



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

**ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ**

**Μαθηματική προτυποποίηση του παντογράφου, του
θερμοαντιστάτη και της ηλεκτροστατικής βαφής**

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Όλγα Β. Λάτσου

**Επιβλέπων: Δ. Τζανετής
Καθηγητής ΕΜΠ**

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ

**Μαθηματική προτυποποίηση του παντογράφου, του
θερμοαντιστάτη και της ηλεκτροστατικής βαφής**

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Όλγα Β. Λάτσου
ΑΜΔ: 246/09410014

Επιβλέπων: Δ. Τζανετής
Τριμελής Επιτροπή: Δ. Τζανετής
Α. Χαραλαμπίδης
Δ. Γκιντίδης

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή τηνΜαΐου 2013

ΟΝΟΜΑ	Δ. Τζανετής	Α. Χαραλαμπίδης	Δ. Γκιντίδης
ΒΑΘΜΙΔΑ	Καθηγητής	Αν. Καθηγητής	Αν. Καθηγητής
ΥΠΟΓΡΑΦΗ			

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Με την παρούσα εργασία περατώνονται οι σπουδές μου στη Σχολή Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου. Οφείλω να ευχαριστήσω θερμά τους ανθρώπους που συνέβαλλαν στην ολοκλήρωσή της. Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Τζανετή Δημήτριο για την εμπιστοσύνη και το ενδιαφέρον που έδειξε τόσο κατά την ανάθεση της εργασίας, όσο και κατά τη διάρκεια διεξαγωγής των μαθημάτων του μεταπτυχιακού προγράμματος σπουδών, στα οποία ήταν διδάσκων, καθώς και για την συμπαράσταση και την καθοδήγησή του καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της παρούσας εργασίας. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τους καθηγητές Α.Χαραλαμπίδου και Δ. Γκιντίδη που με τίμησαν με τη συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για την υλική και ηθική υποστήριξη της όλα τα χρόνια των σπουδών μου. Ειδικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον σύζυγό μου Δημήτρη, που με στήριξε και με βοήθησε με την υπομονή του αλλά και τις γνώσεις του, καθότι μαθηματικός, σε όλη τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών.

Όλγα Β. Λάτσου
Μάιος, Αθήνα 2013

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

• Πρόλογος.....	6
• Εισαγωγή.....	7
• ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Ο παντογράφος	
1.1.1 Γενική περιγραφή του παντογράφου.....	14
1.1.2 Μοντελοποίηση του παντογράφου.....	15
1.1.3 Το σημείο επαφής.....	18
1.1.4 Ωστική προσάρτηση παντογράφων χωρίς απόσβεση.....	19
1.1.5 Λύση κοντά σε σημείο στήριξης.....	21
1.1.6 Λύση για ολόκληρη τη ζώνη.....	23
1.2 Ένα μαθηματικό μοντέλο δυναμικής αλληλεπίδρασης παντογράφου – αλυσοειδούς	
1.2.1 Δυναμικές εξισώσεις του συστήματος.....	27
1.2.2 Το μοντέλο της αλυσοειδούς.....	28
1.2.3 Διάταξη της ζώνης μετάβασης.....	30
1.2.4 Το μοντέλο του παντογράφου.....	33
1.2.5 Μοντέλο της επαφής παντογράφου – καλωδίου.....	35
1.2.6 Το μοντέλο συνθηκών περιορισμών.....	37
1.2.7 Αριθμητική ολοκλήρωση της δυναμικής εξίσωσης.....	39
1.2.8 Αλγόριθμος ολοκλήρωσης.....	41
1.2.9 Υπολογιστικές πτυχές και εφαρμογές.....	43
1.2.10 Συμπέρασμα.....	46
• ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 : Ο θερμοαντιστάτης (Thermistor)	
2 Τί είναι ο θερμοαντιστάτης.....	48
2.1 Το μοντέλο του μαύρου κουτιού.....	49
2.2 Ένα απλό μοντέλο για τη θερμική ροή.....	50
2.3 Αδιαστατοποίηση παραμέτρων.....	52
2.4 Ο θερμοαντιστάτης σε ένα κύκλωμα.....	54
2.4.1 Το μονοδιάστατο μοντέλο.....	56
2.5 Η περίπτωση όπου $\beta \ll 1$, οι δύο διαστάσεις και αριθμητικά αποτελέσματα.....	63
2.6 Συμπέρασμα.....	67

• **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Ηλεκτροστατική βαφή**

3.1	Γενική περιγραφή της ηλεκτροστατικής βαφής.....	72
3.2	Εξισώσεις πεδίου.....	76
3.3	Συνοριακές συνθήκες.....	78
3.4	Αδιαστατοποίηση.....	79
3.5	Συμπέρασμα.....	82
•	Βιβλιογραφία.....	83

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στην παρακάτω εργασία θα ασχοληθούμε με φυσικά προβλήματα που καταλήγουν σε προβλήματα διαφορικών εξισώσεων.

Στο πρώτο κεφάλαιο θα περιγράψουμε τον παντογράφο, ο οποίος είναι μία συσκευή τοποθετημένη στους ηλεκτροκινούμενους συρμούς με σκοπό τη λήψη ρεύματος από μία εναέρια εγκατάσταση ηλεκτροδότησης, η οποία ονομάζεται αλυσοειδής. Το πρόβλημα του παντογράφου είναι κλασσικό στην μαθηματική μοντελοποίηση και όπως συμβαίνει συχνά με τα βιομηχανικά προβλήματα, προκάλεσε ένα μέρος της θεωρητικής έρευνας, τη λεγόμενη εξίσωση παντογράφου. Επιπλέον θα δούμε τη δυναμική αλληλεπίδραση μεταξύ παντογράφου και αλυσοειδούς (δηλαδή την εναέρια εγκατάσταση ηλεκτροδότησης, η οποία αποτελείται από τον ηλεκτροφόρο αγωγό επαφής, ένα καλώδιο που σχηματίζει την λεγόμενη «αλυσοειδή καμπύλη», γνωστό και ως φέρον καλώδιο, και συγκρατεί τον αγωγό επαφής με την βοήθεια κατακόρυφων καλωδίων που ονομάζονται αναρτήρες). Για να είναι σωστή αυτή η αλληλεπίδραση είναι αναγκαίο να υπάρξουν κατάλληλες συνθήκες στη γραμμή και αυτό απαιτεί έναν πολύ ακριβή μηχανικό υπολογισμό.

Στο δεύτερο κεφάλαιο θα δούμε το θερμοαντιστάτη ως έναν διακόπτη σε ένα κύκλωμα. Ο θερμοαντιστάτης είναι μία θερμο-εξαρτώμενη αντίσταση. Το είδος του θερμοαντιστάτη που μας ενδιαφέρει αποκτά μεγαλύτερη αντίσταση όσο περισσότερο θερμαίνεται, έτσι μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μια ασφάλεια. Ένας συνηθισμένος θερμοαντιστάτης είναι μια συσκευή σε σχήμα νομίσματος κατασκευασμένη από ένα ειδικό κεραμικό υλικό. Η θερμοκρασία αντιστοιχεί στην παραγόμενη ωμική θερμότητα όταν το ηλεκτρικό ρεύμα διέρχεται μέσω ενός αγωγού ή συσκευής. Θα χρησιμοποιήσουμε προσεγγιστικές μεθόδους που βασίζονται σε ασυμπτωτικές ενέργειες που αναπτύσσονται έτσι ώστε να περιγράψουν την μεταβατική ροή θερμότητας που παράγεται όταν το κύκλωμα είναι σε λειτουργία. Συγκεκριμένα το φαινόμενο της απότομης αύξησης της θερμοκρασίας το οποίο εικάζουμε πως συνδέεται με την παύση λειτουργίας του θερμοαντιστάτη συμβαίνει κάποιες φορές κατά τη λειτουργία του.

Στο τρίτο κεφάλαιο θα μελετήσουμε τη διαδικασία της ηλεκτροστατικής βαφής. Ηλεκτροστατική βαφή είναι η επικάλυψη ενός μεταλλικού τεμαχίου με ειδικές εποξικές, επόξι-πολυεστερικές ή με πολυεστερικές ρητίνες, με σκοπό αφ' ενός την προστασία από την διάβρωση, αφ' ετέρου δε την επίτευξη του επιθυμητού χρωματισμού και εμφάνισης.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο πρώτο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας θα ασχοληθούμε με τον παντογράφο των ηλεκτρικών συρμών, που είναι μία συσκευή η οποία χρησιμεύει στην λήψη ρεύματος από μία εναέρια γραμμή ηλεκτροδότησης η οποία έχει ειδική διάταξη και ονομάζεται αλυσοειδής. Η μελέτη συνίσταται στην επαφή του παντογράφου με την αλυσοειδή (catenary) και στις διαταραχές αυτής.

Η καλή επαφή μεταξύ παντογράφου και αλυσοειδούς παίζει σημαντικό ρόλο στην ηλεκτροδότηση του σιδηροδρομικού συστήματος. Έτσι λοιπόν είναι βασικό να μελετηθεί η σωστή επαφή παντογράφου – αλυσοειδούς, για τις διάφορες ταχύτητες που αναπτύσσει το τραίνο αλλά και για τις διάφορες θέσεις που μπορεί να βρίσκεται αυτό εντός της γραμμής.

Στις παραγράφους 1.1.1 – 1.1.6 θα ασχοληθούμε με τον παντογράφο και την επαφή του με την αλυσοειδή, στα ανοίγματα μεταξύ των στύλων στήριξης, καθώς και κοντά στα σημεία στήριξης. Για να πετύχουμε μία κατάλληλη επίδοση στην κυκλοφορία των συρμών, η δύναμη επαφής παντογράφου – αλυσοειδούς πρέπει να συντηρείται όσο το δυνατόν πιο ομοιόμορφη, αποφεύγοντας την απώλεια επαφής. Η ανάπτυξη ενός μαθηματικού μοντέλου, που μας επιτρέπει να προσομοιώσουμε την μηχανική συμπεριφορά του συστήματος, μπορεί να μας βοηθήσει να καθορίσουμε τις βέλτιστες συνθήκες συνδεσμολογίας της αλυσοειδούς ή του αγωγού επαφής.

Στις παραγράφους 1.2.1 – 1.2.10 θα αναπτυχθεί ένα μαθηματικό μοντέλο για την μελέτη και προσομοίωση της δυναμικής αλληλεπίδρασης μεταξύ παντογράφου και αλυσοειδούς, σε συρμούς υψηλών ταχυτήτων, μελετώντας δύο ξεχωριστές σειρές αλυσοειδών, όπου οι ζώνες μετάβασης επικαλύπτονται. Σύμφωνα με το μαθηματικό μοντέλο, έχει βρεθεί ένα μη γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων με μεταβλητές περιοριστικές συνθήκες που εξαρτώνται από την θέση του παντογράφου. Για να λύσουμε αυτές τις εξισώσεις, έχει εφαρμοστεί ένας αλγόριθμος αριθμητικής ολοκλήρωσης βασισμένος στην άμεση (explicit) μέθοδο των κεντρικών διαφορών.

Η διαδικασία που έχει σχεδιαστεί μας επιτρέπει να μελετήσουμε την καταλληλότερη διαμόρφωση του αγωγού επαφής, ώστε να πετύχουμε μία ομαλή μετάβαση του παντογράφου ανάμεσα στα ανοίγματα μεταξύ των στύλων στήριξης του καλωδίου. Αυτή η διαδικασία μπορεί να γενικευτεί λαμβάνοντας υπόψη την περίπτωση μερικών παντογράφων που τρέχουν στην γραμμή εξασφαλίζοντας πολύ ρεαλιστικές προσομοιώσεις.

Το κοινό χαρακτηριστικό όλων αυτών των εργασιών βασίζεται σε μοντέλα, όπου ο παντογράφος αλληλεπιδρά με μόνο ένα αγωγό επαφής με ίσα ανοίγματα μεταξύ των στύλων στήριξης. Αλλά αυτή η υπόθεση

δεν είναι απόλυτα αληθής, γιατί η κατασκευή της αλυσοειδούς εγκαθίσταται σε μια γραμμή με 15 – 20 ανοίγματα μεταξύ των στύλων στήριξης, με 60m μήκος το καθένα κατά προσέγγιση, τα οποία δεν είναι απαραίτητα ίσα, και με τις ζώνες μετάβασης να βρίσκονται στο τέλος των επικαλυπτόμενων περιοχών. Σε αυτές τις περιοχές μετάβασης, ο παντογράφος μπορεί να αλληλεπιδρά ταυτόχρονα με τους αγωγούς επαφής δύο διαφορετικών γραμμών και έτσι παρουσιάζονται διαφορετικές ρυθμίσεις στους αγωγούς ώστε να επιτευχθεί μία ομαλή μετάβαση του παντογράφου ανάμεσα στις διαφορετικές γραμμές αγωγών.

Η ανάπτυξη ενός μοντέλου, όπου ο παντογράφος μπορεί να αλληλεπιδρά με δύο γραμμές ταυτόχρονα και με διάφορους αγωγούς επαφής μπορεί να είναι χρήσιμο, ειδικά όταν η συμπεριφορά του συστήματος πρέπει να αξιολογηθεί, επιτρέποντας την μελέτη μιας πιο επαρκούς ρύθμισης των αγωγών επαφής στις ζώνες μετάβασης, καθώς και μιας πιο ρεαλιστικής αριθμητικής προσομοίωσης με διάφορους παντογράφους, λαμβάνοντας υπόψη ολόκληρο το «ταξίδι» του κάθε παντογράφου κατά μήκος της γραμμής.

Στο δεύτερο κεφάλαιο θα εξετάσουμε τον θερμοαντιστάτη. Οι θερμοαντιστάτες χρησιμοποιούνται ως στοιχεία ελέγχου θερμοκρασίας σε ένα ευρύ φάσμα στρατιωτικών και βιομηχανικών εξοπλισμών που κυμαίνονται από διαστημικά οχήματα μέχρι ελεγκτές εναέριου κλιματισμού. Χρησιμοποιούνται επίσης στον ιατρικό τομέα για την μέτρηση της τοπικής αλλά και ολικής θερμοκρασίας του σώματος, στη μετεωρολογία για τη πρόγνωση του καιρού, καθώς και στη χημική βιομηχανία ως αισθητήρες θερμοκρασίας. Εξωτερικά είναι ένας κύλινδρος ακτίνας 5mm και πάχους 2mm συνδεδεμένος με το κύκλωμα μέσω καλωδίων που είναι κολλημένα στην κορυφή και στον πυθμένα. Οι επιφάνειες είναι καλυμμένες με ένα λεπτό αγωγίμο φύλλο μετάλλου που λειτουργεί ως επαφή. Το κύριο χαρακτηριστικό του είναι ότι η ηλεκτρική του αγωγιμότητα ποικίλει ανάλογα με τη θερμοκρασία. Υπάρχουν δύο είδη θερμοαντιστάτη: θερμοαντιστάτες με χαρακτηριστικό την αρνητική θερμοκρασία των οποίων η ηλεκτρική αγωγιμότητα σ αυξάνει με τη θερμοκρασία T (NTC) και θερμοαντιστάτες με χαρακτηριστικό την θετική θερμοκρασία (PTC) για τους οποίους η ηλεκτρική αγωγιμότητα μειώνεται με τη θερμοκρασία. Η μείωση της ηλεκτρικής αγωγιμότητας σ είναι ταχεία με μια τυπική μεταβολή να είναι τεσσάρων τάξεων μεγέθους καθώς η θερμοκρασία T αυξάνει από 100°C σε 200°C όπως φαίνεται στο *σχήμα 3* στην *παράγραφο 2.4.1*.

Υπάρχουν πολλές εφαρμογές του θερμοαντιστάτη, όμως εμείς εδώ θα εξετάσουμε τον θερμοαντιστάτη ως ασφάλεια, δηλαδή με τον PTC θερμοαντιστάτη.

Σε ένα κύκλωμα όπως φαίνεται στο *σχήμα 2* στην *παράγραφο 2.4*, κλείνοντας τον διακόπτη S , λόγω της εξωτερικής τάσης V_0 , προκαλείται η κίνηση ηλεκτρικού ρεύματος στο κύκλωμα το οποίο διαπερνά την αντίσταση R_0 και στη συνέχεια τον θερμοαντιστάτη τον οποίο και θερμαίνει. Η επακόλουθη πτώση της ηλεκτρικής αγωγιμότητας προκαλεί παύση της κίνησης του ηλεκτρικού ρεύματος μέχρι να επιτευχθεί μια ισορροπία με όλη την θερμότητα που παρήχθη να διαφεύγει στο περιβάλλον. Σε έναν καλά σχεδιασμένο θερμοαντιστάτη το τελικό ρεύμα θα πρέπει να είναι ένα μικρό μέρος της αρχικής απότομης αύξησης.

Συχνά χρειάζεται να προσαρμόσουμε τον θερμοαντιστάτη σε συγκεκριμένα χαρακτηριστικά όπως ο χρόνος διακοπής (δηλαδή το χρόνο που χρειάζεται για να πέσει το ρεύμα σε μία τιμή ίση με $1/e$ της αρχικής του τιμής) και το τελικό ρεύμα. Είναι ενδιαφέρον να εξετάσουμε πως αυτά τα χαρακτηριστικά εξαρτώνται από τις παραμέτρους σχεδιασμού για παράδειγμα το μέγεθος, την αναλογία διαστάσεων, την μεταφορά θερμότητας στην επιφάνεια και την εξωτερική αντίσταση του κυκλώματος.

Επιπλέον αν το V_0 είναι πολύ μεγάλο ο θερμοαντιστάτης μπορεί να ραγίσει ή και να σπάσει. Υποψιαζόμαστε ότι αυτό το σπάσιμο μπορεί να οφείλεται σε θερμική καταπόνηση και έτσι είναι σημαντικό να εξετάσουμε που μπορεί να προκύψει μεγάλη θερμοκρασία. Για να απαντήσουμε σε αυτές τις ερωτήσεις πρέπει να φτιάξουμε ένα μοντέλο για την θερμότητα και τη ροή ρεύματος στο θερμοαντιστάτη σε συνδυασμό με την ηλεκτρική ροή μέσα στο κύκλωμα. Αυτό που θα κάνουμε είναι να αναλύσουμε τις παραμέτρους και να περιγράψουμε μία αριθμητική λύση ώστε στο τέλος να συλλέξουμε κάποια συμπεράσματα.

Αυτό το πρόβλημα συνίσταται σε ένα συζευγμένο σύστημα παραβολικών-ελλειπτικών εξισώσεων, του οποίου οι άγνωστοι είναι η θερμοκρασία στο εσωτερικό του αγωγού, u , και το ηλεκτρικό δυναμικό φ .

Στο τρίτο κεφάλαιο θα μελετήσουμε τη διαδικασία της ηλεκτροστατικής βαφής. Με την ηλεκτροστατική βαφή δημιουργούμε ένα στρώμα βαφής. Για την βαφή των πλαϊνών όψεων του μετάλλου χρησιμοποιούνται οι πολυεστερικές πούδρες. Οι πούδρες αυτές χαρακτηρίζονται από την μεγάλη αντοχή στις εξωτερικές συνθήκες. Οι φορτισμένοι κόκκοι της πούδρας έλκονται από το γειωμένο αντικείμενο.

Τα σωματίδια εκτινάσσονται από ένα πιστόλι ψεκασμού που τους δίνει ένα ηλεκτρικό φορτίο, και διατηρείται μια διαφορά δυναμικού μεταξύ του πιστολιού και του μεταλλικού αντικειμένου ώστε τα σωματίδια να δέχονται μια ηλεκτροστατική δύναμη, η οποία τα κινεί προς το μεταλλικό αντικείμενο. Επιπλέον μεταφέρονται και από ρεύματα αέρα, τα οποία προέρχονται από τη δική τους οπισθέλκουσα. Ένα ιδιαίτερο

χαρακτηριστικό αυτής της μεθόδου βαφής είναι ότι επειδή είναι ισχυρό το ηλεκτρικό πεδίο τα σωματίδια έλκονται ειδικά προς τις εξωτερικές γωνίες, οι οποίες είναι δύσκολο να καλυφθούν με κλασσικές μεθόδους. Το αρνητικό είναι ότι είναι δύσκολο να δούμε τι συμβαίνει στο σύννεφο των σωματιδίων βαφής. Συγκεκριμένα θα θέλαμε όσο το δυνατόν περισσότερα σωματίδια να προσκρούσουν στο αντικείμενο και να μην παρασυρθούν από τα ρεύματα αέρα. Με ένα μαθηματικό μοντέλο θα ερευνήσουμε εάν τα σωματίδια επηρεάζουν τη ροή του αέρα ή είναι παθητικά και πόσο παχύ είναι το τελικό στρώμα ρητίνης.

Η ηλεκτροστατική βαφή παρουσιάζει μεγάλο βιομηχανικό ενδιαφέρον, δεδομένου ότι προσφέρει πολλά πλεονεκτήματα. Η διαδικασία επικάλυψης περιλαμβάνει ρευστοποίηση και μεταφορά των σωματιδίων, τα οποία φορτίζονται ηλεκτρικά και ψεκάζονται πάνω σε ένα γειωμένο αντικείμενο με τη χρήση ενός πιστολιού ψεκασμού, και εναπόθεσή τους πάνω στο αντικείμενο. Όταν επιτυγχάνεται το απαιτούμενο πάχος επικάλυψης το αντικείμενο τοποθετείται σε ένα φούρνο πολυμερισμού όπου η στρώση της σκόνης σωματιδίων συντήκεται ώστε να σχηματισθεί μια συνεχής μεμβράνη. Συνήθως η διαδικασία της επικάλυψης εκτελείται μέσα σε ένα κλειστό χώρο, ένα θάλαμο επικαλύψεως, έτσι ώστε να μπορούμε να επανασυλλέξουμε την ψεκασμένη σκόνη και να διατηρήσουμε το περιβάλλον εργασίας καθαρό.

Στο παρών πόνημα θα χρησιμοποιήσουμε μια διαδικασία πολύ χρήσιμη για τη διατύπωση των μαθηματικών μοντέλων που πραγματευόμαστε, τη διαδικασία της κανονικοποίησης (scalling), κατά την οποία επιλέγουμε νέες, συνήθως αδιάστατες μεταβλητές, με σκοπό να αναδιατυπώσουμε το πρόβλημα. Η διαδικασία αυτή είναι χρήσιμη και αναγκαία, ιδίως όταν πρέπει να συγκρίνουμε την τάξη μεγέθους διαφόρων όρων σε μια εξίσωση. Οι ιδέες της κανονικοποίησης είναι σημαντικές στην εφαρμογή των μεθόδων διαταραχών για τον προσδιορισμό μεγάλων και μικρών παραμέτρων.

Συχνά καταφεύγουμε στη χρήση προσεγγιστικών και αριθμητικών μεθόδων, ανάμεσα τους βρίσκουμε και τις μεθόδους διαταραχών. Μια μέθοδος διαταραχών μας επιτρέπει να βρούμε μια προσεγγιστική λύση του προβλήματος όταν οι εξισώσεις που το περιγράφουν περιέχουν όρους που είναι μικροί. Οι όροι αυτοί εμφανίζονται επειδή η φυσική διαδικασία που περιγράφεται από το εκάστοτε πρόβλημα περιέχει και φαινόμενα που έχουν μικρή επίδραση. Αν χρησιμοποιήσουμε τη σωστή κανονικοποίηση, η τάξη μεγέθους των όρων αυτών περιγράφεται με έναν συντελεστή, έστω ε , που είναι μικρός. Για να δηλώσουμε ότι το ε είναι μία μικρή παράμετρος γράφουμε: $\varepsilon \ll 1$.

Για να βοηθηθούμε στη μελέτη των προσεγγιστικών λύσεων θα εισάγουμε κατάλληλο συμβολισμό και ορολογία. Έστω $f(n)$ και $g(n)$

συναρτήσεις ορισμένες σε μια περιοχή του n_0 , η οποία δεν περιέχει απαραίτητα το n_0 .

Θα γράφουμε $f(n) = O(g(n))$ καθώς $n \rightarrow n_0$ αν υπάρχει μια θετική σταθερά M και ένας πραγματικός αριθμός $\delta > 0$, τέτοια ώστε $|f(n)| \leq M|g(n)|$ για $|n - n_0| < \delta$ και θα λέμε ότι f είναι της τάξης όμικρον κεφαλαίο του g , σε μία περιοχή του n_0 .

Θα γράφουμε $f(n) \sim g(n)$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει n_0 , τέτοιο ώστε για κάθε $n > n_0$ ισχύει $\left| \frac{f(n)}{g(n)} - 1 \right| < \varepsilon$, και θα λέμε ότι η f είναι ασυμπτωτικά ίση με την g , σε μια περιοχή του n_0 .

Ασυμπτωτική επέκταση

Θεωρούμε μια σειρά $\varphi_n(\varepsilon)$, $n=1,2,\dots$ συναρτήσεων του ε .

Ένα άθροισμα όρων της μορφής $\sum_{n=1}^N \alpha_n(x) \varphi_n(\varepsilon)$ καλείται ασυμπτωτική επέκταση της συνάρτησης $f(x, \varepsilon)$ σε N όρους (το N μπορεί να είναι άπειρο) καθώς $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$, ως προς τη σειρά $\varphi_n(\varepsilon)$, εάν:

$$f(x, \varepsilon) - \sum_{n=1}^{M-1} \alpha_n(x) \varphi_n(\varepsilon) = O(\varphi_M)$$

Επιπλέον θα χρησιμοποιήσουμε κάποιες μεθόδους για την εξαγωγή των αποτελεσμάτων που καλό θα ήταν να τις αναφέρουμε.

Άμεση (Explicit) μέθοδος

Αν θεωρήσουμε ότι έχουμε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών στο $[a, b]$ και μια ακολουθία διακεκριμένων σημείων $\{x_n\}$, τα οποία ορίζονται από τη σχέση: $x_n = a + nh$, $n = 0, 1, \dots, N$ όπου $N \in \mathbb{Z}^+$, h ονομάζεται βήμα και $h = \frac{b-a}{N} \in \mathbb{R}^+$.

Μια αριθμητική μέθοδος, σε κάθε σημείο της διαμέρισης X_n , υπολογίζει μια προσέγγιση y_n της $y(x_n)$, που είναι η τιμή της αναλυτικής λύσης στο σημείο x_n . Έτσι έχουμε δύο βασικές κατηγορίες αριθμητικών μεθόδων για τον υπολογισμό των προσεγγίσεων y_n : Τις μεθόδους απλού βήματος και τις μεθόδους πολλαπλού βήματος.

Οι άμεσες (explicit) μέθοδοι ανήκουν στη δεύτερη κατηγορία. Έτσι για να προσεγγίσουμε τη λύση σε κάποιο σημείο της διαμέρισης, χρησιμοποιούμε πληροφορίες από περισσότερα του ενός προηγούμενα σημεία. Αν η μέθοδος είναι k βημάτων, η προσέγγιση y_{n+k} της λύσης στο σημείο x_{n+k} , υπολογίζεται χρησιμοποιώντας πληροφορίες από την

προσέγγιση της λύσης στα κ προηγούμενα σημεία $x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+\kappa-1}$. Η γενική μορφή μιας μεθόδου $\kappa - \beta$ ημάτων μπορεί να εκφραστεί από τη

$$\text{σχέση: } \sum_{j=0}^{\kappa} \alpha_j y_{n+j} = h \Phi_f(x_n, y_{n+\kappa}, y_{n+\kappa-1}, \dots, y_n, h),$$

όπου ο δείκτης f της Φ δηλώνει ότι η εξάρτηση της Φ από τις προσεγγίσεις $y_{n+\kappa}, y_{n+\kappa-1}, \dots, y_n$ γίνεται μέσω της $f(x, y)$ και $\{\alpha_j\}$, $j=0, 1, \dots, \kappa$ είναι προσδιοριστέοι συντελεστές. Αν η συνάρτηση Φ_f είναι ανεξάρτητη της ζητούμενης προσέγγισης $y_{n+\kappa}$, η μέθοδος ονομάζεται άμεση (explicit).

Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων (FEM)

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων είναι μια αριθμητική μέθοδος (μέθοδος υπολογισμού με χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή) για τον υπολογισμό προσεγγιστικών λύσεων μερικών διαφορικών εξισώσεων (PDE).

Η αναλυτική λύση των εξισώσεων με τις οποίες περιγράφονται τα διάφορα τεχνικά προβλήματα είναι δυνατή μόνο σε ειδικές περιπτώσεις, όπου οι καταπονήσεις και τα γεωμετρικά σχήματα είναι πάρα πολύ απλά. Όμως, υπήρχε η ανάγκη να λυθούν και πιο σύνθετα προβλήματα και γι' αυτό το λόγο αναπτύχθηκαν διάφορες προσεγγιστικές μέθοδοι.

Μία τέτοια μέθοδος είναι και η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων. Αυτή η μέθοδος είναι μεν προσεγγιστική, αλλά μπορεί να δώσει αξιόπιστα αποτελέσματα και έχει το πλεονέκτημα ότι μπορεί να εφαρμοστεί σε όλα τα προβλήματα. Το μειονέκτημά της είναι οι αυξημένες απαιτήσεις σε υπολογιστική ισχύ, ιδίως όταν εφαρμόζεται σε σύνθετα μοντέλα. Αυτό όμως το μειονέκτημα ξεπεράστηκε τα τελευταία χρόνια χάρη στη ραγδαία ανάπτυξη των υπολογιστών. Η επιτυχία αυτής της μεθόδου ήταν τόσο μεγάλη, που ακόμα και σήμερα χρησιμοποιείται στην έρευνα και στην βιομηχανία για τον υπολογισμό και τη μελέτη διάφορων κατασκευών.

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων είναι μία εξέλιξη των μητρικών μεθόδων αριθμητικής επίλυσης διαφορικών εξισώσεων και έγινε από διάφορους σπουδαίους επιστήμονες όπως ο Ιωάννης Αργύρης, ο Clough, ο Ritz και άλλοι.

Για να εφαρμοστεί η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων απαιτούνται τα εξής στάδια:

1. Εισάγεται η γεωμετρία της κατασκευής σε ένα πρόγραμμα CAD και δημιουργείται το τρισδιάστατο μοντέλο.
2. Χωρίζεται το μοντέλο σε πεπερασμένα στοιχεία και αφού ετοιμαστεί το πλέγμα επιλέγεται το είδος της επίλυσης και εισάγονται τα επιπλέον δεδομένα που απαιτούνται. Παραδείγματος

χάριν, αν επιλεγεί να λυθεί το μοντέλο σε στατική καταπόνηση θα πρέπει να δοθούν τα δεδομένα για τις δυνάμεις και τις στηρίξεις. Αυτή η διαδικασία γίνεται με προγράμματα που αποκαλούνται pre processor.

3. Όταν ετοιμαστούν τα δεδομένα για επίλυση, εισάγονται σε ένα πρόγραμμα το οποίο θα κάνει την επίλυση του προβλήματος. Τέτοιου είδους προγράμματα λέγονται solver και χρησιμοποιούν για τις επιλύσεις αριθμητικές μεθόδους.
4. Όταν τελειώσει η επίλυση τα αποτελέσματα πρέπει να χρησιμοποιηθεί ένα πρόγραμμα, που αποκαλείται post processor, για να μπορέσει ο μελετητής να δει τα αποτελέσματα.

Χαρακτηριστικές καμπύλες

Οι χαρακτηριστικές προκύπτουν, στη γενική θεωρία μερικών υπερβολικών εξισώσεων, για την οποία, η εξίσωση κύματος, είναι συνήθως ένα απλό παράδειγμα.

