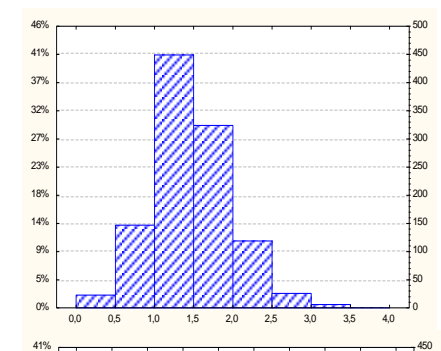
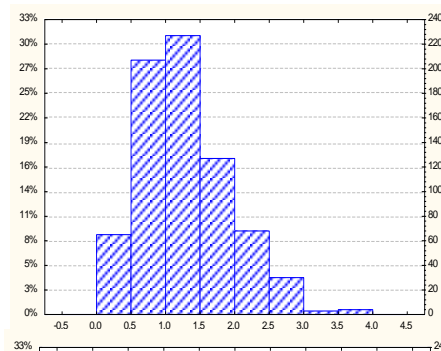
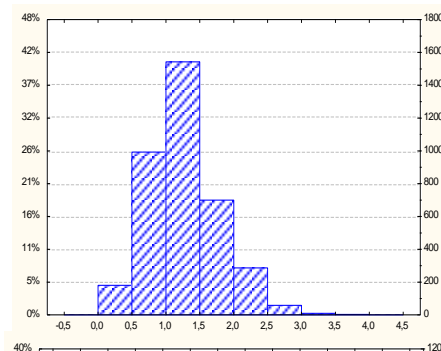
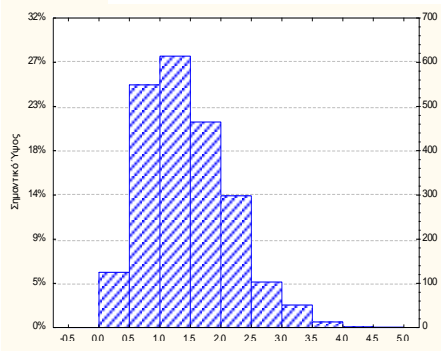
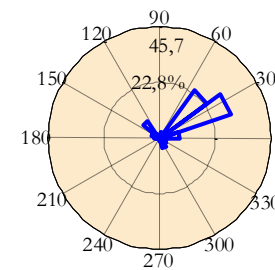
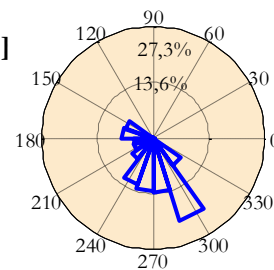
### ARMA[2,4]



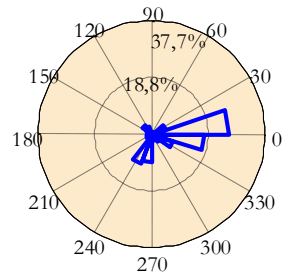
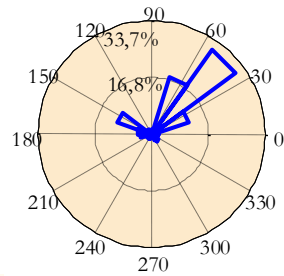
	Σημαντικό ύψος	Άθως	Σαντορίνη	Πύλος	Σκύρος
μέση τιμή		0,823801	0,827757	0,836347	0,813572
διάμεσος		0,74935	0,8036	0,70313	0,81787
<b>Περίοδος</b>					
μέση τιμή		4,755486	4,774224	5,475749	4,705762
διάμεσος		4,6875	4,71893	5,39063	4,6875



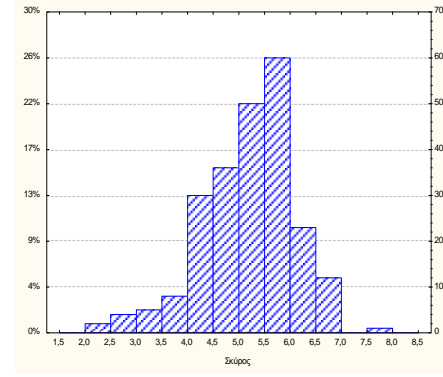
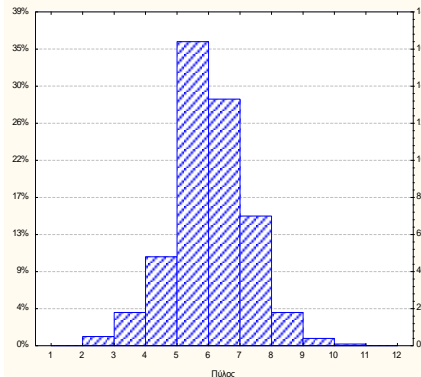
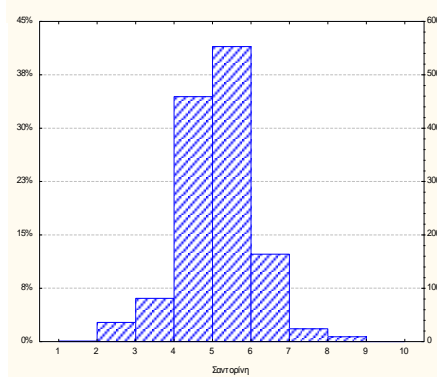
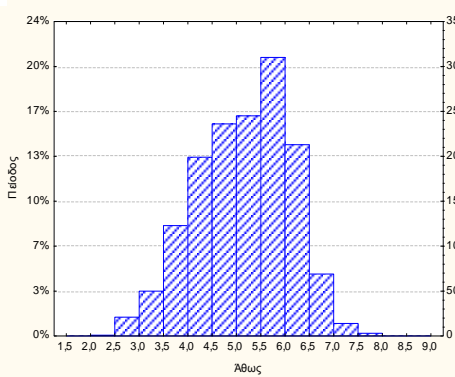
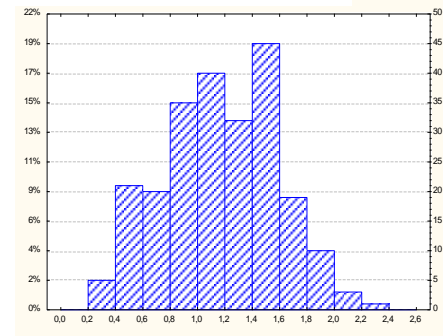
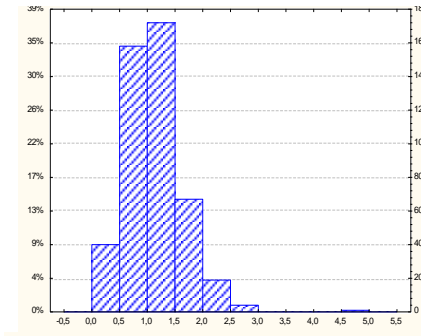
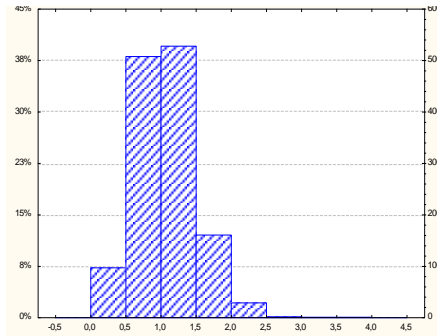
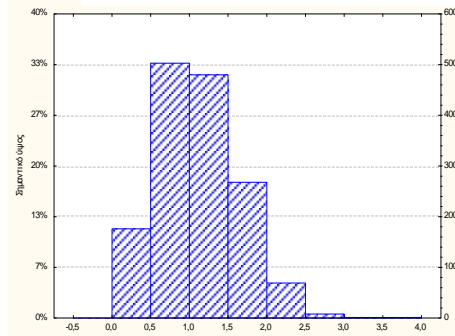
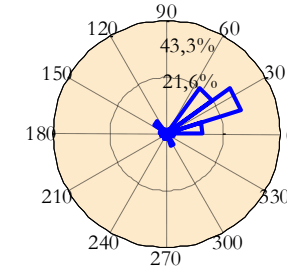
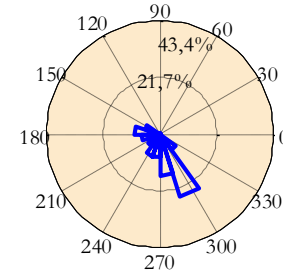
ARMA[2,5]



