



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών

Τομέας Ρευστών

Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών

Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής  
& Βελτιστοποίησης

Επαναδιατύπωση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου στη  
βάση της διακριτής. Μια νέα ιδέα με εφαρμογή σε  
ψευδο-1Δ προβλήματα βελτιστοποίησης στην  
αεροδυναμική.

Διπλωματική εργασία

Πέτρος Χ.Γαρυφαλάκης

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου  
Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Ιούλιος 2013





ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ  
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΘΕΡΜΙΚΩΝ ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ  
ΜΟΝΑΔΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ  
ΡΕΥΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Επαναδιατύπωση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου στη  
βάση της διακριτής. Μια νέα ιδέα με εφαρμογή σε  
ψευδο-1Δ προβλήματα βελτιστοποίησης στην  
αεροδυναμική.

Διπλωματική Εργασία  
Πέτρος Χ.Γαρυφαλάκης

Επιβλέπων: Κ.Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Ιούλιος 2013

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία παρουσιάζει τη μαθηματική ανάπτυξη μιας νέας διατύπωσης της συνεχούς συζυγούς μεθόδου, για εφαρμογή στον κλάδο της αεροδυναμικής βελτιστοποίησης. Η νέα διατύπωση κάνει τη συνεχή συζυγή μέθοδο απόλυτα συμβατή με το σχήμα διακριτοποίησης του πρωτεύοντος προβλήματος ροής, γεγονός που αυξάνει την ακρίβεια πρόλεξης των παραγώγων ευαισθησίας. Έτσι καταφέρνει να προσδώσει στη συνεχή συζυγή μέθοδο το ίδιο ακριβώς πλεονέκτημα που έχει και η διακριτή, χωρίς να απεμπολεί τα άλλα γνωστά πλεονεκτήματα της πρώτης (λ.χ. τη δυνατότητα κατανόησης όρων και εξισώσεων, την οικονομία μνήμης, κλπ). Αναλύεται διεξοδικά η προτεινόμενη μεθοδολογία για τη θεμελιωσή της. Η εφαρμογή του προγραμματισθέντος λογισμικού γίνεται στο πρόβλημα αντίστροφου σχεδιασμού ενός ψευδο-1Δ αγωγού, με στόχο την επίτευξη συγκεκριμένης κατανομής πίεσης κατά το μήκος του. Το ρευστό είναι συμπιεστό και η ροή ατριβής. Στην περίπτωση αυτή υπολογίζονται οι πρώτες παράγωγοι της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς στις μεταβλητές σχεδιασμού.

Η προτεινόμενη νέα συνεχής συζυγής τεχνική συνδιάζει τα πλεονεκτήματα της συνεχούς και της διακριτής συζυγούς μεθόδου. Στην ουσία αφορά μια παραλλαγή της κλασικής συνεχούς συζυγούς μεθόδου όπου όμως η ακρίβεια των παραγώγων ευαισθησίας είναι ίδια με αυτή της διακριτής. Επιβάλλονται νέες οριακές συνθήκες καθώς και νέο σχήμα διακριτοποίησης των συζυγών διαφορικών εξισώσεων στους εσωτερι-

κούς κόμβους, διαφορετικό από ότι στην κλασική συνεχή συζυγή τεχνική, με σκοπό όχι μόνο τον υπολογισμό παραγώγων καλύτερης ακρίβειας, αλλά και την επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης σε λιγότερους κύκλους.

Αφού ολοκληρώθηκε η μαθηματική διατύπωση προγραμματίστηκε η προτεινόμενη μέθοδος στο ψευδο-1Δ πρόβλημα και ελέγχθηκε η αξιοπιστία των αποτελεσμάτων. Οι υπολογισμοί παραγώγων έγιναν αρχικά με σχήμα ακρίβειας πρώτης τάξης και, μετά, με σχήμα δεύτερης τάξης, ενώ τα αποτελέσματα συγκρίθηκαν με τη μέθοδο της ευθείας διαφόρισης, η οποία είναι απόλυτα συμβατή με τη διακριτή συζυγή μέθοδο.



NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS  
SCHOOL OF MECHANICAL ENGINEERING  
FLUIDS DEPARTMENT  
LABORATORY OF THERMAL TURBOMACHINES  
PARALLEL CFD & OPTIMIZATION UNIT

**Reformulation of the continuous adjoint method based on  
the discrete one. A new idea with application to quasi-1D  
aerodynamic shape optimization problems.**

Diploma Thesis  
**Petros C. Garyfalakis**

Advisor: K. C. Giannakoglou, Professor NTUA

Athens, July 2013

Abstract

This diploma thesis presents the mathematical development of a new continuous adjoint method, with applications in the field of aerodynamic shape optimization. This new formulation makes the continuous adjoint method absolutely compatible with the discretization scheme employed for the primal differential equations and leads to the computation of sensitivity derivatives of high accuracy. Thus, the continuous adjoint method shares the same advantage with the discrete one without divesting itself its other well-known advantages (such as the possibility of interpreting the adjoint terms and equations, the noticeable economy in memory, etc). The mathematical formulation is analyzed in detail. The programmed software is applied to the inverse design of a quasi-1D duct, for reproducing a target pressure distribution along its length. The fluid is compressible and the flow is inviscid. The computation of the gradient of the objective function with respect to the design variables is performed.

The proposed new continuous adjoint method combines the advantages of the continuous and discrete adjoint methods. Essentially, it is a new variant of the continuous adjoint method in which, the accuracy of sensitivity derivatives is the same as in the discrete one. New boundary conditions and new discretization schemes for the adjoint equations at the internal nodes are derived, different than those of standard continuous adjoint. The new formulation aims not only to compute the gradient with higher accuracy but, also, leads to reduction in the number of optimization cycles required to get the optimal solution.

Based on the mathematical development, the proposed method is programmed for the solution of a quasi-1D problem and assessed. The gradient is computed with first-order and, second-order accuracy. Results are compared with the direct differentiation method, which is compatible with the discrete adjoint method.

# Ευχαριστίες

Από την πλευρά μου θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου, κ. Κυριάκο Γιαννάκογλου, για την δυνατότητα που μου πρόσφερε να ασχοληθώ με ένα όχι μόνο τόσο ενδιαφέρον αλλά και πρωτότυπο θέμα. Οι πολύτιμες συμβουλές του σε συνδιασμό με την σωστή καθοδήγηση του διαδραμάτισαν έναν καθοριστικό ρόλο στην εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Επιπλέον θα ήθελα να τον ευχαριστήσω για την ουσιαστική συμβολή του στην αποκόμιση χρήσιμων γνώσεων σε όλη την πενταετή ακαδημαϊκή φοίτηση μου.

Συνάμα δεν θα μπορούσα να μην ευχαριστήσω όλους τους ερευνητές της ΜΠΥΡ&B/ΕΘΣ και κυρίως τον Δρ. Βαγγέλη Παπουτσή και την Δρ. Βαρβάρα Ασούτη. Ο χρόνος, η προθυμία, η εμπειρία καθώς και πολύτιμες γνώσεις τους που μου διέθεσαν, συνέβαλαν ώστε να ξεπεραστούν δυσκολίες στην διεκπεραίωση της εργασίας.

Τέλος νιώθω αμέτρητη ευγνωμοσύνη για τη συμπαράσταση, τη δύναμη, τη στήριξη, και την υπομονή που προσέφεραν η οικογένεια και οι φίλοι μου προς το άτομο μου, σε όλη τη διάρκεια των σπουδών.

# Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	vi
<b>1 Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1 Εισαγωγικά σχόλια . . . . .	1
1.2 Υποδομή και πραγματοποιηθέν έργο. . . . .	3
1.3 Η δομή της εργασίας. . . . .	4
<b>2 Αριθμητική Επίλυση Ψευδο-1Δ Ροής σε Αγωγό.</b>	<b>7</b>
2.1 Ψευδο-1Δ πρόβλημα ροής . . . . .	7
2.2 Μαθηματική διατύπωση εξισώσεων ροής . . . . .	8
2.3 Επίλυση ευθέως προβλήματος με ακρίβεια δεύτερης τάξης . . . . .	12
2.4 Οριακές συνθήκες . . . . .	25
2.5 Επιλύτης πρωτεύοντος προβλήματος . . . . .	30
<b>3 Εύρεση Πρώτης Παραγώγου με τη Διακριτή Συζυγή Μέθοδο</b>	<b>33</b>
3.1 Εισαγωγικά Σχόλια . . . . .	33
3.2 Υπολογισμός πρώτης παραγώγου με ευθεία διαφορίση . . . . .	33
3.3 Διακριτή συζυγής μέθοδος . . . . .	38
3.4 Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών . . . . .	40
3.5 Αλγόριθμος αντίστροφου σχεδιασμού . . . . .	41
<b>4 Εύρεση Πρώτης Παραγώγου με τη Συνεχή Συζυγή Μέθοδο.</b>	<b>43</b>
4.1 Εισαγωγικά σχόλια . . . . .	43
4.2 Υπολογισμός πρώτης παραγώγου με τη συνεχή συζυγή μέθοδο. . . . .	44
4.3 Διακριτοποίηση των συζυγών εξισώσεων με ακρίβεια πρώτης τάξης. . . . .	47



4.4	Οριακές συνθήκες του συζυγούς προβλήματος. . . . .	51
4.5	Διακριτοποίηση συζυγών εξισώσεων με ακρίβεια δεύτερης τάξης. . . . .	57
4.6	Επιλύτης συζυγούς προβλήματος. . . . .	64
<b>5</b>	<b>Σύγκριση Διακριτής και Συνεχούς Συζυγούς Μεθόδου</b>	<b>67</b>
5.1	Πρόβλημα αντίστροφου σχεδιασμού με τις συζυγείς τεχνικές . . . . .	67
5.2	Σχετικά πλεονεκτήματα των δύο μεθόδων . . . . .	71
<b>6</b>	<b>Συμβατή διακριτοποίηση των συζυγών εξισώσεων - Η νέα συνεχής συζυγής μέθοδος</b>	<b>73</b>
6.1	Εισαγωγικά σχόλια . . . . .	73
6.2	Υπολογισμός παραγώγου. Διακριτοποίηση πρώτης τάξης ακρίβειας. . .	75
6.2.1	Διακριτοποίηση του όρου $-A^T \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x}$ . . . . .	80
6.2.2	Οριακές Συνθήκες . . . . .	83
6.3	Υπολογισμός παραγώγου-Διακριτοποίηση δεύτερης τάξης ακρίβειας. .	85
6.3.1	Διακριτοποίηση του όρου $-A^{T+} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x}$ με ακρίβεια δεύτερης τάξης .	87
6.3.2	Οριακές συνθήκες για ακρίβεια δεύτερης τάξης . . . . .	88
6.4	Εφαρμογή της νέας μεθόδου και σχολιασμός αποτελεσμάτων . . . . .	90
6.4.1	Αποτελέσματα της νέας συνεχούς συζυγούς μεθόδου . . . . .	91
<b>7</b>	<b>Ανακεφαλαίωση-Συμπεράσματα-Σχόλια</b>	<b>95</b>
A'	Έκφραση 1ης παραγώγου για μη-ισαπέχοντες κόμβους.	97
B'	Υπολογισμός των μητρών $A^+, A^-$	101
Γ'	Απόδειξη της σχέσης $\frac{\partial A}{\partial b} \vec{U} = \vec{0}$	105
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>107</b>



# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

### 1.1 Εισαγωγικά σχόλια.

Τα τελευταία χρόνια, το ενδιαφέρον εστιάζεται στο σχεδιασμό αεροδυναμικών μορφών με συγκεκριμένες προδιαγραφές. Συνεπώς, κρίνονται τα αναγκαία υπολογιστικά εργαλεία που καθιστούν εφικτό τον αντίστροφο σχεδιασμό και τη βελτιστοποίηση τέτοιων μορφών. Υπάρχει ενδιαφέρον για την ανάπτυξη και χρήση υπολογιστικών μεθόδων και λογισμικού που όχι μόνο θα υπολογίζουν τη ροή γύρω από (ή μέσα σε) μια αεροδυναμική μορφή, αλλά θα είναι ικανές να εντοπίσουν το σχήμα που θα έπρεπε να έχει η αεροδυναμική μορφή, ώστε να προκαλεί επιθυμητή συμπεριφορά του πεδίου ροής.

Η βελτιστοποίηση μορφής, για παράδειγμα ενός αγωγού, επιδιώκει το σχεδιασμό της βέλτιστης μορφής, σύμφωνα με κάποιο κριτήριο. Το κριτήριο αυτό λαμβάνει μαθηματικά τη μορφή μιας συνάρτησης - στόχου, η οποία πρέπει να ελαχιστοποιηθεί. Για παράδειγμα, η συνάρτηση - στόχος θα μπορούσε να είναι η διαφορά μεταξύ δύο κατανομών πίεσης, ή ο συντελεστής απωλειών ή ο λόγος  $\frac{C_D}{C_L}$  αν πρόκειται για το σχεδιασμό αεροτομής [11], [18],[16]. Ωστόσο, το πρόβλημα βελτιστοποίησης της μορφής μπορεί να διατυπωθεί και εναλλακτικά ως πρόβλημα μεγιστοποίησης της συνάρτησης - στόχου χωρίς καμία διαφοροποίηση στα όσα θα αναφερθούν παρακάτω.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, αναπτύσσεται μια νέα μέθοδος στον κλάδο της αεροδυναμικής βελτιστοποίησης μέσω συζυγών μεθόδων βασιζόμενη στις ήδη υπάρχουσες, έχοντας ως απώτερο σκοπό να εκμεταλλευτεί τα πλεονεκτήματα καθεμιάς, κάνοντας χρήση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου.

Στη συγκεκριμένη διπλωματική η συνάρτηση - στόχος επιλέχθηκε να είναι η

$$F(\vec{U}, \vec{b}) = \frac{1}{2} \int_{(L)} (p(x) - p_{tar}(x))^2 dx \quad (1.1)$$

όπου η ολοκλήρωση γίνεται σε όλο το μήκος του ψευδο-1Δ αγωγού και όπου, σε συγκεκριμένες συνθήκες ροής, προκύπτει κατανομή πίεσης  $p(x)$  αντί της επιθυμητής  $p_{tar}(x)$ . Η παραπάνω διατύπωση της συνάρτησης - στόχου οδηγεί, προφανώς, σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης.

Η συνάρτηση - στόχος, όπως φαίνεται και από την εξίσωση 1.1, εξαρτάται αφενός μεν από τη γεωμετρία του αγωγού και αφετέρου από το διαμορφούμενο σε αυτόν πεδίο ροής. Η κατανομή της (κυκλικής) διατομής του αγωγού κατά το διαμήκη άξονα, έχει παραμετροποιηθεί με πολύωνυμα Bezier-Bernstein. Οι μεταβλητές οι οποίες περιγράφουν την γεωμετρία του αγωγού ονομάζονται ελεύθερες μεταβλητές ή μεταβλητές σχεδιασμού (διάνυσμα  $\vec{b}$ ) και συνδέονται με τα μεγέθη ροής (διάνυσμα  $\vec{U}$ ) μέσω των εξισώσεων της ροής.

Ωστόσο η συνάρτηση στόχου που επιλέχθηκε θα μπορούσε να είναι διαφορετικής μορφής, ανάλογα με τις απαιτήσεις του εκάστοτε προβλήματος. Για παράδειγμα η συνάρτηση - στόχος θα μπορούσε να είναι η ελαχιστοποίηση δυνάμεων όπως η οπισθέλκουσα, που ασκούνται σε στερεά σώματα [11]. Επιπρόσθετα η παραμετροποίηση για τη γεωμετρία του αγωγού θα μπορούσε να γίνει με διαφορετικού είδους πολύωνυμα χωρίς όμως και τις δύο περιπτώσεις να αλλάζει η ουσία στον τρόπο ανάπτυξης της νέας μεθόδου.

Σε επόμενα κεφάλαια, αρχικά παρουσιάζεται συνοπτικά ο τρόπος επίλυσης των εξισώσεων της ροής μέσα σε μια δεδομένη γεωμετρική μορφή ενός αγωγού, δηλαδή το ευθύ πρόβλημα και στη συνέχεια βελτιστοποιείται η μορφή αυτού με χρήση της απότομης καθόδου. Η χρήση των παραπάνω μεθόδων προϋποθέτει τη διαθεσιμότητα μεθόδων υπολογισμού της κλίσης της συνάρτησης στόχου, δηλαδή απαιτείται υποστήριξη από μία μέθοδο ικανή να υπολογίζει πρώτες παραγώγους ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, σε κάθε κύκλο της μεθόδου. Με τον τρόπο αυτό, θα προσδιοριστεί μία κατεύθυνση αντίχτυσης που να οδηγεί σε ταχεία βελτίωση της μορφής και ταυτόχρονη μείωση της τιμής της συνάρτησης στόχου.

Δύο τρόποι υπολογισμού των παραγώγων είναι οι με πεπερασμένες διαφορές και η θεωρία των μιγαδικών συναρτήσεων. Ωστόσο η ανάπτυξη νέων τεχνικών οι οποίες στηρίζονται στη θεωρία ελέγχου επιτρέπουν τον υπολογισμό των απαραίτητων παραγώγων με σημαντικά λιγότερο κόστος CPU, γιατί το κόστος υπολογισμού όλων των μερικών παραγώγων ως προς κάθε σημείο ελέγχου είναι πρακτικά ανεξάρτητο του αριθμού των σημείων ελέγχου. Οι τεχνικές αυτές είναι γνωστές με το όνομα συζυγείς (adjoint) ή δυαδικές (dyadic) μέθοδοι ως προς τις εξισώσεις της ροής (εξισώσεις του

ευθέος προβλήματος).

Οι συζυγείς τεχνικές είναι δύο ειδών, η συνεχής συζυγής μέθοδος (continuous adjoint method ) και η διακριτή συζυγής μέθοδος (discrete adjoint method) [3,6,7]. Κατά τη χρήση της συνεχούς συζυγούς τεχνικής, οι συζυγείς εξισώσεις διαμορφώνονται από τις αντίστοιχες εξισώσεις της ροής σε διαφορική μορφή και έπειτα διακριτοποιούνται προκειμένου να επιλυθούν αριθμητικά. Από την άλλη πλευρά, χρησιμοποιείται η διακριτή συζυγής διατύπωση, με βάση την οποία διακριτοποιούνται οι εξισώσεις ροής και στη συνέχεια διαμορφώνεται απευθείας το συζυγές πρόβλημα σε διακριτοποιημένη μορφή. Με αυτόν τον τρόπο γίνεται ξεκάθαρο ότι, στη διακριτή συζυγή τεχνική, η βάση της όλης ανάπτυξης είναι οι διακριτοποιημένες εξισώσεις ροής [5-11].

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι αφενός η ανάπτυξη μιας νέας μεθόδου βελτιστοποίησης η οποία θα περιέχει συγκεκριμένα χαρακτηριστικά από καθεμιά από τις δύο μεθόδους (παραμένοντας όμως, ουσιαστικά μια συνεχής συζυγής μέθοδος) και αφετέρου, η σύγκριση των μεθόδων ως προς την ακρίβεια της τιμής των παραγώγων της συνάρτησης - στόχου.

Έτσι, στην παρούσα διπλωματική εργασία δομείται και αναπτύσσεται μια νέα συνεχής συζυγής μέθοδος. Βασικό χαρακτηριστικό της είναι ότι αποτελεί η συμβατή διακριτοποίηση των συζυγών εξισώσεων χωρίς όμως το μειονέκτημα της διαχείρισης απαιτητικών πινάκων όπως η διακριτή μέθοδος. Ταυτόχρονα οι πράξεις είναι μαθηματικές διαφορίσεις όπως η συνεχής μέθοδος.

## 1.2 Υποδομή και πραγματοποιηθέν έργο.

Για τις ανάγκες της παρούσας διπλωματικής εργασίας προσαρμόστηκαν κώδικες επίλυσης του ευθέος και του συζυγούς προβλήματος για τον υπολογισμό της πρώτης παραγώγου σε μονοδιάστατο αγωγό, χρησιμοποιώντας προϋπάρχον λογισμικό για την παραμετροποίηση των γεωμετρικών μορφών και την επίλυση του ευθέος προβλήματος.

Πιο αναλυτικά, προϋπήρχε[1],[2]:

- Λογισμικό για παραμετροποίηση γεωμετρικών μορφών με χρήση πολυωνύμων Bezier-Bernstein.
  - Επιλύτης για τις εξισώσεις ροής σε ψευδο-1Δ αγωγό.
  - Διακριτή συζυγή τεχνική για τον υπολογισμό της 1ης παραγώγου σε ψευδο-1Δ αγωγό.
-

- Συνεχή συζυγή τεχνική για τον υπολογισμό της 1ης παραγώγου σε ψευδο-1Δ αγωγό.

Στηριζόμενοι στο προϋπάρχον λογισμικό, προσαρμόστηκαν η διακριτή και η συνεχής συζυγής μέθοδος ως εξής:

- Ανάπτυξη της μαθηματικής ανάλυσης της νέας συνεχούς συζυγούς μεθόδου έτσι ώστε να συνδιάζει τα χαρακτηριστικά των δύο συζυγών μεθόδων, για την επίτευξη ίδιων τιμών των παραγώγων ευαισθησίας με αυτών της διακριτής συζυγής μεθόδου.
- Προγραμματισμός της προτεινόμενης μεθόδου για τον υπολογισμό της πρώτης παραγώγου πρώτης και δεύτερης τάξης ακρίβειας για τον αντίστροφο σχεδιασμό ψευδο-1Δ αγωγού.
- Διερεύνηση, σύγκριση και πιστοποίηση των διαφόρων μεθόδων και του λογισμικού που προγραμματίστηκε.

### 1.3 Η δομή της εργασίας.

Η διπλωματική εργασία αναπτύσσεται σε δύο κυρίως άξονες:

- Αρχικά γίνεται λεπτομερής ανάπτυξη των ήδη προϋπαρχουσών συζυγών τεχνικών για υπολογισμό της πρώτης παραγώγου, ακρίβειας πρώτης και δεύτερης τάξης, μιας συνάρτησης στόχου σε ψευδο-1Δ αγωγό.
- Έπειτα ακολουθεί πλήρης θεωρητική διατύπωση του τρόπου με τον οποίο θεμελιώθηκε η νέα συνεχής συζυγής μέθοδος.

Πιο συγκεκριμένα, τα δύο αυτά θέματα κατανέμονται στα επόμενα κεφάλαια ως εξής:

- Στο Κεφάλαιο 2:

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται αναλυτικά η επίλυση του ευθέως προβλήματος σε μονοδιάστατο αγωγό, καθώς και η διακριτοποίηση που επιλέχθηκε για ακρίβεια πρώτης και δεύτερης τάξης. Επιπρόσθετα, περιγράφεται ο τρόπος επιβολής των οριακών συνθηκών που χρησιμοποιήθηκαν κατά την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων ροής.

- Στο Κεφάλαιο 3:

Περιγράφεται αναλυτικά ο τρόπος εύρεσης της πρώτης παραγώγου με ακρίβεια πρώτης και δεύτερης τάξης, με τη μέθοδο της ευθείας διαφορίσης, της συζυγούς μεθόδου καθώς και της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών.

---

- Στο Κεφάλαιο 4:  
Περιγράφεται η διατύπωση των εξισώσεων και ο τρόπος υπολογισμού της πρώτης παραγώγου με τη συνεχή συζυγή μέθοδο.
- Στο Κεφάλαιο 5:  
Γίνεται παρουσίαση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από την επίλυση του συζυγούς προβλήματος με τη διακριτή και συνεχή συζυγή μέθοδο με σκοπό να συγκριθούν μεταξύ τους.
- Στο Κεφάλαιο 6:  
Περιγράφεται η νέα συνεχής συζυγής μέθοδος στην αεροδυναμική βελτιστοποίηση που ουσιαστικά αφορά μια επαναδιατύπωση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου. Αναπτύσσεται λεπτομερώς η εύρεση της πρώτης παραγώγου με ακρίβεια πρώτης και δεύτερης τάξης και η συγκεκριμένη διακριτοποίηση του κάθε όρου. Επιπλέον παρουσιάζεται ο τρόπος επιβολής των οριακών συνθηκών για κάθε περίπτωση ενώ, τέλος, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την επίλυση του συζυγούς προβλήματος μέσω της νέας μεθόδου αεροδυναμικής βελτιστοποίησης.
- Στο Κεφάλαιο 7: Γίνεται σύνοψη των βασικών σημείων της εργασίας και διατυπώνονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν.

Στις εφαρμογές δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στην ακρίβεια υπολογισμού των παραγώγων ευαισθησίας, αφού αυτό είναι το ζητούμενο από τη νέα συζυγή τεχνική. Συνάμα όμως, στις εφαρμογές αυτές συμπεριλαμβάνεται και βελτιστοποίηση μορφής με τη μέθοδο απότομης καθόδου.

---



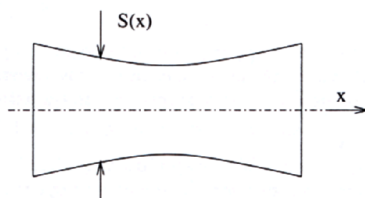


## Κεφάλαιο 2

# Αριθμητική Επίλυση Ψευδο-1Δ Ροής σε Αγωγό.

### 2.1 Ψευδο-1Δ πρόβλημα ροής

Η ενότητα αυτή ασχολείται με τον υπολογισμό της ατριβούς, συμπιεστής, ψευδο-1Δ ροής μέσα σε αγωγό. Θεωρείται δηλαδή ότι τα χαρακτηριστικά της ροής μεταβάλλονται μόνο κατά την αξονική κατεύθυνση του αγωγού. Η διατύπωση ως προς τον επιλύτη της ροής βασίζεται στη θεωρία των υπερβολικών συστημάτων, εισάγοντας τον ψευδοχρόνο για χρονικά μόνιμες ροές με σκοπό την ενίσχυση της διαγώνιας κυριαρχίας.



Σχήμα 2.1: Ψεύδο - 1Δ ροή σε αγωγό.

Η παραμετροποίηση της κατανομής  $S(x)$  εισάγει τις ελεύθερες μεταβλητές (ή μεταβλητές σχεδιασμού), οι οποίες εμπεριέχονται στο διάνυσμα  $\vec{b}$ , διάστασης  $N$ . Παρά τη φαινομενική απλότητα του, το 1Δ πρόβλημα που θα επιλυθεί έχει μια πολύ σημαντική

διαφορά από τα 2Δ ή 3Δ προβλήματα. Η διαφορά είναι ότι σε ένα 1Δ πρόβλημα, οι εξισώσεις ροής και ο στόχος ορίζονται στον ίδιο χώρο (κατά το μήκος  $x$  του αγωγού). Δεν συμβαίνει το ίδιο κατά το σχεδιασμό μιας αεροτομής (2Δ πρόβλημα), όπου οι μεν εξισώσεις ροής ισχύουν στο χώρο που περιβάλλει την αεροτομή (2Δ χωρίο) ενώ ο δε στόχος - κατανομή πίεσης ορίζεται συνήθως κατά μήκος του περιγράμματός της.

## 2.2 Μαθηματική διατύπωση εξισώσεων ροής

Για το 1Δ πρόβλημα διατυπώνονται οι εξισώσεις (Euler) διατήρησης μάζας, ορμής και ενέργειας ως ([4])

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u S)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial(\rho u S)}{\partial t} + \frac{\partial[(\rho u^2 + p)S]}{\partial x} &= p \frac{dS}{dx} \\ \frac{\partial(\rho E S)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u H S)}{\partial x} &= 0\end{aligned}\quad (2.1)$$

όπου  $\rho$  η πυκνότητα του ρευστού,  $u$  η ταχύτητα,  $E$  η ολική ενέργεια ανά μονάδα μάζας του ρευστού και  $H$  η ολική ενθαλπία, για τις οποίες ισχύουν οι χρήσιμες σχέσεις από τη θερμοδυναμική των τελείων αερίων:

$$\rho E = \rho e + \frac{1}{2}\rho u^2 \quad (2.2)$$

$$E = H - \frac{p}{\rho} \quad (2.3)$$

$$\rho E = \frac{\rho c^2}{\gamma(\gamma - 1)} + \frac{1}{2}\rho u^2 \quad (2.4)$$

$$p = (\gamma - 1)\rho e = (\gamma - 1) \left( \rho E - \frac{1}{2}\rho u^2 \right) \quad (2.5)$$

και  $e = c_v T$  είναι η εσωτερική ενέργεια ανά μονάδα μάζας του ρευστού,  $\gamma$  ο εκθέτης ισεντροπικής μεταβολής για το τέλειο αέριο,  $c_v$  ο συντελεστής θερμοχωρητικότητας υπό σταθερό όγκο, θεωρούμενος σταθερός για τέλεια αέρια,  $T$  η στατική θερμοκρασία και  $c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$  η ταχύτητα του ήχου.

Οι εξισώσεις της ροής (2.1) μπορούν να διατυπωθούν στην ακόλουθη μορφή (συντηρητική γραφή)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} &= -\frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \rho u \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} &= -\frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \rho u^2 \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u H)}{\partial x} &= -\frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \rho u H\end{aligned}\quad (2.6)$$

ή ακολουθώντας την περισσότερο χρήσιμη διανυσματική γραφή:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} = \vec{q} \quad (2.7)$$

όπου  $\vec{U}$  το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών,  $\vec{f}$  το διάνυσμα της ατριβούς ροής και  $\vec{q}$  το διάνυσμα των όρων πηγής που οφείλεται στη μεταβολή της διατομής  $S$  κατά μήκος του αγωγού, τα οποία δίνονται από τις σχέσεις

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \\ m \\ E_t \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(\rho E + p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ (\gamma - 1)E_t + \frac{m^2}{\rho} \left(\frac{3-\gamma}{2}\right) \\ \frac{m}{\rho} \left[\gamma E_t - (\gamma - 1)\frac{m^2}{2\rho}\right] \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$$\vec{q} = -\frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 \\ u(\rho E + p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ \frac{m^2}{\rho} \\ \frac{m}{\rho} \left[\gamma E_t - (\gamma - 1)\frac{m^2}{2\rho}\right] \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσιδωτής παραγώγισης, οι εξισώσεις ροής (2.7),

ξαναγράφονται ως

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + A \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = \vec{q} \quad (2.11)$$

όπου  $A$  το Ιακωβιανό μητρώο των συντηρητικών μεταβλητών

$$A = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{U}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2}u^2 & (3-\gamma)u & \gamma-1 \\ -\gamma u E + (\gamma-1)u^3 & \gamma E - \frac{3}{2}(\gamma-1)u^2 & \gamma u \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

με τρεις πραγματικές ιδιοτιμές, τις  $\lambda_1 = u$ ,  $\lambda_2 = u + c$ ,  $\lambda_3 = u - c$ .

Ωστόσο, μας ενδιαφέρει η χρονικά μόνιμη ροή, επομένως απαλείφοντας από την εξίσωση (2.11) το χρονικό όρο και προχωρώντας, στη συνέχεια, σε χωρική διακριτοποίηση θα έχουμε:

$$\vec{R}_i(\vec{U}, \vec{b}) = \left[ A \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} \right]_i \Delta x_i - \vec{q}_i \Delta x_i = 0 \quad , \forall i = 2, \dots, np-1 \quad (2.13)$$

όπου με  $np$  συμβολίζουμε τον αριθμό των κόμβων του πλέγματος ενώ το σύμβολο  $\vec{R}$  παριστάνει το υπόλοιπο (residual) της εξίσωσης ροής. Οι οριακές συνθήκες στην είσοδο και την έξοδο γράφονται αντίστοιχα στη συμβολική γραφή (αναλυτικότερα η παρουσίαση τους γίνεται στην ενότητα 2.4):

$$\vec{R}_1 = 0 \quad , \vec{R}_{np} = 0 \quad (2.14)$$

Όπως είναι προφανές, για να ικανοποιούνται οι εξισώσεις ροής, πρέπει ο τελεστής ροής  $\vec{R}$  σε κάθε κόμβο να είναι ίσος με 0. Επομένως πρέπει να υπολογιστεί το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών  $\vec{U}$  για το οποίο μηδενίζεται το υπόλοιπο.

Η επίλυση του προβλήματος της ροής γίνεται επαναληπτικά μέσω γραμμικοποίησης που

οδηγεί σε δέλτα-διατύπωση (δ-formulation). Δηλαδή:

$$\left[ I \frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \right] \delta \vec{U} = -\vec{R} \quad (2.15)$$

όπου μετά την εύρεση του  $\delta \vec{U}$  το διάνυσμα των συντηρικών μεταβλητών ανανεώνεται ως

$$\vec{U}^{new} = \vec{U}^{old} + \delta \vec{U}$$

Επιπλέον, εισάγεται ο ψευδο-χρονικός όρος εισάγεται (παρόλο που η ροή θεωρείται χρονικά μόνιμη) ώστε να εκμεταλλευτούμε τις ιδιότητες των υπερβολικών συστημάτων και να εφαρμοστούν οι τεχνικές χρονοπροέλασης (time-marching) για την επίλυση του πεδίου ροής. Επιπλέον, στην εξίσωση (2.15) τα εμπλεκόμενα διανύσματα είναι:

$$\vec{R} = \left[ \vec{R}_1, \vec{R}_2, \dots, \vec{R}_{np-1}, \vec{R}_{np} \right]^T \quad (2.16)$$

$$\delta \vec{U} = \left[ \delta \vec{U}_1, \delta \vec{U}_2, \dots, \delta \vec{U}_{np-1}, \delta \vec{U}_{np} \right]^T \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{R}_1}{\partial \vec{U}_1} & \frac{\partial \vec{R}_1}{\partial \vec{U}_2} & \frac{\partial \vec{R}_1}{\partial \vec{U}_3} & \dots & \frac{\partial \vec{R}_1}{\partial \vec{U}_{np}} \\ \frac{\partial \vec{R}_2}{\partial \vec{U}_1} & \frac{\partial \vec{R}_2}{\partial \vec{U}_2} & \frac{\partial \vec{R}_2}{\partial \vec{U}_3} & \dots & \frac{\partial \vec{R}_2}{\partial \vec{U}_{np}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \vec{R}_{np-1}}{\partial \vec{U}_1} & \frac{\partial \vec{R}_{np-1}}{\partial \vec{U}_2} & \frac{\partial \vec{R}_{np-1}}{\partial \vec{U}_3} & \dots & \frac{\partial \vec{R}_{np-1}}{\partial \vec{U}_{np}} \\ \frac{\partial \vec{R}_{np}}{\partial \vec{U}_1} & \frac{\partial \vec{R}_{np}}{\partial \vec{U}_2} & \frac{\partial \vec{R}_{np}}{\partial \vec{U}_3} & \dots & \frac{\partial \vec{R}_{np}}{\partial \vec{U}_{np}} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Κατά την επίλυση της διακριτοποιημένης εξίσωσης σε δ-διατύπωση, το δεξί μέλος είναι αυτό που καθορίζει την ακρίβεια. Οπότε, μας ενδιαφέρει η διακριτοποίηση του  $\vec{R}$  να γίνει με ακρίβεια 2ης τάξης, ώστε να παραχθούν αποτελέσματα αποδεκτής ακρίβειας.

