

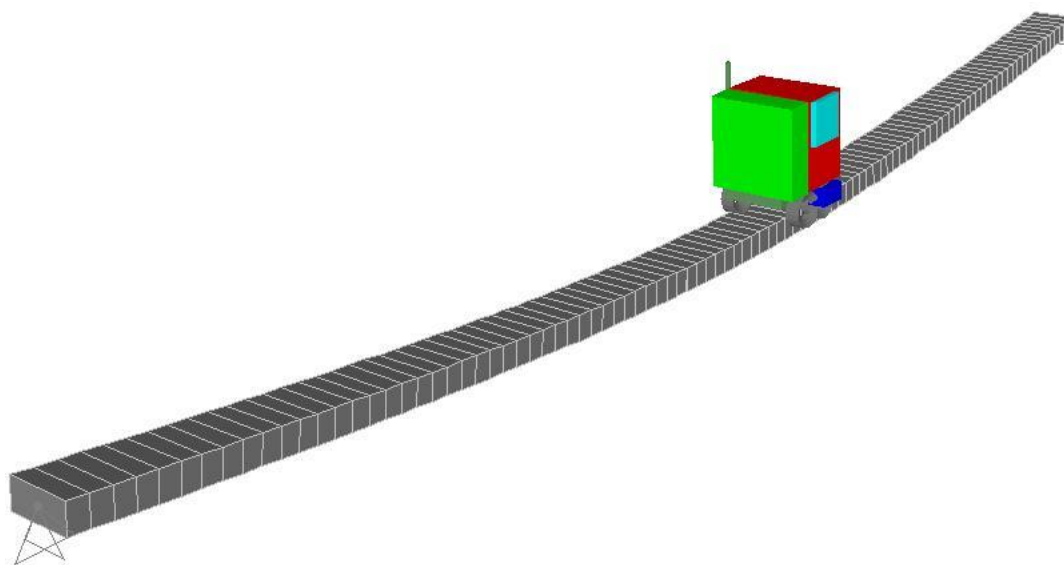


ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών

Η επιρροή της μάζας κινούμενου οχήματος στη δυναμική
απόκριση γέφυρας



ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Θεμιστοκλής Ν. Κωνσταντινίδης

Επιβλέπων: Ιωάννης Ραυτογιάννης

Αθήνα, Ιούλιος 2013

ΕΜΚ ΔΕ 2013/65

Κωνσταντινίδης Θ.Ν. (2013).
Η επιρροή της μάζας κινούμενου οχήματος στη δυναμική απόκριση γέφυρας
Διπλωματική Εργασία ΕΜΚ ΔΕ 2013/65
Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα.

Konstantinidis T.N. (2013).
The influence of moving vehicle mass in the dynamic response of a bridge
Diploma Thesis ΕΜΚ ΔΕ 2013/65
Institute of Steel Structures, National Technical University of Athens, Greece

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

	<u>Σελίδα</u>
Περίληψη	3
Abstract	5
Ευχαριστίες	6
Κεφάλαιο 1 Εισαγωγή	
1.1 Γενικά	7
1.2 Αντικειμενικός σκοπός και στόχοι της εργασίας	7
1.3 Δομή της διπλωματικής εργασίας	8
Κεφάλαιο 2 Η εξέλιξη της έρευνας των δυναμικών φαινομένων	
2.1 Τα κινούμενα φορτία	9
2.2 Το ιστορικό της έρευνας και καταστροφές	10
2.3 Θεωρητική έρευνα	14
2.4 Πειραματική έρευνα	17
Κεφάλαιο 3 Η θεωρία της δυναμικής ανάλυσης	
3.1 Τα χαρακτηριστικά του δυναμικού προβλήματος	21
3.2 Ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης	21
3.3 Δυναμικός συντελεστής μεγέθυνσης	22
3.4 Απόσβεση ταλαντώσεων	24
3.4.1 Ελεύθερες ταλαντώσεις με κρίσιμη απόσβεση	24
3.4.2 Ελεύθερες ταλαντώσεις με υποκρίσιμη απόσβεση	25
3.4.3 Ελεύθερες ταλαντώσεις με υπερκρίσιμη απόσβεση	25
3.5 Συντονισμός σιδηροδρομικών γεφυρών	26
3.6 Διαμόρφωση των εξισώσεων κίνησης	28
3.6.1 Άμεση εξισορρόπηση με την αρχή του d'Alembert	28
3.6.2 Αρχή των δυνατών μετακινήσεων	29
3.6.3 Αρχή του Hamilton	30
3.7 Εκτίμηση των δυναμικών επιδράσεων με τον Ευρωκώδικα	31
3.7.1 Εισαγωγή	31
3.7.2 Παράγοντες που επηρεάζουν τη δυναμική συμπεριφορά	34
3.7.3 Δυναμικός συντελεστής	35
3.7.4 Καθοριστικό μήκος	36
3.7.5 Φόρτιση και συνδυασμοί φορτίων	39

3.7.6	Ταχύτητες που πρέπει να ληφθούν υπόψη	41
3.7.7	Παράμετροι γέφυρας	41
3.7.7.1	Απόσβεση	41
3.7.7.2	Μάζα της γέφυρας	42
3.7.7.3	Δυσκαμψία της γέφυρας	42
3.7.8	Προσομοίωση της διέγερσης και της δυναμικής συμπεριφοράς του φορέα	43
3.7.9	Έλεγχοι των οριακών καταστάσεων	44
3.7.10	Έλεγχος σε κόπωση	46
Κεφάλαιο 4 Η επιρροή της μάζας του κινούμενου οχήματος στη δυναμική απόκριση γέφυρας		
4.1	Υλικό σημείο μάζας M κινούμενο επί δοκού με σταθερή ταχύτητα	47
4.2	Γεωμετρικά στοιχεία διατομής	56
4.3	Θεμελιώδης ιδιοσυχνότητα	57
4.4	Κινούμενη μάζα επί δοκού χωρίς απόσβεση	58
4.5	Κινούμενο φορτίο επί δοκού χωρίς απόσβεση	63
4.6	Σύγκριση αποτελεσμάτων	65
4.7	Σύνοψη-συμπεράσματα	71
Κεφάλαιο 5 Δυναμική ανάλυση αμφιέρειστης γέφυρας με τη χρήση προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων		
5.1	Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων	73
5.2	Τα πεπερασμένα στοιχεία της δοκού	75
5.3	Γραμμική δυναμική ανάλυση	76
5.4	Ανάλυση μεταβατικής απόκρισης άμεσης ολοκλήρωσης (direct integration)	77
5.5	Μη γραμμική δυναμική ανάλυση	78
5.6	Περιγραφή του μοντέλου	79
5.7	Αποτελέσματα και αξιολόγηση της ανάλυσης	81
Κεφάλαιο 6 Βιβλιογραφία		85
Κεφάλαιο 7 Κατάλογος σχημάτων		86
Κεφάλαιο 8 Κατάλογος πινάκων		90

Η επιρροή της μάζας κινούμενου οχήματος στη δυναμική απόκριση γέφυρας

Περίληψη

Το ενδιαφέρον για τη δυναμική συμπεριφορά των δοκών-γεφυρών, επί των οποίων κινούνται οχήματα υψηλών ταχυτήτων, έχει αυξηθεί τα τελευταία χρόνια λόγω της παραγωγής πολύ γρήγορων τρένων αλλά και οχημάτων. Υπό την επίδραση των φορτίσεων από τα κινούμενα οχήματα υψηλών ταχυτήτων οι γέφυρες εμφανίζουν έντονα δυναμικά φαινόμενα, κάτι που οδηγεί σε αύξηση των κατασκευαστικών απαιτήσεων των γεφυρών. Είναι συχνό το φαινόμενο, κατά το οποίο οι δυναμικές πτυχές του προβλήματος της φόρτισης είναι ο βασικότερος παράγοντας ο οποίος καθορίζει τη μελέτη της κατασκευής. Γενικά, για όλες τις σιδηροδρομικές γέφυρες επί των οποίων κινούνται τραίνα με ταχύτητες άνω των 200 km/h, απαιτείται δυναμική ανάλυση. Η σωστή κατανόηση της δυναμικής συμπεριφοράς μιας γέφυρας είναι ουσιαστική, δεδομένου ότι μια ρεαλιστική πρόβλεψη της απόκρισης της κατασκευής συμβάλλει σε έναν οικονομικό σχεδιασμό των νέων γεφυρών και σε μια λογική εκμετάλλευση των γεφυρών στην πράξη.

Ο σκοπός αυτής της εργασίας είναι να διερευνήσει τη δυναμική συμπεριφορά μιας γέφυρας επί της οποίας κινείται μία μάζα με σταθερή ταχύτητα. Θα παρουσιάσουμε τη δυναμική συμπεριφορά μίας γέφυρας υπό την επίδραση ενός κινούμενου οχήματος, το οποίο θεωρήθηκε ως κινούμενο φορτίο ή ως κινητή μάζα, με μία αναλυτική μαθηματική προσέγγιση έτσι ώστε να υπολογιστεί η επιρροή της αδράνειας της μάζας στους υπολογισμούς. Στη συνέχεια πραγματοποιήθηκε η ίδια ανάλυση με τη χρήση του προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων Sap2000. Μια σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων των δύο αναλύσεων και της επιρροής της μάζα του κινούμενου οχήματος στη δυναμική συμπεριφορά των δοκών παρουσιάζεται στο τέλος αυτής της εργασίας.

Για την μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς μίας αμφιέριστης γέφυρας υπό την επίδραση κινητής μάζας χρησιμοποιήθηκε το αριθμητικό παράδειγμα μιας λεπτής δοκούς κιβωτοειδούς διατομής και μήκους 50 μέτρων, υπό την επίδραση της κίνησης μίας δύναμης ή μίας μάζας με σταθερή ταχύτητα η οποία κυμαινόταν από 200 έως 340 km/h. Η μάζα του οχήματος διαφοροποιείται μεταξύ του 10% και του 80% της συνολικής μάζας της γέφυρας. Τα αποτελέσματα και των δύο αναλύσεων έδειξαν την επιρροή της μάζας του κινούμενου οχήματος στη δυναμική απόκριση μίας γέφυρας.

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
FACULTY OF CIVIL ENGINEERING
INSTITUTE OF STEEL STRUCTURES

DIPLOMA THESIS
EMK ΔΕ 2013/65

**The influence of moving vehicle mass in the dynamic response of a
bridge**

Abstract

The interest in the dynamic behaviour of beams-bridges under high speed moving masses has increased in recent years, due to the introduction of very fast trains and vehicles. Under the loads of high speed, the bridges are subjected to large dynamic effects. The demands on railway bridge structural strength has therefore increased. The dynamic loading has often shown to be the governing factor in the structural design. Generally, for all railway bridges induced by train speeds over 200 km/h, dynamic analysis is required. Correct understanding of the dynamic behaviour of a bridge is essential, since a realistic prediction of the structural response contributes to an economic design of new bridges and to a rational exploitation of bridges in service.

The purpose of this report is to investigate the dynamic behaviour of a bridge under the influence of a moving vehicle, which is considered as a moving load or a moving mass in a mathematical analysis, in order to calculate the mass inertia effects. Next the same analysis was performed using finite elements software Sap2000. A comparison between the results of the two approaches is finally presented.

In order to study the dynamic behaviour of a simply supported bridge under the influence of a moving mass the numerical example of a thin beam with box cross section and 50 meter length was used, under the influence of a moving vehicle with speed varying from 200km/hr to 340km/hr and the mass of the vehicle varied between 10% and 80% of the total mass of the bridge. The results of the two analysis demonstrated the effects of the moving mass on the dynamic response of the bridge.

Ευχαριστίες

Στα πλαίσια εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας μου, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον κ. Ι.Ραυτογιάννη, για την πολύτιμη βοήθεια που μου προσέφερε, για την υπομονή του και για τις πολύτιμες γνώσεις που μου μετάδωσε καθ' όλη τη διάρκεια της συνεργασίας μας.

Επίσης οφείλω ένα μεγάλο ευχαριστώ στην οικογένειά μου και στους φίλους μου για την αμέριστη συμπαράσταση και κατανόησή τους, σε όλη τη διάρκεια των μαθητικών και ακαδημαϊκών μου σπουδών.

1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Γενικά

Ο ακριβής δυναμικός υπολογισμός των κατασκευών αποτελεί γενικά ένα σύνθετο μαθηματικό πρόβλημα. Αυτό ισχύει ιδιαίτερα για κατασκευές με συνεχή κατανομή μάζας, η δυναμική ανάλυση των οποίων είναι αρκετά δύσκολη ακόμα και στην περίπτωση απλών συνοριακών συνθηκών. Η κίνηση υλικού σημείου συγκεκριμένης μάζας, επί αμφιερείστου δοκού με συγκεκριμένη ταχύτητα, αποτελεί ένα δυναμικό πρόβλημα το οποίο συνήθως επιλύεται με την θεώρηση κινητού φορτίου ίσου με το βάρος του κινητού οχήματος.

Γενικά, τα κινούμενα φορτία έχουν μεγάλη επιρροή επί των δυναμικών τάσεων των γεφυρών αλλά και άλλων παρόμοιων κατασκευών, όπως οι μεγάλες γερανογέφυρες, οι οποίες εκτελούν έντονες ταλαντώσεις ιδιαίτερα στην περίπτωση μεγάλων ταχυτήτων. Ο αριθμός των εργασιών και συγγραμμάτων που αναφέρονται σε αυτά τα φαινόμενα είναι εξαιρετικά μεγάλος. Την εξέλιξη των ερευνών επί του θέματος βοήθησαν σημαντικά οι καταστροφές οι οποίες συνέβησαν στην διάρκεια των χρόνων.

1.2 Αντικειμενικός σκοπός και στόχοι της εργασίας

Αντικειμενικός σκοπός της εργασίας αυτής είναι ο ακριβής αριθμητικός υπολογισμός της επιρροής της μάζας ενός οχήματος, το οποίο κινείται επί αμφιερείστης γέφυρας. Κατά την κίνηση του οχήματος, εκτός από την δύναμη που προέρχεται από το βάρος, λαμβάνεται υπόψη και η αδρανειακή δύναμη, αλλά και η αδρανειακή ροπή της μάζας. Η επιρροή της ταχύτητας, με την οποία κινούνται τα υλικά σώματα επί των αμφιερείστων γεφυρών, στην απόκριση μίας κατασκευής αποτελεί επίσης αντικείμενο αυτής της μελέτης.

Η ανάγκη κατασκευής ταχύτερων και βαρύτερων συγκοινωνιακών μέσων, σε συνδυασμό με την υπάρχουσα τάση για ελαφρότερες και λεπτότερες κατασκευές, οδήγησε στην ανάγκη για μία ακριβέστερη εκτίμηση της δυναμικής συμπεριφοράς τέτοιων κατασκευών, λόγω διέλευσης κινούμενων οχημάτων. Για τον λόγο αυτό μελετήθηκε η απόκριση μίας κατασκευής αυξάνοντας σταδιακά την μάζα του κινούμενου σώματος και φτάνοντας την στο 80% της συνολικής μάζας της δοκού.

1.3 Δομή της διπλωματικής εργασίας

Η παρούσα εργασία αναπτύσσεται σε πέντε κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μία γενική αναφορά στο πρόβλημα των κινούμενων φορτίων, αλλά αναφέρονται και οι σκοποί του συγκεκριμένου κειμένου. Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται μία ιστορική αναδρομή της έρευνας επάνω στο πρόβλημα την δυναμικής συμπεριφοράς των κατασκευών. Αναφέρονται οι μεγαλύτερες καταστροφές, οι οποίες οδήγησαν στην εξέλιξη των ερευνών, καθώς και οι σπουδαιότεροι ερευνητές των δυναμικών φαινομένων. Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται μία εκτενής αναφορά στην θεωρία και τις έννοιες της δυναμικής ανάλυσης, αλλά περιγράφεται αναλυτικά και το δεύτερο μέρος του Ευρωκώδικα 1, το οποίο ασχολείται με τις δυναμικές επιδράσεις από τα φορτία κυκλοφορίας σε γέφυρες (συμπεριλαμβανομένου του συντονισμού). Στο τέταρτο κεφάλαιο υπολογίζονται οι ιδιοτιμές μίας αμφιέριστης δοκού, μήκους 50 μέτρων, η οποία φέρει σώμα μάζας M σε διάφορες θέσεις. Στη συνέχεια έγινε επίλυση της διαφορικής εξίσωσης της κίνησης με τη χρήση του λογισμικού Mathematica, το οποίο χρησιμοποιεί την μέθοδο Range-Kutta. Από την επίλυση αυτή υπολογίστηκαν οι χρονικές συναρτήσεις για διάφορες ταχύτητες, αλλά και μάζες του κινούμενου οχήματος. Οι ταχύτητα του οχήματος θεωρήθηκε μεγαλύτερη από 200km/hr, όπου είναι απαραίτητη η δυναμική ανάλυση, έως λίγο μεγαλύτερη από την κρίσιμη ταχύτητα. Για τις αναλύσεις που έγιναν το κινούμενο σώμα θεωρήθηκε αρχικά ως κινούμενη δύναμη και στη συνέχεια ως κινούμενη μάζα. Τα αποτελέσματα των δύο αυτών υποθέσεων παρουσιάστηκαν σε κοινά διαγράμματα, έτσι ώστε να εξαχθούν χρήσιμα συμπεράσματα για την επιρροή της μάζας ενός σώματος στην δυναμική ανάλυση μίας γέφυρας. Στο πέμπτο κεφάλαιο επιλύθηκε το ίδιο πρόβλημα με τη χρήση του προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων Sap2000, το οποίο δυστυχώς δεν μπορεί να συμπεριλάβει στους υπολογισμούς την αδράνεια της μάζας και την περιστροφική αδράνεια του σώματος.

2 Η ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΦΑΙΝΟΜΕΝΩΝ

2.1 Τα κινούμενα φορτία

Τα κινούμενα φορτία έχουν σημαντική επιρροή στην δυναμική συμπεριφορά ελαστικών και ανελαστικών στερεών στοιχείων και τμημάτων κατασκευών και προκαλούν έντονη ταλάντωση τέτοιου είδους φορέων, ειδικά για μεγάλες ταχύτητες. Το χαρακτηριστικό γνώρισμα των φορτίων αυτών, είναι ότι μεταβάλλονται τόσο στο χρόνο, όσο και στον χώρο.

Η ταλάντωση ενός τρισδιάστατου σώματος, μπορεί εν γένει να περιγραφεί ως συναρτησιακή σχέση ενός ανύσματος θέσεως $r(x,y,z,t)$ και ενός εξωτερικού φορτίου $P(x,y,z,t)$ υπό την μορφή: $L[r(x,y,z,t)] = P(x,y,z,t)$, όπου το σύμβολο L δηλώνει μία γραμμική ή μη διαφορική συνάρτηση. Με τις συνοριακές και αρχικές συνθήκες, η παραπάνω εξίσωση (ή ομάδα τέτοιων εξισώσεων), χαρακτηρίζουν την συμπεριφορά του σώματος.

Η ανάγκη εκτιμήσεως της επιρροής κινούμενων φορτίων επί της δυναμικής συμπεριφοράς των κατασκευών εμφανίστηκε για πρώτη φορά στις αρχές του 19ου αιώνα, όταν ανεγέρθησαν οι πρώτες σιδηροδρομικές γέφυρες και αποτελεί γενικότερα ένα από τα πρώτα προβλήματα της δυναμικής των κατασκευών. Αργότερα το πρόβλημα αυτό εμφανίστηκε και στην περίπτωση των οδικών γεφυρών. Άλλες κατασκευές που απαιτούν την εκτίμηση της δυναμικής επιρροής των κινούμενων επ' αυτών φορτίων είναι οι μεγάλες γερανογέφυρες. Γενικά, τα κινούμενα φορτία έχουν μεγάλη επιρροή επί των δυναμικών τάσεων των παραπάνω κατασκευών, οι οποίες εκτελούν έντονες ταλαντώσεις ιδιαίτερα στην περίπτωση μεγάλων ταχυτήτων.

Για αρκετά χρόνια από την κατασκευή της πρώτης σιδηράς σιδηροδρομικής γέφυρας δεν ήταν γνωστή η δυναμική απόκριση τέτοιων κατασκευών, έως την στιγμή που εμφανίστηκαν οι πρώτες καταστροφές. Το πρώτο σοβαρό ατύχημα στην ιστορία της γεφυροποιίας για το οποίο έχουμε πλήρη στοιχεία ήταν αυτό της καταστροφής της γέφυρας Brighton Chain Pier, λόγω σφοδρής ανεμοθύελλας. Ακολούθησαν καταστροφές και άλλων γεφυρών λόγω σφοδρών ανεμοθύελλων, χωρίς όμως να γνωρίζουν οι μηχανικοί της εποχής τα ακριβή αίτια που τις προκαλούσαν.

2.2 Το ιστορικό της έρευνας και καταστροφές

Η εξέλιξη των ερευνών στην δυναμική συμπεριφορά των γεφυρών υπό την επίδραση διάφορων τύπων φορτίων, οφείλεται κατά κύριο λόγο σε σοβαρές καταστροφές. Κάθε σοβαρή καταστροφή έδωσε αφορμή και ώθηση στην θεωρητική αλλά και την πειραματική έρευνα ή στην μελέτη των μεθόδων ανεγέρσεως προσθέτοντας εμπειρία και γνώση.

Οι καταστροφές βοήθησαν επιπλέον στην επισήμανση παραγόντων και φαινομένων που έπρεπε να ληφθούν υπόψη στον σχεδιασμό και των οποίων οι μελετητές, ενίοτε, δεν φαντάζονταν καν την ύπαρξη, αλλά και την σοβαρότατη επίδραση τους στην λειτουργία μίας γέφυρας.

Έως το μεσαίωνα, οι κατασκευές ακολουθούσαν τους λεγόμενους “κανόνες αρμονίας-αναλογίας”, οι οποίοι ήταν περισσότερο αρχιτεκτονικοί-αισθητικοί και λιγότερο διατάξεις περί της προσδοκώμενης αντοχής της κατασκευής. Η διαίσθηση, η εμπειρία και ενίοτε η τόλμη, βοήθησαν στην κατασκευή θαυμαστών τεχνικών έργων. Δεν υπήρχαν στοιχεία ή δηλώσεις ως προς τα περιθώρια ασφαλείας, αλλά ούτε και σχετικά με τα φορτία που επέφεραν την κατάρρευση. Οι κατασκευαστές της εποχής αγνοούσαν τέτοια θέματα και συχνά η άγνοια τους ανταμειβόταν με κατασκευαστικές αστοχίες.

Οι Ανθέμιος και Ισίδωρος, παρότι μόνο στην τρίτη προσπάθεια τους είχαν επιτυχημένο σχεδιασμό του θόλου της Αγίας Σοφίας, ανταμείφθηκαν με την ανακάλυψη ότι οι θόλοι δεν πρέπει να εκτείνονται πέραν του παραλλήλου των 55° περίπου. Πράγματι, η σύγχρονη ανάλυση των κελυφών αποδεικνύει ότι πέραν των $51,82^\circ$, αναπτύσσονται εφελκυστικές τάσεις που επιφέρουν την διάρρηξη του σφαιρικού θόλου.

Τις βασικές αρχές της στατικής και δυναμικής έθεσε ο Newton το 1678 στο σύγγραμμά του “Philosophiae Naturalis Principia Mathematica”, εκμεταλλευόμενος την έννοια της φυγόκεντρης δύναμης που διετύπωσε το 1673 ο Huygens στο έργο του “Horologium Oscillatorium”. Έτσι ο Newton, αφού διετύπωσε τους κανόνες της σύνθεσης των δυνάμεων και απέδειξε τον κανόνα του παραλληλογράμμου, διαχώρισε πρώτος την έννοια της μάζας από αυτήν του βάρους, διατυπώνοντας την πρώτη βασική αρχή του, η οποία συνδέει την δύναμη με την επιτάχυνση.

Οι εσωτερικές δυνάμεις πρέπει να ισορροπούν με το εξωτερικά επιβαλλόμενο φορτίο. Αυτό εκφράζεται με τις εξισώσεις ισορροπίας. Εάν οι εξισώσεις αυτές επαρκούν και μπορούν άμεσα να επιλυθούν, τότε το πρώτο βήμα ολοκληρώθηκε και

μιλάμε για μία κατασκευή «ισοστατική ή στατικώς ορισμένη». Ενίοτε όμως, οι εξισώσεις ισορροπίας δεν επαρκούν να επιλυθούν μόνες τους. Η κατασκευή τότε είναι «υπερστατική ή στατικώς αόριστη». Στην τελευταία αυτή περίπτωση, οι εξισώσεις έχουν πολλά συστήματα τιμών, που μπορούν να τις ικανοποιήσουν, δηλαδή υπάρχουν πολλές δυνατές καταστάσεις ισορροπίας, που σημαίνει ότι υπάρχουν πολλοί τρόποι, που μία κατασκευή μπορεί να αναλάβει τα φορτία της.

Απεδείχθη τότε, ότι η φύση στην εξέλιξη των φαινομένων της ακολουθεί ορισμένους κανόνες. Ένας από αυτούς είναι ο νόμος του ελάχιστου έργου, ο οποίος λέει ότι από όλες τις προηγούμενες δυνατές καταστάσεις ισορροπίας, η φύση θα καταλήξει σ' αυτήν για την επίτευξη της οποίας απαιτείται να καταναλωθεί η λιγότερη ενέργεια.

Οι Amber, Poncele και Stokes, μελέτησαν την ελαστικότητα και επεσήμαναν τις δύο βασικές καταστάσεις, δηλαδή την μεταβολή σχήματος χωρίς μεταβολή όγκου και την μεταβολή του όγκου χωρίς αλλαγή σχήματος. Ο Daniel Bernouilli εφάρμοσε το θεώρημα της κινητικής ενέργειας. Οι Wallis, Wren και Huygens διατύπωσαν τους νόμους της κρούσεως των σωμάτων και της διατήρησης των ποσοτήτων κίνησης.

Ο D'Alembert το 1743 στο "Εγχειρίδιο Δυναμικής" εισάγει την επιτάχυνση σαν παράγωγο, αποδίδει την θέση στην μάζα, σε δυναμικά φαινόμενα, θεσμοθετεί τις δυνάμεις αδρανείας και αποφαινεται ότι αυτές εμφανίζονται δευτερογενώς σαν αντίδραση σε άλλες πρωτογενείς δράσεις.

Ο Euler το 1760 στο σύγγραμμα του "Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum" (θεωρία κινήσεως των στερεών σωμάτων), που ανανεώθηκε το 1790, ορίζει το κέντρο μάζας και το κέντρο αδρανείας, τις ροπές αδρανείας και αποσυνθέτει την κίνηση του στερεού σε κίνηση του κέντρου αδρανείας του και περιστροφή περί άξονα, που διέρχεται από αυτό το κέντρο. Εμφανίζονται για πρώτη φορά οι κλασσικές διαφορικές εξισώσεις της κινήσεως.

Η "Αναλυτική Μηχανική" του Lagrange το 1788, αποτελεί το επιστέγασμα του οικοδομήματος των μεγάλων γεωμετρών του 18ου αιώνας. Ο Lagrange, στηρίζει ολόκληρη την στατική στην αρχή των φανταστικών (εικονικών) κινήσεων (virtuel). Εισάγει τους πολλαπλασιαστές, μία μέθοδο απλή και γενική. Με αυτούς υπολογίζει το φανταστικό (πιθανό) έργο των αντιδράσεων. Στην δυναμική ανάλυση, αναλύει τα τέσσερα αξιώματα (αρχές) της δυναμικής:

1. Την διατήρηση της κινητικής ενέργειας (που ανάγεται στον Huygens).

2. Την διατήρηση του κέντρου βαρύτητας του Νεύτωνος.
3. Την αρχή των πεδίων και
4. Την αρχή του ελάχιστου της ποσότητας δράσεων.

Η ανάλυση, επέτρεψε στον Lagrange να διατυπώσει τις γενικές εξισώσεις της δυναμικής των συστημάτων με εξαιρετική απλότητα και ακρίβεια.

Οι Amber και Poncele διετύπωσαν τις αρχές ελαστικής μεταβολής του σχήματος ενός σώματος, ενώ την σημασία των παρατηρήσεων τους προσδιόρισε ο Stokes το 1845. Η θεωρία ελαστικότητας είχε ήδη διατυπωθεί από τους J. και D. Bernouilli. Με το πρόβλημα της ελαστικότητας ασχολήθηκαν ακόμα οι Poisson, Cauchy, Lamé και αργότερα οι Kelvin και Poincare, ενώ ο Coulomb το 1780 μελέτησε τις παραμορφώσεις που προκαλεί η στρέψη.

Η στατική είχε πλέον γερά θεμέλια και μπορούσαν να αντιμετωπισθούν ισοστατικοί και υπερστατικοί φορείς με έναν μεγάλο αριθμό μεθόδων αναλυτικών ή γραφικών, όλοι όμως για φορτία στατικά. Ο δυναμικός χαρακτήρας των φορτίων, που ειδικά στις γέφυρες είναι ουσιαστικός, αμελείτο και όπου αυτός ήταν έντονος αντιμετωπιζόταν μέσω των λεγόμενων συντελεστών επαυξήσεων που βαφτίζονταν κατά περίπτωση κρουστικοί ή δυναμικοί κ.λ.π.

Το πρώτο σοβαρό ατύχημα στην ιστορία της γεφυροποιίας για το οποίο έχουμε πλήρη στοιχεία, ήταν αυτό της καταστροφής της γέφυρας Brighton Chain Pier, λόγω σφοδρής ανεμοθύελλας, όπως αναφέρθηκε παραπάνω. Το 1854, καταστράφηκε λόγω σφοδρής ανεμοθύελλας η κρεμαστή γέφυρα Wheeling στην δυτική Βιρτζίνια και μαζί φάνηκαν και οι πρώτες ανησυχίες των μηχανικών. Ο G. Airy ασχολήθηκε με το θέμα, αλλά λανθασμένα, καθώς δεν υπονιάστηκε την αεροδυναμική κατάσταση που αναπτύσσεται περί την γέφυρα.

Το 1865 καταστράφηκε η χυτοσιδηρά σιδηροδρομική γέφυρα Ashtabula στο Ohio των Η.Π.Α. μετά από χιονοθύελλα με 100 νεκρούς. Η καταστροφή αποδόθηκε στην ποιότητα του υλικού, με αποτέλεσμα να γίνουν αφ' ενός μεν μελέτες για την βελτίωση του χυτοσιδήρου και αφ' ετέρου δε, δειλή στροφή προς τον δομικό χάλυβα. Το 1878 κατεστράφη η γέφυρα Firth of Tay στο Dundee της Σκωτίας κατά την διέλευση συρμού, κατά την διάρκεια σφοδρής ανεμοθύελλας με 200 θύματα. Η καταστροφή αυτή προξένησε ιδιαίτερη αίσθηση.

Το 1891 κατεστράφη η σιδηροδρομική γέφυρα Birds της Ελβετίας κατά την διέλευση συρμού, με 75 νεκρούς. Ήταν η πρώτη καταστροφή που ήταν φανερό ότι

δεν οφείλετο σε φυσικό φαινόμενο, αλλά στους υπολογισμούς. Έδωσε έτσι αφορμή στην μελέτη του λυγισμού στην πλαστική περιοχή, με αποτέλεσμα να εξαχθούν οι εμπειρικοί τύποι του Tetmajer και οι θεωρητικοί τύποι του Engesser.

Το 1900 έως το 1917 κατά την κατασκευή της γέφυρας του Quebec στον Καναδά, συνέβησαν διάφορα ατυχήματα, το σημαντικότερο των οποίων οφειλόταν σε πρόβλημα λυγισμού με 82 νεκρούς. Έδωσε ακόμη την αφορμή για την θεμελίωση της θεωρίας των μεγάλων παραμορφώσεων, αλλά και στην έρευνα για την βελτίωση τόσο των μεθόδων, όσον και των χρησιμοποιούμενων μέσων κατά την συναρμολόγηση – ανέγερση μίας γέφυρας.



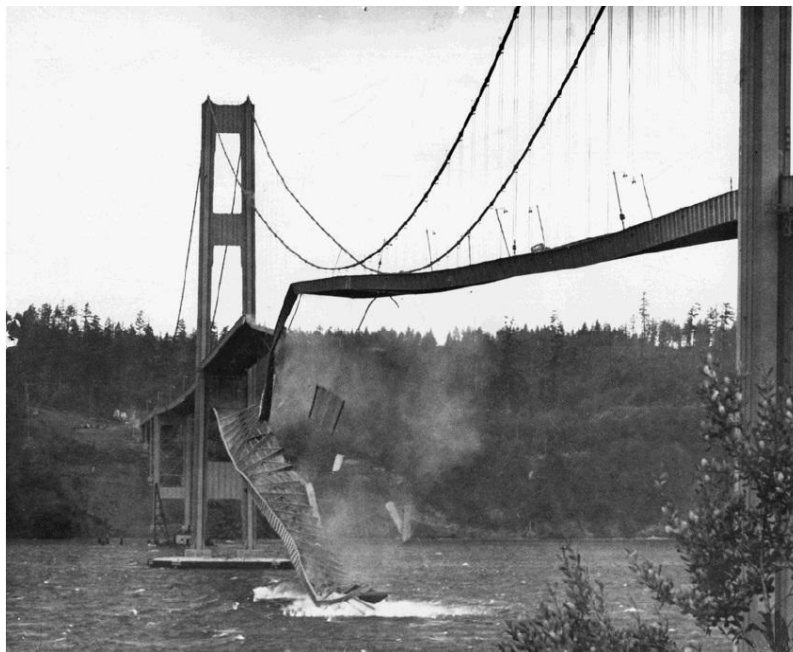
Σχήμα 2.1 Η Γέφυρα του Quebec στον Καναδά στην φάση κατασκευής.

Κατά την περίοδο αυτή, άρχισε και η έρευνα της αντοχής μίας γέφυρας όχι πλέον υπό στατικά φορτία, αλλά υπό δυναμικά – κινούμενα φορτία. Οι Willis, Stokes και Zimmermann παλαιότερα, είχαν ασχοληθεί με το πρόβλημα, αλλά με την παραδοχή ότι η μάζα της γέφυρας ήταν αμελητέα (1849 έως 1896).

Αντίθετα οι Krylov (1905) και Timoshenko (1908), θεώρησαν μικρή την μάζα του φορτίου σε σχέση με αυτή της δοκού. Ο Inglis (1934) έθεσε το πρόβλημα σε ορθές βάσεις, το μελέτησε και έδωσε λύσεις χρησιμοποιώντας την αρμονική ανάλυση, ενώ οι Odmann και Kolousek χρησιμοποίησαν πρώτοι τις κανονικές μορφές.

Το 1940 κατέπεσεν η γέφυρα της Tacoma επί του Puget Sound στις Η.Π.Α., λόγω ανεμοπιέσεως. Η καταστροφή ιδιαίτερα της Tacoma, ανέτρεψε εκ βάθρων τις κρατούσες αντιλήψεις για τον σχεδιασμό και την ανάλυση μιας γέφυρας υπό την

δράση ανεμοπιέσεων. Άρχισαν εκτεταμένες πειραματικές έρευνες και αποδείχθη ότι το πρόβλημα είναι εξαιρετικά πολυσύνθετο, εξαρτώμενο από τον συνδυασμό των δυναμικών χαρακτηριστικών της γέφυρας με αυτά της ανεμοπιέσεως.



Σχήμα 2.2 Η κατάρρευση της γέφυρας Tacoma στις Η.Π.Α. (1940).

2.3 Θεωρητική έρευνα

Το πρόβλημα των κινούμενων φορτίων μελετήθηκε το πρώτον θεωρητικά και πειραματικά από τον R. Willis, ο οποίος θεώρησε την μάζα της δοκού μικρή σε σχέση με την μάζα ενός μεμονωμένου φορτίου. Με τις ίδιες παραδοχές, μελέτησαν το πρόβλημα και οι G.G. Stokes και H. Zimmermann.