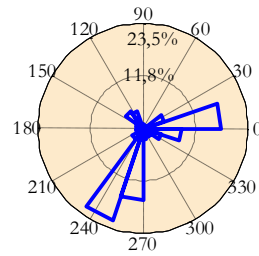
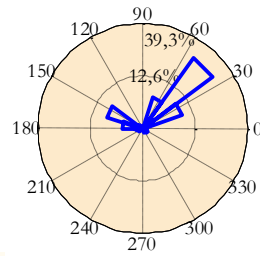
	Σημαντικό ύψος	Άθως	Σαντορινή	Πύλος	Σκύρος
μέση τιμή		1,441243	1,272177	1,285271	1,469844
διάμεσος		1,32813	1,22818	1,17188	1,44043
<b>Περίοδος</b>					
μέση τιμή		5,274154	5,324685	6,465673	5,913946
διάμεσος		5,11993	5,17181	6,5625	5,97656



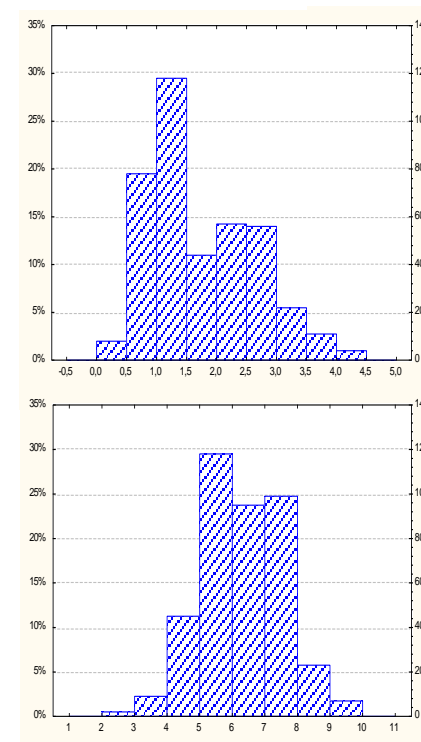
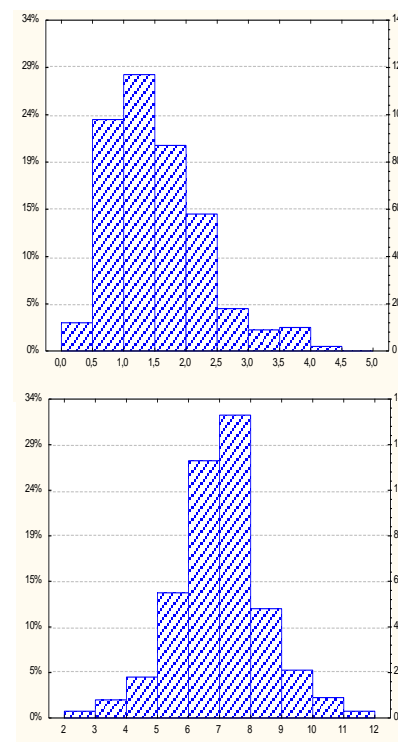
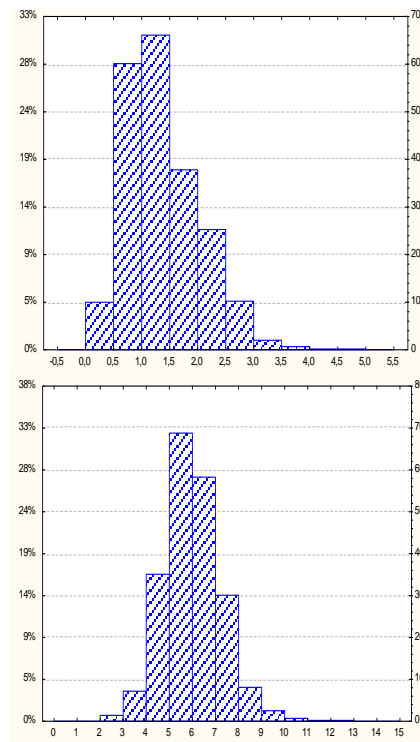
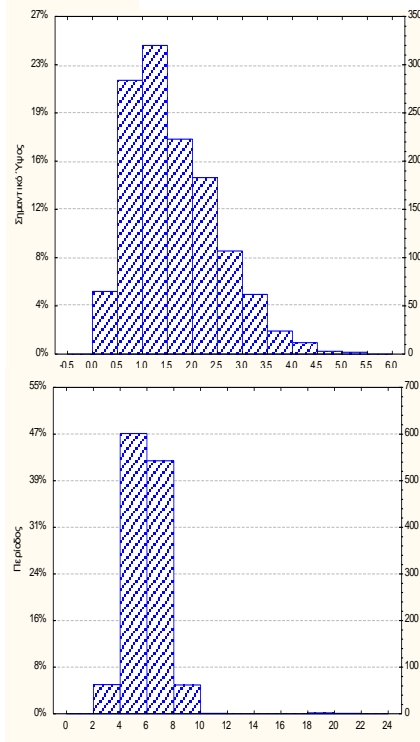
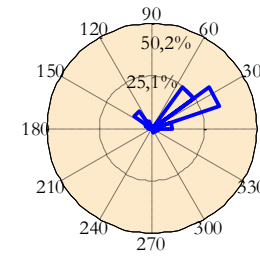
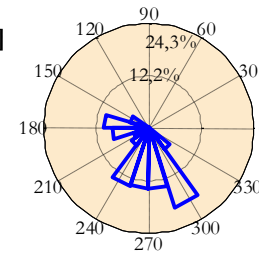
ARMA[3,4]



	Άθως	Σαντογινη	Πύλος	Σκίρος
<b>Σημαντικό ύψος</b>				
μέση τιμή	1,116028	1,066987	1,119512	1,165028
διάμεσος	1,09375	1,02836	1,09375	1,17188
<b>Παύλος</b>				
μέση τιμή	5,1554	5,143141	6,042656	5,21272
διάμεσος	5,19806	5,14587	5,97656	5,27344

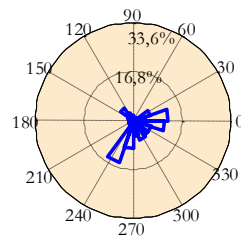
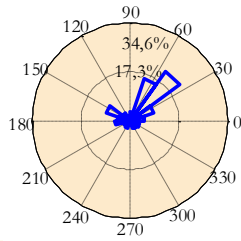


ARMA[3,5]

