ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
& ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Κινηματική Υποπολλαπλοτήτων και Εφαρμογές

(Κινηματική Υπερεπιφανειών σε πολλαπλότητες Riemann
και Εφαρμογές στην Μηχανική του Συνεχούς μέσου)

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Φωτίου Ι. Τραυλοπάνου

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:
Νικόλαος Καδιανάκης
Αν. Καθηγητής ΕΜΠ.

Αθήνα , Ιούλιος 2013

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
& ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Κινηματική Υποπολλαπλοτήτων και Εφαρμογές

(Κινηματική Υπερεπιφανειών σε πολλαπλότητες Riemann και Εφαρμογές στην Μηχανική του Συνεχούς μέσου)

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Φωτίου Ι. Τραυλοπάνου

Τριμελής Συμβουλευτική Επιτροπή

1. Καδιανάκης Νικόλαος – (Επιβλέπων), Αν. Καθηγητής ΕΜΠ

2. Μαρκάτης Στυλιανός, Αν. Καθηγητής ΕΜΠ

3. Λάππας Διονύσιος, Αν. Καθηγητής ΕΚΠΑ

Συμπληρωματική Εξεταστική Επιτροπή

4. Ρασσιάς Θεμιστοκλής, Καθηγητής Ε.Μ.Π

5. Κυριάκη Κυριακή, Καθηγήτρια Ε.Μ.Π

6. Λαμπροπούλου Σοφία, Καθηγήτρια Ε.Μ.Π

7. Φελλούρης Ανάργυρος, Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π

Στην μνήμη του πατρός μου

Ιωάννη Φ. Τραυλοπάνου

Τις θερμές μου ευχαριστίες στό επιβλέποντα κ. Νικόλαο Καδιανάκη, Αν. Καθηγητή του ΕΜΠ, για την όλη βοήθεια και στήριξη κατά την διάρκεια της εκπόνησης της παρούσας διατριβής καθώς και τα μέλη της τριμελούς Επιτροπής, κ.κ. Στυλιανό Μαρκάτη, Αν. Καθηγητή του ΕΜΠ και Λάππα Διονύσιο, Αν. Καθηγητή του ΕΚΠΑ για την συμπαράσταση και την βοήθεια τους.
Στόν Καθηγητή Daniel Meyer του Institute of Geometry and Dynamics, Paris VII γιά τό συνολικό ενδιαφέρον το οποίο επέδειξε για το αντικείμενο, τις πολύωρες συζητήσεις και υποδείξεις του, εκφράζω τις ιδιάιτερες ευχαριστίες μου.

Περιεχόμενα

Περίληψη

Στην παρούσα διατριβή μελετάται η κινηματική m - διάστατου συνεχούς τό οποίο κινείται εντός $m+1$ - διάστατου περιβάλλοντος χώρου, προτυποποιημένο από την κίνηση μιάς υπερεπιφάνειας M πολλαπλότητας Riemann N. Εστιάζοντας πάνω στην συνδιάσταση του συνεχούς ως πρός την διάσταση του περιβάλλοντος χώρου, παρέχεται ένα ενιαίο πλαίσιο μελέτης της κινηματικής συμπεριφοράς είτε καμπύλων κινούμενων επί επιφανειών, ή επιφανειών κινούμενων εντός 3 - διάστατου Ευκλείδιου χώρου (Ευκλείδιου ή Riemannian) ή υπερεπιφανειών κινούμενων εντός πολλαπλότητας Riemann αυθαιρέτου διαστάσεως. Η χρήση γενικότερων γεωμετρικών δομών και η ανεξάρτητη από την χρήση συστημάτων συντεταγμένων μεθοδολογία, διευκολύνει σημαντικά την περιγραφή των γενικευμένων συνεχών. Δίνονται τύποι για την μεταβολή γεωμετρικών ποσοτήτων της υπερεπιφάνειας, κάποιοι από τούς οποίους γενικεύουν τούς τύπους για επιφάνειες κινούμενες εντός του συνήθους Ευκλείδιου χώρου ([2] Kadianakis, N., J. Elasticity 16: 1–17, 2010). Ο πυρήνας της διατριβής συνίσταται στην παραγωγή εξελικτικών εξισώσεων μεταβολής για σχεδόν όλες τις γεωμετρικές ποσότητες που περιγράφουν την εσωτερική και την εξωτερική γεωμετρία της υπερεπιφάνειας. Σημαντικό εργαλείο αποτελεί μια γενίκευση του θεωρήματος της πολικής ανάλυσης την οποία εισήγαγαν οι Man, C.-S. και Cohen, H. ([5], J. Elast. 16: 97-104, 1986) και τό οποίο γενικεύεται στην περίπτωση υπερεπιφανειών πολλαπλότητας Riemann. Τα αποτελέσματα εφαρμόζονται σε ειδικές κινήσεις, συγκεκριμένα σε εφαπτομενικές και καθετικές κινήσεις, σε

απειροστικές παραλληλίες infinitesimally parallel motions, σε κινήσεις μηδενικού ρυθμού παραμόρφωσης pure strain motions, και σε απειροστικές ισομετρίες infinitesimally isometric motions. Δίνεται επίσης μιά εφαρμογή γιά την περίπτωση καμπύλης η οποία κινείται πάνω σε 2 - διάστατη πολλαπλότητα μιά κατάσταση η οποία αποτελεί πρότυπο για την κίνηση ενός 1 - διάστατου συνεχούς πάνω σε μιά επιφάνεια, με την όλη θεώρηση να είναι ανεξάρτητη της εμφύτευσης της επιφάνειας εντός ευρύτερου χώρου.

Abstract

In the present dissertation we study the kinematics of an m - dimensional continuum moving in an $m+1$ - Riemannian manifold N, modelled by the motion of a hypersurface M in a Riemannian manifold N. Focusing on the codimension of the continuum relative to the ambient space rather on its dimension, we provide a unified framework for either curves moving on surfaces, surfaces moving in a 3 - dimensional space (Euclidean or Riemannian), or hypersurfaces moving in a Riemannian space of arbitrary dimension. The use of general geometric structures and a coordinate-free approach significantly agevolates the description and understanding of more general continua. Formulae are given concerning the variation of gemetric quantities of the hypersurface, some of which generalize those given for surfaces moving in Euclidean space (([2]), Kadianakis, N. in J. Elasticity 16: 1–17, 2010). The kernel of the dissertation consists in the production os evolution equations for the variations of almost all the geometric qunatities describing the intrinsic and the extrinsic geometry of the hypersurface. An important tool constitutes a generalization of the theorem for the polar decomposition for surfaces introduced by Man, C.-S. and Cohen, H. ([5]), (in J. Elast. 16: 97-104, 1986) and generalized here for the case of hypersurfaces of Riemannian manifolds. Our results are applied to specific motions, in particular to tangential motions and motions along the normal, infinitesimally parallel motions, pure strain motions and to infinitesimally isometric motions.

An application is also provided for the case of a surface moving on a 2 - dimensional manifold, which models a 1 - dimensional continuum moving on a surface. The later application is presented indipendently of the embedding of the surface in a larger ambient space.

Εισαγωγή

Τό κεντρικό μαθηματικό πρόβλημα τό οποίο μελετάται στην εργασία αυτή είναι η μεταβολή των γεωμετρικών μεγεθών μιάς υπερεπιφάνειας όταν αυτή κινείται μέσα σε μιά πολλαπλότητα Riemann. Τό συγκεκριμένο πρόβλημα είναι δυνατόν να θεωρηθεί ότι περιγράφει τήν κίνηση μιάς μεμβράνης στόν χώρο ή μιάς καμπύλης πάνω σε μιά επιφάνεια, προβλήματα τα οποία συνδέονται με την μηχανική του συνεχούς μέσου.
Τό συγκεκριμένο μηχανικό πρόβλημα είχε παρουσιασθεί με τρόπο ανεξάρτητο από συστήματα συντεταγμένων από τούς Man C.S και Cohen H στό [5] γιά μεμβράνες πού κινούνται και παραμορφώνονται στον χώρο. Επίσης, στην εργασία [2] παράχθηκε ένα σύνολο εξελικτικών εξισώσεων οι οποίες αφορούν σε γεωμετρικά αντικείμενα ορισμένα πάνω σε μιά επιφάνεια η οποία κινείται μέσα σε έναν Ευκλείδιο χώρο.

Στην παρούσα εργασία ή όλη προσπάθεια εστιάζει πάνω σε συνεχή συνδιάστασης 1 ως πρός την διάσταση του περιβάλλοντος χώρου. Ως πρότυπο για τό συνεχές χρησιμοποιείται μιά m - διάστατη υπερεπιφάνεια M η οποία κινείται μέσα μιά $m + 1$ - διάστατη πολλαπλότητα Riemann N (περιβάλλων χώρος).
Η ενοποιημένη προσέγγιση θεμάτων της κινηματικής των επιφανειών και της κινηματικής καμπύλων πάνω σε επιφάνειες επιτυγχάνεται μέσω της εστίασης του κύριου ενδιαφέροντος πάνω στην συνδιάσταση των χώρων πού εμπλέκονται παρά στην ίδια την διάσταση.

Η πλούσια δομή του Ευκλείδιου χώρου οδηγεί συχνά σε σύγχυση κατά την διαπραγμάτευση φυσικών ποσοτήτων οι οποίες, παρότι διαφορετικές καταρχήν, αναπαρίστανται μέσω ισοδύναμων πεδίων.
Συγκριτικά με την κλασσική Ευκλείδια προσέγγιση, η χρήση χώρων Riemann και η αναπαράσταση χωρίς την χρησιμοποίηση συστημάτων συνεταγμένων, οδηγεί σε μιά καλύτερη κατανόηση των εννοιών της μηχανικής του συνεχούς [12] - [15]. Επίσης, η περιγραφή νέων υλικών απαιτεί συνήθως περισσότερες από δύο ή τρείς διαστάσεις και δομές γενικότερες από Ευκλείδιες [16] - [17].

Η παραμόρφωση υπερεπιφανειών έχει πολλές εφαρμογές στην μηχανική του συνεχούς. Επί παραδείγματι, σε θέματα περιγραφής της κινήσεως μεμβρανών, υλικών διεπιφανειών πού συμπαραμορφώνονται με το συνεχές και τέλος σε μονοδιάστατα συνεχή πού κινούνται πάνω σε επιφάνειες [31], όπως επίσης και στην θεωρία της σχετικότητος [22]. Επίσης, τό αντικείμενο έχει μελετηθεί και μελετάται στα πλαίσια της Διαφορικής Γεωμετρίας, επί παραδείγματι σε προβλήματα σχετικά με ροές καμπυλότητος [19] και με ισοπεριμετρικά προβλήματα [39].

Η εργασία αυτή είναι δυνατόν να ειδωθεί και ως μιά εφαρμογή μεθόδων και εννοιών της μηχανικής του συνεχούς στην Διαφορική Γεωμετρία (όπως τό θεώρημα της πολικής ανάλυσης και οι κινηματικές ποσότητες οι οποίες προκύπτουν). Έτσι οι διάφορες σχέσεις αποκτούν μορφή η οποία διευκολύνει την φυσική ερμηνεία τους και σε κάποιες περιπτώσεις είναι απλούστερες απο αυτές που περιέχουν μόνο γεωμετρικές ποσότητες.

Θεωρούμε την γενικότερη δυνατή κίνηση μιάς υπερεπιφάνειας μέσα σε μιά περιβάλλουσα πολλαπλότητα Riemann και οι τύποι πού παράγουμε δίνουν τις μεταβολές των γεωμετρικών μεγεθών πού αφορούν την εσωτερική και την εξωτερική γεωμετρία της υπερεπιφάνειας και την σχέση τους με τα αντίστοιχα κινηματικά. Αυτές οι κινηματικές ποσότητες χρησιμοποιούνται παραδοσιακά στην Μηχανική του Συνεχούς και είναι η **κλίση ταχύτητας** (velocity gradient), ο **ρυθμός παραμόρφωσης** (strain) και ο **ρυθμός περιστροφής** (spin). Η σύνδεση εννοιών της μηχανικής του συνεχούς με τις γεωμετρικές έννοιες γίνεται με χρήση του θεωρήματος πολικής ανάλυσης γιά υπερεπιφάνειες πού αποτελεί γενίκευση του αντίστοιχου θεωρήματος πολικής ανάλυσης γιά επιφάνειες [5], οι οποίες παραμορφώνονται στον χώρο.

Στό πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι εισαγωγικές έννοιες της κινηματικής για ένα 3-διάστατο συνεχές τό οποίο κινείται στόν συνήθη Ευκλείδιο χώρο και η βασική εξίσωση $G = \mathcal{D} + W$ η οποία συνδέει τόν τανυστή τής κλίσης ταχύτητας G με τόν ρυθμό παραμόρφωσης $\mathcal{D}$ και τόν ρυθμό περιστροφής W. Στην συνέχεια του κεφαλαίου αυτού παρουσιάζονται οι κινηματικές έννοιες ενός 2 - δισδιάστου συνεχούς και η αντίστοιχη γενίκευση της $G = \mathcal{D} + W$ στην $G = J\mathcal{D} + WJ$.

Στό δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζουμε τα σχετικά με την θεωρία υπερεπιφανειών πολλαπλοτήτων Riemann κυρίως γιά λόγους πληρότητας και συμβόλων.

Τό τρίτο κεφάλαιο αφορά την κινηματική υπερεπιφανειών. Αποδεικνύεται η προσαρμοσμένη εκδοχή θεωρήματος πολικής ανάλυσης γιά παραμόρφωση υπερεπιφάνειας πολλαπλότητας Riemann γενικεύοντας τό αντίστοιχο αποτέλεσμα των Man C.S και Cohen H και στην συνέχεια, στηριζόμενοι στό θεώρημα αυτό, αποδεικνύουμε την θεμελιώδη σχέση πού συνδέει τά κινηματικά τανυστικά μεγέθη G, $\mathcal{D}$, W καθώς και τις σχέσεις οι οποίες συσχετίζουν αυτά τα κινηματικά μεγέθη με την γεωμετρία της υπερεπιφάνειας. Γιά την μελέτη της μεταβολής της γεωμετρίας ορίζουμε, μέσω της κίνησης, μιά χρονικώς εξαρτώμενη γεωμετρία πάνω στην υπερεπιφάνεια.

Στό τέταρτο κεφάλαιο μελετώνται ποι μεταβολές των χρονικώς ε-

ξαρτώμενων μεγεθών τα οποία ορίσαμε πάνω στην υπερεπιφάνεια. Στην πρώτη ενότητα υπολογίζουμε τις μεταβολές του μετρικού τανυστή και του μοναδιαίου καθετικού πεδίου. Στην δεύτερη ενότητα υπολογίζουμε τις μεταβολές του τελεστή σχήματος, της δεύτερης και της τρίτης θεμελιώδους μορφής. Στην τρίτη ενότητα μελετάμε τις μεταβολές των κυρίων καμπυλοτήτων, της μέσης καμπυλότητας και της καμπυλότητας Gauss. Στην τελευταία ενότητα του κεφαλαίου μελετάμε την μεταβολή της συνοχής Levi-Civita και του τανυστή καμπυλότητας Riemann.
Οι εξισώσεις μεταβολής γιά τά χρονικώς εξαρτώμενα πεδία δίνονται, στις περισσότερες των περιπτώσεων, σε δύο μορφές. Μιά με χρήση γεωμετρικών μεγεθών και μιά η οποία εμπλέκει και κινηματικά μεγέθη.

Στό πέμπτο κεφάλαιο μελετώνται εφαρμογές και ειδικές κινήσεις. Συγκεκριμένα, στις δύο πρώτες ενότητες εξειδικεύονται οι εξισώσεις μεταβολής στην περίπτωση των δύο βασικών ειδών κίνησης: της περίπτωσης όπου το πεδίο ταχύτητας έχει μόνο εφαπτομενική στην υπερρεπιφάνεια συνιστώσα (**εφαπτομενική** κίνηση) και της περίπτωσης όπου το πεδίο ταχύτητας έχει μόνο καθετική συνιστώσα (**καθετική** κίνηση) καθώς και την ειδική υποπερίπτωση καθετικής κίνησης κατά την οποία η επιφάνεια κινείται παράλληλα πρός τόν εαυτό της (**παράλληλη** κίνηση).
Άλλες κινήσεις τις οποίες μελετάμε και χαρακτηρίζουμε είναι οι κινήσεις γιά τις οποίες η μεταβολή του καθετικού διανύσματος είναι μηδενική (**απειροστικές παραλληλίες**), καθώς και την ειδική υποπερίπτωση της απειροστικής παραλληλίας, συγκεκριμένα την κίνηση μηδενικού ρυθμού στροφής (ή pure strain) την οποία χαρακτηρίζουμε, γενικεύοντας σχετικό αποτέλεσμα [30].
Μελετάμε επίσης απειροστικώς ισομετρικές κινήσεις και την ισοδυναμία τους με τις κινήσεις οι οποίες χαρακτηρίζονται ως μηδενικού ρυθμού παραμόρφωσης (pure spin).
Τέλος, μελετάμε την γενική κίνηση καμπύλης πάνω σε μιά επιφάνεια εξετάζοντας ενδιαφέρουσες υποπεριπτώσεις και φυσικές εφαρμογές.

1 Κινηματική του συνεχούς στόν Ευκλείδιο χώρο $\mathbb{E}$

Στο κεφάλαιο αυτό δίνουμε την κλασσική περιγραφή της κίνησης 3 - διάστατων και 2 - διάστατων συνεχών μέσα σε έναν 3 -διάστατο Ευκλείδιο χώρο $\mathbb{E}$, όπως αυτή εκτίθεται σε κλασσικά βιβλία του αντικειμένου, όπως γιά παράδειγμα, στα [6], [11] και [12].

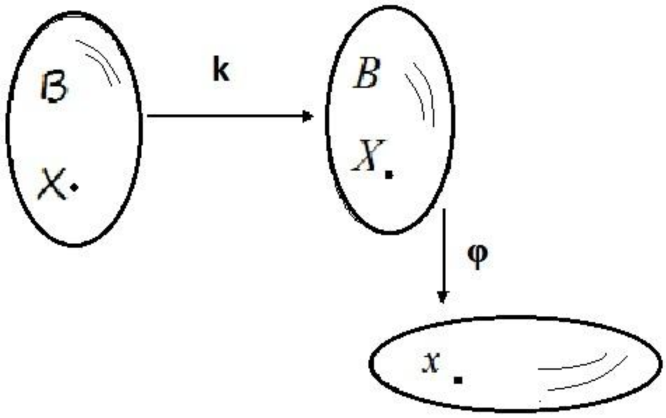
1.1 Παραμόρφωση συνεχούς

Ως χαρακτηριστική ιδιότητα ενός τρισδιάστατου συνεχούς μέσου θεωρούμε την δυνατότητά του να καταλαμβάνει ένα ανοικτό υποσύνολο του 3 - διάστατου Ευκλείδιου χώρου.
Για 2 - διάστατα συνεχή μέσα (μεμβράνες, λεπτά κελύφη κ.λ.π.) θεωρούμε ότι περιγράφονται απο μια επιφάνεια.

Έστω $\mathbb{E}$ ο σημειακός 3-διάστατος Ευκλείδιος χώρος με προσαρτημένο διανυσματικό χώρο $\mathcal{V}$.
Ως *συνεχές* θεωρούμε ένα σύνολο $\mathcal{B}$ το οποίο υλοποιείται εντός του Ευκλείδιου χώρου $\mathbb{E}$ μέσω μιάς **αναπαράστασης αναφοράς** (reference configuration)

$$k : \mathcal{B} \to \mathbb{E}, \;\; \mathcal{X} \to k(\mathcal{X}) = X \in k(\mathcal{B}) = B.$$

Στό εξής, ως 3 **-διάστατο συνεχές** ή **σώμα** ορίζεται η εικόνα $B = k(\mathcal{B})$ του $\mathcal{B}$ μέσω της k και τα στοιχεία X του B καλούνται **υλικά σημεία**.



Σχήμα 1.1: Παραμόρφωση

Ως **παραμόρφωση** (deformation) ϕ του σώματος B ορίζεται μιά **εμφύτευση** (embedding)

$$\phi : B \to \mathbb{E}, \ \ (\Sigma\chi : 1.1)$$

Ως **τανυστής παραμόρφωσης** (deformation gradient) της ϕ ορίζεται τό διαφορικό

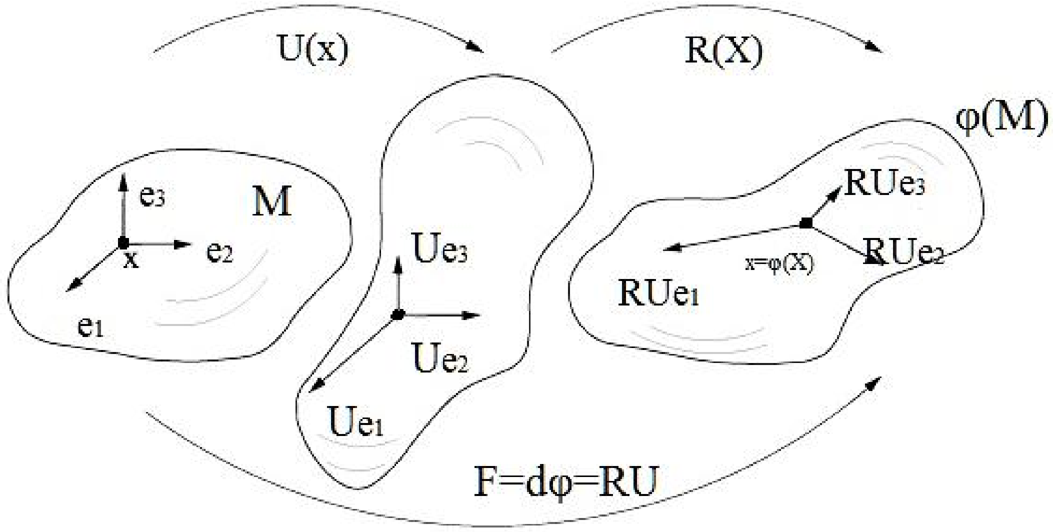
$$F(X) = d\phi(X) : \mathcal{V} \to \mathcal{V},$$

σε κάθε υλικό σημείο $X \in B$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι

$$\det F(X) > 0$$

σε κάθε $X \in B$.

Με εφαρμογή της κλασσικής εκδοχής του θεωρήματος πολικής ανάλυσης ([1], σελ. 208), μεταξύ ισοδιάστατων διανυσματικών χώρων,



Σχήμα 1.2: Πολική Ανάλυση 1.1

προκύπτει ότι, γιά κάθε $X \in B$, ο τανυστής παραμόρφωσης $F(X)$ αναλύεται ως (Σχ: 1.2)

$$F(X) = R(X)U(X), \tag{1.1}$$

με

$$U(X) = \sqrt{F^T(X)F(X)}, \tag{1.2}$$

όπου

$$U(X) : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$$

συμμετρικός, θετικώς ορισμένος γραμμικός μετασχηματισμός και

$$R(X) : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$$

ορθογώνιος μετασχηματισμός με

$$R(X) = F(X)U^{-1}(X). \tag{1.3}$$

Ο **δεξιός τανυστής παραμόρφωσης Green** ορίζεται από την σχέση

$$C(X) = F^T(X)F(X). \tag{1.4}$$

Ο C είναι προφανώς συμμετρικός και θετικώς ορισμένος.
Επίσης, ο $F(X)$ επιδέχεται και την πολική ανάλυση

$$F(X) = V(X)R(X), \tag{1.5}$$

όπου

$$V(X) = \sqrt{F(X)F^T(X)}$$

και $R(X)$ ο ιδιος ορθογώνιος μετασχηματισμός με τόν μετασχηματισμό της σχέσης 1.1.

1.2 Κινηματική 3 - διάστατου συνεχούς

Έστω B ένα 3-διάστατο συνεχές του $\mathbb{E}$. Στην τρέχουσα ενότητα θα μελετήσουμε χρονικώς εξαρτωμενες παραμορφώσεις, ή αλλιώς **κινήσεις**, του σώματος B.

Ορισμός 1.2.1. *Ως* **κίνηση** *του B καλείται μιά χρονικώς εξαρτημένη, οικογένεια παραμορφώσεων*

$$\phi_t : B \to \mathbb{E}, \;\; t \in \mathbb{R}$$

ή, ισοδύναμα, μιά απεικόνιση

$$\phi : B \times \mathbb{R} \to E, \;\; x = \phi(X, t)$$

με $\phi(X, t) = \phi_t(X)$.
Συμβολίζουμε τα στοιχεία του B με X και τα στοιχεία του $\phi(B)$ με $x = \phi(X, t)$. Θέτουμε $B_t = \phi_t(B)$ δηλώνοντας την θέση την οποία καταλαμβάνει τό σώμα μέσα στόν χώρο την χρονική στιγμή t.

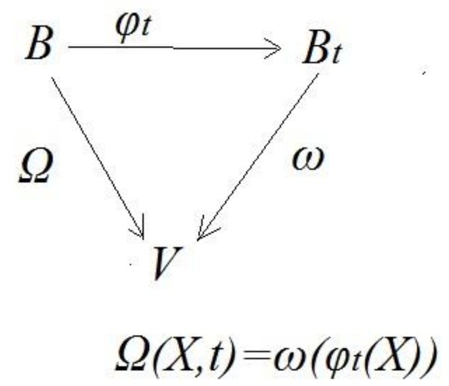
Γιά κάθε $t \in I$ η απεικόνιση $\phi(\cdot, t) = \phi_t$ είναι αμφιμονότιμη και επί από τό B στό B_t. Ορίζεται συνεπώς η αντίστροφη απεικόνιση

$$\phi_t^{-1} : B_t \to B.$$

Είναι σαφές ότι τό υλικό σημείο X και η θέση του x κατά την χρονική στιγμή t συνδέονται με τις σχέσεις

$$x = \phi_t(X) = \phi(X, t), \;\; X = \phi_t^{-1}(x).$$

Οι παραπάνω σχέσεις μας επιτρέπουν να περιγράψουμε μιά ιδιότητα του συνεχούς, είτε ως συνάρτηση $\Omega(X, t)$ του υλικού σημείου X και του χρόνου t (**υλική περιγραφή** ή **περιγραφή Lagrange**) είτε ως συνάρτηση $\omega(x, t)$ της θέσης του κατά την χρονική στιγμή t και του χρόνου t (**χωρική περιγραφή** ή **περιγραφή Euler**). Οι δύο περιγραφές



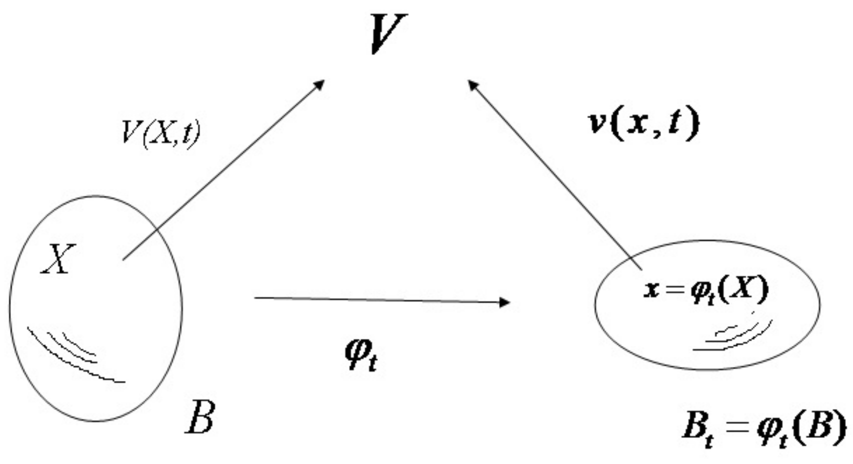
Σχήμα 1.3: Υλική - Χωρική περιγραφή 1.6, 1.7

συνδέονται με τις σχέσεις (Σχ: 1.3)

$$\Omega(X, t) = \omega(\phi(X, t), t) \tag{1.6}$$

$$\omega(x, t) = \Omega(\phi_t^{-1}(x), t) \tag{1.7}$$

Βάσει των ανωτέρω περιγραφών, υλικής και χωρικής:



Σχήμα 1.4: Υλική - Χωρική Ταχύτητα

Ορισμός 1.2.2. *Όρίζονται τα διανυσματικά πεδία:*

- **Υλικής ταχύτητας** *του B (Σχ: 1.4)*

$$V(X,t) = \frac{\partial}{\partial t}\phi(X,t) = \dot{\phi}(X,t). \tag{1.8}$$

- **Υλικής επιτάχυνσης** *του B*

$$A(X,t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(X,t) = \ddot{\phi}(X,t). \tag{1.9}$$

και

- **Χωρικής ταχύτητας**

$$v(x,t) = \left(V \circ \phi^{-1}\right)(x,t) = V(\phi^{-1}(x,t),t) \tag{1.10}$$

ή ισοδύναμα (Σχ: 1.4)

$$V(X,t) = (v \circ \phi)(X,t) = v(\phi(X,t),t) \tag{1.11}$$

- **Χωρικής επιτάχυνσης**

$$a(x,t) = \left(A \circ \phi^{-1}\right)(x,t) = A(\phi^{-1}(x,t),t). \tag{1.12}$$

ή ισοδύναμα

$$A(X,t) = (a \circ \phi)(X,t) = a(\phi(X,t),t). \tag{1.13}$$

Ορισμός 1.2.3. *Ορίζεται η* **υλική παράγωγος**, *μιάς φυσικής ή κινηματικής ποσότητας ενός συνεχούς, ως η παράγωγός της ως πρός t όταν διατηρήσουμε τό υλικό σημείο X σταθερό.*
Εάν η ποσότητα περιγράφεται από την συνάρτηση $\Omega(X,t)$ τότε η υλική παράγωγος δίνεται από την σχέση:

$$\dot{\Omega}(X,t) = \frac{\partial \Omega(X,t)}{\partial t}|_{X=\text{const}}. \tag{1.14}$$

Εάν η ποσότητα δίνεται με την χωρική της περιγραφή τότε η υλική της παράγωγος δίνεται από την σχέση:

$$\dot{\omega}(x,t) = \frac{\partial \Omega(\phi(X,t),t)}{\partial t}|_{X=\phi_t^{-1}(x)}. \tag{1.15}$$

Άμεση συνέπεια της ανωτέρω σχέσης 1.15 είναι η επόμενη

Πρόταση 1.2.4. *Εάν $\omega(x,t)$ διανυσματικό ή βαθμωτό πεδίο τό οποίο περιγράφει μιά ποσότητα του συνεχούς, τότε:*

$$\dot{\omega} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla_v \omega, \tag{1.16}$$

όπου v τό χωρικό διανυσματικό πεδίο χωρικής ταχύτητας του συνεχούς B. Εάν θεωρήσουμε ως ω τό διανυσματικό πεδίο της ταχύτητας v τότε τό διανυσματικό πεδίο της **επιτάχυνσης** *δίνεται από την σχέση:*

$$a = \dot{v} = \frac{\partial v}{\partial t} + \nabla_v v. \tag{1.17}$$

Έχοντας ορίσει την υλική παράγωγο 1.14 του υλικού πεδίου $\Omega(X,t)$ ορίζεται επίσης και η **υλική κλίση** του Ω

$$\nabla \Phi(X,t) = \nabla_X \Phi(X,t) \tag{1.18}$$

όπου ∇ η συνήθης συνοχή του Ευκλείδιου χώρου. Η **χωρική κλίση** του χωρικού πεδίου $\omega(x,t)$ ορίζεται μέσω της

$$\mathrm{grad}\omega(x,t) = \nabla_x \omega(x,t). \tag{1.19}$$

Έστω υλικό σημείο $X \in B$, ονομάζουμε **τροχιά** του X ([6], σελ. 63-64) την καμπύλη

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{E}, \;\; t \to \phi(X,t) = \phi_t(X).$$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\varphi_t"] \arrow[rr, bend right, "\varphi_\tau"'] & B_t \arrow[r, "\varphi_{t(\tau)}"] & B_\tau \end{tikzcd}$$

Σχήμα 1.5: Σχετική κίνηση,

Έστω τό υλικό σώμα B υποκείμενο σε κίνηση ϕ με διανυσματικό πεδίο υλικής ταχύτητας V. Θεωρούμε τις χωρικές εικόνες $B_t = \phi_t(B)$ και $B_\tau = \phi_\tau(B)$ του B κατά τις χρονικές στιγμές t και τ αντιστοίχως. Από την αντιστρεψιμότητα των απεικονίσεων ϕ_t, ϕ_τ προκύπτει η ύπαρξη μοναδικής απεικόνισης

$$\phi_t(\tau) : B_t \to B_\tau$$

τέτοιας ώστε (Σχ: 1.5)

$$\phi_\tau = \phi_t(\tau) \circ \phi_t. \tag{1.20}$$

Η κίνηση την οποία προσδιορίζει η 1.20 καλείται **σχετική** κι αφορά την μετάβαση του σώματος B, από την χρονική στιγμή t στην στιγμή τ. Από κατασκευής της σχετικής κίνησης $\phi_t(\tau)$ είναι σαφές ότι $\phi_t(t) = id_{\mathbb{E}}$ συνεπώς $F_t(t) = I_{\mathcal{V}}$.

