



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**

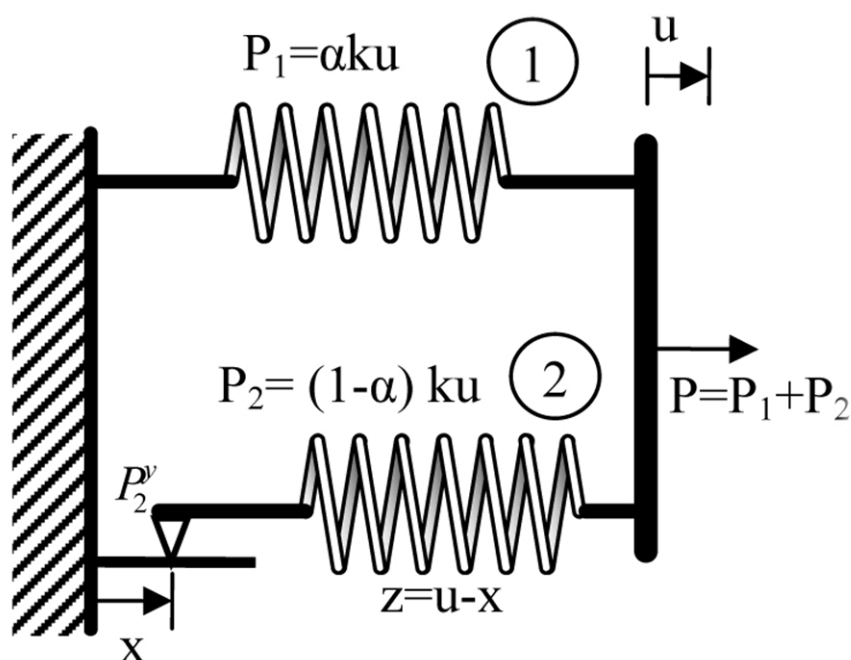
**ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

**ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**«ΥΣΤΕΡΗΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΩΝ  
ΠΛΑΙΣΙΩΝ»**

**ΒΕΝΤΟΥΡΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ**



**ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ : ΚΟΥΜΟΥΣΗΣ ΒΛΑΣΗΣ, ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Ε.Μ.Π**

**ΣΥΝΕΠΙΒΛΕΠΩΝ : ΣΟΦΙΑΝΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ, ΥΠΟΨΗΦΙΟΣ ΔΙΔΑΚΤΩΡ Ε.Μ.Π.**

**Αθήνα, Ιούλιος 2013**



# ΥΣΤΕΡΗΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΠΛΑΙΣΙΩΝ



Ολοκληρώνοντας την εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους ανθρώπους που συνέβαλαν στη επίτευξη του στόχου αυτού.

Πρωτίστως, οφείλω να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον καθηγητή της Σχολής Πολιτικών Μηχανικών, κ. Βλάση Κουμούση για την επίβλεψη της εργασίας, καθώς και για την πολύτιμη επιστημονική καθοδήγηση του που μου προσέφερε καθ' όλη την διάρκεια εκπόνησής της.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες θα ήθελα να εκφράσω στον υποψήφιο διδάκτορα και καλό μου φίλο Χρήστο Σοφιανό, για την στήριξη και το ενδιαφέρον που έδειξε, καθώς και για την ουσιαστική και πολύτιμη βοήθεια που πάντα πρόθυμα μου προσέφερε.

Επιπρόσθετα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον αδελφό μου, Παύλο Βεντουρή για την άμεση βοήθεια που μου παρείχε σε σχεδιαστικά θέματα.

Επίσης θερμές ευχαριστίες οφείλω στην οικογένεια και τους φίλους μου, που μου συμπαραστάθηκαν όλα αυτά τα χρόνια.

Κλείνοντας, θα ήθελα να εκφράσω την μεγάλη τιμή που αισθάνομαι που κάθισα στα έδρανα αυτού του ιδρύματος, του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, και είχα την ευκαιρία να διαμορφωθώ τόσο ως επιστήμονας όσο και ως σκεπτόμενος άνθρωπος.



## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στη παρούσα διπλωματική εργασία, γίνεται προσπάθεια κατανόησης και εκτίμησης της ρεαλιστικής ανελαστικής συμπεριφοράς των τρισδιάστατων πλαισιωτών κατασκευών. Για τον λόγο αυτό, ενσωματώνεται το φαινόμενο της υστέρησης στο αντίστοιχο πεπερασμένο στοιχείο δοκού στον χώρο. Έτσι, επιλέχτηκε το μοντέλο υστέρησης Bouc-Wen, το οποίο έχει το πλεονέκτημα ότι είναι ιδιαίτερα εύχρηστο, αφού μία ομαλή συνάρτηση αρκεί να περιγράψει την γενική υστερητική συμπεριφορά. Η υστερητική αυτή συνάρτηση  $z$ , διέπεται από την ακόλουθη μη γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης :  $\dot{z}(t) = f(\dot{u}(t), z(t))$  , όπου  $\dot{z}(t)$  η πρώτη παράγωγος της  $Z$  ως προς τον χρόνο. Στη συνέχεια, αναφέρονται οι υπόλοιπες παράμετροι του μοντέλου και διερευνάται η επιρροή τους πάνω σε αυτό, όταν οι τιμές τους μεταβάλλονται.

Ακολούθως, παρουσιάζεται η ενσωμάτωση της υστέρησης στο πεπερασμένο στοιχείο δοκού μίας χωρικής κατασκευής μέσω της προσθήκης νέων, υστερητικών βαθμών ελευθερίας στα άκρα της δοκού. Ακολουθεί η διατύπωση των μητρώων στιβαρότητας του φορέα και ο τρόπος με τον οποίο προκύπτουν μέσω της εξίσωσης δυνατών έργων, καθώς και τα υπόλοιπα απαραίτητα μητρώα για τον σχηματισμό της εξίσωσης κίνησης του φορέα. Ύστερα, η παραπάνω εξίσωση διατυπώνεται σε μορφή χώρου κατάστασης (state-space form), και έτσι γίνεται δυνατή η ταυτόχρονη επίλυση των γραμμικών εξισώσεων κίνησης σε επίπεδο φορέα και των εξελικτικών εξισώσεων Bouc-Wen σε επίπεδο στοιχείου. Ο παραπάνω αλγόριθμος έχει προγραμματιστεί σε γλώσσα Matlab και επιλύει χωρικές κατασκευές σε μικρό σχετικά χρόνο.

Παρουσιάζονται τρία αριθμητικά παραδείγματα τα οποία έχουν σκοπό να αναδείξουν τα διαφορετικά χαρακτηριστικά της μεθόδου.

Το πρώτο αφορά την επίλυση ενός απλού προβόλου για ημιτονική διέγερση κατά τις δύο κάθετες κύριες διευθύνσεις και αποσκοπεί στην πλήρη κατανόηση του ορισμού του τοπικού συστήματος του κάθε μέλους συναρτήσει ενός δεδομένου σημείου στον χώρο, που ορίζει τον προσανατολισμό του. Έμφαση δίδεται στην ποιοτική εποπτεία της συμπεριφοράς του φορέα, από άποψη προσήμων, και τοπικών αξόνων που καταπονούνται καμπτικά από διάφορες φορτίσεις.

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

---

Το δεύτερο παράδειγμα αναφέρεται στην επίλυση ενός τυπικού μονώροφου πλαισίου με τετραγωνική κάτοψη και διασαφηνίζει μέσω σύγκρισης, την επιρροή των διαφόρων παραμέτρων Bouc-Wen που χρησιμοποιούνται. Ο φορέας διεγείρεται από τρεις διαφορετικούς πραγματικούς σεισμούς.

Το τελευταίο παράδειγμα παρουσιάζει αποτελέσματα χαρακτηριστικών διατομών και κόμβων σε μία διώροφη πλαισιωτή κατασκευή με ορθογωνική κάτοψη.

Τέλος, η εργασία κλείνει με συμπεράσματα και προτάσεις για μελλοντική έρευνα.



# ABSTRACT

The purpose of this diploma thesis, is to understand and assess the realistic behavior of 3D frame structures. Therefore, the hysteresis phenomenon is incorporated in the beam finite element. In the present thesis, the Bouc-Wen model is utilized, which is capable of expressing every hysteretic behavior with the use of a smooth function. On the basis of this model, new hysteretic degrees of freedom are introduced. By means of the principle of virtual work, the elastic and the hysteretic stiffness matrices are derived first at elemental and then are assembled at the structural level. Together with the mass matrix, the damping matrix, and the forcing vector, the dynamic equilibrium is established and then formulated in state-space form. The linear global equations of motion and nonlinear local constitutive equations for every element are solved simultaneously as a system of ordinary differential equations. Subsequently, a cantilever and two three-dimensional frame structures are solved. The cantilever example focuses on the understanding of the local axis system definition as well as how the stress resultants are developed. Finally, the frame structures are subjected to various earthquake excitations and the results are presented, demonstrating the influence of the Bouc-Wen parameters, and the overall behavior.



## ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ.....	I
ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....	III
ABSTRACT.....	V
ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ.....	VII
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....</b>	<b>1</b>
1.1 ΓΕΝΙΚΑ.....	2
1.2 ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ.....	5
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΤΟ ΥΣΤΕΡΗΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΒΟΥC-WEN.....</b>	<b>7</b>
2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΒΟΥC-WEN.....	8
2.2 ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΒΟΥC-WEN.....	13
2.3 ΑΤΕΛΕΙΕΣ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ.....	16
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΤΟ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ.....</b>	<b>19</b>
3.1 ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ.....	21
3.2 ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.....	24
3.3 ΕΥΡΕΣΗ ΒΑΣΙΚΗΣ ΣΧΕΣΗΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ.....	27
3.4 ΜΗΤΡΩΟ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ.....	31
3.5 ΕΞΕΛΙΚΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ.....	33
3.6 ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΙΝΗΣΗΣ.....	35
3.7 ΠΟΡΕΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ.....	38

<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.....</b>	<b>41</b>
4.1 ΠΡΟΒΟΛΟΣ.....	42
4.2 ΤΥΠΙΚΟ ΜΟΝΩΡΟΦΟ ΠΛΑΙΣΙΟ.....	51
4.2.1 Kobe Takatori 090 40.....	53
4.2.2 Rinaldi RSS 228 14.9.....	59
4.2.3 Kocaeli Duzce 270 27.1.....	67
4.3 ΔΙΩΡΟΦΗ ΠΛΑΙΣΙΩΤΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.....	75
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 ΣΥΝΟΨΗ - ΣΧΟΛΙΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.....</b>	<b>83</b>
5.1 ΣΥΝΟΨΗ-ΣΧΟΛΙΑ.....	84
5.3 ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ.....	85
<i>Βιβλιογραφικές αναφορές.....</i>	<i>87</i>



# Κεφάλαιο 1



## Εισαγωγή

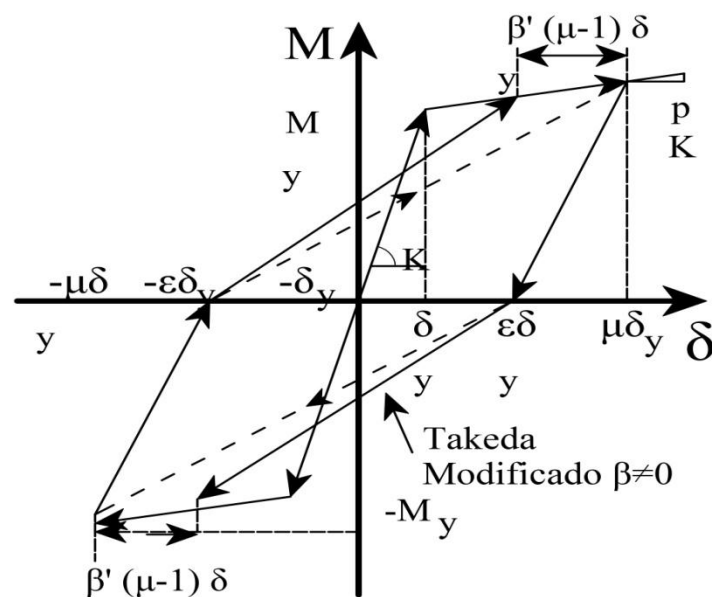
## 1.1 ΓΕΝΙΚΑ

Την υστέρηση την συναντάμε σε μεγάλο εύρος προβλημάτων, στα οποία η τρέχουσα κατάσταση ενός συστήματος εξαρτάται από παρελθοντικές καταστάσεις. Εφαρμογές μπορούμε να συναντήσουμε σε πολλούς επιστημονικούς κλάδους όπως την βιολογία, την οπτική, τον μαγνητισμό, τη μηχανική, τις κατασκευές καθώς και σε άλλα πεδία. Για να περιγραφεί η συμπεριφορά της υστέρησης, έχουν προταθεί διάφορα μαθηματικά μοντέλα στο παρελθόν. Μερικά από αυτά είναι : το μοντέλο του Duhem, το οποίο χρησιμοποιεί την ιδιότητα ότι η μεταβλητή εξόδου του υστερητικού συστήματος αλλάζει όταν αλλάζει κατεύθυνση η μεταβλητή εισόδου, το μοντέλο του Ishlinskii, το οποίο ασχολείται με την ελαστοπλαστική συμπεριφορά ενός συστήματος, το μοντέλο του Preisach, το οποίο ασχολείται με την υστέρηση στον ηλεκτρομαγνητισμό κ.α. Όσον αφορά το πεδίο του Πολιτικού Μηχανικού, το μοντέλο που πρότεινε ο Bouc το 1967 [9] και επεκτάθηκε αργότερα από μεταγενέστερους επιστήμονες, προσπαθεί να προσομοιάσει την υστέρηση που παρουσιάζεται στις κατασκευές, δηλαδή την εξάρτηση της κατάστασης κατασκευών, οι οποίες στο παρελθόν είχαν καταπονηθεί από άλλες, κυρίως δυναμικές φορτίσεις.

Για πολλά χρόνια στην ανάλυση και τον σχεδιασμό των κατασκευών επικρατούσαν ελαστικές μέθοδοι. Τα πλεονεκτήματα των μεθόδων αυτών είναι η απλότητά τους, καθώς και ο μικρός υπολογιστικός φόρτος που απαιτείται για την επίλυση. Παρόλα αυτά, επειδή έτσι δεν προσεγγίζεται η πραγματική συμπεριφορά των κατασκευών και χρησιμοποιούνται πολλές παραδοχές, οι αβεβαιότητες που προκύπτουν είναι μεγάλες και έτσι απαιτούνται μεγάλοι συντελεστές ασφαλείας, οι οποίοι συνήθως οδηγούν σε υπερδιαστασιολόγηση και συνεπώς σε ασύμφορες οικονομικά κατασκευές. Η ραγδαία εξέλιξη της τεχνολογίας όμως έδωσε τη δυνατότητα στον Μελετητή Μηχανικό, χρησιμοποιώντας ηλεκτρονικούς υπολογιστές με μεγάλες δυνατότητες, να μπορεί να επιλύσει πολύπλοκα προσομοιώματα σε μικρό συγκριτικά χρόνο, καθώς και να είναι σε θέση να διαχειριστεί το μεγάλο όγκο των αποτελεσμάτων. Έτσι, μοντέλα πιο πολύπλοκα από το ελαστικό άρχισαν να είναι πλέον υπολογιστικά εφικτά, να δίνουν πιο ακριβή αποτελέσματα και μάλιστα σε λιγότερο χρόνο.

Τα υστερητικά μοντέλα που έχουν αναπτυχθεί, διακρίνονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες, τα πολυγραμμικά (polygonal hysteretic models - PHM) και τα ομαλά (smooth hysteretic models - SHM).

Τα πολυγραμμικά προσομοιώματα θεωρούν πολυγραμμική συμπεριφορά των υλικών και προηγήθηκαν χρονικά των ομαλών. Σε αυτά η συμπεριφορά του υλικού χωρίζεται σε κατά τμήματα γραμμικά στάδια, που συνήθως είναι η αρχική ελαστική περιοχή, η διαρροή, η ρηγμάτωση, η μείωση της δυσκαμψίας και της αντοχής και το κλείσιμο των ρωγμών. Παραδείγματα αποτελούν τα μοντέλα των Clough(1966), Takeda (Takeda et al. 1970), Park (Park et al. 1987) [1], Costa & Costa (1987), Roufaiel & Meyer (1987), Coelho & Carvalho (1990) και το προσομοίωμα Q-hyst (1979). Ένα παράδειγμα πολυγραμμικού υστερητικού προσομοιώματος παρουσιάζεται στο σχήμα 1.1 και πιο συγκεκριμένα το προσομοίωμα Takeda (Takeda et al.1970).

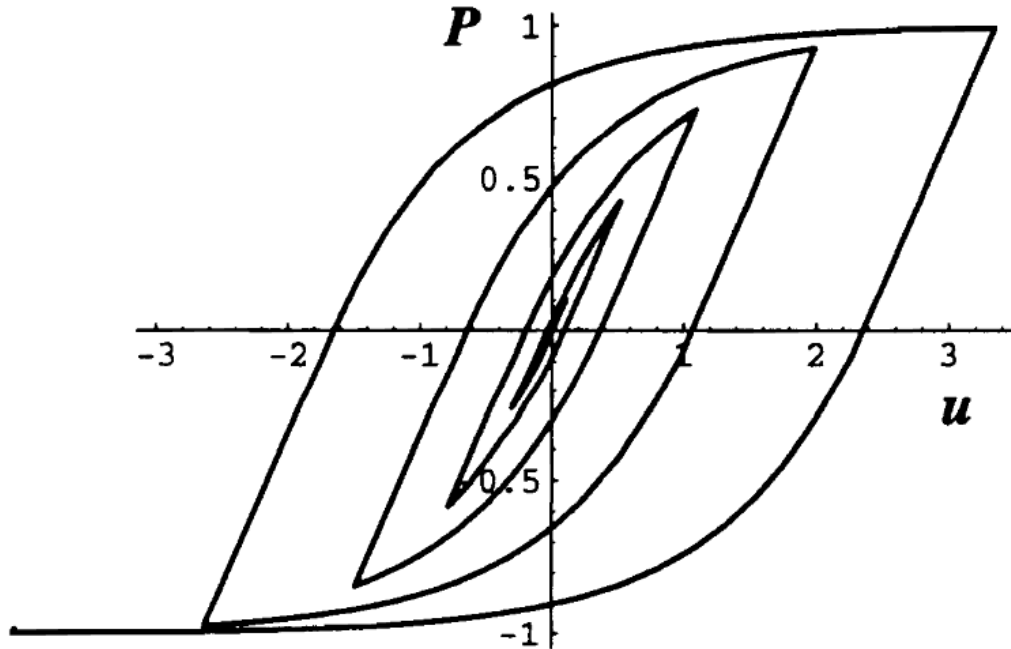


Σχήμα 1.1 Παράδειγμα πολυγραμμικού προσομοιώματος Takeda

Από την άλλη μεριά, τα ομαλά υστερητικά προσομοιώματα βασίζονται στη συνεχή αλλαγή της δυσκαμψίας εξαιτίας της διαρροής και σε έντονες αλλαγές εξαιτίας της αποφόρτισης. Αυτά τα προσομοιώματα έχουν τη δυνατότητα προσομοίωσης διαφορετικών τύπων υστερητικής συμπεριφοράς χρησιμοποιώντας μία απλή ομαλή υστερητική συνάρτηση με ένα σύνολο παραμέτρων που καθορίζονται από το χρήστη. Το μοντέλο Bouc-Wen (Bouc 1967, Wen 1976) και το μοντέλο του Ozdemir (1976) είναι δύο παραδείγματα ομαλών υστερητικών προσομοιωμάτων.

Το μοντέλο του Bouc [9] ξεχώρισε λόγω της δυνατότητας επέκτασης του σε πολλά επιστημονικά ερευνητικά πεδία. Η ευελιξία του αυτή και η ευκολία του στη προσομοίωση του μαθηματικά δύσκολου φαινομένου της υστέρησης συντέλεσαν στη χρησιμοποίησή του σε πολυποίκιλα προβλήματα μηχανικού, όπως σε πλαισιωτές πολυώροφες κατασκευές, σε πολυβάθμια συστήματα, σε μοντέλα εδαφικής ρευστοποίησης καθώς και σε συστήματα σεισμικής μόνωσης.

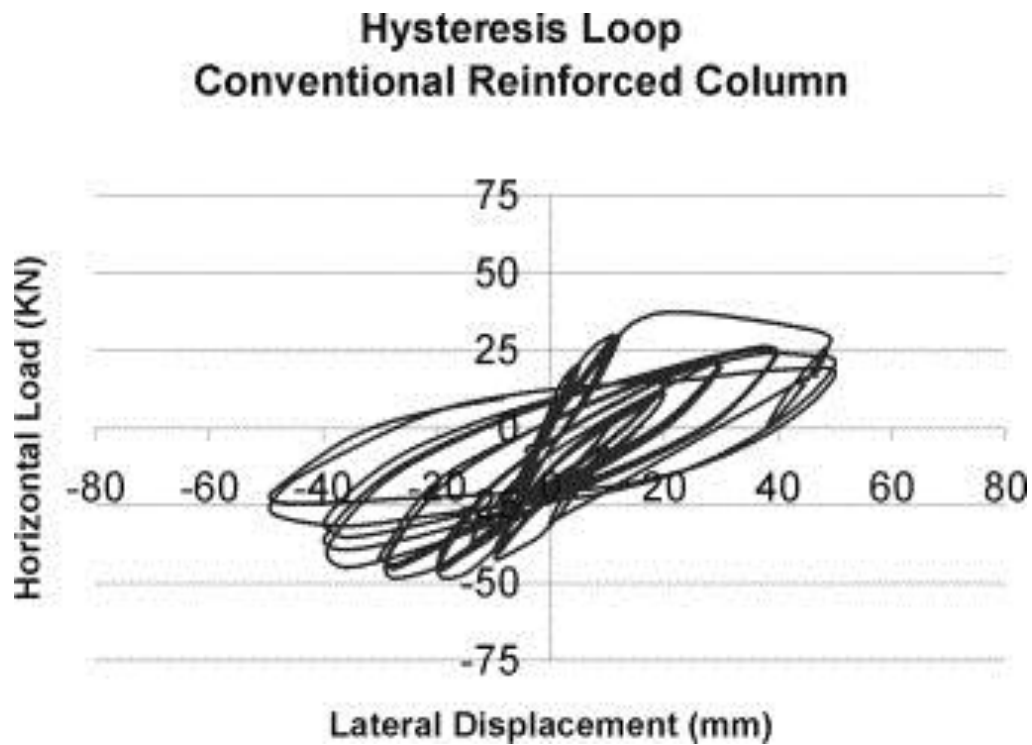
Μεταγενέστερα έγιναν αρκετές τροποποιήσεις όπως η γενίκευσή του από τον Wen το 1976 , το προσομοίωμα Baber - Noori (1985) [2], το προσομοίωμα Baber – Wen (1981) [3], το προσομοίωμα Foliente (1995) [4] καθώς και αυτό των Sivaselvan και Reinhorn (2000) [5].



Σχήμα 1.2 Παράδειγμα ομαλού υστερητικού προσομοιώματος (Foliente 1993)[6]

Σε αυτό το σημείο πρέπει να αναφέρουμε ότι τα προσομοιώματα τύπου Bouc-Wen αντιμετωπίζουν φαινομενολογικά το φαινόμενο της υστέρησης. Αυτό σημαίνει ότι δεν λαμβάνουν υπόψη τους μηχανισμούς που δημιουργούν την υστέρηση σε μικροσκοπικό επίπεδο, αλλά αντίθετα δίνουν έμφαση στα μακροσκοπικά αποτελέσματα. Γι αυτό, η προσομοίωση και η επιλογή των παραμέτρων του μοντέλου γίνεται έτσι ώστε η απόκριση που προκύπτει από την ανάλυση να πλησιάζει αυτή των πειραματικών δεδομένων μέσα από μία επαναληπτική διαδικασία.






*Σχήμα 1.3 Παράδειγμα πειραματικών αποτελεσμάτων σε τυπικό υποστύλωμα από οπλισμένο σκυρόδεμα*


## **1.2 ANTIKEIMENO ΕΡΓΑΣΙΑΣ**

Η παρούσα εργασία επικεντρώνεται στην δυναμική ανελαστική ανάλυση χωρικών πλαισίων σύμφωνα με το υστερητικό μοντέλο Bouc-Wen. Πιο συγκεκριμένα, μέσω της γλώσσας προγραμματισμού Matlab, στην οποία γίνονται όλες οι απαραίτητες επιλύσεις και τα ζητούμενα διαγράμματα, γίνεται προσπάθεια ένταξης του μοντέλου στο πεπερασμένο στοιχείο δοκού στον χώρο. Σκοπός της εργασίας είναι να γίνει ανάλυση χρονοϊστορίας σε οποιαδήποτε διατομή ενός χωρικού πλαισίου, να κατασκευάζονται τα αντίστοιχα διαγράμματα ροπών-καμπυλοτήτων και αξονικών δυνάμεων-κεντρικών αξονικών παραμορφώσεων. Η κατασκευή θα μπορεί να καταπονείται σε οποιοδήποτε διέγερση κατά οποιοδήποτε βαθμό ελευθερίας. Έτσι θα πλησιάζεται ακόμη περισσότερο η πραγματική συμπεριφορά των κατασκευών αφού εκτός από το μοντέλο της υστέρησης, θα λαμβάνεται υπόψη και η τρισδιάστατη φύση τους. Αξίζει να επισημανθεί ότι η μέθοδος αυτή είναι αρκετά γρήγορη σε σχέση με τα προγράμματα που κυκλοφορούν στην αγορά.





## Κεφάλαιο 2



# Το υστερητικό μοντέλο Bouc-Wen

## 2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ BOUC-WEN

Το μοντέλο αυτό, το οποίο ανήκει στην κατηγορία των ομαλών υστερητικών μοντέλων, προτάθηκε αρχικά από τον Bouc (1967) [9], και γενικεύτηκε αργότερα από τον Wen (1976) [7]. Έκτοτε το μοντέλο είναι γνωστό ως Bouc-Wen. Αποτελείται από μία μη γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης και από παραμέτρους που δίνονται από το χρήστη και έχει χρησιμοποιηθεί ευρύτατα για να περιγράψει συστήματα με υστερητική συμπεριφορά.

Το γενικευμένο προσομοίωμα, όπως αυτό εφαρμόστηκε από τον Wen το 1976, μπορεί συνοπτικώς να περιγραφεί προσθέτοντας έναν όρο στην κλασσική εξίσωση κίνησης :

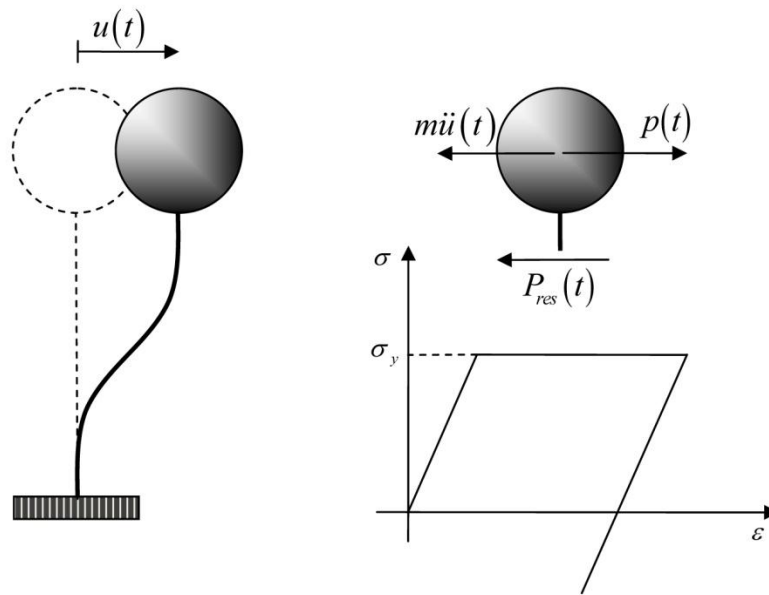
$$\begin{cases} m\ddot{u} + c\dot{u} + \alpha K_0 u + z = p \\ \dot{z} = K\dot{u} \\ K = K(z, \text{sgn } \dot{u}) = (1-a) K_0 [A - |z|^n (\gamma + \beta \text{sgn}(z\dot{u}))] \end{cases} \quad (2.1)$$

όπου το  $a$  ορίζεται ως το πηλίκο της μετελαστικής προς την ελαστική δυσκαμψία :

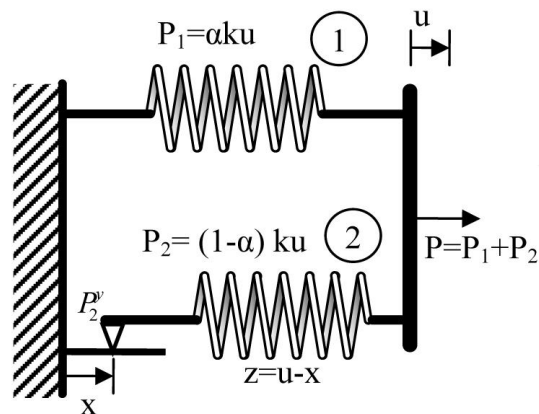
$$a = \frac{K_{pl}}{K_{el}} \quad (2.2)$$

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε, στην κλασσική εξίσωση κίνησης έχει προστεθεί ένας υστερητικός όρος, του οποίου την τιμή μπορούμε να προσδιορίσουμε λύνοντας μία μη γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης. Ο υστερητικός αυτός όρος μπορεί να αντιπροσωπεύει διάφορα μεγέθη ανάλογα με την περίπτωση. Μερικά από τα πιο συνηθισμένα είναι η καμπυλότητα και η αξονική παραμόρφωση. Οι παράμετροι  $A$  και  $K_0$  αποτελούν πλεονασμό, όπως παρουσιάστηκε από τους Ma et al [8] και εξηγούνται στη συνέχεια.

Σύμφωνα με τα παρακάτω σχήματα, αν θεωρήσουμε την απλή περίπτωση του μονοβάθμιου ταλαντωτή, το σύστημα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αποτελείται από δύο ελατήρια. Το ένα αναπαριστά την ελαστική και το άλλο την υστερητική συμπεριφορά του συστήματος. Η συμπεριφορά του υλικού είναι γραμμικώς ελαστική - απολύτως πλαστική με τάση διαρροής  $\sigma_y$ .