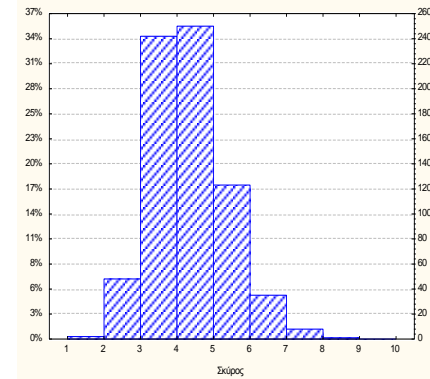
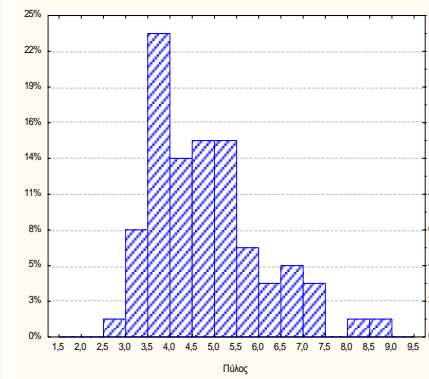
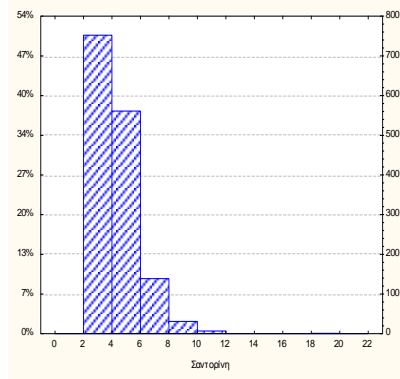
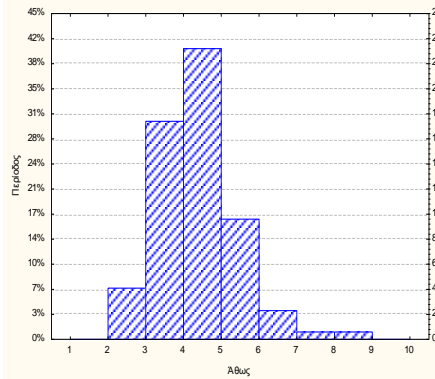
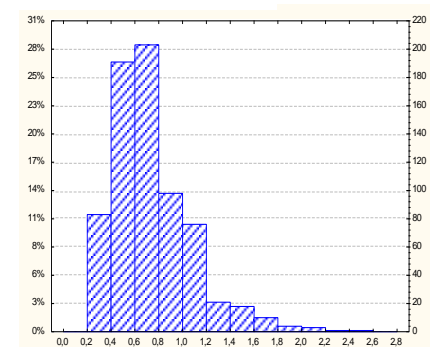
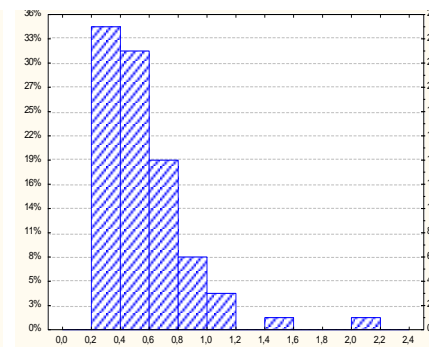
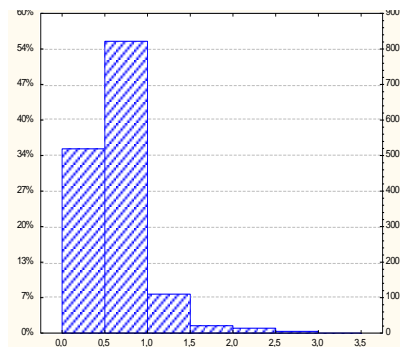
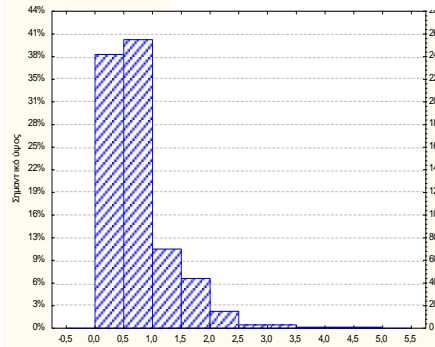
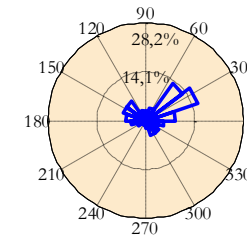
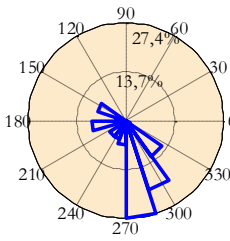


	Σημαντικό ύψος	Άθως	Σαντορίνη	Πύλος	Σκύρος
μέση τιμή	1,635785	1,37989	1,37989	1,533609	1,758354
διάμεσος	1,48155	1,25	1,25	1,40625	1,48438
<b>Περίοδος</b>					
μέση τιμή	6,02753	5,995699	5,995699	6,991333	6,309797
διάμεσος	5,95337	5,91919	5,91919	7,03125	6,21094





ARMA[5,2]



**Σημαντικό ύψος**

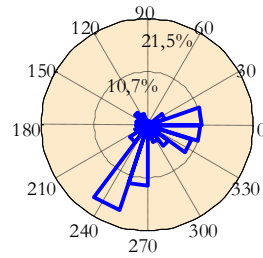
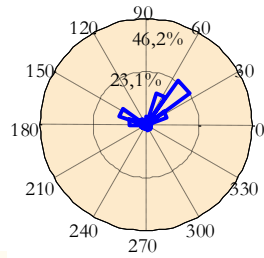
**Άθως**

**Σαντορίνη**

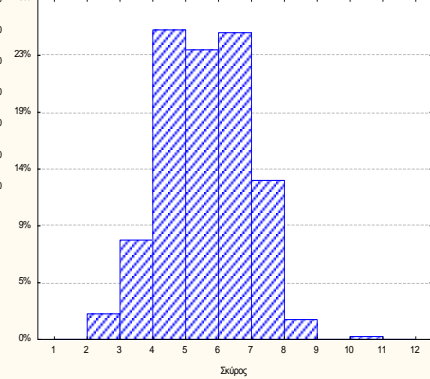
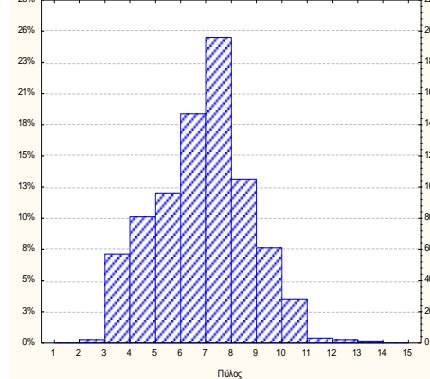
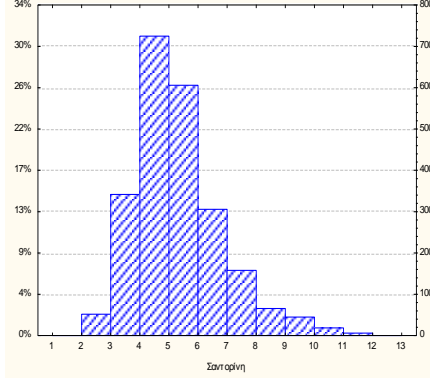
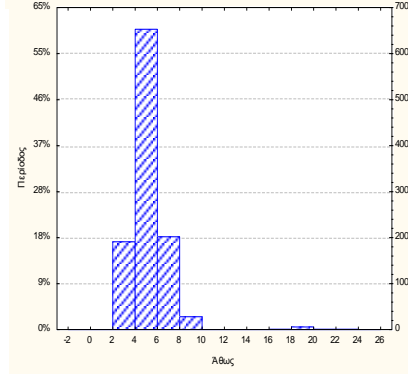
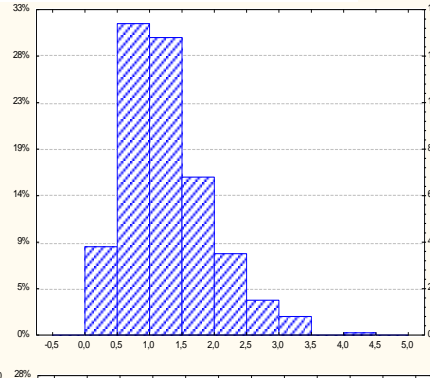
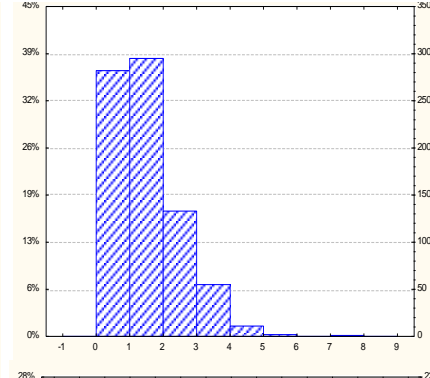
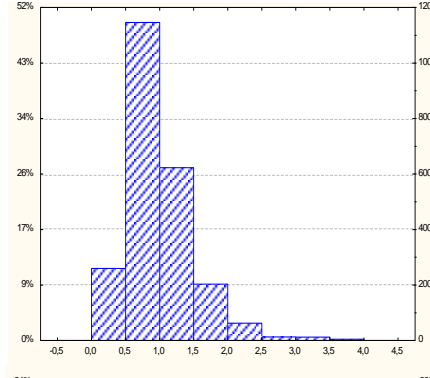
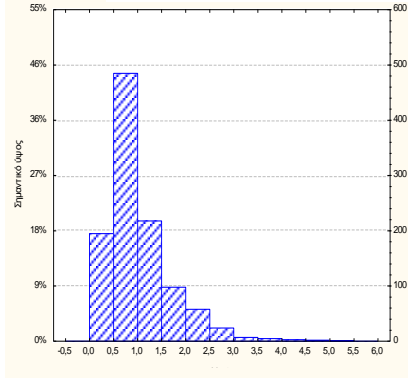
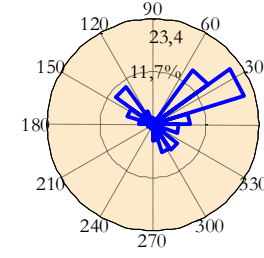
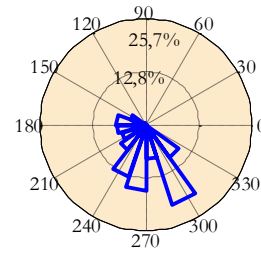
**Πύλος**

