ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΣΥΜΜΟΡΦΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

ΧΑΤΖΗΣ ΝΙΚΟΛΑΣ - ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ :
ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΚΡΑΒΒΑΡΙΤΗΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΕΜΠ

ΑΘΗΝΑ , 2013

Πρόλογος

Η εργασία στηρίζεται στη μελέτη των σύμμορφων απεικονίσεων,μια σημαντική κατηγορία των μιγαδικών συναρτήσεων,με εφαρμογές σε προβλήματα απεικόνισης πεδίων και σε προβλήματα συνοριακών τιμών.

Οι σύμμορφες απεικονίσεις αποτελούν ένα σημαντικό κλάδο των μαθηματικών με τον οποίο έχουν ασχοληθεί σπουδαίοι μαθηματικοί.Θεμελιωτής του κλάδου θεωρείται ο Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή ο οποίος ξεκίνησε τις δημοσιεύσεις εργασιών πάνω στο αντικείμενο στις αρχές του προηγούμενο αιώνα.

Η χρησιμότητα των σύμμορφων απεικονίσεων είναι μεγάλη στον κλάδο της φυσικής και της μηχανικής (υδροδυναμική, αεροδυναμική, θεωρία ελαστικότητας κ.α),καθώς σε πολλές περιπτώσεις δίνουν απλές μεθόδους για να επιλυθούν προβλήματα συνοριακών τιμών που αφορούν στην εξίσωση Laplace.Αυτό οφείλεται στη στενή σχέση που υπάρχει μεταξύ ολόμορφων και αρμονικών συναρτήσεων.

Η σπουδαιότητα των σύμμορφων απεικόνισεων έγκειται σε μία γεωμετρική ιδιότητα που έχουν: να διατηρούν τη γωνία τομής μεταξύ δύο καμπυλών κατά μέτρο και προσανατολισμό.Επίσης, η εξίσωση Laplace παραμένει αναλλοίωτη κάτω από μια σύμμορφη απεικόνιση,με αποτέλεσμα σε ένα φυσικό πρόβλημα να μπορεί να απλοποιηθεί ένα αρχικά πολύπλοκο πεδίο.

Συνοψίζοντας, στην εργασία γίνεται μελέτη των σύμμορφων απεικονίσεων με τρόπο κατα τον οποίο μετασχηματίζουν διάφορα πεδία και βοηθούν στη λύση προβλημάτων συνοριακών τιμών, δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στον δίσκο και στο άνω ημιεπίπεδο.

Τέλος, θέλω προσωπικά να ευχαριστήσω τον κύριο Δ.Κραββαρίτη για την υπόδειξη του θέματος και την βοήθειά του για την εκπόνηση της διπλωματικής εργασίας.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
ΣΥΜΜΟΡΦΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

1.1 Ορισμός σύμμορφης απεικόνισης

Μια συνάρτηση $f : \mathrm{A} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι ένας **σύμμορφος μετασχηματισμός** ή **σύμμορφη απεικόνιση** στο πεδίο $D \subset \mathrm{A}$, αν η f είναι ολόμορφη στο D και $f'(z) \neq 0$ για κάθε $z \in D$.

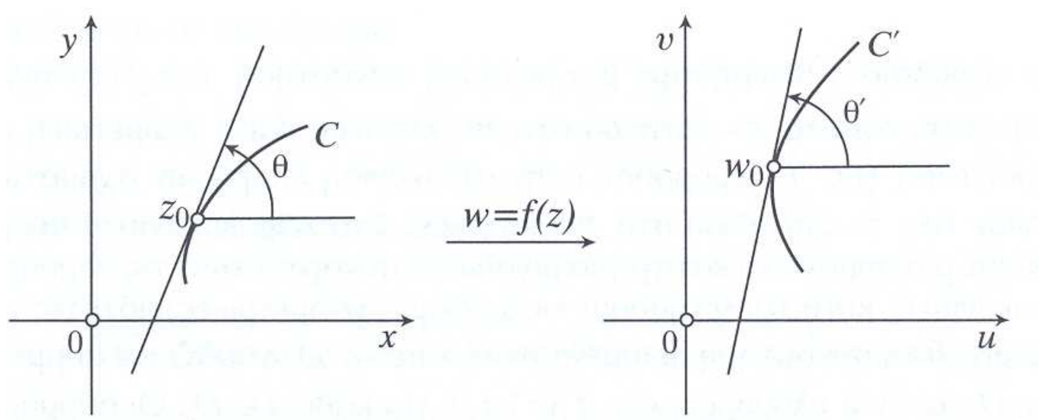
Παραδείγματα: i) Η συνάρτηση $f(z) = e^z$ είναι σύμμορφη στο $\mathbb{C}$ αφού $f'(z) = e^z \neq 0, \forall\ z \in \mathbb{C}$.
ii) Η συνάρτηση $f(z) = z^2$ είναι σύμμορφη στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Έστω f(z) μια ολόμορφη συνάρτηση ορισμένη σε ένα πεδίο D, $f'(z) \neq 0$ στο D και μια λεία καμπύλη $C : z(t) = x(t) + iy(t)$ στο D, η οποία διέρχεται από το σημείο $z_0 = z(t_0)$, $t_0 \in (\alpha,\beta)$. Η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της καμπύλης C στο σημείο z_0 με τον θετικό x άξονα είναι θ και ισχύει ότι $\theta = \arg z'(t_0)$.
Αν υποθέσουμε ότι η εικόνα της C μέσω της απεικόνισης w = f(z) είναι η C′: w(t) = f(z(t)), $\alpha \leq t \leq \beta$ και w_0 η εικόνα του z_0, δηλαδή $w_0 = f(z(t_0)) = f(z_0)$, τότε παραγωγίζοντας την σύνθετη συνάρτηση έχουμε:

$$w'(t_0) = f'(z_0) \cdot z'(t_0) \qquad (1)$$

Η καμπύλη C′ έχει μια εφαπτομένη στο σημείο w_0, διότι $w'(t_0) \neq 0$,επειδή $f'(z_0) \neq 0$ και $z'(t_0) \neq 0$. Εάν $\theta' = \arg w'(t_0)$, από την σχέση (1) προκύπτει ότι

$$\theta' = \theta + \arg f'(z_0) \qquad (2)$$



Η διαφορά των δύο γωνιών φ= θ΄- θ ονομάζεται **γωνία στροφής της καμπύλης** C στο σημείο z_0 μέσω της απεικόνισης w = f(z).

Αυτό που μπορούμε να καταλάβουμε από την σχέση (2) είναι ότι όλες οι καμπύλες που διέρχονται από το z_0 στρέφονται μέσω της απεικόνισης που έχουμε, με την ίδια γωνία (υπό την προϋπόθεση ότι $f\,'(z)\neq 0$), αφού η γωνία στροφής στο z_0 δεν εξαρτάται από την καμπύλη και είναι πάντα ίση με $\arg f'(z_0)$.

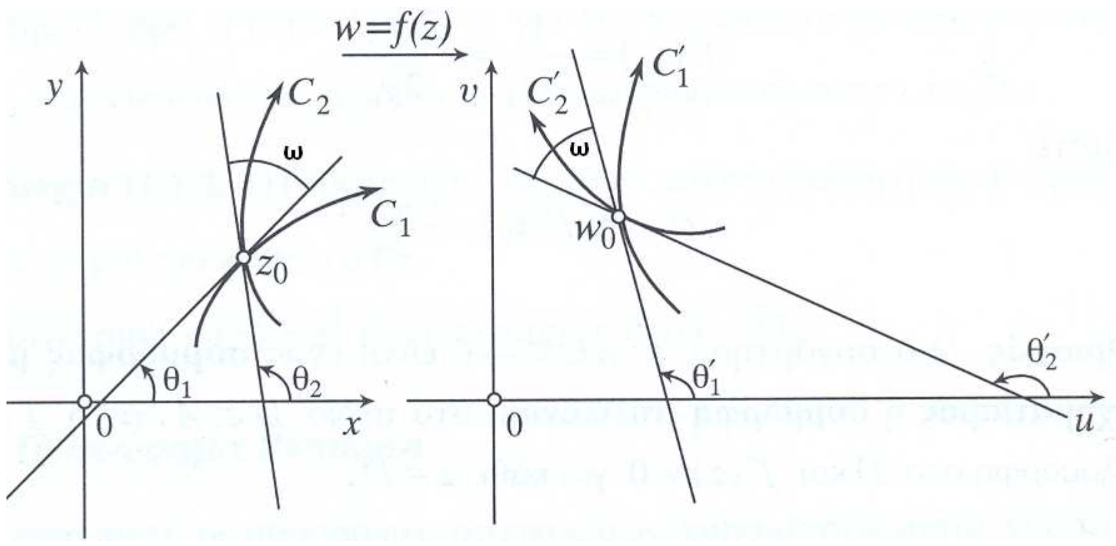
Έστω τώρα δύο λείες καμπύλες που βρίσκονται στο D και διέρχονται από το σημείο z_0, οι C_1, C_2 και οι εικόνες τους $C_1\,'$ και $C_2\,'$ που διέρχονται από το w_0 μέσω της απεικόνισης w = f(z). Αν οι εφαπτομένες των δύο καμπυλών στο σημείο z_0 , σχηματίζουν με τον άξονα χ σχηματίζουν γωνίες θ_1 και θ_2 τότε σύμφωνα με την σχέση (2) ισχύει ότι οι γωνίες που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες στις καμπύλες $C_1\,'$ και $C_2\,'$ στο σημείο $w_0 = f(z_0)$ είναι:

$$\theta_1' = \theta_1 + \arg f'(z_0) \text{ και } \theta_2' = \theta_2 + \arg f'(z_0)$$

και αφαιρώντας κατά μέλη προκύπτει ότι

$$\theta_2' - \theta_1' = \theta_2 - \theta_1,$$

συνεπώς αποδείξαμε ότι **μια σύμμορφη απεικόνιση διατηρεί την γωνία τομής μεταξύ δύο καμπυλών κατά μέτρο και προσανατολισμό** , αφού η γωνία $\theta_2\,'$-$\theta_1\,'$ από την καμπύλη $C_1\,'$ στην καμπύλη $C_2\,'$ είναι η ίδια σε μέτρο και προσανατολισμό με την γωνία θ_2-θ_1 από την καμπύλη C_1 στην C_2, όπως φαίνεται και στο σχήμα.Οι γωνίες σημειώνονται με ω.



Εφαρμογή

Να δειχθεί ότι η συνάρτηση f(z) = $\sin z$ είναι σύμμορφη στα σημεία $z_1=\frac{\pi}{2}+i$ και $z_2=0$ και να βρεθεί η γωνία στροφής $\omega=\arg f'(z)$ σε αυτά τα σημεία.

Λύση: $f'(z)=\cos z$ άρα η απεικόνιση w = $\sin z$ είναι σύμμορφη παντού εκτός των σημείων $\eta\pi+\frac{\pi}{2}$, $\eta\in\mathbb{Z}$. Άρα η f(z) είναι σύμμορφη στα ζητούμενα σημεία.

Τώρα, επειδή $\cos\theta=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$, και με τη χρήση του υπερβολικού ημιτόνου,

$\sinh z=\dfrac{e^{z}-e^{-z}}{2}$ θα έχουμε:

$$\omega=\arg\cos(\frac{\pi}{2}+i)=\arg\frac{e^{i(\frac{\pi}{2}+i)}+e^{-i(\frac{\pi}{2}+i)}}{2}=\arg\frac{i(e^{-1}-e)}{2}=-\frac{\pi}{2}$$

και $\theta=\arg\cos 0=\arg 1=0$.

Εφαρμογή

Να βρεθεί η γωνία στροφής ω=$\arg f'(z)$ της απεικόνισης $f(z)=\dfrac{z-z_0}{z-\overline{z_0}}$ στο σημείο z_0 με $\operatorname{Im} z_0=y_0>0$

Λύση: Η $f(z)$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}\setminus\{\overline{z_0}\}$ και ισχύει

$$f'(z)=\frac{z-\overline{z_0}}{(z-\overline{z_0})^2},\ z\neq\overline{z_0}$$

Άρα
$$f'(z_0)=\frac{1}{2iy_0}=-\frac{i}{2y_0},$$

οπότε προκύπτει
$$\omega=\arg f'(z_0)=-\frac{\pi}{2}.$$

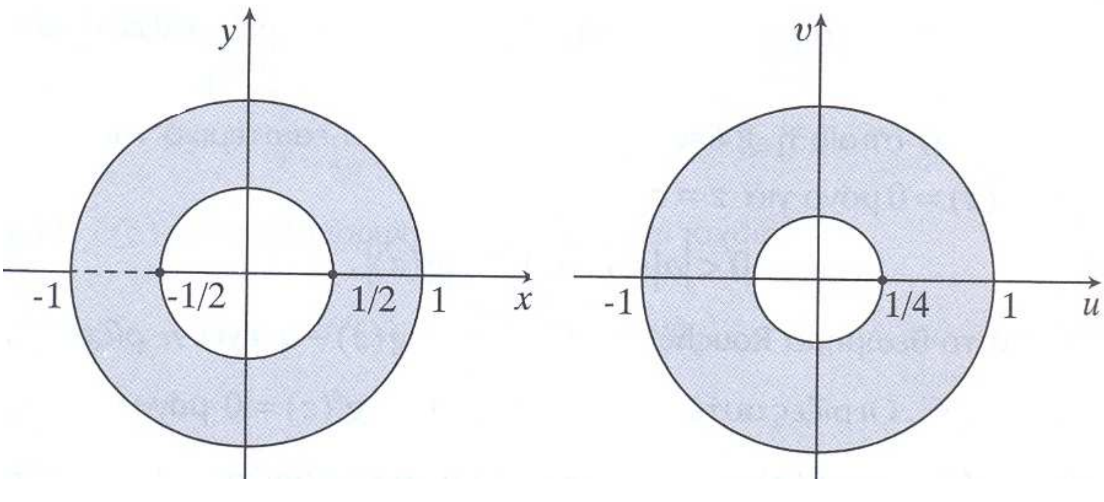
<u>Πρόταση:</u> Αν η f είναι ολόμορφη και αμφιμονοσήμαντη σε ένα πεδίο D, τότε $f'(z)\neq 0$ για κάθε $z\in D$, δηλαδή η f είναι σύμμορφη στο D.

Απόδειξη: Έστω ότι σε κάποιο σημείο $z_0 \in D$ έχουμε $f'(z_0)=0$. Η συνάρτηση $h(z)=f(z)-f(z_0)$ έχει το z_0 ρίζα τάξης $\eta \geq 2$.
Μέσα στο D υπάρχει κύκλος $C:|z-z_0|=r$ στον οποίο η h δεν μηδενίζεται, ενώ στο εσωτερικό του ισχύει $h'(z)=0$ όταν $z=z_0$. Αν $0<|a|<\min_C |h(z)|$ τότε η συνάρτηση $h(z)-a$ έχει η ρίζες μέσα στον κύκλο. Επειδή $h'(z)=0$ μόνο εάν $z=z_0$ μέσα στον κύκλο C, οι ρίζες αυτές θα είναι απλές. Συνεπώς, $f(z)=f(z_0)+a$ για τουλάχιστον δύο σημεία εντός του κύκλου C αλλά επειδή η f είναι αμφιμονοσήμαντη αυτό είναι **άτοπο**.

1.2 Θεώρημα Riemann

Εφαρμογή

Έστω $f(z)=z^2$ και το πεδίο $D=\{z=re^{i\theta}:\frac{1}{2}<r<1,-\pi<\theta<\pi\}$.
$f'(z)=2z\neq 0 \ \forall z\in D$,δηλαδή η f είναι ολόμορφη στο D.
$f(D)=\{w=re^{i\theta}:\frac{1}{4}<r<1,\ 0\leq\theta\leq 2\pi\}$.
Το συνοριακό τμήμα $-1\leq x\leq -\frac{1}{2}$ απεικονίζεται στο εσωτερικό του $f(D)$,στο $\frac{1}{4}\leq u\leq 1$. Συνεπώς η f δεν απεικονίζει το σύνορο του D στο σύνορο του $f(D)$.



Έστω ένα πεδίο D και C μια κλειστή καμπύλη μέσα στο D, μέσω της απεικόνισης $f:D\to\mathbb{C}$. Η εικόνα της C μέσω της απεικόνισης f, δηλαδή η C' ,είναι μια κλειστή καμπύλη στο w-επίπεδο.
Αν κατά τη συνεχή κίνηση ενός σημείου κατά τη θετική φορά πάνω στη C ,η εικόνα του στη C' κινείται και αυτή κατά τη θετική φορά, τότε θα λέμε ότι η f διατηρεί τη

φορά. Θετική είναι η φορά με τον οποία κινείται ο παρατηρητής για να βλέπει το εσωτερικό της C στα αριστερά του, δηλαδή η αντίστροφη από την φορά των δεικτών του ρολογιού.

Αρχή της αντιστοιχίας των συνόρων

Έστω D και G δύο απλά συνεκτικά , φραγμένα πεδία που έχουν σύνορα τις απλές, κλειστές και τμηματικά λείες καμπύλες C_1 και C_2 αντίστοιχα.

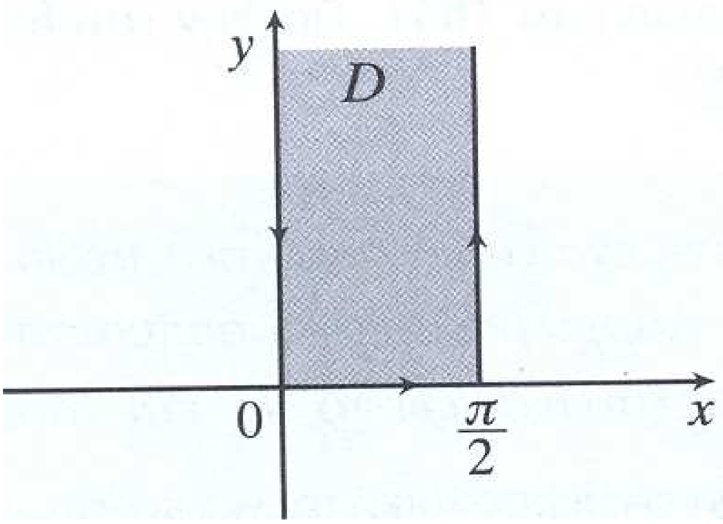
Θεώρημα 1: Αν η σύμμορφη απεικόνιση $w = f(z)$ είναι αμφιμονοσήμαντη και απεικονίζει το πεδίο D επί του πεδίου G, τότε ισχύει ότι
α) η $f(z)$ μπορεί να επεκταθεί στο $\overline{D}$ ώστε να είναι συνεχής
β) η επέκταση είναι αμφιμονοσήμαντη από τη C_1 επί της C_2 και διατηρεί τη φορά.

Αντίστροφα ισχύει

Θεώρημα 2: Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $w = f(z)$ είναι ολόμορφη στο D και συνεχής στο $\overline{D}$. Η απεικόνιση $f : C_1 \to C_2$ είναι αμφιμονοσήμαντη και διατηρεί τη φορά. Τότε η συνάρτηση f είναι αμφιμονοσήμαντη στο D και απεικονίζει το D σύμμορφα επί του G.

Εφαρμογή

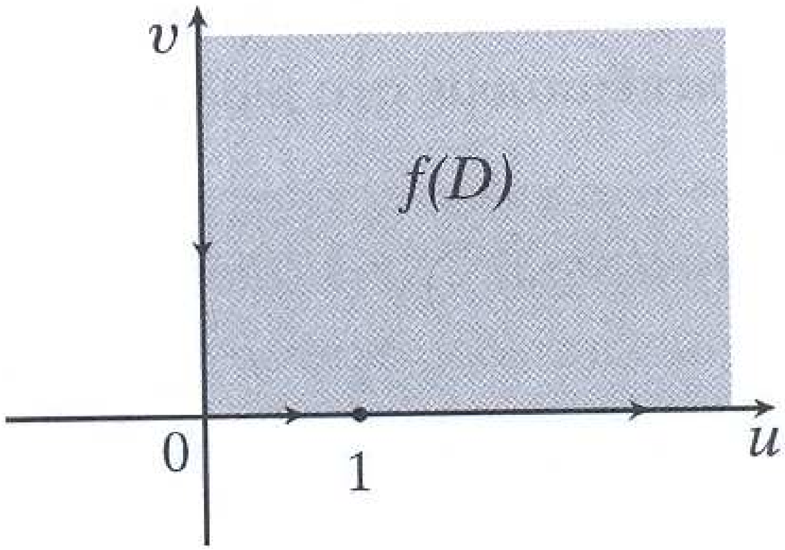
Έστω $f(z) = \sin z$ και $D = \{z = x + iy : 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, y > 0\}$.
Να βρεθεί το $f(D)$.
Λύση:



Στο σχήμα φαίνεται ότι το πεδίο D είναι μια ημιάπειρη λωρίδα. Η f είναι αμφιμονοσήμαντη στο D και συνεχής στο σύνορο του D. Για

$z = x \in \mathbb{R}, \Rightarrow f(z) = \sin x$, άρα η f απεικονίζει το διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ του D επί του διαστήματος $[0,1]$ του $f(D)$.

Για $z = iy$, $y > 0$ έχουμε $f(z) = \sin iz = i \sinh y$,το οποίο είναι φανταστικός αριθμός, συνεπώς η f απεικονίζει τον θετικό άξονα y στον θετικό άξονα υ, ενώ για $z = \frac{\pi}{2} + iy$, $y > 0$ έχουμε $f(z) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + iy\right) = \cosh y$ άρα η f απεικονίζει την ημιευθεία $z = \frac{\pi}{2} + iy$ στο διάστημα $[1, \infty]$. Οπότε , λόγω του θεωρήματος της αντιστοιχίας των συνόρων, το $f(D)$,όπως φαίνεται και στο σχήμα,είναι το πρώτο τεταρτημόριο.



Θεώρημα Riemann

Αν D είναι ένα απλά συνεκτικό πεδίο του επιπέδου διαφορετικό του $\mathbb{C}$, τότε υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη σύμμορφη απεικόνιση $w = f(z)$ που απεικονίζει το D επί του μοναδιαίου δίσκου $|w| < 1$. Η απεικόνιση είναι μοναδική αν για κάποιο $z_0 \in D$ έχουμε $f(z_0) = 0$ και $f'(z_0) > 0$.

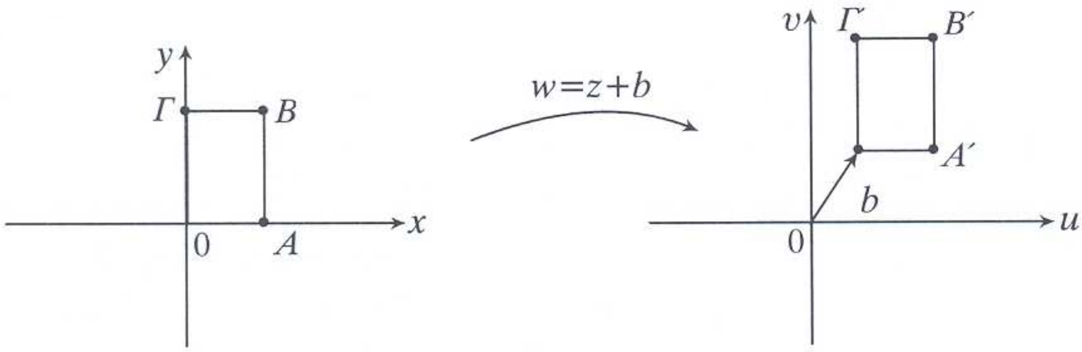
Παρατηρήσεις για το θεώρημα Riemann: α) το θεώρημα δεν ισχύει αν $D = \mathbb{C}$ και β) το θεώρημα Riemann εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας σύμμορφης απεικόνισης αλλά όχι την κατασκευή της.

1.3 Διγραμμικοί μετασχηματισμοί

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε ένα σύνολο στοιχειωδών μετασχηματισμών οι οποίοι έχουν πολλές εφαρμογές και είναι πολύ χρήσιμοι σύμμορφοι μετασχηματισμοί.

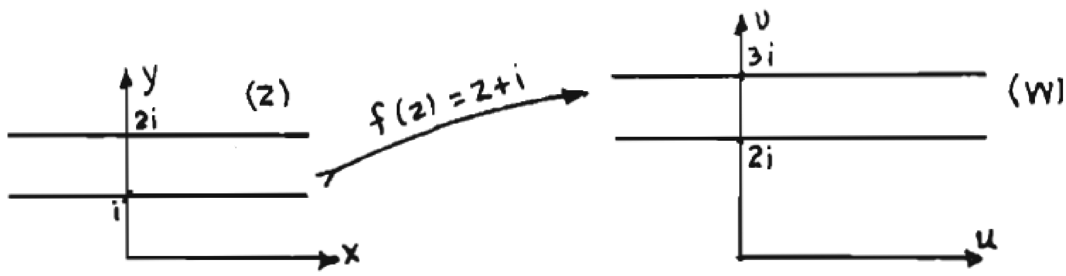
- **Μετατόπιση**

Έστω μια σταθερά $b \in \mathbb{C}$. Ο μετασχηματισμός $w = f(z) = z + b$ απεικονίζει ένα τυχαίο σημείο z του επιπέδου z, στο σημείο $w = z + b$ του επιπέδου w. Η απεικόνιση αυτή είναι αμφιμονοσήμαντη. Έτσι **η εικόνα** $w = z + b$ **είναι μετατοπισμένη ως προς το αρχέτυπο** z **κατά το διάνυσμα** b**.** Το ίδιο ισχύει και για όλα τα σημεία ενός σχήματος, οπότε μέσου αυτού του μετασχηματισμού μπορεί να μεταφερθεί ολόκληρο το σχήμα κατά το διάνυσμα b. Επειδή όλα τα σημεία μετατοπίζονται κατά το ίδιο διάνυσμα, οι διαστάσεις του σχήματος δεν αλλάζουν.