Σχήμα 2.1 Μονοβάθμιος ταλαντωτής



Σχήμα 2.2 'Συστατικά' μέρη του προσομοιώματος Bouc-Wen

Όπως γίνεται εύκολα αντιληπτό, η συνολική δύναμη επαναφοράς ως επαλληλία των δύο ελατηρίων μπορεί να γραφτεί ως εξής :

$$P(t) = P^{el}(t) + P^h(t) \quad (2.3)$$

όπου :

$$\begin{aligned} P^{el}(t) &= \alpha \frac{P_y}{u_y} u(t) \\ P^h(t) &= (1-\alpha) P_y z(t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

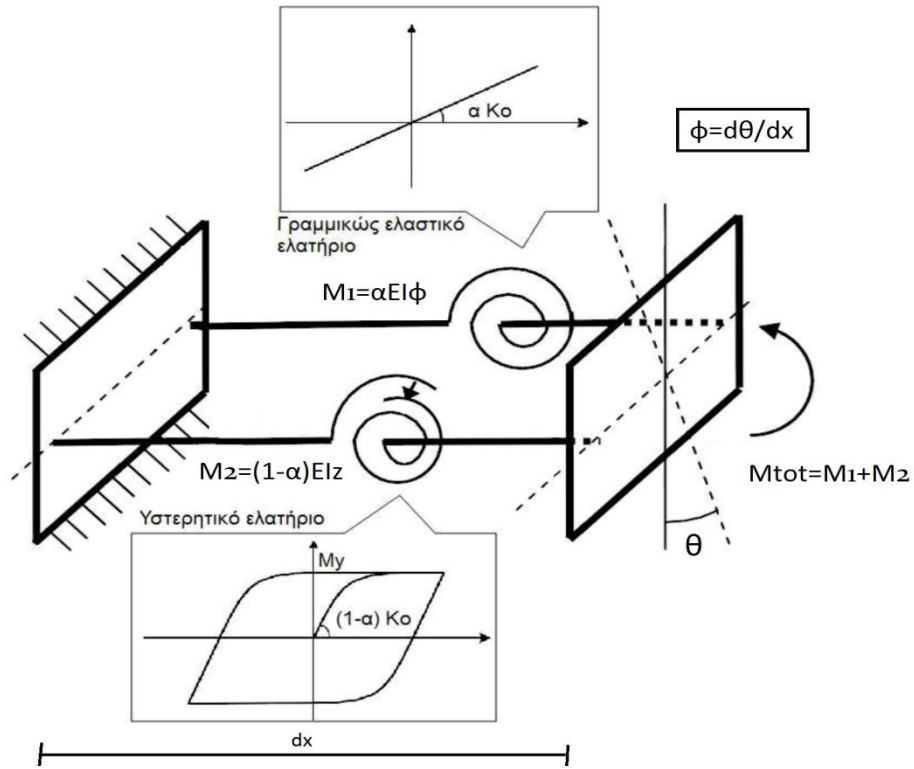
και :

- $P_y$  , η δύναμη διαρροής του συστήματος
- $u_y$  , η παραμόρφωση διαρροής
- $z(t)$  , η υστερητική παράμετρος
- $\alpha$  , ο λόγος της μετελαστικής προς την ελαστική δυσκαμψία

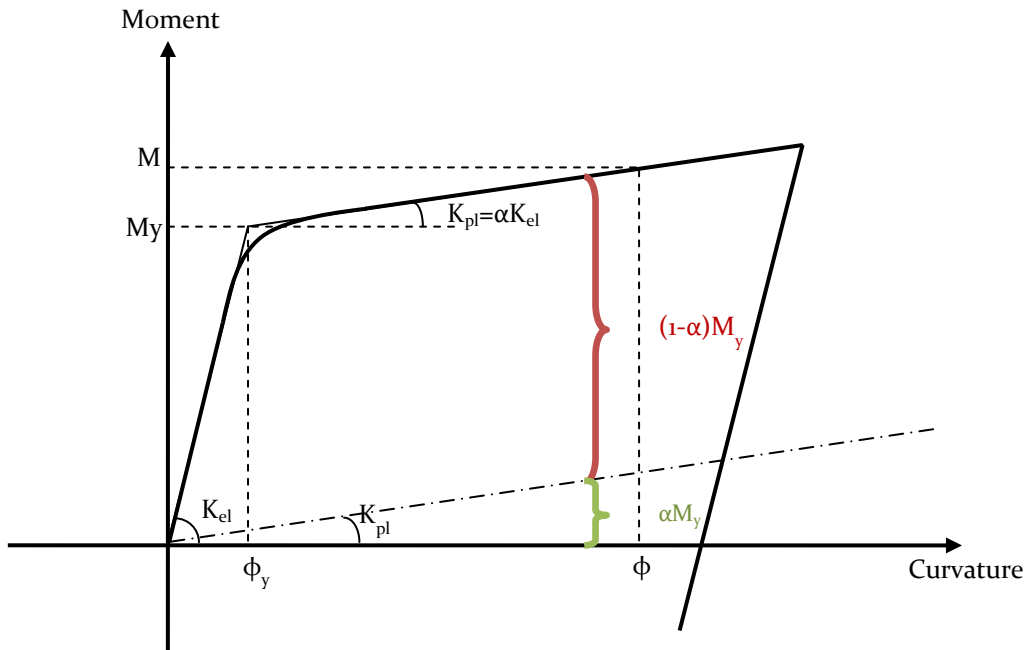
Το γραμμικώς ελαστικό ελατήριο, συνεπώς, έχει αρχική δυσκαμψία ίση με  $\alpha k_{el} = \alpha \frac{P_y}{u_y}$  , ενώ το υστερητικό ίση με  $(1-\alpha) k_{el}$  .

Τα σχήματα 2.3 και 2.4 παρουσιάζουν την αντίστοιχη περίπτωση αλλά τώρα με βάση τις ροπές για ένα μονοβάθμιο σύστημα (μία διατομή). Η εξίσωση η οποία διέπει αυτόν τον ταλαντωτή είναι :

$$M(t) = M_y \left[ \alpha \frac{\varphi(t)}{\varphi_y} + (1-\alpha) z(t) \right] = \alpha EI \varphi(t) + (1-\alpha) EI z(t) \quad (2.5)$$



Σχήμα 2.3 Προσομοίωση παράλληλων ελατηρίων στην περίπτωση ροπής - καμπυλότητας



Σχήμα 2.4 Μοντέλο Bouc - Wen εκφρασμένο ως προς τις ροπές - καμπυλότητες

Η υστερητική παράμετρος  $z$  στην περίπτωση που εξετάζουμε τις ροπές - καμπυλότητες πρέπει να ικανοποιεί την παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$\dot{z}(t) = f(\dot{\phi}(t), z(t)) = \dot{\phi} \left[ A - \left| \frac{z}{\phi^y} \right|^n (\beta + \gamma \operatorname{sgn}(z\dot{\phi})) \right] \quad (2.6)$$

όπου :

- $A, \beta, \gamma$  , παράμετροι που καθορίζουν τη μορφή και το μέγεθος του βρόχου υστέρησης,
- $\phi_y$  , η καμπυλότητα διαρροής,
- $\phi(t)$  , η καμπυλότητα την τρέχουσα χρονική στιγμή,
- $n$  , παράμετρος που καθορίζει τη μετάβαση από τον ελαστικό στο μετελαστικό κλάδο,
- $\operatorname{sgn}$  , συνάρτηση προσήμου με την ιδιότητα :

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{if } x < 0, \\ 0 & \text{if } x = 0, \\ 1 & \text{if } x > 0. \end{cases}$$

Οι Ma et al [8] απέδειξαν ότι μία από τις παραμέτρους είναι περιττή και μέσω μια κατάλληλης μετατροπής μπορεί να αποκλειστεί από το προσομοίωμα. Αυτό το διαπίστωσαν μέσα από πειράματα όπου μετέβαλλαν κάθε φορά την τιμή σε μία από τις μεταβλητές του προσομοιώματος, κρατώντας τις υπόλοιπες σταθερές. Έτσι με βάση τη μελέτη τους, η παράμετρος  $A$  θεωρείται ως η λιγότερο ευαίσθητη μεταβλητή και τίθεται ίση με τη μονάδα. Για να αποδειχθεί ο παραπάνω ισχυρισμός θεωρούμε τα παρακάτω :

Γνωρίζουμε ότι ισχύει βάσει της εξίσωσης (2.5) και αν θέσουμε  $t = 0$  :

$$\left. \frac{dz}{du} \right|_{t=0} = \frac{A}{u_y} \quad (2.7)$$

Επίσης προκύπτει από την εξίσωση (2.3) :



$$\frac{dP}{du} = \alpha \frac{dP_y}{u_y} + (1-\alpha) P_y \frac{dz}{du} \quad (2.8)$$

Από τις εξισώσεις (2.7) , (2.8) έχουμε :

$$\left. \frac{dP}{du} \right|_{t=0} = k_i^* = \alpha \frac{P_y}{u_y} + (1-\alpha) \frac{P_y}{u_y} A \quad (2.9)$$

Επομένως η αρχική δυσκαμψία του συστήματος δίνεται από τη σχέση :

$$k_i^* = \alpha \frac{P_y}{u_y} + (1-\alpha) \frac{P_y}{u_y} A \quad (2.10)$$

Από τη σχέση (2.10) είναι φανερό ότι η αρχική δυσκαμψία του συστήματος γίνεται ίση με τη «φυσικώς» εννοούμενη αρχική δυσκαμψία  $k_i = P_y / u_y$  όταν και μόνο όταν ισχύει:

$$\frac{k_i}{u_y} = \alpha \frac{P_y}{u_y} + (1-\alpha) \frac{P_y}{u_y} A \Leftrightarrow A = 1 \quad (2.11)$$

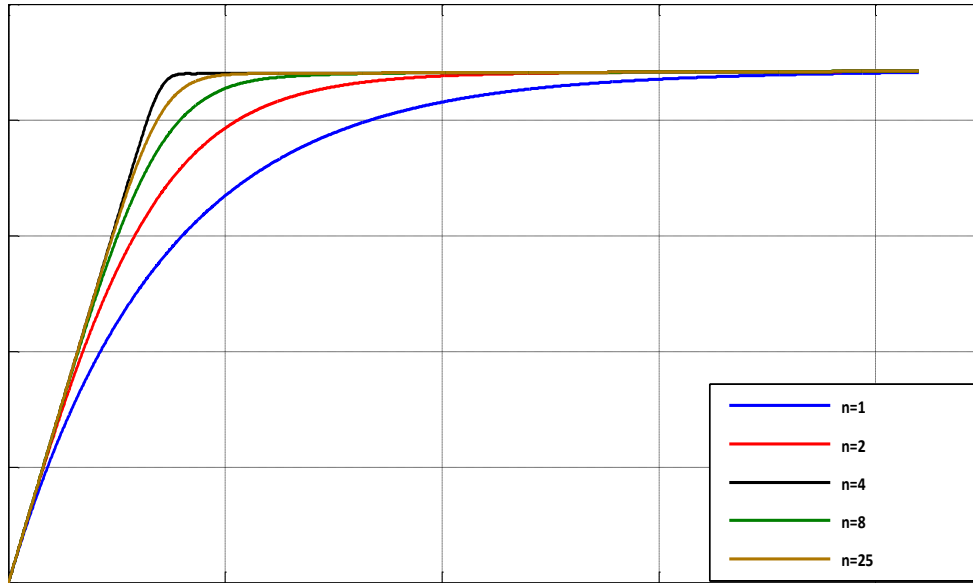
Δηλαδή όταν :

$$A = 1 \quad (2.12)$$

## 2.2 ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΒΟΥC-WEN

- **Συντελεστής n :**

Ο θετικός αυτός συντελεστής όπως αναφέρθηκε ελέγχει τη μετάβαση από τον ελαστικό στο μετελαστικό κλάδο. Η επιρροή του συντελεστή n φαίνεται στο Σχήμα (2.3) για μονοτονική φόρτιση. Στον άξονα y φαίνονται είτε η ροπή, είτε η αξονική δύναμη, ενώ στον x η καμπυλότητα ή η αξονική παραμόρφωση αντίστοιχα :



Σχήμα 2.5 Απόκριση για διάφορες τιμές του  $n$  για μονοτονική φόρτιση

Όπως γίνεται φανερό από το παραπάνω σχήμα, για μικρές τιμές του  $n$  παρατηρείται αρκετά ομαλή μετάβαση από τον ελαστικό στον μετελαστικό κλάδο. Όσο μεγαλώνουν οι τιμές, η μετάβαση γίνεται όλο και πιο απότομη με τις μεγάλες πλέον τιμές να χαρακτηρίζουν μία καμπύλη κοντά στην διγραμμική. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι για μικρές τιμές του  $n$ , αρχίζει να παρατηρείται ολίσθηση πριν την δύναμη διαρροής  $P^y$ . Το φαινόμενο αυτό μπορεί να εξηγηθεί αν θεωρήσουμε ότι  $sgn(z\dot{\varphi}) = 1$  (κατάσταση φόρτισης στο θετικό ημιεπίπεδο),  $A = 1$  και έτσι η σχέση 2.6 γίνεται :

$$\dot{z}(t) = \dot{\varphi} \left[ 1 - \left| \frac{z}{\varphi^y} \right|^n (\beta + \gamma) \right] \quad (2.13)$$

Στην ελαστική περιοχή και με βάση τη σχέση  $z = \begin{cases} \varphi, & \text{για } \varphi \leq \varphi^y \\ \varphi^y, & \text{για } \varphi > \varphi^y \end{cases}$  (2.14), πρέπει η υστερητική μετατόπιση να είναι ίση με την συνολική μετακίνηση. Άρα :

$$z = \varphi \Rightarrow \dot{z}(t) = \dot{\varphi} \Rightarrow \left[ 1 - \left| \frac{z}{\varphi^y} \right|^n (\beta + \gamma) \right] = 1 \Rightarrow z = 0 \quad (2.15)$$

Η εξίσωση (2.15) όμως δεν μπορεί να ισχύει, καθώς τότε θα σήμαινε ότι και η καμπυλότητα θα ήταν μηδέν. Συνεπώς ο ρόλος του εκθέτη  $n$  είναι να κρατά τον λόγο  $\left| \frac{z}{\phi^y} \right|$  αρκετά μικρό, ούτως ώστε

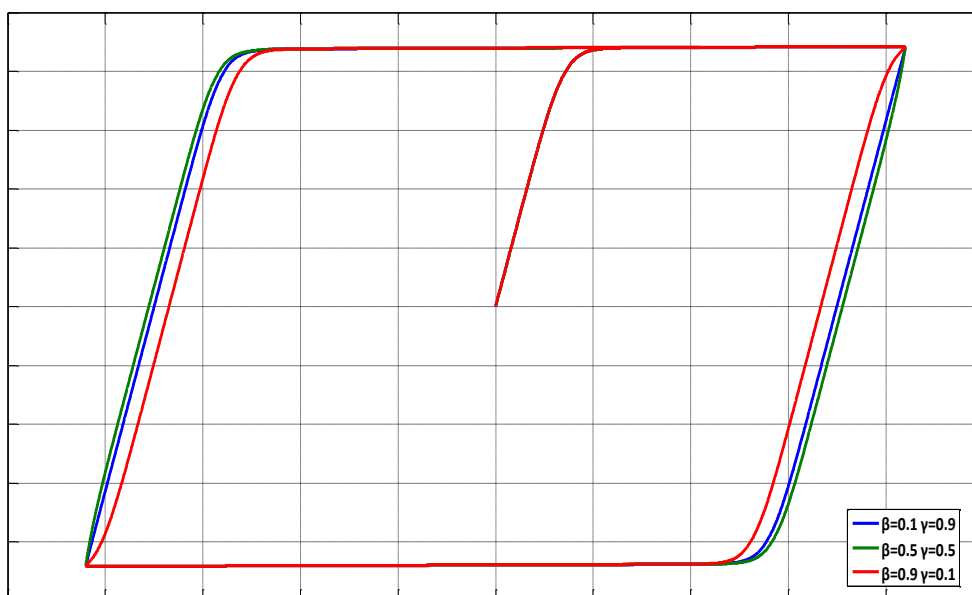
ολόκληρη η ποσότητα που πολλαπλασιάζεται με την καμπυλότητα να τείνει στην μονάδα :

$$1 - \left| \frac{z}{\phi^y} \right|^n (\beta + \gamma) \rightarrow 1.$$

Η απόκλιση της τιμής αυτής από την μονάδα, η οποία γίνεται πιο έντονη για μικρές τιμές του  $n$ , είναι αυτή που προκαλεί μικροολίσθηση στο σύστημα πριν την διαρροή.

- **Συντελεστές  $\beta$  και  $\gamma$  :**

Οι συντελεστές  $\beta$  και  $\gamma$  είναι συντελεστές σχήματος και έτσι επηρεάζουν την μορφή των υστερητικών βρόχων. Η επιρροή των συντελεστών  $\beta$  και  $\gamma$  φαίνεται στο Σχήμα (2.6) για ημιτονική φόρτιση.



Σχήμα 2.6 Απόκριση για διάφορες τιμές των  $\beta, \gamma$  για ημιτονική φόρτιση

Το άθροισμα των παραμέτρων  $\beta$  και  $\gamma$  πρέπει να είναι ίσο με μονάδα για λόγους συμβατότητας με την θεωρία της πλαστικότητας. Για τον υπολογισμό των παραμέτρων έχουν ακολουθηθεί διάφορες τεχνικές. Παρόλα αυτά, όπως απέδειξαν οι Erlicher και Bursi (2004), οι προσδιοριζόμενες παράμετροι πρέπει να ακολουθούν τον ακόλουθο περιορισμό για λόγους θερμοδυναμικής φύσεως :

$$-\beta \leq \gamma \leq \beta$$

Στην ειδική περίπτωση που  $\beta = \gamma = 0.5$  οι κλάδοι αποφόρτισης είναι ευθείες γραμμές.

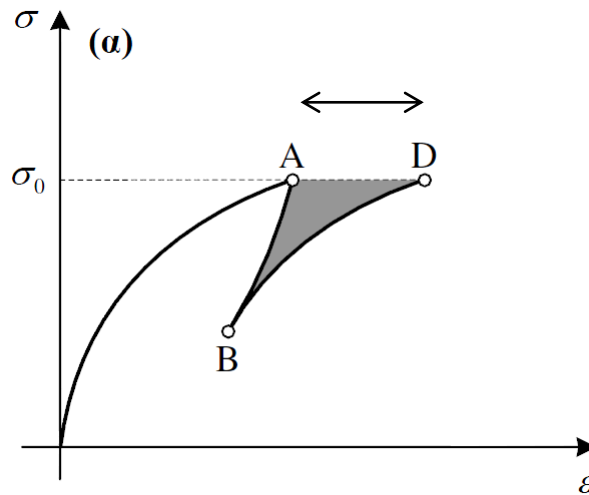
#### 2.4 ΑΤΕΛΕΙΕΣ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

Οι ατέλειες του προσομοιώματος έχουν επισημανθεί στο παρελθόν από αρκετούς μελετητές (Sandler [11], Casciati [12], Thyagarajan [13], Spacone et al [14]). Οι ατέλειες αυτές αφορούν κατά βάση τη συμπεριφορά του μοντέλου σε σύντομους κύκλους φόρτισης – αποφόρτισης – επαναφόρτισης. Κατά τη διάρκεια αυτών παρουσιάζεται τοπική παραβίαση των αξιωμάτων της πλαστικότητας του Drucker και του Il'yushin. Αυτό το μειονέκτημα του προσομοιώματος Bouc-Wen μελετήθηκε και αντιμετωπίστηκε αποτελεσματικά, πρόσφατα από τον Α. Ε Χαραλαμπίακη [15] στη Διδακτορική του διατριβή (2009).

Οι αρχές της πλαστικότητας του Drucker [16] και του Il'yushin [17] έχουν μεγάλη σημασία για την κλασική θεωρία της πλαστικότητας. Η αρχή του Il'yushin είναι γενικότερη και αντιπροσωπεύει την συμπεριφορά μιας μεγάλης κατηγορίας υλικών, ενώ έχει παρόμοιες συνέπειες με την αρχή του Drucker. Τόσο η αρχή του Drucker όσο και αυτή του Il'yushin συνεπάγονται την αρχή της μέγιστης πλαστικής απώλειας (postulate of maximum plastic dissipation), ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει. Σε ορισμένα υλικά, η ισχύς των αρχών των Drucker και Il'yushin μπορεί να μην είναι επιβεβλημένη, όπως για παράδειγμα στη περίπτωση εδαφικών σχηματισμών. Σύμφωνα με το αξίωμα του Drucker, το έργο που παράγεται κατά έναν κλειστό κύκλο τάσης είναι μη αρνητικό δηλαδή πρέπει να ισχύει :

$$\int (\sigma - \sigma_o) d\varepsilon \geq 0 \quad (2.22)$$

Σχηματικά η παραβίαση του αξιώματος του Drucker έχει ως εξής :



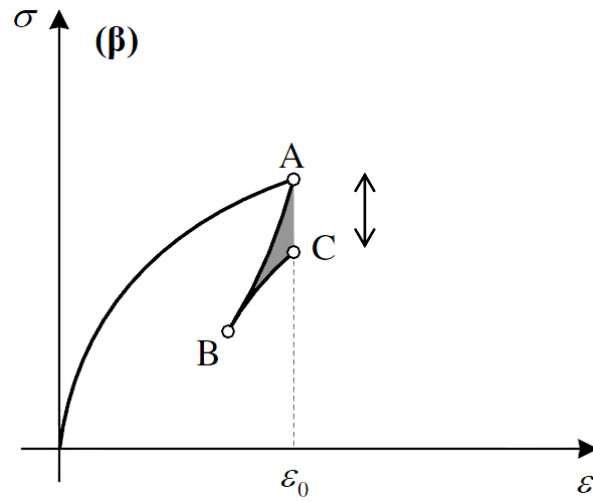
Σχήμα 2.7 Παραβίαση του Αξιώματος του Drucker

Το παραπάνω διάγραμμα, δείχνει την πορεία φόρτισης, αποφόρτισης και επαναφόρτισης σε επίπεδο τάσεων. Το διάγραμμα θα μπορούσε να εκφραστεί και σε όρους αξονικών δυνάμεων – παραμορφώσεων ή ροπών – καμπυλοτήτων. Η πορεία αυτή, σύμφωνα με τον Drucker θα έπρεπε να ξεκινά από την αρχή των αξόνων, και να ακολουθεί τα σημεία A, μετά την φόρτιση, B, μετά την αποφόρτιση, και μετά να διέρχεται πάλι από το σημείο A, κατά την επαναφόρτιση. Όμως, κατά την επίλυση φορέων σύμφωνα με το προσομοίωμα Bouc-Wen, ακολουθείται η πορεία B-D και έτσι παραβιάζεται το αξίωμα του Drucker.

Το αξίωμα του Ilyushin αναφέρεται στο έργο που παράγεται κατά ένα κλειστό κύκλο παραμόρφωσης είναι μη αρνητικό και έχει ως εξής :

$$\int \sigma d\varepsilon \geq 0 \quad (2.23)$$

Σχηματικά η παραβίαση του αξιώματος του Ilyushin είναι :



Σχήμα 2.8 Παραβίαση του Αξιώματος του Pyushin

Για το αξίωμα του Pyushin, ισχύει παρόμοια εξήγηση με την παραπάνω που δόθηκε για αυτό του Drucker. Κατά την επαναφόρτιση, δημιουργείται το σφάλμα της γκρι επιφάνειας που φαίνεται στο σχήμα 2.8.

## Κεφάλαιο 3

# Το προτεινόμενο πεπερασμένο στοιχείο

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται προσπάθεια ανάπτυξης της θεωρίας των Πεπερασμένων στοιχείων για το στοιχείο δοκού στον χώρο, κατάλληλα διαμορφωμένα, ώστε να μπορεί να περιγράψει τη μη γραμμική δυναμική ανάλυση των κατασκευών. Οι βαθμοί ελευθερίας της δοκού αυξάνονται, αφού προστίθενται πλέον και οι υστερητικοί, οι οποίοι υπόκεινται στις εξελικτικές εξισώσεις τύπου Bouc-Wen. Οι νέοι αυτοί βαθμοί ελευθερίας θεωρούνται ως υστερητικές καμπυλότητες κατά τις διευθύνσεις  $y$  και  $z$ , δηλαδή κατά τον ισχυρό και τον ασθενή άξονα αντίστοιχα, καθώς και υστερητικές κεντρικές αξονικές παραμορφώσεις για κάθε άκρο της δοκού.

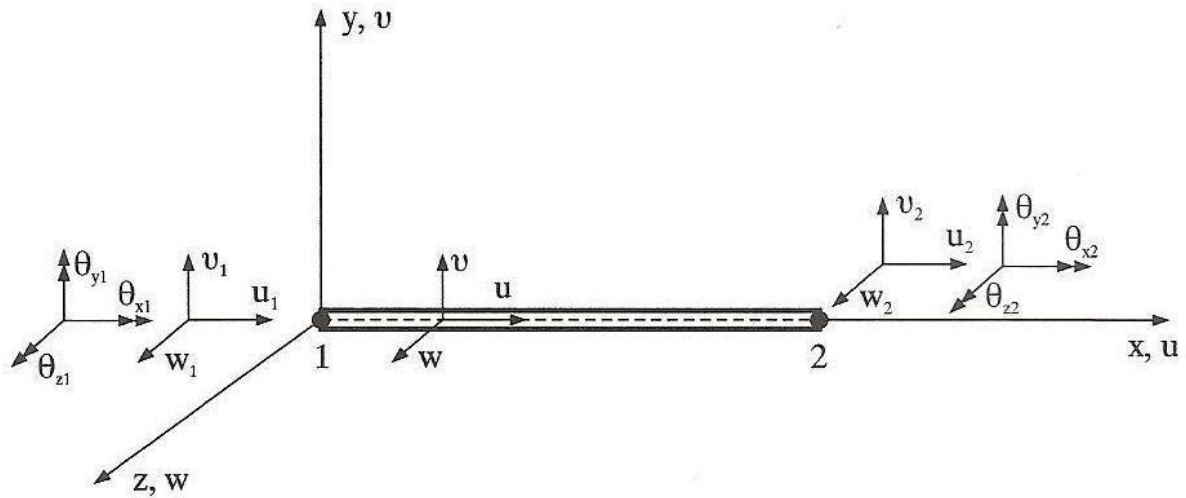
Σε επίπεδο στοιχείου, με βάση την αρχή των δυνατών έργων μπορούν να παραχθούν το ελαστικό και το υστερητικό μητρώο στιβαρότητας και στην συνέχεια, με την βοήθεια της μεθόδου της άμεσης ακαμψίας, μπορεί να μορφωθεί το μητρώο μάζας. Μετά τον μετασχηματισμό τους από το τοπικό στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων, μορφώνονται τα αντίστοιχα μητρώα σε επίπεδο κατασκευής με βάση πάλι την μέθοδο της άμεσης ακαμψίας. Έχοντας πλέον διαμορφώσει σε μακροσκοπικό επίπεδο το ελαστικό μητρώο δυσκαμψίας και το μητρώο μάζας, μπορεί να διατυπωθεί το ιξώδες μητρώο απόσβεσης σαν γραμμικός συνδυασμός τους (απόσβεση Rayleigh). Χρήσιμο θα ήταν εδώ να αναφερθεί ότι η βασική απόσβεση προκύπτει από το φαινόμενο της υστέρησης και συνεπώς ενώ στην ελαστική ανάλυση το ιξώδες μητρώο απόσβεσης θα ήταν θεμελιώδες, στην περίπτωσή μας έχει πολύ μικρή επίδραση και χρησιμοποιείται κυρίως για να βοηθάει στην αριθμητική επίλυση του προβλήματος.

Αφού τα απαραίτητα μητρώα έχουν πλέον σχηματιστεί, και προσθέτοντας και το μητρώο δράσεων σε καθολικές συντεταγμένες, μπορεί να διατυπωθεί πλήρως η εξίσωση κίνησης της κατασκευής. Το σύστημα των εξισώσεων, δηλαδή οι γραμμικές εξισώσεις κίνησης σε επίπεδο κατασκευής και οι μη γραμμικές υστερητικές εξισώσεις σε επίπεδο στοιχείου, έρχεται σε μορφή χώρου κατάστασης (state space form) για να επιλυθεί ταυτόχρονα χρησιμοποιώντας τη μέθοδο ολοκλήρωσης κατά τον αλγόριθμο Livermore. Με αυτό τον τρόπο αποφεύγεται η γραμμικοποίηση των εξισώσεων στο καθολικό επίπεδο της κατασκευής. Η παραπάνω διαδικασία έχει περιγραφεί για τις δύο διαστάσεις από τους Σ. Τριανταφύλλου και Β. Κουμούση [18].



### 3.1 ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζονται οι επικόμβιοι και οι ενδιάμεσοι βαθμοί ελευθερίας του πρισματικού στοιχείου δοκού στο χώρο, το οποίο είναι μέρος μιας τρισδιάστατης πλαισιωτής κατασκευής :



Σχήμα 3.1 Στοιχείο δοκού στον χώρο

Όπως περιγράφηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, το μοντέλο Bouc-Wen μπορεί κανείς να το φανταστεί σαν έναν παράλληλο συνδυασμό ενός γραμμικού και ενός υστερητικού ελατηρίου. Σύμφωνα με τον παραπάνω παραλληλισμό, η ανελαστική σχέση ροπών-καμπυλοτήτων σε μία διατομή σε απόσταση  $x$  από το άκρο, ανάλογα με την διεύθυνση της φόρτισης, ακολουθεί τον παρακάτω νόμο :

$$M_y(x,t) = M_y^y \left[ a_{by} \frac{\varphi_y(x,t)}{\varphi_y^y} + (1-a_{by}) \frac{z_{by}(x,t)}{\varphi_y^y} \right] = a_{by} EI_y \varphi_y(x,t) + (1-a_{by}) EI_y z_{by}(x,t) \quad (3.1)$$

$$M_z(x,t) = M_z^y \left[ a_{bz} \frac{\varphi_z(x,t)}{\varphi_z^y} + (1-a_{bz}) \frac{z_{bz}(x,t)}{\varphi_z^y} \right] = a_{bz} EI_z \varphi_z(x,t) + (1-a_{bz}) EI_z z_{bz}(x,t)$$

Όπου :

- $M_y(x,t)$  ή  $M_z(x,t)$  , η εσωτερική ροπή κατά y ή z,
- $\varphi_y$  ή  $\varphi_z$  , η καμπυλότητα κατά y ή z,
- E και  $I_y$  ή  $I_z$  , το μέτρο ελαστικότητας και η ροπή αδρανείας της διατομής κατά y ή z αντίστοιχα,
- $EI_y$  ή  $EI_z$  , η αρχική ακαμψία κατά y ή z,
- $z_{by}(x,t)$  ή  $z_{bz}(x,t)$  , η υστερητική συνιστώσα της καμπυλότητας κατά y ή z.

Η υστερητική συνιστώσα z της καμπυλότητας, ανάλογα με την διεύθυνση που γίνεται η μελέτη, ακολουθεί την ακόλουθη μη γραμμική διαφορική εξίσωση [18]:

$$\dot{z}_{by}(x,t) = \dot{\varphi}_y \left[ 1 - \left| \frac{z_{by}}{z_{by}^y} \right|^n (\beta + \gamma \operatorname{sgn}(z_{by} \dot{\varphi}_y)) \right] \quad (3.2)$$

$$\dot{z}_{bz}(x,t) = \dot{\varphi}_z \left[ 1 - \left| \frac{z_{bz}}{z_{bz}^y} \right|^n (\beta + \gamma \operatorname{sgn}(z_{bz} \dot{\varphi}_z)) \right]$$

και εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της υστερητικής καμπυλότητας σε σχέση με το ρυθμό μεταβολής της καμπυλότητας επί ένα μη γραμμικό συντελεστή.

Σύμφωνα με την παραδοχή Euler - Bernulli η καμπυλότητα συναρτήσει της βύθισης για κάθε διεύθυνση δίνεται παρακάτω :

$$\varphi_y = \frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} \quad , \quad \varphi_z = \frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} \quad (3.3)$$

όπου  $w_y$  και  $w_z$  η βύθιση του δοκαριού κατά τις δύο κάθετες διευθύνσεις. Αντικαθιστώντας τις σχέση (3.3) στις (3.1) προκύπτουν η ακόλουθες εκφράσεις :

$$M_y(x,t) = EI_y \tilde{\varphi}_y(x,t)$$

$$\tilde{\varphi}_y(x,t) = a_{by} \frac{\partial^2 w_y(x,t)}{\partial x^2} + (1 - a_{by}) z_{by}(x,t) \quad (3.4)$$

$$M_z(x,t) = EI_z \tilde{\varphi}_z(x,t)$$

$$\tilde{\varphi}_z(x,t) = a_{bz} \frac{\partial^2 w_z(x,t)}{\partial x^2} + (1 - a_{bz}) z_{bz}(x,t)$$

όπου η  $\tilde{\varphi}_y(x,t)$  και  $\tilde{\varphi}_z(x,t)$  μπορούν να θεωρηθούν ως ένα μέτρο της 'ισοδύναμης γενικευμένης καμπυλότητας' σε δεδομένο σημείο  $x$  κατά μήκος της δοκού.

Ομοίως όσον αφορά τις αξονικές παραμορφώσεις μπορεί να γραφτεί :

$$\begin{aligned} N(x,t) &= E\tilde{\varepsilon}_0(x,t) \\ \tilde{\varepsilon}_0(x,t) &= a_u \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + (1-a_u)z_u(x,t) \end{aligned} \quad (3.5)$$

όπου  $\tilde{\varepsilon}_0$  είναι η γενικευμένη κεντρική αξονική παραμόρφωση παρόμοια με την γενικευμένη καμπυλότητα,  $N$  είναι η αξονική δύναμη και  $z_u$  είναι η αξονική υστερητική παραμόρφωση όμοια με την υστερητική καμπυλότητα. Η αντίστοιχη υστερητική εξίσωση [18] είναι :

$$\dot{z}_u(x,t) = \dot{\varepsilon}_0 \left[ 1 - \left| \frac{z_u}{\varepsilon_0^y} \right|^n (\beta + \gamma \operatorname{sgn}(z_u \cdot \dot{\varepsilon}_0)) \right] \quad (3.6)$$

Η παράμετροι  $\alpha_u$ ,  $\alpha_{by}$ , και  $\alpha_{bz}$ , εξαρτώνται από το υλικό της κατασκευής και μπορούν να προσδιορισθούν μετά από κατάλληλες δοκιμές. Επίσης αν δεν υπάρχουν λεπτομερείς πληροφορίες για αυτές τις παραμέτρους, τότε μπορούν να πάρουν την ίδια τιμή. Αν τεθούν ίσες με τη μονάδα τότε το στοιχείο θα συμπεριφερθεί ελαστικά και δεν θα ληφθεί υπόψη η υστερητική συμπεριφορά. Τροποποιώντας τις εξισώσεις (3.4) και (3.6) μπορεί να ληφθεί υπόψη η αλληλεπίδραση των δύο ροπών και της αξονικής, μειώνοντας τις καμπυλότητες και την αξονική παραμόρφωση διαρροής. Ένα μοντέλο αλληλεπίδρασης παρουσιάστηκε από τους Symeonov et al. (2000). Παράλληλα, σύμφωνα με τους Sivaselvan-Reinhorn(2000) [5], μέσω του υπολογισμού της υστερητικής ενέργειας μπορούν να ληφθούν υπόψη φαινόμενα φθοράς των διατομών όπως είναι αυτά της απομείωσης αντοχής, δυσκαμψίας καθώς και το φαινόμενο της στένωσης. Τα φαινόμενα αυτά προκαλούνται από την ανακυκλιζόμενη φόρτιση και συμβαίνουν λόγω των επαναλήψεων της καταπόνησης.