**Σκύρος**

μέση τιμή	0,791714	0,660271	0,588616	0,738347
διάμεσος	0,61866	0,54885	0,46875	0,6543
<b>Περίοδος</b>				
μέση τιμή	4,378135	4,417533	4,801478	4,337591
διάμεσος	4,31167	3,98438	4,6875	4,21875

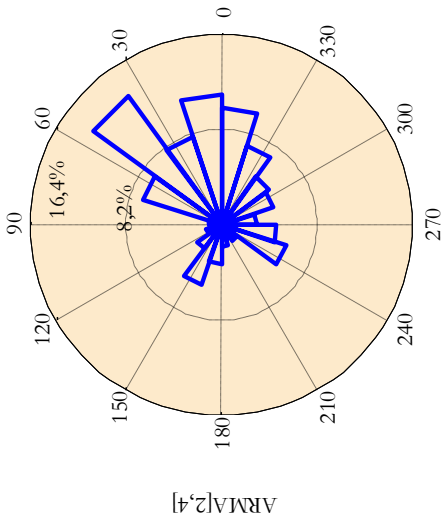


ARMA[5,4]

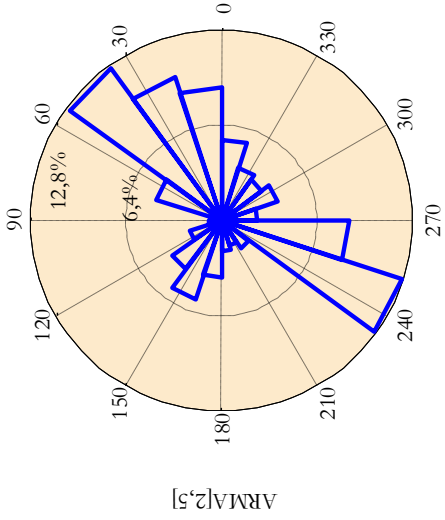


	Σημαντικό ύψος	Άθως	Σαντορίνη	Πύλος	Σκύρος
μέση τιμή	1,032334	0,983112	1,528304	1,260602	
διάμεσος	0,814815	0,87089	1,32813	1,17188	
<b>Περίοδος</b>					
μέση τιμή	5,216072	5,313698	6,886685	5,610387	
διάμεσος	4,971	5,06927	7,03125	5,625	

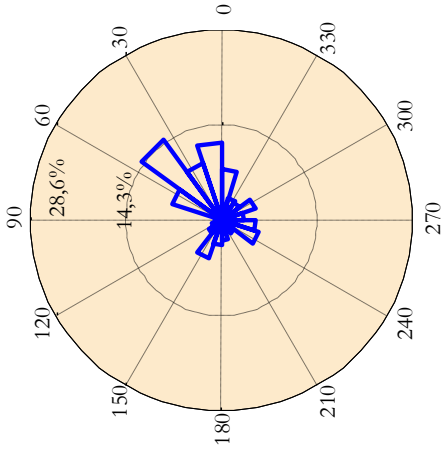
Κατεύθυνση κυμάτων



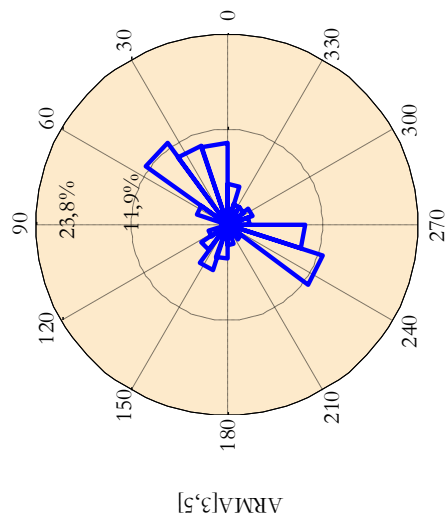
ARM12,4



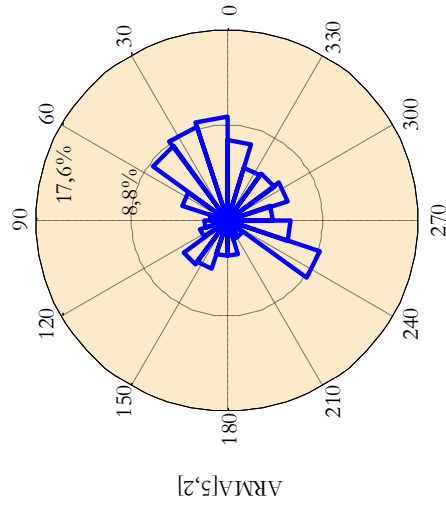
ARM12,5



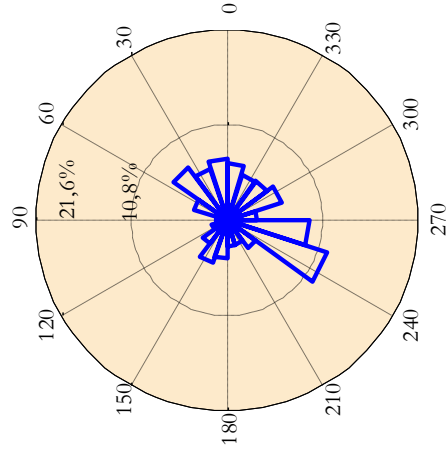
ARM13,4



ARM13,5



ARM15,2



ARM15,4



## 7. Συμπεράσματα – προτάσεις

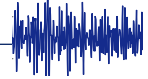
Ανακεφαλαιώνοντας, αξίζει να αναφερθεί ότι το επικρατέστερο υπόδειγμα στο δείγμα που μελετήθηκε ήταν το ARMA(2,5). Σε σύνολο 50.825 καταγραφών της ανύψωσης ένα ποσοστό 15.39% υπέδειξε ως καταλληλότερο υπόδειγμα το ARMA(2, 5) για την περιγραφή της διαδικασίας που παράγει αυτές τις τιμές. Μικρότερη συχνότητα εμφάνισης έχει το ARMA(2,4) με ποσοστό 12,04%. Με την ανάλυση των αποτελεσμάτων, φαίνεται να υπάρχει μια τάση των υποδειγμάτων να προσαρμόζονται επαρκώς σε χρονοσειρές που έχουν στατιστικά χαρακτηριστικά πολύ κοντινά σε αυτά του δείγματος. Μάλιστα το ARMA(2,5) έδειχνε να είναι καταλληλότερο για χρονοσειρές που η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση του σημαντικού ύψους και της περιόδου, ήταν λίγο μεγαλύτερες από αυτές του δείγματος αλλά όχι ακραίες σε σχέση με αυτό. Ενώ το ARMA(2,4) περιγράφει επαρκώς χρονοσειρές που η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των φασματικών παραμέτρων είναι χαμηλότερες από αυτές του δείγματος αλλά και πάλι χωρίς να είναι ακραίες.

Παρόμοια συμπεράσματα μπορούν να προκύψουν και από την ανάλυση των υπόλοιπων υποδειγμάτων. Το ARMA(3,5) προσαρμόζεται καλύτερα σε χρονοσειρές με υψηλή μέση τιμή του σημαντικού ύψους και της περιόδου, ενώ το ARMA(5,2) ταυτίζεται με τις χαμηλότερες τιμές. Ενώ φαίνεται επίσης να υπάρχουν και υποδείγματα που δείχνουν μια προτίμηση σε μια μέση κατάσταση ARMA(3,4) αλλά και σε κάποιες ακραίες τιμές.

Η τυπική απόκλιση των φασματικών παραμέτρων ακολουθεί τη συμπεριφορά των υποδειγμάτων στη μέση τιμή. Κάθε υπόδειγμα που δεν είχε μεγάλη διαφορά στη μέση τιμή από αυτή του δείγματος εξακολουθεί να παρουσιάζει μικρές αποκλίσεις ενώ τα υποδείγματα που εμφάνιζαν υψηλές τιμές συνοδεύονται και με μεγάλες αποκλίσεις.