Ο A.N. Krylov αρχικά και ο S.P. Timoshenko αργότερα, μελέτησαν το ίδιο πρόβλημα, αλλά θεωρώντας αντιθέτως μικρή την μάζα του φορτίου σε σχέση με την μάζα της δοκού. Στην συνέχεια, πληθώρα μελετητών ασχολήθηκαν με το πρόβλημα, με διάφορες προσεγγίσεις. Οι A.N. Lowan και ο N.G. Bondar χρησιμοποίησαν τις συναρτήσεις Green, ενώ ο S.P. Timoshenko επέλυσε και το πρόβλημα ενός κινούμενου με σταθερή ταχύτητα φορτίου, με ένταση μεταβαλλόμενη αρμονικά. Το πρόβλημα με ρεαλιστικούς λόγους μαζών φορτίου προς δοκού, μελετήθηκε κατ' αρχάς από τον H. Saller και στην συνέχεια τους H.H. Jeffcott, H. Steuding, A. Schallenkamp, V.M. Muchnikov και M.Y. Ryazonova. Ειδική μνεία πρέπει να γίνει στην πραγματεία του C.E. Inglis, ο οποίος χρησιμοποίησε αρμονική ανάλυση για την επίλυση όλων των σημαντικών στην πράξη περιπτώσεων καταπονήσεων

σιδηροδρομικών γεφυρών, υποκειμένων σε καταπόνηση από την διέλευση ατμοκινήτων συρμών. Με την βοήθεια της αναλύσεως των κανονικών μορφών οι S.T.Odmann και V.Kolusek επέλυσαν προβλήματα δυναμικής για πολύπλοκα στατικά συστήματα.

Ο A. Hillerborg, χρησιμοποιώντας την μέθοδο Fourier και αριθμητικές μεθόδους διαφορίσεως, έδωσε την πρώτη λύση στο πρόβλημα ενός κινούμενου, με σταθερή ταχύτητα, φορτίου και φερομένου επί ελατηρίων. Περαιτέρω πρόοδος προς αυτή την κατεύθυνση κατέστη δυνατή με την χρήση των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Οι J.M. Biggs, H.S. Suer και J.M. Louw επέλυσαν το πρόβλημα χρησιμοποιώντας την μέθοδο του Inglis, ενώ οι T.P. Tung, L.E. Goodman, T.Y. Chen και N.M. Newmark την μέθοδο Hillerborg, τις δε λύσεις εφάρμοσαν στην δυναμική των οδοφόρων γεφυρών.

Ο L. Frýba το 1996 έκανε μια περιληπτική παρουσίαση της πληροφορίας των αποτελεσμάτων των δυναμικών φαινομένων στις σιδηροδρομικές γέφυρες. Δόθηκε ιδιαίτερη προσοχή στα φορτία κυκλοφορίας και την απόκριση των σιδηροδρομικών γεφυρών. Τα βασικά δυναμικά χαρακτηριστικά των σιδηροδρομικών γεφυρών και η επιρροή των σημαντικότερων παραμέτρων, όπως η ταχύτητα των οχημάτων και οι ανωμαλίες του καταστρώματος, περιγράφονται στη συγκεκριμένη μελέτη. Εκτός από τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται κάθετα στη διεύθυνση ενός φορέα, δόθηκε προσοχή επίσης στα οριζόντια, διαμήκη και εγκάρσια αποτελέσματα της απόκρισης των γεφυρών. Εντούτοις, τα αποτελέσματα του ανέμου και των σεισμών δεν λαμβάνονταν υπόψη. Ο σκοπός του μελετητή ήταν να παρουσιάσει μια καλά εμπειρισταωμένη έρευνα για τη δυναμική συμπεριφορά των σιδηροδρομικών γεφυρών, βασιζόμενη σε άφθονα πειραματικά δεδομένα, που να περιγράφει με επιτυχία μεθόδους που εφαρμόζονται στα δυναμικά προβλήματα.

Οι Γ. Μιχάλτσος, Δ Σοφιανόπουλος και Α. Κουνάδης το 1996 μελέτησαν την γραμμική δυναμική απόκριση μιας απλά στηριζόμενης δοκού υπό την επίδραση κινητού φορτίου σταθερού μέτρου και ταχύτητας συμπεριλαμβανομένων και των επιδράσεων της μάζας του. Χρησιμοποίησαν μιας λύση σειράς για τη δυναμική απόκριση έτσι ώστε να συμπεριληφθούν όλες οι κανονικές μορφές ταλάντωσης και οι επιδράσεις από το συνδυασμό της κίνησης της μάζας και του φορτίου και από την ταχύτητα αλλά και άλλων παραμέτρων, οι οποίοι υπολογίστηκαν αναλυτικά. Τελικά δόθηκε μια πληθώρα αριθμητικών αποτελεσμάτων που είναι καθοριστικά για έναν σωστό σχεδιασμό μίας κατασκευής, η οποία υπόκειται σε τέτοιες φορτίσεις.

Ο R. Karoumi το 1998 κατάφερε να προσεγγίσει την επίλυση του προβλήματος των κινούμενων φορτίων μίας καλωδιοτής γέφυρας με τραχύ οδόστρωμα, η οποία εδραζόταν σε ελατήρια. Αυτή η έρευνα δεν ασχολήθηκε καθόλου με τις γέφυρες, αλλά με την ανάπτυξη ενός αποδοτικού προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων, για να πραγματοποιήσει δυναμικές αναλύσεις σε γέφυρες. Το εκτελεσμένο πρόγραμμα ελέγχεται με τη σύγκριση των αποτελεσμάτων από την ανάλυση που πραγματοποιήθηκε με αυτά που προκύπτουν από την ανάλυση με ένα πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων που υπάρχει στο εμπόριο. Έχουν διεξαχθεί παραμετρικές μελέτες, οι οποίες ερευνούν την επίδραση της απόσβεσης, της αλληλεπίδρασης μεταξύ οχήματος και γέφυρας, της απόκρισης των καλωδίων, της τραχύτητας του καταστρώματος της γέφυρας, της ταχύτητας του κινούμενου οχήματος και του φαινομένου του συντονισμού σε συνδιασμό με την απόσβεση. Τελικά εξάγεται το συμπέρασμα ότι η τραχύτητα του καταστρώματος έχει πολύ μεγάλη επιρροή στην δυναμική απόκριση της κατασκευής και πρέπει πάντα να λαμβάνεται υπόψη, εάν αυτό είναι εφικτό.

Ο I. Bucknall το 2003 παρουσίασε μία εργασία η οποία εξέτασε τις απαιτήσεις του νέου Ευρωκώδικα για τον σχεδιασμό σιδηροδρομικών γεφυρών υπερταχέων συρμών. Πρόσφατες πρόοδοι της δυναμικής συμπεριφοράς των σιδηροδρομικών γεφυρών υπερταχέων συρμών έχουν συμπεριληφθεί στους μετέπειτα Ευρωκώδικες. Η εργασία περιγράφει τις απαιτήσεις για τους ελέγχους σχεδιασμού, τα αποδεκτά κριτήρια, τις απαιτήσεις για την ανάλυση της κατασκευής που συμπεριλαμβάνονται στην μελέτη, και σημαντικές αλλαγές στον Ευρωκώδικα. Όσον αφορά την απόσβεση της κατασκευής, υπάρχει κατάλληλος τρόπος ώστε να χωριστούν οι σιδηροδρομικές γέφυρες σε τέσσερις κατηγορίες, ανάλογα με το υλικό της γέφυρας. Η ανάλυση έδειξε ότι υπάρχει κάποιος συσχετισμός μεταξύ της απόσβεσης και του μήκους της γέφυρας, γενικά εμφανίζεται υψηλότερος συντελεστής απόσβεσης στα μικρότερα ανοίγματα. Έλεγε τα επίπεδα επιτάχυνσης του καταστρώματος της γέφυρας που απαιτούνται για να αποφευχθεί ο κίνδυνος αστάθειας και της απώλειας επαφής μεταξύ οχήματος και καταστρώματος της γέφυρας. Οι δοκιμές έδειξαν ότι ο βαθμός της μη γραμμικής συμπεριφοράς του έρματος, η οποία ξεκινάει για επιταχύνσεις άνω των 0.8g, αντιστοιχεί σε μία παρατηρούμενη αλλαγή του σχήματος του φορέα. Η εκτίμηση των επιπέδων επιτάχυνσης όπου το έρμα άρχισε να εμφανίζει μη γραμμική συμπεριφορά και εφαρμογή ενός παράγοντα ασφάλειας, έχει αποτελέσματα σε ένα επιτρεπόμενο επίπεδο επιτάχυνσης 0.35g.

2.4 Πειραματική έρευνα

Η δυναμική συμπεριφορά φερουσών κατασκευών υπό την επίδραση κινουμένων φορτίων, ερευνάται τα τελευταία 170 χρόνια με θεωρητικές και πειραματικές μεθόδους. Υπάρχει μεγάλος αριθμός εργασιών, ο οποίος καθιστά αδύνατη την αναφορά σε όλες.

Σαν αφετηρία στην μελέτη του φαινομένου της δυναμικής καταπόνησεως των γεφυρών, θεωρούνται οι εργασίες του Willis. Στα πλαίσια μιας επιτροπής ορισμένης από την βασίλισσα της Αγγλίας το 1847, ο Willis διενήργησε ολόκληρη σειρά πειραμάτων, για να διαπιστώσει την επιρροή της ταχύτητας στο φαινόμενο της ταλαντώσεως των φορέων.

Ένας άλλος όμως πρωτοπόρος, ο Deslandres, κατέδειξε την επιρροή της συχνότητας και του συντονισμού. Ο τελευταίος, το 1892, κατέληξε στο συμπέρασμα ότι και μικρά ακόμα εύρη ταλαντώσεων του φορτίου, μπορούν να προκαλέσουν μεγάλες παραμορφώσεις, όταν η συχνότητα τους είναι ίση με την βασική συχνότητα της γέφυρας. Διαπίστωσε ακόμα ότι η μέγιστη αντίδραση της γέφυρας δεν μπορούσε να υπολογιστεί, διότι η απόσβεση εξαρτιόταν από το εύρος της ταλάντωσης. Το γεγονός αυτό μπορεί να διαπιστωθεί εύκολα. Το 1889, ο Sonleyre ήταν ένας από τους πρώτους που μελέτησε το φαινόμενο και συμπέρανε ότι ο δυναμικός συντελεστής αυξάνεται με την αύξηση του μήκους της γέφυρας. Η πρώτη σχέση για το παραπάνω, δημοσιεύτηκε το 1893, από τον Melan.

Η Μεγάλη Βρετανία ήταν η πρώτη χώρα στην οποία έγιναν μεγάλης κλίμακας και συστηματικά πειράματα την δεκαετία του '20. Η μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς σιδηροδρομικών γεφυρών προόδευσε ιδιαίτερος λόγω των πολλών ερευνητικών προγραμμάτων, που χρηματοδότησαν σιδηροδρομικοί οργανισμοί. Το δεύτερο διεθνές συνέδριο για τις γέφυρες το 1928 στην Βιέννη, έδωσε την δυνατότητα να συγκεντρωθεί και να αξιολογηθεί η μέχρι τότε γνώση.

Την δεκαετία του '50, ο Van Eeman διεξήγαγε στις Η.Π.Α. σειρά πειραμάτων γενικού περιεχομένου σε δικτυωτή γέφυρα. Στα πειράματα αυτά χρησιμοποιήθηκαν πληθώρα οχημάτων, ενώ αναπτύχθηκαν για πρώτη φορά μέθοδοι για τον ακριβή προσδιορισμό της ταχύτητας και της θέσης του οχήματος επί της γέφυρας. Από το κείμενο 124 της HRB Bulletins του 1956, φαίνεται ότι στην δεκαετία του '50 υπήρξε μεγάλη πρόοδος στις Η.Π.Α..

Οι Edgerton και Beecroft σε μία πρωτοποριακή εργασία χρησιμοποίησαν τους πρώτους επαγωγικούς καταγραφείς διαδρομής (αποκλίσεως) και επιμηκύνσεων,

μέθοδος που χρησιμοποιείται ακόμα και σήμερα. Κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι οι ανωμαλίες του οδοστρώματος επηρεάζουν σημαντικά τις ταλαντώσεις των γεφυρών.

Το AASHO Road Test αποτέλεσε ένα πειραματικό πρόγραμμα που όμοιο του δεν είχε πραγματοποιηθεί στο παρελθόν και φαίνεται μάλλον απίθανο να πραγματοποιηθεί στο μέλλον. Την ευθύνη για την εκτέλεση των πειραμάτων, που κόστισαν 27 εκατομμύρια δολάρια Η.Π.Α., είχε το Highway Research Board (HRB). Τον Αύγουστο του 1956 ξεκίνησε η συγκρότηση της πειραματικής μονάδας στην Ottawa στο Illinois, ενώ στις 15 Οκτωβρίου του 1958 διεξήχθη το πρώτο και στις 30 Νοεμβρίου 1960 το τελευταίο πείραμα. Υπήρχε πληθώρα οχημάτων δέκα διαφορετικών τύπων, ενώ σε περιόδους αιχμής απασχολούνταν 185 υπάλληλοι και 400 στρατιώτες. Σκοπός των πειραμάτων ήταν η διερεύνηση της συμπεριφοράς του οδοστρώματος και των γεφυρών υπό την ενέργεια μεγάλου αριθμού δυναμικών φορτίων, η διεξαγωγή μετρήσεων και η εξαγωγή συμπερασμάτων. Τα παραπάνω πειράματα δυναμικής διερεύνησης των γεφυρών διεξήχθησαν στο πανεπιστήμιο Illinois. Στις εργασίες των Biggs, Suer και Louw το 1957 (θεωρητική έρευνα και σειρά πειραμάτων), η γέφυρα και το όχημα αντικαθίστανται από ταλαντωτές μίας μάζας χωρίς απόσβεση.

Επίσης, το 1957 ο Oehler δημοσίευσε τα αποτελέσματα πειραμάτων σε 15 οδικές γέφυρες, όπου χρησιμοποιήθηκε το ίδιο πάντα πειραματικό όχημα, ένα τριαξονικό ρυμουλκό.

Οι Toledo Leyva και Veletsos το 1958, χρησιμοποίησαν το πρόγραμμα Wen για την μελέτη της επιρροής των ανωμαλιών της επιστρώσεως στην δυναμική συμπεριφορά μίας απλής δοκού. Μελέτησαν γέφυρες με ανοίγματα 6 έως 27 μέτρων και συχνότητες από 12,1 Hz έως 2,6 Hz, χρησιμοποιώντας ένα απλό μοντέλο οχήματος, αποτελούμενο από ταλαντωτή μίας μάζας χωρίς απόσβεση.

Το 1962, οι Wright και Green διεξάγουν σειρά δυναμικών πειραμάτων σε 47 οδικές γέφυρες, υπό κανονική κίνηση και κυκλοφορία οχημάτων στο Ontario με τα οποία ξεκίνησε η μακρά παράδοση του Ontario.

Οι Varney και Galambos παρουσίασαν το 1965 έναν κατάλογο με όλα τα πειράματα δυναμικής σε οδικές γέφυρες, που διεξήχθησαν από το 1948 έως το 1965. Οι έρευνες στο πανεπιστήμιο του Illinois συνεχίστηκαν έως το μέσον της δεκαετίας του '70, όπου ο Fischer αλλά και οι Veletsos, Walker, Nieto-Ramirez, Hwang, Eberhardt και Ruhl ασχολήθηκαν κυρίως με την βελτίωση των μοντέλων των γεφυρών. Αξίζει να αναφερθεί η εργασία του Eberhardt, ο οποίος το 1972

δημιούργησε ένα πρόγραμμα ηλεκτρονικών υπολογιστών, που χρησιμοποιούσε τρισδιάστατα μοντέλα οχημάτων και γεφυρών.

Το 1979, καταρτίζεται ο πρώτος κώδικας σχεδιασμού γεφυρών στο Ontario, ο «Ontario Highway Bridge Design Code». Όπως και ο μεταγενέστερος του το 1983, ορίζει και αυτός τον δυναμικό συντελεστή σαν συνάρτηση της βασικής συχνότητας της γέφυρας.

Το 1982, η επιτροπή της A.S.C.E. για τα φορτία και τις δυνάμεις των γεφυρών, κατέληξε στο συμπέρασμα ότι οι εργασίες που αναφέρονταν στο φαινόμενο της κρούσεως, έπρεπε να συλλεγούν και να δημοσιευθούν, ώστε να υπάρχει η βασική βιβλιογραφία για την περαιτέρω προώθηση της έρευνας.

Οι Ghosn και Quingle παρουσίασαν το 1989 μία μέθοδο, με την οποία χρησιμοποιώντας την τεχνική «Weigh-in-Motion» του Moses ήταν δυνατός ο προσδιορισμός του δυναμικού εύρους ταλαντώσεων των γεφυρών.

Τα προηγούμενα χρόνια, κατά την διάρκεια πειραμάτων, εμφανίσθηκαν στην Γαλλία κάποιες ενδιαφέρουσες θεωρητικές προσεγγίσεις. Ο Palamas το 1982 και το 1985, ασχολήθηκε με απλά μοντέλα σχετικά με τα οχήματα και τις μορφές των ανωμαλιών του οδοστρώματος. Ο Coussy, υπό την επίβλεψη του οποίου εργάσθηκε ο Palamas, προχώρησε το 1989 με τους Said και Van Hoone στην θεωρία των διαξονικών οχημάτων με γραμμική σχέση ελατηρίου-αποσβεστήρων και διαφόρων μορφών ανωμαλιών.

Σήμερα, με την αλματώδη εξέλιξη της τεχνολογίας, είμαστε σε θέση να αντιμετωπίσουμε ευκολότερα τέτοια προβλήματα, όπως οι Bily στην Πράγα και Hymay στην Ottawa, που εργάστηκαν με τρισδιάστατα μοντέλα. Όμως, και οι δύο δεν ήταν σε θέση να εξετάζουν τις ανωμαλίες του οδοστρώματος με λεπτομερή τρόπο.

Μεγάλος αριθμός θεωρητικών και πειραματικών μελετών σιδηροδρομικών γεφυρών, εκπονήθηκαν στην σχολή Dnepropetrovsk από τον καθηγητή N.G.Bondar. Στα ερευνητικά κέντρα της Μόσχας και του Λένινγκραντ, διεξάγονται εκτεταμένες πειραματικές μελέτες σε σιδηροδρομικές γέφυρες.

Στις Η.Π.Α., οι ερευνητές επικέντρωσαν τις προσπάθειες τους σε πειραματικές μελέτες σιδηροδρομικών γεφυρών και εν συνεχεία οδικών, μελετώντας την συμπεριφορά τους έως και την κατάρρευση τους. Έρευνα των κινούμενων φορτίων διεξάγεται ακόμα, στα πανεπιστήμια Illinois (Urbana), Michigan State (East Lansing), Northwestern (Evanston), Standard, M.I.T. και αλλού. Στην Ευρώπη διεξάγεται

έρευνα σε Πολωνία και Ελβετία, κυρίως επί σιδηροδρομικών γεφυρών, Γαλλία επί οδοφόρων, ενώ στην Γερμανία ασχολούνται και με τα δύο είδη.

3 Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

3.1 Τα χαρακτηριστικά του δυναμικού προβλήματος

Οι δυναμικές αναλύσεις είναι συχνά πιο σύνθετες και περίπλοκες από τις αντίστοιχες στατικές, κυρίως λόγω του ότι τα φορτία είναι συναρτήσεις και του χρόνου σε τέτοιου είδους προβλήματα. Δυναμικό φορτίο είναι κάθε φορτίο του οποίου το μέτρο, η διεύθυνση και η θέση μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου. Επίσης, η απόκριση της κατασκευής σε κάθε δυναμικό φορτίο, δηλαδή οι τάσεις και οι μετακινήσεις που αναπτύσσονται σε κάθε σημείο του δομήματος είναι χρονομεταβλητές. Λόγω των παραπάνω, ένα δυναμικό πρόβλημα δεν έχει μια μοναδική λύση, όπως έχει το αντίστοιχο στατικό. Μια επαλληλία λύσεων ενός δυναμικού προβλήματος πρέπει να είναι εδραιωμένη και να ανταποκρίνεται σε ολόκληρη την χρονική διάρκεια της χρόνο-ιστορίας των δράσεων.

Η Δυναμική ανάλυση συνυπολογίζει τις επιδράσεις των αδρανειακών δυνάμεων, καθώς και της απόσβεσης της ελαστικής δύναμη αντίστασης. Οι αδρανειακές δυνάμεις αντιτίθενται στις επιταχύνσεις της κατασκευής. Εάν ένα δυναμικό φορτίο εφαρμόζεται σε μια κατασκευή, η προκύπτουσα απόκριση εξαρτάται όχι μόνο από το φορτίο, αλλά και από τις αδρανειακές δυνάμεις. Κατά συνέπεια, η αντίστοιχη εσωτερική απάντηση του δομήματος πρέπει να συνυπολογίζει, όχι μόνο τις εξωτερικές, αλλά και τις αδρανειακές δυνάμεις που είναι αποτέλεσμα των επιταχύνσεων της κατασκευής.

Εάν οι αδρανειακές δυνάμεις αντιπροσωπεύουν ένα σημαντικό μέρος του συνολικού φορτίου, ο δυναμικός χαρακτήρας του προβλήματος πρέπει να ληφθεί υπόψη στους υπολογισμούς. Εάν οι αδρανειακές δυνάμεις είναι αμελητέα ποσότητα, μπορεί να θεωρηθεί καλύτερη η στατική ανάλυση του προβλήματος, ακόμα κι αν το φορτίο και η διεύθυνση του, μπορεί να είναι συναρτήσει του χρόνου.

3.2 Ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης

Σχεδόν όλα τα σώματα τείνουν να δονούνται κατά κύριο λόγο σε συγκεκριμένες συχνότητες όταν τα διαταράσσουμε ξαφνικά. Οι συχνότητες αυτές καλούνται φυσικές συχνότητες ή ιδιοσυχνότητες των συγκεκριμένων αντικειμένων, συμβολίζονται με το γράμμα (ω) και έχουν διαστάσεις rad/sec ή sec^{-1} . Είναι μέγεθος που εξαρτάται από την μάζα και την δυσκαμψία του συστήματος και αποτελεί ίδιο δυναμικό χαρακτηριστικό μέγεθος του συστήματος.

Ο χρόνος που απαιτείται για να εκτελέσει μία πλήρη ταλάντωση το σύστημα ονομάζεται ιδιοπερίοδος του συστήματος και υπολογίζεται από τη σχέση:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (3.1)$$

Το αντίστροφο της περιόδου εκφράζει τον αριθμό των πλήρων ταλαντώσεων στη μονάδα του χρόνου και ονομάζεται συχνότητα του συστήματος και εκφράζεται σε Hertz (sec^{-1}).

$$f = \frac{1}{T} \quad (3.2)$$

3.3 Δυναμικός συντελεστής μεγέθυνσης

Ένα κατάλληλο μέτρο της επίδρασης της δυναμικής φόρτισης μας δίνει ο λόγος αποκρίσεως, ο οποίος είναι αδιάστατο μέγεθος και εκφράζει τον αριθμό που πρέπει να πολλαπλασιάσουμε τη χρονική στιγμή t το στατικό βέλος για να λάβουμε το αντίστοιχο δυναμικό. Ο λόγος αποκρίσεως δίνεται από τον τύπο:

$$R(t) = \frac{w(t)}{w_{static}} \quad (3.3)$$

Όπου:

$w(t)$: Το δυναμικό βέλος.

w_{static} : Το στατικό βέλος.

Η μέγιστη τιμή του απολύτου του λόγου αποκρίσεως ονομάζεται δυναμικός συντελεστής μεγέθυνσης. Είναι ένα πολύ χρήσιμο μέγεθος στη δυναμική ανάλυση, διότι όταν αυτό είναι γνωστό για μία δεδομένη φόρτιση, τότε προσδιορίζονται αμέσως οι ακραίες καταστάσεις παραμορφώσεως και εντάσεως της κατασκευής.

$$D = \max |R(t)| \quad (3.4)$$

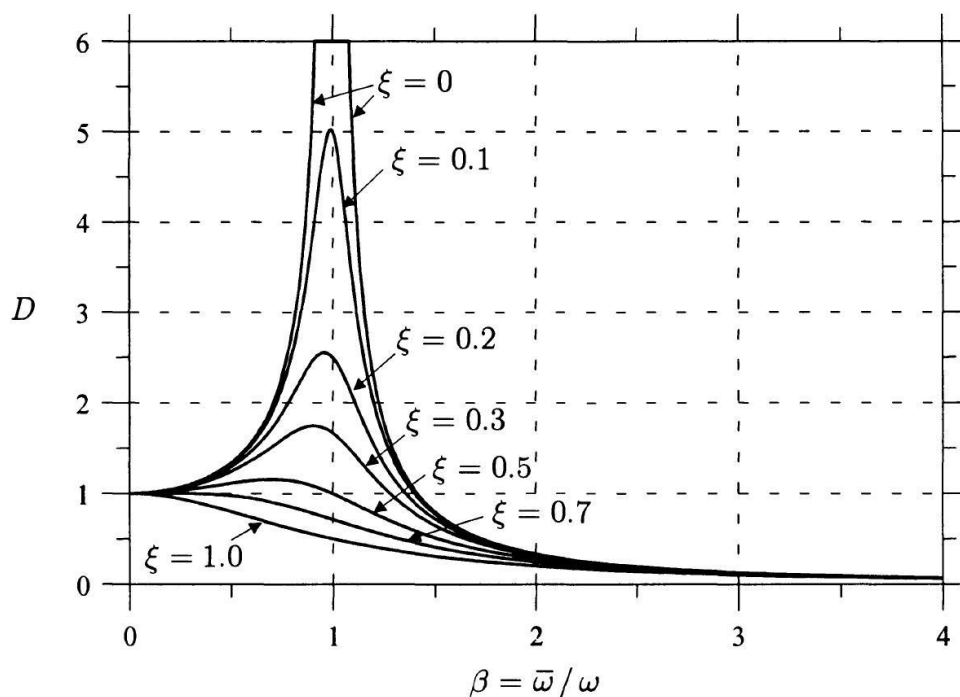
Όπου

D : Δυναμικός συντελεστής μεγέθυνσης

$R(t)$: Λόγος αποκρίσεως

Συνήθως, τα δυναμικά φορτία είναι ανάλογα με την αύξηση της απόκρισης των κατασκευών, όταν αυτά συγκρίνονται με τα στατικά φορτία. Ο σκοπός του δυναμικού συντελεστή μεγέθυνσης είναι να απλοποιεί τα αποτελέσματα των δυναμικών φορτίων και να τα συσχετίζει με τα στατικά. Πολλοί ορισμοί χρησιμοποιούνται σε διάφορες πειραματικές και θεωρητικές μελέτες.

Παλαιότερα στον σχεδιασμό των κατασκευών, τα αποτελέσματα των δυναμικών φορτίων των γεφυρών λαμβανόντουσαν υπόψη μόνο με τη χρησιμοποίηση ενός υποτιθέμενου δυναμικού συντελεστή μεγέθυνσης στους κανονισμούς σχεδίασεως των γεφυρών. Η μέθοδος του δυναμικού συντελεστή είναι μία πολύ απλή και τραχιά μέθοδος, αλλά γενικά εξασφαλίζει την ασφάλεια και την αξιοπιστία των κατασκευών. Λόγω της απλότητας του, η έκφραση του δυναμικού συντελεστή μεγέθυνσης που εμφανίζεται στους κανονισμούς σχεδίασης των γεφυρών δεν μπορεί να καθορίσει την επίδραση όλων των παραμέτρων που επηρεάζουν τη δυναμική συμπεριφορά των κατασκευών. Προκειμένου να πλησιάσουμε σε μια ακριβέστερη προσέγγιση των αποτελεσμάτων από δυναμικά φορτία, τα πρόσθετα δυναμικά φορτία πρέπει να προσδιοριστούν με έναν ακριβέστερο τρόπο. Στην πράξη κατά τον σχεδιασμό σιδηροδρομικών γεφυρών επί των οποίων κινούνται συρμοί υψηλών ταχυτήτων, η δυναμική συμπεριφορά πρέπει να αναλυθεί χρησιμοποιώντας λογισμικά τα οποία είναι διαθέσιμα στο εμπόριο και τα οποία λαμβάνουν υπόψη τα αποτελέσματα του συντονισμού αλλά και των επιπτώσεων από τις καμπτικές ταλαντώσεις στις οποίες υπόκειται μία κατασκευή. Στο σχήμα 3.1 που ακολουθεί παρουσιάζεται ο δυναμικός συντελεστής μεγέθυνσης σε συνάρτηση με τον λόγο της κυκλικής συχνότητας της εξωτερικής διέγερσης προς την ιδιοσυχνότητα της κατασκευής.



Σχήμα 3.1 Μεταβολή του δυναμικού συντελεστή μεγέθυνσεως συναρτήσει της απόσβεσης και του λόγου συχνοτήτων.

3.4 Απόσβεση ταλαντώσεων

Σε ένα σύστημα, το οποίο έχει απόσβεση, εμφανίζεται η δύναμη αποσβέσεως, η οποία αντιτίθενται στην κίνηση. Η απλούστερη έκφραση της, είναι η ιξώδης απόσβεση, κατά την οποία η δύναμη αποσβέσεως είναι ανάλογη της ταχύτητας κινήσεως, δηλαδή:

$$f_D = c\dot{w} \quad (3.5)$$

Όπου w είναι η μετατόπιση του σώματος και c μία σταθερά που μπορεί να υπολογιστεί πειραματικά. Επειδή το έργο της δύναμης αυτής μετατρέπεται σε θερμότητα, η δύναμη αποσβέσεως δεν είναι συντηρητική δύναμη. Είναι μία δύναμη η οποία κάνει το εύρος των ταλαντώσεων να φθίνει και τείνει να επαναφέρει το σύστημα στην κατάσταση ηρεμίας.

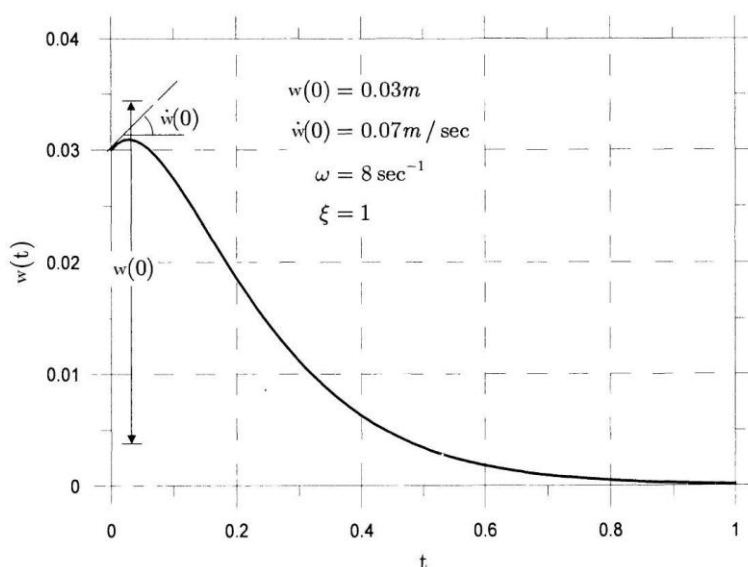
Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις κινήσεως με απόσβεση, οι οποίες εμφανίζουν κρίσιμη, υποκρίσιμη και υπερκρίσιμη απόσβεση αντίστοιχα.

3.4.1 Ελεύθερες ταλαντώσεις με κρίσιμη απόσβεση

Στην περίπτωση των ελεύθερων ταλαντώσεων με κρίσιμη απόσβεση, η σταθερά c ονομάζεται κρίσιμη απόσβεση και συμβολίζεται με c_{cr} και δίνεται από τον τύπο:

$$c = c_{cr} = 2m\omega \quad (3.6)$$

Ο χαρακτηρισμός αυτός δικαιολογείται, διότι, η τιμή της σχέσης (3.6) αποτελεί το κατώφλι μεταπτώσεως της συμπεριφοράς του συστήματος από περιοδική σε απεριοδική κίνηση και αντιστρόφως. Όπως φαίνεται και στο σχήμα (3.2) που ακολουθεί, στην περίπτωση της κρίσιμης αποσβέσεως η κίνηση δεν είναι ταλάντωση.



Σχήμα 3.2 Απόκριση συστήματος ελεύθερης ταλάντωσης με κρίσιμη απόσβεση.

3.4.2 Ελεύθερες ταλαντώσεις με υποκρίσιμη απόσβεση

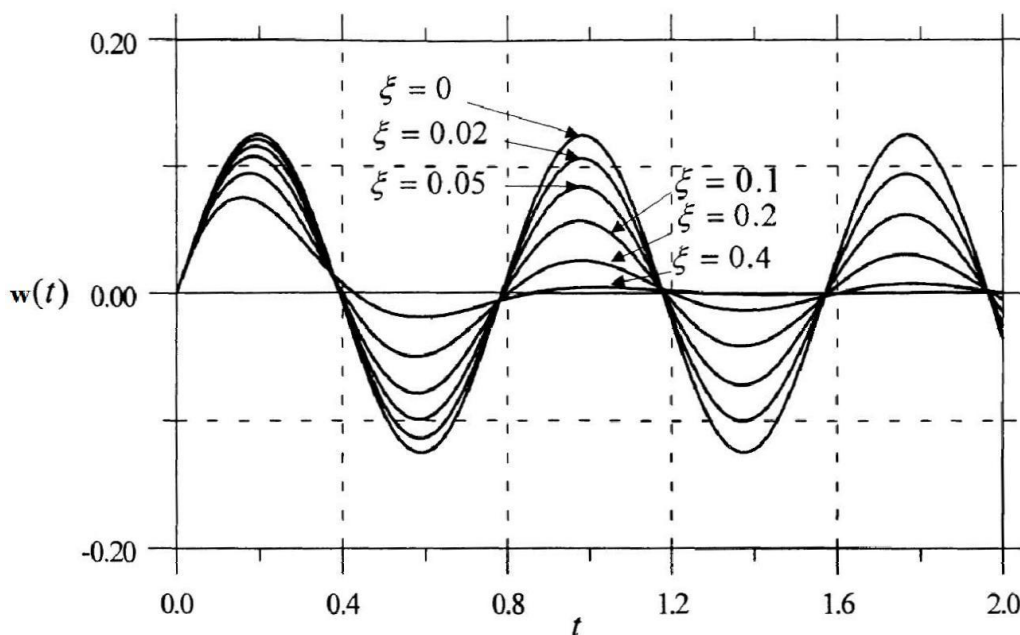
Η περίπτωση αυτή είναι η πλέον ενδιαφέρουσα, διότι στις συνήθεις κατασκευές του μηχανικού η τιμή του συντελεστή αποσβέσεως είναι πολύ μικρότερη του c_{cr} . Προς διευκόλυνση της μελέτης της υποκρίσιμης αποσβέσεως εισάγεται η έννοια του λόγου αποσβέσεως ξ , ο οποίος ορίζεται ως εξής:

$$\xi = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2m\omega} < 1 \quad (3.7)$$

Η συχνότητα του συστήματος με υποκρίσιμη απόσβεση δίνεται από τον τύπο:

$$\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2} \quad (3.8)$$

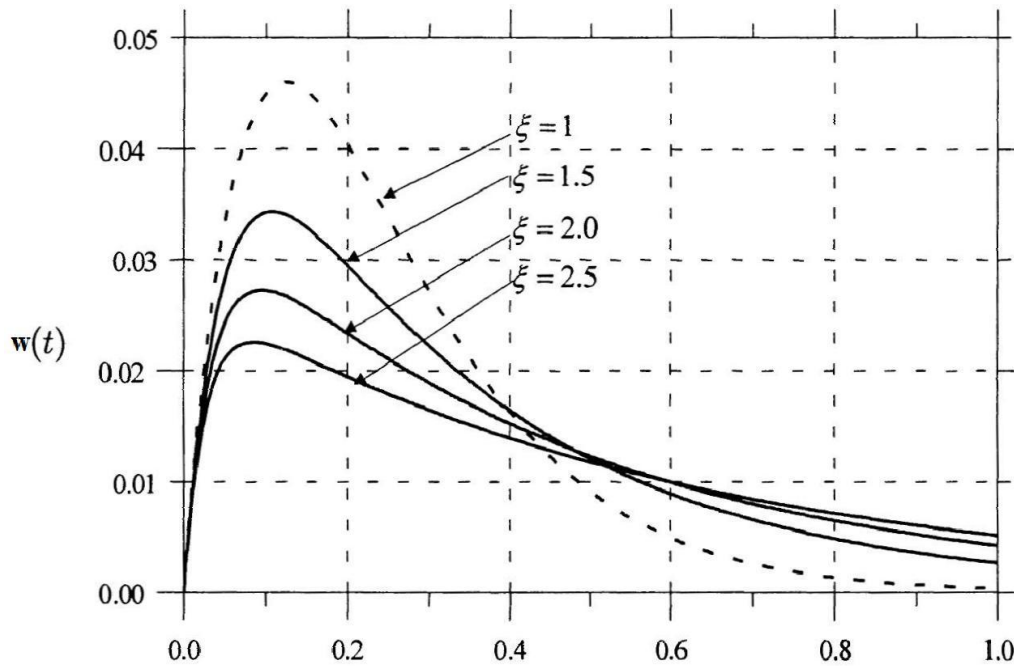
Στο σχήμα (3.3) που ακολουθεί φαίνεται η δυναμική απόκριση ενός μονοβάθμιου συστήματος με υποκρίσιμη απόσβεση για διάφορες τιμές του λόγου αποσβέσεως.