Γενικά, οι χαρακτηριστικές είναι καμπύλες γραμμές και συνήθως μπορεί να εμπλέκονται ποσότητες που είναι σταθερές κατά μήκος αυτών των γραμμών. Μέθοδοι που αναλύουν χαρακτηριστικές που εμπλέκονται, βρίσκουν πολλές εφαρμογές στη μηχανική των ρευστών, σε προβλήματα που εμπλέκουν απότομους κραδασμούς.

Το χαρακτηριστικό των καμπυλών αυτών βρίσκεται στο ότι, κατά μήκος αυτών, η μερική διαφορική εξίσωση μετατρέπεται σε συνήθη, η οποία επιλύεται απλούστερα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1.1.1 ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΠΑΝΤΟΓΡΑΦΟΥ

Ο παντογράφος είναι ο συνδετήριος μηχανισμός που συνδέει το εναέριο δίκτυο ηλεκτρικής ενέργειας με τον κύριο μετασχηματιστή του συρμού έλξης. Από εδώ γίνεται η αρχική λήψη του ρεύματος που χρειάζεται για τη κίνηση της αμαξοστοιχίας. Κατά την κίνηση του συρμού η μονάδα αυτή βρίσκεται σε έκταση, υπό την επίδραση 2 ελατηρίων αέρος, και σε διαρκή επαφή με τον αγωγό επαφής.

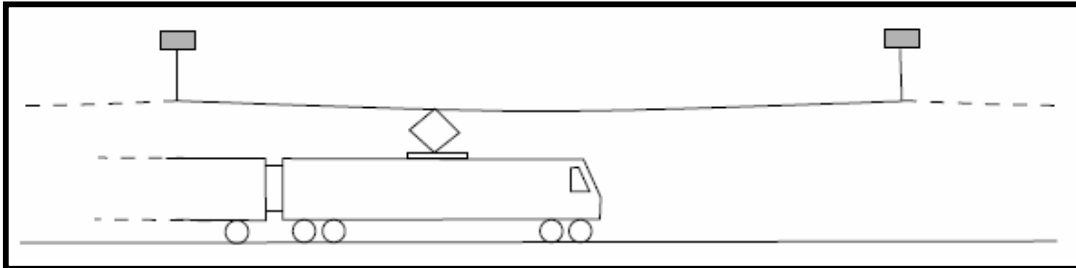
Ο παντογράφος ασκεί δύναμη στο εναέριο καλώδιο καθώς έρχονται σε επαφή μεταξύ τους, μία δύναμη που αυξάνεται όσο αυξάνεται η ταχύτητα κίνησης του συρμού. Έτσι λοιπόν το εναέριο καλώδιο τροφοδοσίας δέχεται μια μετατόπιση κατά τον οριζόντιο και κατακόρυφο άξονα όταν ο συρμός κινείται. Ο παντογράφος επηρεάζει όπως είναι φυσικό και τη δυναμική κατάσταση ολόκληρης της γραμμής ηλεκτροδότησης. Η πίεση στη στατική κατάσταση που ασκεί ο παντογράφος πάνω στον αγωγό επαφής έχει τιμές από 60N μέχρι 90N με μια ικανοποιητική τιμή κοντά στα 75N. Η δύναμη που ασκεί ο παντογράφος στον αγωγό επαφής αυξάνεται όσο μεγαλώνει η ταχύτητα κυκλοφορίας. Επίσης αυτό αναλογεί και σε μία ανύψωση του αγωγού επαφής που είναι της τάξης των 2-4 εκατοστών για ταχύτητες 120km/h και φτάνει μέχρι 10-12 εκατοστά στη ταχύτητα των 200km/h.

Στη μετατόπιση του παντογράφου (σε επαφή με τον αγωγό), ο αγωγός επαφής έχει μια κάθετη κίνηση κυματομορφής με μια συχνότητα και ένα πλάτος ανάλογα με τον τύπο των υποστηριγμάτων, του παντογράφου, της ταχύτητας μετατόπισης, τις συνθήκες του περιβάλλοντος κτλ. Ο αγωγός επαφής μετατοπίζεται και οριζοντίως ως αποτέλεσμα της δύναμης που ασκεί η πίεση του ανέμου, και η οριζόντια συνιστώσα της δύναμης του παντογράφου. Αυτές οι μετατοπίσεις λαμβάνονται υπόψη στη φάση της μελέτης.

Στην αμαξοστοιχία υπάρχουν πάντα δύο παντογράφοι ο κύριος και ο εφεδρικός για λόγους, όπως η εφεδρεία, σε περίπτωση βλάβης του ενός από τους δύο, η κακή επαφή λόγω ακαθαρσίας του αγωγού επαφής, και η καταπόνηση του ενός σε περίπτωση μεγάλων φορτίων. Μετά τον παντογράφο για την τροφοδοσία του μετασχηματιστή, υπάρχει ένας διακόπτης ροής (circuit breaker) ο οποίος σε περίπτωση βλάβης απομονώνει τον συρμό από την ηλεκτρική τροφοδοσία του. Ο διακόπτης αυτός μπορεί να είναι διακόπτης κενού ή εκτόνωσης αέρα.

1.1.2 ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΠΑΝΤΟΓΡΑΦΟΥ

Έστω ότι ο συρμός κινείται με σταθερή ταχύτητα U κάτω από ένα τεντωμένο καλώδιο τάσης T μεταξύ των στηριγμάτων $x = 0, \pm L, \pm 2L, \dots$, όπως στο σχήμα:



*Σχήμα 1: Συρμός σε επαφή με τον αγωγό επαφής
(βλ. βιβλιογραφία [1])*

Μπορούμε να διακρίνουμε 3 κύρια μέρη του συστήματος που πρέπει να μοντελοποιήσουμε:

- Την κίνηση του καλωδίου
 - Τη δυναμική του παντογράφου
 - Τη δυναμική των στηριγμάτων
-
- ❖ Το καλώδιο μπορεί να μοντελοποιηθεί σαν μια ομοιόμορφη σειρά με πυκνότητα ανά μονάδα μήκους ρ , επειδή η ακαμψία του είναι μικρή. Επίσης μικρή είναι και η μετατόπισή του από το σημείο ισορροπίας. Έτσι εκτός από τη στατική μετατόπιση λόγω βαρύτητας, η κατακόρυφη μετατόπιση των καλωδίων $y(x,t)$ ικανοποιεί την εξίσωση κύματος μακριά από τον παντογράφο και τα σημεία στήριξης.
 - ❖ Η περιοχή επαφής μεταξύ του παντογράφου και του αγωγού επαφής είναι μικρή σε σύγκριση με το μήκος του αγωγού επαφής L σε μία ζώνη. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να αναπαραστήσουμε την επίδραση του παντογράφου με μία σημειακή δύναμη στο σημείο $x = Ut$, με μια κατάλληλη επιλογή του χρόνου προέλευσης.
 - ❖ Παρά το γεγονός ότι τα σημεία στήριξης μπορεί να είναι πολύ περίπλοκα (ως διατάξεις) υποθέτουμε ότι το καλώδιο είναι σταθερά συνδεδεμένο με αυτά. Αυτό έχει το μεγάλο πλεονέκτημα πως ο,τιδήποτε συμβαίνει σε μία ζώνη (άνοιγμα μεταξύ των στύλων στήριξης) της αλυσοειδούς δεν επηρεάζει αυτό που συμβαίνει στις υπόλοιπες ζώνες. Εμείς εστιάζουμε σε μία ζώνη για $0 < x < L$ εντός της οποίας ο συρμός εισέρχεται τη χρονική στιγμή $t = 0$.

❖ Ο ίδιος ο παντογράφος μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ένα γραμμικό σύστημα έτσι ώστε η δύναμη $F(t)$ που ασκείται στον αγωγό επαφής να εξαρτάται γραμμικά από την κατακόρυφη μετατόπισή του, δηλαδή $Y(t)=y(Ut, t)$. Ειδικότερα περιμένουμε:

α) Μια δύναμη ελατηρίου που προορίζεται να κρατήσει τον παντογράφο σε επαφή με τον αγωγό επαφής. Για ένα γραμμικό ελατήριο αυτό θα συμβάλει στη δύναμη $F(t)$ με έναν όρο:

$$F_0 - F_1 Y(t),$$

όπου F_0, F_1 είναι θετικοί, οπότε και $F_0 - F_1 Y(t) > 0$ για κατάλληλες τιμές του Y .

β) Μια δύναμη απόσβεσης, η οποία στην γραμμική εκδοχή είναι της μορφής:

$$-F_2 \frac{dy}{dt}.$$

Η σημειακή δύναμη μοντελοποιείται από μια συνάρτηση δέλτα με τη διαφορά ότι κινείται. Η κίνηση του αγωγού επαφής περιγράφεται από μία μη ομογενή κυματική εξίσωση:

$$\rho \frac{\partial^2 y^2}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = F(t) \delta(x - Ut) - \rho g,$$

όπου ο τελευταίος όρος εντάσσει την βαρυτική δύναμη στο μοντέλο μας. Έτσι λοιπόν με τις δυνάμεις του ελατηρίου και της απόσβεσης, η δυναμική του παντογράφου μοντελοποιείται από την σχέση:

$$F(t) = F_0 - F_1 Y(t) - F_2 \frac{dy}{dt},$$

όπου $Y(t) = y(t, t)$. Όσο για τις αρχικές και τις συνοριακές συνθήκες, ο αγωγός επαφής ξεκινάει σε κατάσταση ηρεμίας στο σχήμα ισορροπίας

του $y_0(x) = \frac{-\rho g x(L-x)}{2T}$ και η μετατόπιση του μηδενίζεται για

$x = 0, x = L$.

Θα κάνουμε το πρόβλημα αδιάστατο. Υπάρχουν δύο ταχύτητες, η U και η ταχύτητα κύματος $c = \sqrt{T/\rho}$ (την οποία χρησιμοποιούμε για κλιμακοποίηση) η οποία με την κλίμακα μήκους L για x δίνει ένα χρονοδιάγραμμα L/c . Επίσης γράφουμε $U = cu$ (μπορούμε να σκεφτόμαστε το u ως αριθμό Mach για το τραίνο). Για να κλιμακοποιήσουμε το y μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέγιστη μετατόπιση του αγωγού επαφής υπό την επίδραση της βαρύτητας $\frac{y^* \rho g L^2}{8T}$

ή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μετατόπιση που προκαλείται από μία τυπική δύναμη ενός παντογράφου. Καθώς θέλουμε να εστιάσουμε

στον παντογράφο, θα χρησιμοποιήσουμε την τελευταία σχέση κλιμακοποιώντας το y σε F^*L/T , όπου F^* ένα τυπικό μέγεθος για τη δύναμη του παντογράφου (για παράδειγμα θα μπορούσε να είναι ίση προς τη σταθερή δύναμη F_0). Με αυτές τις κλιμακοποιήσεις, το αδιάστατο πρόβλημα είναι:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f(t)\delta(x - ut) - \alpha, \quad 0 < x < 1, \quad (1.1)$$

όπου διατηρώντας τον συμβολισμό $Y(t) = y(ut, t)$, η αδιάστατη δύναμη έχει τη μορφή:

$$f(t) = f_0 - f_1 Y - f_2 \frac{dY}{dt} \quad (1.2)$$

και $\alpha = \rho g L / F^*$ είναι μία αδιάστατη παράμετρος μέτρησης του λόγου του βάρους του αγωγού επαφής προς τη δύναμη που ασκείται από τον παντογράφο.

1.1.3 ΤΟ ΣΗΜΕΙΟ ΕΠΑΦΗΣ

Σε μία προσπάθεια να υπολογίσουμε την μετατόπιση του αγωγού επαφής θα βασιστούμε κυρίως στην γενική λύση της εξίσωσης του κύματος στην συνήθη μορφή. Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να συνδυάσουμε λύσεις αυτού του τύπου κατά μήκος της τροχιάς $x = ut$, του συρμού, οπότε θα πρέπει να γνωρίζουμε την κλίση του y κατά μήκος της γραμμής. Θα πρέπει να δείχνουμε προσοχή όταν συναντούμε κάτι άγνωστο, όπως $\delta(x - ut)$ γιατί δεν είναι άμεσα ξεκάθαρο τι σημαίνει. Ένας αρκετά ασφαλής τρόπος να προχωρήσουμε είναι να αλλάξουμε συντεταγμένες. Έτσι αντικαθιστούμε το x με το $\xi = x - ut$ και χρησιμοποιούμε το ξ ως ανεξάρτητη μεταβλητή. Έτσι με απλούς υπολογισμούς και την βοήθεια του κανόνα της αλυσίδας η σχέση (1.1) γίνεται :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 2u \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial t} - (1 - u^2) \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} = f(t) \delta(\xi) - a .$$

Αφού το δεξί μέλος αυτής της εξίσωσης είναι μία κατανομή, το ίδιο ισχύει και για το αριστερό μέλος. Ωστόσο ο κανόνας της αλυσίδας και πάλι ισχύει για ομαλές αλλαγές συντεταγμένων.

Θα σταθμίσουμε τους μη ομαλούς όρους. Γνωρίζουμε ότι το y είναι συνεχές στο $\xi = 0$ και υποθέτοντας ομαλότητα στο t , το $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ πρέπει

επίσης να είναι συνεχές. Το $\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}$ είναι ο πλέον μη ομαλός όρος και έχει,

για την κύρια τάξη του μία συνάρτηση δέλτα του μεγέθους $-\frac{f(t)}{(1 - u^2)}$.

Δηλαδή το $\frac{\partial y}{\partial \xi}$, που είναι το ίδιο με το $\frac{\partial y}{\partial x}$, έχει ένα άλμα μεγέθους:

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x} \right]_{x=ut^-}^{x=ut^+} = -\frac{1}{1 - u^2} f(t) , \quad (1.3)$$

το οποίο είναι η χρονικά εξαρτώμενη γενίκευση της στατικής συνθήκης

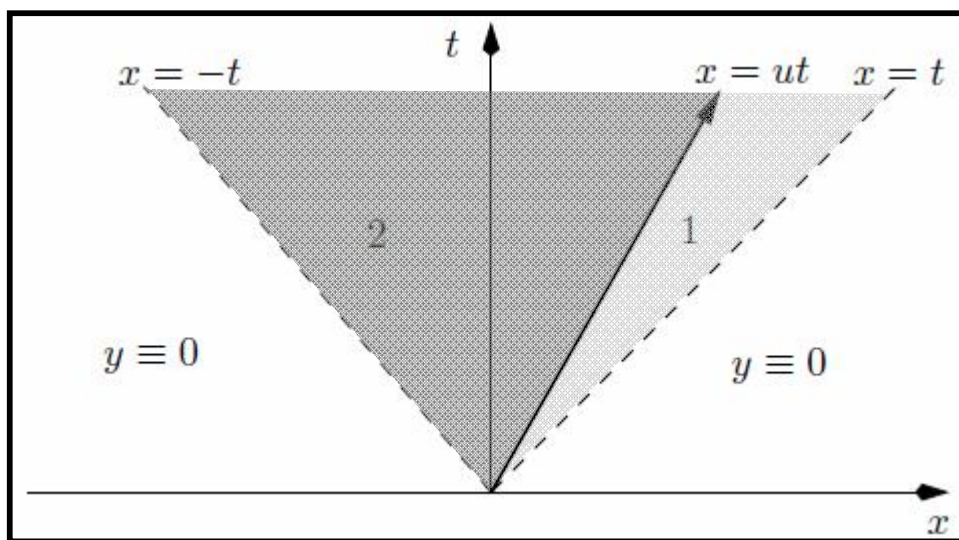
$\left[T \frac{dx}{dy} \right]_{x=a^-}^{x=a^+} = -F$. Από τον έλεγχο συμβιβαστότητας, περιμένουμε ο

παντογράφος να ωθήσει το καλώδιο επάνω προσδίδοντας ένα αρνητικό

άλμα στο $\frac{\partial y}{\partial x}$ εφόσον $u < 1$.

1.1.4 ΠΡΟΣΑΡΤΗΣΗ ΠΑΝΤΟΓΡΑΦΩΝ ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗ

Η πιο απλή κατάσταση προς μελέτη είναι αυτή, κατά την οποία η βαρύτητα θεωρείται αμελητέα ($a = 0$), έτσι ώστε ο αγωγός επαφής να βρίσκεται αρχικά σε ευθεία γραμμή και στην χρονική στιγμή $t = 0$ ο συρμός προσαρτάται στον αγωγό επαφής στη θέση $x = 0$. Σε αυτήν την περίπτωση περιμένουμε να διαδοθούν οι διαταραχές μπροστά και πίσω από το τρένο με αδιάστατη ταχύτητα 1, έτσι ώστε η μετατόπιση του αγωγού επαφής είναι μη μηδενική μόνο για $-t < x < t$ όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα:



Σχήμα 2: Χαρακτηριστικό διάγραμμα της ωστικής προσάρτησης (βλ. βιβλιογραφία [1])

Θα συνδυάσουμε τις γενικές λύσεις της εξίσωσης κύματος, της μορφής $g(t-x)+h(t+x)$, ώστε να βρούμε την τυχούσα συνάρτηση που εμπλέκεται, από τις συνθήκες του παντογράφου. Είναι σαφές ότι η μετατόπιση του αγωγού επαφής είναι ταυτοτικά 0 εκτός από τις περιοχές 1) ($ut < x < t$) και 2) ($-t < x < ut$) όπως φαίνεται στο παραπάνω διάγραμμα. Αλλιώς, η «πληροφορία» θα ταξίδευε ταχύτερα από την ταχύτητα του κύματος. Κατά μήκος των χαρακτηριστικών ευθειών $x = \pm t$ αναμένουμε μια ασυνέχεια στις παραγώγους του y , αφού γνωρίζουμε ότι μόνο αυτές μπορούν να διαδίδονται κατά μήκος των χαρακτηριστικών ευθειών.

Έχοντας κατά νου ότι όλες αυτές οι πληροφορίες προέρχονται από τον συρμό, η λύση πρέπει να έχει τη μορφή:

$$y(x,t) = \begin{cases} g_1(t-x) & , \text{ στην περιοχή 1} \\ h_2(t+x) & , \text{ στην περιοχή 2} \end{cases}$$

αναπαριστώντας τα κύματα που διαδίδονται μπρος και πίσω αντίστοιχα.

Οι συναρτήσεις g_1, h_2 είναι ακόμη άγνωστες, με εξαίρεση μόνο το ότι

$$g_1(0) = h_2(0) = 0.$$

Στο $x = ut$ η συνέχεια του αγωγού επαφής εκφράζεται ως :

$$g_1(t-ut) = h_2(t+ut) \quad . \quad (1.4)$$

Από τη σχέση (1.3) έχουμε:

$$-g_1'(t-ut) - h_2'(t+ut) = -\frac{1}{1-u^2} f(t)$$

και χρησιμοποιώντας την (1.2) για να εκφράσουμε την $f(t)$ ως προς

$Y(t) = g_1(t-ut)$ και απαλοίφοντας το $h_2(t+ut)$ και παραγωγίζοντας τη σχέση (1.4), έχουμε :

$$g_1'(t-ut) = \frac{1}{2(1-u)} f(t) = \frac{1}{2(1-u)} (f_0 - f_1 g_1(t-ut) - (1-u) f_2 g_1'(t-ut))$$

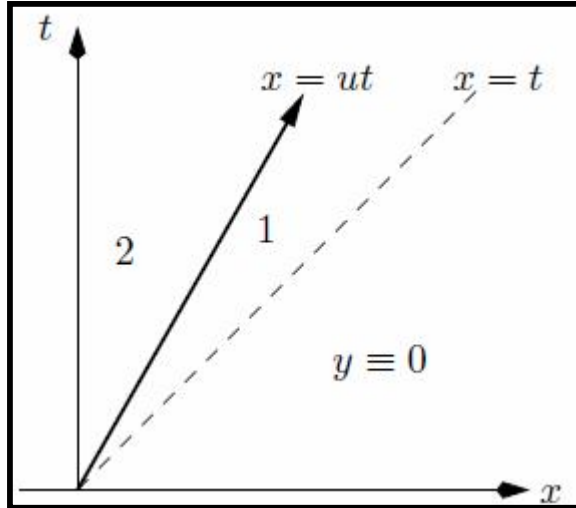
Έτσι η $g_1(\xi)$ ικανοποιεί τη συνήθη διαφορική εξίσωση:

$$(1-u)(2+f_2) \frac{dg_1}{d\xi} + f_1 g_1 - f_0 = 0$$

της οποίας η λύση βρίσκεται ως άθροισμα μιας σταθεράς και μιας φθίνουσας εκθετικής συνάρτησης. (Η μακροπρόθεσμη συμπεριφορά κάνει την μετατόπιση του παντογράφου να τείνει στην τιμή f_0/f_1 , στην οποία η δύναμη του ελατηρίου παύει να υπάρχει. Στην πράξη η μετατόπιση αυτή θα ήταν πολύ μεγάλη και ένα σημείο στήριξης θα παρεμβαλλόταν πριν φτάσουμε σε αυτήν την τιμή.)

1.1.5 ΛΥΣΗ ΚΟΝΤΑ ΣΕ ΣΗΜΕΙΟ ΣΤΗΡΙΞΗΣ

Στο παρακάτω διάγραμμα βλέπουμε τι συμβαίνει καθώς το τρένο περνά από ένα σταθερό σημείο στήριξης. Υπάρχουν πάλι δύο μόνο περιοχές όπου η μετατόπιση του αγωγού επαφής καλωδίου δεν είναι 0.



Σχήμα 3: Διάγραμμα χαρακτηριστικών καθώς ο συρμός διέρχεται από σημείο στήριξης. (βλ. βιβλιογραφία [1])

Έστω ότι η στατική μετατόπιση του καλωδίου είναι αμελητέα (αυτό είναι ρεαλιστικό κοντά σε σημείο στήριξης, όπου η μετατόπιση αυτή είναι μικρή). Η διαφορά μεταξύ αυτής της διάταξης και της ωστικής προσάρτησης του παντογράφου είναι ότι τα κύματα μπορεί να αντανακλώνται στο σταθερό σημείο στήριξης, στην περιοχή 2. Έτσι η μετατόπιση του αγωγού επαφής έχει τη μορφή :

$$y(x,t) = \begin{cases} g_1(t-x) & , \text{ στην περιοχή 1} \\ g_2(t-x) + h_2(t+x) & , \text{ στην περιοχή 2} \end{cases} .$$

Η συνέχεια του καλωδίου στο $x = ut$ μας δίνει την ακόλουθη σχέση:

$$g_1(t-ut) = g_2(t-ut) + h_2(t+ut) \quad (1.5)$$

και η δύναμη του παντογράφου είναι:

$$-g_1'(t-ut) + g_2'(t-ut) - h_2'(t+ut) = -\frac{1}{1-u^2} f(t) \quad (1.6)$$

$$-g_1'(t-ut) + g_2'(t-ut) - h_2'(t+ut) = -\frac{1}{1-u^2} (f_0 - f_1 g_1(t-ut) - f_2 (1-u) g_1'(t-ut)) \quad (1.7)$$

Τέλος, έχουμε τη συνθήκη της σταθερής στήριξης:

$$g_2(t) + h_2(t) = 0 \quad .$$

Τώρα έχουμε 3 εξισώσεις για τρεις άγνωστες συναρτήσεις και θα απαλείψουμε πρώτα το h_2 από τις (1.5) και (1.7) παίρνοντας τις σχέσεις:

$$g_1(t - ut) = g_2(t - ut) - g_2(t + ut)$$

και

$$\begin{aligned} -g_1'(t - ut) + g_2'(t - ut) + g_2'(t + ut) &= \\ &= -\frac{1}{1-u^2} \left(f_0 - f_1 g_1(t - ut) - (1-u) f_2 g_1'(t - ut) \right) \end{aligned}$$

Στη συνέχεια μπορούμε να απαλείψουμε το $g_1(t - ut)$ ώστε να γίνει (μετά από πράξεις):

$$(1-u)(2+f_2)g_2'(t+ut) + f_1 g_2(t+ut) = -f_0 + f_1 g_2(t-ut) + (1-u)f_2 g_2'(t-ut) \quad (1.8)$$

Λύνοντας αυτή την εξίσωση βρίσκουμε την g_2 και ως εκ τούτου την g_1 και τη δύναμη του παντογράφου.

Το δεξί μέλος περιέχει τις τιμές της συνάρτησης g_2 για πρότερες χρονικές στιγμές απ' αυτές στο αριστερό μέλος. Γι' αυτό καταλήξαμε όχι σε συνήθη διαφορική εξίσωση αλλά σε ένα είδος υστερημένης διαφορικής εξίσωσης για την g_2 . Αυτό το είδος εξίσωσης έχει γίνει γνωστό και ως «εξίσωση του παντογράφου» και οδήγησε σε σημαντική βιβλιογραφία τις δύο τελευταίες δεκαετίες.

Θα δούμε την περίπτωση για τη σχέση (1.8) για την ειδική περίπτωση όπου $f_1 = 0$. Τότε αυτή είναι αμέσως ολοκληρώσιμη και δίνει:

$$(2+f_2)g_2(t+ut) = -f_0 t + f_2 g_2(t-ut) \quad .$$

Γράφοντας $\tau = t(1+u)$ και $\mu = \frac{1-u}{1+u} < 1$, έχουμε:

$$(2+f_2)g_2(\tau) = -\frac{f_0}{1+u}\tau + f_2 g_2(\mu\tau) \quad .$$

Έχουμε εντοπίσει τη συγκεκριμένη λύση $g_2(\tau) = a\tau$, όπου το a υπολογίζεται εύκολα και θα δείξουμε ότι αυτή είναι η μοναδική λύση. Εξετάζουμε λοιπόν τη διαφορά μεταξύ δύο λύσεων, οι οποίες ικανοποιούν την ομογενή εξίσωση:

$$g(\tau) = \frac{f_2}{2+f_2} g(\mu\tau) \quad , \quad g(0) = 0.$$

Είναι $\frac{f_2}{2+f_2} < 1$. Έστω ότι για σταθερό τ , είναι $g(\tau) = g_0 \neq 0$.

Αυτό σημαίνει ότι $|g(\mu\tau)| > |g_0|$ και επαναλαμβάνοντας ότι:

$$g(\mu^n \tau) = \left(\frac{2+f_2}{2}\right)^n g_0 .$$

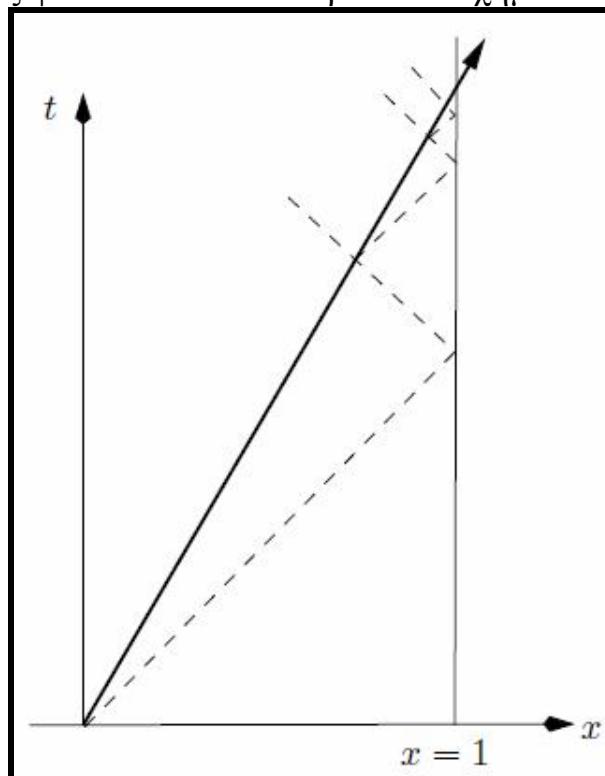
Αλλά καθώς $n \rightarrow \infty$, $\mu^n \tau \rightarrow 0$ και $|g(\mu^n \tau)| \rightarrow \infty$ άτοπο!

Άρα $g_0 = 0$ και η λύση είναι μοναδική.

1.1.6 ΛΥΣΗ ΓΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΗ ΤΗ ΖΩΝΗ

Θα δούμε την κίνηση του καλωδίου σε όλο το μήκος της ζώνης μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων στήριξης. Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να αναλύσουμε αυτήν την περίπτωση, λόγω της πιθανότητας, η λύση να συσσωρεύεται στο τέλος της ζώνης στο σημείο $x = 1$.

Το διάγραμμα της χαρακτηριστικής, είναι πλέον αρκετά πιο πολύπλοκο, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 4: Διάγραμμα χαρακτηριστικής για ολόκληρη την ζώνη.

Αν $1/3 < u < 1$ όπως σε αυτό το διάγραμμα, καμία ανάκλαση των χαρακτηριστικών από το $x = 0$ δεν φτάνει στο τρέινο.
(βλ. βιβλιογραφία [1])

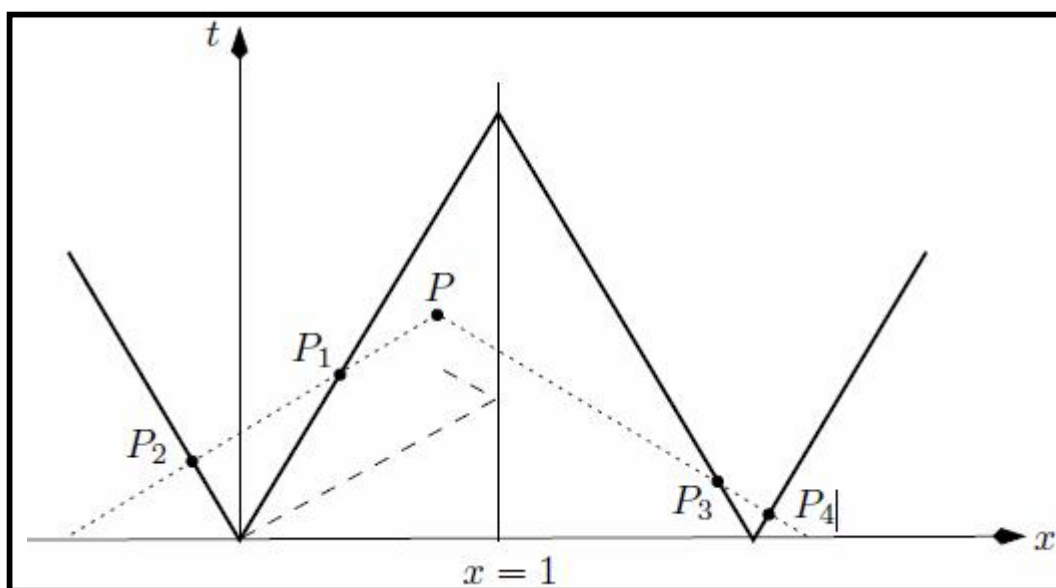
Η αρχική διαταραχή διαδίδεται ως ασυνέχεια κλίσης κατά μήκος της χαρακτηριστικής $x = t$ όμως στη συνέχεια ανακλάται στο σημείο στήριξης $x = 1$. Έχουμε λοιπόν μία αντανακλώμενη χαρακτηριστική $x = 2 - t$ με άλλη ασυνέχεια κλίσης και αυτό με τη σειρά του ανακλάται από την τροχιά του τρένου και ούτω καθεξής, ώστε δημιουργείται μία άπειρη σειρά περιοχών που διαχωρίζονται από τις χαρακτηριστικές, στις οποίες η λύση είναι λεία.