Χρησιμοποιώντας την 1.20 προκύπτει ότι γιά τα αντίστοιχα διαφορικά ισχύει:

$$F(\tau) = F_t(\tau)F(t). \tag{1.21}$$

Μέ παραγώγιση ως πρός τ, γιά $\tau = t$, από την 1.21 παίρνουμε

$$\dot{F}(t) = G(t)F(t). \tag{1.22}$$

Με εφαρμογή της κλασσικής εκδοχής του θεωρήματος πολικής ανάλυσης 1.1 προκύπτει:

$$F_t(\tau) = R_t(\tau)U_t(\tau), \tag{1.23}$$

όπου $U_t^2(\tau) = F_t^T(\tau)F_t(\tau)$ συμμετρικός, θετικά ορισμένος γραμμικός μετασχηματισμός επί του $\mathcal{V}$ και $R_t(\tau)$ ορθογώνιος μετασχηματισμός επί του $\mathcal{V}$. Η χωρική ταχύτητα του B_t δίνεται από την σχέση

$$v(x,t) = \frac{\partial}{\partial \tau}|_{\tau=t}\phi_t(x,\tau). \tag{1.24}$$

Ορισμός 1.2.5. *Θεωρούμε τα κινηματικά μεγέθη πρώτης τάξεως:*
Ρυθμός μεταβολής τανυστή παραμόρφωσης

$$G(t) = \frac{\partial}{\partial \tau}|_{\tau=t}F_t(\tau). \tag{1.25}$$

Ρυθμός παραμόρφωσης *(strain tensor)*

$$\mathcal{D}(t) = \frac{\partial}{\partial \tau}|_{\tau=t}U_t(\tau). \tag{1.26}$$

Ρυθμός περιστροφής *(spin tensor)*

$$W(t) = \frac{\partial}{\partial \tau}|_{\tau=t}R_t(\tau). \tag{1.27}$$

Η επόμενη πρόταση συνοψίζει θεμελιώδεις σχέσεις μεταξύ των κινηματικών τανυστικών πεδίων.

Πρόταση 1.2.6. *Γιά τα κινηματικά τανυστικά πεδία τα οποία ορίσθηκαν με τις 1.25, 1.26 και 1.27 ισχύουν οι:*

$$G = \mathcal{D} + W \tag{1.28}$$

$$G = dv \tag{1.29}$$

$$\mathcal{D}^T = \mathcal{D} \tag{1.30}$$

$$W = -W^T. \tag{1.31}$$

Απόδειξη. Από την 1.12 έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau}|_{\tau=t} F_t(\tau) &= \frac{\partial}{\partial \tau}|_{\tau=t} \{R_t(\tau)U_t(\tau)\} \\ &= \frac{\partial R_t(\tau)}{\partial \tau}|_{\tau=t} U_t(t) + R_t(t)\frac{\partial \overline{U}_t(\tau)}{\partial \tau}|_{\tau=t}, \end{aligned}$$

συνεπώς

$$G(t) = W(t) + \mathcal{D}(t),$$

αφού $U_t(t) = R_t(t) = I_{V^3}$ και η 1.28 αποδείχθηκε.
Από την αντιμεταθετικότητα των γραμμικών τελεστών της παραγώγισης με τό διαφορικό προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau}|_{\tau=t} F_t(\tau) &= \frac{\partial}{\partial \tau}|_{\tau=t} d\phi_t(\tau) \\ &= d\frac{\partial}{\partial \tau}|_{\tau=t} \phi_t(\tau) \end{aligned}$$

οπότε

$$G(t) = dv(t)$$

και η 1.29 εδείχθη.
Εξ ορισμού είναι

$$C_t(\tau) = U_t^2(\tau) = F_t^T(\tau)F_t(\tau),$$

οπότε, από την συμμετρία του $U_t(\tau)$ με παραγώγιση ως πρός τ, γιά $\tau = t$, προκύπτει η 1.30.

Από την 1.12 είναι γνωστό ότι ο μετασχηματισμός $R_t(\tau)$ είναι ορθογώνιος, οπότε:

$$R_t^T(\tau)R_t(\tau) = I_{\mathcal{V}},$$

όπου $I_{\mathcal{V}}$ η ταυτοτική απεικόνιση πάνω στο $\mathcal{V}$. Έπεται

$$\frac{\partial}{\partial \tau}|_{\tau=t}\left\{R_t^T(\tau)R_t(\tau)\right\} = \frac{\partial I_{\mathcal{V}}}{\partial \tau}|_{\tau=t}$$

οπότε

$$W^T + W = \mathbf{0}.$$

□

Σημείωση 1.2.7. *Λόγω της 1.29 ο τανυστής G πού ορίσθηκε με την σχέση 1.25 καλείται στό εξής* **κλίση ταχύτητας** *(velocity gradient).*

1.3 Κινηματική 2 - διάστατου συνεχούς

Στην ενότητα αυτή αναφερόμαστε σε θέματα σχετικά με παραμορφώσεις - κινήσεις 2 - διάστατων συνεχών μεμβρανών εντός του Ευκλείδιου χώρου (επί παραδείγματι μεμβρανών, κελύφών κ.λ.π).
Παρουσιάζουμε τό θεώρημα πολικής ανάλυσης γιά 2 -διάστατα συνεχή σώματα όπως αυτό αποδείχθηκε στο [5] και μελετάμε τις θεμελιώδεις σχέσεις μεταξύ των κύριων κινηματικών ποσοτήτων.
Κύριες πηγές γιά όσα περιλαμβάνονται στην ενότητα αποτελούν τα [2] και [5].

Έστω $\mathcal{M}$ ένα 2 - διάστατο συνεχές (π.χ. μεμβράνη) και η επιφάνεια M, αναπαράσταση αναφοράς της $\mathcal{M}$, μέσα στόν $\mathbb{E}$. Θεωρούμε τήν κανονική εμφύτευση

$$j : M \to \mathbb{E}$$

της M εντός του Ευκλείδιου χώρου $\mathbb{E}$ και συμβολίζουμε με

$$J(X) = dj(X) : T_X M \to \mathcal{V}$$

το διαφορικό τής κανονικής εμφύτευσης στό σημείο $X \in M$.

Ορισμός 1.3.1. *Ορίζεται ως* **παραμόρφωση** *της M μιά εμφύτευση (embedding)*

$$\phi : M \to \mathbb{E},\, x = \phi(X)$$

της επιφάνειας M στό $\mathbb{E}$. Η $\widetilde{M} = \phi(M)$ είναι η **παραμορφωμένη***(deformed) επιφάνεια.*

Η παραμόρφωση ϕ επάγει την αμφιδιαφόριση $\widetilde{\phi} : M \to \widetilde{M}$ με $j\widetilde{\phi}(X) = \phi(X)$, $X \in M$. Τά διαφορικά $F(X)$ της ϕ και $\widetilde{F}(X)$ της $\widetilde{\phi}$ στό $X \in M$, συνδέονται μέσω της

$$F(X) = J_x \widetilde{F}(X) \tag{1.32}$$

και όπως ήδη αναφέραμε στην περίπτωση 3 - διάστατου συνεχούς, F είναι ο **τανυστής παραμόρφωσης** (deformation gradient) της κίνησης. Οι Man C. S. και Cohen H. [5] απέδειξαν τό επόμενο θεώρημα πολικής ανάλυσης

Θεώρημα 1.3.2. *Εάν ϕ παραμόρφωση της επιφάνειας M τότε, γιά κάθε σημείο $X \in M$ υπάρχει μοναδική στροφή $R(X) : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ τέτοια ώστε (Σχ: 1.6)*

$$F(X) = R(X) J_X U(X), \tag{1.33}$$

όπου

$$U^2(X) = F^T(X)F(X) = \widetilde{F}^T(X)\widetilde{F}(X) : T_X M \to T_X M$$

θετικά ορισμένος, συμμετρικός μετασχηματισμός (U είναι ο δεξιός τανυστής έκτασης) και $J_X : T_X M \to \mathcal{V}$ είναι τό διαφορικό της κανονικής εμφύτευσης. Η ανάλυση 1.33 είναι μοναδική.
Επιπλέον, τα μοναδιαία καθετικά διανυσματικά πεδία n της αρχικής επιφάνειας M και $\widetilde{n}$ της παραμορφωμένης επιφάνειας $\widetilde{M}$, συνδέονται μέσω της στροφής R έτσι ώστε, σε κάθε σημείο $x = \phi(X)$, να ισχύει:

$$\widetilde{n}_x = R(X) n_X. \tag{1.34}$$

$$\begin{tikzcd} TxM \arrow[r, "F=d\varphi"] \arrow[d, "U"] & V \\ TxM \arrow[r, "J=dj"'] & V \arrow[u, "R"'] \end{tikzcd}$$

Σχήμα 1.6: Πολική Ανάλυση

Αναλόγως πρός την περίπτωση 3 -διάστατου σώματος, ορίζεται η κίνηση μιάς μεμβράνης ως μιά χρονικώς εξαρτώμενη οικογένεια παραμορφώσεων

$$\phi_t : M \to \mathbb{E}, \; t \in I \subset \mathbb{R}$$

ή, ισοδύναμα, ως μιά απεικόνιση

$$\phi : M \times I \to \mathbb{E}, \; x = \phi(X,t) = \phi_t(X).$$

Εάν $M_t = \phi_t(M)$ είναι η επιφάνεια η οποία αναπαριστά την παραμορφωμένη μεμβράνη την χρονική στιγμή t τότε οι απεικονίσεις $\widetilde{\phi}(\cdot,t) : M \to M_t$, $x = \phi(X,t)$ είναι αμφιδιαφορίσεις γιά κάθε t και $\phi(X,t) = j_t(\widetilde{\phi}(X,t))$, όπου $j_t : M_t \to \mathbb{E}$ η κανονική εμφύτευση της επιφάνειας M_t την χρονική στιγμή t με διαφορικό $J_t(x) : T_xM_t \to \mathcal{V}$.

Το διανυσματικό πεδίο υλικής ταχύτητας

$$V(X,t) = \frac{\partial}{\partial t}\phi(X,t)$$

ορίζεται όπως και στην περίπτωση των 3 - διάστατων σωμάτων και ισχύει $V(\cdot,t) \in \overline{\mathcal{X}}(M)$ γιά κάθε t, όπου $\overline{\mathcal{X}}(M)$ ο χώρος των διανυσματικών πεδίων τα οποία ορίζονται πάνω στην M και παίρνουν τιμές στόν $\mathcal{V}$.

Τό διάνυσμα $V(X,t)$ είναι η ταχύτητα του υλικού σημείου X κατά την χρονική στιγμή t.

Η χωρική ταχύτητα του σημείου $x = \phi(X,t)$ είναι τό πεδίο

$$v(\cdot,t) : M_t \to V$$

το οποίο σχετίζεται με τό πεδίο υλικής ταχύτητας όπως στην περίπτωση 3 - διάστατου σώματος, με την διαφοροποίηση να συνίσταται στο ότι αντί της κίνησης ϕ_t, η οποία δέν είναι αντιστρεπτή, εμπλέκεται η επαγόμενη αμφιδιαφόριση $\widetilde{\phi}_t$ μέσω της σχέσης

$$v(x,t) = V(\widetilde{\phi}^{-1}(X,t),t) \;\; \eta \;\; V(X,t) = v(\widetilde{\phi}(X,t),t).$$

Τά διαφορικά των πεδίων υλικής και χωρικής ταχύτητας συνδέονται μέσω της σχέσης

$$dv\widetilde{F} = dV,$$

όπου $\widetilde{F}$ τό διαφορικό της επαγόμενης αμφιδιαφόρισης $\widetilde{\phi}$.

Ορίζουμε την σχετική, ως πρός την τρέχουσα αναπαράσταση, περιγραφή. Θωρούμε την σχετική κίνηση

$$\phi_t(\cdot,\tau) : M_t \to \mathbb{E}$$

ως πρός την παρούσα αναπαράσταση M_t κατά την χρονική στιγμή t σε σχέση με μιά μελλοντική χρονική στιγμή τ και τέτοια ώστε να ικανοποιείται η:

$$\phi(X,\tau) = \phi_t\left(\phi(X,t),\tau\right). \tag{1.35}$$

Μέ χρήση της 1.33 ο σχετικός τανυστής παραμόρφωσης - relative deformation gradient (δηλαδή το διαφορικό της σχετικής κίνησης $\phi_t(\tau)$) αναλύεται μονοσήμαντα ως

$$F_t(\tau) = R_t(\tau) J_t U_t(\tau), \tag{1.36}$$

και

$$R_t(\tau)n(t) = n(\tau), \tag{1.37}$$

όπου

$$U_t^2(\tau) = F_t^T(\tau)F_t(\tau) : T_xM_t \to T_xM_t$$

ο **σχετικός δεξιός τανυστής Green** (relative right strain tensor)
και

$$R_t(\tau) : V \to V$$

ο **σχετικός τανυστής στροφής** (relative rotation tensor).
Την χρονική στιγμή $\tau = t$ έχουμε:

$$F_t(t) = J_t,\ R_t(t) = I_V,\ U_t(t) = I_{T_xM_t}. \tag{1.38}$$

Από την 1.35 προκύπτει:

$$F(\tau) = F_t(\tau)\widetilde{F}(t) = F_t(\tau)\mathcal{P}_tF(t). \tag{1.39}$$

Ορίζονται, όπως και στην περίπτωση 3 - διάστατου συνεχούς, τα κινηματικά τανυστικά πεδία

- $G(t)$ **κλίσης ταχύτητας** (velocity gradient)

$$G(t) = \frac{\partial F_t(\tau)}{\partial\tau}|_{\tau=t} : T_xM_t \to \mathcal{V}, \tag{1.40}$$

- $\mathcal{D}(t)$ **ρυθμού παραμόρφωσης** (stretching tensor)

$$\mathcal{D}(t) = \frac{\partial U_t(\tau)}{\partial\tau}|_{\tau=t} : T_xM_t \to T_xM_t, \tag{1.41}$$

  και

- $W(t)$ **ρυθμού περιστροφής** (spin tensor)

$$\mathcal{W}(t) = \frac{\partial R_t(\tau)}{\partial\tau}|_{\tau=t} : \mathcal{V} \to \mathcal{V} \tag{1.42}$$

.

Με παραγώγιση της 1.36 ως πρός τ, γιά $\tau = t$, προκύπτει:

$$G(t) = J_t\mathcal{D}(t) + W(t)J_t. \tag{1.43}$$

Σημείωση 1.3.3. *Η σχέση 1.43 είναι η αντίστοιχη γενίκευση της*

$$G = \mathcal{D} + W$$

γιά την περίπτωση κίνησης 3 *-διάστατου σώματος.*

Εάν λάβουμε υπόψη μας τό γεγονός ότι οι γραμμικοί τελεστές τού διαφορικού και της μερικής παραγώγισης αντιμετατίθενται, όπως επίσης και τις σχέσεις 1.36, 1.38, έχουμε την επόμενη:

Πρόταση 1.3.4. *Ισχύουν οι επόμενες σχέσεις μεταξύ των κινηματικών τανυστικών πεδίων γιά επιφάνεια κινούμενη στόν Ευκλείδιο χώρο:*

$$G(t) = dv \tag{1.44}$$

$$\dot{F}(t) = \frac{\partial}{\partial t}F(t) = G\mathcal{F} = G\mathcal{P}_tF(t), \tag{1.45}$$

$$2\mathcal{D} = \mathcal{P}G + (\mathcal{P}G)^T, \tag{1.46}$$

$$Wn(t) = \frac{\partial}{\partial \tau}|_{\tau=t}n(\tau) \tag{1.47}$$

$$dV(t) = \dot{F}(t). \tag{1.48}$$

Οι σχέσεις 1.44 - 1.47 θα γενικευθούν και αποδειχθούν σε επόμενο κεφάλαιο, όταν η κίνηση επιφανειών μέσα σε Ευκλείδιο χώρο θα γενικευθεί σε κίνηση m -διάστατης υπερεπιφάνειας μέσα σε πολλαπλότητα Riemann.

2 Γεωμετρία Υπερεπιφανειών

2.1 Γενικά

Θεωρούμε m - διάστατη, προσανατολισμένη, διαφορίσιμη πολλαπλότητα M εντός της $m+1$ - διάστατης πολλαπλότητας Riemann N, την κανονική εμφύτευσή της

$$j : M \hookrightarrow N$$

και θέτουμε $j(M) = \overline{M} \subset N$. Εστω $\overline{g}$ ο μετρικός τανυστής, $\overline{\nabla}$ η προσαρτημένη στην $\overline{g}$ συνοχή Levi - Civita και $\overline{R}$ ο τανυστής καμπυλότητας Riemann της περιβάλλουσας πολλαπλότητας N. Συμβολίζουμε με g, ∇ και R τόν επαγόμενο μετρικό τανυστή, συνοχή Levi – Civita και καμπυλότητα Riemann της υπερεπιφάνειας M, αντιστοίχως.
Γιά κάθε $X \in M$ έστω

$$J_X = dj_X : T_X M \to T_{j(X)} N$$

τό διαφορικό της κανονικής εμφύτευσης j στό σημείο X.
Συμβολίζουμε με $\mathcal{X}(M)$ και $\mathcal{X}(N)$ τούς χώρους των διανυσματικών πεδίων επί των M και N αντιστοίχως. Μέ $\overline{\mathcal{X}}(M)$ συμβολίζουμε το σύνολο των διανυσματικών πεδίων των οριζόμενων πάνω στην M με τιμές εντός της εφαπτομενικής δέσμης της περιβάλλουσας πολλαπλότητας N (τα οποία καλούνται επίσης και *διανυσματικά πεδία κατά μήκος της* M).
Εάν $u \in \mathcal{X}(M)$ τότε $\overline{u} = Ju \in \overline{\mathcal{X}}(M)$, ενώ στην περίπτωση κατά την οποία $\overline{u} \in \mathcal{X}(N)$ μπορούμε να ορίσουμε τόν περιορισμό του εν λόγω

πεδίου πάνω στην M μέσω της

$$w = \overline{u} \circ j \in \overline{\mathcal{X}}(M).$$

Ομοίως, γιά ένα διανυσματικό πεδίο $w \in \overline{\mathcal{X}}(M)$ μπορούμε να ορίσουμε μιά επέκταση αυτού $\overline{w} \in \mathcal{X}(N)$ ώς ένα διανυσματικό πεδίο $\overline{w}$ τέτοιο ώστε

$$\overline{w} \circ j = w.$$

Οι επεκτάσεις δέν είναι μοναδικές αλλά η ύπαρξή τους είναι εξασφαλισμένη. Γιά την συνέχεια δεχόμαστε ότι τα διανυσματικά πεδία, τά οποία ορίζονται στην υπερεπιφάνεια M, έχουν ήδη επεκταθεί πάνω στην περιβάλλουσα πολλαπλότητα N.

Γιά την παράγωγο Lie ισχύει ([24], σελ.88) ότι γιά τυχόντα $u, w \in \mathcal{X}(M)$ τα Ju, Jw είναι επεκτάσιμα σε πεδία της N και μάλιστα

$$J[u,w] = [Ju, Jw]. \tag{2.1}$$

Ένα μοναδιαίο καθετικό διανυσματικό πεδίο $n \in \overline{\mathcal{X}}(M)$ της προσανατολισμένης υπερεπιφάνειας ικανοποιεί τις συνθήκες

$$\begin{aligned} \overline{g}\,(n,n) \quad &= 1, \\ \overline{g}\,(n, Ju) \quad &= 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

γιά κάθε $u \in \mathcal{X}(M)$.

Ο επαγόμενος μετρικός τανυστής g επί της M (*πρώτη θεμελιώδης μορφή*) δίνεται από την σχέση

$$g\,(u,w) = \overline{g}\,(Ju, Jw)\,, \ \forall u, w \in \mathcal{X}(M). \tag{2.3}$$

Σε κάθε σημείο $X \in M$ υφίσταται η ανάλυση

$$T_{j(X)}N = J_X\,(T_X M) \oplus N_X, \tag{2.4}$$

όπου $N_X = \operatorname{span}\{n_X\}$ ο μονοδιάστατος υπόχωρος του $T_{j(X)}N$ ο παραγόμενος από το μοναδιαίο καθετικό διάνυσμα n_X της M στο σημείο X.

Γιά κάθε $W \in T_{j(X)}N$ ως καθετική προβολή (*προβολή κατά την κάθετο* n) ορίζεται η απεικόνιση (Σχ: 2.1)

$$\pi_X : T_{j(X)}N \ni W \to \pi_X(W) = W - \overline{g}\,(W, n)\, n \in T_{j(X)}N. \qquad (2.5)$$

Από κατασκευής ισχύει

$$\pi_X(W) \in T_{j(X)}\overline{M},$$

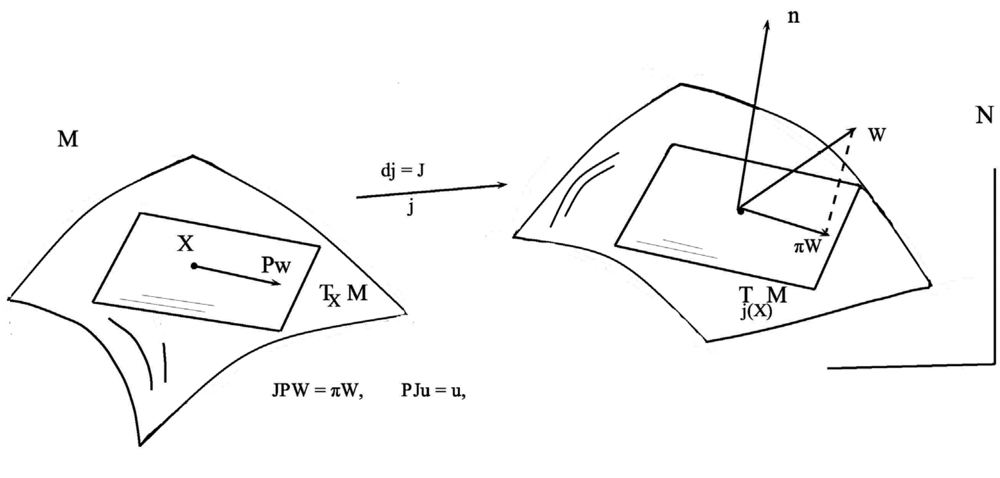
συνεπώς υπάρχει διάνυσμα $w \in T_X M$ τέτοιο ώστε τό $\pi_X(W)$ είναι η εικόνα μέσω του J_X, δηλαδή

$$\pi_X W = J_X w.$$

Ορίζεται λοιπόν η προβολή (Σχ: 2.1) επί του $T_X M$:

$$\mathcal{P}_X : T_{j(X)}N \to T_X M, \;\; \mathcal{P}_X W = w.$$

Είναι προφανές ότι από κατασκευής της $\mathcal{P}_X$ ισχύει



Σχήμα 2.1: Προβολές

$$J_X\,(\mathcal{P}_X W) = \pi_X(W).$$

Επίσης, γιά κάθε $u \in T_X M$ ισχύει:

$$\begin{aligned} g\left(\mathcal{P}_X W, u\right) &= \overline{g}\left(J_X \mathcal{P}_X(W), J_X u\right) \\ &= \overline{g}\left(\pi_X W, J_X u\right) \\ &= \overline{g}\left(W - \overline{g}\left(W, n\right) n, J_X u\right) \\ &= \overline{g}\left(W, J_X u\right) \\ &= g\left(J^T W, u\right). \end{aligned}$$

Έπεται ότι η απεικόνιση $\mathcal{P}_X$ είναι η ανάστροφος της J_X, δηλαδή

$$\mathcal{P}_X = J_X^T.$$

Παρατηρούμε ότι γιά τυχόντα $u, w \in \mathcal{X}(M)$, με χρήση της 2.3, προκύπτει:

$$\begin{aligned} g\left(\mathcal{P}_X J_X u, w\right) &= g\left(J_X^T J_X u, w\right) \\ &= \overline{g}\left(J_X u, J_X w\right) \\ &= g\left(u, w\right). \end{aligned}$$

Άρα

$$\mathcal{P}_X J_X = I_{T_X M} : T_X M \to T_X M$$

δηλαδή $\mathcal{P}_X J_X$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση του $T_X M$.
Συνοψίζοντας, σε κάθε σημείο $X \in M$ ισχύουν οι:

$$J_X \mathcal{P}_X = \pi_X : T_{j(X)} N \to T_{j(X)} N, \tag{2.6}$$

$$\mathcal{P}_X J_X = I_X : T_X M \to T_X M, \tag{2.7}$$

$$\mathcal{P}_X n_X = \mathbf{0}. \tag{2.8}$$

2.2 Τελεστής σχήματος

Η επαγομένη μετρική g πάνω στην υπερεπιφάνεια M ορίζει μοναδική κατά Levi - Civita συνοχή ∇ επί της M, τέτοια ώστε $\nabla g = 0$, μέσω της σχέσης

$$\nabla_u w = \mathcal{P}\overline{\nabla}_{Ju} Jw, \quad \forall u, w \in \mathcal{X}(M), \tag{2.9}$$

όπου $\nabla_u w$ τό μοναδικό στοιχείο του $\mathcal{X}(M)$ γιά τό οποίο

$$J\nabla_u w = \pi\overline{\nabla}_{Ju} Jw.$$

Δηλαδή

$$\overline{\nabla}_{Ju} Jw = J\overline{\nabla}_u w + \overline{g}\left(\overline{\nabla}_{Ju} Jw, n\right) n. \tag{2.10}$$

Γιά τήν περιγραφή της εξωτερικής γεωμετρίας της υπερεπιφάνειας M, τα πεδία τα οποία ορίζονται πάνω στην M επεκτείνονται σε πεδία πάνω στην περιβάλλουσα πολλαπλότητα N, διαφορίζονται με την χρήση τελεστών πάνω στην N και στην συνέχεια προβάλλονται ξανά στην M. Με τόν τρόπο αυτό κατασκευάζεται ένας διαφορικός τελεστής πάνω στην M. Οι τελεστές οι οποίοι παράγονται με την μέθοδο αυτή είναι ανεξάρτητοι από τις επεκτάσεις πού χρησιμοποιούνται.