Σχήμα 3.3 Απόκριση συστήματος ελεύθερης ταλάντωσης με υποκρίσιμη απόσβεση για διάφορες τιμές του λόγου αποκρίσεως ξ .

3.4.3 Ελεύθερες ταλαντώσεις με υπερκρίσιμη απόσβεση

Στην περίπτωση της υπερκρίσιμης αποσβέσεως η κίνηση δεν είναι ταλάντωση. Το σύστημα επανέρχεται στην κατάσταση ηρεμίας ακολουθώντας εκθετικό νόμο. Η απόκριση ενός συστήματος με υπερκρίσιμη απόσβεση φαίνεται στο σχήμα 3.4.



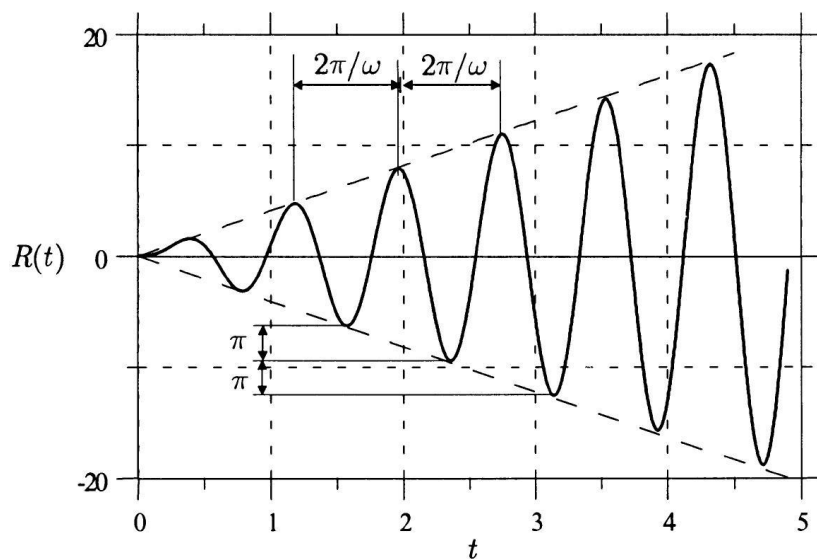
Σχήμα 3.4 Απόκριση συστήματος ελεύθερης ταλάντωσης με υπερκρίσιμη απόσβεση.

3.5 Συντονισμός σιδηροδρομικών γεφυρών

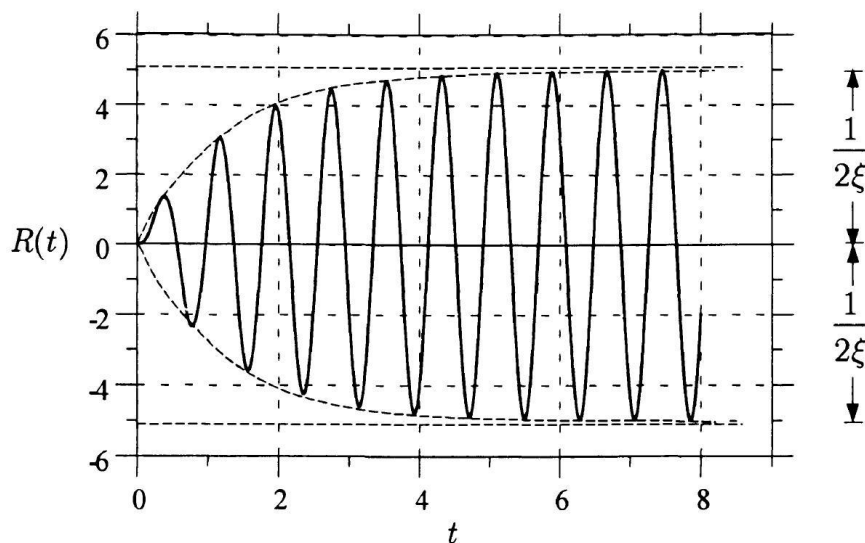
Η δυναμική ανάλυση των σιδηροδρομικών γεφυρών είναι απαραίτητη σε περίπτωση εμφάνισης συντονισμού. Ο συντονισμός είναι ένα πολύ επικίνδυνο φαινόμενο, το οποίο εμφανίζεται λόγω των υψηλών ταχυτήτων, καθώς και των αποστάσεων των αξόνων των σιδηροδρομικών συρμών. Σε περίπτωση απόκρισης σε συντονισμό λόγω των υψηλών επιταχύνσεων και της κινήσεως μεγάλων οχημάτων, οι υπερβολικές ταλαντώσεις μίας γέφυρας μπορεί να προκαλέσουν την απώλεια επαφής μεταξύ ρόδας και καταστρώματος, αποσταθεροποίηση του συρμού, μεγάλες ρωγμές και θραύση του σκυροδέματος, καθώς υπερβαίνονται τα όρια αντοχής της γέφυρας. Τα δυναμικά αποτελέσματα συμπεριλαμβανομένου και του φαινομένου του συντονισμού πρέπει πάντα να λαμβάνοντας υπόψη, κατά τον σχεδιασμό των σιδηροδρομικών γεφυρών στις οποίες κινούνται οχήματα με υψηλές ταχύτητες. Εντούτοις, εάν οι ταχύτητες κυκλοφορίας παραμένουν κάτω από 200 km/h, ο συντονισμός είναι απίθανο να εμφανιστεί και δεν πρέπει να λαμβάνεται υπόψη.

Τα αποτελέσματα του μέγιστου δυναμικού φορτίου εμφανίζονται στις μέγιστες ή αιχμικές τιμές του δυναμικού συντελεστή μεγέθυνσης. Ο κίνδυνος του συντονισμού προκύπτει όταν η συχνότητα της ασκούμενης φόρτισης, ή ενός πολλαπλάσιου αυτής, συμπίπτει με την αναπόσβεστη φυσική συχνότητα ταλάντωσης της κατασκευής. Καθώς αυξάνεται η ταχύτητα των οχημάτων, όταν αυτά διασχίζουν την γέφυρα, η

συχνότητα διέγερσης του οχήματος θα πλησιάσει τη φυσική συχνότητα της γέφυρας. Όταν ο συντονισμός εμφανίζεται, η δυναμική απόκριση της κατασκευής αυξάνεται πολύ γρήγορα. Η εμφάνιση του συντονισμού εξαρτάται από τον αριθμό των μαζών και των φορτίων τα οποία κινούνται ταυτόχρονα στον φορέα, τη φύση των φορτίων, καθώς και από την απόσβεση και τα χαρακτηριστικά της κατασκευής. Ειδικά, το μέγεθος των αιχμικών τιμών του δυναμικού συντελεστή μεγέθυνσης εξαρτάται ιδιαίτερα από την απόσβεση της κατασκευής. Μια χαμηλή τιμή του συντελεστή απόσβεσης της κατασκευής οδηγεί σε υψηλές αιχμικές τιμές συντονισμού. Σε μία τέτοια κατάσταση, η ασφάλεια της κυκλοφορίας σε μία γέφυρα τίθεται σε κίνδυνο.



Σχήμα 3.5 Χρονική εξέλιξη του λόγου αποκρίσεως στην περίπτωση συντονισμού χωρίς απόσβεση ($D \rightarrow 1/2\xi$ όταν $t \rightarrow \infty$).



Σχήμα 3.6 Χρονική εξέλιξη του λόγου αποκρίσεως στην περίπτωση συντονισμού με απόσβεση ($D \rightarrow 1/2\xi$ όταν $t \rightarrow \infty$).

3.6 Διαμόρφωση των εξισώσεων κίνησης

Ο αντικειμενικός σκοπός κάθε προσδιορισμικής δυναμικής ανάλυσης είναι ο υπολογισμός του χρονο-ιστορικού των μετακινήσεων ενός δοσμένου δομήματος που καταπονείται με γνωστή χρονομεταβλητή φόρτιση. Στις περισσότερες περιπτώσεις, μια προσεγγιστική λύση που περιέχει μόνο ένα περιορισμένο αριθμό βαθμών ελευθερίας θα δώσει ικανοποιητική ακρίβεια. Έτσι, το πρόβλημα καταλήγει στον υπολογισμό των χρονο-ιστορικών αυτών των επιλεγμένων μετακινήσεων. Οι μαθηματικές παραστάσεις που καθορίζουν τις δυναμικές μετακινήσεις ονομάζονται εξισώσεις κίνησης (equations of motion) του δομήματος και η λύση των εξισώσεων αυτών μας δίνει τα ζητούμενα χρονο-ιστορικά των μετακινήσεων.

Η διαμόρφωση των εξισώσεων κίνησης ενός δυναμικού συστήματος είναι πιθανόν το πιο σπουδαίο και μερικές φορές το δυσκολότερο μέρος της όλης επεξεργασίας του προβλήματος. Οι βασικές έννοιες που συνδέονται με τις μεθόδους διαμόρφωσης των εξισώσεων κίνησης είναι οι παρακάτω.

3.6.1 Άμεση εξισορρόπηση με την αρχή του d'Alembert

Οι εξισώσεις κίνησης κάθε δυναμικού συστήματος αποτελούν παραστάσεις του δεύτερου νόμου κίνησης του Νεύτωνα, ο οποίος λέει ότι ο ρυθμός μεταβολής της ορμής κάθε μάζας m ισούται με τη δύναμη που ασκείται σ' αυτή. Η συσχέτιση αυτή εκφράζεται μαθηματικά με τη διαφορική εξίσωση:

$$p(t) = \frac{d}{dt} \left(m \frac{dw}{dt} \right) \quad (3.9)$$

Όπου $p(t)$ είναι το ασκούμενο διάνυσμα της δύναμης και $w(t)$ το διάνυσμα θέσης της μάζας m . Για τα περισσότερα προβλήματα στη δυναμική των κατασκευών μπορούμε να δεχτούμε ότι η μάζα δεν μεταβάλλεται με το χρόνο, οπότε η σχέση (3.9) γράφεται:

$$p(t) = m \frac{d^2 w}{dt^2} = m \ddot{w}(t) \quad (3.9\alpha)$$

Η εξίσωση (3.9α), που δηλώνει ότι η δύναμη ισούται με το γινόμενο της μάζας επί την επιτάχυνση γράφεται:

$$p(t) - m \ddot{w}(t) = 0 \quad (3.9\beta)$$

Όπου ο όρος $m \ddot{w}(t)$ ονομάζεται αδρανειακή δύναμη (inertial force) και αντιστέκεται στην επιτάχυνση της μάζας.

Η ιδέα ότι η μάζα αναπτύσσει μία αδρανειακή δύναμη ανάλογη προς την επιτάχυνσή της, η οποία μάλιστα είναι αντίθετη από τη φορά της επιτάχυνσης, ονομάζεται αρχή του d'Alembert και αποτελεί ένα έξυπνο και πολύ βολικό εργαλείο σε προβλήματα δυναμικής των κατασκευών, επειδή επιτρέπει να εκφράσουμε τις εξισώσεις κίνησης ως εξισώσεις δυναμικής ισορροπίας. Η δύναμη $p(t)$ μπορούμε να πούμε ότι περιέχει πολλούς τύπους δυνάμεων που ασκούνται στην μάζα : ελαστικούς συνδέσμους που αντιτίθενται στις μετακινήσεις, ιξώδεις (γλοιιοτικές, viscous) δυνάμεις που αντιτίθενται στις ταχύτητες και ανεξάρτητα εξωτερικά φορτία. Έτσι, αν βάλουμε μία αδρανειακή δύναμη, η εξίσωση κίνησης θα αποτελεί απλά μια έκφραση της ισορροπίας όλων των δυνάμεων που ενεργούν πάνω στην μάζα. Σε πολλά απλά προβλήματα ο πιο άμεσος και εύκολος τρόπος διαμόρφωσης των εξισώσεων κίνησης είναι με τη βοήθεια τέτοιων άμεσων εξισορροπήσεων.

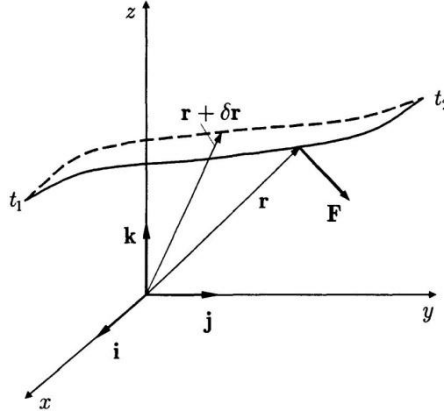
3.6.2 Αρχή των δυνατών μετακινήσεων

Αν το σύστημα είναι κατασκευαστικά σύνθετο και περιέχει πλήθος αλληλοσυνδεδεμένων μαζικών σημείων ή σωμάτων πεπερασμένων διαστάσεων, η άμεση εξισορρόπηση όλων των δυνάμεων που ενεργούν στο σύστημα είναι δύσκολη. Συχνά, οι διάφορες δυνάμεις μπορούν εύκολα να εκφραστούν με βάση τους βαθμούς ελευθερίας μετακίνησης, αλλά οι σχέσεις ισορροπίας μπορεί να μην είναι και πολύ φανερές. Στην περίπτωση αυτή, χρησιμοποιούμε τη λεγόμενη αρχή των δυνατών μετακινήσεων (principle of virtual displacements) για τη διαμόρφωση των εξισώσεων κίνησης σαν υποκατάστατο των εξισώσεων ισορροπίας.

Η αρχή των δυνατών μετακινήσεων εκφράζεται ως ακολούθως. Αν ένα σύστημα που βρίσκεται σε ισορροπία υπό την επίδραση δυνάμεων, υποβληθεί σε δυνατή μετακίνηση, δηλαδή σε μετακίνηση συμβιβαστή με τους περιορισμούς μετακίνησης του συστήματος, τότε το συνολικό έργο που θα παραχθεί από τις δυνάμεις θα είναι ίσο με το μηδέν. Με την αρχή αυτή είναι φανερό ότι ο μηδενισμός του έργου που παράγεται κατά τη διάρκεια μίας μετακίνησης ισοδυναμεί με την ισορροπία. Έτσι, οι αντιτακτικές εξισώσεις ενός δυναμικού συστήματος είναι δυνατό να βρεθούν αν αρχικά αναγνωρίσουμε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στις μάζες του συστήματος και τις αδρανειακές δυνάμεις σύμφωνα με την αρχή του d'Alembert. Στη συνέχεια μπορούμε να βρούμε τις εξισώσεις κίνησης εισάγοντας ξεχωριστά μία δυνατή μετακίνηση η οποία θα αντιστοιχεί σε κάθε βαθμό ελευθερίας και εξισώνοντας το έργο με μηδέν.

3.6.3 Αρχή του Hamilton

Μία από τις πλέον βασικές αρχές της δυναμικής φέρει το όνομα του Hamilton. Από την αρχή του Hamilton μπορούν να εξαχθούν οι εξισώσεις που διέπουν την κίνηση πολύπλοκων συστημάτων.



Σχήμα 3.7 Διάνυσμα θέσεως υλικού σημείου τη χρονική στιγμή t .

Θεωρούμε υλικό σημείο μάζας m , το οποίο κινείται μέσα σ'ένα δυναμικό πεδίο. Εάν παραστήσουμε με $r=r(t)$ το διάνυσμα θέσεως τη χρονική στιγμή t (σχήμα 3.7), τότε σύμφωνα με τον νόμο κίνησης του Νεύτωνα, η πραγματική τροχιά διέπεται από τη διανυσματική εξίσωση:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} - F = 0 \quad (3.10)$$

Όπου F είναι η δύναμη που ασκείται στο υλικό σημείο. Θεωρούμε τώρα μία άλλη τροχιά $r+\delta r$ πλησίον της πραγματικής. Ο μοναδικός περιορισμός είναι η πραγματική τροχιά και η παραλλαγή της να συμπίπτουν σε δύο χρονικές στιγμές $t=t_1$ και $t=t_2$. Αυτό συνεπάγεται το μηδενισμό της μεταβολής $\delta r=\delta r(t)$ στις δύο αυτές χρονικές στιγμές.

Το πρώτο βήμα για την εξαγωγή της αρχής του Hamilton είναι να σχηματίσουμε το εσωτερικό γινόμενο της εξίσωσης (3.10) με το διάνυσμα της μεταβολής δr και να ολοκληρώσουμε στο χρονικό διάστημα $[t_1, t_2]$, έτσι λαμβάνουμε την σχέση:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(m \frac{d^2 r}{dt^2} \cdot \delta r - F \cdot \delta r \right) dt = 0 \quad (3.11)$$

Ακολουθως, παραγοντική ολοκλήρωση στον πρώτο όρο του ανωτέρου ολοκληρώματος δίδει:

$$\int_{t_1}^{t_2} m \frac{d^2 r}{dt^2} \cdot \delta r dt = \left[m \frac{dr}{dt} \delta r \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m \frac{dr}{dt} \cdot \left(\delta \frac{dr}{dt} \right) dt$$

Εξ αιτίας της σχέσης (3.11) ο όρος εκτός του ολοκληρώματος μηδενίζεται. Επίσης μπορούμε να γράψουμε:

$$m \frac{dr}{dt} \cdot \delta \left(\frac{dr}{dt} \right) = m \frac{1}{2} \delta \left(\frac{dr}{dt} \cdot \frac{dr}{dt} \right) = m \frac{1}{2} \delta \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \delta \left[m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right] = \delta K$$

Συμβολίζουμε με K την κινητική ενέργεια η οποία αντιστοιχεί σε μία υποθετίσα δυνατή μετακίνηση. Το ολοκλήρωμα (3.11) λαμβάνει την μορφή:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta K + F \cdot \delta r) dt = 0 \quad (3.12)$$

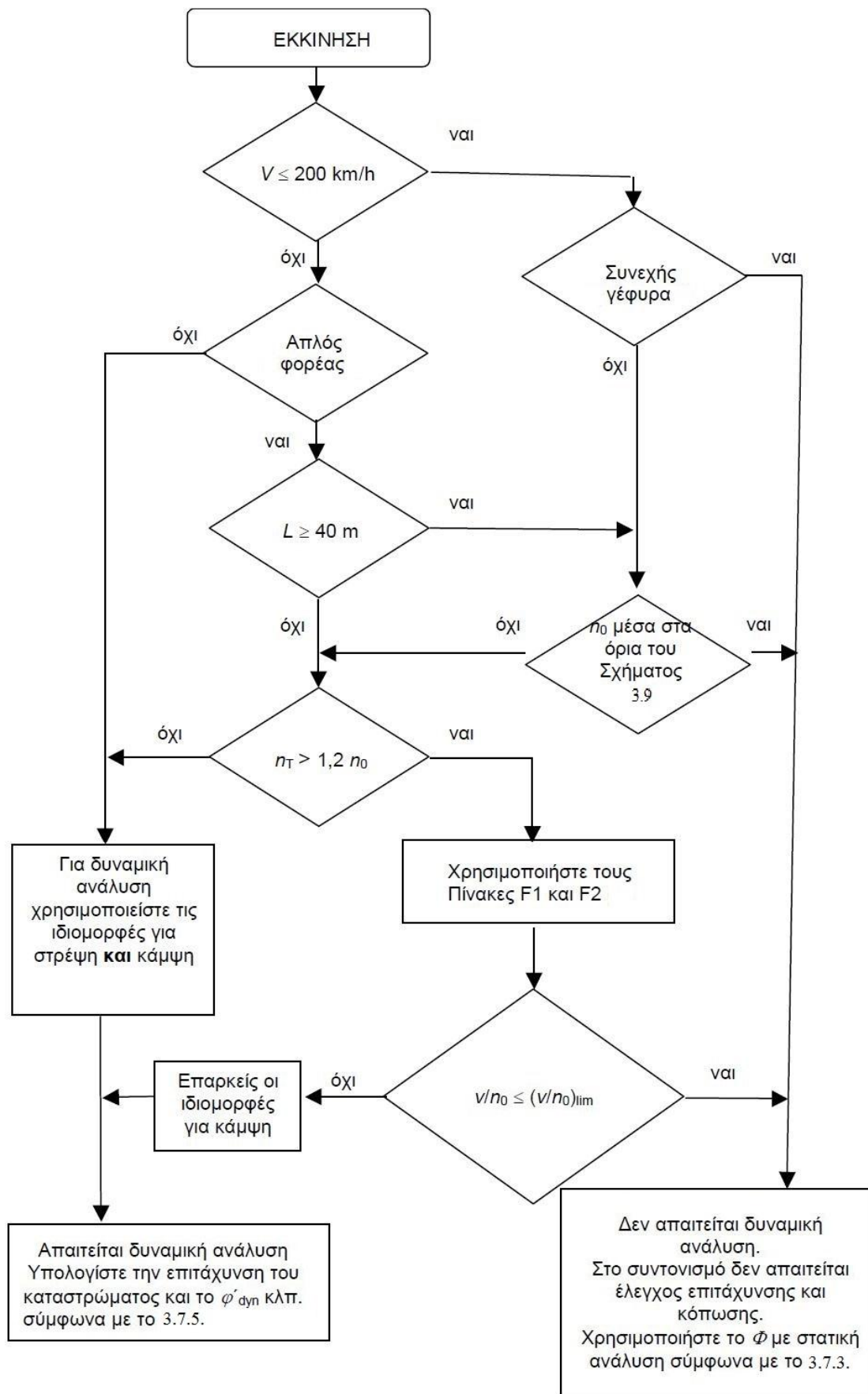
Η σχέση (3.12) εκφράζει την αρχή του Hamilton όπως εκφράζεται για το υλικό σημείο. Δηλώνει ότι κατά την κίνηση ενός παραμορφωτού σώματος, από όλα τα γεωμετρικώς αποδεκτά πεδία μετατοπίσεων $u(x,y,z,t)$, τα οποία συμπίπτουν σε δύο χρονικές στιγμές t_1 και t_2 , το πραγματικό είναι εκείνο που ικανοποιεί την σχέση (3.12).

3.7 Εκτίμηση των δυναμικών επιδράσεων με τον Ευρωκώδικα

3.7.1 Εισαγωγή

Τα δυναμικά αποτελέσματα για τις γέφυρες σιδηροδρόμων εξετάζονται μέσα στον Ευρωκώδικα 1 – Δράσεις των κατασκευών – Μέρος 2: Φορτία κυκλοφορίας σε γέφυρες, δυναμικές επιδράσεις (συμπεριλαμβανομένου του συντονισμού). Για τα απλά δυναμικά προβλήματα, απαιτείται μόνο η στατική ανάλυση. Η στατική ανάλυση θα πραγματοποιείται με τα προσομοιώματα φόρτισης που καθορίζονται στα φορτία που δρουν κάθετα στον φορέα, χαρακτηριστικές τιμές (στατικά αποτελέσματα), εκκεντρότητα και κατανομή της φόρτωσης.

Όπου απαιτείται δυναμική ανάλυση, τα αποτελέσματα της θα συγκρίνονται με τα αποτελέσματα της στατικής ανάλυσης πολλαπλασιαζόμενα με τον δυναμικό συντελεστή Φ . Οι πιο δυσμενείς τιμές των εντατικών μεγεθών λόγω φόρτισης θα χρησιμοποιούνται για τον σχεδιασμό της. Θα πραγματοποιούνται όλοι οι έλεγχοι προκειμένου να εξασφαλισθεί ότι η συμπληρωματική φόρτιση κόπωσης σε υψηλές ταχύτητες και σε περίπτωση συντονισμού καλύπτεται, λαμβάνοντας υπόψη τις τάσεις που προέρχονται από τα αποτελέσματα της στατικής ανάλυσης, πολλαπλασιασμένα με τον δυναμικό συντελεστή Φ . Οι απαιτήσεις για τον καθορισμό του κατά πόσον απαιτείται στατική ή δυναμική ανάλυση απεικονίζονται στο σχήμα 3.8.



Σχήμα 3.8 Διάγραμμα ροής για τον καθορισμό του κατά πόσο απαιτείται δυναμική ανάλυση.

Όπου τα σύμβολα του σχήματος 3.8 έχουν την ακόλουθη ερμηνεία:

V είναι η τοπική μέγιστη ταχύτητα γραμμής [km/m]

L είναι το μήκος ανοίγματος [m]

η_0 είναι η καμπτική ιδιοσυχνότητα της γέφυρας φορτισμένης με μόνιμες δράσεις [Hz]

η_T είναι η στρεπτική ιδιοσυχνότητα της γέφυρας φορτισμένης με μόνιμες δράσεις [Hz]

v είναι η μέγιστη ονομαστική ταχύτητα [m/s]

$(v/\eta_0)_{\lim}$ δίδεται στον πίνακα (3.1) που ακολουθεί

Μάζα m 10^3 kg/m	Ανοίγμα $L \in$ m^a	ζ %	$\geq 5,0$ $< 7,0$	$\geq 7,0$ $< 9,0$	$\geq 9,0$ $< 10,0$	$\geq 10,0$ $< 13,0$	$\geq 13,0$ $< 15,0$	$\geq 15,0$ $< 18,0$	$\geq 18,0$ $< 20,0$	$\geq 20,0$ $< 25,0$	$\geq 25,0$ $< 30,0$	$\geq 30,0$ $< 40,0$	$\geq 40,0$ $< 50,0$	$\geq 50,0$ 0-
			v/n_0 m	v/n_0 m	v/n_0 m	v/n_0 m	v/n_0 m	v/n_0 m	v/n_0 m	v/n_0 m	v/n_0 m	v/n_0 m	v/n_0 m	v/n_0 m
[5,00,7,50)	2		1,78	1,88	1,93	1,93	2,13	2,13	3,08	3,08	3,44	3,54	3,59	4,13
	4		1,88	1,93	2,13	2,13	3,08	3,13	3,44	3,54	3,59	4,31	4,31	4,31
[7,50,10,0)	2		2,08	2,64	2,78	2,78	3,06	5,07	5,21	5,21	5,28	5,35	6,33	6,33
	4		2,64	2,98	4,86	4,93	5,14	5,21	5,35	5,42	6,32	6,46	6,67	6,67
[10,0,12,5)	1		2,50	2,50	2,71	6,15	6,25	6,36	6,36	6,46	6,46	6,46	7,19	7,19
	2		2,71	5,83	6,15	6,15	6,36	6,46	6,46	6,46	7,19	7,19	7,75	7,75
[12,5,15,0)	1		2,50	3,58	5,24	5,24	5,36	5,36	7,86	8,33	9,14	9,14	9,14	9,14
	2		5,12	5,24	5,36	5,36	7,86	8,22	9,53	9,64	10,36	10,36	10,48	10,48
[15,0,17,5)	1		5,33	5,33	6,33	6,33	6,50	6,50	6,50	7,80	7,80	7,80	7,80	7,80
	2		5,33	6,33	6,50	6,50	10,33	10,33	10,50	10,50	10,67	10,67	12,40	12,40
[17,5,20,0)	1		6,33	6,33	6,50	6,50	7,17	10,67	10,67	12,80	12,80	12,80	12,80	12,80
[20,0,25,0)	1		5,21	7,08	7,50	7,50	13,54	13,75	13,96	14,17	14,38	14,38	14,38	14,38
[25,0,30,0)	1		6,46	10,20	10,42	10,42	10,63	10,63	12,75	12,75	12,75	12,75	12,75	12,75
[30,0,40,0)	1					18,33	18,61	18,89	18,89	19,17	19,17	19,17	19,17	19,17
$\geq 40,0$	1					15,00	15,56	15,83	18,33	18,33	18,33	18,33	18,33	18,33

^a $L \in [a,b)$ σημαίνει $a \leq L < b$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ 1 Ο Πίνακας 3.1 περιλαμβάνει έναν συντελεστή ασφάλειας 1,2 στο $(v/n_0)_{\lim}$ για την επιτάχυνση, την κατακόρυφη παραμόρφωση και τα κριτήρια αντοχής και έναν συντελεστή ασφάλειας 1,0 στο $(v/n_0)_{\lim}$ για την κόπωση.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ 2 Ο Πίνακας 3.1 περιλαμβάνει και έναν συντελεστή $(1+\phi'/2)$ για ανωμαλίες στη σιδηρογραμμή.

Πίνακας 3.1 Μέγιστη τιμή του $(v/n_0)_{\lim}$ για αμφιέριστη δοκό ή πλάκα και μέγιστη επιτρεπόμενη επιτάχυνση $a_{\max} < 5,0 \text{ m/s}^2$.

Για τις γέφυρες με ιδιοσυχνότητα n_0 μέσα στα όρια που δίδονται στο σχήμα 3.9 και τοπική μέγιστη ταχύτητα γραμμής που δεν υπερβαίνει τα 200km/h, δεν απαιτείται δυναμική ανάλυση. Για γέφυρες με ιδιοσυχνότητα n_0 η οποία υπερβαίνει το ανώτερο όριο (1) στο σχήμα 3.9 απαιτείται δυναμική ανάλυση.

Το ανώτερο όριο του n_0 ελέγχεται από δυναμικές επαυξησεις που οφείλονται σε ανωμαλίες της σιδηρογραμμής και δίδεται από την εξίσωση :

$$n_0 = 94,76L^{-0,748}$$

Το κατώτερο όριο του n_0 διέπεται από τα κριτήρια δυναμικής πρόσκρουσης και δίδεται από την εξίσωση:

$$n_0 = 80/L$$

για $4m \leq L \leq 20m$

$$n_0 = 23,58L^{-0,592}$$

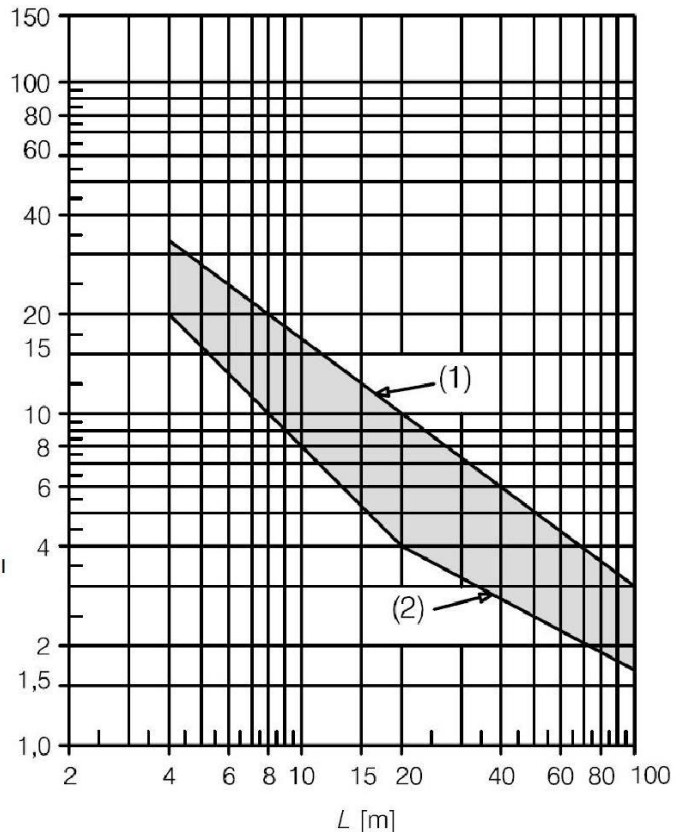
για $20m < L \leq 100m$

όπου:

n_0 είναι η ιδιοσυχνότητα της γέφυρας λαμβάνοντας υπόψη τη μάζα που οφείλεται σε μόνιμες δράσεις,
 L είναι το μήκος ανοίγματος για αμφιέριστες γέφυρες και L_ϕ για άλλους τύπους γεφυρών.

Όπου

- (1) Ανώτερο όριο ιδιοσυχνότητας
 (2) Κατώτερο όριο ιδιοσυχνότητας



Σχήμα 3.9 Όριο ιδιοσυχνοτήτων n_0 [Hz] ως συνάρτηση του ανοίγματος L [m] μίας γέφυρας.

Για αμφιέριστη γέφυρα που υπόκειται μόνο σε κάμψη, η ιδιοσυχνότητα μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τον τύπο:

$$n_0[Hz] = \frac{17,75}{\sqrt{\delta_0}} \quad (3.13)$$

Όπου:

δ_0 είναι η κατακόρυφη παραμόρφωση στο μέσον του ανοίγματος που οφείλεται σε μόνιμες δράσεις [mm] και υπολογίζεται, χρησιμοποιώντας για γέφυρες από σκυρόδεμα μέτρο ελαστικότητας βραχείας φόρτισης και περίοδο αναφοράς της φόρτισης κατάλληλη για την ιδιοσυχνότητα της γέφυρας .

3.7.2 Παράγοντες που επηρεάζουν τη δυναμική συμπεριφορά

Οι κύριοι παράγοντες που επηρεάζουν τη δυναμική συμπεριφορά είναι:

- i) Η ταχύτητα της κυκλοφορίας πάνω στη γέφυρα,
- ii) Το άνοιγμα L του στοιχείου και το μήκος της γραμμής επιρροής της κατακόρυφης παραμόρφωσης του υπό εξέταση στοιχείου,

- iii) Η μάζα του φορέα,
- iv) Οι ιδιοσυχνότητες ολόκληρου του φορέα και των συναφών στοιχείων του φορέα καθώς και οι σχετικές ιδιομορφές κατά μήκος της σιδηροδρομικής γραμμής,
- v) Ο αριθμός των αξόνων, των αξονικών φορτίων και η απόσταση μεταξύ των αξόνων,
- vi) Η απόσβεση του φορέα,
- vii) Κατακόρυφες ανωμαλίες στη σιδηρογραμμή,
- viii) Η μη-αναρτημένη / αναρτημένη μάζα και τα χαρακτηριστικά ανάρτησης του οχήματος,
- ix) Η ύπαρξη κανονικά κατανεμημένων στηρίξεων της πλάκας καταστρώματος και / ή της σιδηροτροχιάς (διαδοκίδες, στρωτήρες, κλπ.),
- x) Οι ατέλειες οχημάτων (επιπεδότητες τροχών, μη εντελώς κυκλικοί τροχοί, ελαττώματα ανάρτησης κλπ.),
- xi) Τα δυναμικά χαρακτηριστικά της σιδηροτροχιάς (έρμα, στρωτήρες, συστατικά μέρη σιδηροτροχιάς κλπ.).

3.7.3 Δυναμικός συντελεστής

Ο δυναμικός συντελεστής Φ λαμβάνει υπόψη τη δυναμική επαύξηση των τάσεων και των αποτελεσμάτων της ταλάντωσης του φορέα, δεν λαμβάνει όμως υπόψη τις επιδράσεις του συντονισμού. Οιονεί-στατικές μέθοδοι, οι οποίες χρησιμοποιούν εντατικά μεγέθη από στατικές φορτίσεις πολλαπλασιαζόμενα με τον δυναμικό συντελεστή Φ , δεν είναι ικανές να προβλέψουν τις επιδράσεις λόγω συντονισμού από συρμούς υψηλής ταχύτητας.

Στην περίπτωση όπου απαιτείται δυναμική ανάλυση και τα κριτήρια που ορίζονται στα σχήματα 3.8 και 3.9 δεν ικανοποιούνται, υπάρχει κίνδυνος εμφάνισης συντονισμού ή υπερβολικής ταλάντωσης της γέφυρας (με πιθανότητα υπερβολικών επιταχύνσεων καταστρώματος που οδηγούν σε αστάθεια έρματος κλπ. και υπερβολικών κατακόρυφων παραμορφώσεων και τάσεων κλπ.). Στις περιπτώσεις αυτές θα πραγματοποιείται δυναμική ανάλυση για τον υπολογισμό των εντατικών μεγεθών λόγω της πρόσκρουσης και του συντονισμού.