Ήδη έχουμε μελετήσει τις περιοχές κοντά στο πρώτο σημείο στήριξης και γνωρίζουμε από πριν ότι όταν η δύναμη του παντογράφου είναι το άθροισμα μιας σταθεράς και ενός γραμμικού όρου αποσβέσεως, η μετατόπιση του παντογράφου $Y(t) = y(ut, t)$ είναι γραμμική στο t . Αυτή

είναι η λύση μέχρι την χρονική στιγμή $t_1 = \frac{2}{1+u}$ κατά την οποία η

αντανάκλαση ($x = 2 - t$) της κύριας χαρακτηριστικής ($x = t$) συναντά την τροχιά του τρένου. Έτσι λοιπόν η μετατόπιση του παντογράφου περιγράφεται από μία κατά τμήματα γραμμική συνάρτηση του t σε ύστερες χρονικές στιγμές και αυτό μπορούμε να το δείξουμε σε αυτή την περίπτωση.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η διαδρομή του τρένου με τις εικόνες του στα στηρίγματα:



Σχήμα 5: Το χαρακτηριστικό τρίγωνο για $t > 2/(1 + u)$. Οι διάστικτες γραμμές είναι οι χαρακτηριστικές, η διακεκομμένη γραμμή είναι η κύρια χαρακτηριστική και η αντανάκλασή της. Η παχιά συμπαγής γραμμή είναι η τροχιά του τρένου με τις εικόνες του στα σημεία στήριξης. (βλ. βιβλιογραφία [1])

Θα επεκτείνουμε το πεδίο ορισμού από το διάστημα $(0,1)$ σε όλη την ευθεία των πραγματικών αριθμών έτσι, ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες στήριξης. Αυτό σημαίνει ότι η (πλασματική) δύναμη του παντογράφου από τα εναλλασσόμενα με αρνητική κλίση τμήματα της εικόνας της τροχιάς του τρένου είναι αντίθετη της δύναμης από τα τμήματα με θετική κλίση και έτσι είναι και η μετατόπιση του παντογράφου. Η διευρυμένη τροχιά του τρένου φαίνεται στο *σχήμα 5*, το οποίο επίσης δείχνει ένα χαρακτηριστικό τρίγωνο, το οποίο καλούμε Δ , για ένα σημείο P πάνω από την αντανάκλαση της κύριας χαρακτηριστικής (εδώ θα πρέπει να σημειώσουμε ότι ήδη γνωρίζουμε την λύση κάτω από την κύρια χαρακτηριστική).

Έστω λοιπόν ότι ολοκληρώνουμε την κυματική εξίσωση $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f(t)\delta(x-ut) - \alpha$, $0 < x < 1$ (και πάλι με $\alpha = 0$ για λόγους απλούστευσης) στο εσωτερικό του χαρακτηριστικού τριγώνου Δ . Θα πρέπει να προσέξουμε τα άλματα κατά μήκος της τροχιάς του συρμού, έτσι θα ολοκληρώσουμε ξεχωριστά στα πολύγωνα που δημιουργούν το τρίγωνο και θα εξετάσουμε τα ολοκληρώματα κατά μήκος των δύο πλευρών της τροχιάς του συρμού. Χρησιμοποιώντας λοιπόν το θεώρημα Green παίρνουμε:

$$\int_{\Delta} \frac{\partial y}{\partial x} dt + \frac{\partial y}{\partial t} dx + \int_{\Gamma\Delta} \left[\frac{\partial y}{\partial x} \right] dt + \left[\frac{\partial y}{\partial t} \right] dx = 0$$

όπου, όπως και πριν, οι αγκύλες συμβολίζουν το άλμα στα περιεχόμενα τους και όπου $\Gamma\Delta$, είναι η τροχιά του συρμού.

Το πρώτο ολοκλήρωμα μας δίνει $2y(P) = 2y(x, t)$. Από την τροχιά του συρμού γνωρίζουμε ότι το y από μόνο του δεν έχει άλμα, έτσι $\left[\pm u \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} \right] = 0$ με «+» είναι τα τμήματα ανοδικής κλίσης και με «-» τα

άλλα. Αυτό μας επιτρέπει να εξαλείψουμε το $\left[\frac{\partial y}{\partial t} \right]$ και στη συνέχεια να χρησιμοποιήσουμε το ότι $dx = \pm u dt$ και την συνθήκη του άλματος του παντογράφου, για να δείξουμε ότι:

$$2y(P) = \int_{\Gamma\Delta} \pm f(s) ds ,$$

όπου πάλι το « \pm » λαμβάνει υπόψη τις εικονικές δυνάμεις.

Το επόμενο βήμα είναι να αφήσουμε το P να πλησιάσει την τροχιά του συρμού και να υπολογίσουμε την t -συνιστώσα των σημείων P_2, P_3 και P_4 ($P_1 \equiv P$). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα:

$$2y(ut, t) = 2Y(t) = -\int_0^{ut} + \int_0^t - \int_0^{t-2} f(s) ds ,$$

όπου $\mu = \frac{1-u}{1+u}$. Αν παραγωγίσουμε ως προς t , μπορούμε να εξαλείψουμε

το $\frac{dY}{dt}$ στο αριστερό μέλος επιλύοντας την σχέση (1.2) ως προς $\frac{dY}{dt}$ έτσι

ώστε να πάρουμε μια πραγματική διαφορική εξίσωση παντογράφου.

Αυτό μας δίνει:

$$\frac{2(f_0 - f(t))}{f_2} = -\mu f(\mu t) + f(t) - \frac{1}{\mu} f\left(\frac{t}{\mu} - \frac{2}{1-u}\right) + f\left(t - \frac{2}{1+u}\right) \quad (1.9)$$

και πάλι έχουμε μία υστερημένη εξίσωση αλλά τώρα με 3 υστερήσεις.

Τα σημεία στα οποία οι ανακλώμενες χαρακτηριστικές του σχήματος 4 συναντούν την τροχιά του συρμού είναι:

$$t = t_n = \frac{1}{u}(1 - \mu^n) .$$

Αυτές είναι οι μόνες θέσεις στις οποίες μπορεί να προκύψει οποιοδήποτε είδος ασυνέχειας στην $f(t)$. Επιπλέον για $n > 1$, έχουμε:

$$t_n - \frac{2}{1+u} = \mu t_{n-1} , \quad \frac{t_n}{\mu} - \frac{2}{1-u} = t_{n-1} .$$

Έτσι αν το t στη σχέση (1.9) είναι ίσο με ένα από τα t_n , τότε όλοι οι όροι στο δεξί μέλος εμφανίζονται στην ίδια εξίσωση στο $t = t_n$ ή $t = t_{n-1}$. Χρειαζόμαστε μόνο να ψάξουμε για λείες κατά τμήματα συναρτήσεις μεταξύ των σημείων αυτών και να τις ενώσουμε κατά μήκος του $t = t_n$, χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.9) ώστε να συσχετίσουμε την ασυνέχεια στο t_n με αυτή στο t_{n-1} .

$$\left[f(t) \right]_{t_n^-}^{t_n^+} = \frac{f_2}{\mu(2+f_2)} \left[f(t) \right]_{t_{n-1}^-}^{t_{n-1}^+}$$

$$\left[\frac{df}{dt} \right]_{t_n^-}^{t_n^+} = \frac{f_2}{\mu^2(2+f_2)} \left[\frac{df}{dt} \right]_{t_{n-1}^-}^{t_{n-1}^+} .$$

Αυτά είναι αρκετά για να καθορίσουμε μία κατά τμήματα γραμμική λύση για τις τιμές του t ανάμεσα στα t_n και δείχνει ότι η λύση συμπεριφέρεται

καλώς καθώς $n \rightarrow \infty$ εφόσον $\frac{f_2}{\mu(2+f_2)} < 1$.

1.2 ΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ ΠΑΝΤΟΓΡΑΦΟΥ – ΑΛΥΣΟΕΙΔΟΥΣ

1.2.1 ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Το σύνολο παντογράφος – αλυσοειδής μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από δύο υποσυστήματα που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, κάτω από συνθήκες περιορισμών. Το σύστημα των δυναμικών εξισώσεων που εξειδικεύεται για μία χρονική στιγμή t_n δίνεται από την σχέση (1.10):

$$\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_n \\ \ddot{\lambda}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_n \\ \dot{\lambda}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_n & \Phi_n^t \\ \Phi_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_n \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_n \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

όπου

M : Είναι ο πίνακας μάζας του συστήματος

C_n : Είναι ο πίνακας απόσβεσης

K_n : Είναι ο πίνακας ακαμψίας του συστήματος

Φ_n : Είναι ο πίνακας περιοριστικών συνθηκών

R_n : Είναι το διάνυσμα ανεξάρτητου όρου

q_n : Είναι το διάνυσμα γενικευμένων συντεταγμένων

λ_n : Είναι το διάνυσμα πολλαπλασιαστών του Lagrange που είναι
ισοδύναμοι με τις περιορισμένες δυνάμεις.

Σε αυτές τις εξισώσεις μόνο ο πίνακας μάζας είναι σταθερός καθ' όλη τη διάρκεια, ενώ οι υπόλοιποι όροι μπορούν να διαφέρουν σε κάθε χρονική στιγμή t_n .

Αν g είναι το πλήθος των γενικευμένων συντεταγμένων και r είναι το πλήθος των περιορισμών, το σύστημα (1.10) παρουσιάζει $g + r$ εξισώσεις με $g + r$ αγνώστους. Το πλήθος των γενικευμένων συντεταγμένων εξαρτάται από τα μέτρα της αλυσοειδούς που θεωρούμε κατά την τμηματοποίηση των αγωγών και το πλήθος και τον τύπο των παντογράφων.

Το πλήθος των περιοριστικών συνθηκών εξαρτάται από το πλήθος και τον τύπο των παντογράφων και από τους αγωγούς επαφής με τους οποίους αλληλεπιδρά κάθε παντογράφος.

Από την άλλη, κάθε όρος και πίνακας στην σχέση (1.10) μπορεί να παραγοντοποιηθεί σε δύο όρους, ο ένας αφορά στην αλυσοειδή και παριστάνεται με δείκτη 1 και ο άλλος αφορά στον παντογράφο (ή στους παντογράφους) και παριστάνεται με δείκτη 2 . Έτσι έχουμε τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} &= \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_2 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{1n} & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{2n} \end{pmatrix}, \mathbf{C}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{1n} & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_{2n} \end{pmatrix}, \\
\mathbf{R}_n &= \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{1n} & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_{2n} \end{pmatrix}, \mathbf{q} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_{1n} \\ \mathbf{q}_{2n} \end{pmatrix}
\end{aligned} \quad . \quad (1.11)$$

1.2.2 ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΑΛΥΣΟΕΙΔΟΥΣ

Ο εναέριος αγωγός ηλεκτροδότησης (ή αλυσοειδής) συναρμολογείται σε μία σειρά ανοιγμάτων μεταξύ στύλων στήριξης, κανονικά 15 – 20 στο πλήθος, με την έκταση του κάθε ενός, περίπου στα 60m. Όταν η αλυσοειδής μοντελοποιείται, οι διαφορετικοί τύποι των στοιχείων μπορούν να ληφθούν υπόψη: το φέρον καλώδιο, ο αγωγός επαφής και οι αναρτήρες. Οι ζώνες μετάβασης της κάθε γραμμής επικαλύπτονται, και παρουσιάζουν μία ειδική διαμόρφωση στον αγωγό επαφής, ώστε να επιτευχθεί η ομαλή μετάβαση του παντογράφου (σχήματα 6 & 7 παρακάτω).

Καθώς το φέρον καλώδιο και ο αγωγός επαφής τεντώνονται από τροχαλίες και ανεξάρτητα αντίβαρα, που εντοπίζονται στο τέλος της κάθε γραμμής, η αλυσοειδής είναι ένα συνεχές σύστημα που μπορεί να μοντελοποιηθεί εφαρμόζοντας τις τεχνικές της ανάλυσης της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων (*Finite Element Method / FEM*).

Όσον αφορά στα φέροντα καλώδια και στους αγωγούς επαφής, θεωρούμε την ακόλουθη διαφορική εξίσωση Euler – Bernoulli που αναφέρεται σε εύκαμπτο προεντεταμένο καλώδιο σε κίνηση:

$$\left(\frac{p}{g} \right) \ddot{y} + Ely^{(4)} - Ty'' + p = 0 \quad (1.12)$$

όπου,

$$\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad y^{(4)} = \frac{d^4y}{dx^4}$$

p: Είναι το βάρος του καλωδίου ανά μονάδα μήκους

g: Είναι η γνωστή μας επιτάχυνση της βαρύτητας

y: Είναι η κατακόρυφη θέση ενός τυχαίου σημείου του καλωδίου

T: Είναι η τάση του καλωδίου

I: Είναι η ροπή αδράνειας γύρω από διαμετρικό άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του καλωδίου (*diametric moment of inertia*).

E: Είναι η ελαστικότητα του υλικού (*elastic module of the material*)

Τα καλώδια μοντελοποιούνται ως προεντεταμένα στοιχεία δοκού, με δύο γενικευμένες συντεταγμένες από τον κόμβο: την κατακόρυφη μετατόπιση και γωνία στροφής. Οι αναρτήρες συμπεριφέρονται σαν

ελαστικές ράβδοι του τελικού μήκους συναρμολόγησης, οι οποίοι παραμορφώνονται από ένα αρχικό μήκος. Σε αυτή την περίπτωση, κάθε κόμβος παρουσιάζει μόνο μία γενικευμένη συντεταγμένη που αφορά στην κατακόρυφη μετατόπιση.

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι οι αναρτήρες λειτουργούν μόνο υπό τάση (μηχανική) έτσι, ώστε η επίδραση τους στις δυναμικές εξισώσεις, και η συμπερίληψή τους στον πίνακα ακαμψίας και στον ανεξάρτητο όρο, να λαμβάνονται υπόψη μόνο όταν το ισχύων τελικό μήκος, μετρούμενο ως η απόσταση μεταξύ δύο ακραίων κόμβων, θα είναι μεγαλύτερο ή ίσο με το αρχικό μήκος. Υποτίθεται ότι το μήκος και η τάση επαφής των αναρτήρων έχει υπολογιστεί σε προηγούμενη στατική μελέτη.

Η επίδραση του βραχίονα στήριξης επίσης έχει ληφθεί υπόψη. Το στοιχείο αυτό είναι μια αρθρωτή ράβδος, που συμπεριφέρεται ως ημιάκαμπτη στήριξη, και του οποίου η λειτουργικότητα συνίσταται στην στήριξη του αγωγού επαφής ώστε αυτός να διαγράφει ένα ζιγκ – ζαγκ, ώστε να φθείρει ομοιόμορφα την επιφάνεια τριβής του παντογράφου.

Η επίδραση του βραχίονα στήριξης στον πίνακα ακαμψίας και στον ανεξάρτητο όρο μπορεί να προσεγγίζει σε αυτήν ενός ελατηρίου σκληρότητας k_b που ασκεί μία δυναμική δύναμη στον αγωγό επαφής, που δίνεται από την εξίσωση:

$$f_A = f_0 + (y_0 - y_A)k_A \quad (1.13)$$

όπου:

f_A : Αναπαριστά την δυναμική δύναμη που ασκείται στον βραχίονα στήριξης.

f_0 : Αναπαριστά την στατική δύναμη συνδεσμολογίας.

y_0 : Αναπαριστά το στατικό ύψος συναρμολόγησης του κόμβου (αυτή είναι μία σταθερή τιμή).

y_A : Είναι μία γενικευμένη συντεταγμένη που σχετίζεται με τον κόμβο του βραχίονα στήριξης.

k_A : Είναι η σκληρότητα του βραχίονα στήριξης, που παίρνουμε με την γραμμικοποίηση των εξισώσεων στατικής και εξαρτάται από τις συνθήκες συνδεσμολογίας.

Για τον πίνακα μάζας των καλωδίων, υποθέτουμε ότι είναι ένας διαγώνιος πίνακας. Λαμβάνοντας υπόψη μας όλα αυτά, είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε τον πίνακα μάζας, τον πίνακα ακαμψίας και τον ανεξάρτητο όρο στην αλυσοειδή.

Για τον πίνακα απόσβεσης της αλυσοειδούς, έχουμε υποθέσει ότι έχουμε μία απόσβεση Rayleigh (είναι η μορφή απόσβεσης, η οποία είναι ανάλογη της ακαμψίας και της μάζας του συστήματος που μελετούμε),

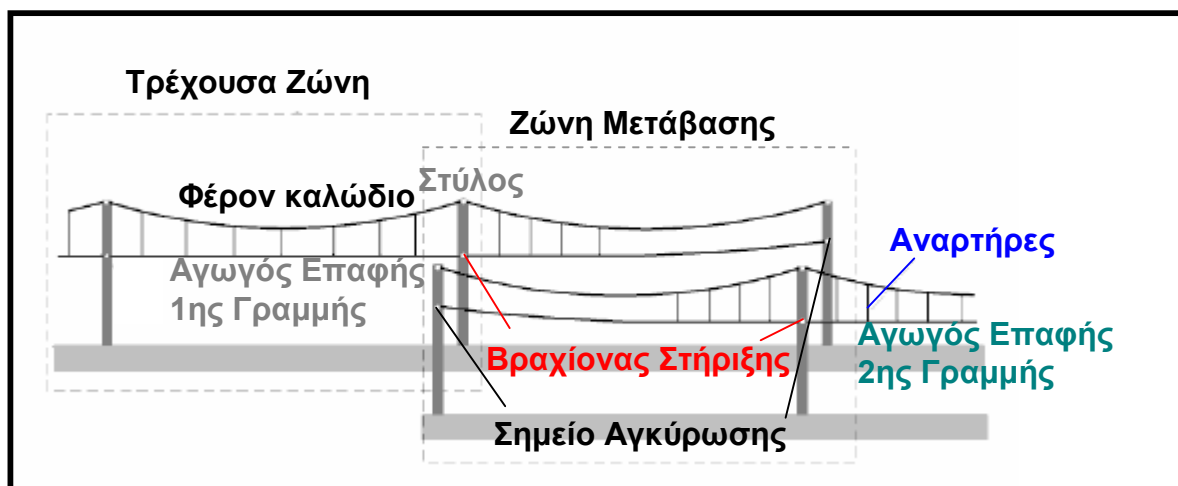
όπου ο πίνακας απόσβεσης είναι ένας απευθείας συνδυασμός των πινάκων μάζας και ακαμψίας.

$$C_{in} = \alpha M_1 + \beta K_{in} \quad . \quad (1.14)$$

1.2.3 ΔΙΑΤΑΞΗ ΤΗΣ ΖΩΝΗΣ ΜΕΤΑΒΑΣΗΣ

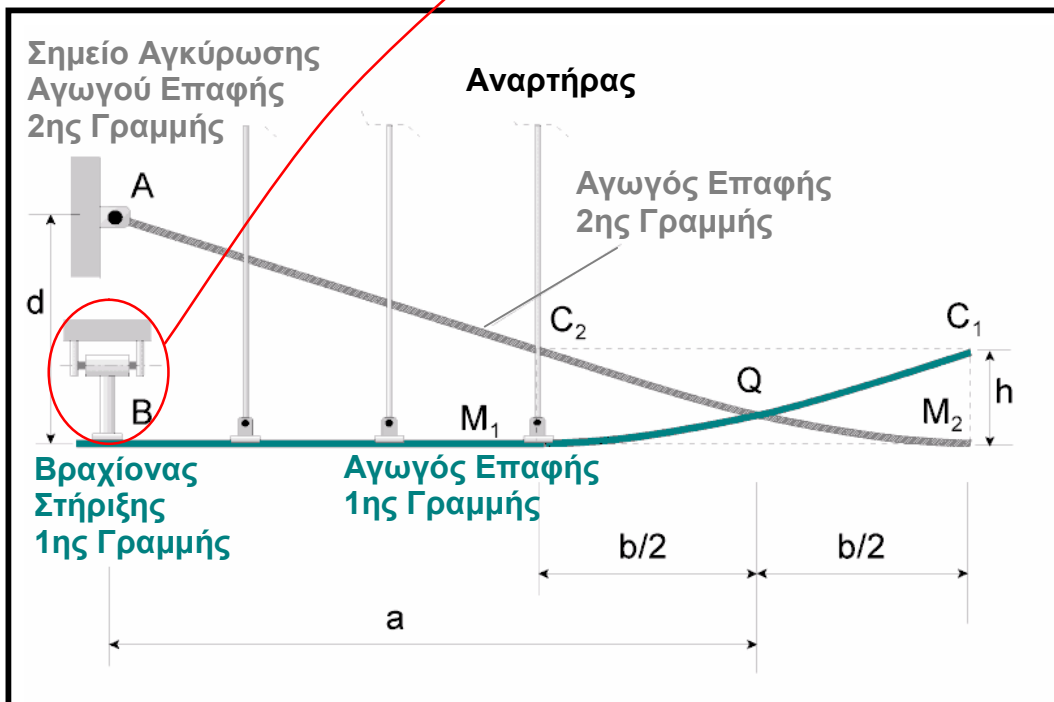
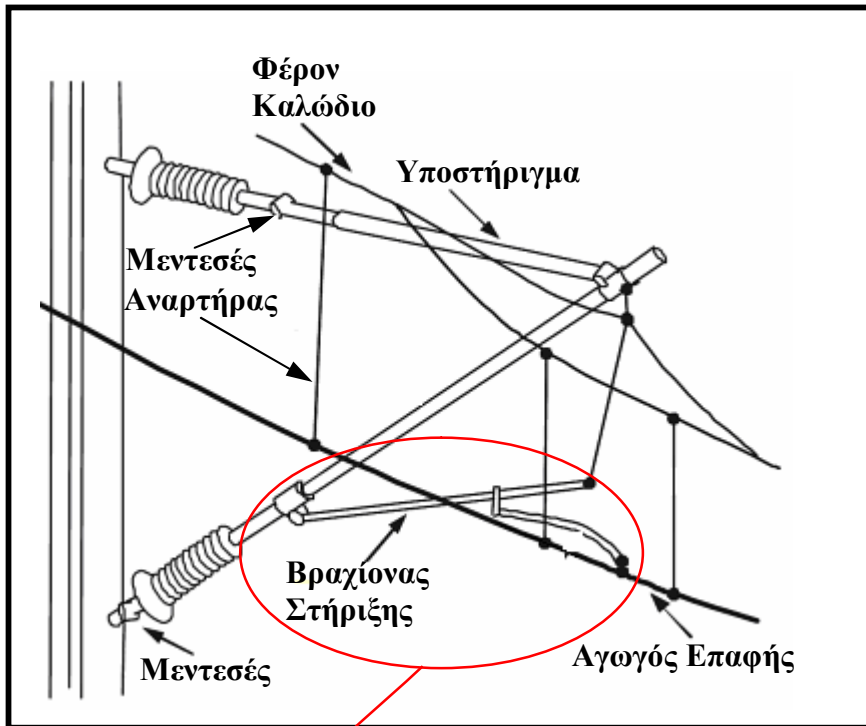
Ο παντογράφος αρχικά αλληλεπιδρά με μόνο έναν αγωγό επαφής κατά μήκος της τροχιάς του, αλλά όταν ο παντογράφος φτάνει στην τελευταία ζώνη, η οποία είναι η ζώνη μετάβασης, τότε προοδευτικά χάνει την επαφή του με τον αγωγό επαφής της γραμμής εξόδου (γραμμή 1 του σχήματος 7) και αποκτά επαφή με τον αγωγό επαφής της γραμμής εισόδου (γραμμή 2 του σχήματος 7), και μπορεί να αλληλεπιδρά με δύο καλώδια διαφορετικών γραμμών ταυτόχρονα. Για να επιτευχθεί η ομαλότερη αλλαγή του παντογράφου από την μία γραμμή στην άλλη, οι αγωγοί επαφής πρέπει να διαταχθούν με ειδικό τρόπο.

Υποτίθεται ότι η τροχιά του παντογράφου είναι από αριστερά προς τα δεξιά. Η ζώνη της 1ης γραμμής είναι η μεταβατική ζώνη εξόδου και η ζώνη της 2ης γραμμής είναι η μεταβατική ζώνη εισόδου. Και οι δύο γραμμές έχουν συμμετρική διάταξη, της οποίας το μισό αριστερό μέρος απεικονίζεται στο σχήμα 7.



Σχήμα 6: (Επικάλυψη των ζωνών μετάβασης των δύο γραμμών)
βλ. βιβλιογραφία [4]

Παρατηρούμε ότι στην μεταβατική ζώνη εξόδου (της 1ης γραμμής) παρουσιάζονται μερικοί αναρτήρες στο αριστερό μέρος. Από τον τελευταίο αναρτήρα, ο αγωγός επαφής ανυψώνεται μέχρι το σημείο αγκύρωσης στο δεξί άκρο της ζώνης μετάβασης (συμμετρικό του σημείου αγκύρωσης της 2ης γραμμής που φαίνεται στο σχήμα 7).



Σχήμα 7: (Διάταξη των αγωγών επαφής σε ζώνη μετάβασης)

Οι αγωγοί επαφής των δύο γραμμών διασταυρώνονται στο σημείο Q που βρίσκεται στο κέντρο των ζωνών μετάβασης. Για να έχουμε μία βολική διάταξη, θα ήταν αρκετό να ορίσουμε την θέση των αναρτήρων και το ύψος d του σημείου στηρίξεως A, του αγωγού επαφής. Αν E είναι η ελαστικότητα της αλυσοειδούς στο μέσο της ζώνης και F είναι μια μέση εκτίμηση της κατακόρυφης δύναμης του παντογράφου που

πρόκειται να κυκλοφορήσει στην γραμμή, αυτή η δύναμη θα παράγει μία ανύψωση h , των καλωδίων που δίνεται από την σχέση:

$$h = E \cdot F \quad . \quad (1.15)$$

Υπάρχει ένα μέρος του αγωγού επαφής που κρέμεται ελεύθερα ανάμεσα στον τελευταίο αναρτήρα και στο σημείο στήριξης, το οποίο έχει παραβολικό σχήμα, όπου M_1 και M_2 είναι τα ελάχιστα ύψη των αγωγών επαφής της 1ης και της 2ης γραμμής αντίστοιχα. Η ανύψωση h μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να καθορίσουμε ένα τμήμα της παραβολής ανάμεσα στα σημεία M_1 και C_1 από την 1η γραμμή ή M_2 και C_2 από την 2η γραμμή, τα οποία κατά την απουσία δυναμικών αποτελεσμάτων, εγγυώνται την κοινή επαφή του παντογράφου με τους δύο αγωγούς επαφής. Για αυτό, το σημείο διασταυρώσεως Q , των αγωγών, το οποίο βρίσκεται στο κέντρο της ζώνης, πρέπει να βρίσκεται στο μέσο του τμήματος M_1C_1 ή του τμήματος M_2C_2 .

Έστω T η τάση του αγωγού επαφής και p το βάρος του αγωγού ανά μονάδα μήκους. Τότε η απόσταση του σημείου C_1 από το σημείο M_1 δίνεται από τη σχέση:

$$b = \sqrt{\frac{2Th}{p}} \quad . \quad (1.16)$$

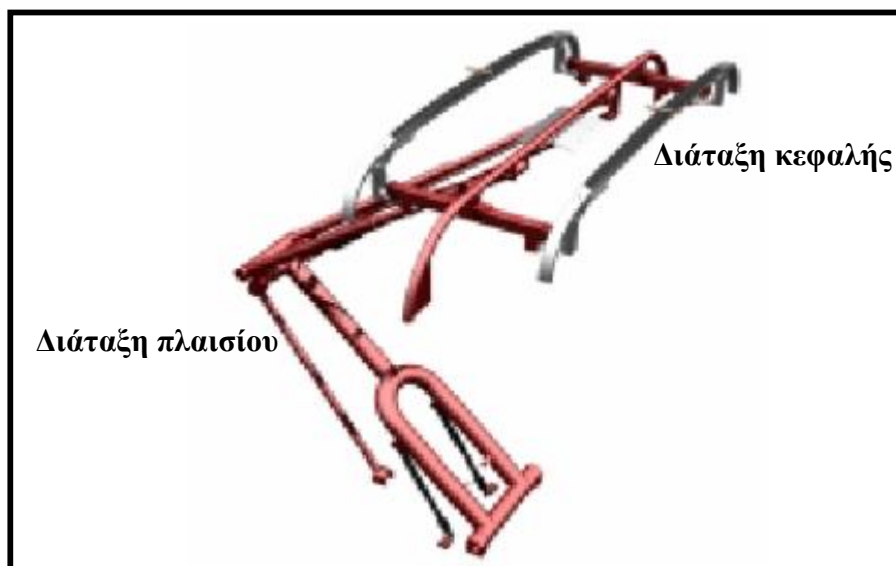
Αν a είναι το μισό του μήκους του ανοίγματος της ζώνης μετάβασης, τότε το ύψος του σημείου στήριξης A του αγωγού επαφής της 2ης γραμμής είναι:

$$d = \frac{p \left(a + \frac{b}{2} \right)^2}{2T} \quad . \quad (1.17)$$

Το ίδιο ύψος d υιοθετείται και για τον αγωγό επαφής της 1ης γραμμής βεβαιώνοντας ότι, με απουσία δυναμικών αποτελεσμάτων, ο παντογράφος θα έρθει σε επαφή με τους αγωγούς ανάμεσα στα σημεία $C_2 - M_2$ και $C_1 - M_1$. Ωστόσο αυτή η συνθήκη μπορεί να αλλάξει, μεταβάλλοντας την απόσταση από τα M_1 και M_2 προς το κέντρο Q , παίρνοντας διαφορετικές διατάξεις. Σε μία συνήθη συναρμολόγηση, υποτίθεται ότι το κέντρο του ανοίγματος αντιστοιχεί στο κέντρο της στατικής ασφαλούς ζώνης επαφής $C_2 - M_2$ και $C_1 - M_1$, αλλά αν θέλουμε να έχουμε μία πιο ακριβή διάταξη χρειάζεται να εισάγουμε δυναμικές θεωρήσεις.

1.2.4 ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΟΥ ΠΑΝΤΟΓΡΑΦΟΥ

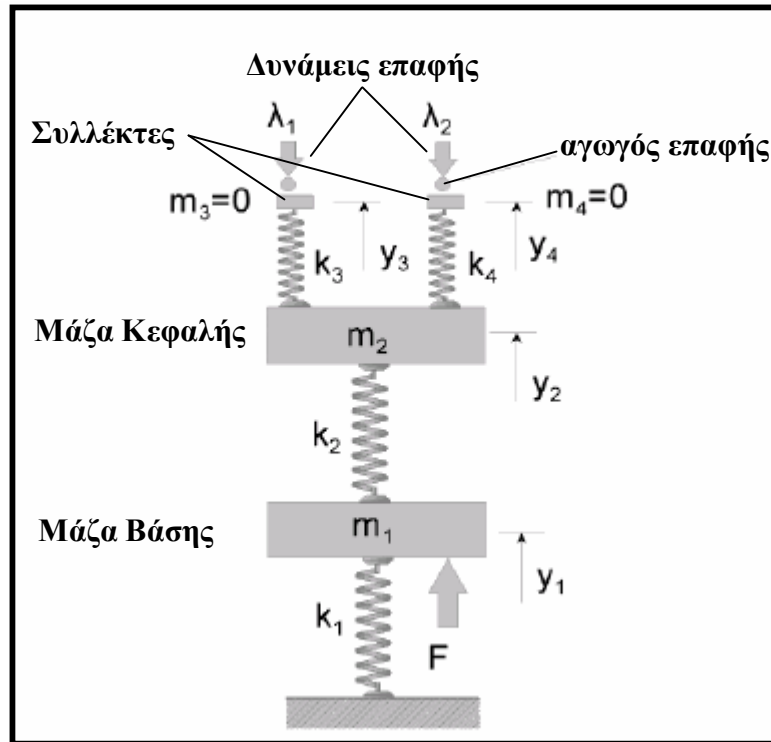
Ο παντογράφος είναι ένα αρθρωτό σύστημα, το οποίο λαμβάνει την ηλεκτρική ενέργεια από την αλυσοειδή.