Ο **τελεστής σχήματος** ή αλλιώς *απεικόνιση Weingarten*, είναι μιά συμμετρική απεικόνιση η οποία ορίζεται σε κάθε σημείο $X \in M$ μέσω της

$$S_X : T_X M \ni u \to S_X u = -\mathcal{P}\overline{\nabla}_{Ju} n. \tag{2.11}$$

Η **δεύτερη θεμελιώδης μορφή** B είναι ένα συμμετρικό, τύπου $(0,2)$, τανυστικό πεδίο πανω στην M, τό οποίο αντιστοιχεί στόν τελεστή σχήματος S, δηλαδή:

$$B(u, w) = g\left(Su, w\right). \tag{2.12}$$

Ισοδύναμα, γιά την δεύτερη θεμελιώδη μορφή, ισχύει και η

$$B(u, w) = \overline{g}\left(n, \overline{\nabla}_{Ju} Jw\right). \tag{2.13}$$

Η **τρίτη θεμελιώδης μορφή** III ορίζεται από την σχέση

$$III\,(u,w) = g\,(Su, Sw) = B\,(Su, w)\,. \tag{2.14}$$

Η **καμπυλότητα Gauss - Kronecker** K και η **μέση καμπυλότητα** H δίνονται αντίστοιχα από τίς

$$K = \det S, \tag{2.15}$$

$$mH = \mathrm{tr} S. \tag{2.16}$$

2.3 Θεμελιώδεις εξισώσεις θεωρίας υπερεπιφανειών

Η **εξίσωση Gauss** συσχετίζει την συνοχή Levi - Civita ∇ της υπερεπιφάνειας M με την συνοχή $\overline{\nabla}$ της περιβάλλουσας πολλαπλότητας N. Όπως προκύπτει από τις 2.10 και 2.13

$$\overline{\nabla}_{Ju} Jw = J\nabla_u w + B\,(u,w)\,n = J\nabla_u w + g(Su,w)n. \tag{2.17}$$

Η 2.17 δίνει την ανάλυση του $\overline{\nabla}_{Ju} Jw$ σε εφαπτομενική και καθετική συνιστώσα.

Ο **τανυστής καμπυλότητας Riemann**, ο προσαρτημένος στην συνοχή ∇ της M, ορίζεται γιά κάθε ζεύγος διανυσματικών πεδίων $u, v \in \mathcal{X}(M)$, ως η γραμμική απεικόνιση

$$R(u,v) : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$$

τέτοια ώστε

$$R(u,v)w = \nabla_u \nabla_v w - \nabla_v \nabla_u w - \nabla_{[u,v]} w. \tag{2.18}$$

Μέ χρήση του μετρικού τανυστή g προσαρτούμε σε κάθε διανυσματικό πεδίο $u \in \mathcal{X}(M)$ μιά 1 - μορφή $u^\flat$ επί της M τέτοια ώστε

$$u^\flat(w) = g\,(u,w)\,, \tag{2.19}$$

γιά κάθε $w \in \mathcal{X}(M)$.
Όμοια, σε κάθε 1 - μορφή ξ αντιστοιχίζεται ένα διανυσματικό πεδίο $\xi^\sharp \in \mathcal{X}(M)$ τέτοιο ώστε

$$g\left(\xi^\sharp, w\right) = \xi(w), \tag{2.20}$$

γιά όλα τα $w \in \mathcal{X}(M)$.
Υπό τό πρίσμα της 2.20 τό διαφορικό df διαφορίσιμης πραγματικής συνάρτησης έχει ως αντίστοιχο διανυσματικό πεδίο τήν κλίση (gradient) της f, δηλαδή:

$$\nabla f = (df)^\sharp .$$

Οι ορισθείσες μέσω των 2.19 και 2.20 πράξεις, είναι οι γνωστές πράξεις της ύψωσης και πτώσης των δεικτών.
Σε κάθε γραμμική απεικόνιση $T : T_X M \to T_X M$ αντιστοιχίζεται ένας τανυστής T^1 τύπου $(1,1)$ ο οποίος δίνεται από την

$$T^1(\alpha, u) = \alpha\,(Tu)\,, \tag{2.21}$$

όπου α τυχούσα 1 - μορφή και γιά κάθε $u \in \mathcal{X}(M)$.
Μέ χρήση της μετρικής g αντιστοιχίζεται στόν ενδομορφισμό T ένας τανυστής $T^\flat$ τύπου $(0,2)$ ο οποίος χαρακτηρίζεται από την

$$T^\flat(u, w) = g\,(Tu, w) = T^1\left(u^\flat, w\right) \tag{2.22}$$

Γιά κάθε γραμμική απεικόνιση $T : T_X M \to T_X M$, ορίζουμε την συναλλοίωτη παράγωγο $\nabla_X T$, όπου $X \in \mathcal{X}(M)$, ώς την γραμμική απεικόνιση η οποία αντιστοιχεί στόν $(1,1)$ τανυστή $\nabla_X T^1$, ήτοι:

$$\left(\nabla_X T^1\right)(\alpha, Y) = \alpha\left(\left(\nabla_X T\right) Y\right). \tag{2.23}$$

Ορίζεται η παράγωγος Lie $\pounds_X T^1$ γραμμικής απεικόνισης T, μέσω της:

$$\left(\pounds_X T^1\right)(\alpha, Y) = \alpha\left(\left(\pounds_X T\right) Y\right). \tag{2.24}$$

Λήμμα 2.3.1. *Γιά κάθε $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ ισχύουν οι σχέσεις*

$$\left(\nabla_X T\right) Y = \nabla_X TY - T\nabla_X Y, \tag{2.25}$$

$$\left(\pounds_X T\right) Y = \pounds_X TY - T\pounds_X Y. \tag{2.26}$$

Επίσης:

$$\nabla_Z T^\flat = (\nabla_Z T)^\flat\,, \tag{2.27}$$
$$(\pounds_Z T^\flat)(X,Y) = (\pounds_Z T)^\flat\,(X,Y) + (\pounds_Z g)\,(TX,Y)\,. \tag{2.28}$$

Απόδειξη. Γιά κάθε 1 -μορφή α είναι:

$$\begin{aligned}
\alpha\left(\left(\nabla_X T\right)Y\right) &= \left(\nabla_X T^1\right)(\alpha, Y) \\
&= \nabla_X T^1\,(\alpha, Y) - T^1 \nabla_X(\alpha, Y) \\
&= \nabla_X \alpha(TY) - T^1\left(\nabla_X \alpha, Y\right) - T^1\left(\alpha, \nabla_X Y\right) \\
&= \nabla_X \alpha(TY) - \left(\nabla_X \alpha\right)TY - \alpha\left(T\nabla_X Y\right) \\
&= \nabla_X \alpha(TY) - \nabla_X \alpha(TY) + \alpha \nabla_X TY - \alpha\left(T\nabla_X Y\right) \\
&= \alpha\left\{\nabla_X TY - T\nabla_X Y\right\}.
\end{aligned}$$

Όμοια αποδεικνύεται η 2.26.
Γιά την σχέση 2.27 παρατηρούμε ότι είναι:

$$\begin{aligned}
\left(\nabla_Z T\right)^\flat (X, Y) &= g\left(\left(\nabla_Z T\right)X, Y\right) \\
&= g\left(\nabla_Z TX - T\nabla_Z X, Y\right)\ \ (\mathbf{i})
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\left(\nabla_Z T^\flat\right)(X, Y) &= \nabla_Z T^\flat(X, Y) - T^\flat\left(\nabla_Z X, Y\right) - T^\flat\left(X, \nabla_Z Y\right) \\
&= \nabla_Z g\left(TX, Y\right) - g\left(T\nabla_Z X, Y\right) - g\left(TX, \nabla_Z Y\right) \\
&= g\left(\nabla_Z TX, Y\right) + g\left(TX, \nabla_Z Y\right) - g\left(T\nabla_Z X, Y\right) \\
&\quad - g\left(TX, \nabla_Z Y\right) \\
&= g\left(\nabla_Z TX - T\nabla_Z X, Y\right)\ \ (\mathbf{ii}).
\end{aligned}$$

Από τις (**i**) και (**ii**) προκύπτει η 2.27.

Γιά την 2.28 υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\left(\pounds_Z T^\flat\right)(X,Y) &= \pounds_Z T^\flat(X,Y) - T^\flat\left(\pounds_Z X, Y\right) - T^\flat\left(X, \pounds_Z Y,\right) \\
&= \pounds_Z g\left(TX,Y\right) - g\left(T\pounds_Z X, Y\right) - g\left(TX, \pounds_Z Y\right) \\
&= \left(\pounds_Z g\right)\left(TX,Y\right) + g\left(\pounds_Z TX, Y\right) + g\left(TX, \pounds_Z Y\right) \\
&- g\left(T\pounds_Z X, Y\right) - g\left(TX, \pounds_Z Y\right) \\
&= \left(\pounds_Z g\right)\left(TX,Y\right) + \left(\pounds_Z g\right)\left(\left(\pounds_Z T\right)X, Y\right) \\
&= \left(\pounds_Z g\right)\left(TX,Y\right) + \left(\pounds_Z T\right)^\flat\left(X,Y\right).
\end{aligned}$$

□

Σημείωση 2.3.2. *Η σχέση 2.25 σημαίνει ότι η πράξη της συναλλοίωτης παραγώγισης αντιμετατίθεται με την πράξη της ύφεσης $^\flat$ εν αντιθέσει πρός την πράξη της παραγώγισης κατά Lie, με την οποία δέν αντιμετατίθεται. Αυτό οφείλεται στό ότι η συναλλοίωτη παραγώγιση είναι συμβατή με την μετρική g ($\nabla g = 0$) ενώ η παράγωγος Lie δέν ικανοποιεί ανάλογη συνθήκη συμβατότητας.*

Τα ανωτέρω εφαρμόζονται σε τανυστές υψηλότερης τάξης. Θεωρούμε την καμπυλότητα Riemann ως τανυστικό πεδίο $R^\flat$ τύπου $(0,4)$ με:

$$R^\flat\left(u,v,w,z\right) = g\left(R\left(u,v\right)w,z\right) \tag{2.29}$$

γιά κάθε $u,v,w,z \in \mathcal{X}(M)$.

Υπολογίζουμε τις θεμελιώδεις εξισώσεις της θεωρίας υπερεπιφανειών. Είναι:

$$\begin{aligned}
\overline{R}\left(Ju,Jv\right)Jw &= \overline{\nabla}_{Ju}\overline{\nabla}_{Jv}Jw - \overline{\nabla}_{Jv}\overline{\nabla}_{Ju}Jw - \overline{\nabla}_{[Ju,Jv]}Jw \\
&= \overline{\nabla}_{Ju}\left\{J\nabla_v w + B\left(v,w\right)n\right\} - \overline{\nabla}_{Jv}\left\{J\nabla_u w + B\left(u,w\right)n\right\} \\
&- \overline{\nabla}_{J[u,v]}Jw \\
&= J\left\{\nabla_u\nabla_v w - \nabla_v\nabla_u w - \nabla_{[u,v]}w\right\} \\
&+ g\left(Su,w\right)JSv - g\left(Sv,w\right)JSu \\
&+ \left\{\left(\nabla_u B\right)\left(v,w\right) - \left(\nabla_v B\right)\left(u,w\right)\right\}n
\end{aligned}$$

συνεπώς

$$\begin{aligned}\overline{R}\left(Ju,Jv\right)Jw &= J\left\{R(u,v)w + g\left(Su,w\right)Sv - g\left(Sv,w\right)Su\right\}\\ &\quad + \left\{\left(\nabla_u B\right)\left(v,w\right) - \left(\nabla_v B\right)\left(u,w\right)\right\} n \end{aligned} \tag{2.30}$$

και αναλόγως

$$\overline{R}(Ju,Jv)n = J\left\{\nabla_u Sv - \nabla_v Su\right\}. \tag{2.31}$$

Μέ χρήση της 2.29 λαμβάνουμε τήν **εξίσωση Gauss** η οποία συνδέει τις καμπυλότητες περιβάλλουσας πολλαπλότητας και υπερεπιφάνειας,

$$\begin{aligned}\overline{R}^{\flat}\left(Ju,Jv,Jw,Jz\right) &= R^{\flat}\left(u,v,w,z\right) - B\left(u,z\right)B\left(v,w\right)\\ &\quad + B\left(v,z\right)B\left(u,w\right)\end{aligned} \tag{2.32}$$

και την **εξίσωση Codazzi**

$$\overline{R}^{\flat}\left(Ju,Jv,Jw,n\right) = \left(\nabla_u B\right)\left(v,w\right) - \left(\nabla_v B\right)\left(u,w\right). \tag{2.33}$$

Επειδή ισχύει $B = S^{\flat}$ η εξίσωση Codazzi 2.33 λαμβάνει την μορφή

$$\left(\nabla_v S\right)u - \left(\nabla_u S\right)v = \mathcal{P}\overline{R}\left(Ju,Jv\right)n, \tag{2.34}$$

γιά κάθε $u, v \in \mathcal{X}(M)$.

Έστω $f \in C^{\infty}(M)$ διαφορίσιμη συνάρτηση ορισμένη πάνω στην m διάστατη πολλαπλότητα (M,g). Ορίζεται η **Hessian** της f, ως πρός την μετρική g, ως η μορφή

$$\mathrm{Hess}_f(u,w) = g\left(\nabla_u \nabla f, w\right), \tag{2.35}$$

γιά κάθε $u,\, w \in \mathcal{X}(M)$.

Παρατηρούμε ότι:

$$u\left(w(f)\right) = g\left(\nabla_u \nabla f, w\right) + \left(\nabla_u w\right)(f)\ (\mathbf{a})$$

και

$$w\left(u(f)\right) = g\left(\nabla_w \nabla f, u\right) + \left(\nabla_w u\right)(f)\ (\mathbf{b}).$$

Από τις (**a**) και (**b**) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} g\left(\nabla_u \nabla f, w\right) - g\left(\nabla_w \nabla f, u\right) = \{uw - wu\}(f) \\ + \{\nabla_u w - \nabla_w u\}(f) = 0 \end{aligned}$$

λόγω της μηδενικότητος της στρέψης της Levi - Civita συνοχής. Συνεπώς η 2.35 ορίζει μιά συμμετρική μορφή.
Είναι επίσης σαφές ότι η Hessian της f, ως πρός την μετρική g, δίνεται και από την σχέση

$$\mathrm{Hess}_f(u, w) = \left(uw - \nabla_u w\right)(f). \tag{2.36}$$

Έστω $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ ορθοκανονικό πλαίσιο κυρίων διευθύνσεων με αντιστοιχούσες κύριες καμπυλότητες $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$ επί της υπερεπιφάνειας M. Τότε, η μέση καμπυλότητα H και η τρίτη θεμελιώδης μορφή III της M δίδονται από τις:

$$H = \frac{1}{m}\mathrm{trS} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} g\left(Se_k, e_k\right) = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\lambda_k, \tag{2.37}$$

και

$$III\left(u, v\right) = \sum_{k=1}^{m-1} g\left(Se_k, u\right) g\left(Se_k, v\right). \tag{2.38}$$

Ορίζεται η καμπυλότητα Ricci της υπερεπιφάνειας M ως πρός τό ίδιο ορθοκανονικό πλαίσιο κυρίων κατευθύνσεων ([24]) από την:

$$\mathrm{Ric}\left(u, w\right) = \sum_{k=1}^{m} g\left(R\left(u, e_k\right) e_k, w\right) = \sum_{k=1}^{m} R^\flat\left(u, e_k, e_k, w\right). \tag{2.39}$$

3 Κινηματική Υπερεπιφανειών

Στό τρέχον κεφάλαιο εισαγάγουμε τις θεμελιώδεις έννοιες της κινηματικής υπερεπιφανειών μέ την χρήση της μηχανικής του συνεχούς.

3.1 Βασικές κινηματικές έννοιες

Θεωρούμε συνεχές τό οποίο επιδέχεται αναπαράσταση αναφοράς περιγραφόμενη από μιά υπερεπιφάνεια M.

Ορισμός 3.1.1. Παραμόρφωση *υπερεπιφάνειας M της πολλαπλότητας Riemann N καλείται μιά εμφύτευση (embedding)*

$$\phi : M \ni X \to \phi(X) \in N$$

της M εντός της N.
Η εικόνα $\widetilde{M} = \phi(M)$ είναι η **παραμορφωμένη** *υπερεπιφάνεια.*

Ένα υλικό σημείο $X \in M$ καταλαμβάνει, μετά την επίδραση της παραμόρφωσης ϕ, την θέση $x = \phi(X)$ εντός της περιβάλλουσας πολλαπλότητας N.
Συμβολίζουμε με

$$\widetilde{\phi} : M \to \widetilde{M}$$

τήν επαγόμενη αμφιδιαφόριση μεταξύ των m - διάστατων πολλαπλοτήτων M και $\widetilde{M}$. Εάν

$$j : \widetilde{M} \to N$$

είναι η κανονική εμφύτευση της $\widetilde{M}$ εντός της N τότε

$$\phi = j \circ \widetilde{\phi}.$$

Θεωρούμε τα διαφορικά των απεικονίσεων ϕ, $\widetilde{\phi}$ και j:

$$F(X) = d\phi(X) : T_X M \to T_x N,$$

$$\widetilde{F}(X) = d\widetilde{\phi}(X) : T_X M \to T_x \widetilde{M},$$

$$J_x = dj_x : T_x \widetilde{M} \to T_{j(x)} N.$$

Τότε:

$$F(X) = J_x \widetilde{F}(X). \tag{3.1}$$

Η γραμμική απεικόνιση $F(X)$ καλείται **τανυστής παραμόρφωσης** στό σημείο X.

Ορισμός 3.1.2. *Μιά* **κίνηση** *της υπερεπιφάνειας M εντός της πολλαπλότητας Riemann N είναι μιά χρονικά εξαρτώμενη οικογένεια εμφυτεύσεων*

$$\{\phi_t : t \in I\},$$

όπου I ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$.
Ισοδύναμα, η κίνηση δίνεται από την απεικόνιση

$$\phi : M \times I \to N, \ x = \phi(X, t) = \phi_t(X).$$

Συμβολίζουμε με $M_t = \phi_t(M)$ την παραμορφωμένη υπερεπιφάνεια κατά την χρονική στιγμή t. Οι απεικονίσεις

$$\widetilde{\phi}_t : M \to M_t$$

τέτοιες ώστε

$$\phi_t = j_t \circ \widetilde{\phi}_t$$

είναι αμφιδιαφορίσεις γιά κάθε $t \in I$ και μάλιστα ισχύει

$$\phi(X,t) = j_t(\widetilde{\phi}(X,t)).$$

Έστω

$$\widetilde{F}(X,t) : T_X M \to T_x M_t$$

τό διαφορικό της $\widetilde{\phi}$ εις το σημείο X. Η απεικόνιση $j_t : M_t \to N$ είναι η κανονική εμφύτευση, κατά την χρονική στιγμή t, της υπερεπιφάνειας M_t και τό διαφορικό της είναι

$$J_t(x) = dj_t(x) : T_x M_t \to T_{j_t(x)} N.$$

Η ταχύτητα του υλικού σημείου X κατά την χρονική στιγμή t είναι η ταχύτητα $V(X,t)$ της καμπύλης

$$\phi_X : \mathbb{R} \ni t \to \phi_X(t) = \phi(X,t) \in N,$$

δηλαδή

$$V(X,t) = \frac{\partial}{\partial t}\phi_X(t).$$

Τό διανυσματικό **πεδίο ταχύτητας** της κίνησης είναι η απεικόνιση

$$V(\cdot,t) : M \to N,$$

δηλαδή $V \in \overline{\mathcal{X}}(M)$.
Η **χωρική ταχύτητα** στό σημείο $x = \phi(X,t)$ είναι τό διανυσματικό πεδίο

$$v(\cdot,t) : M_t \to TN$$

τό οποίο δίνεται από την

$$v(x,t) = V\left(\widetilde{\phi}_t^{-1}(x), t\right), \tag{3.2}$$

ή, ισοδύναμα,

$$V(X,t) = v\left(\widetilde{\phi}(X,t), t\right). \tag{3.3}$$

Ορισμός 3.1.3. *Η* **κλίση** *(gradient) διανυσματικού πεδίου $w \in \mathcal{X}(N)$ σε κάθε σημείο $x \in N$ ορίζεται ως η γραμμική απεικόνιση*

$$\overline{\nabla} w : T_x N \ni u \to \left(\overline{\nabla} w\right) u = \overline{\nabla}_u w \in T_x N, \tag{3.4}$$

Η **κλίση** *(gradient) διανυσματικού πεδίου $W \in \overline{\mathcal{X}}(M)$ ορίζεται σε κάθε σημείο $x \in M$ ως η γραμμική απεικόνιση*

$$\overline{\nabla} W : T_x M \ni Z \to \left(\overline{\nabla} W\right) Z = \overline{\nabla}_{JZ} W \in T_x N. \tag{3.5}$$

Ορισμός 3.1.4. *Έστω v τό διανυσματικό πεδίο ταχύτητος, η απεικόνιση*

$$G(x) = dv : T_x M_t \to T_{j(x)} N, \; G(x)u = dv(u) = \overline{\nabla}_{Ju} v = \overline{\nabla} v(Ju), \tag{3.6}$$

καλείται **κλίση ταχύτητας** *της κίνησης.*

Χρησιμοποιείται η σχετική περιγραφή της κίνησης μέσω της απεικόνισης

$$\phi_t(\cdot, \tau) : M_\tau \to N$$

η οποία αναπαριστάνει την παραμόρφωση, από μιά παρούσα κατά την χρονική στιγμή t αναπαράσταση M_t, σε μιά μελλοντική αναπαράσταση κατά την χρονική στιγμή τ, και είναι τέτοια ώστε:

$$\phi(X, \tau) = \phi_t\left(\widetilde{\phi}(X, t), \tau\right). \tag{3.7}$$

Επειδή τα σημεία X, x καθορίζονται από τις εμπλεκόμενες απεικονίσεις συχνά τα παραλείπουμε.

Η **τροχιά** του σημείου $x \in M_t$ (ή του $j(x) \in N$) δίνεται από την απεικόνιση

$$\phi_t(x) : \mathbb{R} \to N, \; \phi_t(x)(\tau) = \phi_t(x, \tau) \in N, \; \phi_t(x, t) = j_t(x). \tag{3.8}$$

Από την $\phi(\tau) = \phi_t(\tau) \circ \widetilde{\phi}_t$ προκύπτει:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}|_{\tau=t}\phi(X,\tau) = \frac{\partial}{\partial \tau}|_{\tau=t}\left\{\phi_t\left(\widetilde{\phi}(X,t),\tau\right)\right\}$$

οπότε

$$V(X,t) = v(\widetilde{\phi}(X,t),\tau)$$

συνεπώς

$$v(x,t) = V(\widetilde{\phi}^{-1}(x,t),t),$$

άρα η χωρική ταχύτητα η οποία ορίσθηκε προτύτερα από την σχέση 3.2 (ή ισοδύναμα από την σχέση 3.3) είναι τό διανυσματικό πεδίο τό οποίο είναι προσαρτημένο στην απεικόνιση $\phi_t(\cdot,\tau)$, δηλαδή:

$$v_x(t) = \frac{\partial}{\partial \tau}|_{\tau=t}\phi_t(x,\tau). \tag{3.9}$$

Συμβολίζουμε με $F(\tau)$, $F(t)$ τούς τανυστές παραμόρφωσης οι οποίοι αντιστοιχούν στις χρονικές στιγμές τ και t και με $F_t(\tau)(x_t)$ τό διαφορικό της

$$\phi_t(\cdot,\tau) : M_t \to N$$

στό σημείο $x_t = \widetilde{\phi}(X,t)$, δηλαδή:

$$F_t(\tau)(x_t) = d\phi_t(x_t,\tau) : T_{x_t}M \to T_{x_\tau}N,$$

τό οποίο καλείται **σχετικός τανυστής παραμόρφωσης**.
Μέ εναλλαγή χρονικής και χωρικής παραγώγου προκύπτει η παρακάτω έκφραση γιά την κλίση ταχύτητας:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \tau}|_{\tau=t}F_t(\tau)(x_t) &= \frac{\partial}{\partial \tau}|_{\tau=t}d\phi_t(x_t,\tau)\\ &= d\frac{\partial}{\partial \tau}|_{\tau=t}\phi_t(x_t,\tau) = dv,\end{aligned}$$

δηλαδή

$$G = \frac{\partial}{\partial \tau}|_{\tau=t}F_t(\tau)(x_t) = dv. \tag{3.10}$$

3.2 Θεώρημα πολικής ανάλυσης

Τό θεώρημα πολικής ανάλυσης, όπως είδαμε και στό Κεφάλαιο 1, έχει μιά μακρά ιστορία στην μηχανική του συνεχούς μέσου. Στήν παρούσα ενότητα γενικεύουμε τό θεώρημα πολικής ανάλυσης, το αναδιατυπώνουμε και αποδεικνύουμε την εκδοχή του σε πολλαπλότητες, δίνοντας έμφαση στα πεδία ορισμού και στα σύνολα τιμών των εμπλεκόμενων απεικονίσεων.

Θεώρημα 3.2.1. **(Θεώρημα πολικής ανάλυσης γιά υπερεπιφάνειες)**
Έστω $\phi : M \to N$ παραμόρφωση υπερεπιφάνειας M, με $\phi(X) = x$. Τότε, γιά κάθε σημείο $X \in M$ υπάρχει μοναδικός ισομετρικός γραμμικός μετασχηματισμός

$$R(X) : T_{j(X)}N \to T_xN,$$

δηλαδή

$$R^T(X)R(X) = I_{T_{j(X)}N}, \text{ and } R(X)R^T(X) = I_{T_xN}$$

όπου $I_{T_{j(X)}N}$, I_{T_xN} οι ταυτοτικές απεικονίσεις επί των $T_{j(X)}N$ και T_xN, αντίστοιχα, τέτοια ώστε

$$F(X) = R(X)J_XU(X), \tag{3.11}$$

όπου

$$U(X)^2 = \widetilde{F}^T(X)\widetilde{F}(X) = F^T(X)F(X) : T_XM \to T_XM$$

συμμετρικός, θετικώς ορισμένος γραμμικός μετασχηματισμός.
Επιπρόσθετα, τα μοναδιαία καθετικά διανύσματα, $n(X)$ της αρχικής υπερεπιφάνειας στό σημείο X και $n(x)$ της $\phi(M)$ στό σημείο x συνδέονται μέσω της

$$n(x) = R(X)n(X).$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τα καθετικά μοναδιαία διανύσματα N, n των $J_X(T_XM)$ και $J_x(T_x\widetilde{M})$, αντίστοιχα.

Επιλέγουμε $\{e_1, \ldots, e_m\}$ ορθοκανονική βάση του $T_X M$ τέτοια ώστε $\{J_X e_1, \ldots, J_X e_m, N\}$ αποτελεί ορθοκανονική βάση του $T_{j(X)}N$.