Όσο αφορά την κατανομή σχετικών συχνοτήτων αυτών των παραμέτρων, φαίνεται ότι το ARMA(2,4) εμφανίζει όλες τις τιμές γύρω από την επικρατούσα τιμή χωρίς να περιλαμβάνει μεγάλο εύρος τιμών. Αντίθετα όσο μεγαλώνει η τάξη του υποδείγματος τόσο περισσότερο απλώνονται οι παρατηρήσεις γύρω από την επικρατούσα τιμή αλλά περιλαμβάνουν υψηλότερες τιμές.

Σχετικά με τη κατεύθυνση των κυματισμών δεν υπάρχει κάτι αξιοσημείωτο. Οι χρονοσειρές της κάθε περιοχής άσχετα με το πιο υπόδειγμα περιγράφονται ικανοποιητικά, διατηρούν σε γενικές γραμμές την ίδια συμπεριφορά, που δεν αποκλίνει σχεδόν καθόλου από αυτή της περιοχής. Η εικόνα παραμένει ασαφής ακόμη και αν γίνει σύγκριση των χρονοσειρών διαφορετικών περιοχών που περιγράφονται από το ίδιο υπόδειγμα. Θα μπορούσε λοιπόν να ειπωθεί ότι η επιλογή κατάλληλου υποδείγματος δεν σχετίζεται με τη κατεύθυνση του κύματος, αντίθετως με το ύψος και την περίοδο των κυμάτων φαίνεται να έχει κάποια εξάρτηση. Ακόμη, οι χρονοσειρές του σημαντικού ύψους φαίνεται να έχουν την ίδια συμπεριφορά με αυτή τις περιόδου, ενώ ούτε αυτές σχετίζονται με τη κατεύθυνση των κυματισμών.



Έχοντας αναλύσει ένα μεγάλο αριθμό χρονοσειρών της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας της θάλασσας, δόθηκε η δυνατότητα να εξεταστούν κάποιες αξιοσημείωτες συμπεριφορές και τάσεις του φαινομένου αλλά και κάποιων παραμέτρων αυτού. Οι πρώτες πληροφορίες που προκύπτουν είναι αρκετά σημαντικές. Δυστυχώς η ερμηνεία τους ξεπερνάει τα πλαίσια της εργασίας. Αφήνεται όμως ως πρόταση για περαιτέρω έρευνα στον αναγνώστη. Η μεθοδολογία μπορεί να εφαρμοστεί για ακόμη περισσότερες χρονοσειρές, ίσως τότε τα συμπεράσματα να είναι ακόμη πιο ξεκάθαρα.

Η μελέτη της ανύψωσης σχετίζεται με την ενέργεια των κυμάτων και επομένως τα αποτελέσματα μπορούν κάλλιστα να συνδεθούν με αυτή. Θα μπορούσε λοιπόν να ακολουθήσει μια διερεύνηση ορισμένων εφαρμογών που σχετίζονται με την υπερπήδηση πλωτών και αγκυρωμένων πλατφορμών ή την ανάβαση κυματισμού στις αιχτές (wave run-up) ή/και τη σύγκριση της κλασσικής θεωρίας ακραίων τιμών με την αντίστοιχη θεωρία για τα αναλυτικά μοντέλα που τελικά θα επιλεγούν ως πιο αντιπροσωπευτικά.

Η ανάλυση των χρονοσειρών, μπορεί να συνεχιστεί με την εκτίμηση των παραμέτρων  $\varphi_i, \theta_i$  που εμφανίζονται στα προτεινόμενα υποδείγματα, να γίνει έλεγχος των καταλοίπων, στη συνέχεια να γίνουν κάποιες προβλέψεις σύμφωνα με το υπόδειγμα που έχει προταθεί και τέλος να γίνει αξιολόγηση αυτών των προβλέψεων ώστε να υπάρξει βελτίωση αυτού.

Από όλες τις απόψεις λοιπόν τα συμπεράσματα αυτής της εργασίας αρκούν για να τροφοδοτήσουν μια διεξοδικότερη έρευνα στο τομέα της μοντελοποίησης και γενικότερα της ωκεάνιας μηχανικής.



## 8. Παράρτημα

### Κώδικας και εντολές στο MATLAB

```
%% Απαλοιφή τάσης
```

#### detrend.m

```
b=xlsread('Athos_0107c.xlsx',1,'T2:ANC7739');  
B=detrend(b,'constant');  
save B
```

```
%% Προσαρμογή υποδειγμάτων, Διαγνωστικός Έλεγχος
```

#### fit.m

```
load('B.mat');  
W=cell(1,7265);  
tic  
for k=1:7265;  
D{k}=B(:,k);  
try;  
LOGL = zeros(5,5);  
PQ = zeros(5,5);  
for p = 1:5;  
for q = 1:5;  
mod = arima(p,0,q);  
(fit,~,logL) = estimate(mod,D{k},'print',false);  
LOGL(p,q) = logL;  
PQ(p,q) = p+q;  
end;  
end;  
LOGL = reshape(LOGL,25,1);  
PQ = reshape(PQ,25,1);  
(~,bic) = aicbic(LOGL,PQ+1,1024);  
reshape(bic,5,5);  
x{k}=ans;  
min(min(x{k}));  
(value, index) = min(reshape(x{k}, numel(x{k}), 1));  
(i,j) = ind2sub(size(x{k}), index);  
Wfinal{k}=(i,j);  
save Wfinal{k};  
catch error;  
end;  
clc;  
close all  
end;  
toc
```



%% Εύρεση χρονοσειράς που δεν προσαρμόστηκε επιτυχώς το υπόδειγμα

#### **error.m**

```
find(cellfun(@(x) isequal(x,()),Wfinal));
```

%% Εύρεση συχνότητας εμφάνισης του κάθε υποδείγματος.

#### **frequency\_pq.m**

```
a=cell2mat(Wfinal');  
b=unique(a,'rows');  
for k=1:size(b,1);  
    numb(k)=sum(ismember(a,b(k,:), 'rows'));  
end;  
result=(b numb');  
save 'result_pq'
```

%% Εύρεση χρονοσειρών που προσαρμόστηκαν επαρκώς τα επικρατέστερα υποδείγματα.

#### **idx.m**

```
load('Wfinal.mat')  
idx1=find(cellfun(@(x) isequal(x,(2,4)),Wfinal));  
idx2=find(cellfun(@(x) isequal(x,(2,5)),Wfinal));  
idx3=find(cellfun(@(x) isequal(x,(3,4)),Wfinal));  
idx4=find(cellfun(@(x) isequal(x,(3,5)),Wfinal));  
idx5=find(cellfun(@(x) isequal(x,(5,2)),Wfinal));  
idx6=find(cellfun(@(x) isequal(x,(5,4)),Wfinal));
```

%% Εύρεση χαρακτηριστικών στοιχείων για το δείγμα.

#### **Stat\_sample.m**

```
g=xlsread('athos_0107c.xlsx',1,'A1:ANC7739');  
Hmo=(g(:,1));  
Mdir=(g(:,7));  
Tp=(g(:,18));  
save 'Stat_sample.mat'
```

%% Εύρεση χαρακτηριστικών στοιχείων για τις χρονοσειρές των επικρατέστερων υποδειγμάτων.

#### **Stat\_6.m**

```
for i=1:size(idx1,2);  
    j=idx1(i);  
    Hmo24{i}=g(j,1);  
    Mdir24{i}=g(j,7);  
    Tp24{i}=g(j,18);  
end;  
for i=1:size(idx2,2);  
    j=idx2(i);  
    Hmo25{i}=g(j,1);
```



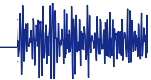
```
Mdir25{i}=g(j,7);
Tp25{i}=g(j,18);
end;
for i=1:size(idx3,2);
j=idx3(i);
Hmo34{i}=g(j,1);
Mdir34{i}=g(j,7);
Tp34{i}=g(j,18);
end;
for i=1:size(idx4,2);
j=idx4(i);
Hmo35{i}=g(j,1);
Mdir35{i}=g(j,7);
Tp35{i}=g(j,18);
end;
for i=1:size(idx5,2);
j=idx5(i);
Hmo52{i}=g(j,1);
Mdir52{i}=g(j,7);
Tp52{i}=g(j,18);
end;
for i=1:size(idx6,2);
j=idx6(i);
Hmo54{i}=g(j,1);
Mdir54{i}=g(j,7);
Tp54{i}=g(j,18);
end;
save 'Stat_6.mat'
```

```
%%%'Ενωση αρχείων Athos'Stat_6'
```