Ειδικά , αν ο b είναι πραγματικός η μετατόπιση γίνεται παράλληλα στον άξονα χ, ενώ αν ο b είναι φανταστικός η μετατόπιση γίνεται παράλληλα στον άξονα y.
Η αντίστροφη απεικόνιση είναι η $z = w - b$.

Παράδειγμα: Η συνάρτηση $f(z) = z + i$ μετατοπίζει το τυχαίο σημείο z κατά το διάνυσμα i δηλαδή παράλληλα στον φανταστικό άξονα



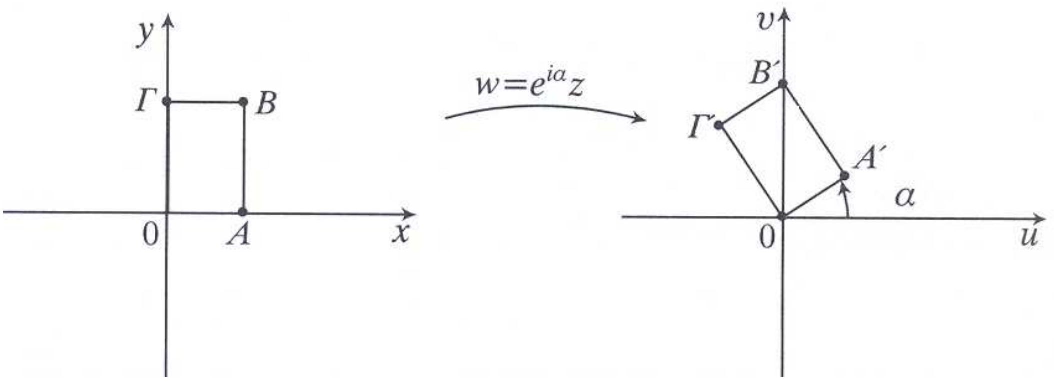
Έτσι η λωρίδα ανάμεσα στις ευθείες $y = 1, y = 2$ απεικονίζεται στη λωρίδα ανάμεσα στις ευθείες $\upsilon = 2, \upsilon = 3$.

- **Στροφή**

Έστω σταθερά $a \in \mathbb{R}$. Τότε, ο μετασχηματισμός

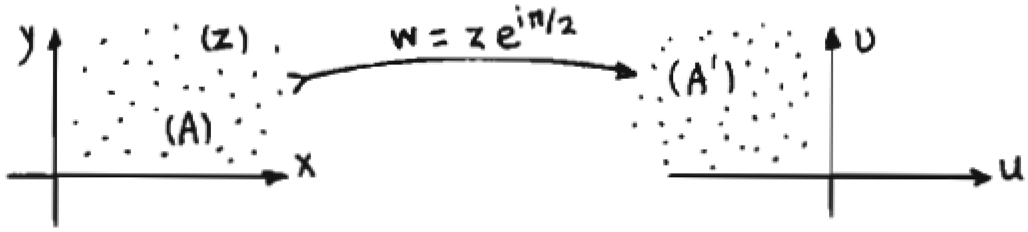
$$w = f(z) = ze^{ia} = re^{i\theta} \cdot e^{ia} = re^{i(\theta + a)}$$

προκαλεί αλλαγή της γωνίας του τυχαίου μιγαδικού z κατά a. Δηλαδή το διάνυσμα z απεικονίζεται στο διάνυσμα w το οποίο **έχει στραφεί ως προς το** z **κατά γωνία** a**.** Επειδή $\left|e^{ia}\right| = 1$, ισχύει $|w| = |z|$.



Η αντίστροφη απεικόνιση είναι $z = we^{-ia}$.

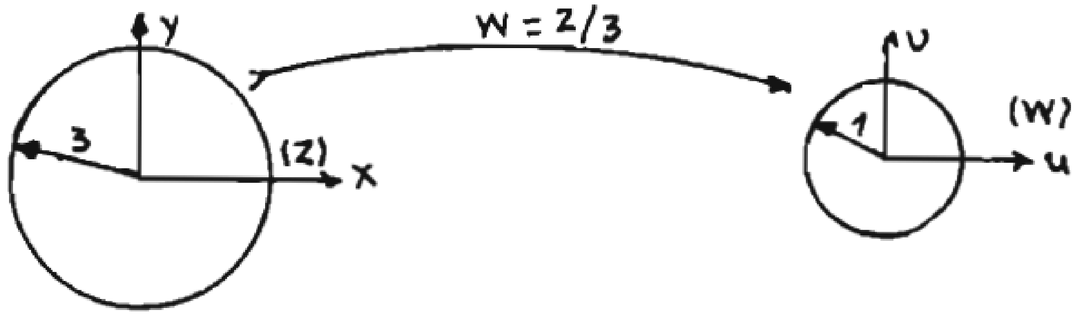
Παράδειγμα: Η συνάρτηση $f(z) = ze^{i\frac{\pi}{2}}$ προκαλεί στροφή του τυχαίου διανύσματος z κατά $a = \dfrac{\pi}{2}$



- **Μεγέθυνση**

Έστω $k > 0, k \in \mathbb{R}$. Ο μετασχηματισμός $w = f(z) = kz$ είναι μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση του επιπέδου z επί του επιπέδου w και ονομάζεται μεγέθυνση**. Η απεικόνιση αυτή μεγενθύνει επί** k **το μέτρο** z **χωρίς να του αλλάζει κατεύθυνση.** Αν $0 < k < 1$ τότε έχουμε σμίκρυνση.

Παράδειγμα: Η απεικόνιση $w = \dfrac{1}{3}z$ μετασχηματίζει τον κυκλικό τόπο $|z| \leq 3$ του επιπέδου z στον κυκλικό τόπο $|w| \leq 1$ του w επιπέδου.



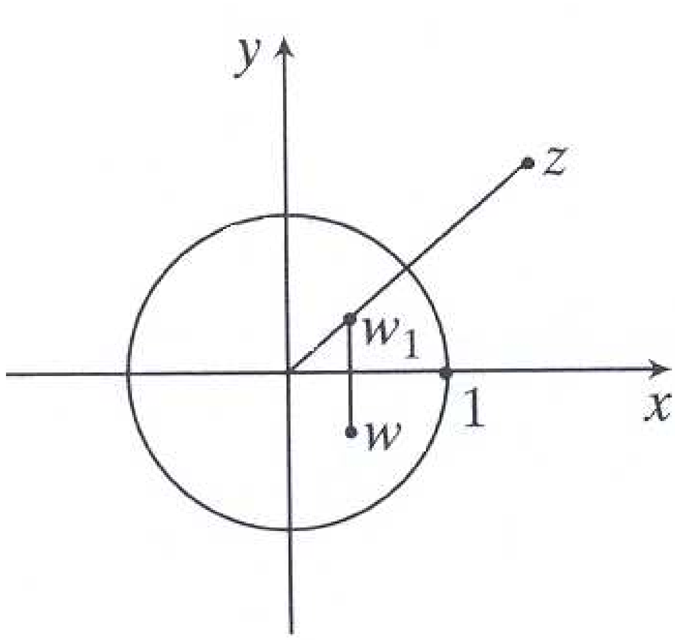
Ο αντίστροφος μετασχηματισμός είναι ο $z=\frac{1}{k}w$.

- **Αντιστροφή**

Ο μετασχηματισμός $w=\frac{1}{z}$, $z\neq 0$ είναι σύνθεση των μετασχηματισμών

$$w_1=\frac{1}{|z|^2}z \text{ και } w=\overline{w_1}.$$

Ο πρώτος μετασχηματισμός εκφράζει **την αντιστροφή ως προς τον μοναδιαίο κύκλο** $C:|z|=1$, αφού $|w_1||z|=1$ και $\arg w_1=\arg z$ ενώ ο δεύτερος εκφράζει **συμμετρία ως προς τον άξονα των πραγματικών.**



- **Γραμμικός μετασχηματισμός**

Η απεικόνιση $w=f(z)=az+b$, $a,b\in\mathbb{C}$ ονομάζεται γραμμικός μετασχηματισμός. Αν υποθέσουμε ότι ισχύει $a\neq 0$ και $a=|a|e^{i\theta}$ τότε

$w=|a|e^{i\theta}z+b$, δηλαδή ο μετασχηματισμός που έχουμε είναι σύνθεση μιας μεγέθυνσης, μιας μετατόπισης και μιας στροφής. Η **μεγέθυνση** γίνεται κατά $|a|$, η **μετατόπιση** κατά διάνυσμα b ενώ η **στροφή** κατά γωνία $\arg a$. Η **αντίστροφη απεικόνιση** είναι η $z=\frac{1}{a}w-\frac{b}{a}$.

Ένας **διγραμμικός μετασχηματισμός** ή **μετασχηματισμός Mobius** έχει τη μορφή $w=f(z)=\frac{az+b}{cz+d}, z\neq-\frac{d}{c}, \ a,b,c,d\in\mathbb{C}$ (1)
και ικανοποιούν τη σχέση $ab\neq bc$, αλλιώς η $f(z)$ θα ήταν σταθερή.
Για να μην προκύψουν συναρτήσεις που ήδη συναντήσαμε, θεωρούμε $a\neq 0$ και $c\neq 0$. Η (1) μπορεί να γραφεί και στη μορφή $w=f(z)=\lambda\frac{z+a}{z+\beta}, \lambda=\frac{a}{c}, a=\frac{b}{a}, \beta=\frac{d}{c}, a\neq\beta$ (2)

$f'(z)=\lambda\frac{\beta-a}{(z+\beta)^2}\neq 0$. Άρα ο διγραμμικός μετασχηματισμός είναι σύμμορφος στο $\mathbb{C}$ εκτός του σημείου $-\beta$. Το σημείο $-\beta$ είναι πόλος της f. Επίσης θέτουμε $f(-\beta)=\infty$ και $f(\infty)=\lambda$.
Ο μετασχηματισμός (2) είναι αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση του $\mathbb{C}\setminus\{-\beta\}$ στο $\mathbb{C}\setminus\{-\lambda\}$, ενώ η αντίστροφη απεικόνιση είναι η $z=\frac{-\beta w+\lambda a}{w-\lambda}$.

Επειδή ο διγραμμικός μετασχηματισμός έχει τρεις παραμέτρους λ, a, β συμπεραίνουμε πως υπάρχουν άπειροι διγραμμικοί μετασχηματισμοί που απεικονίζουν το επίπεδο z στο επίπεδο w.

Τώρα, παίρνοντας τον μετασχηματισμό (2),

$$w=f(z)=\lambda\frac{z+a}{z+\beta}, \lambda=\frac{a}{c}, a=\frac{b}{a}, \beta=\frac{d}{c}, a\neq\beta \ \Rightarrow f(z)=\lambda\left(\frac{a-\beta}{z+\beta}+1\right)$$

και θέτοντας $w_1=z+\beta, w_2=\frac{1}{w_1}, w_3=\lambda(a-\beta)w_2+\lambda$, εύκολα καταλαβαίνουμε ότι ένας διγραμμικός μετασχηματισμός είναι μια σύνθεση

- μετατόπισης $w_1=z+\beta$
- αντιστροφής $w_2=\frac{1}{w_1}$
- γραμμικού μετασχηματισμού $w_3=\lambda(a-\beta)w_2+\lambda$

Συνεπώς ένας διγραμμικός μετασχηματισμός μπορεί να περιλαμβάνει στροφή, μετατόπιση, αντιστροφή και μεγέθυνση.

Θεώρημα: Υπάρχει μοναδικός διγραμμικός μετασχηματισμός που απεικονίζει τρία διαφορετικά σημεία z_1, z_2, z_3 σε τρία διαφορετικά σημεία w_1, w_2, w_3. Ο μετασχηματισμός δίνεται από την σχέση

$$\frac{w-w_1}{w-w_3}\cdot\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1} \qquad (3)$$

Απόδειξη: Πρέπει να δείξουμε ότι $f(z_1)=w_1$, $f(z_2)=w_2$, $f(z_3)=w_3$ ορίζουν τις τιμές των παραμέτρων λ, a, β μονοσήμαντα.

$w_2-w_3=\lambda\dfrac{(z_2-z_3)(\beta-a)}{(z_2+\beta)(z_3+\beta)}$ και $w_2-w_1=\lambda\dfrac{(z_2-z_1)(\beta-a)}{(z_2+\beta)(z_1+\beta)}$

Άρα,
$$\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}=\frac{(z_2-z_3)(z_1+\beta)}{(z_2-z_1)(z_3+\beta)} \qquad (4)$$

Οπότε για ένα τυχαίο z και $w=f(z)$ ισχύει ότι :

$$\frac{w-w_1}{w-w_3}=\frac{(z-z_1)(z_3+\beta)}{(z-z_3)(z_1+\beta)} \qquad (5)$$

Απαλείφοντας από την (4) και την (5) το β προκύπτει η (3).

Παρατηρήσεις:

- ✓ Αν $w_1=\infty$, τότε το πρώτο μέλος της (3) γίνεται $\dfrac{w_2-w_3}{w-w_3}$
- ✓ Αν $z_1=\infty$, τότε το δεύτερο μέλος της (3) γίνεται $\dfrac{z_2-z_3}{z-z_3}$

Εφαρμογή

Να βρεθεί ο σύμμορφος μετασχηματισμός που απεικονίζει τα σημεία $z_1=-1, z_2=1, z_3=0$ στα σημεία $w_1=-1, w_2=1, w_3=-i$

Λύση: Θεωρώ τυχαίο σημείο $z_4=z$ που απεικονίζεται στο σημείο $w_4=w$.

Πρέπει $\quad \dfrac{z_4-z_1}{z_2-z_1}\cdot\dfrac{z_2-z_3}{z_4-z_3}=\dfrac{w_4-w_1}{w_2-w_1}\cdot\dfrac{w_2-w_3}{w_4-w_3} \quad \Rightarrow$

$$\frac{z-(-1)}{1-(-1)}\cdot\frac{1-0}{z-0}=\frac{w-(-1)}{1-(-1)}\cdot\frac{1-(-i)}{w-(-i)} \quad\Rightarrow\quad \frac{z+1}{2}\cdot\frac{1}{z}=\frac{w+1}{2}\cdot\frac{1+i}{w+i} \quad\Rightarrow$$

$$w=f(z)=\frac{z-i}{1-zi} \quad\Rightarrow\quad f(z)=\frac{z-i}{-iz+1}.$$

Εφαρμογή

Να βρεθεί ο σύμμορφος μετασχηματισμός που απεικονίζει
α) τα σημεία -1,0,2 στα σημεία $0,1,\infty$
β) τα σημεία $0,i,\infty$ στα σημεία 0,1,2

Λύση: α)Από τον τύπο (3) προκύπτει (βλ. παρατηρήσεις)

$$\frac{w}{w-1}=\frac{z+1}{z}\cdot\frac{2}{3}\Rightarrow w=-2\frac{z+1}{z-2}$$

β) Ομοίως με (α) $\frac{w}{w-1}\cdot\frac{1}{2}=\frac{z}{z-i}\quad\Rightarrow\ w=\frac{2z}{z+i}$.

Πρόταση: Έστω $f(z)$ ένας διγραμμικός μετασχηματισμός. Αν $E\subset\mathbb{C}$ είναι μια ευθεία και $K\subset\mathbb{C}$ ένας κύκλος στο επίπεδο z, τότε το $f(E)$ είναι ευθεία ή κύκλος και το $f(K)$ είναι ευθεία ή κύκλος στο επίπεδο w.

Απόδειξη: Επειδή ένας διγραμμικός μετασχηματισμός είναι σύνθεση δύο γραμμικών μετασχηματισμών και μιας αντιστροφής, τότε αρκεί να δείξουμε ότι $w=f(z)=\frac{1}{z}$.

Η εξίσωση της E στο επίπεδο z θα είναι της μορφής $az+\overline{az}+b=0$ όπου $a\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ και $b\in\mathbb{R}$. Εάν θέσουμε $z=\frac{1}{w}$ τότε προκύπτει ότι $bw\overline{w}+a\overline{w}+\overline{a}w=0$ σχέση η οποία παριστάνει ευθεία αν $b=0$ ή κύκλο αν $b\neq 0$

Η εξίσωση του K στο επίπεδο z θα είναι μορφής $az\overline{z}+\overline{b}z+b\overline{z}+k=0$, $a,k\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$ και $\left|b^2\right|>ak$.

Έτσι θέτοντας $z=\frac{1}{w}$ προκύπτει $kw\overline{w}+\overline{bw}+bw+a=0$ σχέση η οποία παριστάνει κύκλο αν $k\neq 0$ ή ευθεία αν $k=0$.

Εφαρμογή

Να βρεθεί η εικόνα της ευθείας $y=0$ μέσω του μετασχηματισμού

$$w=f(z)=\frac{z-i}{z+i}$$

Λύση: Θέτουμε $w=u+iv$ και $z=x+iy$. Οπότε έχουμε

$$u+iv=\frac{x+iy-i}{x+iy+i}\quad\Rightarrow\quad u+iv=\frac{x+i(y-1)}{x+i(y+1)}$$

Πολλαπλασιάζοντας την σχέση με το συζυγή του παρονομαστή $x-i(y+1)$ προκύπτει η σχέση :

δηλαδή $u=\frac{\left(x^2+y^2-1\right)}{x^2+(y+1)^2}$ (2) και $v=\frac{-2x}{x^2+(y+1)^2}$ (3)

Στις (2) και (3) αντικαθιστούμε $y=0$ και προκύπτει

$u=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ (4) και $v=\frac{-2x}{x^2+1}$ (5)

Λύνοντας την (4) ως προς x προκύπτει $x^2 = \dfrac{1+u}{1-u}$ και αντικαθιστώντας στη (5) βρίσκουμε $x = -\dfrac{\upsilon}{2}\left(\dfrac{1+u}{1-u}+1\right) \Rightarrow x = \dfrac{2\upsilon}{u-1}$ (6)

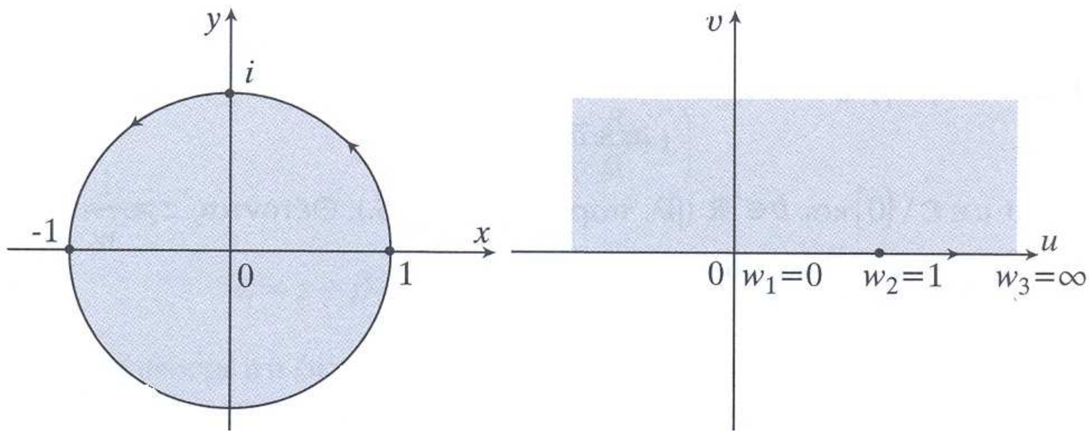
Με αντικατάσταση της (6) στην (4) βρίσκουμε ότι $u^2 + \upsilon^2 = 1$, αυτή η περιφέρεια κύκλου είναι η ζητούμενη εικόνα.

Εφαρμογή

Να βρεθεί η σύμμορφη απεικόνιση που απεικονίζει το μοναδιαίο κύκλο $|z| \le 1$ στο $\operatorname{Im} w > 0$.

Λύση: Πρέπει να βρούμε ένα διγραμμικό μετασχηματισμό που να απεικονίζει τα σημεία $1, i, -1$ του επιπέδου z στα σημεία $0, 1, \infty$ του επιπέδου w.

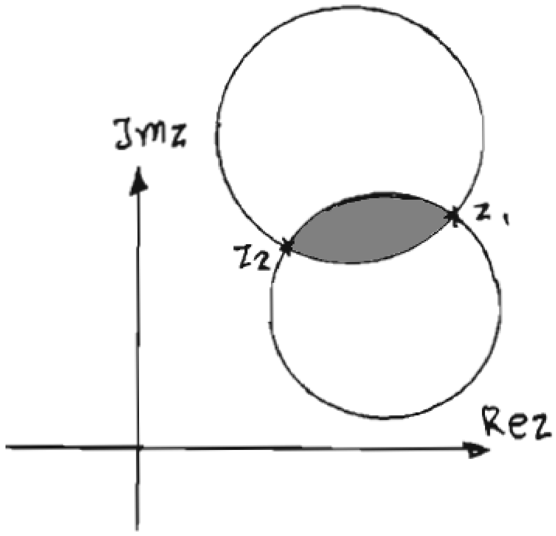
Ο μετασχηματισμός αυτός είναι της μορφής $w = \lambda \dfrac{z-1}{z+1}$ αφού απεικονίζει τα σημεία 1,-1 του z στα σημεία $0, \infty$ του w. Τώρα, το i απεικονίζεται στο 1, οπότε ισχύει $1 = \lambda \dfrac{i-1}{i+1} \Rightarrow \lambda = -i$. Οπότε ο μετασχηματισμός $w = i\dfrac{1-z}{1+z}$ απεικονίζει τον κύκλο $|z| = 1$ στην ευθεία $\upsilon = 0$, ενώ το εσωτερικό του, επειδή διατηρείται η φορά και σύμφωνα με προηγούμενο θεώρημα, απεικονίζεται στο άνω ημιεπίπεδο $\operatorname{Im} w > 0$.



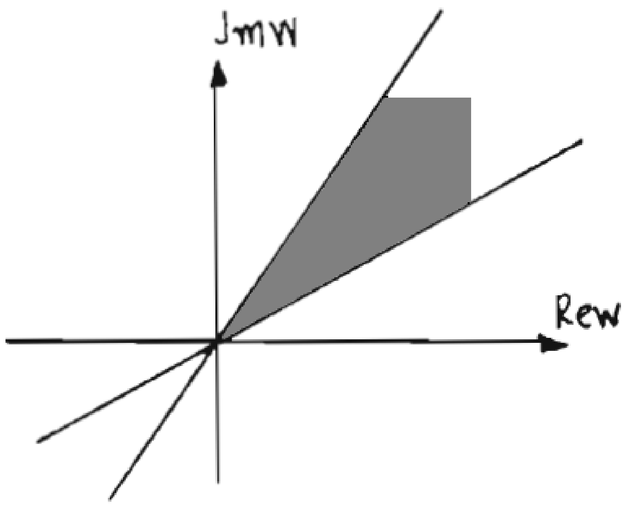
Εφαρμογή

Ένας ‘‘φακοειδής’’ τόπος έχει σύνορα δύο περιφέρειες που τέμνονται. Να βρεθεί η σύμμορφη απεικόνιση που απεικονίζει τον ‘‘φακοειδή’’ τόπο σε μια γωνία με κορφή την αρχή των αξόνων.

Λύση: Έστω ότι έχουμε τον φακοειδή τόπο του σχήματος με σύνορα τις περιφέρειες C_1, C_2.



Επειδή ο μετασχηματισμός απεικονίζει περιφέρειες του επιπέδου z σε περιφέρειες του επιπέδου w, συμπεραίνουμε ότι τα δύο σημεία τομής z_1, z_2 απεικονίζονται στα σημεία $w=0$ και $w=\infty$, ώστε οι εικόνες C_1', C_2' να έχουν σημεία τομής τα σημεία $0,\infty$ άρα είναι ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων, αφού δύο περιφέρειες με πεπερασμένη ακτίνα δεν γίνεται να τέμνονται στο ∞.



Συνεπώς, ο ζητούμενος διγραμμικός μετασχηματισμός είναι της μορφής
$f(z)=\lambda\dfrac{z-z_1}{z-z_2}, \lambda\in\mathbb{C}$. Επίσης ισχύει $f(z_1)=0$, $f(z_2)=\infty$.
Αξίζει να υπενθυμισθεί πως η γωνία με την οποία τέμνονται οι δύο περιφέρειες είναι ίση με την γωνία που σχηματίζουν οι εικόνες τους.