Μέ εφαρμογή της κλασσικής εκδοχής του θεωρήματος πολικής ανάλυσης μεταξύ των χώρων $T_X M$, $T_x\widetilde{M}$ (θεωρούμενων ως n - διάστατων διανυσματικών χώρων) παίρνουμε την ανάλυση

$$\widetilde{F}(X) = \widetilde{\mathcal{R}}(X)U(X)$$

όπου

$$\widetilde{\mathcal{R}}(X) : T_X M \to T_x\widetilde{M}$$

ορθογώνιος απεικόνιση και

$$U(X) : T_X M \to T_X M$$

συμμετρικός, θετικός ορισμένος γραμμικός μετασχηματισμός.
Επειδή η απεικόνιση $\widetilde{\mathcal{R}}(X)$ είναι ορθογώνια, τό σύνολο $\{\widetilde{\mathcal{R}}(X)e_1, \ldots, \widetilde{\mathcal{R}}(X)e_m\}$ συνιστά ορθοκανονική βάση του χώρου $T_x\widetilde{M}$.
Ισχυριζόμαστε ότι τό σύνολο

$$\{J_x \circ \widetilde{\mathcal{R}}(X)e_1, J_x \circ \widetilde{\mathcal{R}}(X)e_2, \ldots, J_x \circ \widetilde{\mathcal{R}}(X)e_m, \mathbf{n}\}$$

συνιστά ορθοκανονική βάση του $T_x N$.
Πράγματι, εάν συμβολίσουμε με $\widetilde{g_x}$ τόν μετρικό τανυστή επί του $\widetilde{M}$ εις τό σημείο $x = \phi(X)$ και με g_x τόν μετρικό τανυστή έπί του $T_x N$, τότε, από την ορθογωνιότητα της $\widetilde{\mathcal{R}}$, προκύπτει:

$$\widetilde{g_x}\left(J_x \circ \widetilde{\mathcal{R}}(X)e_i, J_x \circ \widetilde{\mathcal{R}}(X)e_j\right) = g_x(\widetilde{\mathcal{R}}(X)e_i, \widetilde{\mathcal{R}}(X)e_j) = \delta_{ij},$$
$$\widetilde{g_x}\left(J_x \circ \widetilde{\mathcal{R}}(X)e_i, n\right) = g_x(\widetilde{\mathcal{R}}(X)e_i, \mathcal{P}n) = 0.$$

Θεωρούμε τήν ορθογώνια απεικόνιση $R_I : T_{j(X)}N \to T_x N$ τέτοια ώστε

$$R_I(N) = n$$

και μελετάμε την δράση της R_I επί των στοιχείων $\{J_X e_i\}_{i=1}^n$. Είναι:

$$\begin{aligned}\overline{g}_x(R_I J_X e_i, n) &= \overline{g}_{j(X)}(J_X e_i, R_I^T n)\\ &= \overline{g}_{j(X)}(J_X e_i, N) = 0\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\overline{g}_x(R_I J_X e_i, R_I J_X e_j) &= g_x(J_X e_i, R_I^T R_I J_X e_j)\\ &= g_X(e_i, e_j) = \delta_{ij},\end{aligned}$$

συνεπώς, τα διανύσματα $\{R_I J_X e_i\}_{i=1}^m$ είναι στοιχεία του χώρου $J_x T_x(\widetilde{M})$ και συνιστούν ορθοκανονική βάση.
Τότε, υπάρχει ορθογώνιος μετασχηματισμός $R_2 \in \mathrm{Orth}(T_x N, T_x N)$ τέτοιος ώστε η R_2 να απεικονίζει την βάση $\{R_I J_X e_i\}$ στην βάση $\{J_x \widetilde{\mathcal{R}} e_i\}_{i=1}^m$.
Ορίζουμε τόν ορθογώνιο μετασχηματισμό

$$R = R_2 \cdot R_I$$

έτσι ώστε

$$\begin{aligned}R(N) &= n,\\ R J_X e_i &= J_x \mathcal{R} e_i.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι γιά την συγκεκριμένη επιλογή στροφής η σχέση 3.11 ικανοποιείται.
Γιά την μοναδικότητο, θεωρούμε ορθογώνιους μετασχηματισμούς

$$R_1, R_2 : T_X N \to T_x N$$

τέτοιοι ώστε γιά $k = 1, 2$:

$$\begin{aligned}R_k(N) &= n,\\ R_k J_X(e_i) &= J_x \mathcal{R} e_i.\end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι, αφού οι απεικονίσεις R_1, R_2 ταυτίζονται πάνω σε μιά ορθοκανονική βάση του περιβάλλοντος χώρου, θα ταυτίζονται πάνω σε όλο τόν χώρο. Η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Με εφαρμογή του παραπάνω θεωρήματος 3.2.1 στόν σχετικό τανυστή παραμόρφωσης $F_t(\tau) : T_{x_t}M_t \to T_{x_\tau}N$ παίρνουμε:

$$F_t(\tau) = R_t(\tau) J_t U_t(\tau), \tag{3.12}$$

όπου

$$C_t(\tau)^2 = U_t^2(\tau) = F_t^T(\tau) F_t(\tau) : T_x M_t \to T_x M_t$$

ο **σχετικός δεξιός τανυστής Green** και

$$R_t(\tau) : T_{x_t}N \to T_{x_\tau}N$$

ο **σχετικός τανυστής στροφής**, με $x_t = j_t(x)$ και $x_\tau = \phi_t(\tau)(x)$. Επιπλέον, τα μοναδιαία καθετικά διανυσματικά πεδία $n(t)$ επί της M_t και $n(\tau)$ επί της M_τ σχετίζονται μέσω της στροφής $R_t(\tau)$ ώς εξής:

$$n(\tau) = R_t(\tau) n(t). \tag{3.13}$$

Εάν $\tau = t$, τότε έχουμε:

$$F_t(t) = J_t,\ R_t(t) = I_{T_{x_t}N},\ U_t(t) = I_{T_x M_t} \tag{3.14}$$

και από την $\phi(\tau) = \phi_t(\tau) \circ \widetilde{\phi}_t$ προκύπτει:

$$F(\tau) = F_t(\tau) \widetilde{F}(t) = F_t(\tau) \mathcal{P}_t F(t). \tag{3.15}$$

Ορισμός 3.2.2. *Ο* **ρυθμός παραμόρφωσης** *της κίνησης στό σημείο $x \in M_t$ ορίζεται ως η απεικόνιση*

$$\mathcal{D}(t) : T_x M_t \to T_x M_t,$$

με

$$\mathcal{D}(t) = \frac{\partial U_t(\tau)}{\partial \tau}|_{\tau=t} = \frac{1}{2} \frac{\partial C_t(\tau)}{\partial \tau}|_{\tau=t}. \tag{3.16}$$

Χρησιμοποιώντας την σχετική κίνηση $\phi_t(\cdot, \tau) : M_t \to N$ και γιά κάθε $u \in \mathcal{X}(M_t)$, τό διανυσματικό πεδίο $J_t u$ ορίζει ένα διανυσματικό πεδίο $\overline{u} \in \mathcal{X}(N)$ τέτοιο ώστε:

$$\overline{u}\,(\phi_t(x, \tau)) = F_t(\tau)(x) u(x),\ \overline{u}(j(x)) = J_t(u). \tag{3.17}$$

Από κατασκευής της επέκτασης $\overline{u}$ του $J_t u$, μέσω του σχετικού διαφορικού της κίνησης, προκύπτει ότι κατά την κατεύθυνση του πεδίου ταχύτητας v, ισχύει:

$$\pounds_v \overline{u} = 0. \tag{3.18}$$

Τό μοναδιαίο καθετικό πεδίο n επί της M_t ορίζει μέσω της σχέσης 3.13 ένα διανυσματικό πεδίο $\overline{n}$ επί της N τέτοιο ώστε

$$\overline{n}\left(\phi_t(x,\tau)\right) = R_t(\tau)(x)n(x),\ \overline{n}(x) = n(x). \tag{3.19}$$

Επισήμανση 3.2.3. *Επειδή κατά την χρονική στιγμή $\tau = t$ έχουμε $\overline{u} = Ju$ και $\overline{n}(x) = n(x)$ και η συναλλοίωτη παράγωγος $\overline{\nabla}_{\overline{u}} w$, στο σημείο x, εξαρτάται από τό διανυσματικό πεδίο w και από την τιμή της επέκτασης $\overline{u}$ στό σημείο x, προκύπτει*

$$\overline{\nabla}_{\overline{u}} w = \overline{\nabla}_{Ju} w.$$

Αναλόγως,

$$\overline{\nabla}_{\overline{n}} w = \overline{\nabla}_{n} w,$$

γιά κάθε $w \in \overline{\mathcal{X}}(M)$.

Εφαρμόζοντας την 3.18 λαμβάνουμε μιά επιπλέον έκφραση η οποία αφορά την κλίση ταχύτητας:

$$Gu = \overline{\nabla}_{Ju} v = \overline{\nabla}_{\overline{u}} v = \overline{\nabla}_v \overline{u}. \tag{3.20}$$

Θεωρώντας ένα σταθερό σημείο $x \in M_t$ τα πεδία $\overline{u}$ και $\overline{n}$, εάν τα περιορίσουμε κατά μήκος της τροχιάς $\phi_t(x)(\tau)$ του x, παρέχουν τα τ - εξαρτώμενα διανυσματικά πεδία:

$$\begin{aligned} u_t(\tau) &= \overline{u}\left(\phi_t(x)(\tau)\right), \\ n_t(\tau) &= \overline{n}\left(\phi_t(x)(\tau)\right). \end{aligned}$$

Οι χρονικές παράγωγοι των παραπάνω πεδίων δίδονται, σύμφωνα πρός τό [28], με την χρήση της παράλληλης μεταφοράς της περιβάλλουσας πολλαπλότητος N (ή αλλιώς, της συναλλοίωτης παραγώγου του περιβάλλοντος χώρου):

$$\frac{\partial u_t(\tau)}{\partial \tau}|_{\tau=t} = \overline{\nabla}_v \overline{u}|_{j(x)}, \tag{3.21}$$

$$\frac{\partial n_t(\tau)}{\partial \tau}|_{\tau=t} = \overline{\nabla}_v \overline{n}|_{j(x)}. \tag{3.22}$$

Η συγκεκριμένη μέθοδος εφαρμόζεται σε κάθε πεδίο A επί της M_t τό οποίο ορίζει, όπως δείξαμε προτύτερα, επέκταση $\overline{A}$ πάνω στην N.
Η χρονική παράγωγος τού περιορισμού του $\overline{A}$, επί της τροχιάς ενός σημείου $x \in M_t$, δίδεται από την σχέση:

$$\frac{\partial A_t(\tau)}{\partial \tau}|_{\tau=t} = \overline{\nabla}_v \overline{A}|_{j(x)}. \tag{3.23}$$

Η χρονική παράγωγος

$$W(t) = \frac{\partial R_t(\tau)}{\partial \tau}|_{\tau=t} = \overline{\nabla}_v R_t(\tau)|_{j(x)} : T_{j(x)}N \to T_{j(x)}N \tag{3.24}$$

του τανυστικού πεδίου στροφής $R_t(\tau)$ ορίζεται γιά κάθε $x \in M_t$, κατά μήκος της τροχιάς του σημείου x, είναι αντισυμμετρικό τανυστικό πεδίο και καλείται **ρυθμός περιστροφής** (*spin*) της κίνησης.

Μέ χρήση των 3.12, 3.14 και σε συνδυασμό με την 3.24 έχουμε την επόμενη:

Πόρισμα 3.2.4. *Η κλίσης ταχύτητας αναλύεται ως εξής:*

$$G = J\mathcal{D} + WJ. \tag{3.25}$$

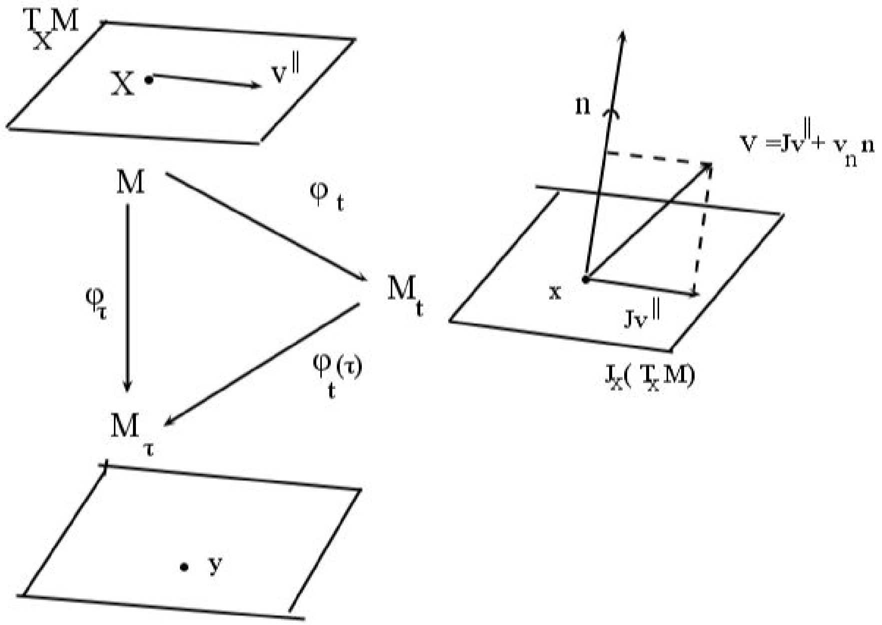
Σημείωση 3.2.5. *Ο τύπος 3.25 είναι ο ανάλογος του τύπου 1.28 ο οποίος ισχύει γιά την κίνηση 3 -διάστατων σωμάτων μέσα στόν Ευκλείδιο χώρο $\mathbb{E}$.*

Στό επόμενο λήμμα παρουσιάζονται χρήσιμοι τύποι οι οποίοι συσχετίζουν τις κινηματικές ποσότητες G, $\mathcal{D}$ και W με τα γεωμετρικά μεγέθη της υπερεπιφάνειας.

Θεωρούμε την ανάλυση του διανυσματικού πεδίου ταχύτητος της υπερεπιφάνειας v στήν εφαπτομενική και στήν καθετική συνιστώσα (Σχ: 3.1)

$$v = v_{||} + v_n n = Jv^{||} + v_n n,$$

όπου $v^{||} \in \mathcal{X}(M_t)$, $v_{||} \in \mathcal{X}(j_t(M_t))$ και $v_n = \overline{g}(v, n)$.



Σχήμα 3.1: Σχετική κίνηση - Ανάλυση Ταχύτητας

Γιά δοθείσα - σταθερή χρονική στιγμή t τα διανυσματικά πεδία $v_{||}$ και $v^{||}$ είναι χρονικώς ανεξάρτητα. Επίσης, η συνάρτηση

$$v_n : j_t(M_t) \to \mathbb{R}$$

είναι διαφορίσιμη. Η συνάρτηση

$$\widetilde{v}_n = v_n \circ j : M_t \to \mathbb{R}$$

έχει τις ίδιες τιμές με την v_n στα αντίστοιχα σημεία και προφανώς, γιά κάθε $u \in T_x M_t$, ισχύουν οι:

$$\begin{aligned} d\widetilde{v}_n &= dv_n J, \\ \overline{\nabla} v_n &= J \nabla \widetilde{v}_n, \\ Ju(v_n) &= u(v_n \circ j). \end{aligned} \tag{3.26}$$

Λήμμα 3.2.6. *Γιά σταθερή χρονική στιγμή t θεωρούμε την σχετική κίνηση $\phi_t(\tau)$ της υπερεπιφάνειας M_t , με διανυσματικό πεδίο ταχύτητας v τό οποίο αναλύεται σε εφαπτομενικό και καθετικό μέρος ως πρός την M_t ως εξής:*

$$v = v_{||} + v_n n = Jv^{||} + v_n n,$$

με $v^{||} \in \mathcal{X}(M_t)$. Τότε, ισχύουν οι:

$$C_t^\flat(\tau) = \phi_t^\star(\tau)\overline{g}, \tag{3.27}$$

$$2\mathcal{D} = \mathcal{P}G + (\mathcal{P}G)^T, \tag{3.28}$$

$$Gu = J\left\{\nabla v^{||} - v_n S\right\} u + \left\{B(u, v^{||}) + Ju(v_n)\right\} n \tag{3.29}$$

$$\mathcal{P}G = \nabla v^{||} - v_n S, \tag{3.30}$$

$$\pounds_{v^{||}} g = \left(\nabla v^{||} + (\nabla v^{||})^T\right)^\flat, \tag{3.31}$$

$$2\mathcal{D} = \nabla v^{||} + (\nabla v^{||})^T - 2v_n S, \tag{3.32}$$

$$2\mathcal{D}^\flat = \pounds_{v^{||}} g - 2v_n B, \tag{3.33}$$

$$WJu = J\left(\frac{\nabla v^{||} - (\nabla v^{||})^T}{2}\right) + \left(B(u, v^{||}) + Ju(v_n)\right) n, \tag{3.34}$$

$$\mathcal{P}WJ = \frac{1}{2}\left(\nabla v^{||} - (\nabla v^{||})^T\right). \tag{3.35}$$

Απόδειξη. Εξ' ορισμού είναι $C_t(\tau) = F_t^T(\tau) F_t(\tau)$, έπεται

$$\begin{aligned} C_t^\flat(\tau)(u, w) &= g\left(F_t^T(\tau) F_t(\tau) u, w\right) \\ &= \overline{g}\left(F_t(\tau) u, F_t(\tau) w\right) \\ &= \phi_t^\star(\tau)\overline{g}(u, w) \end{aligned}$$

και η 3.27 αποδείχθηκε.
Για την 3.28 παρατηρούμε ότι με χρήση της 3.25 και της αντισυμμετρικότητας του W προκύπτει

$$\begin{aligned} \mathcal{P}G &= \mathcal{D} + \mathcal{P}WJ, \\ (\mathcal{P}G)^T &= \mathcal{D} - \mathcal{P}WJ, \end{aligned}$$

άρα

$$2\mathcal{D} = \mathcal{P}G + (\mathcal{P}G)^T,$$

δηλαδή η 3.28.
Με χρήση της ανάλυσης $v = Jv^{||} + v_n n$ λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} Gu &= \overline{\nabla}_{Ju} v \\ &= \overline{\nabla}_{Ju} Jv^{||} + \overline{\nabla}_{Ju}\{v_n n\} \\ &= J\nabla_u v^{||} + B(u, v^{||})n + v_n \overline{\nabla}_{Ju} n + ju(v_n)n \\ &= J\left\{\nabla_u v^{||} - v_n Su\right\} + \left\{B(u, v^{||}) + Ju(v_n)\right\} n \end{aligned}$$

η 3.29 αποδείχθηκε.
Με εφαρμογή της προβολής $\mathcal{P}$ στην 3.29 προκύπτει η 3.30.
Εάν θεωρήσουμε την συναλλοίωτη παράγωγο $\nabla v^{||}$, σε κάθε σημείο $x \in M_t$, ως γραμμική απεικόνιση

$$\nabla v^{||} : T_x M_t \in u \to \nabla_u v^{||} \in T_x M_t,$$

έχουμε:

$$\begin{aligned} \left(\pounds_{v^{||}} g\right)(u, w) &= \pounds_{v^{||}} g(u, w) - g\left(\pounds_{v^{||}} u, w\right) - g\left(u, \pounds_{v^{||}} w\right) \\ &= v^{||}\left(g\left(u, w\right)\right) - g\left(\nabla_{v^{||}} u - \nabla_u v^{||}, w\right) - g\left(u, \nabla_{v^{||}} w - \nabla_w v^{||}\right) \\ &= g\left(\nabla_{v^{||}} u, w\right) + g\left(u, \nabla_{v^{||}} u\right) - g\left(\nabla_{v^{||}} u - \nabla_u v^{||}, w\right) \\ &- g\left(u, \nabla_{v^{||}} w - \nabla_w v^{||}\right) \\ &= g\left(\nabla_u v^{||}, w\right) + g\left(u, \nabla_w v^{||}\right) \\ &= g\left(\left(\nabla v^{||} + (\nabla v^{||})^T\right) u, w\right) \end{aligned}$$

γιά κάθε $u, w \in \mathcal{X}(M_t)$. Η 3.31 αποδείχθηκε.
Η 3.32 είναι άμεση απόρροια των σχέσεων 3.28 και 3.30.
Από την 3.31 παίρνουμε:

$$2\mathcal{D}^\flat = \left\{\nabla v^{||} - (\nabla v^{||})^T\right\}^\flat - 2v_n S^\flat,$$

όπου $S^\flat = B$ και σε συνδυασμό με την 3.32 προκύπτει η 3.33.
Από τίς 3.25 και 3.32 έχουμε:

$$\begin{aligned}
WJu &= Gu - J\mathcal{D}u \\
&= J\left\{\nabla_u v^{||} - v_n S\right\} u + \left\{B(u, v^{||}) + Ju(v_n)\right\} n \\
&- J\left\{\frac{\nabla v^{||} + (\nabla v^{||})^T}{2}\right\} u + v_n JSu \\
&= J\frac{1}{2}\left\{\nabla v^{||} - (\nabla v^{||})^T\right\} u + \left\{B(u, v^{||}) + Ju(v_n)\right\} n
\end{aligned}$$

δηλαδή η 3.34. Μέ εφαρμογή της προβολής $\mathcal{P}$ στην 3.34 λαμβάνουμε την 3.35. □

Στην συνέχεια, χρησιμοποιώντας τόν ορισμό του **στροβιλισμού** $\operatorname{curl} X$ ([4], σελ. 137 ή [41], σελ. 141) διανυσματικού πεδίου $X \in \mathcal{X}(M)$:

$$(\operatorname{curl} X)^\flat(u, w) = g(\nabla_w X, u) - g(\nabla_u X, w) \tag{3.36}$$

δίνουμε τό παρακάτω:

Πόρισμα 3.2.7. *Ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:*

$$2\mathcal{P}WJ = \mathcal{P}G - (\mathcal{P}G)^T = -\operatorname{curl} v^{||}. \tag{3.37}$$

Απόδειξη. Πράγματι, από την 3.35 προκύπτει:

$$\begin{aligned}
2g(\mathcal{P}WJu, w) &= g\left(\left\{\nabla v^{||} - \nabla v^{||^T}\right\} u, w\right) \\
&= g(\nabla_u v^{||}, w) - g(\nabla_w v^{||}, u)
\end{aligned}$$

οπότε με χρήση της 3.36 λαμβάνουμε την 3.37. □

3.3 Χρονικά μεταβαλλόμενη γεωμετρία υπερεπιφάνειας

Γιά την μελέτη της μεταβολής γεωμετρικών αντικειμένων τα οποία ορίζονται πάνω σε υπερεπιφάνεια M_t εργαζόμαστε ως εξής:

Μέ χρήση της κίνησης, ποσότητες οριζόμενες πάνω σε μιά *στιγμιαία* υπερεπιφάνεια M_τ, με εφαρμογή pull - back, μεταφέρονται πάνω στην M_t. Κατά τόν τρόπο αυτό ορίζονται οι τ - εξαρτώμενες ποσότητες επί της M_t:

Η τ – εξαρτώμενη μετρική $g_t(\tau)$:

$$g_t(\tau)(u, w) = \overline{g}\left(F_t(\tau)u, F_t(\tau)w\right) \tag{3.38}$$

$$g_t(\tau) = \phi_t^\star(\tau)\overline{g} = C_t^\flat(\tau). \tag{3.39}$$

Ο τ – εξαρτώμενος τελεστής σχήματος $S_t(\tau)$:

$$S_t(\tau)u = -\widetilde{F}_t^{-1}(\tau)\mathcal{P}_\tau\overline{\nabla}_{F_t(\tau)u}n(\tau), \tag{3.40}$$

γιά τόν οποίο ισχύει

$$F_t(\tau)S_t(\tau)u = -\overline{\nabla}_{F_t(\tau)u}n(\tau). \tag{3.41}$$

Η τ – εξαρτώμενη δεύτερη θεμελιώδης μορφή $B_t(\tau)$:

$$B_t(\tau)(u, w) = g_t(\tau)\left(S_t(\tau)u, w\right) \tag{3.42}$$

Η τ – εξαρτώμενη τρίτη θεμελιώδης μορφή $III_t(\tau)$:

$$III_t(\tau)(u, w) = g_t(\tau)\left(S_t^2(\tau)u, w\right) \tag{3.43}$$

Οι τ – εξαρτώμενες Gauss – Kronecker καμπυλότητα $K_t(\tau)$ και μέση καμπυλότητα $H_t(\tau)$:

$$K_t(\tau)_t(\tau)(u,w) = \mathrm{det}S_t(\tau),\ \ mH_t(\tau) = \mathrm{tr}S_t(\tau), \tag{3.44}$$

Τό τ – εξαρτώμενο εμβαδικό στοιχείο $\omega_t(\tau)$:

$$\omega_t(\tau)(u_1, u_2, \ldots, u_m) = \overline{\omega}_N\left(F_t(\tau)u_1, F_t(\tau)u_2, \ldots, F_t(\tau)u_m\right) \tag{3.45}$$

όπου $\overline{\omega}_N$ τό εμβαδικό στοιχείο επί της περιβάλλουσας πολλαπλότητος N.
Ισοδύναμα, είναι δυνατόν να ορίσουμε το εμβαδικό στοιχείο $\omega_t(\tau)$ μέσω της σχέσης

$$\omega_t(\tau) = \sqrt{\mathrm{det}g_t(\tau)}, \tag{3.46}$$

όπου $g_t(\tau)$ ο μετρικός τανυστής ο οποίος ορίσθηκε προτύτερα με την 3.38.

Η τ - εξαρτώμενη Levi - Civita συνοχή $\nabla_t(\tau)$ επί της υπερεπιφάνειας M_t μέσω της

$$F_t(\tau)\nabla_t(\tau)(u,w) = \pi_\tau \overline{\nabla}_{F_t(\tau)u} F_t(\tau)w, \tag{3.47}$$

ή, ίσοδύναμα, μέσω της

$$F_t(\tau)\nabla_t(\tau)(u,w) = \overline{\nabla}_{F_t(\tau)u} F_t(\tau)w - \overline{g}\left(\overline{\nabla}_{F_t(\tau)u} F_t(\tau)w, n(\tau)\right) n(\tau) \tag{3.48}$$

Ο τ - εξαρτώμενος τανυστής καμπυλότητας Riemann $R_t(\tau)$ ορίζεται μέσω της

$$R_t(\tau)(u,w)z = \nabla_t(\tau)_u \nabla_t(\tau)_w z - \nabla_t(\tau)_w \nabla_t(\tau)_u z - \nabla_t(\tau)_{[u,w]} z \tag{3.49}$$

ή, ισοδύναμα με χρήση της έκφρασης

$$\begin{aligned}\overline{R}(Ju, Jw)Jz = {} & J_t R_t(\tau)(u, w)z + g_t(\tau)(S_t(\tau)u, z)J_t S_t(\tau)w \\ & - g_t(\tau)(S_t(\tau)w, z)J_t S_t(\tau)u \\ & + \{(\nabla_t(\tau)(u, B_t(\tau))(w, z)) - (\nabla_t(\tau)(w, B_t(\tau))(u, z))\}\, n(\tau),\end{aligned} \tag{3.50}$$

γιά κάθε $u, w, z \in \mathcal{X}(M)$, όπου $\overline{R}$ ο τανυστής καμπυλότητας Riemann της περιβάλλουσας πολλαπλότητας N.

Όταν $\tau = t$ οι ποσότητες, τις οποίες ορίσαμε, συμπίπτουν με τις υφιστάμενες πάνω στην υπερεπιφάνεια M_t, δηλαδή:

$$\begin{aligned} & g_t(t) = g(t),\ S_t(t) = S(t),\ B_t(t) = B(t), \\ & K_t(t) = K(t),\ H_t(t) = H(t), \\ & \omega_t(t) = \omega,\ \nabla_t(t) = t, R_t(t) = R. \end{aligned}$$

Όλες οι ανωτέρω ποσότητες ορίζονται πάνω στην ίδια υπερεπιφάνεια M_t συνεπώς, η μεταβολή οιασδήποτε εξ' αυτών, επί παραδείγματι της $Q_t(\tau)$, δίνεται μέ χρήση του τύπου:

$$\delta Q(t) = \frac{\partial Q_t(\tau)}{\partial \tau}|_{\tau=t}. \tag{3.51}$$

Επειδή τό μοναδιαίο καθετικό πεδίο έχει τιμές στήν TN, προκειμένου να ορίσουμε την μεταβολή του του πάνω στην M_t, χρησιμοποιείται η έκφραση 3.22

$$\frac{\partial n_t(\tau)}{\partial \tau}|_{\tau=t} = \overline{\nabla}_v \overline{n}|_{j(x)}.$$

Επισήμανση 3.3.1. *Στην περίπτωση του ορισμού του τανυστή καμπυλότητας στην εξίσωση 3.50 έγινε χρήση του γεγονότος ότι ο τ - εξαρτώμενος τανυστής καμπυλότητας $R_t(\tau)$ πάνω στην M_t θα είναι ο τανυστής καμπυλότητας πού παράγεται από την μοναδική συνοχή Levi - Civita $\nabla_t(\tau)$ η οποία αντιστοιχεί στην μετρική $g_t(\tau)$.*
Θα πρέπει λοιπόν τό ζεύγος τανυστών καμπυλότητας, $\overline{R}$ της περιβάλλουσας πολλαπλότητας N και $R_t(\tau)$ της υπερεπιφάνειας $(M_t, g_t(\tau), \nabla_t(\tau))$,

να ικανοποιεί την θεμελιώδη εξίσωση Gauss η οποία προσδιορίζει την σχέση η οποία τούς διέπει.

4 Μεταβολές γεωμετρικών μεγεθών

Στην κεφάλαιο αυτό γίνεται η παραγωγή των εξελικτικών εξισώσεων των γεωμετρικών μεγεθών μιάς κινούμενης υπερεπιφάνειας.
Συγκεκριμένα, αποδεικνύουμε τύπους γιά την μεταβολή του μετρικού τανυστή, του μοναδιαίου καθετικού πεδίου της υπερεπιφάνειας, του τελεστή σχήματος, της δεύτερης - τρίτης θεμελιώδους μορφής, των κυρίων καμπυλοτήτων, της καμπυλότητας Gauss, της μέσης καμπυλότητας και τέλος την μεταβολή της συνοχής Levi - Civita και τού τανυστή καμπυλότητας Riemann.
Αποδεικνύεται ότι οι τύποι μεταβολής γιά την μετρική και τό μοναδιαίο καθετικό διάνυσμα έχουν τήν ίδια έκφραση, όπως οι ανάλογοι τύποι οι οποίοι ισχύουν γιά την περίπτωση επιφάνειας του συνήθους Ευκλείδιου χώρου, ενώ οι εξισώσεις μεταβολής της δεύτερης και τρίτης θεμελιώδους μορφής διαφοροποιούνται, εν σχέσει πρός τούς ανάλογους γιά επιφάνεια του Ευκλείδιου χώρου, κατά έναν όρο ο οποίος εμπλέκει τόν τανυστή καμπυλότητας Riemann της περιβάλλουσας πολλαπλότητος.
Οι τύποι μεταβολής οι οποίες προκύπτουν δίνονται σε διττή μορφή, με χρήση κινηματικών μεγεθών αλλά και με χρήση γεωμετρικών μεγεθών. Θεωρούμε ότι η εισαγωγή των κινηματικών πεδίων στίς εξελικτικές εξισώσεις της γεωμετρίας συνεισφέρει στην καλύτερη ερμηνεία και κατανόηση της κινηματικής συμπεριφοράς της υπερεπιφάνειας.

4.1 Μεταβολή μετρικής και καθετικού διανυσματικού πεδίου

Η επόμενη πρόταση δίνει τις μεταβολές του μετρικού τανυστή και του μοναδιαίου καθετικού πεδίου υπερεπιφάνειας.