Σχήμα 8: Παντογράφος σε έκταση.

Ο παντογράφος μοντελοποιείται ως ένα σύνολο μαζών, ελατηρίων, και αμορτισέρ. Αν και οι τιμές αυτών των παραμέτρων μπορούν να ληφθούν από έναν έλεγχο στο εργαστήριο, γενικά αυτές οι τιμές συνήθως προσδιορίζονται από τον κατασκευαστή. Κάθε μάζα έχει μία γενικευμένη συντεταγμένη που αντιστοιχεί στην κατακόρυφη μετατόπιση της.

Ένα μοντέλο παντογράφου με δύο μάζες, ο οποίος μπορεί να αλληλεπιδρά με τους αγωγούς επαφής των μεταβατικών ζωνών εισόδου και εξόδου, δίνεται στο *σχήμα 9*. Για να κάνουμε την ολοκλήρωση της διαφορικής εξίσωσης ευκολότερη, δύο επιπρόσθετα στοιχεία, χωρίς καθόλου μάζα έχουν προστεθεί πάνω από την μάζα της κεφαλής. Τα στοιχεία αυτά τα λέμε **συλλέκτες**, δέχονται την δύναμη από τα καλώδια και συνδέονται με την μάζα της κεφαλής με ένα άκαμπτο ελατήριο. Φυσικώς η σκληρότητα του ελατηρίου αναπαριστά την πραγματική σκληρότητα της επαφής καλωδίου – πλάκας.



Σχήμα 9: Διάταξη των αγωγών επαφής σε ζώνη μετάβασης.
βλ. βιβλιογραφία [3]

Τα λ_1, λ_2 αναπαριστούν τις υπό συνθήκη δυνάμεις ή αλλιώς την δύναμη επαφής παντογράφου – αλυσοειδούς. Είναι δυνατόν να έχουμε διάφορους περιορισμούς, γιατί ο παντογράφος μπορεί να αλληλεπιδρά είτε με τον αγωγό επαφής της 1ης γραμμής, είτε με τον αγωγό επαφής της 2ης γραμμής, είτε και με τους δύο, είτε με κανέναν από τους δύο.

Ο πίνακας μάζας του μοντέλου του παντογράφου είναι ένας διαγώνιος πίνακας, με δύο μηδενικά στοιχεία που αντιστοιχούν στις μάζες των συλλεκτών m_3 και m_4 . Ο πίνακας μάζας και ο πίνακας ακαμψίας είναι:

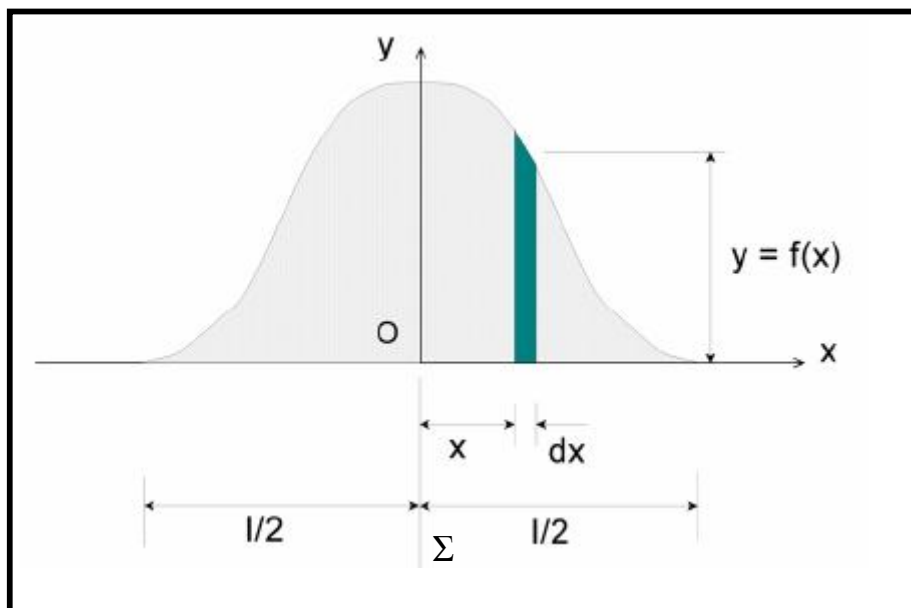
$$\begin{aligned}
 M_2 &= \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 K_2 &= \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 + k_4 & -k_3 & -k_4 \\ 0 & -k_3 & k_3 & 0 \\ 0 & -k_4 & 0 & k_4 \end{pmatrix} \quad (1.18)
 \end{aligned}$$

1.2.5 ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΕΠΑΦΗΣ ΠΑΝΤΟΓΡΑΦΟΥ – ΚΑΛΩΔΙΟΥ

Σύμφωνα με προηγούμενες εμπειρίες, το να μελετήσουμε την ακριβή επαφή μεταξύ παντογράφου και αλυσοειδούς μπορεί να αποτελεί πρόβλημα γιατί εμπλέκει την υπόθεση μίας συγκεντρωμένης δύναμης κατά την κίνηση, και υπάρχουν και προβλήματα ολοκλήρωσης, κάθε φορά που ο παντογράφος περνά από ένα κόμβο, που προκύπτουν από την τμηματοποίηση του αγωγού επαφής.

Για να αποφύγουμε αυτό το πρόβλημα μπορούμε να υποθέσουμε μία κατανομημένη επαφή, σύμφωνα με μία συνάρτηση κατανομής, ισοδύναμο με το να πούμε ότι η δύναμη επαφής κατανέμεται στην ζώνη τριβής του παντογράφου που βρίσκεται στον συλλέκτη.

Έστω λοιπόν ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy , σύμφωνα με το *σχήμα 10* στο οποίο θα περιγράψουμε την κίνηση του παντογράφου. Η μεταβλητή x αναπαριστά την θέση των διαφόρων σημείων του αγωγού επαφής κατά μήκος του οριζόντιου άξονα.



*Σχήμα 10: Συνάρτηση κατανομής φορτίου.
(βλ. βιβλιογραφία [4])*

Αν:

l : Είναι το μήκος της επιφάνειας τριβής,

y_3 : Η γενικευμένη συντεταγμένη που αντιστοιχεί στην κατακόρυφη θέση του συλλέκτη, σύμφωνα με το μοντέλο στο *σχήμα 8*,

$y_c(x)$: Είναι η θέση του αγωγού επαφής πάνω στην επιφάνεια τριβής του παντογράφου και

$y = f(x)$: Αναπαριστά την συνάρτηση κατανομής επαφής,

τότε έχουμε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(y_c(x) - y_3) dx = 0 \quad . \quad (1.19)$$

Επιπλέον η ακόλουθη σχέση ικανοποιείται:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \quad . \quad (1.20)$$

Αυτές οι εξισώσεις μας επιτρέπουν να βρίσκουμε την θέση του συλλέκτη του παντογράφου, όταν η διάταξη του αγωγού επαφής στην χρονική στιγμή t_n είναι γνωστή, ως ένα σταθμικό μέτρο της θέσης των κόμβων του αγωγού επαφής που βρίσκεται πάνω στην ζώνη τριβής. Έτσι έχουμε:

$$(y_3)_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) y_c(x) dx \quad . \quad (1.21)$$

Από αυτά παίρνουμε μία παρόμοια εξίσωση για την θέση του άλλου συλλέκτη $(y_4)_n$. Γενικά μία λεία μορφή της σταθμικής συνάρτησης $y = f(x)$ είναι σκόπιμη, ώστε η μετάβαση του παντογράφου από κόμβο σε κόμβο να γίνει ευκολότερη. Διάφορες συναρτήσεις για την $f(x)$ έχουν δοκιμαστεί, και έχουν επιτευχθεί καλά αποτελέσματα χρησιμοποιώντας μία αρμονική συνάρτηση που δίνεται από την σχέση:

$$f(x) = \frac{1}{1} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi x}{1}\right) \right], \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \quad . \quad (1.22)$$

$$f(x) = 0, \quad x < -\frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad x > \frac{1}{2}$$

Η συνάρτηση $y_c(x)$ είναι η θέση των διαφορετικών σημείων του αγωγού επαφής στο περιβάλλον του παντογράφου. Αυτό μπορεί να εκφραστεί με τις γενικευμένες συντεταγμένες που συνδέονται με τους κόμβους από την τμηματοποίηση του καλωδίου, σύμφωνα με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Με τον ίδιο τρόπο, η εξίσωση (1.19) στην χρονική στιγμή t_n μπορεί να εκφραστεί με την μορφή πινάκων:

$$\Phi_n q_n = 0 \quad . \quad (1.23)$$

Η προηγούμενη έκφραση πρέπει να επαναληφθεί για όλες τις συνθήκες περιορισμών του συστήματος έτσι, ώστε το διάνυσμα Φ_n να μετατραπεί σε πίνακα συνθηκών περιορισμών.

Το πλήθος των συνθηκών περιορισμών εξαρτάται από το πλήθος των αγωγών επαφής, με τα οποία αλληλεπιδρά ο παντογράφος, από τον τύπο του παντογράφου και από το πλήθος των παντογράφων στην γραμμή. Γενικά, υπάρχουν αλυσοειδείς με απευθείας ηλεκτρικό ρεύμα με δύο

αγωγούς επαφής. Σε αυτήν την περίπτωση όταν ο παντογράφος φτάνει στην ζώνη μετάβασης, η μάζα κεφαλής μπορεί να αλληλεπιδρά με τέσσερα διαφορετικά καλώδια.

Από την άλλη, υπάρχουν μοντέλα παντογράφων με δύο μάζες κεφαλής και σε αυτήν την περίπτωση υπάρχουν οχτώ συνθήκες περιορισμών παντογράφου – αλυσοειδούς όταν ο παντογράφος βρίσκεται στην ζώνη μετάβασης, και την ίδια στιγμή, οι συρμοί μπορούν να έχουν ως και τέσσερις παντογράφους, οπότε έχουν διάφορες συνθήκες περιορισμών ανάλογα με την θέση του κάθε παντογράφου. Για να κατασκευάσουμε ένα μοντέλο επαφής παντογράφου – αλυσοειδούς, το διάνυσμα συνθηκών περιορισμών κατασκευάζεται με τέτοιο τρόπο, ώστε αν υπάρχουν r συνθήκες περιορισμών, και g γενικευμένες συντεταγμένες, η διάσταση του πίνακα Φ_n θα είναι $r \cdot g$.

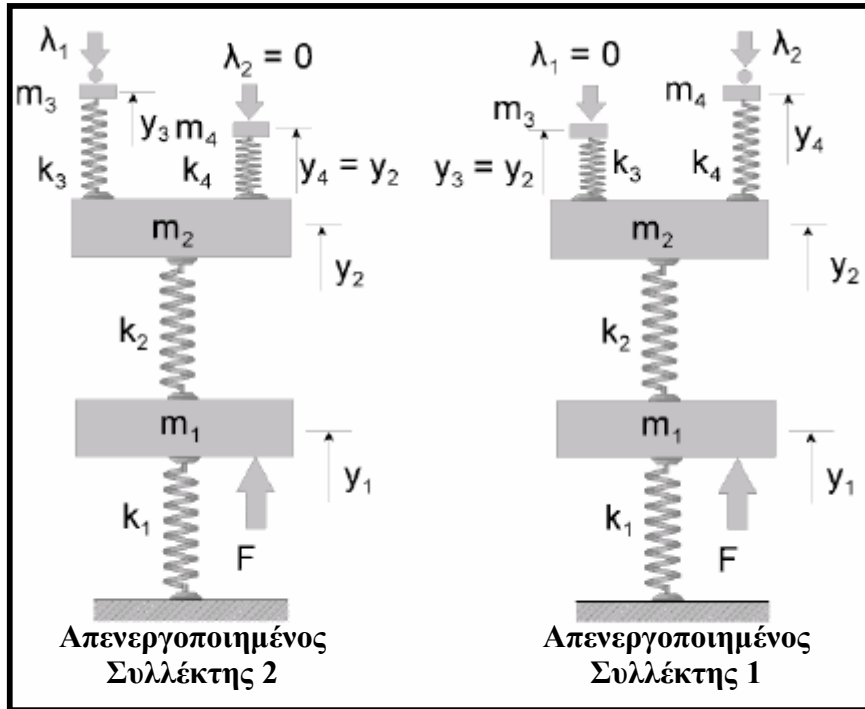
1.2.6 ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΣΥΝΘΗΚΩΝ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΩΝ

Για να απλοποιήσουμε το μοντέλο συνθηκών περιορισμών που αναπτύσσεται στην παράγραφο αυτή, θα υποθέσουμε μόνο ένα παντογράφο με μία μάζα κεφαλής που διατρέχει την αλυσοειδή, η οποία έχει μόνο έναν αγωγό επαφής. Σε αυτή την περίπτωση, μία γενική μορφή του πίνακα των συνθηκών περιορισμών μπορεί να εκφραστεί για μία χρονική στιγμή t_n , ως ακολούθως:

$$\Phi_n = \begin{pmatrix} \Phi_{1n} \\ \Phi_{2n} \end{pmatrix}. \quad (1.24)$$

Όπου το διάνυσμα Φ_{1n} αναπαριστά το διάνυσμα συνθηκών περιορισμών του 1ου συλλέκτη, στον αγωγό επαφής της 1ης γραμμής, και το διάνυσμα Φ_{2n} αναπαριστά το διάνυσμα συνθηκών περιορισμών του 2ου συλλέκτη στον αγωγό επαφής της 2ης γραμμής. Στην διατύπωση της σχέσης (1.24), οι ακόλουθες περιπτώσεις πρέπει να ληφθούν υπόψη:

- 1) Ο παντογράφος διατρέχει την τρέχουσα ζώνη της 1ης γραμμής και αλληλεπιδρά με μόνο έναν αγωγό επαφής, όπως φαίνεται και στο *Σχήμα 11*.
- 2) Ο παντογράφος διατρέχει την τρέχουσα ζώνη της 2ης γραμμής και αλληλεπιδρά με μόνο έναν αγωγό επαφής, όπως φαίνεται και στο *Σχήμα 11*.
- 3) Ο παντογράφος διατρέχει τις ζώνες μετάβασης και αλληλεπιδρά με δύο αγωγούς επαφής, όπως φαίνεται και στο *Σχήμα 9*.



Σχήμα 11: Μοντέλο παντογράφου με διαφορετικές συνθήκες περιορισμών. (βλ. βιβλιογραφία [4])

Στην πρώτη περίπτωση, το διάνυσμα Φ_{1n} υπολογίζεται στην σχέση (1.19), ενώ η θέση του συλλέκτη 1, το $(y_3)_n$ υπολογίζεται στην σχέση (1.21). Από την άλλη, ο συλλέκτης 2 δεν μπορεί ποτέ να αποκτήσει επαφή με τον αγωγό της 2ης γραμμής, αφού είναι απενεργοποιημένος, και σε αυτήν την περίπτωση, το διάνυσμα των συνθηκών περιορισμών Φ_{2n} θα δημιουργηθεί επιβάλλοντας τον περιορισμό ότι η θέση του συλλέκτη 2, $(y_4)_n$ και η μάζα κεφαλής, $(y_2)_n$, θα ταυτίζονται, δηλαδή:

$$(y_2)_n - (y_4)_n = 0 \quad . \quad (1.25)$$

Ομοίως στην δεύτερη περίπτωση ο συλλέκτης 2 μπορεί να είναι σε επαφή με τον αγωγό και ο συλλέκτης 1 να είναι απενεργοποιημένος.

Στην τρίτη περίπτωση, ο παντογράφος διατρέχει την ζώνη μετάβασης και οι συλλέκτες 1 & 2 μπορούν να έχουν επαφή με τους αγωγούς της 1ης και της 2ης γραμμής, και οι δύο συλλέκτες είναι ενεργοποιημένοι. Τότε τα διανύσματα των συνθηκών περιορισμών, Φ_{1n} και Φ_{2n} , υπολογίζονται με τον ίδιο τρόπο, χρησιμοποιώντας την σχέση (1.19), και οι θέσεις των συλλεκτών 1 & 2, $(y_3)_n$ και $(y_4)_n$ βρίσκονται από την σχέση (1.21).

Τέλος, είναι σημαντικό να λάβουμε υπόψη ότι αν και αρχικά ο συλλέκτης υποτίθεται ότι αλληλεπιδρά με τον αντίστοιχο αγωγό, η δύναμη επαφής μπορεί να ακυρωθεί ή να αλλάξει το πρόσημό της (την

φορά της). Όταν αυτό συμβαίνει, η επαφή παντογράφου – αλυσοειδούς δεν υπάρχει και οι συνθήκες περιορισμών δεν έχουν νόημα. Η κατάσταση αυτή θα πρέπει να ληφθεί υπόψη όταν η σχέση (1.10) πρέπει να λυθεί. Όταν ο συλλέκτης χάσει την επαφή του με τον αντίστοιχο αγωγό, ισοδύναμα μηδενίζουμε την ακαμψία του συλλέκτη.

1.2.7 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

Η άμεση (explicit) μέθοδος των κεντρικών διαφορών έχει χρησιμοποιηθεί για την ολοκλήρωση της σχέσης (1.10). Για αυτόν τον σκοπό, τα διανύσματα ταχύτητας και επιτάχυνσης των γενικευμένων συντεταγμένων έχουν προσεγγιστεί σύμφωνα με τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned}\dot{q}_n &= \frac{1}{2\Delta t}(q_{n+1} - q_{n-1}) \\ \ddot{q}_n &= \frac{1}{\Delta t^2}(q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1})\end{aligned}\quad (1.26)$$

Αν αντικαταστήσουμε τις εξισώσεις αυτές στην σχέση (1.10) παίρνουμε την ακόλουθη σχέση:

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2}M + \frac{1}{2\Delta t}C_n\right)q_{n+1} = R_n - K_n q_n - \Phi_n^t \lambda_n + \frac{1}{\Delta t^2}M(2q_n - q_{n-1}) + \frac{1}{2\Delta t}C_n q_{n-1}\quad (1.27)$$

Οι προηγούμενες σχέσεις μας επιτρέπουν να πάρουμε τις γενικευμένες συντεταγμένες q_{n+1} σε μία χρονική στιγμή t_{n+1} , αλλά δεν μας επιτρέπουν να γνωρίζουμε το διάνυσμα γενικευμένων δυνάμεων λ_{n+1} σε αυτήν την χρονική στιγμή. Άλλο ένα σημαντικό πρόβλημα είναι ότι για να προσδιορίσουμε q_{n-1} είναι απαραίτητο να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων, γιατί ο πίνακας απόσβεσης C_n δεν είναι διαγώνιος. Ένα από τα κύρια πλεονεκτήματα της άμεσης (explicit) μεθόδου είναι, ότι είναι δυνατόν να βρούμε απευθείας τις μεταβλητές ολοκλήρωσης με απλούς χειρισμούς πινάκων, χωρίς να χρειάζεται να λύσουμε το σύστημα με μεγάλο πλήθος εξισώσεων. Αυτό θα μπορούσε να συμβεί, εάν είχαμε υποθέσει ένα διαγώνιο πίνακα απόσβεσης για το αλυσοειδές, ή αν η απόσβεση δεν είχε ληφθεί υπόψη.

Παρότι αυτές οι επιλογές θα μπορούσαν να ήταν θεμιτές, έχει θεωρηθεί ότι η απόσβεση Rayleigh είναι πιο ρεαλιστική. Σύμφωνα με τη σχέση (1.14) και ολοκληρώνοντας την σχέση (1.10) με έναν αποδοτικό τρόπο,

το διάνυσμα της ταχύτητας των γενικευμένων συντεταγμένων έχει τροποποιηθεί σε μισό βήμα. Αυτό μας επιτρέπει να βρούμε τις μεταβλητές ολοκλήρωσης σε μία απευθείας μορφή, βρίσκοντας το ακόλουθο σύστημα των εξισώσεων:

$$\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_n \\ \ddot{\lambda}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_{n-\frac{1}{2}} \\ \dot{\lambda}_{n-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_n & \Phi_n^t \\ \Phi_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_n \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_n \\ 0 \end{pmatrix} . \quad (1.28)$$

Σύμφωνα με την *σχέση (1.14)*, αυτή η τροποποίηση εισάγει ένα μικρό σφάλμα, το οποίο μπορούμε να αγνοήσουμε αν μελετούμε ένα κατασκευαστικό σύστημα με χαμηλή απόσβεση, όπως συμβαίνει και στην περίπτωσή μας.

Τα διανύσματα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης των γενικευμένων συντεταγμένων έχουν προσεγγιστεί σύμφωνα με τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned} \dot{q}_{n-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\Delta t} (q_n - q_{n-1}) \\ \ddot{q}_n &= \frac{1}{\Delta t} \left(\dot{q}_{n+\frac{1}{2}} - \dot{q}_{n-\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{\Delta t^2} (q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}) \end{aligned} . \quad (1.29)$$

Αντικαθιστούμε αυτές τις σχέσεις στην *σχέση (1.28)* και λύνοντας ως προς το διάνυσμα των γενικευμένων συντεταγμένων q_{n+1} , θεωρώντας ότι ο πίνακας μάζας είναι διαγώνιος, καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\frac{1}{\Delta t^2} M q_{n+1} = R_n - K_n q_n - \Phi_n^t \lambda_n + \frac{1}{\Delta t^2} M \left(q_n + \Delta t \dot{q}_{n-\frac{1}{2}} \right) - C_n \dot{q}_{n-\frac{1}{2}} . \quad (1.30)$$

Η προηγούμενη εξίσωση μας επιτρέπει να υπολογίσουμε το διάνυσμα γενικευμένων συντεταγμένων q_{n+1} . Ωστόσο, υπάρχουν ακόμα κάποιες πτυχές που δεν έχουν μελετηθεί. Το διάνυσμα γενικευμένης δύναμης λ_{n-1} δεν μπορεί να υπολογιστεί και επιπλέον η *σχέση (1.30)* δεν μπορεί να προσδιορίσει τις θέσεις, $(y_3)_{n-1}$ και $(y_4)_{n-1}$, των συλλεκτών, γιατί η μάζα τους είναι μηδενική κι αυτό κάνει την εξίσωση άχρηστη για τον υπολογισμό τους. Ωστόσο αν ο συλλέκτης ενεργοποιηθεί, είναι δυνατόν να υπολογίσουμε την θέση του χρησιμοποιώντας την *σχέση (1.21)* για την χρονική στιγμή t_{n+1} . Αν ο συλλέκτης απενεργοποιηθεί, η θέση του θα είναι η ίδια με αυτήν της μάζας κεφαλής, η οποία υπολογίζεται σύμφωνα με την *σχέση (1.25)*.

Οι περιοριστικές δυνάμεις παντογράφου – αλυσοειδούς είναι ίδιες με αυτές των ελατηρίων, γιατί οι μάζες των συλλεκτών είναι μηδενικές:

$$\begin{aligned} (\lambda_1)_{n+1} &= k_3 [(y_3)_{n+1} - (y_2)_{n+1}] \\ (\lambda_2)_{n+1} &= k_4 [(y_4)_{n+1} - (y_2)_{n+1}] \end{aligned} \quad (1.31)$$

Έτσι, ο κύκλος ολοκλήρωσης για την στιγμή t_{n+1} έχει έρθει εις πέρας. Για να ξεκινήσουμε τον αλγόριθμο, οι τιμές των γενικευμένων συντεταγμένων και οι περιοριστικές δυνάμεις στην αρχική χρονική στιγμή έχουν υπολογιστεί, λύνοντας το ακόλουθο γραμμικό σύστημα:

$$\begin{pmatrix} K_0 & \Phi_0^t \\ \Phi_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ \lambda_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

Επιπλέον, όσον αφορά στο διάνυσμα ταχύτητας των γενικευμένων συντεταγμένων στην αρχική χρονική στιγμή, έχει υποθεθεί ότι:

$$\dot{q}_0 = 0 \quad (1.33)$$

Η παρούσα διαδικασία ολοκλήρωσης, που βασίζεται στην άμεση (explicit) μέθοδο των κεντρικών διαφορών, μας επιτρέπει να βρούμε τις μεταβλητές, με απλούς χειρισμούς, χωρίς να χρειάζεται να λύσουμε συστήματα εξισώσεων, χειριζόμενοι τις μη γραμμικές μορφές ως μία απευθείας μορφή γιατί οι διαφορετικοί μεταβλητοί όροι μπορούν να γραφτούν ως: πίνακες ακαμψίας, πίνακες απόσβεσης, συνθήκες περιορισμών και ανεξάρτητος όρος στο τέλος κάθε κύκλου ολοκλήρωσης και τελικά όλες τους είναι έτοιμες για τον επόμενο κύκλο ολοκλήρωσης.

1.2.8 ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

Σύμφωνα με τις προηγούμενες ενότητες, ο αλγόριθμος ολοκλήρωσης οργανώνεται ως εξής:

1) Εισαγωγή των δεδομένων συναρμολόγησης:

Χαρακτηριστικά του φέροντος καλωδίου και του αγωγού επαφής
(βάρος, υλικό, τμήμα, τάση των καλωδίων, πλήθος αγωγών επαφής, κλπ.)

Χαρακτηριστικά των αναρτήρων (μήκος, βάρος, κλπ.)

Δεδομένα σχετικά με τον παντογράφο ή τους παντογράφους
(πλήθος παντογράφων, δυνάμεις, μάζες, ακαμψία, απόσβεση)

2) Σχηματισμός του πίνακα ακαμψίας K_0 και του ανεξάρτητου

όρου R_0 κατά την αρχική χρονική στιγμή, σύμφωνα με το υποτιθέμενο μοντέλο για καλώδια και παντογράφο, σύμφωνα με τις σχέσεις (1.12), (1.13), (1.18). Οι εξισώσεις των σχέσεων (1.15), (1.16), (1.17) θα χρησιμοποιηθούν για να βρούμε συνοριακές συνθήκες στα

σημεία στήριξης και στον αγωγό επαφής, που ορίζονται από το ύψος του σημείου A στο Σχήμα 7.

- 3) Σχηματισμός του πίνακα συνθηκών περιορισμών κατά την αρχική χρονική στιγμή, σύμφωνα με τις σχέσεις (1.19), (1.24), (1.25), αρχικά υποθέτοντας ότι ο παντογράφος ξεκινά στην τρέχουσα ζώνη της 1ης γραμμής.
- 4) Σχηματισμός του πίνακα μάζας M, λαμβάνοντας υπόψη ένα διαγώνιο πίνακας μάζας.
- 5) Σχηματισμός του αρχικού πίνακα απόσβεσης του συστήματος, C_0 , χρησιμοποιώντας την σχέση (1.14) για τον πίνακα απόσβεσης της αλυσοειδούς.
- 6) Προσδιορισμός των γενικευμένων συντεταγμένων και αρχικών περιοριστικών δυνάμεων, λύνοντας το γραμμικό σύστημα (1.32) και κάνοντας το διάνυσμα της ταχύτητας μηδενικό, σύμφωνα με την σχέση (1.33).
- 7) Κύκλος ολοκλήρωσης των διαφορικών εξισώσεων κατά τις χρονικές στιγμές t_{n+1} , $n = 0, 1, 2, \dots$ εξετάζοντας τα ακόλουθα:
 - α) Υπολογισμός των γενικευμένων συντεταγμένων της αλυσοειδούς και του παντογράφου q_{n+1} , κατά την χρονική στιγμή t_{n+1} χρησιμοποιώντας την σχέση (1.30).
 - β) Υπολογισμός της θέσης των συλλεκτών του παντογράφου, $(y_3)_{n+1}$ και $(y_4)_{n+1}$ χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1.21) ή (1.25) ανάλογα με το αν ο παντογράφος διατρέχει την τρέχουσα ζώνη ή την ζώνη μετάβασης.
 - γ) Υπολογισμός των περιοριστικών δυνάμεων παντογράφου – αλυσοειδούς, $(\lambda_1)_{n+1}$ και $(\lambda_2)_{n+1}$ χρησιμοποιώντας την σχέση (1.31).
 - δ) Σχηματισμός του πίνακα συνθηκών περιορισμών Φ_{n+1} , χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1.19), (1.24), (1.25), εξετάζοντας αν ο παντογράφος βρίσκεται σε τρέχουσα ζώνη ή ζώνη μετάβασης.
 - ε) Ενημέρωση των διαφορών πινάκων και ανεξάρτητων όρων για την χρονική στιγμή t_{n+1} : K_{n+1} , C_{n+1} , R_{n+1} , λαμβάνοντας υπόψη την αποσύνδεση των αναρτήρων και τις απώλειες της επαφής μεταξύ παντογράφου και αλυσοειδούς. Πιο συγκεκριμένα, το αποτέλεσμα της απώλειας επαφής θα μελετηθεί με τον εξής τρόπο: Τα θέματα που αναπτύχθηκαν παραπάνω θα μελετηθούν σύμφωνα με το αν ο παντογράφος είναι σε τρέχουσα ζώνη ή σε ζώνη μετάβασης. Αν ο παντογράφος είναι σε ζώνη μετάβασης και το πρόσημο των δυνάμεων επαφής, $(\lambda_1)_{n+1}$ και $(\lambda_2)_{n+1}$, που υπολογίστηκε στην σχέση (1.31), είναι μηδενικό ή αρνητικό τότε

υπάρχει επαφή και η ακαμψία μεταξύ των συλλεκτών δεν διαφέρει. Αν όμως το πρόσημο είναι θετικό, δεν υπάρχει επαφή γιατί το ελατήριο του συλλέκτη λειτουργεί υπό εφελκυσμό. Αυτό είναι ισοδύναμο με το να μηδενίσουμε την ακαμψία που σχετίζεται με τον συλλέκτη. Έτσι, αν k_0 είναι η πραγματική ακαμψία της επαφής έχουμε:

$$\begin{cases} k_3 = k_0 & , \text{ αν } (\lambda_1)_{n+1} \leq 0 \\ k_3 = 0 & , \text{ αν } (\lambda_1)_{n+1} > 0 \\ k_4 = k_0 & , \text{ αν } (\lambda_2)_{n+1} \leq 0 \\ k_4 = 0 & , \text{ αν } (\lambda_2)_{n+1} > 0 \end{cases} \quad (1.34)$$

Σύμφωνα με αυτό, ο πίνακας ακαμψίας του συστήματος θα ενημερωθεί για το ακόλουθο βήμα.

στ) Υπολογισμός του διανύσματος ταχύτητας των γενικευμένων συντεταγμένων:

$$\dot{q}_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t} (q_{n+1} - q_n) \quad (1.35)$$

ζ) Τροποποίηση των δεικτών των μεταβλητών και των όρων της διαφορικής εξίσωσης σύμφωνα με τον κύκλο ολοκλήρωσης. Δηλαδή ο δείκτης $n + 1$ που αντιστοιχεί στους όρους που υπολογίστηκαν στον τρέχοντα κύκλο, μετασχηματίζεται σε n . Επιστρέφουμε στο βήμα (7α), επαναλαμβάνουμε την διαδικασία, μέχρι ο παντογράφος να ολοκληρώσει την τροχιά του.