Τεχνικές δυναμικής ανάλυσης, οι οποίες λαμβάνουν υπόψη την εξαρτώμενη από το χρόνο φύση της φόρτισης από την τυπική φόρτιση υψηλής ταχύτητας (HSLM–High Speed Load Model) και τους πραγματικούς συρμούς (π.χ. επιλύοντας εξισώσεις

κίνησης) απαιτούνται για την πρόβλεψη των δυναμικών επιδράσεων σε περίπτωση συντονισμού. Οι φορείς οι οποίοι φέρουν πάνω από μία σιδηρογραμμή θα πρέπει να λαμβάνονται υπόψη χωρίς οποιαδήποτε μείωση του δυναμικού συντελεστή Φ .

Γενικά ο δυναμικός συντελεστής Φ λαμβάνεται είτε ως Φ_2 είτε ως Φ_3 ανάλογα με την ποιότητα της συντήρησης της σιδηρογραμμής, ως εξής:

(α) Για επιμελώς συντηρημένη σιδηρογραμμή:

$$\Phi_2 = \frac{1,44}{\sqrt{L_\Phi} - 0,2} + 0,82 \quad (3.14)$$

$$\mu\epsilon : 1,00 \leq \Phi_2 \leq 1,67$$

(β) Για σιδηρογραμμή με τυπική συντήρηση:

$$\Phi_3 = \frac{2,16}{\sqrt{L_\Phi} - 0,2} + 0,73 \quad (3.15)$$

$$\mu\epsilon : 1,00 \leq \Phi_3 \leq 2,00$$

Όπου:

L_Φ : Το “Καθοριστικό” μήκος (μήκος σχετιζόμενο με το Φ) που ορίζεται στον πίνακα 3.2.

Οι δυναμικοί συντελεστές καθιερώθηκαν για αμφιέρειστες δοκούς. Το μήκος L_Φ επιτρέπει να χρησιμοποιούνται οι συντελεστές αυτοί για άλλα δομικά στοιχεία με διαφορετικές συνθήκες στήριξης. Αν δεν ορίζεται ο δυναμικός συντελεστής, θα χρησιμοποιείται το Φ_3 . Ο δυναμικός συντελεστής ο οποίος θα χρησιμοποιηθεί μπορεί να ορίζεται στο Εθνικό Προσάρτημα ή για κάθε έργο ξεχωριστά.

Ο δυναμικός συντελεστής Φ δεν θα χρησιμοποιείται με :

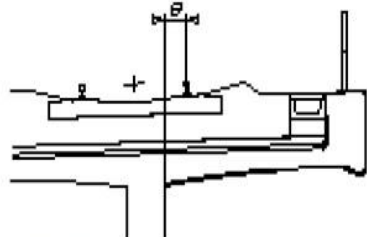
- (α) Τη φόρτιση που οφείλεται σε πραγματικούς συρμούς.
- (β) Τη φόρτιση που οφείλεται σε συρμούς κόπωσης.
- (γ) Την τυπική φόρτιση HSLM.
- (δ) Την τυπική φόρτιση «αφόρτιστος συρμός».

3.7.4 Καθοριστικό μήκος L_Φ

Τα καθοριστικά μήκη L_Φ προς χρήση δίδονται στον πίνακα 3.2 που ακολουθεί. Όπου δεν ορίζεται τιμή για το L_Φ στον πίνακα 3.2, το καθοριστικό μήκος θα λαμβάνεται υπόψη ως το μήκος της γραμμής επιρροής για την κατακόρυφη παραμόρφωση του υπό εξέταση στοιχείου ή θα ορίζονται εναλλακτικές τιμές. Αν η προκύπτουσα τάση σε ένα δομικό μέλος εξαρτάται από διάφορες επιδράσεις, κάθε μία από τις οποίες σχετίζεται με μια διαφορετική στατική συμπεριφορά του φορέα, τότε κάθε επίδραση θα υπολογίζεται χρησιμοποιώντας το κατάλληλο καθοριστικό μήκος.

Περίπτωση	Δομικό στοιχείο	Καθοριστικό μήκος L_{Φ}
Χαλύβδινη πλάκα καταστρώματος: κλειστό κατάστρωμα με έρμα (ορθότροπη πλάκα καταστρώματος) (για τοπικές και εγκάρσιες τάσεις)		
	Κατάστρωμα με διαδοκίδες και συνεχείς διαμήκειες νευρώσεις:	
1.1	Πλάκα καταστρώματος (και για τις δύο κατευθύνσεις)	3 φορές η απόσταση των διαδοκίδων
1.2	Συνεχείς διαμήκειες νευρώσεις (συμπεριλαμβανομένων μικρών προβόλων μέχρι 0,50 m) ^a	3 φορές η απόσταση των διαδοκίδων
1.3	Διαδοκίδες	2 φορές το μήκος των διαδοκίδων
1.4	Ακραίες διαδοκίδες	3,6m ^b
	Πλάκα καταστρώματος με διαδοκίδες μόνο:	
2.1	Πλάκα καταστρώματος (και για τις δύο κατευθύνσεις)	2 φορές η απόσταση των διαδοκίδων + 3 m
2.2	Διαδοκίδες	2 φορές η απόσταση των διαδοκίδων + 3 m
2.3	Ακραίες διαδοκίδες	3,6m ^b
Χαλύβδινη εσχάρα: ανοιχτό κατάστρωμα χωρίς έρμα ^b (για τοπικές και εγκάρσιες τάσεις)		
3.1	Φορείς της σιδηροτροχιάς: - ως στοιχείο μιας συνεχούς εσχάρας - με απλή στήριξη	3 φορές την απόσταση των διαδοκίδων Απόσταση διαδοκίδων + 3 m
3.2	Πρόβολοι των φορέων της σιδηροτροχιάς ^a	3,6m
3.3	Διαδοκίδες (ως μέρος της εσχάρας διαδοκίδα/ συνεχής φορέας σιδηροτροχιάς)	2 φορές το μήκος της διαδοκίδας
3.4	Ακραίες διαδοκίδες	3,6m ^b
^a Γενικά όλοι οι πρόβολοι που είναι μεγαλύτεροι από 0,50 m και οι οποίοι φέρουν δράσεις σιδηροδρομικής κυκλοφορίας, απαιτούν ειδική μελέτη σύμφωνα με το 3.7.5 και με την φόρτιση η οποία συμφωνήθηκε με την αρμόδια αρχή που καθορίζεται στο Εθνικό Προσάρτημα.		
^b προτείνεται να εφαρμόζεται το Φ_3		

Πίνακας 3.2 Καθοριστικά μήκη L_{Φ}

Περίπτωση	Δομικό στοιχείο	Καθοριστικό μήκος L_{Φ}
Πλάκα καταστρώματος από σκυρόδεμα με έρμα (για τοπικές και εγκάρσιες τάσεις)		
4.1	<p>Πλάκα καταστρώματος ως μέρος της κιβωτιοειδούς διατομής ή το άνω πέλμα της κυρίας δοκού</p> <ul style="list-style-type: none"> - που εκτείνεται εγκάρσια στις κύριες δοκούς - που εκτείνεται κατά τη διαμήκη κατεύθυνση - διαδοκίδες - εγκάρσιοι πρόβολοι που φέρουν τη φόρτιση από σιδηροδρομική κυκλοφορία 	<p>3 φορές το άνοιγμα της πλάκας καταστρώματος</p> <p>3 φορές το άνοιγμα της πλάκας καταστρώματος</p> <p>2 φορές το μήκος των διαδοκίδων</p>  <p>- $e \leq 0,5 \text{ m}$: 3 φορές η απόσταση μεταξύ των κορμών</p> <p>- $e > 0,5 \text{ m}$: ^a</p> <p>Εγκάρσιοι πρόβολοι που φέρουν φόρτιση από σιδηροδρομική κυκλοφορία</p>
4.2	Συνεχής πλάκα καταστρώματος (κατά τη διεύθυνση της κυρίας διαδοκίδας) πάνω από διαδοκίδες	Δύο φορές η απόσταση μεταξύ των διαδοκίδων
4.3	<p>Πλάκα καταστρώματος σε γέφυρες μορφής δικτυώματος:</p> <ul style="list-style-type: none"> - που εκτείνεται κάθετα στις κύριες δοκούς - που εκτείνεται κατά τη διαμήκη κατεύθυνση 	<p>Δυο φορές το άνοιγμα της πλάκας του καταστρώματος + 3m</p> <p>Δυο φορές το άνοιγμα της πλάκας του καταστρώματος</p>
4.4	Πλάκες καταστρώματος οι οποίες εκτείνονται εγκάρσια μεταξύ των διαμήκων χαλύβδινων δοκών σε καταστρώματα εγκιβωτισμένων δοκών	Δύο φορές το καθοριστικό μήκος κατά τη διαμήκη κατεύθυνση
4.5	Διαμήκεις πρόβολοι της πλάκας του καταστρώματος	- $e \leq 0,5 \text{ m}$: 3,6m ^b
4.6	Ακραίες διαδοκίδες	- $e > 0,5 \text{ m}$: ^a 3,6m ^b
<p>^a Γενικά όλοι οι πρόβολοι οι οποίοι είναι μεγαλύτεροι από 0,50m και στηρίζουν δράσεις σιδηροδρομικής κυκλοφορίας απαιτούν ειδική μελέτη σύμφωνα με το 3.6.4 και με τη φόρτιση η οποία έχει συμφωνηθεί με την αρμόδια αρχή η οποία καθορίζεται στο Εθνικό Προσάρτημα.</p> <p>^b Προτείνεται για την εφαρμογή του Φ_3</p>		
<p>ΣΗΜΕΙΩΣΗ Για τις περιπτώσεις 1.1 έως 4.6 το L_{Φ} περιορίζεται στο μέγιστο του καθοριστικού μήκους των κυρίων δοκών.</p>		

Πίνακας 3.2 Συνέχεια

Περίπτωση	Δομικό στοιχείο	Καθοριστικό μήκος L_{Φ}												
Κύριες δοκοί														
5.1	Απλά στηριζόμενες δοκοί και πλάκες (συμπεριλαμβανομένων χαλύβδινων δοκών ενσωματωμένων σε σκυρόδεμα)	Άνοιγμα κατά τη διεύθυνση της κύριας δοκού												
5.2	Συνεχείς δοκοί και πλάκες επί n ανοιγμάτων με $L_m = 1/n (L_1 + L_2 + \dots + L_n)$	$L_{\Phi} = k \times L_m$, Όμως όχι μικρότερο από το $\max L_i$ ($i = 1, \dots, n$) <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>$n = 2$</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>≥ 5</td> </tr> <tr> <td colspan="4" style="text-align: center;"><hr/></td> </tr> <tr> <td>$k = 1,2$</td> <td>$1,3$</td> <td>$1,4$</td> <td>$1,5$</td> </tr> </table>	$n = 2$	3	4	≥ 5	<hr/>				$k = 1,2$	$1,3$	$1,4$	$1,5$
$n = 2$	3	4	≥ 5											
<hr/>														
$k = 1,2$	$1,3$	$1,4$	$1,5$											
5.3	Απλά πλαίσια και κλειστά πλαίσια ή κιβώτια: - ενός ανοίγματος - πολλαπλών ανοιγμάτων	Na λαμβάνονται υπόψη ως συνεχής δοκός τριών ανοιγμάτων (χρήση του 5.2, με κατακόρυφα και οριζόντια μήκη των μελών του πλαισίου ή του κιβωτίου) Na λαμβάνονται υπόψη ως συνεχής δοκός πολλαπλών ανοιγμάτων (χρήση του 5.2, με τα μήκη των ακραίων κατακόρυφων και οριζόντιων μελών)												
5.4	Μονά τόξα, αντηρριδωτά τόξα, ενισχυμένης ακαμψίας δοκοί ανηρτημένων τόξων	Μισό άνοιγμα												
5.5	Σειρές από τόξα με συμπαγείς πτερυγότοιχους για συγκράτηση επιχώματος	Δύο φορές το ελεύθερο άνοιγμα												
5.6	Αναρτήρες (σε συνδυασμό με δοκούς που ενισχύουν την ακαμψία)	4 φορές η διαμήκης απόσταση των αναρτήρων												
Δομικές στηρίξεις														
6	Κολώνες, προσκέφαλα, εφέδρανα, εφέδρανα ανύψωσης, αγκύρια και για τον υπολογισμό των τάσεων επαφής κάτω από τα εφέδρανα.	Καθοριστικό μήκος των στηριζόμενων μελών												

Πίνακας 3.2 Συνέχεια

3.7.5 Φόρτιση και συνδυασμοί φορτίων

Όπου απαιτείται δυναμική ανάλυση, οι πρόσθετοι συνδυασμοί φορτίσεων για την ανάλυση πρέπει να είναι σύμφωνοι με τους συνδυασμούς φόρτωσης και φορτίων. Οι χαρακτηριστικές τιμές της φόρτωσης από το πραγματικό τραίνο, οι οποίες έχουν προσδιοριστεί για το συγκεκριμένο έργο, πρέπει να συνυπολογιστούν. Η επιλογή των πραγματικών συρμών θα λαμβάνει υπόψη κάθε επιτρεπόμενη ή ενδεχόμενη διαμόρφωση συρμού για κάθε επιτρεπόμενο ή ενδεχόμενο τύπο συρμού υψηλής ταχύτητας ο οποίος πρόκειται να χρησιμοποιήσει το φορέα με ταχύτητες πάνω από 200km/h. Σε κάθε ξεχωριστό έργο μπορεί να καθορίζονται τα χαρακτηριστικά

αξονικά φορτία και οι αποστάσεις για κάθε διαμόρφωση κάθε απαιτούμενου πραγματικού συρμού.

Η δυναμική ανάλυση θα πραγματοποιείται επίσης χρησιμοποιώντας την πρότυπη φόρτιση HSLM σε γέφυρες οι οποίες είναι σχεδιασμένες για διεθνείς σιδηροδρομικές γραμμές και στις οποίες εφαρμόζονται Ευρωπαϊκά κριτήρια ικανότητας λειτουργίας με υψηλή ταχύτητα. Η Πρότυπη Φόρτιση HSLM περιλαμβάνει δύο ξεχωριστούς διεθνείς συρμούς με διαφοροποιούμενα μήκη βαγονιού, HSLM-A και HSLM-B. Τα HSLM-A και HSLM-B μαζί, αντιπροσωπεύουν τις δυναμικές επιδράσεις φόρτισης αρθρωτών, συμβατικών και κανονικών επιβατικών συρμών υψηλής ταχύτητας σύμφωνα με τις απαιτήσεις της Ευρωπαϊκής τεχνικής προδιαγραφής.

Στη δυναμική ανάλυση, για τον υπολογισμό της τιμής της μάζας που αφορά το ίδιο βάρος και τα αφαιρέσιμα φορτία (έρμα κλπ.) θα χρησιμοποιούνται ονομαστικές τιμές της πυκνότητας. Για τη δυναμική ανάλυση μίας γέφυρας, μόνο η μία σιδηρογραμμή (η πιο δυσμενής) του φορέα θα είναι φορτισμένη σύμφωνα με τα ειδικά κριτήρια, τα οποία σχετίζονται με τους πρόσθετους συνδυασμούς φορτίσεων οι οποίοι εξαρτώνται από τον αριθμό των σιδηρογραμμών στη γέφυρα.

Όπου τα εντατικά μεγέθη από τη δυναμική ανάλυση υπερβαίνουν τα εντατικά μεγέθη από την στατική ανάλυση σε οποιαδήποτε από τις σιδηρογραμμές, τα εντατικά μεγέθη από τη δυναμική ανάλυση θα συνδυάζονται με τα εντατικά μεγέθη της φόρτισης από οριζόντιες δυνάμεις πάνω στη σιδηρογραμμή η οποία φορτίζεται κατά τη δυναμική ανάλυση, καθώς επίσης και με τα εντατικά μεγέθη φόρτισης από κατακόρυφα και οριζόντια φορτία στις άλλες σιδηρογραμμές. Σε μία τέτοια περίπτωση, τα εντατικά μεγέθη της δυναμικής σιδηροδρομικής φόρτισης (ροπές κάμψης, τέμνουσες, παραμορφώσεις, εξαιρούμενης της επιτάχυνσης) τα οποία καθορίζονται από τη δυναμική ανάλυση θα αυξάνονται χρησιμοποιώντας τους επιμέρους συντελεστές που δίνονται στο A2 το EN 1990.

Εντούτοις δεν θα εφαρμόζονται επιμέρους συντελεστές στις φορτίσεις κατά τον προσδιορισμό των επιταχύνσεων του καταστρώματος της γέφυρας. Οι υπολογιζόμενες τιμές επιτάχυνσης θα συγκρίνονται απ' ευθείας με τις τιμές από τα κριτήρια σχεδιασμού. Όσον αφορά την κόπωση, η γέφυρα θα σχεδιάζεται για τα συμπληρωματικά εντατικά μεγέθη λόγω κόπωσης σε κατάσταση συντονισμού από τη φόρτιση οποιασδήποτε από τις σιδηρογραμμές της.

3.7.6 Ταχύτητες που πρέπει να ληφθούν υπόψη

Για κάθε πραγματικό συρμό και πρότυπη φόρτιση HSLM θα λαμβάνονται υπόψη μια σειρά από ταχύτητες μέχρι και τη μέγιστη ταχύτητα σχεδιασμού. Οι υπολογισμοί θα πρέπει να γίνονται για μια σειρά ταχυτήτων από 40 m/s έως την μέγιστη ταχύτητα σχεδιασμού. Η μέγιστη ταχύτητα σχεδιασμού θα είναι γενικά 1,2 φορές μεγαλύτερη από την τοπική μέγιστη ταχύτητα γραμμής. Όπου καθορίζεται ξεχωριστά για ένα έργο, μπορεί να χρησιμοποιείται μειωμένη ταχύτητα για τον έλεγχο μεμονωμένων πραγματικών συρμών για 1,2 φορές την σχετική τους μέγιστη επιτρεπόμενη ταχύτητα οχήματος.

Η αύξηση της ταχύτητας πρέπει να είναι επιλεγμένη αυθαίρετα, εντούτοις πρέπει να χρησιμοποιηθούν μικρότερα βήματα ταχυτήτων κοντά στις ταχύτητες συντονισμού. Απαιτούνται υπολογισμοί προκειμένου ναδειχθεί ότι ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις για την ασφάλεια (μέγιστες επιταχύνσεις καταστρώματος, μέγιστα εντατικά μεγέθη φόρτισης, κλπ.) των φορέων για ταχύτητες που υπερβαίνουν τα 200 km/h.

Οι φορείς μπορεί να επιδεικνύουν ιδιαίτερα υψηλή απόκριση οφειλόμενη στα φαινόμενα συντονισμού. Όπου υπάρχει πιθανότητα υπερβολικής ταχύτητας ενός συρμού και υπέρβασης είτε της μέγιστης επιτρεπόμενης ταχύτητας οχήματος ή της τρέχουσας ή ενδεχόμενης τοπικής μέγιστης ταχύτητας γραμμής, προτείνεται ο καθορισμός ενός επιπλέον συντελεστή για κάθε έργο ξεχωριστά, για την αύξηση της μέγιστης ταχύτητας σχεδιασμού προς χρήση στη δυναμική ανάλυση.

3.7.7 Παράμετροι γέφυρας

3.7.7.1 Απόσβεση

Η μέγιστη απόκριση ενός φορέα σε ταχύτητες κυκλοφορίας που αντιστοιχούν σε φόρτιση συντονισμού εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την απόσβεση. Θα χρησιμοποιούνται μόνο εκτιμήσεις των ελάχιστων τιμών της απόσβεσης. Στη δυναμική ανάλυση θα πρέπει να χρησιμοποιούνται για την απόσβεση οι τιμές του παρακάτω πίνακα 3.3. Εναλλακτικά μπορεί να χρησιμοποιηθούν και ασφαλέστερες κατώτερες τιμές κατόπιν συμφωνίας με την αρμόδια αρχή και καθορίζεται στο εθνικό προσάρτημα.

Τύπος γέφυρας	ζ Κατώτερο όριο ποσοστού κρίσιμης απόσβεσης [%]	
	Άνοιγμα $L < 20m$	Άνοιγμα $L \geq 20m$
Από χάλυβα και σύμμεικτη	$\zeta = 0,5 + 0,125 (20 - L)$	$\zeta = 0,5$
Από προεντεταμένο σκυρόδεμα	$\zeta = 1,0 + 0,07 (20 - L)$	$\zeta = 1,0$
Από εγκιβωτισμένες δοκούς και οπλισμένο σκυρόδεμα	$\zeta = 1,5 + 0,07 (20 - L)$	$\zeta = 1,5$

Πίνακας 3.3 Τιμές της απόσβεσης που θα λαμβάνονται υπόψη στον σχεδιασμό.

3.7.7.2 Μάζα της γέφυρας

Σε περίπτωση συντονισμού η μέγιστη επιτάχυνση ενός φορέα είναι αντιστρόφως ανάλογη προς τη μάζα του. Τα μέγιστα δυναμικά εντατικά μεγέθη είναι πιθανόν να εμφανιστούν σε συνθήκες συντονισμού, όταν ένα πολλαπλάσιο της συχνότητας φόρτισης και η ιδιοσυχνότητα του φορέα συμπίπτουν και οποιαδήποτε τυχόν υποτίμηση της μάζας θα υπερτιμήσει την ιδιοσυχνότητα του φορέα καθώς και τις ταχύτητες κυκλοφορίας στις οποίες εμφανίζεται ο συντονισμός.

Υπάρχουν δύο συγκεκριμένες περιπτώσεις που εξετάζονται για τη μάζα μίας γέφυρας, συμπεριλαμβανομένου του κινούμενου οχήματος και του φορέα της. Μία εκτίμηση του κάτω ορίου της τιμής της μάζας για τον προσδιορισμό των μέγιστων επιταχύνσεων στο κατάστρωμα χρησιμοποιώντας την ελάχιστη πιθανή ξηρή καθαρή πυκνότητα και το ελάχιστο πάχος έρματος. Μια εκτίμηση του άνω ορίου της τιμής της μάζας για τον προσδιορισμό των χαμηλότερων ταχυτήτων στις οποίες είναι πιθανόν να εμφανιστούν φαινόμενα συντονισμού, χρησιμοποιώντας τη μέγιστη κορεσμένη πυκνότητα σύνθετου έρματος μαζί με πρόβλεψη για μελλοντικές ανυψώσεις της σιδηρογραμμής.

3.7.7.3 Δυσκαμψία της γέφυρας

Ακριβώς όπως η απόσβεση και η μάζα, η δυσκαμψία της γέφυρας επηρεάζει τα δυναμικά αποτελέσματα. Τα μέγιστα εντατικά μεγέθη λόγω δυναμικής φόρτισης είναι πιθανόν να εμφανιστούν στις περιπτώσεις συντονισμού, όταν ένα πολλαπλάσιο της συχνότητας φόρτισης και μια ιδιοσυχνότητα του φορέα συμπίπτουν. Οποιαδήποτε υπερτίμηση της δυσκαμψίας της γέφυρας θα υπερτιμήσει τη ιδιοσυχνότητα του φορέα και την ταχύτητα στην οποία εμφανίζεται συντονισμός.

Όσον αφορά τον προσδιορισμό της δυσκαμψίας μίας κατασκευής, θα πρέπει να εκτιμάται και να χρησιμοποιείται ένα κάτω όριο της για ολόκληρο τον φορέα. Η δυσκαμψία ολόκληρου του φορέα συμπεριλαμβανομένου του προσδιορισμού της δυσκαμψίας των στοιχείων του φορέα, μπορεί να προσδιορίζεται σύμφωνα με τα EN 1992 - EN 1994.

3.7.8 Προσομοίωση της διέγερσης και της δυναμικής συμπεριφοράς του φορέα

Οι δυναμικές επιδράσεις ενός πραγματικού συρμού μπορούν να απεικονίζονται με μια σειρά κινούμενων σημειακών δυνάμεων. Τα αποτελέσματα της αλληλεπίδρασης οχήματος - μάζας της κατασκευής μπορεί να αμεληθούν. Η ανάλυση θα πρέπει να λαμβάνει υπόψη διαφοροποιήσεις, καθ' όλο το μήκος του συρμού, των δυνάμεων των αξόνων και των αποστάσεων των μεμονωμένων αξόνων ή των ομάδων αξόνων. Για φορτισμένα μήκη μικρότερα από 10 μέτρα, η απεικόνιση κάθε άξονα με μία μόνο σημειακή δύναμη τείνει να υπερεκτιμά τις δυναμικές επιδράσεις. Σε αυτές τις περιπτώσεις, μπορεί να λαμβάνεται υπόψη η συμβολή στην κατανομή της φόρτισης των σιδηροτροχιών, των στρωτήρων και του έρματος. Παρά ταύτα τα μεμονωμένα φορτία αξόνων δεν θα κατανέμονται ομοιόμορφα κατά τη διαμήκη διεύθυνση για τη δυναμική ανάλυση.

Για ανοίγματα μικρότερα από 30m, τα δυναμικά αποτελέσματα της αλληλεπίδρασης μάζας οχήματος και γέφυρας τείνουν να μειώνουν την κρίσιμη απόκριση στην περίπτωση συντονισμού. Οι επιδράσεις αυτές μπορούν να ληφθούν υπόψη μέσα από πραγματοποίηση δυναμικής ανάλυσης της αλληλεπίδρασης οχήματος και φορέα, αλλά και την αύξηση της τιμής της απόσβεσης του φορέα σύμφωνα με το σχήμα 3.10. Για συνεχείς δοκούς, θα χρησιμοποιείται η μικρότερη τιμή $\Delta\zeta$ για όλα τα ανοίγματα. Η συνολική απόσβεση δίδεται από την εξίσωση:

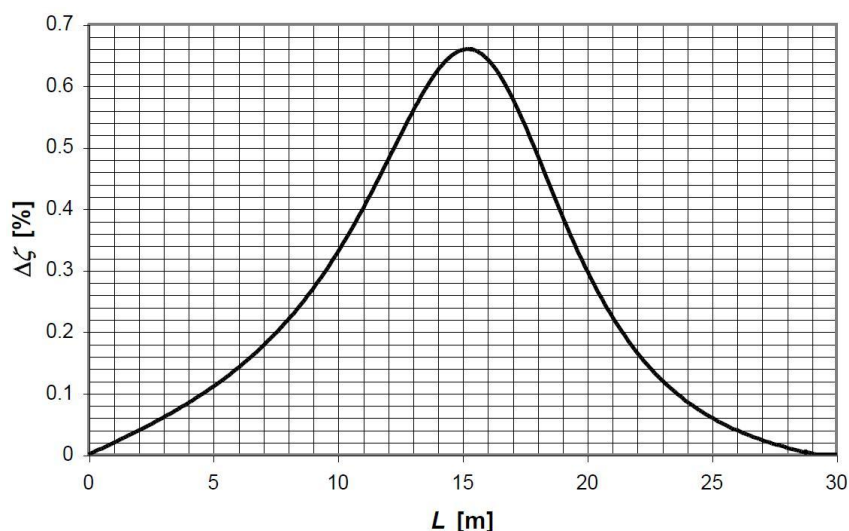
$$\zeta_{TOTAL} = \zeta + \Delta\zeta \quad (3.16)$$

Όπου:

$$\Delta\zeta = \frac{0,0187L - 0,00064L^2}{1 - 0,0441L - 0,0044L^2 + 0,000255L^3} [\%]$$

ζ είναι το χαμηλότερο όριο του ποσοστού κρίσιμης απόσβεσης [%].

L είναι το μήκος του ανοίγματος.



Σχήμα 3.10 Συμπληρωματική απόσβεση $\Delta\zeta$ [%] ως συνάρτηση του μήκους του ανοίγματος L [m].

Η αύξηση των εντατικών μεγεθών λόγω δυναμικής φόρτισης (τάσεις, κατακόρυφες παραμορφώσεις, επιταχύνσεις καταστρώματος γέφυρας κλπ.) που οφείλονται σε ελαττώματα της σιδηρογραμμής και ατέλειες οχημάτων μπορούν να εκτιμηθούν πολλαπλασιάζοντας τα υπολογισμένα εντατικά μεγέθη επί έναν συντελεστή:

$(1 + \varphi''/2)$ για επιμελώς συντηρημένη σιδηρογραμμή,

$(1 + \varphi'')$ για σιδηρογραμμή με κανονική συντήρηση,

όπου:

φ'' σύμφωνα με το παράρτημα Γ του Ευρωκώδικα και δεν θα πρέπει να λαμβάνεται μικρότερο του μηδενός.

3.7.9 Έλεγχοι των οριακών καταστάσεων

Ο έλεγχος της μέγιστης επιτάχυνσης καταστρώματος θα θεωρείται ως απαίτηση κυκλοφοριακής ασφάλειας ελεγμένη στην οριακή κατάσταση λειτουργικότητας για την αποτροπή της αστάθειας της σιδηρογραμμής. Οι μέγιστες επιτρεπόμενες τιμές σχεδιασμού της επιτάχυνσης του καταστρώματος της γέφυρας, υπολογισμένες κατά μήκος της γραμμής μιας σιδηρογραμμής δεν θα υπερβαίνουν τις προτεινόμενες τιμές που δίδονται στον Ευρωκώδικα. Η δυναμική επαύξηση των εντατικών μεγεθών που οφείλονται στα φορτία θα προσδιορίζεται, πολλαπλασιάζοντας τη στατική φόρτιση με τον δυναμικό συντελεστή Φ .

Εάν είναι απαραίτητη η δυναμική ανάλυση, τα αποτελέσματα της δυναμικής ανάλυσης θα συγκρίνονται με τα αποτελέσματα της στατικής ανάλυσης επαυξημένα κατά το Φ και τα πιο δυσμενή εντατικά μεγέθη θα χρησιμοποιούνται για τον σχεδιασμό της γέφυρας. Θα πραγματοποιείται έλεγχος σύμφωνα με το 3.7.10 προκειμένου να εξακριβωθεί κατά πόσο η συμπληρωματική φόρτιση κόπωσης σε υψηλές ταχύτητες και σε περίπτωση συντονισμού καλύπτεται. Στον σχεδιασμό θα χρησιμοποιείται η πιο δυσμενής φόρτιση κόπωσης.

Θα πρέπει να χρησιμοποιείται δυναμική ανάλυση (αν απαιτείται) για τον προσδιορισμό της ακόλουθης δυναμικής επαύξεσης:

$$\phi'_{dyn} = \max |y_{dyn} / y_{stat}| - 1 \quad (3.17)$$

Όπου:

y_{dyn} είναι η μέγιστη δυναμική απόκριση και y_{stat} η αντίστοιχη μέγιστη στατική απόκριση σε οποιοδήποτε συγκεκριμένο σημείο στο δομικό στοιχείο, οφειλόμενη σε πραγματικό συρμό ή σε πρότυπη φόρτιση HSLM.

Για το σχεδιασμό της γέφυρας, λαμβάνοντας υπόψη όλες τις επιδράσεις των κατακόρυφων φορτίων κυκλοφορίας, θα χρησιμοποιείται η πλέον δυσμενής τιμή από:

$$(1 + \phi'_{dyn} + \phi''/2) \times \begin{pmatrix} HSLM \\ \text{ή} \\ RT \end{pmatrix}$$

ή

$$\Phi \times (LM71'' + SW/0)$$

Όπου:

HSLM : είναι το προσομοίωμα φόρτισης για τις σιδηροδρομικές γραμμές υψηλής ταχύτητας που ορίζονται στο 3.7.5,

LM71'' + SW/0 : είναι η Πρότυπη Φόρτιση 71 και αν συντρέχει η Πρότυπη Φόρτιση SW/0 για συνεχείς γέφυρες (ή όπου απαιτείται κατηγοριοποιημένο κατακόρυφο φορτίο σύμφωνα με το 6.3.2(3) σελίδα 79 του κανονισμού).

RT : είναι η φόρτιση που οφείλεται σε όλους τους πραγματικούς συρμούς και ορίζεται στο 3.7.5.

$\phi''/2$: είναι η αύξηση των εντατικών μεγεθών δυναμικής φόρτισης (τάσεις, κατακόρυφες παραμορφώσεις, επιταχύνσεις καταστρώματος γέφυρας κλπ.) που προκύπτουν από ελαττώματα της σιδηρογραμμής και ατέλειες των οχημάτων σύμφωνα με το παράρτημα Γ του

κανονισμού για επιμελώς συντηρημένη σιδηρογραμμή (φ'' για σιδηρογραμμή με κανονική συντήρηση).

Φ : είναι ο δυναμικός συντελεστής σύμφωνα με το 3.7.3.

3.7.10 Έλεγχος σε κόπωση

Πρόσθετος έλεγχος σε κόπωση πρέπει να πραγματοποιείται στις περιπτώσεις όπου απαιτείται δυναμική ανάλυση. Ο έλεγχος κόπωσης του φορέα θα πραγματοποιείται για το εύρος των τάσεων που αντιστοιχούν σε διακυμάνσεις της κατακόρυφης παραμόρφωσης στοιχείων του φορέα πάνω ή κάτω από την αντίστοιχη παραμόρφωση λόγω μόνιμων φορτίων. Αυτή η παραμόρφωση οφείλεται σε επιπλέον ελεύθερες δονήσεις που προκαλούνται από την πρόσκρουση φορτίων αξόνων που διέρχονται με μεγάλη ταχύτητα, στο μέγεθος των εντατικών μεγεθών λόγω κινητών φορτίων σε περίπτωση συντονισμού, καθώς και στους επιπλέον κύκλους τάσης που προκαλούνται από τη δυναμική φόρτιση σε περίπτωση συντονισμού.

Η μελέτη των γεφυρών πρέπει να επιτρέπει την πρόσθετη φόρτιση λόγω κόπωσης ως αποτέλεσμα του συντονισμού, όπου η συχνή ταχύτητα λειτουργίας ενός πραγματικού συρμού σε έναν φορέα προσεγγίζει την ταχύτητα συντονισμού. Πρέπει να πραγματοποιηθεί ένας έλεγχος για να εξασφαλιστεί ότι η πρόσθετη φόρτωση λόγω κόπωσης στην περίπτωση υψηλών ταχυτήτων αλλά και σε αυτή του συντονισμού καλύπτεται από την εκτίμηση των τάσεων που έχει γίνει από την στατική ανάλυση, πολλαπλασιαζόμενες με τον δυναμικό συντελεστή. Οι ταχύτητες πάνω από την μέγιστη ονομαστική ταχύτητα πρέπει να εξετάζονται. Οι δυσμενέστερες τιμές θα χρησιμοποιηθούν για τους ελέγχους σε κόπωση.

4 Η ΕΠΙΡΡΟΗ ΤΗΣ ΜΑΖΑΣ ΤΟΥ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟΥ ΟΧΗΜΑΤΟΣ ΣΤΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΓΕΦΥΡΑΣ

4.1 Υλικό σημείο μάζας M κινούμενο επί δοκού με σταθερή ταχύτητα

Θεωρούμε μία αμφιέριστη δοκό διερχόμενη από το σημείο O , το οποίο αποτελεί και σημείο στήριξης της, ροπής αδράνειας I , κατασκευασμένη από υλικό πυκνότητας ρ , συνολικής μάζας $m_{ολ}$, κατανεμημένης μάζας m και μέτρο ελαστικότητας E . Επί της δοκού κινείται υλικό σημείο με σταθερή ταχύτητα (v), το οποίο έχει μάζα M και μαζική στρωφική ροπή αδράνειας J .

Λόγω της διέγερσης που προκαλείται από την κίνηση του φορτίου, η δοκός ταλαντώνεται κατά την εγκάρσια διεύθυνση και την χρονική στιγμή t εμφανίζει βέλος $w(x,t)$, για το οποίο αναζητείται λύση της μορφής:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \cdot T_n(t) \quad (4.1)$$

Η συνάρτηση $X_n(x)$ καλείται συνάρτηση σχήματος (shape function) της δοκού και η $T_n(t)$ συνάρτηση χρόνου (time function). Η $X_n(x)$ είναι αδιάστατη συνάρτηση, ενώ η $T_n(t)$ έχει διαστάσεις μήκους, με το n να δηλώνει τον αριθμό της κανονικής μορφής ταλάντωσης. Σε αυτή την εργασία οι υπολογισμοί γίνονται για την πρώτη κανονική μορφή.