Πρόταση 4.1.1. *Οι μεταβολές του μετρικού τανυστή και του μοναδιαίου καθετικού διανυσματικού πεδίου επί της M_t, δίδονται αντίστοιχα από τις παρακάτω σχέσεις:*

$$\begin{aligned}\delta g &= 2\mathcal{D}^\flat &(4.1)\\ &= \mathcal{P}_t \pounds_v \overline{g} &(4.2)\\ &= -2v_n B + \pounds_{v^{||}} g, &(4.3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta n &= Wn &(4.4)\\ &= \overline{\nabla}_v \overline{n} &(4.5)\\ &= -J\nabla v_n - JSv^{||}. &(4.6)\end{aligned}$$

Απόδειξη. Με χρήση της σχέσης 3.38 γιά την τ εξαρτώμενη μετρική επί της M_t έχουμε:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q_t(\tau)}{\partial \tau}|_{\tau=t} g_t(\tau)(u,w) &= \frac{\partial Q_t(\tau)}{\partial \tau}|_{\tau=t} \overline{g}\left(F_t(\tau)u, F_t(\tau)w\right)\\ &= \frac{\partial Q_t(\tau)}{\partial \tau}|_{\tau=t} g\left(F_t^T(\tau)F_t(\tau)u, w\right)\\ &= \frac{\partial Q_t(\tau)}{\partial \tau}|_{\tau=t} g\left(U_t^2(\tau)u, w\right)\\ &= 2g\left(\mathcal{D}u, w\right)\\ &= 2\mathcal{D}^\flat\left(u, w\right)\end{aligned}$$

δηλαδή η 4.1. Η 4.2 είναι άμεση απόρροια της 3.27. Από την 3.32 προκύπτει:

$$\begin{aligned}2\mathcal{D}^\flat(u,w) &= g\left(\nabla_u v^{||}, w\right) + g\left(u, \nabla_w v^{||}\right) - 2v_n g\left(Su, w\right)\\ &= \pounds_{v^{||}} g(u,w) - 2v_n B(u,w),\end{aligned}$$

δηλαδή η 4.3.
Από την 3.13 έχουμε:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}|_{\tau=t} n(\tau) = \frac{\partial}{\partial \tau}|_{\tau=t} R_t(\tau) n(t),$$

συνεπώς

$$\delta n = W n,$$

δηλαδή η 4.4. Η σχέση 4.5 είναι ο ορισμός 3.22.
Γιά την 4.6 παρατηρούμε:

$$\overline{g}\left(F_t(\tau)u, n_t(\tau)\right) = 0,$$

οπότε

$$\frac{\partial}{\partial \tau}|_{\tau=t} \overline{g}\left(F_t(\tau)u, n_t(\tau)\right) = 0,$$

άρα

$$\overline{g}\left(Gu, n\right) + g\left(Ju, \delta n\right) = 0$$

συνεπώς, μέ χρήση της 3.29, λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} g\left(\delta n, Ju\right) &= -B(u, v^{||}) - Ju(v_n) \\ &= -g(Sv^{||}, u) - Ju(v_n) \end{aligned}$$

και η 4.6 αποδείχθηκε. □

4.2 Μεταβολή $2^{\eta s}$ θεμελιώδους μορφής

Στην ενότητα αυτή υπολογίζονται οι μεταβολές του τελεστή σχήματος, της δεύτερης και της τρίτης θεμελιώδους μορφής.
Χρειαζόμαστε τό επόμενο

Λήμμα 4.2.1. *Έστω S ο τελεστής σχήματος της υπερεπιφανείας M και $u, w \in \mathcal{X}(M)$. Τότε η παράγωγος Lie του τελεστή S, $\pounds_w S$, είναι συμμετρική και ικανοποιεί την*

$$(\pounds_w S)\, u = \nabla_u S w - \nabla_{Su} w + \mathcal{P}\overline{R}(Ju, Jw)n. \tag{4.7}$$

Απόδειξη. Από την σχέση 2.26 και τήν εξίσωση Codazzi 2.34 έχουμε:

$$\begin{aligned}
(\pounds)_w Su &= \pounds_w Su - S\pounds_w u \\
&= \nabla_w Su - \nabla_{Su} w - S\nabla_w u + S\nabla_u w \\
&= \{\nabla_w Su - S\nabla_w u\} - \nabla_{Su} w + S\nabla_u w \\
&= (\nabla_w S)\, u - \nabla_{Su} w + S\nabla_u w \\
&= \{(\nabla_w S)\, u - (\nabla_u S)\, w\} + \nabla_u Sw - \nabla_{Su} w \\
&= \nabla_u Sw - \nabla_{Su} w + \mathcal{P}\overline{R}(Ju, Jw)n,
\end{aligned}$$

δηλαδή η 4.7. □

Η επόμενη πρόταση αφορά τις μεταβολές του τελεστή σχήματος και της δεύτερης και τρίτης θεμελιώδους μορφής κινούμενης υπερεπιφάνειας.

Πρόταση 4.2.2. *Έστω M υπερεπιφάνεια της πολλαπλότητος Riemann N η οποία κινείται εντός της N με πεδίο ταχύτητος $v = Jv^{||} + v_n n$, τότε:*

- *Η μεταβολή του τελεστή σχήματος δίνεται από τις ισοδύναμες σχέσεις:*

$$(\delta S)u = -\mathcal{P}GSu - \mathcal{P}\overline{\nabla}_{Ju} Wn - \mathcal{P}\overline{R}(v, Ju)\bar{n}, \tag{4.8}$$

$$(\delta S)u = (\pounds_{v^{||}} S)\, u + v_n S^2 u + \nabla_u \nabla v_n - v_n \mathcal{P}\overline{R}(n, Ju)\bar{n}. \tag{4.9}$$

- *Η μεταβολή της δεύτερης θεμελιώδους μορφής δίνεται από τις ισοδύναμες σχέσεις:*

$$\delta B = (2\mathcal{D}S + \delta S)^\flat, \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}
(\delta B)(u, w) = \mathrm{Hess}_{v_n}(u, w) - v_n III(u, w) + (\pounds_{v^{||}} B)\,(u, w) \\
- v_n \overline{g}\left(\overline{R}(n, Ju)\bar{n}, Jw\right).
\end{aligned} \tag{4.11}$$

- *Η μεταβολή της τρίτης θεμελιώδους μορφής δίδεται από τις ισοδύναμες σχέσεις:*

$$\delta III = (2S\mathcal{D}S + S\delta S + \delta SS)^\flat . \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}(\delta III)(u,w) = (\pounds_{v^{||}} III)(u,w) + \mathrm{Hess}_{v_n}(u,Sw) + \mathrm{Hess}_{v_n}(Su,w) \\ - v_n \left\{ g\left(\mathcal{P}\overline{R}(n,Ju)\bar{n}, Sw\right) + g\left(Su, \mathcal{P}\overline{R}(n,Jw)\bar{n}\right)\right\} .\end{aligned} \tag{4.13}$$

Απόδειξη. Από την σχέση 3.41, περνώντας στην μεταβολή προκύπτει:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\tau}|_{\tau=t} F_t(\tau)S_t(\tau)u &= -\overline{\nabla}_v\overline{\nabla}_{F_t(\tau)u} n(\tau) \\ &= -\overline{\nabla}_v\overline{\nabla}_{F_t(\tau)u}\overline{n}(\phi_t(\tau)) \\ &= -\overline{\nabla}_v\overline{\nabla}_{\overline{u}}\overline{n},\end{aligned}$$

συνεπώς, με χρήση ιδιοτήτων του τανυστή καμπυλότητας $\overline{R}$ της περιβάλλουσας πολλαπλότητος, γίνεται:

$$GSu + J\delta Su = -\overline{\nabla}_{\overline{u}}\overline{\nabla}_v\overline{n} - \overline{R}(v,\overline{u})\overline{n} - \overline{\nabla}_{[v,\overline{u}]}\overline{n}.$$

Μέ χρήση της 3.18 προκύπτει

$$[v,\overline{u}] = 0$$

και εάν λάβουμε υπόψιν μας ότι οι συναλλοίωτοι παράγωγοι εξαρτώνται αποκλειστικά από τις τιμές του $\overline{u}$ στό σημείο x, προκύπτει:

$$GSu + J\delta Su = -\overline{\nabla}_{Ju}\delta n - \overline{R}\,(v,Ju)\,\overline{n}.$$

Με εφαρμογή της προβολής $\mathcal{P}$ επί της M_t, σε αμφότερα τα μέλη της προηγούμενης σχέσης, χρησιμοποιώντας την εξίσωση 4.5, έχουμε:

$$\delta Su = -\mathcal{P}GSu - \mathcal{P}\overline{\nabla}_{Ju}Wn - \mathcal{P}\overline{R}(v,Ju)\overline{n}.$$

Η 4.8 αποδείχθηκε.
Από τις 4.6 και 3.30 έχουμε:

$$\begin{aligned}-\mathcal{P}\overline{\nabla}_{Ju}\delta n &= -\mathcal{P}\overline{\nabla}\{-JSv^{||} - \overline{\nabla}v_n\} \\ &= \nabla_u\nabla v_n + \nabla_u S v^{||}\end{aligned} \tag{4.14}$$

και

$$-\mathcal{P}GSu = -\nabla_{Su}v^{||} + v_n S^2 u. \tag{4.15}$$

Επίσης, από την 4.7 προκύπτει:

$$\nabla_u S v^{||} - \nabla_{Su} v^{||} = (\pounds_{v^{||}} S)u - \mathcal{P}\overline{R}(Ju, Jv^{||})\overline{n}. \tag{4.16}$$

Ο όρος $-\overline{R}(v, Ju)\overline{n}$ αναλύεται ως εξής:

$$\begin{aligned} -\overline{R}(v, Ju)\overline{n} &= -\overline{R}\left(Jv^{||} + v_n\overline{n}, Ju\right)\overline{n} \\ &= -\overline{R}(Jv^{||}, Ju)\overline{n} - v_n\overline{R}(n, Ju)\overline{n} \\ &= \overline{R}(Ju, Jv^{||})\overline{n} - v_n\overline{R}(n, Ju)\overline{n}. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Από την 4.8 και συνδυάζοντας τις 4.14 - 4.17 παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \delta Su &= v_n S^2 u - \nabla_{Su} v^{||} + \nabla_u \nabla v_n + \nabla_u S v^{||} \\ &\quad - v_n \mathcal{P}\overline{R}(n, Ju)\overline{n} + \overline{R}(Ju, Jv^{||})\overline{n} \\ &= \left\{\nabla_u S v^{||} - \nabla_{Su} v^{||} + \overline{R}(Ju, Jv^{||})\overline{n}\right\} \\ &\quad + v_n S^2 u + \nabla_u \nabla v_n - v_n \mathcal{P}\overline{R}(n, Ju)\overline{n} \\ &= \left(\pounds_{v^{||}} S\right) u + v_n S^2 u + \nabla_u \nabla v_n - v_n \mathcal{P}\overline{R}(n, Ju)\overline{n} \end{aligned}$$

η 4.9 αποδείχθηκε.
Γιά την 4.10 θεωρούμε την σχέση 3.42 η οποία ορίζει την $B_t(\tau)$:

$$B_t(\tau)(u, w) = g_t(\tau)(S_t(\tau)u, w).$$

Με παραγώγιση ως πρός τ, γιά $t = \tau$, η τελευταία σχέση γίνεται:

$$\begin{aligned} \delta B(u, w) &= (\delta g)(Su, w) + g(\delta Su, w) \\ &= 2\mathcal{D}^\flat(Su, w) + (\delta S)^\flat(u, w) \\ &= 2(\mathcal{D}S)^\flat(u, w) + (\delta S)^\flat(u, w) \\ &= \left\{2\mathcal{D}S + \delta S\right\}^\flat (u, w) \end{aligned}$$

τό ζητούμενο αποδείχθηκε.
Προκειμένου να αποδείξουμε την 4.11 χρησιμοποιούμε καταρχήν την 4.9.

Είναι:

$$\begin{aligned}(\delta S)^\flat(u,w) &= g(\delta S u, w)\\ &= v_n g(S^2 u, w) + g(\nabla_u \nabla v_n, w) - v_n g(\mathcal{P}\overline{R}(n, Ju)\overline{n}, w)\\ &+ g((\pounds_{v^{||}} S)u, w)\\ &= v_n III(u,w) + \mathrm{Hess}_{v_n}(u,w)\\ &- v_n \overline{g}(\overline{R}^\flat(n, Ju)\overline{n}, Jw) + (\pounds_{v^{||}} S)^\flat(u,w). \end{aligned} \tag{4.18}$$

Επίσης, από την σχέση 2.28, παίρνουμε:

$$\begin{aligned}(\pounds_{v^{||}} S)^\flat(u,w) &= (\pounds_{v^{||}} S^\flat)(u,w) - (\pounds_{v^{||}} g)(u, Sw)\\ &= (\pounds_{v^{||}} B)(u,w) - (\pounds_{v^{||}} g)(u, Sw)\\ &= (\pounds_{v^{||}} B)(u,w) - 2\mathcal{D}^\flat(u, Sw) - 2v_n B(u, Sw)\\ &= (\pounds_{v^{||}} B)(u,w) - 2(\mathcal{D}S)^\flat(u,w) - 2v_n III(u,w), \end{aligned} \tag{4.19}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις 4.10, 4.18 και 4.19 έπεται η 4.11.
Σχετικά με την 4.12 γιά την μεταβολή της τρίτης θεμελιώδους μορφής θεωρούμε την σχέση 3.43 και παραγωγίζουμε ως πρός τ (γιά $\tau = t$):

$$\frac{\partial}{\partial \tau}|_{\tau=t} III_t(\tau)(u,w) = \frac{\partial}{\partial \tau}|_{\tau=t} g_t(\tau)(S_t(\tau)u, S_t(\tau)w),$$

δηλαδή

$$\begin{aligned}(\delta III)(u,w) &= (\delta g)(Su, Sw) + g(\delta S u, Sw) + g(Su, \delta S w)\\ &= 2\mathcal{D}^\flat(Su, Sw) + g(S\delta S u, w) + g((\delta S)^T S u, w)\\ &= 2g(S\mathcal{D}Su, w) + g(S\delta S u, w) + g(\delta S S u, w)\\ &= \left\{2S\mathcal{D}S + S\delta S + \delta S S\right\}^\flat(u,w), \end{aligned}$$

και η 4.12 αποδείχθηκε.
Προκειμένου να αποδείξουμε την 4.13 θεωρούμε την 4.12 και υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}2g(S\mathcal{D}Su, w) &= g(2\mathcal{D}Su, Sw)\\ &= g(\nabla_{Su} v^{||}, Sw) + g(Su, \nabla_{Sw} v^{||}) - 2v_n IV(u,w) \ (\mathbf{i})\end{aligned}$$

όπου $IV(u,w) = g(S^3u,w)$,

$$\begin{aligned} g(S\delta Su,w) &= g(\delta Su, Sw) \\ &= v_n IV(u,w) + \mathrm{Hess}_{v_n}(u,Sw) + g((\pounds_{v^{||}}S)u,Sw) \\ &\quad - v_n g(\mathcal{P}\overline{R}(n,Ju)\bar{n},Sw) \ (\mathbf{ii}) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} g(\delta SSu,w) &= v_n IV(u,w) + \mathrm{Hess}_{v_n}(Su,w) + g((\pounds_{v^{||}}S^2)u,w) \\ &\quad - v_n g(\mathcal{P}\overline{R}(n,JSu)\overline{n},w) \ (\mathbf{iii}) \end{aligned}$$

Αθροίζοντας τις (**i**) - (**iii**) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} (\delta III)(u,w) &= \mathrm{Hess}_{v_n}(Su,w) + \mathrm{Hess}_{v_n}(u,Sw) \\ &\quad - v_n \left\{ g\left(\mathcal{P}\overline{R}(n,Ju)\bar{n},Sw\right) + g\left(Su,\mathcal{P}\overline{R}(n,Jw)\bar{n}\right) \right\} \\ &\quad + g(\nabla_{Su}v^{||},Sw) + g(Su,\nabla_{Sw}v^{||}) \\ &\quad + g((\pounds_{v^{||}}S)u,Sw) + g((\pounds_{v^{||}}S^2)u,w) \ (\mathbf{iv}). \end{aligned}$$

Θέτουμε

$$\begin{aligned} \mathscr{Z}^{||}(u,w) &= g(\nabla_{Su}v^{||},Sw) + g(Su,\nabla_{Sw}v^{||}) \\ &\quad + g((\pounds_{v^{||}}S)u,Sw) + g((\pounds_{v^{||}}S^2)u,w) \ (\mathbf{v}). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η (**v**) γράφεται:

$$\begin{aligned} \mathscr{Z}^{||}(u,w) &= (\pounds_{v^{||}}g)(Su,Sw) + g((\pounds_{v^{||}}S)u,Sw) + g((\pounds_{v^{||}}S^2)u,w) \\ &= v^{||}(g(Su,Sw)) - g(\pounds_{v^{||}}Su,Sw) - g(Su,\pounds_{v^{||}}Sw) \\ &\quad + g(\pounds_{v^{||}}Su,Sw) - g(S\pounds_{v^{||}}u,Sw) + g(Su,\pounds_{v^{||}}Sw) - g(Su,S\pounds_{v^{||}}w) \end{aligned}$$

δίνοντας τελικά

$$\mathscr{Z}^{||}(u,w) = v^{||}(g(Su,Sw)) - g(S\pounds_{v^{||}}u,Sw) - g(Su,\pounds_{v^{||}}w). \tag{4.20}$$

Εάν λάβουμε υπόψιν μας ότι η Lie παράγωγος της τρίτης θεμελιώδους μορφής δίνεται από την:

$$\begin{aligned} (\pounds_{v^{||}}III)(u,w) &= v^{||}(g(Su,Sw)) - III(\pounds_{v^{||}}u,w) - III(u,\pounds_{v^{||}}w) \\ &= v^{||}(g(Su,Sw)) - g(S\pounds_{v^{||}}u,Sw) - g(Su,S\pounds_{v^{||}}w), \end{aligned} \tag{4.21}$$

τότε, με σύγκριση των 4.20, 4.21, καταλήγουμε στην ισότητα

$$\mathcal{Z}^{||}(u,w) = (\pounds_{v^{||}} III)(u,w)$$

κι αντικαθιστώντας στην (**iv**) έχουμε την 4.13. $\square$

Πόρισμα 4.2.3. *Τό τανυστικό πεδίο δS είναι συμμετρικό, δηλαδή:*

$$\delta S = (\delta S)^T. \tag{4.22}$$

Απόδειξη. Τό τανυστικό πεδίο δS είναι g - συμμετρικό εάν και μόνον εάν ισχύει:

$$g(\delta S u, w) = g(u, \delta S w),$$

γιά όλα τα $u, w \in \mathcal{X}(M)$. Με χρήση της 4.9 έχουμε:

$$\begin{aligned} g(\delta S u, w) &= g((\pounds_{v^{||}} S)u, w) + v_n g(S^2 u, w) + g(\nabla_u \nabla v_n, w) \\ &\quad - v_n g(\mathcal{P}\overline{R}(n, Ju)n, w), \end{aligned}$$

όπου $\pounds_{v^{||}} S$, S^2, Hess_{v_n} είναι g - συμμετρικά και από τις ιδιότητες του τανυστή καμπυλότητας Riemann:

$$\begin{aligned} g(\mathcal{P}\overline{R}(n, Ju)n, w) &= \overline{g}(\overline{R}(n, Ju)n, Ju) \\ &= \overline{g}(\overline{R}(n, Ju)n, Jw) = g(\mathcal{P}\overline{R}(n, Jw)n, u). \end{aligned}$$

Προκύπτει λοιπόν

$$\begin{aligned} g(\delta S u, w) &= g(u, (\pounds_{v^{||}} S)w) + v_n g(u, S^2 w) + g(\nabla_w \nabla v_n, u) \\ &\quad - v_n g(\mathcal{P}\overline{R}(n, Jw)n, u) \\ &= g(u, \delta S w), \end{aligned}$$

άρα δS είναι g - συμμετρικό. $\square$

Σημείωση 4.2.4. *Εάν η κίνηση είναι καθετική τότε $v^{||} = 0$ ($v = v_n n$), συνεπώς:*

$$\mathcal{D} = -v_n S,$$

οπότε $\mathcal{D}S = S\mathcal{D}$, άρα οι κύριες διευθύνσεις ρυθμού παραμόρφωσης είναι οι κύριες διευθύνσεις καμπυλότητας της υπερεπιφάνειας.

Το επόμενο πόρισμα γενικεύει τό παραπάνω συμπέρασμα, για την αντιμεταθετικότητα του τελεστή σχήματος με τόν ρυθμό παραμόρφωσης, σε κάθε κίνηση.

Πρόταση 4.2.5. *Γιά μιά κίνηση υπερεπιφάνειας M εντός της N, ο ρυθμός παραμόρφωσης $\mathcal{D}$ και ο τελεστής σχήματος S της M αντιμετατίθενται και έχουν κοινό σύνολο ιδιοδιανυσμάτων.*

Απόδειξη. Ο τ - εξαρτώμενος τελεστής σχήματος πάνω στην M_t ικανοποιεί, ως πρός την αντίστοιχη τ - μετρική, την συνθήκη συμμετρικότητος

$$g_t(\tau)(S_t(\tau)u, w) = g_t(\tau)(u, S_t(\tau)w),$$

γιά κάθε $u, w \in \mathcal{X}(M_t)$.
Παραγωγίζοντας ως πρός τ, γιά $\tau = t$, τα μέλη της παραπάνω σχέσης, προκύπτει:

$$\delta g(Su, w) + g(\delta Su, w) = \delta g(u, Sw) + g(u, \delta Sw),$$

άρα, αφού δS είναι g -συμμετρικό, όπως είδαμε στό λήμμα 4.2.3, έχουμε:

$$\delta g(Su, w) = \delta g(u, Sw),\ \forall u, w \in \mathcal{X}(M_t).$$

Χρησιμοποιούμε την 4.1 οπότε:

$$2g(\mathcal{D}Su, w) = 2g(u, \mathcal{D}Sw),\ \forall u, w \in \mathcal{X}(M_t)$$

δηλαδή

$$\mathcal{D}S = S\mathcal{D}. \tag{4.23}$$

Η σχέση αντιμετάθεσης 4.23 των $g(t)$ – συμμετρικών τανυστικών πεδίων $\mathcal{D}$, S πάνω στόν ίδιο χώρο συνεπάγεται ότι έχουν τόν ίδιο χώρο ιδιοδιανυσμάτων. □

4.3 Μεταβολές κυρίων καμπυλοτήτων

Θεωρούμε τις κύριες κατευθύνσεις $\{e_1(t), \ldots, e_m(t)\}$ και τις αντίστοιχες κύριες καμπυλότητες $\{k_1(t), \ldots, k_m(t)\}$ του τελεστή σχήματος $S(t)$ της υπερεπιφάνειας M_t στό σημείο x. Θεωρούμε επίσης $\{e_{1\,t}(\tau), \ldots, e_{m\,t}(\tau)\}$ τις κύριες κατευθύνσεις και $\{k_{1\,t}(\tau), \ldots, k_{m\,t}(\tau)\}$ τις αντίστοιχες κύριες καμπυλότητες του τ - εξαρτώμενου τελεστή σχήματος $S_t(\tau)$ της υπερεπιφάνειας M_t.
Η επόμενη πρόταση δίνει τις μεταβολές των κυρίων καμπυλοτήτων καθώς επίσης και τις μεταβολές της μέσης καμπυλότητας και της καμπυλότητας Gauss - Kronecker.

Πρόταση 4.3.1. *Υπό την προϋπόθεση ότι κατά την διάρκεια της κίνησης οι κύριες καμπυλότητες k_i παραμένουν διακριτές, η μεταβολή τους δίνεται από τις:*

$$\begin{aligned}\delta k_i &= g(\delta S e_i, e_i), &(4.24)\\ &= \mathrm{Hess}_{v_n}(e_i, e_i) + v_n k_i^2 + v^{||}(k_i) - v_n g(\mathcal{P}\overline{R}(n, Je_i)\overline{n}, e_i). &(4.25)\end{aligned}$$

Οι μεταβολές της μέσης καμπυλότητος H και της καμπυλότητος Gauss - Kronecker K δίδονται από τις:

$$\delta H = \Delta v_n + m v^{||}(H) + v_n \sum_{i=1}^{m} k_i^2 + v_n \overline{\mathrm{Ric}}(n, \overline{n}), \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned}\delta K = m v_n H K + v^{||}(K) + \sum_{i=1}^{m} \widehat{K}_i \mathrm{Hess}_{v_n}(e_i, e_i)\\ - v_n \sum_{i=1}^{m} \widehat{K}_i g(\mathcal{P}\overline{R}(n, Je_i)\bar{n}, e_i),\end{aligned} \tag{4.27}$$

όπου $\widehat{K}_i = k_1 k_2 \ldots k_{i-1} k_{i+1} \ldots k_m$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι είναι:

$$g_t(\tau)(e_{i\,t}(\tau), e_{j\,t}(\tau)) = \delta_{ij},$$

και

$$S_t(\tau)e_{i\,t}(\tau) = k_{i\,t}(\tau)e_{i\,t}(\tau).$$

Παραγωγίζουμε την δεύτερη σχέση από τις παραπάνω ως πρός τ, γιά $\tau = t$:

$$\delta k_i e_i = \delta S e_i + (S - k_i I)\delta e_i.$$

Ο τελεστής $S - k_i I$ είναι προφανώς συμμετρικός, οπότε, περνώντας στό εσωτερικό γινόμενο και των δύο μελών με τό e_i, λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned}
\delta k_i &= g(\delta k_i e_i, e_i) \\
&= g(\delta S e_i, e_i) + g((S - k_i I)e_i, e_i) \\
&= g(\delta S e_i, e_i) + g(\delta e_i, (S - k_i I)e_i) \\
&= g(\delta S e_i, e_i),
\end{aligned}$$

η 4.24 αποδείχθηκε. Γιά την 4.25 υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}
\delta k_i &= g(\delta S e_i, e_i) \\
&= g\left((\pounds_{v^{||}} S)e_i, e_i\right) + v_n g(S^2 e_i, e_i) + g(\nabla_{e_i}\nabla v_n, e_i) \\
&\quad - v_n g(\mathcal{P}\overline{R}(n, Je_i)\overline{n}, e_i) \\
&= v_n k_i^2 + \mathrm{Hess}_{v_n}(e_i, e_i) + g\left((\pounds_{v^{||}} S)e_i, e_i\right) \\
&\quad - v_n g(\mathcal{P}\overline{R}(n, Je_i)\overline{n}, e_i) \\
&= v_n k_i^2 + \mathrm{Hess}_{v_n}(e_i, e_i) + g\left(\pounds_{v^{||}}(Se_i) - S\pounds_{v^{||}} e_i, e_i\right) \\
&\quad - v_n g(\mathcal{P}\overline{R}(n, Je_i)\overline{n}, e_i),
\end{aligned}$$

όπου

$$\pounds_{v^{||}}(Se_i) = \pounds_{v^{||}}(k_i e_i) = v^{||}(k_i)e_i + k_i \pounds_{v^{||}} e_i,$$

άρα

$$\delta k_i = v_n k_i^2 + \mathrm{Hess}_{v_n}(e_i, e_i) + v^{||}(k_i) - v_n g(\mathcal{P}\overline{R}(n, Je_i)\overline{n}, e_i).$$

Η 4.25 αποδείχθηκε.
Γιά τόν υπολογισμό της μεταβολής της μέσης καμπυλότητας θεωρούμε την σχέση $mH_t(\tau) = \mathrm{tr}S_{t(\tau)}$ και παραγωγίζουμε τα μέλη της ως πρός τ, γιά $\tau = t$. Είναι:

$$mH_t(\tau) = \mathrm{tr}S_t(\tau) = k_{1\,t}(\tau) + \cdots + k_{m\,t}(\tau),$$

άρα, με εφαρμογή της 4.25, προκύπτει:

$$\begin{aligned}
m\delta H &= \sum_{i=1}^{m} \delta k_i \\
&= v_n \sum_{i=1}^{m} k_i^2 + \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Hess}_{v_n}(e_i, e_i) + \sum_{i=1}^{m} v^{||}(k_i) \\
&- v_n \sum_{i=1}^{m} g(\mathcal{P}\overline{R}(n, Je_i)\overline{n}, e_i) \\
&= v_n \sum_{i=1}^{m} k_i^2 + \Delta v_n + v^{||}\left(\sum_{i=1}^{m} k_i\right) - v_n \overline{\mathrm{Ric}}(n, \overline{n}) \\
&= v_n \sum_{i=1}^{m} k_i^2 + \Delta v_n + m v^{||}(H) + v_n \overline{\mathrm{Ric}}(n, \overline{n}),
\end{aligned}$$

τό ζητούμενο εδείχθη.
Γιά την απόδειξη της 4.27 θεωρούμε τόν τύπο

$$\begin{aligned}
K_t(\tau) &= \det S_t(\tau) \\
&\quad = k_{1\,t}(\tau) \cdot k_{2\,t}(\tau) \cdots k_{m\,t}(\tau),
\end{aligned}$$

και παραγωγίζουμε ως πρός τ, γιά $\tau = t$. Είναι:

$$\delta K = \sum_{i=1}^{m} \widehat{K}_i \delta k_i,$$

ένθα $\widehat{K}_i = k_i k_2 \cdots k_{i-1} k_{i+1} \cdots k_m$. Με εφαρμογή της 4.25 έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\delta K &= v_n \sum_{i=1}^{m} k_i^2 \widehat{K}_i + \sum_{i=1}^{m} \widehat{K}_i \mathrm{Hess}_{v_n}(e_i, e_i) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m} v^{||}(k_i)\widehat{K}_i - v_n \sum_{i=1}^{m} \widehat{K}_i g(\mathcal{P}\overline{R}(n, Je_i)\overline{n}, e_i) \\
&= v_n K \sum_{i=1}^{m} k_i + \sum_{i=1}^{m} \widehat{K}_i \mathrm{Hess}_{v_n}(e_i, e_i) \\
&\quad + v^{||}(K) - v_n \sum_{i=1}^{m} \widehat{K}_i g(\mathcal{P}\overline{R}(n, Je_i)\overline{n}, e_i) \\
&= v_n m K H + \sum_{i=1}^{m} \widehat{K}_i \mathrm{Hess}_{v_n}(e_i, e_i) + v^{||}(K) \\
&\quad - v_n \sum_{i=1}^{m} \widehat{K}_i g(\mathcal{P}\overline{R}(n, Je_i)\overline{n}, e_i).
\end{aligned}
$$

□

Εάν κάποια εκ των κυρίων καμπυλοτήτων είναι μηδέν, η k_i επί παραδείγματι, τότε $K = 0$ και ο τύπος μεταβολής της καμπυλότητας Gauss 4.27 ανάγεται στον:

$$\delta K = \widehat{K_i}\mathrm{Hess}_{v_n}(e_i, e_i) - v_n \widehat{K_i} g(\mathcal{P}\overline{R}(, Je_i)\bar{n}, e_i). \tag{4.28}$$

Επισήμανση 4.3.2. *Οι τύποι μεταβολής της μετρικής και του μοναδιαίου καθετικού διανύσματος δέν επηρεάζονται από την γεωμετρία του περιβάλλοντος χώρου [2]. Εάν ο περιβάλλων χώρος δέν είναι Ευκλείδιος οι τύποι μεταβολής του τελεστή σχήματος, της δεύτερης και τρίτης θεμελιώδους μορφής και ο τύπος της μεταβολής της μέσης καμπυλότητος ταυτίζονται με τις αντίστοιχες σχέσεις στό [19].*

Πρόταση 4.3.3. *Η μεταβολή του εμβαδικού στοιχείου ω της υπερεπιφάνειας M δίνεται από την:*

$$\delta\omega = \left\{ \mathrm{div} v^{||} - m v_n H \right\} \omega, \tag{4.29}$$

όπου $m = \mathrm{dim} M$.