Ωστόσο, το μητρώο  $\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}}$  συναντάται και στο δεξί μέλος των συζυγών εξισώσεων που θα παρουσιαστούν σε επόμενα κεφάλαια. Ενώ δηλαδή δεν είναι απαραίτητος ο υπολογισμός του με ακρίβεια 2ης τάξης για την επίλυση του προβλήματος της ροής, όπου είναι συντελεστής του  $\delta \vec{U}$  στο αριστερό μέρος της εξίσωσης και, συνεπώς, η μειωμένη ακρίβεια υπολογισμού του είναι αβλαβής, επιλέγεται αυτή η τάξη ακρίβειας ώστε να παραχθούν σωστότερα αποτελέσματα από τις συζυγείς εξισώσεις.

## 2.3 Επίλυση ευθέως προβλήματος με ακρίβεια δεύτερης τάξης

Στην παρούσα ενότητα, θα παρουσιαστεί αναλυτικά η διακριτοποίηση του ευθέως προβλήματος (δηλαδή των εξισώσεων ροής) για δεύτερης τάξης ακρίβεια στους εσωτερικούς κόμβους. Αρχικά χρησιμοποιείται η μέθοδος διαχωρισμού των διανυμάτων ροής (Flux Vector Splitting ή FVS) με σχήμα προεχβολής MUSCL (Monotone Upwind Scheme for Conservation Laws) για τη διακριτοποίηση του τελεστή ροής  $\vec{R}$ , χωρίς να εφαρμοστεί συνάρτηση περιορισμού. [12].

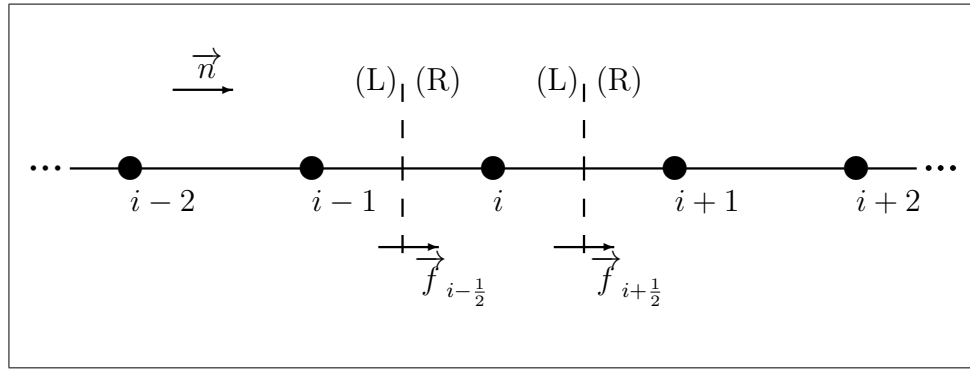
Στη συνέχεια, υπολογίζεται το μητρώο  $\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}}$  με ακρίβεια δεύτερης τάξης, ως αποτέλεσμα της παραγωγίσιμης του τελεστή της ροής  $\vec{R}$  που προκύπτει από τη μέθοδο FVS, θεωρώντας την ταχύτητα πάντα θετική, δηλαδή η ροή έχει φορά από τα αριστερά προς τα δεξιά.

Μια διαφορετική της (2.13) έκφραση του διακριτοποιημένου τελεστή της ροής είναι η:

$$\vec{R}_i(\vec{U}, \vec{b}) = \left( \vec{f}_{i+\frac{1}{2}} - \vec{f}_{i-\frac{1}{2}} \right) - \vec{q}_i \Delta x_i = 0 \quad (2.19)$$

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Flux Vector Splitting (FVS) δεύτερης τάξης ακρίβειας, έχουμε για τα διανύσματα της ροής

$$\vec{f}_{i+\frac{1}{2}} = \vec{f}^- \left( \vec{U}_{i+\frac{1}{2}}^R \right) + \vec{f}^+ \left( \vec{U}_{i+\frac{1}{2}}^L \right) \quad (2.20)$$



Σχήμα 2.2: Διακριτοποίηση ακρίβειας δεύτερης τάξης του διανύσματος της ατριβούς ροής.

$$\vec{f}_{i-\frac{1}{2}} = \vec{f}^- \left( \vec{U}_{i-\frac{1}{2}}^R \right) + \vec{f}^+ \left( \vec{U}_{i-\frac{1}{2}}^L \right) \quad (2.21)$$

$$\mu\epsilon \quad \vec{f}^- (\vec{U}) = A^- \vec{U} \quad , \quad \vec{f}^+ (\vec{U}) = A^+ \vec{U} \quad (2.22)$$

όπου τα  $\vec{U}_{i+\frac{1}{2}}^R$  και  $\vec{U}_{i+\frac{1}{2}}^L$ , αντιστοιχούν στις αριστερά (L=Left) και δεξιά (R=Right) καταστάσεις της διαχωριστικής γραμμής στο μεσόκομβο του σχήματος 2.2, και υπολογίζονται με ανάπτυγμα Taylor, σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$\vec{U}_{i+\frac{1}{2}}^L = \vec{U}_i + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} \right)_i (x_{i+1} - x_i) \quad (2.23)$$

Εφαρμόζοντας κεντρικές διαφορές (2ης τάξης ακρίβεια) για μη-ισαπέχοντα  $\Delta x$  (Παράρτημα A') προκύπτει:

$$\left( \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} \right)_i = d_i^A \vec{U}_{i-1} + d_i^B \vec{U}_i + d_i^C \vec{U}_{i+1} \quad (2.24)$$

όπου ο κάτω δείκτης των συντελεστών  $d$  δηλώνει τον κόμβο του πλέγματος στον οποίο υπολογίζεται η παράγωγος, ενώ ο πάνω δείκτης δηλώνει τον κόμβο με την τιμή  $\vec{U}$  του οποίου πολλαπλασιάζεται (σχέσεις (A'.5), (A'.6), (A'.7))

Με την ίδια λογική, το  $\vec{U}_{i+\frac{1}{2}}^R$  υπολογίζεται ως εξής:

$$\vec{U}_{i+\frac{1}{2}}^R = \vec{U}_{i+1} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} \right)_{i+1} (x_{i+1} - x_i) \quad (2.25)$$

και, εφαρμόζοντας κεντρικές διαφορές (2ης τάξης ακρίβειας), προκύπτει:

$$\left( \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} \right)_{i+1} = d_{i+1}^A \vec{U}_i + d_{i+1}^B \vec{U}_{i+1} + d_{i+1}^C \vec{U}_{i+2} \quad (2.26)$$

Αντίστοιχα για τα  $\vec{U}_{i-\frac{1}{2}}^R$  και  $\vec{U}_{i-\frac{1}{2}}^L$  ισχύουν τα εξής:

$$\vec{U}_{i-\frac{1}{2}}^R = \vec{U}_i - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} \right)_i (x_i - x_{i-1}) \quad (2.27)$$

όπου το  $\left( \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} \right)_i$  υπολογίζεται από τη σχέση (2.24), ενώ

$$\vec{U}_{i-\frac{1}{2}}^L = \vec{U}_{i-1} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} \right)_{i-1} (x_i - x_{i-1}) \quad (2.28)$$

και εφαρμόζοντας κεντρικές διαφορές προκύπτει:

$$\left( \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} \right)_{i-1} = d_{i-1}^A \vec{U}_{i-2} + d_{i-1}^B \vec{U}_{i-1} + d_{i-1}^C \vec{U}_i \quad (2.29)$$


---



Χρησιμοποιώντας τις ανωτέρω σχέσεις, η εξίσωση (2.20) μετασχηματίζεται σε

$$\begin{aligned} \vec{f}_{i+\frac{1}{2}} = & f^- \left[ \vec{U}_{i+1} - \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)(d_{i+1}^A \vec{U}_i + d_{i+1}^B \vec{U}_{i+1} + d_{i+1}^C \vec{U}_{i+2}) \right] \\ & + f^+ \left[ \vec{U}_i + \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)(d_i^A \vec{U}_{i-1} + d_i^B \vec{U}_i + d_i^C \vec{U}_{i+1}) \right] \end{aligned} \quad (2.30)$$

και μετά από πράξεις

$$\begin{aligned} \vec{f}_{i+\frac{1}{2}} = & \left[ \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)d_i^A A_{i+\frac{1}{2}}^+ \right] \vec{U}_{i-1} \\ & + \left[ -\frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)d_{i+1}^A A_{i+\frac{1}{2}}^- + \left( 1 + \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)d_i^B \right) A_{i+\frac{1}{2}}^+ \right] \vec{U}_i \\ & + \left[ \left( 1 - \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)d_{i+1}^B \right) A_{i+\frac{1}{2}}^- + \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)d_i^C A_{i+\frac{1}{2}}^+ \right] \vec{U}_{i+1} \\ & + \left[ -\frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)d_{i+1}^C A_{i+\frac{1}{2}}^- \right] \vec{U}_{i+2} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Με τον ίδιο τρόπο, η σχέση (2.21) γράφεται

$$\begin{aligned} \vec{f}_{i-\frac{1}{2}} = & \left[ \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})d_{i-1}^A A_{i-\frac{1}{2}}^+ \right] \vec{U}_{i-2} \\ & + \left[ -\frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})d_i^A A_{i-\frac{1}{2}}^- + \left( 1 + \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})d_{i-1}^B \right) A_{i-\frac{1}{2}}^+ \right] \vec{U}_{i-1} \\ & + \left[ \left( 1 - \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})d_i^B \right) A_{i-\frac{1}{2}}^- + \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})d_{i-1}^C A_{i-\frac{1}{2}}^+ \right] \vec{U}_i \\ & + \left[ -\frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})d_i^C A_{i-\frac{1}{2}}^- \right] \vec{U}_{i+1} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (2.19) τις εκφράσεις των  $\vec{f}_{i+\frac{1}{2}}$  και  $\vec{f}_{i-\frac{1}{2}}$  από τις σχέσεις (2.31) και (2.32) αντίστοιχα, προκύπτει μια εξίσωση της ακόλουθης μορφής, που ισχύει για τους κόμβους  $i = 3 \dots np - 2$  :

$$\begin{aligned} \vec{R}_i(\vec{U}, \vec{b}) &= \left[ bbe f_i \vec{U}_{i-2} + be f_i \vec{U}_{i-1} + diag_i \vec{U}_i + aft_i \vec{U}_{i+1} + aaft_i \vec{U}_{i+2} \right] \\ &- \vec{q}_i \Delta x_i = 0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

όπου οι συντελεστές κωδικοποιούνται με τα ευκολομνημόνευτα ονόματα *diag* (διαγώνιος), *aft*, *aaft* (επόμενος του *aft*) και *bef*, *bbef* (προηγούμενος του *bef*).

Ο αναγνώστης παραπέμπεται στο Παράρτημα Β' για τον τρόπο εύρεσης των μητρώων που συναντώνται στις σχέσεις (2.31) και (2.32). Τα ροϊκά μεγέθη που εμφανίζονται στον υπολογισμό αυτών των μητρώων αντιστοιχούν στο μέσο διάλυμα του εκάστοτε μεσόκομβου, είναι δηλαδή για τους  $A_{i+\frac{1}{2}}^{+/-}$ :

$$\vec{U}_{mid} = \frac{\vec{U}_{i+\frac{1}{2}}^R + \vec{U}_{i+\frac{1}{2}}^L}{2} \quad (2.34)$$

ενώ αντίστοιχα, για τους  $A_{i-\frac{1}{2}}^{+/-}$ :

$$\vec{U}_{mid} = \frac{\vec{U}_{i-\frac{1}{2}}^R + \vec{U}_{i-\frac{1}{2}}^L}{2} \quad (2.35)$$

Από τις σχέσεις (2.31) ως (2.35) μπορεί να υπολογισθεί ο τελεστής της ροής  $\vec{R}$ . Ωστόσο, για την επίλυση της ροής με δ-διατύπωση είναι απαραίτητη η προσέγγιση και της παραγώγου  $\frac{d\vec{R}}{d\vec{U}}$ . Διαφορίζοντας τη σχέση (2.33) ως προς τις κομβικές τιμές των  $\vec{U}$  και με την παραδοχή ότι

$$\frac{\partial A^+}{\partial \vec{U}} = 0, \quad \frac{\partial A^-}{\partial \vec{U}} = 0 \quad (2.36)$$

έχουμε για τους κόμβους  $i = 3 \dots np - 2$ , τα ακόλουθα αποτελέσματα :

$$\frac{\partial \vec{R}_i}{\partial \vec{U}_{i-2}} = b b e f_i = -\frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})d_{i-1}^A A_{i-\frac{1}{2}}^+ \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{R}_i}{\partial \vec{U}_{i-1}} &= b e f_i \\ &= \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)d_i^A A_{i+\frac{1}{2}}^+ \\ &\quad - \left[ -\frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})d_i^A A_{i-\frac{1}{2}}^- + \left(1 + \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})d_{i-1}^B\right) A_{i-\frac{1}{2}}^+ \right] \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{R}_i}{\partial \vec{U}_i} &= \text{diag}_i - \frac{\partial \vec{q}_i}{\partial \vec{U}_i} \Delta x_i \\ &= -\frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)d_{i+1}^A A_{i+\frac{1}{2}}^- + \left(1 + \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)d_i^B\right) A_{i+\frac{1}{2}}^+ \\ &\quad - \left[ \left(1 - \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})d_i^B\right) A_{i-\frac{1}{2}}^- + \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})d_{i-1}^C A_{i-\frac{1}{2}}^+ \right] \\ &\quad - \frac{\partial \vec{q}_i}{\partial \vec{U}_i} \Delta x_i \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{R}_i}{\partial \vec{U}_{i+1}} &= a f t_i \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)d_{i+1}^B\right) A_{i+\frac{1}{2}}^- + \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)d_i^C A_{i+\frac{1}{2}}^+ \\ &\quad + \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})d_i^C A_{i-\frac{1}{2}}^- \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial \vec{R}_i}{\partial \vec{U}_{i+2}} = aaft_i = -\frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)d_{i+1}^C A_{i+\frac{1}{2}}^- \quad (2.41)$$

ενώ ισχύει:

$$\frac{\partial \vec{R}_i}{\partial \vec{U}_j} = 0 \quad , \quad j \neq i-2, i-1, i, i+1, i+2 \quad (2.42)$$

Τέλος, ο όρος  $\frac{\partial \vec{q}_i}{\partial \vec{U}_i}$ , υπολογίζεται από παραγωγή της εξίσωσης (2.10). Έτσι έχουμε:

$$\frac{\partial \vec{q}_i}{\partial \vec{U}_i} = -\frac{1}{S_i} \left[ \frac{dS}{dx} \right]_i \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -u^2 & 2u & 0 \\ -\gamma u E + (\gamma - 1)u^3 & \gamma E - \frac{3}{2}(\gamma - 1)u^2 & \gamma u \end{bmatrix}_i \quad (2.43)$$

ενώ για  $i \neq j$  είναι  $\frac{\partial \vec{q}_i}{\partial \vec{U}_j} = 0$ .

Αξίζει σε αυτό το σημείο να επισημανθεί ότι είναι δυνατό να υπολογισθεί ο τελεστής  $\vec{R}$  από τη σχέση

$$\vec{R}_i(\vec{U}, \vec{b}) = \left( \vec{f}_{i+\frac{1}{2}} - \vec{f}_{(i-1)+\frac{1}{2}} \right) - \vec{q}_i \Delta x_i = 0 \quad (2.44)$$

αντί της (2.19), αποφεύγοντας δηλαδή τον υπολογισμό του  $\vec{f}_{i-\frac{1}{2}}$ . Ωστόσο, εδώ, για λόγους πληρότητας, έγινε αναλυτική παρουσίαση.

Επίσης, αν οι οριακές συνθήκες  $\vec{R}_1 = 0$  και  $\vec{R}_{np} = 0$  είναι διακριτοποιημένες με δεύτερης τάξης ακρίβεια και παραγωγιστούν, όπως θα αποδειχθεί και αναλυτικά στην ενότητα (2.4), θα έχουμε:

$$\frac{\partial \vec{R}_1}{\partial \vec{U}_j} = 0 \quad , \quad \forall j = 4, \dots, np \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial \vec{R}_{np}}{\partial \vec{U}_j} = 0 \quad , \quad \forall j = 1, \dots, np - 3 \quad (2.46)$$

Επομένως μένει η απόδειξη των σχέσεων για τους ειδικούς κόμβους  $i = 2$  και  $i = np - 1$ . Για τον κόμβο  $i = 2$  δεν υπάρχει προ-προηγούμενος κόμβος και, έτσι, ο τελεστής της ροής θα είναι

$$\vec{R}_2(\vec{U}, \vec{b}) = \left[ bef_2 \vec{U}_1 + diag_2 \vec{U}_2 + aft_2 \vec{U}_3 + aaft_2 \vec{U}_4 \right] - \vec{q}_2 \Delta x_2 = 0 \quad (2.47)$$

Εφαρμόζονται και πάλι οι σχέσεις (2.19) ως (2.22), καθώς και οι σχέσεις (2.23), (2.25), (2.27), (2.28) που δίνουν τα διανύσματα των συντηρητικών μεταβλητών. Ωστόσο δεν είναι δυνατή η χρήση κεντρικών διαφορών για τον υπολογισμό της παραγώγου  $\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial x}\right)_1$ . Για να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα χρησιμοποιείται πρόσω παραγωγή 2ης τάξης ακρίβειας, σύμφωνα με τις σχέσεις (A'.12), (A'.13), (A'.14) και έχουμε

$$\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial x}\right)_1 = d_1^A \vec{U}_1 + d_1^B \vec{U}_2 + d_1^C \vec{U}_3 \quad (2.48)$$

Αντίστοιχα, στην εφαρμογή των σχέσεων για τον κόμβο  $np - 1$ , το πρόβλημα της μη ύπαρξης μεθεπόμενου κόμβου εμφανίζεται στον υπολογισμό της παραγώγου  $\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial x}\right)_{np}$  και αντιμετωπίζεται εφαρμόζοντας πίσω παραγωγή 2ης τάξης ακρίβειας, σύμφωνα με τις σχέσεις (A'.16), (A'.17), (A'.18)

$$\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial x}\right)_{np} = d_{np}^A \vec{U}_{np} + d_{np}^B \vec{U}_{np-1} + d_{np}^C \vec{U}_{np-2} \quad (2.49)$$

οδηγώντας στη διατύπωση του τελεστή της ροής, στη μορφή

$$\vec{R}_{np-1} = \left[ bbef_{np-1} \vec{U}_{np-3} + bef_{np-1} \vec{U}_{np-2} + diag_{np-1} \vec{U}_{np-1} + aft_{np-1} \vec{U}_{np} \right] - \vec{q}_{np-1} \Delta x_{np-1} = 0 \quad (2.50)$$

Εφαρμόζοντας τις ανωτέρω εξισώσεις καταλήγουμε στις ακόλουθες εκφράσεις των παραγώγων

Κόμβος  $i = 2$  :

Η εξίσωση για το  $\vec{f}_{i+\frac{1}{2}}$  είναι η (2.31) και γραμμένη στο συγκεκριμένο κόμβο δίνει

$$\begin{aligned} \vec{f}_{2+\frac{1}{2}} &= \left[ \frac{1}{2}(x_3 - x_2)d_2^A A_{2+\frac{1}{2}}^+ \right] \vec{U}_1 \\ &+ \left[ -\frac{1}{2}(x_3 - x_2)d_3^A A_{2+\frac{1}{2}}^- + \left( 1 + \frac{1}{2}(x_3 - x_2)d_2^B \right) A_{2+\frac{1}{2}}^+ \right] \vec{U}_2 \\ &+ \left[ \left( 1 - \frac{1}{2}(x_3 - x_2)d_3^B \right) A_{2+\frac{1}{2}}^- + \frac{1}{2}(x_3 - x_2)d_2^C A_{2+\frac{1}{2}}^+ \right] \vec{U}_3 \\ &+ \left[ -\frac{1}{2}(x_3 - x_2)d_3^C A_{2+\frac{1}{2}}^- \right] \vec{U}_4 \end{aligned} \quad (2.51)$$

ενώ για το  $\vec{f}_{2-\frac{1}{2}}$ , χρησιμοποιώντας την σχέση (2.48) αντί της (2.29) καταλήγουμε

$$\begin{aligned} \vec{f}_{2-\frac{1}{2}} &= \left[ -\frac{1}{2}(x_2 - x_1)d_2^A A_{2-\frac{1}{2}}^- + \left( 1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1)d_1^A \right) A_{2-\frac{1}{2}}^+ \right] \vec{U}_1 \\ &+ \left[ \left( 1 - \frac{1}{2}(x_2 - x_1)d_2^B \right) A_{2-\frac{1}{2}}^- + \frac{1}{2}(x_2 - x_1)d_1^B A_{2-\frac{1}{2}}^+ \right] \vec{U}_2 \\ &+ \left[ -\frac{1}{2}(x_2 - x_1)d_2^C A_{2-\frac{1}{2}}^- + \frac{1}{2}(x_2 - x_1)d_1^C A_{2-\frac{1}{2}}^+ \right] \vec{U}_3 \end{aligned} \quad (2.52)$$

Αντικαθιστώντας τις (2.51) και (2.52) στην (2.19) και παραγωγίζοντας ως προς  $\vec{U}$  έχουμε

$$\frac{\partial \vec{R}_2}{\partial \vec{U}_1} = bef_2$$


---

$$\begin{aligned}
&= \left[ \frac{1}{2}(x_3 - x_2)d_2^A A_{2+\frac{1}{2}}^+ \right] \\
&- \left[ -\frac{1}{2}(x_2 - x_1)d_2^A A_{2-\frac{1}{2}}^- + \left( 1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1)d_1^A \right) A_{2-\frac{1}{2}}^+ \right] \quad (2.53)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{R}_2}{\partial \vec{U}_2} &= \text{diag}_2 - \frac{\partial \vec{q}_2}{\partial \vec{U}_2} \Delta x_2 \\
&= \left[ -\frac{1}{2}(x_3 - x_2)d_3^A A_{2+\frac{1}{2}}^- + \left( 1 + \frac{1}{2}(x_3 - x_2)d_2^B \right) A_{2+\frac{1}{2}}^+ \right] \\
&- \left[ \left( 1 - \frac{1}{2}(x_2 - x_1)d_2^B \right) A_{2-\frac{1}{2}}^- + \frac{1}{2}(x_2 - x_1)d_1^A A_{2-\frac{1}{2}}^+ \right] \\
&- \frac{\partial \vec{q}_2}{\partial \vec{U}_2} \Delta x_2 \quad (2.54)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{R}_2}{\partial \vec{U}_3} &= a f t_2 \\
&= \left[ \left( 1 - \frac{1}{2}(x_3 - x_2)d_3^B \right) A_{2+\frac{1}{2}}^- + \frac{1}{2}(x_3 - x_2)d_2^C A_{2+\frac{1}{2}}^+ \right] \\
&- \left[ -\frac{1}{2}(x_2 - x_1)d_2^C A_{2-\frac{1}{2}}^- + \frac{1}{2}(x_2 - x_1)d_1^C A_{2-\frac{1}{2}}^+ \right] \quad (2.55)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \vec{R}_2}{\partial \vec{U}_4} = a a f t_2 = -\frac{1}{2}(x_3 - x_2)d_3^C A_{2+\frac{1}{2}}^- \quad (2.56)$$

$$\frac{\partial \vec{R}_2}{\partial \vec{U}_j} = 0 \quad , \quad j > 4 \quad (2.57)$$

Κόμβος  $np - 1$  :

Για το  $\vec{f}_{(np-1)+\frac{1}{2}}$ , χρησιμοποιώντας την σχέση (2.49) αντί της (2.26) έχουμε

$$\begin{aligned} \vec{f}_{(np-1)+\frac{1}{2}} &= \left[ -\frac{1}{2}(x_{np} - x_{np-1})d_{np}^C A_{(np-1)+\frac{1}{2}}^- + \frac{1}{2}(x_{np} - x_{np-1})d_{np-1}^A A_{(np-1)+\frac{1}{2}}^+ \right] \vec{U}_{np-2} \\ &+ \left[ -\frac{1}{2}(x_{np} - x_{np-1})d_{np}^B A_{(np-1)+\frac{1}{2}}^- + \left( 1 + \frac{1}{2}(x_{np} - x_{np-1})d_{np-1}^B \right) A_{(np-1)+\frac{1}{2}}^+ \right] \vec{U}_{np-1} \\ &+ \left[ \left( 1 - \frac{1}{2}(x_{np} - x_{np-1})d_{np}^A \right) A_{(np-1)+\frac{1}{2}}^- + \frac{1}{2}(x_{np} - x_{np-1})d_{np-1}^C A_{(np-1)+\frac{1}{2}}^+ \right] \vec{U}_{np} \end{aligned} \quad (2.58)$$

ενώ το  $\vec{f}_{i-\frac{1}{2}}$  δίνεται από τη σχέση (2.32), και για το συγκεκριμένο  $i$  δίνει

$$\begin{aligned} \vec{f}_{(np-1)-\frac{1}{2}} &= \left[ \frac{1}{2}(x_{np-1} - x_{np-2})d_{np-2}^A A_{(np-1)-\frac{1}{2}}^+ \right] \vec{U}_{np-3} \\ &+ \left[ -\frac{1}{2}(x_{np-1} - x_{np-2})d_{np-1}^A A_{(np-1)-\frac{1}{2}}^- + \left( 1 + \frac{1}{2}(x_{np-1} - x_{np-2})d_{np-2}^B \right) A_{(np-1)-\frac{1}{2}}^+ \right] \vec{U}_{np-2} \\ &+ \left[ \left( 1 - \frac{1}{2}(x_{np-1} - x_{np-2})d_{np-1}^B \right) A_{(np-1)-\frac{1}{2}}^- + \frac{1}{2}(x_{np-1} - x_{np-2})d_{np-2}^C A_{(np-1)-\frac{1}{2}}^+ \right] \vec{U}_{np-1} \\ &+ \left[ -\frac{1}{2}(x_{np-1} - x_{np-2})d_{np-1}^C A_{(np-1)-\frac{1}{2}}^- \right] \vec{U}_{np} \end{aligned} \quad (2.59)$$

Αντικαθιστώντας τις (2.58) και (2.59) στην (2.19) και παραγωγίζοντας ως προς  $\vec{U}$  έχουμε

$$\frac{\partial \vec{R}_{np-1}}{\partial \vec{U}_{np-3}} = bbe f_{np-1} = -\frac{1}{2}(x_{np-1} - x_{np-2})d_{np-2}^A A_{(np-1)-\frac{1}{2}}^+ \quad (2.60)$$



$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{R}_{np-1}}{\partial \vec{U}_{np-2}} &= bef_{np-1} \\
&= \left[ -\frac{1}{2}(x_{np} - x_{np-1})d_{np}^C A_{(np-1)+\frac{1}{2}}^- + \frac{1}{2}(x_{np} - x_{np-1})d_{np-1}^A A_{(np-1)+\frac{1}{2}}^+ \right] \\
&\quad - \left[ -\frac{1}{2}(x_{np-1} - x_{np-2})d_{np-1}^A A_{(np-1)-\frac{1}{2}}^- + \left(1 + \frac{1}{2}(x_{np-1} - x_{np-2})d_{np-2}^B\right) A_{(np-1)-\frac{1}{2}}^+ \right]
\end{aligned} \tag{2.61}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{R}_{np-1}}{\partial \vec{U}_{np-1}} &= diag_{np-1} - \frac{\partial \vec{q}_{np-1}}{\partial \vec{U}_{np-1}} \Delta x_{np-1} \\
&= \left[ -\frac{1}{2}(x_{np} - x_{np-1})d_{np}^B A_{(np-1)+\frac{1}{2}}^- + \left(1 + \frac{1}{2}(x_{np} - x_{np-1})d_{np-1}^B\right) A_{(np-1)+\frac{1}{2}}^+ \right] \\
&\quad - \left[ \left(1 - \frac{1}{2}(x_{np-1} - x_{np-2})d_{np-1}^B\right) A_{(np-1)-\frac{1}{2}}^- + \frac{1}{2}(x_{np-1} - x_{np-2})d_{np-2}^C A_{(np-1)-\frac{1}{2}}^+ \right] \\
&\quad - \frac{\partial \vec{q}_{np-1}}{\partial \vec{U}_{np-1}} \Delta x_{np-1}
\end{aligned} \tag{2.62}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{R}_{np-1}}{\partial \vec{U}_{np}} &= aft_{np-1} \\
&= \left[ \left(1 - \frac{1}{2}(x_{np} - x_{np-1})d_{np}^A\right) A_{(np-1)+\frac{1}{2}}^- + \frac{1}{2}(x_{np} - x_{np-1})d_{np-1}^C A_{(np-1)+\frac{1}{2}}^+ \right] \\
&\quad - \left[ -\frac{1}{2}(x_{np-1} - x_{np-2})d_{np-1}^C A_{(np-1)-\frac{1}{2}}^- \right]
\end{aligned} \tag{2.63}$$

Συμπερασματικά, το μητρώο  $\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}}$  είναι block πενταδιαγώνιο, με κάθε στοιχείο του να αποτελείται από έναν πίνακα  $3 \times 3$ . Η μορφή του μητρώου δίνεται παρακάτω:

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{R}_1}{\partial \vec{U}_1} & \frac{\partial \vec{R}_1}{\partial \vec{U}_2} & \frac{\partial \vec{R}_1}{\partial \vec{U}_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \vec{R}_2}{\partial \vec{U}_1} & \frac{\partial \vec{R}_2}{\partial \vec{U}_2} & \frac{\partial \vec{R}_2}{\partial \vec{U}_3} & \frac{\partial \vec{R}_2}{\partial \vec{U}_4} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \vec{R}_3}{\partial \vec{U}_1} & \frac{\partial \vec{R}_3}{\partial \vec{U}_2} & \frac{\partial \vec{R}_3}{\partial \vec{U}_3} & \frac{\partial \vec{R}_3}{\partial \vec{U}_4} & \frac{\partial \vec{R}_3}{\partial \vec{U}_5} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \vec{R}_4}{\partial \vec{U}_2} & \frac{\partial \vec{R}_4}{\partial \vec{U}_3} & \frac{\partial \vec{R}_4}{\partial \vec{U}_4} & \frac{\partial \vec{R}_4}{\partial \vec{U}_5} & \frac{\partial \vec{R}_4}{\partial \vec{U}_6} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial \vec{R}_{np-1}}{\partial \vec{U}_{np-3}} & \frac{\partial \vec{R}_{np-1}}{\partial \vec{U}_{np-2}} & \frac{\partial \vec{R}_{np-1}}{\partial \vec{U}_{np-1}} & \frac{\partial \vec{R}_{np-1}}{\partial \vec{U}_{np}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial \vec{R}_{np}}{\partial \vec{U}_{np-2}} & \frac{\partial \vec{R}_{np}}{\partial \vec{U}_{np-1}} & \frac{\partial \vec{R}_{np}}{\partial \vec{U}_{np}} \end{bmatrix}$$

## 2.4 Οριακές συνθήκες

Σκοπός της παρούσας ενότητας, είναι η περιγραφή του τρόπου επιβολής των οριακών συνθηκών στο πρόβλημα της ροής και η παραγωγή τους ως προς τις μεταβλητές της ροής. Για υποηχητική ροή, οι οριακές συνθήκες στην είσοδο είναι:

$$p_{t1} = const_1 \quad (2.64)$$

$$T_{t1} = const_2 \quad (2.65)$$

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)_1 = 0 \quad (2.66)$$

ενώ για την έξοδο:

$$p_{np} = \frac{p_{t1}}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{is(out)}^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} = const_3 \quad (2.67)$$

$$\left(\frac{d\rho}{dx}\right)_{np} = 0 \quad (2.68)$$

$$\left(\frac{d(\rho u)}{dx}\right)_{np} = 0 \quad (2.69)$$

Όπως είναι εμφανές από τις παραπάνω εξισώσεις, στην είσοδο καθορίζονται από το χρήστη σταθερές τιμές στα ολικά θερμοδυναμικά μεγέθη της ροής ( $p_t, T_t$ ), ενώ στην έξοδο έχουμε σταθερή τιμή της στατικής πίεσης, η οποία καθορίζεται από τον αριθμό  $M_{is(out)}$  και την ολική πίεση την είσοδο, μιας και πρόκειται για ισεντροπική ροή (εξισώσεις Euler). Επιπλέον, επειδή η μορφολογία του αγωγού που αντιμετωπίζεται, στο πλαίσιο της διπλωματικής αυτής εργασίας, διαθέτει τμήματα σταθερής διατομής  $S$  στην είσοδο και την έξοδο, επιβάλλονται οριακές συνθήκες τύπου Neumann για τη στατική πίεση(είσοδος) καθώς και για την πυκνότητα και τη ταχύτητα(έξοδος). Πιο αναλυτικά, για την είσοδο ισχύει  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ , ενώ για την έξοδο  $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0$ . Η διακριτοποίηση των Neumann οριακών συνθηκών γίνεται με μονόπλευρες εκφράσεις πεπερασμένων διαφορών, σύμφωνα με το Παράρτημα Α'

Οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν συνοπτικά να γραφούν μέσω του τελεστή ροής. Πιο

συγκεκριμένα για τον πρώτο κόμβο προκύπτει

$$\vec{R}_1 = [p_{t1} - const_1, T_{t1} - const_2, d_1^A p_1 + d_1^B p_2 + d_1^C p_3] \quad (2.70)$$

ενώ για τον τελευταίο κόμβο ισχύει

$$\vec{R}_{np} = [p_{np} - const_3, d_{np}^C \rho_{np-2} + d_{np}^B \rho_{np-1} + d_{np}^C \rho_{np}, d_{np}^C (\rho u)_{np-2} + d_{np}^B (\rho u)_{np-1} + d_{np}^A (\rho u)_{np}] \quad (2.71)$$

Στη συνέχεια, διαφορίζονται οι παραπάνω εξισώσεις ώστε να υπολογιστούν οι όροι,  $\frac{\partial \vec{R}_1}{\partial \vec{U}_j}$  και  $\frac{\partial \vec{R}_{np}}{\partial \vec{U}_j}$   $j = 1, \dots, np$ .