1.2.9 ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΤΥΧΕΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

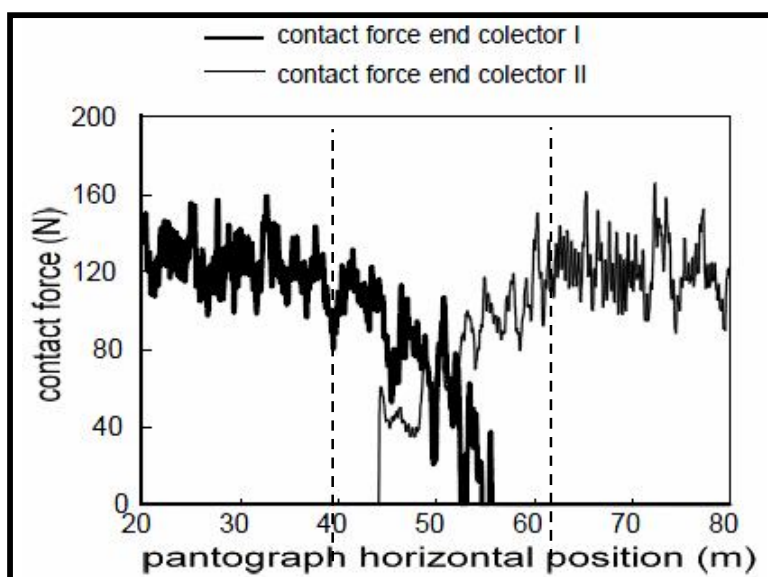
Με λογισμικό το οποίο χρησιμοποιεί τις προηγούμενες μεθόδους και αναπτύχθηκε από τους Jesus Benet, Angelines Alberto, Enrique Arias και Tomas Rojo, το οποίο επιτρέπει την προσομοίωση της δυναμικής συμπεριφοράς του συστήματος παντογράφου – αλυσοειδούς, θα μελετήσουμε δύο γραμμές αγωγών με ζώνη μετάβασης, και διάφορους παντογράφους.

Στην παρακάτω προσομοίωση θα μελετήσουμε ένα παντογράφο δύο μαζών, ο οποίος κινείται με ταχύτητα με 120km/h κατά μήκος δύο γραμμών με τρεις ζώνες (ανοίγματα μεταξύ δύο στύλων στήριξης). Οι ζώνες αυτές είναι: η κεντρική (τρέχουσα) ζώνη, και οι ακραίες ζώνες (ζώνες μετάβασης). Η απόσταση μεταξύ των καλωδίων (στα σημεία στήριξης) είναι 1,2m. Το υλικό που έχει χρησιμοποιηθεί είναι χαλκός. Η μηχανική τάση στο φέρον καλώδιο και στον αγωγό επαφής είναι 10KN

και η διάμετρος τους είναι 12mm. Το μήκος της κάθε ζώνης είναι στα 20m.

Επίσης έχουν τοποθετηθεί τρεις αναρτήρες στην κεντρική – τρέχουσα ζώνη της κάθε γραμμής, ανά 5m και δύο αναρτήρες για κάθε ζώνη μετάβασης, με την απόσταση του πρώτου από το σημείο στήριξης στα 3,83m και την απόσταση μεταξύ τους στα 2m και με τον στόχο του καθορισμού του ελάχιστου στον δεύτερο αναρτήρα, παίρνοντας μία ζώνη επαφής που βρίσκεται στο μέσο της ζώνης. Το εμβαδόν της διατομής των αναρτήρων είναι 25mm^2 .

Το υποτιθέμενο μοντέλο του παντογράφου είναι όμοιο με αυτό του σχήματος 9, με $m_1 = 15\text{kg}$, $m_2 = 7,2\text{kg}$, $k_1 = 50\text{N/m}$, $k_2 = 4200\text{N/m}$, $k_3 = k_4 = 50\text{KN/m}$, με δύναμη ώσης $F = 120\text{N}$. Οι τιμές της δύναμης επαφής παντογράφου – αλυσοειδούς στους συλλέκτες, στις τρεις ζώνες των δύο γραμμών φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, που αντιστοιχεί σε μία οριζόντια μετατόπιση του παντογράφου μεταξύ των 20m και των 80m:

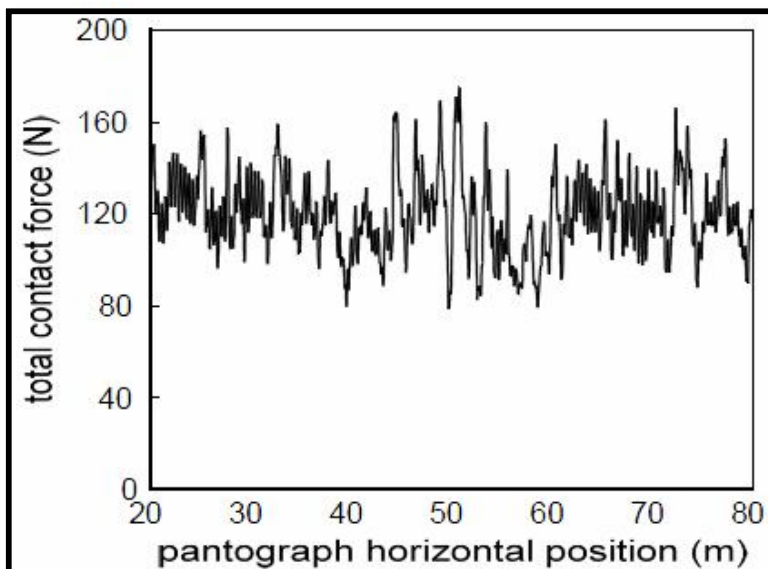


Σχήμα 12: Δύναμη επαφής παντογράφου – αλυσοειδούς στους συλλέκτες.
(βλ. βιβλιογραφία [4])

Η θέση του παντογράφου ανάμεσα στα 40m και στα 60m αντιστοιχεί στην ζώνη μετάβασης. Η δύναμη επαφής στην πρώτη γραμμή αναπαρίσταται με μία παχιά συνεχή γραμμή και η δύναμη επαφής στην δεύτερη γραμμή αναπαρίσταται με μία πιο λεπτή συνεχή γραμμή.

Είναι δυνατόν να παρατηρήσουμε, ότι η δύναμη στην πρώτη γραμμή μειώνεται σταδιακά μόλις ο παντογράφος περάσει από την θέση των 40m και στην συνέχεια μηδενίζεται περίπου στην θέση των 56m, ενώ η δύναμη στην δεύτερη γραμμή εμφανίζεται από την θέση των 44m.

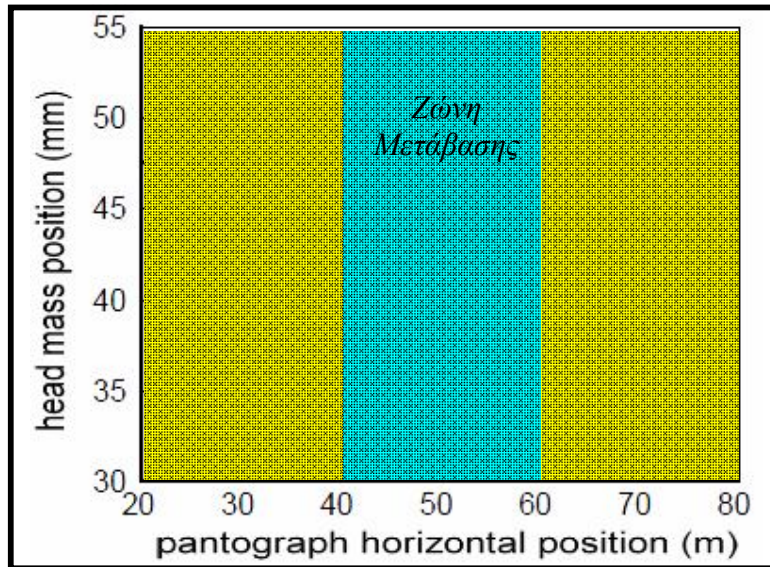
Η τελική δύναμη επαφής παντογράφου – αλυσοειδούς, που είναι το άθροισμα των δυνάμεων επαφής και των δύο συλλεκτών φαίνεται στο *σχήμα13*:



*Σχήμα13: Τελική δύναμη επαφής παντογράφου – αλυσοειδούς.
(βλ. βιβλιογραφία [4])*

Παρατηρούμε ότι όταν ο παντογράφος διατρέχει τις τρέχουσες ζώνες, η τιμή της δύναμης επαφής κυμαίνεται περί τα 120N, αλλά όταν ο παντογράφος διατρέχει μία ζώνη μετάβασης, η τιμή της δύναμης επαφής έχει μεγάλες διακυμάνσεις, ειδικά στο κέντρο της ζώνης μετάβασης (στην θέση των 50m) , όπου βρίσκεται και το σημείο Q του *σχήματος 7*. Γύρω από αυτό το σημείο η τιμή της δύναμης επαφής κυμαίνεται ανάμεσα στα 80N και στα 170N. Σε αυτό το σημείο οι αγωγοί επαφής των δύο γραμμών στις ζώνες μετάβασης, διασταυρώνονται.

Η διακύμανση της κατακόρυφης θέσης της μάζας της κεφαλής φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα14: Κατακόρυφη θέση της μάζας της κεφαλής.
(βλ. βιβλιογραφία [4])

Παρατηρούμε ότι όταν ο παντογράφος βρίσκεται σε τρέχουσα ζώνη, η μάζα της κεφαλής παρουσιάζει μέγιστες κατακόρυφες μετατοπίσεις της τάξης των 50mm και 47mm κατά προσέγγιση αντίστοιχα σε κάθε ζώνη. Ενώ όταν ο παντογράφος διατρέχει την ζώνη μετάβασης, η μέγιστη κατακόρυφη μετατόπιση φτάνει ως και τιμές της τάξης των 42mm. Ο λόγος που συμβαίνει κάτι τέτοιο, είναι γιατί ο παντογράφος, στην ζώνη μετάβασης, πρέπει να αλληλεπιδρά με δύο αγωγούς επαφής, έτσι η γραμμή παρουσιάζει μεγαλύτερη ακαμψία. Ανάλογα με την διάταξη του αγωγού επαφής, είναι δυνατόν να πετύχουμε μικρότερη διακύμανση της δύναμης επαφής, ώστε να πετύχουμε μία ομαλή μετάβαση και μία καλύτερη συμπεριφορά του συστήματος.

1.2.10 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Στην παράγραφο 1.2 παρουσιάστηκε η μελέτη και προσομοίωση της δυναμικής αλληλεπίδρασης ενός συστήματος παντογράφου – αλυσοειδούς, με δύο γραμμές εναερίων καλωδίων και επικαλυπτόμενες ζώνες. Βρήκαμε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων με συνθήκες, όπου:

- α) Η αλυσοειδής μοντελοποιήθηκε χρησιμοποιώντας την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (Finite Element Method).
- β) Ο παντογράφος έχει θεωρηθεί ως ένα σύστημα μαζών, ελατηρίων και αμορτισέρ.

Αναπτύχθηκε ένας αλγόριθμος αριθμητικής ολοκλήρωσης βασισμένος στην άμεση μέθοδο (explicit method) των κεντρικών διαφορών, ο οποίος λύνει το πρόβλημα κατά ένα απλό και ευθύ τρόπο, ως ένα σύστημα

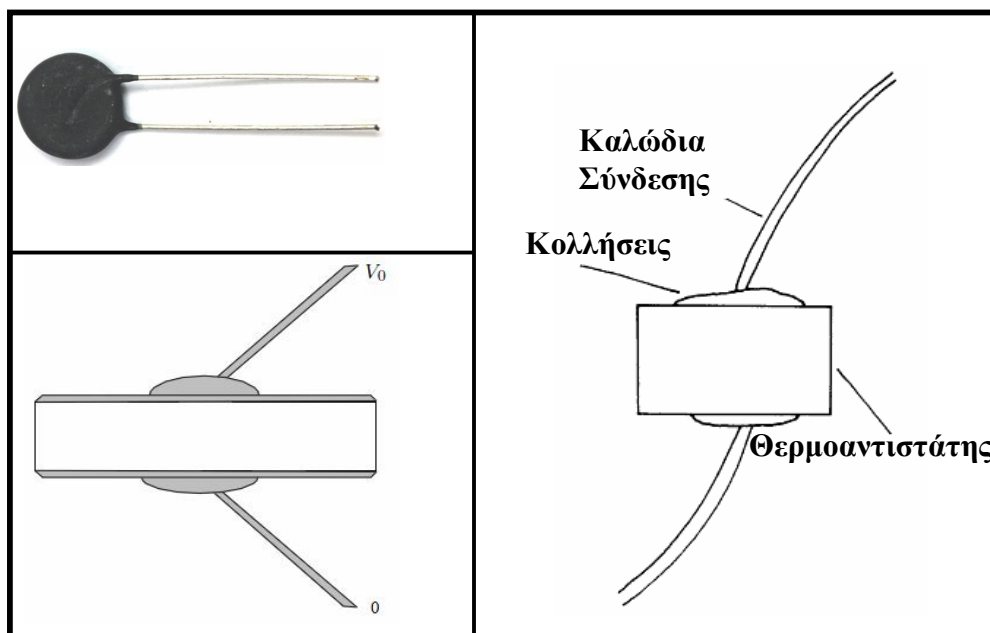
συνήθων διαφορικών εξισώσεων, όπου ο παντογράφος μπορεί να αλληλεπιδρά μόνο με έναν αγωγό επαφής όταν διατρέχει μία τρέχουσα ζώνη ή με δύο αγωγούς επαφής όταν διατρέχει μία ζώνη μετάβασης.

Η διαδικασία αυτή λοιπόν, μας επιτρέπει να κάνουμε προσομοιώσεις, οι οποίες θα μας βοηθήσουν να πετύχουμε τις βέλτιστες συνθήκες συναρμολόγησης της γραμμής. Πιο συγκεκριμένα με τον τρόπο αυτόν μπορούμε να μελετήσουμε την πιο βολική διάταξη του αγωγού επαφής, έτσι ώστε να διευκολύνουμε την μετάβαση του παντογράφου από μία γραμμή σε μία άλλη, με ομαλό τρόπο. Επιπλέον μπορούμε να εφαρμόσουμε την μέθοδο και στην περίπτωση διαφόρων παντογράφων που διατρέχουν την γραμμή, μελετώντας την πλήρη τροχιά των παντογράφων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

2 ΤΙ ΕΙΝΑΙ Ο ΘΕΡΜΟΑΝΤΙΣΤΑΤΗΣ

Ο θερμοαντιστάτης είναι μία θερμο-εξαρτώμενη αντίσταση. Ένας συνηθισμένος θερμοαντιστάτης είναι μια συσκευή σε σχήμα νομίσματος κατασκευασμένη από ένα ειδικό κεραμικό υλικό πάχους περίπου 1mm και ακτίνας 5mm και με μεταλλικές επαφές στις επίπεδες επιφάνειες.



Σχήμα 1: Θερμοαντιστάτης. Οι γραμμοσκιασμένες περιοχές είναι καλοί αγωγοί του ηλεκτρικού ρεύματος. Επίσης διακρίνουμε και τις περιοχές των κολλήσεων.

Το είδος του θερμοαντιστάτη που μας ενδιαφέρει αποκτά μεγαλύτερη αντίσταση όσο περισσότερο θερμαίνεται, έτσι μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ως μια ασφάλεια. Αν το ρεύμα που διαρρέει το θερμοαντιστάτη αυξηθεί απότομα για οποιονδήποτε λόγο, η παραγόμενη Ωμική θερμότητα (I^2R) αυξάνει την αντίσταση και ως συνέπεια η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος ελαττώνεται ή σταματά. Στη συνέχεια βέβαια και μόλις η απότομη αύξηση του ρεύματος πάψει να υφίσταται, ο θερμοαντιστάτης κρυώνει και επανέρχεται η φυσιολογική λειτουργία του κυκλώματος χωρίς να χρειαστεί να αντικατασταθεί κάποια ασφάλεια. Πολλές ηλεκτρικές συσκευές, όπως οι τηλεοράσεις, περιέχουν δεκάδες θερμοαντιστάτες έτσι ώστε να προστατεύονται από την υπερθέρμανση, για αυτό και κάποιες στιγμές σβήνουν αυτόματα για κάποιο χρονικό διάστημα, αν υπερθερμανθούν.

Υπάρχουν πολλοί λόγοι για να θέλουμε να μελετήσουμε την θερμότητα και την ροή του ρεύματος σε ένα θερμοαντιστάτη. Ένα είναι το προφανές ερώτημα που προκύπτει σε σχέση με την σχεδίαση ενός θερμοαντιστάτη: Πώς τα χαρακτηριστικά, όπως ο χρόνος διακοπής του ρεύματος σε σχέση με την απότομη αύξηση της ροής του, εξαρτάται από τις φυσικές παραμέτρους; Άλλο ένα ερώτημα αφορά στον έλεγχο ποιότητας: Κάποιοι θερμοαντιστάτες μπορούν να διαρραγούν λόγω της απότομης θερμικής διαστολής, που προκαλείται από μεγάλες διαφορές θερμοκρασίας, οι οποίες πιέζουν πολύ το υλικό. Η πλήρης ανάλυση της δημιουργίας ρωγμών απαιτεί ένα μοντέλο θερμό – ελαστικότητας. Ωστόσο, μία εκτίμηση της τάξη μεγέθους των διαφορών θερμοκρασίας θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί σαν δεδομένο για την πιθανότητα εμφάνισης ρωγμών.

2.1 ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΟΥ ΜΑΥΡΟΥ ΚΟΥΤΙΟΥ

Στις επιστήμες και στη μηχανική, ως μαύρο κουτί θεωρείται μία συσκευή, ένα σύστημα ή ένα αντικείμενο το οποίο μπορεί να μελετηθεί υπό την οπτική της εισόδου και της εξόδου χωρίς κάποια ιδιαίτερη γνώση των εσωτερικών λειτουργιών του.



Θεωρούμε, λοιπόν, το θερμοαντιστάτη ως μια ενιαία μονάδα η οποία στο σύνολό της βρίσκεται στην ίδια θερμοκρασία $T(t)$, η οποία εξαρτάται μόνο από το χρόνο. Αυτό σημαίνει ότι θεωρούμε αμελητέες οποιεσδήποτε λεπτομέρειες και χωρικές ανομοιομορφίες που σχετίζονται με την ροή θερμότητας εντός του εξαρτήματος. Αντιστοιχίζουμε στο θερμοαντιστάτη μία εξαρτώμενη από τη θερμοκρασία αντίσταση $R(T)$ που αυξάνει ανάλογα με το T .

Έστω λοιπόν, ότι εφαρμόζουμε μία σταθερή τάση V_0 στη συσκευή.

Από τον νόμο του Ohm η ένταση του ρεύματος είναι $I(t) = \frac{V_0}{R(t)}$ και η

θερμότητα που παράγεται ισούται με $Q = \frac{V_0^2}{R(t)}$.

Έστω ότι η θερμότητα που διαχέεται στο περιβάλλον δίνεται από την αύξουσα συνάρτηση $Q_\pi(T)$ η οποία μηδενίζεται όταν η θερμοκρασία T είναι ίση με την θερμοκρασία του περιβάλλοντος T_a (σύμφωνα με τον νόμο ψύξης του Newton, ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας ενός αντικειμένου είναι ανάλογος προς την διαφορά $T - T_a$). Τότε το

συνολικό ενεργειακό ισοζύγιο για έναν θερμοαντιστάτη μάζας m και ειδικής θερμοχωρητικότητας c είναι:

$$mc \frac{dT}{dt} = \frac{V_0^2}{R(T)} - Q_\pi(T) .$$

Η οποία είναι μία συνήθης διαφορική εξίσωση που μπορεί να λυθεί είτε αριθμητικά, είτε ως μία διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών, εάν οι μορφές των $R(T)$ και $Q_\pi(T)$ μας επιτρέπουν να υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα που προκύπτουν. Επιπλέον μία γραφική παράσταση, στην οποία οι δύο συναρτήσεις στο δεξί μέλος απεικονίζονται στο ίδιο γράφημα, δείχνει ότι υπάρχει πάντα μια σταθερή κατάσταση, $\frac{V_0^2}{R(T)} - Q_\pi(T) = 0$, η οποία είναι και μοναδική.

Αυτά όμως δεν εξηγούν την κατανομή της θερμοκρασίας μέσα στον θερμοαντιστάτη. Επιπλέον δεν λαμβάνουμε υπόψη ότι για μερικούς νόμους θερμοκρασιών μπορεί να μην υπάρχει λύση σε ένα μοντέλο, στο οποίο η θερμοκρασία διαφέρει χωρικά, αν και το πρότυπο του «μαύρου κουτιού» πάντα έχει μια μοναδική λύση.

2.2 ΕΝΑ ΑΠΛΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΓΙΑ ΤΗ ΘΕΡΜΙΚΗ ΡΟΗ

Πρώτα μελετούμε ένα απλό μοντέλο για έναν μόνο θερμοαντιστάτη, στον οποίον έχουμε εφαρμόσει μία τάση V_0 κατά τη χρονική στιγμή $t=0$. Στη συνέχεια επεκτείνουμε το μοντέλο αυτό σε έναν θερμοαντιστάτη μέσα σε ένα απλό κύκλωμα. Πρώτα πρέπει να σκεφτούμε πώς το ηλεκτρικό ρεύμα διέρχεται μέσα από ένα στερεό. Για αυτό θα χρειαστούμε μία γενίκευση του νόμου του Ohm $\left(I = \frac{V}{R} \right)$ για έναν αντιστάτη. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια εκδοχή του νόμου του Ohm που συνδέει γραμμικά την πυκνότητα του ρεύματος j (μονάδες A/m^2) με το ηλεκτρικό πεδίο E (V/m) :

$$j = \sigma(T)E ,$$

όπου $\sigma(T)$ είναι η αγωγιμότητα του υλικού η οποία είναι βασική για την καλή λειτουργία της συσκευής και της οποίας η εξάρτηση από τη θερμοκρασία T φαίνεται άμεσα. Υπάρχει λοιπόν, ένα ηλεκτρικό δυναμικό ϕ με ηλεκτρικό πεδίο $E = -\nabla\phi$ και το ρεύμα διατηρείται έτσι ώστε $\nabla j = 0$.

Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} j &= -\sigma(T)\nabla\phi \\ \nabla \cdot (\sigma(T)\nabla\phi) &= 0 \end{aligned}$$

Έτσι μπορούμε να γράψουμε τις συνοριακές συνθήκες για το δυναμικό. Αν, όπως στο *σχήμα 1*, η πάνω και η κάτω όψη του θερμοαντιστάτη είναι επικαλυμμένες με έναν καλό αγωγό, το δυναμικό είναι σχεδόν σταθερό σε κάθε πλευρά, ενώ δεν υπάρχει ρεύμα διαμέσου των πλευρών.

Έτσι για $t > 0$, έχουμε:

$$\begin{cases} \phi = V_0 & , \text{για } z = H \\ \phi = 0 & , \text{για } z = 0 \\ \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 & , \text{για } r = a \end{cases}$$

όπου (r, ϕ, z) είναι οι κυλινδρικές συντεταγμένες με αναφορά στο κέντρο της κάτω όψης ενώ το H είναι το πάχος και r η ακτίνα του κυλίνδρου.

Για να γράψουμε ένα μοντέλο για την παραγωγή θερμότητας και την αγωγιμότητα πρέπει να βρούμε μια εκδοχή του νόμου για την ισχύ που παράγεται σε μια αντίσταση, $VI = I^2R = \frac{V^2}{R}$.

Σε μια μαζική ροή, ο ρυθμός παραγωγής θερμότητας σε μία περιοχή (ογκομετρική θέρμανση) είναι

$$j \cdot E = \sigma |\nabla\phi|^2$$

Αυτό εμφανίζεται ως πηγαίος όρος στην εξίσωση της θερμότητας για την θερμοκρασία $T(x, t)$.

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T + \sigma |\nabla\phi|^2$$

Οι συνοριακές συνθήκες για την εξίσωση της θερμότητας είναι συχνά προβληματικές. Οι ισοθερμικές ή συνθήκες τέλει μόνωσης σπάνια εφαρμόζονται αυστηρά. Το πιο ασφαλές είναι να γράψουμε το νόμο ψύξης του Newton για τις δύο όψεις του θερμοαντιστάτη

$$k \frac{\partial T}{\partial n} = h(T - T_a) \quad , \quad (2.2.1)$$

όπου T_a είναι η θερμοκρασία του περιβάλλοντος και h ο συντελεστής μεταφοράς θερμότητας. Θα μοντελοποιήσουμε την επίδραση της ψύξης στις αγωγίμες άνω και κάτω όψεις, καθώς και στις επαφές και στις κολλήσεις, με μία παρόμοια συνθήκη, αλλά με μεγαλύτερη τιμή του h .

Τελικά επειδή η εξίσωση της θερμότητας είναι παραβολική χρειαζόμαστε μια αρχική συνθήκη για παράδειγμα:

$$T(x, 0) = T_a(x) .$$

2.3 ΑΔΙΑΣΤΑΤΟΠΟΙΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

Αρχικά θα κλιμακοποιήσουμε τα r, z με το πάχος H και το χρόνο με τη θερμική αγωγιμότητα H^2 / κ , όπου $\kappa = \rho c / k$, είναι η θερμική διάχυση και ρ, c, k είναι η πυκνότητα, η ειδική θερμοχωρητικότητα και η θερμική αγωγιμότητα αντίστοιχα. Η αγωγιμότητα πρέπει να αλλάξει αισθητά καθώς μεταβάλλεται η θερμοκρασία, αλλιώς η συσκευή θα ήταν άχρηστη. Επίσης, φαίνεται ότι μπορούμε να προσδιορίσουμε μια μεταβολή της θερμοκρασίας ΔT , τέτοια ώστε να επιτυγχάνεται η επιθυμητή μεταβολή αγωγιμότητας. Ως εκ τούτου μπορούμε αυτό να το χρησιμοποιήσουμε ώστε να κλιμακοποιήσουμε την θερμοκρασία γράφοντας $T - T_a = \Delta T u(X', t')$. Τέλος θα χρησιμοποιήσουμε την εξωτερική τάση V_0 για να κάνουμε κλιμακοποίηση του ηλεκτρικού δυναμικού ϕ και την «κρύα» τιμή της αγωγιμότητας (δηλαδή την τιμή της αγωγιμότητας όταν ο θερμοαντιστάτης είναι κρύος) σ_0 για να κάνουμε κλιμακοποίηση της $\sigma(T)$. Φυσικά θα πρέπει να κάνουμε κλιμακοποίηση και όλων των γνωστών συναρτήσεων του T , όπως κάνουμε και για το ίδιο το T .

Κάνοντας τις κλιμακοποιήσεις έχουμε τις αδιάστατες εξισώσεις:

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\sigma \nabla \phi) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla^2 u = \gamma \sigma(u) |\nabla \phi|^2 \end{cases}, \text{ για } 0 < z < 1, 0 \leq r < a = \frac{a}{H} . \quad (2.3.1)$$

Οι συνοριακές συνθήκες είναι: $\phi = 0, 1$ για $z = 0, 1$ αντίστοιχα, $\frac{\partial \phi}{\partial r} = 0$ για $r = a$ και $\frac{\partial u}{\partial n} + \beta(X)u = 0$ στο σύνορο, όπου η εξάρτηση του β από το X μοντελοποιεί την διαφορά της άνω και κάτω όψης από την πλαϊνή. Το β παίρνει διαφορετικές τιμές στις δύο περιπτώσεις.

Έχουμε τρεις αδιάστατες παραμέτρους:

$$\alpha = \frac{a}{H}, \beta = \frac{hH}{k}, \gamma = \frac{\sigma_0 V_0^2}{4k\Delta T},$$

όπου το α μετρά την αναλογία πλάτους – ύψους, το β τη μεταφορά θερμότητας, το γ τον ανταγωνισμό μεταξύ της παραγωγής θερμότητας και της αγωγιμότητας. Όταν λοιπόν, εισάγουμε τυπικές φυσικές τιμές, όπως:

$$\begin{aligned} \rho &= 5,6 \cdot 10^3 \text{ kg / m}^3 & , & & c &= 540 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}, \\ K &= 2 \frac{\text{W}}{\text{mK}} & , & & \sigma_0 &= 2 \frac{1}{\Omega \cdot \text{m}}, \\ \Delta T &= 100\text{K} & , & & V_0 &= 250\text{V}, \\ r &= 5 \cdot 10^{-3} \text{ m} & , & & h &= \text{από } 10 \text{ εώς } 10^2 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}, \\ H &= 10^{-3} \text{ m} & , & & R_0 &= 50 - 500 \Omega \end{aligned}$$

Ειδικά για το h έχουμε ότι:

$$h \approx 10^2 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}} \text{ στις επιφάνειες των κολλήσεων.}$$

$$h \approx 10 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}} \text{ στις επιφάνειες που υπάρχει αέρας.}$$

(Μία τυπική μέση τιμή μετά από μετρήσεις είναι τα $40 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$, αλλά οι κολλήσεις είναι πολύ πιο αγωγιμες από τον αέρα).

Έτσι βρίσκουμε ότι:

$$\alpha = 5, \beta = \text{από } 10^{-2} \text{ (στις παράπλευρες όψεις) μέχρι } 10^{-1} \text{ (στην άνω όψη),}$$

$$\gamma = 150, \mu = 4 \text{ έως } 40.$$

Το σ μεταβάλλεται με το u όπως φαίνεται στη σχέση

$$\sigma = e^{-\frac{f(u)}{\varepsilon}} \text{ όπου } \varepsilon \approx 10^{-1}. \quad (2.3.2)$$

Για παράδειγμα θα μπορούσαμε να επιλέξουμε

$$f(u) = \begin{cases} 0 & , \quad u < 1 \\ u - 1 & , \quad 1 < u < 2 \\ 1 & , \quad u > 2 \end{cases} . \quad (2.3.3)$$

Γνωρίζουμε λοιπόν, ότι υπάρχουν μόνο τέσσερις αδιάστατες παράμετροι και πως από αυτές οι τρεις είναι μεγάλες και η μία είναι μικρή. Ο μεγάλος λόγος, α , μεταξύ των διαστάσεων, υποδηλώνει ότι το μονοδιάστατο μοντέλο πρέπει να εκτελείται καλά και αυτό ενισχύεται από το γεγονός ότι το β είναι ιδιαίτερα μικρό στις παράπλευρες όψεις της συσκευής, έτσι το μεγαλύτερο μέρος της παραγόμενης θερμότητας θα χαθεί μέσω των άνω και κάτω όψεων. Το ότι το γ είναι πολύ μεγάλο δείχνει ότι μπορεί να έχουμε επιλέξει τη λάθος κλιμακοποίηση του χρόνου, τουλάχιστον για το αρχικό στάδιο θέρμανσης. Ωστόσο η συσκευή λειτουργεί έτσι, ώστε η μείωση της αγωγιμότητας καθώς η θερμοκρασία αυξάνεται, σταδιακά θα απαλείψει τον όρο θέρμανσης όσο

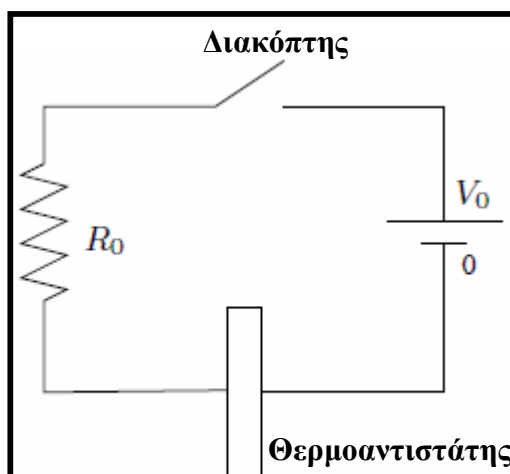
μεγάλος και αν είναι. Αν ξανακάνουμε κλιμακοποίηση του χρόνου χρησιμοποιώντας την σχέση $t = \gamma^{-1}\tau$, βρίσκουμε ότι

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \sigma(u)|\nabla\phi|^2 + \frac{1}{\gamma}\nabla^2 u.$$

Μπορούμε να αγνοήσουμε τον τελευταίο όρο για να απλοποιηθεί σημαντικά το πρόβλημα. Όμως πιθανώς να μην μπορέσουμε να εξηγήσουμε τις χωρικές διακυμάνσεις της θερμοκρασίας χωρίς αυτόν.