Απόδειξη. Θεωρούμε το εμβαδικό στοιχείο $\omega_t(\tau)$ ορισμένο από τήν έκφραση 3.46. Επιλέγουμε $\{e_i\}_{i=1}^m$ ορθοκανονικό πλαίσιο το οποίο διαγωνιοποιεί τόν τελεστή σχήματος S της M. Με χρήση γνωστής έκφρασης γιά την παράγωγο της ορίζουσας και λαμβάνοντας υπόψιν ότι

$$\delta g(e_i, e_j) = 2\mathcal{D}^\flat(e_i, e_j) = 2g(\mathcal{D}e_i, e_j) = (\pounds_{v^{||}} g)(e_i, e_j) - 2v_n B(e_i, e_j)$$

προκύπτει:

$$\begin{aligned}
(\delta\omega)(e_1, \ldots, e_m) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m g(\mathcal{D}e_i, e_i) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m \{(\pounds_{v^{||}} g)(e_i, e_i) - 2v_n B(e_i, e_i)\} \\
&= \sum_{i=1}^m \left\{g(\nabla_{e_i} v^{||}, e_i) - v_n k_i\right\} \\
&= \{\mathrm{div} v^{||} - m v_n H\}\omega(e_1, \ldots, e_m).
\end{aligned}$$

Άρα η 4.29 αποδείχθηκε. □

4.4 Μεταβολή συνοχής και καμπυλότητας Riemann

Στην παρούσα ενότητα μελετάμε την μεταβολή της συνοχής Levi Civita και την μεταβολή του τανυστή καμπυλότητας Riemann.

Καταρχήν, γιά την μεταβολή της συνοχής θα κάνουμε χρήση του τύπου Koszul. Ο τύπος αυτός χαρακτηρίζει μονοσήμαντα την συνοχή με την βοήθεια του μετρικού τανυστή και είναι γνωστό ότι η συνοχή ∇, η προσαρτημένη στόν μετρικό τανυστή g, προσδιορίζεται μονοσήμαντα από τόν τύπο ([28], σελ. 50):

$$\begin{aligned}
2g\left(\nabla_u w, z\right) &= ug(w, z) + wg(u, z) - zg(u, w) \\
&\quad - g(u, [w, z]) + g(w, [z, u]) + g(z, [u, w]),
\end{aligned} \tag{4.30}$$

γιά κάθε $u, w, z \in \mathcal{X}(M)$.
Στην περίπτωσή μας, η συνοχή $\nabla_t(\tau)$ η προσαρτημένη στόν μετρικό τανυστή $g_t(\tau)$, δίνεται από την επόμενη σχέση:

$$\begin{aligned} 2g_t(\tau)(\nabla_t(\tau)(u,w),z) &= ug_t(\tau)(w,z) + wg_t(\tau)(u,z) - zg_t(\tau)(u,w) \\ &\quad - g_t(\tau)(u,[w,z]) + g_t(\tau)(w,[z,u]) \\ &\quad + g_t(\tau)(z,[u,w]). \end{aligned} \tag{4.31}$$

Διαφορίζοντας τα μέλη της 4.31 ως πρός τ, γιά $\tau = t$, έχουμε:

$$\begin{aligned} 2\delta g(\nabla_u w, z) + 2g(\delta\nabla(u,w),z) &= u\,(\delta g(w,z)) + w\,(\delta g(u,z)) \\ &\quad - z\,(\delta g(u,w)) - \delta g(u,[w,z]) \\ &\quad + \delta g(w,[z,u]) + \delta g(z,[u,w]), \end{aligned}$$

άρα

$$\begin{aligned} 2g(\delta\nabla(u,w),z) = &-2\delta g(\nabla_u w, z) + u\,(\delta g(w,z)) + w\,(\delta g(u,z)) - \\ &- z\,(\delta g(u,w)) - \delta g(u,[w,z]) + \delta g(w,[z,u]) \\ &+ \delta g(z,[u,w]). \end{aligned} \tag{4.32}$$

Επισήμανση 4.4.1. *Είναι προφανές ότι η 4.32 προσδιορίζει τό $(0,2)$ τανυστή $(\delta\nabla)^\flat$ μέ χρήση της μεταβολής της μετρικής, ή, ισοδύναμα, με χρήση του ρυθμού παραμόρφωσης $\mathcal{D}$.*

Πρόταση 4.4.2. *Η μεταβολή της συνοχής Levi Civita κινούμενης υπερεπιφάνειας M πολλαπλότητος Riemannian N, με διανυσματικό πεδίο ταχύτητας $v = Jv^{||} + v_n n$, δίνεται από τίς ισοδύναμες εκφράσεις:*

1. $$\begin{aligned} (\delta\nabla(u,w))^\flat(z) &= -2\mathcal{D}^\flat(\nabla_u w, z) + u(\mathcal{D}^\flat(w,z)) + w(\mathcal{D}^\flat(u,z)) \\ &\quad - z(\mathcal{D}^\flat(u,w)) - \mathcal{D}^\flat(u,[w,z]) \\ &\quad + \mathcal{D}^\flat(w,[z,u]) + \mathcal{D}^\flat(z,[u,w]). \end{aligned} \tag{4.33}$$

2. $$\begin{aligned} g(\delta\nabla(u,w),z) &= g((\nabla_u\mathcal{D})w,z) + g((\nabla_w\mathcal{D})u,z) \\ &\quad - g((\nabla_z\mathcal{D})u,w). \end{aligned} \tag{4.34}$$

3. $$\begin{aligned} (\delta\nabla)(u,w)) &= -v_n(\nabla_u S)w - \{u(v_n)Sw + w(v_n)Su\} \\ &\quad - B(u,w)\nabla v_n + v_n\mathcal{P}\overline{R}(n,Ju)Jw \\ &\quad + (\pounds_{v^{||}}\nabla)(u,w). \end{aligned} \tag{4.35}$$

Απόδειξη. Η 4.33 αποτελεί συνέπεια της 4.32 και τού ότι $\delta g = 2\mathcal{D}^\flat$.
Γιά την 4.34 παρατηρούμε ότι οι όροι της 4.32 αναλύονται περαιτέρω ως:

$$-2g(\mathcal{D}\nabla_u w, z) = -g(\mathcal{D}\nabla_u w, z) - g(\mathcal{D}\nabla_u w, z),\ (\mathbf{i})$$

$$u(g(\mathcal{D}w, z)) = g((\nabla_u \mathcal{D})w, z) + g(\mathcal{D}\nabla_u w, z) + g(Dw, \nabla_u z),\ (\mathbf{ii})$$

$$w(g(\mathcal{D}u, z)) = g((\nabla_w \mathcal{D})u, z) + g(\mathcal{D}\nabla_w u, z) + g(\mathcal{D}u, \nabla_w z)\ (\mathbf{iii})$$

$$-zg(\mathcal{D}u, w) = -g((\nabla_z \mathcal{D})u, w) - g(\mathcal{D}\nabla_z u, w) - g(\mathcal{D}u, \nabla_z w)\ (\mathbf{iv})$$

$$-g(\mathcal{D}u, [w, z]) = -g(\mathcal{D}u, \nabla_w z) + g(\mathcal{D}u, \nabla_z w)\ (\mathbf{v})$$

$$g(\mathcal{D}w, [z, u]) = g(\mathcal{D}w, \nabla_z u) - g(\mathcal{D}w, \nabla_u z),\ (\mathbf{vi})$$

$$g(\mathcal{D}z, [u, w]) = g(\mathcal{D}z, \nabla_u w) - g(\mathcal{D}z, \nabla_w u),\ (\mathbf{vii})$$

Αθροίζοντας κατά μέλη τις (**i**) - (**vii**) προκύπτει:

$$g((\delta\nabla)(u, w), z) = g((\nabla_u \mathcal{D})w, z) + g((\nabla_w \mathcal{D})u, z) - g((\nabla_z \mathcal{D})u, w),$$

και η 4.34 αποδείχθηκε.
Στην συνέχεια αποδεικνύουμε την σχέση 4.35. Αναλύουμε τούς όρους της 4.33 με βάση τις συνιστώσες του πεδίου ταχύτητας ως εξής:

$$-2\mathcal{D}^\flat(\nabla_u w, z) = 2v_n g(S\nabla_u w, z) - g(\nabla_{\nabla_u w} v^{||}, z) - g(\nabla_u w, \nabla_z v^{||})\ \ (\alpha)$$

$$\begin{aligned} u(\mathcal{D}^\flat(w, z)) = &\{-u(v_n)g(Sw, z) - v_n g(\nabla_u Sw, z) - v_n g(Sw, \nabla_u z)\} \\ &+ \frac{1}{2}\{g(\nabla_u \nabla_w v^{||}, z) + g(\nabla_w v^{||}, \nabla_u z) + g(\nabla_u w, \nabla_z v^{||})\} \\ &+ \frac{1}{2} g(w, \nabla_u \nabla_z v^{||})\ \ (\beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w(\mathcal{D}^\flat(u,z)) &= -w(v_n)g(Su,z) - v_n g(\nabla_w Su, z) - v_n g(Su, \nabla_w z) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left\{g(\nabla_w \nabla_u v^{||}, z) + g(\nabla_u v^{||}, \nabla_w z) + g(\nabla_w u, \nabla_z v^{||})\right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} g(u, \nabla_w \nabla_z v^{||}) \ \ (\gamma) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -z(\mathcal{D}^\flat(u,w)) &= z(v_n)g(Su,w) + v_n g(\nabla_z Su, w) + v_n g(Su, \nabla_z w) \\ &\quad - \frac{1}{2}\left\{g(\nabla_z \nabla_u v^{||}, w) + g(\nabla_u v^{||}, \nabla_z w) + g(\nabla_z u, \nabla_w v^{||})\right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} g(u, \nabla_z \nabla_w v^{||}) \ \ (\delta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\mathcal{D}^\flat(u,[w,z]) &= v_n g(Su, \nabla_w z) - v_n g(Su, \nabla_z w) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left\{-g(\nabla_u v^{||}, \nabla_w z) + g(\nabla_u v^{||}, \nabla_z w) - g(u, \nabla_{[w,z]} v^{||})\right\} \ \ (\epsilon) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^\flat(w,[z,u]) &= -v_n g(Sw, \nabla_z u) + v_n g(Sw, \nabla_u z) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left\{g(\nabla_w v^{||}, \nabla_z u) - g(\nabla_w v^{||}, \nabla_u z) + g(w, \nabla_{[z,u]} v^{||})\right\} \ (\sigma\tau) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^\flat(z,[u,w]) &= -v_n g(z, S\nabla_u w) + v_n g(Sz, \nabla_w u) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left\{g(\nabla_z v^{||}, \nabla_u w) - g(\nabla_z v^{||}, \nabla_w u) + g(z, \nabla_{[u,w]} v^{||})\right\} \ \ (\zeta). \end{aligned}$$

Στην συνέχεια πρέπει να αθροίσουμε κατά μέλη της α - ζ. Προκειμένου να απλοποιηθεί η διαδικασία θέτουμε:

$$\begin{aligned} Q^{||} &= -g(\nabla_{\nabla_u w} v^{||}, z) - g(\nabla_u w, \nabla_z v^{||}) \\ &\quad + \frac{1}{2}\{g(\nabla_u \nabla_w v^{||}, z) + g(\nabla_w v^{||}, \nabla_u z) + g(\nabla_u w, \nabla_z v^{||}) + g(w, \nabla_u \nabla_z v^{||})\} \\ &\quad + \frac{1}{2}\left\{g(\nabla_w \nabla_u v^{||}, z) + g(\nabla_u v^{||}, \nabla_w z) + g(\nabla_w u, \nabla_z v^{||}) + g(u, \nabla_w \nabla_z v^{||})\right\} \\ &\quad - \frac{1}{2}\left\{g(\nabla_z \nabla_u v^{||}, w) + g(\nabla_u v^{||}, \nabla_z w) + g(\nabla_z u, \nabla_w v^{||}) + g(u, \nabla_z \nabla_w v^{||})\right\} \\ &\quad + \frac{1}{2}\left\{-g(\nabla_u v^{||}, \nabla_w z) + g(\nabla_u v^{||}, \nabla_z w) - g(u, \nabla_{[w,z]} v^{||})\right\} \\ &\quad + \frac{1}{2}\left\{g(\nabla_w v^{||}, \nabla_z u) - g(\nabla_w v^{||}, \nabla_u z) + g(w, \nabla_{[z,u]} v^{||})\right\} \\ &\quad + \frac{1}{2}\left\{g(\nabla_z v^{||}, \nabla_u w) - g(\nabla_z v^{||}, \nabla_w u) + g(z, \nabla_{[u,w]} v^{||})\right\}. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Παρατηρούμε ότι η 4.36 ανάγεται, μετά από τις ομαδοποιήσεις όρων, στην:

$$\begin{aligned}
Q^{||} &= -g(\nabla_{\nabla_u w} v^{||}, z) + \frac{1}{2}\{g(\nabla_u \nabla_w v^{||}, z) + g(w, \nabla_u \nabla_z v^{||})\} \\
&+ \frac{1}{2}\left\{g(\nabla_w \nabla_u v^{||}, z) + g(u, \nabla_w \nabla_z v^{||})\right\} \\
&- \frac{1}{2}\left\{g(\nabla_z \nabla_u v^{||}, w) + g(u, \nabla_z \nabla_w v^{||})\right\} \\
&- \frac{1}{2} g(u, \nabla_{[w,z]} v^{||}) + \frac{1}{2} g(w, \nabla_{[z,u]} v^{||}) + \frac{1}{2} g(z, \nabla_{[u,w]} v^{||}), \qquad (4.37)
\end{aligned}$$

όπου

$$-g(\nabla_{\nabla_u w} v^{||}, z) = -g(\nabla_{v^{||}} \nabla_u w, z) - g([\nabla_u w, v^{||}], z). \qquad (4.38)$$

Η παράσταση 4.37 απλοποιείται περαιτέρω με χρήση της 4.38, ιδιοτήτων του τανυστή καμπυλότητας και της ταυτότητας Bianchi, στην:

$$\begin{aligned}
Q^{||} &= \frac{1}{2}\left\{g(R(v^{||}, w)u, z) - g(R(v^{||}, u)w, z) + g(R(w, u)v^{||}, z)\right\} \\
&+ \frac{1}{2} g(\nabla_{[w,u]} v^{||}, z) + \frac{1}{2} g(\nabla_{[u,w]} v^{||}, z) \\
&+ g([v^{||}, \nabla_u w], z) - g(\nabla_u [v^{||}, w], z) - g(\nabla_{[v^{||}, u]} w, z) \\
&= \frac{1}{2}\left\{g(R(u, v^{||})w + R(w, u)v^{||} + R(v^{||}, w)u, z\right\} \\
&+ g([v^{||}, \nabla_u w], z) - g(\nabla_u [v^{||}, w], z) - g(\nabla_{[v^{||}, u]} w, z) \\
&= g([v^{||}, \nabla_u w], z) - g(\nabla_u [v^{||}, w], z) - g(\nabla_{[v^{||}, u]} w, z) \\
&= g((\pounds_{v^{||}} \nabla)_u w, z) \qquad (4.39)
\end{aligned}$$

όπου η παράγωγος Lie της συνοχής ∇ δίνεται από τόν τύπο:

$$(\pounds_{v^{||}} \nabla)(u, w) = [v^{||}, \nabla_u w] - \nabla_{[v^{||}, u]} w - \nabla_u [v^{||}, w]. \qquad (4.40)$$

Περνάμε τώρα στην άθροιση κατά μέλη των σχέσεων (α) - (ζ). Χρησιμοποιώντας την 4.39 έχουμε:

$$\begin{aligned} g((\delta\nabla)_u w, z) &= -v_n g((\nabla_u S)w, z) - \{u(v_n)g(Sw, z) + w(v_n)g(Su, z)\} \\ &\quad - g(\nabla v_n, z)B(u, w) + v_n \{g(S\nabla_w u, z) - g(\nabla_w Su, z)\} \\ &\quad + v_n \{g(\nabla_z Su, w) - g(S\nabla_z u, w)\} + \mathcal{Q}^{||} \\ &= -v_n g((\nabla_u S)w, z) - \{u(v_n)g(Sw, z) + w(v_n)g(Su, z)\} \\ &\quad - g(\nabla v_n, z)B(u, w) - v_n g((\nabla_w S)u, z) + v_n g((\nabla_z S)u, w) \\ &\quad + g((\pounds_{v^{||}}\nabla)_u w, z), \end{aligned}$$

με $\nabla_\xi S$ συμμετρικό γιά κάθε $\xi \in \mathcal{X}(M)$, οπότε

$$\begin{aligned} g((\delta\nabla)_u w, z) &= -v_n g((\nabla_u S)w, z) - \{u(v_n)g(Sw, z) + w(v_n)g(Su, z)\} \\ &\quad - g(\nabla v_n, z)B(u, w) - v_n g(u, (\nabla_w S)z) + v_n v_n g((\nabla_z S)w, u) \\ &= -v_n g((\nabla_u S)w, z) - \{u(v_n)g(Sw, z) + w(v_n)g(Su, z)\} \\ &\quad - g(\nabla v_n, z)B(u, w) + v_n \{g(u, (\nabla_z S)w - (\nabla_w S)z)\} \\ &\quad + g((\pounds_{v^{||}}\nabla)_u w, z). \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση Codazzi 2.34 λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} g((\delta\nabla)_u w, z) &= -v_n g((\nabla_u S)w, z) - \{u(v_n)g(Sw, z) + w(v_n)g(Su, z)\} \\ &\quad - g(\nabla v_n, z)B(u, w) + v_n g\left(\mathcal{P}\overline{R}(Jw, Jz)n, u\right) \\ &= -v_n g((\nabla_u S)w, z) - \{u(v_n)g(Sw, z) + w(v_n)g(Su, z)\} \\ &\quad - g(\nabla v_n, z)B(u, w) + v_n g(\mathcal{P}\overline{R}(n, Ju)Jw, z) \\ &\quad + g((\pounds_{v^{||}}\nabla)_u w, z). \end{aligned} \tag{4.41}$$

Από την σχέση 4.41 έπεται η 4.35. □

Στην συνέχεια θα μελετήσουμε την μεταβολή της συνοχής Levi - Civita χρησιμοποιώντας τόν ορισμό 3.48.
Τό επόμενο λήμμα είναι βασικό γιά την μελέτη της μεταβολής αυτής.

Λήμμα 4.4.3. *Θεωρούμε τις επεκτάσεις $\overline{u}, \overline{w}$ των u, w οι οποίες επάγονται μέσω της κίνησης και τέτοιες ώστε $\pounds_v \overline{u} = \pounds_v \overline{w} = 0$.*

Ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}|_{\tau=t}\overline{\nabla}_{F_t(\tau)u}F_t(\tau)w = \overline{\nabla}_v\overline{\nabla}_{\overline{u}}\overline{w} \tag{4.42}$$

$$= \overline{R}(v, Ju)Jw + \overline{\nabla}_{Ju}Gw, \tag{4.43}$$

και

$$\frac{\partial}{\partial\tau}|_{\tau=t}\overline{\nabla}_{F_t(\tau)u}n(\tau) = \overline{\nabla}_v\overline{\nabla}_{\overline{u}}\overline{n} \tag{4.44}$$

$$= \overline{R}(v, Ju)\overline{n} + \overline{\nabla}_{Ju}Wn. \tag{4.45}$$

Απόδειξη. Πράγματι, εάν $\overline{u}$, $\overline{w}$ επεκτάσεις των J_tu, J_tw ορισμένες μέσα από την κίνηση $\phi_t(\tau)$ της M_t, πάνω στην N και τέτοιων ώστε $\pounds_v\overline{u} = 0$ (και $\pounds_v\overline{w} = 0$). Είναι:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\tau}|_{\tau=t}\overline{\nabla}_{F_t(\tau)u}F_t(\tau)w &= \overline{\nabla}_v\overline{\nabla}_{\bar{u}}\overline{w}\\ &= \overline{R}(v, \overline{u})\overline{w} + \overline{\nabla}_{\overline{u}}\overline{\nabla}_v\overline{w} + \overline{\nabla}_{[v,\overline{u}]}\overline{w}\\ &= \overline{R}(v, \overline{u})\overline{w} + \overline{\nabla}_{\overline{u}}\overline{\nabla}_v\overline{w},\end{aligned}$$

άρα, περιοριζόμενοι πάνω στην M_t, η σχέση

$$(\overline{\nabla}_v\overline{w})|_{M_t} = \overline{\nabla}_{Jw}v = Gw$$

αληθεύει. Συνεπώς

$$\frac{\partial}{\partial\tau}|_{\tau=t}\overline{\nabla}_{F_t(\tau)u}F_t(\tau)w = \overline{R}(v, Ju)Jw + \overline{\nabla}_{Ju}Gw.$$

Οι 4.42 - 4.43 αποδείχθηκαν.

Οι 4.44 - 4.45 είναι προκύπτουν αναλόγως εάν λάβουμε υπόψιν μας ότι $Wn = \delta n$. □

Πρόταση 4.4.4. *Η μεταβολή της Levi - Civita συνοχής δίνεται από τις ισοδύναμες εκφράσεις:*

$$(\delta\nabla)(u, w) = -\mathcal{P}G\nabla_uw + \mathcal{P}\overline{\nabla}_{Ju}Gw - B(u, w)\mathcal{P}Wn + \mathcal{P}\overline{R}(v, Ju)\overline{w}. \tag{4.46}$$

$$\begin{aligned}(\delta\nabla)(u, w) = &-v_n(\nabla_uS)w - \{w(v_n)Su + u(v_n)Sw\} + B(u, w)\nabla v_n\\ &+ v_n\mathcal{P}\overline{R}(n, Ju)Jw + (\pounds_{v^{||}}\nabla)_uw.\end{aligned} \tag{4.47}$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας την 4.43 γιά την τ - εξαρτώμενη συνοχή πάνω στην M_t, η οποία ορίζεται μέσω της 3.48, έχουμε:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\tau}|_{\tau=t}F_t(\tau)\nabla_{F_t(\tau)u}F_t(\tau)w &= \frac{\partial}{\partial\tau}|_{\tau=t}\overline{\nabla}_{F_t(\tau)u}F_t(\tau)w\\ &- \frac{\partial}{\partial\tau}|_{\tau=t}\left\{\overline{g}\left(\overline{\nabla}_{F_t(\tau)u}F_t(\tau)w, n(\tau)\right)n(\tau)\right\}\end{aligned}$$

άρα

$$\begin{aligned}G\nabla_u w + J(\delta\nabla)(u,w) &= \overline{R}(v,\overline{u})\overline{w} + \overline{\nabla}_{\overline{u}}Gw\\ &- \frac{\partial}{\partial\tau}|_{\tau=t}\left\{\overline{g}\left(\overline{\nabla}_{F_t(\tau)u}F_t(\tau)w, n(\tau)\right)\right\}\overline{n}\\ &- \overline{g}(\overline{\nabla}_{\overline{u}}\overline{w},\overline{n})\delta n. \qquad (4.48)\end{aligned}$$

Περνώντας στην προβολή $\mathcal{P}_t$ πάνω στην M_t συνάγεται:

$$(\delta\nabla)(u,w) = -\mathcal{P}G\nabla_u w + \mathcal{P}\overline{\nabla}_{Ju}Gw - B(u,w)\mathcal{P}Wn + \mathcal{P}\overline{R}(v,Ju)Jw,$$

και η 4.46 αποδείχθηκε.

Σχετικά με την 4.47 παρατηρούμε ότι, επειδή $\mathcal{P}G = \nabla v^{||} - v_n S$ και $\delta n = Wn = -\overline{\nabla}v_n - JSv^{||}$, έχουμε:

$$\begin{aligned}-\mathcal{P}G\nabla_u w &= v_n S\nabla_u w - \nabla_{\nabla_u w}v^{||}, \qquad (4.49)\\ \mathcal{P}\nabla_{Ju}Gw &= -v_n\nabla_u Sw - u(v_n)Sw - w(v_n)Su\\ &+ \nabla_u\nabla_w v^{||} - g(Sv^{||},w)Su, \qquad (4.50)\\ -B(u,w)\mathcal{P}Wn &= B(u,w)\nabla v_n + g(Su,w)Sv^{||}, \qquad (4.51)\\ \mathcal{P}\overline{R}(v,Ju)Jw &= v_n\mathcal{P}\overline{R}(n,Ju)Jw + R(v^{||},u)w\\ &+ g(Sv^{||},w)Su - g(Su,w)Sv^{||}. \qquad (4.52)\end{aligned}$$

άρα

$$
\begin{aligned}
(\delta\nabla)(u,w) &= \{v_n S\nabla_u w - v_n\nabla_u Sw\} - \{u(v_n)Sw + w(v_n)Su\} \\
&+ B(u,w)\nabla v_n + v_n\mathcal{P}\overline{R}(n,Ju)Jw - \nabla_{\nabla_u w}v^{||} \\
&+ \nabla_u\nabla_w v^{||} - g(Sv^{||},w)Su + g(Su,w)Sv^{||} \\
&+ R(v^{||},u)w + g(Sv^{||},w)Su - g(Su,w)Sv^{||} \\
&= -v_n(\nabla_u S)w - \{u(v_n)Sw + w(v_n)Su\} \\
&+ B(u,w)\nabla v_n + v_n\mathcal{P}\overline{R}(n,Ju)Jw \\
&- \nabla_{\nabla_u w}v^{||} + \nabla_u\nabla_w v^{||} + R(v^{||},u)w
\end{aligned}
\tag{4.53}
$$

όπου

$$
\begin{aligned}
-\nabla_{\nabla_u w}v^{||} &= -\nabla_{v^{||}}\nabla_u w - [\nabla_u w, v^{||}] \\
&= -R(v^{||},u)w - \nabla_u\nabla_{v^{||}}w - \nabla_{[v^{||},u]}w - [\nabla_u w, v^{||}] \\
&= [v^{||},\nabla_u w] - \nabla_{[v^{||},u]}w - \nabla_u\nabla_{v^{||}}w - R(v^{||},u)w
\end{aligned}
\tag{4.54}
$$

Από τις 4.49 -4.54 προκύπτει:

$$
\begin{aligned}
(\delta\nabla)(u,w) &= -v_n(\nabla_u S)w - \{w(v_n)Su + u(v_n)Sw\} + B(u,w)\nabla v_n \\
&+ v_n\mathcal{P}\overline{R}(n,Ju)Jw + [v^{||},\nabla_u w] - \nabla_{[v^{||},u]}w - \nabla_u\nabla_{v^{||}}w \\
&- R(v^{||},u)w + R(v^{||},u)w + \nabla_u\nabla_w v^{||}
\end{aligned}
$$

συνεπώς

$$
\begin{aligned}
(\delta\nabla)(u,w) &= -v_n(\nabla_u S)w - \{w(v_n)Su + u(v_n)Sw\} + B(u,w)\nabla v_n \\
&+ v_n\mathcal{P}\overline{R}(n,Ju)Jw + [v^{||},\nabla_u w] - \nabla_{[v^{||},u]}w \\
&- \nabla_u\nabla_{v^{||}}w + \nabla_u\nabla_w v^{||} \\
&= -v_n(\nabla_u S)w - \{w(v_n)Su + u(v_n)Sw\} + B(u,w)\nabla v_n \\
&+ v_n\mathcal{P}\overline{R}(n,Ju)Jw + [v^{||},\nabla_u w] - \nabla_{[v^{||},u]}w - \nabla_u[v^{||},w].
\end{aligned}
\tag{4.55}
$$

Χρησιμοποιώντας την 4.40 γιά την παράγωγο Lie της συνοχής και τις σχέσεις 4.55, 4.40 προκύπτει η 4.47. $\square$

Επισήμανση 4.4.5. *Παρατηρούμε ότι η γεωμετρική έκφραση 4.35 γιά την μεταβολή της συνοχής Levi - Civita, πού προέκυψε εφαρμόζοντας τόν τύπο Koszul, και η έκφραση 4.47, πού προέκυψε με εφαρμογή του ορισμού 3.48 είναι ταυτόσημες.*

Πρόταση 4.4.6. *Η μεταβολή του τανυστή καμπυλότητας της M δίνεται από την*

$$
\begin{aligned}
(\delta R)(u,w)z &= \{-2\mathcal{D}S - \delta S - S\}^\flat (u,z)Sw \\
&+ \{2\mathcal{D}S + \delta S + S\}^\flat (w,z)Su \\
&+ \left\{(\nabla_u S^\flat)(w,z) - (\nabla_w S^\flat)(u,z)\right\} \mathcal{P}Wn. \qquad (4.56)
\end{aligned}
$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε τόν ορισμό 3.50 γιά τόν τ - εξαρτώμενο τανυστή καμπυλότητας Riemann $R_t(\tau)$ πανω στην M_t.
Παραγωγίζουμε τα μέλη της 3.50 ως πρός τ, γιά $\tau = t$, και περνάμε στην προβολή $\mathcal{P}_t$:

$$
\begin{aligned}
\delta R(u,w)z &= -\delta g(Su,z)Sw - g(\delta Su,z)Sw - g(Su,z)\delta Sw \\
&+ \delta g(Sw,z)Su + g(\delta Sw,z)Su + g(Sw,z)\delta Su \\
&+ \{(\nabla_u B)(w,z) - (\nabla_w B)(u,z)\} \mathcal{P}Wn \\
&= -2(\mathcal{D}S)^\flat(u,w)Sz - (\delta S)^\flat(u,z)Sw - S^\flat(u,z)Sw \\
&+ 2(\mathcal{D}S)^\flat(w,z)Su + (\delta S)^\flat(w,z)Su + S^\flat(w,z)Su \\
&+ \{(\nabla_u B)(w,z) - (\nabla_w B)(u,z)\} \mathcal{P}Wn, \qquad (4.57)
\end{aligned}
$$

από την οποία προκύπτει η 4.56. □

5 Εφαρμογές – Ειδικές Κινήσεις

5.1 Εφαπτομενική κίνηση

Μιά κίνηση καλείται **εφαπτομενική** εάν τό πεδίο ταχύτητας έχει μόνον εφαπτομενική συνιστώσα, δηλαδή εάν $v = Jv^{||}$.
Οι σχέσεις 3.29 - 3.34 ανάγονται στις:

$$
\begin{aligned}
Gu &= J\nabla_u v^{||} + B(u, v^{||})n,\ \mathcal{P}G = \nabla v^{||},\\
2\mathcal{D} &= \nabla v^{||} + \nabla v^{||^T},\ 2\mathcal{D}^\flat = \pounds_{v^{||}} g,\\
WJu &= J\left\{\frac{\nabla v^{||} - \nabla v^{||^T}}{2}\right\} u + B(u, v^{||})n,\\
2\mathcal{P}WJ &= \nabla v^{||} - \nabla v^{||^T}
\end{aligned}
$$

Οι περισσότερες από τις εξισώσεις μεταβολής των γεωμετρικών μεγεθών, τα οποία μελετήσαμε στό προηγούμενο κεφάλαιο, ανάγονται σε παραγώγους Lie κατά την κατεύθυνση $v^{||}$.
Η μεταβολή του μοναδιαίου καθετικού πεδίου όμως δίνεται από την

$$\delta n = \overline{\nabla}_v \bar{n}$$

και στην περίπτωση του τανυστή καμπυλότητας Riemann R, για εφαπτομενική κίνηση, ισχύει:

$$\begin{aligned}(\delta R)(u,w)z = &\{g((\nabla_{v^{||}}S)w,z)Su - g((\nabla_{v^{||}}S)u,z)Sw\}\\ &+ \{g(Sw,\nabla_z v^{||})Su - g(Su,\nabla_z v^{||})Sw\}\\ &+ \{g(z,S\nabla_w v^{||})Su - g(z,S\nabla_u v^{||})Sw\}\\ &+ \{g(Su,z)Sw - g(Sw,z)Su\}\\ &- \{(\nabla_u B)(w,z) - (\nabla_w B)(u,z)\}Sv^{||}. \qquad (5.1)\end{aligned}$$

Πράγματι, εάν θέσουμε $\mathcal{A} = 2\mathcal{D}S + \delta S + S$ στην 4.56, τότε:

$$\mathcal{A}^\flat(w,z)Su = g((\nabla_{v^{||}}S)w,z)Su + g(Sw,\nabla_z v^{||})Su + g(z,S\nabla_w v^{||})Su \ (\mathbf{i})$$
$$-\mathcal{A}^\flat(u,z)Sw = -g((\nabla_{v^{||}}S)u,z)Sw - g(Su,\nabla_z v^{||})Sw - g(z,S\nabla_u v^{||})Sw \ (\mathbf{ii})$$
$$S^\flat(w,z)Su = g(Sw,z)Su,\ S^\flat(u,z)Sw = g(Su,z)Sw \ (\mathbf{iii})$$

και

$$(\nabla_u B)(w,z) - (\nabla_w B)(u,z) = g((\nabla_w S)u - (\nabla_u S)w, z) \ (\mathbf{iv}).$$

Από τις (**i**) - (**iv**) και την συμμετρία των δS και $\nabla_{v^{||}}S$, προκύπτει η 5.1.