### 3.2 ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Χρησιμοποιώντας κυβικές πολυωνυμικές συναρτήσεις παρεμβολής για το πεδίο των μετατοπίσεων προκύπτει η ακόλουθη σχέση [19] :

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & N_6 & 0 & N_8 & 0 & 0 & 0 & N_{12} \\ 0 & 0 & N_3 & 0 & N_5 & 0 & 0 & 0 & N_9 & 0 & N_{11} & 0 \end{bmatrix} \{d\} \quad (3.7)$$

Εάν θέλουμε να προσθέσουμε και την επιρροή της στρέψης, εμπλουτίζουμε την παραπάνω μητρική εξίσωση προσθέτοντας την παρακάτω :

$$[\theta_x] = [0 \ 0 \ 0 \ N_4 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ N_{10} \ 0 \ 0] \{d_x\} \quad (3.8)$$

Παρόλα αυτά, η προσθήκη αυτή είναι περιττή λόγω του γεγονότος ότι επηρεάζει τα αποτελέσματα μόνο στην περίπτωση που διεγείρουμε τους στρεπτικούς βαθμούς ελευθερίας του συστήματος, πράγμα το οποίο θεωρούμε ότι ένας σεισμός δεν μπορεί να κάνει, εκτός αν η γεωμετρία του φορέα είναι ιδιόρρυθμη.

Το διάνυσμα των επικόμβιων μετατοπίσεων  $\{d\}$  μαζί με τους στρεπτικούς βαθμούς ελευθερίας ορίζεται ως :

$$\{d\} = \{u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad \theta_{z1} \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad \theta_{z2}\}^T \quad (3.9)$$

Οι αντίστοιχες συναρτήσεις σχήματος είναι [20] :

$$\begin{aligned}
 N_1 &= N_4 = 1 - \frac{x}{L} \\
 N_2 &= N_3 = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3} \\
 N_6 &= -N_5 = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\
 N_7 &= N_{10} = \frac{x}{L} \\
 N_8 &= N_9 = \frac{3x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3} \\
 N_{12} &= -N_{11} = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Σύμφωνα με την εξίσωση (3.3) και χρησιμοποιώντας την (3.7) οι ολικές καμπυλότητες  $\phi_y$  και  $\phi_z$  μπορούν να γραφτούν ως :

$$\begin{aligned}
 \phi_y &= \left[ 0 \quad N_{2,xx} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad N_{6,xx} \quad 0 \quad N_{8,xx} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad N_{12,xx} \right] \{d\} = [B_{by}(x)] \{d\} \\
 \phi_z &= \left[ 0 \quad 0 \quad N_{3,xx} \quad 0 \quad N_{5,xx} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad N_{9,xx} \quad 0 \quad N_{11,xx} \quad 0 \right] \{d\} = [B_{bz}(x)] \{d\}
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

όπου το σύμβολο  $_{,xx}$  δηλώνει διπλή παραγωγή ως προς τη μεταβλητή  $x$  δηλαδή :

$$\begin{aligned}
 \phi_y(x) &= \left[ 0 \quad \frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L} \quad 0 \quad \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \right] \{d\} \\
 \phi_z(x) &= \left[ 0 \quad 0 \quad \frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} \quad 0 \quad \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \quad 0 \quad \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \quad 0 \right] \{d\}
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Επειδή οι συνολικές ροπές στα άκρα του στοιχείου ( $M_1$  και  $M_2$ ) βρίσκονται σε ισορροπία και δεν υπάρχει ενδιάμεση φόρτιση, η εσωτερική ροπή σε διατομή σε απόσταση  $x$  από το άκρο για κάθε διεύθυνση είναι :

$$M_y(x,t) = \left(1 - \frac{x}{L}\right)M_1 + \frac{x}{L}M_2 \tag{3.13}$$

$$M_z(x,t) = \left(1 - \frac{x}{L}\right)M_1 + \frac{x}{L}M_2$$

Από τη σχέση (3.4) συνεπάγεται :

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_y(x,t) &= \left(1 - \frac{x}{L}\right)\tilde{\varphi}_1 + \frac{x}{L}\tilde{\varphi}_2 \\ \tilde{\varphi}_z(x,t) &= \left(1 - \frac{x}{L}\right)\tilde{\varphi}_1 + \frac{x}{L}\tilde{\varphi}_2\end{aligned}\tag{3.14}$$

Ομοίως η αξονική παραμόρφωση είναι :

$$\varepsilon_0 = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{7,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{d\} = [B_u(x)] \{d\}\tag{3.15}$$

Και το αντίστοιχο υστερητικό μέρος προκύπτει ως :

$$z_u = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_u^1 \\ z_u^2 \end{Bmatrix} = [N]_z^u \begin{Bmatrix} z_u^1 \\ z_u^2 \end{Bmatrix}\tag{3.16}$$

Με [18] :

$$\begin{aligned}N_{13} &= \frac{1}{2} \\ N_{14} &= \frac{1}{2}\end{aligned}\tag{3.17}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (3.15) και (3.16) στη (3.5) προκύπτει η ακόλουθη σχέση :

$$\tilde{\varepsilon}_0 = \alpha_u \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{7,x} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{d\} + (1 - \alpha_u) \begin{bmatrix} N_{13} & N_{14} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_u^1 \\ z_u^2 \end{Bmatrix}\tag{3.18}$$

Όσον αφορά το πεδίο των υστερητικών καμπυλοτήτων, παρεμβάλλεται χρησιμοποιώντας τις παρακάτω συναρτήσεις σχήματος [18] :

$$\begin{aligned}N_{15} = N_{17} &= 1 - \frac{x}{L} \\ N_{16} = N_{18} &= \frac{x}{L}\end{aligned}\tag{3.19}$$

Και άρα :

$$z_{by} = [N_{15} \quad N_{16}] \begin{Bmatrix} z_{by}^1 \\ z_{by}^2 \end{Bmatrix} = [N]_{by}^z \begin{Bmatrix} z_{by}^1 \\ z_{by}^2 \end{Bmatrix}$$

$$z_{bz} = [N_{17} \quad N_{18}] \begin{Bmatrix} z_{bz}^1 \\ z_{bz}^2 \end{Bmatrix} = [N]_{bz}^z \begin{Bmatrix} z_{bz}^1 \\ z_{bz}^2 \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

Τέλος αντικαθιστώντας τις (3.10) και (3.19) στη (3.4) προκύπτει :

$$\tilde{\varphi}_y = a_{by} \begin{bmatrix} 0 & N_{2,xx} & 0 & 0 & 0 & N_{6,xx} & 0 & N_{8,xx} & 0 & 0 & 0 & N_{12,xx} \end{bmatrix} \{d\} + (1-a_{by}) [N_{15} \quad N_{16}] \begin{Bmatrix} z_{by}^1 \\ z_{by}^2 \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\tilde{\varphi}_z = a_{bz} \begin{bmatrix} 0 & N_{2,xx} & 0 & 0 & 0 & N_{6,xx} & 0 & N_{8,xx} & 0 & 0 & 0 & N_{12,xx} \end{bmatrix} \{d\} + (1-a_{bz}) [N_{17} \quad N_{18}] \begin{Bmatrix} z_{bz}^1 \\ z_{bz}^2 \end{Bmatrix}$$

### 3.3 ΕΥΡΕΣΗ ΒΑΣΙΚΗΣ ΣΧΕΣΗΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

Λαμβάνοντας υπόψη την αρχή των δυνατών έργων και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.1) και (3.5), προκύπτει η ακόλουθη σχέση [18] :

$$\int_0^L \left( \{\delta \varepsilon_0\}^T \{N\} + \{\delta \varphi\}^T \{M\} \right) dx = \{\delta d\}^T \{P\} \quad (3.22)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (3.16),(3.17) το πρώτο μέρος του δεξιού τμήματος του παραπάνω ολοκληρώματος, το οποίο εκφράζει το δυνατό έργο των αξονικών δυνάμεων μπορεί να γραφτεί ως εξής :

$$I_1 = EA \left[ a_u \int_0^L [B_u]^T [B_u] dx \quad ; \quad (1-a_u) \int_0^L [B_u]^T [N]_z^u dx \right] \begin{Bmatrix} \{d\} \\ \dots \\ z_{u1} \\ z_{u2} \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

Ομοίως, αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (3.10),(3.19) στην (3.21) και διεκπεραιώνοντας τις απαραίτητες αλγεβρικές πράξεις, το δεύτερο μέρος του ολοκληρώματος στο αριστερό κομμάτι, που εκφράζει το δυνατό έργο των καμπτικών καταπονήσεων μπορεί να γραφτεί ως εξής :

$$I_{2y} = EI_y \left[ a_{by} \int_0^L [B_{by}]^T [B_{by}] dx \ : \ (1-a_{by}) \int_0^L [B_{by}]^T [N]_z^{by} dx \right] \begin{Bmatrix} \{d\} \\ \dots \\ z_{by1} \\ z_{by2} \end{Bmatrix}$$

$$I_{2z} = EI_z \left[ a_{bz} \int_0^L [B_{bz}]^T [B_{bz}] dx \ : \ (1-a_{bz}) \int_0^L [B_{bz}]^T [N]_z^{bz} dx \right] \begin{Bmatrix} \{d\} \\ \dots \\ z_{bz1} \\ z_{bz2} \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

Πραγματοποιώντας τα παραπάνω ολοκληρώματα και προσθέτοντας τα διανύσματα μετακινήσεων που αντιστοιχούν στις υστερητικές παραμέτρους των στοιχείων, προκύπτει η παρακάτω σχέση :

$$[[k]_{el} \ : \ [k]_h] \begin{Bmatrix} \{d\} \\ \{z_u\} \\ \{z_{by}\} \\ \{z_{bz}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ Q_{1y} \\ Q_{1z} \\ M_{1x} \\ M_{1y} \\ M_{1z} \\ N_2 \\ Q_{2y} \\ Q_{2z} \\ M_{1x} \\ M_{1y} \\ M_{1z} \end{Bmatrix} = \{f\} \quad (3.25)$$

Αξίζει να σημειωθεί, ότι το ελαστικό και το υστερητικό μητρώο δυσκαμψίας πρέπει να υπολογίζονται από την αρχή των δυνατών έργων και με την βοήθεια κάποιας γλώσσας προγραμματισμού όπως η Matlab ή η Maple, αντί να λαμβάνονται έτοιμα από την βιβλιογραφία, επειδή όπως βλέπουμε η γενεσιουργή αιτία τους είναι τα μητρώα παραμορφώσεων, δηλαδή οι συναρτήσεις σχήματος, τις οποίες μπορεί κανείς να συναντήσει σε διάφορες μορφές. Για τον παραπάνω λόγο, και λόγω του γεγονότος ότι τα μητρώα δυσκαμψίας πρέπει να είναι συμβατά με τις συναρτήσεις σχήματος, γίνεται εδώ η παρούσα υπόδειξη. Αυτή είναι η αιτία για την οποία διάφορες πηγές δίνουν μητρώα δυσκαμψίας που διαφέρουν κατά κάποια πρόσημα. Με δεδομένες λοιπόν τις συναρτήσεις σχήματος που παρουσιάστηκαν πιο πάνω στο κεφάλαιο και κάνοντας τις κατάλληλες



αλγεβρικές πράξεις, προκύπτουν τα ακόλουθα συμβατά μητρώα στιβαρότητας :

Όπου : (3.26)

$$[k]_{el} = \begin{bmatrix} \frac{a_u EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{a_u EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12a_{by} EI_y}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6a_{by} EI_y}{L^2} & 0 & -\frac{12a_{by} EI_y}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6a_{by} EI_y}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12a_{bz} EI_z}{L^3} & 0 & -\frac{6a_{bz} EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12a_{bz} EI_z}{L^3} & 0 & -\frac{6a_{bz} EI_z}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6a_{bz} EI_z}{L^2} & 0 & \frac{4a_{bz} EI_z}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6a_{bz} EI_z}{L^2} & 0 & \frac{2a_{bz} EI_z}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6a_{by} EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4a_{by} EI_y}{L} & 0 & -\frac{6a_{by} EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2a_{by} EI_y}{L} \\ -\frac{a_u EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a_u EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12a_{by} EI_y}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6a_{by} EI_y}{L^2} & 0 & \frac{12a_{by} EI_y}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6a_{by} EI_y}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12a_{bz} EI_z}{L^3} & 0 & \frac{6a_{bz} EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12a_{bz} EI_z}{L^3} & 0 & \frac{6a_{bz} EI_z}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6a_{bz} EI_z}{L^2} & 0 & \frac{2a_{bz} EI_z}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6a_{bz} EI_z}{L^2} & 0 & \frac{4a_{bz} EI_z}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6a_{by} EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2a_{by} EI_y}{L} & 0 & -\frac{6a_{by} EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4a_{by} EI_y}{L} \end{bmatrix}$$

(Elastic Stiffness Matrix)

και

$$[k]_h = \begin{bmatrix} \frac{(1-a_u)EA}{2} & -\frac{(1-a_u)EA}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{(1-a_{by})EI_y}{L} & \frac{(1-a_{by})EI_y}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(1-a_{bz})EI_z}{L} & \frac{(1-a_{bz})EI_z}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-a_{bz})EI_z & 0 \\ 0 & 0 & -(1-a_{by})EI_y & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(1-a_u)EA}{2} & -\frac{(1-a_u)EA}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-a_{by})EI_y}{L} & -\frac{(1-a_{by})EI_y}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-a_{bz})EI_z}{L} & -\frac{(1-a_{bz})EI_z}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1-a_{bz})EI_z \\ 0 & 0 & 0 & (1-a_{by})EI_y & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

(Hysteretic Stiffness Matrix)

Η σχέση (3.25) περιέχει την ελαστική και την υστερητική συμπεριφορά του στοιχείου, όπου στα πλαίσια των μικρών μετατοπίσεων οι αξονικοί βαθμοί ελευθερίας είναι ασύζευκτοι ως προς τους καμπτικούς και τους διατμητικούς. Υποθέτοντας απλοποιητικά ότι  $\alpha_u = \alpha_{by} = \alpha_{bz} = \alpha$  η σχέση μπορεί να γραφτεί πιο διακριτά στην εξής μορφή :

$$\{f\} = \alpha [k]_{el} \{d\} + (1-\alpha) [k]_{hys} \{z\} \quad (3.28)$$

όπου ο πρώτος όρος του αθροίσματος αντιπροσωπεύει την ελαστική συμπεριφορά με βάση τη μειωμένη δυσκαμψία και ο δεύτερος όρος την υστερητική. Είναι φανερό ότι στην περίπτωση που  $\alpha=1$  απαλείφονται οι υστερητικοί βαθμοί ελευθερίας και παραμένει το ελαστικό μητρώο δυσκαμψίας της δοκού.

Έχουμε λοιπόν ορίσει το ελαστικό μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου  $[k]_{el}$  (12x12) και το υστερητικό  $[k]_{hys}$  (12x6). Τα βασικά αυτά μητρώα ορίζονται σε επίπεδο στοιχείου και υπολογίζονται μία φορά στην αρχή της ανάλυσης χωρίς να απαιτείται επανυπολογισμός τους, σε αντίθεση με τις κλασικές επαυξητικές μεθόδους όπου σε κάθε επαυξητικό βήμα το μητρώο δυσκαμψίας εξαρτάται από το επίπεδο της πλαστικοποίησης στο αμέσως προηγούμενο βήμα.

### 3.4 ΜΗΤΡΩΟ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ

Οι μετατοπίσεις και οι δυνάμεις των άκρων του στοιχείου, καθώς και τα μητρώα δυσκαμψίας στο καθολικό σύστημα δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις αντίστοιχα :

$$\begin{aligned} \{\bar{u}\} &= [R]^T \{u\} \\ \{\bar{f}\} &= [R]^T \{f\} \\ [\bar{k}]_{el} &= [R]^T [k]_{el} [R] \\ [\bar{k}]_{hys} &= [R]^T [k]_{hys} \end{aligned} \tag{3.29}$$

Όπου [R] είναι το μητρώο μετασχηματισμού :

$$[R] = \begin{bmatrix} [\Lambda] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [\Lambda] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [\Lambda] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [\Lambda] \end{bmatrix} \tag{3.30}$$

Αρκεί λοιπόν να βρεθεί το μητρώο [Λ] για να σχηματίσουμε το μητρώο [R] κάθε στοιχείου. Το μητρώο αυτό αποτελείται από συνημίτονα κατευθύνσεως  $\lambda_{ij}$  και γράφεται σε αναλυτική και διανυσματική μορφή ως εξής :

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad [\Lambda] = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix} \tag{3.31}$$

Για τις δύο διαστάσεις τα [R] και [Λ] προσδιορίζονται για κάθε στοιχείο από τους απλούστατους τύπους :

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

$$[R] = \begin{bmatrix} [\Lambda] & 0 \\ 0 & [\Lambda] \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

όπου  $\varphi$  η αριστερόστροφη γωνία από τον καθολικό άξονα  $x$  μέχρι τον τοπικό διαμήκη άξονα  $x$ .

Τούτο όμως δεν είναι αρκετό για τις τρεις διαστάσεις, διότι τώρα πρέπει να οριστεί και η περιστροφή του στοιχείου γύρω από τον διαμήκη άξονα  $x$ . Για να ορίσουμε το σύστημα που αντιστοιχεί στους κύριους άξονες ενός στοιχείου πρέπει να γνωρίζουμε και ένα από τους κύριους άξονες της διατομής. Ο απλούστερος από απόψεως δεδομένων τρόπος είναι να δώσουμε τις συντεταγμένες ενός σημείου  $P(x_p, y_p, z_p)$  πάνω σε ένα κύριο επίπεδο, έστω στο  $xy$ .

Τα συνημίτονα κατευθύνσεως του διανύσματος  $\vec{e}_1$  υπολογίζονται από τις σχέσεις [20] :

$$\lambda_{11} = \frac{\bar{x}_k - \bar{x}_j}{L}, \quad \lambda_{12} = \frac{\bar{y}_k - \bar{y}_j}{L}, \quad \lambda_{13} = \frac{\bar{z}_k - \bar{z}_j}{L} \quad (3.34)$$

όπου  $(\bar{x}_j, \bar{y}_j, \bar{z}_j)$ ,  $(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$  είναι οι καθολικές συντεταγμένες της αρχής και του πέρατος του στοιχείου που εξετάζουμε και  $L = \sqrt{(\bar{x}_k - \bar{x}_j)^2 + (\bar{y}_k - \bar{y}_j)^2 + (\bar{z}_k - \bar{z}_j)^2}$  το μήκος του.

Τα σημεία  $j$  (σημείο αρχής του στοιχείου) και  $P$  (σημείο αναφοράς για την περιστροφή του στοιχείου) ορίζουν με τις καθολικές τους συντεταγμένες το διάνυσμα

$$\vec{r} = (\bar{x}_p - \bar{x}_j)\vec{e}_1 + (\bar{y}_p - \bar{y}_j)\vec{e}_2 + (\bar{z}_p - \bar{z}_j)\vec{e}_3. \quad (3.35)$$

Το διάνυσμα  $\vec{e}_3$  προσδιορίζεται από την σχέση [20] :

$$\vec{e}_3 = \frac{\vec{e}_1 \times \vec{r}}{|\vec{e}_1 \times \vec{r}|} \quad (3.36)$$

διότι είναι μοναδιαίο και ως εξωτερικό γινόμενο των  $\vec{e}_1$  και  $\vec{r}$  είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν,

δηλαδή ομόφορο προς τον άξονα z. Οι συνιστώσες του δίδουν τα  $\lambda_{31}$ ,  $\lambda_{32}$ ,  $\lambda_{33}$ .

Τέλος τα  $\lambda_{21}$ ,  $\lambda_{22}$ ,  $\lambda_{23}$ , δηλαδή το διάνυσμα  $\vec{e}_2$ , θα προκύψουν από τις συνιστώσες του διανύσματος  $\vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_1$ .

(3.37)

Υπάρχουν αρκετές μέθοδοι μετασχηματισμού χωρικών στοιχείων σε καθολικές συντεταγμένες, αλλά η παραπάνω μέθοδος με τα εξωτερικά γινόμενα υπερτερεί λόγω του γεγονότος ότι στις άλλες, στα κατακόρυφα στοιχεία (υποστυλώματα), παρουσιάζεται μαθηματικό πρόβλημα και απαιτείται ξεχωριστή μελέτη για την ειδική αυτή περίπτωση. Παράλληλα στην παραπάνω μέθοδο, αποφεύγεται ο υπολογισμός των γωνιών  $\phi$  ανάμεσα στο τοπικό και το καθολικό σύστημα αξόνων, διαδικασία η οποία στις τρεις διαστάσεις γίνεται αρκετά δυσνόητη.

Συμπερασματικά η εξίσωση (3.27) μπορεί να γραφτεί ως εξής :

$$\{F\} = \alpha [R]^T [k]_{el} [R] \{u\} + (1 - \alpha) [R]^T [k]_{hys} \{z\} \quad (3.38)$$

### 3.5 ΕΞΕΛΙΚΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Η εξίσωση (3.2) με βάση την (3.11) και τους μετασχηματισμούς σε καθολικές συντεταγμένες μπορεί να εκφραστεί με όρους επικόμβιων ταχυτήτων ως εξής :

$$\dot{z}_{by}(x, t) = \left( 1 - \left| \frac{z_y(x, t)}{z_y^y} \right|^n (\beta + \gamma \operatorname{sgn}(z_{by}(x, t) [B_{by}(x)] [R] \{\dot{u}\})) \right) [B_{by}(x)] [R] \{\dot{u}\}$$

$$\dot{z}_{bz}(x, t) = \left( 1 - \left| \frac{z_z(x, t)}{z_z^y} \right|^n (\beta + \gamma \operatorname{sgn}(z_{bz}(x, t) [B_{bz}(x)] [R] \{\dot{u}\})) \right) [B_{bz}(x)] [R] \{\dot{u}\}$$

(3.39)

Από την οποία προκύπτουν για κάθε άκρο της δοκού :

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_{by}^1(t) &= \left( 1 - \left| \frac{z_{by}^1(t)}{z_y^y} \right|^n (\beta + \gamma \operatorname{sgn}(z_{by}^1(t) [B_{by}(0)] [R]\{\dot{u}\})) \right) [B_{by}(0)] [R]\{\dot{u}\} \\
 \dot{z}_{bz}^1(t) &= \left( 1 - \left| \frac{z_{bz}^1(t)}{z_z^y} \right|^n (\beta + \gamma \operatorname{sgn}(z_{bz}^1(t) [B_{bz}(0)] [R]\{\dot{u}\})) \right) [B_{bz}(0)] [R]\{\dot{u}\} \\
 \dot{z}_{by}^2(t) &= \left( 1 - \left| \frac{z_{by}^2(t)}{z_y^y} \right|^n (\beta + \gamma \operatorname{sgn}(z_{by}^2(t) [B_{by}(L)] [R]\{\dot{u}\})) \right) [B_{by}(L)] [R]\{\dot{u}\} \\
 \dot{z}_{bz}^2(t) &= \left( 1 - \left| \frac{z_{bz}^2(t)}{z_z^y} \right|^n (\beta + \gamma \operatorname{sgn}(z_{bz}^2(t) [B_{bz}(L)] [R]\{\dot{u}\})) \right) [B_{bz}(L)] [R]\{\dot{u}\}
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

Όπου :

$$\begin{aligned}
 [B_{by}(0)] &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{6}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{L} & 0 & \frac{6}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{L} \end{bmatrix} \\
 [B_{bz}(0)] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{6}{L^2} & 0 & \frac{4}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{L^2} & 0 & \frac{2}{L} & 0 \end{bmatrix} \\
 [B_{by}(L)] &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{6}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{L} & 0 & -\frac{6}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \\
 [B_{bz}(L)] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{6}{L^2} & 0 & -\frac{2}{L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{L^2} & 0 & -\frac{4}{L} & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Παρόμοιες σχέσεις ισχύουν και για την ανελαστική αξονική συνιστώσα όπου για κάθε άκρο της δοκού έχουμε :

$$\begin{aligned}\dot{z}_u^1(t) &= \left( 1 - \left| \frac{z_u^1(t)}{z^y} \right|^n (\beta + \gamma \operatorname{sgn}(z_u^1(t) [B_u(0)] [R] \{\dot{u}\})) \right) [B_u(0)] [R] \{\dot{u}\} \\ \dot{z}_u^2(t) &= \left( 1 - \left| \frac{z_u^2(t)}{z^y} \right|^n (\beta + \gamma \operatorname{sgn}(z_u^2(t) [B_u(L)] [R] \{\dot{u}\})) \right) [B_u(L)] [R] \{\dot{u}\}\end{aligned}\quad (3.42)$$

Όπου :

$$\begin{aligned}[B_u(0)] &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ [B_u(L)] &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.43)$$

Οι υστερητικές εξισώσεις των σχέσεων (3.40), (3.42) περιγράφουν επαρκώς τη μη γραμμική συμπεριφορά του στοιχείου δοκού. Επίσης οι υστερητικές εξισώσεις βασίζονται στις ταχύτητες των κόμβων του κάθε στοιχείου και έτσι αντιμετωπίζονται ξεχωριστά και παράλληλα σε επίπεδο στοιχείου για ένα συγκεκριμένο διάνυσμα επικόμβιων ταχυτήτων. Αυτό είναι και ένα σημαντικό βήμα στην ενσωμάτωση των εξισώσεων των υστερητικών προσομοιωμάτων στη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων [18].

Επίσης πρέπει να αναφέρουμε ότι η μεθοδολογία που αναφέρθηκε μπορεί να εφαρμοσθεί με οποιοδήποτε ομαλό υστερητικό προσομοίωμα όπως είναι το προσομοίωμα των Sivaselvan – Reinhorn. Αυτό συμβαίνει γιατί η επιλογή του προσομοιώματος δεν επηρεάζει τις εξισώσεις κίνησης αφού οι υστερητικές εξισώσεις εισάγονται σε επίπεδο στοιχείου.

### 3.6 ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΙΝΗΣΗΣ

Η δυναμική εξίσωση κίνησης ενός πολυβάθμιου συστήματος είναι [18]:

$$[M]_s \{\ddot{U}\} + [C]_s \{\dot{U}\} + [K]_s \{U\} + [H]_s \{Z\} = \{P(t)\}\quad (3.44)$$

Όπου :

- $[M]_s$  είναι το μητρώο μάζας της κατασκευής

- $[C]_s$  είναι το μητρώο απόσβεσης της κατασκευής
- $[K]_s$  το μητρώο ακαμψίας της κατασκευής.

Τα παραπάνω μητρώα είναι τετραγωνικά με διαστάσεις  $(n_f \times n_f)$  όπου  $n_f$  οι συνολικοί βαθμοί ελευθερίας του συστήματος.

- $[H]_s$  είναι το υστερητικό μητρώο της κατασκευής, είναι ορθογωνικό διαστάσεων  $(n_f \times 6n_{el})$  όπου  $n_{el}$  είναι το πλήθος των στοιχείων της κατασκευής.
- $\{P(t)\}$  είναι το διάνυσμα των εξωτερικών δυνάμεων με  $(n_f \times 1)$  στοιχεία.
- Τα διανύσματα  $\{U\}$  και  $\{Z\}$  έχουν διαστάσεις  $(n_f \times 1)$  και  $(6n_{el} \times 1)$  αντίστοιχα.

Τα μητρώα αυτά μορφώνονται χρησιμοποιώντας την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων σε επίπεδο στοιχείου, προσαρμοσμένη για το μοντέλο Bouc-Wen [18], χρησιμοποιώντας δηλαδή όπως προαναφέρθηκε, την αρχή των δυνατών έργων. Προσθέτοντας λοιπόν με την μέθοδο της άμεσης ακαμψίας, (Bathe (2007) [21]) τα στοιχεία των ελαστικών μητρώων στις κατάλληλες θέσεις, προκύπτει το ελαστικό μητρώο στιβαρότητας της κατασκευής ( $[K]_s$ ). Το υστερητικό μητρώο της κατασκευής μορφώνεται από την προσάρτηση των υστερητικών μητρώων των μελών εκφρασμένα στο καθολικό σύστημα.

Το μητρώο απόσβεσης  $[C]_s$ , προκύπτει θεωρώντας αναλογική απόσβεση τύπου Rayleigh. Έτσι, εκφράζεται σαν γραμμικός συνδυασμός του μητρώου μάζας και του μητρώου δυσκαμψίας της κατασκευής. Πιο αναλυτικά [20], έχοντας υπολογίσει τις πρώτες δύο ιδιομορφές του φορέα, και έχοντας σαν δεδομένους τους λόγους αποσβέσεως  $\xi$  για κάθε μία από αυτές, προκύπτουν από την ακόλουθη σχέση δύο συντελεστές  $\alpha_0$  και  $\alpha_1$  :

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_1} & \omega_1 \\ \frac{1}{\omega_2} & \omega_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Bmatrix} \quad (3.45)$$

Κατόπιν, υπολογίζεται το μητρώο απόσβεσης από την σχέση (3.46) :



$$[C]_s = \alpha_0 [M]_s + \alpha_1 [K]_s \quad (3.46)$$

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, το μητρώο αυτό έχει προκύψει από πολλές υποθέσεις και πειραματικά δεδομένα και είναι απαραίτητο για την δυναμική ανάλυση όταν γίνεται ελαστική ανάλυση. Στην ανελαστική μέθοδο όμως που ακολουθείται στην παρούσα διπλωματική, η απόσβεση μπορεί να υπολογιστεί με βάση την πραγματική αιτία από την οποία προκύπτει, την υστέρηση. Τοποθετώντας συνεπώς το υστερητικό μητρώο στην εξίσωση κίνησης, και αργότερα τις εξελικτικές εξισώσεις στην επίλυση της, η απόσβεση λαμβάνεται υπόψη. Για τον παραπάνω λόγο, η απόσβεση Rayleigh αποτελεί πλεονασμό και χρησιμοποιείται απλά για την ομαλοποίηση των αποτελεσμάτων της ανάλυσης.

Όσον αφορά το μητρώο μάζας  $[M]_s$ , αυτό μπορεί να εκφραστεί είτε θεωρώντας συγκεντρωμένες μάζες, παίρνοντας έτσι διαγώνια μορφή (lumped mass diagonal matrix), είτε με την παραδοχή κατανεμημένων μαζών (consistent mass matrix), λαμβάνοντας σε αυτή την περίπτωση την παρακάτω μορφή : [20]

$$[M]_s = \frac{\bar{m}L}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 0 & 0 & 0 & 22L & 0 & 54 & 0 & 0 & 0 & -13L \\ 0 & 0 & 156 & 0 & -22L & 0 & 0 & 0 & 54 & 0 & 13L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{140J}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{70J}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -22L & 0 & \frac{4}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -13L & 0 & -\frac{3}{L^2} & 0 \\ 0 & 22L & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{L^2} & 0 & 13L & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{L^2} \\ 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 0 & 0 & 0 & 13L & 0 & 156 & 0 & 0 & 0 & -22L \\ 0 & 0 & 54 & 0 & -13L & 0 & 0 & 0 & 156 & 0 & 22L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{70J}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{140J}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13L & 0 & -\frac{3}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 22L & 0 & \frac{4}{L^2} & 0 \\ 0 & -13L & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{L^2} & 0 & -22L & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{L^2} \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

(Consistent Mass Matrix)

όπου  $J$  η πολική ροπή αδρανείας και  $\bar{m}$  η κατανεμημένη μάζα κατά μήκος του στοιχείου, η οποία βρίσκεται από το γινόμενο του εμβαδού της διατομής επί την πυκνότητα του υλικού από το οποίο αποτελείται το στοιχείο, δηλαδή  $\bar{m} = A\rho$ .

### 3.7 ΠΟΡΕΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

Εισάγοντας ως επίσης άγνωστο το διάνυσμα των επικόμβιων ταχυτήτων  $\{\dot{U}\}$  η δυναμική εξίσωση κίνησης (3.44) μπορεί να γραφτεί σε μορφή χώρου κατάστασης (state-space form) ως  $2n_f$  γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης :

$$\begin{Bmatrix} \{\dot{U}\} \\ \{\ddot{U}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} & 0 \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] & -[M]^{-1}[H] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U\} \\ \{\dot{U}\} \\ \{Z\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \{P(t)\} \end{Bmatrix} \quad (3.48)$$

Αυτές συνδέονται με τις μη γραμμικές υστερητικές εξισώσεις (πλήθους  $2n_{el}$ ) της μορφής:

$$\{\dot{Z}\} = f(\{\dot{U}\}, \{Z\}) \quad (3.49)$$

οι οποίες με τη σειρά τους αναλύονται περισσότερο σε  $2n_{el}$  ζευγάρια εξισώσεων σύμφωνα με τις σχέσεις (3.40) και (3.42).