Αρχικά η δοκός βρίσκεται σε ηρεμία καθώς δεν ασκείται κανένα εξωτερικό φορτίο επί αυτής. Θεωρούμε ότι την χρονική στιγμή $t=0$ το υλικό σημείο εισέρχεται στην δοκό, βρισκόμενο στο σημείο O (στήριξη) και κινούμενο προς τα δεξιά, ενώ όταν $t=t_1$ βρίσκεται σε απόσταση $\ell_1 = v \cdot t_1$, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.1 που ακολουθεί. Έτσι οι αρχικές συνθήκες (initial conditions) είναι:

$$\begin{aligned} w(x,0) &= X(x) \cdot T(0) = 0 \Rightarrow T(0) = 0 \\ \dot{w}(x,0) &= X(x) \cdot \dot{T}(0) = 0 \Rightarrow \dot{T}(0) = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

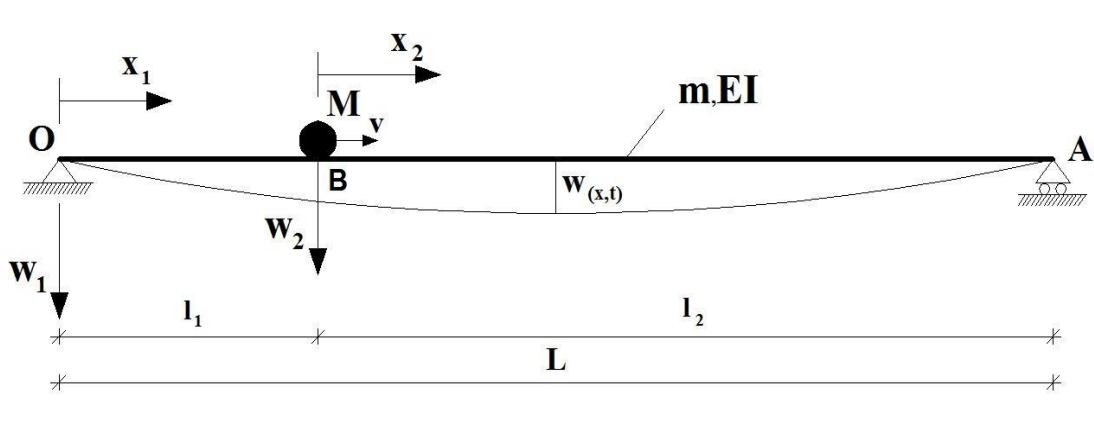
Υποθέτουμε δύο συστήματα συντεταγμένων (x_1, w_1) και (x_2, w_2) με τους άξονες x να κατευθύνονται προς την διεύθυνση της κίνησης, ενώ οι άξονες w έχουν θετική σήμανση προς την διεύθυνση του βάρους του υλικού σημείου. Το σύστημα (x_2, w_2) κινείται μαζί με το υλικό σημείο επί της ευθείας OA .

Όσον αφορά τις συναρτήσεις σχήματος της δοκού, για τα δύο συστήματα συντεταγμένων, έχουμε τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$X_1(x_1) = C_1 \sin \lambda x_1 + C_2 \cos \lambda x_1 + C_3 \sinh \lambda x_1 + C_4 \cosh \lambda x_1 \quad (4.3)$$

$$X_2(x_2) = C_5 \sin \lambda x_2 + C_6 \cos \lambda x_2 + C_7 \sinh \lambda x_2 + C_8 \cosh \lambda x_2 \quad (4.4)$$

με : $\lambda^4 = \frac{m\omega^2}{EI}$ και $\omega^2 = -\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)}$, όπου λ και ω κοινά και για τις δύο συναρτήσεις.



Σχήμα 4.1 Υλικό σημείο μάζας M κινούμενο επί αμφιέρειστης δοκού.

Χρησιμοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες (boundary conditions) της δοκού, θα προσδιορίσουμε το φάσμα ιδιοσυχνοτήτων (ω_n) και τις συναρτήσεις σχήματος (X_n). Οι συνοριακές συνθήκες για την γενική περίπτωση μίας αμφιέρειστης δοκού σταθερής διατομής είναι οι ακόλουθες:

$$\begin{aligned} w(0,t) &= w(L,0) = 0 \\ w''(0,t) &= w''(L,0) = 0 \end{aligned}$$

Όμως λόγω της σχέσης (4.1) αλλά και της φύσεως των δύο συστημάτων, οι παραπάνω συνθήκες γράφονται:

$$\left. \begin{aligned} w_1(0,t) = 0 &\Rightarrow X_1(0) \cdot T(t) = 0 \Rightarrow X_1(0) = 0 \\ w_2(l_2,t) = 0 &\Rightarrow X_2(l_2) \cdot T(t) = 0 \Rightarrow X_2(l_2) = 0 \\ M_1(0,t) = 0 &\Rightarrow -EIw''(0,t) = 0 \Rightarrow X_1''(0) = 0 \\ M_2(l_2,t) = 0 &\Rightarrow -EIw''(l_2,t) = 0 \Rightarrow X_2''(l_2) = 0 \\ w_1(l_1,t) = w_2(0,t) &\Rightarrow X_1(l_1) = X_2(0) \\ w_1'(l_1,t) = w_2'(0,t) &\Rightarrow X_1'(l_1) = X_2'(0) \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

Από τον συνδυασμό των σχέσεων (4.3), (4.4) και (4.5) προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις :

$$\left. \begin{aligned}
X_1(0) = 0 &\Rightarrow C_2 + C_4 = 0 \\
X_2(\ell_2) = 0 &\Rightarrow C_5 \sin \lambda \ell_2 + C_6 \cos \lambda \ell_2 + C_7 \sinh \lambda \ell_2 + C_8 \cosh \lambda \ell_2 = 0 \\
X_1''(0) = 0 &\Rightarrow -\lambda^2 C_2 + \lambda^2 C_4 = 0 \\
X_2''(\ell_2) = 0 &\Rightarrow \\
-\lambda^2 C_5 \sin \lambda \ell_2 - \lambda^2 C_6 \cos \lambda \ell_2 + \lambda^2 C_7 \sinh \lambda \ell_2 + \lambda^2 C_8 \cosh \lambda \ell_2 &= 0 \\
X_1(\ell_1) = X_2(0) &\Rightarrow \\
C_1 \sin \lambda \ell_1 + C_2 \cos \lambda \ell_1 + C_3 \sinh \lambda \ell_1 + C_4 \cosh \lambda \ell_1 - C_6 - C_8 &= 0 \\
X_1'(\ell_1) = X_2'(0) &\Rightarrow \\
\lambda C_1 \cos \lambda \ell_1 - \lambda C_2 \sin \lambda \ell_1 + \lambda C_3 \cosh \lambda \ell_1 + \lambda C_4 \sinh \lambda \ell_1 - \lambda C_5 - \lambda C_7 &= 0
\end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

Από την πρώτη και την τρίτη σχέση του παραπάνω συστήματος παρατηρούμε ότι ισχύει $C_2 = C_4 = 0$. Η μάζα M του κινούμενου υλικού σημείου έχει θεωρηθεί ότι βρίσκεται συγκεντρωμένη σε ένα σημείο το οποίο απέχει απόσταση l_1 από την στήριξη O και l_2 από την A , της οποίας η περιστροφική αδράνεια είναι J . Με βάση τα επιλεγμένα συστήματα συντεταγμένων και λόγω της ισορροπίας ροπών και τεμνουσών δυνάμεων στην θέση B (Σχήμα 4.2), ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις οι οποίες καλούνται δυναμικές συνοριακές συνθήκες:

$$V_1(\ell_1) = -EI \cdot X_1'''(\ell_1) \cdot T(t) \Rightarrow$$

$$V_1(\ell_1) = -EI \left[-\lambda^3 C_1 \cos \lambda \ell_1 + \lambda^3 C_2 \sin \lambda \ell_1 + \lambda^3 C_3 \cosh \lambda \ell_1 + \lambda^3 C_4 \sinh \lambda \ell_1 \right] \cdot T(t) \quad (4.7)$$

$$V_2(0) = EI \cdot X_2'''(0) \cdot T(t) = EI \left[-\lambda^3 C_5 + \lambda^3 C_7 \right] \cdot T(t) \quad (4.8)$$

Παρατηρούμε ότι η παραπάνω σχέση περιέχει τις τρίτες παραγώγους, των συναρτήσεων σχήματος για τα δύο συστήματα, ως προς την μεταβλητή x . Εμφανίζεται επίσης η συνάρτηση χρόνου $\{T(t)\}$, καθώς και η δεύτερη παράγωγος ως προς τον χρόνο, του βέλους για το δεύτερο σύστημα συντεταγμένων. Λόγω των κατευθύνσεων των ροπών και των τεμνουσών δυνάμεων, οι οποίες εμφανίζονται στο σχήμα (4.2) στην θέση η οποία απέχει απόσταση l_1 από την στήριξη O , οι εξισώσεις ισορροπίας είναι οι παρακάτω:

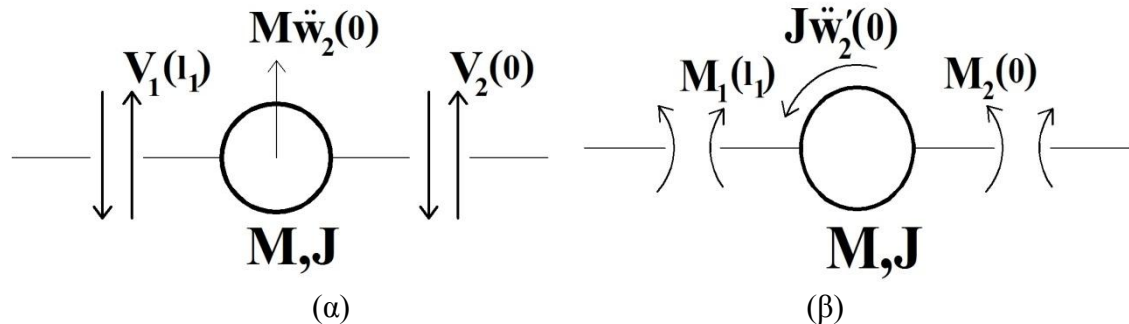
$$\Sigma \bar{F}_w = 0 \Rightarrow \bar{V}_1(\ell_1) + \bar{V}_2(0) + \bar{F}_I = 0 \Rightarrow$$

$$-EI \cdot X_1'''(\ell_1) \cdot T(t) + EI \cdot X_2'''(0) \cdot T(t) + M\ddot{w}_2(0) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
& -EI \cdot X_1'''(\ell_1) + EI \cdot X_2'''(0) + M \cdot X_2(0) \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = 0 \Rightarrow \\
& -EI \cdot X_1'''(\ell_1) + EI \cdot X_2'''(0) - M \omega^2 \cdot X_2(0) = 0 \Rightarrow \\
& -EI \cdot X_1'''(\ell_1) + EI \cdot X_2'''(0) - M \frac{EI \lambda^4}{m} \cdot X_2(0) = 0 \Rightarrow \\
& -X_1'''(\ell_1) + X_2'''(0) - \lambda^4 \frac{M}{m} \cdot X_2(0) = 0 \Rightarrow \\
& \lambda^3 C_1 \cos \lambda \ell_1 - \lambda^3 C_2 \sin \lambda \ell_1 - \lambda^3 C_3 \cosh \lambda \ell_1 - \lambda^3 C_4 \sinh \lambda \ell_1 - \lambda^3 C_5 + \lambda^3 C_7 - \lambda^4 \frac{M}{m} \cdot (C_6 + C_8) = 0 \\
& \stackrel{\lambda \neq 0}{\Rightarrow} C_1 \cos \lambda \ell_1 - C_2 \sin \lambda \ell_1 - C_3 \cosh \lambda \ell_1 - C_4 \sinh \lambda \ell_1 - C_5 - \lambda \frac{M}{m} C_6 + C_7 - \lambda \frac{M}{m} C_8 = 0 \quad (4.9)
\end{aligned}$$

Λόγω της ισορροπίας ροπών στην ίδια θέση καταλήγουμε στην σχέση (4.10).

$$\begin{aligned}
\Sigma M = 0 \Rightarrow M_1(\ell_1) - M_2(0) - J \ddot{w}'_2(0) &= 0 \Rightarrow \\
EI \cdot X_1''(\ell_1) \cdot T(t) - EI \cdot X_2''(0) \cdot T(t) - J X_2'(0) \cdot \ddot{T}(t) &= 0 \Rightarrow \\
EI \cdot X_1''(\ell_1) - EI \cdot X_2''(0) - J X_2'(0) \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} &= 0 \Rightarrow \\
EI \cdot X_1''(\ell_1) - EI \cdot X_2''(0) + J \frac{EI \lambda^4}{m} \cdot X_2'(0) &= 0 \Rightarrow \\
X_1''(\ell_1) - X_2''(0) + \lambda^4 \frac{J}{m} \cdot X_2'(0) &= 0 \Rightarrow \\
-\lambda^2 C_1 \sin \lambda \ell_1 - \lambda^2 C_2 \cos \lambda \ell_1 + \lambda^2 C_3 \sinh \lambda \ell_1 + \lambda^2 C_4 \cosh \lambda \ell_1 + \lambda^2 C_6 - \lambda^2 C_8 + \lambda^4 \frac{J}{m} \cdot (\lambda C_5 + \lambda C_7) &= 0 \\
\stackrel{\lambda \neq 0}{\Rightarrow} -C_1 \sin \lambda \ell_1 - C_2 \cos \lambda \ell_1 + C_3 \sinh \lambda \ell_1 + C_4 \cosh \lambda \ell_1 + \lambda^3 \frac{J}{m} C_5 + C_6 + \lambda^3 \frac{J}{m} C_7 - C_8 &= 0 \quad (4.10)
\end{aligned}$$



Σχήμα 4.2 Διάγραμμα ελεύθερου σώματος για την συγκεντρωμένη μάζα (M,J) στην περίπτωση (α) ισορροπίας τεμνουσών δυνάμεων και (β) ισορροπίας ροπών.

Για να έχει το ανωτέρω σύστημα και άλλες λύσεις πλην της μηδενικής, πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων ($C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8$) να μηδενίζεται.

Δηλαδή :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \lambda \ell_2 & \cos \lambda \ell_2 & \sinh \lambda \ell_2 & \cosh \lambda \ell_2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \lambda \ell_2 & -\cos \lambda \ell_2 & \sinh \lambda \ell_2 & \cosh \lambda \ell_2 \\ \sin \lambda \ell_1 & \cos \lambda \ell_1 & \sinh \lambda \ell_1 & \cosh \lambda \ell_1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ \cos \lambda \ell_1 & -\sin \lambda \ell_1 & \cosh \lambda \ell_1 & \sinh \lambda \ell_1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ \cos \lambda \ell_1 & -\sin \lambda \ell_1 & -\cosh \lambda \ell_1 & -\sinh \lambda \ell_1 & -1 & -\lambda \frac{M}{m} & 1 & -\lambda \frac{M}{m} \\ -\sin \lambda \ell_1 & -\cos \lambda \ell_1 & \sinh \lambda \ell_1 & \cosh \lambda \ell_1 & \lambda^3 \frac{J}{m} & 1 & \lambda^3 \frac{J}{m} & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad (4.11)$$

Όπου:

m μάζα της δοκού ανά μέτρο μήκους.

M μάζα του υλικού σημείου – οχήματος.

ℓ_1 απόσταση του υλικού σημείου την χρονική στιγμή t από το σημείο εισόδου στην δοκό.

ℓ_2 απόσταση του υλικού σημείου την χρονική στιγμή t από την δεξιά στήριξη της δοκού.

J περιστροφική αδράνεια του υλικού σημείου.

Στην παραπάνω ορίζουσα πρέπει να ορίσουμε τιμές για τα διάφορα μεγέθη που εμφανίζονται. Αρχικά θεωρούμε την συνολική μάζα της δοκού πολύ μεγαλύτερη από αυτήν του υλικού σημείου - οχήματος. Το συνολικό μήκος της δοκού λαμβάνετε ίσο με 50 μέτρα, ενώ το μήκος ℓ_1 αυξάνετε σταδιακά κατά $0,10L$, δηλαδή ανά 5m. Αρχικά θεωρούμε μηδενική την περιστροφική αδράνεια J του κινούμενου υλικού σημείου, ενώ στην συνέχεια θεωρούμε ότι ο λόγος J/m είναι ίσος με τον λόγο M/m , ο οποίος αυξάνεται σταδιακά όσο αυξάνεται η μάζα του υλικού σημείου ως προς αυτήν της δοκού. Έτσι η ορίζουσα της σχέσης 4.11 οδηγεί στα αποτελέσματα του πίνακα 4.1 για την συγκεκριμένη αναλογία μαζών. Από τις τιμές του λ , σε κάθε θέση, υπολογίζονται οι τιμές των τριών πρώτων ιδιοσυχνοτήτων.

Η τιμή του λ την στιγμή όπου η μάζα M ετοιμάζεται να εισέλθει στην δοκό, δηλαδή βρίσκεται στην στήριξη O , υπολογίζεται από την εξίσωση συχνότητας για την απλή αμφιέρειστη δοκό:

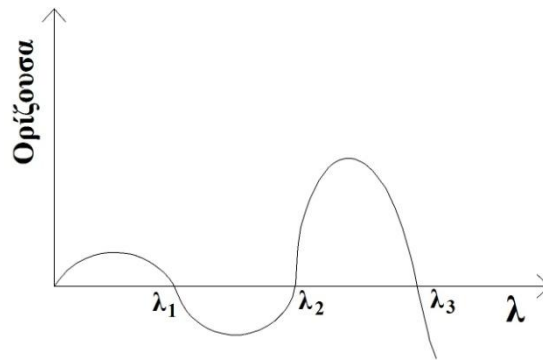
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ \sin \lambda l & \cos \lambda l & \sinh \lambda l & \cosh \lambda l \\ 0 & -\lambda^2 & 0 & \lambda^2 \\ -\lambda^2 \sin \lambda l & -\lambda^2 \cos \lambda l & \lambda^2 \sinh \lambda l & \lambda^2 \cosh \lambda l \end{vmatrix} = 0 \quad (4.12)$$

Η (4.12) αναπτυσσομένη δίνει:

$$4\lambda^4 \cdot \sin \lambda l \cdot \sinh \lambda l = 0$$

Εξαιρώντας την λύση $\lambda=0$, και για $l = 50m$ οδηγούμαστε στις ακόλουθες τρεις πρώτες λύσεις:

$$\lambda_1 = 0,06283185 \quad \lambda_2 = 0,12566371 \quad \lambda_3 = 0,18849556$$



Σχήμα 4.3 Γραφική παράσταση της ορίζουσας σε συνάρτηση με το λ

$l_1(\mu)$	$l_2(\mu)$	M/m	J/m	λ_1	λ_2	λ_3
0	50	5,00	0	0,0628319	0,1256637	0,1884956
5	45	5,00	0	0,0625332	0,1235230	0,1827569
10	40	5,00	0	0,0617771	0,1206869	0,1822859
15	35	5,00	0	0,0609086	0,1210709	0,1878021
20	30	5,00	0	0,0602609	0,1238628	0,1858197
25	25	5,00	0	0,0600261	0,1256637	0,1811908
30	20	5,00	0	0,0602609	0,1238628	0,1858197
35	15	5,00	0	0,0609086	0,1210709	0,1878021
40	10	5,00	0	0,0617771	0,1206869	0,1822859
45	5	5,00	0	0,0625332	0,1235230	0,1827569
50	0	5,00	0	0,0628319	0,1256637	0,1884956

Πίνακας 4.1 Οι χαρακτηριστικές τιμές λ ανά πέντε μέτρα για $M = 0,10ml$, $J = 0$.

$\ell_1(\mu)$	$\ell_2(\mu)$	M/m	J/m	λ_1	λ_2	λ_3
0	50	15,00	0	0,0628319	0,1256637	0,1884956
5	45	15,00	0	0,0619446	0,1195257	0,1743408
10	40	15,00	0	0,0598451	0,1139161	0,1766564
15	35	15,00	0	0,0577239	0,1157472	0,1870734
20	30	15,00	0	0,0563167	0,1216592	0,1826816
25	25	15,00	0	0,0558372	0,1256637	0,1734761
30	20	15,00	0	0,0563167	0,1216592	0,1826816
35	15	15,00	0	0,0577239	0,1157472	0,1870734
40	10	15,00	0	0,0598451	0,1139161	0,1766564
45	5	15,00	0	0,0619446	0,1195257	0,1743408
50	0	15,00	0	0,0628319	0,1256637	0,1884956

Πίνακας 4.2 Οι χαρακτηριστικές τιμές λ ανά πέντε μέτρα για $M = 0,30ml$, $J = 0$.

$\ell_1(\mu)$	$\ell_2(\mu)$	M/m	J/m	λ_1	λ_2	λ_3
0	50	25,00	0	0,0628319	0,1256637	0,1884956
5	45	25,00	0	0,0613684	0,1160245	0,1691133
10	40	25,00	0	0,0581296	0,1096484	0,1741309
15	35	25,00	0	0,0551867	0,1127789	0,1866980
20	30	25,00	0	0,0533802	0,1203756	0,1809564
25	25	25,00	0	0,0527863	0,1256637	0,1694881
30	20	25,00	0	0,0533802	0,1203756	0,1809564
35	15	25,00	0	0,0551867	0,1127789	0,1866980
40	10	25,00	0	0,0581296	0,1096484	0,1741309
45	5	25,00	0	0,0613684	0,1160245	0,1691133
50	0	25,00	0	0,0628319	0,1256637	0,1884956

Πίνακας 4.3 Οι χαρακτηριστικές τιμές λ ανά πέντε μέτρα για $M = 0,50ml$, $J = 0$.

$\ell_1(\mu)$	$\ell_2(\mu)$	M/m	J/m	λ_1	λ_2	λ_3
0	50	40,00	0	0,0628319	0,1256637	0,1884956
5	45	40,00	0	0,0605292	0,1116994	0,1644964
10	40	40,00	0	0,0559002	0,1056231	0,1722220
15	35	40,00	0	0,0521934	0,1101909	0,1863861
20	30	40,00	0	0,0500840	0,1192232	0,1794811
25	25	40,00	0	0,0494117	0,1256637	0,1661661
30	20	40,00	0	0,0500840	0,1192232	0,1794811
35	15	40,00	0	0,0521934	0,1101909	0,1863861
40	10	40,00	0	0,0559002	0,1056231	0,1722220
45	5	40,00	0	0,0605292	0,1116994	0,1644964
50	0	40,00	0	0,0628319	0,1256637	0,1884956

Πίνακας 4.4 Οι χαρακτηριστικές τιμές λ ανά πέντε μέτρα για $M = 0,80ml$, $J = 0$.

$l_1(\mu)$	$l_2(\mu)$	M/m	J/m	λ_1	λ_2	λ_3
0	50	5,00	5,00	0,0628319	0,1256637	0,1884956
5	45	5,00	5,00	0,0625443	0,1235824	0,1828314
10	40	5,00	5,00	0,0617846	0,1206918	0,1823303
15	35	5,00	5,00	0,0609121	0,1210820	0,1880869
20	30	5,00	5,00	0,0602619	0,1239239	0,1860292
25	25	5,00	5,00	0,0600261	0,1257629	0,1811910
30	20	5,00	5,00	0,0602619	0,1239239	0,1860292
35	15	5,00	5,00	0,0609121	0,1210820	0,1880869
40	10	5,00	5,00	0,0617846	0,1206918	0,1823303
45	5	5,00	5,00	0,0625443	0,1235824	0,1828314
50	0	5,00	5,00	0,0628319	0,1256637	0,1884956

Πίνακας 4.5 Οι χαρακτηριστικές τιμές λ ανά πέντε μέτρα για $M = 0,10m\ell$, $J / m = 5$.

$l_1(\mu)$	$l_2(\mu)$	M/m	J/m	λ_1	λ_2	λ_3
0	50	15,00	15,00	0,0628319	0,12566371	0,1884956
5	45	15,00	15,00	0,0619769	0,1196716	0,1744232
10	40	15,00	15,00	0,0599416	0,1140339	0,1758649
15	35	15,00	15,00	0,0577319	0,1157830	0,1878673
20	30	15,00	15,00	0,0563185	0,1218260	0,1832741
25	25	15,00	15,00	0,0558372	0,1259611	0,1734761
30	20	15,00	15,00	0,0563185	0,1218260	0,1832741
35	15	15,00	15,00	0,0577319	0,1157830	0,1878673
40	10	15,00	15,00	0,0599416	0,1140339	0,1758649
45	5	15,00	15,00	0,0619769	0,1196716	0,1744232
50	0	15,00	15,00	0,0628319	0,1256637	0,1884956

Πίνακας 4.6 Οι χαρακτηριστικές τιμές λ ανά πέντε μέτρα για $M = 0,30m\ell$, $J / m = 15$.

$l_1(\mu)$	$l_2(\mu)$	M/m	J/m	λ_1	λ_2	λ_3
0	50	25,00	25,00	0,0628319	0,12566371	0,1884956
5	45	25,00	25,00	0,0614206	0,1162191	0,1691597
10	40	25,00	25,00	0,0582657	0,1096938	0,1732729
15	35	25,00	25,00	0,0551970	0,1128422	0,1879594
20	30	25,00	25,00	0,0533824	0,1206398	0,1819090
25	25	25,00	25,00	0,0527863	0,1261594	0,1694881
30	20	25,00	25,00	0,0533824	0,1206398	0,1819090
35	15	25,00	25,00	0,0551970	0,1128422	0,1879594
40	10	25,00	25,00	0,0582657	0,1096938	0,1732729
45	5	25,00	25,00	0,0614206	0,1162191	0,1691597
50	0	25,00	25,00	0,0628319	0,1256637	0,1884956

Πίνακας 4.7 Οι χαρακτηριστικές τιμές λ ανά πέντε μέτρα για $M = 0,50m\ell$, $J / m = 25$.

$\ell_1(\mu)$	$\ell_2(\mu)$	M/m	J/m	λ_1	λ_2	λ_3
0	50	40,00	40,00	0,0628319	0,12566371	0,1884956
5	45	40,00	40,00	0,0606090	0,1119221	0,1645060
10	40	40,00	40,00	0,0560730	0,1055660	0,1714432
15	35	40,00	40,00	0,0522054	0,1102973	0,1883032
20	30	40,00	40,00	0,0500865	0,1196265	0,1809528
25	25	40,00	40,00	0,0494117	0,1264564	0,1661661
30	20	40,00	40,00	0,0500865	0,1196265	0,1809528
35	15	40,00	40,00	0,0522054	0,1102973	0,1883032
40	10	40,00	40,00	0,0560730	0,1055660	0,1714432
45	5	40,00	40,00	0,0606090	0,1119221	0,1645060
50	0	40,00	40,00	0,0628319	0,1256637	0,1884956

Πίνακας 4.8 Οι χαρακτηριστικές τιμές λ ανά πέντε μέτρα για $M = 0,80ml$, $J / m = 40$.

Θεωρώντας τον λόγο της μάζας του κινούμενου υλικού σημείου προς την συνολική μάζα της δοκού ίσο με 0,10 και την επίλυση του ανωτέρω συστήματος για πιθανή θέση της κινητής μάζας ανά 5 m από την στήριξη O, προκύπτουν οι ακόλουθες τιμές του πίνακα (4.9) για τις σταθερές του συστήματος. Για να είναι εφικτή η επίλυση του συστήματος θεωρήθηκε ότι η σταθερά C_1 είναι ίση με την μονάδα.

$\ell_1(m)$	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8
0	1	0	0	0	1	0	0	0
5	1	0	-0,0338874	0	0,905113	0,307596	0,0108465	-0,0107689
10	1	0	-0,0457264	0	0,730361	0,57922	0,0300776	-0,0300798
15	1	0	-0,0449418	0	0,497479	0,791726	0,0483579	-0,0470155
20	1	0	-0,0385443	0	0,225613	0,933917	0,0617812	-0,0585461
25	1	0	-0,0297761	0	-0,070089	0,997541	0,0700881	-0,0634472
30	1	0	-0,0205410	0	-0,372077	0,972040	0,0729541	-0,0609367
35	1	0	-0,0120992	0	-0,653312	0,846721	0,0695592	-0,0502808
40	1	0	-0,0054657	0	-0,874515	0,621385	0,0584340	-0,0321130
45	1	0	-0,0013560	0	-0,995360	0,321770	0,0371950	-0,0112657
50	1	0	0	0	1	0	0	0

Πίνακας 4.9 Τιμές των σταθερών των εξισώσεων σχήματος για $M = 0,10ml$ και $J=0$.

Λύνοντας ξανά το παραπάνω σύστημα, όταν το κινούμενο όχημα βρίσκεται στο μέσο της γέφυρας, για τις τέσσερις αναλογίες μάζας, προκύπτουν οι ακόλουθες τιμές του πίνακα (4.10) για τις σταθερές του συστήματος.

M/m	J/m	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	C ₆	C ₇	C ₈
5	5	1	0	-0,0297761	0	-0,0700887	0,997541	0,070081	-0,0634472
15	15	1	0	-0,0811772	0	-0,1739750	0,984750	0,173976	-0,1538760
25	25	1	0	-0,1239640	0	-0,2485080	0,968630	0,248508	-0,2153820
40	40	1	0	-0,1765320	0	-0,3292420	0,944245	0,329243	-0,2779180

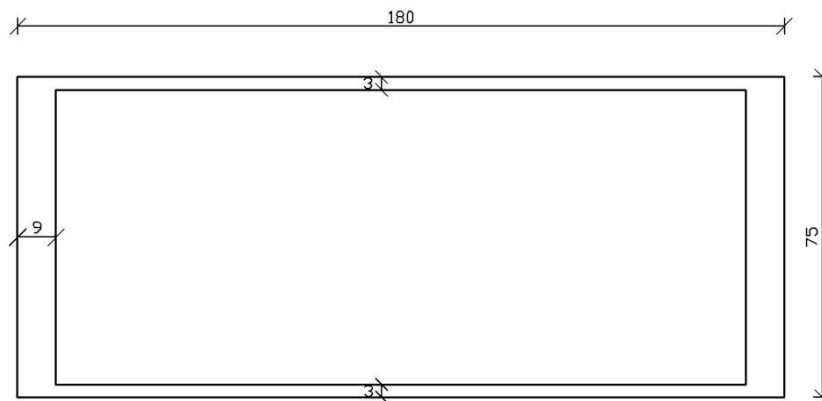
Πίνακας 4.10 Τιμές των σταθερών των εξισώσεων σχήματος για $\ell_1 = \ell_2 = 25m$.

Οι συναρτήσεις σχήματος για τις τέσσερις αναλογίες μαζών, που αναφέρθηκαν παραπάνω, προσεγγίστηκαν με τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\left. \begin{aligned} X(x) &= 0,934094 \sin(0,06283185 \cdot x), \text{ για } M/m = 5, J/m = 5 \\ X(x) &= 0,830873 \sin(0,06283185 \cdot x), \text{ για } M/m = 15, J/m = 15 \\ X(x) &= 0,753248 \sin(0,06283185 \cdot x), \text{ για } M/m = 25, J/m = 25 \\ X(x) &= 0,666327 \sin(0,06283185 \cdot x), \text{ για } M/m = 40, J/m = 40 \end{aligned} \right\} \text{σφάλμα } 1,47\% \quad (4.13)$$

με $x = v \cdot t$

4.2 Γεωμετρικά στοιχεία διατομής



Σχήμα 4.4 Διατομή αμφιέρειστης δοκού κιβωτιοειδούς διατομής.

$$A_c = 180 \cdot 75 - 162 \cdot 69 = 2.322 \text{ cm}^2 = 0,2322 \text{ m}^2$$

$$I_y = \frac{180 \cdot 75^3 - 162 \cdot 69^3}{12} = 1.893 \cdot 10^6 \text{ cm}^4 = 0,01893 \text{ m}^4$$

$$m = 0,2322 \cdot 7,85 = 1,8228 \text{ ton/m}$$

$$m_{oi} = 1,8228 \cdot 50 = 91,14 \text{ ton} = 91.140 \text{ kg}$$

$$EI = 2,1 \cdot 10^8 \cdot 0,01893 = 3.975.300 \text{ kNm}^2$$

Η συνολική μάζα της δοκού είναι 91,14tn. Το κινούμενο υλικό σημείο αρχικά θεωρείται ότι έχει μάζα ίση με το 10% της συνολικής μάζας της δοκού. Στη συνέχεια

η μάζα του αυξάνεται σε 30%, 50% και τέλος 80% της συνολικής μάζας της δοκού. Για την θεμελιώδη ιδιοπερίοδο της δοκού ισχύει:

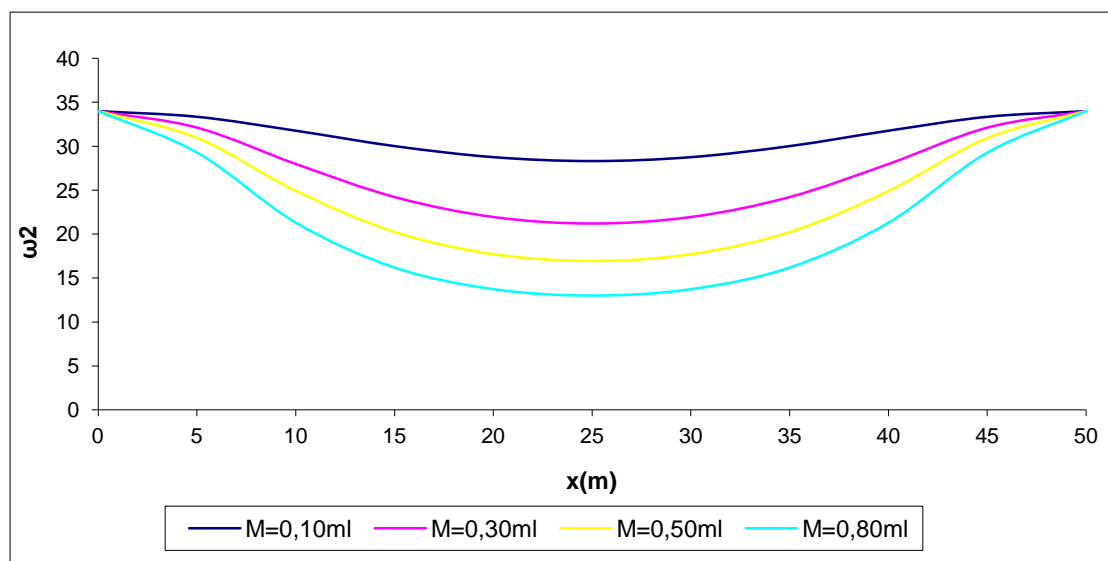
$$T_1 = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{m\ell^4}{EI}} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1,8228 \cdot 50^4}{2,1 \cdot 10^8 \cdot 0,01893}} = 1,078 \text{sec} \quad (4.14)$$

Για την κρίσιμη ταχύτητα v_{cr} , δηλαδή την ταχύτητα με την οποία πρέπει να κινηθεί το σώμα βάρους $P = M \cdot g$, για να διασχίσει την δοκό σε χρόνο ίσο προς την θεμελιώδη ιδιοπερίοδο T_1 , έχουμε τη σχέση 4.15. Η v_{cr} , η οποία υπολογίζεται παρακάτω, είναι πολύ υψηλή και είναι δύσκολο πρακτικά να εμφανιστεί. Η μόνη περίπτωση τόσο υψηλών ταχυτήτων, είναι αυτή των υπερταχέων σιδηροδρομικών συστημάτων.