Πόρισμα 5.1.1. *Εάν M υπόκειται σε εφαπτομενική κίνηση εντός της N, τότε:*

- $\delta g = \pounds_{v^{||}} g$ *συνεπώς:* $\delta g = 0$ *εάν και μόνον εάν* $v^{||}$ *διανυσματικό πεδίο Killing ως πρός την μετρική* g.
- $\delta n = -JSv^{||}$ *συνεπώς:* $\delta n = 0$ *εάν και μόνον εάν* $Sv^{||} = 0$ *συνεπώς μιά εκ των κυρίων καμπυλοτήτων είναι μηδενική άρα και η καμπυλότητα Gauss της* M *είναι μηδενική.*
- $\delta\omega = \mathrm{div} v^{||}\omega$ *συνεπώς:* $\delta\omega = 0$ *εάν και μόνον εάν* $\mathrm{div} v^{||} = 0$ *εάν και μόνον εάν* $\pounds_{v^{||}}\omega = 0$.
- $\delta S = \pounds_{v^{||}} S$ *συνεπώς:* $\delta S = 0$ *εάν και μόνον εάν* $v^{||}(k_i) = 0$ *και* $\mathrm{curl}\, v^{||} = 0$.

- *$\delta\nabla = \pounds_{v^{||}}\nabla$ συνεπώς: $\delta\nabla = 0$ εάν και μόνον εάν $\pounds_{v^{||}}\nabla = 0$, δηλαδή εάν και μόνον εάν τό $v^{||}$ είναι affine διανυσματικό πεδίο γιά την συνοχή ∇.*

5.2 Καθετική κίνηση

Θά ονομάζουμε μιά κίνηση καθετική εάν τό διανυσματικό πεδίο ταχύτητος είναι παράλληλο του καθετικού πεδίου ($v = v_n n,\ v^{||} = 0$). Κινήσεις αυτού του είδους είναι ιδιαίτερα σημαντικές στην Διαφορική Γεωμετρία. Στην περίπτωση αυτή οι κινηματικές ποσότητες είναι:

$$Gu = -v_n JSu + Ju(v_n)n, \tag{5.2}$$

$$\mathcal{D} = -v_n S = \mathcal{P}G, \tag{5.3}$$

$$WJu = Ju(v_n)n = \overline{g}(\overline{\nabla} v_n, Ju)n,\ \mathcal{P}WJ = 0. \tag{5.4}$$

Οι εξισώσεις μεταβολής της μετρικής, του μοναδιαίου καθετικού, του τελεστή σχήματος και τού εμβαδικού στοιχείου, κατά την καθετική κίνηση, λαμβάνουν την μορφή:

$$\delta g = -2v_n B, \tag{5.5}$$

$$\delta n = -\overline{\nabla} v_n = Wn, \tag{5.6}$$

$$\delta Su = v_n S^2 u + \nabla_u \nabla v_n - v_n \mathcal{P}\overline{R}(n, Ju)\overline{n}, \tag{5.7}$$

$$\delta\omega = -m v_n H. \tag{5.8}$$

Γιά τήν δεύτερη και τρίτη θεμελιώδη

$$\delta B = \mathrm{Hess}_{v_n}(u,w) - v_n III(u,w) - v_n \overline{g}(\overline{R}(n,Ju)n, Jw), \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned} \delta III(u,w) &= \mathrm{Hess}_{v_n}(u,Sw) + \mathrm{Hess}_{v_n}(Su,w) \\ &\quad - v_n \left\{ g(\mathcal{P}\overline{R}(n,Ju)n, Sw) + g(Su, \mathcal{P}\overline{R}(n,Jw)n) \right\} \end{aligned} \tag{5.10}$$

και γιά τις κύριες καμπυλότητες, την μέση και την καμπυλότητα Gauss

$$\delta k_i = \mathrm{Hess}_{v_n}(e_i, e_i) + v_n k_i^2 - v_n g(\mathcal{P}\overline{R}(n, Je_i)n, e_i), \tag{5.11}$$

$$\delta H = \Delta v_n + v_n \sum_{i=1}^{m} k_i^2 + v_n \overline{\mathrm{Ric}}(n, n), \tag{5.12}$$

$$\begin{aligned} \delta K = {} & m v_n H K + \sum_{i=1}^{m} \widehat{K_i} \mathrm{Hess}_{v_n}(e_i, e_i) \\ & - v_n \sum_{i=1}^{m} \widehat{K_i} g(\mathcal{P}\overline{R}(n, Je_i)n, e_i). \end{aligned} \tag{5.13}$$

Γιά την μεταβολή της συνοχής Levi-Civita έχουμε:

$$\begin{aligned} (\delta\nabla)(u, w) = {} & -v_n(\nabla_u S)w - \{u(v_n)Sw + w(v_n)Su\} \\ & - B(u, w)\nabla v_n + \mathcal{P}\overline{R}(n, Ju)Jw. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Η μεταβολή του τανυστή καμπυλότητας Riemann υπερεπιφάνειας, στην περίπτωση καθετικής κίνησης, δίνεται από την:

$$\begin{aligned} (\delta R)(u, w)z = {} & v_n \left\{\mathcal{P}\overline{R}(JSu, JSw)Jz - R(Su, Sw)z\right\} \\ & + \left\{\mathcal{P}\overline{R}(Jw, Ju)Jz - R(w, u)z\right\} \\ & + \mathrm{Hess}_{v_n}(w, z)Su - \mathrm{Hess}_{v_n}(u, z)Sw \\ & - \left\{(\nabla_u B)(w, z) - (\nabla_w B)(u, z)\right\} \nabla v_n. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Πράγματι, με χρήση της 4.56 εκφράζουμε την μεταβολή του τανυστή καμπυλότητας γιά καθετική κίνηση:

$$\begin{aligned} -\delta g(Su, z)Sw &= 2v_n III(u, z)Sw, \\ -g(\delta Su, z)Sw &= -v_n III(u, z)Sw - \mathrm{Hess}_{v_n}(u, z)Sw \\ & \quad + v_n g(\mathcal{P}\overline{R}(n, Ju)n, z)Sw, \\ -g(Su, z)Sw &= -B(u, z)Sw, \\ \delta g(Sw, z)Su &= -2v_n III(w, z)Su, \\ g(\delta Sw, z)Su &= v_n III(w, z)Su + \mathrm{Hess}_{v_n}(w, z)Su \\ & \quad - v_n g(\mathcal{P}\overline{R}(n, Jw)n, z)Su, \\ g(Sw, z)Su &= B(w, z)Su, \end{aligned} \tag{5.16}$$

άρα

$$\begin{aligned}(\delta R)(u,w)z &= v_n \left\{ g(S(Su),z)Sw - g(S(Sw),z)Su \right\} \\ &+ \left\{ g(Sw,z)Su - g(Su,z)Sw \right\} \\ &+ \mathrm{Hess}_{v_n}(w,z)Su - \mathrm{Hess}_{v_n}(u,z)Sw \\ &+ v_n \left\{ g(\mathcal{P}\overline{R}(n,Ju)n,z)Sw - g(\mathcal{P}\overline{R}(n,Jw)n,z)Su \right\} \\ &- \left\{ (\nabla_u B)(w,z) - (\nabla_w B)(u,z) \right\} \nabla v_n\end{aligned}$$

συνεπώς

$$\begin{aligned}(\delta R)(u,w)z &= v_n \left\{ \mathcal{P}\overline{R}(JSu,JSw)Jz - R(Su,Sw)z \right\} \\ &+ \left\{ \mathcal{P}\overline{R}(w,u)Jz - R(w,u)z \right\} \\ &+ \mathrm{Hess}_{v_n}(w,z)Su - \mathrm{Hess}_{v_n}(u,z)Sw \\ &- \left\{ (\nabla_u B)(w,z) - (\nabla_w B)(u,z) \right\} \nabla v_n.\end{aligned}$$

δηλαδή ή 5.15.
Εάν υποθέσουμε ότι η περιβάλλουσα πολλαπλότητα N είναι σταθερής διατμητικής καμπυλότητας c_N τότε, γιά $\{Ju, Jw\}$ μοναδιαία, έχουμε:

$$\begin{aligned}\overline{R}(n,Ju)n &= \overline{g}(\overline{R}(n,Ju)n,Ju)Ju + \overline{g}(\overline{R}(n,Ju)n,n)n \\ &= \overline{g}(\overline{R}(n,Ju)n,Ju)Ju = c_N Ju\end{aligned}$$

και οι εξισώσεις μεταβολής 5.11 των κυρίων καμπυλοτήτων, 5.12 της μέσης καμπυλότητας και 5.13 της καμπυλότητας Gauss, ανάγονται στις

$$\delta k_i = \mathrm{Hess}_{v_n}(e_i,e_i) + v_n k_i^2 - v_n c_N, \tag{5.17}$$

$$\delta H = \Delta v_n + v_n \sum_{i=1}^{m} k_i^2 + m v_n c_N, \tag{5.18}$$

$$\delta K = m v_n H K + \sum_{i=1}^{m} \widehat{K_i} \mathrm{Hess}_{v_n}(e_i,e_i) - v_n c_N \sum_{i=1}^{m} \widehat{K_i} \tag{5.19}$$

αντιστοίχως.

Πόρισμα 5.2.1. *Έστω η υπερεπιφάνεια M η οποία κινείται καθετικά εντός της πολλαπλότητας Riemann N. Τότε:*

- $\delta g = 0$ *εάν καί μόνον εάν* M *ολικώς γεωδαισιακή στην* N,
- $\delta n = 0$ *εάν και μόνον εάν* $\overline{\nabla} v_n = 0$.
- $\delta\omega = 0$ *εάν και μόνον εάν* $H = 0$, *δηλαδή εάν και μόνον εάν η* M *είναι ελαχιστική στην* N.

Εάν επιπλέον υποθέσουμε ότι η N *είναι Ευκλείδια τότε*

- $\delta S = 0$ *εάν και μόνον εάν*

  $$\mathrm{Hess}_{v_n}(e_i, e_i) = -v_n k_i^2, \quad \mathrm{Hess}_{v_n}(e_i, e_j) = 0,$$

  άρα και $\delta k_i = 0$.
- $\delta H = 0$ *εάν και μόνον εάν τό μέτρο ταχύτητας* v_n *είναι λύση του προβλήματος ιδιοτιμών*

  $$\Delta v_n + v_n \sum_{i=1}^{m} k_i^2 = 0.$$

5.2.1 Παράλληλη κίνηση

Μιά κίνηση καλείται **παράλληλη** εάν είναι καθετική και επιπλέον $\nabla v_n = 0$ ($v_n = \epsilon(t)$). Τα κινηματικά τανυστικά πεδία δίνονται από τις σχέσεις

$$G = J\mathcal{D} = -v_n JS, \ \mathcal{P}G = \mathcal{D} = -v_n S, \ W \equiv 0. \tag{5.20}$$

Οι εξισώσεις μεταβολής ανάγονται στις:

$$\delta g = -2v_n(t)B, \tag{5.21}$$

$$Wn = 0, \tag{5.22}$$

$$\delta S u = v_n S^2 u - v_n \mathcal{P}\overline{R}(n, Ju)n, \tag{5.23}$$

$$\delta B(u, w) = -v_n III(u, w) - v_n \overline{g}(\overline{R}(n, Ju)n, Jw), \tag{5.24}$$

$$\delta III(u, w) = -v_n \left\{ g(\mathcal{P}\overline{R}(n, Ju)n, Sw) + g(Su, \mathcal{P}\overline{R}(n, Jw)n) \right\}, \tag{5.25}$$

$$\delta\omega = -m v_n H. \tag{5.26}$$

Η μεταβολή της συνοχής δίνεται από τήν έκφραση:

$$(\delta\nabla)(u,w) = -v_n(\nabla_u S)w + \mathcal{P}\overline{R}(n,Ju)Jw \tag{5.27}$$

και η μεταβολή του τανυστή καμπυλότητας από την

$$\begin{aligned}\delta R(u,w)z &= v_n\left\{\mathcal{P}\overline{R}(JSu,JSw)Jz - R(Su,Sw)z\right\}\\ &\quad + \left\{\mathcal{P}\overline{R}(Jw,Ju)Jz - R(w,u)z\right\}.\end{aligned} \tag{5.28}$$

Στην περίπτωση κατά την οποία ο περιβάλλων χώρος είναι Ευκλείδιος οι εξισώσεις μεταβολών απλοποιούνται με την απαλοιφή του όρου της καμπυλότητας $\overline{R}$:

$$\begin{aligned}\delta g &= -2v_n(t)S,\ \delta n = 0,\\ \delta B &= -v_n III,\ \delta III = 0,\ \delta\omega = -mv_n H,\\ (\delta\nabla)_u w &= -v_n(\nabla_u S)w,\\ (\delta R)(u,w)z &= -v_n R(Su,Sw)z - R(w,u)z.\end{aligned}$$

Παράλληλες επιφάνειες Ευκλείδιου χώρου

Έστω M προσανατολισμένη επιφάνεια του Ευκλείδιου χώρου $\mathbb{E}$ με n μοναδιαίο καθετικό πεδίο M και S τελεστή σχήματος. Η απεικόνιση

$$\phi_t(X,\tau) = j(X) + (\epsilon(\tau) - \epsilon(t))n(X)$$

περιγράφει την παράλληλη κίνηση της επιφάνειας M στην κατεύθυνση της καθέτου της. Τότε τα κινηματικά μεγέθη τα προσαρτημένα στην κίνηση δίνονται από τις παρακάτω εξισώσεις ([2], σελ. 15):

$$F_t(\tau) = J_t(I - (\epsilon(\tau) - \epsilon(t))S(t), \tag{5.29}$$
$$\widetilde{F}_t(\tau) = (I - (\epsilon(\tau) - \epsilon(t))S(t)), \tag{5.30}$$
$$R = I,\, U(t) = \widetilde{F}(t), \tag{5.31}$$
$$S_t(\tau) = (I - (\epsilon(\tau) - \epsilon(t))S(t))^{-1}S(t), \tag{5.32}$$
$$g_t(\tau) = g(t) - 2(\epsilon(\tau) - \epsilon(t))B(t) - (\epsilon(\tau) - \epsilon(t))^2(t), \tag{5.33}$$
$$G(t) = -\epsilon'(t)J_tS(t), \tag{5.34}$$
$$\mathcal{D}(t) = -\epsilon'(t)S(t), \tag{5.35}$$
$$W(t) = 0. \tag{5.36}$$

Επιπλέον έχουμε και τούς επόμενους τύπους για την καμπυλότητα Gauss και την μέση καμπυλότητα ([2], σελ. 16):

$$K_t(\tau) = \frac{K(t)}{1 - 2(\epsilon(\tau) - \epsilon(t))H(t) + (\epsilon(\tau) - \epsilon(t))^2K(t)}, \tag{5.37}$$
$$H_t(\tau) = \frac{H(t) - (\epsilon(\tau) - \epsilon(t))K(t)}{1 - 2(\epsilon(\tau) - \epsilon(t))H(t) + (\epsilon(\tau) - \epsilon(t))^2K(t)} \tag{5.38}$$

Χρησιμοποιώντας τις 5.29 - 5.36 επαληθεύουμε τις εξισώσεις μεταβολής της γεωμετρίας επιφάνειας (ή υπερεπιφάνειας) μέσα σε Ευκλείδιο χώρο.

Σημείωση 5.2.2. *Από τούς τύπους 5.38, 5.37 διαπιστώνουμε τό γνωστό: όταν η μετατόπιση του κάθε σημείου της επιφάνειας τείνει πρός κάποια από τις ακτίνες καμπυλότητας, δηλαδή* $\epsilon_t(\tau) \to \frac{1}{k_i}$*, τότε οι* $K_t(\tau)$, $H_t(\tau)$ *τείνουν στό άπειρο, όπου* $\epsilon_t(\tau) = \epsilon(\tau) - \epsilon(t)$.

5.3 Απειροστικές παραλληλίες

Μιά κίνηση καλείται **απειροστική παραλληλία** (infinitesimal parallel motion) εάν και μόνον εάν $\delta n = 0$.

Πρόταση 5.3.1. *Μιά κίνηση είναι* **απειροστική παραλληλία** *(infinitesimally parallel motion) ([27], [25]) εάν και μόνον εάν*

$$\overline{g}(\overline{\nabla}_{Ju}v, n) = 0, \ \forall u \in \mathcal{X}(M).$$

Απόδειξη. Πράγματι, η ισοδυναμία είναι άμεση απόρροια της σχέσης 3.29 και του ότι

$$\begin{aligned}\overline{g}(\overline{\nabla}_{Ju}v, n) &= \overline{g}(Gu, n) = B(u, v^{||}) + u(v_n) \\ &= g(Sv^{||}, u) + g(\nabla v_n, u),\end{aligned}$$

για κάθε $u \in \mathcal{X}(M)$. □

Τό παρακάτω δίνει την σχέση μεταξύ εφαπτομενικής και καθετικής συνιστώσας της ταχύτητας ώστε να επιτευχθεί απειροστικά παράλληλη κίνηση.

Πόρισμα 5.3.2. *Η κίνηση της M με πεδίο ταχύτητας $v = Jv^{||} + v_n n$ είναι απειροστική παραλληλία εάν και μόνον εάν*

$$Sv^{||} + \nabla v_n = 0 \tag{5.39}$$

Οι τύποι κάποιων κινηματικών τανυστικών μεγεθών απλοποιούνται και κατά συνέπεια και κάποιες από τις εκφράσεις για τις μεταβολές των γεωμετρικών μεγεθών της υπερεπιφάνειας.
Συγκεκριμένα, γιά τα κινηματικά μεγέθη ισχύουν οι:

$$G = J\left\{\nabla v^{||} - v_n S\right\}, \ \mathcal{P}G = \nabla v^{||} - v_n S, \tag{5.40}$$

$$2WJ = J\left\{\nabla v^{||} - v^{||^T}\right\}, \ 2\mathcal{P}WJ = \nabla v^{||} - v^{||^T}. \tag{5.41}$$

Για τις εξισώσεις μεταβολών παρατηρούμε ότι απλοποιείται ο τύπος 4.8 μεταβολής του τελεστή σχήματος:

$$(\delta S)u = -\mathcal{P}GSu - \mathcal{P}\overline{R}(v, Ju)\overline{n}, \tag{5.42}$$

$$(\delta S)u = v_n S^2 u - v_n \mathcal{P}\overline{R}(n, Ju)\overline{n} + (\pounds_{v^{||}} S)u - \nabla_u S v^{||} \tag{5.43}$$

Για τις μεταβολές των κυρίων καμπυλοτήτων έχουμε:

$$\delta k_i = v_n k_i^2 + v^{||}(k_i) + g(\nabla_{e_i} S v^{||}, e_i) - v_n g(\mathcal{P}\overline{R}(n, Je_i)\overline{n}, e_i). \quad (5.44)$$

Η μεταβολή της μέσης καμπυλότητας και της καμπυλότητας Gauss δίνονται από τις:

$$\delta H = v_n \sum_{i=1}^{m} k_i^2 + m v^{||}(H) + \operatorname{div} S v^{||} + v_n \overline{\mathrm{Ric}}\,(n, \overline{n}), \quad (5.45)$$

$$\begin{aligned} \delta K = {} & m v_n H K + v^{||}(K) + \sum_{i=1}^{m} \widehat{K}_i g(\nabla_{e_i} S v^{||}, e_i) \\ & - v_n \sum_{i=1}^{m} \widehat{K}_i g(\mathcal{P}\overline{R}(n, Je_i)\overline{n}, e_i). \end{aligned} \quad (5.46)$$

Η μεταβολή της συνοχής δίνεται από την

$$(\delta\nabla)(u, w) = -\mathcal{P}G\nabla_u w + \mathcal{P}\overline{\nabla}_{Ju} G w + \mathcal{P}\overline{R}(v, Ju)\overline{w} \quad (5.47)$$

Η έκφραση 4.56 γιά την μεταβολή του τανυστή καμπυλότητας ανάγεται στην:

$$\begin{aligned} (\delta R)(u, w)z = {} & \{-2\mathcal{D}S - \delta S - S\}^{\flat}(u, z) S w \\ & + \{2\mathcal{D}S + \delta S + S\}^{\flat}(w, z) S u. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Στην συνέχεια θα μελετήσουμε ένα υποσύνολο των απειροστικώς παράλληλων κινήσεων, τις κινήσεις μηδενικού ρυθμού στροφής.

5.3.1 Κινήσεις μηδενικού ρυθμού στροφής

Ως κινήσεις **μηδενικού ρυθμού στροφής** (zero spin motions) ορίζονται οι κινήσεις γιά τις οποίες $W \equiv 0$.
Επειδή η κλίση ταχύτητας είναι τότε $G = J\mathcal{D}$ μιά τέτοια κίνηση λέγεται **κίνηση γνήσιου ρυθμού παραμόρφωσης** (pure strain motions) ([30]) .

Οι κινήσεις αυτές προφανώς αποτελούν υποσύνολο του χώρου των απειροστικά παράλληλων κινήσεων αφού $W \equiv 0$. Τά κινηματικά μεγέθη γιά $W = 0$ γίνονται:

$$G = J\mathcal{D}, \;\; Wn = 0, \; WJu = 0.$$

Στην επόμενη πρόταση χαρακτηρίζουμε τις κινήσεις μηδενικού spin.

Πρόταση 5.3.3. *Μιά κίνηση της M με πεδίο ταχύτητας $v = Jv^{||} + v_n n$ είναι μηδενικού ρυθμού στροφής εάν και μόνον εάν ισχύουν οι συνθήκες:*

$$\nabla v^{||} = \nabla v^{||^T}, \;\; Sv^{||} = -\nabla v_n, \tag{5.49}$$

ή, ισοδύναμα:

$$\mathrm{curl}\, v^{||} = 0, \;\; Sv^{||} = -\nabla v_n. \tag{5.50}$$

Απόδειξη. Η 5.49 είναι απόρροια των 3.34, 4.6 από τις οποίες προκύπτουν οι

$$\nabla v^{||} = \nabla v^{||^T}, \; B(u, v^{||}) + u(v_n) = 0, \; Sv^{||} = -\nabla v_n$$

με τις δύο τελευταίες να είναι ισοδύναμες.
Η 5.50 είναι απόρροια της 3.37. □

Είναι γνωστό [4] ότι, εάν $u \in \mathcal{X}(M)$ και $\mathrm{curl}\, u = 0$ τότε υπάρχει μιά $\phi \in C^\infty(M)$ τέτοια ώστε $u = \nabla\phi$. Ισχύει λοιπόν:

Πόρισμα 5.3.4. *Η κίνηση της M με $v = Jv^{||} + v_n n$ είναι μηδενικού spin εάν και μόνον εάν υπάρχει $\phi \in C^\infty(M)$ τέτοια ώστε:*

$$S\nabla\phi = -\nabla v_n, \tag{5.51}$$

με $v^{||} = \nabla\phi$.

Πόρισμα 5.3.5. *Ισχύουν τα παρακάτω:*

- *Μιά καθετική κίνηση της M εντός της N είναι μηδενικού ρυθμού στροφής εάν και μόνον εάν η κίνηση είναι παράλληλη.*

- *Μιά εφαπτομενική κίνηση της M εντός της N είναι μηδενικού ρυθμού στροφής εάν και μόνον εάν* $\operatorname{curl} v^{||} = 0$ *και* $Sv^{||} = 0$. *Η συνθήκη* $Sv^{||} = 0$ *σημαίνει ότι* $v^{||}$ *παραμένει κύρια διεύθυνση της* M *με αντίστοιχη μηδενική ιδιοτιμή και προφανώς η* M *είναι μηδενικής καμπυλότητας Gauss.*

Τό συμπέρασμα της επόμενης πρότασης έχει αποδειχθεί και στό [30], η προσέγγιση την οποία χρησιμοποιούμε εδώ είναι διαφορετική.

Πρόταση 5.3.6. *Εάν μιά κίνηση της υπερεπιφάνειας M εντός του Ευκλείδιου χώρου $\mathbb{E}$ είναι μηδενικού ρυθμού στροφής τότε $\delta III = 0$ και $S(t)$, $S_t(\tau)$ έχουν κοινό σύνολο ιδιοδιανυσμάτων.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η κίνηση είναι μηδενικού spin $W \equiv 0$. Τότε $R_t(\tau)$ είναι ανεξάρτητο του τ.
Χρησιμοποιώντας τις 4.8, 4.10 και την αντιμεταθετικότητα των $\mathcal{D}$, S έχουμε:

$$\begin{aligned}(\delta S)S &= -\mathcal{D}S^2,\\ S\delta S &= -S\mathcal{D}S = -\mathcal{D}S^2,\\ 2S\mathcal{D}S &= 2\mathcal{D}S^2\end{aligned}$$

από όπου προκύπτει η $\delta III = 0$.
Έστω $R(t) = I_{\mathcal{V}}$, τότε $F_t(\tau) = J_t U_t(\tau)$, $n(\tau) = n(t)$ και ο $S_t(\tau)$ δίνεται από την:

$$\begin{aligned}F_t(\tau)S_t(\tau) &= -\overline{\nabla}_{F_t(\tau)u} n(\tau) = -\overline{\nabla}_{F_t(\tau)u} n(t)\\ &= -\overline{\nabla}_{J_t u} n(t) = J_t S(t) u.\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$U_t(\tau)S_t(\tau) = S(t)$$

συνεπώς:

$$S_t(\tau) = S(t)U_t^{-1}(\tau).$$

Εάν $S(t)e_i = \lambda_i(t)e_i$ ιδιοδιάνυσμα του $S(t)$ με ιδιοτιμή $\lambda_i(t)$ τότε, $U_t^{-1}(\tau)e_i$ είναι επίσης ιδιοδιάνυσμα του $S(t)$ και

$$S(t)U_t^{-1}(\tau)e_i = \lambda_i(t)U_t^{-1}(\tau)(e_i),$$

υπάρχει λοιπόν $\mu_t(\tau)$ συνάρτηση τέτοια ώστε:

$$U_t^{-1}(\tau)e_i = \mu_t(\tau)e_i,$$

άρα

$$\begin{aligned} S_t(\tau)e_i &= S(t)U_t^{-1}(\tau)e_i \\ &= \mu_t(\tau)\lambda_i(t)e_i = \frac{\rho_t(\tau)}{\lambda_i(t)}e_i \end{aligned} \tag{5.52}$$

όπου $\rho_t(t)$ ιδιοτιμή του $U_t(\tau)$. Από την 5.52 συμπεραίνουμε ότι οι $S(t)$, $S_t(\tau)$ έχουν κοινά ιδιοδιανύσματα άρα και οι κύριες διευθύνσεις διατηρούνται. $\square$

5.4 Απειροστικές ισομετρίες

Σε αναλογία πρός τις κινήσεις μηδενικού spin, στις οποίες αναφερθήκαμε στην προηγούμενη ενότητα, ορίζουμε και τις κινήσεις **μηδενικού ρυθμού παραμόρφωσης** για τις οποίες ισχύει $\mathcal{D} \equiv 0$.