2.4 Ο ΘΕΡΜΟΑΝΤΙΣΤΑΤΗΣ ΣΕ ΕΝΑ ΚΥΚΛΩΜΑ

Ο θερμοαντιστάτης συνήθως είναι μέρος ενός κυκλώματος όπου το υπόλοιπο του κυκλώματος αντιπροσωπεύεται και αναπαριστάται από έναν αντιστάτη αντίστασης R_0 .



*Σχήμα 2: Η διάταξη του θερμοαντιστάτη σε ένα κύκλωμα.
(βλ. βιβλιογραφία [1])*

Αυτό περιπλέκει ελαφρώς τα πράγματα καθώς δεν γνωρίζουμε πλέον την πτώση τάσης στον θερμοαντιστάτη. Επίσης έχουμε μόνο μία σχέση μεταξύ αυτής της τάσης και του ρεύματος που διαπερνά τη συσκευή. Το μοντέλο στο εσωτερικό του θερμοαντιστάτη είναι περίπου όπως πριν και δεν είναι αναγκαίο να επαναλάβουμε τις εξισώσεις για την T και ϕ . Όμως στο πάνω και κάτω μέρος του θερμοαντιστάτη έχουμε

$$\phi = 0, z = 0, \quad \phi = V(t), z = H$$

Όπου $V(t)$ είναι ακόμα άγνωστη. Χρησιμοποιώντας το νόμο του Ohm για την αντίσταση, η πτώση της τάσης είναι $I(t)R_0$ όπου $I(t)$ είναι το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα. Επιπλέον χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Kirchhoff που λέει ότι «Το άθροισμα των τάσεων κατά μήκος ενός κλειστού κυκλώματος είναι ίσο με το 0», έχουμε:

$$V_0 = I(t)R_0 + V(t).$$

Επειδή το $I(t)$ είναι ίσο με το ρεύμα που διαρρέει το θερμοαντιστάτη

$$\text{δηλαδή, } I(t) = \iint_{z=H} \sigma(T) \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} ds$$

που είναι η πυκνότητα του ρεύματος ολοκληρωμένη στην κάτω όψη. Έτσι για αυτή την περίπτωση, η συνοριακή συνθήκη για το ηλεκτρικό δυναμικό φ στο $z = H$ είναι:

$$\varphi = V_0 - 2\pi R_0 \int_0^a \sigma(\tau) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=H} r dr.$$

Η επίδραση της εξωτερικής αντίστασης στο αδιάστατο μοντέλο μας οδηγεί στην εισαγωγή άλλης μιας παραμέτρου από την συνοριακή συνθήκη του φ . Έτσι με τις ίδιες, με παραπάνω κλιμακοποιήσεις, το αδιάστατο μοντέλο είναι:

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \varphi) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla^2 u = \gamma \sigma(u) |\nabla \varphi|^2, \text{ για } 0 < z < 1, 0 \leq r < a = \frac{a}{H}. \quad (2.4.1)$$

Οι δε συνοριακές συνθήκες είναι:

$$\boxed{\varphi = 0 \text{ για } z = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 \text{ για } r = a \text{ και } \frac{\partial u}{\partial n} + \beta(X)u = 0} \quad (2.4.2)$$

όπως και πριν, με τη νέα συνθήκη:

$$\varphi = \pm \left[1 - \left(\frac{2\mu}{a^2} \right) \int_0^a \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial z} r dr \right] \text{ για } z = \pm 1 \quad (2.4.3)$$

όπου $\mu = \frac{\pi H R_0 \sigma_0 a^2}{2}$ είναι μία ακόμη αδιάστατη παράμετρος, η οποία μεταβάλλεται ανάλογα με τις διαστάσεις του θερμοαντιστάτη. Μια τυπική τιμή για την παράμετρο αυτή, δεδομένου ότι $R_0 = 400\Omega$, είναι 10^{-1} , η οποία είναι αρκετά μικρή. Όταν το $\mu \rightarrow 0$ τότε το πρόβλημα δεν έχει εξωτερικές αντιστάσεις.

2.4.1 ΤΟ ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Μια καλή προσέγγιση για ένα μονοδιάστατο μοντέλο είναι μεγάλη τιμή για το α και μικρή τιμή του β στις πλευρές του θερμοαντιστάτη.

Σε ένα τέτοιο μοντέλο τα φ και u είναι ανεξάρτητα από το z και έτσι έχουμε ένα απλούστερο πρόβλημα όπου:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \gamma \sigma(u) \left| \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|^2, \text{ για } 0 < z < 1 \quad . \quad (2.4.4)$$

Ενώ οι συνοριακές συνθήκες είναι

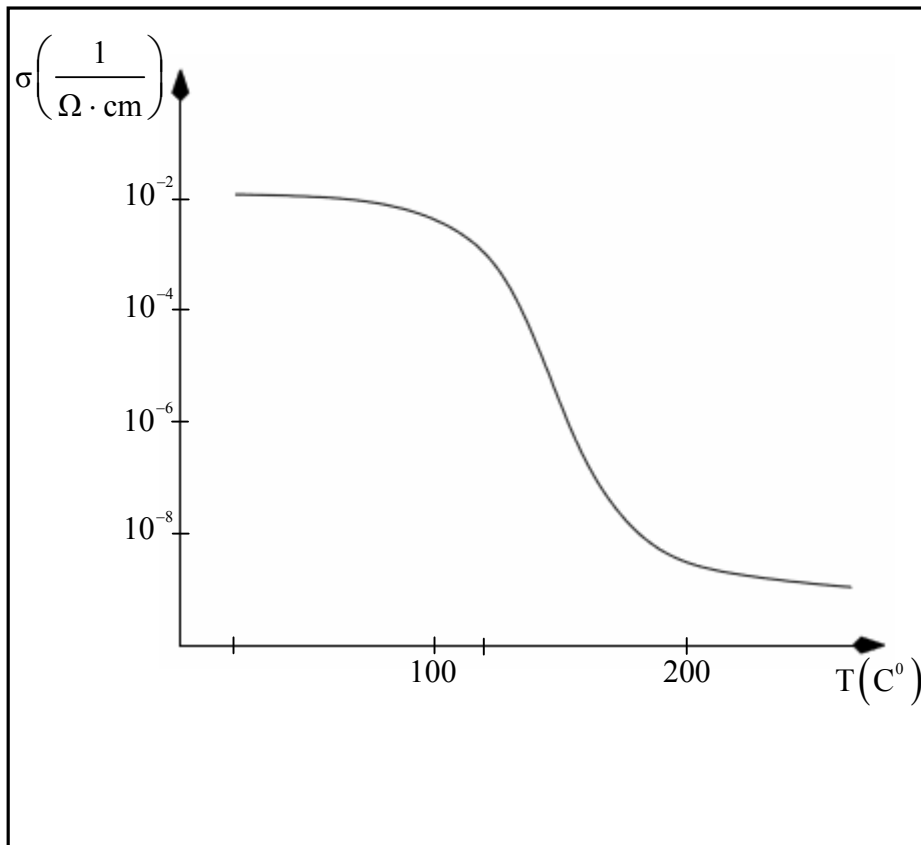
$$\varphi = 0 \text{ για } z = 0, \quad \varphi = 1 - \mu \sigma(u) \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=1} \quad \text{και} \quad \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u = 0 \text{ για } z = 0, 1$$

Τα β και γ είναι αδιάστατες παράμετροι που αναπαριστούν το συντελεστή μεταφοράς θερμότητας και το ρυθμό θέρμανσης για έναν θερμοαντιστάτη σε θερμοκρασία περιβάλλοντος.

Η ηλεκτρική αγωγιμότητα $\sigma(u)$ έχει μεγάλη διακύμανση καθώς u αυξάνει από το 0 στο 1. Έτσι το $\sigma(u)$ θα είναι της μορφής:

$$\sigma(u) = e^{-\frac{f(u)}{\varepsilon}},$$

όπου η επιλογή $f(0)=0$ εξασφαλίζει ότι $\sigma(0)=1$ το οποίο είναι αδιάστατη τιμή του σε θερμοκρασία δωματίου $u = 0$. Η παράμετρος ε είναι μικρή με συνήθη τιμή 10^{-1} . Με αυτόν τον τρόπο η ραγδαία μείωση του $\sigma(u)$ σε σχέση με το u , μεταφράζεται σε μεταβολή της $f(u)$ κατά $O(1)$ και η παράμετρος ε ποσοτικοποιεί το μέγεθος αυτής της αλλαγής. Το κρίσιμο χαρακτηριστικό αυτής της διατύπωσης είναι ότι εάν η $f(u)$ και κατά συνέπεια η u αλλάζει κατά $O(\varepsilon)$, τότε η $\sigma(u)$ αλλάζει κατά $O(1)$. Αν η $f(u)$ μεταβληθεί περισσότερο από $O(\varepsilon)$, τότε η μεταβολή στην $\sigma(u)$ είναι πολύ μεγάλη. Αυτή είναι ακριβώς η συμπεριφορά που είδαμε σε συνοριακά στρώματα και με ανάλογο τρόπο έχουμε να εξετάσουμε μόνο τη συμπεριφορά του $\sigma(u)$ σε μικρές περιοχές.



Σχήμα 3: Γραφική παράσταση της αγωγιμότητας σ , συναρτήσεως της θερμοκρασίας T για έναν θερμοαντιστάτη PTC. Η θερμοκρασία, στην οποία η σ έχει την μισή της μέγιστης τιμής της ορίζεται ως θερμοκρασία εναλλαγής. (βλ. βιβλιογραφία [3])

Στάσιμη κατάσταση

Έστω ότι ο συντελεστής μεταφοράς θερμότητας β είναι $O(1)$, και ας δούμε την στάσιμη κατάσταση λειτουργίας της συσκευής, με την προϋπόθεση ότι η εφαρμοζόμενη τάση είναι επαρκής ώστε να φέρει τη θερμοκρασία αρκετά πάνω από $u = 0$.

Έτσι $u(z,t)$ και $\varphi(z,t)$ είναι συναρτήσεις μόνο του z και για αυτό τα ονομάζουμε $u(z)$ και $\varphi(z)$.

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση $\varphi(z)$, μία φορά, παίρνουμε :

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{1}{\sigma(u(z))} = I e^{\frac{f(u(z))}{\varepsilon}},$$

όπου η σταθερά I είναι το ρεύμα που διαρρέει τη συσκευή.

Με δεύτερη ολοκλήρωση παίρνουμε :

$$\varphi(z) = I \int_0^z e^{\frac{f(u(s))}{\varepsilon}} ds$$

και η συνοριακή συνθήκη στο $z = 1$ τροποποιεί την σταθερά I έτσι, ώστε:

$$\varphi(z) = \frac{\int_0^z e^{-\frac{f(u(s))}{\varepsilon}} ds}{\mu + \int_0^1 e^{-\frac{f(u(s))}{\varepsilon}} ds} \quad (2.4.5)$$

Η εξίσωση για $u(z)$ γίνεται:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{\gamma e^{-\frac{f(u)}{\varepsilon}}}{\left(\mu + \int_0^1 e^{-\frac{f(u(s))}{\varepsilon}} ds \right)^2} = 0, \quad 0 < z < 1 \quad (2.4.6)$$

με συνοριακές συνθήκες $\frac{\partial u}{\partial n} + \beta u = 0$ για $z = 0, 1$

με την παρατήρηση ότι είναι μη τοπικό πρόβλημα, λόγω της μορφής του όρου πηγής.

Εάν υπάρχει μια θερμή περιοχή κοντά στο κέντρο της συσκευής και το $\sigma(u)$ είναι μικρό μέσα σε αυτό, αυτό σημαίνει ότι ο όρος $e^{-\frac{f(u)}{\varepsilon}} = \frac{1}{\sigma(u)}$

είναι μεγάλος. Αν η θερμή περιοχή είναι μεγέθους $O(1)$, έτσι ώστε να θερμαίνεται η μεγαλύτερη επιφάνεια του θερμοαντιστάτη το ολοκλήρωμα του παρονομαστή του τελευταίου όρου είναι και αυτό μεγάλο και συγκρίσιμο με το $e^{-\frac{f(u)}{\varepsilon}}$ γιατί είναι υψωμένο στο τετράγωνο.

Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το $\frac{d^2 u}{dz^2}$ να είναι μικρό και η u να είναι σχεδόν ομοιόμορφη.

Ωστόσο οι συνοριακές συνθήκες για την u επιτρέπουν αυτό να συμβεί μόνο αν η ίδια η u είναι μικρή. Αυτό έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση ότι η u είναι αρκετά πάνω από το 0. Έτσι συμπεραίνουμε ότι η θερμή περιοχή πρέπει να είναι μικρή και πρέπει να είναι της τάξης $O(\varepsilon)$.

Ωστόσο η θερμοκρασία u χρειάζεται να αλλάξει μόνο κατά $O(\varepsilon)$ σ' αυτήν την περιοχή, καθώς μεγαλύτερες αλλαγές, δείχνουν ότι ο αριθμητής στη σχέση (2.4.6) είναι εκθετικά αμελητέος. Κατά συνέπεια όλη η αντίσταση συγκεντρώνεται σε ένα λεπτό, θερμό στρώμα.

Όταν η συσκευή λειτουργεί ικανοποιητικά, και με μία συνάρτηση $f(u)$, όπως αυτή της (2.3.3), περιμένουμε ότι η σταθερή μέγιστη θερμοκρασία

u^* προκύπτει για $z=0$ και ότι $u^* > 1$. Σε μια στάσιμη κατάσταση περιμένουμε μια λεπτή θερμή περιοχή κοντά στο $z=0$ όπου $u \approx u^*$, μέγιστη τιμή της u και μια παχιά θερμή περιοχή όπου $1 \leq u < u^*$ (αν η περιοχή είναι σε θερμοκρασία περιβάλλοντος, τότε $u < 1$).

Στη συνέχεια γράφουμε $z = \varepsilon \xi$, $u = u^* + \frac{\varepsilon w}{f'(u^*)}$ (2.4.7) έτσι ώστε να

έχουμε μια εσωτερική επέκταση σε μια περιοχή, μεγέθους $O(\varepsilon)$ κοντά στο μέσο του θερμοαντιστάτη. Το πρώτο μας μέλημα είναι να βρούμε την u^* με ακρίβεια τουλάχιστον $O(1)$.

Έχουμε λοιπόν, $\lambda^* = e^{\frac{f(u^*)}{\varepsilon}}$ η μέγιστη τιμή του $\sigma(u)$, το οποίο είναι μεγάλο. Τότε έχουμε:

$$e^{\frac{f(u)}{\varepsilon}} = e^{\frac{f(u^*) + \varepsilon w + \dots}{\varepsilon}} \sim \lambda^* e^w.$$

Τότε η (2.4.6) γίνεται:

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} + \frac{\gamma f'(u^*)}{\varepsilon \lambda^*} \frac{e^w}{\left(\frac{\mu}{\gamma f'(u^*)} \int_0^\infty e^w d\xi \right)^2} = 0.$$

Επιλέγοντας όμως, $\frac{\gamma f'(u^*)}{\varepsilon \lambda^*} = 1$ και υποθέτοντας ότι $\mu \leq \gamma$ η τελευταία σχέση γίνεται:

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} + \frac{e^w}{\left(\frac{\mu}{\gamma f'(u^*)} \int_0^\infty e^w d\xi \right)^2} = 0.$$

Οι σχέσεις $\frac{\gamma f'(u^*)}{\varepsilon \lambda^*} = 1$ και $\lambda^* = e^{\frac{f(u^*)}{\varepsilon}}$ συνεπάγονται ότι η μέγιστη

θερμοκρασία u^* δίνεται από την σχέση:

$$u^* \approx f^{-1} \left[\varepsilon \ln \left(\frac{\gamma}{\varepsilon} \right) \right] \quad (2.4.8)$$

και τότε η συνάρτηση (2.3.3) μας δίνει

$$u^* \approx 1 + \varepsilon \ln \frac{\gamma}{\varepsilon} \quad (2.4.9)$$

Παροδική Φάση

Η προσέγγιση από την παροδική φάση στη στάσιμη κατάσταση περιγράφεται με παρόμοιο τρόπο. Πρέπει λοιπόν, να λύσουμε την

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\gamma e^{\left(\frac{f(u)}{\varepsilon}\right)}}{\left[\mu + \int_0^1 e^{\left(\frac{f(u)}{\varepsilon}\right)} dz\right]^2} \quad (2.4.9)$$

με $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ για $z = 0$, $\frac{\partial u}{\partial z} + \beta u = 0$ για $z = 1$.

Υπάρχει ένα αρχικό στάδιο προθέρμανσης όσο $u < 1$, όπου $\sigma = 1$ και η u ικανοποιεί την

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\gamma}{(1+\mu)^2} \quad (2.4.10)$$

για τις τιμές των γ , μ και β που μελετούμε, η μέγιστη θερμοκρασία στο κέντρο θα φθάσει στη μονάδα σε πεπερασμένο χρόνο και μετά από αυτό υπάρχει μια δευτερεύουσα φάση απότομης αύξησης όταν η θερμοκρασία αυξάνεται ραγδαία.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $u(u)$ και την γρήγορη κλίμακα χρόνου τ ώστε:

$$f(u) = \varepsilon u, \quad t = \varepsilon \mu^2 \gamma^{-1} \tau \quad (2.4.11)$$

Στη συνέχεια όπου $f' > 0$, δηλαδή $u > 0$ ($u > 1$), η u ικανοποιεί την σχέση:

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{f'(u)e^v}{\left[1 + \frac{1}{\mu} \int_0^1 e^v dz\right]^2} + \frac{\varepsilon \mu^2}{\gamma} \frac{d^2 v}{dz^2} - \frac{\varepsilon^2 \mu^2}{\gamma} \frac{f''}{(f')^2} \left(\frac{dv}{dz}\right)^2 \quad (2.4.12)$$

Στον πρώτης τάξης όρο τουλάχιστον όταν το v είναι $O(1)$ τότε:

$$\frac{dv}{d\tau} \approx \frac{f'(u)e^v}{\left[1 + \frac{1}{\mu} \int_0^1 e^v dz\right]^2} \quad (2.4.13)$$

έτσι το v αρχίζει να αυξάνεται σε μια γρήγορη κλίμακα του χρόνου $t \sim \varepsilon \mu^2 / \gamma$. Σημειώνουμε ότι η προθέρμανση που προκύπτει από το (2.4.10) στην κλίμακα χρόνου $t \sim \mu^2 / \gamma$ και αφού εφαρμόζεται η (2.4.13) όπου $v > 0$, η φάση ραγδαίας αύξησης αρχικά περιορίζεται στην κεντρική περιοχή όπου $u \approx 1$. Έτσι $\int_0^1 e^v dz \approx 1$ (αφού $v = 0$ και $u < 1$), και

$$\frac{dv}{d\tau} \approx \frac{f'e^v}{\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^2}. \text{ Αφού η } u \text{ είναι μία αργά μεταβαλλόμενη συνάρτηση του}$$

v (και ως εκ τούτου του τ), έτσι είναι και η $f'(u) = f'[f^{-1}(\varepsilon v)]$ μπορούμε να το λύσουμε κατά προσέγγιση, θεωρώντας την f' ως σταθερά από όπου έχουμε:

$$v \approx -\ln \left[e^{-v_0(z)} - \frac{f'\tau}{\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^2} \right]. \quad (2.4.14)$$

Η παραπάνω λύση οδηγεί σε διόγκωση σε πεπερασμένο χρόνο. Αυτό γρήγορα καταστέλλεται καθώς το v αυξάνεται γιατί ο όρος του ολοκληρώματος γίνεται σημαντικός. Γυρνώντας στη αρχική κλίμακα χρόνου η (2.4.12) γίνεται:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2v}{dz^2} - \frac{\varepsilon f''}{(f')^2} \left(\frac{dv}{dz}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\varepsilon}\right) \frac{f'e^v}{\left[\mu + \int_0^1 e^v dz\right]^2}. \quad (2.4.15)$$

Ο κορεσμός του v προκύπτει όταν $v \approx \ln\left(\frac{\gamma}{\varepsilon}\right)$ αφού τότε ο ολοκληρωτικός όρος γίνεται σημαντικός. Θέτοντας,

$$v = \ln\left(\frac{\gamma}{\varepsilon}\right) + w \quad (2.4.16)$$

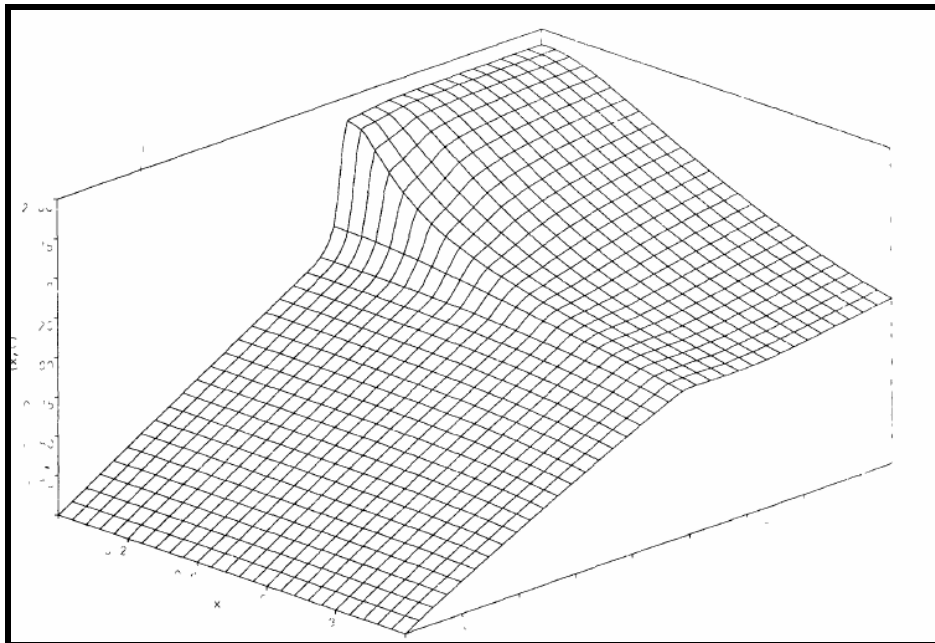
έχουμε ένα προσεγγιστικό παροδικό πρόβλημα για $w > -\ln\left(\frac{\gamma}{\varepsilon}\right)$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{f'e^w}{\left[\int_0^1 e^w dz\right]^2} \quad (2.4.17)$$

που χαλαρώνει προς τη στάσιμη κατάσταση που ορίστηκε προηγουμένως σε μία αγωγή κλίμακα χρόνου $O(1)$.

Στην πραγματικότητα αυτή η τελική αγωγή χαλάρωση, θα γίνει σε δύο στάδια ανάλογα με το πόσο ομοιόμορφη είναι η αρχική περίοδος προθέρμανσης. Γενικά στο κεντρικό τμήμα η θερμοκρασία αυξάνεται απότομα για χρόνο $t \sim \varepsilon \mu^2 / \gamma$. Σε αυτό το χρονικό διάστημα, η ψυχρή περιοχή (με $u < 1$) υπόκειται σε αύξηση του $\Delta u \sim \varepsilon$. Εάν το $\frac{d^2u}{dz^2} \sim O(1)$ για $z=0$ όταν $u=1$, τότε η αύξηση διαδίδεται έξω στο

$z = O(\sqrt{\varepsilon})$ (δηλαδή όπου $1-u \sim \varepsilon$). Ανακλιμακώνοντας $z \sim \sqrt{\varepsilon}$, έχουμε ότι η θερμή ζώνη που διέπεται από τη (2.4.16) ισορροπεί σε χρόνο $t \sim \varepsilon$ και το εξωτερικό πεδίο θερμοκρασίας χαλαρώνει αγωγή σε χρόνο $t = O(1)$. Από τη άλλη, εάν ισχύει $1-u \sim \varepsilon$ παντού κατά την έναρξη της απότομης αύξησης, τότε όλος ο θερμοαντιστάτης συμμετέχει στην απότομη αύξηση και η παύση της αύξησης αυτής μαζί με την τελική χαλάρωση συμβαίνουν σε μία κλίμακα χρόνου τάξης $O(1)$. Τέτοιες ομοιόμορφες αρχικές θερμοκρασίες μπορούν να προκληθούν από μεγάλες αριθμητικές τιμές του γ/μ^2 ή μικρές τιμές του β όπως έχουμε και στην πραγματικότητα. Συνοψίζοντας υπάρχουν τέσσερις διακριτές φάσεις: **προθέρμανση** για $t \sim \mu^2/\gamma$, **απότομη αύξηση** για $t \sim \varepsilon\mu^2/\gamma$, **επιβράδυνση** για $t < 1$, και **χαλάρωση** σε $t \sim 1$.



Σχήμα 4: Η εξέλιξη της θερμοκρασίας στη μονοδιάστατη περίπτωση όπου οι τιμές των παραμέτρων είναι $\gamma = 2000$, $\varepsilon = 0.1$, $\mu = 20$, $\beta = 0.5$ βλ. βιβλιογραφία [3].

Σε αυτή την περιγραφή οι μεγαλύτερες διαβαθμίσεις θερμοκρασίας εντοπίζονται προς το κέντρο της συσκευής και παρότι η περαιτέρω ανάλυση της (2.4.12) είναι απαραίτητη, από την (2.4.14) έχουμε ότι $\frac{\partial u}{\partial z} \approx e^u u_0' \sim \mu$ όταν $e^u \sim \mu$. Αυτές οι μεγάλες διαβαθμίσεις συμβαίνουν σε ένα «μέτωπο» που διαχωρίζει την θερμή κεντρική περιοχή (στην οποία έχουμε την απότομη αύξηση) από την πιο ψυχρή περιφέρεια. Έτσι η

απότομη αύξηση οδηγεί σε διαβαθμίσεις της θερμοκρασίας $\frac{\partial u}{\partial z} \sim \varepsilon \mu$, οι οποίες συνήθως είναι σημαντικά μεγαλύτερες από αυτές που σχετίζονται με μια σχεδόν ομοιόμορφη φάση προθέρμανσης. Οι τιμές $\varepsilon \cdot \mu$ της τάξης $O(1)$ ($\varepsilon = 0.1$, $\mu = 10$) αντιστοιχούν σε διαβαθμίσεις θερμοκρασίας της τάξης των 100°C ανά χιλιοστό.

2.5 Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΟΠΟΥ $\beta \ll 1$, ΟΙ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Τα όσα έχουμε δει μέχρι τώρα εφαρμόζονται για $\varepsilon \ll 1$ και $\beta \sim 1$. Αν υποθέσουμε ότι $\beta \ll 1$, όπως είναι στην πραγματικότητα ($\beta \approx 0,1$ στην κορυφή). Σε αυτήν την περίπτωση η αρχική προθέρμανση είναι σχεδόν ομοιόμορφη όπως είναι στην τελική στάσιμη κατάσταση. Θέτουμε:

$$\beta = \varepsilon b \quad (2.5.1)$$

και γράφουμε

$$u = u^* + \frac{\varepsilon w}{f'(u^*)} \quad (2.5.2)$$

στη σταθερή κατάσταση. Ορίζουμε:

$$\Delta = \frac{\gamma f'(u^*)}{\varepsilon} \quad (2.5.3)$$

Τότε, αν $\Delta \gg \mu$ δηλαδή $\gamma \gg \varepsilon \mu$, το w δίνεται στην κύρια τάξη από τη μοναδική λύση της σχέσης:

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{e^w}{\left[\int_0^1 e^w dz \right]^2} = 0, \quad \frac{dw}{dz} = -bf'(u^*)u^* \quad \text{για } z=1, \quad \frac{dw}{dz} = 0 \quad \text{για } z=0. \quad (2.5.4)$$

Έτσι ώστε $u \approx u^*$ παντού.

Βέβαια δεν είναι τόσο προφανές κατά πόσο η προσέγγιση $u \approx \bar{u}(t)$, όπου \bar{u} είναι η μέση θερμοκρασία, ισχύει καθόλη τη μετάβαση. Για να το εξετάσουμε γράφουμε:

$$u = \bar{u}(t) + \varepsilon V, \quad t = \frac{\mu^2 \varepsilon}{\gamma} \tau \quad (2.5.5)$$

και αναζητούμε συνθήκες κάτω από τις οποίες το V είναι ομοιόμορφα τάξης $O(1)$. Προφανώς παίρνουμε $V = O(1)$ το πολύ όταν $\bar{u} = 1$ (στο τέλος της φάσης της προθέρμανσης). Κατά τη διάρκεια της φάσης

επιτάχυνσης, καθώς ο ολοκληρωτικός όρος στην (2.4.7) είναι μικρός το \bar{u} πρέπει να ικανοποιεί την

$$\frac{d\bar{u}}{d\tau} \approx \varepsilon e^{\frac{f(\bar{u})}{\varepsilon}} \quad (2.5.6)$$

Τότε με άμεσο υπολογισμό. Το V ικανοποιεί την:

$$V_\tau = \frac{\mu^2 \varepsilon}{\gamma} \frac{d^2 V}{dz^2} + \frac{\bar{u}'}{\varepsilon} \left[\frac{e^{\frac{f(\bar{u}+\varepsilon V)-f(\bar{u})}{\varepsilon}}}{\left[1 + \frac{1}{\mu} \int_0^1 e^{\frac{f(\bar{u}+\varepsilon V)}{\varepsilon}} dz \right]^2} - 1 \right] \approx \frac{\bar{u}'}{\varepsilon} \left[e^{f'(\bar{u})V} - 1 \right] \quad (2.5.7)$$

για αρκετά μικρές τιμές του τ . Απαλείφοντας το τ , το V δίνεται με βάση το \bar{u} από τη σχέση:

$$\frac{\partial V}{\partial \bar{u}} = \frac{1}{\varepsilon} \left(e^{f'(\bar{u})V} - 1 \right) . \quad (2.5.8)$$

Με $V = O(1)$ όπου $\bar{u} = 1$. Έτσι από τη σχέση αυτή έχουμε ότι το V θα γίνει πολύ μεγαλύτερο από το 1 για $\bar{u} - 1 = O(1)$. Επιπλέον, οι χωρικές διακυμάνσεις του V κατά την έναρξη της φάσης επιτάχυνσης θα οδηγήσουν σε μεγάλες χωρικές διαβαθμίσεις του V , ως εκ τούτου και του u , καθώς το \bar{u} αυξάνεται. Δηλαδή περιμένουμε την ίδια ακόμη και όταν το $\beta \ll 1$. Μόνο όταν $u = 1 + O(\varepsilon^2)$ κατά την έναρξη της απότομης αύξησης η u θα παραμείνει σχεδόν ομοιόμορφη, αφού τότε η (2.5.8) θα σημαίνει ότι το $V = O(1)$. Τέτοια ομοιόμορφα αρχικά χαρακτηριστικά συνδέονται με μεγάλες αριθμητικές τιμές για το γ / μ^2 .