Πιο αναλυτικά, χρησιμοποιώντας τη δέλτα-διατύπωση, έχουμε για τον πρώτο και τον τελευταίο κόμβο τις εξής εξισώσεις, που προκύπτουν ύστερα από πράξεις πινάκων (σχέση (2.15) αγνοώντας τον ψευδο-χρονικό όρο):

$$\frac{\partial \vec{R}_1}{\partial \vec{U}_1} \delta \vec{U}_1 + \frac{\partial \vec{R}_1}{\partial \vec{U}_2} \delta \vec{U}_2 + \dots + \frac{\partial \vec{R}_1}{\partial \vec{U}_{np-1}} \delta \vec{U}_{np-1} + \frac{\partial \vec{R}_1}{\partial \vec{U}_{np}} \delta \vec{U}_{np} = -\vec{R}_1 \quad (2.72)$$

$$\frac{\partial \vec{R}_{np}}{\partial \vec{U}_1} \delta \vec{U}_1 + \frac{\partial \vec{R}_{np}}{\partial \vec{U}_2} \delta \vec{U}_2 + \dots + \frac{\partial \vec{R}_{np}}{\partial \vec{U}_{np-1}} \delta \vec{U}_{np-1} + \frac{\partial \vec{R}_{np}}{\partial \vec{U}_{np}} \delta \vec{U}_{np} = -\vec{R}_{np} \quad (2.73)$$

Ωστόσο, όπως είναι φανερό από την (2.70), στην είσοδο υπάρχουν μεγέθη που εξαρτώνται από τις μεταβλητές της ροής μόνο των τριών πρώτων κόμβων. Αντίστοιχα από την (2.71) γίνεται φανερό ότι υπάρχει εξάρτηση μόνο από τους τρεις τελευταίους κόμβους. Δηλαδή, μας ενδιαφέρει να υπολογιστούν μόνο οι όροι  $\frac{\partial \vec{R}_1}{\partial \vec{U}_j}$  για  $j = 1, 2, 3$  και  $\frac{\partial \vec{R}_{np}}{\partial \vec{U}_j}$  για  $j = np - 2, np - 1, np$  ενώ οι μερικές παράγωγοι ως προς τα υπόλοιπα διανύσματα της ροής είναι μηδενικές.

Κατά τον υπολογισμό των παραπάνω μερικών παραγώγων, χρήσιμες είναι οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned}
p &= (\gamma - 1) \left[ \rho E - \frac{1}{2} \rho u^2 \right] = (\gamma - 1) \left[ E_t - \frac{1}{2} \frac{m^2}{\rho} \right] \\
\frac{\partial p}{\partial \rho} &= \frac{\gamma - 1}{2} u^2 \\
\frac{\partial p}{\partial m} &= -(\gamma - 1) u \\
\frac{\partial p}{\partial E_t} &= \gamma - 1
\end{aligned} \tag{2.74}$$

$$\begin{aligned}
T &= \frac{p}{\rho R} = \frac{\gamma - 1}{R} \left[ \frac{E_t}{\rho} - \frac{1}{2} \frac{m^2}{\rho^2} \right] \\
\frac{\partial T}{\partial \rho} &= \frac{\gamma - 1}{R} \left[ -\frac{E}{\rho} + \frac{u^2}{\rho} \right] \\
\frac{\partial T}{\partial m} &= -\frac{\gamma - 1}{R} \frac{u}{\rho} \\
\frac{\partial T}{\partial E_t} &= \frac{\gamma - 1}{\rho R}
\end{aligned} \tag{2.75}$$

$$\begin{aligned}
T_t &= T + \frac{u^2}{2cp} = \frac{p}{\rho R} + \frac{u^2}{2cp} = \frac{p}{\rho R} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma R} \frac{m^2}{\rho^2} \\
\frac{\partial T_t}{\partial \rho} &= -\frac{\gamma - 1}{R} \frac{E}{\rho} + \frac{(\gamma - 1)^2}{\gamma R} \frac{u^2}{\rho} \\
\frac{\partial T_t}{\partial m} &= -\frac{(\gamma - 1)^2}{\gamma R} \frac{u}{\rho} \\
\frac{\partial T_t}{\partial E_t} &= \frac{\gamma - 1}{\rho R}
\end{aligned} \tag{2.76}$$

$$\begin{aligned}
p_t &= p \left( \frac{T_t}{T} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\
\frac{\partial p_t}{\partial \rho} &= \frac{\partial p}{\partial \rho} \left( \frac{T_t}{T} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + p \frac{\gamma}{\gamma-1} \left( \frac{T_t}{T} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \frac{\frac{\partial T_t}{\partial \rho} T - T_t \frac{\partial T}{\partial \rho}}{T^2}
\end{aligned}$$


---

$$\begin{aligned}\frac{\partial p_t}{\partial m} &= \frac{\partial p}{\partial m} \left( \frac{T_t}{T} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + p \frac{\gamma}{\gamma-1} \left( \frac{T_t}{T} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \frac{\frac{\partial T_t}{\partial m} T - T_t \frac{\partial T}{\partial m}}{T^2} \\ \frac{\partial p_t}{\partial E_t} &= \frac{\partial p}{\partial E_t} \left( \frac{T_t}{T} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + p \frac{\gamma}{\gamma-1} \left( \frac{T_t}{T} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \frac{\frac{\partial T_t}{\partial E_t} T - T_t \frac{\partial T}{\partial E_t}}{T^2}\end{aligned}\quad (2.77)$$

Αν ο τελεστής του υπολοίπου της ροής γραφεί στη μορφή  $\vec{R}_1 = [R_1^1, R_1^2, R_1^3]$ , τότε προκύπτει

$$\frac{\partial R_1^1}{\partial \vec{U}_1} \delta \vec{U}_1 = -R_1^1 \Rightarrow \left[ \frac{\partial p_t}{\partial \rho}, \frac{\partial p_t}{\partial m}, \frac{\partial p_t}{\partial E_t} \right]_1 \delta \vec{U}_1 = -[p_t - const_1]_1 \quad (2.78)$$

$$\text{και : } \frac{\partial R_1^1}{\partial \vec{U}_2} = \frac{\partial R_1^1}{\partial \vec{U}_3} = [0, 0, 0]$$

$$\frac{\partial R_1^2}{\partial \vec{U}_1} \delta \vec{U}_1 = -R_1^2 \Rightarrow \left[ \frac{\partial T_t}{\partial \rho}, \frac{\partial T_t}{\partial m}, \frac{\partial T_t}{\partial E_t} \right]_1 \delta \vec{U}_1 = -[T_t - const_2]_1 \quad (2.79)$$

$$\text{και : } \frac{\partial R_1^2}{\partial \vec{U}_2} = \frac{\partial R_1^2}{\partial \vec{U}_3} = [0, 0, 0]$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_1^3}{\partial \vec{U}_1} \delta \vec{U}_1 + \frac{\partial R_1^3}{\partial \vec{U}_2} \delta \vec{U}_2 + \frac{\partial R_1^3}{\partial \vec{U}_3} \delta \vec{U}_3 &= -R_1^3 \Rightarrow \\ d_1^A \frac{\partial p_1}{\partial \vec{U}_1} \delta \vec{U}_1 + d_1^B \frac{\partial p_2}{\partial \vec{U}_2} \delta \vec{U}_2 + d_1^C \frac{\partial p_3}{\partial \vec{U}_3} \delta \vec{U}_3 &= -(d_1^A p_1 + d_1^B p_2 + d_1^C p_3) \Rightarrow\end{aligned}\quad (2.80)$$

Ανάλογη είναι και η διαδικασία που ακολουθείται για τις οριακές συνθήκες στην έξοδο του αγωγού. Υπενθυμίζεται ότι όσον αφορά τον τελεστή ροής του τελευταίου κόμβου έχουμε  $\vec{R}_{np} = [R_{np}^1, R_{np}^2, R_{np}^3]$ . Επομένως:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{np}^1}{\partial \vec{U}_{np}} \delta \vec{U}_{np} &= -R_{np}^1 \Rightarrow \\ (\gamma - 1) \left[ \frac{1}{2}u^2, -u, 1 \right]_{np} \delta \vec{U}_{np} &= -[p - const_3]_{np} \end{aligned} \quad (2.81)$$

και

$$\frac{\partial R_{np}^1}{\partial \vec{U}_{np-1}} = \frac{\partial R_{np}^1}{\partial \vec{U}_{np-2}} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{np}^2}{\partial \vec{U}_{np-2}} \delta \vec{U}_{np-2} + \frac{\partial R_{np}^2}{\partial \vec{U}_{np-1}} \delta \vec{U}_{np-1} + \frac{\partial R_{np}^2}{\partial \vec{U}_{np}} \delta \vec{U}_{np} &= -R_{np}^2 \Rightarrow \\ [d_{np}^C, 0, 0] \delta \vec{U}_{np-2} + [d_{np}^B, 0, 0] \delta \vec{U}_{np-1} + [d_{np}^A, 0, 0] \delta \vec{U}_{np} &= \\ - (d_{np}^C \rho_{np-2} + d_{np}^B \rho_{np-1} + d_{np}^A \rho_{np}) & \end{aligned} \quad (2.82)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{np}^3}{\partial \vec{U}_{np-2}} \delta \vec{U}_{np-2} + \frac{\partial R_{np}^3}{\partial \vec{U}_{np-1}} \delta \vec{U}_{np-1} + \frac{\partial R_{np}^3}{\partial \vec{U}_{np}} \delta \vec{U}_{np} &= -R_{np}^3 \Rightarrow \\ [0, d_{np}^C, 0] \delta \vec{U}_{np-2} + [0, d_{np}^B, 0] \delta \vec{U}_{np-1} + [0, d_{np}^A, 0] \delta \vec{U}_{np} &= \\ - [d_{np}^C(\rho u)_{np-2} + d_{np}^B(\rho u)_{np-1} + d_{np}^A(\rho u)_{np}] & \end{aligned} \quad (2.83)$$

## 2.5 Επιλύτης πρωτεύοντος προβλήματος

Όπως ήδη τονίστηκε παραπάνω, σκοπός του ευθέως προβλήματος είναι η επίλυση της εξίσωσης (2.15) με την τεχνική της χρονοπροέλασης. Σύμφωνα με τα όσα αναφέρθηκαν, ο τελεστής ροής  $\vec{R}$  και η παράγωγος του ως προς το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών,  $\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}}$  διακριτοποιούνται με 2ης τάξης ακρίβεια έπειτα από ολοκλήρωση σε όγκους αναφοράς.

Η διακριτοποίηση αυτή οδηγεί σε block πενταδιαγώνιο σύστημα, κάθε στοιχείου του οποίου είναι  $3 \times 3$  μητρώο (block). Η επίλυση του block πενταδιαγώνιου συστήματος γίνεται χρησιμοποιώντας τον τροποποιημένο αλγόριθμο Thomas, ο οποίος μπορεί να διαχειρίζεται, αντί για βαθμωτά μεγέθη, υποπίνακες  $3 \times 3$ . Αυτό επιτυγχάνεται με διάσπαση των υποπινάκων με διάσταση  $3 \times 3$  σε πάνω και κάτω τριδιαγώνια μητρώα (παραγοντοποίηση LU).

Άρα δημιουργείται ένας επαναληπτικός αλγόριθμος, με επαναλήψεις ή ορθότερα ψευδοχρονικά βήματα, όπου για κάθε ψευδοχρονική στιγμή οι διακριτοποιημένες εξισώσεις επιλύονται επακριβώς. Η ακριβής επίλυση ανά ψευδο-χρονικό βήμα, αποτελεί πλεονέκτημα του 1Δ προβλήματος.

Ο επαναληπτικός αλγόριθμος επίλυσης του προβλήματος της ροής δίνεται παρακάτω :

- Βήμα 1:  
Γίνεται αρχικοποίηση του διανύσματος των συντηρητικών μεταβλητών της ροής,  $\vec{U}$ , για κάθε κόμβο του πλέγματος. Για την αρχικοποίηση, η ροή μπορεί να θεωρηθεί ισοτροπική και ασυμπίεστη και άρα να δοθούν αρχικές τιμές στις κομβικές τιμές του  $\vec{U}$ .
- Βήμα 2:  
Με το υπάρχον διάνυσμα  $\vec{U}$  υπολογίζεται το μητρώο του υπολοίπου  $\vec{R}$ , όπως παρουσιάστηκε στις ενότητες 2.3 και 2.4. Έπειτα αθροίζονται όλα τα στοιχεία του  $\vec{R}$  (Residual) και το αποτέλεσμα συγκρίνεται με το κριτήριο σύγκλισης που έχει δώσει ο χρήστης. Αν το αποτέλεσμα είναι ικανοποιητικό, ο αλγόριθμος σταματά εδώ. ( Η τιμή του κριτηρίου σύγκλισης είναι ιδιαίτερα μικρή, μιας και θεωρητικά, όταν ο αλγόριθμος συγκλίνει έχουμε  $\vec{R} = 0$ ).
- Βήμα 3:  
Υπολογίζεται το μητρώο  $\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}}$  με δεύτερης τάξης ακρίβεια, σύμφωνα με τις ενότητες 2.3 και 2.4.
- Βήμα 4:  
Χρησιμοποιώντας τον τροποποιημένο αλγόριθμο του Thomas, λύνεται το πεντα-



διαγώνιο σύστημα (2.15) με ψευδοχρονικό όρο, η τιμή του οποίου καθορίζεται από το χρήστη, και υπολογίζεται το μητρώο  $\delta\vec{U}$ .

- Βήμα 5:  
Γίνεται η ανανέωση του διανύσματος των συντηρητικών μεταβλητών σύμφωνα με τη σχέση  $\vec{U}^{k+1} = \vec{U}^k + \delta\vec{U}^k$ , όπου  $k$  η επανάληψη του αλγόριθμου.
  - Βήμα 6:  
Επιστροφή στο Βήμα 2.
-



## Κεφάλαιο 3

# Εύρεση Πρώτης Παραγώγου με τη Διακριτή Συζυγή Μέθοδο

### 3.1 Εισαγωγικά Σχόλια

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο θα παρουσιασθεί η διακριτή συζυγής μέθοδος, η οποία αποτελεί μία από τις μεθόδους υπολογισμού παραγώγων στις αιτιοκρατικές μεθόδους βελτιστοποίησης. Ένα μεγάλο μέρος του αντίστοιχου κώδικα με χρήση ακρίβειας πρώτης και δεύτερης τάξης έχει προηγηθεί σε προηγούμενες διπλωματικές [1],[2]. Το παρόν κεφάλαιο έχει ως σκοπό την εξοικείωση και την απόκτηση εμπειρίας η οποία κρίθηκε απαραίτητη για την ανάπτυξη της νέας μεθόδου βελτιστοποίησης που αποτελεί και τον κύριο σκοπό της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Στο κεφάλαιο αυτό, εκτός από την διακριτή συζυγή μέθοδο θα παρουσιασθούν η μέθοδος εύρεσης πρώτης παραγώγου με τη ευθεία διαφόριση καθώς και με πεπερασμένες διαφορές.

### 3.2 Υπολογισμός πρώτης παραγώγου με ευθεία διαφόριση

Όπως είναι γνωστό από το πρώτο κεφάλαιο, η  $F$  εξαρτάται από δύο διανύσματα μεταβλητών, αφενός μεν από αυτό που καθορίζει τη μορφή του αγωγού ( $\vec{b}$ ), αφετέρου

δε από το διαμορφούμενο πεδίο ροής ( $\vec{U}$ ). Συνεπώς, η μεταβολή της σχέσης (1.1) θα υπολογίζεται από τον παρακάτω τύπο:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \vec{b}} d\vec{b} + \frac{\partial F}{\partial \vec{U}} d\vec{U}$$

Άρα, η πρώτη παράγωγος προκύπτει από τη σχέση:

$$\frac{dF}{d\vec{b}} = \frac{\partial F}{\partial \vec{b}} + \frac{\partial F}{\partial \vec{U}} \frac{d\vec{U}}{d\vec{b}} \quad (3.1)$$

όπου οι μερικές παράγωγοι της  $F$  ως προς  $\vec{U}$  και  $\vec{b}$  υπολογίζονται σύμφωνα με τις παρακάτω σχέσεις:

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{b}} = \frac{1}{2} \int (p(x) - ptar(x))^2 \frac{\partial(dx)}{\partial \vec{b}} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{U}} = \int (p(x) - ptar(x)) \frac{\partial p}{\partial \vec{U}} dx \Rightarrow$$

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{U}_i} = [p(x) - ptar(x)_i] \frac{\partial p}{\partial \vec{U}_i} \Delta x_i \quad (3.3)$$

όπου για τον κόμβο  $i$  το  $\frac{\partial p}{\partial \vec{U}_i}$  σύμφωνα με τη σχέση (2.5) θα ισούται με:

$$\frac{\partial p}{\partial \vec{U}_i} = (\gamma - 1) \left[ \frac{1}{2} u_i^2 \quad -u_i \quad 1 \right] \quad (3.4)$$

Ωστόσο, εδώ  $\frac{\partial F}{\partial \vec{b}} = 0$  (σχέση 3.2), μιας και επιλέχθηκε ισαπέχουσα κατανομή κόμβων

---

στον άξονα  $x$ , για σταθερό συνολικό μήκος για όλα τα βήματα της βελτιστοποίησης.

Επομένως, για τον υπολογισμό της πρώτης παραγώγου της συνάρτησης - στόχου, με τη μέθοδο της ευθείας διαφορίσης (direct differentiation), απαιτείται ο υπολογισμός της παραγώγου  $\frac{d\vec{U}}{d\vec{b}}$ , που είναι ένα μητρώο  $np \times N$ , όπου  $N$  ο αριθμός των σημείων ελέγχου της γεωμετρίας και  $np$  ο αριθμός των κόμβων του πλέγματος κεντροκομβικής διατύπωσης.

Επιπλέον, σε αντιστοιχία με τη συνάρτηση  $F$ , ο τελεστής υπολοίπου των εξισώσεων ροής  $\vec{R}$  εξαρτάται και αυτός από τα διανύσματα  $\vec{b}$  και  $\vec{U}$ , οπότε η συνολική μεταβολή του ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού είναι

$$\frac{d\vec{R}}{d\vec{b}} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{b}} + \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \frac{d\vec{U}}{d\vec{b}} = 0 \quad (3.5)$$

Η σχέση (3.5) προκύπτει από την απαίτηση ικανοποίησης των εξισώσεων της ροής πριν και μετά τη μεταβολή της γεωμετρίας κατά  $d\vec{b}$ . Έτσι έχουμε  $\vec{R} + \frac{d\vec{R}}{d\vec{b}}d\vec{b} = 0$ . Όμως αφού  $\vec{R} = 0$  πρέπει και  $\frac{d\vec{R}}{d\vec{b}} = 0$ .

Επομένως, για τον υπολογισμό του  $\frac{d\vec{U}}{d\vec{b}}$ , χρησιμοποιείται η σχέση:

$$\left[ \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \right] \left[ \frac{d\vec{U}}{d\vec{b}} \right] = - \left[ \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{b}} \right] \quad (3.6)$$

όπου ο όρος  $\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}}$  έχει υπολογιστεί από το Κεφάλαιο 1. Επομένως αρκεί να υπολογιστεί ο όρος  $\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{b}}$ .

Όπως έχει ήδη αναφερθεί για τον τελεστή ροής  $\vec{R}$  ισχύει η σχέση (2.13). Διαφορίζοντας ως προς  $\vec{b}$  προκύπτει

$$\left[ \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{b}} \right]_i = - \left[ \frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{b}} \right]_i \Delta x_i$$

$$\left[ \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{b}} \right]_i = \frac{\partial}{\partial \vec{b}} \left( \frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \right)_i \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 \\ u(\rho E + p) \end{bmatrix}_i \Delta x_i$$

και τελικά

$$\left[ \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{b}} \right]_i = \left[ \frac{1}{S} \frac{d}{d\vec{b}} \left( \frac{dS}{dx} \right) - \frac{1}{S^2} \frac{dS}{dx} \frac{dS}{d\vec{b}} \right]_i \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 \\ u(\rho E + p) \end{bmatrix}_i \Delta x_i, \forall i = 1, \dots, np \quad (3.7)$$

όπου  $\left[ \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{b}} \right]$  είναι ένα μητρώο  $np \times N$  το οποίο παρουσιάζεται παρακάτω:

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{b}} = \begin{bmatrix} \left[ \frac{\partial R_1}{\partial b_1} \right] & \left[ \frac{\partial R_1}{\partial b_2} \right] & \dots & \left[ \frac{\partial R_1}{\partial b_N} \right] \\ \left[ \frac{\partial R_2}{\partial b_1} \right] & \left[ \frac{\partial R_2}{\partial b_2} \right] & \dots & \left[ \frac{\partial R_2}{\partial b_N} \right] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left[ \frac{\partial R_{np}}{\partial b_1} \right] & \left[ \frac{\partial R_{np}}{\partial b_2} \right] & \dots & \left[ \frac{\partial R_{np}}{\partial b_N} \right] \end{bmatrix}$$

Όμως, από τη σχέση (3.7) είναι αναγκαίο να διατυπωθούν μερικές γενικές σχέσεις που προκύπτουν από την παραμετροποίηση της γεωμετρίας του αγωγού. Στην παρούσα εργασία, η παραμετροποίηση έγινε με πολυώνυμο Bezier, αν και υπάρχει η δυνατότητα να γενικευτεί εύκολα και με άλλους τρόπους παραμετροποίησης [3]. Είναι γνωστό ότι:

$$S(t) = \sum_{i=1}^N B_i(t) b_i \quad (3.8)$$

όπου  $t$  παράμετρος,  $t \in [0, 1]$  και  $i \in [1, N]$ . Επιπλέον, υπενθυμίζεται ότι το διάνυσμα των παραμέτρων σχεδιασμού είναι  $\vec{b} = [b_1, b_2, \dots, b_N]$  και ότι  $B_i(t)$  υπολογίζεται από

την εξής σχέση:

$$B_i(t) = [m_{i,0}, m_{i,1}, \dots, m_{i,N}] \begin{bmatrix} t^0 \\ t^1 \\ \vdots \\ t^N \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

όπου  $N = (\text{αριθμός των σημείων ελέγχου}) - 1$  και

$$m_{i,j} = (-1)^{j-1} \binom{N}{j} \binom{j}{i} \quad (3.10)$$

ενώ όταν  $i > j \rightarrow m_{i,j} = 0$ .

Άρα, από την έκφραση (3.8) προκύπτει ότι:

$$\frac{dS(t)}{dx} = \sum_{a=1}^N \frac{dB_a(t)}{dx} b_a, \quad \frac{dS(t)}{db_a} = B_a(t), \quad \frac{d}{db_a} \left[ \frac{dS(t)}{dx} \right] = \frac{dB_a(t)}{dx} \quad (3.11)$$

Συνεπώς, γνωρίζοντας τον όρο  $\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}}$  έπειτα από την επίλυση του ροϊκού προβλήματος (2.15) και χρησιμοποιώντας την σχέση (3.7) υπολογίζεται το  $\frac{d\vec{U}}{db}$  με την επίλυση συστήματος εξισώσεων (σχέση 3.6) τριδιαγώνιας (πρώτης τάξης ακρίβεια μητρώο  $\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}}$ ) ή πενταδιαγώνιας (δεύτερης τάξης ακρίβεια μητρώο  $\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}}$ ) μορφής. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.2 έως 3.4) υπολογίζεται η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης - στόχου (σχέση 3.1). Σημειώνεται ότι η ευθεία διαφύριση δίνει "άκριβείς παραγώγους" με την έννοια ότι αυτές είναι **απόλυτα συμβατές** με την ακρίβεια διακριτοποίησης των εξισώσεων ροής. Με απλά λόγια, οποιοδήποτε αριθμητικό σφάλμα εμφανίζεται στην επίλυση των εξισώσεων ροής, το ίδιο σφάλμα μεταφέρεται και στις παραγώγους. Επειδή όμως θεωρείται αποδεκτή η επίλυση του πεδίου ροής θεωρούνται "άκριβείς" (αυτή είναι η έννοια του όρου «συμβιβαστότητα» η οποία χρησιμοποιείται συχνά στην παρούσα εργασία) και οι παράγωγοι που υπολογίζει η ευθεία διαφύριση.

Η εύρεση του υπολογιστικού κόστους εφαρμογής της μεθόδου για ένα βήμα βελτιστοποίησης απαιτεί την επίλυση  $N$  συστημάτων  $nr \times nr$  για την εύρεση του μητρώου  $\frac{d\vec{U}}{db}$

Η μέθοδος της ευθείας διαφόρισης απαιτεί, για  $np$  κόμβους, την επίλυση  $N$  συστημάτων  $np \times np$  για τον υπολογισμό του μητρώου  $\frac{d\vec{U}}{d\vec{b}}$  :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \end{bmatrix}_{(np \times np)} \begin{bmatrix} \frac{d\vec{U}}{d\vec{b}} \end{bmatrix}_{(np \times N)} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{b}} \end{bmatrix}_{(np \times N)} \quad (3.12)$$

Στη συνέχεια, από το παραπάνω μητρώο και τη σχέση 3.1 υπολογίζεται η ολική παράγωγος. Βλέπουμε, συνεπώς, πως το συνολικό κόστος για την εφαρμογή της μεθόδου είναι  $N$  λύσεις συστημάτων  $np \times np$  για τον υπολογισμό του μητρώου  $\frac{d\vec{U}}{d\vec{b}}$  (σχέση 3.12) και μια λύση συστήματος  $np \times np$  για τις εξισώσεις ροής (σχέση 2.7).

### 3.3 Διακριτή συζυγής μέθοδος

Έχοντας υπολογίσει την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης - στόχου με τη μέθοδο της ευθείας διαφόρισης, θα παρουσιαστεί στην παρούσα ενότητα, ο τρόπος εύρεσης της πρώτης παραγώγου με τη διακριτή συζυγή τεχνική.

Για την εφαρμογή της συζυγούς τεχνικής δημιουργείται η επαυξημένη αντικειμενική συνάρτηση της συνάρτησης - στόχου η οποία περιέχει μια κατάλληλη ποσότητα με σκοπό την αποφυγή υπολογισμού του όρου  $\frac{d\vec{U}}{d\vec{b}}$ , ο οποίος έχει και το μεγαλύτερο υπολογιστικό κόστος. Η επαυξημένη συνάρτηση ορίζεται ως:

$$\frac{dF_{aug}}{d\vec{b}} = \frac{dF}{d\vec{b}} + \vec{\psi}^T \frac{d\vec{R}}{d\vec{b}}$$

όπου  $\vec{\psi}$  είναι το διάνυσμα των συζυγών μεταβλητών. Παρατηρούμε ότι  $\frac{dF_{aug}}{d\vec{b}} = \frac{dF}{d\vec{b}}$  μιας και  $\frac{d\vec{R}}{d\vec{b}} = 0$  από (σχέση 3.5). Αντικαθιστώντας τις  $\frac{dF}{d\vec{b}}$  και  $\frac{d\vec{R}}{d\vec{b}}$  από τις σχέσεις (3.1) και (3.5) αντίστοιχα έχουμε:



$$\begin{aligned} \frac{dF_{aug}}{d\vec{b}} &= \left( \frac{\partial F}{\partial \vec{b}} + \frac{\partial F}{\partial \vec{U}} \frac{d\vec{U}}{d\vec{b}} \right) + \vec{\psi}^T \left( \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{b}} + \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \frac{d\vec{U}}{d\vec{b}} \right) \Rightarrow \\ \frac{dF_{aug}}{d\vec{b}} &= \left( \frac{\partial F}{\partial \vec{U}} + \vec{\psi}^T \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \right) \frac{d\vec{U}}{d\vec{b}} + \left( \frac{\partial F}{\partial \vec{b}} + \vec{\psi}^T \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{b}} \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Όπως τονίσθηκε προηγουμένως σκοπός είναι η αποφυγή εύρεσης του υπολογιστικά ακριβούς όρου  $\frac{d\vec{U}}{d\vec{b}}$ . Αυτό επιτυγχάνεται θέτοντας τον πολλαπλασιαστή αυτού του όρου στην εξίσωση (3.13) ίσο με το μηδέν. Έτσι οδηγούμαστε στη διατύπωση της συζυγούς εξίσωσης από την οποία και υπολογίζεται η συζυγής μεταβλητή:

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{U}} + \vec{\psi}^T \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} = 0 \quad (3.14)$$

Με αυτόν τον τρόπο, η μεταβολή της συνάρτησης - στόχου συναρτάται μόνο της μεταβολής του διανύσματος των μεταβλητών σχεδιασμού  $\delta \vec{b}$  και όχι των επαγόμενων μεταβολών  $\delta \vec{U}$  του πεδίου ροής. Δηλαδή, θα έχουμε παραγώγους ευαισθησίας:

$$\frac{dF_{aug}}{d\vec{b}} = \frac{\partial F}{\partial \vec{b}} + \vec{\psi}^T \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{b}} \quad (3.15)$$

ενώ το πεδίο των  $\vec{\psi}$ , το οποίο ονομάζεται πλέον πεδίο των συζυγών μεταβλητών, προκύπτει από τη λύση της συζυγούς εξίσωσης (3.14):

$$\left[ \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \right]^T \vec{\psi} = - \left[ \frac{\partial F}{\partial \vec{U}} \right]^T \quad (3.16)$$

η οποία είναι γραμμική ως προς  $\vec{\psi}$ , αφού το μητρώο  $\left[ \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \right]^T$  δεν συναρτάται του  $\vec{\psi}$ .

Το υπολογιστικό κόστος της μεθόδου προκύπτει από την εξίσωση (3.16) :

$$\left[ \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} \right]_{(np \times np)}^T \vec{\psi}_{(np \times M)} = - \left[ \frac{\partial F}{\partial \vec{U}} \right]_{(np \times M)}^T \quad (3.17)$$

όπου  $M$  ο αριθμός των στόχων της βελτιστοποίησης (στην περίπτωση μας  $M = 1$ ). Συνεπώς, το συνολικό κόστος της μεθόδου ανά βήμα βελτιστοποίησης είναι  $M$  συστήματα  $np \times np$  για τη συζυγή εξίσωση (3.17) συν ένα σύστημα  $np \times np$  για την επίλυση των εξισώσεων της ροής (2.7). Στην περιπτωσή μας, λοιπόν, απαιτούνται δυο επιλύσεις συστημάτων  $np \times np$ . Συγκρίνοντας το κόστος αυτό με το κόστος της μεθόδου ευθείας διαφόρισης παρατηρούμε το μεγάλο πλεονέκτημα της συζυγούς μεθόδου: το κόστος εκτέλεσης της μεθόδου είναι πρακτικά ανεξάρτητο από τον αριθμό των μεταβλητών σχεδιασμού. Αν λάβουμε επίσης υπόψη ότι στα προβλήματα αεροδυναμικής ο αριθμός των στόχων (λ.χ.  $M = 1 \div 3$ ) είναι πολύ μικρότερος του αριθμού των σημείων σχεδιασμού έχουμε ξεκάθαρη υπεροχή της συζυγούς μεθόδου.

### 3.4 Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών

Στη συνέχεια, παρουσιάζεται μια σύντομη περιγραφή της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών. Όπως έχει αναφερθεί η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών έχει μεγάλο υπολογιστικό κόστος αλλά είναι εύκολη στον προγραμματισμό, κάτι που την καθιστά μια καλή βάση σύγκρισης των αποτελεσμάτων που έχουν προκύψει είτε με τη συζυγή μέθοδο είτε με τη μέθοδο της ευθείας διαφόρισης.

Η παράγωγος της συνάρτησης - στόχου  $F$  ως προς τον  $i$ -ιστό βαθμό ελευθερίας μπο-

ρεί να προσεγγισθεί με σχήμα κεντρικών πεπερασμένων διαφορών, ακρίβειας δεύτερης τάξης, ως εξής:

$$\frac{dF}{db_i} = \frac{F(b_1, b_2, \dots, b_i + \epsilon, \dots, b_N) - F(b_1, b_2, \dots, b_i - \epsilon, \dots, b_N)}{2\epsilon} \quad (3.18)$$

όπου  $\epsilon$  σταθερά μικρής τιμής, που καθορίζει ο χρήστης. Η εξίσωση (3.18) πρέπει να εφαρμοστεί  $N$  φορές (για τις  $N$  τιμές του δείκτη  $i$ ) σε κάθε βήμα της βελτιστοποίησης. Έτσι, το υπολογιστικό κόστος εύρεσης του μητρώου της ολικής παραγωγού είναι  $2N$  συστήματα  $np \times np$ , των εξισώσεων ροής (2.7). Πέρα από το μεγάλο υπολογιστικό κόστος της μεθόδου ένα επιπλέον μειονέκτημα είναι η ευαισθησία του αποτελέσματος ως προς την τιμή της ποσότητας  $\epsilon$ .