Σε επίπεδο μικρών μετατοπίσεων η εξίσωση (3.48) εμπεριέχει τα καθολικά μητρώα του συστήματος τα οποία ορίζονται στην αρχή της ανάλυσης και παραμένουν σταθερά κατά τη διάρκεια της επίλυσης.

Όμως το παραπάνω σύστημα δεν οδηγεί σε αναλυτική λύση και πρέπει να γραφεί σαν μία ομάδα μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Αυτό επιτυγχάνεται γράφοντας την εξίσωση (3.48) στην ακόλουθη μορφή :

$$\{\dot{x}\} = G^* \{x\} + \{P(t)\} \quad (3.50)$$

Το διάνυσμα  $\{x\}$  ορίζεται ως :

$$\{x\}^T = \begin{bmatrix} \{U\}^T & \{\dot{U}\}^T & \{Z\}^T \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

και είναι :

$$G^* \{x\} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] & -[M]^{-1}[H] \\ 0 & V(\{\dot{U}\}, \{Z\}) & 0 \end{bmatrix} * \{x\} \quad (3.52)$$

Στον πιο πάνω τύπο (3.52) το V εμπεριέχει τις υστερητικές εξισώσεις για κάθε άκρο j στοιχείου i :

$$V_j^i(\{\dot{u}\}^i, \{z\}^i) = \left( 1 - \left| \frac{z_j(t)}{z^y} \right|^n \left( \beta + \gamma \operatorname{sgn} \left( z_j(t) [B]_j [R] \{\dot{u}\} \right) \right) \right) [B]_j [R] \{\dot{u}\}^i \quad (3.53)$$


Στον παραπάνω τύπο η παράμετρος  $z^y$  παίρνει τιμές  $z_u^y$ ,  $z_{by}^y$  ή  $z_{bz}^y$  ανάλογα με την περίπτωση που εξετάζουμε.

Έτσι το σύστημα των εξισώσεων για δοσμένο δυναμικό φορτίο και έχοντας τις αρχικές συνθήκες στο διάνυσμα  $\{x\}$ , μπορεί να επιλυθεί χρησιμοποιώντας τους αλγόριθμους Livermore ή Runge-Kutta, αλγόριθμοι οι οποίοι δεν περιλαμβάνονται συνήθως στους κώδικες των πεπερασμένων στοιχείων.


Κατά την επίλυση του συστήματος χρησιμοποιήθηκε η εντολή της γλώσσας προγραμματισμού Matlab, ode15s. Μέσω της ode15s υλοποιούνται όσα αναφέρονται παραπάνω και υπάρχει η δυνατότητα καθορισμού του εύρους σύγκλισης και με τον τρόπο αυτό να βελτιωθεί περαιτέρω η ακρίβεια επίλυσης. Συγκεκριμένα τα στοιχεία που δίνονται από το χρήστη είναι :

Η ποσότητα RelTol (Relative Tolerance), η οποία είναι ένα μέτρο για το σχετικό λάθος του μεγέθους κάθε συντελεστή της επίλυσης. Η ποσότητα αυτή ελέγχει δηλαδή τον αριθμό των σωστών ψηφίων, εκτός από τα ψηφία τα οποία είναι μικρότερα από το κατώφλι που ορίζεται από την ποσότητα AbsTol.

Το AbsTol (Absolute Tolerance) είναι η ποσότητα εκείνη κάτω από την οποία η τιμή της ν-οστής λύσης δεν είναι σημαντική. Η ποσότητα αυτή καθορίζει την ακρίβεια όταν η λύση πλησιάζει το μηδέν και είναι διάνυσμα, το μήκος του οποίου πρέπει να είναι ίσο με το μήκος του διανύσματος των αγνώστων.



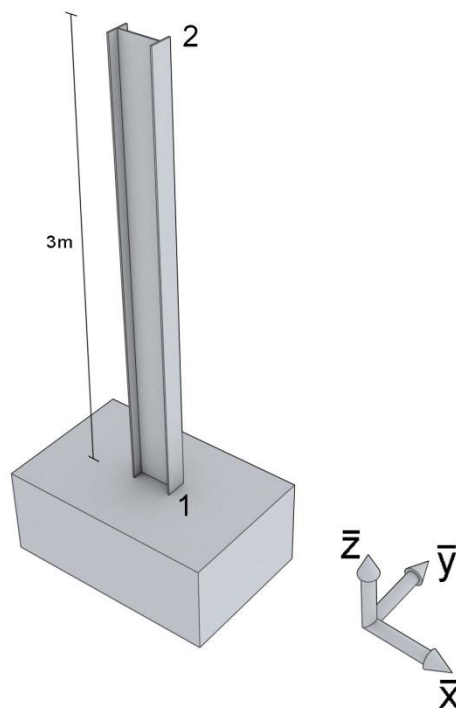
# Κεφάλαιο 4



## Παραδείγματα

## 4.1 ΠΡΟΒΟΛΟΣ

Η τρισδιάστατη ανάλυση, λόγω της πληθώρας των συστημάτων συντεταγμένων που εμφανίζονται, και της δυσκολίας που υπάρχει στην αντίληψη των κατασκευών στον χώρο είναι αρκετά πιο δυσνόητη από την ανάλυση στις δύο διαστάσεις. Για τον λόγο αυτό, ξεκινώντας τις αριθμητικές εφαρμογές, θα θέλαμε να παρουσιάσουμε σαν πρώτο παράδειγμα την απλούστερη δυνατή περίπτωση, για να υπάρχει μία ποιοτική εποπτεία, μία κατανόηση των συμβάσεων περί προσήμου των ροπών, και να είμαστε έτσι σε θέση να κατανοήσουμε πιο εύκολα τους πιο σύνθετους φορείς. Ο φορέας λοιπόν που θα εξετάσουμε σαν εισαγωγή στα παραδείγματα, είναι ένας πρόβολος στο επίπεδο  $\bar{x} \bar{z}$ , ο οποίος φορτίζεται με μία απλή ημιτονοειδή φόρτιση. Η διάρκεια του σεισμού θα είναι 9 δευτερόλεπτα. Θα υπάρξει μία διερεύνηση ανάλογα με τον προσανατολισμό του στοιχείου ώστε να καλύψουμε πληρέστερα τις δυνατές περιπτώσεις φορέων.



Σχήμα 4.1.1 Πρόβολος

Τα χαρακτηριστικά της διατομής, το είδος και η ποιότητα του υλικού που χρησιμοποιείται, και οι παράμετροι του προσομοιώματος Bouc-Wen φαίνονται στους παρακάτω πίνακες :

Χαρακτηριστικά διατομής	
Διατομή	IPE300
A	53,81 cm <sup>2</sup>
I <sub>y</sub>	8356 cm <sup>4</sup>
I <sub>z</sub>	603,8 cm <sup>4</sup>
M <sub>y</sub> <sup>y</sup>	130,92 KNm
M <sub>z</sub> <sup>y</sup>	18,92 KNm

Πίνακας 4.1.1 Χαρακτηριστικά διατομής

Παράμετροι Bouc-Wen	
α <sub>u</sub>	0,01
α <sub>by</sub>	0,01
α <sub>bz</sub>	0,01
β	0,5
γ	0,5
η	8

Πίνακας 4.1.2 Παράμετροι επίλυσης

Υλικό	Δομικός χάλυβας
Χαρακτηριστικά υλικού	
E = 210 GPa	
f <sub>y</sub> = 235 MPa	
density = 7850 Kg/m <sup>3</sup>	

Πίνακας 4.1.3 Χαρακτηριστικά υλικού

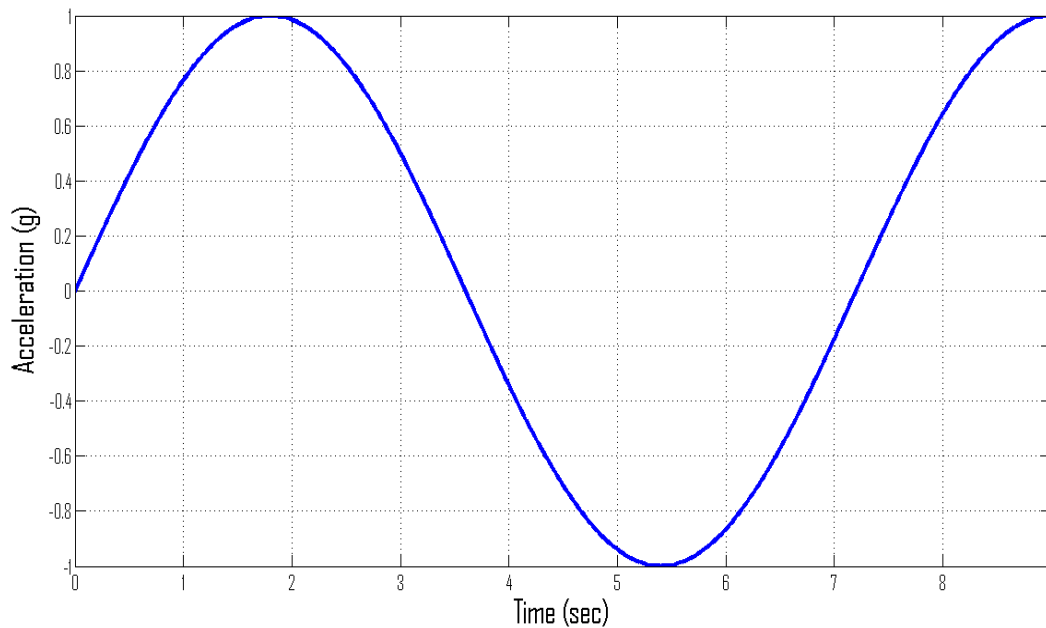
Με τις δεδομένες τις διατομές και ποιότητες των υλικών, είναι πιθανό να μην υπάρχει διαρροή. Για αυτό τον λόγο πολλαπλασιάζουμε την διέγερση με ένα κατάλληλο συντελεστή ώστε να επέλθει πλαστικοποίηση.

Για την πλήρη όμως κατανόηση του φορέα στην τρισδιάστατη ανάλυση, είναι πολύ σημαντικός ο ορισμός των τοπικών αξόνων κάθε στοιχείου και ο συσχετισμός του με το καθολικό σύστημα συντεταγμένων. Στα πλαίσια του πρώτου παραδείγματος ο φορέας αποτελείται μόνο από ένα στοιχείο, οπότε παρατίθεται παρακάτω η συσχέτιση του σημείου P που ορίστηκε στο εδάφιο 3.4, με τον ορισμό του τοπικού συστήματος συντεταγμένων του στοιχείου. Αρχικώς, δίνονται από τον χρήστη οι καθολικές συντεταγμένες των κόμβων. Ύστερα για να οριστεί η θετική φορά του στοιχείου, δηλαδή ποια είναι η αρχή και ποιο το πέρας του, δίνονται δεδομένα σύνδεσης των κόμβων. Συνηθίζεται η θετική φορά του στοιχείου να είναι από τον κόμβο με το μικρότερο αριθμό προς αυτόν με το μεγαλύτερο. Τέλος δίνονται οι καθολικές συντεταγμένες του σημείου P ώστε να οριστεί η στροφή του στοιχείου γύρω από τον διαμήκη άξονα του. Το σημείο αυτό, όπως έχει προαναφερθεί ορίζει ένα επίπεδο με το στοιχείο. Το επίπεδο αυτό αποτελεί το ισχυρό επίπεδο κάμψης του στοιχείου.

Έχοντας πλέον τα απαραίτητα δεδομένα που χρειάζονται ώστε να οριστεί πλήρως το στοιχείο, ακολουθούμε τον εξής μνημονικό κανόνα, ώστε να ορίσουμε το τοπικό σύστημα αξόνων του :

- Ο τοπικός άξονας  $x$  τοποθετείται κατά μήκος του στοιχείου και παράλληλος με την θετική φορά του στοιχείου που ορίστηκε προηγουμένως.
- Ο τοπικός άξονας  $y$  τοποθετείται στο επίπεδο που ορίζεται από το στοιχείο και το σημείο P, και με φορά προς το σημείο P.
- Ο τοπικός άξονας  $z$  βρίσκεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού για τις τρεις κάθετες διευθύνσεις.

Η δυναμική διέγερση που χρησιμοποιήθηκε για τις ακόλουθες τέσσερις περιπτώσεις φαίνεται παρακάτω. Καλό είναι να διασαφηνίσουμε ότι η φόρτιση ορίζεται πάντα σε βαθμούς ελευθερίας του καθολικού συστήματος αξόνων.



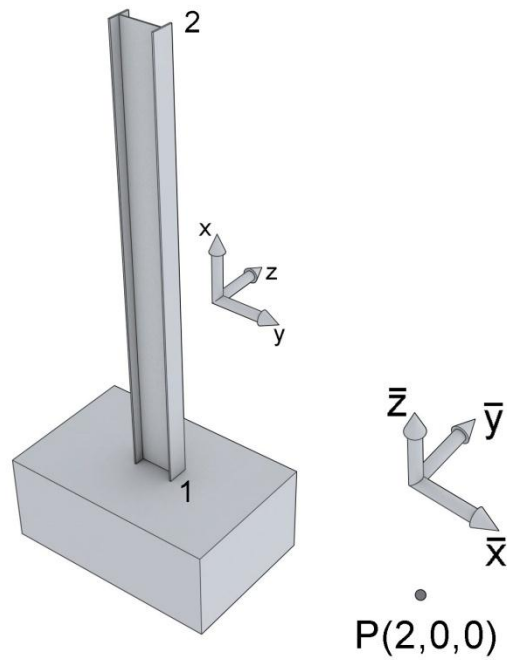
Σχήμα 4.1.2 Ημιτονική διέγερση

Τα τοπικά συστήματα και ο προσανατολισμός του στοιχείου γύρω από τον διαμήκη άξονα του, όπως προκύπτουν από τις συντεταγμένες του σημείου P φαίνονται παρακάτω :



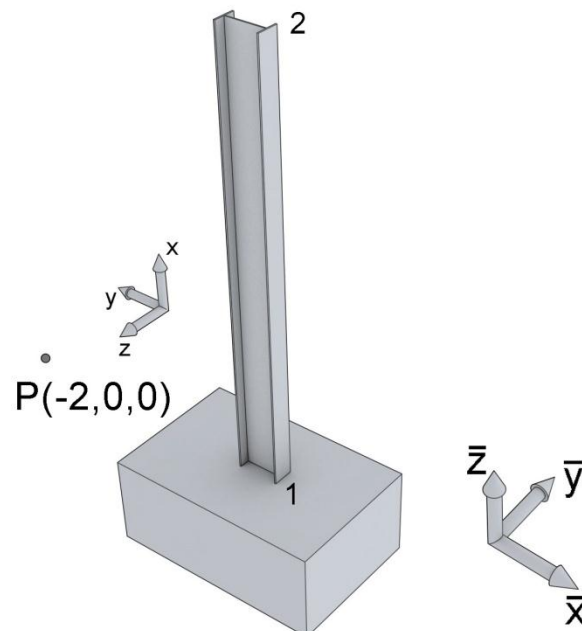
A) Το σημείο P βρίσκεται στο επίπεδο  $\bar{x}\bar{z}$

A1)  $P=(2,0,0)$



Σχήμα 4.1.3 Προσανατολισμός Προβόλου και τοπικό σύστημα αξόνων για  $P(2,0,0)$

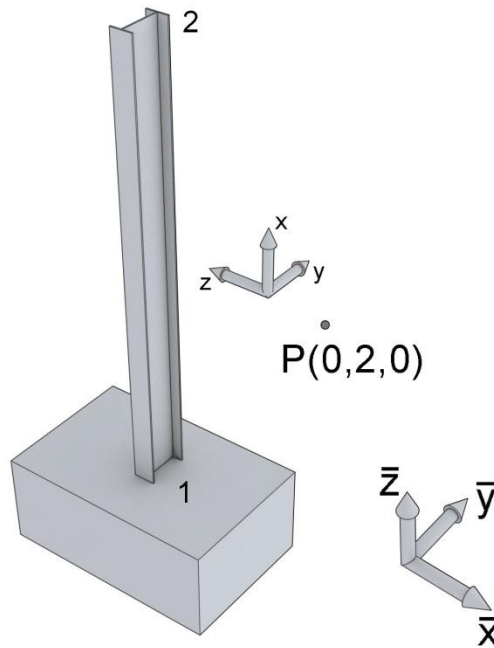
A2)  $P=(-2,0,0)$



Σχήμα 4.1.3 Προσανατολισμός Προβόλου και τοπικό σύστημα αξόνων για  $P(-2,0,0)$

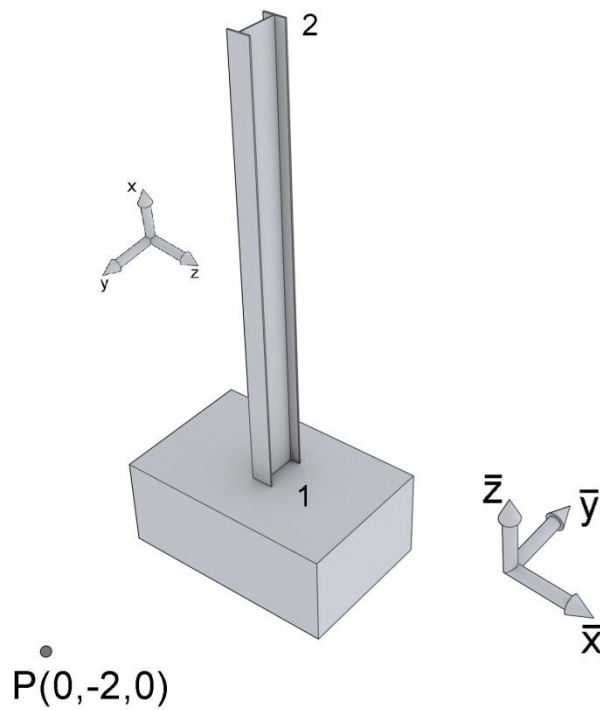
B) Το σημείο P βρίσκεται στο επίπεδο  $\bar{y}\bar{z}$

B1)  $P=(0,2,0)$



Σχήμα 4.1.4 Προσανατολισμός Προβόλου και τοπικό σύστημα αξόνων για  $P(0,2,0)$

B2)  $P=(0,-2,0)$



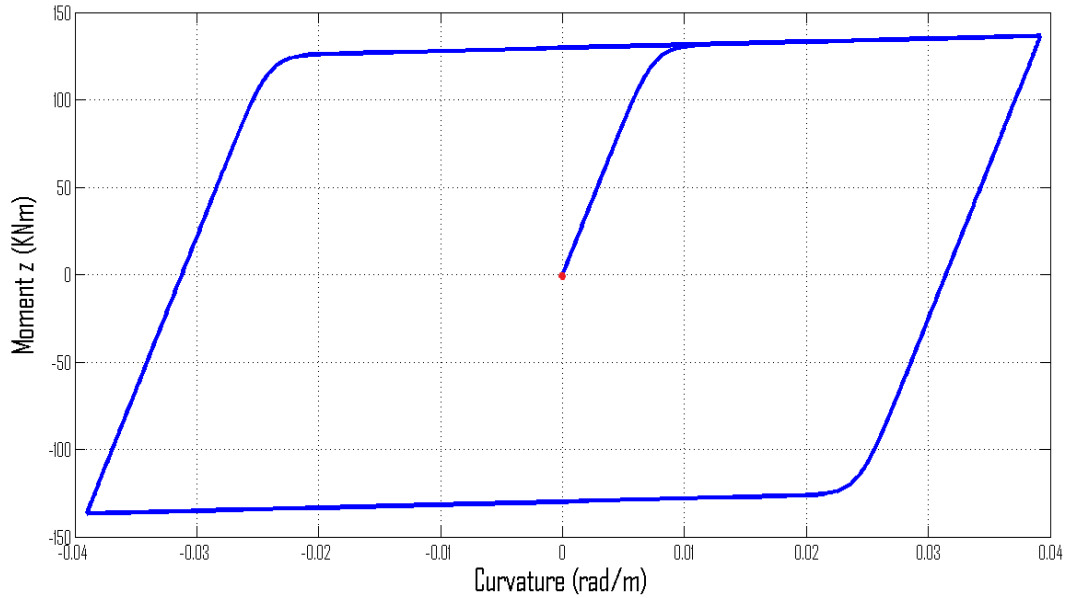
Σχήμα 4.1.5 Προσανατολισμός Προβόλου και τοπικό σύστημα αξόνων για  $P(0,-2,0)$

Το σημείο P δεν είναι αναγκαίο να βρίσκεται στα κύρια επίπεδα. Ο χρήστης μπορεί να επιλέξει οποιαδήποτε γωνία περιστροφής του στοιχείου γύρω από τον διαμήκη άξονα του. Επιπροσθέτως, για να οριστεί επίπεδο, το P δεν πρέπει να βρίσκεται πάνω στον διαμήκη άξονα του στοιχείου, δηλαδή στην περίπτωση που εξετάζουμε, όχι πάνω στον  $\bar{z}$ .

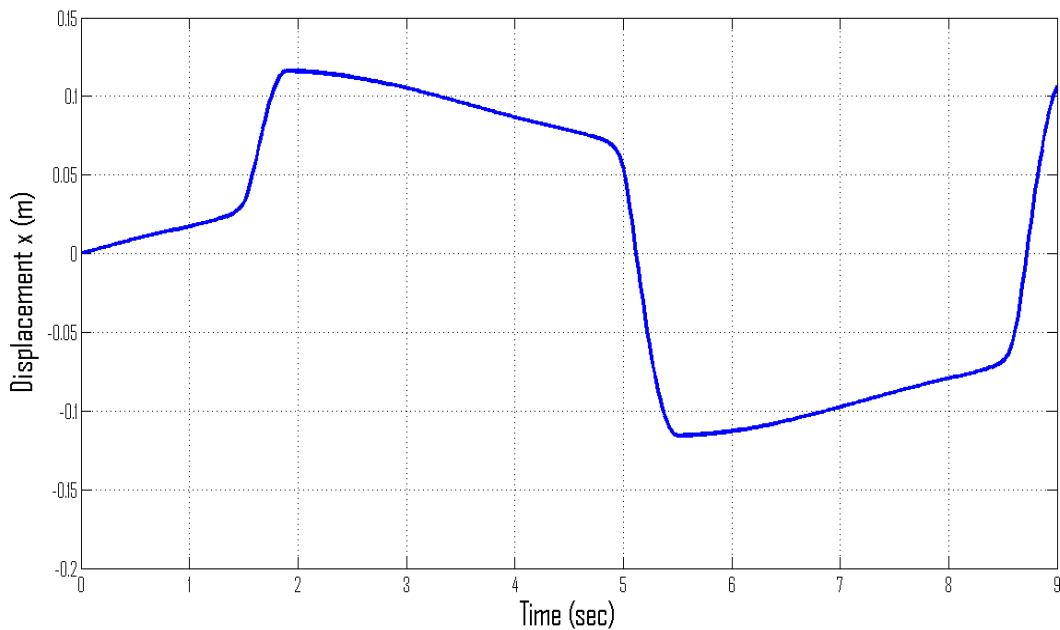
Ας μελετήσουμε την πρώτη περίπτωση (A1) :

Χρησιμοποιώντας αυτή την φορά τον περιστροφικό κανόνα του δεξιού χεριού, παρατηρούμε ότι μία φόρτιση κατά τον  $+\bar{x}$ , διεγείρει θετικά τον τοπικό άξονα z. Συμπερασματικά, μία τέτοια φόρτιση λέμε ότι προκαλεί στην διατομή της βάσης ροπή  $+M_z$ . Καταπονείται δηλαδή ο ισχυρός άξονας της δοκού. Αντιστοίχως, αν η διεύθυνση του σεισμού είναι η  $-\bar{y}$  τότε με τον ίδιο κανόνα δημιουργείται ροπή  $+M_y$  με τον ασθενή άξονα να εκτίθεται αυτή την φορά. Τα πρόσημα αλλάζουν ανάλογα με την υποπερίπτωση που επιλέγεται για την τιμή του P, εφόσον αλλάζει κάθε φορά το τοπικό σύστημα. Προφανώς, λόγω της περιοδικότητας της παρούσας φόρτισης, τα εντατικά μεγέθη θα ακολουθούν αρχικά το πρόσημο που εξηγήθηκε μόλις παραπάνω, αλλά θα συνεχίζουν με περιοδική μεταβολή, όπως το ημίτονο. Λόγω της διατομής διπλού ταυ που επιλέχτηκε, ο μεγεθυντικός συντελεστής που θα αυξήσει τις τιμές των εντατικών μεγεθών κατά τις δύο διευθύνσεις θα είναι διαφορετικός. Για τον ισχυρό άξονα ο συντελεστής που επιλέχτηκε είναι 160, ενώ για τον ασθενή 22.5. Οι συντελεστές αυτοί είναι τόσο μεγάλοι λόγω της έλλειψης μόνιμων φορτίων.

Στα ακόλουθα σχήματα φαίνεται το διάγραμμα ροπής-καμπυλότητας ( $M_z$ -κ) στην βάση του προβόλου και το διάγραμμα μετατόπισης-χρόνου ( $d_z$ -t) στο ελεύθερο άκρο για διέγερση κατά τον καθολικό άξονα  $+\bar{x}$  όπως προέκυψε από την ανάλυση :



Σχήμα 4.1.7 Διάγραμμα Ροπών-Καμπυλοτήτων Κόμβου 2 για φόρτιση +  $\bar{X}$  (Ημιτονική διέγερση)



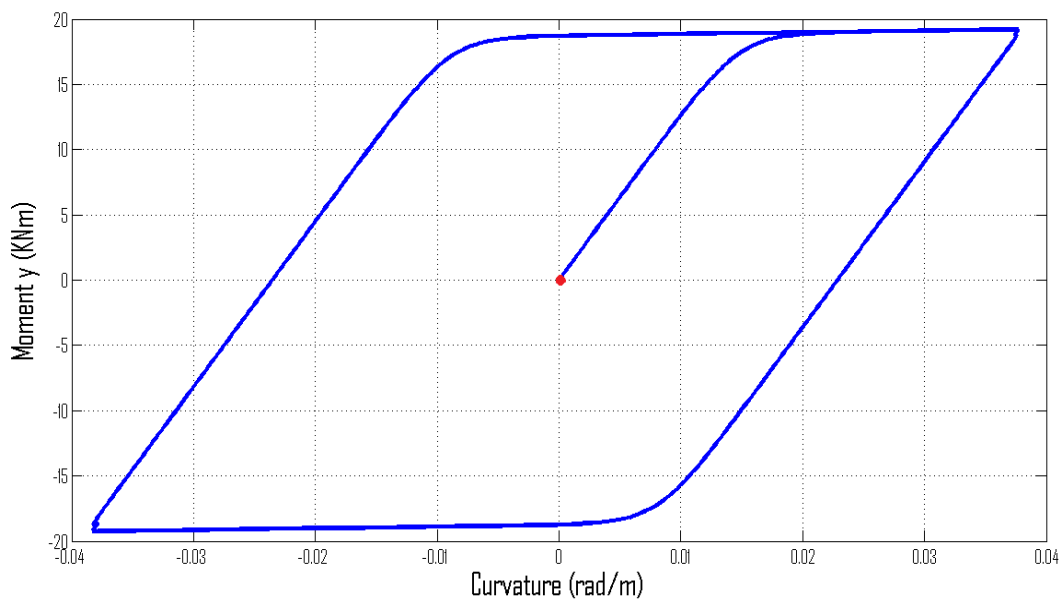
Σχήμα 4.1.8 Χρονοϊστορία μετατόπισης κόμβου 2 για φόρτιση +  $\bar{X}$  (Ημιτονική διέγερση)

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε, το διάγραμμα ροπών-καμπυλοτήτων είναι συμμετρικό και ομαλό εξαιτίας της ημιτονοειδούς φόρτισης. Το δεύτερο διάγραμμα ακολουθεί μία περιοδική συμπεριφορά όμοια με αυτή του ημιτόνου, αλλά η μορφή του δεν είναι ομαλή. Το φαινόμενο αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι στην αρχή η μετατόπιση είναι ελαστική, μέχρι περίπου το 1.5

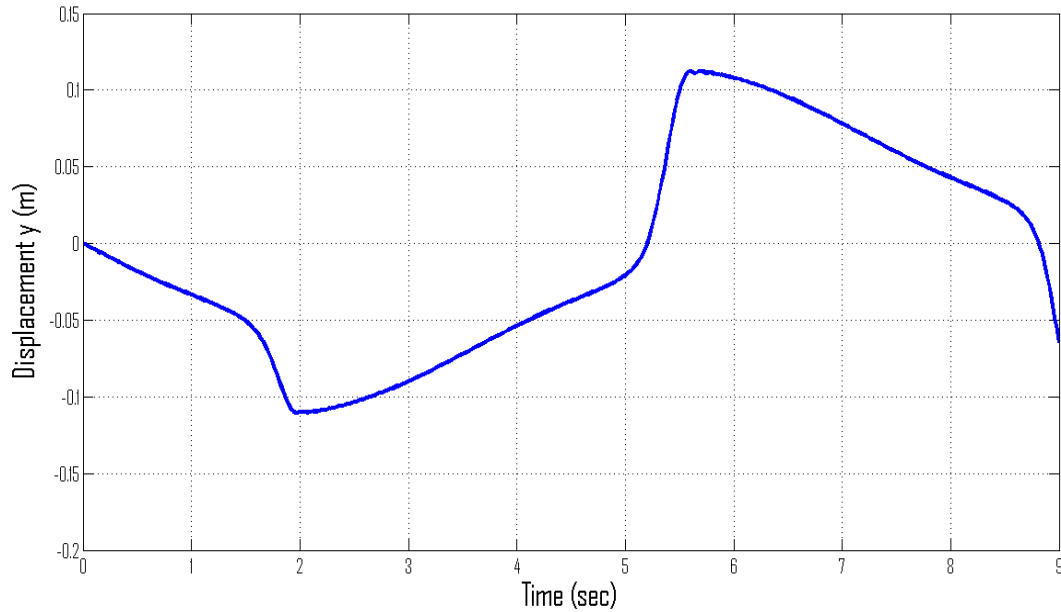
δευτερόλεπτο, αλλά μετά ο φορέας διαρρέει και έτσι οι μετατοπίσεις αυξάνονται με μεγαλύτερη κλίση. Με την ίδια λογική, περίπου από τα 2 μέχρι τα 5 δευτερόλεπτα έχουμε ελαστική αποφόρτιση, πριν ξαναδιαρρεύσει ο φορέας και οι μετακινήσεις αρχίσουν να αυξάνονται πάλι έντονα.

Οι μετακινήσεις ακολουθούν το καθολικό σύστημα αξόνων. Αυτό σημαίνει ότι με μία διέγερση κατά τον  $\bar{x}$ , θα επηρεαστεί ο πρώτος καθολικός βαθμός ελευθερίας κάθε κόμβου. Αντιστοίχως, με μία διέγερση κατά τον  $\bar{y}$ , θα επηρεαστεί ο δεύτερος καθολικός βαθμός ελευθερίας κάθε κόμβου. Στην περίπτωση μας, μετακινείται ο ελεύθερος κόμβος του οποίου οι βαθμοί ελευθερίας είναι από 7 έως 12. Στην πρώτη περίπτωση θα ταλαντωθεί ο  $7^{\text{ος}}$ , ενώ στη δεύτερη ο  $8^{\text{ος}}$  β.ε.

Όσον αφορά τις τον σεισμό κατά  $-\bar{y}$ , τα αντίστοιχα διαγράμματα  $M_y$ -κ και  $d_2$ -t φαίνονται παρακάτω. Με την ίδια λογική που αναπτύχθηκε προηγουμένως, η φόρτιση κατά  $-\bar{y}$  θα καταπονήσει καμπτικά τον τοπικό άξονα z ξεκινώντας με θετικό και συνεχίζοντας με εναλλασσόμενο πρόσημο.