Είναι εύκολο να επεκτείνουμε αυτά τα αποτελέσματα (όταν $\beta \ll 1$) σε δύο διαστάσεις, τουλάχιστον για τη στάσιμη κατάσταση.

Γυρνώντας σε προηγούμενες σχέσεις (βλ. §2.4) αντικαθιστούμε το u από

την (2.4.5), στη συνέχεια επιλέγουμε $\Delta = e^{\frac{f(u^*)}{\varepsilon}} \gg 1$ ώστε να ικανοποιείται η (2.5.3) βρίσκουμε στην κύρια τάξη ότι

$$\nabla \cdot \left[e^{-w} \nabla \varphi \right] = 0 \quad (2.5.9)$$

$$\nabla^2 w + e^{-w} |\nabla \varphi|^2 = 0 \quad (2.5.10)$$

με

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial n} &\approx -bf'(u^*)u^* \text{ για } z=1, r=\alpha & \frac{\partial w}{\partial n} &= 0 \text{ για } z=0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= 0 \text{ για } r=\alpha & & \\ \varphi &= 0 \text{ για } z=0 & \varphi &\approx 1 \text{ για } z=1 \end{aligned} \quad . \quad (2.5.11)$$

Εφόσον $\Delta \gg \mu$

Αν η u είναι ομοιόμορφη στη φάση της προθέρμανσης θα παραμείνει ομοιόμορφη και στη φάση της απότομης αύξησης και η εξέλιξη της θερμοκρασίας λαμβάνεται ολοκληρώνοντας την σχέση

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u + \gamma \sigma(u) |\nabla \varphi|^2 \text{ ως προς τον όγκο του θερμοαντιστάτη και}$$

$$\nabla \cdot [\sigma \nabla \varphi] = 0$$

και

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \beta u = 0 \text{ για } z = \pm 1, r = \alpha$$

έχουμε:

$$\frac{d}{dt} \int_V u \, dV = - \int_S \beta u \, dS + \gamma \int_S \sigma(u) \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, dS \quad . \quad (2.5.12)$$

Με $\beta \ll 1$ μπορούμε να πάρουμε $u \approx \bar{u}$ ακόμα και στο συνοριακό στρώμα για $z = 1$.

Από τη άλλη εάν $u - \bar{u} \ll \varepsilon$ κατά τη διάρκεια της φάσης της απότομης αύξησης τότε προσεγγιστικά είναι $\nabla^2 \varphi = 0$, από όπου $\frac{d^2 \varphi}{dz^2} = 0$, έτσι ώστε

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \varphi (= \text{σταθερά}) \text{ για } z=1. \text{ Συνεπώς από τη σχέση}$$

$$\varphi = 1 - \frac{2\mu}{\alpha^2} \int_0^\alpha \sigma(u) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=1} r \, dr \text{ συνεπάγεται ότι } \varphi \approx \frac{1}{1 + \mu \sigma(u)} \text{ για } z=1 \text{ και}$$

αυτό ισχύει μετά την φάση της απότομης αύξησης όταν $\varphi \approx 1$. Συνεπώς:

$$\int_S \sigma(u) \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, ds = \int_{z=1} \sigma \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, dS \approx \frac{\pi \alpha^2 \sigma}{(1 + \mu \sigma)^2} \quad . \quad (2.5.13)$$

Αυτό δεν ισχύει στην περίπτωση της αγωγίμης φάσης (όπου το φ ικανοποιεί την (2.5.9)), αλλά το σφάλμα δεν είναι σοβαρό. Συνεπώς, μπορεί να ληφθεί μια ομοιόμορφη προσέγγιση στην (2.5.12), γράφοντας $u \approx \bar{u}(t)$ που ικανοποιεί την :

$$V \frac{d\bar{u}}{dt} = -\bar{\beta}S\bar{u} + \frac{\gamma A \sigma(\bar{u})}{(1 + \mu\sigma)^2}, \quad (2.5.14)$$

όπου $V = \pi a^2$ είναι ο μισός όγκος του θερμοαντιστάτη, $S = \pi a(2 + a)$ είναι η μισή συνολική εξωτερική επιφάνεια, $A = \pi a^2$ είναι η διατομή (όλα σε αδιάστατες μονάδες) και $\bar{\beta}$ είναι η μέση τιμή για το β . Σημειώνοντας ότι το $\beta = b\varepsilon$, η τιμή ισορροπίας του u^* προσδιορίζεται από την σχέση:

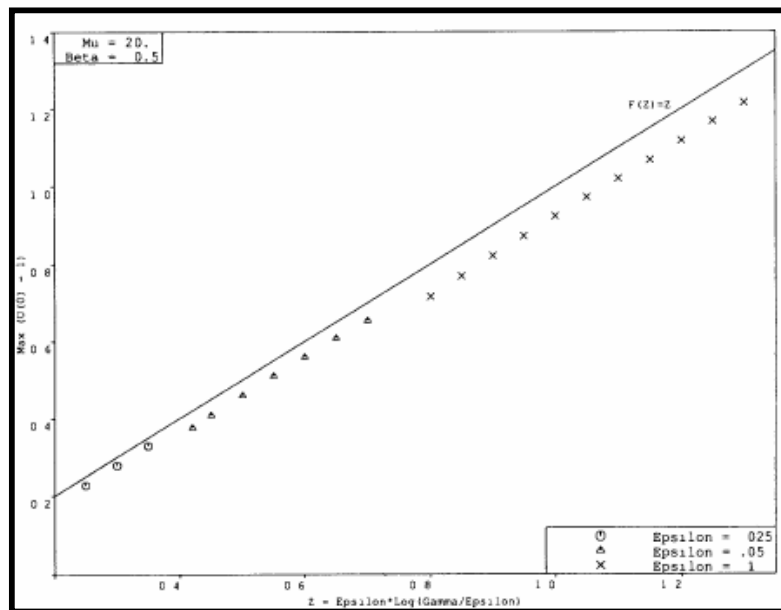
$$\Delta = \frac{1}{\sigma(u^*)} \approx \frac{\gamma A}{\varepsilon b S u^*} \quad (\sigma \ll 1) \quad (2.5.15)$$

η οποία συμφωνεί και με την σχέση (2.5.3). Η εξίσωση (2.5.13) μας βοηθά να υπολογίσουμε την παροδική και την στάσιμη συμπεριφορά, τουλάχιστον όταν το β είναι μικρό. Όταν $\beta \sim \varepsilon$, η (2.5.13) εφαρμόζεται

εάν $\frac{\gamma}{\mu^2} \gg 1$, έτσι ώστε η u να είναι πραγματικά ομοιόμορφη, ενώ εάν

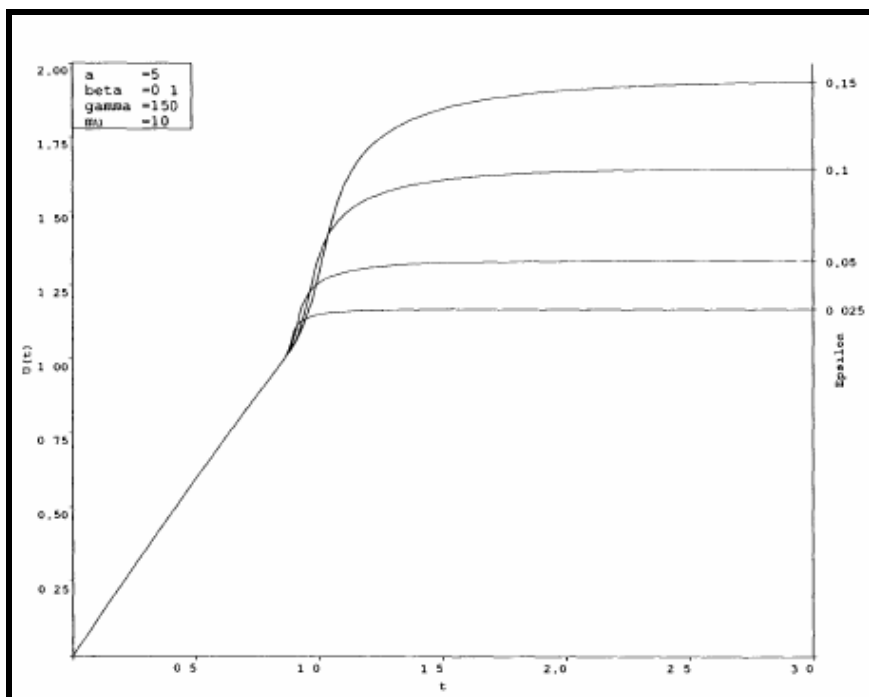
$\frac{\gamma}{\mu^2} \sim 1$ περιμένουμε απότομη αύξηση όπως περιγράψαμε παραπάνω.

Στο σχήμα 5 βλέπουμε τον αριθμητικό υπολογισμό της μέγιστης θερμοκρασίας έναντι της ασυμπτωτικής εκτίμησης. Φαίνεται ότι η πρόβλεψη είναι άριστη και ότι το σφάλμα είναι προφανώς της τάξης $O(\varepsilon)$ που συνάδει με την ανάλυσή μας.



Σχήμα 5: Σύγκριση των τιμών του $u^* - 1$ με τη θεωρητική πρόβλεψη (2.5.9), (2.5.10) για τις τιμές $\varepsilon = 0.1$ (που παριστάνεται με x), $\varepsilon = 0.5$ (που παριστάνεται με τρίγωνα) και $\varepsilon = 0.025$ (που παριστάνεται με κύκλο). (βλ. βιβλιογραφία [3])

Στο σχήμα 6 φαίνονται οι αριθμητικές λύσεις της (2.5.15) για τιμές $\alpha = 5$, $\beta = 0.1$, $\gamma = 150$ και για διάφορες τιμές του ε . Η ανάπτυξη της φάσης της απότομης αύξησης καθώς το \tilde{u} αυξάνεται καθώς ξεπερνά την τιμή 1 είναι σημαντική, ενώ η διάρκειά του μειώνεται καθώς μειώνεται το ε , το ίδιο κάνει και το πλάτος του αφού $u^* \rightarrow 1$ καθώς το $\varepsilon \rightarrow 0$.



Σχήμα 6: Αριθμητικές λύσεις του (2.5.15) για τιμές $\alpha=5$, $\beta=0.1$, $\gamma=150$ και για διάφορες τιμές του ε . (βλ. βιβλιογραφία [3])

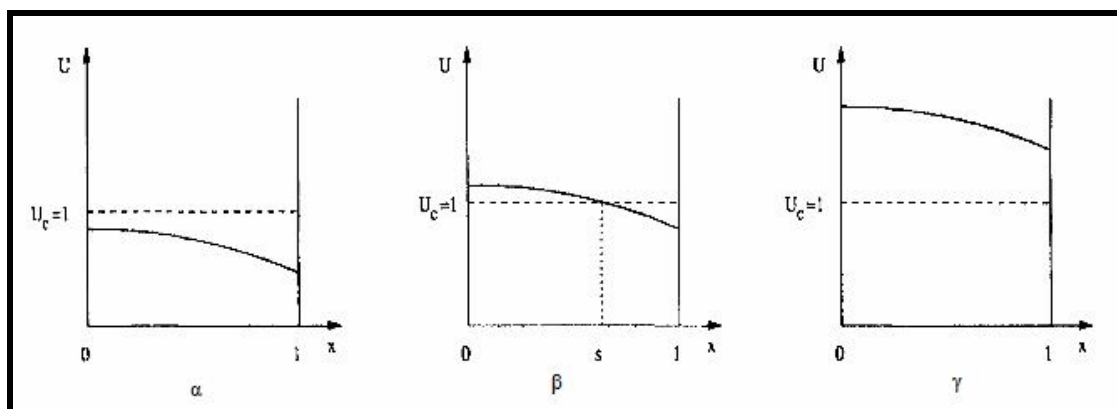
2.6 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Πρώιμες μελέτες του προβλήματος του θερμοαντιστάτη αγνοούσαν την αλληλεπίδραση του με το κύκλωμα θέτοντας $\mu = 0$. Η τετραδική μη γραμμικότητα στις εξισώσεις πεδίου έχει διεγείρει το μαθηματικό ενδιαφέρον για αυτή την εκδοχή του προβλήματος και υπάρχουν αποτελέσματα για διάφορες συνοριακές συνθήκες για το u και το φ . Αρχικά είδαμε μία απλοποιημένη εκδοχή του προβλήματος όπου το φ ικανοποιεί τις σχέσεις (2.4.1), (2.4.3) και τις συνοριακές συνθήκες (2.4.2) με $\mu = 0$, αλλά $u = 0$ στο σύνορο ($\beta \rightarrow \infty$) και με το $\sigma(u)$ να αντιπροσωπεύεται από μία κλαδική συνάρτηση, όπως η (2.3.3).

Έτσι καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι εφόσον το γ δεν είναι πολύ μεγάλο η θερμή περιοχή $u > 1$ θα είναι μεγέθους $O(\gamma/\mu)$. Βέβαια η οριακή περίπτωση όπου $\mu \rightarrow \infty$ είναι ένα ενδιαφέρον άλυτο πρόβλημα.

Εμείς πρώτα βρίσκουμε ασυμπτωτικά αποτελέσματα για την ασταθή κατάσταση και μετά σε αυτά ενσωματώνουμε το ηλεκτρικό κύκλωμα. Έτσι έχουμε τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- 1) Το σύστημα που περιγράφουμε εξαρτάται από πέντε σημαντικές αδιάστατες παραμέτρους γ , μ , ε , β , α . Από αυτές το μ και το α μπορεί να ποικίλουν ανάλογα με το μέγεθος του θερμοαντιστάτη, το β εξαρτάται από τον ακριβή μηχανισμό μεταφοράς θερμότητας μακριά από τη συσκευή. Το γ εξαρτάται μόνο από την εξωτερική τάση V_0 και τις εγγενείς ιδιότητες του κεραμικού υλικού (υποθέτοντας ότι το ΔT είναι λίγο πολύ αμετάβλητο) και το ε εξαρτάται αποκλειστικά από τις εγγενείς ιδιότητες του υλικού.
- 2) Δεδομένου ότι το γ να είναι αρκετά μεγάλο ώστε η θερμοκρασία εναλλαγής να επιτυγχάνεται εύκολα, μεγαλύτερη αδιάστατη θερμοκρασία είναι $u^* \sim 1 + O(\varepsilon \ln(\gamma/\varepsilon))$ και προκύπτει από τη σχέση $u^* = f^{-1}[\varepsilon \ln(\gamma/\varepsilon)]$ όπως στη σχέση (2.4.8). Ειδικά αν το β και το ε είναι του ίδιου μεγέθους, τότε η σταθερή θερμοκρασία είναι $u^* + O(\varepsilon)$ κατά μήκος της συσκευής.
- 3) Αφού η αρχική θερμοκρασία της συσκευής είναι ίση με 0 και το $\beta > 0$ υποθέτουμε τη μονοτονία της θερμοκρασίας έτσι ώστε το σημείο $x = 0$ να είναι πάντα στο θερμότερο και θα είναι το πρώτο σημείο που θα φθάσει τη κρίσιμη θερμοκρασία $u = 1$. Τέλος, ο ρυθμός της απώλειας θερμότητας στο $x = 1$ θα ισούται με το ρυθμό παραγωγής εσωτερικής θερμότητας και έτσι θα επιτευχθεί ισορροπία. Οπότε η στάσιμη κατάσταση μπορεί να είναι ένα από τα τρία σενάρια που περιγράφονται στο παρακάτω διάγραμμα:



Σχήμα 6: Οι διατάξεις της στάσιμης κατάστασης
 (α) κρύα φάση (β) θερμή φάση (γ) καυτή φάση.
 βλ. βιβλιογραφία [8]

4) Η σχέση της τάσης και της έντασης του ρεύματος στη στάσιμη κατάσταση υπολογίζεται εύκολα. Ξεκινάμε με την υπόθεση, στην οποία δεν υπάρχει εξωτερική αντίσταση, δηλαδή $R_0 = 0$ και χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.2.1) μπορούμε να υπολογίσουμε την σταθερή ένταση του ρεύματος για $R_0 \neq 0$. Υποθέτουμε ότι η τάση κατά μήκος του θερμοαντιστάτη είναι φ_0 σε αδιάστατους όρους, δηλαδή $V_0\varphi_0$ σε διαστατικούς όρους. Από τη σχέση $I = \frac{1}{\mu + \int_0^1 e^{\frac{f(u)}{\varepsilon}} dz}$

το διαστατικό ρεύμα που διαρρέει το θερμοαντιστάτη είναι:

$$I_{th} = \frac{d\sigma}{du} \frac{\pi \Gamma_0^2 V_0 \varphi_0}{H \int_0^1 e^{\frac{f(u)}{\varepsilon}} dz} \quad (2.6.1)$$

Αν ο θερμοαντιστάτης είναι κρύος δηλαδή το γ δεν είναι αρκετά μεγάλο ώστε το u να φθάσει τη θερμοκρασία εναλλαγής $u = 1$, επίσης το $f(u)$ είναι μικρό, και έτσι έχουμε ότι:

$$I_{th} \sim \frac{d\sigma}{du} \frac{V_0 \varphi_0 \cdot \pi r_0^2}{H}$$

Συνεπώς, υπάρχει μία γραμμική σχέση μεταξύ του ρεύματος και της εφαρμοζόμενης τάσης. Αντιθέτως όταν ο θερμοαντιστάτης είναι θερμός, και υποθέτοντας ότι το β είναι μικρό, η μονοδιάστατη ανάλυση προβλέπει ότι:

$$I_{th} \approx \frac{d\sigma}{du} \cdot \frac{V_0 \varphi_0 \pi r_0^2}{m \Delta},$$

όπου $m \sim O\left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)$ είναι μία σταθερά που εξαρτάται από τις ακριβείς

λεπτομέρειες της θερμοκρασίας. Αφού $\Delta = \frac{\gamma f'(u^*)}{\varepsilon}$, $u^* = f^{-1}\left(\varepsilon \ln \frac{\gamma}{\varepsilon}\right)$

και ανακαλώντας ότι εδώ πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ότι

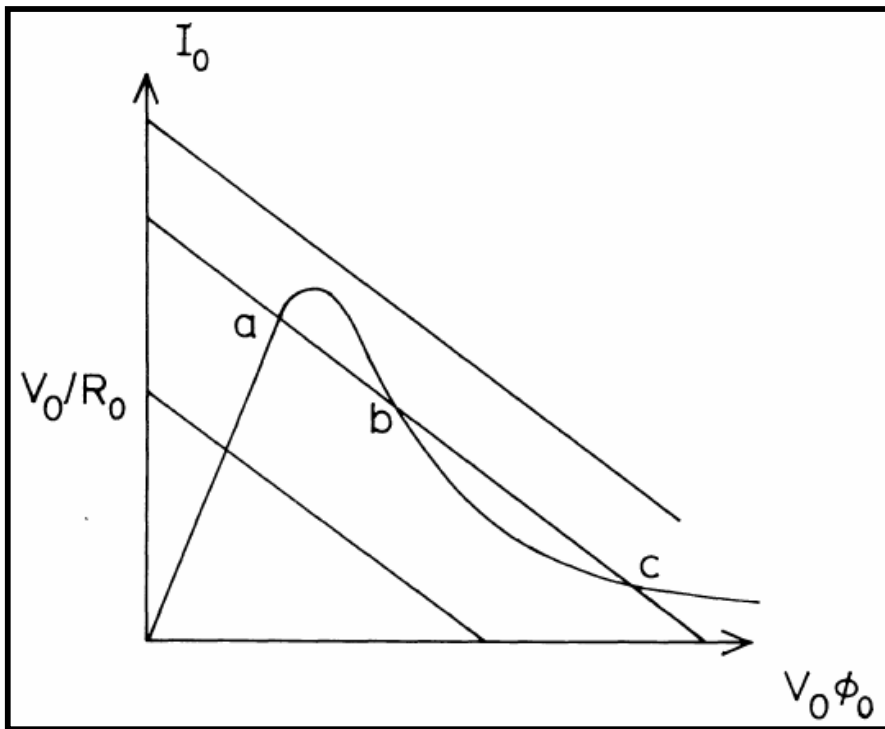
$$\gamma = \frac{d\sigma}{du} \frac{\varphi_0^2 V_0^2}{4k\Delta T} \quad \text{έχουμε:}$$

$$I_0 \approx \frac{4\pi k \varepsilon r_0^2 \Delta T}{H m f'(u^*)} \frac{1}{V_0 \varphi_0}.$$

Συνεπώς, το ρεύμα I_0 είναι αντιστρόφως ανάλογο με την εφαρμοζόμενη τάση. Υπάρχει μια περιογή μετάβασης μεταξύ των δύο

καθεστώτων αλλά από την άποψη ότι το σ παρουσιάζει εκθετική μείωση για $T > 1$ είναι μάλλον μικρή.

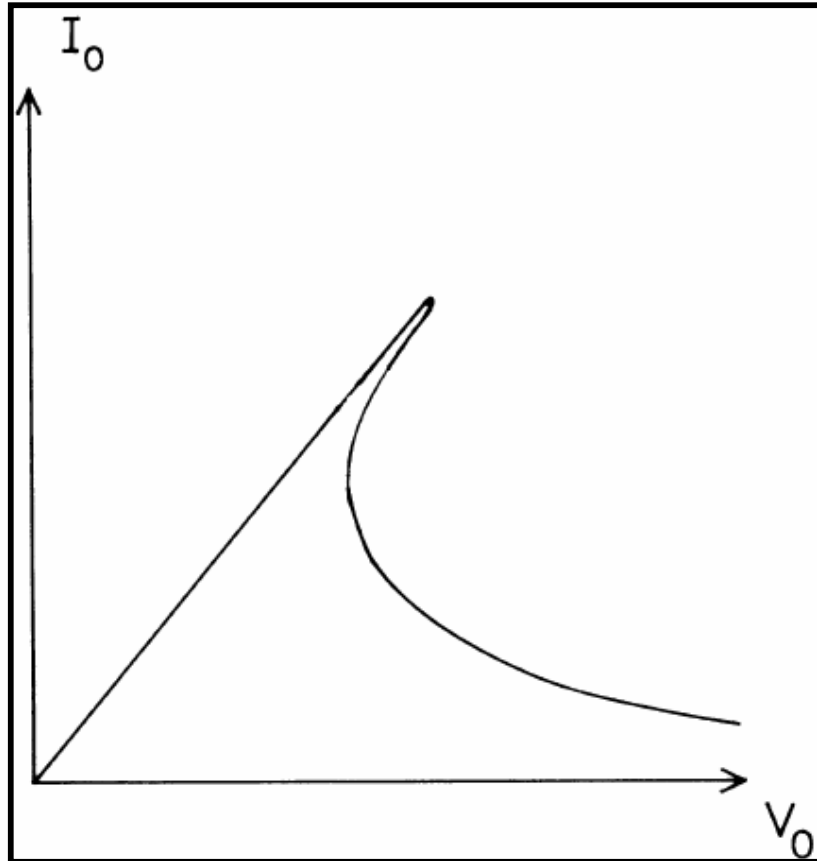
Στο παρακάτω διάγραμμα βλέπουμε την σχέση ρεύματος – τάσης και επιπλέον φαίνεται ο νόμος για το κύκλωμα με $I_0 = \frac{V_0 - V_0\phi_0}{R_0}$ για διάφορες τιμές του V_0 .



Σχήμα 8: Οι χαρακτηριστικές του ρεύματος έναντι της εφαρμοζόμενης τάσης, για τον θερμοαντιστάτη και το κύκλωμα. (βλ. βιβλιογραφία[3])

Είναι φανερό ότι μπορεί να είναι ένα, δύο (κατ' εξαίρεση) ή τρία σημεία λειτουργίας για το θερμοαντιστάτη σε ένα κύκλωμα. Όταν υπάρχουν τρία σημεία λειτουργίας τα δύο ακραία σημεία (τα a και c στο σχήμα 8) είναι σταθερά και το μεσαίο (δηλαδή το b) είναι ασταθές. Ένα ενδιαφέρον πρόβλημα είναι να δείξουμε ποιο από αυτά τα σημεία είναι το μεγάλο χρονικό όριο (the large time limit) του προβλήματος των αρχικών τιμών, αν και όταν χρησιμοποιείται σαν συσκευή προστασίας του κυκλώματος θα επιλέξουμε τις παραμέτρους έτσι, ώστε να παραμείνει μόνο το σημείο c.

Η σχέση ρεύματος τάσης φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα:



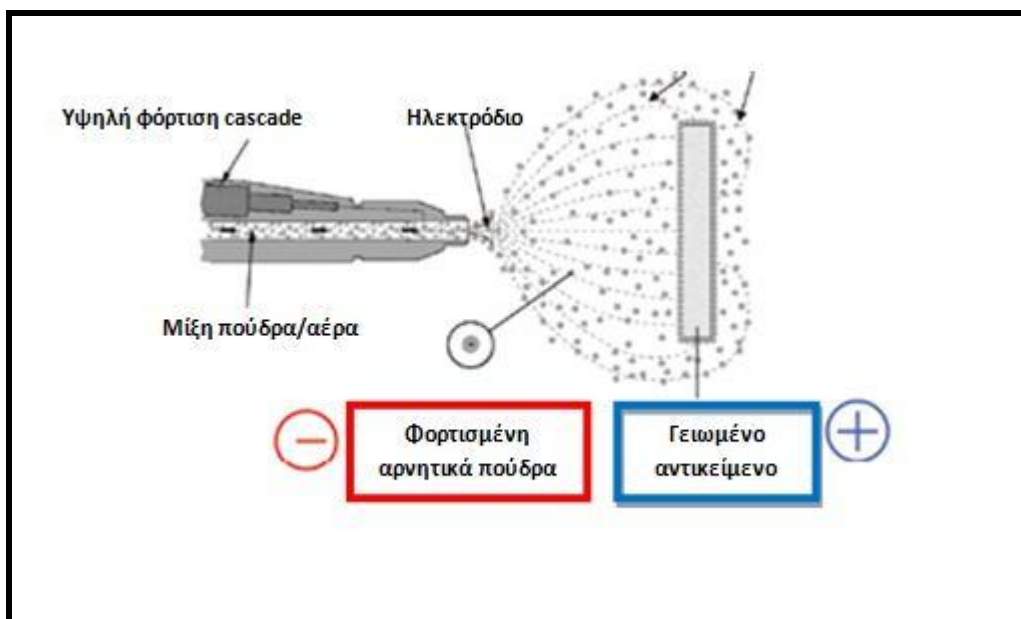
Σχήμα 9: Διάγραμμα της χαρακτηριστικής Ρεύματος – Τάσης, το οποίο δείχνει μία υστερημένη εναλλαγή μεταξύ συμπεριφορών του θερμοαντιστάτη σε χαμηλή τάση (όταν είναι κρύος) και σε υψηλή τάση (όταν είναι ζεστός). (βλ. βιβλιογραφία [3])

- 5) Έχουμε προβλέψει μεγάλες διαβαθμίσεις στη θερμοκρασία κατά τη διάρκεια της απότομης αύξησης της, με χωρική διακύμανση όπως είδαμε στο σχήμα 4. Αυτά προκύπτουν συγκεκριμένα αν $\gamma/\mu^2 \sim O(1)$. Αν οι ρωγμές που αναφέρονται στην εισαγωγή προκαλούνται από θερμική διαστολή, αυτές οι διαβαθμίσεις στη θερμοκρασία είναι η πιο πιθανή αιτία. Αυτές οι διαβαθμίσεις εξομαλύνονται αν πάρουμε το β πολύ μικρό αλλά η θερμοκρασία της συσκευής μπορεί να γίνει μη αποδεκτά μεγάλη. Εναλλακτικά μπορούν να περιοριστούν για μεγάλες τιμές του γ/μ^2 , πράγμα το οποίο, όμως, απαιτεί να εφαρμοσθούν μεγάλες τάσεις.

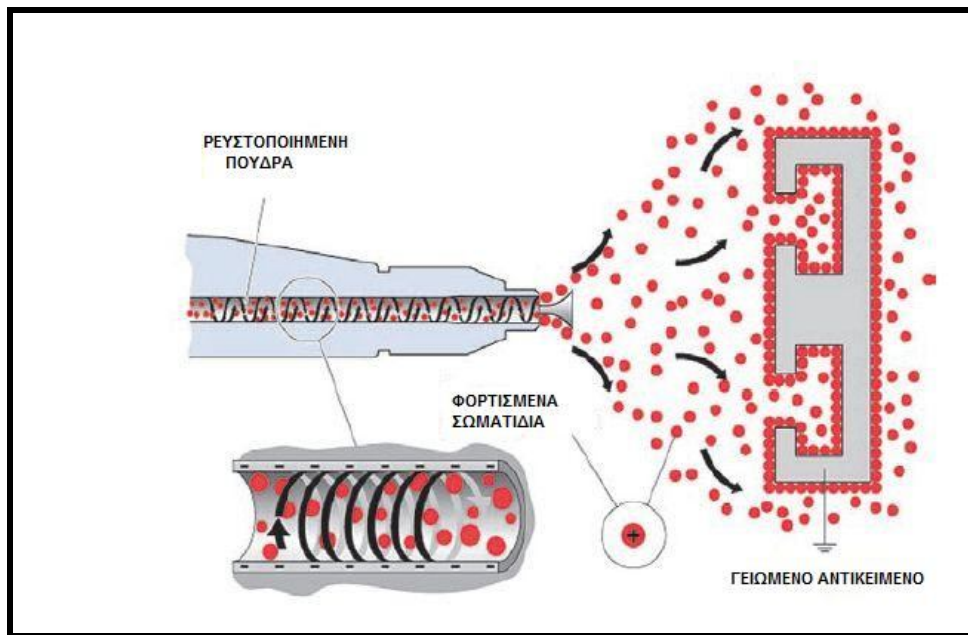
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

3.1 ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΗΣ ΒΑΦΗΣ

Η επιλογή του εξοπλισμού βαφής γίνεται με γνώμονα το αντικείμενο προς βαφή. Αν έχουμε ένα προϊόν το οποίο έχει δύσμορφη επιφάνεια και θέλουμε να έχουμε εισχώριση της πούδρας σε ιδιαίτερα σημεία θα πρέπει να επιλέξουμε τριβοηλεκτρικά πιστόλια αντί για Corona. Η διαφορά που υπάρχει μεταξύ των δύο πιστολιών είναι ότι το corona πιστόλι χρησιμοποιεί πολλαπλασιαστή (cascade) ρεύματος για την φόρτιση της πούδρας. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η πούδρα να φορτίζεται αρνητικά. Το τριβοηλεκτρικό πιστόλι (**tribo**) φορτίζει την πούδρα με την τριβή, δηλαδή η πούδρα κινείται εσωτερικά στο πιστόλι μέσω ειδικών εξαρτημάτων φόρτισης. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η πούδρα να φορτίζεται θετικά. Και στις δύο επιλογές το αντικείμενο προς βαφή πρέπει να είναι γειωμένο.