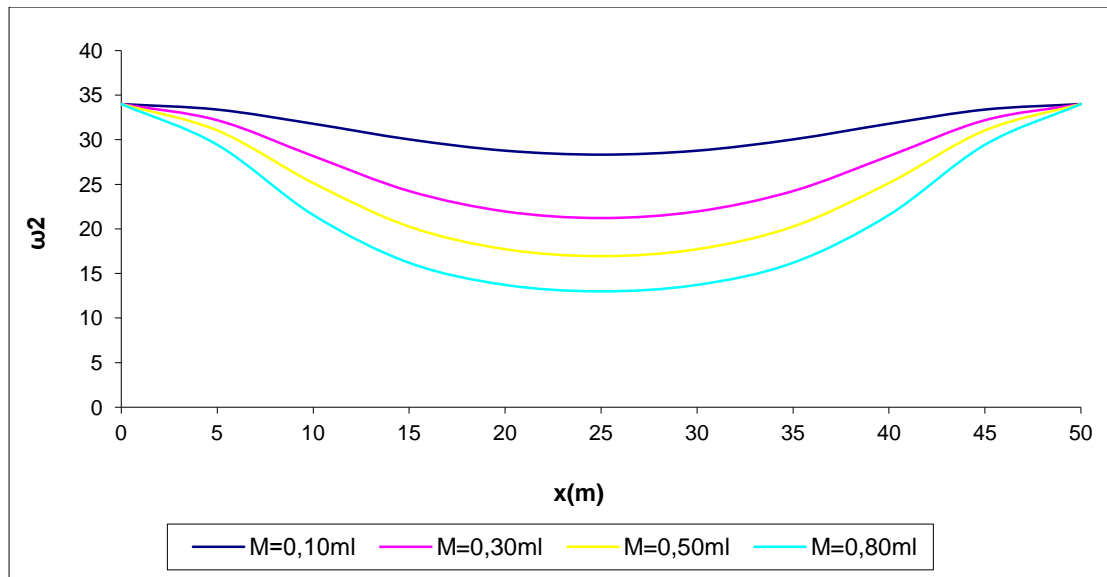
$$v_{cr} = \frac{2\ell}{T_1} = \frac{2 \cdot 50}{1,078} = 92,764 \text{m/s} = 333,95 \text{km/hr} \quad (4.15)$$

4.3 Θεμελιώδης ιδιοσυχνότητα

Λόγω των τιμών των ιδιοτιμών (eigenvalues), που παρουσιάστηκαν στους παραπάνω πίνακες, είναι φανερό ότι κατά την κίνηση του οχήματος εντός της δοκού, οι θεμελιώδης ιδιοσυχνότητες μειώνονται. Ακόμα, όσο μεγαλύτερη είναι η μάζα του κινούμενου υλικού σημείου, τόσο μεγαλύτερη είναι η μεταβολή που παρατηρείται. Στους δύο πίνακες που ακολουθούν παριστάνονται γραφικά οι ιδιοσυχνότητες της δοκού για διάφορες αναλογίες μαζών. Στο σχήμα 4.5 η στρωφική αδράνεια J του οχήματος αμελείται, ενώ στο σχήμα 4.6 θεωρείται ανάλογη της μάζας του κινούμενου οχήματος.



Σχήμα 4.5 Γραφική απεικόνιση του τετραγώνου της θεμελιώδους ιδιοσυχνότητας, επί της οποίας κινείται μάζα M , με $J=0$.



Σχήμα 4.6 Γραφική απεικόνιση του τετραγώνου της θεμελιώδους ιδιοσυχνότητας, επί της οποίας κινείται μάζα M , με $J \neq 0$.

Με την χρήση του προγράμματος Excel, προσδιορίστηκε η συνάρτηση $\omega^2(x)$ για τις συγκεκριμένες αναλογίες μαζών, ως ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού.

$$\left. \begin{aligned} \frac{M}{m\ell} = \frac{J}{m} = 5 &\Rightarrow \omega^2(x) = 4 \cdot 10^{-5} x^3 + 0,0053x^2 - 0,3555x + 33,99004 \\ \frac{M}{m\ell} = \frac{J}{m} = 15 &\Rightarrow \omega^2(x) = 8 \cdot 10^{-5} x^3 + 0,0137x^2 - 0,8599x + 33,99004 \\ \frac{M}{m\ell} = \frac{J}{m} = 25 &\Rightarrow \omega^2(x) = 9 \cdot 10^{-5} x^3 + 0,0204x^2 - 1,2106x + 33,99004 \\ \frac{M}{m\ell} = \frac{J}{m} = 40 &\Rightarrow \omega^2(x) = 8 \cdot 10^{-5} x^3 + 0,0282x^2 - 1,5798x + 33,99004 \end{aligned} \right\} \text{σφάλμα } 2,85\% \quad (4.16)$$

4.4 Κινούμενη μάζα επί δοκού χωρίς απόσβεση

Θεωρούμε σώμα μάζας M και βάρους $P = M \cdot g$, κινούμενο με σταθερά ταχύτητα v επί δοκού, της οποίας αμελούμε την απόσβεση, αλλά όχι τις δευτερεύουσες δυνάμεις που προκαλεί η μάζα M του σώματος. Η αμφιέρειστη δοκός, η οποία ονομάζεται και δοκός Bernoulli-Euler, μπορεί να προσομοιάσει με τον απλούστερο τρόπο μια αμφιέρειστη γέφυρα. Η δοκός θεωρείται ότι έχει πολύ μικρό πλάτος σε σχέση με το μήκος της. Η διαφορική εξίσωση της κίνησης μιας αμφιέρειστης δοκού διατυπώνεται στην εξίσωση (4.17).

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + [m + M\delta(x - \ell_1)] \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} - J\delta'(x - \ell_1) \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial t^2 \partial x} = Mg\delta(x - \ell_1) \quad (4.17)$$

Όπου:

$w(x,t)$ Η κατακόρυφη βύθιση της δοκού στην θέση x και χρόνο t .

m μάζα της δοκού ανά μέτρο μήκους.

M μάζα του υλικού σημείου – οχήματος.

ℓ_1 απόσταση του υλικού σημείου την χρονική στιγμή t από το σημείο εισόδου στην δοκό.

J περιστροφική αδράνεια του υλικού σημείου.

E Μέτρο ελαστικότητας της δοκού.

I Ροπή αδράνειας της διατομής της δοκού.

$\delta(x-\ell_1)$ γενικευμένη συνάρτηση Dirac για την οποία ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\delta(x-\ell_1) = \begin{cases} 0 & \text{για } x \neq \ell_1 \\ \infty & \text{για } x = \ell_1 \end{cases} \quad \text{και} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-\ell_1) dx = 1$$

Περαιτέρω ισχύουν οι σχέσεις:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-\ell_1) f(x) dx = f(\ell_1),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x-\ell_1) f(x) dx = -f'(\ell_1), \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(j)}(x-\ell_1) f(x) dx = (-1)^j f^{(j)}(\ell_1)$$

Θα αναζητήσουμε λύση της μορφής της σχέσης (4.1), για τον υπολογισμό της απόκρισης της δοκού. Εισάγοντας την $w(x,t)$ από την (4.1) στην (4.17) έχουμε:

$$EIX_n''''T_n + [m + M\delta(x-\ell_1)]X_n\ddot{T}_n - J\delta'(x-\ell_1)X_n'\ddot{T}_n = Mg\delta(x-\ell_1) \quad (4.18)$$

Για την ελεύθερη ταλάντωση της δοκού, ισχύει ως γνωστόν η ακόλουθη εξίσωση:

$$EIX_n'''' - m\omega_n^2 X_n = 0 \quad (4.19)$$

Λόγω της (4.19) η (4.18) γίνεται:

$$m\omega_n^2 X_n T_n + [m + M\delta(x-\ell_1)]X_n\ddot{T}_n - J\delta'(x-\ell_1)X_n'\ddot{T}_n = Mg\delta(x-\ell_1) \quad (4.20)$$

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση αυτή επί $X_k dx$ ($k \neq n$) και ολοκληρώνοντας από 0 έως ℓ , έχουμε:

$$\int_0^{\ell} m\omega_n^2 X_n T_n X_k dx + \int_0^{\ell} [m + M\delta(x-\ell_1)]X_n\ddot{T}_n X_k dx - \int_0^{\ell} J\delta'(x-\ell_1)X_n'\ddot{T}_n X_k dx = \int_0^{\ell} Mg\delta(x-\ell_1)X_k dx \quad (4.21)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω σχέσεις:

$$\int_0^{\ell} \delta(x - \ell_1) X_n(\ell_1) X_k dx = X_n(\ell_1) X_k(\ell_1),$$

$$\int_0^{\ell} \delta'(x - \ell_1) X_n'(\ell_1) X_k dx = -X_n'(\ell_1) X_k'(\ell_1)$$

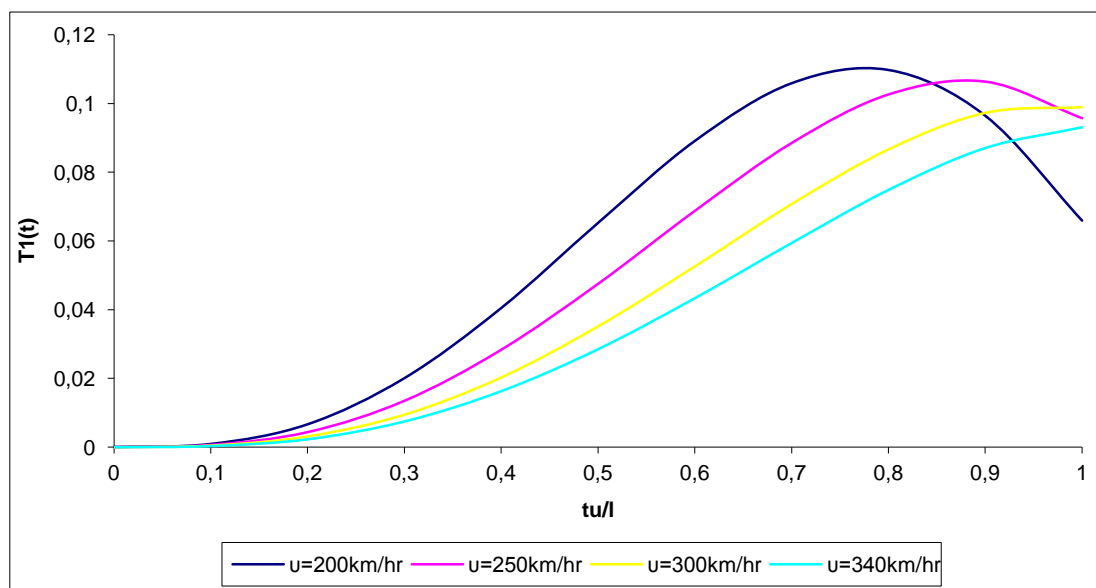
Από την εξίσωση (4.21) λόγω των παραπάνω σχέσεων προκύπτει η σχέση:

$$\omega_n^2 \int_0^{\ell} m X_n X_k dx + \ddot{T}_n \left[\int_0^{\ell} m X_n X_k dx + M X_n X_k + J X_n' X_k' \right] = M g X_n \quad (4.22)$$

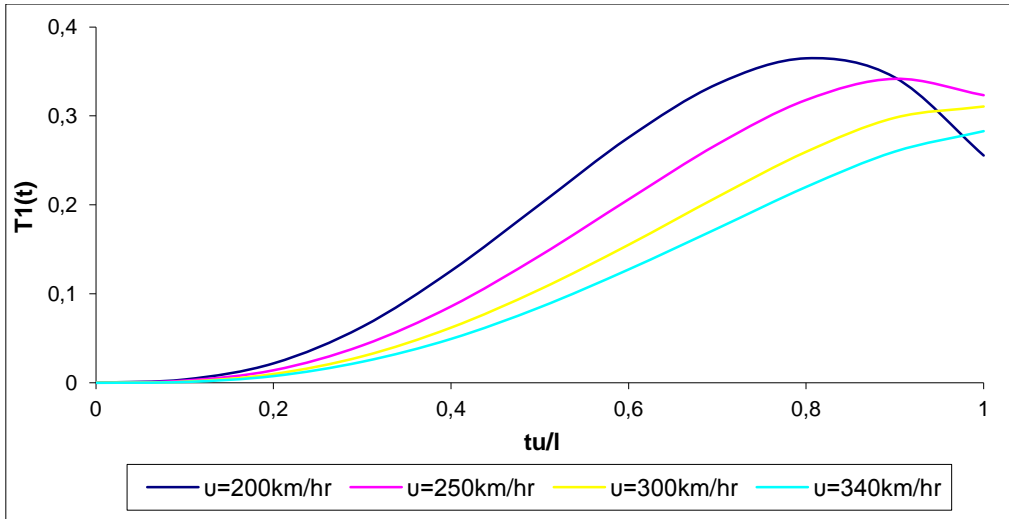
Τελικά για n=k έχουμε:

$$\ddot{T}_n(t) + \omega_n^2(t) T_n(t) = \frac{M g X_n(\ell_1)}{\int_0^{\ell} m X_n^2(x) dx + M X_n^2(\ell_1) + J X_n'^2(\ell_1)} \quad (4.23)$$

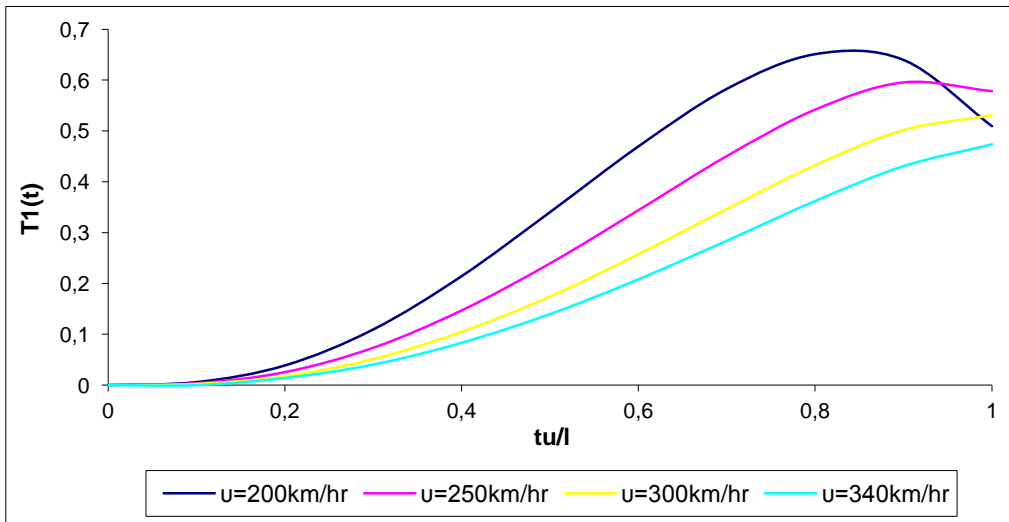
Θα υπολογιστεί η χρονική συνάρτηση η οποία αντικατοπτρίζει την απόκριση της δοκού, επί της οποίας κινούνται οχήματα διαφόρων ταχυτήτων αλλά και μαζών, με την σταθερά περιστροφικής αδράνειας J να είναι αρχικά ίση με το μηδέν και στη συνέχεια ίση με την μάζα M του οχήματος. Η επίλυση της διαφορικής εξίσωσης 4.23 έγινε με την χρήση του λογισμικού Mathematica και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στα σχήματα που ακολουθούν. Για ταχύτητες μεγαλύτερες της κρίσιμης, η χρονική συνάρτηση δεν εμφανίζει μέγιστο όσο το όχημα κινείται εντός της γέφυρας.



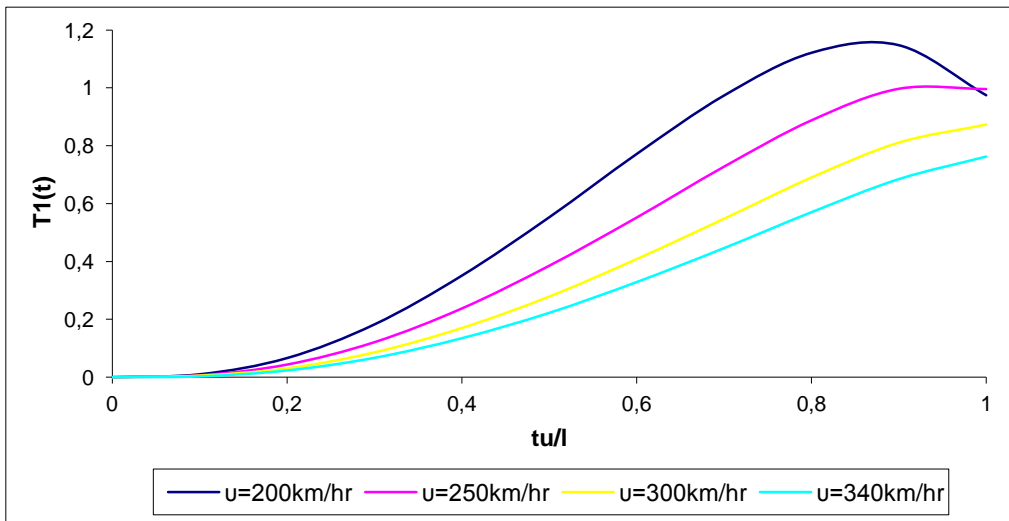
Σχήμα 4.7 Η συνάρτηση χρόνου για διάφορες ταχύτητες και $M=0,10m, J=0$ με τη θεώρηση κινητής μάζας.



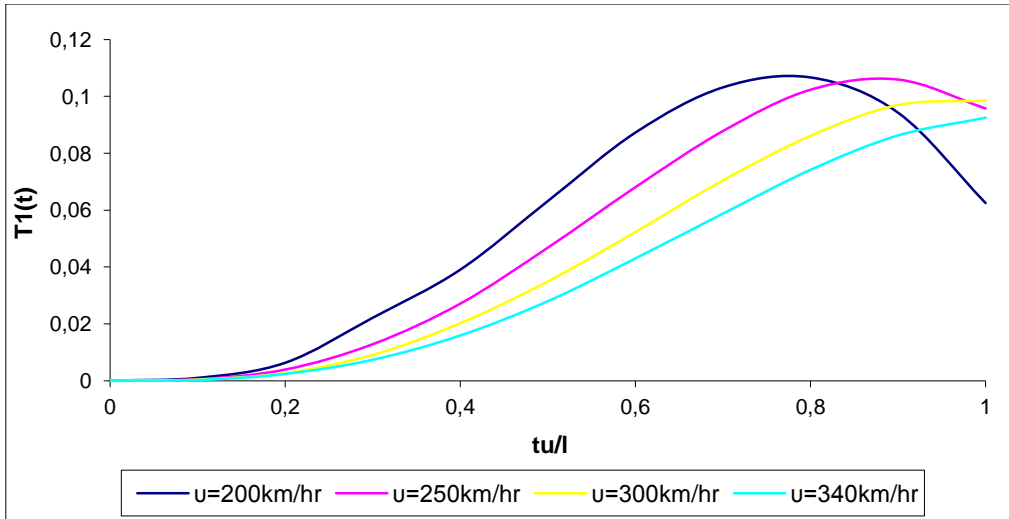
Σχήμα 4.8 Η συνάρτηση χρόνου για διάφορες ταχύτητες και $M=0,30ml, J=0$ με τη θεώρηση κινητής μάζας.



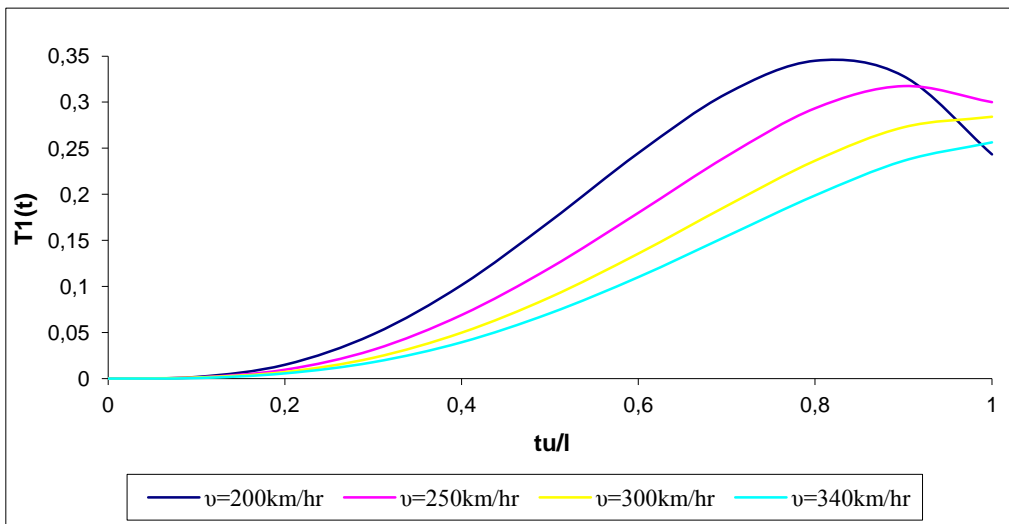
Σχήμα 4.9 Η συνάρτηση χρόνου για διάφορες ταχύτητες και $M=0,50ml, J=0$ με τη θεώρηση κινητής μάζας.



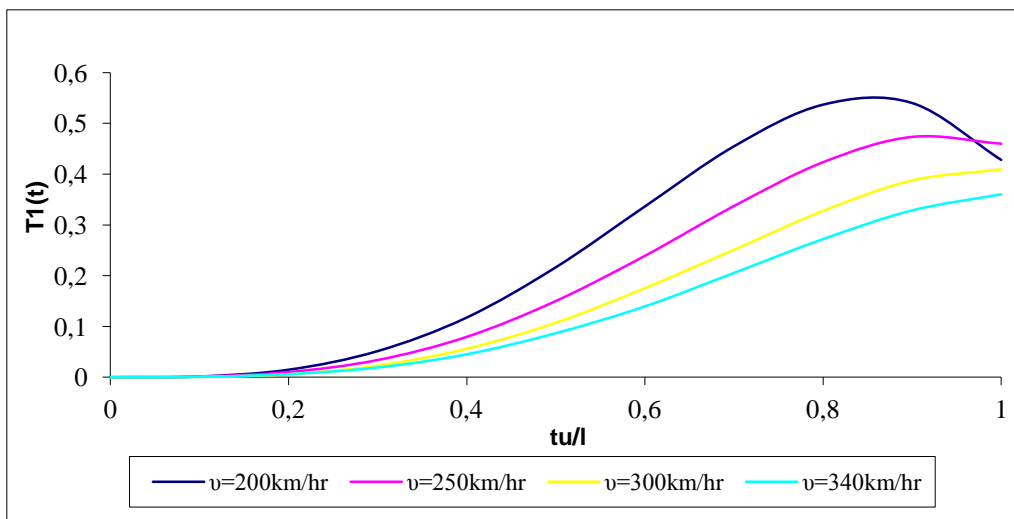
Σχήμα 4.10 Η συνάρτηση χρόνου για διάφορες ταχύτητες και $M=0,80ml, J=0$ με τη θεώρηση κινητής μάζας.



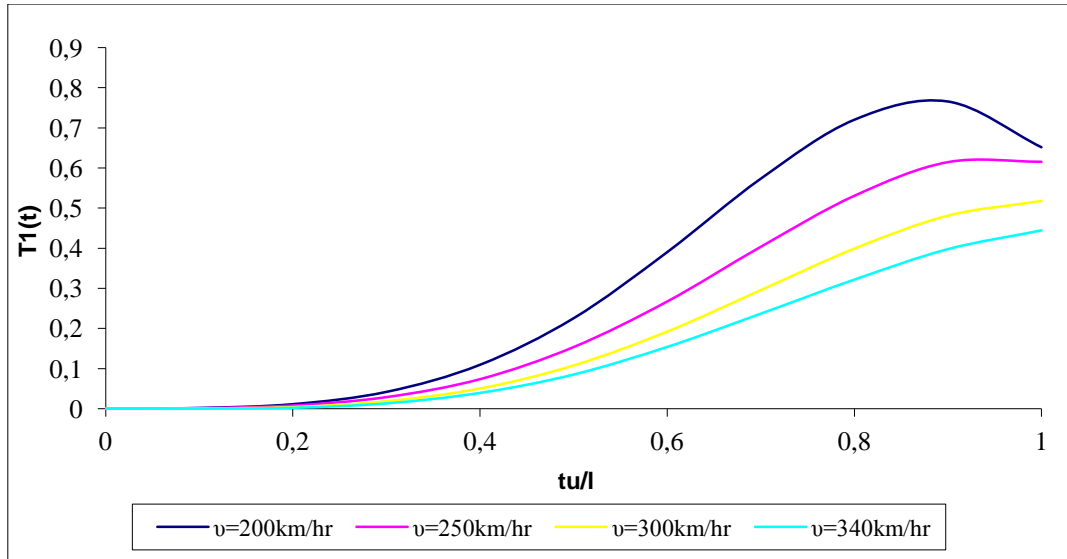
Σχήμα 4.11 Η συνάρτηση χρόνου για διάφορες ταχύτητες και $M=0,10\text{ml}$, $J=M$ με τη θεώρηση κινητής μάζας.



Σχήμα 4.12 Η συνάρτηση χρόνου για διάφορες ταχύτητες και $M=0,30\text{ml}$, $J=M$ με τη θεώρηση κινητής μάζας.



Σχήμα 4.13 Η συνάρτηση χρόνου για διάφορες ταχύτητες και $M=0,50\text{ml}$, $J=M$ με τη θεώρηση κινητής μάζας.



Σχήμα 4.14 Η συνάρτηση χρόνου για διάφορες ταχύτητες και $M=0,80ml, J=M$ με τη θεώρηση κινητής μάζας.

4.5 Κινούμενο φορτίο P επί δοκού χωρίς απόσβεση

Θεωρούμε το σώμα μάζας M και βάρους $P = M \cdot g$, κινούμενο με σταθερά ταχύτητα v επί δοκού, της οποίας αμελούμε την απόσβεση, αλλά και τις δευτερεύουσες δυνάμεις που προκαλεί η μάζα M του φορτίου P . Τότε, εάν το P είναι μόνο δυναμικό φορτίο επί της δοκού η εξίσωση (4.23) γίνεται:

$$\ddot{T}_n + \omega_n^2 T_n = \frac{PX_n(\ell_1)}{\int_0^\ell mX_n^2(\ell_1) dx} = \frac{MgX_n(v \cdot t)}{m \int_0^\ell X_n^2(v \cdot t) dx} \quad (4.24)$$

Η λύση της (4.24) δίνεται από το ολοκλήρωμα Duhamel:

$$T_n(t) = \frac{P}{m\omega_n \int_0^\ell X_n^2 dx} \int_0^t X(v\tau) \cdot \sin \omega_n(t-\tau) d\tau \quad (4.25)$$

Όπου για την αμφιέρειστη δοκό ισχύει ότι:

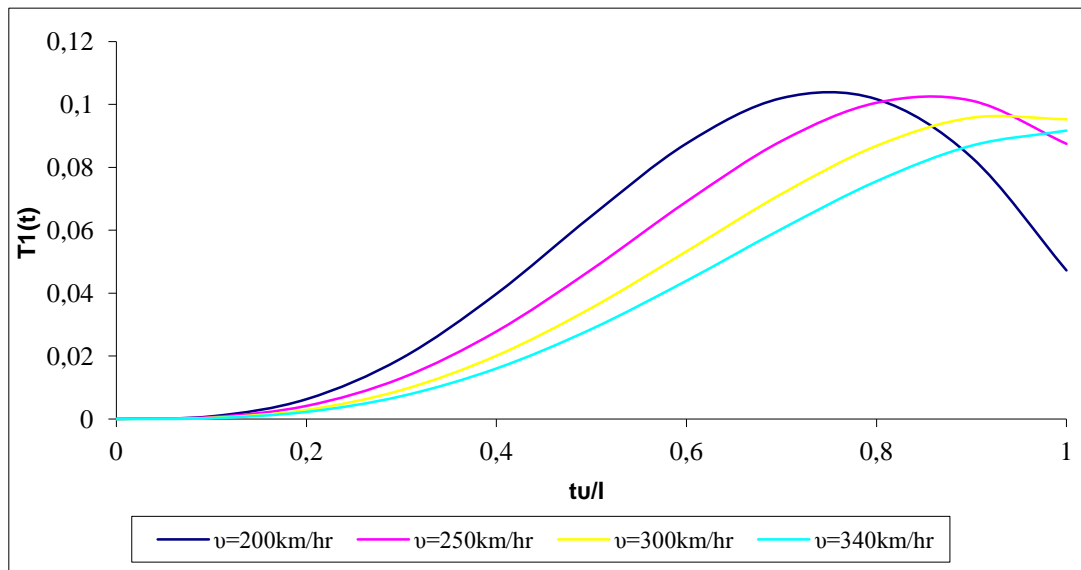
$$X_n = \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \omega_n^2 = \frac{n^4 \pi^4 \cdot EI}{m \cdot \ell^4} \quad (4.26)$$

Λόγω των (4.26) η (4.25) δίνει:

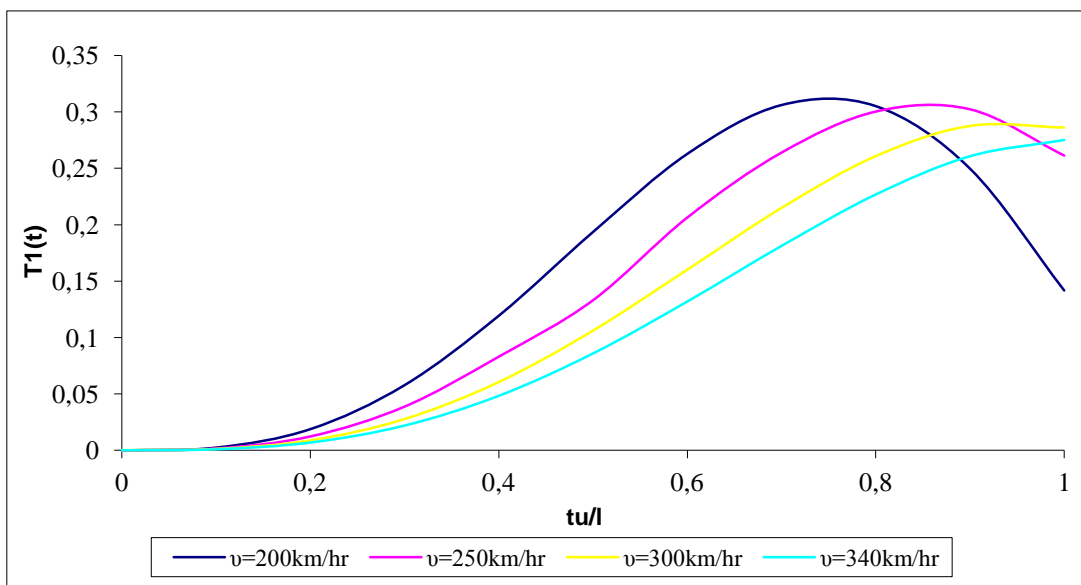
$$T_n(t) = \frac{2P}{m\ell} \cdot \frac{1}{\omega_n^2 - \Omega_n^2} \cdot \left(\sin \Omega_n t - \frac{\Omega_n}{\omega_n} \cdot \sin \omega_n t \right) \quad (4.27)$$

όπου τέθηκε: $\Omega_n = \frac{n\pi v}{\ell}, P = M \cdot g$

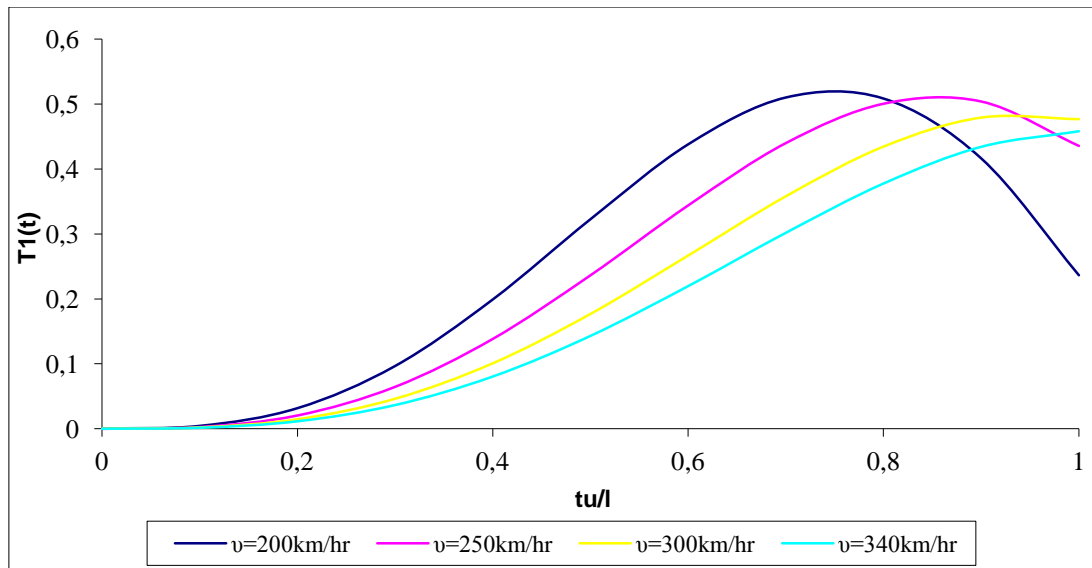
Στο σχήμα 4.15 που ακολουθεί φαίνεται η γραφική απεικόνιση της εξίσωσης (4.27) για τέσσερις διαφορετικές τιμές της ταχύτητας του φορτίου P , το οποίο είναι ίσο με το 10% του συνολικού βάρους της γέφυρας. Η κρίσιμη ταχύτητα, δηλαδή η ταχύτητα με την οποία πρέπει να κινηθεί το φορτίο P για να διασχίσει την δοκό σε χρόνο ίσο με την θεμελιώδη ημιπερίοδο, ισούται με 92,76 m/s ή 333,95 km/hr. Οι ταχύτητες θα πρέπει να είναι μεγαλύτερες των 200 km/hr, που σύμφωνα με τον Ευρωκώδικα είναι η ταχύτητα από την οποία ξεκινάει να είναι απαραίτητη η δυναμική ανάλυση. Οι ταχύτητες για τις οποίες παρουσιάζεται γραφικά η εξίσωση (4.27), είναι αυτές των 200 km/hr, 250 km/hr, 300 km/hr, 340 km/hr.



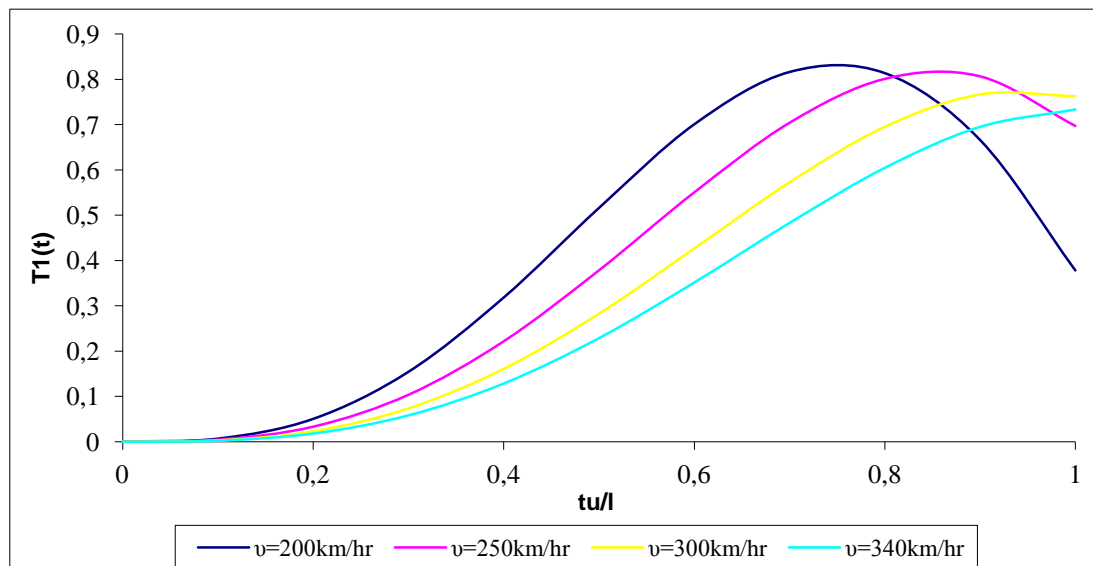
Σχήμα 4.15 Η συνάρτηση χρόνου για διάφορες ταχύτητες και $M=0,10ml$, με τη θεώρηση κινητού φορτίου.



Σχήμα 4.16 Η συνάρτηση χρόνου για διάφορες ταχύτητες και $M=0,30ml$, με τη θεώρηση κινητού φορτίου.