Σχήμα 4.1.9 Διάγραμμα Ροπών-Καμπυλοτήτων Κόμβου 2 για φόρτιση  $-\bar{y}$  (Ημιτονική διέγερση)

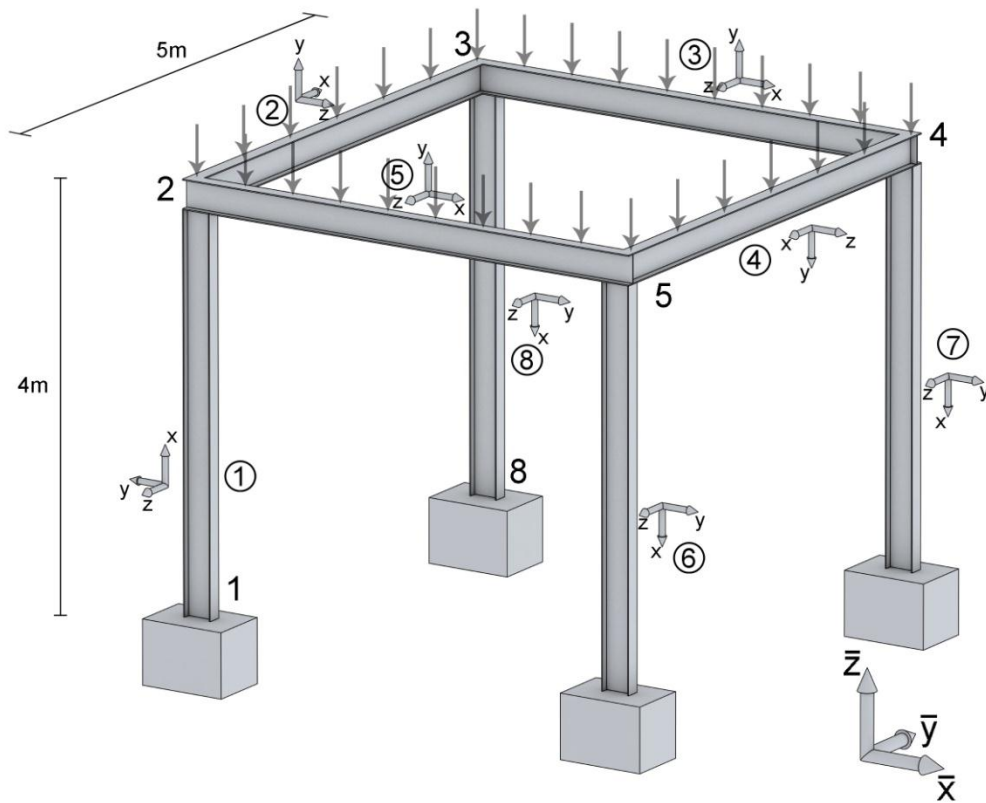


**Σχήμα 4.1.10** Χρονοϊστορία μετατόπισης κόμβου 2 για φόρτιση -  $\bar{Y}$  (Ημιτονική διέγερση)

Επειδή ο φορέας που χρησιμοποιήθηκε σε αυτό το θεμελιώδες παράδειγμα κείται σε ένα επίπεδο (επιλέχτηκε το επίπεδο  $\bar{X} \bar{Z}$ ), τα αποτελέσματα της ανάλυσης μπορούν να επιβεβαιωθούν λύνοντας τον ίδιο φορέα σε ένα έτοιμο και ήδη ελεγμένο πρόγραμμα ανάλυσης δισδιάστατων κατασκευών. Το πρόγραμμα που επιλέχτηκε για τον έλεγχο των αποτελεσμάτων, ήταν αυτό του Χρήστου Σοφιανού [22], το οποίο κατασκευάστηκε με σκοπό να λύνει προβλήματα δυναμικής ανελαστικής ανάλυσης χρησιμοποιώντας το μοντέλο των Bouc-Wen πλαίσια δύο διαστάσεων και η εγκυρότητα του προκύπτει από το γεγονός ότι τα αποτελέσματά του ταυτίζονται με αυτά προγραμμάτων εμπορίου. Αφού λοιπόν, χρησιμοποιώντας το τελευταίο πρόγραμμα, ορίστηκε ο ίδιος φορέας, αλλά στο επίπεδο  $\bar{X} \bar{Y}$ , επιβλήθηκαν τα αντίστοιχα φορτία, και τα αποτελέσματα των δύο προγραμμάτων ταυτίστηκαν.

## 4.2 ΤΥΠΙΚΟ ΜΟΝΩΡΟΦΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Έχοντας εστιάσει στην κατανόηση της λειτουργίας του προβόλου, ορίζοντας τον τοπικό άξονα του στοιχείου και χρησιμοποιώντας τους κανόνες του δεξιού χεριού, το δεύτερο παράδειγμα εισάγει εκτός από την σκοπιά της φόρτισης και την γεωμετρική συνιστώσα της τρίτη διάστασης. Ο φορέας που θα μελετηθεί είναι ένα τυπικό μονώροφο πλαίσιο με τετραγωνική κάτοψη, του οποίου τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά και οι διατομές φαίνονται στους ακόλουθους πίνακες. Στην πρώτη περίπτωση, ο φορέας θα διεγερθεί από τον σεισμό Kobe Takatori 090 κατά τις διευθύνσεις  $+ \bar{x}$ ,  $- \bar{y}$ . Στην δεύτερη, από τον σεισμό Rinaldi RSS 228 κατά τις διευθύνσεις  $- \bar{x}$ ,  $+ \bar{y}$  καθώς και υπό γωνία 45 μοιρών. Στην τρίτη, θα επιβληθεί το επιταχυνσιογράφημα Kocaeli Duzce 270 κατά τις διευθύνσεις  $+ \bar{x}$ ,  $+ \bar{y}$ , και θα ακολουθήσει παρόμοια ανάλυση αλλά με δύο από τα τέσσερα υποστυλώματα στραμμένα κατά 90 μοίρες. Στην αρχή κάθε περίπτωσης θα υπάρχουν αντίστοιχοι πίνακες με τις τιμές των παραμέτρων Bouc-Wen. Στην οροφή του φορέα επιβάλλεται σε όλες τις περιπτώσεις κατανεμημένο μόνιμο φορτίο ίσο με  $10 \text{ KN/m}^2$ . Στο ακόλουθο σχήμα, απεικονίζεται ο φορέας με τις βασικές διαστάσεις, τους τοπικούς άξονες και τον αριθμό κάθε μέλους, καθώς και τον αριθμό κάθε κόμβου. Από τα σημεία P που έχουν δοθεί και φαίνονται στον πίνακα 4.2.1, προκύπτει ο προσανατολισμός των υποστυλωμάτων και των ζυγωμάτων. Το ομοιόμορφο μόνιμο κατανεμημένο φορτίο που ασκείται στην πλάκα, έχει αναχθεί με επιφάνειες επιρροής σε κάθε δοκάρι όπως φαίνεται στο σχήμα.



Σχήμα 4.2.1 Τυπικό μονώροφο πλαίσιο

Στοιχείο	Κόμβος αρχής (i) - πέρατος (j)	Σημείο P	Διατομή
1	1 - 2	(-3, 0, 0)	HEB 240
2	2 - 3	(0, 0, 7)	IPE 400
3	3 - 4	(0, 5, 7)	IPE 400
4	4 - 5	(5, 0, 7)	IPE 400
5	2 - 5	(0, 0, 7)	IPE 400
6	5 - 6	(8, 0, 0)	HEB 240
7	4 - 7	(8, 5, 0)	HEB 240
8	3 - 8	(3, 5, 0)	HEB 240

Πίνακας 4.2.1 Στοιχεία φορέα



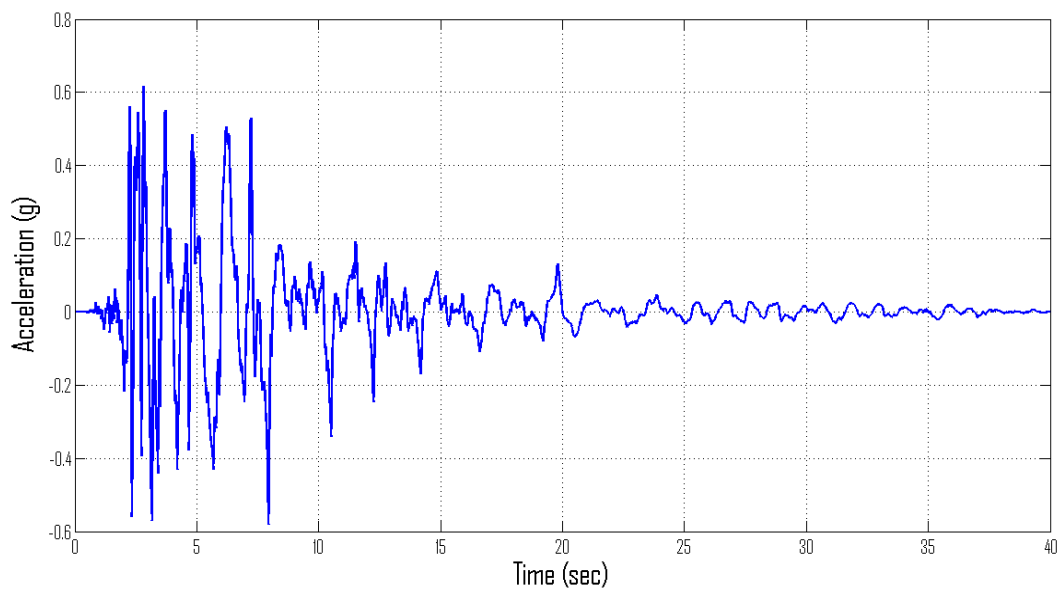
Υλικό	Δομικός χάλυβας
Χαρακτηριστικά υλικού	
$E = 210 \text{ GPa}$	
$f_y = 235 \text{ MPa}$	
density = $7850 \text{ Kg/m}^3$	

Πίνακας 4.2.2 Χαρακτηριστικά υλικού

Χαρακτηριστικά διατομών		
Διατομή	IPE 400	HEB 240
A	$84,46 \text{ cm}^2$	$106 \text{ cm}^2$
$I_y$	$23130 \text{ cm}^4$	$11260 \text{ cm}^4$
$I_z$	$1318 \text{ cm}^4$	$3923 \text{ cm}^4$
$M_y^y$	$271,66 \text{ KNm}$	$220,5 \text{ KNm}$
$M_z^z$	$34,4 \text{ KNm}$	$76,82 \text{ KNm}$

Πίνακας 4.2.3 Χαρακτηριστικά διατομών

#### 4.2.1 Kobe Takatori ορο

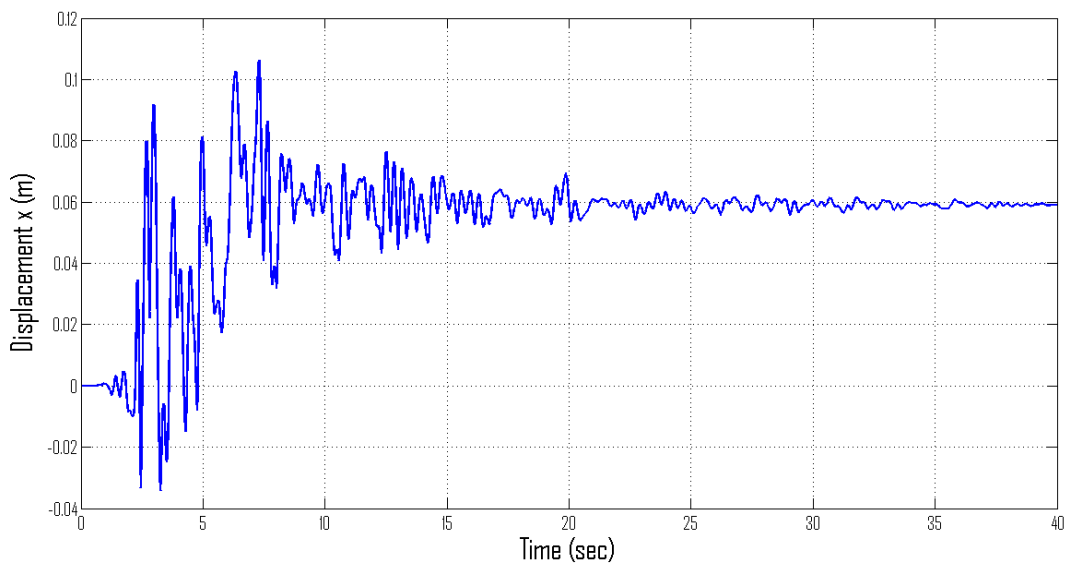


Σχήμα 4.2.1.1 Επιταχυνσιογράφημα (Kobe Takatori ορο)

Παράμετροι Bouc-Wen	
$\alpha_u$	0,01
$\alpha_{by}$	0,01
$\alpha_{bz}$	0,01
$\beta$	0,5
$\gamma$	0,5
$n$	4

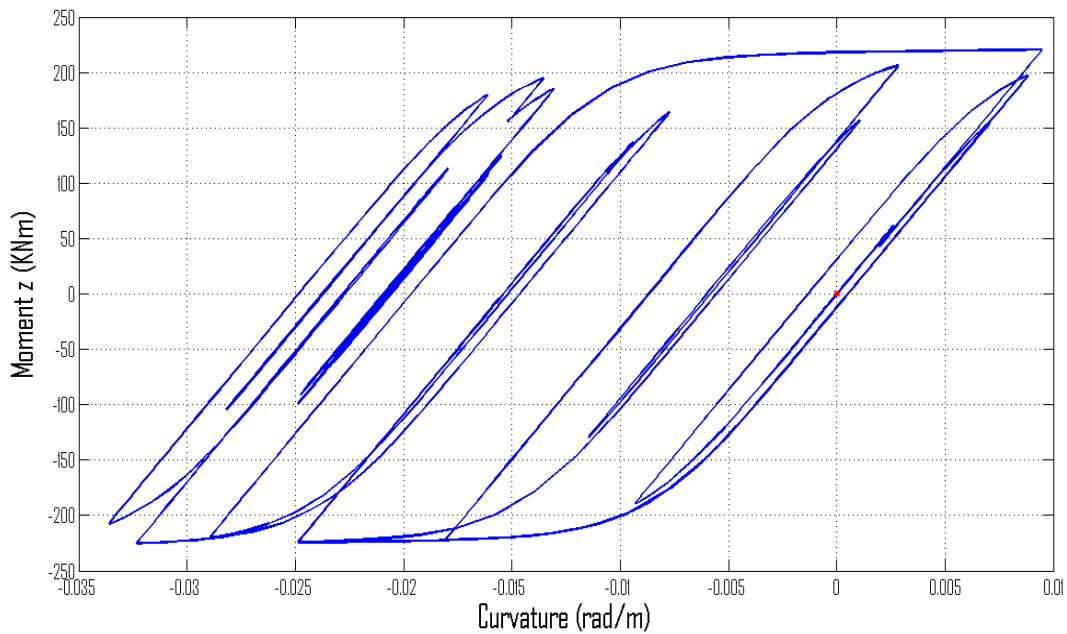
**Πίνακας 4.2.1.1** Παράμετροι επίλυσης

Αρχικά επιβάλλεται σεισμός κατά τον βαθμό ελευθερίας  $\bar{X}$ . Με τις δεδομένες τιμές των P, όλα τα υποστυλώματα κάμπτονται περί τον ισχυρό τους άξονα και για αυτό ο πολλαπλασιαστής του επιταχυνσιογραφήματος για να υπάρξει διαρροή είναι 2.5. Οι δυνάμεις που αναπτύσσονται στην κατασκευή είναι δυνάμεις D'Alembert, ισούνται δηλαδή με την ισοδύναμη συγκεντρωμένη μάζα του κόμβου επί την επιτάχυνση του εδάφους. Για τον ίδιο όροφο, οι δυνάμεις είναι ίσες, αλλά αν ο φορέας ήταν διώροφος, οι δυνάμεις καθ' ύψος της κατασκευής θα καθορίζονταν από τις μάζες του εκάστοτε ορόφου. Τα αποτελέσματα χαρακτηριστικών κόμβων που προέκυψαν από την ανάλυση φαίνονται παρακάτω :

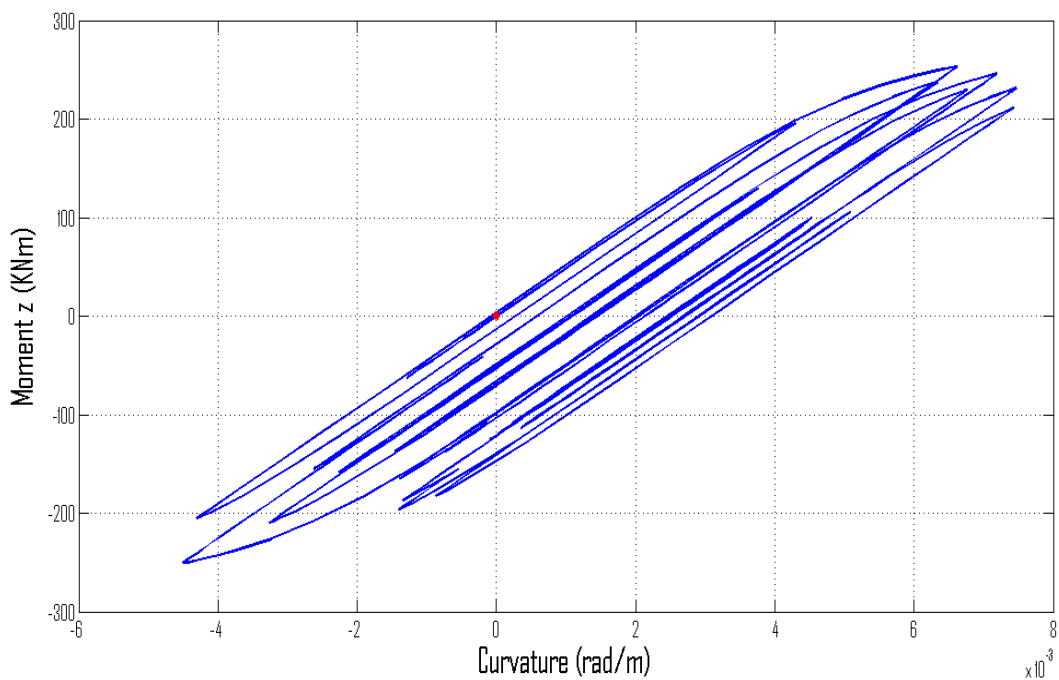


**Σχήμα 4.2.1.2** Χρονοϊστορία μετατόπισης κόμβου 2 για φόρτιση  $\bar{X}$  (Kobe Takatori 090)

Ενώ η ταλάντωση ξεκινά γύρω από το σημείο 0, μετά την επίδραση του σεισμού καταλήγει να έχει νέο σημείο ισορροπίας τα 0,06 m.



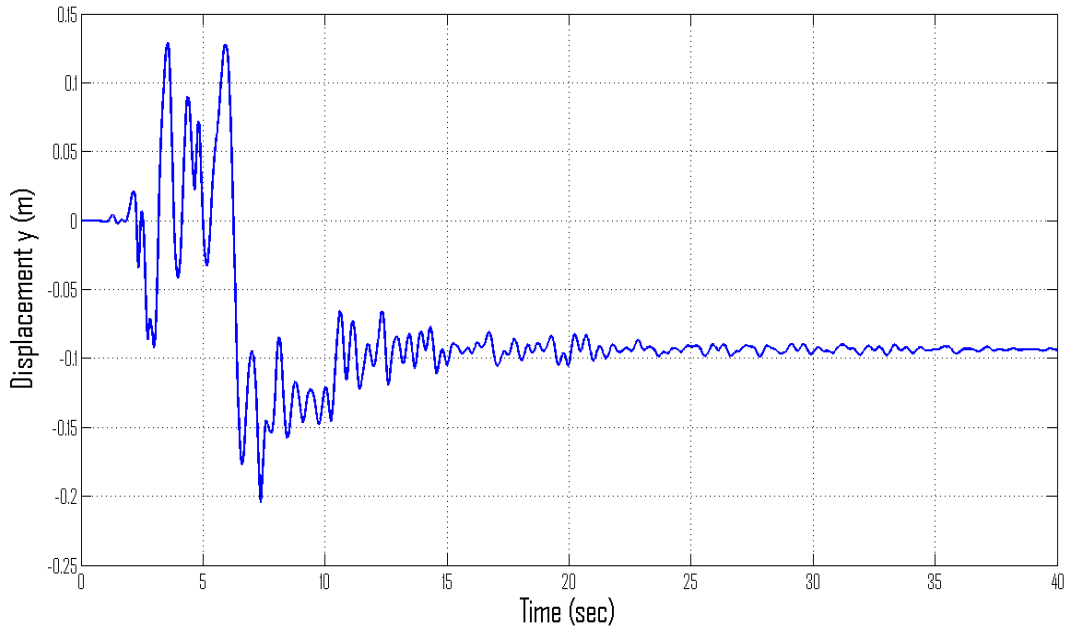
Σχήμα 4.2.1.3 Διάγραμμα Ρομών-Καμπυλοτήτων στο άκρο j του στοιχείου 2 για φόρτιση  $+\bar{X}$  (Kobe Takatori 090)



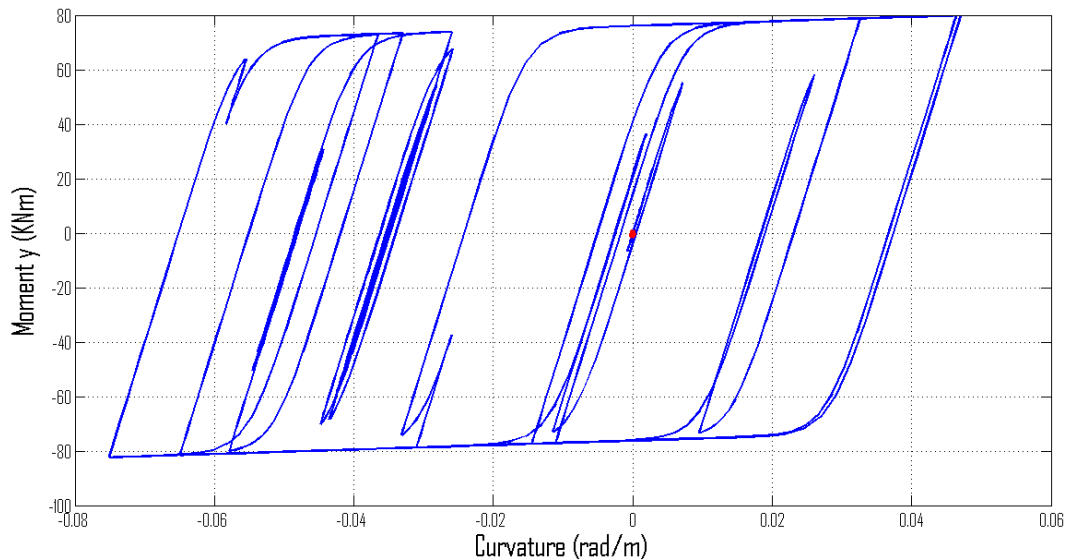
Σχήμα 4.2.1.4 Διάγραμμα Ρομών-Καμπυλοτήτων στο άκρο i του στοιχείου 3 για φόρτιση  $+\bar{X}$  (Kobe Takatori 090)

Στο τελευταίο διάγραμμα, φαίνεται ότι το ζύγωμα 3 σε διατομή κοντά στον κόμβο αρχής του, μόλις που διαρρέει. Οι τιμές της καμπυλότητας είναι αρκετά μικρές.

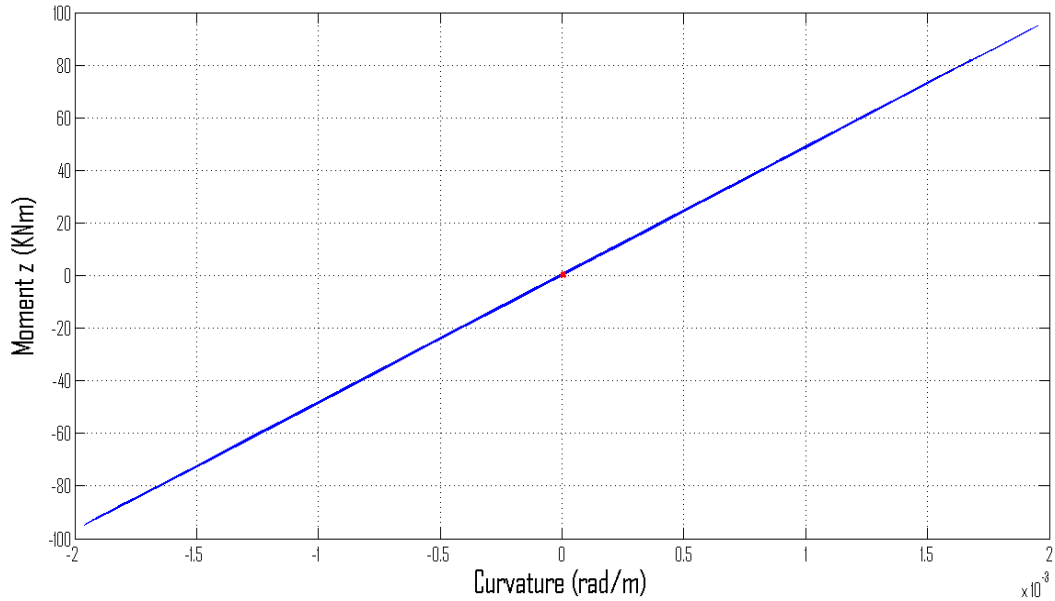
Για φόρτιση κατά τον καθολικό βαθμό ελευθερίας  $-\bar{Y}$ , λόγω του γεγονότος ότι με τον δεδομένο σχεδιασμό κάμπτονται οι ασθενείς άξονες των υποστυλωμάτων, ο πολλαπλασιαστής του σεισμού είναι 1.5 και τα αντίστοιχα αποτελέσματα της ανάλυσης είναι τα ακόλουθα :



Σχήμα 4.2.1.5 Χρονοϊστορία μετατόπισης κόμβου 2 για φόρτιση  $-\bar{Y}$  (Kobe Takatori 090)



Σχήμα 4.2.1.6 Διάγραμμα Ροπών-Καμπυλοτήτων στο άκρο j του στοιχείου 1 για φόρτιση  $-\bar{Y}$  (Kobe Takatori 090)



Σχήμα 4.2.1.7 Διάγραμμα Ροπών-Καμπυλοτήτων στο άκρο  $i$  του στοιχείου  $z$  για φόρτιση  $-\bar{Y}$  (Kobe Takatori 090)

Με την δεδομένη φόρτιση, στην αρχή του μέλους  $z$ , η ροπή, όπως παρατηρείται, δεν έφτασε την ροπή διαρροής και έτσι η διατομή ακολούθησε ελαστική συμπεριφορά.

Για τον ποιοτικό έλεγχο του συνόλου των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από την ανάλυση, μπορεί κανείς να ακολουθήσει τις υποδείξεις του προηγούμενου παραδείγματος, ορίζοντας για κάθε στοιχείο τοπικό σύστημα αξόνων και με απλή στατική λογική να επαληθεύσει τον παρακάτω πίνακα :

	Σεισμός κατά +x				Σεισμός κατά -y			
	$M_y$		$M_z$		$M_y$		$M_z$	
Στοιχείο	0	L	0	L	0	L	0	L
1	N	N	-	-	-	-	N	N
2	P	P	N	N	P	P	-	-
3	P	P	+	+	N	N	N	N
4	P	P	N	N	P	P	-	-
5	P	P	+	+	N	N	N	N
6	N	N	-	-	+	+	N	N
7	N	N	-	-	+	+	N	N
8	N	N	-	-	+	+	N	N

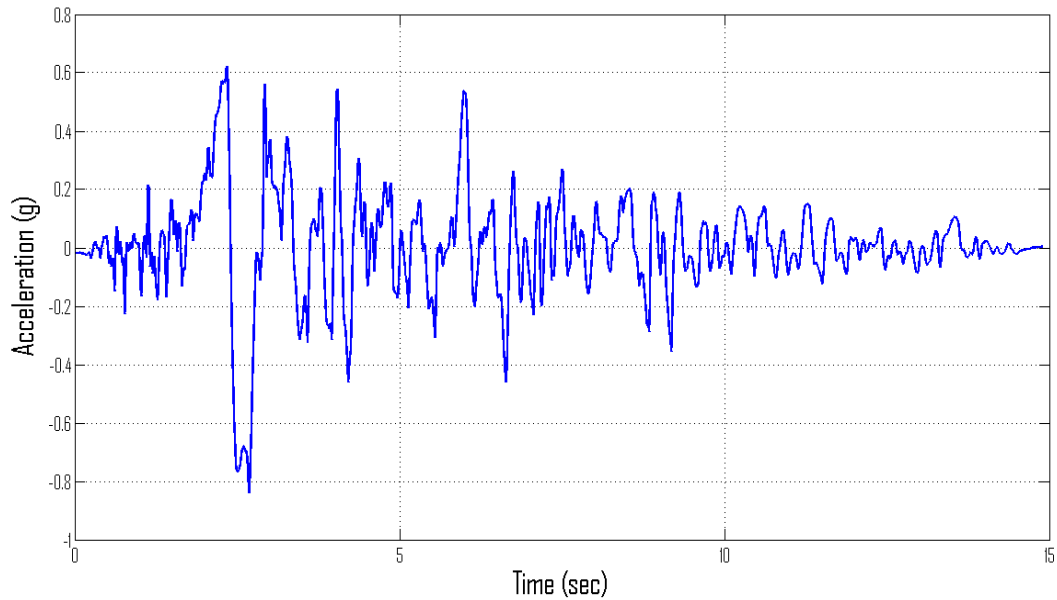
Πίνακας 4.2.1.2 Συγκεντρωτικός πίνακας ποιοτικών αποτελεσμάτων

Όπου :

- $0$ , η αρχή του μέλους
- $L$ , το πέρας του μέλους
- $N$ , η άκρη του μέλους δεν επηρεάζεται από την δεδομένη κατεύθυνση του σεισμού
- $P$ , βρόχοι υστέρησης λόγω συνδυασμού στατικών (Permanent) και δυναμικών φορτίων, που δεν θα υπήρχαν μόνο με δυναμικά φορτία
- $M_y$ , η ροπή με διάνυσμα κατά τον τοπικό άξονα  $y$
- $M_z$ , η ροπή με διάνυσμα κατά τον τοπικό άξονα  $z$
- $+$ , αν η αρχική καταπόνηση του στοιχείου συμπίπτει με το αρχικό πρόσημο του επιταχυνσιογραφήματος (π.χ. αν το επιταχυνσιογράφημα ξεκινά με θετικό πρόσημο και μετά εναλλάσσεται, και η ροπή στην διατομή που μελετάμε θα ξεκινά με θετικό πρόσημο και μετά εναλλάσσεται)
- $-$ , το αντίστροφο.

Παρατηρείται, ότι με τις παραπάνω συμβάσεις προσήμων (συμβάσεις μητρικής στατικής), τα πρόσημα καταπόνησης της αρχής και του τέλους κάθε μέλους είναι τα ίδια. Οι τιμές προφανώς δεν είναι.