Συμμετρικά σημεία

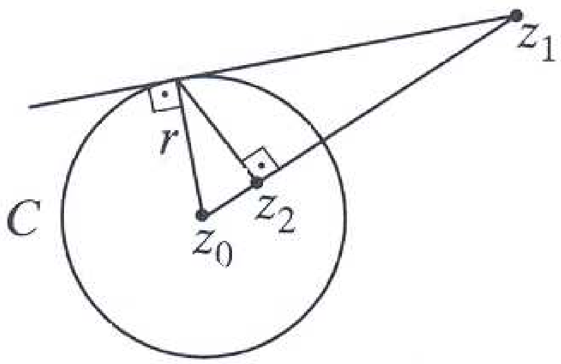
Έστω η ευθεία $az+\overline{az}+k=0$. Δύο σημεία z_1, z_2 είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία αν και μόνο αν ισχύει $az_1+\overline{az_2}+k=0$.

Έστω ο κύκλος $C:|z-z_0|=r$. Δύο σημεία z_1, z_2 είναι **συμμετρικά** ως προς τον κύκλο C αν και μόνο αν ισχύουν οι σχέσεις $\arg(z_1-z_0)=\arg(z_2-z_0)$ (1) και $|z_1-z_0||z_2-z_0|=r^2$. (2)

Το κέντρο z_0 του κύκλου και το ∞ θεωρούνται συμμετρικά ως προς τον C.

Οι σχέσεις (1) και (2) γράφονται στην μορφή $(z_1-z_0)\overline{(z_2-z_0)}=r^2$. (3)

Από τη σχέση (1) είναι φανερό ότι τα σημεία z_0, z_1, z_2 βρίσκονται στην ίδια ημιευθεία ενώ από τη (2) ότι το γινόμενο των αποστάσεων των δύο συμμετρικών σημείων από το κέντρο του κύκλου ισούται με το τετράγωνο της ακτίνας. Αν το σημείο z_1 βρίσκεται πάνω στον κύκλο C, τότε το συμμετρικό του ταυτίζεται με το z_1.



Έστω τώρα ο κύκλος C και τα συμμετρικά ως προς αυτόν σημεία z_1, z_2.

Έστω ότι $z_1=z_0r_1e^{i\theta}$. Τότε επειδή τα z_0, z_1, z_2 βρίσκονται στην ίδια ευθεία από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει $z_2=z_0+r_2e^{i\theta}$ και $r_2=\dfrac{r^2}{r_1}$. Έστω ένα τυχαίο σημείο του C, $z=z_0+re^{i\varphi}$. Τότε ισχύει:

$$\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=\left|\frac{re^{i\varphi}-r_1e^{i\theta}}{re^{i\varphi}-r_2e^{i\theta}}\right|=\frac{r_1}{r}\left|\frac{re^{i\varphi}-r_1e^{i\theta}}{r_1e^{i\varphi}-re^{i\theta}}\right|\Rightarrow\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=\frac{r_1}{r}=\frac{r}{r_2}$$

που είναι μια αναπαράσταση του C.

Αντίστροφα, μια σχέση της μορφής $\left|\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\right|=k,\, z_1\neq z_2,\, k\geq 0$ παριστάνει κύκλο για τον οποίο τα z_1, z_2 είναι συμμετρικά. Μπορούμε να βρούμε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου συναρτήσει των δύο συμμετρικών σημείων και του k.

$|z-z_1| = k|z-z_2| \Rightarrow \left|(z-z_1) - k^2(z-z_2)\right| = k\left|(z-z_1)-(z-z_2)\right|$

Άρα , $$\left|z - \frac{z_1 - k^2 z_2}{1-k^2}\right| = \frac{k|z_1 - z_2|}{|1-k|^2}.$$

Αυτή η εξίσωση παριστάνει κύκλο με κέντρο

$z_0 = \dfrac{z_1 - k^2 z_2}{1-k^2}$ και ακτίνα $r = \dfrac{k|z_1-z_2|}{|1-k|^2}$.

Ακόμα, $z_1 - z_0 = \dfrac{k^2}{1-k^2}(z_2 - z_1)$ και $z_2 - z_0 = \dfrac{1}{1-k^2}(z_2 - z_1)$,

συνεπώς $(z_1 - z_0)\overline{(z_2 - z_0)} = r^2$.

Άρα όντως τα σημεία z_1, z_2 είναι συμμετρικά ως προς τον κύκλο κέντρου z_0 και ακτίνας r.

- Αν $k = 0$ τότε η ακτίνα είναι μηδέν οπότε ο κύκλος εκφυλίζεται σε σημείο.
- Αν $k = 1$ τότε η ακτίνα γίνεται άπειρη και ο κύκλος γίνεται μια ευθεία. Σε αυτή την περίπτωση η εξίσωση $|z-z_1| = |z-z_2|$ είναι η μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τα σημεία z_1 και z_2.

Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι η εξίσωση $\left|\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\right| = k$, $k > 0$ παριστάνει κύκλο ως προς τον οποίο τα σημεία z_1 και z_2 είναι συμμετρικά. Η οικογένεια των κύκλων που έχουν τα ίδια συμμετρικά σημεία ονομάζεται **οικογένεια κύκλων του Απολλωνίου.**

Πρόταση (Ιδιότητα διατήρησης της συμμετρίας): Ένας διγραμμικός μετασχηματισμός απεικονίζει συμμετρικά σημεία ως προς έναν κύκλο σε συμμετρικά σημεία ως προς την εικόνα του κύκλου.

Απόδειξη: Έστω ο κύκλος C με τα συμμετρκά ως προς αυτόν σημεία z_1, z_2

$$C : \left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right| = k\,,\, k > 0$$

και ο μετασχηματισμός $z = \dfrac{-dw+b}{cw-a}$. Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό στην εξίσωση του κύκλου έχουμε $\left|\dfrac{(cz_1+d)w-(az_1+b)}{(cz_2+d)w-(az_2+b)}\right| = k$

Αν υποθέσουμε ότι $z_1, z_2 \neq -\dfrac{d}{c}$ τότε, $\left|\dfrac{w-w_1}{w-w_2}\right| = k\left|\dfrac{cz_2+d}{cz_1+d}\right| = k'$, $k' > 0$. Από αυτή τη σχέση συμπεραίνουμε ότι τα σημεία w_1 και w_2 είναι συμμετρικά του κύκλου C'.

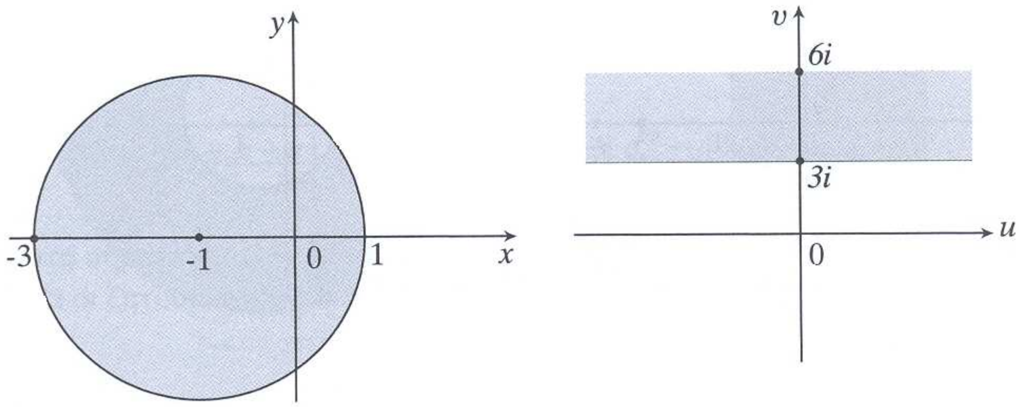
Αν $z_1 = -\dfrac{d}{c}$ τότε $w_1 = f(z_1) = \infty$. Τότε έχουμε $|w - w_2| = \dfrac{1}{k}\left|\dfrac{az_1 + b}{cz_2 + d}\right|$ δηλαδή το w_2 είναι το κέντρο του κύκλου C' οπότε τα w_1, w_2 είναι συμμετρικά ως προς τον C'.

Σε ανάλογο συμπέρασμα καταλήγουμε αν $z_2 = -\dfrac{d}{c}$.

Εφαρμογή

Να βρεθεί ένας διγραμμικός μετασχηματισμός που να απεικονίζει το δίσκο $|z+1| \le 2$ στο ημιεπίπεδο $\operatorname{Im} z \ge 3$.

Λύση: Επειδή τα σημεία -1 και ∞ είναι συμμετρικά ως προς τον κύκλο $|z+1| = 2$, ενώ τα σημεία 0 και $6i$ είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία $\operatorname{Im} z = 3$ ψάχνουμε μετασχηματισμό που θα απεικονίζει τα σημεία $-1, \infty, 1$ του επιπέδου z στα σημεία $6i, 0, 3i$ αντίστοιχα του w επιπέδου.



Επειδή το ∞ απεικονίζεται στο 0, ψάχνουμε ένα μετασχηματισμό της μορφής $w = \dfrac{a}{z+b}$. Έτσι, χρησιμοποιώντας ότι $6i = \dfrac{a}{-1+b}$ και $3i = \dfrac{a}{1+b}$ καταλήγουμε ότι

$$w = \frac{12i}{z+3}.$$

Εφαρμογή

Να βρεθούν οι διγραμμικοί μετασχηματισμοί που απεικονίζουν το δίσκο $|z| < 1$ στον δίσκο $|w| < 1$ έτσι ώστε ένα δοσμένο εσωτερικό σημείο να απεικονίζεται στο κέντρο του δίσκου.

Λύση: Έστω το εσωτερικό σημείο a και το συμμετρικό του ως προς τον κύκλο $|z| = 1$, το σημείο $\dfrac{1}{\bar{a}}$. Από τη στιγμή που γνωρίζουμε ότι το a απεικονίζεται στο 0 αυτομάτως ξέρουμε πως το σημείο $\dfrac{1}{\bar{a}}$ απεικονίζεται στο ∞ γιατί είναι συμμετρικό του 0 ως προς τον κύκλο $|w|=1$. Επομένως ο μετασχηματισμός είναι της μορφής

$$w=\lambda \frac{z-a}{z-\frac{1}{\bar{a}}}=-\lambda \bar{a}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}.$$

Επειδή όμως

$$|w|=1 \Rightarrow \left|-\lambda \bar{a}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|=|\lambda \bar{a}|\left|\frac{e^{i\varphi}-a}{1-\bar{a}e^{i\varphi}}\right|=|\lambda \bar{a}|\left|\frac{e^{i\varphi}-a}{e^{-i\varphi}-\bar{a}}\right|=|\lambda \bar{a}|=1,$$

το οποίο σημαίνει ότι $-\lambda \bar{a}=e^{i\theta}, \theta\in\mathbb{R}$.

Επομένως οι ζητούμενοι μετασχηματισμοί είναι της μορφής

$$w=f(z)=e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \theta\in\mathbb{R}$$

Σημείωση: Η λύση είναι μοναδική εκτός της σταθεράς θ. Όμως, $f'(a)=e^{i\theta}\frac{1}{1-|a|^2}$ οπότε $\arg f'(a)=\theta$, δηλαδή μπορεί να υπάρξει πλήρης καθορισμός του μετασχηματισμού αν γνωρίζουμε την παράγωγο της f στο σημείο a.

Εφαρμογή

Να βρεθεί ο διγραμμικός μετασχηματισμός $w=f(z)$ που απεικονίζει τα άνω ημιεπίπεδο $\operatorname{Im} z>0$ επί του μοναδιαίου δίσκου $|w|<1$ έτσι ώστε: $f(i)=0$ και $\arg f'(i)=-\frac{\pi}{2}$.

Λύση: Ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι της μορφής

$$f(z)=e^{i\theta}\frac{z-a}{z-\bar{a}}, \theta\in\mathbb{R} \qquad (1)$$

Επειδή $f(i)=0$ η παραπάνω σχέση γίνεται $e^{i\theta}\frac{i-a}{i-\bar{a}}=0 \Rightarrow a=i$ και $\bar{a}=-i$

οπότε η σχέση (1) γίνεται $f(z)=e^{i\theta}\frac{z-i}{z+i}$. Παραγωγίζοντας αυτήν τη σχέση έχουμε

$$f'(z)=e^{i\theta}\frac{z+i-(z-i)}{(z+i)^2} \Rightarrow f'(z)=\frac{2ie^{i\theta}}{(z+i)^2} \Rightarrow f'(i)=\frac{2ie^{i\theta}}{(2i)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(i)=\frac{e^{i\theta}}{2i}=\frac{1}{2}\frac{e^{i\theta}}{e^{i\frac{\pi}{2}}}=\frac{1}{2}e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})} \Rightarrow f'(i)=\frac{1}{2}e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}$$

Επειδή όμως $\theta \in \mathbb{R}$, το όρισμα της $f'(i)$ είναι $\theta - \frac{\pi}{2}$ και πρέπει

$\theta - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = 0$, οπότε η $f(z) = e^{i\theta}\frac{z-i}{z+i}$ γίνεται .

$$f(z) = e^{i0}\frac{z-i}{z+i} = \frac{z-i}{z+i}.$$

Εφαρμογή

Να βρεθεί μετασχηματισμός που απεικονίζει το δίσκο $|z|<1$ στο δίσκο $|w|<1$ έτσι ώστε $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$ και $\arg f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$.

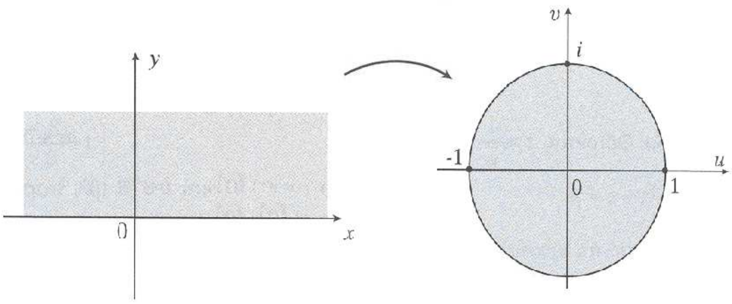
Λύση: Ο ζητούμενος διγραμμικός μετασχηματισμός είναι της μορφής

$$w = f(z) = e^{i\theta}\frac{z-\frac{1}{2}}{1-\frac{z}{2}} = e^{i\theta}\frac{2z-1}{2-z}$$

και επειδή $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}e^{i\theta}$ τότε πρέπει $\arg f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} = \theta$, ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι ο $w = i\frac{2z-1}{2-z}$.

Εφαρμογή

Να δειχθεί ότι ο μετασχηματισμός $w = e^{i\theta}\frac{z-a}{z-\bar{a}}, \theta \in \mathbb{R}, \operatorname{Im} a > 0$ απεικονίζει το ημιεπίπεδο $\operatorname{Im} z > 0$ στον μοναδιαίο δίσκο $|w|<1$.



Λύση:

Ο τόπος $\operatorname{Im} z > 0 \;\Rightarrow\; y > 0 \;\Rightarrow\; \frac{z-\bar{z}}{2i} > 0 \;\Rightarrow\; -i\left(z-\bar{z}\right)$ (1)

Λύνω τον μετασχηματισμό ως προς z, $w = e^{i\theta}\frac{z-a}{z-\bar{a}} \;\Leftrightarrow\; z = \frac{\bar{a}w - e^{i\theta}a}{w - e^{i\theta}}$.

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στην (1) προκύπτει ότι

$$-i\left[\frac{\overline{a}w-ae^{i\theta}}{w-e^{i\theta}}-\overline{\left(\frac{\overline{a}w-e^{i\theta}a}{w-e^{i\theta}}\right)}\right]>0$$ και αν λάβουμε υπόψη ότι $\frac{a-\overline{a}}{2i}=2\operatorname{Im}a>0$

έχουμε ότι $u^2+\upsilon^2<1 \;\Leftrightarrow\; |w|<1$.

Εφαρμογή

Να βρεθούν οι μετασχηματισμοί που απεικονίζουν το μοναδιαίο δίσκο $|z|<1$ επί του ημιεπιπέδου $\operatorname{Im}w>0$.

Λύση: Η απεικόνιση $$w_2=e^{i\theta}\frac{w_1-a}{w_1-\overline{a}},\theta\in\mathbb{R},\ \operatorname{Im}a>0 \qquad (1)$$

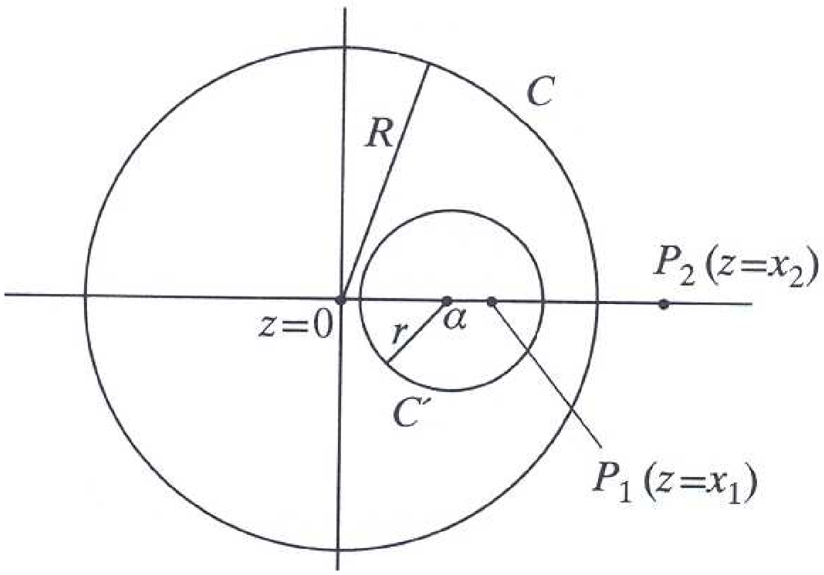
απεικονίζει αμφιμονοσήμαντα το ημιεπίπεδο $\operatorname{Im}w_1>0$ στον μοναδιαίο δίσκο $|w_2|<1$. Άρα η (1) απεικονίζει τον μοναδιαίο δίσκο $|w_2|<1$ στο άνω ημιεπίπεδο $\operatorname{Im}w_1>0$. Θέτοντας $w_2=z$, $w_1=z$ προκύπτει $$z=e^{i\theta}\frac{w-a}{w-\overline{a}} \qquad (2)$$

Έτσι, λύνοντας την (2) ως προς w βρίσκουμε του ζητούμενους μετασχηματισμούς $w=\frac{z\cdot\overline{a}-ae^{i\theta}}{z-e^{i\theta}},\theta\in\mathbb{R}$.

Εφαρμογή

Να βρεθεί μετασχηματισμός που απεικονίζει ένα δακτύλιο μη ομόκεντρων κύκλων σε δακτύλιο ομόκεντρων κύκλων.

Λύση: Έστω ο κύκλος C με κέντρο το σημείο $z=0$ και ακτίνα R και κύκλος C' με ακτίνα $r<R$ και κέντρο το σημείο $a\in\mathbb{R}$. Δύο σημεία P_1 και P_2 που είναι συμμετρικά ως προς τους δύο κύκλους βρίσκονται στον άξονα των πραγματικών αριθμών όπως φαίνεται και στο σχήμα.



Λόγω της συμμετρίας ισχύουν οι σχέσεις :

$$(x_1-a)(x_2-a)=r^2 \quad (1) \quad , \quad x_1x_2=R^2 \quad (2)$$

Η εξίσωση $ax^2-\left(R^2-r^2+a^2\right)x+aR^2=0$ με θετική ορίζουσα $\left(R^2-r^2+a^2\right)^2-4aR^2$ διότι $R-r>a$, έχει ρίζες τα x_1 και x_2.

Θεωρούμε τον μετασχηματισμό $w=\lambda\dfrac{z-x_1}{z-x_2}$, ο οποίος απεικονίζει τους κύκλους $C\,,C'$ του επιπέδου z ,σε δύο κύκλους K και K' του επιπέδου w.

Το σημείο P_2 απεικονίζεται στο ∞, ενώ το P_1 που είναι συμμετρικό του ως προς του κύκλους $C\,,C'$, απεικονίζεται σε σημείο που είναι συμμετρικό του $w=\infty$ ως προς τους κύκλους K και K' στο επίπεδο w. Συμμετρικό σημείο όμως είναι το κέντρο του κύκλου, οπότε ο μετασχηματισμός που υποθέσαμε είναι η ζητούμενη απεικόνιση αφού απεικονίζει το P_1 στο κοινό κέντρο των κύκλων K και K'.

Εφαρμογή

Να βρεθεί ένας μετασχηματισμός που απεικονίζει το πεδίο $D=\{z:\operatorname{Im}z<0\,,\left|z+ia\right|>R\,,a>R>0)\}$ σε ένα δακτύλιο με κέντρο το 0.

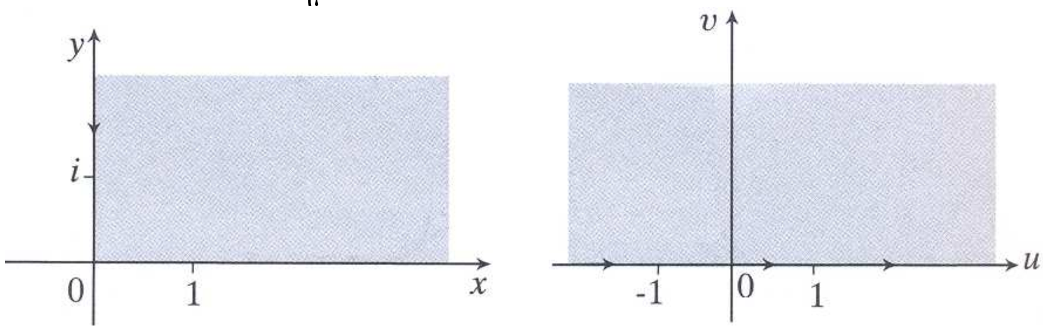
Λύση: Πρέπει αρχικά να βρεθούν δύο σημεία που είναι ταυτόχρονα συμμετρικά ως προς την ευθεία $\operatorname{Im}z=0$ και ως προς τον κύκλο $\left|z+ia\right|=R$. Προφανώς αυτά τα σημεία είναι πάνω στον άξονα των φανταστικών οπότε είναι της μορφής ik και $-ik$, $k>0$ λόγω της συμμετρίας ως προς την ευθεία. Επίσης, λόγω της συμμετρίας ως προς τον κύκλο ισχύει $(a+k)(a-k)=R^2$, οπότε $k=\sqrt{a^2-R^2}$.

Ο μετασχηματισμός που ψάχνουμε είναι ο $w=\dfrac{z+ik}{z-ik}$ και αυτό αποδεικνίεται γιατί το σημείο $z=-ik$ απεικονίζεται στο 0, ενώ το σημείο $z=ik$ απεικονίζεται στο ∞, άρα η εικόνα της ευθείας $\operatorname{Im}z=0$ στο επίπεδο w είναι ο κύκλος $C:\left|w\right|=1$. Ομοίως, αποδεικνύεται ότι ο κύκλος $|z+ia|=R$ απεικονίζεται σε έναν κύκλο $|w|=R_1$, $R_1=\dfrac{R+a-k}{R+a+k}$. Από την αρχή της αντιστοιχίας των συνόρων ο σύμμορφος μετασχηματισμός $w=\dfrac{z+ik}{z-ik}$ απεικονίζει το πεδίο D του επιπέδου z στον δακτύλιο $R_1<|w|<1$ του επιπέδου w.

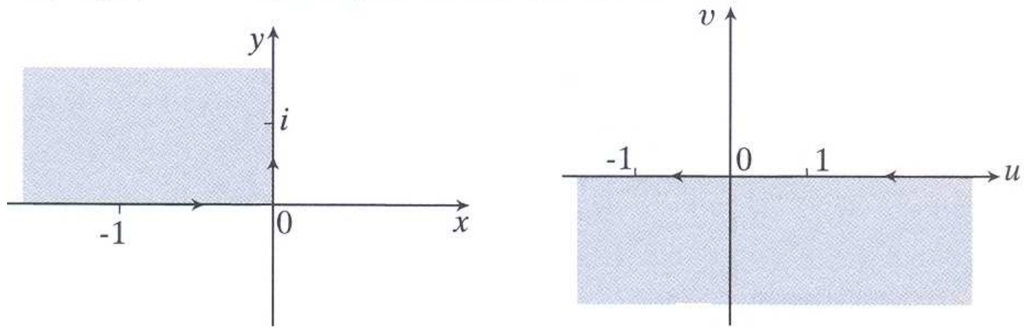
1.4 Στοιχειώδεις μετασχηματισμοί

α) Ο μετασχηματισμός $f(z)=z^2$

Η παράγωγος $f'(z)=2z$ άρα αυτός ο μετασχηματισμός είναι σύμμορφος σε όλο το $\mathbb{C}$ εκτός του 0. Αν $w=Re^{i\phi}$ και $z=re^{i\theta}$
$\Rightarrow w=z^2=r^2e^{2i\theta}\Rightarrow R=r^2$ και $\phi=2\theta$.
Άρα η f απεικονίζει τον κύκλο $|z|=a$ στον κύκλο $|w|=a^2$, καθώς και μία ημιευθεία, έστω την $\theta=k$ του επιπέδου z, με αρχή το 0 στην ημιευθεία $\phi=2k$ του επιπέδου w.
Αν $w=u+i\upsilon=f(z)=z^2$, τότε ισχύει $u(x,y)=x^2-y^2$ και $\upsilon(x,y)=2xy$.
Άρα η f απεικονίζει τις οικογένειες υπερβολών του επιπέδου z, $x^2-y^2=C$ και $2xy=C$, στις οικογένειες ευθειών του επιπέδου w, $u=c$ και $\upsilon=c$.
Επειδή $f(i)=-1$, $f(0)=0$ και $f(1)=1$, η f απεικονίζει το πρώτο τεταρτημόριο του επιπέδου z στο άνω ημιεπίπεδο του επιπέδου w.