### 3.5 Αλγόριθμος αντίστροφου σχεδιασμού

Ανάλυση βημάτων αλγόριθμου αντίστροφου σχεδιασμού αγωγού, με βάση θεωρία ψευδομονοδιάστατης ροής, που βασίζεται σε συζυγή διατύπωση και τη μέθοδο της απότομης καθόδου:

- Βήμα 1:  
Δίνεται αρχική τιμή στο μετρητή των κύκλων και επιλέγεται τυχαία η αρχική λύση, δηλαδή ένα αρχικό σύνολο τιμών των  $N$  μεταβλητών σχεδιασμού.
- Βήμα 2:  
Χρησιμοποιείται ως συνάρτηση παρεμβολής το πολυώνυμο Bezier-Bernstein, ώστε να σχηματιστεί η γεωμετρία του αγωγού (κατανομή  $S(x)$  που αντιστοιχεί στις τρέχουσες τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού).
- Βήμα 3:  
Επιλύεται το ευθύ πρόβλημα (εξισώσεις ροής). Εύρεση και κατανομή πίεσης κατά μήκος του αγωγού.
- Βήμα 4:  
Εφαρμόζεται κριτήριο σύγκλισης σχετικό με το πόσο αλλάζει η τιμή της συνάρτησης - στόχου. Αν ικανοποιείται το κριτήριο σύγκλισης, ο αλγόριθμος σταματά εδώ.
- Βήμα 5:  
Επιλύεται το συζυγές πρόβλημα και υπολογίζονται οι συζυγείς μεταβλητές  $\vec{\psi}$ .

- Βήμα 6:  
Υπολογίζονται οι παραγώγοι ευαισθησίας.
  - Βήμα 7:  
Διορθώνονται οι τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού με τη μέθοδο της απότομης καθόδου.
  - Βήμα 8:  
Ένας νέος κύκλος ξεκινά από το βήμα 2 μέχρι να υπάρξει σύγκλιση.
-

## Κεφάλαιο 4

# Εύρεση Πρώτης Παραγώγου με τη Συνεχή Συζυγή Μέθοδο.

### 4.1 Εισαγωγικά σχόλια

Στο προηγούμενο κεφάλαιο παρουσιάστηκε ο τρόπος εύρεσης πρώτης παραγώγου με τη διακριτή συζυγή μέθοδο για προβλήματα αντίστροφου σχεδιασμού ψευδο-1Δ αγωγού. Δηλαδή, υπολογίστηκαν οι παράγωγοι βασιζόμενοι στον ορισμό της επαυξημένης συνάρτησης στόχου, η οποία σχηματίστηκε από τη διακριτή γραφή της συνάρτησης στόχου, τις διακριτοποιημένες εξισώσεις ροής και τις κομβικές τιμές της συζυγούς μεταβλητής. Ωστόσο, όπως έχει ήδη αναφερθεί στην εισαγωγή, εναλλακτική μέθοδος υπολογισμού των παραγώγων είναι και η συνεχής συζυγής μέθοδος. Η βασική διαφορά εστιάζεται στο γεγονός ότι στη συνεχή συζυγή μέθοδο, η διακριτοποίηση ακολουθεί τη διατύπωση της συζυγούς διαφορικής εξίσωσης, σε αντίθεση με τη διακριτή όπου η διακριτοποίηση προηγείται, με αποτέλεσμα οι συζυγείς εξισώσεις να παράγονται απευθείας σε διακριτή μορφή [3],[2].

Αναλυτικότερα, όσον αφορά την πρώτη παράγωγο στη συνεχή συζυγή μέθοδο, η επαυξημένη συνάρτηση στόχου αποτελείται από την αναλυτική έκφραση της συνάρτησης στόχου και το ολοκλήρωμα των εξισώσεων ροής πολλαπλασιασμένων με τις συζυγείς μεταβλητές. Έτσι, επιθυμώντας να καταστεί η μεταβολή της συνάρτησης στόχου ανεξάρτητη κάθε μεταβολής των μεγεθών ροής, εντοπίζονται οι ποσότητες που πρέπει να μηδενιστούν. Από τις ποσότητες αυτές παράγονται οι συζυγείς εξισώσεις και οι οριακές τους συνθήκες. Όσα αναφέρθηκαν είναι σε διαφορική γραφή, επομένως πρέπει,

στη συνέχεια, να διακριτοποιηθούν.

Επομένως, στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιαστούν οι σχέσεις που ισχύουν για τις παραγώγους ευαισθησίας και, στη συνέχεια, θα αναφερθεί αναλυτικά ο τρόπος επίλυσης των συζυγών εξισώσεων καθώς και των οριακών τους συνθηκών.

## 4.2 Υπολογισμός πρώτης παραγώγου με τη συνεχή συζυγή μέθοδο.

Όπως έχει ήδη αναπτυχθεί σε προηγούμενες παραγράφους, η συνάρτηση στόχος που παρουσιάζεται στη παρούσα διπλώματική, δίδεται από τη σχέση:

$$F(\vec{U}, \vec{b}) = \frac{1}{2} \int_{(L)} (p(x) - p_{tar}(x))^2 dx$$

όπου η ολοκλήρωση γίνεται σε όλο το μήκος του αγωγού το οποίο είναι γνωστό και σταθερό.

Η μεταβολή της συνάρτησης στόχου θα είναι:

$$\begin{aligned} \delta F(\vec{U}, \vec{b}) &= \frac{\partial F}{\partial \vec{U}} \delta \vec{U} + \frac{\partial F}{\partial \vec{b}} \delta \vec{b} = \\ & \int_{(L)} (p(x) - p_{tar}(x)) \frac{\partial p}{\partial \vec{U}} \delta \vec{U} dx \end{aligned} \quad (4.1)$$

Η μεταβολή της επαυξημένης συνάρτησης στόχου, εισάγοντας τις συζυγείς μεταβλητές είναι:

$$\delta F_{aug} = \delta F + \int_{(L)} \vec{\psi}^T \left( \frac{\partial(\delta \vec{f})}{\partial x} - \delta \vec{q} \right) dx \quad (4.2)$$

όπου παραλείφθηκε ο ψευδοχρονικός όρος των εξισώσεων ροής. Επιπλέον επειδή το πρόβλημά μας είναι 1Δ, αντί να χρησιμοποιηθεί ο όρος  $\delta \left( \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} \right)$  χρησιμοποιείται ο όρος

$$\frac{\partial(\delta \vec{f})}{\partial x}.$$

Τέλος, ο μη ομογενής όρος της εξίσωσης 6.3 αναπτύχθηκε ως εξής:

$$\delta \vec{q} = \frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{U}} \delta \vec{U} + \frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{b}} \delta \vec{b} = T_u \delta \vec{U} + T_b \delta \vec{b} \quad (4.3)$$

Επομένως η εξίσωση 6.3 τροποποιείται ως εξής:

$$\delta F_{aug} = \delta F + \int_{(L)} \vec{\psi}^T \left( \frac{\partial(\delta \vec{f})}{\partial x} - T_u \delta \vec{U} - T_b \delta \vec{b} \right) dx \quad (4.4)$$

όπου το μητρώο  $T_b = \frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{b}}$  εξαρτάται από τη παραμετροποίηση της κατανομής της διατομής  $S(x)$  και ισούται με:

$$\left[ \frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{b}} \right]_i = \left[ \frac{1}{S^2} \frac{dS}{dx} \frac{dS}{d\vec{b}} - \frac{1}{S} \frac{d}{d\vec{b}} \left( \frac{dS}{dx} \right) \right]_i \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 \\ u(\rho E + p) \end{bmatrix}_i \quad (4.5)$$

ενώ το μητρώο  $T_u = \frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{U}}$  είναι:

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{U}} = -\frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -u^2 & 2u & 0 \\ -\gamma u E + (\gamma - 1)u^3 & \gamma E - \frac{3}{2}(\gamma - 1)u^2 & \gamma u \end{bmatrix}_i \quad (4.6)$$

Ο πρώτος όρος στο δεξί μέλος της 6.5, ο οποίος αντιστοιχεί στη μεταβολή της πραγματικής συνάρτησης στόχου, έχει ήδη αναλυθεί στη σχέση 6.1, ενώ ο δεύτερος όρος, ο οποίος εκφράζει τον περιορισμό να ικανοποιούνται οι εξισώσεις ροής, αναπτύσσεται με βάση το θεώρημα Green-Gauss ως εξής [3]:

$$\int_{(L)} \vec{\psi}^T \left( \frac{\partial(\delta \vec{f})}{\partial x} - T_u \delta \vec{U} - T_b \delta \vec{b} \right) dx =$$


---

$$\int_{(L)} \left( \frac{\partial(\vec{\psi}^T \delta \vec{f})}{\partial x} - \delta \vec{f}^T \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} - \vec{\psi}^T T_u \delta \vec{U} - \vec{\psi}^T T_b \delta \vec{b} \right) dx$$

$$\left[ \vec{\psi}^T A \delta \vec{U} \right]_{out} - \left[ \vec{\psi}^T A \delta \vec{U} \right]_{in} - \int_{(L)} \left( \delta \vec{U}^T A^T \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} + \vec{\psi}^T T_u \delta \vec{U} + \vec{\psi}^T T_b \delta \vec{b} \right) dx \quad (4.7)$$

όπου χρησιμοποιείται ότι  $\vec{f} = A\vec{U}$  και  $\delta \vec{f} = A\delta \vec{U}$ . Ωστόσο, πρέπει να αναφερθεί ότι στη σχέση έγινε η χρήση της σχέσης  $\frac{\partial A}{\partial b} \vec{U} = \vec{0}$  όπως αποδεικνύεται στο Παράρτημα Γ'. Έτσι προκύπτει:

Εισάγοντας τις σχέσεις 6.9 και 6.1 στην σχέση 6.3 και λαμβάνοντας υπόψη ότι το πρόβλημά μας είναι  $1 - D$  προκύπτει ότι:

$$\delta F_{aug} = \int_{(L)} \vec{\psi}^T T_b \delta \vec{b} dx + \left[ \vec{\psi}^T A \delta \vec{U} \right]_{out} - \left[ \vec{\psi}^T A \delta \vec{U} \right]_{in} -$$

$$\int_{(L)} \delta \vec{U}^T \left[ (p(x) - p_{tar}(x)) \left( \frac{\partial p}{\partial \vec{U}} \right)^T + A^T \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} + T_u^T \vec{\psi} \right] dx \quad (4.8)$$

Ωστόσο, όπως έχει ήδη αναφερθεί, είναι επιθυμητό η μεταβολή της συνάρτησης στόχου να γίνει ανεξάρτητη οποιασδήποτε μεταβολής  $\delta \vec{U}$  του πεδίου ροής. Επομένως, η εξίσωση, η οποία αν διατυπωθεί και ικανοποιηθεί απαλείφει τους όρους που περιέχουν την ποσότητα  $\delta \vec{U}$  αποτελεί τη συζυγή εξίσωση, ενώ οι όροι που με την επιβολή τους η συνάρτηση στόχος γίνεται ανεξάρτητη οποιασδήποτε μεταβολής  $\delta \vec{U}$  στα όρια του πεδίου αποτελούν τις οριακές συνθήκες της συζυγούς εξίσωσης.

Πιο αναλυτικά, η συζυγής εξίσωση δίδεται από τη σχέση:

$$\int_{(L)} \delta \vec{U}^T \left[ (p(x) - p_{tar}(x)) \left( \frac{\partial p}{\partial \vec{U}} \right)^T + A^T \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} + T_u^T \vec{\psi} \right] dx = 0 \implies$$

$$\left[ A^T \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} + T_u^T \vec{\psi} + (p(x) - p_{tar}(x)) \left( \frac{\partial p}{\partial \vec{U}} \right)^T \right] = 0 \quad (4.9)$$



Έτσι, το παραπάνω σύστημα των τριών συνήθων διαφορικών εξισώσεων για τις συζυγείς μεταβλητές  $\vec{\psi}$ , προσθέτοντας τον χρονικό όρο για τη διατύπωση ενός χωρο-χρονικά υπερβολικού προβλήματος, γράφεται:

$$\frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} - \left[ A^T \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} + T_u^T \vec{\psi} + (p(x) - p_{tar}(x)) \left( \frac{\partial p}{\partial \vec{U}} \right)^T \right] = 0 \quad (4.10)$$

ενώ οι οριακές συνθήκες που επιβάλλονται στις συζυγείς εξισώσεις προέρχονται από επίλυση της εξίσωσης  $\left[ \vec{\psi}^T A \delta \vec{U} \right]_{in,out} = 0$ . Σε ανάστροφη γραφή οι οριακές συνθήκες για τις συζυγείς εξισώσεις θα προέρθουν από την επίλυση της σχέσης:

$$\delta \vec{U}^T A^T \vec{\psi} = 0 \quad (4.11)$$

Επομένως, η παράγωγος ευαισθησίας θα υπολογιστεί από τη σχέση:

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta \vec{b}} = \int_{(L)} \vec{\psi}^T T_b dx \quad (4.12)$$

Συμπερασματικά, για τον υπολογισμό της πρώτης παραγώγου αρκεί η επίλυση της συζυγούς εξίσωσης για την εύρεση του  $\vec{\psi}$ .

### 4.3 Διακριτοποίηση των συζυγών εξισώσεων με ακρίβεια πρώτης τάξης.

Όπως ήδη αναφέρθηκε στη προηγούμενη παράγραφο, οι συζυγείς μεταβλητές υπολογίζονται από την εξίσωση:

$$\frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} - \left[ A^T \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} + T_u^T \vec{\psi} + (p(x) - p_{tar}(x)) \left( \frac{\partial p}{\partial \vec{U}} \right)^T \right] = 0$$

Ιδιαίτερη σημασία δίδεται στο ότι το σύστημα είναι γραμμικό, δηλαδή οι συντελεστές  $A^T, T_u^T$  δεν συναρτώνται του  $\vec{\psi}$ . Επιπλέον, επειδή το γραμμικό σύστημα που διέπει τις συζυγείς μεταβλητές έχει πραγματικές ιδιοτιμές, αντίθετες με εκείνες του προβλήματος ροής, το πρόσημο με το οποίο προστέθηκε ο χρονικός όρος είναι αντίθετος απ' αυτόν που ορίσθηκε στην δέλτα-διατύπωση του ευθέος προβλήματος.

Αρχικά, όπως είναι γνωστό (4.9) μας ενδιαφέρει η χρονικά μόνιμη ροή. Επομένως, αγνοώντας προσωρινά τον χρονικό όρο, τίθεται με  $\vec{R}_\psi$  η παραπάνω σχέση. Δηλαδή θα εχω:

$$\vec{R}_\psi = - \left[ A^T \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} + T_u^T \vec{\psi} + (p(x) - p_{tar}(x)) \left( \frac{\partial p}{\partial \vec{U}} \right)^T \right] = 0 \quad (4.13)$$

Η επίλυση του συζυγούς προβλήματος γίνεται μέσω δέλτα-διατύπωσης. Δηλαδή:

$$\left[ I \frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\partial \vec{R}_\psi}{\partial \vec{\psi}} \right] \delta \vec{\psi} = -\vec{R}_\psi \quad (4.14)$$

όπου μετά την εύρεση του  $\delta \vec{\psi}$  το νέο διάνυσμα των συντηρικών μεταβλητών βρίσκεται ως

$$\vec{\psi}^{new} = \vec{\psi}^{old} + \delta \vec{\psi}$$

Επίσης όπως και στην επίλυση του ευθέος προβλήματος έτσι και εδώ εισάγεται ο χρονικός όρος - ψευδοχρόνος (παρόλο που η ροή θεωρείται χρονικά μόνιμη) ώστε να γίνει εκμετάλλευση των ιδιοτήτων των υπερβολικών συστημάτων και να γίνει εφαρμογή των τεχνικών χρονοπροέλασης (time-marching) για την επίλυση του συζυγούς πεδίου.

Επιπλέον, στην εξίσωση (4.14) τα εμπλεκόμενα μητρώα είναι:

$$\vec{R}_\psi^T = \left[ \vec{R}_{\psi_1}, \vec{R}_{\psi_2}, \dots, \vec{R}_{\psi_{z-1}}, \vec{R}_{\psi_z} \right]^T \quad (4.15)$$

$$\delta \vec{\psi}^T = \left[ \delta \vec{\psi}_1, \delta \vec{\psi}_2, \dots, \delta \vec{\psi}_{z-1}, \delta \vec{\psi}_z \right]^T \quad (4.16)$$

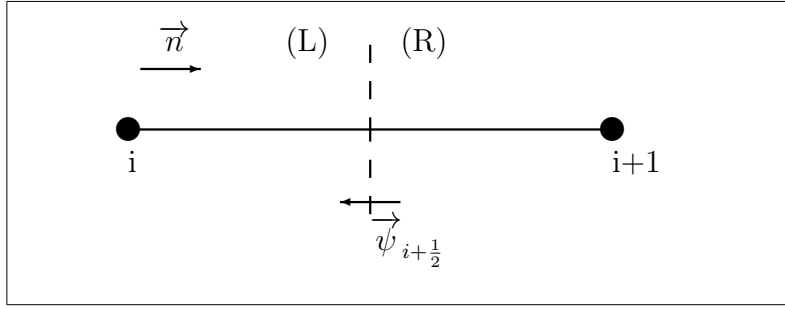
$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{\psi}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{R}_{\psi_1}}{\partial \vec{\psi}_1} & \frac{\partial \vec{R}_{\psi_1}}{\partial \vec{\psi}_2} & \frac{\partial \vec{R}_{\psi_1}}{\partial \vec{\psi}_3} & \dots & \frac{\partial \vec{R}_{\psi_1}}{\partial \vec{\psi}_z} \\ \frac{\partial \vec{R}_{\psi_2}}{\partial \vec{\psi}_1} & \frac{\partial \vec{R}_{\psi_2}}{\partial \vec{\psi}_2} & \frac{\partial \vec{R}_{\psi_2}}{\partial \vec{\psi}_3} & \dots & \frac{\partial \vec{R}_{\psi_2}}{\partial \vec{\psi}_z} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \vec{R}_{\psi_{z-1}}}{\partial \vec{\psi}_1} & \frac{\partial \vec{R}_{\psi_{z-1}}}{\partial \vec{\psi}_2} & \frac{\partial \vec{R}_{\psi_{z-1}}}{\partial \vec{\psi}_3} & \dots & \frac{\partial \vec{R}_{\psi_{z-1}}}{\partial \vec{\psi}_z} \\ \frac{\partial \vec{R}_{\psi_z}}{\partial \vec{\psi}_1} & \frac{\partial \vec{R}_{\psi_z}}{\partial \vec{\psi}_2} & \frac{\partial \vec{R}_{\psi_z}}{\partial \vec{\psi}_3} & \dots & \frac{\partial \vec{R}_{\psi_z}}{\partial \vec{\psi}_z} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Επομένως, ολοκληρώνοντας την εξίσωση 4.13 από  $i - \frac{1}{2} \rightarrow i + \frac{1}{2}$ , για το  $\vec{R}_\psi$  στους εσωτερικούς κόμβους, θα έχουμε ότι:

$$\vec{R}_{\psi_i} = - \left[ A^T (\vec{\psi}_{i+\frac{1}{2}} - \vec{\psi}_{i-\frac{1}{2}}) + T_{u_i}^T \vec{\psi}_i \Delta x_i + (p(x) - p(x)_{tar}) \left( \frac{\partial p}{\partial \vec{U}_i} \right)^T \Delta x_i \right] \quad (4.18)$$

Στην περίπτωση που η διακριτοποίηση της συζυγούς εξίσωσης γίνει με τη μέθοδο Flux Vector Splitting ακρίβειας πρώτης τάξης, με πεπερασμένο όγκο από τον μεσόκομβο  $i - \frac{1}{2}$  έως τον  $i + \frac{1}{2}$ , θα έχουμε ότι:

$$A^T \vec{\psi}_{i+\frac{1}{2}} = A_{i+\frac{1}{2}}^{T+} \vec{\psi}_{i+1} + A_{i+\frac{1}{2}}^{T-} \vec{\psi}_i \quad (4.19)$$



**Σχήμα 4.1:** Διακριτοποίηση της συζυγούς εξίσωσης με τη μέθοδο *Flux Vector Splitting*.

Άρα μετά τη διακριτοποίηση:

$$\vec{R}_{\psi_i} = - \left[ A_{i+\frac{1}{2}}^{T+} \vec{\psi}_{i+1} + A_{i+\frac{1}{2}}^{T-} \vec{\psi}_i - A_{i-\frac{1}{2}}^{T-} \vec{\psi}_{i-1} - A_{i-\frac{1}{2}}^{T+} \vec{\psi}_i + T_{u_i}^T \vec{\psi}_i \Delta x_i + (p - p_{tar}) \left( \frac{\partial p}{\partial \vec{U}_i} \right)^T \Delta x_i \right]$$

Δηλαδή,

$$\begin{aligned} \vec{R}_{\psi_i} &= A_{i-\frac{1}{2}}^{T-} \vec{\psi}_{i-1} - \left( A_{i+\frac{1}{2}}^{T-} - A_{i-\frac{1}{2}}^{T+} + T_{u_i}^T \Delta x_i \right) \vec{\psi}_i \\ &\quad - A_{i+\frac{1}{2}}^{T+} \vec{\psi}_{i+1} - (p - p_{tar}) \left( \frac{\partial p}{\partial \vec{U}_i} \right)^T \Delta x_i \end{aligned} \quad (4.20)$$

Από την παραγώγιση της έκφρασης (4.20) έχουμε:

$$\frac{\partial \vec{R}_{\psi_i}}{\partial \vec{\psi}_{i-1}} = A_{i-\frac{1}{2}}^{T-}, \quad \frac{\partial \vec{R}_{\psi_i}}{\partial \vec{\psi}_i} = - \left( A_{i+\frac{1}{2}}^{T-} - A_{i-\frac{1}{2}}^{T+} + T_{u_i}^T \Delta x_i \right), \quad \frac{\partial \vec{R}_{\psi_i}}{\partial \vec{\psi}_{i+1}} = -A_{i+\frac{1}{2}}^{T+} \quad (4.21)$$

και  $\frac{\partial \vec{R}_{\psi_i}}{\partial \vec{\psi}_j} = 0$ , για  $j < i - 1$  και  $j > i + 1$ .

Τέλος, αν οι οριακές συνθήκες  $\vec{R}_{\psi_1} = 0$  και  $\vec{R}_{\psi_z} = 0$  είναι γραμμένες με πρώτης τάξης ακρίβεια και παραγωγιστούν, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{R}_{\psi 1}}{\partial \vec{\psi}_j} &= 0, \forall j = 3, \dots, z \\ \frac{\partial \vec{R}_{\psi z}}{\partial \vec{\psi}_j} &= 0, \forall j = 1, \dots, z-2 \end{aligned} \quad (4.22)$$

Επομένως, με βάση τα όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, για ακρίβεια πρώτης τάξης, το συνολικό μητρώο (4.17) είναι ένα τριδιαγώνιο block μητρώο με μορφή:

$$\frac{\partial \vec{R}_{\psi}}{\partial \vec{\psi}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{R}_{\psi 1}}{\partial \vec{\psi}_1} & \frac{\partial \vec{R}_{\psi 1}}{\partial \vec{\psi}_2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \vec{R}_{\psi 2}}{\partial \vec{\psi}_1} & \frac{\partial \vec{R}_{\psi 2}}{\partial \vec{\psi}_2} & \frac{\partial \vec{R}_{\psi 2}}{\partial \vec{\psi}_3} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \vec{R}_{\psi 3}}{\partial \vec{\psi}_2} & \frac{\partial \vec{R}_{\psi 3}}{\partial \vec{\psi}_3} & \frac{\partial \vec{R}_{\psi 3}}{\partial \vec{\psi}_4} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial \vec{R}_{\psi z}}{\partial \vec{\psi}_{z-1}} & \frac{\partial \vec{R}_{\psi z}}{\partial \vec{\psi}_z} \end{bmatrix}$$

#### 4.4 Οριακές συνθήκες του συζυγούς προβλήματος.

Σκοπός της παρούσας ενότητας, είναι η περιγραφή του τρόπου επιβολής των οριακών συνθηκών στο συζυγές πρόβλημα. Στην περίπτωση της υποηχητικής ροής, οι οριακές συνθήκες έχουν για την είσοδο είναι:

Κόμβος 1:

$$(\psi_1)_1 = \left[ \frac{u^2 \left[ \frac{u^2}{2c^2} - \frac{\gamma-3}{2(\gamma-1)} - \frac{1}{\gamma-1} \frac{c^2}{u^2} \right] \psi_3 + u \left[ \frac{u^2}{c^2} - 1 \right] \psi_2}{1 - \frac{u^2}{c^2}} \right]_1 \quad (4.23)$$

$$(\psi_2)_1 = (\psi_2)_2 \quad (4.24)$$

$$(\psi_3)_1 = (\psi_3)_2 \quad (4.25)$$

ενώ για την έξοδο:

Κόμβος  $z$ :

$$(\psi_1)_z = (\psi_1)_{z-1} \quad (4.26)$$

$$(\psi_2)_z = \left[ \frac{\psi_1}{2u} \frac{u^2(\gamma-2) - 2\gamma E}{\gamma E + \frac{u^2}{2}(1-\gamma)} \right]_z \quad (4.27)$$

$$(\psi_3)_z = \left[ \psi_1 \frac{1}{\gamma E + \frac{u^2(1-\gamma)}{2}} \right]_z \quad (4.28)$$

Οι παραπάνω σχέσεις προέκυψαν από επίλυση της εξίσωσης (4.11). Η διαχείριση της σχέσης αυτής γίνεται με διαφορετικό τρόπο στην είσοδο και την έξοδο του πεδίου ροής αφού σε αυτές επιβάλλονται διαφορετικές συνθήκες ροής. Ωστόσο, η ανάπτυξη της (4.11) θα είναι ασφαλώς κοινή για την είσοδο και την έξοδο και δίνει:

$$\begin{bmatrix} \delta\rho & \delta(\rho u) & \delta(\rho E) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\gamma-3}{2}u^2 & -\gamma u E + (\gamma-1)u^3 \\ 1 & (3-\gamma)u & \gamma E - \frac{3(\gamma-1)}{2}u^2 \\ 0 & \gamma-1 & \gamma u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.29)$$

Στην είσοδο, όπου επιβάλλονται σταθερές τιμές στα ολικά θερμοδυναμικά μεγέθη της ροής (κεφάλαιο 2), διαφορίζοντας τις σχέσεις τις ισεντροπικής μεταβολής, προκύπτουν οι συσχετίσεις των μεταβολών

$$\delta\rho = -\frac{\rho u}{c^2}\delta u \quad (4.30)$$

$$\delta p = -\rho u \delta u \quad (4.31)$$

Σύμφωνα με τις σχέσεις 4.30 και 4.31 προκύπτουν εύκολα οι μεταβολές της δεύτερης και τρίτης συντηρητικής μεταβλητής των εξισώσεων ροής, ως

$$\delta(\rho u) = u\delta\rho + \rho\delta u = \rho \left[ 1 - \frac{u^2}{c^2} \right] \delta u \quad (4.32)$$

$$\delta(\rho E) = \frac{\delta p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\delta(\rho u^2) = \rho u \left[ \frac{\gamma - 2}{\gamma - 1} - \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} \right] \delta u \quad (4.33)$$

Με αντικαταστάσεις των σχέσεων 4.30, 4.32 και 4.33 για τις μεταβολές των ποσοτήτων της ροής στη σχέση 4.29, η τελευταία θα πάρει για την είσοδο της ροής στον αγωγό (υποηχητική ροή) την μορφή της εξίσωσης 4.23.

Ωστόσο, η υλοποίηση της σχέσης αυτής, προϋποθέτει την παρεμβολή από το εσωτερικό του πεδίου δύο εκ των τριών συνιστωσών του  $\vec{\psi}$  (συνθήκη Neumann) και τον υπολογισμό της τρίτης συνιστώσας από τη σχέση 4.23.

Από την άλλη πλευρά, στην έξοδο επιβάλλεται σταθερή τιμή της στατικής πίεσης, επομένως θα έχουμε:

$$\delta p = (\gamma - 1)(\delta(\rho E) - u\delta(\rho u) + \frac{1}{2}u^2\delta\rho) = 0$$

και συνεπώς,

$$\delta(\rho E) = u\delta(\rho u) - \frac{1}{2}u^2\delta\rho = 0 \quad (4.34)$$

Με αντικατάσταση της 4.34 στη σχέση 4.29 προκύπτουν οι σχέσεις 4.27 και 4.28.

Συνεπώς, στην έξοδο υπολογίζεται μια από τις τρεις συνιστώσες της συζυγούς μεταβλητής μέσω προεκβολής από το εσωτερικό του πεδίου και οι υπόλοιπες δύο προκύπτουν τοπικά, στην έξοδο, από τις σχέσεις 4.27 και 4.28.

Οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν συνοπτικά να γραφούν μέσω του  $\vec{R}_\psi$ . Συγκεκριμένα, για τον πρώτο κόμβο θα έχουμε:

$$\vec{R}_{\psi_1} = [(\psi_1)_1 - \left[ \frac{u^2 \left[ \frac{u^2}{2c^2} - \frac{\gamma-3}{2(\gamma-1)} - \frac{1}{\gamma-1} \frac{c^2}{u^2} \right] \psi_3 + u \left[ \frac{u^2}{c^2} - 1 \right] \psi_2}{1 - \frac{u^2}{c^2}} \right]_1, (\psi_2)_1 - (\psi_2)_2, (\psi_3)_1 - (\psi_3)_2]$$

ενώ για τον τελευταίο κόμβο θα έχουμε

$$\vec{R}_{\psi_z} = \left[ (\psi_1)_z - (\psi_1)_{z-1}, (\psi_2)_z - \left[ \frac{\psi_1}{2u} \frac{u^2(\gamma-2) - 2\gamma E}{\gamma E + \frac{u^2}{2}(1-\gamma)} \right]_z, (\psi_3)_z - \left[ \psi_1 \frac{1}{\gamma E + \frac{u^2}{2}(1-\gamma)} \right]_z \right].$$

Στη συνέχεια, διαφορίζονται οι παραπάνω εξισώσεις, έτσι ώστε να υπολογιστούν οι όροι,  $\frac{\partial \vec{R}_{\psi_1}}{\partial \vec{\psi}_j}$  και  $\frac{\partial \vec{R}_{\psi_z}}{\partial \vec{\psi}_j}$   $j = 1, \dots, z$ .

Πιο αναλυτικά, χρησιμοποιώντας την μεταβολή (variation) της δέλτα-διατύπωσης, θα έχουμε για τον πρώτο και τον τελευταίο κόμβο τις εξής εξισώσεις, που προκύπτουν ύστερα από πράξεις πινάκων:

$$\frac{\partial \vec{R}_{\psi_1}}{\partial \vec{\psi}_1} \delta \vec{\psi}_1 + \frac{\partial \vec{R}_{\psi_1}}{\partial \vec{\psi}_2} \delta \vec{\psi}_2 + \dots + \frac{\partial \vec{R}_{\psi_1}}{\partial \vec{\psi}_{z-1}} \delta \vec{\psi}_{z-1} + \frac{\partial \vec{R}_{\psi_1}}{\partial \vec{\psi}_z} \delta \vec{\psi}_z = -\vec{R}_{\psi_1} \quad (4.35)$$

$$\frac{\partial \vec{R}_{\psi_z}}{\partial \vec{\psi}_1} \delta \vec{\psi}_1 + \frac{\partial \vec{R}_{\psi_z}}{\partial \vec{\psi}_2} \delta \vec{\psi}_2 + \dots + \frac{\partial \vec{R}_{\psi_z}}{\partial \vec{\psi}_{z-1}} \delta \vec{\psi}_{z-1} + \frac{\partial \vec{R}_{\psi_z}}{\partial \vec{\psi}_z} \delta \vec{\psi}_z = -\vec{R}_{\psi_z} \quad (4.36)$$



Ωστόσο, κατά τον υπολογισμό των μερικών παραγώγων ισχύει η (4.22) εξίσωση. Δηλαδή, μας ενδιαφέρει να υπολογιστούν οι όροι  $\frac{\partial \vec{R}_{\psi_1}}{\partial \vec{\psi}_j}$  για  $j = 1, 2$  καθώς και  $\frac{\partial \vec{R}_{\psi_z}}{\partial \vec{\psi}_j}$  για  $j = z - 1, z$ , ενώ οι μερικές παράγωγοι ως προς τα υπόλοιπα διανύσματα της συζυγούς μεταβλητής είναι μηδενικές.