#### 4.2.2 Rinaldi RSS 228

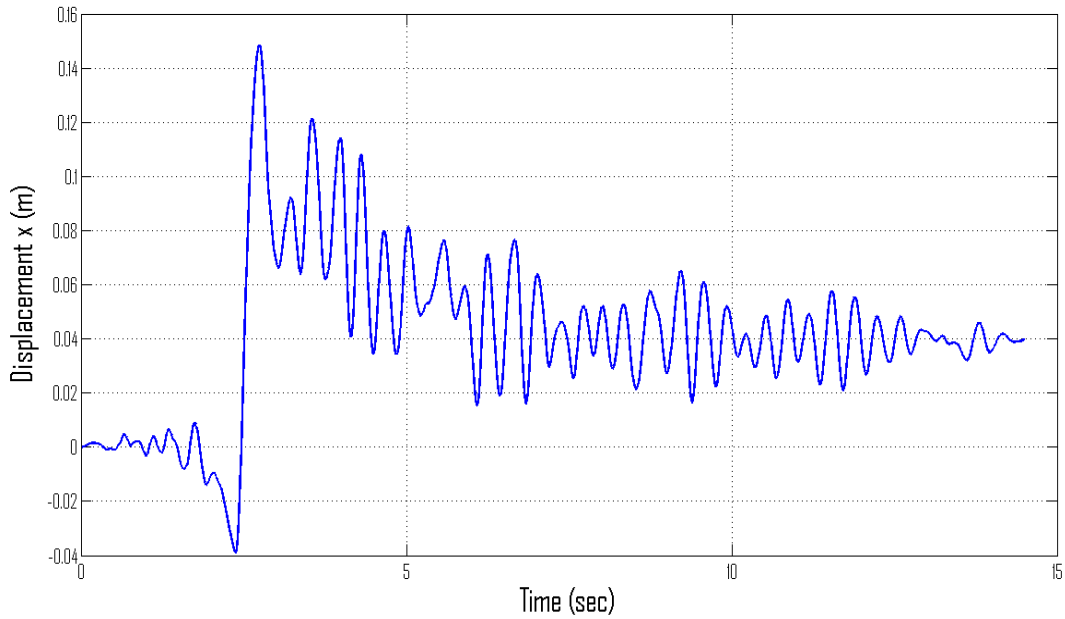


Σχήμα 4.2.2.1 Επιταχυνσιογράφημα (Rinaldi RSS 228)

Παράμετροι Bouc-Wen	
$\alpha_u$	0,08
$\alpha_{by}$	0,08
$\alpha_{bz}$	0,08
$\beta$	0,5
$\gamma$	0,5
$n$	6

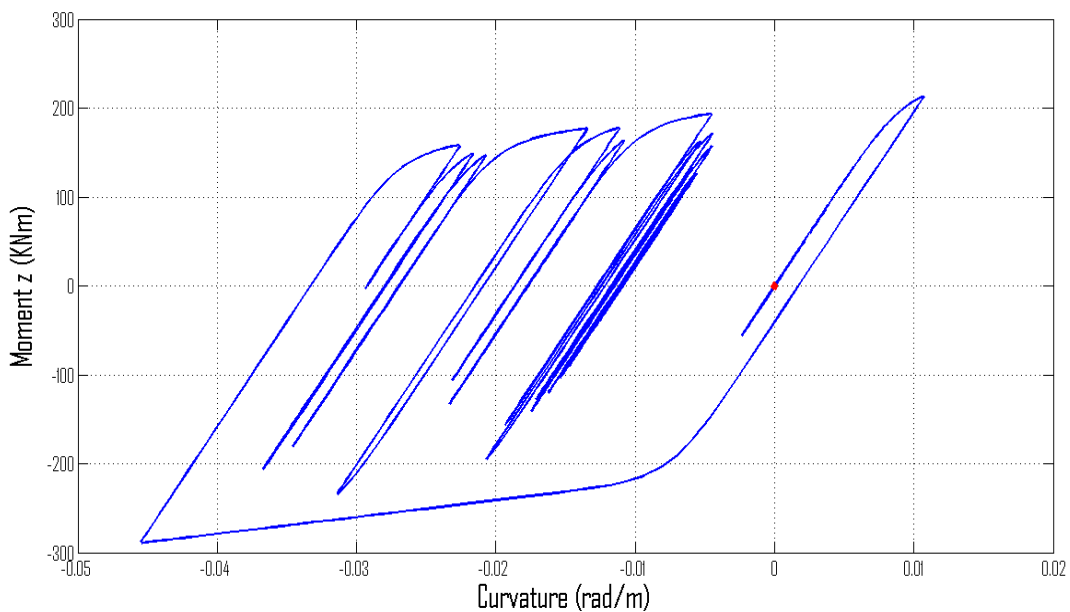
Πίνακας 4.2.2.1 Παράμετροι επίλυσης

Αρχικά η κατεύθυνση του σεισμού είναι η  $-\bar{x}$ . Ο μεγεθυντικός συντελεστής που χρησιμοποιείται είναι 2. Χαρακτηριστικά αποτελέσματα της ανάλυσης φαίνονται παρακάτω :



Σχήμα 4.2.2.2 Χρονοϊστορία μετατόπισης κόμβου 2 για φόρτιση  $-\bar{\chi}$  (Rinaldi RSS 228)

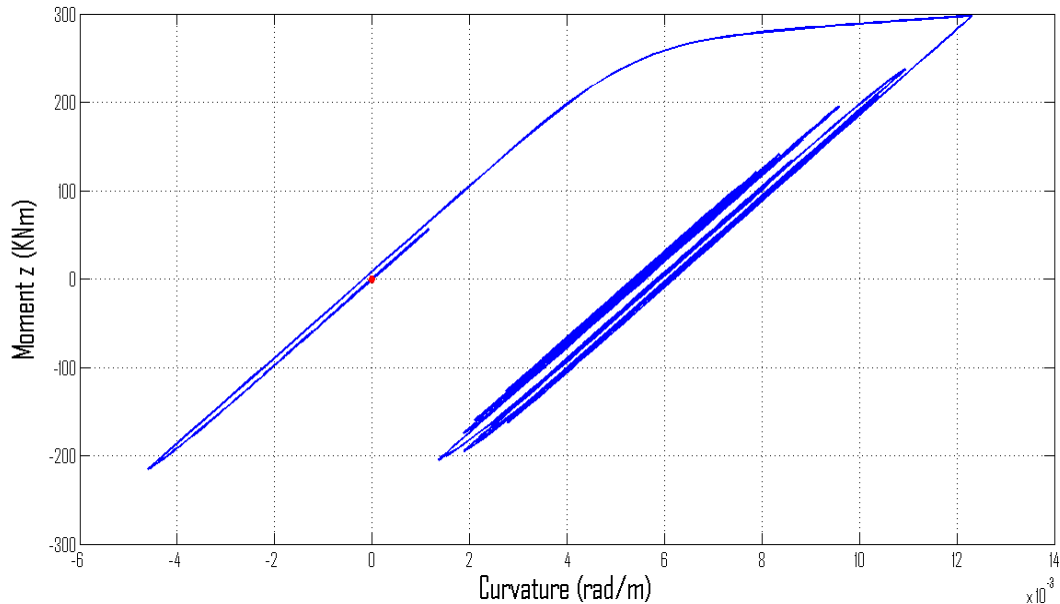
Άξιο παρατήρησης είναι το γεγονός ότι η απότομη αύξηση της επιτάχυνσης προς τα αρνητικά, είχε ως αποτέλεσμα την απότομη αύξηση της μετατόπισης του κόμβου 2 προς τα θετικά, αφού η φορά του σεισμού είναι αρνητική ( $-\bar{\chi}$ ). Το νέο σημείο ισορροπίας παρουσιάζεται για μετατόπιση ίση με +0.04.



Σχήμα 4.2.2.3 Διάγραμμα Ροπών-Καμπυλοτήτων στο άκρο j του στοιχείου 1 για φόρτιση  $-\bar{\chi}$  (Rinaldi RSS 228)



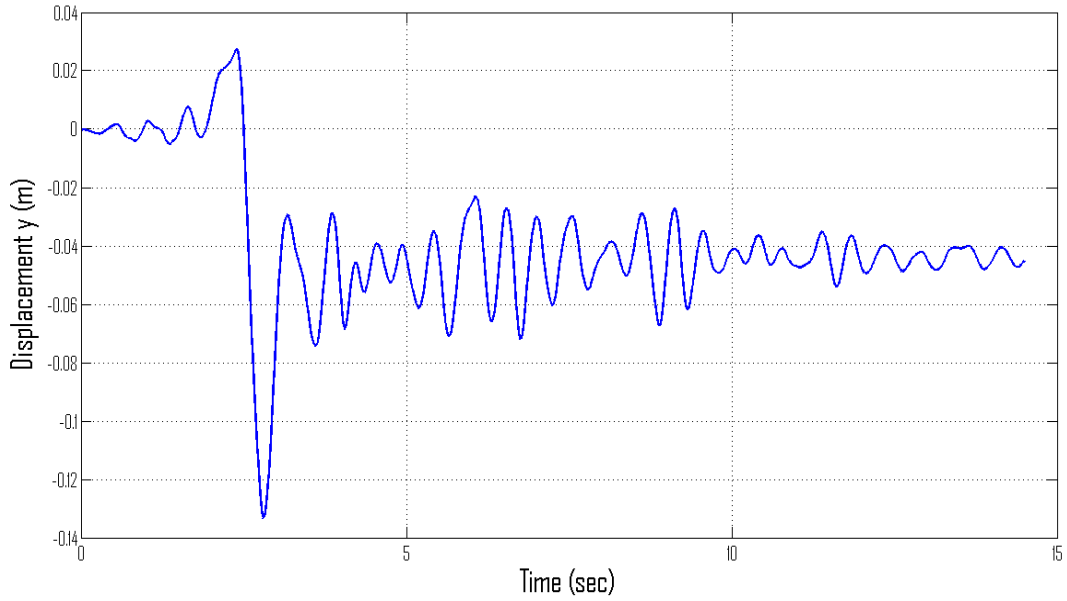
Στο παραπάνω διάγραμμα γίνεται φανερή η απότομη μεταβολή της καμπυλότητας, απόρροια της απότομης μεταβολής της επιτάχυνσης. Ταυτόχρονα, η αυξημένη τιμή των συντελεστών Bouc-Wen  $\alpha_u, \alpha_{by}, \alpha_{bz}$ , δημιουργεί μία μεγαλύτερη κράτυνση σε σχέση με αυτήν του προηγούμενου σεισμού.



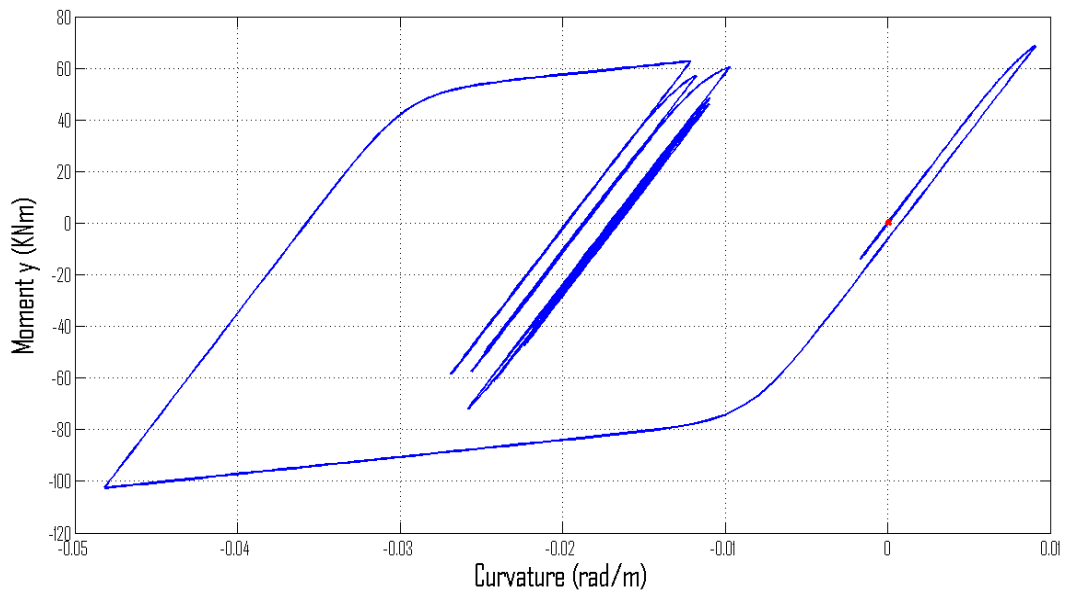
Σχήμα 4.2.2.4 Διάγραμμα Ρομών-Καμπυλοτήτων στο άκρο  $i$  του στοιχείου 3 για φόρτιση  $-\bar{X}$  (Rinaldi RSS 228)

Στο παραπάνω διάγραμμα παρατηρείται ότι εκτός από το άλμα της επιτάχυνσης, που μεταφράστηκε στο άλμα των καμπυλοτήτων του παραπάνω διαγράμματος, καθ' όλη την υπόλοιπη διάρκεια του σεισμού, η διατομή συμπεριφέρθηκε ελαστικά.

Επειδή για τον σεισμό Rinaldi RSS 228 κατά  $+\bar{Y}$  η κατασκευή παρουσίασε μεγάλες μετακινήσεις, ο πολλαπλασιαστής της επιτάχυνσης θα είναι 0.7. Τα αποτελέσματα φαίνονται παρακάτω :



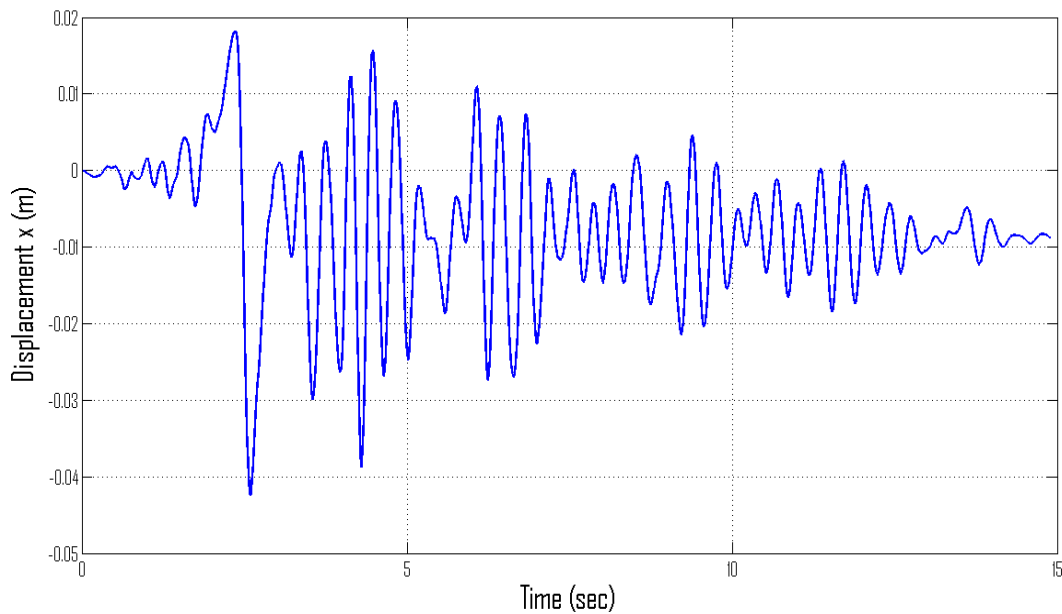
Σχήμα 4.2.2.5 Χρονοϊστορία μετατόπισης κόμβου 2 για φόρτιση +  $\bar{Y}$  (Rinaldi RSS 228)



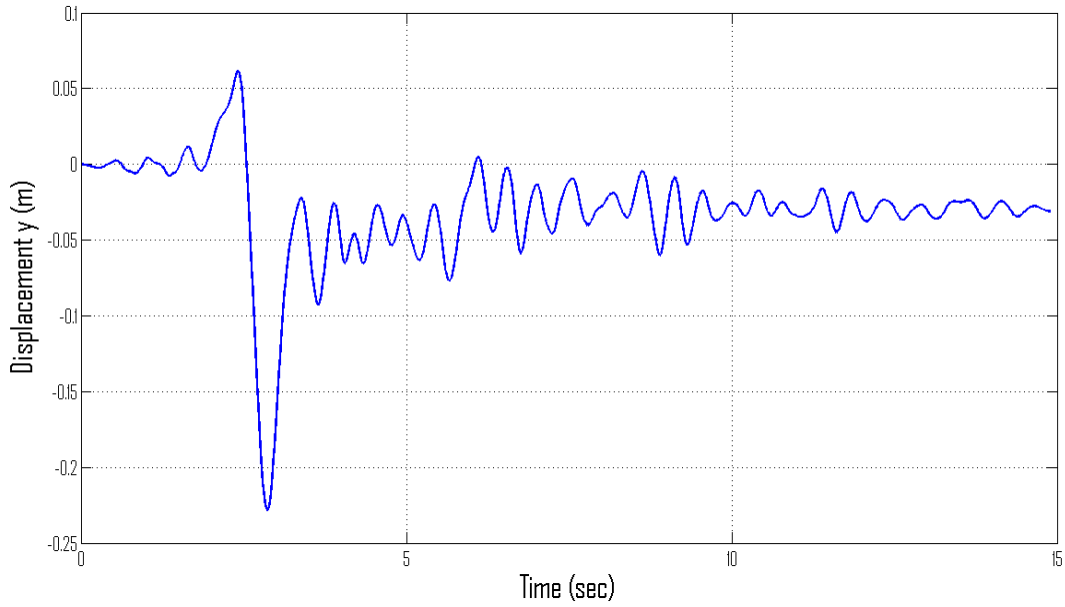
Σχήμα 4.2.2.6 Διάγραμμα Ροπών-Καμπυλοτήτων στο άκρο  $j$  του στοιχείου 1 για φόρτιση +  $\bar{Y}$  (Rinaldi RSS 228)

Τέλος, ο φορέας λύνεται με συντελεστή μεγέθυνσης 1.5 και κατεύθυνση που σχηματίζει 45 μοίρες με τους άξονες  $+\bar{x}$ ,  $+\bar{y}$ . Αυτό επιτυγχάνεται επιβάλλοντας τον σεισμό κατά τις δύο διευθύνσεις

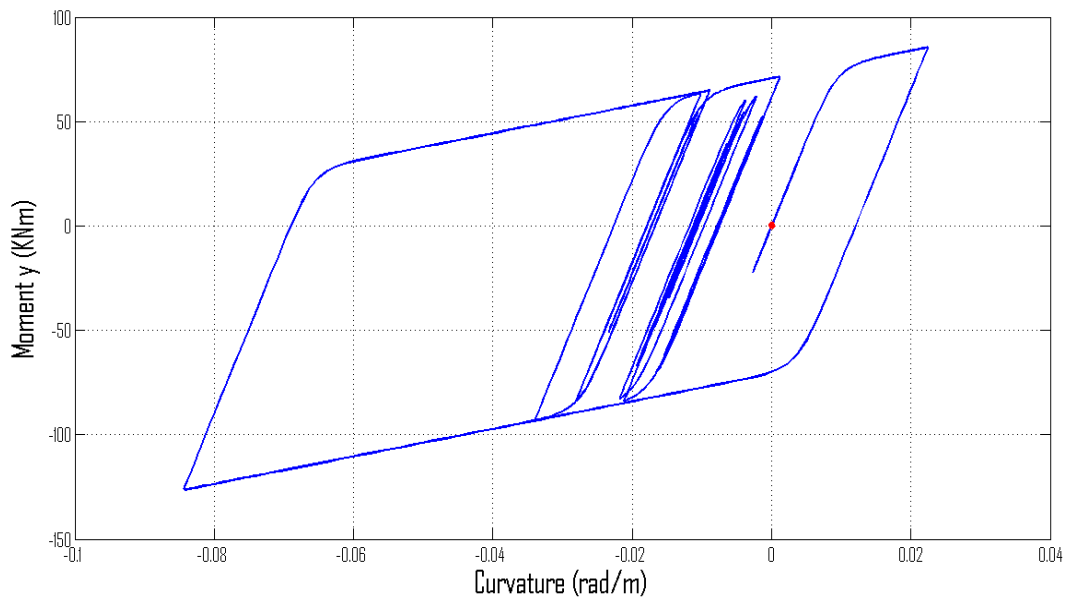
ταυτόχρονα, αλλά με τιμές  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  φορές μειωμένες όπως προκύπτει από την γεωμετρία. Τα αποτελέσματα φαίνονται στα ακόλουθα διαγράμματα :



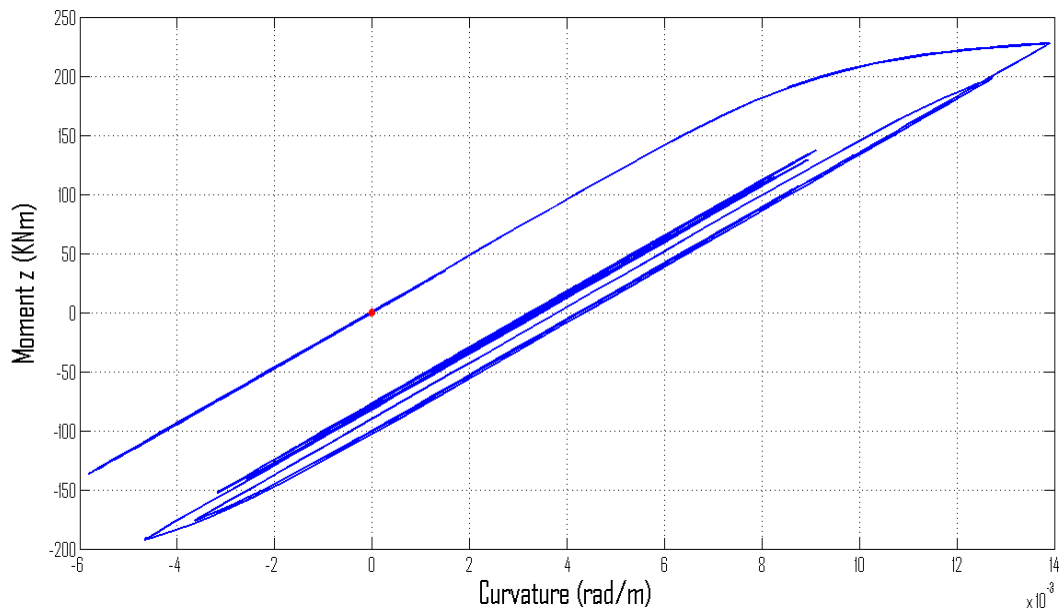
**χήμα 4.2.2.7** Χρονοϊστορία μετατόπισης κόμβου 5 για φόρτιση σε κατεύθυνση 45 μοιρών αριστερόστροφα από τον  $+\bar{x}$  (Rinaldi RSS 228)



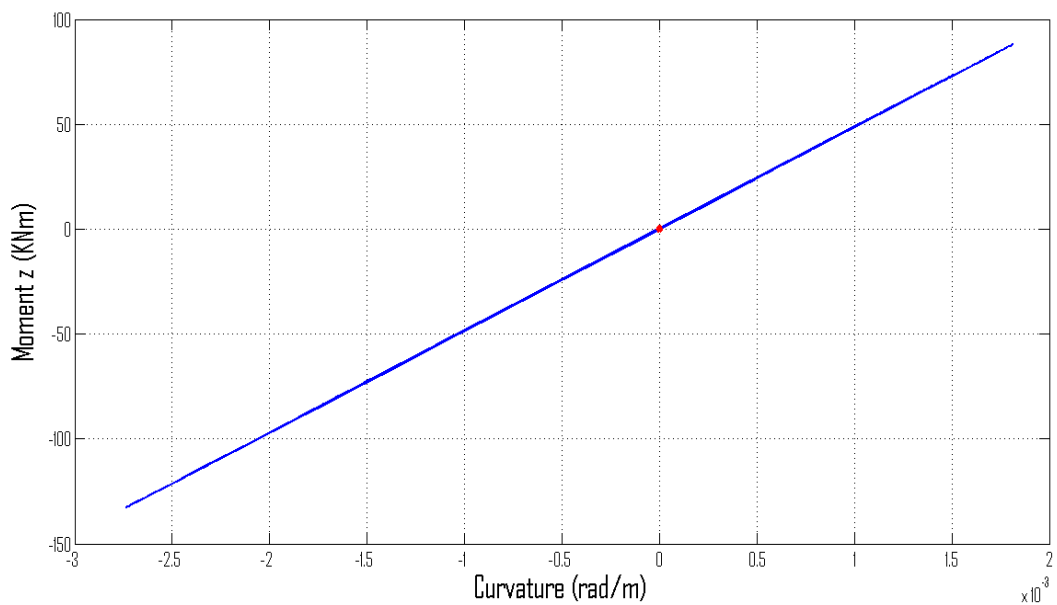
Σχήμα 4.2.2.8 Χρονοϊστορία μετατόπισης κόμβου 5 για φόρτιση σε κατεύθυνση 45 μοιρών αριστερόστροφα από τον  $+\bar{x}$  (Rinaldi RSS 228)



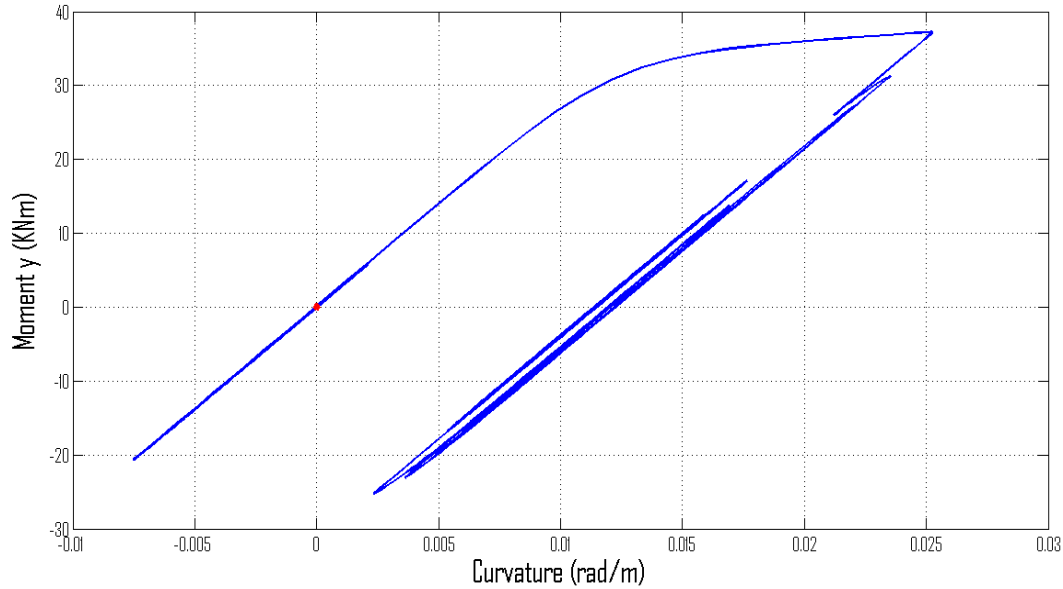
Σχήμα 4.2.2.9 Διάγραμμα Ροπών-Καμπυλοτήτων στο άκρο j του στοιχείου 1 για φόρτιση σε κατεύθυνση 45 μοιρών αριστερόστροφα από τον  $+\bar{x}$  (Rinaldi RSS 228)



Σχήμα 4.2.2.10 Διάγραμμα Ροπών-Καμπυλοτήτων στο άκρο  $j$  του στοιχείου 1 για φόρτιση σε κατεύθυνση 45 μοιρών αριστερόστροφα από τον  $+\bar{\chi}$  (Rinaldi RSS 228)



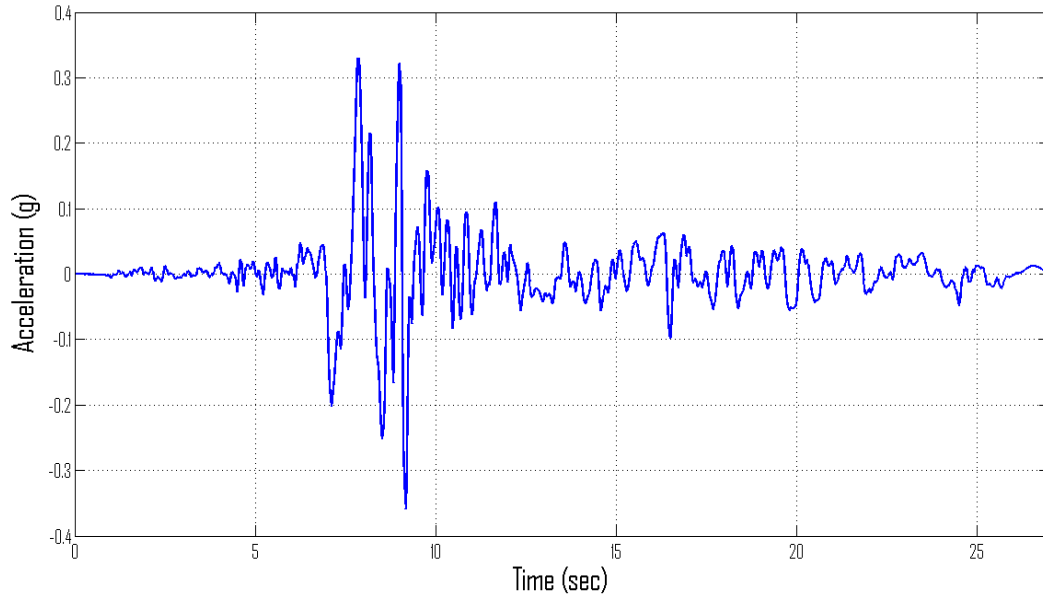
Σχήμα 4.2.2.11 Διάγραμμα Ροπών-Καμπυλοτήτων στο άκρο  $j$  του στοιχείου 2 για φόρτιση σε κατεύθυνση 45 μοιρών αριστερόστροφα από τον  $+\bar{\chi}$  (Rinaldi RSS 228)



**Σχήμα 4.2.2.13** Διάγραμμα Ροπών-Καμπυλοτήτων στο άκρο  $j$  του στοιχείου 2 για φόρτιση σε κατεύθυνση 45 μοιρών αριστερόστροφα από τον  $+\bar{x}$  (Rinaldi RSS 228)

Παρατηρείται ότι οι καταπονήσεις κατά τον ασθενή άξονα είναι σημαντικές, ενώ κατά τον ισχυρό όχι. Το γεγονός αυτό οφείλεται στον λάθος σχεδιασμό της κατασκευής, αφού κατά την μία διεύθυνση εκτίθενται οι ισχυροί άξονες όλων των υποστυλωμάτων, ενώ κατά την άλλη, όλοι οι ασθενείς. Μία λύση του παρόντος προβλήματος θα ήταν να τοποθετούνταν στην ασθενή διεύθυνση σύνδεσμοι δυσκαμψίας.

### 4.2.3 Kocaeli Duzce 270

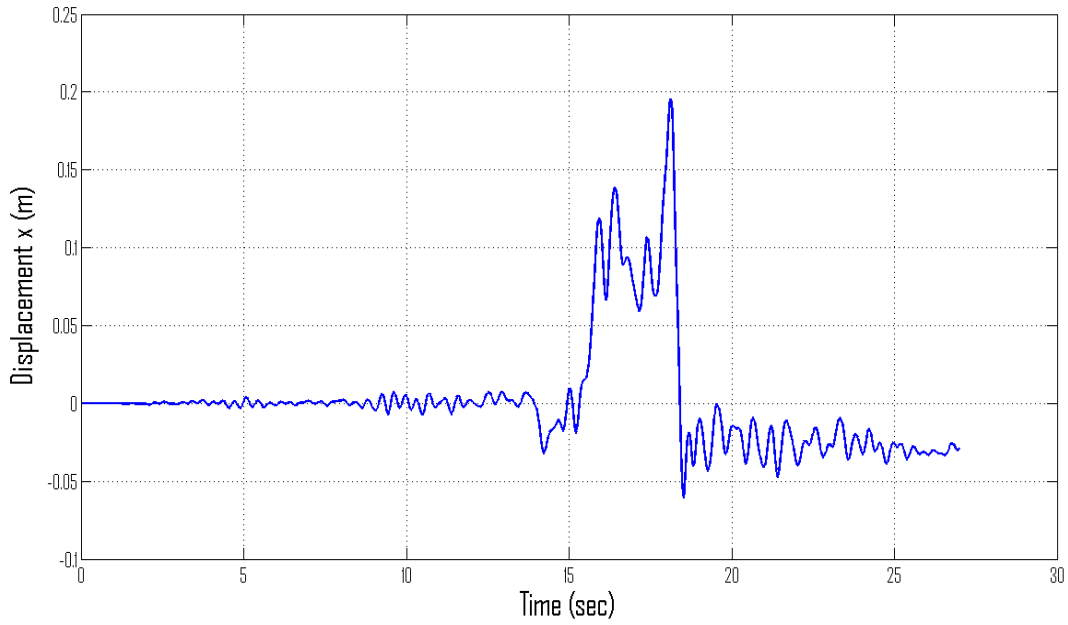


Σχήμα 4.2.3.1 Επιταχυνσιογράφημα (Kocaeli Duzce 270)

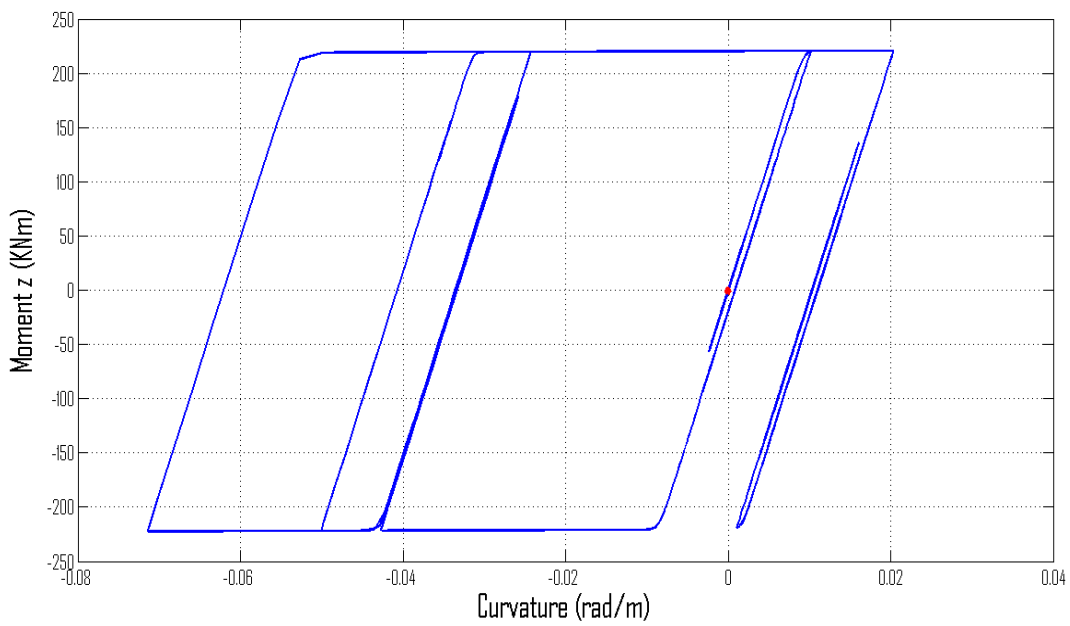
Παράμετροι Bouc-Wen	
$\alpha_u$	0,001
$\alpha_{by}$	0,001
$\alpha_{bz}$	0,001
$\beta$	0,5
$\gamma$	0,5
$n$	25

Πίνακας 4.2.3.1 Παράμετροι επίλυσης

Ξεκινάμε την τρίτη περίπτωση σεισμού φορτίζοντας τη διεύθυνση  $+\bar{x}$  και ορίζουμε μεγεθυντικό συντελεστή 5. Τα αποτελέσματα είναι τα εξής :