Αναλόγως συμπεραίνουμε και ότι η f απεικονίζει το δεύτερο τεταρτημόριο του επιπέδου z στο κάτω ημιεπίπεδο του επιπέδου w.



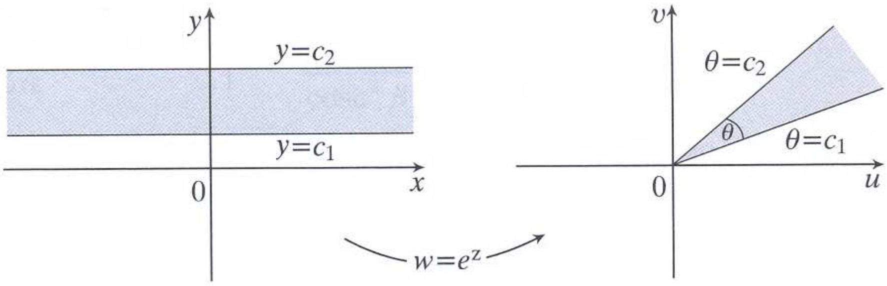
β) Εκθετικοί και λογαριθμικοί μετασχηματισμοί

Η συνάρτηση $f(z)=e^z$, $z\in\mathbb{C}$ είναι σύμμορφη σε όλο το $\mathbb{C}$ αφού $f'(z)=e^z$, δεν είναι όμως αμφιμονοσύμαντη σε όλο το $\mathbb{C}$. Η f είναι αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση στο πεδίο $D=\{z=x+iy:-\pi<y\le\pi\}$.

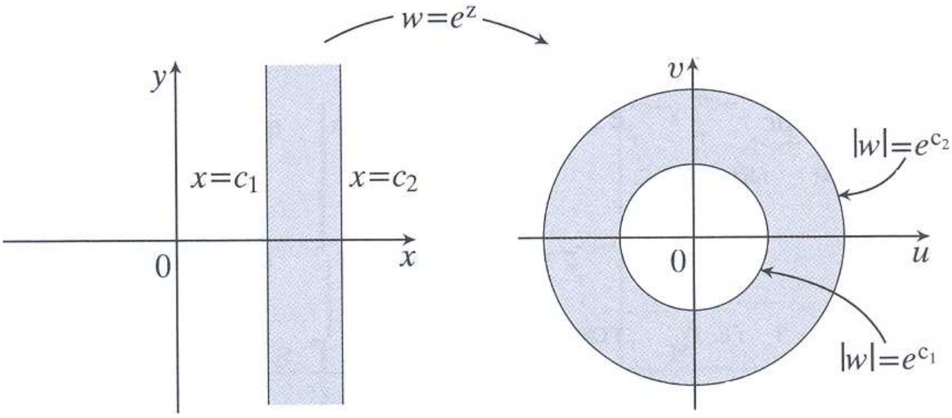
Έστω ότι $z=x+iy$ και $w=re^{i\phi}$.

Αν $w=e^z \Rightarrow r(x,y)=e^x$, $\phi(x,y)=y$.

Από τις παραπάνω ισότητες είναι φανερό ότι η f απεικονίζει μια οριζόντια ευθεία $y=c$, $c\in\mathbb{R}$ του επιπέδου z σε μια ημιευθεία $\phi=c$ με αρχή το 0 του επιπέδου w καθώς και μια ευθεία κατακόρυφη, την $x=c$ του επιπέδου z, στον κύκλο $|w|=e^c$ του επιπέδου w. Οπότε, αν $c_2>c_1$, $c_2-c_1<2\pi$ τότε η f απεικονίζει την οριζόντια λωρίδα που έχει σύνορα τις ευθείες $y=c_1$, $y=c_2$ του επιπέδου z στο γωνιακό πεδίο με γωνία $\theta=c_2-c_1$.



Ακόμα, η άπειρη λωρίδα που περιορίζεται από τις $x=c_1$, $x=c_2$, $c_2>c_1$ του επιπέδου z απεικονίζεται στον δακτύλιο που ορίζουν οι κύκλοι $|w|=e^{c_1}$, $|w|=e^{c_2}$ του επιπέδου w.



γ)Τριγωνομετρικοί μετασχηματισμοί

Έστω ο μετασχηματισμός $w=f(z)=\sin z$ ο οποίος είναι σύμμορφος στο διάστημα $-\dfrac{\pi}{2}<\operatorname{Re} z<\dfrac{\pi}{2}$ αφού $f'(z)=\cos z\neq 0$.

Έστω, $u+iv=\sin z=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$.

Αν $|a|<\dfrac{\pi}{2}$ τότε η ευθεία $x=a$ είναι η καμπύλη με παραμετρικές εξισώσεις $u=\sin a\cosh y$, $v=\cos a\sinh y$

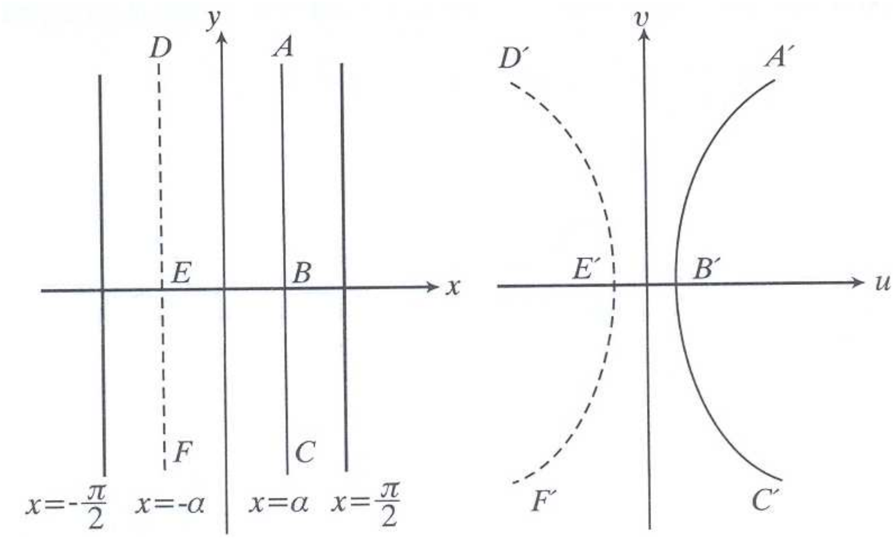
και χρησιμοποιώντας ότι $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$ προκύπτει ότι

$$\frac{u^2}{\sin^2 a} - \frac{\upsilon^2}{\cos^2 a} = 1$$

δηλαδή μια υπερβολή στο επίπεδο (u,υ) με εστίες τα σημεία $(\pm 1, 0)$.

Αν $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, τότε $u = \sin a \cosh y > 0, \forall\ y$ οπότε η ευθεία $x = a$ απεικονίζεται στο δεξιό κλάδο της υπερβολής.

Αν $a \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, τότε η ευθεία $x = -a$ απεικονίζεται στο ευθύγραμμο τμήμα $\upsilon = 0\ , u > 1$. Ακόμα , ο άξονας y απεικονίζεται στον άξονα υ.



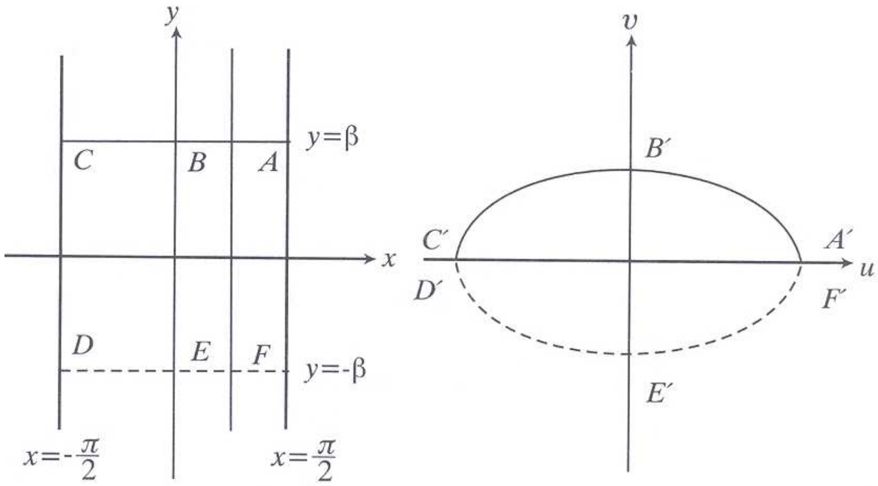
Έστω τώρα μια οριζόντια γραμμή $y = \beta\ ,\ \beta > 0,\ -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

Ισχύει ότι $u = \sin x \cosh\beta,\ \ \upsilon = \cos x \sinh\beta$,οπότε

$$\frac{u^2}{\cos^2\text{h}\,\beta} + \frac{\upsilon}{\sin^2\text{h}\,\beta} = 1$$

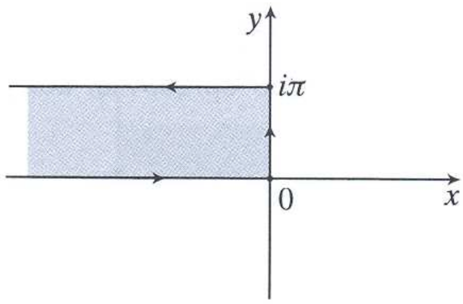
δηλαδή μια έλλειψη στο επίπεδο (u,υ). Η γραμμή $y = \beta$ απεικονίζεται στο άνω μέρος της έλλειψης. Η γραμμή $y = -\beta$ απεικονίζεται στο κάτω μέρος της έλλειψης.

Αν $\beta = 0$ τότε το ευθύγραμμο τμήμα $y = 0,\ -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ απεικονίζεται στο ευθύγραμμο τμήμα $\upsilon = 0\ , -1 \le u \le 1$.

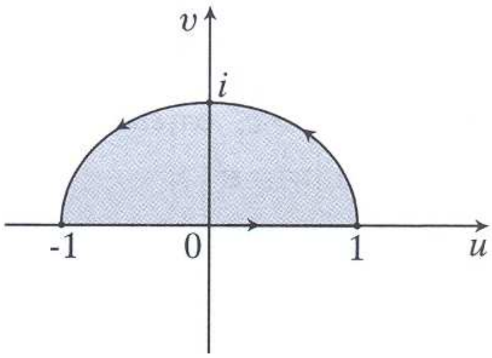


Εφαρμογή (εκθετικός μετασχηματισμός)

Να βρεθεί η εικόνα του πεδίου D του σχήματος μέσω της απεικόνισης $f(z)=e^{z}$.



Λύση: Καταρχήν ξέρουμε $f(0)=1$ και $f(\pi)=-1$. Επίσης, αν $x\leq 0$ και $y=0$ ισχύει ότι $w=e^{x}\in\mathbb{R}$, $0<w\leq 1$. Εξάλλου, αν $x=0$ και $0\leq y\leq\pi$ τότε $|w|=1$ και $0\leq\arg w\leq\pi$. Για $x\leq 0$ και $y=\pi$ προκύπτει ότι $w=-e^{-x}$ και $-1\leq w<0$.

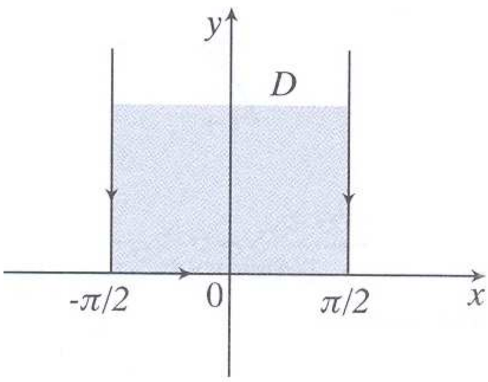


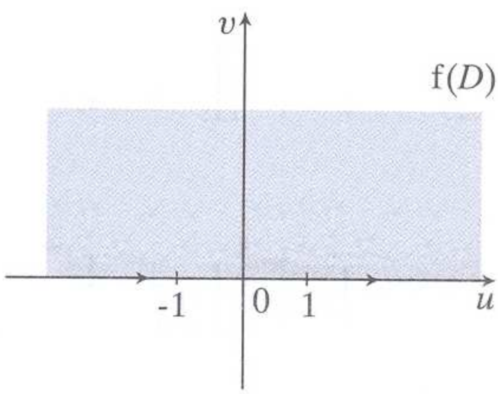
Εφαρμογή (Τριγωνομετρικός μετασχηματισμός)

Να δειχθεί ότι ο μετασχηματισμός $w = f(z) = \sin z$ απεικονίζει το πεδίο $D = \{z = x + iy : -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\ ,\ y > 0\}$ στο άνω ημιεπίπεδο.

Λύση: Αν $z = -\frac{\pi}{2} + iy$, $y \geq 0$, έχουμε $f(z) = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + iy\right) = -\cosh y$, οπότε η f απεικονίζει την ημιευθεία $z = -\frac{\pi}{2} + iy$, $y > 0$ στο διάστημα $(-\infty, -1]$. Το διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ απεικονίζεται στο διάστημα $[-1,1]$.

Αν $z = \frac{\pi}{2} + iy$, $y \geq 0$, έχουμε $f(z) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + iy\right) = \cosh y$, οπότε η f απεικονίζει την ημιευθεία $z = \frac{\pi}{2} + iy$, $y > 0$ στο διάστημα $[1, \infty)$. Άρα η f απεικονίζει το σύνορο του D στον άξονα των πραγματικών αριθμών και έτσι, από την αρχή της αντιστοιχίας των συνόρων , το D απεικονίζεται στο άνω ημιεπίπεδο.





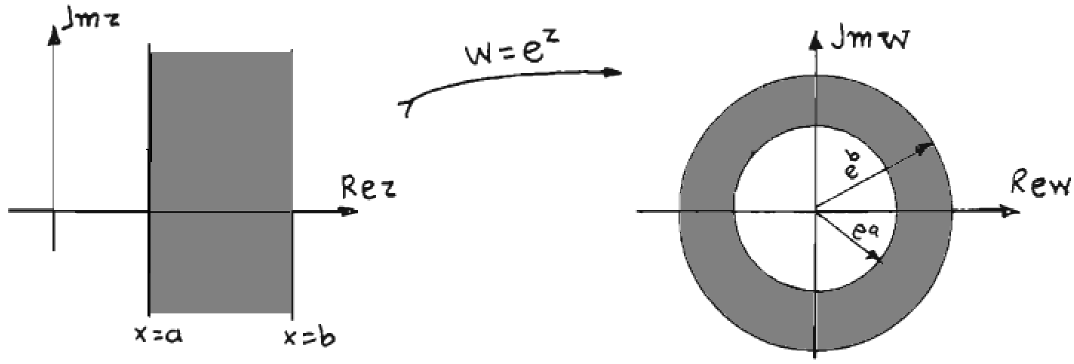
Εφαρμογή

α) Να βρεθεί μέσω του μετασχηματισμού $w = e^z$ η εικόνα του πεδίου $D = \{a < \operatorname{Re} z < b\ , a, b \in \mathbb{R}\}$

β) Να βρεθεί ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το πεδίο $0 < \operatorname{Re} z < 1$ στο πεδίο $e^2 < |w| < e^4$.

Λύση: α) Θεωρώ ένα τυχαίο σημείο του D, το $z = x + iy\ , a < x < b\ ,\ -\infty < y < +\infty$.

Έτσι ο μετασχηματισμός μας δίνει $w = e^{x+iy} \Rightarrow w = e^x e^{iy}$ και επειδή $|w| = e^x$ έχουμε $a < x < b \Rightarrow e^a < |w| < e^b$ καθώς και επειδή $\arg w = y$ παίρνουμε ότι $-\infty < y < +\infty \Rightarrow -\infty < \arg w < +\infty$. Συνεπώς το ζητούμενο πεδίο είναι το $e^a < |w| < e^b\ ,\ -\infty < \arg z < +\infty$ όπως φαίνεται και στο σχήμα.



β) Ο μετασχηματισμός $w_1 = 2z$ απεικονίζει το πεδίο $0 < \operatorname{Re} z < 1$ στο πεδίο $0 < \operatorname{Re} w_1 < 2$, ενώ ο μετασχηματισμός $w_2 = w_1 + 2$ απεικονίζει το πεδίο αυτό στο πεδίο $2 < \operatorname{Re} z < 4$.

Στη συνέχεια, ο $w = e^{w_2}$ απεικονίζει το πεδίο $2 < \operatorname{Re} z < 4$ στο πεδίο $e^2 < |w| < e^4$.Συνεπώς ο μετασχηματισμός που απεικονίζει απευθείας το $0 < \operatorname{Re} z < 1$ στο $e^2 < |w| < e^4$ είναι ο $w = e^{2z} + 2$.

Εφαρμογή

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το πεδίο $\frac{\pi}{4} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}$ στο άνω ημιεπίπεδο.

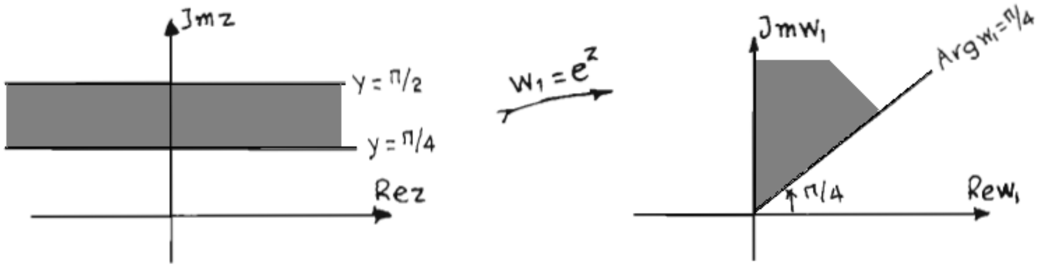
Λύση: Η διαδικασία που πρέπει να ακολουθήσουμε είναι η εξής: Πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον εκθετικό μετασχηματισμό ώστε να απεικονίσουμε την λωρίδα που είναι κάθετη στον άξονα y σε γωνία στο επίπεδο w. Στη συνέχεια θα πρέπει να στρέψουμε το πεδίο που θα προκύψει ώστε η μια ημιευθεία που σχηματίζει την γωνία να συμπίπτει με τον άξονα των πραγματικών στο επίπεδο w και στη συνέχει αυτό το πεδίο να το κάνουμε ίσο με το άνω ημιεπίπεδο.

Έστω τώρα, ένα τυχαίο σημείο του πεδίου, το

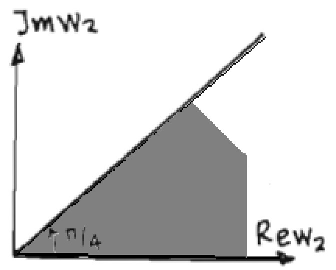
$$z = x + iy \ , \ -\infty < x < +\infty \, , \ \frac{\pi}{4} < y < \frac{\pi}{2}.$$

Χρησιμοποιώντας τον εκθετικό μετασχηματισμό $w_1 = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ προκύπτει ότι $|w_1| = e^x$, $-\infty < x < +\infty \Rightarrow 0 < |w_1| < +\infty$ και

$\arg w_1 = y$, $\frac{\pi}{4} < y < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} < \arg w_1 < \frac{\pi}{2}$ δηλαδή όπως φαίνεται και στο σχήμα



Στη συνέχεια, πρέπει να στρέψουμε το πεδίο που προέκυψε κατά γωνία $-\frac{\pi}{4}$ έτσι ώστε η μία πλευρά της γωνίας να συμπίπτει με τον άξονα των πραγματικών και αυτό γίνεται με τον μετασχηματισμό $w_2 = w_1 e^{-i\frac{\pi}{4}}$ οπότε και προκύπτει το πεδίο του σχήματος

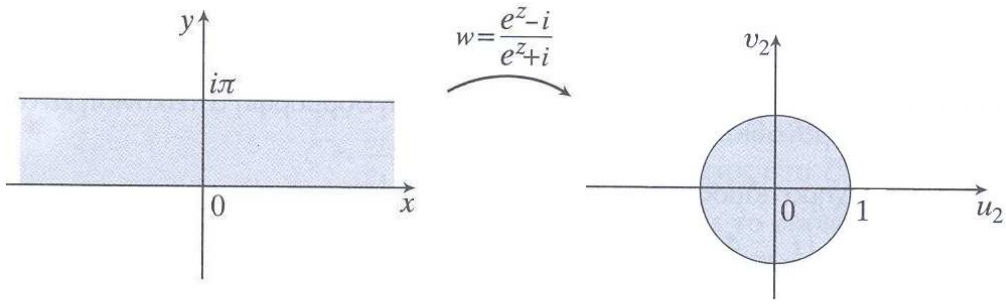


Τέλος, επειδή το πεδίο που έχουμε τώρα είναι το $0 < \arg w_2 < \frac{\pi}{4}$ πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό $w = w_2{}^4$ ώστε να τετραπλασιάσουμε την γωνία και να απεικονίζεται σε ολόκληρο το άνω ημιεπίπεδο.
Οπότε, καταλήγουμε ότι ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το πεδίο $\frac{\pi}{4} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}$ στο άνω ημιεπίπεδο είναι ο $w = \left(e^z e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^4 \Rightarrow w = e^{4z} e^{-i\pi} \Rightarrow w = -e^{4z}$.

Εφαρμογή

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το πεδίο $0 < y < \pi$ στον μοναδιαίο κύκλο.

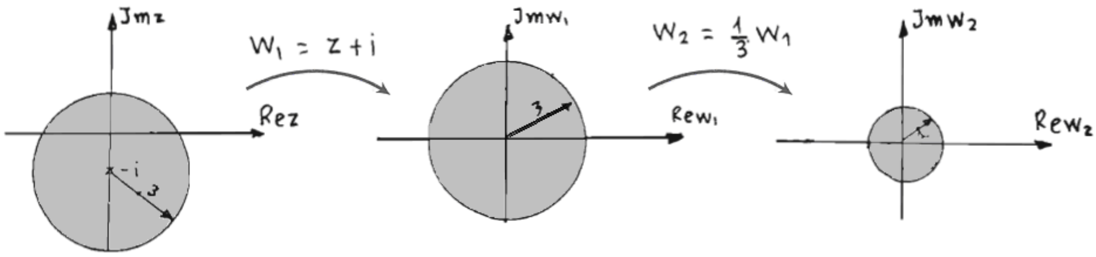
Λύση: Από την προηγούμενη εφαρμογή μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο μετασχηματισμός $w_1 = e^z$ απεικονίζει το πεδίο $0 < y < \pi$ στο άνω ημιεπίπεδο.
Ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το άνω ημιεπίπεδο στον μοναδιαίο δίσκο είναι ο $w_2 = \frac{w_1 - i}{w_1 + i}$ οπότε ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι ο $w = \frac{e^z - i}{e^z + i}$.



Εφαρμογή

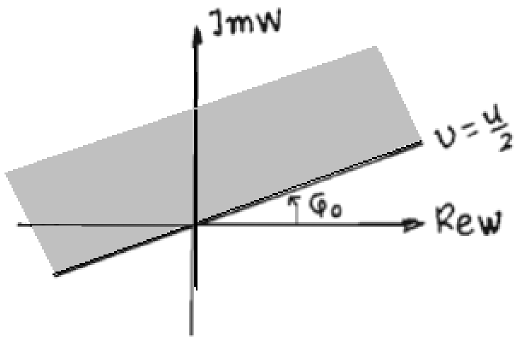
Να βρεθεί ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το δίσκο $|z+i|<3$ στο ημιεπίπεδο $2\operatorname{Im} w > \operatorname{Re} w$. Δίνεται ότι $-i \to i$.

Λύση: Αρχικά θεωρούμε τον μετασχηματισμό $w_1 = z+i$ ώστε να μετατοπίσουμε τον δίσκο για να έχει κέντρο τη αρχή των αξόνων. Στη συνέχεια παίρνουμε τον μετασχηματισμό $w_2 = \frac{1}{3} w_1$ έτσι ώστε να σμικρύνει τον κύκλο για να έχει ακτίνα ίση με το 1.



Σύμφωνα με προηγούμενη εφαρμογή, ο μετασχηματισμός που απεικονίζει τον μοναδιαίο δίσκο στο άνω ημιεπίπεδο είναι ο $w_3 = \dfrac{w_2 \bar{a} - a e^{i\theta}}{w_2 - e^{i\theta}}, \theta \in \mathbb{R}$.