Επομένως κατά τη διαφορίση θα έχουμε τις παρακάτω οριακές συνθήκες:

Αρχικά η πρώτη οριακή συνθήκη για την είσοδο

$$\frac{\partial R_{\psi_1}^1}{\partial \vec{\psi}_1} \delta \vec{\psi}_1 = -R_{\psi_1}^1 \longrightarrow$$

$$\left[ 1, u, u^2 \frac{-\frac{u^2}{2c^2} + \frac{\gamma-3}{2(\gamma-1)} + \frac{c^2}{(\gamma-1)u^2}}{1 - \frac{u^2}{c^2}} \right]_1 \delta \vec{\psi}_1 = \frac{u^2 \left[ \frac{u^2}{2c^2} - \frac{\gamma-3}{2(\gamma-1)} - \frac{1}{\gamma-1} \frac{c^2}{u^2} \right] (\psi_3)_1}{1 - \frac{u^2}{c^2}} - u(\psi_2)_1 - (\psi_1)_1$$

προφανώς ισχύει ότι :

$$\frac{\partial R_{\psi_1}^1}{\partial \vec{\psi}_2} = [0, 0, 0]_2 \quad (4.37)$$

Η δεύτερη οριακή συνθήκη για την είσοδο

$$\frac{\partial R_{\psi_1}^2}{\partial \vec{\psi}_1} \delta \vec{\psi}_1 + \frac{\partial R_{\psi_1}^2}{\partial \vec{\psi}_2} \delta \vec{\psi}_2 = -R_{\psi_1}^2 \longrightarrow$$

$$[0, 1, 0]_1 \delta \vec{\psi}_1 + [0, -1, 0]_2 \delta \vec{\psi}_2 = (\psi_2)_2 - (\psi_2)_1 \quad (4.38)$$

και η τρίτη οριακή συνθήκη για την είσοδο

$$\frac{\partial R_{\psi_1}^3}{\partial \vec{\psi}_1} \delta \vec{\psi}_1 + \frac{\partial R_{\psi_1}^3}{\partial \vec{\psi}_2} \delta \vec{\psi}_2 = -R_{\psi_1}^3 \longrightarrow$$

$$[0, 0, 1]_1 \delta \vec{\psi}_1 + [0, 0, -1]_2 \delta \vec{\psi}_2 = (\psi_3)_2 - (\psi_3)_1 \quad (4.39)$$

Ανάλογη είναι και η διαδικασία που ακολουθείται για τις οριακές συνθήκες στην έξοδο του αγωγού. Υπενθυμίζουμε ότι, όσον αφορά το  $\vec{R}_\psi$  του τελευταίου κόμβου, θα έχουμε:

$$\vec{R}_{\psi_z} = \left[ (\psi_1)_z - (\psi_1)_{z-1}, (\psi_2)_z - \left[ \frac{\psi_1}{2u} \frac{u^2(\gamma - 2) - 2\gamma E}{\gamma E + \frac{u^2(1-\gamma)}{2}} \right]_z, (\psi_3)_z - \left[ \psi_1 \frac{1}{\gamma E + \frac{u^2(1-\gamma)}{2}} \right]_z \right]$$

Επομένως, η πρώτη οριακή συνθήκη για την έξοδο είναι:

$$\frac{\partial R_{\psi_z}^1}{\partial \vec{\psi}_{z-1}} \delta \vec{\psi}_{z-1} + \frac{\partial R_{\psi_z}^1}{\partial \vec{\psi}_z} \delta \vec{\psi}_z = -R_{\psi_z}^1 \longrightarrow$$

$$[-1, 0, 0]_{z-1} \delta \vec{\psi}_{z-1} + [1, 0, 0]_z \delta \vec{\psi}_z = (\psi_1)_{z-1} - (\psi_1)_z \quad (4.40)$$

Στη συνέχεια, η δεύτερη οριακή συνθήκη για την έξοδο είναι:

$$\frac{\partial R_{\psi_z}^2}{\partial \vec{\psi}_z} \delta \vec{\psi}_z = -R_{\psi_z}^2 \longrightarrow$$


---

$$\left[ -\frac{1}{2u} \frac{u^2(\gamma-2)-2\gamma E}{\gamma E + \frac{u^2(1-\gamma)}{2}}, 1, 0 \right]_k \delta \vec{\psi}_z = -(\psi_2)_z + (\psi_1)_{z-1} \frac{1}{2u} \frac{u^2(\gamma-2) - 2\gamma E}{\gamma E + \frac{u^2(1-\gamma)}{2}}$$

καθώς ισχύει ότι :

$$\frac{\partial R_{\psi_z}^2}{\partial \vec{\psi}_{z-1}} = [0, 0, 0]_{z-1} \quad (4.41)$$

Και τέλος, η τρίτη οριακή συνθήκη για την έξοδο είναι:

$$\frac{\partial R_{\psi_z}^3}{\partial \vec{\psi}_z} \delta \vec{U}_z = -R_{\psi_z}^3 \rightarrow$$

$$\left[ -\frac{1}{\gamma E + \frac{u^2(1-\gamma)}{2}}, 0, 1 \right]_z \delta \vec{\psi}_z = -(\psi_3)_z + (\psi_1)_z \frac{1}{\gamma E + \frac{u^2(1-\gamma)}{2}}$$

καθώς ισχύει ότι :

$$\frac{\partial R_{\psi_z}^3}{\partial \vec{\psi}_{z-1}} = [0, 0, 0]_{z-1} \quad (4.42)$$

## 4.5 Διακριτοποίηση συζυγών εξισώσεων με ακρίβεια δεύτερης τάξης.

Προηγουμένως έγινε ανάλυση του τρόπου επίλυσης του συζυγούς προβλήματος με ακρίβεια πρώτης τάξης στους οριακούς κόμβους. Στην παρούσα ενότητα, θα παρουσιαστεί αναλυτικά η διακριτοποίηση του συζυγούς προβλήματος με ακρίβεια δεύτερης

---

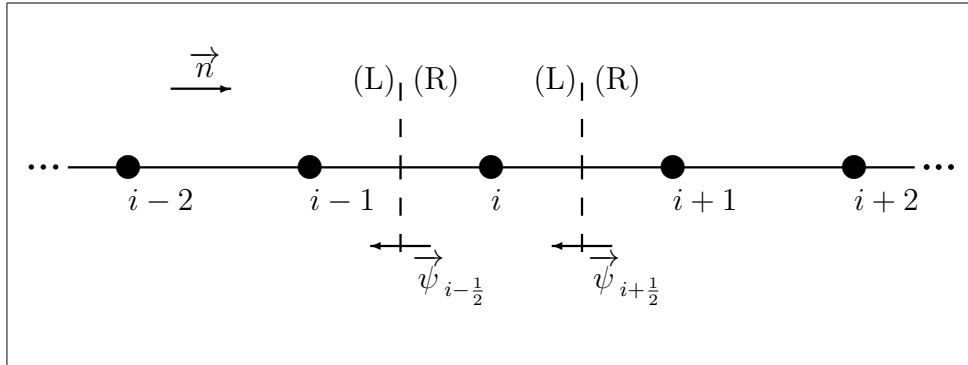
τάξης στους εσωτερικούς κόμβους. Αρχικά χρησιμοποιείται FVS με σχήμα προεκβολής MUSCL (Monotone Upwind Scheme for Conservation Laws) για τη διακριτοποίηση του  $\vec{R}_\psi$  και στη συνέχεια, προκύπτει το μητρώο  $\frac{\partial \vec{R}_\psi}{\partial \vec{\psi}}$  για ακρίβεια δεύτερης τάξης ως αποτέλεσμα της παραγωγίσισης του  $\vec{R}_\psi$ .

Για ακρίβεια δεύτερης τάξης σε οποιοδήποτε εσωτερικό κόμβο  $i$ , ισχύει η σχέση:

$$\vec{R}_{\psi i} = - \left[ A^T (\vec{\psi}_{i+\frac{1}{2}} - \vec{\psi}_{i-\frac{1}{2}}) + T_u^T \Delta x_i + (p - p_{tar}) \left( \frac{\partial p}{\partial \vec{U}} \right)^T \Delta x_i \right] = 0 \quad (4.43)$$

Δηλαδή, ο τύπος είναι ίδιος με αυτόν για πρώτης τάξης ακρίβεια. Το μόνο που αλλάζει είναι το πώς υπολογίζονται τα  $\vec{\psi}_{i+\frac{1}{2}}$ ,  $\vec{\psi}_{i-\frac{1}{2}}$  για ακρίβεια δεύτερης τάξης.

Πιο αναλυτικά, σε συμφωνία με το παρακάτω σχήμα, ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:



$$A^T \vec{\psi}_{i+\frac{1}{2}} = A_{i+\frac{1}{2}}^{T+} (\vec{\psi}_{i+\frac{1}{2}}^R) + A_{i+\frac{1}{2}}^{T-} (\vec{\psi}_{i+\frac{1}{2}}^L) \quad (4.44)$$

$$A^T \vec{\psi}_{i-\frac{1}{2}} = A_{i-\frac{1}{2}}^{T+} (\vec{\psi}_{i-\frac{1}{2}}^R) + A_{i-\frac{1}{2}}^{T-} (\vec{\psi}_{i-\frac{1}{2}}^L) \quad (4.45)$$

όπου,

$$\vec{\psi}_{i+\frac{1}{2}}^R = \vec{\psi}_{i+1} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} \right)_{i+1} (x_{i+1} - x_i) \quad (4.46)$$

$$\vec{\psi}_{i+\frac{1}{2}}^L = \vec{\psi}_i + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} \right)_i (x_{i+1} - x_i) \quad (4.47)$$

Αντίστοιχα, για το  $\vec{\psi}_{i-\frac{1}{2}}$  και  $\vec{\psi}_{i-\frac{1}{2}}^L$  ισχύουν τα εξής:

$$\vec{\psi}_{i-\frac{1}{2}}^R = \vec{\psi}_i - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} \right)_i (x_i - x_{i-1}) \quad (4.48)$$

$$\vec{\psi}_{i-\frac{1}{2}}^L = \vec{\psi}_{i-1} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} \right)_{i-1} (x_i - x_{i-1}) \quad (4.49)$$

Επομένως, η σχέση 4.44 με χρήση των 4.46 4.47 τροποποιείται σε

$$\begin{aligned} A^T \vec{\psi}_{i+\frac{1}{2}} &= \left( -\frac{1}{2} A_{i+\frac{1}{2}}^{T-} \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1} - x_{i-1}} \right) \vec{\psi}_{i-1} + \left( \frac{1}{2} A_{i+\frac{1}{2}}^{T+} \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+2} - x_i} + A_{i+\frac{1}{2}}^{T-} \right) \vec{\psi}_i \\ &+ \left( \frac{1}{2} A_{i+\frac{1}{2}}^{T-} \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1} - x_{i-1}} + A_{i+\frac{1}{2}}^{T+} \right) \vec{\psi}_{i+1} + \left( -\frac{1}{2} A_{i+\frac{1}{2}}^{T+} \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+2} - x_i} \right) \vec{\psi}_{i+2} \end{aligned} \quad (4.50)$$

Ενώ η σχέση 4.45 με χρήση των 4.48 4.49 τροποποιείται σε

$$\begin{aligned} A^T \vec{\psi}_{i-\frac{1}{2}} &= \left( -\frac{1}{2} A_{i-\frac{1}{2}}^{T-} \frac{x_i - x_{i-1}}{x_i - x_{i-2}} \right) \vec{\psi}_{i-2} + \left( \frac{1}{2} A_{i-\frac{1}{2}}^{T+} \frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} + A_{i-\frac{1}{2}}^{T-} \right) \vec{\psi}_{i-1} \\ &+ \left( \frac{1}{2} A_{i-\frac{1}{2}}^{T-} \frac{x_i - x_{i-1}}{x_i - x_{i-2}} + A_{i-\frac{1}{2}}^{T+} \right) \vec{\psi}_i + \left( -\frac{1}{2} A_{i-\frac{1}{2}}^{T+} \frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} \right) \vec{\psi}_{i+1} \end{aligned} \quad (4.51)$$

Υπενθυμίζεται ότι, στην παρούσα διπλωματική εργασία, έχουν επιλεγεί τα  $\Delta x$  να είναι ισαπέχοντα. Ωστόσο, οι τύποι γράφτηκαν στη παραπάνω μορφή για χάρη της γενικότητας (4.50, 4.51).

Επομένως, αν στη σχέση 4.43 αντικατασταθούν τα  $\vec{\psi}_{i+\frac{1}{2}}$  και  $\vec{\psi}_{i-\frac{1}{2}}$  με τις σχέσεις (4.50) και (4.51) αντίστοιχα, προκύπτει μια σχέση της παρακάτω μορφής που θα ισχύει για  $i = 3, \dots, z - 2$ :

$$\vec{R}_{\psi i} = b b e f_i \vec{\psi}_{i-2} + b e f_i \vec{\psi}_{i-1} + \text{diag}_i \vec{\psi}_i + a f t_i \vec{\psi}_{i+1} + a a f t_i \vec{\psi}_{i+2} - (p - p_{tar}) \left( \frac{\partial p}{\partial \vec{U}} \right)_i^T \Delta x_i = 0$$

Έτσι για τον υπολογισμό του μητρώου  $\frac{\partial \vec{R}_{\psi}}{\partial \vec{\psi}}$  στους εσωτερικούς κόμβους  $i = 3, \dots, z - 2$  από τη σχέση 4.52 προκύπτει:

$$\frac{\partial \vec{R}_{\psi i}}{\partial \vec{\psi}_{i-2}} = b b e f_i = -\frac{1}{2} A_{i-\frac{1}{2}}^{T-} \frac{x_i - x_{i-1}}{x_i - x_{i-2}} \quad (4.52)$$

$$\frac{\partial \vec{R}_{\psi i}}{\partial \vec{\psi}_{i-1}} = b e f_i = \frac{1}{2} A_{i+\frac{1}{2}}^{T-} \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1} - x_{i-1}} + \frac{1}{2} A_{i-\frac{1}{2}}^{T+} \frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} + A_{i-\frac{1}{2}}^{T-} \quad (4.53)$$

$$\frac{\partial \vec{R}_{\psi i}}{\partial \vec{\psi}_i} = -\frac{1}{2} A_{i+\frac{1}{2}}^{T+} \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+2} - x_i} - A_{i+\frac{1}{2}}^{T-} + \frac{1}{2} A_{i-\frac{1}{2}}^{T-} \frac{x_i - x_{i-1}}{x_i - x_{i-2}} + A_{i-\frac{1}{2}}^{T+} - T_u^T \Delta x_i \quad (4.54)$$

$$\frac{\partial \vec{R}_{\psi i}}{\partial \vec{\psi}_{i+1}} = a f t_i = -\frac{1}{2} A_{i+\frac{1}{2}}^{T-} \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1} - x_{i-1}} - A_{i+\frac{1}{2}}^{T+} - \left( \frac{1}{2} A_{i-\frac{1}{2}}^{T+} \frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} \right) \quad (4.55)$$

$$\frac{\partial \vec{R}_{\psi i}}{\partial \vec{\psi}_{i+2}} = aaft_i = \frac{1}{2} A_{i+\frac{1}{2}}^{T+} \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+2} - x_i} \quad (4.56)$$

ενώ ισχύει:

$$\frac{\partial \vec{R}_{\psi i}}{\partial \vec{\psi}_j} = 0 \quad , \quad j \neq i-2, i-1, i, i+1, i+2 \quad (4.57)$$

Όπου ο προσδιορισμός του μητρώου  $A_{i+\frac{1}{2}}^{+/-}$  και  $A_{i-\frac{1}{2}}^{+/-}$  παρουσιάστηκε αναλυτικά στο κεφάλαιο 2.

Οι σχέσεις που δόθηκαν παραπάνω, αναφέρονται στους εσωτερικούς κόμβους  $i = 3, \dots, z-2$ . Για τους κόμβους  $i = 1$  και  $i = z$  ισχύουν οι σχέσεις που δίνονται στην ενότητα επιβολής οριακών συνθηκών για πρώτης τάξης ακρίβεια. Επομένως, απομένει η καταγραφή των σχέσεων για τους εσωτερικούς κόμβους  $i = 2$  και  $i = z-1$ .

Για τον κόμβο  $i = 2$  δεν είναι δυνατόν να υπάρχει προ-προηγούμενος κόμβος, για αυτό θα έχουμε  $\vec{R}_{\psi}$  της μορφής:

$$\vec{R}_{\psi_2} = [bef_2 \vec{\psi}_1 + diag_2 \vec{\psi}_2 + aft_2 \vec{\psi}_3 + aaft_2 \vec{\psi}_4] - (p - p_{tar}) \left( \frac{\partial p}{\partial \vec{U}} \right)^T \Delta x_2 = 0 \quad (4.58)$$

Ουσιαστικά, η παραπάνω αλλαγή προέρχεται από αλλαγή στο διάνυσμα της συζυγούς μεταβλητής  $\vec{\psi}_{i-\frac{1}{2}}$ . Πιο αναλυτικά, όπως έχουμε ήδη αναφέρει για την εύρεση του  $\vec{R}_{\psi}$  κρίνεται απαραίτητη η χρήση των συζυγών μεταβλητών  $\vec{\psi}_{i+\frac{1}{2}}$  και  $\vec{\psi}_{i-\frac{1}{2}}$ . Ωστόσο, για τον κόμβο  $i = 2$  είναι αδύνατη η ύπαρξη του όρου  $\vec{\psi}_{i-2}$ , οπότε για να αποφευχθεί η παρουσία του παραπάνω όρου, θα χρησιμοποιηθεί αντί για κεντρικές διαφορές 2ης τάξης, το σχήμα πρόσω διαφόρισης πρώτης τάξης, όσον αφορά τον υπολογισμό της κλίσης  $(\frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x})_{i-1}$ .

Ακριβώς με την ίδια λογική, όσον αφορά τον κόμβο  $i = z - 1$ , λόγω απουσίας μεθεπόμενου κόμβου θα χρησιμοποιηθεί σχήμα πίσω διαφορίσης για τον υπολογισμό της κλίσης  $(\frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x})_{i+1}$ .

Επομένως, σύμφωνα με τα όσα αναφέρθηκαν το  $\vec{R}_{\psi_{z-1}}$  θα είναι της μορφής:

$$\vec{R}_{\psi_{z-1}} = bbf_{z-1} \vec{\psi}_{z-3} + bef_{z-1} \vec{\psi}_{z-2} + diag_{z-1} \vec{\psi}_{z-1} + a ft_{z-1} \vec{\psi}_z - (p - p_{tar}) \left( \frac{\partial p}{\partial \vec{U}} \right)^T \Delta x_{z-1} = 0$$

Σύμφωνα με τα όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, γίνεται σαφές πως προκύπτουν τα  $\vec{R}_{\psi}$  για τον κόμβο  $i = 2$  και  $i = z - 1$  αντίστοιχα. Επομένως, μπορούν να παρουσιαστούν οι παράγωγοι των συζυγών εξισώσεων για τους προαναφερθέντες κόμβους:

Κόμβος  $i = 2$ :

$$\frac{\partial \vec{R}_{\psi_2}}{\partial \vec{\psi}_1} = \frac{1}{2} A_{2+\frac{1}{2}}^{T-} \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} + \left[ \frac{1}{2} A_{2-\frac{1}{2}}^{T+} \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} + \frac{1}{2} A_{2-\frac{1}{2}}^{T-} \right] \quad (4.59)$$

$$\frac{\partial \vec{R}_{\psi_2}}{\partial \vec{\psi}_2} = -\frac{1}{2} A_{2+\frac{1}{2}}^{T+} \frac{x_3 - x_2}{x_4 - x_2} - A_{2+\frac{1}{2}}^{T-} + \left[ \frac{1}{2} A_{2-\frac{1}{2}}^{T-} + A_{2-\frac{1}{2}}^{T+} \right] - T_u^T \Delta x_2 \quad (4.60)$$

$$\frac{\partial \vec{R}_{\psi_2}}{\partial \vec{\psi}_3} = -\frac{1}{2} A_{2+\frac{1}{2}}^{T-} \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} - A_{2+\frac{1}{2}}^{T+} + \left[ -\frac{1}{2} A_{2-\frac{1}{2}}^{T+} \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \right] \quad (4.61)$$

$$\frac{\partial \vec{R}_{\psi_2}}{\partial \vec{\psi}_4} = \frac{1}{2} A_{2+\frac{1}{2}}^{T+} \frac{x_3 - x_2}{x_4 - x_2} \quad (4.62)$$



και :

$$\frac{\partial \vec{R}_{\psi_2}}{\partial \vec{\psi}_j} = 0 \quad , \quad j > 4 \quad (4.63)$$

Κόμβο  $i = z - 1$ :

$$\frac{\partial \vec{R}_{\psi_i}}{\partial \vec{\psi}_{i-2}} = -\frac{1}{2} A_{i-\frac{1}{2}}^{T-} \frac{x_i - x_{i-1}}{x_i - x_{i-2}} \quad (4.64)$$

$$\frac{\partial \vec{R}_{\psi_i}}{\partial \vec{\psi}_{i-1}} = \frac{1}{2} A_{i+\frac{1}{2}}^{T-} \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1} - x_{i-1}} + \left[ \frac{1}{2} A_{i-\frac{1}{2}}^{T+} \frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} + A_{i-\frac{1}{2}}^{T-} \right] \quad (4.65)$$

$$\frac{\partial \vec{R}_{\psi_i}}{\partial \vec{\psi}_i} = -\frac{1}{2} A_{i+\frac{1}{2}}^{T+} - A_{i+\frac{1}{2}}^{T-} + \left[ \frac{1}{2} A_{i-\frac{1}{2}}^{T-} \frac{x_i - x_{i-1}}{x_i - x_{i-2}} + A_{i-\frac{1}{2}}^{T+} \right] - T_u^T \Delta x_i \quad (4.66)$$

$$\frac{\partial \vec{R}_{\psi_i}}{\partial \vec{\psi}_{i+1}} = -\frac{1}{2} A_{i+\frac{1}{2}}^{T+} - \frac{1}{2} A_{i+\frac{1}{2}}^{T-} \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1} - x_{i-1}} + \left( -\frac{1}{2} A_{i-\frac{1}{2}}^{T+} \frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} \right) \quad (4.67)$$

και :

$$\frac{\partial \vec{R}_i}{\partial \vec{U}_j} = 0 \quad , \quad j < z - 3 \quad (4.68)$$

Με βάση τα παραπάνω προκύπτει ως συμπέρασμα ότι το μητρώο  $\frac{\partial \vec{R}_{\psi}}{\partial \vec{\psi}}$  είναι block πενταδιαγώνιο, με μηδενικό τον τρίτο υποπίνακα της πρώτης γραμμής και το  $z - 2$  υποπίνακα της  $z$  γραμμής (λόγω επιβολής οριακών συνθηκών πρώτης τάξης ακρίβειας). Το μη-

τρόπο με τα μη-μηδενικά και τα μηδενικά του στοιχεία έχει ως εξής :

$$\frac{\partial \vec{R}_\psi}{\partial \vec{\psi}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{R}_{\psi_1}}{\partial \psi_1} & \frac{\partial \vec{R}_{\psi_1}}{\partial \psi_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \vec{R}_{\psi_2}}{\partial \psi_1} & \frac{\partial \vec{R}_{\psi_2}}{\partial \psi_2} & \frac{\partial \vec{R}_{\psi_2}}{\partial \psi_3} & \frac{\partial \vec{R}_{\psi_2}}{\partial \psi_4} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \vec{R}_{\psi_3}}{\partial \psi_1} & \frac{\partial \vec{R}_{\psi_3}}{\partial \psi_2} & \frac{\partial \vec{R}_{\psi_3}}{\partial \psi_3} & \frac{\partial \vec{R}_{\psi_3}}{\partial \psi_4} & \frac{\partial \vec{R}_{\psi_3}}{\partial \psi_5} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \vec{R}_{\psi_4}}{\partial \psi_2} & \frac{\partial \vec{R}_{\psi_4}}{\partial \psi_3} & \frac{\partial \vec{R}_{\psi_4}}{\partial \psi_4} & \frac{\partial \vec{R}_{\psi_4}}{\partial \psi_5} & \frac{\partial \vec{R}_{\psi_4}}{\partial \psi_6} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial \vec{R}_{\psi_z}}{\partial \psi_{z-1}} & \frac{\partial \vec{R}_{\psi_z}}{\partial \psi_z} \end{bmatrix}$$

## 4.6 Επιλύτης συζυγούς προβλήματος.

Όπως ήδη τονίστηκε παραπάνω, στη συνεχή συζυγή μέθοδο η επίλυση της συζυγούς εξίσωσης (4.14) πραγματοποιείται με την τεχνική της χρονοπροέλασης. Σύμφωνα με τα όσα αναφέρθηκαν, ο τελεστής της συζυγούς εξίσωσης  $\vec{R}_\psi$  (επομένως και το μητρώο  $\frac{\partial \vec{R}_\psi}{\partial \vec{\psi}}$ ) μπορεί να διακριτοποιηθεί είτε με 1ης τάξης είτε με 2ης τάξης ακρίβεια.

Σε περίπτωση που υπολογιστεί με 1ης τάξης ακρίβεια, το μητρώο είναι τριδιαγώνιας μορφής, επομένως στόχος είναι η επίλυση ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων τριδιαγώνιας μορφής ( 3-διαγώνιος αλγόριθμος Thomas με εμπρός και πίσω αντικατάσταση). Ωστόσο, κάθε στοιχείο του μητρώου αντιστοιχεί σε ένα  $3 \times 3$  υπομητρώο (block). Επομένως, η επίλυση του block-τριδιαγώνιου συστήματος γίνεται χρησιμοποιώντας τον τροποποιημένο αλγόριθμο Thomas, ο οποίος μπορεί να διαχειρίζεται αντί για βαθμωτά μεγέθη υποπίνακες  $3 \times 3$ . Αυτό επιτυγχάνεται με διάσπαση σε πάνω και κάτω τριγωνικά μητρώα (παραγοντοποίηση LU).

Από την άλλη πλευρά, σε περίπτωση που το μητρώο  $\frac{\partial \vec{R}_\psi}{\partial \vec{\psi}}$  είναι δεύτερης τάξης ακρίβειας τότε είναι block πενταδιαγώνιας μορφής, επομένως στόχος είναι η επίλυση ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων πενταδιαγώνιας μορφής με εμπρός και πίσω αντικατάσταση. Ωστόσο, κάθε στοιχείο του μητρώου αντιστοιχεί σε ένα  $3 \times 3$  υπομητρώο (block). Επομένως, για την επίλυση των διακριτοποιημένων ροϊκών εξισώσεων, σε κάθε χρονικό βήμα, χρησιμοποιούμε επιλύτη block-πενταδιαγώνιων συστημάτων.

Έτσι, δημιουργείται ένας επαναληπτικός αλγόριθμος, με επαναλήψεις ή ορθότερα ψευδοχρονικά βήματα, όπου για κάθε ψευδοχρονική στιγμή οι διακριτοποιημένες εξισώσεις επιλύονται αναλυτικά (με μέθοδο παραγοντοποίησης ή με αλγόριθμο Thomas).



## Κεφάλαιο 5

# Σύγκριση Διακριτής και Συνεχούς Συζυγούς Μεθόδου

Στα δύο προηγούμενα κεφάλαια παρουσιάστηκαν οι τρόποι υπολογισμού της πρώτης παραγώγου με τη διακριτή και τη συνεχή συζυγή μέθοδο, για ψευδο-1Δ προβλήματα. Στο παρόν κεφάλαιο, στόχος είναι ναδειχθεί η διαφορά στις παραγώγους ευαισθησίας που υπολογίζουν οι δύο μέθοδοι έτσι ώστε να γίνει σαφής η ανάγκη ανάπτυξης της νέας μεθόδου που προτείνεται στην παρούσα διπλωματική εργασία.

Πιο αναλυτικά, θαδειχθεί ότι υπάρχει πλήρης ταύτιση αποτελεσμάτων μεταξύ της διακριτής συζυγούς τεχνικής και της ευθείας διαφόρισης κάτι που δεν ισχύει με αυτά της συνεχούς συζυγούς μεθόδου. Η συμβατότητα που, εκ των πραγμάτων, υπάρχει ανάμεσα στη διακριτή συζυγή μέθοδο και στη διακριτοποίηση του πρωτεύοντος προβλήματος είναι η αιτία για το πρώτο. Η έλλειψη τέτοιας συμβατότητας για τη συνεχή συζυγή μέθοδο είναι η αιτία για το δεύτερο. Αυτό, ακριβώς, επιχειρεί να διορθώσει η ιδέα που εδώ προτείνεται και υλοποιείται.

### 5.1 Πρόβλημα αντίστροφου σχεδιασμού με τις συζυγείς τεχνικές

Ο αντίστροφος σχεδιασμός αφορά την εύρεση της διαμήκους κατανομής της εγκάρσιας διατομής ενός ψευδο-1Δ υποηχητικού αγωγού, για τον οποίο επιθυμείται να δίνει

καθορισμένη κατανομή πίεσης  $p(x) = p_{tar}(x)$  καθόλο το μήκος αυτού, σε ροή με ισηντροπικό αριθμό Mach της εξόδου ίσο με  $M_{2, is} = 0.3$ . Η παραμετροποίηση της διατομής  $S(x)$  έγινε με χρήση πολυωνύμων Bezier. Ο αριθμός των σημείων ελέγχου είναι 11, με 9 τεταγμένες να αποτελούν τις ελεύθερες μεταβλητές σχεδιασμού, ενώ η πρώτη και η τελευταία τεταγμένη (που καθορίζουν τις διατομές στην είσοδο και την έξοδο του αγωγού) καθώς και όλες οι τετμημένες παρέμειναν σταθερές.

Για λόγους πληρότητας υπενθυμίζεται ότι η ανανέωση των τιμών των μεταβλητών σχεδιασμού γίνεται με τη μέθοδο της απότομης καθόδου σύμφωνα με τη σχέση:

$$\vec{b}^{n+1} = \vec{b}^n - \eta(\nabla F^n)$$

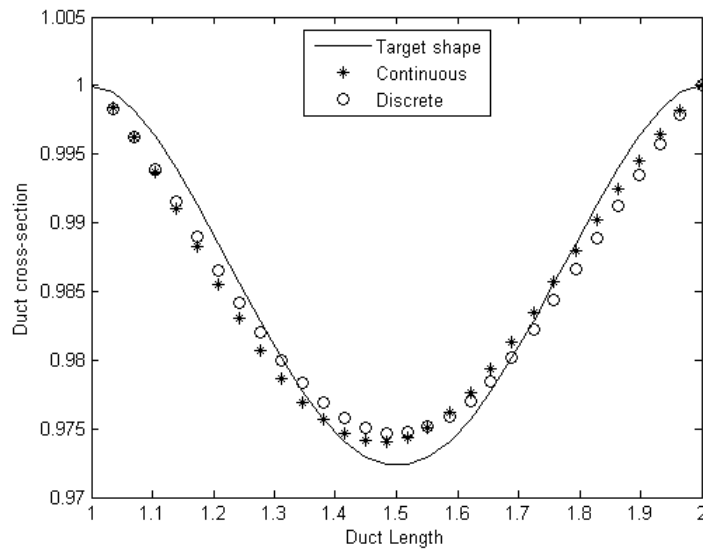
όπου  $\eta$  το βήμα της μεθόδου που καθορίζεται από το χρήστη.

Στη συνέχεια παρατίθενται για την ίδια τάξη ακρίβειας στην επίλυση του πρωτεύοντος προβλήματος, τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τις επιλύσεις στον συζυγών προβλημάτων. Στο σχήμα 5.1 παρουσιάζονται τρεις μορφολογίες του αγωγού. Με συνεχή γραμμή απεικονίζεται ο αγωγός-στόχος, με μαύρα αστεράκια τα αποτελέσματα της κλασικής συνεχούς συζυγούς μεθόδου, ενώ με άσπρα κυκλάκια αυτά της διακριτής, και τα δύο στον πέμπτο κύκλο της διαδικασίας βελτιστοποίησης. Στο σχήμα 5.2 απεικονίζεται η κατανομή πίεσης για τις μορφολογίες του σχήματος 5.1 για τη συνεχή (μαύρα αστεράκια) και διακριτή συζυγή μέθοδο (άσπρα κυκλάκια), ενώ με συνεχή γραμμή η κατανομή της πίεσης-στόχου.

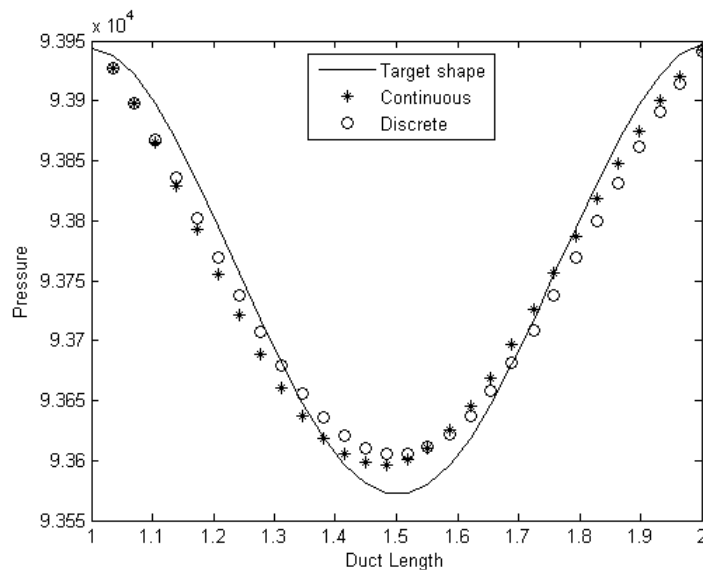
Στο σχήμα 5.3 παρουσιάζονται οι τιμές των πρώτων παραγώγων της συνάρτησης στόχου ως προς τα σημεία ελέγχου. Με συνεχή γραμμή απεικονίζονται οι τιμές με τη μέθοδο της ευθείας διαφόρισης, με μαύρα κυκλάκια αυτές με την διακριτή και με μαύρες κουκίδες αυτές με τη συνεχή συζυγή μέθοδο με σχήματα διακριτοποίησης δεύτερης τάξης. Οι τιμές που παρουσιάζονται προέκυψαν για έναν κύκλο βελτιστοποίησης με αρχή την ίδια γεωμετρία καθώς τα αποτελέσματα αυτά θα συγκριθούν αργότερα με αυτά της νέας συζυγούς μεθόδου.

Στο σχήμα 5.3 γίνεται εμφανής η μειωμένη ακρίβεια της συνεχούς συζυγούς μεθόδου σε σχέση με τη διακριτή. Το αποτέλεσμα αυτό είναι λογικό, ενώ στο επόμενο κεφάλαιο θα παρουσιασθεί αναλυτικά πως μπορεί να επιτευχθεί η ακρίβεια της διακριτής συζυγούς μεθόδου εφαρμόζοντας τη συνεχή συζυγή μέθοδο που εδώ προτείνεται.