### **Stat Total.m**

```
fHmo= cat(1, Hmo, bHmo, cHmo);
fHmo24=cat(1, Hmo24, bHmo24, cHmo24);
fHmo25=cat(1, Hmo25, bHmo25, cHmo25);
fHmo34=cat(1, Hmo34, bHmo34, cHmo34);
fHmo35=cat(1, Hmo35, bHmo35, cHmo35);
fHmo52=cat(1, Hmo52, bHmo52, cHmo52);
fHmo54=cat(1, Hmo54, bHmo54, cHmo54);
fMdir=cat(1, Mdir, bMdir, cMdir);
fMdir24=cat(1, Mdir24, bMdir24, cMdir24);
fMdir25=cat(1, Mdir25, bMdir25, cMdir25);
fMdir34=cat(1, Mdir34, bMdir34, cMdir34);
fMdir35=cat(1, Mdir35, bMdir35, cMdir35);
fMdir52=cat(1, Mdir52, bMdir52, cMdir52);
fMdir54=cat(1, Mdir54, bMdir54, cMdir54);
fTp=cat(1, Tp, bTp, cTp);
fTp24=cat(1, Tp24, bTp24, cTp24);
fTp25=cat(1, Tp24, bTp25, cTp25);
fTp34=cat(1, Tp34, bTp34, cTp34);
fTp35=cat(1, Tp35, bTp35, cTp35);
```





```
fTp52=cat(1, Tp52, bTp52, cTp52);  
fTp54=cat(1, Tp54, bTp54, cTp54);
```

```
MHmo=mean(Hmo);  
MTp=mean(Tp);  
SHmo=std(Hmo);  
STp=std(Tp);
```

```
MHmo24=mean(Hmo24);  
MHmo25=mean(Hmo25);  
MHmo34=mean(Hmo34);  
MHmo35=mean(Hmo35);  
MHmo52=mean(Hmo52);  
MHmo54=mean(Hmo54);
```

```
MTp24=mean(Tp24);  
MTp25=mean(Tp25);  
MTp34=mean(Tp34);  
MTp35=mean(Tp35);  
MTp52=mean(Tp52);  
MTp54=mean(Tp54);
```

```
SHmo24=std(Hmo24);  
SHmo25=std(Hmo25);  
SHmo34=std(Hmo34);  
SHmo35=std(Hmo35);  
SHmo52=std(Hmo52);  
SHmo54=std(Hmo54);
```

```
STp24=std(Tp24);  
STp25=std(Tp25);  
STp34=std(Tp34);  
STp35=std(Tp35);  
STp52=std(Tp52);  
STp54=std(Tp54);  
save 'Stat_Total.mat'
```

%Μηδενισμός missing values – NaN

### **NaN.m**

```
Tp(Tp<0)=();  
Tp25(Tp25<0)=();  
Tp24(Tp24<0)=();  
Tp52(Tp52<0)=();  
Mdir(Mdir<0)=();  
Mdir25(Mdir25<0)=();  
Mdir24(Mdir24<0)=();  
WMdir52(Mdir52<0)=();  
save 'Stat_Total.mat'
```



%%Γράφηματα υποδειγμάτων

### **AR1\_graph.m**

```
modSim = arima('Constant',0.2,'AR',{0.8},'MA',{0},'Variance',0.1);
rng('default')
Y = simulate(modSim,1025);
figure(1)
subplot(3,1,1)
plot(Y)
title('Simulated AR(1)Series')
subplot(3,1,2)
autocorr(Y)
subplot(3,1,3)
parcorr(Y)
```

### **AR2\_graph.m**

```
modSim = arima('Constant',0.2,'AR',{0.8, -0.1},'MA',{0},'Variance',0.1);
rng('default')
Y = simulate(modSim,1025);
figure(1)
subplot(3,1,1)
plot(Y)
title('Simulated AR(2)Series')
subplot(3,1,2)
autocorr(Y)
subplot(3,1,3)
parcorr(Y)
```

### **MA1\_graph.m**

```
modSim = arima('Constant',0.1,'AR',{0},'MA',{0.7},'Variance',0.1);
rng('default')
Y = simulate(modSim,1025);
figure(1)
subplot(3,1,1)
plot(Y)
title('Simulated MA(1)Series')
subplot(3,1,2)
autocorr(Y)
subplot(3,1,3)
parcorr(Y)
```

### **MA2\_graph.m**

```
modSim = arima('Constant',0.1,'AR',{0},'MA',{0.7, -0.3},'Variance',0.1);
rng('default')
Y = simulate(modSim,1025);
figure(1)
subplot(3,1,1)
plot(Y)
title('Simulated MA(2)Series')
subplot(3,1,2)
autocorr(Y)
```



```
subplot(3,1,3)
parcorr(Y)
```

### **ARMA11\_graph.m**

```
modSim = arima('Constant',0.2,'AR',{0.8},'MA',{0.7},'Variance',0.1);
rng('default')
Y = simulate(modSim,1025);
figure(1)
subplot(3,1,1)
plot(Y)
title('Simulated ARMA(1,1)Series')
subplot(3,1,2)
autocorr(Y)
subplot(3,1,3)
parcorr(Y)
```

*%%Γραφήματα φασματικών παραμέτρων*

*%%Γράφημα Μέσης Τιμής & Τυπικής Απόκλισης Σημαντικού Ύψους*

### **MHmoSHmo\_graph.m**

```
figure(1)
subplot(1,2,1);
bar(MHmo(:,1));
ylabel('Sample');title('Μέση Τιμή Σημαντικού Ύψους');
subplot(1,2,2);
bar(SHmo(:,1));title('Τυπική Απόκλιση Σημαντικού Ύψους');
figure(2)
subplot(3,4,1);
bar(MHmo(:,2));
ylabel('ARMA(2,4)');
subplot(3,4,2);
bar(MHmo(:,3));
ylabel('ARMA(2,5)');
subplot(3,4,3);
bar(SHmo(:,2));
ylabel('ARMA(2,4)');
subplot(3,4,4);
bar(SHmo(:,3));
ylabel('ARMA(2,5)');
subplot(3,4,5);
bar(MHmo(:,4));
ylabel('ARMA(3,4)');
subplot(3,4,6);
bar(MHmo(:,5));
ylabel('ARMA(3,5)');
subplot(3,4,7);
bar(SHmo(:,4));
ylabel('ARMA(3,4)');
subplot(3,4,8);
bar(SHmo(:,5));
ylabel('ARMA(3,5)');
```

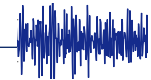


```
subplot(3,4,9);  
bar(MHmo(:,6));  
ylabel('ARMA(5,2)');  
subplot(3,4,10);  
bar(MHmo(:,7));  
ylabel('ARMA(5,4)');  
subplot(3,4,11);  
bar(SHmo(:,6));  
ylabel('ARMA(5,2)');  
subplot(3,4,12);  
bar(SHmo(:,7));  
ylabel('ARMA(5,4)');
```

%% Γράφημα Μέσης Τιμής & Τυπικής Απόκλισης Περιόδου

### **MTpSTp\_graph.m**

```
figure(1)  
subplot(1,2,1);  
bar(MTp(:,1));  
ylabel('Sample');title('Μέση Τιμή Περιόδου');  
subplot(1,2,2);  
bar(STp(:,1));title('Τυπική Απόκλιση Περιόδου');  
figure(2)  
subplot(3,4,1);  
bar(MTp(:,2));  
ylabel('ARMA(2,4)');  
subplot(3,4,2);  
bar(MTp(:,3));  
ylabel('ARMA(2,5)');  
subplot(3,4,3);  
bar(STp(:,2));  
ylabel('ARMA(2,4)');  
subplot(3,4,4);  
bar(STp(:,3));  
ylabel('ARMA(2,5)');  
subplot(3,4,5);  
bar(MTp(:,4));  
ylabel('ARMA(3,4)');  
subplot(3,4,6);  
bar(MTp(:,5));  
ylabel('ARMA(3,5)');  
subplot(3,4,7);  
bar(STp(:,4));  
ylabel('ARMA(3,4)');  
subplot(3,4,8);  
bar(STp(:,5));  
ylabel('ARMA(3,5)');  
subplot(3,4,9);  
bar(MTp(:,6));  
ylabel('ARMA(5,2)');  
subplot(3,4,10);
```



```
bar(MTp(:,7));  
ylabel('ARMA(5,4)');  
subplot(3,4,11);  
bar(STp(:,6));  
ylabel('ARMA(5,2)');  
subplot(3,4,12);  
bar(STp(:,7));  
ylabel('ARMA(5,4)');
```