Η σχέση $2\operatorname{Im} w > \operatorname{Re} w$ περιγράφει το ημιεπίπεδο που βρίσκεται πάνω από την ευθεία $\upsilon > \dfrac{u}{2}$ όπως φαίνεται στο σχήμα



Έτσι, ο μετασχηματισμός $w = w_3 e^{i\varphi_0}$ απεικονίζει το $\operatorname{Im} w_3 > 0$ στο ημιεπίπεδο $2\operatorname{Im} w > \operatorname{Re} w$. Οπότε ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι ο

$$w_3 = \frac{\frac{1}{3}(z+i)\bar{a} - ae^{i\theta}}{\frac{1}{3}(z+i) - e^{i\theta}} e^{i\varphi_0} \ , \ \theta \in \mathbb{R}$$

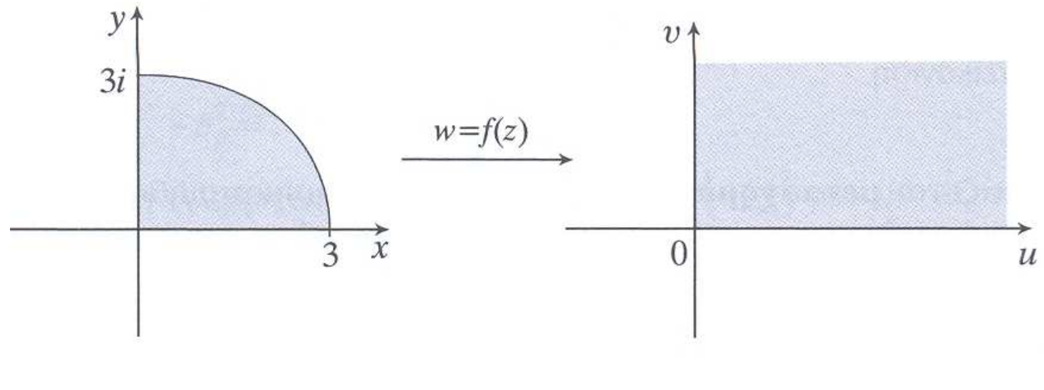
και επειδή $-i \to i$ έχουμε ότι $i = ae^{i\varphi_0} \Rightarrow a = ie^{i\varphi_0} = e^{i\left(\varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)}$.

Εφαρμογή

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το πρώτο τέταρτο του δίσκου $|z| < 3$ στο πρώτο τεταρτημόριο.

Λύση: Το πρώτο τέταρτο του δίσκου $|z| < 3$ απεικονίζεται στο άνω ήμισυ του μοναδιαίου δίσκου μέσω του μετασχηματισμού $w_1 = \frac{z^2}{9}$. Ο μετασχηματισμός $w_2 = i\frac{1-w_1}{1+w_1}$ απεικονίζει το άνω ήμισυ του μοναδιαίου δίσκου στο πρώτο τεταρτημόριο. Άρα ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι

$$w = f(z) = i\frac{1-w_1}{1+w_1} = i\frac{1-\frac{z^2}{9}}{1+\frac{z^2}{9}} = i\frac{9-z^2}{9+z^2}.$$



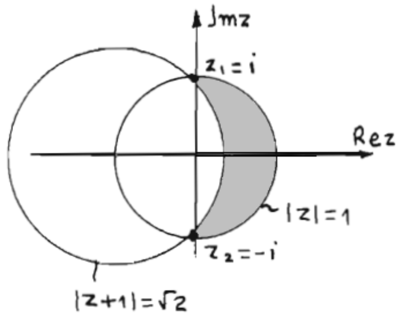
Εφαρμογή

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το πεδίο $D: \left\{|z| < 1 \ , |z+1| > \sqrt{2}\right\}$ στον μοναδιαίο δίσκο.

Λύση: Αρχικά θα βρούμε τα σημεία τομής των κύκλων $|z| = 1$ και $|z+1| = \sqrt{2}$.

$z=1 \Rightarrow z\bar{z}=1 \quad (1)$

$|z+1|=\sqrt{2} \Leftrightarrow (z+1)\left(\overline{z+1}\right)=2 \Leftrightarrow (z+1)\left(\bar{z}+1\right)=2 \Leftrightarrow z\bar{z}+z+\bar{z}+1=2$ και χρησιμοποιώντας την (1) προκύπτει $z+\bar{z}=0 \Leftrightarrow \bar{z}=-z$ και επειδή $|z|^2=1$ έχουμε ότι $z^2=-1 \Rightarrow z_1=i$, $z_2=-i$, όπου z_1 και z_2 τα σημεία τομής. Σχηματικά,



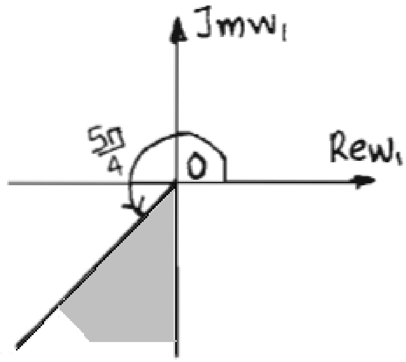
Τώρα, θα μετασχηματίσουμε τις περιφέρειες σε ευθείες μέσω του μετασχηματισμού $w_1=\dfrac{z-i}{z+i}$. Το πεδίο D αποτελείται από τα σημεία που βρίσκονται στο εσωτερικό της περιφέρειας $|z|=1$ και στο εξωτερικό της περιφέρειας $|z+1|=\sqrt{2}$, οπότε επειδή το σύνορο $|z|=1$ απεικονίζεται σε ευθεία και $i \to 0$ αρκεί να βρούμε την εικόνα ενός ακόμα σημείου.

Για $z=1$ ο μετασχηματισμός μας δίνει $w_1=\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=-i$ άρα το σύνορο του $z=1$ απεικονίζεται στο αρνητικό μέρος του άξονα των φανταστικών αριθμών.

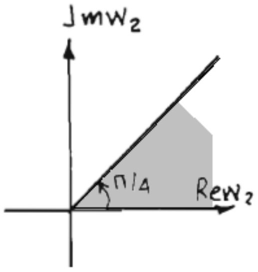
Ομοίως θα βρεθεί και η εικόνα του συνόρου $|z+1|=\sqrt{2}$.

$$z=\sqrt{2}-1 \Rightarrow w_1=\frac{\sqrt{2}-1-i}{\sqrt{2}-1+i}=\frac{1-\sqrt{2}+i\left(1-\sqrt{2}\right)}{2-\sqrt{2}}=\frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\left(1+i\right)$$

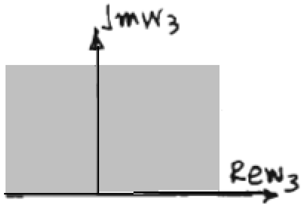
το οποίο σημαίνει ότι για το σημείο $z=\sqrt{2}-1$ ισχύει $\operatorname{Re} w_1=\operatorname{Im} w_1<0$ οπότε ο μετασχηματισμός w_1 απεικονίζει το D στο πεδίο του σχήματος



Στη συνέχεια, με τον μετασχηματισμό $w_2 = w_1 e^{-i\frac{5\pi}{4}}$ στρέφουμε το πεδίο κατά γωνία $-\frac{5\pi}{4}$ ώστε η μια πλευρά της γωνίας που έχουμε να συμπέσει με τον θετικό άξονα των πραγματικών αριθμών.



Ακόμα, θεωρούμε τον μετασχηματισμό $w_3 = w_2^{\,4}$ έτσι ώστε να μετασχηματίσουμε το παραπάνω πεδίο σε ολόκληρο το ημιεπίπεδο $\operatorname{Im} w_3 > 0$.



Τέλος, με τον μετασχηματισμό $w = e^{i\theta}\dfrac{w_3 - a}{w_3 - \bar{a}}$, $\theta \in \mathbb{R}$ απεικονίζουμε το άνω ημιεπίπεδο στον μοναδιαίο δίσκο $|w| < 1$.

Οπότε, ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το πεδίο $D : \left\{ |z| < 1 \ , |z+1| > \sqrt{2} \right\}$ στον μοναδιαίο δίσκο είναι ο

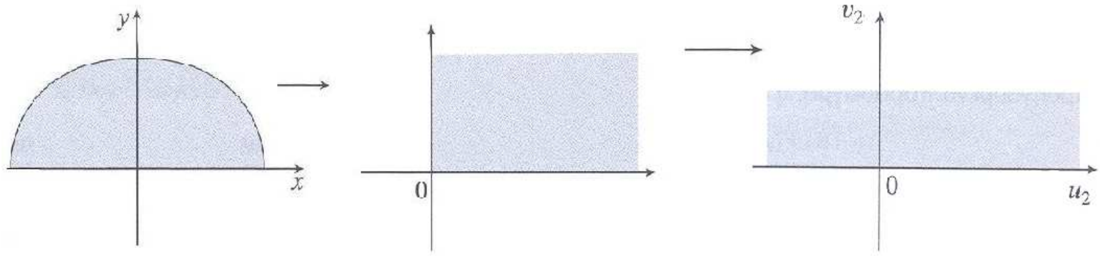
$$w = e^{i\theta} \frac{\left(\dfrac{z-i}{z+i} e^{-i\frac{5\pi}{4}} \right)^4 - a}{\left(\dfrac{z-i}{z+i} e^{-i\frac{5\pi}{4}} \right)^4 - \bar{a}} \ , \ \theta \in \mathbb{R} .$$

Εφαρμογή

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το ήμισυ του δίσκου $D = \left\{ z : |z| < 1, \ \operatorname{Im} z > 0 \right\}$ στον μοναδιαίο δίσκο.

Λύση: Από προηγούμενη εφαρμογή γνωρίζουμε ότι ο μοναδιαίος δίσκος απεικονίζεται στο άνω ημιεπίπεδο μέσω του μετασχηματισμού $w_1 = i\dfrac{1-z}{1+z}$.

Ισχύει $\phi\left(\dfrac{i}{2}\right) = \dfrac{4}{5} + i\dfrac{3}{5}$ οπότε ο μετασχηματισμός w_1 απεικονίζει το πεδίο D στο πρώτο τεταρτημόριο. Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό $w_2 = w_1^{\,2}$ ώστε να απεικονίσουμε το πρώτο τεταρτημόριο στο άνω ημιεπίπεδο.



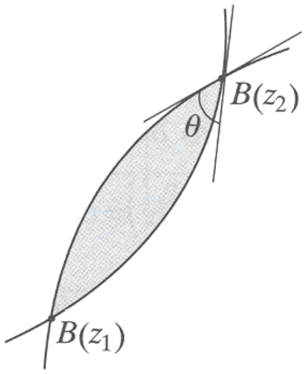
Τέλος, ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το άνω ημιεπίπεδο στον μοναδιαίο δίσκο είναι ο $w = \dfrac{i - w_2}{i + w_2}$. Οπότε ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το πεδίο D στον μοναδιαίο δίσκο $|w| < 1$ είναι ο

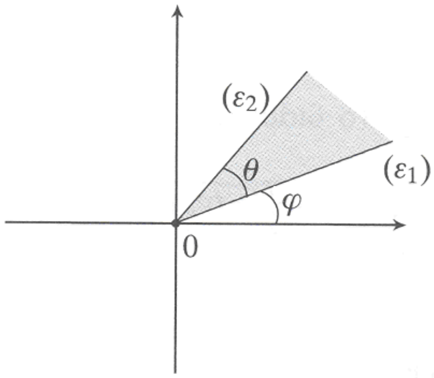
$$w = \frac{i - w_2}{i + w_2} = \frac{i - w_1^{\,2}}{i + w_1^{\,2}} = \frac{i - \left(i\dfrac{1-z}{1+z}\right)^2}{i + \left(i\dfrac{1-z}{1+z}\right)^2} = -i\frac{1 + 2iz + z^2}{1 - 2iz + z^2}$$

Εφαρμογή

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός που απεικονίζει ένα φακοειδή πεδίο που προκύπτει από την τομή δύο κυκλικών δίσκων στο άνω ημιεπίπεδο.

Λύση: Χρησιμοποιούμε αρχικά τον μετασχηματισμό $w_1 = \dfrac{z_1 - z}{z_2 - z}$ ο οποίος απεικονίζει το σημείο $z = z_1$ στο $w = 0$ και το σημείο $z = z_2$ στο σημείο $w = \infty$. Ο μετασχηματισμός αυτός, απεικονίζει επίσης τα κυκλικά τόξα του φακοειδούς πεδίου σε δύο ημιευθείες με αρχή την αρχή των αξόνων και σχηματίζουν γωνία θ μεταξύ τους, όπου θ είναι η γωνία τομής των εφαπτομένων σε ένα από τα σημεία τομής των δύο περιφερειών των κυκλικών δίσκων. Δηλαδή ο μετασχηματισμός απεικονίζει το φακοειδές πεδίο του επιπέδου z στο γωνιακό πεδίο του επιπέδου w.



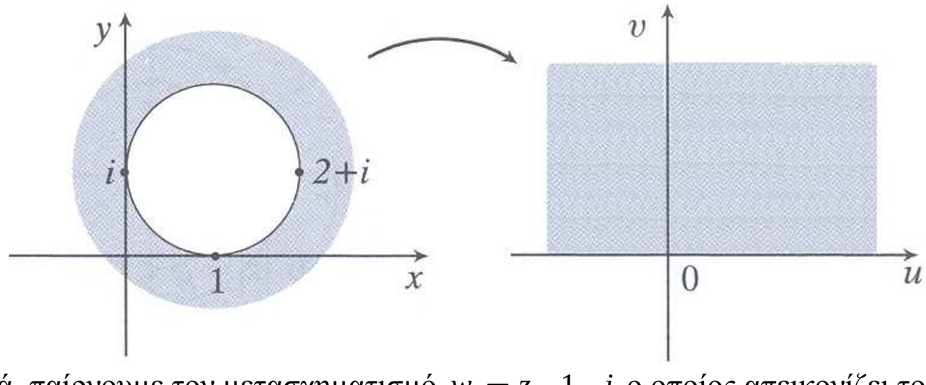


Στη συνέχεια, χρησιμοποθούμε τον μετασχηματισμό $w_2 = w_1^{\frac{\pi}{\theta}}$ για να απεικονίσουμε το γωνιακό πεδίο που έχουμε στο γωνιακό πεδίο $\frac{\phi}{\theta}\pi < \arg w_1 < \frac{\phi}{\theta}\pi + \pi$ το οποίο με τον σχηματισμό $w_3 = e^{-\frac{\phi}{\theta}\pi} w_2$ απεικονίζεται στο άνω ημιεπίπεδο. Συνεπώς ο ζητούμενος μετασχηματισμός της άσκησης είναι ο $w = e^{-\frac{\phi}{\theta}\pi}\left(\frac{z_1 - z}{z_2 - z}\right)^{\frac{\pi}{\theta}}$.

Εφαρμογή

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το πεδίο $|z-1-i|>1$ στο $\operatorname{Im} w > 0$.

Λύση:



Αρχικά, παίρνουμε τον μετασχηματισμό $w_1 = z - 1 - i$ ο οποίος απεικονίζει το πεδίο που έχουμε στο εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου.

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό $w_2 = \frac{1}{w_1}$ ο οποίος απεικονίζει το εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου στο εσωτερικό του. Τέλος, επειδή ο μετασχηματισμός $w_3 = i\frac{1-w_2}{1+w_2}$ απεικονίζει τον μοναδιαίο κύκλο στο άνω ημιεπίπεδο, συμπεραίνουμε ότι ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι $w = i\frac{z-2-i}{z-i}$.

1.5 Μετασχηματισμός Joukowski

Η απεικόνιση $w = f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ ονομάζεται **μετασχηματισμός Joukowski**. Η συνάρτηση αυτή είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, με το σημείο $z = 0$ να είναι πόλος και επειδή $f'(z) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right) \neq 0$ στο $\mathbb{C}$ εκτός των σημείων ± 1,προκύπτει ότι η f είναι σύμμορφη παντού εκτός αυτών των δύο σημείων.

Ο μετασχηματισμός Joukowski είναι πολύ χρήσιμος στην μελέτη υδροδυναμικών και αεροδυναμικών προβλημάτων, διότι μετασχηματίζει κύκλους σε σχήματα που μοιάζουν με φτερά αεροπλάνων και βοηθάνε στην μελέτη της ροής του αέρα γύρω από ένα φτερό.

Εύκολα συμπεραίνουμε ότι $f(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ το οποίο σημαίνει πως δύο σημεία του επιπέδου z, τα z_1, z_2 που έχουν την ιδιότητα $z_1 z_2 = 1$, έχουν την ίδια εικόνα στο επίπεδο w. Οπότε ο μετασχηματισμός Joukowski είναι αμφιμονοσήμαντος σε ένα πεδίο αν και μόνο δεν υπάρχουν δύο σημεία z_1, z_2 του πεδίου για τα οποία να ισχύει η σχέση $z_1 z_2 = 1$. Συνεπώς ο μετασχηματισμός Joukowski είναι αμφιμονοσήμαντος στα πεδία $|z| < 1$, $|z| > 1$, $\operatorname{Im} z > 0$, $\operatorname{Im} z < 0$.

Έστω $z = re^{i\theta}$ και $w = u + iv$. Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Joukowski

έχουμε $u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta$ και $\upsilon = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta$.

Είναι φανερό ότι η απεικόνιση του κύκλου $|z| = \rho < 1$ είναι η έλλειψη

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)^2} + \frac{\upsilon^2}{\frac{1}{4}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)^2} = 1$$

η οποία έχει ημιάξονες $a_\rho = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)$, $b_\rho = \frac{1}{2}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)$ και επειδή ${a_\rho}^2 - {b_\rho}^2 = 1$ έχει εστίες τα σημεία ± 1.

- Αν $\rho \to 1$ η έλλειψη εκφυλίζεται στο διάστημα $[-1,1]$ του άξονα u
- Αν $\rho \to 0$ οι άξονες της έλλειψης τείνουν στο άπειρο.

Επομένως, ο μετασχηματισμός Joukowski απεικονίζει σύμμορφα το πεδίο $|z| > 1$, δηλαδή το εξωτερικού του μοναδιαίου κύκλου, στο $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$, αφού $f(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$

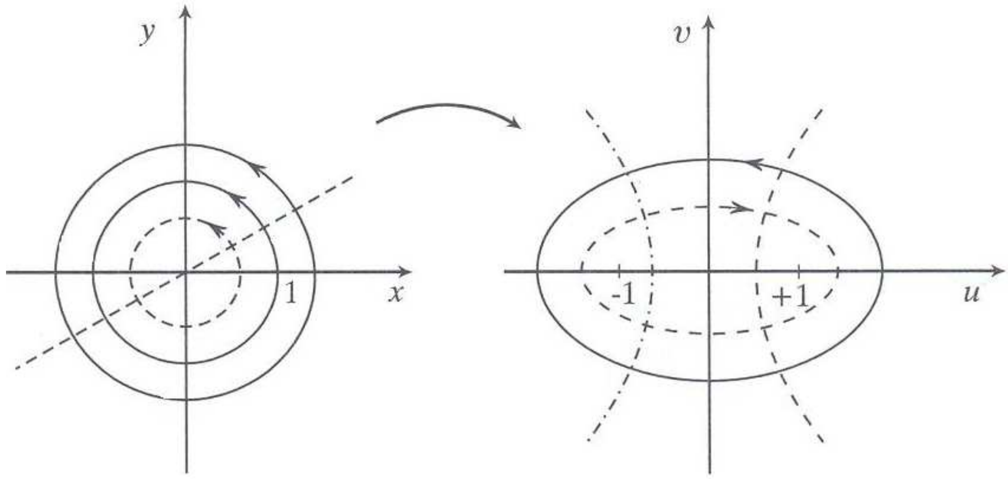
Έστω τώρα $z=\rho e^{i\theta}$ και $w=u+iv=|u+iv|e^{i\phi}$. Από τις σχέσεις $u=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta$ και $\upsilon=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta$ προκύπτει ότι

$$\tan\phi=\frac{\rho^2-1}{\rho^2+1}\tan\theta.$$

Από αυτή τη σχέση καταλαβαίνουμε ότι:

- Αν το z διατρέχει τον κύκλο $|z|=\rho<1$ κατά την θετική φορά, τότε το w διατρέχει την έλλειψη κατά την αρνητική φορά.
- Αν το z διατρέχει τον κύκλο $|z|=\rho>1$ κατά την θετική φορά, τότε το w διατρέχει την έλλειψη κατά την θετική φορά

Τέλος, θεωρούμε την ημιευθεία $z=\rho e^{ia}$, $0<\rho<\infty$, a σταθερός.
Ο μετασχηματισμός Joukowski απεικονίζει την ημιευθεία αυτή στην υπερβολή $\frac{u^2}{\cos^2 a}-\frac{\upsilon^2}{\sin^2 a}=1,\ a\neq\frac{k\pi}{2}$ με εστίες τα σημεία ±1 του άξονα των πραγματικών και ασύμπτωτες $\upsilon=\pm u\tan a$.



Εφαρμογή

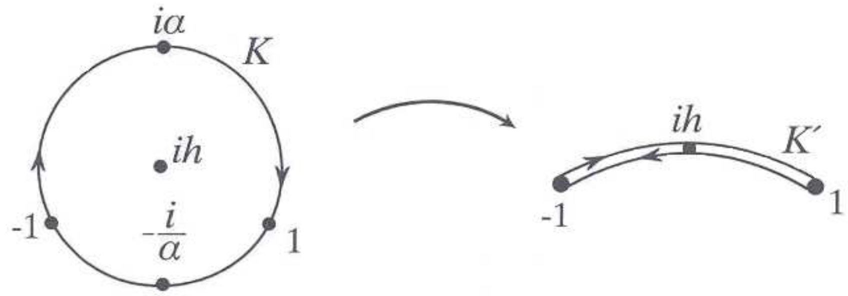
Να βρεθεί μέσω του μετασχηματισμού Joukowski η εικόνα του πεδίου $D=\left\{|z-ih|>\sqrt{1+h^2}\right\}, h\in\mathbb{R}$

Λύση: Το σύνορο του D είναι ο κύκλος K που έχει κέντρο το σημείο ih και διέρχεται από τα σημεία $z=-\frac{i}{a}, z=\pm1$, όπου $a=h+\sqrt{1+h^2}$.

Ο μετασχηματισμός Joukowski μπορεί να γραφεί και ως $\frac{w-1}{w+1}=\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$, οπότε αυτή η απεικόνιση μπορεί να θεωρηθεί ως σύνθεση των $w_2=\frac{1+w_1}{1-w_1},\ w_1=\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$.

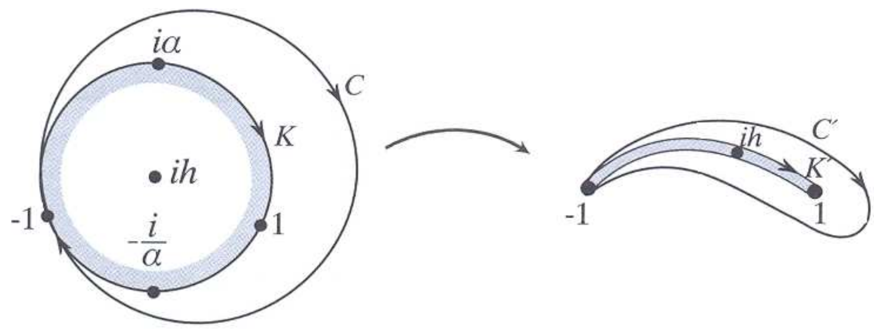
Μέσω της $w_1 = \left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^2$ ο κύκλος K απεικονίζεται σε μια ημιευθεία που συνδέει τα σημεία $z=0$ και $z=\infty$. Στη συνέχεια , η ευθεία απεικονίζεται μέσω της $w_2 = \dfrac{1+w_1}{1-w_1}$ σε ένα τόξο κύκλου K' με άκρα τα σημεία +1 και -1.

Ο μετασχηματισμός Joukowski όμως απεικονίζει το σημείο $z = ia$ στο $w = \dfrac{1}{2}\left(ia - \dfrac{i}{a}\right) = ih$ οπότε το τόξο K' διέρχεται από το σημείο $w = ih$.



Επομένως ο μετασχηματισμός Joukowski απεικονίζει σύμμορφα το εξωτερικό του κύκλου K στο εξωτερικό του τόξου K'.

Αξίζει να σημειωθεί ότι ο Joukowski για να υπολογίσει την ανυψωτική δύναμη που δρα στο φτερό ενός αεροπλάνου χρησιμοποίησε καμπύλες που προέκυψαν από την απεικόνιση ενός κύκλου C που έχει στο εσωτερικό του τον κύκλο K και εφάπτονται στο σημείο $z = -1$. Η καμπύλη C' που προκύπτει μοιάζει με φτερό αεροπλάνου.



Εφαρμογή

Να δειχθεί ότι ο μετασχηματισμός Joukowski απεικονίζει στο άνω ημιεπίπεδο, το πεδίο $D = \{|z| > 1,\ 0 < \arg z < \pi\}$.