Στο σχήμα 5.4 παρουσιάζεται η τιμή του δεκαδικού λογάριθμου της συνάρτησης-στόχου σε σχέση με τον αριθμό των επαναλήψεων για τη διακριτή και τη συνεχή συζυγή μέθοδο. Το βήμα  $\eta$  της μεθόδου επιλέχθηκε να είναι  $5 \cdot 10^{-8}$ , κοινό και για τις δύο μεθόδους. Φαίνεται ότι παρότι τελικά (αναπόφευκτα, για ένα τέτοιο πρόβλημα) και οι

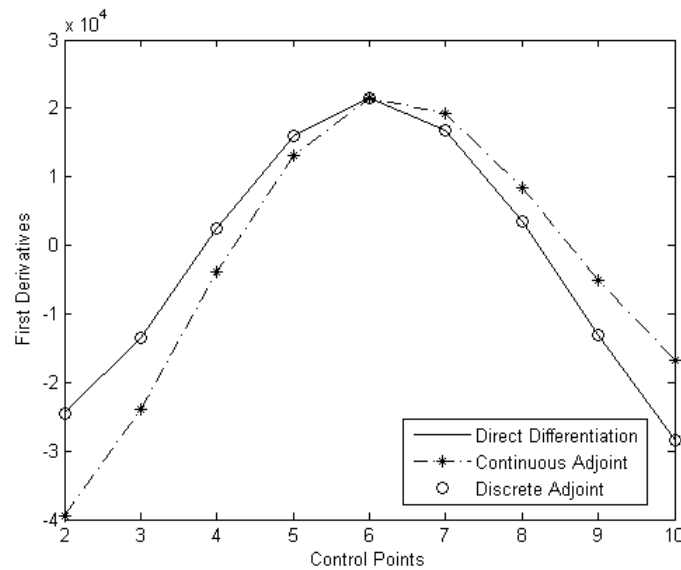


**Σχήμα 5.1:** Οριζόντιος άξονας: μήκος του αγωγού. Κατακόρυφος άξονας: διατομή  $S$  του αγωγού. Η επιθυμητή διαμόρφωση του αγωγού-στόχου (*Target shape*), μαζί με τα αποτελέσματα του πέμπτου κύκλου της βελτιστοποίησης για τη διακριτή (άσπρα κυκλάκια) και τη συνεχή συζυγή μέθοδο (αστεράκια).

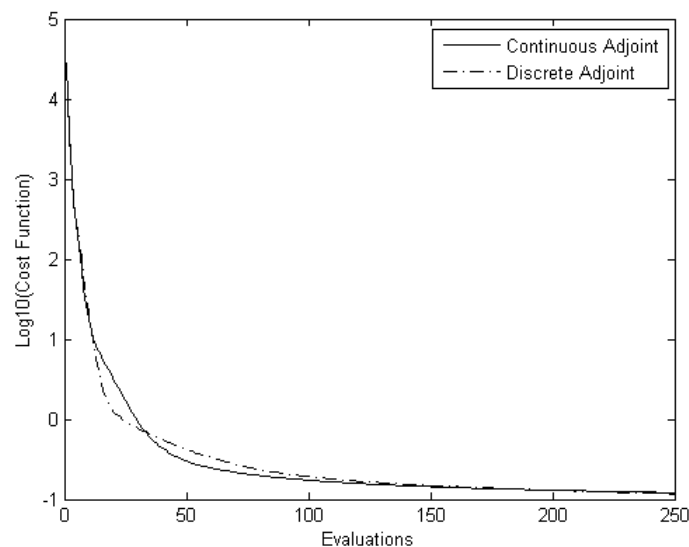


**Σχήμα 5.2:** Οριζόντιος άξονας: μήκος του αγωγού. Κατακόρυφος άξονας: στατική πίεση. Η επιθυμητή κατανομή πίεσης-στόχου (*Target distribution*), μαζί με τα αποτελέσματα του πέμπτου κύκλου της βελτιστοποίησης για τη διακριτή (άσπρα κυκλάκια) και τη συνεχή συζυγή μέθοδο (αστεράκια).

δυσο μέθοδοι συγχλίνουν στην ίδια πρακτικά λύση, ακολουθούν διαφορετικές πορείες το οποίο είναι αποτέλεσμα των διαφορετικών παραγώγων που υπολογίζονται από αυτές.



**Σχήμα 5.3:** Οριζόντιος άξονας: αύξων αριθμός μεταβλητών σχεδιασμού. Κατακόρυφος άξονας: τιμές πρώτων παραγώγων της συνάρτησης - στόχου ως προς τα σημεία ελέγχου. Οι παράγωγοι υπολογισμένες με ευθεία διαφοράριση (συνεχής γραμμή), με τη διακριτή συζυγή τεχνική (άσπρα κυκλάκια) και με χρήση της συνεχούς συζυγούς τεχνικής (αστεράκια). Οι παράγωγοι που παρουσιάζονται αναφέρονται στη γεωμετρία, όπως αυτή φαίνεται στο σχήμα 5.1 και η οποία είναι μακριά από το στόχο.



**Σχήμα 5.4:** Πορεία σύγκλισης με τη μέθοδο της απότομης καθόδου για τη διακριτή και τη συνεχή συζυγή μέθοδο, με ίδιο βήμα καθόδου  $\eta$ . Οριζόντιος άξονας: αριθμός κύκλων της βελτιστοποίησης, καθένας από τους οποίους αντιστοιχεί σε μια επίλυση του ευθέως προβλήματος και μια επίλυση του συζυγούς προβλήματος. Κατακόρυφος άξονας: δεκαδικός λογάριθμος της τιμής της συνάρτησης στόχου.



## 5.2 Σχετικά πλεονεκτήματα των δύο μεθόδων

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιασθούν συγκεντρωτικά τα πλεονεκτήματα της διακριτής και της συνεχούς συζυγούς μεθόδου [16] έτσι ώστε στη συνέχεια να γίνει σαφής η αξία της νέας μεθόδου που προτείνεται.

Τα πλεονεκτήματα της διακριτής συζυγούς μεθόδου είναι:

- Η επίτευξη της ' ακριβούς ' εύρεσης στις τιμές των παραγώγων υπό την έννοια ότι οι παράγωγοι είναι απόλυτα συμβατές με τη διακριτοποίηση του προτεύοντος προβλήματος. Αυτό εξασφαλίζει ότι η διαδικασία της βελτιστοποίησης μπορεί να συγκλίνει πλήρως. Παρέχει επίσης έναν βολικό έλεγχο για την ορθότητα του κώδικα σε προγραμματιστικό επίπεδο. Με τη συνεχή συζυγή μέθοδο, ένα μικρό λάθος μπορεί να είναι είτε από ανακρίβεια στην εύρεση της παραγώγου είτε από πιθανό προγραμματιστικό σφάλμα.
- Η δημιουργία του κώδικα επίλυσης του συζυγούς προβλήματος μπορεί "θεωρητικά" να γίνει πολύ απλή. Στο μέλλον, στόχος είναι η αυτόματη δημιουργία συζυγών προγραμμάτων χρησιμοποιώντας λογισμικά αυτόματης διαφορίσης.
- Η συγκεκριμένη τεχνική έχει το πλεονέκτημα ότι οι ιδιοτιμές του μητρώου  $\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}}$  είναι ίδιες και στο αριστερό μέλος της διακριτής συζυγής εξίσωσης αλλά και στην επίλυση της ροής.

Τα πλεονεκτήματα της συνεχούς συζυγούς μεθόδου είναι:

- Η φυσική σημασία των συζυγών μεταβλητών και ο ρόλος των συζυγών οριακών συνθηκών είναι σαφέστερος. Μόνο με την εποπτεία των συζυγών εξισώσεων ροής γίνεται κατανοητή η φυσική σημασία των αποτελεσμάτων.
- Ο προγραμματισμός απαιτεί λιγότερη μνήμη. Επειδή η διακριτοποίηση των συζυγών μερικών διαφορικών εξισώσεων μπορεί να επιτευχθεί με διαφορετικούς τρόπους, ο προγραμματισμός της συνεχούς συζυγούς μεθόδου μπορεί να γίνει πολύ απλούστερος, αν ασφαλώς παρακάμψουμε θέματα ασυμβατότητας.

Στόχος του επόμενου κεφαλαίου και της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η ανάπτυξη της θεωρίας και του συλλογισμού που ακολουθήθηκε, με στόχο την εύρεση των πρώτων παραγώγων, με την ακρίβεια της διακριτής μεθόδου. Ουσιαστικά επιχειρήθηκε να αναπτυχθεί μια νέα συζυγής μέθοδος βελτιστοποίησης στην αεροδυναμική, η οποία θα εκμεταλλεύεται τα πλεονεκτήματα των δύο υπάρχουσών μεθόδων.



# Κεφάλαιο 6

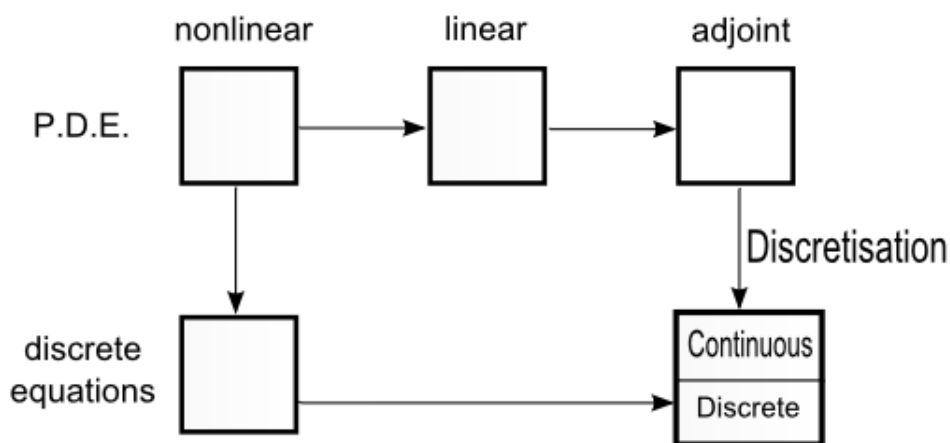
## Συμβατή διακριτοποίηση των συζυγών εξισώσεων - Η νέα συνεχής συζυγής μέθοδος

### 6.1 Εισαγωγικά σχόλια

Στα δύο προηγούμενα κεφάλαια παρουσιάστηκαν δύο διαφορετικοί τρόποι εύρεσης της πρώτης παραγώγου για το πρόβλημα αντίστροφου σχεδιασμού ψευδο-1Δ αγωγού. Σύμφωνα με το σχήμα 6.1 [16], η διακριτή συζυγής μέθοδος αρχίζει με διακριτοποίηση των μη γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων (ΜΔΕ), οι οποίες έπειτα γραμμικοποιούνται και επιλύονται αριθμητικά. Με τη συνεχή συζυγή μέθοδο, η διακριτοποίηση των εξισώσεων είναι το τελευταίο βήμα, αφού πρώτα εξαχθούν οι συζυγείς ΜΔΕ.

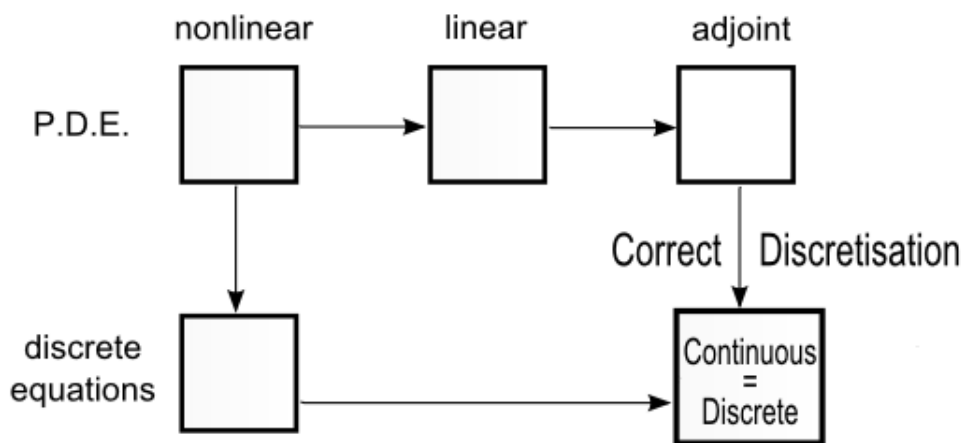
Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο θα παρουσιασθεί μια νέα συνεχή συζυγής μέθοδος, η οποία δανείζεται στοιχεία και από τη διακριτή συζυγή μέθοδο, έχοντας ως στόχο να επιτευχθεί η ακρίβεια των αποτελεσμάτων της διακριτής μεθόδου μιας και διατηρεί απόλυτη συμβατότητα με το σχήμα διακριτοποίησης του πρωτεύοντος προβλήματος.

Πιο αναλυτικά, σύμφωνα με το σχήμα 6.2 η νέα μέθοδος στον τομέα της αεροδυναμικής βελτιστοποίησης ουσιαστικά αφορά μια παραλλαγή της συνεχούς συζυγούς μεθόδου στην οποία επιβάλλονται νέες οριακές συνθήκες και μια συμβατή διακριτοποίηση των συζυγών εξισώσεων στους εσωτερικούς κόμβους. Στο παρόν κεφάλαιο, θα αναπτυ-



Σχήμα 6.1: Διαφορετικοί τρόποι προσέγγισης της δημιουργίας των συζυγών εξισώσεων.

χθεί η προτεινόμενη συζυγής τεχνική, θα παρουσιασθούν οι τροποποιημένες οριακές συνθήκες, για σχήματα διακριτοποίησης τόσο για πρώτης όσο και για δεύτερης τάξης ακρίβειας ενώ στο τέλος θα παρουσιασθούν τα αποτελέσματα που δείχνουν τη βελτίωση στην ακρίβεια υπολογισμού της πρώτης παραγώγου της αντικειμενικής συνάρτησης.



Σχήμα 6.2: Νέος τρόπος προσέγγισης της συνεχούς συζυγούς μεθόδου.

Η παρούσα διπλωματική εργασία εστιάζει ουσιαστικά στο «σωστό» τρόπο διακριτοποίησης ("Correct Discretisation") κατά τη μετάβαση από τις συζυγείς ΜΔΕ στη διακριτή, έτοιμη προς αριθμητική επίλυση, μορφή τους.

## 6.2 Υπολογισμός παραγώγου. Διακριτοποίηση πρώτης τάξης ακρίβειας.

Η συνάρτηση στόχος κοινή προφανώς για τη συνεχή και τη διακριτή μέθοδο, δίνεται από τη σχέση:

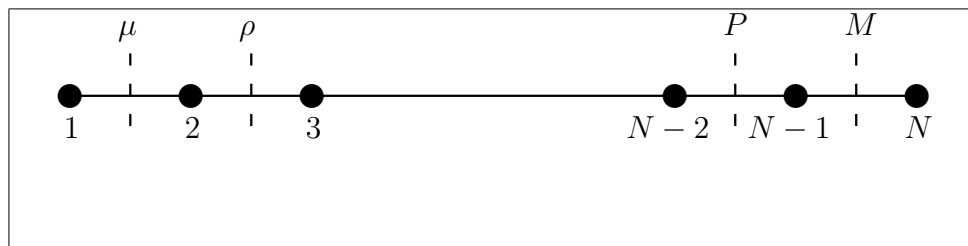
$$F(\vec{U}, \vec{b}) = \frac{1}{2} \int_{(L)} (p(x) - p_{tar}(x))^2 dx$$

όπου η ολοκλήρωση γίνεται σε όλο το μήκος του αγωγού το οποίο είναι γνωστό και σταθερό.

Η μεταβολή της συνάρτησης στόχου θα είναι:

$$\begin{aligned} \delta F(\vec{U}, \vec{b}) &= \frac{\partial F}{\partial \vec{U}} \delta \vec{U} + \frac{\partial F}{\partial \vec{b}} \delta \vec{b} = \\ &= \int_{(L)} (p(x) - p_{tar}(x)) \frac{\partial p}{\partial \vec{U}} \delta \vec{U} dx + \frac{1}{2} \int_{(L)} (p(x) - p_{tar}(x))^2 \delta(dx) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Ορίζονται δύο μεσόκομβοι  $\mu$  και  $M$  (πρώτος και τελευταίος) σύμφωνα με το Σχήμα 6.3 τα οποία αντιστοιχούν στα σημεία  $\frac{\Delta x}{2}$  και  $1 - \frac{\Delta x}{2}$  αντίστοιχα, για αγωγό μοναδιαίου μήκους διακριτοποιημένο με ισαπέχοντες κόμβους.



Σχήμα 6.3: Ισαπέχοντες κόμβοι πλέγματος.

Τότε, η εξίσωση 6.1 διατυπώνεται και στην ψευδο-διακριτή μορφή:

$$\int_{(L)} \delta \vec{U}^T (p(x) - p_{tar}(x)) \left( \frac{\partial p}{\partial \vec{U}} \right)^T dx = \int_{\mu}^M \delta \vec{U}^T (p(x) - p_{tar}(x)) \left( \frac{\partial p}{\partial \vec{U}} \right)^T dx +$$

$$\delta \vec{U}_1^T (p_1(x) - p_{tar1}(x)) \left( \frac{\partial p_1}{\partial \vec{U}_1} \right)^T \frac{\Delta x}{2} + \delta \vec{U}_N^T (p_N(x) - p_{tarN}(x)) \left( \frac{\partial p_N}{\partial \vec{U}_N} \right)^T \frac{\Delta x}{2} \quad (6.2)$$

Εισάγοντας τις συζυγείς μεταβλητές, η μεταβολή της επαυξημένης συνάρτησης στόχου είναι:

$$\delta F_{aug} = \delta F + \int_{(L)} \vec{\psi}^T \left( \frac{\partial(\delta \vec{f})}{\partial x} - \delta \vec{q} \right) dx \quad (6.3)$$

όπου παραλείφθηκε ο ψευδοχρονικός όρος των εξισώσεων ροής. Επιπλέον, επειδή το πρόβλημα μας είναι 1Δ με σταθερούς κόμβους, αντί να χρησιμοποιηθεί ο όρος  $\delta \left( \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} \right)$  χρησιμοποιείται ο όρος  $\frac{\partial(\delta \vec{f})}{\partial x}$ .

Τέλος, ο ομογενής όρος της εξίσωσης 6.3 αναπτύσσεται ως εξής:

$$\delta \vec{q} = \frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{U}} \delta \vec{U} + \frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{b}} \delta \vec{b} = T_u \delta \vec{U} + T_b \delta \vec{b} \quad (6.4)$$

Επομένως η εξίσωση 6.3 τροποποιείται ως εξής:

$$\delta F_{aug} = \delta F + \int_{(L)} \vec{\psi}^T \left( \frac{\partial(\delta \vec{f})}{\partial x} - T_u \delta \vec{U} - T_b \delta \vec{b} \right) dx \quad (6.5)$$

όπου το μητρώο  $T_b = \frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{b}}$  εξαρτάται από την παραμετροποίηση της κατανομής της διατομής  $S(x)$  και ισούται με:

$$\left[ \frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{b}} \right]_i = \left[ \frac{1}{S^2} \frac{dS}{dx} \frac{dS}{d\vec{b}} - \frac{1}{S} \frac{d}{d\vec{b}} \left( \frac{dS}{dx} \right) \right]_i \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 \\ u(\rho E + p) \end{bmatrix}_i \quad (6.6)$$

ενώ το μητρώο  $T_u = \frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{U}}$  είναι:

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{U}} = -\frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -u^2 & 2u & 0 \\ -\gamma u E + (\gamma - 1)u^3 & \gamma E - \frac{3}{2}(\gamma - 1)u^2 & \gamma u \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

Ο πρώτος όρος στο δεξί μέλος της 6.5, ο οποίος αντιστοιχεί στη μεταβολή της πραγματικής συνάρτησης στόχου, έχει ήδη αναλυθεί στη σχέση 6.1, ενώ ο δεύτερος όρος, ο οποίος εκφράζει τον περιορισμό να ικανοποιούνται οι εξισώσεις ροής, αναπτύσσεται με βάση το θεώρημα Green-Gauss. Επίσης γίνεται και η χρήση της σχέσης  $\frac{\partial A}{\partial \vec{b}} \vec{U} = \vec{0}$  όπως αποδεικνύεται στο Παράρτημα Γ'. Έτσι προκύπτει:

$$\int_{(L)} \vec{\psi}^T \left( \frac{\partial(\delta \vec{f})}{\partial x} - T_u \delta \vec{U} - T_b \delta \vec{b} \right) dx =$$

$$\int_{(L)} \left( \frac{\partial(\vec{\psi}^T \delta \vec{f})}{\partial x} - \delta \vec{f}^T \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} - \vec{\psi}^T T_u \delta \vec{U} - \vec{\psi}^T T_b \delta \vec{b} \right) dx$$

Χρησιμοποιώντας μια ψευδοδιακριτή γραφή και εμπλέκοντας τους μεσόκομβους  $\mu$  και  $M$ , όμοια με τη μεταβολή της συνάρτησης στόχου, προκύπτει ότι:

$$\int_{(L)} \vec{\psi}^T \delta \vec{R} dx = \int_{\mu}^M \vec{\psi}^T \delta \vec{R} dx + \vec{\psi}_1^T \left( \frac{\partial \vec{R}_1}{\partial \vec{U}_1} \delta \vec{U}_1 + \frac{\partial \vec{R}_1}{\partial \vec{U}_2} \delta \vec{U}_2 \right) \frac{\Delta x}{2}$$

$$+ \vec{\psi}_N^T \left( \frac{\partial \vec{R}_N}{\partial \vec{U}_N} \delta \vec{U}_N + \frac{\partial \vec{R}_N}{\partial \vec{U}_{N-1}} \delta \vec{U}_{N-1} \right) \frac{\Delta x}{2} \quad (6.8)$$

γνωρίζοντας ότι σε ακρίβεια πρώτης τάξης, οι ισχύουσες εξισώσεις στα δύο άκρα ε-

ίνα  $\vec{R}_1(\vec{U}_1, \vec{U}_2) = 0$  και  $\vec{R}_N(\vec{U}_N, \vec{U}_{N-1}) = 0$ . Επιπλέον ο όρος  $\int_{\mu}^M \vec{\psi}^T \delta \vec{R} dx$  γράφεται:

$$\int_{\mu}^M \vec{\psi}^T \delta \vec{R} dx = [\vec{\psi}^T A \delta \vec{U}]_M - [\vec{\psi}^T A \delta \vec{U}]_{\mu} - \int_{\mu}^M \left( \delta \vec{U}^T A^T \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} + \vec{\psi}^T T_u \delta \vec{U} + \vec{\psi}^T T_b \delta \vec{b} \right) dx \quad (6.9)$$

Από τους συντελεστές των  $\delta \vec{U}^T$  των εξισώσεων 6.2, 6.9 και εισάγοντας τους επόμενους δύο μεσόκομβους  $\rho$  και  $P$ , που αντιστοιχούν στις θέσεις  $\frac{3\Delta x}{2}$  και  $1 - \frac{3\Delta x}{2}$  προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} & \int_{\mu}^M \delta \vec{U}^T \left[ (p(x) - p_{tar}(x)) \left( \frac{\partial p}{\partial \vec{U}} \right)^T - A^T \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} - T_u^T \vec{\psi} \right] \\ &= \int_{\rho}^P \delta \vec{U}^T \left[ (p(x) - p_{tar}(x)) \left( \frac{\partial p}{\partial \vec{U}} \right)^T - A^T \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} - T_u^T \vec{\psi} \right] \\ &+ \delta \vec{U}_2^T \left[ (p(x) - p_{tar}(x)) \left( \frac{\partial p}{\partial \vec{U}} \right)^T - A^T \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} - T_u^T \vec{\psi} \right]_2 \Delta x \\ &+ \delta \vec{U}_{N-1}^T \left[ (p(x) - p_{tar}(x)) \left( \frac{\partial p}{\partial \vec{U}} \right)^T - A^T \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} - T_u^T \vec{\psi} \right]_{N-1} \Delta x \quad (6.10) \end{aligned}$$

Εισάγοντας τις σχέσεις 6.2, 6.8, 6.10 στη σχέση 6.3 προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \delta F_{aug} &= \int_{\rho}^P \delta \vec{U}^T \left[ (p(x) - p_{tar}(x)) \left( \frac{\partial p}{\partial \vec{U}} \right)^T - A^T \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} - T_u^T \vec{\psi} \right] dx \\ &- \int_{(L)} \vec{\psi}^T T_b \delta \vec{b} dx + [\vec{\psi}^T A \delta \vec{U}]_M - [\vec{\psi}^T A \delta \vec{U}]_{\mu} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \delta \vec{U}_1^T (p_1(x) - p_{tar1}(x)) \left( \frac{\partial p_1}{\partial \vec{U}_1} \right)^T \frac{\Delta x}{2} + \delta \vec{U}_N^T (p_N(x) - p_{tarN}(x)) \left( \frac{\partial p_N}{\partial \vec{U}_N} \right)^T \frac{\Delta x}{2} \\
& + \vec{\psi}_1^T \left( \frac{\partial \vec{R}_1}{\partial \vec{U}_1} \delta \vec{U}_1 + \frac{\partial \vec{R}_1}{\partial \vec{U}_2} \delta \vec{U}_2 \right) \frac{\Delta x}{2} + \vec{\psi}_N^T \left( \frac{\partial \vec{R}_N}{\partial \vec{U}_N} \delta \vec{U}_N + \frac{\partial \vec{R}_N}{\partial \vec{U}_{N-1}} \delta \vec{U}_{N-1} \right) \frac{\Delta x}{2} \\
& + \delta \vec{U}_2^T \left[ (p(x) - p_{tar}(x)) \left( \frac{\partial p}{\partial \vec{U}} \right)^T - A^T \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} - T_u^T \vec{\psi} \right] \Big|_2 \Delta x \\
& + \delta \vec{U}_{N-1}^T \left[ (p(x) - p_{tar}(x)) \left( \frac{\partial p}{\partial \vec{U}} \right)^T - A^T \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} - T_u^T \vec{\psi} \right] \Big|_{N-1} \Delta x \quad (6.11)
\end{aligned}$$

Έτσι η μεταβολή της επαυξημένης συνάρτησης στόχου έχει τροποποιηθεί σε σχέση με αυτή της κλασικής συνεχούς συζυγούς μεθόδου (σχέση 4.8) η οποία διατυπώνεται παρακάτω για λόγους σύγκρισης.

$$\begin{aligned}
\delta F_{aug} &= \int_{(L)} \vec{\psi}^T T_b \delta \vec{b} dx - [\vec{\psi}^T A \delta \vec{U}]_{out} + [\vec{\psi}^T A \delta \vec{U}]_{in} + \\
& \int_{(L)} \delta \vec{U}^T \left[ (p(x) - p_{tar}(x)) \left( \frac{\partial p}{\partial \vec{U}} \right)^T + A^T \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} + T_u^T \vec{\psi} \right] dx \quad (6.12)
\end{aligned}$$

Είναι βασικό να γίνει η μεταβολή της συνάρτησης στόχου ανεξάρτητη οποιασδήποτε μεταβολής  $\delta \vec{U}$  του πεδίου ροής. Επομένως, από την εξίσωση 6.11, η ποσότητα που περιέχει το  $\delta \vec{U}$  στους εσωτερικούς κόμβους  $2 \leq i \leq N-1$  αποτελεί το βασικό τμήμα της συζυγούς εξίσωσης που είναι η:

$$\begin{aligned}
\int_{\rho}^P \delta \vec{U}^T \left[ (p(x) - p_{tar}(x)) \left( \frac{\partial p}{\partial \vec{U}} \right)^T - A^T \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} - T_u^T \vec{\psi} \right] dx = 0 \implies \\
\left[ -A^T \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} - T_u^T \vec{\psi} + (p(x) - p_{tar}(x)) \left( \frac{\partial p}{\partial \vec{U}} \right)^T \right] = 0 \quad (6.13)
\end{aligned}$$

Από τη παραπάνω σχέση γίνεται εμφανές ότι η συζυγής εξίσωση είναι μια διανυσματική εξίσωση, δηλαδή ένα σύστημα τριών μερικών διαφορικών εξισώσεων με αγνώστους τα  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  σε κάθε κόμβο. Συνεπώς, το σύστημα των συνήθων διαφορικών εξισώσεων για τις συζυγείς μεταβλήτες, αφού σε αυτό προστεθεί ο χρονικός όρος για τη διατύπωση ενός χωρο-χρονικά υπερβολικού προβλήματος, γράφεται:

$$\frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} - \left[ -A^T \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} + -T_u^T \vec{\psi} + (p(x) - p_{tar}(x)) \left( \frac{\partial p}{\partial \vec{U}} \right)^T \right] = 0 \quad (6.14)$$

### 6.2.1 Διακριτοποίηση του όρου $-A^T \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x}$

Πριν τη μετάβαση στις οριακές συνθήκες και στην εύρεση των παραγώγων ευαισθησίας παρουσιάζεται η διακριτοποίηση του όρου  $-A^T \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x}$  σε κάθε εσωτερικό κόμβο  $i$ , δηλαδή για  $2 \leq i \leq N-1$ , η οποία θα είναι χρήσιμη για την εύρεση των οριακών συνθηκών.

Για την εύρεση της διακριτοποιημένης μορφής του όρου  $-A^T \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x}$  χρησιμοποιείται η σχέση  $A = A^+ + A^-$ , που αντιστοιχεί στη μέθοδο διαχωρισμού των διανυσμάτων ροής (Flux Vector Splitting ή FVS) και έτσι προκύπτει ότι:

$$-A^T \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} \Big|_i = -A^{T+} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} \Big|_i - A^{T-} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} \Big|_i \quad (6.15)$$

όπου οι όροι  $-A^{T+} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x}$  και  $-A^{T-} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x}$  αναπτύσσοντας τους με ανάπτυγμα Taylor πάνω στους μεσόκομβους, είναι:

$$-A^{T+} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} \Big|_i = -A^{T+}_{i+\frac{1}{2}} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2}} - \frac{\partial}{\partial x} \left( -A^{T+} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}} \frac{\Delta x}{2} \quad (6.16)$$

Για πρώτης τάξης ακρίβεια προκύπτει:

$$-A^{T+} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} \Big|_i = -A^{T+}_{i+\frac{1}{2}} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2}} = -A^{T+}_{i+\frac{1}{2}} \frac{\psi_{i+1} - \psi_i}{\Delta x} \quad (6.17)$$

Αντίστοιχα για τον όρο  $-A^{T-} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x}$  το ανάπτυγμα Taylor δίνει:

$$-A^{T-} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} \Big|_i = -A^{T-}_{i-\frac{1}{2}} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} \Big|_{i-\frac{1}{2}} + \frac{\partial}{\partial x} \left( -A^{T-} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} \right)_{i-\frac{1}{2}} \frac{\Delta x}{2} \quad (6.18)$$

όπου, για πρώτη τάξη ακρίβεια, παραμένει ότι:

$$-A^{T-} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} \Big|_i = -A_{i-\frac{1}{2}}^{T-} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} \Big|_{i-\frac{1}{2}} = -A_{i-\frac{1}{2}}^{T-} \frac{\psi_i - \psi_{i-1}}{\Delta x} \quad (6.19)$$

Τελικά, σύμφωνα με τις σχέσεις 6.17, 6.19, η σχέση 6.15 διακριτοποιείται στη μορφή:

$$-A^T \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} \Big|_i = \frac{1}{\Delta x} \left[ A_{i-\frac{1}{2}}^{T-} \psi_{i-1} + \left( A_{i+\frac{1}{2}}^{T+} - A_{i-\frac{1}{2}}^{T-} \right) \psi_i + -A_{i+\frac{1}{2}}^{T+} \psi_{i+1} \right] \quad (6.20)$$

Ένας εναλλακτικός τρόπος για τη διακριτοποίηση του όρου  $-A^T \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x}$  βασίζεται, στο θεώρημα Green-Gauss. Δηλαδή, ο όρος  $-A^T \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x}$  γράφεται:

$$-A^T \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} (A^T \vec{\psi}) + \frac{\partial A^T}{\partial x} \vec{\psi} \quad (6.21)$$

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση 6.15 ανάμεσα στους μεσόκομβους  $i-\frac{1}{2}$  έως  $i+\frac{1}{2}$ , δηλαδή τα όρια ενός πεπερασμένου όγκου, προκύπτει:

$$-\int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} A^T \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} dx = -\int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x} (A^T \vec{\psi}) dx + \int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \frac{\partial A^T}{\partial x} \vec{\psi} dx \quad (6.22)$$

Ο πρώτος όρος από το δεξί μέλος της εξίσωσης 6.22 με χρήση της μεθόδου Flux Vector Splitting (FVS) καθώς και εφαρμογή σχήματος κεντρικών διαφορών μπορεί να γραφεί:

$$\begin{aligned} -\int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x} (A^T \vec{\psi}) dx &= -\frac{\left[ (A^T \vec{\psi})_{i+\frac{1}{2}} - (A^T \vec{\psi})_{i-\frac{1}{2}} \right]}{\Delta x} \Delta x \\ &= -\left[ A_{i+\frac{1}{2}}^{T+} \vec{\psi}_{i+1} + A_{i+\frac{1}{2}}^{T-} \vec{\psi}_i - A_{i-\frac{1}{2}}^{T+} \vec{\psi}_i - A_{i-\frac{1}{2}}^{T-} \vec{\psi}_{i-1} \right] \\ &= -A_{i+\frac{1}{2}}^{T+} \vec{\psi}_{i+1} + (A_{i+\frac{1}{2}}^{T-} - A_{i-\frac{1}{2}}^{T+}) \vec{\psi}_i + -A_{i-\frac{1}{2}}^{T-} \vec{\psi}_{i-1} \end{aligned} \quad (6.23)$$

Το υπολογιστικό stencil της σχέσης 6.23 στον πεπερασμένο όγκο του κόμβου  $i$  γράφε-

ται:

	$\vec{\psi}_{i-1}$	$\vec{\psi}_i$	$\vec{\psi}_{i+1}$
$A_{i+\frac{1}{2}}^{T+}$	0	0	-1
$A_{i+\frac{1}{2}}^{T-}$	0	-1	0
$A_{i-\frac{1}{2}}^{T+}$	0	+1	0
$A_{i-\frac{1}{2}}^{T-}$	+1	0	0

Η διακριτοποίηση του δεύτερου όρου από το δεξί μέλος της εξίσωσης 6.22, εφαρμόζοντας κεντρικές διαφορές για την παράγωγο γράφεται:

$$\begin{aligned} \int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \frac{\partial A^T}{\partial x} \vec{\psi} dx &= \left. \frac{\partial A^T}{\partial x} \vec{\psi} \right|_i \Delta x = \frac{A_{i+\frac{1}{2}}^T - A_{i-\frac{1}{2}}^T}{\Delta x} \vec{\psi}_i \Delta x \\ &= (A_{i+\frac{1}{2}}^{T+} + A_{i+\frac{1}{2}}^{T-} - A_{i-\frac{1}{2}}^{T+} - A_{i-\frac{1}{2}}^{T-}) \vec{\psi}_i \end{aligned} \quad (6.24)$$

Αντίστοιχα σε μορφή πίνακα η σχέση 6.24 γράφεται:

	$\vec{\psi}_{i-1}$	$\vec{\psi}_i$	$\vec{\psi}_{i+1}$
$A_{i+\frac{1}{2}}^{T+}$	0	+1	0
$A_{i+\frac{1}{2}}^{T-}$	0	+1	0
$A_{i-\frac{1}{2}}^{T+}$	0	-1	0
$A_{i-\frac{1}{2}}^{T-}$	0	-1	0

Υπερθέτοντας, με βάση τη σχέση 6.21, ο όρος  $-A^T \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x}$  σε μορφή πίνακα γράφεται:

	$\vec{\psi}_{i-1}$	$\vec{\psi}_i$	$\vec{\psi}_{i+1}$
$A_{i+\frac{1}{2}}^{T+}$	0	+1	-1
$A_{i+\frac{1}{2}}^{T-}$	0	0	0
$A_{i-\frac{1}{2}}^{T+}$	0	0	0
$A_{i-\frac{1}{2}}^{T-}$	+1	-1	0

για  $2 \leq i \leq N - 1$ , που είναι ακριβώς το stencil που αντιστοιχεί στην εξίσωση 6.20 και είναι αυτό που πρέπει να χρησιμοποιηθεί στους πεπερασμένους όγκους, από τους μεσόκομβους ρ έως P.