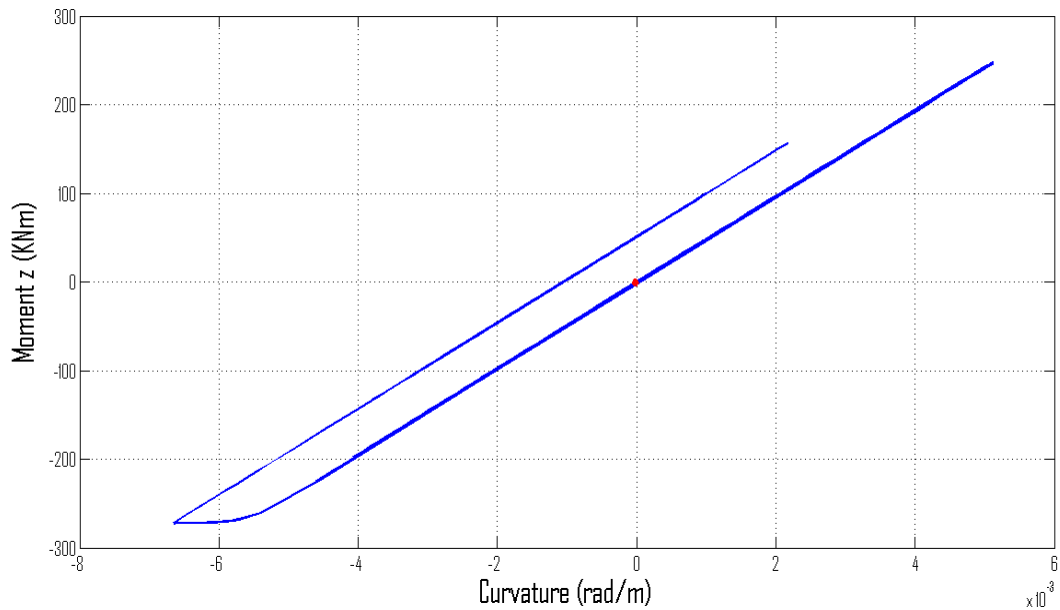


Σχήμα 4.2.3.2 Χρονοϊστορία μετατόπισης κόμβου 3 για φόρτιση +  $\bar{\chi}$  (Kocaeli Duzce 270)



Σχήμα 4.2.3.3 Διάγραμμα Ροπών-Καμπυλοτήτων στο άκρο j του στοιχείου 1 για φόρτιση +  $\bar{\chi}$  (Kocaeli Duzce 270)

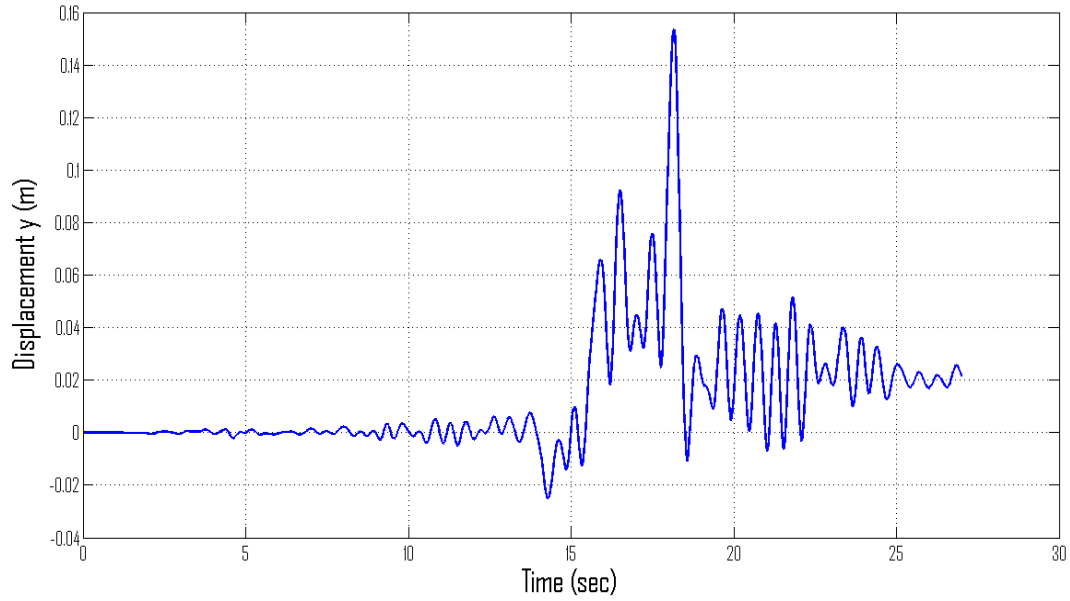




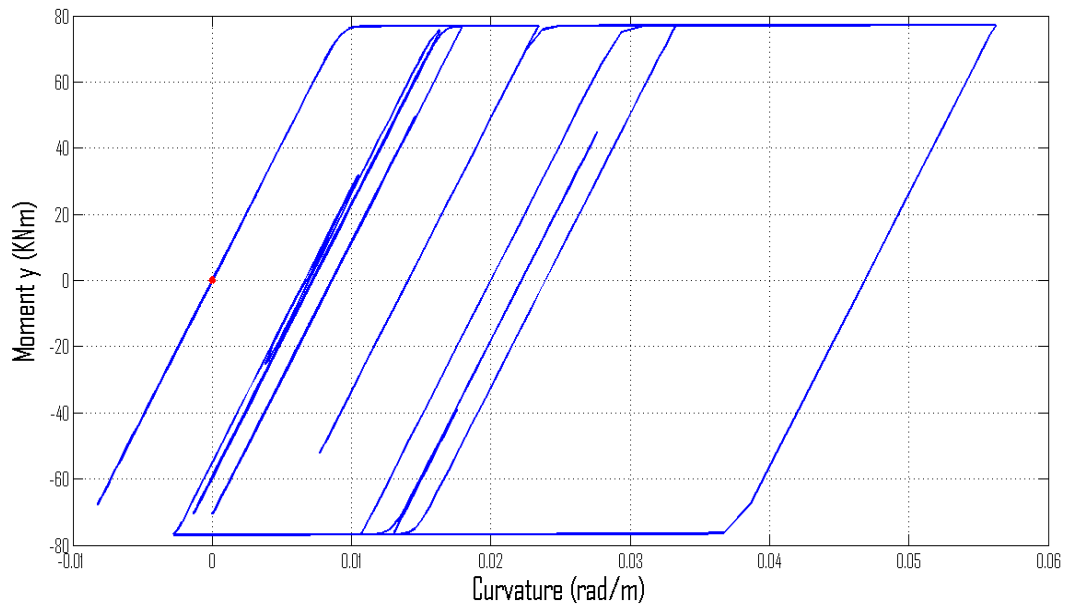
Σχήμα 4.2.3.4 Διάγραμμα Ρομών-Καμπυλοτήτων στο άκρο  $i$  του στοιχείου 3 για φόρτιση  $+\bar{X}$  (Kocaeli Duzce 270)

Όπως φαίνεται από τα παραπάνω διαγράμματα, η μετάβαση από τον ελαστικό στον μετελαστικό κλάδο είναι απότομη, και η κράτυνση πολύ μικρή. Η μορφή αυτή προκύπτει λόγω του αυξημένου συντελεστή  $\eta$  και της μικρής τιμής των  $\alpha_u$ ,  $\alpha_{by}$ ,  $\alpha_{bz}$  αντίστοιχα.

Φορτίζοντας την διεύθυνση  $+\bar{Y}$  και αυξάνοντας το επιταχυνσιογράφημα κατά 1.5 φορές, τα αποτελέσματα είναι τα εξής :



Σχήμα 4.2.3.5 Χρονοϊστορία μετατόπισης κόμβου 3 για φόρτιση +  $\bar{Y}$  (Kocaeli Duzce 270)



Σχήμα 4.2.3.6 Διάγραμμα Ροπών-Καμπυλοτήτων στο άκρο j του στοιχείου 1 για φόρτιση +  $\bar{Y}$  (Kocaeli Duzce 270)

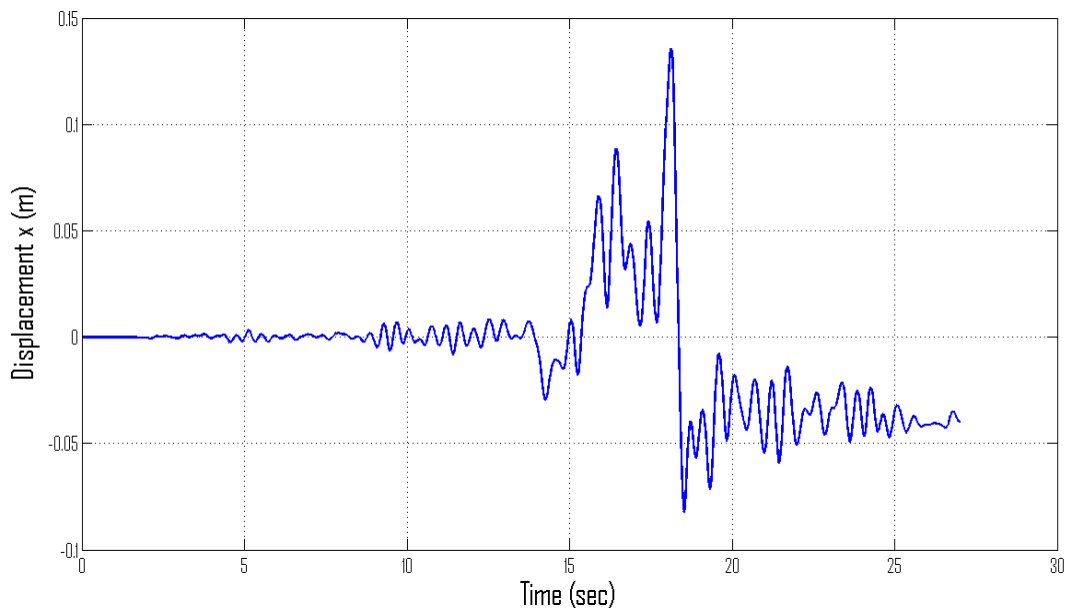
Όπως ήδη έχει αναφερθεί, ο σχεδιασμός του φορέα δεν είναι βέλτιστος. Για τον λόγο αυτό, στον σημείο αυτό περιστρέφουμε κατά 90 μοίρες τα στοιχεία 1 και 7, ώστε η συμπεριφορά του φορέα σε σεισμό οποιασδήποτε κατεύθυνσης να είναι η ίδια. Έτσι, τα νέα σημεία P των υποστυλωμάτων 1 και 7, φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα :

	Πριν	Μετά
P1	(-3, 0, 0)	(0, 3, 0)
P7	(8, 5, 0)	(5, 8, 0)

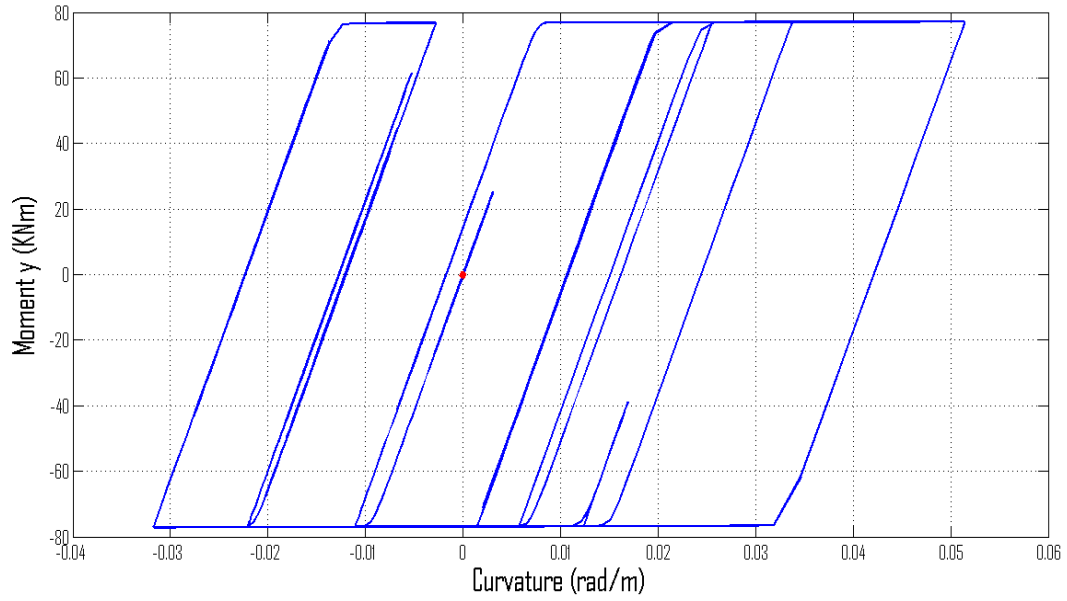
**Πίνακας 4.2.3.2** Αλλαγή προσανατολισμού υποστυλωμάτων 1 και 7

Με τα νέα γεωμετρικά δεδομένα, λύνεται πάλι ο φορέας με μεγεθυντικό συντελεστή 3 και για τις δύο κατευθύνσεις σεισμού.

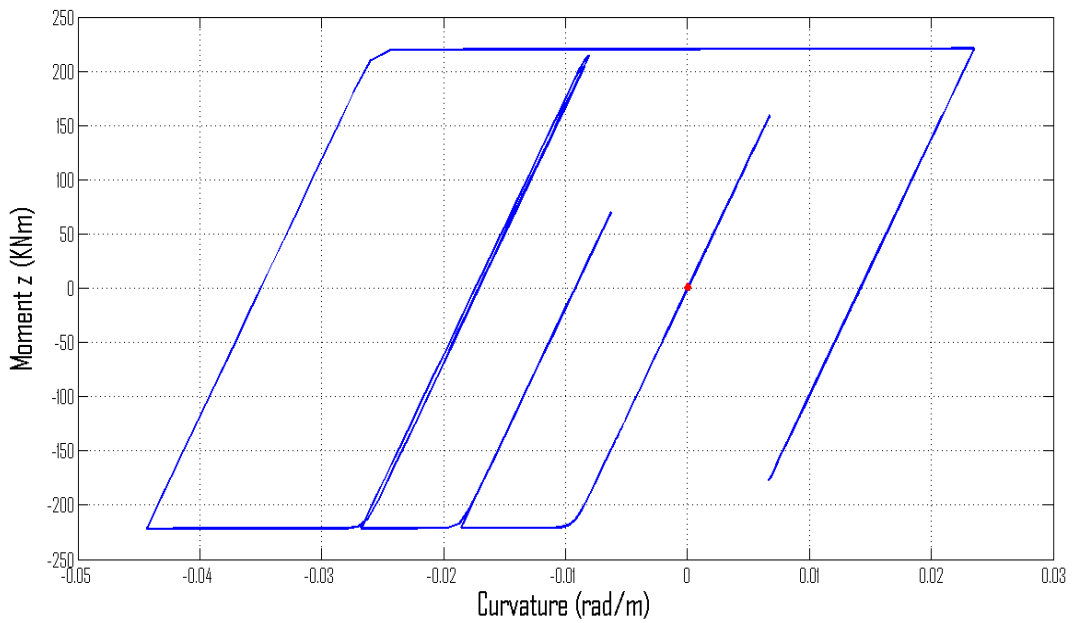
Σεισμός κατά  $+\bar{X}$  :



**Σχήμα 4.2.3.7** Χρονοϊστορία μετατόπισης κόμβου 4 για φόρτιση  $+\bar{X}$  (Kocaeli Duzce 270)

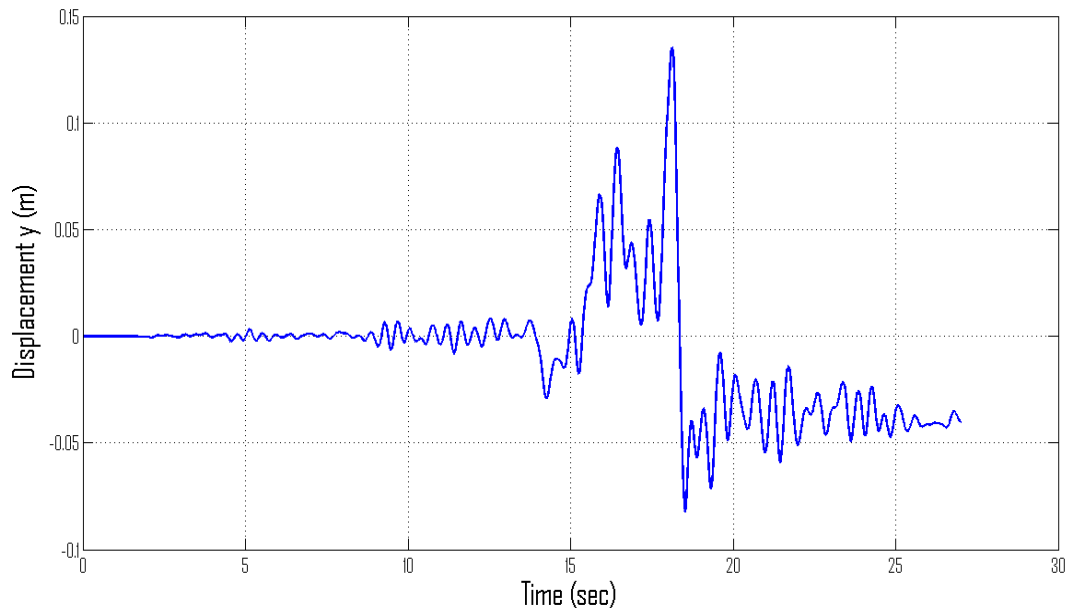


Σχήμα 4.2.3.8 Διάγραμμα Ροπών-Καμπυλοτήτων στο άκρο j του στοιχείου 1 για φόρτιση +  $\bar{X}$  (Kocaeli Duzce 270)

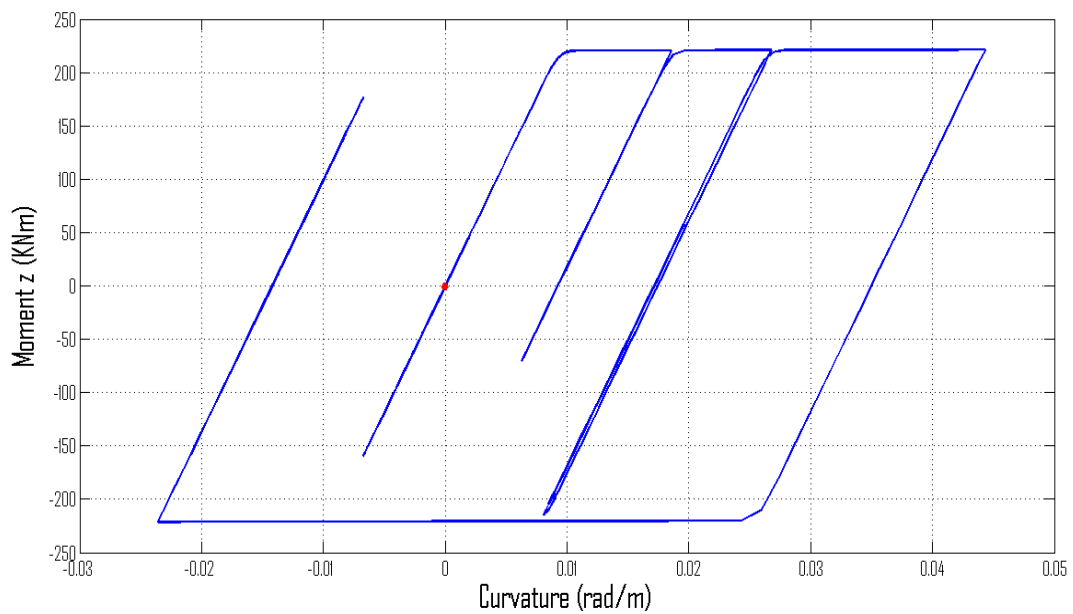


Σχήμα 4.2.3.9 Διάγραμμα Ροπών-Καμπυλοτήτων στο άκρο i του στοιχείου 8 για φόρτιση +  $\bar{X}$  (Kocaeli Duzce 270)

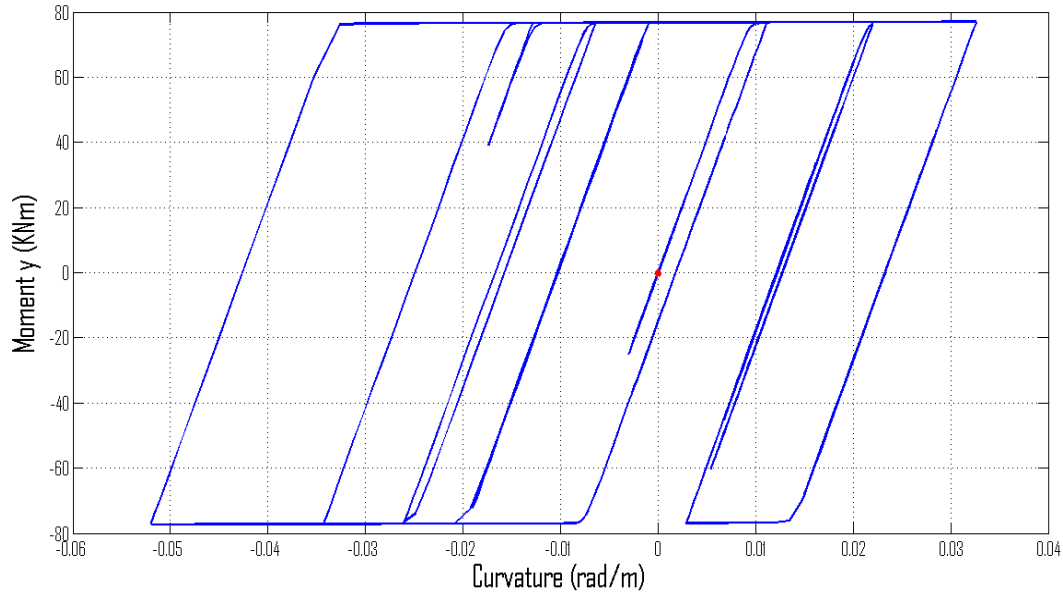
Σεισμός κατά  $+\bar{y}$ :



Σχήμα 4.2.3.10 Χρονοϊστορία μετατόπισης κόμβου 4 για φόρτιση  $+\bar{y}$  (Kocaeli Duzce 270)



Σχήμα 4.2.3.11 Διάγραμμα Ροπών-Καμπυλοτήτων στο άκρο j του στοιχείου 1 για φόρτιση  $+\bar{y}$  (Kocaeli Duzce 270)



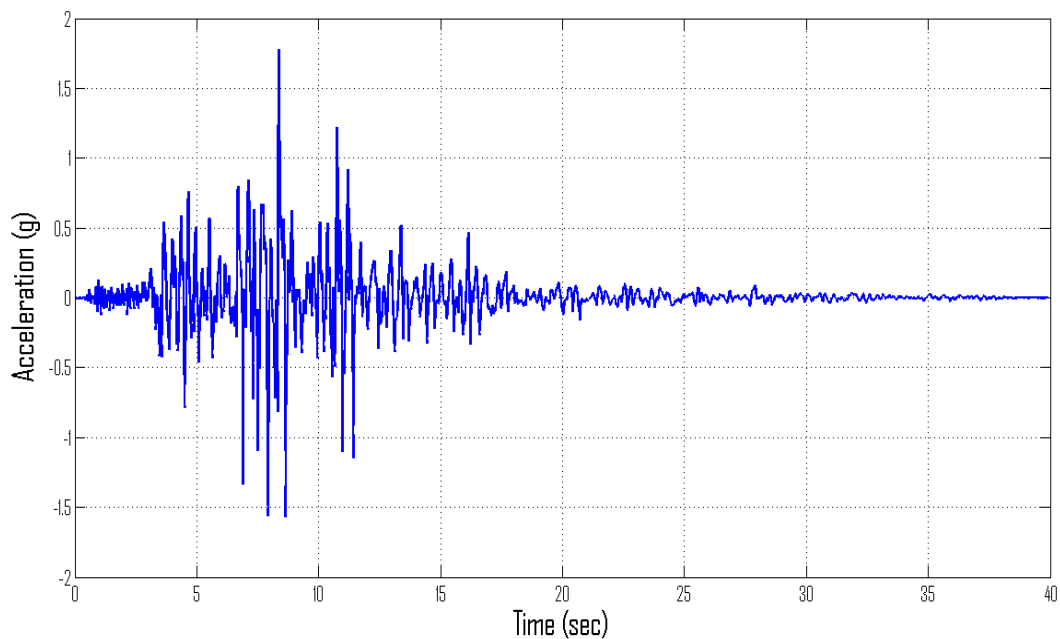
Σχήμα 4.2.3.12 Διάγραμμα Ροπών-Καμπυλοτήτων στο άκρο  $i$  του στοιχείου  $\delta$  για φόρτιση  $+\bar{Y}$  (Kocaeli Duzce 270)

Συγκρίνοντας τις δύο περιπτώσεις με τον διαφορετικό προσανατολισμό των υποστυλωμάτων, βγαίνουν τα εξής συμπεράσματα :

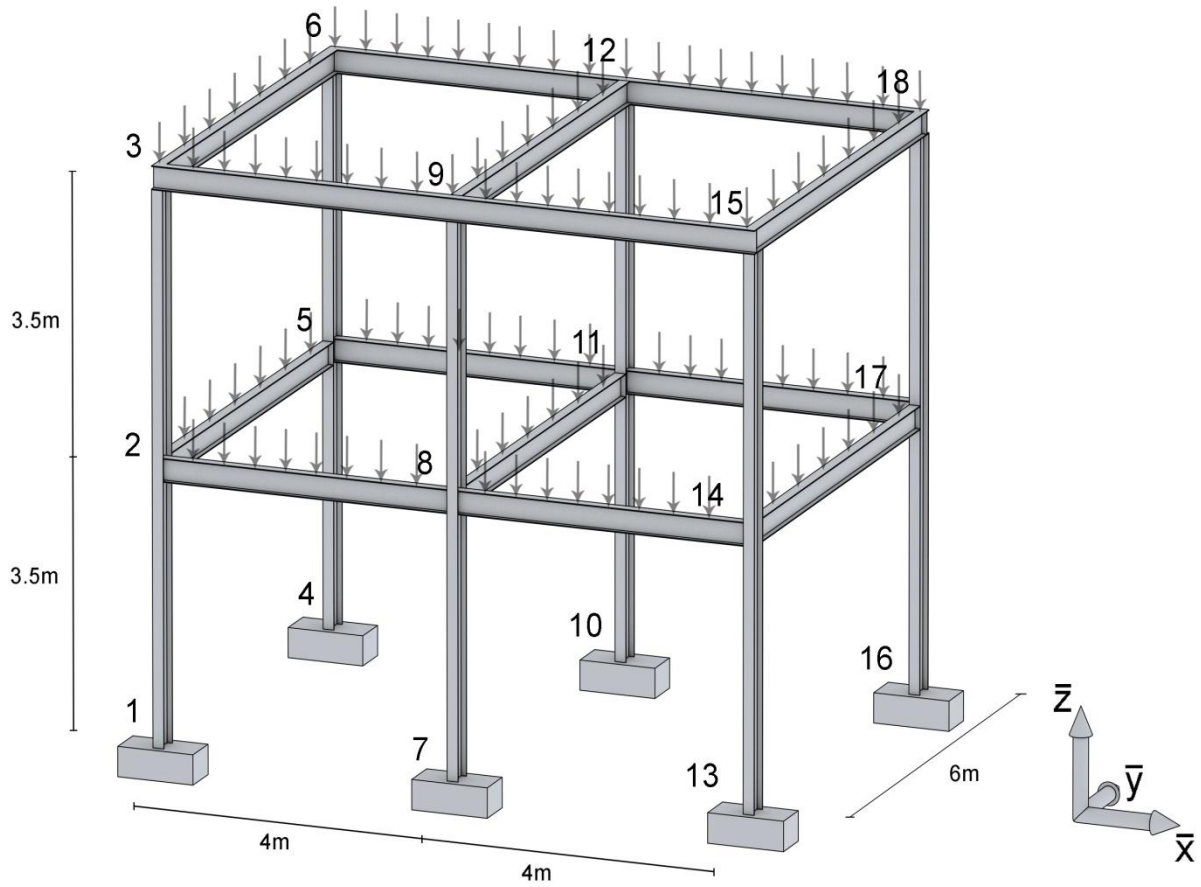
- η συμπεριφορά του φορέα είναι ίδια ανεξάρτητα της κατεύθυνσης του σεισμού
- Στην δεύτερη περίπτωση, με έναν μεγεθυντικό συντελεστή της τάξης του 3 (διπλάσιο από το 1.5 που επιβάλλεται στην ασθενή κατεύθυνση της πρώτης περίπτωσης), οι καταπονήσεις του ασθενή άξονα είναι μειωμένες.
- Το βασικό μειονέκτημα της δεύτερης περίπτωσης είναι ότι αν ο σεισμός δεν επιβληθεί σε κύρια διεύθυνση, ο φορέας καταπονείται και από στρέψη. Παράλληλα ο σχεδιασμός αυτός δεν είναι ο καλύτερος αρχιτεκτονικά.

### 4.3 ΔΙΩΡΟΦΗ ΠΛΑΙΣΙΩΤΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ

Σε αυτό το παράδειγμα, θα εξεταστεί η συμπεριφορά ενός διώροφου χωρικού πλαισίου με ορθογωνική κάτοψη. Τα χαρακτηριστικά του υλικού και οι παράμετροι Bouc-Wen που χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυση, είναι ίδιες για όλα τα στοιχεία του φορέα, και μαζί με τις λεπτομέρειες των διατομών φαίνονται στους παρακάτω πίνακες. Το κτήριο υποβλήθηκε στον σεισμό Tarzana 090 40 με τα εντατικά μεγέθη του για την διέγερση σε κατεύθυνση  $+\bar{x}$  να είναι πολλαπλασιασμένα με 1.5, ενώ για την κατεύθυνση  $+\bar{y}$  πάλι με 1.5. Τα στοιχεία είναι προσανατολισμένα έτσι, ώστε τα υποστυλώματα να κάμπτονται περί τον ισχυρό άξονα όταν ο σεισμός έχει κατεύθυνση που καταπονεί το πλαίσιο του ενός ανοίγματος, δηλαδή για σεισμό κατά  $\bar{y}$ , ενώ τα ζυγώματα έτσι, ώστε ο ισχυρός τους άξονας να κάμπτεται με την κατεύθυνση της βαρύτητας. Ο κάθε όροφος φορτίζεται, παράλληλα, με κατακόρυφο κατανεμημένο φορτίο ίσο με  $10 \text{ KN/m}^2$ . Στο σχήμα 4.3.2 φαίνεται ο φορέας, οι βασικές διαστάσεις του και το ομοιόμορφο κατανεμημένο φορτίο όπως έχει προκύψει από την αναγωγή του στα δοκάρια. Το επιταχυνσιογράφημα του σεισμού φαίνεται στο σχήμα 4.3.1.