Λύση: Θεωρούμε $z = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$ και παίρνουμε τον μετασχηματισμό Joukowski, οπότε $w = \dfrac{1}{2}\left(e^{i\theta} + \dfrac{1}{e^{i\theta}}\right) = \dfrac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) = \cos\theta$.

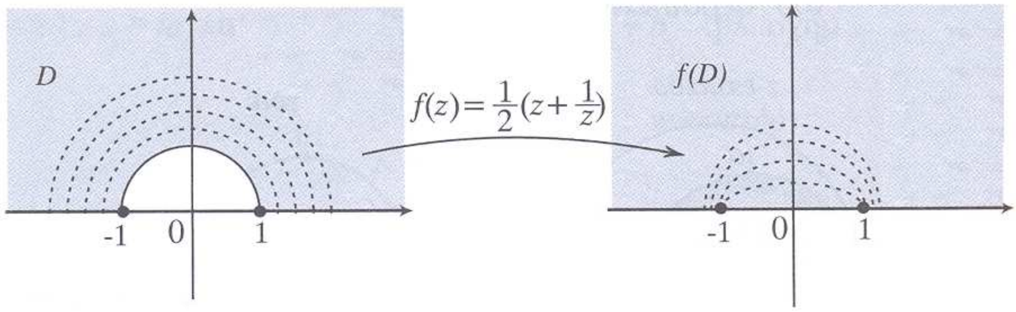
Επειδή $0 \le \theta \le \pi \Leftrightarrow -1 \le \cos\theta \le 1$, η εικόνα του άνω ημικυκλίου είναι το διάστημα $[-1,1]$.

Για $z = x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(z) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$ και όταν το x διατρέχει το διάστημα $[1,\infty)$ ή το $(-\infty,-1]$, τότε το $f(x)$ διατρέχει το ίδιο διάστημα.

Τώρα, ισχυριζόμαστε ότι ο μετασχηματισμός Joukowski είναι αμφιμονοσήμαντος στο D και όντως αν πάρουμε δύο σημεία $z_1, z_2 \in D$ και ισχύει $f(z_1) = f(z_2)$, τότε

$$z_1 + \frac{1}{z_1} = z_2 + \frac{1}{z_2} \Rightarrow (z_1 - z_2)(z_1 z_2 - 1) = 0$$

άρα $z_1 = z_2$ ή $z_1 z_2 = 1$, όμως $|z_1|,|z_2 > 1|$ δεν μπορεί να ισχύει $z_1 z_2 = 1$ συνεπώς αποδείχθηκε ότι ο μετασχηματισμός είναι αμφιμονοσήμαντος και σύμφωνα με την αρχή της αντιστοιχίας των συνόρων το πεδίο D απεικονίζεται στο άνω ημιεπίπεδο.



Εφαρμογή

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το πεδίο D της προηγούμενης εφαρμογής στον μοναδιαίο δίσκο.

Λύση: Γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός Joukowski απεικονίζει το πεδίο D στο άνω ημιεπίπεδο. Ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το άνω ημιεπίπεδο στο μοναδιαίο δίσκο είναι ο $w_2 = \frac{i - w_1}{i + w_1}$ (όπου w_1 ο μετασχηματισμός Joukowski),

οπότε ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι ο $w = \dfrac{i - \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)}{i + \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)} = -\dfrac{z^2 - 2iz + 1}{z^2 + 2iz + 1}$.

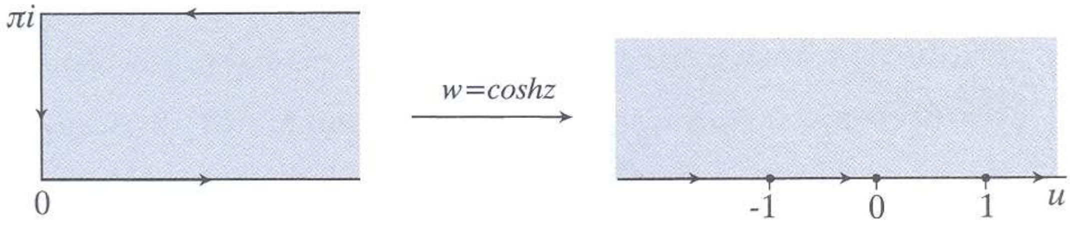
Εφαρμογή

Να δείξετε ότι ο μετασχηματισμός $w = \cosh z$ απεικονίζει την ημιλωρίδα $0 < \operatorname{Im} z < \pi$, $\operatorname{Re} z > 0$ στο άνω ημιεπίπεδο.

Λύση: Η ημιλωρίδα $0 < \operatorname{Im} z < \pi$, $\operatorname{Re} z > 0$ απεικονίζεται στο πεδίο $D = \{|w_1| > 1,\ 0 < \arg w_1 < \pi\}$ μέσω του μετασχηματισμού $w_1 = e^z$.

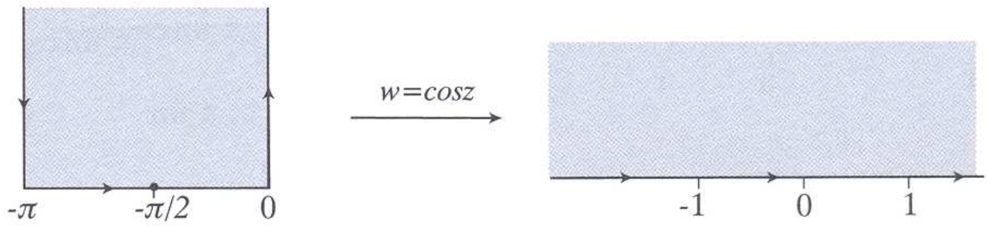
Στη συνέχεια, ο μετασχηματισμός Joukowski απεικονίζει το πεδίο αυτό στο άνω ημιεπίπεδο. Συνεπώς ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι ο

$$w = \frac{1}{2}\left(w_1 + \frac{1}{w_1}\right) = \frac{1}{2}\left(e^z + \frac{1}{e^z}\right) = \cosh z\,.$$



Εφαρμογή

Να δείξετε ότι η ημιλωρίδα $-\pi < \operatorname{Re} z < 0$, $\operatorname{Im} z > 0$ απεικονίζεται στο άνω ημιεπίπεδο μέσω του μετασχηματισμού $w = \cos z$.



Λύση: Επειδή $\cos z = \cosh(-iz)$, ο μετασχηματισμός $w = \cos z$ είναι σύνθεση των μετασχηματισμών $w_1 = -iz$ που είναι στροφή του πεδίου που έχουμε κατά γωνία $-\dfrac{\pi}{2}$ και του $w_2 = \cosh w_1$ ο οποίος όπως είδαμε στην προηγούμενη εφαρμογή απεικονίζει την ημιλωρίδα στο άνω ημιεπίπεδο.

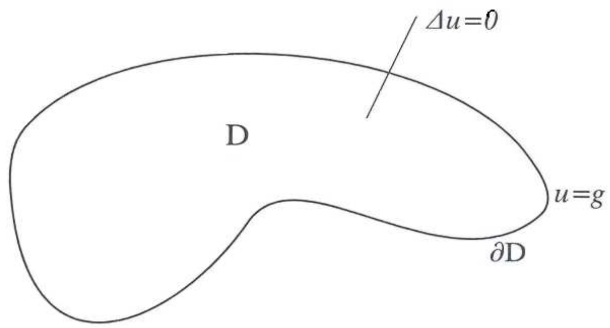
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

2.1 Προβλήματα συνοριακών τιμών

Πρόβλημα Dirichlet: Έστω D ένα πεδίο του $\mathbb{R}^2$ με σύνορο ϑD και g μια δοσμένη συνεχής συνάρτηση στο σύνορο. Το πρόβλημα Dirichlet συνίσταται στην εύρεση μιας συνάρτησης g που είναι αρμονική στο D, συνεχής στο $\overline{D} = D \cup \vartheta D$ και ταυτίζεται με την g πάνω στο σύνορο, δηλαδή

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \; \sigma\tau o \;\; D \\ u = g \;\; \sigma\tau o \; \vartheta D \end{cases} \qquad (1)$$

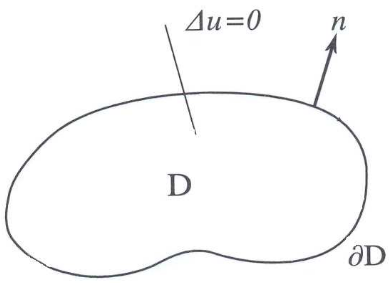
Αν το πρόβλημα αυτό έχει λύση, από την αρχή του μεγίστου για αρμονικές συναρτήσεις προκύπτει ότι η λύση αυτή είναι μοναδική.



Πρόβλημα Neumann: Έστω ένα πεδίο D με σύνορο ϑD και g μια δοσμένη συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο σύνορο. Το πρόβλημα Neumann συνίσταται στην εύρεση μιας συνάρτησης u που είναι αρμονική στο D, συνεχής στο $\overline{D} = D \cup \vartheta D$ και της οποίας η παράγωγος ως προς την κατεύθυνση της καθέτου σε κάθε σημείο του συνόρου να ταυτίζεται με την g, δηλαδή

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \;\; \sigma\tau o \;\; D \\ \dfrac{\vartheta u}{\vartheta n} = g \;\; \sigma\tau o \; \vartheta D \end{cases} \qquad (2)$$

όπου n το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο ϑD με κατεύθυνση προς τα έξω.



- Στα προβλήματα Neumann υποθέτουμε ότι το σύνορο ϑD είναι αρκετά λείο για να υπάρχει το κάθετο ως προς το σύνορο διάνυσμα n.

- Το πρόβλημα Neumann για να έχει λύση, πρέπει να ικανοποιεί την συνθήκη συμβιβαστότητας

$$\int_{\vartheta D} g ds = 0$$

η οποία προκύπτει από την σχέση $\iint_D \Delta u dx dy = \int_{\vartheta D} \frac{\vartheta u}{\vartheta n} ds$ καθώς και την σχέση (2) και η φυσική της ερμηνεία είναι η εξής: Υποθέτουμε ότι $u(x,y)$ είναι η λύση της στάσιμης κατανομής θερμοκρασίας εντός του πεδίου. Η συνάρτηση $\frac{\vartheta u}{\vartheta n}$ πάνω στο σύνορο παριστάνει την ροή θερμότητας κατά μήκος του. Έτσι, για να υπάρχει στάσιμη θερμοκρασία, πρέπει η συνολική ροή θερμότητας κατά μήκος του συνόρου να είναι 0.

- Η λύση του προβλήματος Neumann είναι μοναδική εκτός μιας προσθετικής σταθεράς.

Οι προτάσεις που ακολουθούν, είναι πολύ χρήσιμες για την μελέτη προβλημάτων συνοριακών τιμών με τη βοήθεια των σύμμορφων απεικονίσεων.

Πρόταση: Έστω συνάρτηση φ αρμονική σε ένα πεδίο $D \in \mathbb{C}$. Τότε η φ παραμένει αρμονική κάτω από κάθε σύμμορφο μετασχηματισμό.

Απόδειξη: Έστω ότι το D είναι απλά συνεκτικό και F ένας σύμμορφος μετασχηματισμός όπου $w = u + iv = F(z) = F(x+iy)$.

Ισχύει ότι υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση f ορισμένη στο D τέτοια ώστε

$$f(z) = \varphi(x,y) + iv(x,y)$$

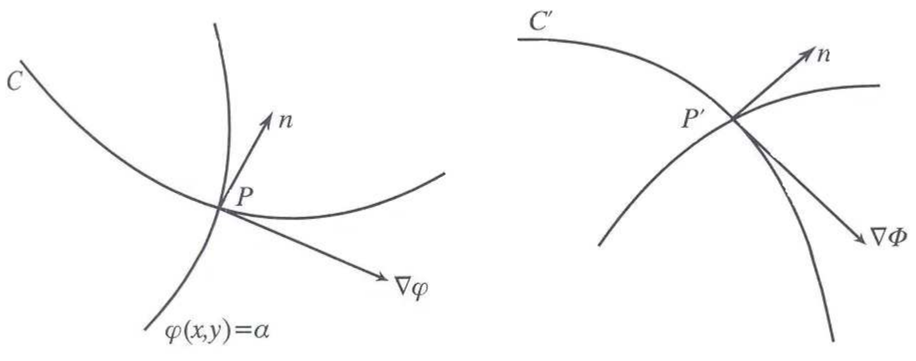
Έστω $g(w) = f(z) = f\left(F^{-1}(w)\right)$. Επειδή η F είναι σύμμορφη, η g είναι ολόμορφη στο $F(D)$. Έστω $g(w) = \phi(u,v) + iv(u,v)$. Τότε από την σχέση $g(w) = f(z)$ έχουμε

$$\phi(u,v) = \varphi\left(x(u,v), y(u,v)\right)$$

και επειδή $\phi = \operatorname{Re} g$ η ϕ θα είναι αρμονική στο $F(D)$.

Πρόταση: Έστω $w = F(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ μια σύμμορφη απεικόνιση ορισμένη στο πεδίο D, C μια λεία καμπύλη στο D και $C' = F(C)$. Αν η συνάρτηση $\varphi(x,y)$ ικανοποιεί τις συνθήκες $\varphi(x,y) = \kappa$, όπου κ σταθερά ή $\frac{\vartheta \varphi}{\vartheta n} = 0$ κατά μήκος της C τότε η συνάρτηση $\Phi(u,v) = \varphi\left(x(u,v), y(u,v)\right)$ ικανοποιεί τις συνθήκες $\Phi(u,v) = \kappa$ και $\frac{\vartheta \Phi}{\vartheta n} = 0$ κατά μήκος της C'.

Απόδειξη: Αν $\varphi = \kappa$ πάνω στη C, τότε $\phi = \kappa$ πάνω στη C'. Αν υποθέσουμε ότι $\frac{\vartheta\varphi}{\vartheta n} = \nabla\varphi \cdot n = 0$ πάνω στη C, όπου $\nabla\varphi = (\varphi_x, \varphi_y)$ και n είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στη C στο σημείο $P(x, y)$, τότε είτε $\nabla\varphi = 0$,είτε $\nabla\varphi$ είναι ορθογώνιο στο n. Αν $\nabla\varphi = 0$ τότε $\nabla\Phi = (\Phi_u, \Phi_\upsilon) = 0$, άρα $\frac{\vartheta\Phi}{\vartheta n} = 0$.
Έστω $\nabla\varphi \neq 0$, άρα το $\nabla\varphi$ είναι ορθογώνιο στο n. Αν $\nabla\varphi = 0$, τότε $\nabla\Phi = (\Phi_u, \Phi_\upsilon) = 0$, οπότε $\frac{\vartheta\Phi}{\vartheta n} = 0$.
Έστω $\nabla\varphi \neq 0$, άρα το $\nabla\varphi$ είναι ορθογώνιο στο n και επομένως εφαπτόμενο της C στο σημείο P.
Το $\nabla\varphi$ είναι ορθογώνιο στην καμπύλη $\varphi(x, y) = a$ που περνάει από το P. Η εικόνα της καμπύλης $\varphi(x, y) = a$ μέσω της F είναι η καμπύλη $\Phi(u, \upsilon) = a$ στο επίπεδο w. Επειδή η F είναι σύμμορφη, οι γωνίες μεταξύ καμπυλών διατηρούνται , οπότε η C' είναι ορθογώνια της καμπύλης $\Phi(u, \upsilon) = a$ στο P'. Συνεπώς το $\nabla\Phi = (\Phi_u, \Phi_\upsilon)$ είναι εφαπτόμενο της C' στο P' επομένως και ορθογώνιο στο μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της C' στο P', οπότε $\nabla\Phi \cdot n = 0$ και $\frac{\vartheta\Phi}{\vartheta n} = 0$ πάνω στη C'.



Για την λύση προβλημάτων συνοριακών τιμών για ένα πεδίο D του $\mathbb{R}^2$, χρησιμοποιώντας τις δύο προτάσεις ακολουθούμε την εξής διαδικασία

- Απεικονίζουμε το πεδίο D σε ένα απλούστερο D' μέσω μιας σύμμορφης απεικόνισης της μορφής $w = f(z) = u(x, y) + i\upsilon(x, y)$.
- Μετασχηματίζουμε τις συνοριακές συνθήκες από το αρχικό πεδίο στο καινούργιο.
- Λύνουμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών στο καινούργιο πεδίο D' και η λύση του είναι της μορφής $\Phi(u, \upsilon)$.
- Για να βρούμε την λύση του αρχικού προβλήματος θέτουμε $\varphi(x, y) = \Phi(u(x, y), \upsilon(x, y))$ και προκύπτει η λύση.

2.2 Εφαρμογές σε προβλήματα συνοριακών τιμών

Εφαρμογή (άπειρη λωρίδα)

Να λυθεί το πρόβλημα Dirichlet

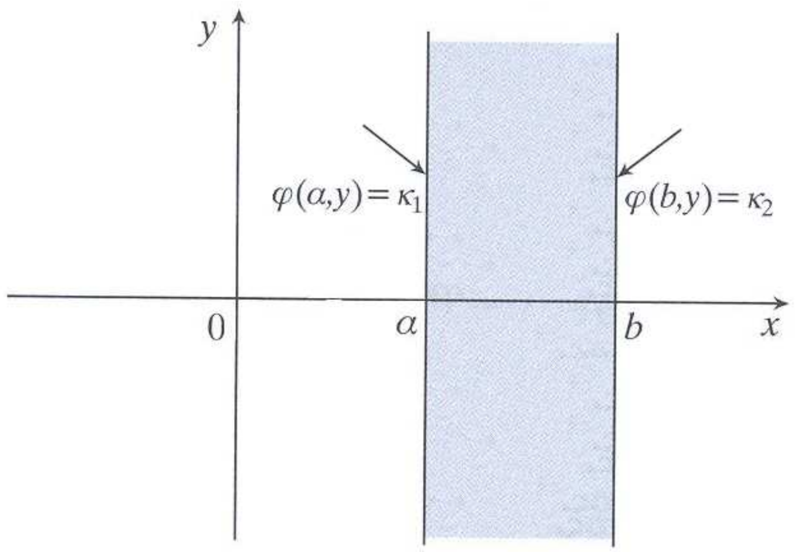
$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 \ , & a < x < b \, , \\ \varphi(a,y) = k_1 \ , & y \in \mathbb{R} \\ \varphi(b,y) = k_2 \ , & \end{cases}$$

Λύση: Είναι φανερό πως οι συνοριακές τιμές εξαρτώνται αποκλειστικά από το x οπότε προφανώς αναζητούμε μια λύση της μορφής $\varphi(x,y) = f(x) \quad a \le x \le b$.

Η σχέση $\Delta\varphi = 0$ που έχουμε, γράφεται ως $f''(x) = 0$ συνεπώς η $f(x)$ είναι της μορφής $f(x) = \lambda x + \mu$, όπου λ,μ σταθερές. Χρησιμοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες που έχουμε, μετά την διπλή ολοκλήρωση προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases} \lambda a + \mu = k_1 \\ \lambda b + \mu = k_2 \end{cases}$$ από το οποίο προκύπτουν τα λ και μ οπότε η τελική λύση είναι

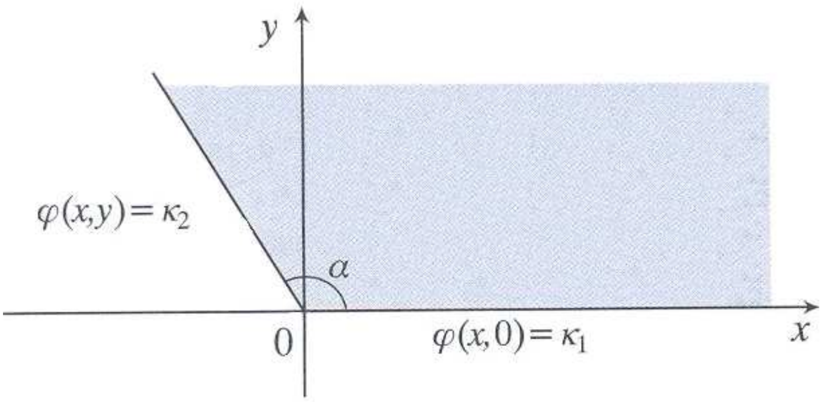
$$\varphi(x,y) = k_1 + \frac{k_2 - k_1}{b - a}(x - a)$$



Εφαρμογή (γωνιακό πεδίο)

Να λυθεί το πρόβλημα Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 \ , & 0 < \arg z < a \ (a \le \pi) \\ \varphi(x,0) = k_1 \ , & x > 0 \\ \varphi(x,y) = k_2 \ , & r > 0 \, , \theta = a \end{cases}$$



Η $\arg z$ είναι αρμονική συνάρτηση καθώς είναι το το φανταστικό μέρος της συνάρτησης $\log z$ και είναι σταθερή σε ημιευθείες με αρχή το 0. Η λύση που ψάχνουμε είναι της μορφής $\varphi(x,y)=b\arg z+c$ με $b,c\in\mathbb{R}$ αφού έχουμε ότι $\Delta\varphi=0$. Χρησιμοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες, λύνουμε το σύστημα που προκύπτει για να υπολογίσουμε τα b,c και τελικά η λύση είναι

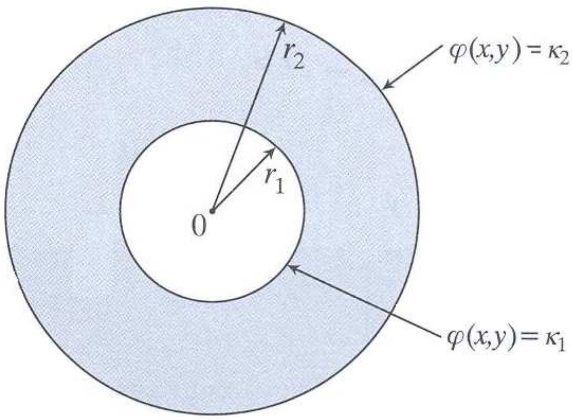
$$\varphi(x,y)=k_1+\frac{k_2-k_1}{a}\arg z\ .$$

Εφαρμογή (δακτύλιος)

Να λυθεί το πρόβλημα

$$\begin{cases}\Delta\varphi=0 \ \ , \quad r_1<|z|<r_2\\ \varphi(x,y)=k_1 \ , \ |z|=r_1\\ \varphi(x,y)=k_2 \ , \ |z|=r_2\end{cases}$$

Λύση:



Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος είναι ανεξάρτητες της γωνίας οπότε η λύση μας θα είναι μια αρμονική συνάρτηση ανεξάρτητη γωνίας, της μορφής

$$\varphi(x,y)=a+b\ln|z|\,,\, a,b\in\mathbb{R}\ .$$

Χρησιμοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες που μας δίνει το πρόβλημα υπολογίζουμε τις σταθερές a,b και προκύπτει η τελική λύση

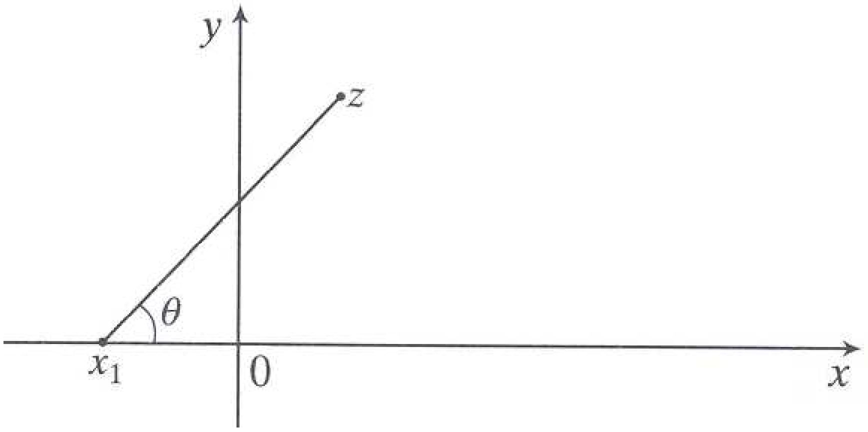
$$\varphi(x,y)=k_1+(k_2-k_1)\frac{\ln\left(\frac{|z|}{r_1}\right)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

Εφαρμογή (άνω ημιεπίπεδο)

Να λυθεί το πρόβλημα

$$\begin{cases}\Delta\varphi=0\,,\ -\infty<x<\infty,\ y>0\\ \varphi(x,0)=\begin{cases}a_0\,, -\infty<x<x_1\\ a_1\,,\quad x_1<x<\infty\end{cases},\ a_0,a_1\in\mathbb{R}\end{cases}$$

Λύση: Γνωρίζουμε ότι η γωνία θ ισούται με $\arg(z-x_1)$



Η λύση που θέλουμε είναι η συνάρτηση της μορφής

$$\varphi(x,y)=\lambda+\mu\arg(z-x_1)$$

η οποία είναι αρμονική στο άνω ημιεπίπεδο. Τώρα, λόγω των συνοριακών συνθηκών που μας δίνει αρχικά το πρόβλημα, πρέπει

$$\lambda=a_1\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \lambda+\mu\cdot\pi=a_0$$

Άρα η λύση του προβλήματος είναι η

$$\varphi(x,y)=a_1+\frac{1}{\pi}(a_0-a_1)\arg(z-x_1)\,.$$

Εφαρμογή

Να λυθεί το πρόβλημα Dirichlet

$$\begin{cases}\Delta\varphi=0\,,-\infty<x<\infty\ ,\ y>0\\ \varphi(x,0)=\begin{cases}a_0\,,-\infty<x<x_1\\ a_1\,,-x_1<x<x_2\\ \qquad\vdots\\ a_n\,,-x_n<x<\infty\end{cases}\end{cases}$$

Λύση: Όπως στην προηγούμενη εφαρμογή φτιάχνουμε μια συνάρτηση ίδιας μορφής, με την χρήση σειράς

$$\varphi(x,y)=a_n+\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{n}\left(a_{m-1}-a_m\right)\arg\left(z-x_m\right).$$

Για να είναι αυτή η συνάρτηση η λύση του προβλήματος πρέπει α) να είναι αρμονική για $y>0$ (δηλαδή στο άνω ημιεπίπεδο) καθώς και β) να ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες.