### 6.2.2 Οριακές Συνθήκες

Οι όροι της εξίσωσης 6.11 που με την επιβολή τους η συνάρτηση στόχος γίνεται ανεξάρτητη οποιασδήποτε μεταβολής  $\delta\vec{U}$  στα όρια του πεδίου, αποτελούν τις οριακές συνθήκες της συζυγούς εξίσωσης.

Για τους όρους που αφορούν την είσοδο στο δεξί μέλος της εξίσωσης 6.11 πρέπει να ικανοποιούν την παρακάτω σχέση:

$$\begin{aligned} & \delta\vec{U}_2^T \left[ (p(x) - p_{tar}(x)) \left( \frac{\partial p}{\partial \vec{U}} \right)^T - A^T \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} - T_u^T \vec{\psi} \right] \Big|_2 \Delta x + \delta\vec{U}_2^T \left( \frac{\partial \vec{R}_1}{\partial \vec{U}_2} \right)^T \vec{\psi}_1 \frac{\Delta x}{2} \\ & + \delta\vec{U}_1^T \left[ (p_1(x) - p_{tar1}(x)) \left( \frac{\partial p_1}{\partial \vec{U}_1} \right)^T \frac{\Delta x}{2} + \left( \frac{\partial \vec{R}_1}{\partial \vec{U}_1} \right)^T \vec{\psi}_1 \frac{\Delta x}{2} \right] - [\vec{\psi}^T A \delta\vec{U}]_\mu = 0 \end{aligned} \quad (6.25)$$

έτσι ώστε να απαλειφθεί η παρουσία των  $\delta\vec{U}$ , των κόμβων 1,2 και του μεσόκομβου  $\mu$ .

Σύμφωνα με τη σχέση 6.20, διακριτοποιώντας τον όρο  $-A^T \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} \Big|_2$  η εξίσωση 6.25 γίνεται:

$$\begin{aligned} & \delta\vec{U}_2^T \left[ A_{2-\frac{1}{2}}^{T-} \vec{\psi}_1 + \left( A_{2+\frac{1}{2}}^{T+} - A_{2-\frac{1}{2}}^{T-} - T_u^T \Big|_2 \right) \vec{\psi}_2 - A_{2+\frac{1}{2}}^{T+} \vec{\psi}_3 + (p_2(x) - p_{tar2}(x)) \left( \frac{\partial p_2}{\partial \vec{U}_2} \right)^T \right] \\ & + \delta\vec{U}_2^T \left( \frac{\partial \vec{R}_1}{\partial \vec{U}_2} \right)^T \vec{\psi}_1 \frac{\Delta x}{2} \\ & + \delta\vec{U}_1^T \left[ \frac{1}{2} (p_1(x) - p_{tar1}(x)) \left( \frac{\partial p_1}{\partial \vec{U}_1} \right)^T + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \vec{R}_1}{\partial \vec{U}_1} \right)^T \vec{\psi}_1 \right] - [\vec{\psi}^T A \delta\vec{U}]_\mu = 0 \end{aligned} \quad (6.26)$$

Για την ικανοποίηση της σχέσης 6.26 προτείνεται ο όρος  $-\left[\vec{\psi}^T A \delta\vec{U}\right]_\mu$  να έχει τη μορφή:

$$\left[\vec{\psi}^T A \delta\vec{U}\right]_\mu = \delta\vec{U}_2^T A_{2-\frac{1}{2}}^{T-} \vec{\psi}_1 + \delta\vec{U}_1^T A_{2-\frac{1}{2}}^{T+} \vec{\psi}_2$$

ή, καλύτερα,

$$\left[ \vec{\psi}^T A \delta \vec{U} \right]_{\mu} = \delta \vec{U}_2^T A_{\mu}^{T-} \vec{\psi}_1 + \delta \vec{U}_1^T A_{\mu}^{T+} \vec{\psi}_2 \quad (6.27)$$

Η εξήγηση της σχέσης 6.27 μπορεί να δικαιολογηθεί έχοντας υπόψη ότι η συζυγής πληροφορία «ταξιδεύει» σε ανάποδη φορά από ότι η πρωτεύουσα πληροφορία. Επιπρόσθετα, από τη σχέση 6.27 διαπιστώνεται ότι, για πρώτης τάξης ακρίβεια ο μεσόκομβος  $\mu$  παίρνει πληροφορία από τους δύο πρώτους κόμβους.

Όσον αφορά τους όρους εξόδου στο δεξί μέλος της εξίσωσης 6.11 η εξίσωση που πρέπει να ικανοποιείται είναι:

$$\begin{aligned} & \delta \vec{U}_{N-1}^T \left[ (p(x) - p_{tar}(x)) \left( \frac{\partial p}{\partial \vec{U}} \right)^T - A^T \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} - T_u^T \vec{\psi} \right] \Big|_{N-1} \Delta x + \delta \vec{U}_{N-1}^T \left( \frac{\partial R_N}{\partial \vec{U}_{N-1}} \right)^T \vec{\psi}_N \frac{\Delta x}{2} \\ & + \delta \vec{U}_N^T \left[ (p_N(x) - p_{tarN}(x)) \left( \frac{\partial p_N}{\partial \vec{U}_N} \right)^T \frac{\Delta x}{2} + \left( \frac{\partial \vec{R}_N}{\partial \vec{U}_N} \right)^T \vec{\psi}_N \frac{\Delta x}{2} \right] + \left[ \vec{\psi}^T A \delta \vec{U} \right]_M = 0 \end{aligned} \quad (6.28)$$

έτσι ώστε να γίνει απαλοιφή των όρων  $\delta \vec{U}$  στους κόμβους  $N$ ,  $N-1$  και στον μεσόκομβο  $M$ .

Χρησιμοποιώντας τη διακριτοποίηση της σχέσης 6.20 για τον όρο  $-A^T \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} \Big|_{N-1}$  η εξίσωση 6.28 γίνεται:

$$\begin{aligned} & \delta \vec{U}_{N-1}^T \left[ A_{N-1-\frac{1}{2}}^{T-} \vec{\psi}_{N-2} + \left( A_{N-1+\frac{1}{2}}^{T+} - A_{N-1-\frac{1}{2}}^{T-} - T_u^T \Big|_{N-1} \right) \vec{\psi}_{N-1} - A_{N-1+\frac{1}{2}}^{T+} \vec{\psi}_N \right. \\ & \left. + (p_N(x) - p_{tarN}(x)) \left( \frac{\partial p_N}{\partial \vec{U}_N} \right)^T \right] + \delta \vec{U}_{N-1}^T \left( \frac{\partial R_N}{\partial \vec{U}_{N-1}} \right)^T \vec{\psi}_N \frac{\Delta x}{2} \\ & + \delta \vec{U}_N^T \left[ \frac{1}{2} (p_N(x) - p_{tarN}(x)) \left( \frac{\partial p_N}{\partial \vec{U}_N} \right)^T + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \vec{R}_N}{\partial \vec{U}_N} \right)^T \vec{\psi}_N \right] + \left[ \vec{\psi}^T A \delta \vec{U} \right]_M = 0 \end{aligned} \quad (6.29)$$

Για την ικανοποίηση της σχέσης 6.29 προτείνεται ο όρος  $\left[\vec{\psi}^T A \delta \vec{U}\right]_M$  να έχει τη μορφή:

$$\left[\vec{\psi}^T A \delta \vec{U}\right]_M = \delta \vec{U}_{N-1}^T A_{N-\frac{1}{2}}^{T+} \vec{\psi}_N + \delta \vec{U}_N^T A_{N-\frac{1}{2}}^{T-} \vec{\psi}_{N-1}$$

ή, καλύτερα,

$$\left[\vec{\psi}^T A \delta \vec{U}\right]_M = \delta \vec{U}_{N-1}^T A_M^{T+} \vec{\psi}_N + \delta \vec{U}_N^T A_M^{T-} \vec{\psi}_{N-1} \quad (6.30)$$

Έτσι, έπειτα από το την εύρεση των συζυγών εξισώσεων και των οριακών συνθηκών, η εύρεση της παραγώγου ευαισθησίας προκύπτει από τη σχέση:

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta \vec{b}} = - \int_{(L)} \vec{\psi}^T T_b dx \quad (6.31)$$

### 6.3 Υπολογισμός παραγώγου-Διακριτοποίηση δευτέρας τάξης ακρίβειας.

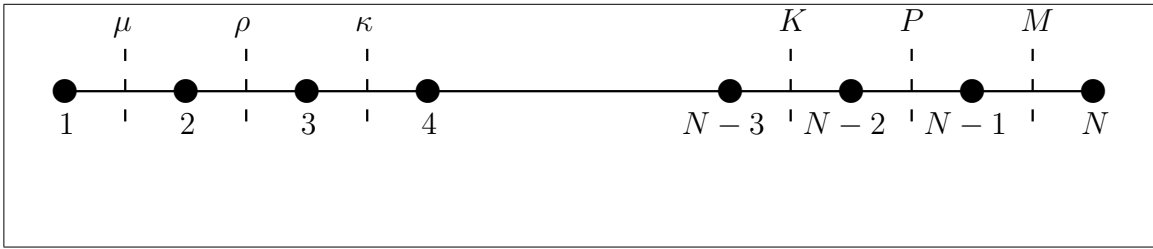
Προηγουμένως έγινε ανάλυση του τρόπου επίλυσης της νέας συνεχούς συζυγούς μεθόδου για ακρίβεια πρώτης τάξης. Στην παρούσα ενότητα, θα παρουσιασθεί αναλυτικά η διακριτοποίηση με ακρίβεια δεύτερης τάξης. Ουσιαστική διαφορά αποτελεί το γεγονός ότι κάθε εξίσωση στους εσωτερικούς κόμβους  $i$  θα εμπλέκει πέντε κόμβους αντί για τρεις, όπως στην ακρίβεια πρώτης τάξης.

Ξεκινώντας, για την εύρεση του  $\delta F_{aug}$  χρησιμοποιείται η σχέση 6.5. Για κάθε έναν όρο της συγκεκριμένης εξίσωσης προκύπτει:

Η μεταβολή της συνάρτησης στόχου δίνεται από την εξίσωση 6.2 χρησιμοποιώντας τα εσωτερικά σημεία του αγωγού  $\mu$  και  $M$  τα οποία αντιστοιχούν στα σημεία  $\frac{\Delta x}{2}$ ,  $1 - \frac{\Delta x}{2}$  αντίστοιχα όπως και στην ακρίβεια πρώτης τάξης. Χρησιμοποιώντας όμως τους μεσόκομβους  $\rho$  και  $P$ , όπως στο σχήμα 6.4, οι οποίοι αντιστοιχούν στα σημεία  $\frac{3\Delta x}{2}$

,  $1 - \frac{3\Delta x}{2}$  αντίστοιχα, η μεταβολή της συνάρτησης στόχου γίνεται:

$$\begin{aligned} \delta F(\vec{U}, \vec{b}) &= \int_{(L)} \delta \vec{U}^T (p(x) - p_{tar}(x)) \left( \frac{\partial p}{\partial \vec{U}} \right)^T dx = \int_{\mu}^M \delta \vec{U}^T (p(x) - p_{tar}(x)) \left( \frac{\partial p}{\partial \vec{U}} \right)^T dx \\ &+ \delta \vec{U}_1^T \tau_1 \frac{\Delta x}{2} + \delta \vec{U}_N^T \tau_N \frac{\Delta x}{2} = \int_{\rho}^P \delta \vec{U}^T (p(x) - p_{tar}(x)) \left( \frac{\partial p}{\partial \vec{U}} \right)^T dx \\ &+ \delta \vec{U}_1^T \tau_1 \frac{\Delta x}{2} + \delta \vec{U}_N^T \tau_N \frac{\Delta x}{2} + \delta \vec{U}_2^T \tau_2 \Delta x + \delta \vec{U}_{N-1}^T \tau_{N-1} \Delta x \end{aligned} \quad (6.32)$$



**Σχήμα 6.4:** Ισαπέχοντες κόμβοι πλέγματος για διακριτοποίηση δεύτερης τάξης ακρίβειας.

Για του όρους των συζυγών μεταβλητών χρησιμοποιείται η σχέση 6.8 με την επιπλέον εισαγωγή των ψευδόκομβων  $\rho$  και  $P$ . Συνεπώς, προκύπτει:

$$\begin{aligned} \int_{(L)} \vec{\psi}^T \delta \vec{R} dx &= \int_{\mu}^M \vec{\psi}^T \delta \vec{R} dx + \vec{\psi}_1^T \delta \vec{R}_1 \frac{\Delta x}{2} + \vec{\psi}_N^T \delta \vec{R}_N \frac{\Delta x}{2} \\ &= [\vec{\psi}^T A \delta \vec{U}]_M - [\vec{\psi}^T A \delta \vec{U}]_{\mu} - \int_{\mu}^M \left( \delta \vec{U}^T A^T \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} + \vec{\psi}^T T_u \delta \vec{U} + \vec{\psi}^T T_b \delta \vec{b} \right) dx \\ &+ \vec{\psi}_1^T \delta \vec{R}_1 \frac{\Delta x}{2} + \vec{\psi}_N^T \delta \vec{R}_N \frac{\Delta x}{2} \\ &= [\vec{\psi}^T A \delta \vec{U}]_M - [\vec{\psi}^T A \delta \vec{U}]_{\mu} - \int_{\rho}^P \left( \delta \vec{U}^T A^T \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} + \vec{\psi}^T T_u \delta \vec{U} + \vec{\psi}^T T_b \delta \vec{b} \right) dx \\ &+ \vec{\psi}_1^T \delta \vec{R}_1 \frac{\Delta x}{2} + \vec{\psi}_N^T \delta \vec{R}_N \frac{\Delta x}{2} + \vec{\psi}_2^T \delta \vec{R}_2 \Delta x + \vec{\psi}_{N-1}^T \delta \vec{R}_{N-1} \Delta x \end{aligned} \quad (6.33)$$

Επομένως από τον συνδυασμό των σχέσεων 6.32, 6.33 και εισάγοντας δύο νέους μεσόκομβους  $\kappa$ ,  $K$  στις θέσεις  $1 + \frac{5\Delta x}{2}$ ,  $N - \frac{5\Delta x}{2}$  η τελική σχέση για τη μεταβολή της επαυξημένης συνάρτησης είναι:



$$\begin{aligned}
\delta F_{aug} = & \int_{\kappa}^K \delta \vec{U}^T \left[ (p(x) - p_{tar}(x)) \left( \frac{\partial p}{\partial \vec{U}} \right)^T - A^T \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} - T_u^T \vec{\psi} \right] dx \\
& - \int_{(L)} \vec{\psi}^T T_b \delta \vec{b} dx + \left[ \vec{\psi}^T A \delta \vec{U} \right]_M - \left[ \vec{\psi}^T A \delta \vec{U} \right]_{\mu} \\
& + \delta \vec{U}_3^T \left[ (p(x) - p_{tar}(x)) \left( \frac{\partial p}{\partial \vec{U}} \right)^T - A^T \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} - T_u^T \vec{\psi} \right] \Big|_3 \Delta x \\
& + \vec{\psi}_2^T \left( \frac{\partial \vec{R}_2}{\partial \vec{U}_1} \delta \vec{U}_1 + \frac{\partial \vec{R}_2}{\partial \vec{U}_2} \delta \vec{U}_2 + \frac{\partial \vec{R}_2}{\partial \vec{U}_3} \delta \vec{U}_3 + \frac{\partial \vec{R}_2}{\partial \vec{U}_4} \delta \vec{U}_4 \right) \Delta x \\
& + \vec{\psi}_1^T \left( \frac{\partial \vec{R}_1}{\partial \vec{U}_1} \delta \vec{U}_1 + \frac{\partial \vec{R}_1}{\partial \vec{U}_2} \delta \vec{U}_2 + \frac{\partial \vec{R}_1}{\partial \vec{U}_3} \delta \vec{U}_3 \right) \frac{\Delta x}{2} \\
& + \delta \vec{U}_{N-2}^T \left[ (p(x) - p_{tar}(x)) \left( \frac{\partial p}{\partial \vec{U}} \right)^T - A^T \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} - T_u^T \vec{\psi} \right] \Big|_{N-2} \Delta x \\
& + \vec{\psi}_{N-1}^T \left( \frac{\partial \vec{R}_{N-1}}{\partial \vec{U}_{N-3}} \delta \vec{U}_{N-3} + \frac{\partial \vec{R}_{N-1}}{\partial \vec{U}_{N-2}} \delta \vec{U}_{N-2} + \frac{\partial \vec{R}_{N-1}}{\partial \vec{U}_{N-1}} \delta \vec{U}_{N-1} + \frac{\partial \vec{R}_{N-1}}{\partial \vec{U}_N} \delta \vec{U}_N \right) \Delta x \\
& + \vec{\psi}_N^T \left( \frac{\partial \vec{R}_N}{\partial \vec{U}_{N-2}} \delta \vec{U}_{N-2} + \frac{\partial \vec{R}_N}{\partial \vec{U}_{N-1}} \delta \vec{U}_{N-1} + \frac{\partial \vec{R}_N}{\partial \vec{U}_N} \delta \vec{U}_N \right) \frac{\Delta x}{2} \\
& + \delta \vec{U}_1^T \tau_1 \frac{\Delta x}{2} + \delta \vec{U}_N^T \tau_N \frac{\Delta x}{2} + \delta \vec{U}_2^T \tau_2 \Delta x + \delta \vec{U}_{N-1}^T \tau_{N-1} \Delta x
\end{aligned} \tag{6.34}$$

Έτσι από τη σχέση 6.34 η συζυγής εξίσωση είναι ίδιας μορφής με αυτή για πρώτης τάξης ακρίβειας (σχέση 6.13) απλώς, σε αυτήν την περίπτωση, τα όρια είναι οι μεσόκομβοι  $\kappa$  και  $K$ .

### 6.3.1 Διακριτοποίηση του όρου $-A^{T+\frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x}}$ με ακρίβεια δεύτερης τάξης

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως και στην πρώτη τάξης ακρίβεια, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Flux Vector Splitting καθώς και τη σχέση 6.16, ο όρος  $-A^{T+\frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x}}$  γράφεται στη μορφή:

$$\begin{aligned}
 -A^{T+} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} \Big|_i &= -A_{i+\frac{1}{2}}^{T+} \frac{\psi_{i+1} - \psi_i}{\Delta x} - \frac{-A_{i+\frac{3}{2}}^{T+} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} \Big|_{i+\frac{3}{2}} + A_{i-\frac{1}{2}}^{T+} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} \Big|_{i-\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \frac{\Delta x}{2} \\
 &= -A_{i+\frac{1}{2}}^{T+} \frac{\psi_{i+1} - \psi_i}{\Delta x} - \frac{-A_{i+\frac{3}{2}}^{T+} \frac{\psi_{i+2} - \psi_{i+1}}{\Delta x} + A_{i-\frac{1}{2}}^{T+} \frac{\psi_i - \psi_{i+1}}{\Delta x}}{4} \quad (6.35)
 \end{aligned}$$

Ομοίως, από τη σχέση 6.18 ο όρος  $-A^{T-} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} \Big|_i$  γίνεται:

$$\begin{aligned}
 -A^{T-} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} \Big|_i &= -A_{i-\frac{1}{2}}^{T-} \frac{\psi_i - \psi_{i-1}}{\Delta x} + \frac{-A_{i+\frac{1}{2}}^{T-} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2}} + A_{i-\frac{3}{2}}^{T-} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} \Big|_{i-\frac{3}{2}}}{2\Delta x} \frac{\Delta x}{2} \\
 &= -A_{i-\frac{1}{2}}^{T-} \frac{\psi_i - \psi_{i-1}}{\Delta x} + \frac{-A_{i+\frac{1}{2}}^{T-} \frac{\psi_{i+1} - \psi_i}{\Delta x} + A_{i-\frac{3}{2}}^{T-} \frac{\psi_{i-1} - \psi_{i-2}}{\Delta x}}{4} \quad (6.36)
 \end{aligned}$$

Συνεπώς από τις σχέσεις 6.35 ,6.36 ο όρος  $-A^T \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} \Big|_i$  διακριτοποιημένος, γράφεται σε μορφή πίνακα ως εξής:

	$\vec{\psi}_{i-2}$	$\vec{\psi}_{i-1}$	$\vec{\psi}_i$	$\vec{\psi}_{i+1}$	$\vec{\psi}_{i+2}$
$A_{i+\frac{3}{2}}^{T+}$	0	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$A_{i+\frac{1}{2}}^{T+}$	0	0	+1	-1	0
$A_{i+\frac{1}{2}}^{T-}$	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	0
$A_{i-\frac{1}{2}}^{T+}$	0	0	$+\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0
$A_{i-\frac{1}{2}}^{T-}$	0	1	-1	0	0
$A_{i-\frac{3}{2}}^{T-}$	$-\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{4}$	0	0	0

για  $3 \leq i \leq N - 2$ , όπου το συγκεκριμένο stencil πρέπει να χρησιμοποιηθεί στους πεπερασμένους όγκους από τους μεσόκομβους κ έως K.

### 6.3.2 Οριακές συνθήκες για ακρίβεια δεύτερης τάξης

Με την απαλοιφή των  $\delta \vec{U}$  στα όρια του πεδίου από τη σχέση 6.34, προκύπτουν οι οριακές συνθήκες του προβλήματος Έτσι για τους όρους της εισόδου της εξίσωσης 6.34 πρέπει να ικανοποιείται η εξίσωση:

$$\begin{aligned}
& \delta \vec{U}_3^T \left[ (p(x) - p_{tar}(x)) \left( \frac{\partial p}{\partial \vec{U}} \right)^T - A^T \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} - T_u^T \vec{\psi} \right] \Big|_3 + \delta \vec{U}_3^T \left[ \left( \frac{\partial \vec{R}_2}{\partial \vec{U}_3} \right)^T \vec{\psi}_2 + \left( \frac{\partial \vec{R}_1}{\partial \vec{U}_3} \right)^T \vec{\psi}_1 \right] \\
& + \delta \vec{U}_2^T \left[ \left( \frac{\partial \vec{R}_2}{\partial \vec{U}_2} \right)^T \vec{\psi}_2 + \left( \frac{\partial \vec{R}_1}{\partial \vec{U}_2} \right)^T \vec{\psi}_1 + \tau_2 \right] + \delta \vec{U}_1^T \left[ \left( \frac{\partial \vec{R}_2}{\partial \vec{U}_1} \right)^T \vec{\psi}_2 + \left( \frac{\partial \vec{R}_1}{\partial \vec{U}_1} \right)^T \vec{\psi}_1 + \tau_1 \right] \\
& + \delta \vec{U}_4^T \left( \frac{\partial \vec{R}_2}{\partial \vec{U}_4} \right)^T \vec{\psi}_2 - [\vec{\psi}^T A \delta \vec{U}]_\mu = 0
\end{aligned} \tag{6.37}$$

Για την ικανοποίηση της σχέσης 6.37 ο όρος  $[\vec{\psi}^T A \delta \vec{U}]_\mu$  πρέπει να πάρει τη μορφή:

$$\begin{aligned}
[\vec{\psi}^T A \delta \vec{U}]_\mu &= \delta \vec{U}_1^T \left( -\frac{1}{4} A_{3-\frac{1}{2}}^{T+} \right) \vec{\psi}_3 \\
&+ \delta \vec{U}_2^T \left[ -\left( -\frac{1}{4} A_{3+\frac{1}{2}}^{T+} - A_{3-\frac{1}{2}}^{T+} - \frac{1}{4} A_{3-\frac{1}{2}}^{T-} \right) \vec{\psi}_3 - \frac{1}{4} A_{4-\frac{1}{2}}^{T+} \vec{\psi}_4 \right] \\
&+ \delta \vec{U}_3^T \left[ \left( \frac{1}{4} A_{3-\frac{1}{2}}^{T+} + A_{3-\frac{1}{2}}^{T-} + \frac{1}{4} A_{3-\frac{3}{2}}^{T-} \right) \vec{\psi}_2 - \frac{1}{4} A_{3-\frac{3}{2}}^{T-} \vec{\psi}_1 \right] \\
&+ \delta \vec{U}_4^T \left[ -\frac{1}{4} A_{2+\frac{1}{2}}^{T-} \vec{\psi}_2 \right]
\end{aligned} \tag{6.38}$$

Αντίστοιχα, για τους τελευταίους όρους τις εξίσωσης 6.34 πρέπει να ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}
& \delta \vec{U}_{N-2}^T \left[ (p(x) - p_{tar}(x)) \left( \frac{\partial p}{\partial \vec{U}} \right)^T - A^T \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} - T_u^T \vec{\psi} \right] \Big|_{N-2} \\
& + \delta \vec{U}_{N-2}^T \left[ \left( \frac{\partial \vec{R}_N}{\partial \vec{U}_{N-2}} \right)^T \vec{\psi}_N + \left( \frac{\partial \vec{R}_{N-1}}{\partial \vec{U}_{N-2}} \right)^T \vec{\psi}_{N-1} \right] \\
& + \delta \vec{U}_{N-1}^T \left[ \left( \frac{\partial \vec{R}_N}{\partial \vec{U}_{N-1}} \right)^T \vec{\psi}_N + \left( \frac{\partial \vec{R}_{N-1}}{\partial \vec{U}_{N-1}} \right)^T \vec{\psi}_{N-1} + \tau_{N-1} \right] \\
& + \delta \vec{U}_N^T \left[ \left( \frac{\partial \vec{R}_N}{\partial \vec{U}_N} \right)^T \vec{\psi}_N + \left( \frac{\partial \vec{R}_{N-1}}{\partial \vec{U}_N} \right)^T \vec{\psi}_{N-1} + \tau_N \right]
\end{aligned}$$


---

$$+ \delta \vec{U}_{N-3}^T \left( \frac{\partial \vec{R}_{N-1}}{\partial \vec{U}_{N-3}} \right)^T \vec{\psi}_{N-1} + \left[ \vec{\psi}^T A \delta \vec{U} \right]_M = 0 \quad (6.39)$$

Έτσι για την ικανοποίηση της σχέσης 6.39, ο όρος  $\left[ \vec{\psi}^T A \delta \vec{U} \right]_\mu$  πρέπει να ισούται με:

$$\begin{aligned} \left[ \vec{\psi}^T A \delta \vec{U} \right]_M &= \delta \vec{U}_N^T \left( -\frac{1}{4} A_{N-2+\frac{1}{2}}^{T-} \right) \vec{\psi}_{N-2} \\ &+ \delta \vec{U}_{N-1}^T \left[ \left( \frac{1}{4} A_{N-2+\frac{1}{2}}^{T+} + A_{N-2+\frac{1}{2}}^{T-} + \frac{1}{4} A_{N-2-\frac{1}{2}}^{T-} \right) \vec{\psi}_{N-2} - \frac{1}{4} A_{N-3+\frac{1}{2}}^{T-} \vec{\psi}_{N-3} \right] \\ &+ \delta \vec{U}_{N-2}^T \left[ \left( \frac{1}{4} A_{N-2+\frac{3}{2}}^{T+} + A_{N-2+\frac{1}{2}}^{T+} + \frac{1}{4} A_{N-2+\frac{1}{2}}^{T-} \right) \vec{\psi}_{N-3} - \frac{1}{4} A_{N-2-\frac{3}{2}}^{T-} \vec{\psi}_{N-4} \right] \\ &+ \delta \vec{U}_{N-3}^T \left[ -\frac{1}{4} A_{N-1-\frac{1}{2}}^{T+} \vec{\psi}_{N-1} \right] \end{aligned} \quad (6.40)$$

Με την προαναφερθείσα εύρεση των συζυγών εξισώσεων και των οριακών συνθηκών, η παραγωγός ευαισθησίας υπολογίζεται από τη σχέση 6.34 και είναι ίδια με τη σχέση 6.31:

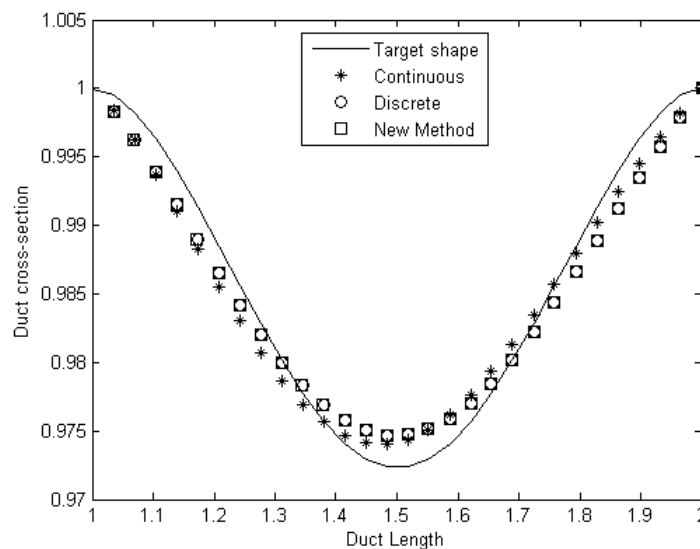
## 6.4 Εφαρμογή της νέας μεθόδου και σχολιασμός αποτελεσμάτων

Στις προηγούμενες ενότητες του παρόντος κεφαλαίου παρουσιάστηκε η μεθοδολογία που αναπτύχθηκε για τον τρόπο υπολογισμού της πρώτης παραγωγού μιας αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού με διακριτοποίηση ακρίβειας πρώτης και δεύτερης τάξης, με τη νέα συνεχή συζυγή μέθοδο. Στην παρούσα ενότητα σκοπός είναι να αποδειχθεί ότι η εφαρμογή της νέας μεθόδου στα ψευδο-1Δ προβλήματα αντίστροφου σχεδιασμού δίνει εξίσου ικανοποιητικά αποτελέσματα με αυτά της διακριτής μεθόδου.

Η αρχική μορφολογία του αγωγού καθώς και τα δεδομένα της ροής, επιλέχθηκαν ίδια με αυτά των εφαρμογών του Κεφαλαίου 5 για λόγους σύγκρισης. Συνεπώς, στη συγκεκριμένη εφαρμογή, θα γίνει σύγκριση πρώτων παραγωγών μεταξύ της διακριτής και της νέας συνεχούς συζυγούς μεθόδου βελτιστοποίησης.

### 6.4.1 Αποτελέσματα της νέας συνεχούς συζυγούς μεθόδου

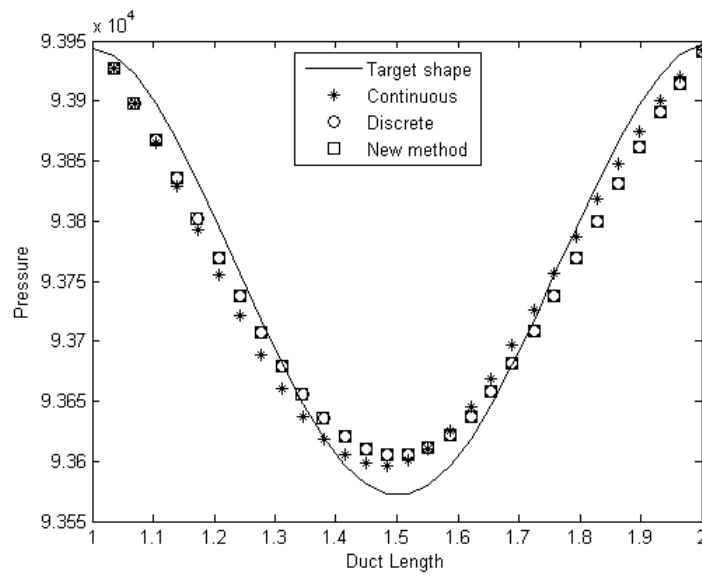
Στο σχήμα 6.5 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της γεωμετρίας του αγωγού για επίλυση των συζυγών εξισώσεων με ακρίβεια δεύτερης τάξης, στον πέμπτο κύκλο βελτιστοποίησης. Γίνεται αντιληπτό ότι τα αποτελέσματα της διακριτής μεθόδου (άσπρα κυκλάκια) και της νέας μεθόδου αεροδυναμικής βελτιστοποίησης (άσπρα τετραγωνάκια) συμπίπτουν, έτσι όπως αναμενόταν σύμφωνα με τη θεωρία που αναπτύχθηκε στο παρόν κεφάλαιο. Στο σχήμα 6.6 απεικονίζεται η κατανομή πίεσης του αγωγού για τις αντίστοιχες γεωμετρίες του σχήματος 6.5.