Είναι γνωστό, ([23],[29]) ότι μιά κίνηση καλείται **απειροστική ισομετρία** (infinitesimal isometry) εάν και μόνον εάν $\delta g = 0$.

Από την σχέση 4.2 συμπεραίνουμε ότι μιά κίνηση είναι απειροστική ισομετρία εάν και μόνον εάν είναι μηδενικού ρυθμού παραμόρφωσης.

Τά κινηματικά μεγέθη στην περίπτωση αυτή δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= 0, \\ G &= WJ, \\ \mathcal{P}G &= \mathcal{P}WJ = \operatorname{curl} v^{||}. \end{aligned}$$

Οι εξισώσεις μεταβολής για απειροστική ισομετρική κίνηση λαμβάνουν την παρακάτω μορφή:

$$\begin{aligned}
\delta B &= \delta(S^\flat) = (\delta S)^\flat, \\
\delta III &= \{S\delta S + \delta S S\}^\flat, \\
\delta\nabla &= 0, \\
(\delta R)(u,w)z &= -\{S+\delta S\}^\flat(u,z)Sw + \{S+\delta S\}^\flat(w,z)Su \\
&\quad + \{(\nabla_u B)(w,z) - (\nabla_w B)(u,z)\}\mathcal{P}Wn.
\end{aligned}$$

Η επόμενη πρόταση, με χρήση της 4.3, χαρακτηρίζει τις απειροστικές ισομετρίες.

Πρόταση 5.4.1. *Μιά κίνηση της M στην N με πεδίο ταχύτητας $v = Jv^{||} + v_n n$ είναι απειροστική ισομετρία εάν και μόνον εάν:*

$$\pounds_{v^{||}} g = 2v_n B, \tag{5.53}$$

ή, ισοδύναμα, εάν και μόνον εάν

$$g(\nabla_{e_i} v^{||}, e_j) + g(e_i, \nabla_{e_j} v^{||}) = 0,\ i \neq j \tag{5.54}$$

$$g(\nabla_{e_i} v^{||}, e_i) = v_n k_i, \tag{5.55}$$

όπου $\{e_i\}_{i=1}^m$ στο $\mathcal{X}(M)$ ορθοκανονικό πλαίσιο το οποίο διαγωνιοποιεί τόν τελεστή σχήματος S με $Se_i = k_i e_i$.

Απόδειξη. Η 5.53 είναι προφανής. Γιά τις συνθήκες 5.54, 5.55 αρκεί να παρατηρήσουμε ότι προκύπτουν με την ανάλυση της 5.53 σε συνιστώσες περνώντας στό εσωτερικό γινόμενο με τά $\{e_i\}_{i=1}^m$. $\square$

Πόρισμα 5.4.2. *Μιά καθετική κίνηση είναι απειροστική ισομετρία εάν και μόνον εάν η M είναι ολικώς γεωδαισιακή εντός της N ([23]).*

5.5 Κίνηση καμπύλης σε 2 - διάστατη πολλαπλότητα

Στην ενότητα αυτή θα εφαρμόσουμε τα αποτελέσματα των προηγούμενων κεφαλαίων στην περίπτωση $\dim M = 1$, δηλαδή γιά μιά καμπύλη γ παραμετροποιημένη με το μήκος τόξου η οποία κινείται πάνω σε μιά 2 - διάστατη πολλαπλότητα N (π.χ. μιά επιφάνεια).
Έστω T η μοναδιαίου μέτρου εφαπτομένη της γ στό σημείο $x \in \gamma$ και $n \in T_{j(x)}N$ η μοναδιαία κάθετος στην $j(\gamma)$. Έστω S ο τελεστής σχήματος της γ. Τότε:

$$g(T,T) = \overline{g}(JT, JT) = 1,\ \overline{g}(JT, n) = 0.$$

Έπεται ότι υπάρχει πραγματική συνάρτηση k η οποία καλείται **γεωδαισιακή καμπυλότητα** της καμπύλης, τέτοια ώστε:

$$\overline{\nabla}_{JT}JT = kn,\ \overline{\nabla}_{JT}n = -kJT. \tag{5.56}$$

Η επαγόμενη συνοχή Levi-Civita ∇ πάνω στην γ είναι τέτοια ώστε:

$$\nabla_T T = \mathcal{P}\overline{\nabla}_{JT}JT = \mathcal{P}kn = 0. \tag{5.57}$$

Ο τελεστής σχήματος δίνεται από την

$$ST = -\mathcal{P}\overline{\nabla}_{JT}n = kT, \tag{5.58}$$

και η δεύτερη και τρίτη θεμελιώδης μορφή από τις

$$B(T,T) = k,\ III(T,T) = k^2. \tag{5.59}$$

Επειδή κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης γράφεται στην μορφή $u = u_T T$ παίρνουμε

$$\nabla_T u_T T = u_T' T$$

όπου $'$ συμβολίζει την παραγώγιση ως πρός την παράμετρο μήκος τόξου της καμπύλης.
Έστω

$$\phi : \gamma \times \mathbb{R} \to N$$

κίνηση της γ με πεδίο ταχύτητας $v = v_T JT + v_n n$. Τότε:

$$GT = (v_T' - kv_n)T + (v_T k + v_n')n, \tag{5.60}$$

και χρησιμοποιώντας τις 3.27 - 3.34 παίρνουμε:

$$\mathcal{P}GT = (v_T' - kv_n)T, \tag{5.61}$$

$$\mathcal{D}T = (v_T' - kv_n)T, \tag{5.62}$$

$$Wn = -(kv_T + v_n')JT, \tag{5.63}$$

$$WJT = (kv_T + v_n')n. \tag{5.64}$$

Η καμπυλότητα Gauss K_N της επιφάνειας N δίνεται από ([24], σελ.14):

$$\begin{aligned} K_N &= \overline{g}(\overline{R}(n, JT)\overline{n}, JT) \\ &= \overline{g}(\overline{R}(JT, n)\overline{n}, JT)JT + \overline{g}(\overline{R}(JT, n)\overline{n}, n)n \end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\overline{R}(JT, n)\overline{n} &= \overline{g}(\overline{R}(JT, n)\overline{n}, JT) \\ &= K_N T = \mathcal{P}\overline{R}(n, JT)\overline{n}. \end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας τις γενικές εξισώσεις μεταβολών γιά την μετρική, το μοναδιαίο καθετικό, τόν τελεστή σχήματος και την καμπυλότητα, υπολογίζουμε:

$$\delta g(T, T) = 2(v_T' - kv_n), \tag{5.65}$$

$$\delta n = -(kv_T + v_n')JT, \tag{5.66}$$

$$(\delta S)T = \{k'v_T + k^2 v_n + v_n'' + v_n K_N\}T, \tag{5.67}$$

$$\delta k = k'v_T + k^2 v_n + v_n'' + v_n K_N. \tag{5.68}$$

Η μεταβολή της συνοχής Levi - Civita δίνεται από την σχέση:

$$(\delta\nabla)(T, T) = \{v_T'' - (v_n k)'\}T. \tag{5.69}$$

Πρόταση 5.5.1. *Έστω καμπύλη $\gamma : I \to N$ η οποία κινείται με πεδίο ταχύτητας $v = Jv_T T + v_n n$. Τότε:*

- $\delta g = 0$ *εάν και μόνον εάν* $v'_T = kv_n$.
- $\delta n = 0$ *εάν και μόνον εάν* $kv_T + v'_n = 0$ *εάν και μόνον εάν* $W \equiv 0$.
- $\delta \nabla = 0$ *εάν και μόνον εάν* $v'' - (kv_n)' = 0$.

Η γεωδαισιακή καμπυλότητα k εμπλέκεται στην εξίσωση 5.68 με δύο μερικές παραγώγους πρώτης τάξης: την παράγωγο k' ως πρός τό μήκος τόξου s και την παράγωγο δk ως πρός την χρονική παράμετρο. Είναι μιά σχεδόν γραμμική, πρώτης τάξης, μερική διαφορική εξίσωση και μελετάται σύμφωνα με τα γνωστά [38].
Εάν θεωρήσουμε την περίπτωση καμπύλης η οποία κινείται πάνω σε μιά επιφάνεια κατά την κατεύθυνση της καθέτου, δηλαδή $v_T = 0$, τότε η 5.68 ανάγεται σε συνήθη διαφορική εξίσωση Riccati

$$\delta k = k^2 v_n + v''_n + v_n K_N. \tag{5.70}$$

Επιπλέον, εάν όλα τα σημεία της καμπύλης διανύουν την ίδια απόσταση κατά την κατεύθυνση της κάθετης της καμπύλης κατά την ανίστοιχη γεωδαισιακή, τότε η καθετική συνιστώσα v_n της ταχύτητας εξαρτάται μόνον από την χρονική παράμετρο, δηλαδή $v''_n = 0$. Είναι η περίπτωση των επιφανειακών καμπύλων offset, ένα αντικείμενο με πολλές βιομηχανικές εφαρμογές [35]. Η 5.70 ανάγεται στην

$$\delta k = k^2 v_n + v_n K_N. \tag{5.71}$$

Έάν ταυτίσουμε την απόσταση την οποία διανύει με τόν απαιτούμενο χρόνο μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $v_n = 1$, οπότε η εξίσωση ανάγεται εκ νέου στην

$$\delta k = k^2 + K_N. \tag{5.72}$$

Εάν δεχθούμε, επί παραδείγματι, ως μιά αρχική συνθήκη, ότι η καμπύλη αφετηρίας είναι μιά γεωδαισιακή, δηλαδή $k(0,s) = 0$, και ότι η καμπυλότητα Gauss της N είναι σταθερή η 5.72 δίνει ως λύσεις τις παρακάτω:

$$\epsilon\alpha\nu \; K_N > 0 \; \tau o \tau \epsilon \; k(t,s) = \sqrt{K_N} \tan \sqrt{K_N} t,$$

$$\epsilon\alpha\nu\ K_N < 0\ \ \tau o\tau\epsilon\ k(t,s) = \sqrt{-K_N}\tan\sqrt{-K_N}t.$$

Οι δύο εκφράσεις δίνουν την γεωδαισιακή καμπυλότητα της κινούμενης καμπύλης σε συνάρτηση με την καμυλότητα Gauss της επιφάνειας.
Επί παραδείγματι, πάνω στην σφαίρα ακτίνας R ένας μέγιστος κύκλος ο οποίος κινείται παράλληλα, υπό την έννοια πού περιγράψαμε προτύτερα, έχει γεωδαισιακή καμπυλότητα η οποία σε κάθε χρονική στιγμή t δίνεται από την συνάρτηση:

$$k(t,s) = \frac{1}{R}\tan\frac{1}{R}.$$

Επισήμανση 5.5.2. *Εάν ζητήσουμε να προσδιορίσουμε τις καθετικές κινήσεις γιά τις οποίες μιά γεωδαισιακή η οποία κινείται πάνω στην επιφάνεια N παραμένει γεωδαισιακή (οι λεγόμενες* **γεωδαισιακές κινήσεις***), η 5.71 γίνεται:*

$$v_n'' + v_n K_N = 0. \tag{5.73}$$

Η ανωτέρω εξίσωση δίνει τήν v_n όταν προσδιορίσουμε αρχικές συνθήκες και είναι η γνωστή **εξίσωση Jacobi** *η οποία περιγράφει μιά γεωδαισιακή κίνηση [29].*

5.5.1 Τό πρόβλημα **elastica** μιάς ελαστικής καμπύλης

Γενικεύοντας το κλασσικό πρότυπο μιάς ελαστικής ράβδου, ορίζεται ως μιά elastica ή **ελαστική καμπύλη** πάνω στην επιφάνεια N ως μιά καμπύλη $\gamma : I \to N$ η οποία είναι ένα κρίσιμο σημείο γιά ελαστικό ενεργειακό συναρτησιοειδές

$$F(\gamma) = \int_\gamma k^2 ds, \tag{5.74}$$

όπου τό ολοκλήρωμα ορίζεται πάνω σε μιά οικογένεια καμπύλων δοθέντος μήκους και ικανοποιεί δοθείσες συνοριακές συνθήκες.

Εάν τό μήκος της καμπύλης δέν θεωρείται σταθερό μιά τέτοια καμπύλη καλείται **ελεύθερη ελαστική καμπύλη** (free elastica) [32].
Η μεταβολή $\delta F(\gamma)$ υπολογίζεται με χρήση του πεδίου ταχύτητας v της θεωρούμενης κίνησης.

5.5.2 Γεωμετρία και Φυσική CMC υπερεπιφανειών

Οι (υπερ)-επιφάνειες σταθερής μέσης καμπυλότητας παίζουν σημαντικό ρόλο στην Φυσική και στην Διαφορική Γεωμετρία. Η εξίσωση Young-Laplace $\Delta p = 2\gamma H$ συσχετίζει την διαφορά πίεσης, εγκαρσίως μιάς δι-επιφάνειας ρευστού, με την μέση καμπυλότητα της δι-επιφάνειας ρευστού.
Οταν η Δp είναι σταθερή πάνω στην δι-επιφάνεια, τότε η επιφάνεια αυτή έχει σταθερή μέση καμπυλότητα κι όταν $\Delta p = 0$ είναι μιά ελαχιστική επιφάνεια.
Μιά υπερεπιφάνεια M σταθερής μέσης καμπυλότητας (CMC hypersurface) είναι λύση του λεγόμενου **ισο-περιμετρικού** προβλήματος:
Εάν μιά χρονική στιγμή $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ τό εμβαδικό συναρτησιακό πάνω στην M_t είναι $A(t) = \int_{M_t} \omega$ και η M_t φράσει έναν τόπο του N με όγκο $V(t)$, τότε μιά υπερεπιφάνεια CMC είναι τέτοια ώστε $A'(0) = 0$ γιά κάθε κίνηση η οποία διατηρεί τόν όγκο ($V(t) = V_0 = \text{const}$).

Τό πρόβλημα αυτό γενικεύεται σε υπερεπιφάνειες οι οποίες δέν φράσσουν αναγκαστικά μιά περιοχή αλλά κινούνται ενώ διατηρούν τό συνορό τους σταθεροποιημένο [39].

Η εξίσωση 4.26 η οποία δίνει την μεταβολή δH σχετίζεται στενά με την Φυσική και την Διαφορική Γεωμετρία κατά την ακόλουθη έννοια:
η μαθηματική έννοια της ευστάθειας σημαίνει πρακτικά ότι αυτό τό είδος των επιφανειών είναι υλοποιήσιμο υπό την μορφή μιάς ευσταθούς ισορροπίας υπό την φυσική έννοια.
Η ιδιότητα της ευστάθειας των CMC υπερεπιφανειών είναι σημαντική

γιά την Φυσική καθότι, όπως αποδείχθηκε στό [40] η μόνη προσανατολίσιμη επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ με σταθερή μη-μηδενική μέση καμπυλότητα η οποία είναι ευσταθής, ως πρός κινήσεις οι οποίες διατηρούν τόν όγκο σταθερό, είναι η σφαίρα. αυτό σημαίνει ότι, μή σφαιρικές, συμπαγείς επιφάνειες, σταθερής μέσης καμπυλότητας, είναι μή εφικτές υπό την φυσική έννοια. Όπως δείχθηκε στο [39] (Πρόταση 2.7), τό κριτήριο της δεύτερης τάξης μεταβολής γιά την ευστάθεια, εμπλέκει απευθείας την μεταβολή δH.
Συνεπώς, ο τύπος 4.26 σχετίζεται με την μελέτη προβλημάτων ευστάθειας των CMC υπερεπιφανειών.

5.6 Παραδείγματα

Τά δύο παραδείγματα τα οποία περιέχονται στην ενότητα αυτή αφορούν, τό μέν πρώτο παράδειγμα μιά κίνηση - απειροστική ισομετρία τμήματος του Ευκλειδίου επιπέδου, προσαρμογή του παραδείγματος των Goldstein Ryan [23], και τό δεύτερο μιά εφαπτομενική κίνηση ενός παραβολοειδούς.

5.6.1 Απειροστική ισομετρία

Έστω M επιφάνεια με $j : (X, Y) \to (X, Y, 0)$ κανονική εμφύτευση και κίνηση
$$\phi_t(X, Y) = (X, Y, t(1 - X^2)).$$
Τότε:
$$V(X, Y, t) = (0, 0, 1 - X^2),\ n(X, Y, t) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2 X^2}}(2tX, 0, 1).$$

$$F(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2tX & 0 \end{bmatrix},\ U(t) = \begin{bmatrix} \sqrt{1 + 4t^2 X^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

άρα

$$JU(t) = \begin{bmatrix} \sqrt{1+4t^2X^2} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και γιά $R(t) : \mathcal{V}^3 \to \mathcal{V}^3$ ορθογώνιο μετασχηματισμό η συνθήκη $R(t)JU(t) = F(t)$ δίνει:

$$R(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+4t^2X^2}} & 0 & \frac{2tX}{\sqrt{1+4t^2X^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-2tX}{\sqrt{1+4t^2X^2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{1+4t^2X^2}} \end{bmatrix}$$

Ισχύει: $R(t)n = n(t)$ όπου $n = (0,0,1)$. Είναι

$$\mathcal{D}(t) = \begin{bmatrix} \frac{-4t^2X^2}{\sqrt{1+4t^2X^2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2X & 0 \end{bmatrix}.$$

Ισχύει

$$\mathcal{D}(0) = 0,$$

άρα για $t = 0$ η κίνηση είναι απειροστική ισομετρία και θα ισχύει:

$$G = WJ,$$

όπου

$$W(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2X \\ 0 & 0 & 0 \\ -2X & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

και με απευθείας υπολογισμό επαληθεύουμε ότι

$$\delta n(0) = W(0)n = [2X\,0\,0]^T.$$

5.6.2 Εφαπτομενική κίνηση

Έστω η επιφάνεια M με κανονική εμφύτευση

$$j : (X, Y) \to (X, Y, 1 - X^2 - Y^2), \quad J(X, Y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2X & -2Y \end{bmatrix}$$

και μοναδιαίο καθετικό

$$n(X, Y, 0) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4X^2 + 4Y^2}}(2X, -2Y, 1).$$

Θεωρούμε την κίνηση

$$\phi(X, Y, t) = (X + t, Y + t, 1 - (X + t)^2 - (Y + t)^2),$$

με πεδίο ταχύτητας $V(X, Y, t) = (1, 1, -2(X + t) - 2(Y + t))$ και

$$F(X, Y, t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2(X + t) & -2(Y + t) \end{bmatrix}.$$

Είναι

$$n(X, Y, t) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4(X + t)^2 + 4(Y + t)^2}}\,(2(X + t), 2(Y + t), 1)$$

συνεπώς

$$n(X, Y, t) \perp V(X, Y, t)$$

δηλαδή η κίνηση διατηρείται **εφαπτομενική**.

$$C(t) = U^2(t) = \begin{bmatrix} 1 + 4(X + t)^2 & 4(X + t)(Y + t) \\ 4(X + t)(Y + t) & 1 + 4(Y + t)^2 \end{bmatrix} = g(t)$$

$$G(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = G(0), \quad \mathcal{D}(0) = \begin{bmatrix} 8X & 4(X + Y) \\ 4(X + Y) & 8Y \end{bmatrix}.$$

Ο ρυθμός στροφής για $t = 0$ υπολογίζεται από τις συνθήκες

$$W(0)J = G(0) - J\mathcal{D}(0),$$
$$W(0)n = \delta n,$$

όπου το $\delta n(0)$ υπολογίζεται απευθείας από την έκφραση του $n(t)$.
Εάν θέσουμε $V^{\|} = (v^1, v^2)$ τότε από την $JV^{\|} = (1, 1, -2X - 2Y)$ προκύπτει:

$$V^{\|} = (1,\, 1)^T.$$

5.7 Προβλήματα πρός διερεύνηση

Αναφέρουμε εν συντομία κάποια θέματα τα οποία μπορούν να διερευνηθούν παραπέρα:

1. Μεταβολές δεύτερης τάξης με πιθανές εφαρμογές στις περιπτώσεις διερεύνησης ευστάθειας επιφανειών πού έχουν μηδενική πρώτης τάξης μεταβολή κάποιου γεωμετρικού μεγέθους.
2. Μεταβολές κυρίων διευθύνσεων καμπυλότητας.
3. Μεταβολές κινηματικών ποσοτήτων (υλικές παράγωγοι κ.λ.π).

Βιβλιογραφία

[1] *Βάρσος, Δ., Δεριζιώτης, Δ., Μαλιάκας, Μ., Παπασταυρίδης, Σ., Ράπτης, Ε., Ταλέλλη, Ο.: Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα, Τόμος* 2^{os}*, Εκδόσεις σοφία, Θεσσαλονίκη*

[2] Kadianakis, N.: Evolution of surfaces and the kinematics of membranes. J.Elast. **99**, 1-17 (2010).

[3] Kadianakis, N., Travlopanos, F.: Kinematics of hypersurfaces in Riemannian manifolds. J.Elast. **121**, 1-23 (2012).

[4] Calin, O., Chang, D.C.: Geometric Mechanics on Riemannian Manifolds. Applied and Numerical Harmonic Analysis, Birkhauser (2005).

[5] Man, C.-S., Cohen, H.: A coordinate-free approach to the kinematics of membranes. J. Elast. **16**, 97–104 (1986).

[6] Gurtin, M.E.: An Introduction to continuum Mechanics. Academic Press, San Diego.

[7] Gurtin, M.E., Murdoch, A.I.: A continuum theory of elastic material surfaces. Arch. Rational Mech. Anal. **57**, 291–323 (1975).

[8] Gurtin, M.E., Eliot. F., Lallit, A.: -The Mechanics and Thermodynamics of Continua. Cambridge University Press (2010).

[9] Murdoch, A.I.: A coordinate-free approach to surface kinematics. Glasgow Math. J. **32**, 299–307 (1990).

[10] Noll, W.: A mathematical theory of the mechanical behaviour of continuous media. Arch. Rat. Mech. Anal. **2**, 197–226 (1958).

[11] Truesdell, C.: A First Course in Rational Continuum Mechanics. vol. 1. Academic Press, San Diego (1977).

[12] Marsden, J.E., Hughes, T.J.R.: Mathematical Foundations of Elasticity. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1983).

[13] Segev, R., Rodnay, G.: Cauchy's Theorem on Manifolds. J. Elast. **56**: 129–144 (1999).

[14] Kadianakis, N.: On the geometry of Lagrangian and Eulerian descriptions in continuum mechanics. Z. Angew. Math. Mech. **79**, 131-138 (1999).

[15] Appleby, P.G., Kadianakis, N.: A frame-independent description of the principles of classical mechanics. Arch. Rat. Mech. Anal. **95**, 1-22 (1986).

[16] Capriz, G., Continua with Microstructure, Springer, Berlin etc., (1989).

[17] Epstein, M. Manuel de Leon b, Geometrical theory of uniform Cosserat media, J. Geom Phys. **26** 127-170 (1998).

[18] Yavari, A. and Marsden,J.E. Covariant Balance Laws in Continua with microstructure, Rep. Math.Phys.**63**, 1, 1-42 (2009).

[19] Andrews, B.: Contraction of convex hypersurfaces in Riemannian spaces. J.Diff Geom. **39**, 407-431 (1994).

[20] Huisken, G., Polden, A. (1999). Geometric evolution equations for hypersurfaces. In S. Hildebrandt, M. Struve (Eds.), Calculus of

Variations and Geometric Evolution Problems (pp. 45-84). Berlin: Springer.

[21] Capovilla, R., Guven, J., Santiago, J.A.: Deformations of the geometry of lipid vesicles. J. Phys. A Math. Gen. **36**, 6281–6295 (2003).

[22] Capovilla, R., Guven, J.: Geometry of Deformations of relativistic membranes. Phys. Rev. D . **51**, no 12 6736-6743 (1995).

[23] Goldstein R.A.and Ryan P. J.: Infinitesimal rigidity of Euclidean submanifolds J. Differ. Geom., **10,** 49-60 (1975).

[24] Yano, K.: Integral Formulas in Riemannian Geometry. Dekker, New York (1970).

[25] Yano, K.: Infinitesimal variations of submanifolds, Kodai Math. J., 1, (1978), 30-44.

[26] Barret O' Neil, Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity, Academic Press, 1983.

[27] Dajczer, D., Rodriguez, L. L.: Infinitesimal rigidity of Euclidean submanifolds. Ann. de l' Inst. Fourier. Vol 40, n^o **4**, 939-949 (1990).

[28] do Carmo M.:Riemannian Geometry, Birkhausser, Boston (1992).

[29] Spivak, M.: A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Volume 4. Publish or Perish, Boston (1979).

[30] Szwabowicz, M.L.: Pure strain Deformations of Surfaces. J. Elast. **92**, 255-275 (2008).

[31] G.H.M van der Heijden The static deformation of a twisted elastic rod constrained to lie on a cylinder Proc. R. Soc. Lond. A 2001, **457**, 695-715, (2001).

[32] Langer, R. Singer, D.: The total squared curvature of closed curves, J. Differential Geom. **20** 1, 1-22 (1984).

[33] Th. Hangan, T. Murea, C.M. and Sari, T.: Poleni curves on surfaces of constant curvature. Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, **67**, 1 91-107 (2009).

[34] J. Arroyo, J., O.J. Garay O.J.,Mencia, J.J.: Closed generalized elastic curves in $S^2(1)$. J. Geom. Phys. **48** 339-353 (2003).

[35] Maekawa, T.: An overview of offset curves and surfaces. Comput. Aided Design, **31**, 165 -• 173 (1999).

[36] Capovilla,R., Guven, J., Santiago, J.A., Deformations of the geometry of lipid vesicles, J. Phys. A: Math. Gen. 36 6281 •- 6295 (2003).

[37] Simo, J. C. and J. E. Marsden [1984], On the rotated stress tensor and the material version of the Doyle-Ericksen formula. Arch. Rat. Mech. Anal. 86: 213 - 231.

[38] John, F. Partial Differential Equations, 3rd Edition, Springer Verlag (1971).

[39] Barbosa, J.L., do Carmo, M., Eschenburg, J., Stability of Hypersurfaces of Constant Mean Curvature in Riemannian Manifolds. Math. Z.,**197**, 123-138, (1988).

[40] Barbosa, J.L., do Carmo, Stability of Hypersurfaces with Constant Mean Curvature. Math. Z.,**185**, 339-353, (1984).

[41] Sinha, B. B., An introduction to Modern Differential Geometry. Publisher, Kalayhi publishers.

Συμβολισμοί

$\mathbb{E}^{m+1}$: Ευκλείδιος χώρος διαστάσεως $m+1$
$\mathcal{V}^{m+1}$: Προσαρτημένος διανυσματικός χώρος του Ευκλειδίου $\mathbb{E}$
$\mathcal{B}^{m+1}$: 3 - διάστατο συνεχές
$\mathcal{M}^{m}$: 2 - διάστατη συνεχές
$k : \mathcal{B} \to E$: Αναπαράσταση αναφοράς του σώματος $\mathcal{B}$ εντός του $\mathbb{E}$
$(N^{m+1}, \bar{g}, \bar{\nabla})$ πολλαπλότητα Riemann διάστασης $m+1$
$\phi_t(\tau) : M_t^m \to N^{m+1}$ Σχετική κίνηση της υπερεπιφάνειας M εντός της N
$F_t(\tau)$: Σχετικός τανυστής παραμόρφωσης
$U_t(\tau)$: Δεξιός σχετικός τανυστής τάσης Green
$R_t(\tau)$: Σχετική στροφή
$\gamma : I \to N$: Καμπύλη της N
G : Κλίση ταχύτητας
$\mathcal{D}$: Ρυθμός παραμόρφωσης
W : Ρυθμός περιστροφής
$j : M \to N$: Κανονική εμφύτευση
$J : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(N)$: Διαφορικό κανονικής εμφύτευσης
$\mathcal{P} : \mathcal{X}(N) \to \mathcal{X}(M)$: Προβολή επί της M
$V(X,t)$: Υλική ταχύτητα
$v(x,t) = v(\phi(X,t),t)$: Χωρική ταχύτητα
$\pounds$: Παράγωγος Lie
$\dot{\Omega}(X,t)$: Υλική material παράγωγος
det: Ορίζουσα

tr: Ίχνος Trace
$S : T_X M \to T_X M$ Τελεστής σχήματος shape operator
$B = S^\flat$: δεύτερη θεμελιώδης μορφή
$III = (S^2)^\flat$: τρίτη θεμελιώδης μορφή
Δ: Laplacian
$\otimes$: τανυστικό γινόμενο
$\dot{\phi}$: υλική παράγωγος
ϕ': χωρική παράγωγος