α)Η συνάρτηση είναι αρμονική στο άνω ημιεπίπεδο ως το φανταστικό μέρος της

ολόμορφης $$f(z)=ia_n+\sum_{m=1}^{n}\log\left(\frac{a_{m-1}-a_m}{\pi}\left(z-x_m\right)\right).$$

β)Έστω k μια σταθερή τιμή του m. Αν $z=x$ είναι ένα σημείο με $x_k<x<x_{k+1}$, τότε

$$\begin{cases}\arg(z-x_k)=0\ ,1\le m\le k\\ \arg(z-x_m)=\pi\ ,k+1\le m\le n\end{cases}.\quad \text{Άρα}$$

$$\varphi(x,0)=a_n+\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{n}\left(a_{m-1}-a_m\right)\arg\left(z-x_m\right)+\frac{1}{\pi}\sum_{m=k+1}^{n}\left(a_{m-1}-a_m\right)\arg\left(z-x_m\right)=$$

$$=a_n+\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{n}\left(a_{m-1}-a_m\right)\cdot 0+\frac{1}{\pi}\sum_{m=k+1}^{n}\left(a_{m-1}-a_m\right)\cdot\pi=$$

$$=a_n+\left(a_k-a_{k+1}\right)+\left(a_{k+1}-a_{k+2}\right)+\ldots+\left(a_{n-1}-a_n\right)=a_k$$

το οποίο σημαίνει ότι η συνάρτηση $\varphi(x,y)$ όντως ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος.

Εφαρμογή

Να λυθεί το πρόβλημα

$$\begin{cases}\Delta\varphi=0\,,-\infty<x<\infty\ ,y>0\\ \varphi(x,0)=\begin{cases}3\ ,\ -\infty<x<-3\\ 7\ ,\ -3<x<-1\\ 1\ ,\ -1<x<2\\ 4\ ,\ \ 2<x<\infty\end{cases}\end{cases}$$

Λύση: Το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι υποπερίπτωση του προηγούμενου έχοντας απλά $a_0=3, a_1=7, a_2=1, a_3=4, x_1=-3, x_2=-1, x_3=2$.

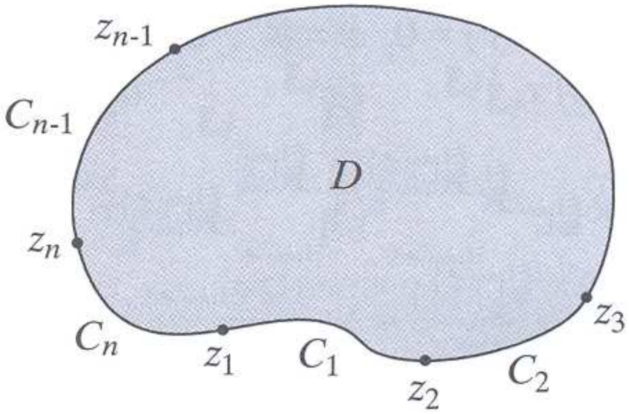
Οπότε η λύση του προβλήματος είναι

$$\varphi(x,y)=4-\frac{4}{\pi}\arg(z+3)+\frac{6}{\pi}\arg(z+1)-\frac{3}{\pi}\arg(z-2)=$$

$$=4-\frac{4}{\pi}arc\tan\left(\frac{y}{x+3}\right)+\frac{6}{\pi}arc\tan\left(\frac{y}{x+1}\right)-\frac{3}{\pi}arc\tan\left(\frac{y}{x-2}\right).$$

Μια γενίκευση των παραπάνω είναι η εξής:
Έστω ένα απλά συνεκτικό πεδίο D που περιορίζεται από μια απλή, κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη C και $z_1, z_2, ..., z_n$, n σημεία που βρίσκονται πάνω στη C διατεταγμένα. Έστω C_k το τόξο της καμπύλης που βρίσκεται μεταξύ z_k και z_{k+1}, $k = 1, 2, ..., n-1$ και έστω C_n το τόξο της καμπύλης που βρίσκεται μεταξύ των z_n και z_1. Έστω $a_1, a_2, ..., a_n$ σταθεροί αριθμοί στον $\mathbb{R}$. Το πρόβλημα που θέλουμε να λύσουμε είναι το ακόλουθο.

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 \; \sigma\tau o \; D \\ \varphi(x,y) = a_1 \; \gamma\iota\alpha \; z = x + iy \in C_1 \\ \varphi(x,y) = a_2 \; \gamma\iota\alpha \; z = x + iy \in C_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \varphi(x,y) = a_n \; \gamma\iota\alpha \; z = x + iy \in C_n \end{cases} .$$



Για να λύσουμε το πρόβλημα πρέπει να βρούμε μια σύμμορφη απεικόνιση της μορφής $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ του πεδίου D στο άνω ημιεπίπεδο $\operatorname{Im} w > 0$ ώστε τα σημεία $z_1, z_2, ..., z_n$ να απεικονίζονται στα σημεία $u_k = f(z_k)$, $k = 1, 2, ..., n-1$ και το z_n να απεικονίζεται στο $u_n = \infty$ του άξονα των πραγματικών στο επίπεδο w.
Έτσι λοιπόν, η απεικόνιση $f(z)$ δίνει ένα νέο πρόβλημα Dirichlet στο **άνω ημιεπίπεδο** του οποίου η λύση βρέθηκε σε προηγούμενη εφαρμογή. Αν τώρα θέσουμε $a_0 = a_n$, η λύση του προβλήματος είναι

$$\varphi(x,y) = a_{n-1} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\left(a_{k-1} - a_k\right)\arg\left(f(z) - u_k\right) =$$

$$= a_{n-1} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\left(a_{k-1} - a_k\right) arc\tan\frac{u(x,y)}{u(x,y) - u_k} \; .$$

Παρατήρηση: Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται μόνο αν μπορούμε να κατασκευάσουμε μια σύμμορφη απεικόνιση από το D στο άνω ημιεπίπεδο. Η ύπαρξη μιας τέτοιας απεικόνισης εξασφαλίζεται από το θεώρημα Riemann.

Εφαρμογή

Να λυθεί το πρόβλημα

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0\,, |z| < 1 \\ \varphi(x,y) = 0\,, z = e^{i\theta}\,, 0 < \theta < \pi \\ \varphi(x,y) = 1, z = e^{i\theta}\,, \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$$

Λύση: Μια σύμμορφη απεικόνιση που απεικονίζει το μοναδιαίο δίσκο του προβλήματος στο άνω ημιεπίπεδο είναι όπως είδαμε και στην ενότητα των σύμμορφων απεικονίσεων η

$$w = u + iv = \frac{i(1-z)}{1+z} = \frac{2y}{(x+1)^2 + y^2} + i\frac{1-x^2-y^2}{(x+1)^2+y^2}$$

Τώρα, είναι εύκολα κατανοητό ότι τα σημεία $z = x + iy$ τα οποία βρίσκονται στο άνω ημικύκλιο: $x^2 + y^2 - 1 = 0$, $y > 0$ απεικονίζονται στο θετικό ημιάξονα, ενώ αυτά που βρίσκονται στο κάτω ημικύκλιο απεικονίζονται στον αρνητικό ημιάξονα.

Έχουμε λοιπόν ένα νέο πρόβλημα στο επίπεδο w

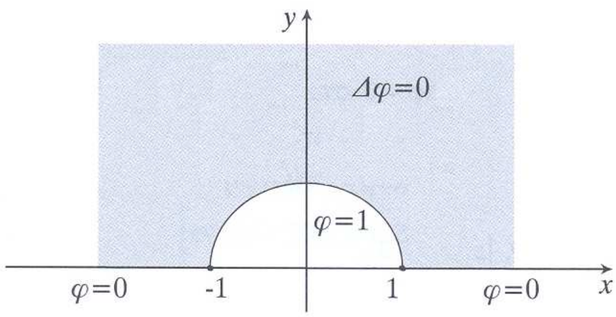
$$\begin{cases} \Delta\Phi = 0\,, -\infty < u < \infty\ \,, v > 0 \\ \Phi(u,0) = 0\,, u > 0 \\ \Phi(u,0) = 0\,, u < 0 \end{cases}$$

η λύση του οποίου βρίσκεται χρησιμοποιώντας την εφαρμογή για το άνω ημιεπίπεδο που είδαμε και πριν και είναι

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{\pi} arc\tan\frac{v(x,y)}{u(x,y)} = \frac{1}{\pi} arc\tan\frac{x^2 - y^2 - 1}{2y}.$$

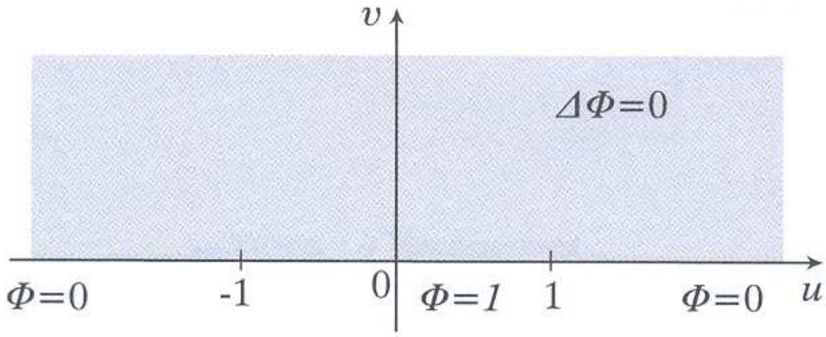
Εφαρμογή

Να λυθεί το πρόβλημα του ακόλουθου σχήματος



Λύση: Πρέπει να βρούμε ένα μετασχηματισμό ο οποίος θα μετασχηματίζει το παραπάνω πρόβλημα στο άνω ημιεπίπεδο. Ο μετασχηματισμός που ψάχνουμε είναι ο

Joukowski δηλαδή ο $w = f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ τον οποίο συναντήσαμε πιο πριν και ο οποίος μετασχηματίζει το δοσμένο πρόβλημα στο



όπου η λύση του όπως είδαμε και προηγουμένως, είναι

$$\Phi(u,\upsilon) = \frac{1}{\pi} arc\tan\left(\frac{2\upsilon}{u^2 + \upsilon^2 - 1}\right)$$

Στη συνέχεια, από τη σχέση $w = u(x,y) + i\upsilon(x,y) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ έχουμε ότι

$$u(x,y) = \frac{x\left(x^2 + y^2 + 1\right)}{2\left(x^2 + y^2\right)} \quad \text{και} \quad \upsilon(x,y) = \frac{y\left(x^2 + y^2 - 1\right)}{2\left(x^2 + y^2\right)}$$

οπότε η λύση του προβλήματος είναι

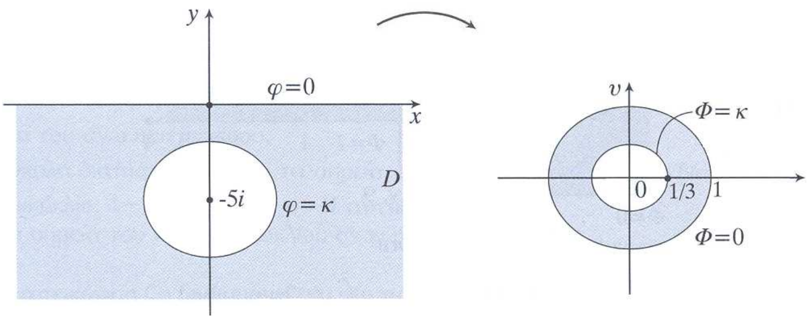
$$\varphi(x,y) = \frac{1}{\pi} arc\tan\left(\frac{4y\left(x^2 + y^2 - 1\right)}{\left(x^2 + y^2\right)\left(x^2 + y^2 - 4\right) + \left(2x^2 - 2y^2 + 1\right)}\right).$$

Εφαρμογή

Να λυθεί το πρόβλημα για το πεδίο $D = \{z : \operatorname{Im} z < 0, |z + 5i| > 3\}$

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 \,, \sigma\tau o\, D \\ \varphi(x,0) = 0 \\ \varphi(x,y) = k \,, |z + 5i| = 3 \end{cases}$$

Λύση: Όπως είχαμε δει στην ενότητα των σύμμορφων απεικονίσεων , ο μετασχηματισμός $w = \frac{z + 4i}{z - 4i}$ απεικονίζει το πεδίο D στο δακτύλιο $\frac{1}{3} < |w| < 1$.



Η λύση του προβλήματος στον δακτύλιο είναι $\Phi(u,\upsilon)=-k\dfrac{\ln|w|}{\ln 3}$, επομένως η λύση που ζητάμε, δηλαδή η λύση στο πεδίο D είναι

$$\varphi(x,y)=-\frac{k}{\ln 3}\ln\left|\frac{z+4i}{z-4i}\right|=-\frac{k}{2\ln 3}\ln\left(\frac{x^2+(y+4)^2}{x^2+(y-4)^2}\right).$$

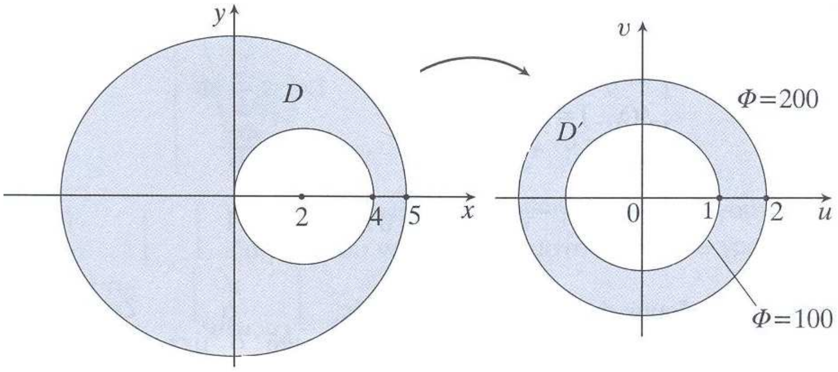
Εφαρμογή

Να λυθεί το πρόβλημα για το πεδίο $D=\{z:|z|<5\,,|z-2|>2\}$

$$\begin{cases}\Delta\varphi=0\,,\text{στο}\,D\\ \varphi(x,y)=100\,,|z|=5\\ \varphi(x,y)=200\,,|z-2|=2\end{cases}$$

Λύση: Πρέπει να βρούμε ένα διγραμμικό μετασχηματισμό ώστε να απεικονίσουμε το πεδίο του προβλήματος σε ένα δακτύλιο.
Δύο σημεία που είναι συμμετρικά ως προς τους κύκλους του πεδίου D δηλαδή τους κύκλους $|z|=5$ και $|z-2|=2$ ικανοποιούν την εξίσωση

$$2x^2-25x+50=2 \quad\Rightarrow\quad x_1=\frac{5}{2}\ ,\ x_2=10$$



Ο διγραμμικός μετασχηματισμός είναι της μορφής $w=\lambda\dfrac{z-10}{2z-5}$ και αν το $z=5$ απεικονίζεται στο $w=-1$ τότε το $\lambda=-1$ άρα ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το D στο D' είναι ο $w=\dfrac{z-10}{2z-5}$.

Η λύση του προβλήματος στο D' είναι $\Phi(u,\upsilon)=100+100\dfrac{\ln|w|}{\ln 2}$ ενώ η λύση στο D είναι $\varphi(x,y)=100+100\dfrac{\ln|w(x,y)|}{\ln 2}$ με $w=u+i\upsilon\Rightarrow$

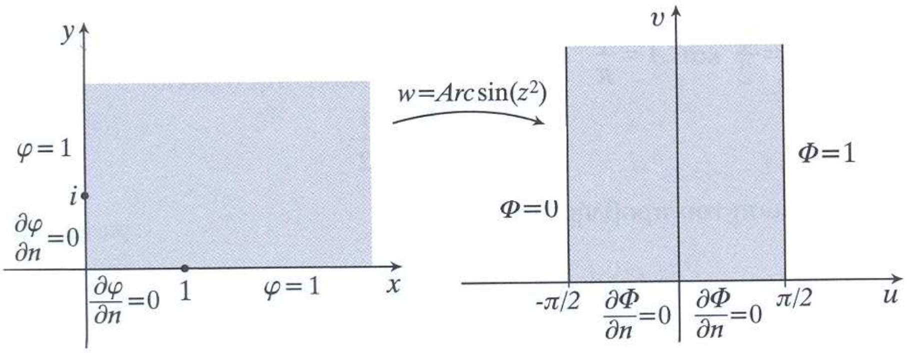
$$u(x,y)=\frac{2x^2+2y^2-25x+50}{(2x-5)^2+4y^2}\ ,\ \upsilon(x,y)=\frac{15y}{(2x-5)^2+4y^2}.$$

Εφαρμογή

Να λυθεί το πρόβλημα

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0\,,\, x, y > 0 \\ \varphi(x,0) = 1\,,\, x > 1 \\ \varphi(0,y) = 0\,,\, y > 1 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial n} = 0\,,\, 0 < y < 1,\ x = 0\ \ \kappa\alpha\iota\ 0 < x < 1,\, y > 0 \end{cases}$$

Λύση: Έχουμε ένα πεδίο(το πρώτο τεταρτημόριο) το οποίο δεν μας βολεύει για να λύσουμε το πρόβλημα. Με χρήση του μετασχηματισμού $w = z^2$ μπορούμε να το απεικονίσουμε στο άνω ημιεπίπεδο, ενώ με τον μετασχηματισμό $w = arc\sin z$ μπορούμε να απεικονίσουμε το άνω ημιεπίπεδο στην ημιάπειρη λωρίδα $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2},\ \upsilon > 0$. Συνεπώς με τον μετασχηματισμό $w = arc\sin\left(z^2\right)$ μπορούμε να απεικονίσουμε το πρώτο τεταρτημόριο στο πεδίο $D = \left\{(u,\upsilon) : -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2},\ \upsilon > 0\right\}$.



Έτσι λοιπόν το αρχικό πρόβλημα συνοριακών τιμών γίνεται

$$\begin{cases} \Delta\Phi = 0\,, -\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2}, \upsilon > 0 \\ \Phi\left(-\dfrac{\pi}{2}, \upsilon\right) = 0\,,\ \upsilon > 0 \\ \Phi\left(\dfrac{\pi}{2}, \upsilon\right) = 1\,,\ \upsilon > 0 \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial n} = 0\,, -\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2},\ \upsilon = 0 \end{cases}$$

Μια λύση Φ του νέου προβλήματος που προκύπτει στο πεδίο D είναι η $\Phi(u,\upsilon) = Au + B$, Α,Β σταθερές.

Για την συνοριακή καμπύλη $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2},\ \upsilon = 0$ έχουμε ότι $n = (0,-1)$ άρα

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \nabla\Phi \cdot n = A \cdot 0 + 0(-1) = 0$$

οπότε η συνοριακή συνθήκη ικανοποιείται για κάθε $A, B \in \mathbb{R}$.
Από τις άλλες δύο συνοριακές συνθήκες του προβλήματος προκύπτει ότι

$$\left\{\begin{array}{l} \Phi\left(-\dfrac{\pi}{2}, \upsilon\right) = -A\dfrac{\pi}{2} + B = 0 \\ \Phi\left(\dfrac{\pi}{2}, \upsilon\right) = A\dfrac{\pi}{2} + B = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{A} = \frac{1}{\pi}, \quad \mathrm{B} = \frac{1}{2}$$

άρα, $\Phi(u, \upsilon) = \dfrac{1}{\pi}u + \dfrac{1}{2}$, οπότε η λύση του αρχικού προβλήματος είναι

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left[arc\sin\left(z^2\right)\right] + \frac{1}{2}.$$

2.3 Πρόβλημα Dirichlet για ένα δίσκο

Ολοκληρωτικός τύπος Poisson - Πυρήνας Poisson

Έστω $D = \{z : |z| < R\}$ και $f(z)$ μια ολόμορφη συνάρτηση στο D και συνεχής στο $\overline{D}$. Αν $z \in D$ και $z \neq 0$, τότε σύμφωνα με τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy έχουμε

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

με C τον θετικά προσανατολισμένο κύκλο $|z| = R$.

Έστω τώρα το συμμετρικό του z ως προς τον κύκλο C, το z_1. Τότε $z_1 = \dfrac{R^2}{\overline{z}}$.
Επειδή όμως το z_1 βρίσκεται στο εξωτερικό του C, με χρήση του θεωρήματος Cauchy-Goursat, προκύπτει ότι

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1}d\zeta = 0.$$

Άρα,
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_1}\right) f(\zeta)d\zeta. \quad (1)$$

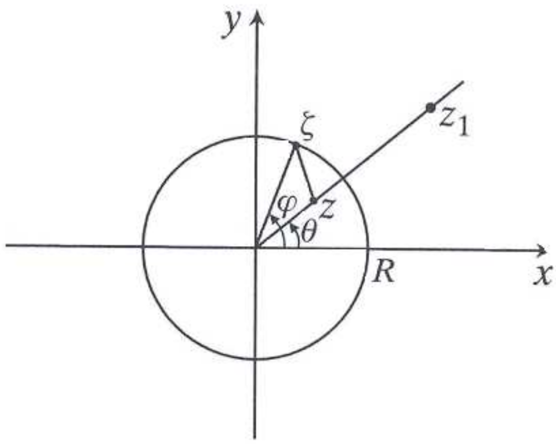
Θεωρούμε την ποσότητα

$$\frac{\zeta}{\zeta - z} - \frac{\zeta}{\zeta - z_1} = \frac{\zeta}{\zeta - z} - \frac{\zeta}{\zeta - \dfrac{\zeta\overline{\zeta}}{\overline{z}}} = \frac{\zeta}{\zeta - z} + \frac{\overline{z}}{\overline{\zeta} - \overline{z}} = \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} \qquad (2).$$

Για $\zeta = Re^{i\varphi} \;\kappa\alpha\iota\; z = re^{i\theta}$ έχουμε

$$\frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\varphi - \theta) + r^2}$$

αφού η ποσότητα $|\zeta - z|$ παριστάνει την απόσταση των ζ και z



και με τη χρήση του νόμου των συνημιτόνων

$$\left|\zeta - z\right|^2 = R^2 - 2Rr\cos(\varphi - \theta) + r^2 > 0$$

Έχουμε ακόμα, ότι $d\zeta = iRe^{i\varphi}$ $\kappa\alpha\iota$ $d\varphi = i\zeta d\varphi$ άρα η σχέση (1) γράφεται

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos\left(\varphi - \theta\right) + r^2} f\left(\mathrm{R}\, e^{i\varphi}\right) d\varphi .$$

Αν το πραγματικό μέρος της ολόμορφης συνάρτησης είναι u τότε από (1) έχουμε

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\left(R^2 - r^2\right)u\left(R,\varphi\right)}{R^2 - 2Rr\cos\left(\varphi - \theta\right) + r^2} d\varphi \text{ , } r < R$$

Αυτός ο τύπος λέγεται **ολοκληρωτικός τύπος Poisson** για την αρμονική συνάρτηση u στο δίσκο $\left|z\right| < R$.

Η συνάρτηση $$P(R,r,\varphi - \theta) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\varphi - \theta) + r^2}$$

ονομάζεται **πυρήνας Poisson.**

Ιδιότητες του πυρήνα Poisson

1)Από τη σχέση (2) έχουμε

$$P(R,r,\varphi - \theta) = \frac{\zeta}{\zeta - z} + \frac{\overline{z}}{\overline{\zeta} - \overline{z}} = \frac{z}{\zeta - z} + \frac{\overline{\zeta}}{\overline{\zeta} - \overline{z}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z} - \frac{\overline{\zeta} + \overline{z}}{\overline{\zeta} - \overline{z}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\right).$$

Η συνάρτηση $g(z) = \dfrac{\zeta + z}{\zeta - z}$ είναι ολόμορφη εντός του δίσκου $\left|z\right| < R$. Οπότε το πραγματικό της μέρος που είναι $P(R,r,\varphi - \theta)$ θα είναι αρμονική συνάρτηση εντός του δίσκου.