**Σχήμα 6.5:** Οριζόντιος άξονας: μήκος του αγωγού. Κατακόρυφος άξονας: διατομή  $S$  του αγωγού. Η επιθυμητή μορφολογία του αγωγού-στόχου (*Target shape*), μαζί με τα αποτελέσματα της πέμπτης επανάληψης της βελτιστοποίησης για τη διακριτή (άσπρα κυκλάκια), τη συνεχή μέθοδο (αστεράκια) και τη νέα συνεχή μέθοδο (άσπρα τετράγωνα)

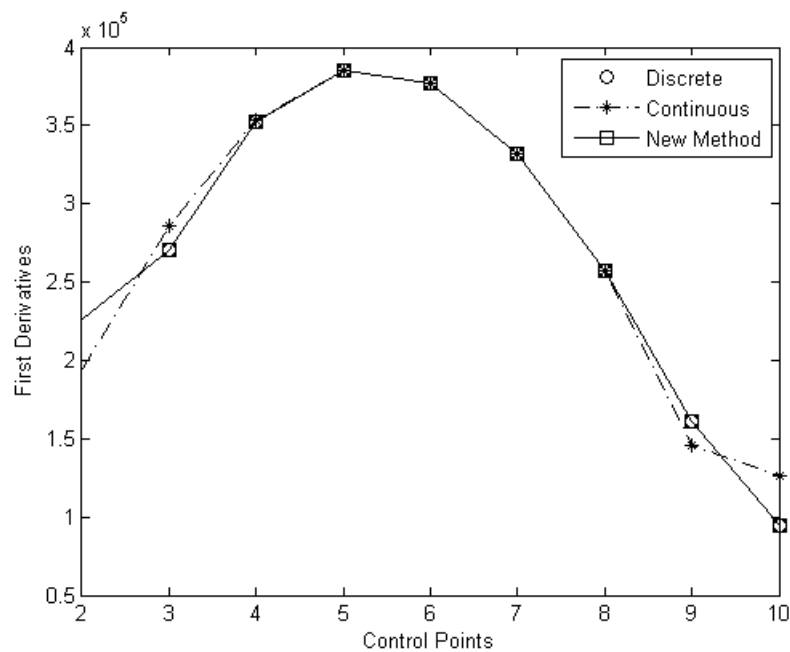
Στη συνέχεια απεικονίζονται τα διαγράμματα των πρώτων παραγώγων ως προς τα σημεία ελέγχου. Στο σχήμα 6.7 απεικονίζονται οι πρώτες παράγωγοι με υπολογισμούς ακρίβειας πρώτης τάξης. Γίνεται αντιληπτό ότι τα αποτελέσματα των τιμών μεταξύ της νέας συνεχούς συζυγούς μεθόδου και της διακριτής ταυτίζονται λόγω του ότι οι οριακές συνθήκες καθώς και η διακριτοποίηση του όρου  $-A^T \frac{\partial \psi}{\partial x}$  έγινε με τον προτεινόμενο τρόπο. Ταυτόχρονα, παρατηρείται ότι οι τιμές παραγώγων της κλασικής συνεχούς συζυγούς μεθόδου σε σχέση με τη νέα συνεχή συζυγή μέθοδο παρουσιάζουν σημαντικές διαφορές.

Στο σχήμα 6.8 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα πρώτων παραγώγων για ακρίβεια δε-

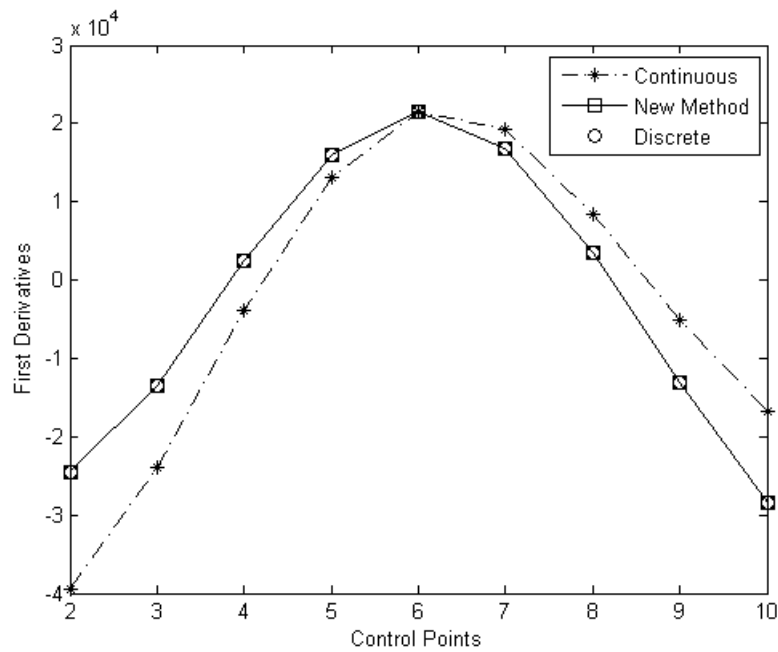


**Σχήμα 6.6:** Οριζόντιος άξονας: μήκος του αγωγού. Κατακόρυφος άξονας: στατική πίεση. Η επιθυμητή κατανομή πίεσης-στόχος (*Target distribution*), μαζί με τα αποτελέσματα της πέμπτης επανάληψης της βελτιστοποίησης για τη διακριτή (άσπρα κυκλάκια), τη συνεχή (αστεράκια) και τη νέα συνεχή συζυγή μέθοδο (άσπρα τετράγωνα).

ύτερης τάξης. Παρατηρείται ότι υπάρχει μεγαλύτερη διαφορά μεταξύ των τιμών της κλασικής συνεχούς συζυγούς μεθόδου και της νέας συνεχούς συζυγούς μεθόδου σε σχέση με τα αντίστοιχα για ακρίβεια πρώτης τάξης.



**Σχήμα 6.7:** Οριζόντιος άξονας: αύξων αριθμός μεταβλητών σχεδιασμού. Κατακόρυφος άξονας: τιμές πρώτων παραγώγων με διακριτοποίηση των εξισώσεων πρώτης τάξης ακρίβεια της συνάρτησης - στόχου ως προς τις συντεταγμένες των σημείων ελέγχου. Οι παράγωγοι υπολογισμένες με τη νέα συνεχή συζυγή μέθοδο (άσπρα τετραγωνάκια), με τη διακριτή συζυγή τεχνική (άσπρα κυκλάκια) και με χρήση της συνεχούς συζυγούς τεχνικής (αστεράκια). Οι παράγωγοι αναφέρονται στο πρώτο κύκλο της διαδικασίας της βελτιστοποίησης.



**Σχήμα 6.8:** Οριζόντιος άξονας: αύξων αριθμός μεταβλητών σχεδιασμού. Κατακόρυφος άξονας: τιμές πρώτων παραγώγων με διακριτοποίηση των εξισώσεων δευτέρας τάξης ακρίβειας της συνάρτησης - στόχου ως προς τις συντεταγμένες των σημείων ελέγχου. Οι παράγωγοι υπολογισμένες με τη νέα συνεχή συζυγή μέθοδο (άσπρα τετραγωνάκια), με τη διακριτή συζυγή τεχνική (άσπρα κυκλάκια) και με χρήση της συνεχούς συζυγούς τεχνικής (αστεράκια). Οι παράγωγοι αναφέρονται στο πρώτο κύκλο της διαδικασίας της βελτιστοποίησης.



## Κεφάλαιο 7

# Ανακεφαλαίωση-Συμπεράσματα- Σχόλια

Στην παρούσα διπλωματική εργασία αναπτύχθηκε μια παραλλαγή της συνεχούς συζυγούς μεθόδου για εφαρμογή σε προβλήματα αεροδυναμικής βελτιστοποίησης που χρησιμοποιεί στοιχεία από τη διακριτή συζυγή μέθοδο με σκοπό να δώσει **ένα απόλυτα συμβατό σχήμα** με τις διακριτοποιημένες διαφορικές εξισώσεις του πρωτεύοντος προβλήματος. Αρχικά παρουσιάστηκε ο τρόπος επίλυσης του πρωτεύοντος προβλήματος για τις ψευδο-1Δ εξισώσεις Euler ενώ, στη συνέχεια, παρουσιάστηκαν η διακριτή και η συνεχής συζυγής μέθοδος. Το προϋπάρχον λογισμικό των δύο μεθόδων, από παλαιότερες διπλωματικές εργασίες τροποποιήθηκε για την επίλυση του πρωτεύοντος προβλήματος με διακριτοποίηση των εξισώσεων και με ακρίβεια πρώτης τάξης, καθώς η ανάπτυξη της νέας συνεχούς συζυγούς μεθόδου έγινε αρχικά με πρώτης τάξης ακρίβεια.

Στη συνέχεια, αναπτύχθηκε πλήρως η μαθηματική θεμελίωση της νέας συνεχούς συζυγούς μεθόδου ενώ βρέθηκε ο κατάλληλος τρόπος διακριτοποίησης και η κατάλληλη επιβολή των οριακών συνθηκών, έτσι ώστε να επιτευχθούν τα αποτελέσματα της διακριτής συζυγούς μεθόδου, μέσω της εφαρμογής της συνεχούς συζυγούς μεθόδου. Η μέθοδος αναπτύχθηκε για τον υπολογισμό της πρώτης παραγώγου για ακρίβεια πρώτης και δεύτερης τάξης. Ανακεφαλαιώνοντας, τα συμπεράσματα της εργασίας από την εφαρμογή της νέας μεθόδου στον ψευδο-1Δ αγωγό είναι:

- Παρουσιάστηκε ένας νέος τρόπος διακριτοποίησης των όρων μεταφοράς στη συζυγή εξίσωση.
- Η ακρίβεια των παραγώγων που υπολογίζει η νέα συνεχής συζυγής μέθοδος για τις παραγώγους, για υπολογισμούς πρώτης και δεύτερης τάξης ακρίβειας, είναι πλέον απολύτως ίδια με αυτή της διακριτής.

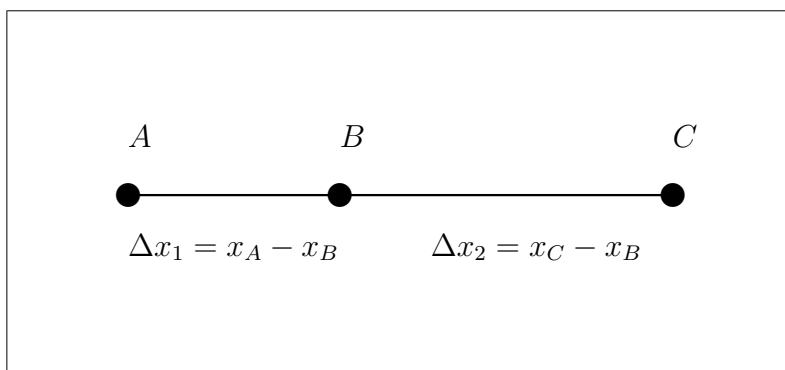
- Επαληθεύτηκε η ορθότητα της μαθηματικής διατύπωσης της νέας μεθόδου.
  - Αποδείχθηκε η ικανότητα να μπορεί να εφαρμόζεται η συνεχής μέθοδος αντί της διακριτής έτσι ώστε να επιτυγχάνεται ταυτόχρονα η επιθυμητή ακρίβεια, η εξοικονόμηση υπολογιστικής μνήμης, και επιπλέον, να είναι δυνατή η κατανόηση της φυσικής ερμηνείας των συζυγών εξισώσεων που επιλύονται, κάτι που μόνο η συνεχής συζυγής μέθοδος μπορεί να προσφέρει.
  - Επιβολή νέων οριακών συνθηκών για την επίλυση του νέου συνεχούς συζυγούς προβλήματος. Σημαντικό ρόλο διαδραμάτισαν ο πρώτος και ο τελευταίος μεσόκομβος του σχήματος διακριτοποίησης, και η συσχέτιση τους με τους γειτονικούς τους κόμβους αντίστοιχα, όπου αποδείχθηκε καθοριστική για την επίτευξη των επιθυμητών αποτελεσμάτων.
-

## Παράρτημα Α'

### Έκφραση 1ης παραγώγου για μη-ισαπέχοντες κόμβους.

Στην παρούσα ενότητα θα γίνει απόδειξη των τύπων της διακριτοποιημένης μορφής της πρώτης παραγώγου συνάρτησης  $f$  για μη-ισαπέχοντες κόμβους (γενική περίπτωση).

Κεντρικές διαφορές, ακρίβειας δεύτερης τάξης:



Σχήμα Α'.1: Εσωτερικοί, μη-ισαπέχοντες κόμβοι.

Εφαρμόζοντας ανάπτυγμα Taylor για τον κόμβο  $C$  προκύπτει:

$$f_C = f_B + \Delta x_2 \left[ \frac{df}{dx} \right]_B + \frac{(\Delta x_2)^2}{2!} \left[ \frac{d^2 f}{dx^2} \right]_B + O(\Delta x_2^3) \quad (A'.1)$$

Αντίστοιχα για τον κόμβο  $A$  προκύπτει:

$$f_A = f_B + \Delta x_1 \left[ \frac{df}{dx} \right]_B + \frac{(\Delta x_1)^2}{2!} \left[ \frac{d^2 f}{dx^2} \right]_B + O(\Delta x_1^3) \quad (A'.2)$$

Μετά τον πολλαπλασιασμό της σχέσης (A'.1) με  $(\Delta x_1)^2$  και της σχέσης (A'.2) με  $(\Delta x_2)^2$  και την αφαίρεση τους κατά μέλη προκύπτει :

$$(\Delta x_1)^2 f_C - (\Delta x_2)^2 f_A = [(\Delta x_1)^2 - (\Delta x_2)^2] f_B + \Delta x_1 \Delta x_2 (\Delta x_1 - \Delta x_2) \left[ \frac{df}{dx} \right]_B \Rightarrow$$

$$\left[ \frac{df}{dx} \right]_B = \frac{(\Delta x_1)^2 f_C - (\Delta x_2)^2 f_A - [(\Delta x_1)^2 - (\Delta x_2)^2] f_B}{\Delta x_1 \Delta x_2 (\Delta x_1 - \Delta x_2)} \quad (A'.3)$$

ή, συντομογραφικά,

$$\left[ \frac{df}{dx} \right]_B = d_A f_A + d_B f_B + d_C f_C \quad (A'.4)$$

όπου οι συντελεστές  $d$  είναι:

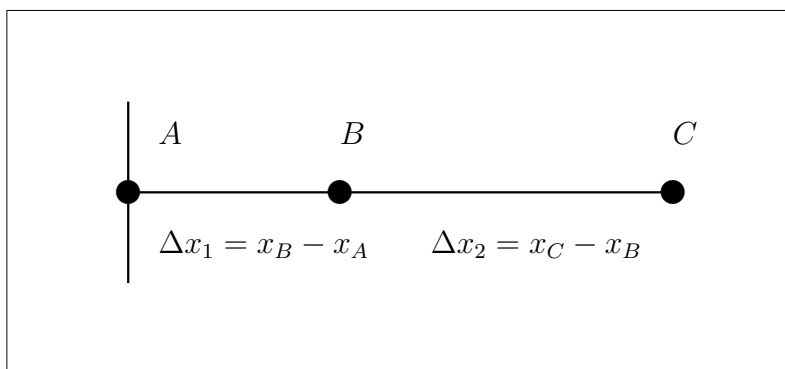
$$d_A = \frac{-(\Delta x_2)^2}{\Delta x_1 \Delta x_2 (\Delta x_1 - \Delta x_2)} \quad (A'.5)$$

$$d_B = \frac{-[(\Delta x_1)^2 - (\Delta x_2)^2]}{\Delta x_1 \Delta x_2 (\Delta x_1 - \Delta x_2)} \quad (A'.6)$$

$$d_C = \frac{(\Delta x_1)^2}{\Delta x_1 \Delta x_2 (\Delta x_1 - \Delta x_2)} \quad (A'.7)$$

Μονόπλευρη παραγώγιση, δεύτερης τάξης ακρίβεια:

---



Σχήμα Α'.2: Οριακοί μη-ισαπέχοντες κόμβοι.

Πρόσω παραγωγή :

$$f_B = f_A + \Delta x_1 \left[ \frac{df}{dx} \right]_A + \frac{(\Delta x_1)^2}{2!} \left[ \frac{d^2 f}{dx^2} \right]_A + O(\Delta x_1^3) \quad (\text{A'.8})$$

$$f_C = f_A + (\Delta x_1 + \Delta x_2) \left[ \frac{df}{dx} \right]_A + \frac{(\Delta x_1 + \Delta x_2)^2}{2!} \left[ \frac{d^2 f}{dx^2} \right]_A + O[(\Delta x_1 + \Delta x_2)^3] \quad (\text{A'.9})$$

Μετά τον πολλαπλασιασμό της σχέσης (Α'.8) με  $(\Delta x_1 + \Delta x_2)^2$  και της σχέσης (Α'.9) με  $(\Delta x_1)^2$  ) και αφαιρώντας κατά μέλη προκύπτει:

$$(\Delta x_1 + \Delta x_2)^2 f_B - (\Delta x_1)^2 f_C = [(2\Delta x_1 + \Delta x_2)\Delta x_2] f_A + \Delta x_1 \Delta x_2 (\Delta x_1 + \Delta x_2) \left[ \frac{df}{dx} \right]_A \Rightarrow$$

$$\left[ \frac{df}{dx} \right]_A = \frac{-2(\Delta x_1 + \Delta x_2)\Delta x_2 f_A + (\Delta x_1 + \Delta x_2)^2 f_B - (\Delta x_1)^2 f_C}{\Delta x_1 \Delta x_2 (\Delta x_1 + \Delta x_2)} \quad (\text{A'.10})$$

ή, συντομογραφικά,

$$\left[ \frac{df}{dx} \right]_A = d_A f_A + d_B f_B + d_C f_C \quad (\text{A'.11})$$

όπου οι συντελεστές  $d$  είναι:

$$d_A = \frac{-(2\Delta x_1 + \Delta x_2)\Delta x_2}{\Delta x_1\Delta x_2(\Delta x_1 + \Delta x_2)} \quad (\text{A'.12})$$

$$d_B = \frac{(\Delta x_1 + \Delta x_2)^2}{\Delta x_1\Delta x_2(\Delta x_1 + \Delta x_2)} \quad (\text{A'.13})$$

$$d_C = \frac{-(\Delta x_1)^2}{\Delta x_1\Delta x_2(\Delta x_1 + \Delta x_2)} \quad (\text{A'.14})$$

Πίσω παραγωγή :

Με παρόμοια μεθοδολογία όπως και πριν μπορεί να αποδειχθεί ότι:

$$\left[ \frac{df}{dx} \right]_A = d_A f_A + d_B f_B + d_C f_C \quad (\text{A'.15})$$

$$d_A = \frac{(2\Delta x_1 + \Delta x_2)\Delta x_2}{\Delta x_1\Delta x_2(\Delta x_1 + \Delta x_2)} \quad (\text{A'.16})$$

$$d_B = \frac{-(\Delta x_1 + \Delta x_2)^2}{\Delta x_1\Delta x_2(\Delta x_1 + \Delta x_2)} \quad (\text{A'.17})$$

$$d_C = \frac{(\Delta x_1)^2}{\Delta x_1\Delta x_2(\Delta x_1 + \Delta x_2)} \quad (\text{A'.18})$$

με  $\Delta x_1 = x_A - x_B$  και  $\Delta x_2 = x_B - x_C$ .

## Παράρτημα Β'

### Υπολογισμός των μητρώων $A^+$ , $A^-$

Για πληρότητα, στο παράρτημα αυτό παρουσιάζεται ο τρόπος εύρεσης των πινάκων  $A^+$  και  $A^-$ . Πιο αναλυτικά, για τον πίνακα  $A$  ισχύει ότι:

$$A = P\Lambda P^{-1} \quad (\text{B'.1})$$

όπου  $\Lambda$  είναι διαγώνιο μητρώο με στοιχεία τις ιδιοτιμές του Ιακωβιανού μητρώου  $A$ . Δηλαδή:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u+c & 0 \\ 0 & 0 & u-c \end{bmatrix} \quad (\text{B'.2})$$

ενώ ταυτόχρονα το  $P=ML$  και το  $P^{-1}=L^{-1}M^{-1}$ , όπου  $M$  και  $L$  γνωστοί πίνακες οι οποίοι παρουσιάζονται παρακάτω:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & \rho & 0 \\ \frac{1}{2}u^2 & \rho u & \frac{1}{\gamma-1} \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\rho}{2c} & -\frac{\rho}{2c} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \rho \frac{c}{2} & -\rho \frac{c}{2} \end{bmatrix}$$

Σε υποηχητική ροή, δηλαδή ροή όπου ισχύει για τον αριθμό *Mach*  $M = \frac{u}{c} < 1$ , κατευθυνόμενη κατά τα θετικά του άξονα  $x$  και σε κάθε θέση  $x$  του αγωγού, οι τρεις ιδιοτιμές έχουν σαφώς καθορισμένο πρόσημο. Οι δύο από αυτές είναι θετικές ( $\lambda_1 = u$ ,  $\lambda_2 = u + c$ ) και η τρίτη ( $\lambda_3 = u - c$ ) αρνητική αφού  $u < c$ . Αντίστοιχα, σε περίπτωση όπου η ροή είναι υπερηχητική υπάρχουν τρεις θετικές ιδιοτιμές. Ωστόσο, η παρούσα διπλωματική εργασία, αναφέρεται αποκλειστικά σε υποηχητικές ροές, χωρίς αυτό να βλάπτει την γενικότητα της μεθόδου.

Επομένως, σύμφωνα με τα όσα αναφέρθηκαν, η σχέση Β'.1, θα γίνει:

$$A^+ = P\Lambda^+P^{-1} \quad (\text{B'.3})$$

$$A^- = P\Lambda^-P^{-1} \quad (\text{B'.4})$$

όπου  $\Lambda^+$  και  $\Lambda^-$  μητρώα με τις θετικές και αρνητικές ιδιοτιμές αντίστοιχα. Πιο αναλυτικά, τα μητρώα  $\Lambda^+$  και  $\Lambda^-$  είναι:

$$\Lambda^+ = \begin{bmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u + c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u - c \end{bmatrix}$$



Ωστόσο, απαιτείται, όπως έγινε σαφές από την παραπάνω παρουσίαση σχέσεων, η γνώση των αντίστροφων του  $M$  και του  $L$ . Έτσι, παρουσιάζεται με συντομία ο τρόπος εύρεσης των αντίστροφων αυτών. Για τον πίνακα  $M$ , ο αντίστροφός του θα υπολογίζεται από την παρακάτω σχέση:

$$M^{-1} = \frac{adjM}{detM} \quad (B'.5)$$

όπου  $adjM$  ο συμπληρωματικός του  $M$  και  $detM$  η ορίζουσά του. Με τον ίδιο τρόπο θα υπολογιστεί ο αντίστροφος του  $L$ . Επομένως, θα είναι γνωστά όλα τα δεδομένα που χρειάζονται για τον υπολογισμό του  $P$  και του  $P^{-1}$ .

Με βάση τα όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, μετά από πράξεις, έχουμε τους εξής πίνακες για τους  $P$  και  $P^{-1}$ .

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\rho}{2c} & -\frac{\rho}{2c} \\ u & \frac{\rho}{2}[\frac{u+c}{c}] & -\frac{\rho}{2}[\frac{u-c}{c}] \\ \frac{1}{2}u^2 & \frac{\rho}{2c}[\frac{u^2}{2} + uc + \frac{c^2}{\gamma-1}] & -\frac{\rho}{2c}[\frac{u^2}{2} - uc + \frac{c^2}{\gamma-1}] \end{bmatrix} \quad (B'.6)$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} [1 - \frac{u^2(\gamma-1)}{2c^2}] & \frac{u(\gamma-1)}{c^2} & -\frac{\gamma-1}{c^2} \\ [\frac{\frac{1}{2}u^2(\gamma-1)}{\rho c} - \frac{uc}{\rho c}] & [\frac{c}{\rho c} - \frac{u(\gamma-1)}{\rho c}] & \frac{\gamma-1}{\rho c} \\ -[\frac{\frac{1}{2}u^2(\gamma-1)}{\rho c} + \frac{uc}{\rho c}] & [\frac{c}{\rho c} + \frac{u(\gamma-1)}{\rho c}] & -\frac{\gamma-1}{\rho c} \end{bmatrix} \quad (B'.7)$$

Έχοντας πια γνωστούς τους παραπάνω πίνακες  $P$  και  $P^{-1}$ , μπορούν να υπολογιστούν οι πίνακες  $A^+$  και  $A^-$  με βάση τις σχέσεις B'.3 και B'.4 για οποιοδήποτε κόμβο ή μεσόκομβο του 1- $\Delta$  πλέγματος.



## Παράρτημα Γ'

### Απόδειξη της σχέσης $\frac{\partial A}{\partial \vec{b}} \vec{U} = \vec{0}$

Για την εύρεση της επαυξημένης συνάρτησης  $\delta F_{aug}$  στην συνεχή συζυγή μέθοδο είναι απαραίτητος ο υπολογισμός του όρου:

$$\int_{(L)} \vec{\psi}^T \left( \frac{\partial(\delta \vec{f})}{\partial x} - \delta \vec{q} \right) dx \quad (\Gamma'.1)$$

Στη συνέχεια, γίνεται χρήση της τανυστικής γραφής για ευκολότερη χρήση των εξ-  
σώσεων, καθώς και της σύμβασης του Einstein, όπου οι επαναλαμβανόμενοι δείκτες  
ανάμεσα σε δύο όρους δηλώνουν άθροιση. Έτσι, αμελώντας προς το παρόν τον όρο  
 $-\delta \vec{q}$  και διαφορίζοντας τη σχέση  $\Gamma'.1$  ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού  $\vec{b}$ , προ-  
κύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta b} \int_0^1 \psi_i \frac{\partial f_i}{\partial x} dx &= \int_0^1 \psi_i \frac{\partial}{\partial b} \left( \frac{\partial f_i}{\partial x} \right) dx = \int_0^1 \psi_i \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f_i}{\partial b} \right) dx \\ &= \left[ \psi_i \frac{\partial f_i}{\partial b} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial f_i}{\partial b} dx \end{aligned} \quad (\Gamma'.2)$$

Γενικά, ισχύει η σχέση:

$$f_i = A_{ij} U_j \quad (\Gamma'.3)$$

Έτσι, η μεταβολή του  $f_i$  ως προς  $U_k$  προκύπτει:

$$\frac{\partial f_i}{\partial U_k} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial U_k} U_j + A_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial U_k} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial U_k} U_j + A_{ik} \quad (\Gamma'.4)$$

Όμως, εξ ορισμού, ισχύει ότι:

$$A_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial U_j} \quad (\Gamma'.5)$$

Έτσι από τις σχέσεις Γ'.4, Γ'.5 αποδεικνύεται ότι:

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial U_k} U_j = 0 \quad (\Gamma'.6)$$

Διαφορίζοντας τη σχέση Γ'.3 ως προς  $b_m$  προκύπτει:

$$\frac{\partial f_i}{\partial b_m} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial b_m} U_j + A_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial b_m} \quad (\Gamma'.7)$$

όπου, ο όρος  $\frac{\partial A_{ij}}{\partial b} U_j$  με κανόνα της αλυσίδας γράφεται:

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial b_m} U_j = \frac{\partial A_{ij}}{\partial U_k} \frac{\partial U_k}{\partial b_m} U_j \quad (\Gamma'.8)$$

Η σχέση Γ'.8 ισούται με 0 σύμφωνα με τη σχέση Γ'.6. Οπότε αντικαθιστώντας τη σχέση Γ'.7 στη σχέση Γ'.2 προκύπτει:

$$\frac{\delta}{\delta b_m} \int_0^1 \psi_i \frac{\partial f_i}{\partial x} dx = \left[ \psi_i A_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial b_m} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\partial \psi_i}{\partial x} A_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial b_m} dx \quad (\Gamma'.9)$$

Έτσι, κατά τη διαδικασία ανάλυσης της συνεχούς και της νέας συνεχούς συζυγούς μεθόδου η σχέση Γ'.9 χρησιμοποιείται κατά την μαθηματική ανάπτυξη τους.

## Βιβλιογραφία

- [1] Ε. ΠΑΠΟΥΤΣΗ ΚΙΑΧΑΓΙΑ. Συζυγείς Μέθοδοι για το Στιβαρό Σχεδιασμό Αεροδυναμικών Μορφών με Υπολογισμό Τρίτων Παραγώγων. Εφαρμογή σε Μονοδιάστατους Αγωγούς. Διπλωματική Εργασία, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών. Αθήνα 2009.
- [2] Ι.Χ ΜΥΡΑΛΙΔΗ. Η Διακριτή και η Συνεχής Συζυγής Μεθοδος για τον υπολογισμό Πρώτων και Δεύτερων Παραγώγων Ευαισθησίας. Εφαρμογές στον Αντιστροφο Σχεδιασμό Αγωγού. Διπλωματική Εργασία, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών. Αθήνα 2008.
- [3] Κ.Χ ΓΙΑΝΝΑΚΟΓΛΟΥ: Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στην Αεροδυναμική. ΕΜΠ. Αθήνα 2006.
- [4] Κ.Χ ΓΙΑΝΝΑΚΟΓΛΟΥ: Συνεκτικές Ροές στις Στροβιλομηχανές. ΕΜΠ. Αθήνα 2005.
- [5] D.I. PAPADIMITRIOU, K.C. GIANNAKOGLU: Direct, Adjoint and Mixed Approaches for the Computation of Hessian in Airfoil Design Problems, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 53, pp. 455-469, 2007.
- [6] D.I. PAPADIMITRIOU, K.C. GIANNAKOGLU: Computation of the Hessian Matrix in Aerodynamic Inverse Design using Continuous Adjoint Formulations, Computers and Fluids, , 37, pp. 1029-1039, 2008.
- [7] V.G. ASOUTI, A.S. ZYMARIS, D.I. PAPADIMITRIOU, K.C. GIANNAKOGLU. Continuous and Discrete Adjoint Approaches for Aerodynamic Shape Optimization with Low Number preconditioning. International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 57, pp. 1485-1504, 2008.
- [8] D.I. PAPADIMITRIOU, K.C. GIANNAKOGLU A Continuous Adjoint Method for the Minimization of Losses in Cascade Viscous Flows. 44th AIAA Aerospace Sciences Meeting, AIAA-2006-0116, Reno, NV, USA, Jan 9-11, 2006.
- [9] D.I. PAPADIMITRIOU, K.C. GIANNAKOGLU, Compressor Blade Optimization using a Continuous Adjoint Formulation, ASME Paper GT-

- 2006/90466, ASME Gas Turbine and Aeroengine Technical Congress and Exposition, Barcelona, Spain, May 8-11, 2006.
- [10] D.I PAPANIMITRIOU, A.S. ZYMARIS, K.C. GIANNAKOGLU, "Discrete and Continuous Adjoint Formulations for Turbomachinery Applications", EUROGEN 2005, Munich, September 12-14, 2005
- [11] K.C. GIANNAKOGLU, D.I. PAPANIMITRIOU, E.M. PAPOUTSIS-KIACHAGIAS, I.S. KAVVADIAS, C. OTHMER: CONTINUOUS ADJOINT METHODS IN SHAPE, TOPOLOGY, FLOW-CONTROL AND ROBUST OPTIMIZATION, Open Source CFD International Conference, London 2012.
- [12] C. HIRSCH. Numerical Computation of internal and external flows. Volume 2: Computational methods for inviscid and viscous flows., 1990.
- [13] J. Brezillon and R. Dwight. Discrete adjoint of the NavierStokes equations for aerodynamic shape optimization. In Evolutionary and Deterministic Methods for Design, EUROGEN, Munich, 2005.
- [14] RP. Dwight and J. Brezillon. Effect of approximations of the discrete adjoint on gradient-based optimization. AIAA Journal, 44(12):3022–3031, 2006.
- [15] A. Jameson and JJ. Alonso. Aerodynamic shape optimization techniques based on control theory. AIAA Paper, 23(58), 1998.
- [16] M. Giles and N. Pierce. An introduction to the adjoint approach to design. Flow, Turbulence and Combustion, 65:393–415, 2000.
- [17] J. Peter and RP. Dwight. Numerical sensitivity analysis for aerodynamic optimization: A survey of approaches. Computers & Fluids, 39(3):373–391, 2010.
- [18] R. Dwight, J. Brezillon, and D. Vollmer. Efficient algorithms for solution of the adjoint compressible NavierStokes equations with applications. In Proceedings of the ONERADLR Aerospace Symposium (ODAS), Toulouse, 2006.
- [19] GILES, M.B. AND PIERCE, N.A., "Adjoint Equations in Duality, Boundary Conditions and Solution Behaviour", "AIAA Paper 97-1850, 1997"
- [20] GILES, M.B. AND PIERCE, N.A., "Improved Lift and Drag Estimates using Adjoint Euler Equations", "AIAA Paper 99-3293, 1999"
- [21] WK. Anderson and V. Venkatakrishnan. Aerodynamic design optimization on unstructured grids with a continuous adjoint formulation. Computers & Fluids, 28:443–480, 1999.
- [22] M.B. Giles, M.C. Duta, J.D. Muller, N.A.Pierce. "Algorithm Developments for Discrete Adjoint Methods", "AIAA JOURNAL Vol. 41, No 2, February 2003"
-