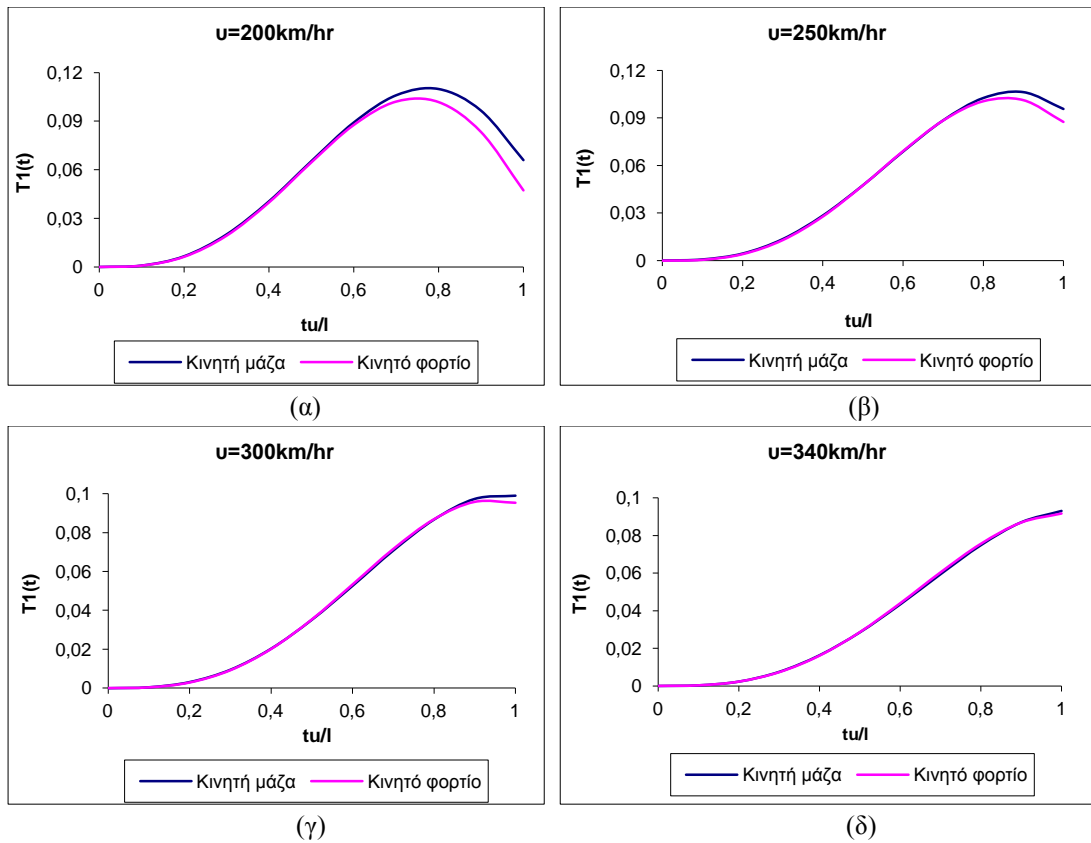
Σχήμα 4.17 Η συνάρτηση χρόνου για διάφορες ταχύτητες και $M=0,50ml$, με τη θεώρηση κινητού φορτίου.



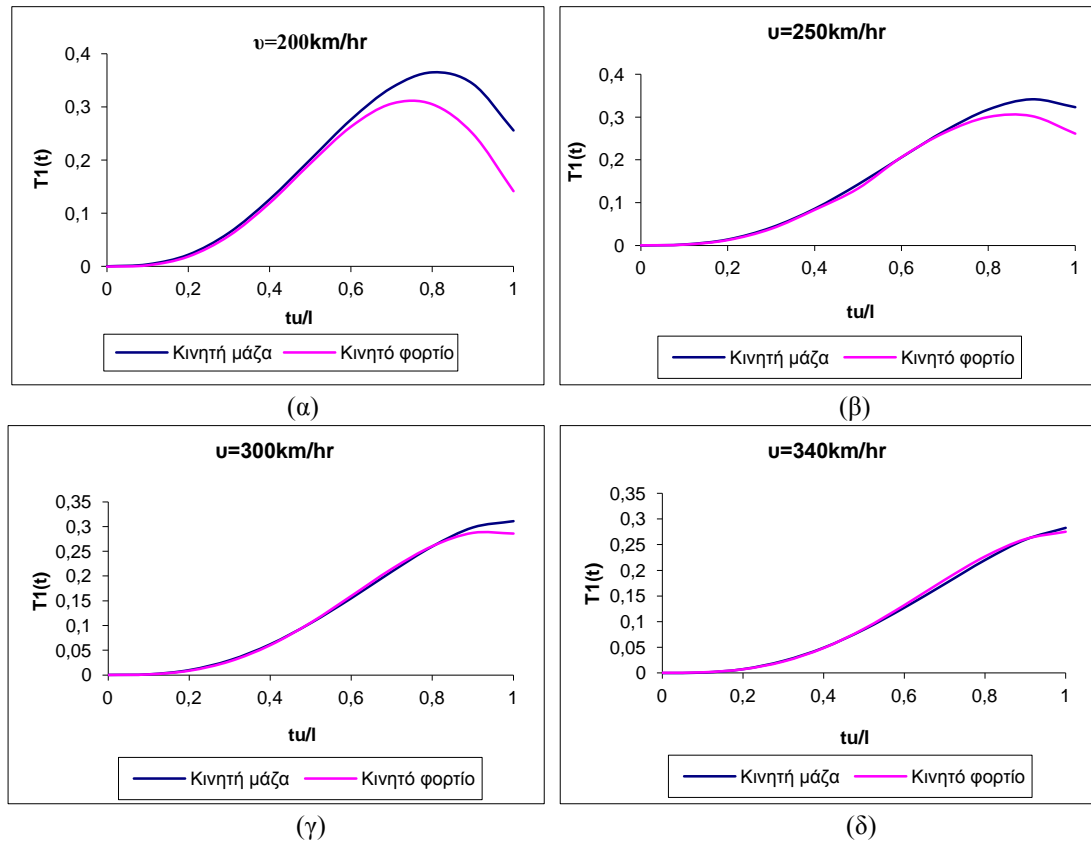
Σχήμα 4.18 Η συνάρτηση χρόνου για διάφορες ταχύτητες και $M=0,80ml$, με τη θεώρηση κινητού φορτίου.

4.6 Σύγκριση αποτελεσμάτων

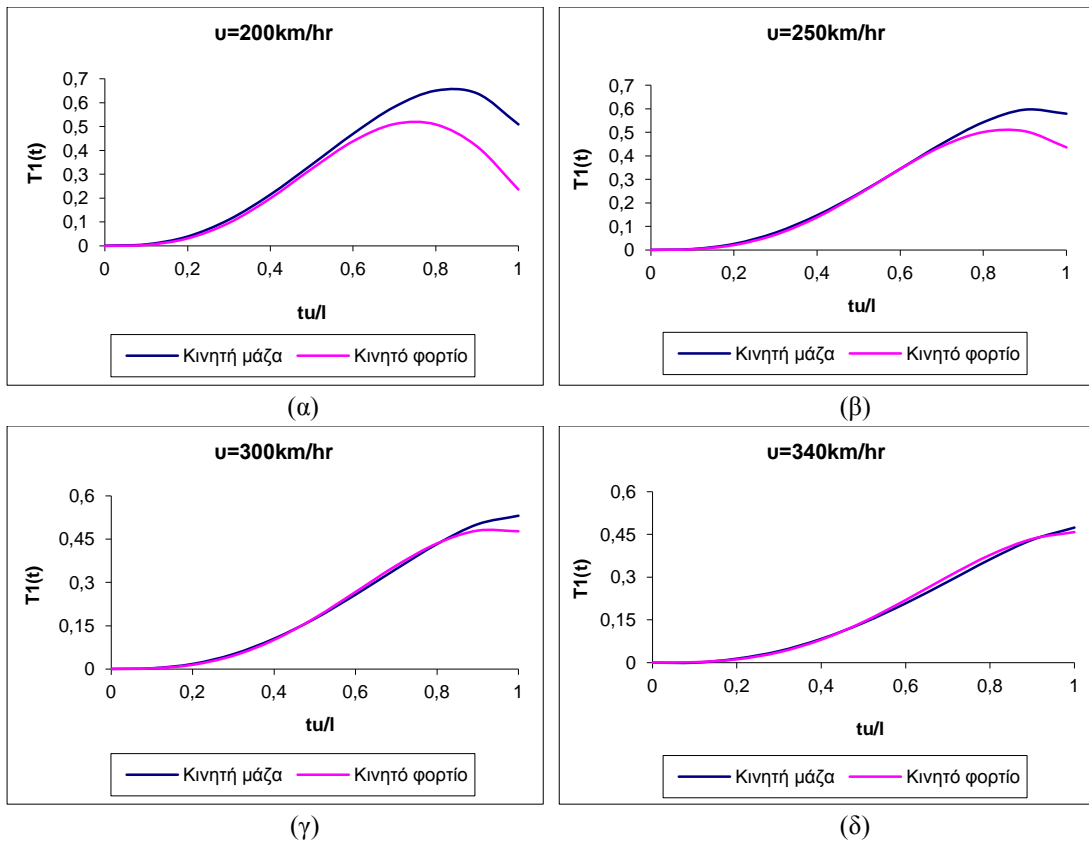
Στα σχήματα που ακολουθούν συγκρίνονται οι χρονικές συναρτήσεις που προκύπτουν από την θεώρηση του κινούμενου οχήματος ως μάζα και ως φορτίο. Αρχικά θεωρήθηκε μηδενική η περιστροφική αδράνεια του κινούμενου σώματος ($J=0$), έτσι ώστε να προσδιοριστεί η επίδραση της αδρανειακής δύναμης στην απόκριση της γέφυρας. Στα επόμενα σχήματα η περιστροφική αδράνεια θεωρήθηκε ίση με την μάζα ($J=M$), μία τιμή αρκετά μεγάλη, έτσι ώστε να φανεί η επίδραση της αδρανειακής ροπής του οχήματος στην δυναμική συμπεριφορά δοκού επί της οποίας κινείται όχημα μάζας M με σταθερή ταχύτητα.



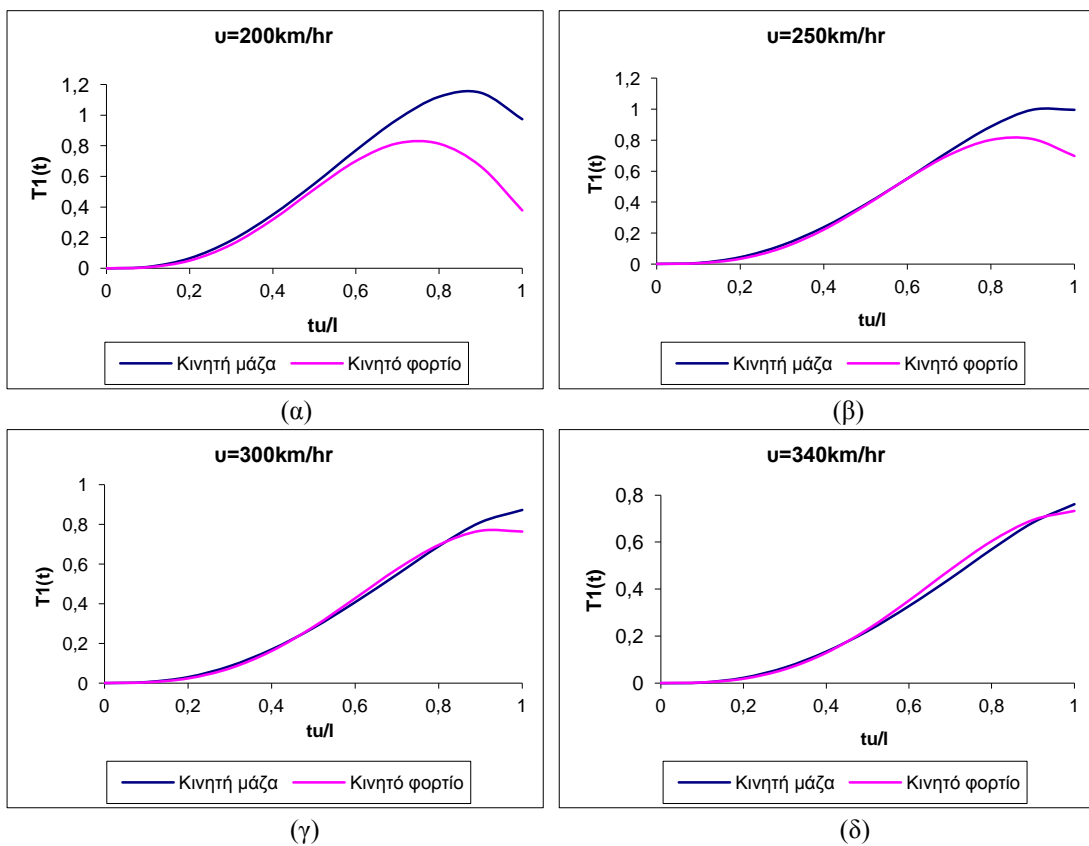
Σχήμα 4.19 Σύγκριση συναρτήσεων χρόνου για $M/ml=0,10$, $J=0$ και ταχύτητα οχήματος (α) 200km/hr (β)250km/hr (γ)300km/hr (δ) 340km/hr.



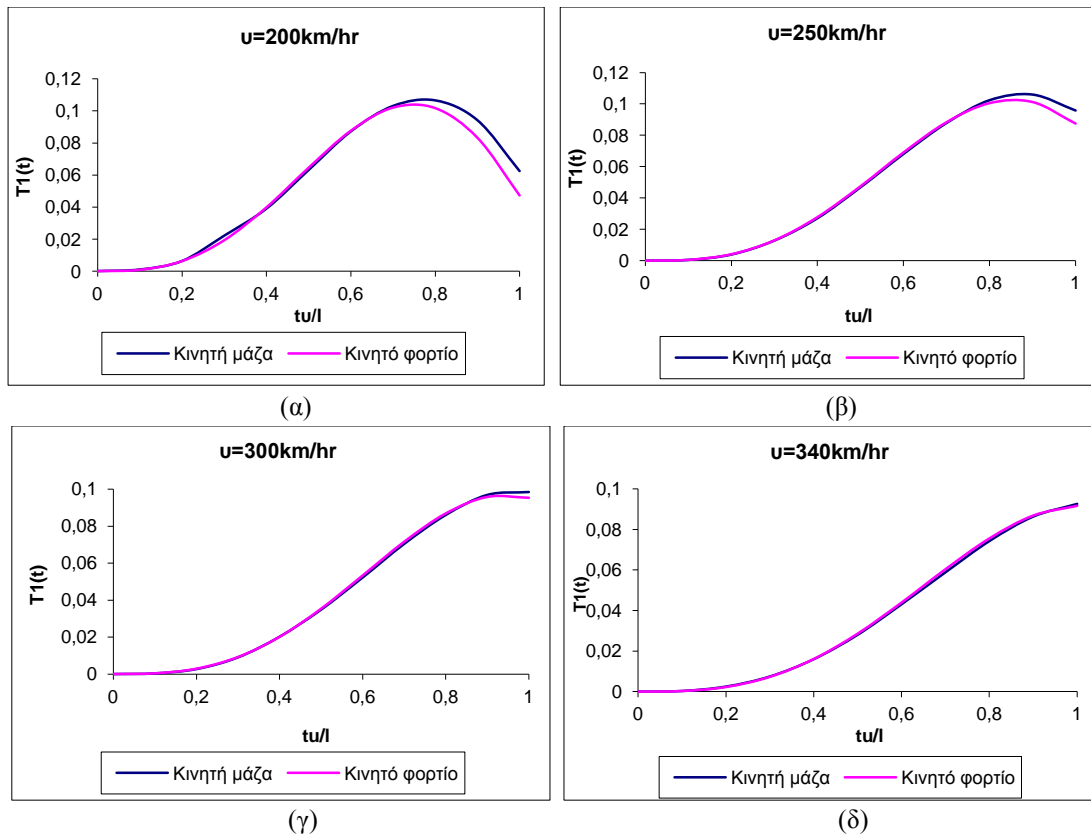
Σχήμα 4.20 Σύγκριση συναρτήσεων χρόνου για $M/ml=0,30$, $J=0$ και ταχύτητα οχήματος (α) 200km/hr (β)250km/hr (γ)300km/hr (δ) 340km/hr.



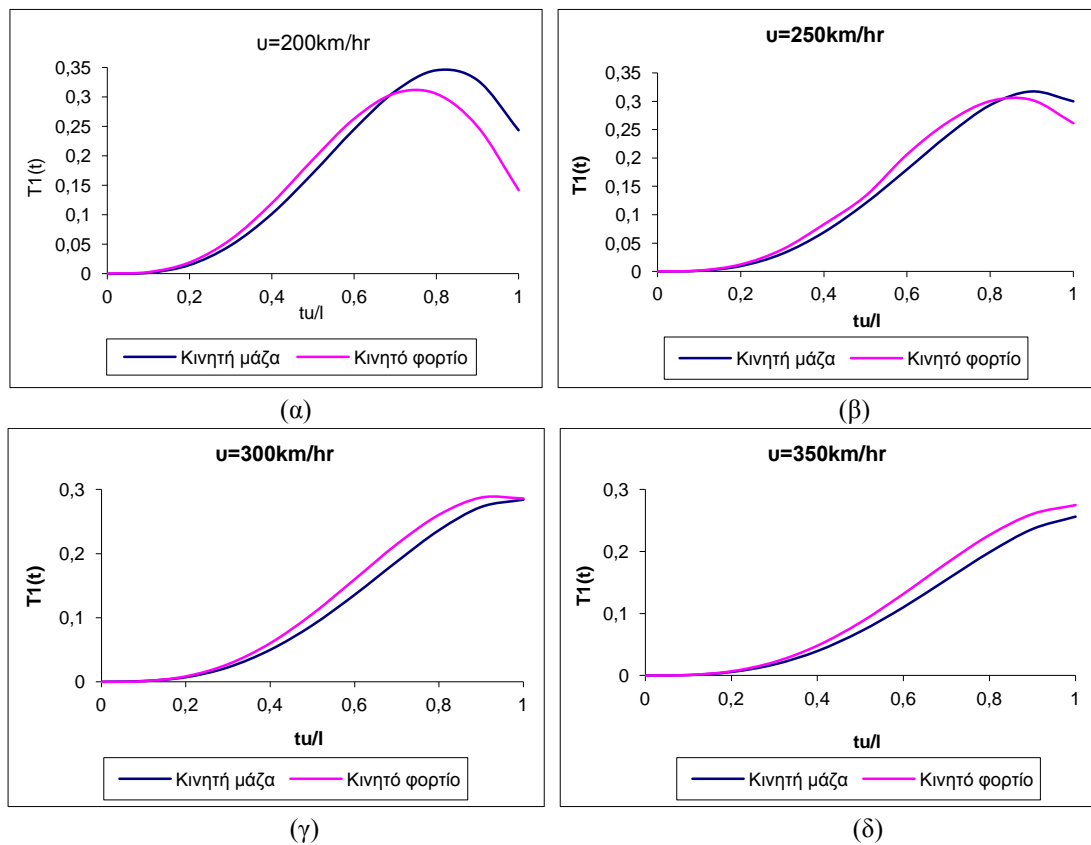
Σχήμα 4.21 Σύγκριση συναρτήσεων χρόνου για $M/ml=0,50$, $J=0$ και ταχύτητα οχήματος (α) 200km/hr (β)250km/hr (γ)300km/hr (δ) 340km/hr.



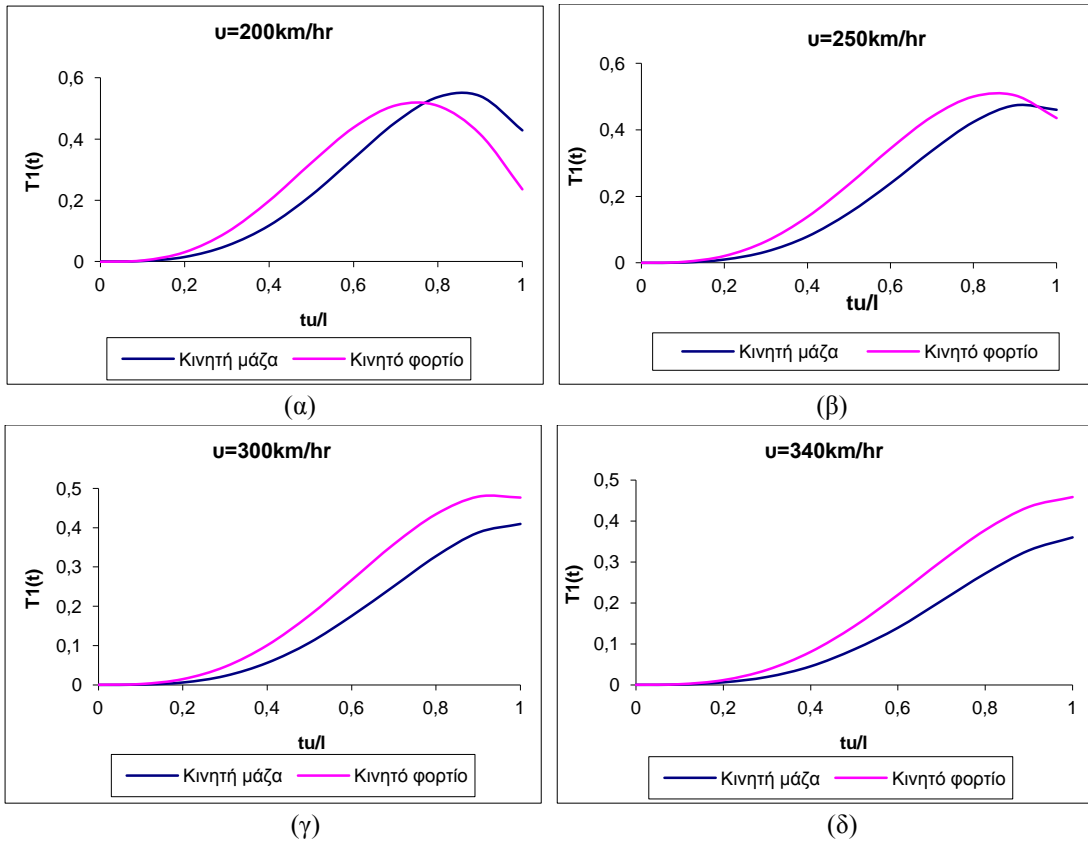
Σχήμα 4.22 Σύγκριση συναρτήσεων χρόνου για $M/ml=0,80$, $J=0$ και ταχύτητα οχήματος (α) 200km/hr (β)250km/hr (γ)300km/hr (δ) 340km/hr.



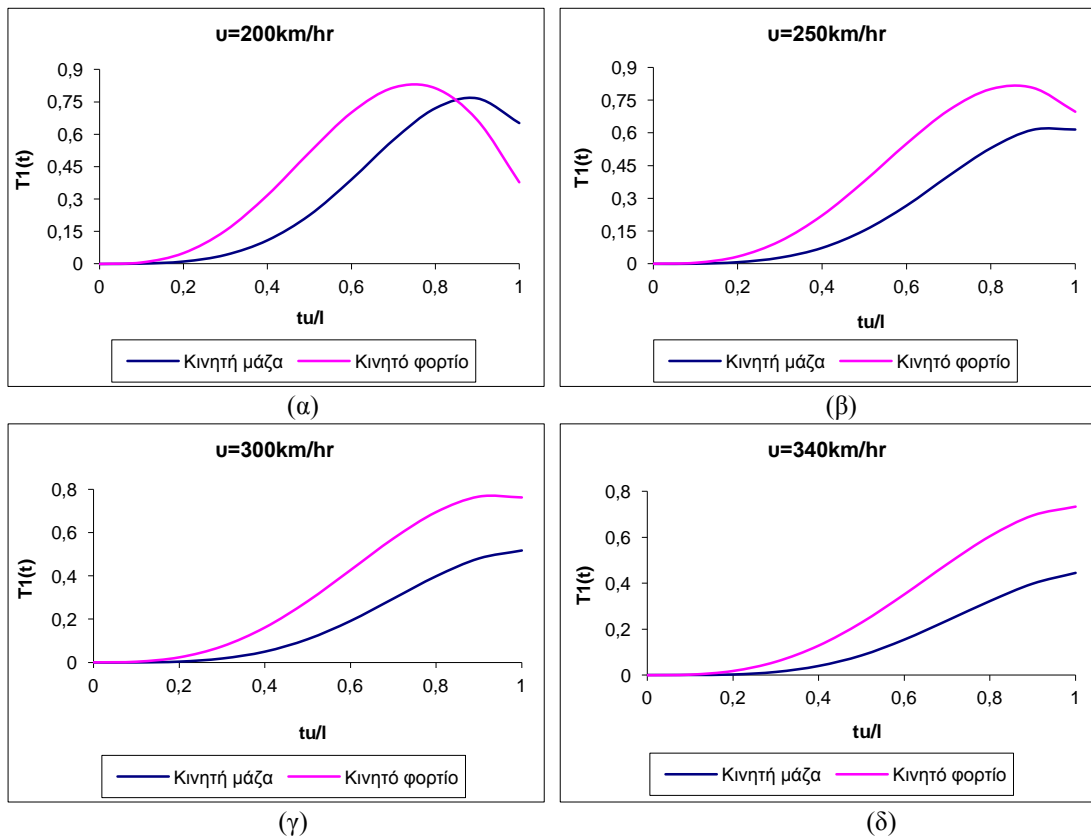
Σχήμα 4.23 Σύγκριση συναρτήσεων χρόνου για $M/ml=0,10$, $J=M$ και ταχύτητα οχήματος (α) 200km/hr (β)250km/hr (γ)300km/hr (δ) 340km/hr.



Σχήμα 4.24 Σύγκριση συναρτήσεων χρόνου για $M/ml=0,30$, $J=M$ και ταχύτητα οχήματος (α) 200km/hr (β)250km/hr (γ)300km/hr (δ) 340km/hr.

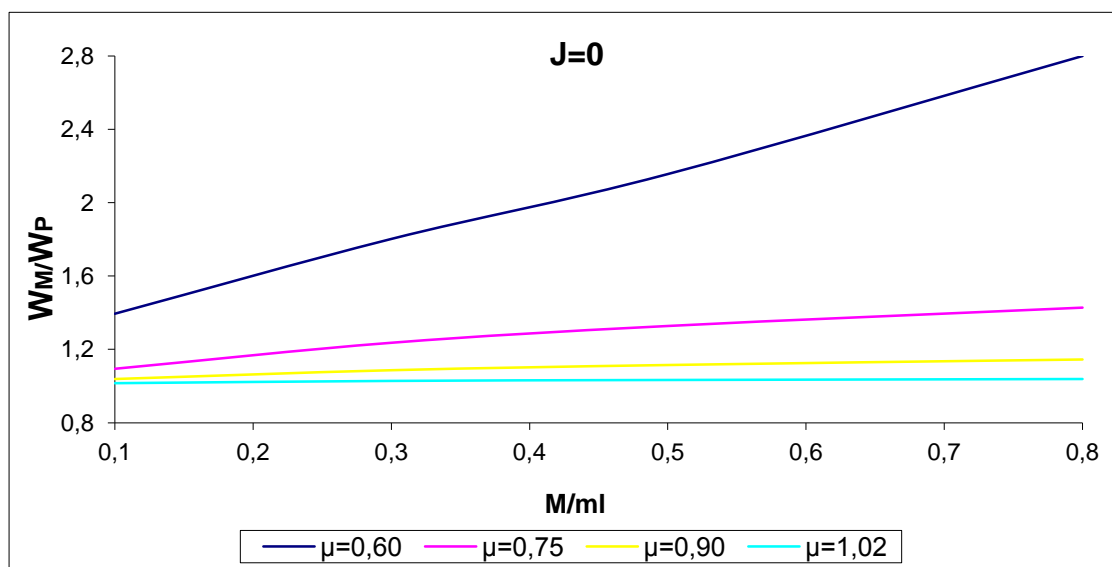


Σχήμα 4.25 Σύγκριση συναρτήσεων χρόνου για $M/ml=0,50$, $J=M$ και ταχύτητα οχήματος (α) 200km/hr (β)250km/hr (γ)300km/hr (δ) 340km/hr.

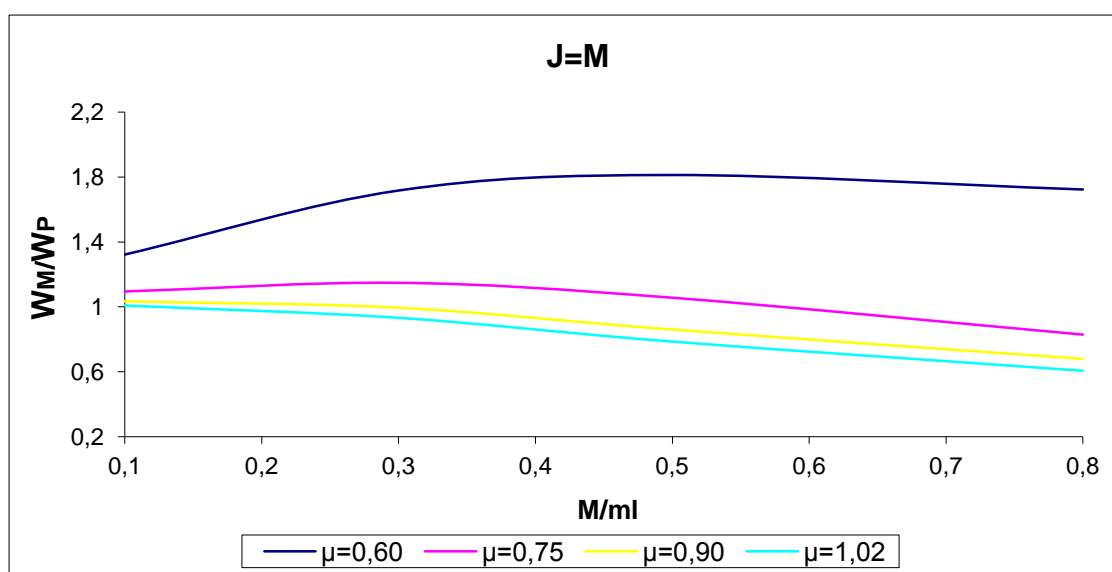


Σχήμα 4.26 Σύγκριση συναρτήσεων χρόνου για $M/ml=0,80$, $J=M$ και ταχύτητα οχήματος (α) 200km/hr (β)250km/hr (γ)300km/hr (δ) 340km/hr.

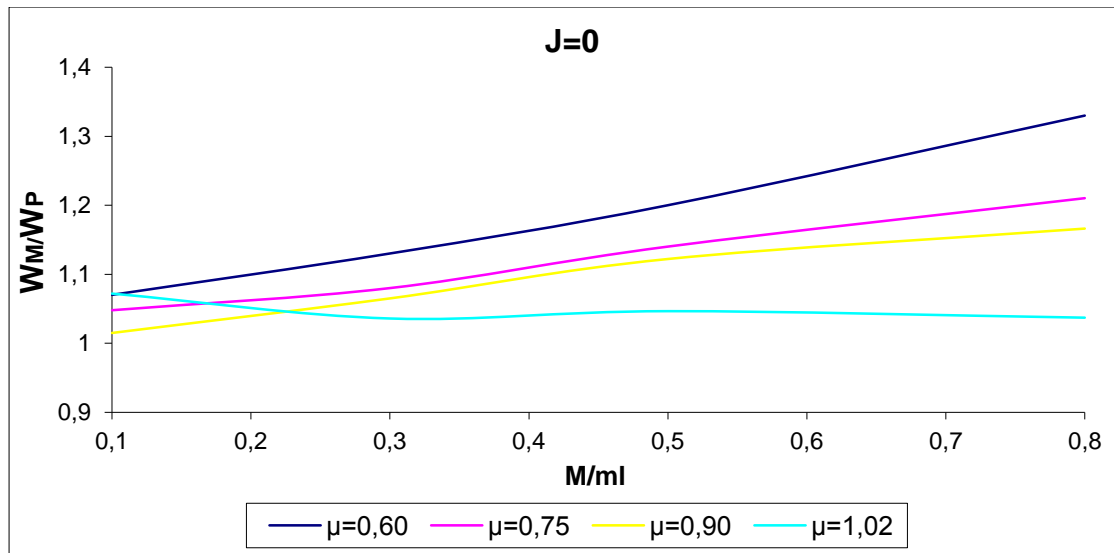
Στο σχήμα 4.27, δίνεται η μεταβολή του λόγου W_M / W_P , την στιγμή εξόδου του κινούμενου οχήματος από την γέφυρα, συναρτήσει του λόγου M / ml (της μάζας του κινητού προς την συνολική μάζα της γέφυρας), για διάφορες τιμές της παραμέτρου της ταχύτητας $\mu = v/v_{cr}$ και αμελώντας την περιστροφική αδράνεια. Στον παραπάνω λόγο, W_M είναι η παραμόρφωση στο μέσον της γέφυρας, όταν λαμβάνεται υπ'όψιν η επιρροή της μάζας M του κινούμενου σώματος και W_P η ίδια παραμόρφωση όταν αμελείται η επιρροή της μάζας. Στο σχήμα 4.28 παρουσιάζονται ακριβώς τα ίδια στοιχεία με την διαφορά ότι δεν αμελείται η περιστροφική αδράνεια αλλά είναι ίση με την μάζα M του οχήματος.



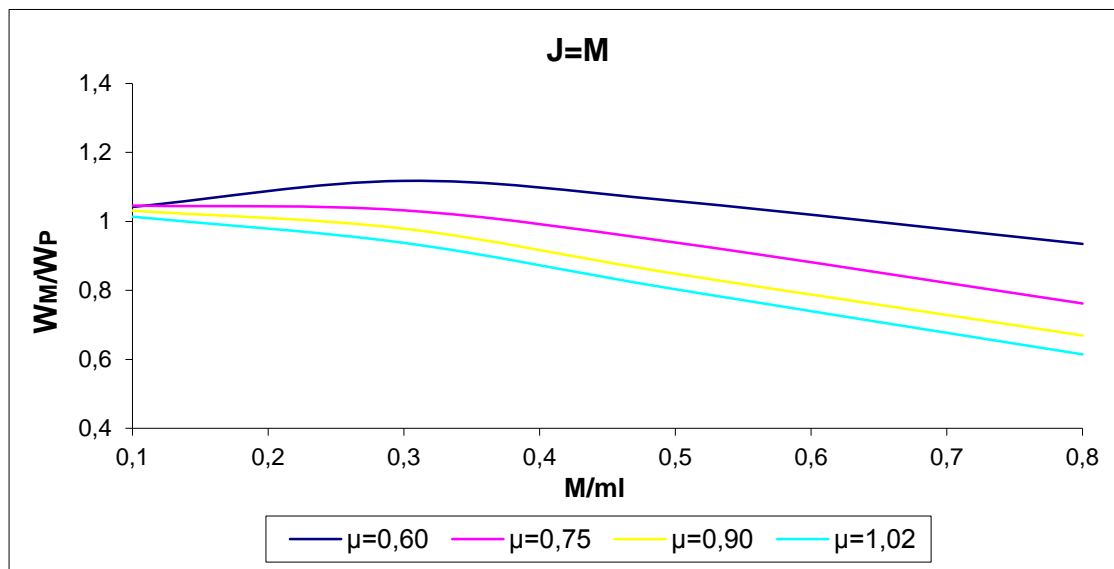
Σχήμα 4.27 Η μεταβολή του λόγου των βυθίσεων με την θεώρηση κινητής μάζας και φορτίου, στην μεσαία διατομή της γέφυρας, την στιγμή εξόδου του σώματος ($J=0$).



Σχήμα 4.28 Η μεταβολή του λόγου των βυθίσεων με την θεώρηση κινητής μάζας και φορτίου, στην μεσαία διατομή της γέφυρας, την στιγμή εξόδου του σώματος ($J=M$).



Σχήμα 4.29 Η μεταβολή του λόγου των μέγιστων βυθίσεων με την θεώρηση κινητής μάζας και φορτίου, στην μεσαία διατομή της γέφυρας, για $J=0$.



Σχήμα 4.30 Η μεταβολή του λόγου των μέγιστων βυθίσεων με την θεώρηση κινητής μάζας και φορτίου, στην μεσαία διατομή της γέφυρας, για $J=M$.

4.7 Σύνοψη-συμπεράσματα

Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν παραπάνω, εξάγουμε τα ακόλουθα συμπεράσματα για την διαφορά της υπολογισθείσας χρονικής συνάρτησης με την θεώρηση κινητής μάζας και κινητής δύναμης :

1. Για κινούμενα οχήματα, με μάζα μικρότερη από το 10% της συνολικής μάζας της γέφυρας, δεν υπάρχει ουσιαστική απόκλιση στον υπολογισμό της χρονικής συνάρτησης με τις δύο θεωρήσεις.
2. Με την θεώρηση του κινούμενου οχήματος ως μάζα, η κρίσιμη ταχύτητα μειώνεται σε τιμή περίπου ίση με $0,90v_{cr}$.