2)Η συνάρτηση $u(r,\theta) = 1$ είναι αρμονική, οπότε από τον ολοκληρωτικό τύπο Poisson προκύπτει $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} P(R,r,\varphi - \theta) d\varphi = 1$

3)Για R,r,θ σταθερά, η μέγιστη τιμή της $P(R,r,\varphi-\theta),\varphi\in[0,2\pi]$, λαμβάνεται για $\varphi=\theta$ και είναι $\max\limits_{0\le\varphi\le2\pi} P(R,r,\varphi-\theta)=\dfrac{R+r}{R-r}$ η οποία για $r\to R$ τείνει στο άπειρο.
Η ελάχιστη τιμή της $P(R,r,\varphi-\theta)$ λαμβάνεται είτε για $\varphi=\theta+\pi$ ή για $\varphi=\theta-\pi$ και είναι $\min\limits_{0\le\varphi\le2\pi} P(R,r,\varphi-\theta)=\dfrac{R-r}{R+r}$ η οποία για $r\to R$ τείνει στο 0.

Θεώρημα λύσης του προβλήματος Dirichlet για ένα δίσκο

Έστω $g(\theta)\,, 0\le\theta\le2\pi$ μια δοσμένη συνεχής συνάρτηση πάνω στον κύκλο $C:|z|=R$ με περίοδο 2π . Θεωρούμε την συνάρτηση

$$\begin{cases} u(r,\theta)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} P(R,r,\varphi-\theta)g(\varphi)d\varphi, 0\le r<R \\ u(R,\theta)=g(\theta) \end{cases}$$

Τότε η u είναι αρμονική στο εσωτερικό του κύκλου $|z|=R$ και συνεχής στο $|z|\le R$.

Απόδειξη: Η συνάρτηση P είναι αρμονική ως προς r,θ στο εσωτερικό του κύκλου C όπως είδαμε στις ιδιότητες πριν, άρα και η συνάρτηση $u(r,\theta)$ είναι αρμονική στο εσωτερικό του κύκλου C .
Μας μένει λοιπόν να δείξουμε τη συνέχεια της u στον κλειστό δίσκο $|z|\le R$.
Έστω $\mathrm{R}\,e^{ia}$, $a\in\mathbb{R}$ ένα σταθερό σημείο πάνω στον κύκλο C . Θα δείξουμε ότι όταν $r\to R$ και $\theta\to a$, τότε $u(r,\theta)\to g(a)$.Από την 2η ιδιότητα του πυρήνα Poisson έχουμε $u(r,\theta)-g(a)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} P(R,r,\varphi-\theta)\big(g(\varphi-g(a)\big)d\varphi$.
Έστω ε θετικό. Επειδή η g είναι συνεχής πάνω στη C , υπάρχει $\beta>0$ τέτοιο ώστε

$$|g(\varphi)-g(a)|<\frac{\varepsilon}{2}\ \forall\varphi$$

με $|\varphi-a|<\beta$, δηλαδή για κάθε φ τέτοιο ώστε το $R\,e^{i\varphi}$ να βρίσκεται στο τόξο C_1 που φαίνεται στο σχήμα παρακάτω.
Είναι φανερό ότι $u(r,\theta)-g(a)=I_1+I_2$, με

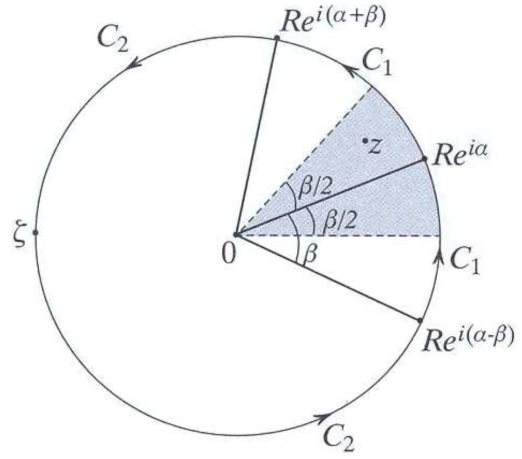
$$2\pi i I_1=\int_{a-\beta}^{a+\beta} P(R,r,\varphi-\theta)\big(g(\varphi)-g(a)\big)d\varphi$$

και

$$2\pi i I_2=\int_{a+\beta}^{a-\beta+2\pi} P(R,r,\varphi-\theta)\big(g(\varphi)-g(a)\big)d\varphi\ .$$

Επειδή $0\le P(R,r,\varphi-\theta)$ για $r\le1$ έχουμε

$$|I_1| \le \frac{1}{2\pi}\int_{a-\beta}^{a+\beta} P(R,r,\varphi-\theta)|g(\varphi)-g(a)|d\varphi < \frac{\varepsilon}{4\pi}\int_0^{2\pi} P(R,r,\varphi-\theta)d\varphi = \frac{\varepsilon}{2}.$$



Έστω $C_2 = C / C_1$. Είναι φανερό ότι υπάρχει $m > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε z εντός του γραμμοσκιασμένου τμήματος όπου $|\theta - a| < \frac{\beta}{2}$ και κάθε $\zeta \in C_2$ να ισχύει $m \le |\zeta - z|^2$.

Άρα

$$|I_2| \le \frac{1}{2\pi}\int_{a+\beta}^{a-\beta+2\pi} \frac{\left(R^2-r^2\right)}{|\zeta - z|^2}|g(\varphi)-g(a)|d\varphi < \frac{2\pi M\left(R^2-r^2\right)}{2\pi m},$$

όπου $M = \max\limits_{\varphi\in C_2}|g(\varphi)-g(a)|$. Επειδή όμως $R + r < 2R$ θα έχουμε

$$|I_2| < \frac{2M\left(R-r\right)}{m} < \frac{2M\delta}{m} = \frac{\varepsilon}{2}$$

αν $|r-R| < \delta$, όπου $\delta = \frac{m\varepsilon}{4M}$.

Επομένως,

$$|u(r,\theta)-g(a)| \le |I_1| + |I_2| < \varepsilon$$

για κάθε r με $|r-R| < \delta$ και θ $\mu\varepsilon$ $|\theta - \alpha| < \frac{\beta}{2}$.

Παρατηρήσεις: i) Η λύση του προβλήματος Dirichlet για τον δίσκο είναι μοναδική λόγω της αρχής του μεγίστου μέτρου

ii) Η λύση του προβλήματος μπορεί να βρεθεί και με άλλους τρόπους

iii) Σε περίπτωση που η g είναι τμηματικά συνεχής πάνω στον κύκλο C το θεώρημα γενικεύεται.

Αν $R = 1$ από την πρώτη ιδιότητα του πυρήνα Poisson έχουμε

$$u(z) = \mathrm{Re}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{\zeta + z}{\zeta - z}u(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}, |z| < 1 .$$

Εφαρμογή

Να λυθεί το πρόβλημα

$$\begin{cases} \Delta u = 0\,, 0 < r < 1,\ 0 < \theta < 2\pi \\ u(1,\theta) = \dfrac{\sin\theta}{5+4\cos\theta}\,, 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

Λύση: Αν $\zeta = e^{i\theta} \Rightarrow$

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)\,,\ \cos\theta = \frac{1}{2i}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)$$

Άρα, $\quad u(\zeta) = \dfrac{\zeta^2 - 1}{2i\left(2\zeta^2 + 5\zeta + 2\right)}.$

Οπότε, σύμφωνα με την παρατήρηση (iii) πρέπει για τη λύση του προβλήματος να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα :

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{\left(\zeta^2 - 1\right)\left(\zeta + z\right)}{2i\left(2\zeta^2 + 5\zeta + 2\right)\left(\zeta - z\right)\zeta}\,d\zeta$$

το οποίο προκύπτει $I = \dfrac{z}{2i(z+2)}$.

Άρα η λύση του προβλήματος είναι :

$$u(x,y) = \operatorname{Re}\frac{z}{2i(z+2)} = \frac{y}{(x+2)^2 + y^2} \Rightarrow u(r,\theta) = \frac{r\cos\theta}{r^2 + 4r\cos\theta + 4}.$$

Εφαρμογή

Να λυθεί το πρόβλημα

$$\begin{cases} \Delta u = 0\ \,, 0 < r < R,\ 0 < \theta < 2\pi \\ u(R,\theta) = \begin{cases} 0,\ 0 \le \theta \le \pi \\ k\,,\ \pi < \theta \le 2\pi \end{cases} \end{cases}$$

Λύση: Η λύση του προβλήματος είναι το ολοκλήρωμα

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} k\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\phi,\theta) + r^2}\,d\phi\,.$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος θέτουμε $t = \tan\dfrac{\phi - \theta}{2} \Rightarrow d\phi = \dfrac{2}{1+t^2}dt$

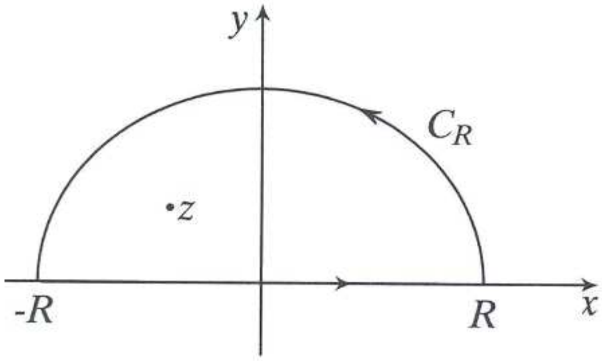
Άρα προκύπτει $u(r,\theta) = \dfrac{k}{2\pi}\displaystyle\int_{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)}^{\tan\left(\pi-\frac{\theta}{2}\right)} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\,\frac{2}{1+t^2}dt$ το οποίο τελικά μας δίνει $u(r,\theta) = \dfrac{k}{\pi}arc\tan\left(\dfrac{R^2 - r^2}{2Rr\sin\theta}\right).$

2.4 Πρόβλημα Dirichlet για το άνω ημιεπίπεδο

Ολοκληρωτικός τύπος Schwarz - Πυρήνας Schwarz

Έστω $f(z)$ ολόμορφη στο $\operatorname{Im} z > 0$ και συνεχής στο $\operatorname{Im} z \geq 0$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν θετικές σταθερές k και M τέτοιες ώστε

$$\left|z^k f(z)\right| < M \, , \operatorname{Im} z \geq 0 \, .$$



Έστω τώρα $C = C_R \cup \left[-R, R\right]$ η καμπύλη όπως φαίνεται στο σχήμα, θετικά προσανατολισμένη. Αν z είναι ένα εσωτερικό σημείο της C, τότε σύμφωνα με τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy έχουμε

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{-R}^{R} \frac{f(t)}{t-z} dt \, .$$

Επειδή $\left| f(\zeta)\right| < \dfrac{M}{R^k}$, όταν $R \to \infty$ τότε το πρώτο ολοκλήρωμα τείνει στο 0. Άρα

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t-z} dt \, , \ \operatorname{Im} z > 0$$

Ο παραπάνω τύπος είναι ένας **ολοκληρωτικός τύπος Cauchy για το άνω ημιεπίπεδο** $\operatorname{Im} z > 0$.

Τώρα, επειδή το $\bar{z}$ βρίσκεται στο εξωτερικό της καμπύλης C, έχουμε

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-\bar{z}} dt = 0$$

άρα ο ολοκληρωτικός τύπος Cauchy γράφεται

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-\bar{z}}\right) f(t)dt \Rightarrow f(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{yf(t)}{\left|t-z\right|^2} dt \, , \, y > 0 \, .$$

Έτσι, αν $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ τότε έχουμε

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{yu(t,0)}{\left(t-x^2\right) + y^2} dt \ \ , \ \ y > 0$$

Αυτός ο τύπος ονομάζεται **ολοκληρωτικός τύπος Poisson για το άνω ημιεπίπεδο ή ολοκληρωτικός τύπος Schwarz**.

Η συνάρτηση $S\left(t-x,y\right)=\dfrac{y}{\left(t-x\right)^2+y^2}$ ονομάζεται **πυρήνας Schwarz.**

Θέτοντας στον τύπο Schwarz $u\left(x,y\right)=1$ και $u\left(t,0\right)=1$ προκύπτει

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S\left(t-x,y\right)dt=1\,,\ \ y>0\,.$$

Η μέγιστη τιμή του πυρήνα σαν συνάρτηση του t λαμβάνεται για $t=x$ και ισχύει

$$\max_{t\in\mathbb{R}} S\left(t-x,y\right)=S\left(0,y\right)=\frac{1}{y}\to\infty\,,\, \textit{οταν}\ y\to 0\,.$$

Θεώρημα λύσης του προβλήματος Dirichlet για το άνω ημιεπίπεδο

Έστω $f\left(x\right)$ μια δοσμένη συνάρτηση συνεχής και φραγμένη στον πραγματικό άξονα $\operatorname{Im} z=0$. Η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο

$$\begin{cases} u(x,y)=\dfrac{y}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{f(t)}{\left(t-x\right)^2+y^2}dt\,, -\infty<x<\infty\,, y>0 \\ u(x,0)=f(x)\,,\ -\infty<x<\infty \end{cases}$$

είναι αρμονική στο $\operatorname{Im} z>0$ και συνεχής στο $\operatorname{Im} z\geq 0$.

Εφαρμογή

Να επιλυθεί το πρόβλημα Dirichlet για το άνω ημιεπίπεδο αν η δοσμένη συνάρτηση στο σύνορο είναι

$$f(x)=\begin{cases} k\,,\ a<x<b \\ 0\,,\ \text{διαφορετικά} \end{cases}.$$

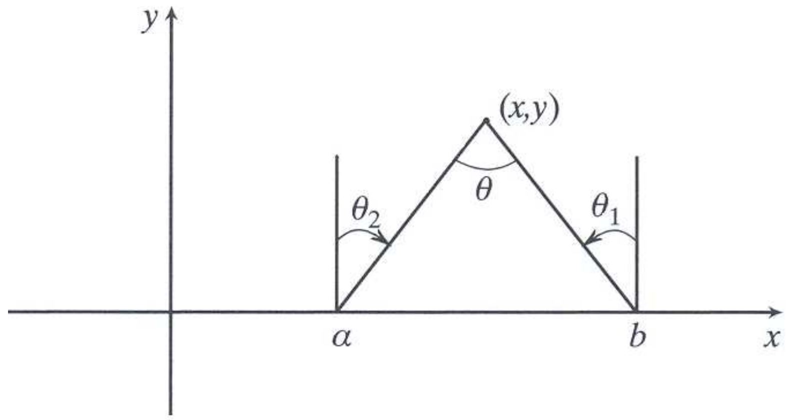
Λύση: Σύμφωνα με το θεώρημα λύσης του προβλήματος στο άνω ημιεπίπεδο, η λύση είναι $u(x,y)=\dfrac{y}{\pi}\displaystyle\int_a^b\dfrac{k}{\left(t-x\right)^2+y^2}dt$.

Στη συνέχεια λύνουμε:

$$u(x,y)=\frac{y}{\pi}\cdot\frac{k}{y^2}\int_a^b\frac{1}{\left(\dfrac{t-x}{y}\right)^2+1}dt=\frac{k}{\pi}\int_{\frac{a-x}{y}}^{\frac{b-x}{y}}\frac{1}{\xi^2+1}d\xi=$$

$$=\frac{k}{\pi}\left(arc\tan\frac{b-x}{y}+arc\tan\frac{x-a}{y}\right)$$

Για την γεωμετρική ερμηνεία της λύσης χρειαζόμαστε το ακόλουθο σχήμα



Αν $\theta_1 = arc\tan\dfrac{b-x}{y}$ και $\theta_2 = arc\tan\dfrac{x-a}{y}$ τότε

$$u(x,y)=\frac{k}{\pi}\left(\theta_1+\theta_2\right)=\frac{k}{\pi}\theta(x,y).$$

Εφαρμογή

Να λυθεί το πρόβλημα

$$\begin{cases}\Delta u = 0\,,\, 0<y<\pi \\ u(x,0)=\begin{cases}1\,,\, x>0\\ 0\,,\, x<0\end{cases} \\ u(x,\pi)=0\end{cases}$$

Λύση: Η λωρίδα $0<y<\pi$ απεικονίζεται σύμμορφα στο άνω ημιεπίπεδο μέσω της συνάρτησης $\zeta=e^{z}\left(\zeta=\xi+i\eta\right)\,,\eta>0$.

Οι συνοριακές συνθήκες γίνονται $\upsilon(\xi,0)=\begin{cases}1\,,\,\xi>1\\ 0\,,\,\xi<1\end{cases}$.

Από το θεώρημα λύσης του προβλήματος Dirichlet για το άνω ημιεπίπεδο έχουμε

$$\upsilon(\xi,\eta)=\frac{1}{\pi}\int_1^{\infty}\frac{\eta}{\left(\xi-t\right)^2+\eta^2}dt=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}arc\tan\frac{1-\xi}{\eta}$$

Όμως, $\xi=e^{x}\cos y$ και $\eta=e^{x}\sin y$ επομένως η λύση του αρχικού προβλήματος

είναι $$u(x,y)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}arc\tan\frac{e^{-x}-\cos y}{\sin y}\,.$$

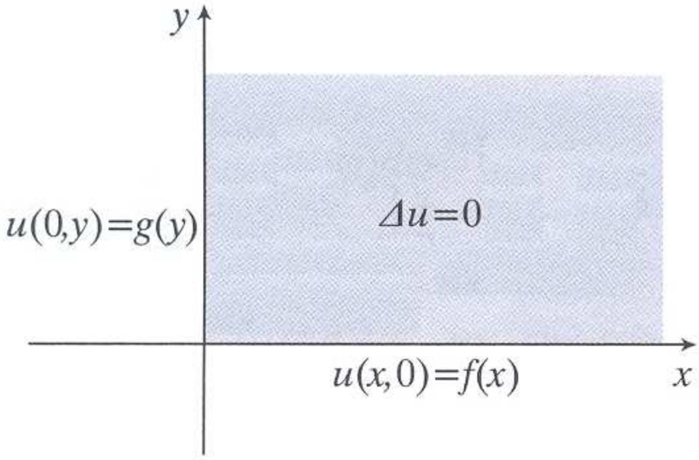
Εφαρμογή

Να βρεθεί μια αρμονική συνάρτηση στο πρώτο τεταρτημόριο που να ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες

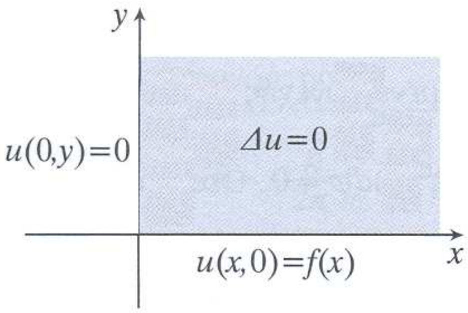
$$\begin{cases}u(x,0)=f(x)\,,\,0<x<\infty\\ u(0,y)=g(y)\,,\,0<y<\infty\end{cases}$$

όπου οι συναρτήσεις $f(x),g(y)$ είναι φραγμένες και συνεχείς.

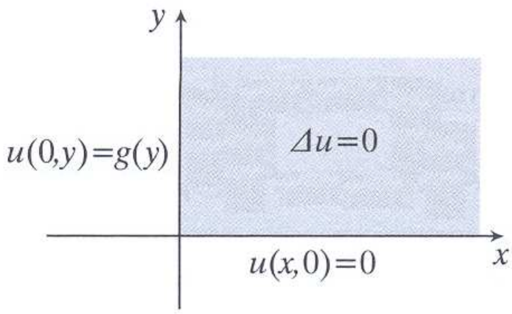
Λύση:



Το πρόβλημα μπορεί να χωριστεί σε δύο επιμέρους προβλήματα όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα.



(I)



(II)

Εάν θεωρήσουμε $u_1(x,y)$ ως λύση του πρώτου προβλήματος και $u_2(x,y)$ ως λύση του δεύτερου, τότε η λύση του αρχικού προβλήματος είναι

$$u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y).$$

Για την λύση του πρώτου προβλήματος θεωρούμε την περιττή επέκταση της $f(x)$, την $\widetilde{f}(x)$. Τότε ,

$$u_1(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\widetilde{f}(t)}{(t-x)^2+y^2}dt = \frac{y}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\widetilde{f}(t)}{(t-x)^2+y^2}dt - \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{\widetilde{f}(-t)}{(t-x)^2+y^2}dt =$$

$$= \frac{y}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\frac{1}{(t-x)^2+y^2} - \frac{1}{(t+x)^2+y^2}\right]f(t)dt,\ x>0,\ y>0.$$

Αντίστοιχα, για την λύση του δεύτερου προβλήματος θεωρούμε την περιττή επέκταση της $g(y)$, την $\widetilde{g}(y)$. Τότε ,

$$u_2(x,y) = \frac{x}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\widetilde{g}(t)}{(t-y)^2+x^2}dt = \frac{x}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\widetilde{g}(t)}{(t-y)^2+x^2}dt - \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{\widetilde{g}(-t)}{(t-y)^2+x^2}dt =$$

$$= \frac{x}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\frac{1}{(t-y)^2+x^2} - \frac{1}{(t+y)^2+x^2}\right]g(t)dt,\ x>0,\ y>0.$$

2.5 Πρόβλημα Neumann για ένα δίσκο

Έστω $C:|z|=R$ και $g(\theta)$ μια δοσμένη συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο κύκλο C και έχει την ιδιότητα $\int_0^{2\pi} g(\varphi)d\varphi=0$. Θεωρούμε το πρόβλημα Neumann

$$\begin{cases}\Delta u=0,\ |z|<R\\ \dfrac{\vartheta u}{\vartheta \eta}\Big|_{|z|=R}=g(\theta)\end{cases}.$$

Έστω $\zeta=Re^{i\varphi}$ και $z=re^{i\theta}$, όπου $r<R$. Για σταθερό ζ η συνάρτηση

$$Q(R,r,\varphi-\theta)=-2R\ln|\zeta-z|=-R\ln\left(R^2-2Rr\cos(\varphi-\theta)+r^2\right).$$

είναι αρμονική στο εσωτερικό του κύκλου C, αφού είναι πραγματικό μέρος της συνάρτησης $-2\log(z-\zeta)$. Για $r\neq 0$, έχουμε

$$\frac{\vartheta Q}{\vartheta r}=-\frac{R}{r}\frac{2r^2-2Rr\cos(\varphi-\theta)}{R^2-2Rr\cos(\varphi-\theta)+r^2}=\frac{R}{r}\left[P(R,r,\varphi-\theta)-1\right]\ (1)$$

όπου P είναι ο πυρήνας Poisson. Η συνάρτηση

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q(R,r,\varphi-\theta)g(\varphi)d\varphi+A\ ,\ A\ \text{σταθερά}$$

είναι αρμονική, αφού η συνάρτηση Q είναι αρμονική ως προς r και θ.

Επειδή $\int_0^{2\pi} g(\varphi)d\varphi=0$ τότε λόγω της (1), έχουμε

$$u_r(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R}{r}\left[P(R,r,\varphi-\theta)-1\right]g(\varphi)d\varphi=\frac{R}{r}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(R,r,\varphi-\theta)g(\varphi)d\varphi.$$

Άρα για $|z|=R$ ισχύει $u_r(r,\theta)=g(\theta)$.

Επομένως η συνάρτηση

$$u(r,\theta)=-\frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left(R^2-2Rr\cos(\varphi-\theta)+r^2\right)g(\varphi)d\varphi+A$$

είναι η λύση του προβλήματος Neumann για τον κύκλο $r=R$.

2.6 Πρόβλημα Neumann για το άνω ημιεπίπεδο

Έστω $g(x)$ συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ και ικανοποιεί την συνθήκη

$$|x^a g(x)|<M\ ,\ x\in\mathbb{R}\ ,\ \alpha>1$$

Για σταθερό $t\in\mathbb{R}$, η συνάρτηση $\log(z-t)$ είναι αρμονική στο ημιεπίπεδο $\operatorname{Im} z>0$, οπότε η συνάρτηση

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln|z-t|dt+A,\ A\ \text{σταθερά}$$

$$\text{ή}\quad u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\left((t-x)^2+y^2\right)g(t)dt+A,\ A\ \text{σταθερά}\ \ (2)$$

είναι αρμονική στο άνω ημιεπίπεδο. Από τον παραπάνω τύπο προκύπτει ότι

$$u_y\left(x,y\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{yg(t)}{\left(t-x\right)^2+y^2}dt$$

άρα $u_y\left(x,0\right)=g\left(x\right)$, $y>0$. Επομένως, η σχέση (2) είναι η λύση του προβλήματος Neumann για το άνω ημιεπίπεδο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Εφαρμοσμένη μιγαδική ανάλυση Δ.Χ.Κραββαρίτης
- Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις Γ.Ν.Παντελίδης, Δ.Χ.Κραββαρίτης, Ν.Σ.Χατζησάββα
- Μιγαδικές συναρτήσεις Γ.Παντελίδης, Δ.Κραββαρίτης, Β.Νασοπούλου
- Μιγαδικές μεταβλητές M.R.Spiegel
- Διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους Σ.Α Τερσενοβ
- Complex variables for scientists and engineers J.D.Paliouras, D.S.Meadows
- Μερικές διαφορικές εξισώσεις Γ.Δάσιος , Κ.Κυριάκη
- http://en.wikipedia.org/wiki/Conformal_map
- http://mathworld.wolfram.com/ConformalMapping.html