%%Μετατροπή των κατευθύνσεων σε rad

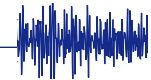
### **rad.m**

```
aMdir = aMdir * pi/180;  
aMdir24 = aMdir24 * pi/180;  
aMdir25 = aMdir25 * pi/180;  
aMdir34 = aMdir34 * pi/180;  
aMdir35 = aMdir35 * pi/180;  
aMdir52 = aMdir52 * pi/180;  
aMdir54 = aMdir54 * pi/180;
```

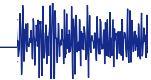
%%Διάγραμμα Κατεύθυνσης ανα περιοχή

### **Mdir\_graph.m**

```
figure(1)  
subplot(2,3,1);  
rose(aMdir24);  
ylabel('ARMA[2,4]');title('Αθως')  
subplot(2,3,2);  
rose(aMdir25);  
ylabel('ARMA[2,5]')  
subplot(2,3,3);  
rose(aMdir34);  
ylabel('ARMA[3,4]')  
subplot(2,3,4);  
rose(aMdir35);  
ylabel('ARMA[3,5]')  
subplot(2,3,5);  
rose(aMdir52);  
ylabel('ARMA[5,2]')  
subplot(2,3,6);  
rose(aMdir54);  
ylabel('ARMA[5,4]')  
figure(2)  
subplot(2,3,1);  
rose(bMdir24);  
ylabel('ARMA[2,4]');title('Σαντορίνη')  
subplot(2,3,2);  
rose(bMdir25);  
ylabel('ARMA[2,5]')  
subplot(2,3,3);  
rose(bMdir34);
```



```
ylabel('ARMA[3,4]')
subplot(2,3,4);
rose(bMdir35);
ylabel('ARMA[3,5]')
subplot(2,3,5);
rose(bMdir52)
ylabel('ARMA[5,2]')
subplot(2,3,6);
rose(bMdir54)
ylabel('ARMA[5,4]')
figure(3)
subplot(2,3,1);
rose(cMdir24);
ylabel('ARMA[2,4]');title('Πύλος')
subplot(2,3,2);
rose(cMdir25);
ylabel('ARMA[2,5]')
subplot(2,3,3);
rose(cMdir34);
ylabel('ARMA[3,4]')
subplot(2,3,4);
rose(cMdir35);
ylabel('ARMA[3,5]')
subplot(2,3,5);
rose(cMdir52)
ylabel('ARMA[5,2]')
subplot(2,3,6);
rose(cMdir54)
ylabel('ARMA[5,4]')
figure(4)
subplot(2,3,1);
rose(dMdir24);
ylabel('ARMA[2,4]');title('Σκύρος')
subplot(2,3,2);
rose(dMdir25);
ylabel('ARMA[2,5]')
subplot(2,3,3);
rose(dMdir34);
ylabel('ARMA[3,4]')
subplot(2,3,4);
rose(dMdir35);
ylabel('ARMA[3,5]')
subplot(2,3,5);
rose(dMdir52)
ylabel('ARMA[5,2]')
subplot(2,3,6);
rose(dMdir54)
ylabel('ARMA[5,4]')
figure(5)
rose(aMdir)
title('Κατεύθυνση Κύματος Άθως')
```



```
figure(6)
rose(bMdir)
title('Κατεύθυνση Κύματος Σαντορίνης')
figure(7)
rose(cMdir)
title('Κατεύθυνση Κύματος Πύλου')
figure(8)
rose(dMdir)
title('Κατεύθυνση Κύματος Σκύρου')

%%Διάγραμμα Κατεύθυνσης Σημαντικού Ύψους και Περιόδου

%%Συμμετρία κατανομής σχετικών συχνοτήτων
```

### **skewness.m**

```
k1=kurtosis(afHmo34)
s1=skewness(afHmo34)
k2=kurtosis(bfHmo34)
s2=skewness(bfHmo34)
k3=kurtosis(cHmo34)
s3=skewness(cHmo34)
k4=kurtosis(dHmo34)
s4=skewness(dHmo34)
k5=kurtosis(afTp34)
s5=skewness(afTp34)
k6=kurtosis(bfTp34)
s6=skewness(bfTp34)
k7=kurtosis(cTp34)
s7=skewness(cTp34)
k8=kurtosis(dTp34)
s8=skewness(dTp34)
```

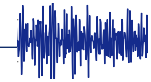
%%Παρακάτω παρουσιάζεται η διαδικασία fit.m για την προσαρμογή και τον έλεγχο καταλληλότητας ενός υποδείγματος ARMA(2,5), όπως εκτελείται από το MATLAB.

```
mod = ARIMA(2,0,5) Model:
```

```
-----
Distribution: Name = 'Gaussian'
P: 2
D: 0
Q: 5
Constant: NaN
AR: {NaN NaN} at Lags (1 2)
SAR: {}
MA: {NaN NaN NaN NaN NaN} at Lags (1 2 3 4 5)
SMA: {}
Variance: NaN
```

---

```
Diagnostic Information
Number of variables: 9
```

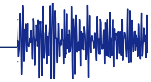


Functions  
Objective:  
@(X)nLogLike(X,Y,E,V,OBJ,AR,Lags,MA,Lags,maxPQ,T,isDistributionT,options,userSpecifiedY0,userSpecifiedE0,userSpecifiedV0)  
Gradient: finite-differencing  
Hessian: finite-differencing (or Quasi-Newton)  
Nonlinear constraints:  
@(x)nonLinearConstraints(x,LagsAR,LagsSAR,LagsMA,LagsSMA,tolerance)  
Nonlinear constraints gradient: finite-differencing  
Constraints  
Number of nonlinear inequality constraints: 2  
Number of nonlinear equality constraints: 0  
Number of linear inequality constraints: 0  
Number of linear equality constraints: 0  
Number of lower bound constraints: 9  
Number of upper bound constraints: 9  
Algorithm selected  
sequential quadratic programming

---

End diagnostic information				Norm of First-order		
Iter	F-count	f(x)	Feasibility	Steplength	step optimality	
0	10	8.468159e+02	0.000e+00		7.131e+02	
1	26	8.027940e+02	0.000e+00	1.176e-01	5.403e-01	1.080e+03
2	50	7.969673e+02	0.000e+00	6.782e-03	8.051e-02	1.089e+03
3	68	6.506300e+02	0.000e+00	5.765e-02	2.161e-01	1.109e+03
4	87	6.419926e+02	0.000e+00	4.035e-02	1.665e-01	5.325e+02
5	101	5.140649e+02	0.000e+00	2.401e-01	6.592e-01	5.455e+02
6	122	5.044168e+02	0.000e+00	1.977e-02	4.880e-02	1.504e+03
7	138	4.725923e+02	0.000e+00	1.176e-01	2.604e-01	4.359e+03
8	159	4.712975e+02	0.000e+00	1.977e-02	9.691e-02	1.707e+04
9	176	4.602952e+02	0.000e+00	8.235e-02	3.691e-01	5.891e+03
10	191	4.464132e+02	0.000e+00	1.681e-01	3.036e-01	6.299e+03
11	206	4.250106e+02	0.000e+00	1.681e-01	3.800e-01	3.131e+03
12	224	4.125896e+02	0.000e+00	5.765e-02	1.191e-01	7.416e+02
13	242	4.100160e+02	0.000e+00	5.765e-02	9.189e-02	6.599e+03
14	257	4.055512e+02	0.000e+00	1.681e-01	3.537e-01	9.821e+03
15	279	4.028483e+02	0.000e+00	1.384e-02	4.422e-02	3.221e+02
16	291	3.679154e+02	0.000e+00	4.900e-01	7.215e-01	5.771e+02
17	305	3.665318e+02	0.000e+00	2.401e-01	4.295e-01	1.237e+03
18	316	3.282490e+02	0.000e+00	7.000e-01	2.512e-01	1.642e+03
19	334	3.252436e+02	0.000e+00	5.765e-02	1.190e-01	1.531e+03
20	352	3.208327e+02	0.000e+00	5.765e-02	1.694e-01	1.344e+03
21	362	3.105154e+02	0.000e+00	1.000e+00	1.165e-01	5.933e+02
22	372	3.028657e+02	0.000e+00	1.000e+00	1.225e-01	4.562e+02
23	382	3.018978e+02	0.000e+00	1.000e+00	5.253e-02	3.976e+02
24	392	3.006851e+02	0.000e+00	1.000e+00	2.239e-02	2.971e+02
25	402	3.006367e+02	0.000e+00	1.000e+00	7.089e-03	1.950e+02
26	412	3.006239e+02	0.000e+00	1.000e+00	2.491e-03	1.242e+02
27	422	3.006159e+02	0.000e+00	1.000e+00	3.115e-03	4.987e+00
28	432	3.006146e+02	0.000e+00	1.000e+00	2.972e-03	3.648e+01
29	442	3.006142e+02	0.000e+00	1.000e+00	9.890e-04	3.215e+01