Σχήμα 1: Πιστόλι Corona. (βλ. βιβλιογραφία [12])



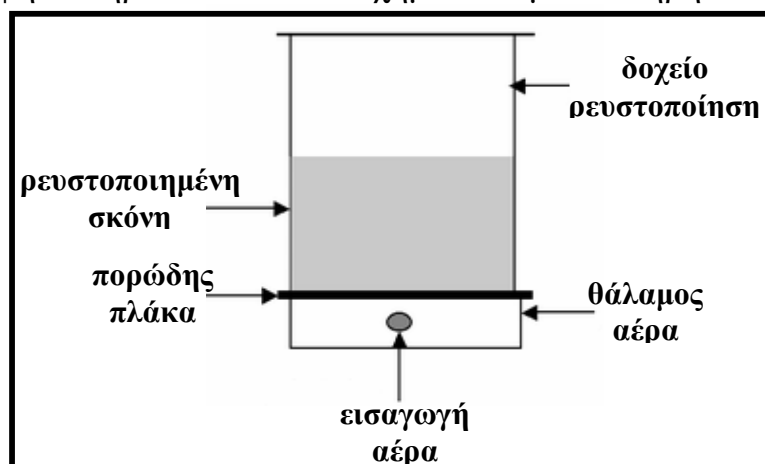
Σχήμα 2: Τριβοηλεκτρικό πιστόλι. (βλ. βιβλιογραφία [12])

Η επίδοση της μεθόδου μετριέται κυρίως με βάση δύο παραμέτρους, την αποδοτικότητα της μεταφοράς του πρώτου περάσματος (*first pass transfer efficiency, FPTE*) και την ποιότητα της επικάλυψης. Η πρώτη παράμετρος γενικά ορίζεται ως ο λόγος της ποσότητας της σκόνης που εναποτίθεται στο αντικείμενο εργασίας προς το ποσό της σκόνης που ψεκάζεται από το πιστόλι ψεκασμού. Τα χαρακτηριστικά της σκόνης όπως το μέγεθος των σωματιδίων, η κατανομή μεγέθους τους, η χημική σύσταση, τα χαρακτηριστικά φόρτισης με τριβοηλεκτρικό ή corona πιστόλι ψεκασμού, η ηλεκτρική αντίσταση, η υγροσκοπιμότητα (η δυνατότητα μιας ουσίας να έλκει και κατακρατά μόρια νερού από το περιβάλλον), η ρευστότητα και η κατανομή του σχήματος, παίζουν σημαντικό ρόλο για την καλύτερη απόδοση διαδικασίας επικάλυψης με ηλεκτροστατική σκόνη. Η ομοιομορφία της στρώσης επικάλυψης και η εμφάνιση είναι τα σημαντικά ζητήματα για ενδεχόμενη χρήση της σκόνης ώστε να καλύψουμε επιφάνειες υψηλών προδιαγραφών, όπως στον χώρο του εμπορίου βερνικιών αυτοκινήτων. Σήμερα στη βιομηχανία χρησιμοποιείται σκόνη 30 μm ή σωματίδια μεγαλύτερου μεγέθους. Οι πολύ χονδρές σκόνες δεν μπορούν να έχουν ως αποτέλεσμα το λείο φινίρισμα επιφανειών. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η χρήση αυτής της σκόνης στην αυτοκινητοβιομηχανία να περιορίζεται σε ορισμένα εξαρτήματα που βρίσκονται κάτω από το καπό και ανταλλακτικά όπως τάσια, χερούλια και ψυγεία. Γενικά δεν χρησιμοποιείται για τις πιο κερδοφόρες κορυφαίες εφαρμογές επίστρωσης στην αυτοκινητοβιομηχανία. Ο Yanagida (1996) αναφέρει ότι η υψηλή ποιότητα επίστρωσης για την αυτοκινητοβιομηχανία είναι εφικτή με τη χρήση σωματιδίων βαφής μέσης διαμέτρου περίπου 10 μm . Βιομηχανικά

πειράματα που πραγματοποιήθηκαν στο Powder Technology Research Centre έδειξαν ότι η χρήση της βαφής σε σκόνη 15 μ m, εφόσον δεν είναι συσσωματωμένη, οδηγεί σε εξαιρετικό επιφανειακό φινίρισμα.

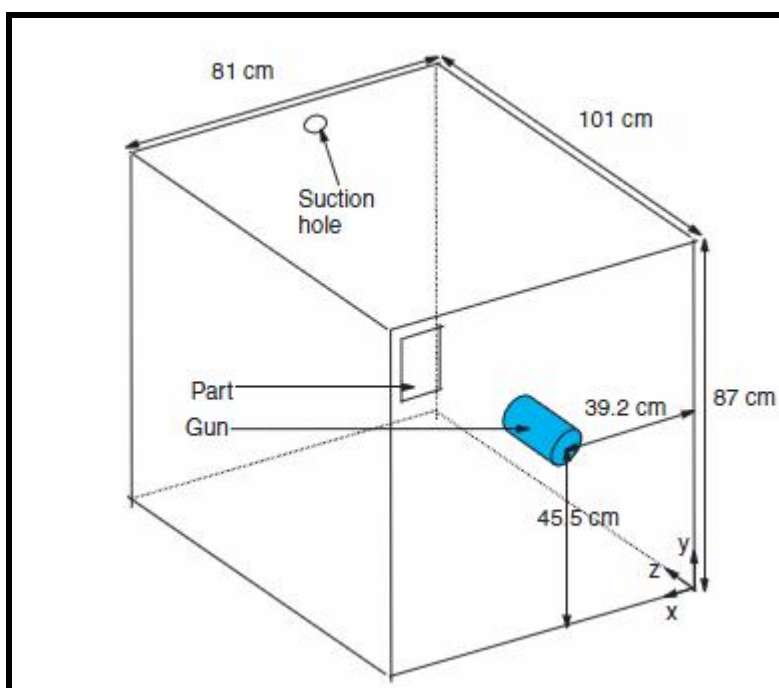
Ένα μείζον θέμα για τη χρήση λεπτής σκόνης είναι η ρευστότητα. Οι λεπτές σκόνες τείνουν να συσσωματώνονται σε συμπαγείς μάζες. Οι Zhu και Zhang (2002) ανέπτυξαν μια τεχνολογία ρευστοποίησης των λεπτών σωματιδίων και πλέον είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί η λεπτή σκόνη στις βαφές σε βιομηχανικό επίπεδο προς αντικατάσταση των υγρών χρωμάτων στις τεχνικές φινιρίσματος επιφανειών. Για το σκοπό αυτό είναι πολύ σημαντικό να μελετηθεί το πεδίο ροής της ψεκασμένης σκόνης και του αέρα στο εσωτερικό του θαλάμου επίστρωσης ώστε να κατανοήσουμε την επιρροή στην απόδοση της διαδικασίας επίστρωσης και να σχεδιάσουμε τις κατάλληλες συνθήκες λειτουργίας και τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του θαλάμου επίστρωσης για ένα δεδομένο πιστόλι ψεκασμού.

Μία τυπική διαδικασία ηλεκτροστατικής επικάλυψης αποτελείται από ένα δοχείο ρευστοποιημένης σκόνης, ένα σωλήνα μεταφοράς της σκόνης από το δοχείο στο πιστόλι ψεκασμού, ένα ηλεκτροστατικό πιστόλι ψεκασμού, μία καμπίνα πολυμερισμού και το αντικείμενο που θα επικαλυφθεί. Τα σωματίδια της σκόνης, που θα χρησιμοποιηθούν ως επίστρωση, πρώτα ρευστοποιούνται στο δοχείο. Αυτά τα σωματίδια μεταφέρονται με τη βοήθεια πεπιεσμένου αέρα μέσω ενός σωλήνα μεταφοράς στο πιστόλι ψεκασμού, όπου και φορτίζονται, και στην συνέχεια ψεκάζονται στο αντικείμενο που πρόκειται να επικαλυφθεί, μέσα στο θάλαμο ψεκασμού. Εφόσον το αντικείμενο αυτό είναι γειωμένο και τα σωματίδια φορτισμένα, αυτά προσκολλώνται στο αντικείμενο. Το επικαλυμμένο αντικείμενο κατόπιν μεταφέρεται στον φούρνο όπου η επικάλυψη σκληραίνει ώστε να σχηματίσει μία σκληρή επιφάνεια.



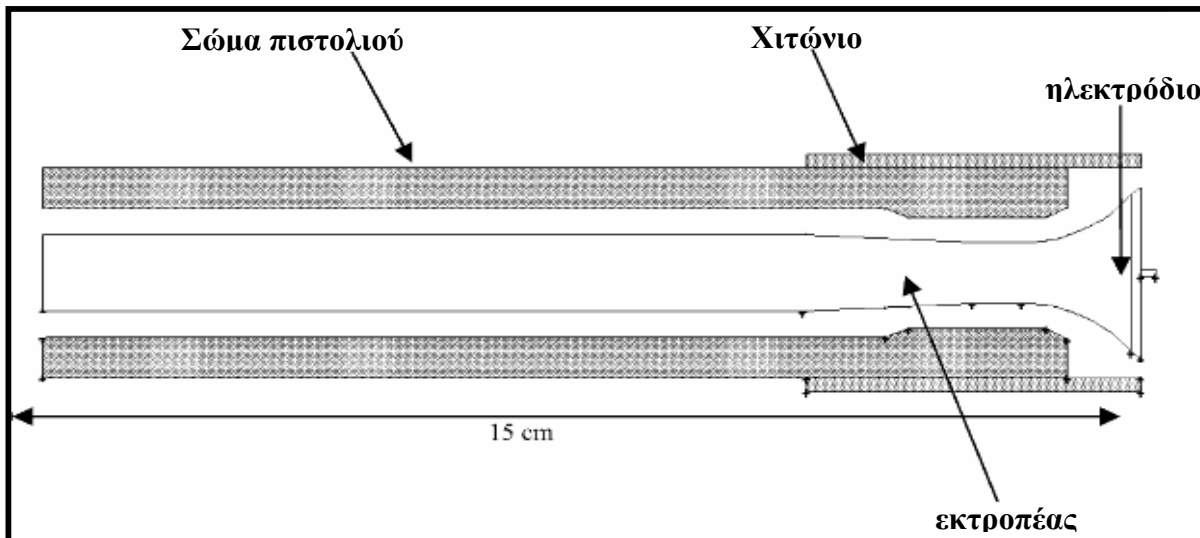
Σχήμα 3: Δοχείο ρευστοποίησης. (βλ. βιβλιογραφία [13])

Το παρακάτω σχήμα δείχνει τις διαστάσεις του θαλάμου επίστρωσης και τη σχετική θέση του εξαρτήματος πιστολιού. Τα πλευρικά τοιχώματα του θαλάμου εκτός από το πίσω τοίχωμα έχουν αφαιρεθεί ώστε να επιτρέψουν την πρόσβαση με τη φάση ανεμομετρίας του (Doppler Phase Doppler Anemometry) (PDA). Μια κενή οπή διαμέτρου 3cm στο επάνω τοίχωμα του θαλάμου όπως φαίνεται στο σχήμα χρησιμοποιήθηκε για τη διατήρηση της αρνητικής πίεσης μέσα στο θάλαμο. Έτσι τα σωματίδια θα μείνουν μέσα στο θάλαμο. Το πίσω τοίχωμα λειτουργεί ως συλλέκτης σωματιδίων.



Σχήμα 4: Οι διαστάσεις του θαλάμου επίστρωσης και η θέση του όπλου ψεκασμού. (βλ. βιβλιογραφία [2])

Το πιστόλι ψεκασμού όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (5) έχει μήκος 15 cm. Ο αέρας σκόνης ρέει μέσω του δακτυλοειδούς χώρου ανάμεσα του κεντρικό κυλινδρικό ανακλαστήρα σχήματος τρομπέτας και του εξωτερικού κορμού του πιστολιού.



Σχήμα 5: Τομή πιστολιού ψεκασμού. (βλ. βιβλιογραφία [2])

3.2 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΕΔΙΟΥ

Θα κατασκευάσουμε ένα μοντέλο για τη διαδικασία της ηλεκτροβαφής, γράφοντας τις εξισώσεις πεδίου για να περιγράψουμε την ταχύτητα του ρευστού. Αρχικά θα αναφέρουμε τα δεδομένα ώστε να καταλήξουμε σε ένα λογικό μοντέλο για την αλληλεπίδραση μεταξύ ρευστού-σωματιδίου. Το αντικείμενο έχει ένα τυπικό μέγεθος $L \approx 1\text{m}$ και οι παρατηρούμενες ταχύτητες αέρα έχουν μέγεθος $U_g \approx 1\text{m/s}$. Η πυκνότητα του αέρα είναι $\rho_g \approx 1,3$ και το δυναμικό ιξώδες είναι $\mu_g \approx 1,8 \times 10^{-5} \text{Pa} \cdot \text{s}$.

Τα σωματίδια είναι ακτίνας $a \approx 10^{-5} \text{m}$ και μάζας $m_p \approx 10^{-12} \text{kg}$. Υπάρχει ένας τεράστιος αριθμός σωματιδίων με αριθμό πυκνότητας περίπου $n_0 \approx 10^9$ ανά κυβικό μέτρο αέρα. Κάθε σωματίδιο φέρει ένα φορτίο $q_p \approx 10^{-15} \text{C}$ και η εφαρμοζόμενη τάση είναι $V_0 \approx 10^5 \text{V}$.

Επειδή η πυκνότητα των σωματιδίων είναι πολύ μεγάλη, ο μέσος διαχωρισμός των σωματιδίων είναι πολύ μικρός σε σύγκριση με τη διάσταση L του αντικειμένου αλλά πολύ μεγάλος σε σύγκριση με τη μέση ακτίνα τους a .

Είναι λογικό να τα εξετάσουμε σαν μεμονωμένα σωματίδια όταν εφαρμόζουμε τη δύναμη σε αυτά, όταν δουλεύουμε σε μεγαλύτερες κλίμακες μήκους ελπίζουμε να ισοσκελίσουμε τις επιδράσεις τους. Κατά

συνέπεια μελετούμε την εξέλιξη του τοπικής πυκνότητας, την οποία θεωρούμε σαν μία συνεχή συνάρτηση $n(x,t)$ που αντιπροσωπεύει τον αριθμό των σωματιδίων ανά μονάδα όγκου, για μικρό όγκο με διάμετρο πολύ μεγαλύτερη από τον μέσο διαχωρισμό, αλλά αρκετά μικρότερη από L . Προχωρούμε με όμοιο τρόπο, υποθέτοντας ότι υπάρχει μία τοπική μέση ταχύτητα των σωματιδίων $v_p(x,t)$, και αυτό είναι πιθανό αν όταν υπολογίσουμε τη δύναμη που ασκείται από τα σωματίδια στον αέρα, δεχθούμε ότι τα γειτονικά σωματίδια δέχονται παρόμοιες επιρροές από το ρευστό και όλα έχουν παρόμοια επίδραση πάνω σε αυτό.

Η εξίσωση για την διατήρηση των σωματιδίων είναι:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n v_p) = 0 \quad . \quad (3.1)$$

Τα σωματίδια διαπερνά μια σχετικά αργή ροή. Ο αριθμός Reynolds τοπικά για τη ροή σε 1 m/s που διαπερνά ένα σφαιρικό σωματίδιο ακτίνας είναι:

$$Re_{\text{particle}} = \frac{U_g a}{v_g} \approx 0.7 \quad \text{και αυτό είναι υπερεκτιμημένο δεδομένου ότι θα}$$

πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τη σχετική ταχύτητα (ολίσθησης), η οποία είναι πιθανόν να είναι μικρότερη από 1 m/s.

Η δύναμη σε ένα σφαιρικό σωματίδιο σε αργή ροή μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι $-6\pi\mu_g(v_p - v_g)$ όπου v_g είναι η τοπική ταχύτητα του αερίου, πολλά σωματίδια φεύγουν μακριά αλλά όχι τόσο μακριά καθώς είναι κοντά σε γειτονικά σωματίδια.

Τα σωματίδια δεν είναι σφαιρικά αλλά θα εξακολουθήσουμε να θεωρούμε ότι δέχονται μία δύναμη ανάλογη με την ταχύτητα ολίσθησης την οποία καλούμε $-K(v_p - v_g)$ όπου με βάση τα γειτονικά σφαιρικά σωματίδια αναμένουμε $K = 10^{-9}$ kg/s.

Τέλος θα πρέπει να συμπεριλάβουμε τη βαρυτική δύναμη $m_p g$ και την ηλεκτροστατική δύναμη $q_p E$, όπου E είναι το ηλεκτρικό πεδίο. Στη συνέχεια υποθέτοντας ότι σε όλα τα γειτονικά σωματίδια έχουμε την ίδια ταχύτητα ολίσθησης, μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση κίνησης για τα σωματίδια:

$$m_p \frac{Dv_p}{Dt} = -K(v_p - v_g) + m_p g + q_p E \quad . \quad (3.2)$$

Αντίστοιχα έχουμε τις εξισώσεις ορμής και διατήρησης της μάζας για το αέριο, χωρίς να λαμβάνουμε υπόψη τη βαρύτητα:

$$p_g \frac{dv_g}{dt} = -\nabla p + nK(v_p - v_g), \quad \nabla \cdot v_g = 0 \quad . \quad (3.3)$$

Ο μόνος δυναμικά άγνωστος όρος είναι η δύναμη του σώματος (δύναμη ανά μονάδα όγκου) για το αέριο που οφείλεται στα σωματίδια. Λαμβάνοντας υπόψη ότι η εξίσωση κίνησης των σωματιδίων είναι για μεμονωμένα σωματίδια και εν συνεχεία κατά μέσο όρο για τα έξω σωματίδια λόγω της υπόθεσης ότι τα γειτονικά σωματίδια συμπεριφέρονται παρόμοια η δύναμη από τα σωματίδια του αερίου είναι μόνο η δύναμη $K(v_p - v_g)$ σε ένα αντιπροσωπευτικό σωματίδιο πολλαπλασιασμένο με τον αριθμό πυκνότητας n .

Υπενθυμίζουμε ότι η εξίσωση Poisson είναι:

$$\nabla \cdot (\epsilon_g E) = nq_p \quad (3.4)$$

για το μέσο ηλεκτρικό πεδίο, $\epsilon_g \approx 10^{-11}$ είναι η διηλεκτρική σταθερά του αέρα.

3.3 ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Θα πρέπει να δούμε πώς πρέπει να αντιμετωπίσουμε το λεπτό στρώμα σωματιδίων πάνω στο αντικείμενο στο οποίο εργαζόμαστε. Το στρώμα αυτό φυσικά θα είναι πολύ λεπτό – αφού δεν γίνεται να έχουμε επικάλυψη χρώματος πάχους της τάξεως εκατοστού. Όσον αφορά στο ρευστό μπορούμε να υποθέσουμε ότι το αντικείμενο αυτό σχηματίζει ένα στερεό σύνορο, που συμπληρώνει οποιοσδήποτε συνθήκες εισροής επιβάλλουμε στο πιστόλι ψεκασμού.

Τέλος, ας μελετήσουμε το ηλεκτρικό δυναμικό. Μπορούμε να εφαρμόσουμε $\phi = V_0$ στο κανόνι και ομοίως $\phi = 0$ στο αντικείμενο, αλλά θα πρέπει να ανησυχούμε για το φορτίο που θα αυξάνεται συνεχώς στο στρώμα της βαφής στο αντικείμενο, έτσι θα μεταβάλλει την συνοριακή συνθήκη που προκαλείται από το ϕ . Αυτό εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τις λεπτομέρειες του τι συμβαίνει σε αυτό το στρώμα βαφής. Για παράδειγμα, αν το φορτίο είναι ικανό να εναποθέσει τα σωματίδια στο αντικείμενο (ή ηλεκτρόνια μπορούν να κινηθούν προς τα σωματίδια, αν το φορτίο τους είναι θετικό), τότε το στρώμα μπορεί να θεωρηθεί σχετικά ουδέτερο και μπορούμε να το θεωρήσουμε αμελητέο. Από την άλλη, αν τα φορτία παραμένουν ακίνητα, μπορούμε ακόμα να αγνοήσουμε την επίδραση του στρώματος της βαφής, εφόσον το τελικό φορτίο αυτού του στρώματος, είναι αρκετά μικρό.

3.4 ΑΔΙΑΣΤΑΤΟΠΟΙΗΣΗ

Θα δοκιμάσουμε να επιλύσουμε το παραπάνω μοντέλο αριθμητικά και για αυτόν το λόγο θα πρέπει να ελέγξουμε ότι αυτό είναι ευσταθές και κατάλληλο για αριθμητική επίλυση.

Θα κάνουμε κλιμακοποίηση όλων των μεταβλητών με συνήθεις τιμές. Κάνουμε λοιπόν τις εξής κλιμακοποιήσεις:

x με L , t με L/U_g , v_g, v_p με U_g , ρ με $\rho_g \cdot U_g^2$ και n με n_0 .

Για την κλιμακοποίηση του E έχουμε δύο επιλογές:

α) την εφαρμοζόμενη τάση V_0

β) την $\frac{q_p n_0 L}{\epsilon_g}$ που προκύπτει από την εξίσωση Poisson (3.4) όταν έχουν

γίνει όλες οι κλιμακοποιήσεις σε αυτήν.

Αυτές οι δύο κλιμακοποιήσεις που μπορούμε να κάνουμε είναι του ίδιου μεγέθους, 10^5 V/m , οπότε μπορούμε για λόγους απλότητας να χρησιμοποιήσουμε την πρώτη μας επιλογή, V_0 .

Ξεκινάμε με την εξίσωση κίνησης των σωματιδίων (3.2). Κάνοντας τις κλιμακοποιήσεις παίρνουμε:

$$\frac{m_p U_g^2}{L} \frac{dv_p}{dt} = -KU_g (v_p - v_g) - m_p g k + \frac{q_p V_0}{L} E$$

όπου διαιρώντας με KU_g ,

$$\frac{m_p U_g}{KL} \frac{dv_p}{dt} = -(v_p - v_g) + \frac{q_p V_0}{KU_g L} E - \frac{m_p g}{KU_g} k. \quad (3.5)$$

Παρατηρούμε ότι η αδιάστατη ποσότητα $\frac{m_p U_g}{KL} \approx 10^{-3}$

είναι πολύ μικρή. Μπορούμε να θεωρήσουμε αμελητέο τον όρο, στον οποίο εμφανίζεται, την επιτάχυνση των σωματιδίων. Εκτός από την αρχική μετάβαση, καθώς αυξάνεται η ταχύτητα των σωματιδίων κοντά στο πιστόλι ψεκασμού, οι αδρανειακές δυνάμεις τους κυριαρχούνται από οπισθέλκουσα που οφείλεται στο ρευστό. Η δεύτερη αδιάστατη

παράμετρος $\frac{m_p g}{KU_g} \approx 2 \times 10^{-2}$ είναι επίσης μικρή. Αυτή καθορίζει τον

ανταγωνισμό μεταξύ βαρύτητας και δυνάμεων που οφείλονται στο ιξώδες του ρευστού, οι οποίες τελικά υπερिशύουν της βαρύτητας. Τα σωματίδια πέφτουν αργά σε σύγκριση με το ρυθμό με τον οποίο οπισθέλκονται από τον αέρα.

Η τρίτη αδιάστατη παράμετρος,

$$\varepsilon = \frac{q_p V_0}{K U_g L} \approx 10^{-1} \quad (3.6),$$

όπου ε η διηλεκτρική σταθερά, συγκρίνει τις ηλεκτροστατικές δυνάμεις με τις οπισθέλκουσες δυνάμεις. Είναι, επίσης, πολύ μικρή αν και μεγαλύτερη από τις άλλες δύο. Μετά την κλιμακοποίηση η εξίσωση δείχνει ότι τα σωματίδια ακολουθούν το αέριο αρκετά στενά με μια μικρή επιρροή από την ηλεκτροστατική δύναμη και πολύ μικρές συνεισφορές από τη βαρύτητα και την αδράνεια.

Μια καλή προσέγγιση της κίνησης των σωματιδίων περιγράφεται από την εξίσωση:

$$v_p = v_g + \tilde{v}_p \quad (3.7)$$

όπου από την σχέση (3.5) προκύπτει $\tilde{v}_p = E + (\text{μικρότεροι όροι})$.

Επιπλέον έχουμε για την διατήρηση των σωματιδίων (διατήρηση μάζας, ορμής, ενέργειας, κλπ.),

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n v_p) = 0.$$

Ένα πρώτο συμπέρασμα από αυτή την ανάλυση είναι ότι η συσκευή δεν λειτουργεί πολύ καλά και τα σωματίδια παρασύρονται πάρα πολύ από τον αέρα.

Η εξίσωση κίνησης και διατήρησης της μάζας του αερίου μετά από κλιμακοποίηση γίνεται:

$$\frac{dv_g}{dt} = -\nabla \cdot p + \frac{n_0 K L}{\rho_g U_g} n (v_p - v_g) \quad (3.8)$$

και $\nabla \cdot v_g = 0 \quad (3.9),$

όπου η αδιάστατη ποσότητα $A = \frac{n_0 K L}{\rho_g U_g} \approx 1$ δεν είναι μικρή και δείχνει ότι

τα σωματίδια ασκούν μία δύναμη (body force) στον αέρα, η οποία δεν είναι μικρή. Συμπεραίνουμε πως αφού η ταχύτητα ολίσθησης ($v_p - v_g$) που προκύπτει είναι μικρή, τα σωματίδια έχουν μικρή επίδραση στο αέριο, επιβεβαιώνοντας ότι θα ήταν καλό να επιβραδυνθεί ο αέρας για να βελτιωθεί το αποτέλεσμα.

Έτσι από όλες τις αδιάστατες παραμέτρους του μοντέλου θα επιλέξουμε αυτήν που είναι λιγότερο μικρή, δηλαδή την ε (διηλεκτρική σταθερά) και την παράμετρο A που είναι τάξης $O(1)$.

Επίσης έχουμε μία εξίσωση για το ηλεκτρικό πεδίο:

$$\nabla \cdot E = n. \quad (3.10)$$

Επεκτείνουμε

$$v_p \sim v_{p0} + \epsilon v_{p1} + \dots,$$

με παρόμοιες επεκτάσεις και για τις άλλες μεταβλητές.

Από την (3.7) έχουμε ότι $v_{0p} = v_{0g}$, γεγονός που επιβεβαιώνει ότι τα σωματίδια ακολουθούν το αέριο στην κύρια τάξη.

Αν το χρησιμοποιήσουμε αυτό στο δεξί μέρος της (3.8) βλέπουμε ότι το v_{0g} ικανοποιεί μόνο ένα συνηθισμένο πρόβλημα ροής ρευστού χωρίς δύναμη (body force) από τα σωματίδια.

Στη συνέχεια θα πρέπει να υπολογίσουμε την εξέλιξη του αριθμού πυκνότητας n . Οι όροι κύριας τάξης στην (3.1) είναι:

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} + \nabla \cdot (n_0 v_{p0}) = 0.$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $v_{p0} = v_{g0}$ και $\nabla \cdot v_{g0} = 0$ καταλήγουμε στην σχέση:

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} + v_{g0} \cdot \nabla n_0 = 0,$$

δηλαδή σε μιας πρώτης τάξης υπερβολική εξίσωση της οποίας οι χαρακτηριστικές είναι η διαδρομή των σωματιδίων του αερίου. Αφού βρούμε το n_0 , μπορούμε να βρούμε την κύρια τάξη του ηλεκτρικού πεδίου καθώς ως λύση της εξίσωσης $\nabla \cdot E_0 = n_0$. Συνεχίζουμε χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις με την ίδια σειρά. Πρώτα η (3.7) μας δίνει:

$$v_{p1} - v_{g1} = E_0. \quad (3.11)$$

Στη συνέχεια η (3.8) και η (3.9) είναι ένα γραμμικό σύστημα για τη v_{g1} .

Συνεπώς γνωρίζουμε τη διόρθωση για την ταχύτητα των σωματιδίων από τη (3.11). Επίσης μπορούμε να υπολογίσουμε το n_1 από την (3.1) και τέλος το E_1 από την (3.10).

Συνεπώς παρατηρούμε πως η ασυμπτωτική επέκταση φανερώνει μια σειρά με την οποία θα λύνονται οι εξισώσεις, η οποία θα μπορούσε να είναι μια λογική βάση για μία επαναληπτική αριθμητική μέθοδο.

3.5 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Το παραπάνω μοντέλο δίνει μια εικόνα για τη διαδικασία της επίστρωσης ενός αντικειμένου με ηλεκτροστατική βαφή και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατανόηση της ροής του αερίου και του πεδίου ροής των σωματιδίων της βαφής. Κοντά στην περιοχή του πιστολιού ψεκασμού κυριαρχεί η αεροδυναμική δύναμη και έτσι τα σωματίδια ταξιδεύουν κάτω από τη επίδρασή της. Καθώς απομακρύνονται τα σωματίδια από το πιστόλι ψεκασμού κυριαρχούν η ηλεκτροστατική και η βαρυτική δύναμη.

Με βάση το μοντέλο μπορεί να γίνει κατανοητή η επίδραση των διαφόρων παραμέτρων της διαδικασίας της βαφής, όπως η επίδραση του μεγέθους των σωματιδίων, της εφαρμοζόμενης τάσης στο ηλεκτρόδιο του πιστολιού, της ροής του αερίου, της φόρτισης των σωματιδίων κλπ., έτσι ώστε να βελτιστοποιηθεί η ποιότητα της επικάλυψης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Practical Applied Mathematics Modelling, Analysis, Approximation
Sam Howison, OCIAM Mathematical Institute, Oxford University
- [2] Validation of a numerical model for the simulation of an electrostatic powder coating process, U. Shah , C. Zhang , J. Zhu , F. Wang , R. Martinuzzi
- [3] Temperature surges in Current – Limiting Circuit Devices
A.C Fowler, I.Frigaard, S.D Howison, SIAM Journal on Applied Mathematics, Volume 52, Issue 4 (Aug. 1992) 998-1011
- [4] A Mathematical Model of the Pantograph-Catenary Dynamic Interaction with Several Contact Wires
Jesús Benet , Angelines Alberto, Enrique Arias, and Tomás Rojo
IAENG International Journal of Applied Mathematics, 37:2,
IJAM_37_2_10
- [5] Catenary tram (Αλυσοειδείς Τροφοδοσίας)
Μορφή, Υλικά, Τροφοδοσία με ρεύμα, Αισθητική ένταξη σε πόλεις
Μανώλης Πλουμίδης Μηχανολόγος Ηλεκτρολόγος ΕΜΠ
- [6] Multibody Dynamics: Computational Methods and Applications
K. Arczewski, W.Blajer, J.Fraczek, M.Wojtyra
- [7] «Εφαρμογή των υψηλών τάσεων στην ηλεκτροκίνηση
σιδηροδρομικών γραμμών ΟΣΕ», Χριστόδουλος Κωστάκης
Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
- [8] Steady-State Solution of the PTC Thermistor Problem Using a Quadratic Spline Finite Element Method, A.R BAHADIR
Department of Faculty of Arts and Science, Inonu University, Turkey
- [9] Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, J. David Logan, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτη
- [10] Εφαρμογές θεωρίας ελαστοδυναμικής, Σοφία Παπαργύρη
Τμήμα Πολιτικών μηχανικών, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, 2007

- [11] Σύντομες σημειώσεις στην Αριθμητική Ανάλυση των Διαφορικών Εξισώσεων, Γεώργιος Παπαγεωργίου – Αναπληρωτής καθηγητής
Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών,
Ε. Μ. Πολυτεχνείο
- [12] Plastic Coating Corporation
information about Fluid Bed Powder Coating
(<http://www.plasticoating.com/Fluid%20Bed%20Powder%20Coating.htm>)
- [13] Εταιρία KIGO O.E
πληροφορίες για τη μέθοδο της ηλεκτροστατικής βαφής
([http://www.ekigo.gr/index.php?option=com_virtuemart&page=shop.browse&category_id=28&Itemid=54&lang=el&vmcchk=1&Itemid=54](http://www.ekigo.gr/index.php?option=com_virtuemart&page=shop browse&category_id=28&Itemid=54&lang=el&vmcchk=1&Itemid=54))