Σχήμα 4.3.1 Επιταχυνσιογράφημα (Tarzana 090)



Σχήμα 4.3.2 Διώροφη πλαίσιοι κατασκευή

Υλικό	Δομικός χάλυβας
Χαρακτηριστικά υλικού	
E = 210 GPa	
f <sub>y</sub> = 235 MPa	
density = 7850 Kg/m <sup>3</sup>	

Πίνακας 4.3.1 Χαρακτηριστικά υλικού

Παράμετροι Bouc-Wen	
α <sub>u</sub>	0,01
α <sub>by</sub>	0,01
α <sub>bz</sub>	0,01
β	0,5
γ	0,5
n	8

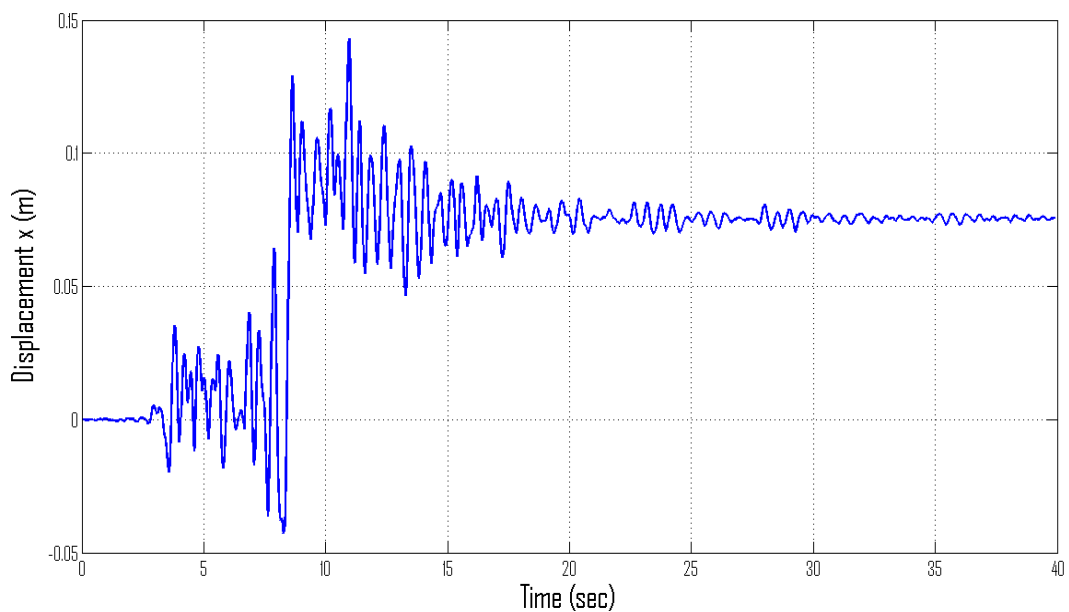
Πίνακας 4.3.2 Παράμετροι επίλυσης

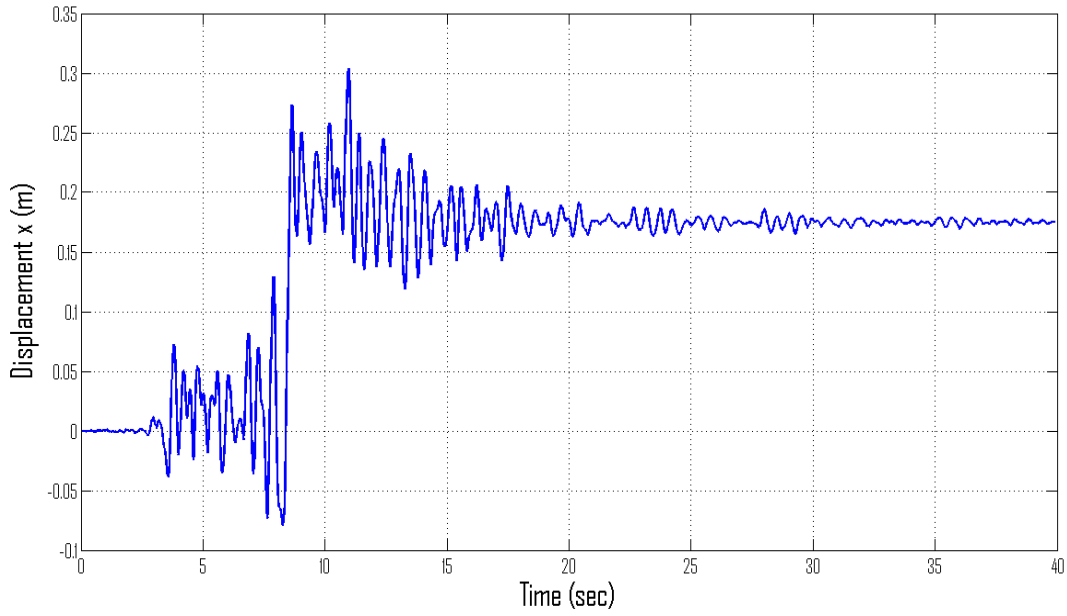


Χαρακτηριστικά διατομών				
Διατομή	HEB 400	IPE 300	IPE 400	IPE 500
A	197,8 cm <sup>2</sup>	53,8 cm <sup>2</sup>	84,46 cm <sup>2</sup>	115,5 cm <sup>2</sup>
I <sub>y</sub>	57680 cm <sup>4</sup>	8356 cm <sup>4</sup>	23130 cm <sup>4</sup>	48200 cm <sup>4</sup>
I <sub>z</sub>	10820 cm <sup>4</sup>	604 cm <sup>4</sup>	1318 cm <sup>4</sup>	2142 cm <sup>4</sup>
M <sub>y</sub> <sup>y</sup>	677,74 KNm	130,9 KNm	271,66 KNm	453,55 KNm
M <sub>z</sub> <sup>y</sup>	169,51 KNm	18,92 KNm	34,4 KNm	50,34 KNm
Στοιχεία	1,2,7,8,9,10, 15,16,17,18, 21,22	5,6,13,14,2 3,24,25,26	3,4,19,20	11,12

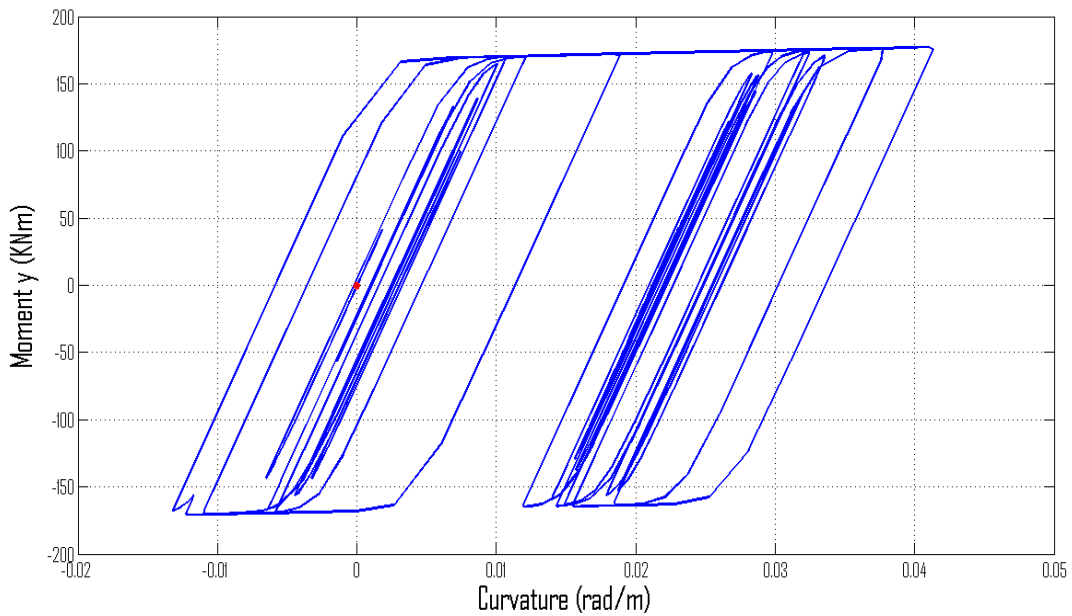
Πίνακας 4.3.3 Χαρακτηριστικά διατομών

Μερικά από τα αποτελέσματα της ανάλυσης για σεισμό κατά  $+\bar{x}$  φαίνονται παρακάτω :

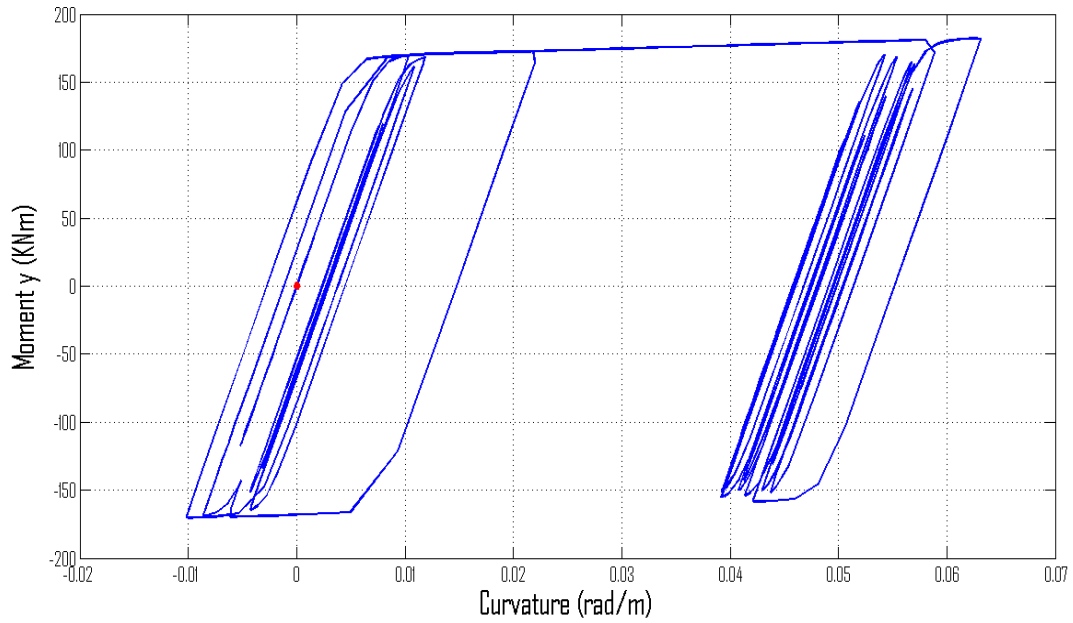
Σχήμα 4.3.3 Χρονοϊστορία μετατόπισης κόμβου 2 για φόρτιση  $+\bar{x}$  (Tarzana 090)



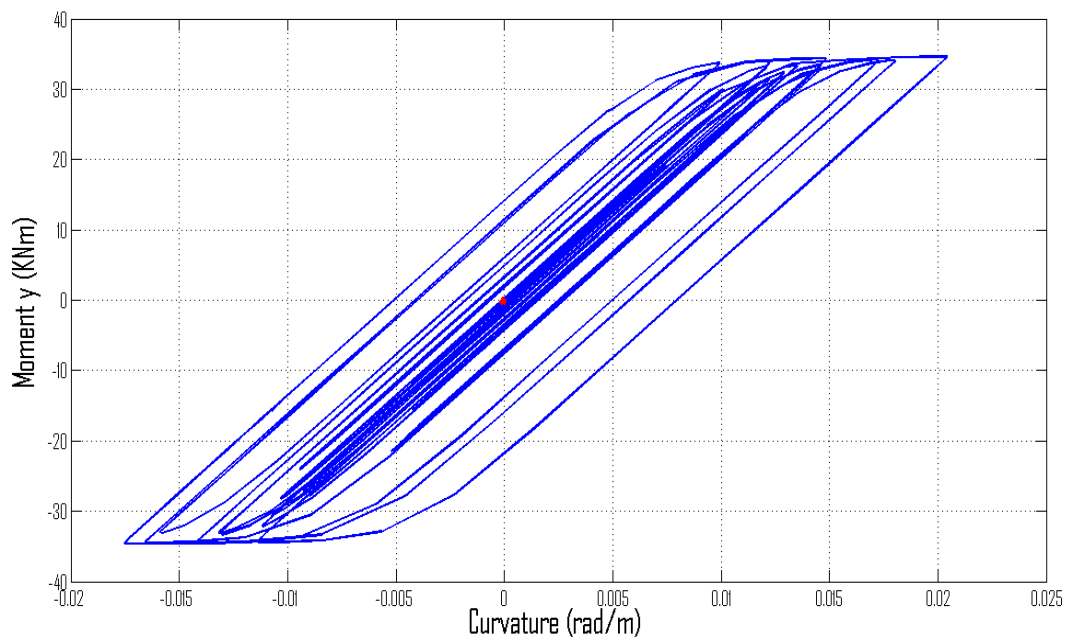
Σχήμα 4.3.4 Χρονοϊστορία μετατόπισης κόμβου 3 για φόρτιση  $+\bar{\chi}$  (Tarzana 090)



Σχήμα 4.3.5 Διάγραμμα Ροπών-Καμπυλοτήτων στο άκρο  $i$  του στοιχείου 1 για φόρτιση  $+\bar{\chi}$  (Tarzana 090)

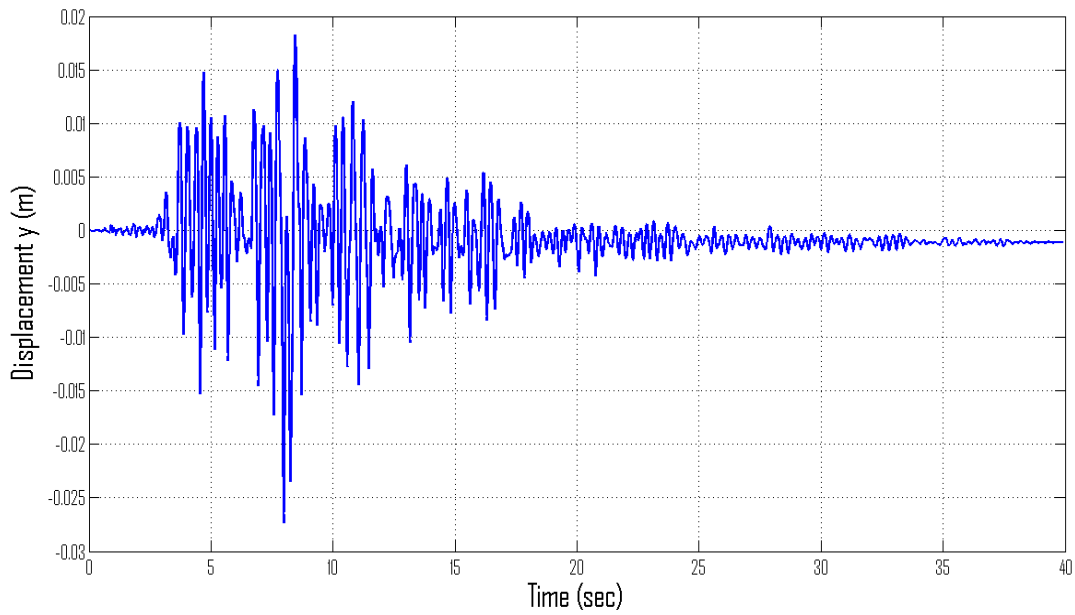


Σχήμα 4.3.6 Διάγραμμα Ροπών-Καμπυλοτήτων στο άκρο  $j$  του στοιχείου 10 για φόρτιση  $+\bar{X}$  (Tarzana 090)

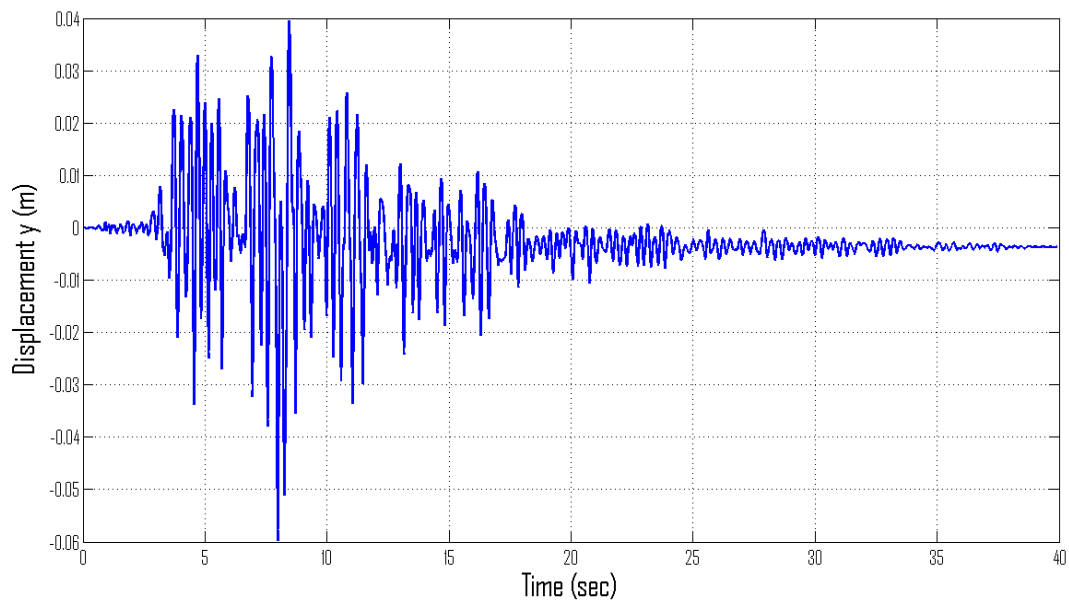


Σχήμα 4.3.7 Διάγραμμα Ροπών-Καμπυλοτήτων στο άκρο  $j$  του στοιχείου 20 για φόρτιση  $+\bar{X}$  (Tarzana 090)

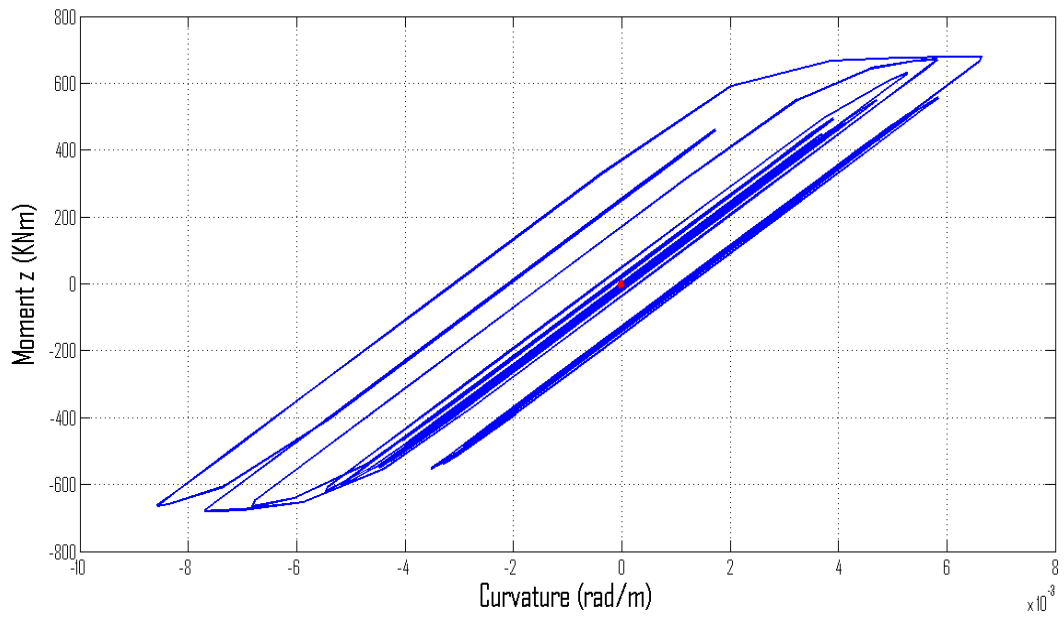
Για την επίλυση κατά  $+\bar{y}$ , μετακινήσεις και διαγράμματα ροπών-καμπυλοτήτων χαρακτηριστικών κόμβων φαίνονται παρακάτω :



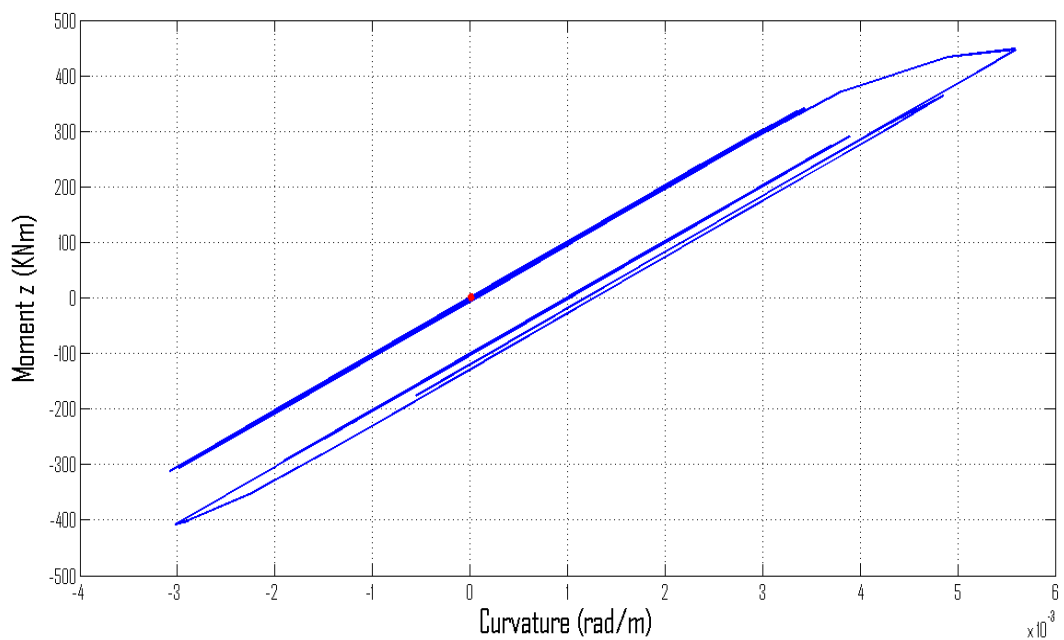
Σχήμα 4.3.8 Χρονοϊστορία μετατόπισης κόμβου 8 για φόρτιση  $+\bar{y}$  (Tarzana 090)



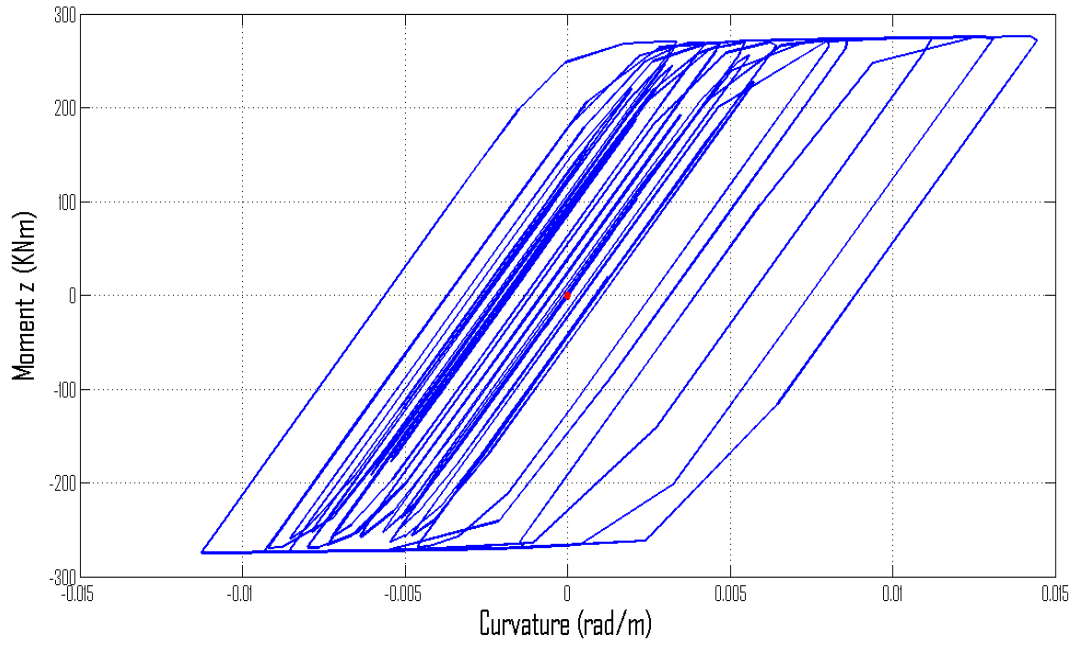
Σχήμα 4.3.9 Χρονοϊστορία μετατόπισης κόμβου 9 για φόρτιση  $+\bar{y}$  (Tarzana 090)



Σχήμα 4.3.10 Διάγραμμα Ροπών-Καμπυλοτήτων στο άκρο  $i$  του στοιχείου 1 για φόρτιση  $+\bar{Y}$  (Tarzana 090)



Σχήμα 4.3.11 Διάγραμμα Ροπών-Καμπυλοτήτων στο άκρο  $i$  του στοιχείου 12 για φόρτιση  $+\bar{Y}$  (Tarzana 090)



Σχήμα 4.3.12 Διάγραμμα Ροπών-Καμπυλοτήτων στο άκρο  $j$  του στοιχείου 19 για φόρτιση  $+\bar{y}$  (Tarzana 090)



## Κεφάλαιο 5



Σύνοψη - Σχόλια - Προτάσεις

## 5.1 ΣΥΝΟΨΗ - ΣΧΟΛΙΑ

Η ανάγκη για ρεαλιστική εκτίμηση της συμπεριφοράς των κατασκευών, ειδικά σε περιοχές με αυξημένη σεισμική επικινδυνότητα, ώθησε στο παρελθόν και εξακολουθεί να δίνει κίνητρο έρευνας σε πολλούς επιστήμονες ανά τον κόσμο. Στην σύγχρονη εποχή όμως, η επιστήμη έχει σύμμαχο και την τεχνολογία. Οι υπερσύγχρονοι υπολογιστές έχουν δώσει την δυνατότητα γρήγορης επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων με τεράστιο υπολογιστικό όγκο. Η μελέτη τρισδιάστατων φορέων, λόγω του αυξημένου αριθμού βαθμών ελευθερίας σε σχέση με τους επίπεδους φορείς, απαιτεί ακόμη περισσότερο όγκο υπολογισμών. Παρόλα αυτά, με την γλώσσα προγραμματισμού Matlab, ο μεγάλος όγκος πράξεων, η δυσκολία επίλυσης μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων και οι επαναλαμβανόμενοι υπολογισμοί που χρειάζονται, απαιτούν μικρό σχετικά χρονικό διάστημα για να επιτευχθούν. Στα πλαίσια λοιπόν της έξαρσης της τεχνολογίας και της προαναφερθείσας ανάγκης για εκτίμηση της πραγματικής συμπεριφοράς των κατασκευών, ενσωματώθηκε στην παρούσα εργασία το υστερητικό προσομοίωμα Bouc-Wen στο πεπερασμένο στοιχείο δοκού και προγραμματίστηκε έτσι αλγόριθμος επίλυσης φορέων υποβαλλόμενων σε δυναμική φόρτιση, που λαμβάνει υπόψη την ανελαστική συμπεριφορά του υλικού. Οι δυνατότητες που έχει το πρόγραμμα είναι πολλαπλές και συνοψίζονται στα παρακάτω σημεία :

- Ο χρόνος επίλυσης είναι μικρός σε σχέση με αυτόν υπαρχόντων προγραμμάτων του εμπορίου.
- Η προσομοίωση των φορέων είναι αρκετά κοντά στις πραγματικές συνθήκες, αφού η ανάλυση που προσφέρει το πρόγραμμα είναι δυναμική, ανελαστική και τρισδιάστατη.
- Μετά την επίλυση, έχουν υπολογιστεί και μπορούν άμεσα να απεικονιστούν διαγράμματα ροπών - καμπυλοτήτων, αξονικών δυνάμεων - κεντρικών αξονικών παραμορφώσεων καθώς και διαγράμματα υστερητικής καμπυλότητας και υστερητικής αξονικής παραμόρφωσης - χρόνου, για κάθε διατομή άκρων οποιουδήποτε στοιχείου. Μπορούν επιπροσθέτως να απεικονιστούν οι χρονοϊστορίες μετακινήσεων και ταχυτήτων κάθε κόμβου.
- Ο χρήστης έχει την δυνατότητα να φορτίσει την κατασκευή με οποιοδήποτε επιταχυνσιογράφημα, να καθορίσει την κατεύθυνση του και να διεγείρει τους βαθμούς ελευθερίας που επιθυμεί.
- Το υλικό του φορέα μπορεί να είναι οποιοδήποτε (π.χ. χάλυβας, σκυρόδεμα, ξύλο) αρκεί να είναι γνωστά το μέτρο ελαστικότητας, το εμβαδό, και τα διαγράμματα ροπών - καμπυλοτήτων. Στη παρούσα μορφή δεν εξετάζεται η αλληλεπίδραση των εντατικών μεγεθών.



Η πλήρης κατανόηση των συμβάσεων της μητρικής στατικής, του ορισμού και της συσχέτισης των τοπικών αξόνων κάθε στοιχείου με το καθολικό σύστημα συντεταγμένων του φορέα, είναι απαραίτητη για την ποιοτική εποπτεία των αποτελεσμάτων. Για αυτό δίδεται ιδιαίτερη βάση στην επεξήγηση των παραπάνω κυρίως στο πρώτο παράδειγμα. Η επιρροή των παραμέτρων Bouc-Wen φαίνεται από την σύγκριση των αποτελεσμάτων για διάφορες επιλύσεις κυρίως κατά το δεύτερο παράδειγμα.

## 5.2 ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

Με έναυσμα την παρούσα διπλωματική, κάποιες βασικές κατευθύνσεις που μπορούν να ακολουθηθούν είναι οι εξής :

- Ένα στοιχείο που θα βοηθήσει στη περεταίρω προσομοίωση της ρεαλιστικής συμπεριφοράς μίας κατασκευής, είναι η ένταξη της αλληλεπίδρασης των δύο κύριων ροπών και της αξονικής δύναμης. Υπάρχουν διάφορα μοντέλα που έχουν αναπτυχθεί προς αυτή την κατεύθυνση, τα οποία χρησιμοποιούν διαγράμματα αλληλεπίδρασης τα οποία υποδεικνύουν τις συμβατές απομειώσεις στα όρια διαρροής των οριακών καμπυλοτήτων και αξονικών παραμορφώσεων.
- Μετά από κάποιους κύκλους φόρτισης, η κατασκευή έχει υποστεί μόνιμη καταπόνηση με αποτέλεσμα η δυσκαμψία (stiffness degradation) και η αντοχή της (strength deterioration) να έχει μειωθεί. Παράλληλα εμφανίζεται και το φαινόμενο της στένωσης (pinching), το οποίο αποδυναμώνει επιπλέον την διατομή. Οι τρεις αυτοί τύποι απομειώσεων πρέπει να προστεθούν στον αλγόριθμο της εργασίας αυτής. Οι νόμοι απομείωσης δυσκαμψίας και αντοχής έχουν εισαχθεί στο προσομοίωμα Bouc-Wen με βάση την πρόταση των Baber και Wen (1981) [3], ενώ το φαινόμενο της στένωσης σύμφωνα με τον Foliente (1995) [4]. Με τις παραπάνω απομειώσεις ασχολήθηκαν αργότερα και οι Sivaselvan – Reinhorn (2000) [5].



---

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

1. Park, Y. J, Reinhorn, A. M, Kunnath, S. K (1987) "IDARC: Inelastic damage analysis of reinforced concrete frame-shear wall structures", National Center for Earthquake Engineering Research, State University of New York, Buffalo, NY, Tech. Rep. NCEER-87-0008
2. Baber, T. T, Noori, M. -N (1985) "Random vibration of degrading pinching systems", *Journal of the Engineering Mechanics Division, Proc. ASCE*, 11(8):1010-1026
3. Baber, T. T, Wen, Y. -K (1981) "Random vibration of hysteretic degrading systems", *Journal of the Engineering Mechanics Division, Proc. ASCE*, 107(6):1069-1087
4. Foliente, G. C (1995) "Hysteresis Modeling of Wood Joints and Structural Systems", *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 121(6): 1013-1022
5. Sivaselvan, M. V, Reinhorn, A. M (2000) "Hysteretic Models For Deteriorating Inelastic Structures", *J. Engrg. Mech., ASCE*, 126(6):633-640
6. Foliente, G. C (1993) "Stochastic Dynamic Response of Wood Structural Systems" PhD dissertation. Virginia Polytechnic Institute and State University. Blacksburg, Virginia
7. Wen, Y. -K (1980) "Equivalent linearization for hysteretic system under random excitation", *Journal of Applied Mechanics* 47:150-154
8. Ma, F., Zhang, H., Bockstedte, A. Foliente, G. C, paevere, P. "Parameter analysis of the differential model of hysteresis", *Journal of Applied Mechanics* 71:342-349
9. Bouc, R. (1967). "Forced vibration of mechanical systems with hysteresis". Proceedings of the Fourth Conference on Nonlinear Oscillation. Prague, Czechoslovakia.
10. Wang, C., Foliente, G. C (2001) "Hysteretic Models For Deteriorating Inelastic Structures", *J. Engrg. Mech., ASCE*, 127(11):1200-1202
11. Sandler, I. S (1987) "On the uniqueness and stability of endochronic theories of material behavior", *J. Appl. Mech.*, 45:263-266
12. Casciati, F. (1987) "Nonlinear stochastic dynamics of large structural system by equivalent linearization", *Proc. ICAPS (Int. Conf. on Application of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering)*, Vancouver, 1987, pp1165-1172
13. Thyagarajan, R. S (1989) "Modeling and analysis of hysteretic structural behavior", Rep. No EERL-89-03, Earthquake Engineering Research Lab, California Institute of Technology, Pasade

- 
14. Spacone, E. , Ciampi, V. , Filippou, F. C (1992) "A Beam Element For Seismic Damage Analysis", Rep. No UCB/EERC-92/07, Earthquake Engineering Research Center, University of California Berkeley.
  15. Α Χαραλαμπίδης, Α. Ε (2009) "Ανελαστική Δυναμική Ανάλυση Φορέων Με Προσομοίωση Κατά Bouc-Wen", Διδακτορική Διατριβή, Ε. Μ. Π
  16. Drucker, D. C (1950) "Some implications of work hardening and ideal plasticity", *Quart. j. Appl. Math.*, 7:411-418
  17. Ilyushin, A. A (1961) "On the postulates of plasticity", *Prinkl. Math. Mekh.* , 25:503-507
  18. Triantafyllou, S. , Koumousis, V "Small and large displacement analysis of frame structures based on hysteretic beam elements", *Journal of Engineering Mechanics* 138:36-49
  19. Μ. Παπαδρακάκης, 'Ανάλυση φορέων με την μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων', Αθήνα 2001
  20. Ι. Θ. Κατσικαδέλης, 'Δυναμική των Κατασκευών ΤΟΜΟΣ ΙΙ', Αθήνα 2007
  21. Bathe K.J., 2007, *Finite Element Procedures*, Prentice Hall Engineering, Science, Mathematics, New York.
  22. Σοφιανός Χ., 'Υστερητικό στοιχείο δοκού με απομειούμενα προσομοιώματα τύπου Bouc-Wen', Διπλωματική εργασία, Αθήνα 2012