30	452	3.006138e+02	0.000e+00	1.000e+00	5.137e-04	2.432e+01
Norm of First-order						
Iter	F-count	f(x)	Feasibility	Steplength	step	optimality
31	462	3.006134e+02	0.000e+00	1.000e+00	5.383e-04	1.072e+01
32	472	3.006133e+02	0.000e+00	1.000e+00	5.005e-04	2.350e+00
33	482	3.006132e+02	0.000e+00	1.000e+00	3.316e-04	9.989e-02
34	492	3.006132e+02	0.000e+00	1.000e+00	1.518e-04	5.173e-02
35	502	3.006132e+02	0.000e+00	1.000e+00	7.546e-05	8.547e-02
36	512	3.006132e+02	0.000e+00	1.000e+00	2.596e-05	4.616e-02
37	522	3.006132e+02	0.000e+00	1.000e+00	2.984e-06	6.226e-03
38	523	3.006132e+02	0.000e+00	7.000e-01	2.531e-07	6.226e-03

Local minimum possible. Constraints satisfied.  
 fmincon stopped because the size of the current step is less than the default value of the step size tolerance and constraints are satisfied to within the selected value of the constraint tolerance.

<stopping criteria details>  
 fit = ARIMA(2,0,5) Model:

```

-----
Distribution: Name = 'Gaussian'
      P: 2
      D: 0
      Q: 5
Constant: -0.000413757
      AR: {1.32562 -0.923684} at Lags (1 2)
      SAR: {}
      MA: {-1.28778 -0.152355 0.59197 0.20202 -0.282524} at Lags (1 2 3 4 5)
      SMA: {}
Variance: 0.105321
logL = -300.613233835149e+000
LOGL =
Columns 1 through 4
-912.177946722868e+000 -872.769439137998e+000 -688.431095827703e+000 -
649.731905944173e+000
-417.340699364284e+000 -414.811611062145e+000 -327.541113195971e+000 -
327.277552171405e+000
0.000000000000000e+000 0.000000000000000e+000 0.000000000000000e+000
0.000000000000000e+000
0.000000000000000e+000 0.000000000000000e+000 0.000000000000000e+000
0.000000000000000e+000
0.000000000000000e+000 0.000000000000000e+000 0.000000000000000e+000
0.000000000000000e+000

Column 5
-645.771130029448e+000
-300.613233835149e+000
0.000000000000000e+000
0.000000000000000e+000
0.000000000000000e+000
PQ = Columns 1 through 4
2.000000000000000e+000 3.000000000000000e+000 4.000000000000000e+000
5.000000000000000e+000

```



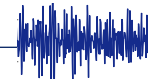
---

3.0000000000000000e+000	4.0000000000000000e+000	5.0000000000000000e+000
6.0000000000000000e+000		
0.0000000000000000e+000	0.0000000000000000e+000	0.0000000000000000e+000
0.0000000000000000e+000		
0.0000000000000000e+000	0.0000000000000000e+000	0.0000000000000000e+000
0.0000000000000000e+000		
0.0000000000000000e+000	0.0000000000000000e+000	0.0000000000000000e+000
0.0000000000000000e+000		
Column 5		
6.0000000000000000e+000		
7.0000000000000000e+000		
0.0000000000000000e+000		
0.0000000000000000e+000		
0.0000000000000000e+000		



## 9. Βιβλιογραφικές Παραπομπές

- Sobey, R. J. (1996) *Correlation between individual waves in a real sea state*. Elsevier, Coastal engineering Vol. 27 pp.223-242.
- Ozger, M. (2011) *Scalling characteristics of ocean wave height time series*, Elsevier, Physica Vol. 390 pp 981-989.
- Guedes Soares, C., Ferreira, A. M. (1996) *Representation of non-stationary time series of significant wave height with autoregressive models*. Elsevier, Probabilistic Engineering Mechanis Vol. 11, pp 139-148.
- Stafanakos, Ch. N., Athanassoulis, G. A. (2001) *A unified methodology for the analysis, completion and simulation of nonstationary time series with missing values, with application to wave data*. Elsevier, Applied Ocean Research Vol. 23, pp.207-220.
- Ho, P-C., Yim, J.Z (2005) *A study of the data transferability between two wave – measuring stations*. Elsevier Coastal Engineering Vol. 52 pp. 313-329.
- Li, Y., Kareem, A. (1993) *Parametric modelling of stochastic wave affects in offshore platforms*. Elsevier Applied Ocean Research Vol. 15 pp. 63-83.
- Spanos, P. D. (1983) *ARMA Algorithms for Ocean Wave Modeling*, ASME Jour. Energy Resources Tech., Vol 105, pp 300-309.
- Makridakis, S., Wheelwright, S. C. and Hyndman, R. J. (1998) *Forecasting: Methods and Applications*, 3rd edn. New York: Wiley.
- Box, G. E. P., Jenkins, G. M. and Reinsel, G. C. (1994) *Time Series Analysis, Forecasting and Control*, 3rd edn. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Box, G. E. P. and Pierce, D. A. (1970). Distribution of residual autocorrelations in autoregressive – integrated moving average time series models, J. Amer. Statist. Assoc, 65, 1509-1526.
- Brockwell, P. J., Davis, R. A., Richard A. Davis(2002) *Introducing to Time Series and Forecasting*, 2<sup>nd</sup> edn, U.S.A.: Springer
- Hamilton, J. D. (1994) *Time Series Analysis*, Princeton University Press.
- Wei, W. W. S. (1990) *Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods*. Redwood City, CA: Addison-Wesley.
- Shumway, R. H., Stoffer, D. S. (2011) *Time Series Analysis and its Applications, With R Examples*, 3<sup>rd</sup> edn. New York: Springer.
- Chatfield, C. (2000) *Time-Series Forecasting*, U.S.A.: Chapman & Hall/CRC
- Αθανασούλης, Γ. Α. (2003) *Πράξεις και Μετασχηματισμοί Τυχαίων μεταβλητών – Ανεμογενείς Θαλάσσιοι Κυματισμοί*. Αθήνα : Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Τμήμα Ναυπηγών Μηχ/γων Μηχανικών
- Χρήστου, Γ. Κ. (2011) *Εισαγωγή στην Οικονομετρία*, Αθήνα: Gutenberg
- Κουγιουμτζής, Δ. *Ανάλυση Χρονοσειρών*, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης.
- Σουκισιάν, Τ., Χατζηνάκη, Μ., Κορρές, Γ., Παπαδόπουλος, Α., Κάλλος, Γ., Ανδρονιστάκης, Ε., (2007) *Άτλας Ανέμου και Κύματος των Ελληνικών Θαλασσών*. Εκδ. Ελληνικό Κέντρο Θαλασσιών Ερευνών.



- 
- Μπόρα - Σέντα, Ε., Μωυσιάδης, Χ., (1997) *Εφαρμοσμένη Στατιστική*, 2<sup>η</sup> εκδ., Θεσσαλονίκη: Ζήτη.
  - Μπόρα – Σέντα, Ε., Κολύβα – Μαχαίρα, Φ. (1999) *Στατιστική*, Θεσσαλονίκη: Ζήτη.
  - Κιουστελίδης, Ι. Β. (2002) *Ο Μηχανισμός της Νόησης. Εξελικτικές πλευρές της σκέψης και της φύσης των εννοιών*. Αθήνα: Παπασωτηρίου.
  - Σουκισιάν, Γ. *Στοχαστικότητα: μελέτη, μοντελοποίηση και πρόβλεψη φυσικών φαινομένων* [http://hcmrseminars.ath.hcmr.gr/Presentations/General%20Intro\\_Soukissian.pdf](http://hcmrseminars.ath.hcmr.gr/Presentations/General%20Intro_Soukissian.pdf).
  -