3. Η αύξηση της περιστροφικής αδράνειας J οδηγεί σε ανάλογη μείωση της απόκρισης της δοκού.
4. Για ταχύτητες οχήματος μικρότερες από $v < 0,75v_{cr}$, με την θεώρηση κινητής μάζας, το δυναμικό βέλος αυξάνεται ανάλογα με την αύξηση της μάζας.
5. Για τιμές του $\mu = v/v_{cr} > 0,75$, η επιρροή της μάζας μειώνεται σταδιακά. Αυτό οφείλεται στο ότι το μέγιστο της παραμόρφωσης εμφανίζεται όταν το όχημα έχει πλέον εξέλθει του ανοίγματος της γέφυρας.
6. Η θεμελιώδης ιδιοσυχνότητα της γέφυρας επηρεάζεται από το μέγεθος της μάζας M του οχήματος που κινείται επί αυτής. Για τιμές της μάζας του οχήματος μεγαλύτερες από το 30% της συνολικής μάζας της γέφυρας, η επιρροή αυτή είναι μεγάλη και κορυφώνεται όταν το σώμα βρίσκεται στο μέσο της.

5 ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΜΦΙΕΡΕΙΣΤΗΣ ΓΕΦΥΡΑΣ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

5.1 Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων

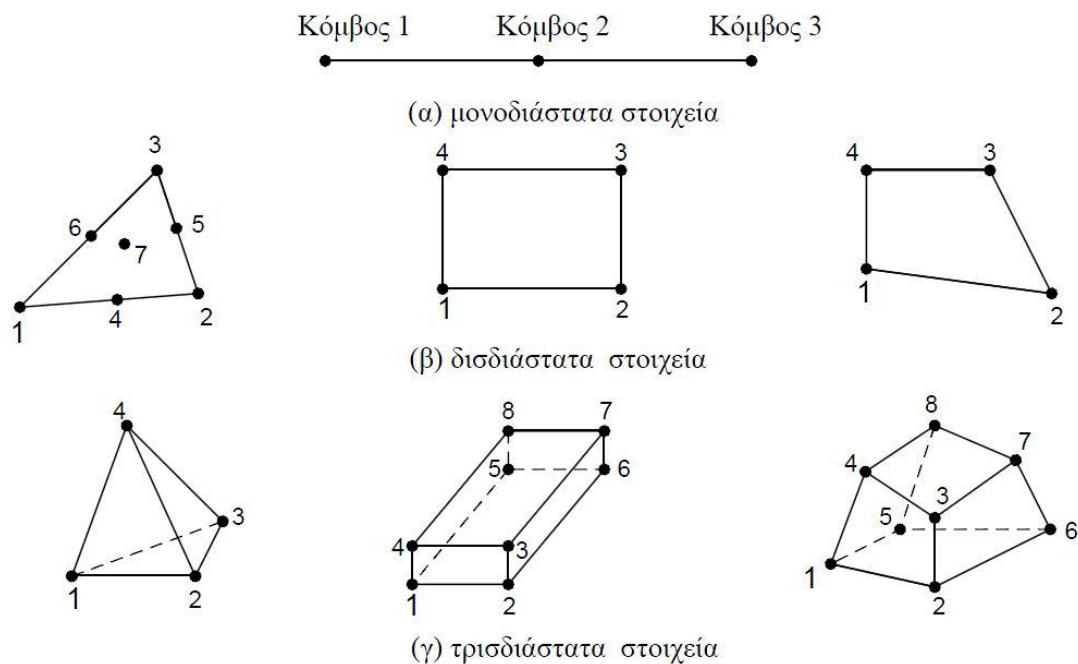
Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων είναι μία τεχνική που εφαρμόζεται για την ανάλυση σύνθετων και πολύπλοκων φορέων. Η ανάπτυξη της πληροφορικής και η δημιουργία ψηφιακών υπολογιστών μεγάλης ταχύτητας συνέβαλαν στην διάδοση της χρήσης λογισμικών πεπερασμένων στοιχείων. Σήμερα, η μέθοδος αυτή θεωρείται μία από τις πιο λεπτομερείς μεθόδους με ευρύ πεδίο εφαρμογής. Η ανάλυση με τη χρήση πεπερασμένων στοιχείων (Finite Element Analysis Method ή εν συντομία FEM) παρουσιάστηκε στις αρχές του 1960 από τους επιστήμονες Argyris J.H., Clough R.W. και Zienkiewicz O.C. Τα τελευταία χρόνια χρησιμοποιείται και στη γεφυροποιία, προσομοιώνοντας σύνθετους φορείς σύμμικτων γεφυρών και προσφέροντας αποτελέσματα μεγάλης ακρίβειας.

Η θεμελιώδης αρχή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων βασίζεται στην αντικατάσταση του γεωμετρικά σύνθετου πεδίου του προβλήματος με ένα σύνολο απλών υποπεδίων που ονομάζονται πεπερασμένα στοιχεία. Εφόσον οποιοσδήποτε φορέας μπορεί να υποδιαιρεθεί σε απλά στοιχεία, το πεδίο εφαρμογής της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων είναι τεράστιο και για το λόγο αυτό χρησιμοποιείται σε πολλούς τομείς της μηχανικής. Στη γεφυροποιία, όπου οι φορείς είναι σύνθετοι, αποτελούμενοι από πλήθος δομικών στοιχείων, συνδεδεμένα μεταξύ τους με πολύπλοκο τρόπο, η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων βρίσκει μεγάλη εφαρμογή προσφέροντας αξιόπιστα αποτελέσματα.

Η διαδικασία διακριτοποίησης του φορέα είναι μία διαδικασία που παίζει σημαντικό ρόλο στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και εναπόκειται στην κρίση του μηχανικού. Ο τρόπος διακριτοποίησης του φορέα, η επιλογή του πλέγματος που θα χρησιμοποιηθεί και τα στοιχεία που θα επιλεγούν εξαρτώνται πρώτα από όλα από τη γεωμετρία του φορέα.

Τα στοιχεία που επιλέγονται μπορεί να είναι μονοδιάστατα, δισδιάστατα ή τρισδιάστατα, όπως φαίνονται και στο σχήμα 5.1. Ανάλογα με το είδος των μελών του φορέα, αποφασίζεται ο αριθμός, το σχήμα, το μέγεθος και ο τύπος των στοιχείων που θα επιλεγούν για την προσομοίωσή του, έτσι ώστε το προσομοίωμα που θα δημιουργηθεί να παρουσιάζει συμπεριφορά όσο το δυνατόν πλησιέστερη στον πραγματικό φορέα. Κάθε στοιχείο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί έχει διαφορετικούς

βαθμούς ελευθερίας που το χαρακτηρίζουν. Η παραμόρφωση του στοιχείου καθορίζεται από τους βαθμούς ελευθερίας του σε κάθε κόμβο.



Σχήμα 5.1 (α) μονοδιάστατα (β) δισδιάστατα και (γ) τρισδιάστατα στοιχεία για την διακριτοποίηση του φορέα κατά την ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία

Ο χειρισμός λογισμικών πεπερασμένων στοιχείων απαιτεί ειδικές σε βάθος γνώσεις, με αποτέλεσμα να απαιτείται πάντα εξειδικευμένο προσωπικό για τη χρήση τους. Συγχρόνως, τα αποτελέσματα που προκύπτουν εξαρτώνται σε πολύ μεγάλο βαθμό από τις παραδοχές και τις επιλογές του χρήστη. Τα σημαντικότερα σφάλματα που συνήθως συμβαίνουν, αφορούν σφάλματα προσομοίωσης και σφάλματα διακριτοποίησης. Έτσι, μία λάθος επιλογή στον τρόπο αντίληψης του προβλήματος ή μια λάθος επιλογή του τύπου του πεπερασμένου στοιχείου που επιλέγεται μπορεί να οδηγήσει σε διαφορετικά αποτελέσματα. Είναι δυνατόν ένα συγκεκριμένο πρόβλημα να αντιμετωπιστεί τελείως διαφορετικά από διαφορετικά άτομα οδηγώντας σε διαφορετικά αποτελέσματα. Άλλες φορές, τα προσομοιώματα αποτελούνται από πολύ μεγάλο αριθμό κόμβων και στοιχείων, γεγονός που καθιστά δύσκολους τον έλεγχο και την ανάγνωση των αποτελεσμάτων.

Στην παρούσα εργασία η επίλυση και ανάλυση των προς εξέταση διατομών έγινε με το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων SAP2000, το οποίο επιτρέπει στο μηχανικό την προσομοίωση της συμπεριφοράς μιας κατασκευής. Το SAP2000 είναι

ένα πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων ικανό να δημιουργήσει τόσο το δίκτυο των στοιχείων κατά την προεπεξεργασία του φορέα όσο και να μας βοηθήσει να επεξεργαστούμε τα αποτελέσματα της ανάλυσής μας. Η ανάλυση γίνεται με τη διαίρεση του φορέα σε μικρότερα στοιχεία τα οποία συνδέονται με κόμβους. Η πορεία που ακολουθείται είναι η εξής:

1. Δημιουργία της γεωμετρίας του φορέα (solid modeling)
2. Καθορισμός υλικών και τύπου στοιχείων των μελών του φορέα
3. Δημιουργία δικτύου πεπερασμένων στοιχείων από κόμβους και στοιχεία (mesh generation).
4. Εφαρμογή φορτίων και επιβολή συνοριακών συνθηκών (loads and constraints)
5. Ανάλυση φορέα
6. Παρουσίαση των αποτελεσμάτων

Η ανάλυση του δυναμικού προβλήματος αυτής της εργασίας έγινε με το πρόγραμμα Sap2000, κάτι το οποίο αναφέρθηκε παραπάνω, χρησιμοποιώντας πεπερασμένα στοιχεία δοκού (beam elements), όπου επιλέχθηκε η μη-γραμμική (nonlinear) ανάλυση χρονο-ιστορίας (time history). Ως τύπος ανάλυσης χρονο-ιστορίας επιλέχθηκε η άμεση ολοκλήρωση των δυναμικών εξισώσεων (direct integration). Το κάθε βήμα στην ανάλυση θα έχει διάρκεια 0,01sec, ενώ σε αυτή χρησιμοποιήθηκαν τόσα βήματα όσα χρειαζόταν το όχημα για να κινηθεί εντός της δοκού.

5.2 Τα πεπερασμένα στοιχεία της δοκού

Τα πεπερασμένα στοιχεία της ευθύγραμμης (ή και καμπυλόγραμμης) πρισματικής δοκού θα είναι και αυτά ευθύγραμμοι δοκοί με μικρό μήκος l . Επομένως η παράσταση του στοιχείου θα γίνεται με ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους l και η αμοιβαία σύνδεση των στοιχείων μεταξύ τους στους κόμβους θα είναι σημειακή.

Κάθε στοιχείο, όπως και ολόκληρη η δοκός στην οποία ανήκει, μπορεί να υφίσταται ποικίλες επιπονήσεις όπως εφελκυσμό, θλίψη, κάμψη, στρέψη κλπ. Οι προκύπτουσες μετακινήσεις του στοιχείου εκφράζονται προσεγγιστικά με αντίστοιχες επιτρεπτές συναρτήσεις, που ειδικότερα λέγονται συναρτήσεις μορφής ή παρεμβολής οι οποίες θα πρέπει να ικανοποιούν τις γεωμετρικές συνοριακές του

στοιχείου, καθώς και να είναι παραγωγίσιμες, ώστε να είναι δυνατός ο υπολογισμός της ενέργειας παραμορφώσεως του στοιχείου.

Εάν θεωρήσουμε ότι η δοκός έχει σταθερή διατομή, τότε θα είναι σταθερή και η δυσκαμψία EI κατά μήκος. Κατά την καμπτική ταλάντωση λόγω εξωτερικής διέγερσης, το τυχαίο στοιχείο (i,j) της δοκού, με σταθερή μάζα m, θα εμφανίζει στα άκρα του τις δύο κάθετες μετατοπίσεις w_i και w_j , καθώς και δύο γωνίες στροφής θ_i και θ_j . Επομένως το διάνυσμα των γενικευμένων συντεταγμένων του στοιχείου (i,j) θα είναι:

$$u_n(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_i(t) \\ \theta_i(t) \\ w_j(t) \\ \theta_j(t) \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Η κάθετη μετατόπιση $w(x,t)$ στο ενδιάμεσο σημείο του στοιχείου γράφεται

$$w(x,t) = w_i(t)\phi_1(x) + \theta_i(t)\phi_2(x) + w_j(t)\phi_3(x) + \theta_j(t)\phi_4(x) = \sum_{n=1}^4 u_n(t)\phi_n(x) \quad (5.2)$$

Όπου $\phi_n(x)$ είναι οι συναρτήσεις παρεμβολής του στοιχείου και οι οποίες ικανοποιούνται από συναρτήσεις της μορφής:

$$\phi_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (5.3)$$

των οποίων οι σταθερές a_0, a_1, \dots, a_n υπολογίζονται σε κάθε ειδική περίπτωση, ανάλογα με το είδος της επιπονήσεως και τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες του στοιχείου. Όταν η παραπάνω συνάρτηση παρεμβολής είναι πρώτου βαθμού το στοιχείο λέγεται γραμμικό, ενώ για συνάρτηση δευτέρου ή τρίτου βαθμού λέγεται τετραγωνικό ή κυβικό.

Το πρότυπο πεπερασμένων στοιχείων δοκού είναι προτιμότερο να χρησιμοποιείται σε γραμμικές αναλύσεις στατικών προβλημάτων, αλλά μπορεί να χρησιμοποιηθεί και στην επίλυση δυναμικών προβλημάτων, όπου χρησιμοποιούνται αναλύσεις άλλου τύπου. Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο θα χρησιμοποιηθεί η μη-γραμμική δυναμική ανάλυση χρονο-ιστορίας (time history analysis) έτσι ώστε να υπολογιστεί η απόκριση κάθε πεπερασμένου στοιχείου της δοκού, στην οποία κινούνται οχήματα διαφόρων μεγεθών και ταχυτήτων.

5.3 Γραμμική δυναμική ανάλυση

Η δυναμική ανάλυση απαιτείται όπου η φόρτιση δεν μπορεί να θεωρηθεί στατική, ή όπου πρέπει να ληφθούν υπόψη οι δυνάμεις αδράνειας και απόσβεσης. Γενικά, οι

δυναμικές μέθοδοι χρησιμοποιούν την αριθμητική ολοκλήρωση στη χρονική διάρκεια επιβολής της φόρτισης. Με την μέθοδο βήμα προς βήμα (step by step), η λύση προχωράει χρονικά με ένα καθορισμένο βήμα και υπολογίζεται η απόκριση του φορέα μέσω των μετατοπίσεων και των ταχυτήτων που παρουσιάζει. Η λύση των προκυπτουσών ταυτόχρονων εξισώσεων για το χρονικό διάστημα κάθε βήματος, δίνει την απόκριση σε κάθε σημείο του φορέα την χρονική στιγμή του συγκεκριμένου βήματος. Εάν γνωρίζουμε τις αρχικές συνθήκες (initial conditions), η διαδοχική εφαρμογή αυτής της διαδικασίας δίνει τη δυναμική απόκριση της κατασκευής.

Η εξίσωση της δυναμικής ισορροπίας μιας ελαστικής διακριτής κατασκευής είναι αυτή της σχέσεως (5.4). Η βήμα προς βήμα (step by step) ολοκλήρωση της εξίσωσης πρέπει να εκτελεσθεί προκειμένου να υπολογιστεί η απόκριση της κατασκευής σε κάθε χρονική στιγμή επιβολής του φορτίου.

$$[M]\{\ddot{w}\} + [C]\{\dot{w}\} + [K]\{w\} = \{F(t)\} \quad (5.4)$$

Όπου: [M] το μητρώο μάζας του φορέα

[C] το μητρώο απόσβεσης του φορέα

[K] το μητρώο δυσκαμψίας του φορέα

F(t) η επιβαλλόμενη φόρτιση σε συνάρτηση με τον χρόνο

5.4 Ανάλυση μεταβατικής απόκρισης άμεσης ολοκλήρωσης (direct integration)

Η εξίσωση της δυναμικής ισορροπίας είναι διαφορική και επιλύεται χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της άμεσης ολοκλήρωσης, μια αριθμητική βήμα προς βήμα διαδικασία στην χρονική διάρκεια της φόρτισης. Η μέθοδος είναι βασισμένη στις ακόλουθες υποθέσεις:

- Οι δυναμικές εξισώσεις ισορροπίας ικανοποιούνται σε κάθε διακριτό χρονικό διάστημα, μέσα στο χρονικό διάστημα κάθε βήματος. Αυτά τα διακριτά χρονικά διαστήματα είναι Δt .
- Μέσα σε αυτά τα χρονικά διαστήματα υπολογίζονται οι διαφορές των μετατοπίσεων, των ταχυτήτων και των επιταχύνσεων. Αυτό οδηγεί σε μια σειρά σχημάτων άμεσης ολοκλήρωσης, όπου κάθε ένα χαρακτηρίζεται από διαφορετική ακρίβεια και σταθερότητα.

Δημιουργείται ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων, οι οποίες ισχύουν ταυτόχρονα σε κάθε χρονικό διάστημα Δt . Η διαδικασία της άμεσης ολοκλήρωσης

πραγματοποιείται με την προώθηση της λύσης από τις γνωστές συνθήκες στο χρόνο t στις άγνωστες τιμές στο χρόνο $t+\Delta t$. Το σχήμα ολοκλήρωσης καλείται ρητό (Explicit), εάν η λύση σε χρόνο $t+\Delta t$ λαμβάνεται με την εξέταση των εξισώσεων ισορροπίας σε χρόνο t . Αυτή η μέθοδος είναι σταθερή μόνο υπό τον όρο ότι το μήκος του κάθε χρονικού βήματος είναι μικρότερο από μια κρίσιμη τιμή, έτσι ώστε η διαδικασία να συγκλίνει. Οι ρητοί (Explicit) αλγόριθμοι επιτρέπουν την αποδέσμευση από τις εξισώσεις ισορροπίας, και έτσι η αναστροφή του μητρώου δυσκαμψίας είναι περιττή. Γενικά, οι ρητοί αλγόριθμοι χρησιμοποιούνται σε προβλήματα που απαιτούν βήματα μικρής χρονικής διάρκειας, ανεξάρτητα από τις απαιτήσεις σταθερότητας.

5.5 Μη γραμμική δυναμική ανάλυση

Οι γέφυρες αποτελούν τεχνικά έργα μεγάλου κόστους και θεμελιώδους σημασίας, καθώς αποτελούν «γραμμές ζωής». Αστοχία σε μία γέφυρα μπορεί να έχει ως αποτέλεσμα την αδυναμία μεταφοράς ανθρωπιστικού υλικού και μπορεί να θέσει σε κίνδυνο χιλιάδες ζωές, εξαιτίας της αποκοπής της οδικής επικοινωνίας σε έκτακτη ανάγκη. Λόγω των παραπάνω σε τέτοια έργα απαιτείται μία βέλτιστη και ρεαλιστική ανάλυση. Τέτοια αποτελέσματα μπορούμε να έχουμε με τη χρήση μη γραμμικών αναλύσεων.

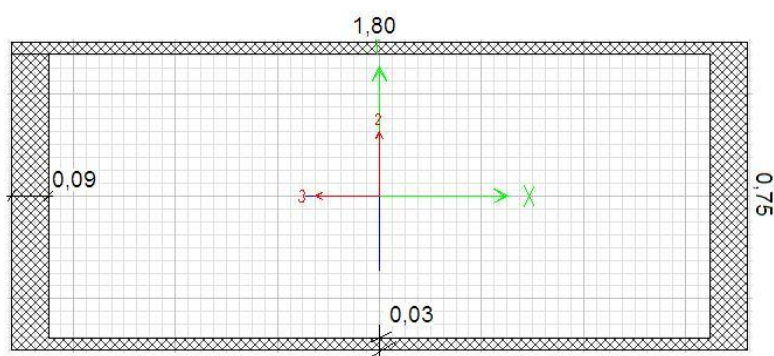
Όπως είναι γνωστό, όλα τα συνηθισμένα υλικά ακολουθούν μια γραμμική συμπεριφορά στο αρχικό μόνο τμήμα του νόμου τάσεων-ανηγμένων παραμορφώσεων. Αυτό ουσιαστικά σημαίνει ότι το υλικό συμπεριφέρεται ως γραμμικά ελαστικό και οι πραγματοποιούμενες μετατοπίσεις όλων των σημείων του φορέα είναι πολύ μικρές, μόνον όταν το επίπεδο φόρτισης είναι τόσο χαμηλό, ώστε οι αναπτυσσόμενες τάσεις και ανηγμένες παραμορφώσεις να παραμένουν στην περιοχή γραμμικής αναλογίας και η γεωμετρία του φορέα στην παραμορφωμένη του κατάσταση να μοιάζει πολύ με την αντίστοιχη απαραμόρφωτη.

Σε πολλές περιπτώσεις όμως, οι φορείς φορτίζονται και παραμορφώνονται εντονότερα παρουσιάζοντας φαινόμενα μη γραμμικότητας στη συμπεριφορά τους. Μία κατασκευή μπορεί να αστοχήσει είτε λόγω μη γραμμικότητας υλικού, είτε λόγω μη γραμμικότητας γεωμετρίας. Σε μερικές περιπτώσεις φορέων ενδιάμεσης δυσκαμψίας μπορεί να εμφανιστεί συνδυασμένη μη γραμμικότητα υλικού και γεωμετρίας. Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις οι δρόμοι ισορροπίας δεν είναι πλέον ευθύγραμμοι αλλά καμπύλοι.

Στην περίπτωση των κινούμενων σωμάτων μεγάλης μάζας σε αμφιέρειστη γέφυρα, το φαινόμενο είναι δυναμικό και έτσι τα αντίστοιχα βέλη είναι πολύ μεγαλύτερα από τα αντίστοιχα στατικά. Έτσι είναι πιθανό να εμφανίζονται μη γραμμικά φαινόμενα και μία μη γραμμική ανάλυση να απαιτείται.

5.6 Περιγραφή του μοντέλου

Στην παρούσα μελέτη εξετάστηκε μία αμφιέρειστη δοκός μήκους $\ell = 50m$, η οποία είναι ίδια με αυτή του κεφαλαίου τέσσερα, έτσι ώστε να είναι εφικτή η σύγκριση των αποτελεσμάτων. Η διατομή της γέφυρας, όπως εξάγεται από το πρόγραμμα Sap2000, φαίνεται στο σχήμα 5.2.



Σχήμα 5.2 Διατομή αμφιέρειστης γέφυρας κιβωτιοειδούς διατομής στο Sap2000.

Υλικό : Χάλυβας

$$A_c = 0,2322m^2$$

$$I_y = 0,0189m^4$$

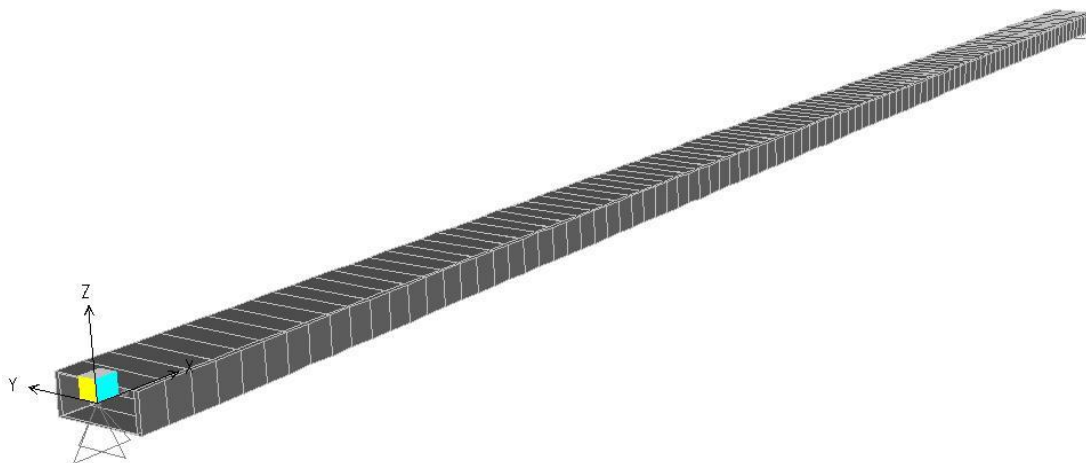
$$E = 2,1 \cdot 10^8 kPa = 210.000MPa$$

$$T_1 = 1,089sec$$

$$v_{cr} = \frac{2 \cdot \ell}{T_1} = \frac{2 \cdot 50}{1,089} = 91,827m/sec = 330,58km/hr$$

Η μάζα του κινούμενου οχήματος θεωρήθηκε αρχικά ίση με το 10% της συνολικής μάζας της δοκού, ενώ στη συνέχεια αυξήθηκε μέχρι να φτάσει να είναι ίση με το 80% της συνολικής μάζας της γέφυρας. Με τον τρόπο αυτό θα διαπιστώσουμε και την μεταβολή της απόκρισης της δοκού, σε σχέση με τον λόγο της μάζας του κινούμενου σώματος προς αυτή του φορέα επί του οποίου κινείται. Για την δοκό υποθέτουμε ότι έχει μηδενική απόσβεση, έτσι αφού το σώμα εξέλθει από αυτήν, εκτελεί ελεύθερη ταλάντωση χωρίς απόσβεση.

Οι καθολικοί άξονες του μοντέλου φαίνονται στο σχήμα 5.3. Ο άξονας X έχει την ίδια διεύθυνση με τον φορέα και φορά ίδια με την κίνηση του σώματος. Οι άλλοι δύο άξονες είναι κάθετοι στον X, με τον άξονα Z να έχει την διεύθυνση των μετατοπίσεων της δοκού, αλλά κατεύθυνση προς τα επάνω.



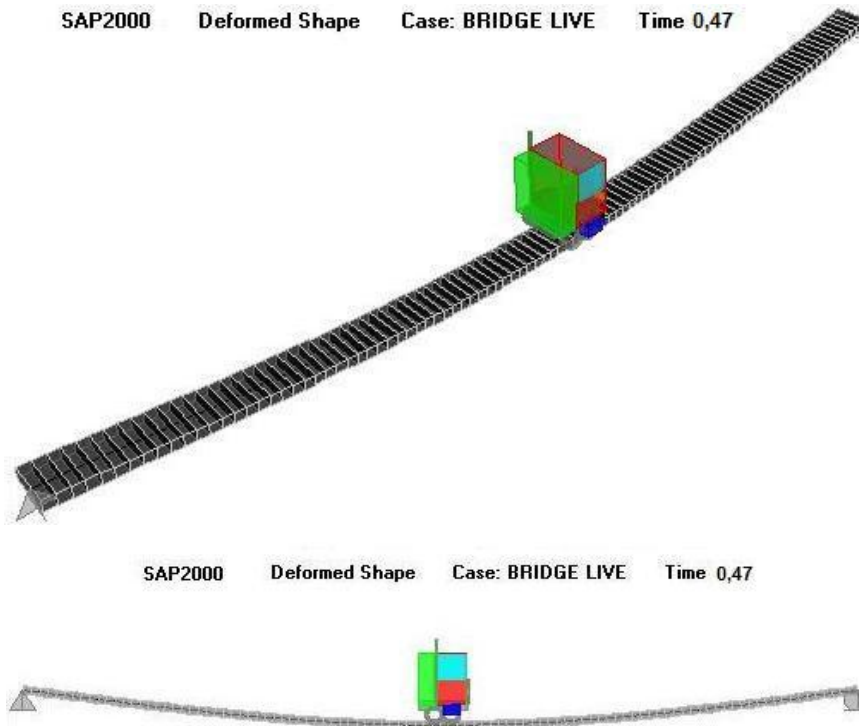
Σχήμα 5.3 Η απαραμόρφωτη αφιμέρειστη γέφυρα στο λογισμικό SAP2000

Επιλέχθηκε το πλήθος των πεπερασμένων στοιχείων να είναι 100 για όλο το μήκος της δοκού, έτσι το επιμέρους μήκος του κάθε πεπερασμένου στοιχείου θα είναι 0,50m. Η συνολική μάζα της δοκού είναι ίση με 91,14ton, δηλαδή για την μάζα ανά μέτρο μήκους έχουμε $m=1.822,8\text{kg/m}$. Η μάζα του οχήματος είναι αρχικά $M=9.114\text{kg}$ και αντιστοιχεί σε φορτίο 91,14kN. Επιλέχθηκε όχημα με δύο άξονες.

Στο σχήμα 5.5 που ακολουθεί φαίνεται η θέση του οχήματος, το οποίο κινείται με ταχύτητα 198km/hr, την χρονική στιγμή $t=0,47\text{sec}$. Η ταχύτητα αυτή αντιστοιχεί σε $v=55\text{m/s}$ και έτσι το όχημα χρειάζεται 0,91sec για να διασχίσει τη δοκό. Θεωρώντας τον λόγο $\mu = v / v_{cr}$ η δυναμική ανάλυση πραγματοποιήθηκε για τέσσερις τιμές του μ . Οι τιμές αυτές είναι $\mu=0,60$, $\mu=0,75$, $\mu=0,90$ και $\mu=1,02$. Στα σχήματα 5.6, 5.7, 5.8 και 5.9 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της απόκρισης, για την μεσαία διατομή της δοκού στην δυναμική φόρτιση λόγω του κινούμενου οχήματος, κατά την διάρκεια της κίνησης του οχήματος εντός της γέφυρας. Η αναλογία της μάζας του κινούμενου σώματος με αυτή της δοκού επί της οποίας κινείται, είναι κάτι το οποία επηρεάζει τα αποτελέσματα του δυναμικού προβλήματος.



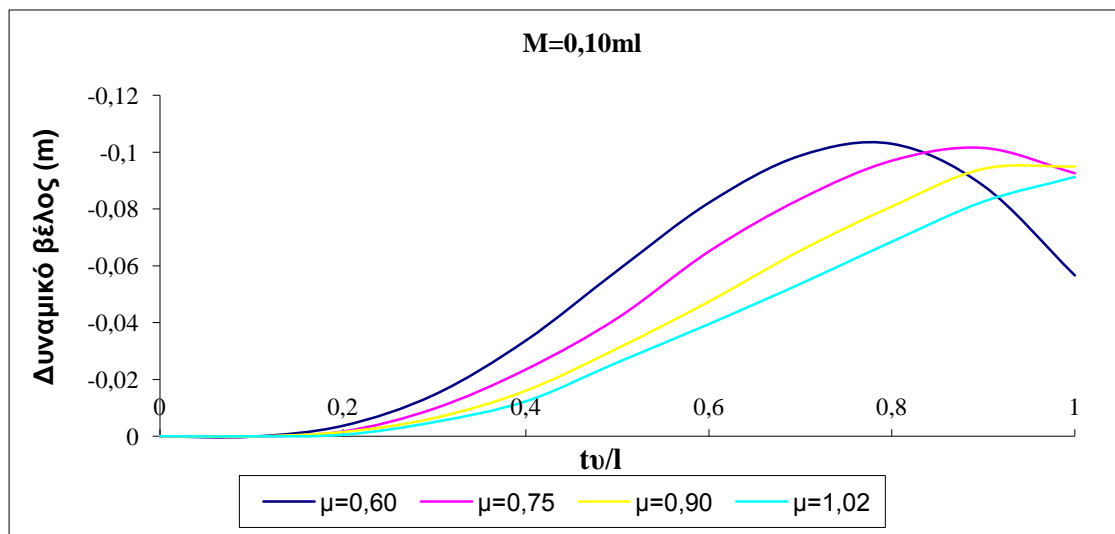
Σχήμα 5.4 Το μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων δοκού με συγκεντρωμένες τις μάζες του κάθε στοιχείου.



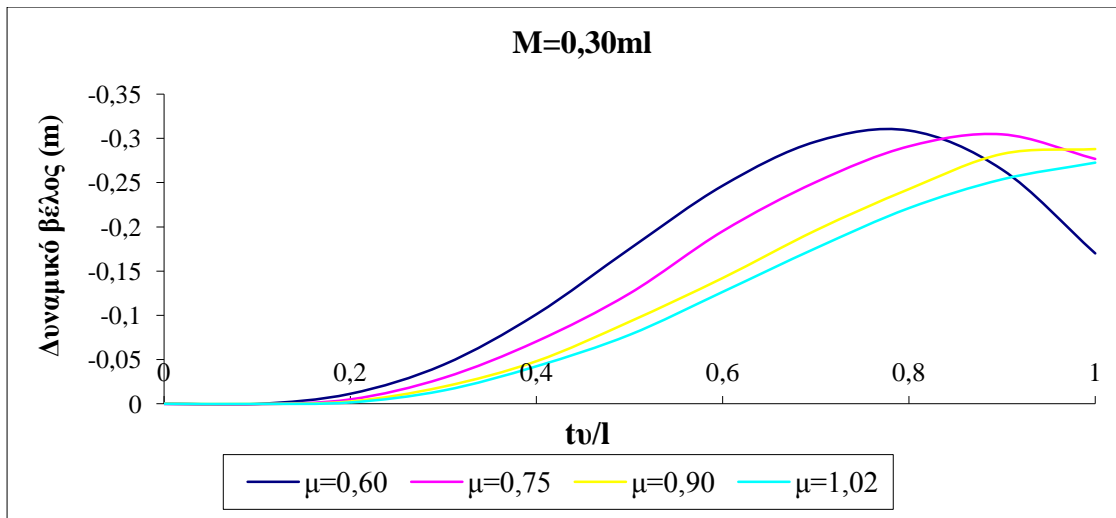
Σχήμα 5.5 Η θέση του οχήματος, το οποίο κινείται με ταχύτητα 198 km/hr, την χρονική στιγμή $t=0,47\text{sec}$.

5.7 Αποτελέσματα και αξιολόγηση της ανάλυσης

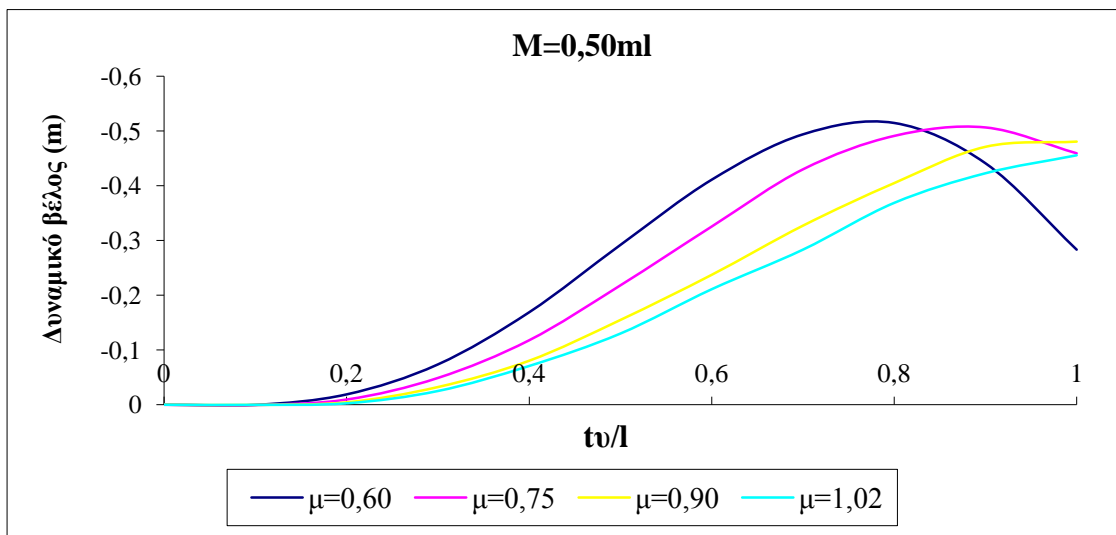
Για την δυναμική ανάλυση της γέφυρας χρησιμοποιήθηκε μη γραμμική ανάλυση χρονιστορίας άμεσης ολοκλήρωσης (Nonlinear direct integration history), όπου χρησιμοποιήθηκε η πρώτη κανονική μορφή. Έγιναν προσπάθειες να συμπεριληφθεί στην ανάλυση η αδράνεια της μάζας, κάτι όμως που δεν είναι εφικτό με το συγκεκριμένο, αλλά και με τα περισσότερα προγράμματα πεπερασμένων στοιχείων.



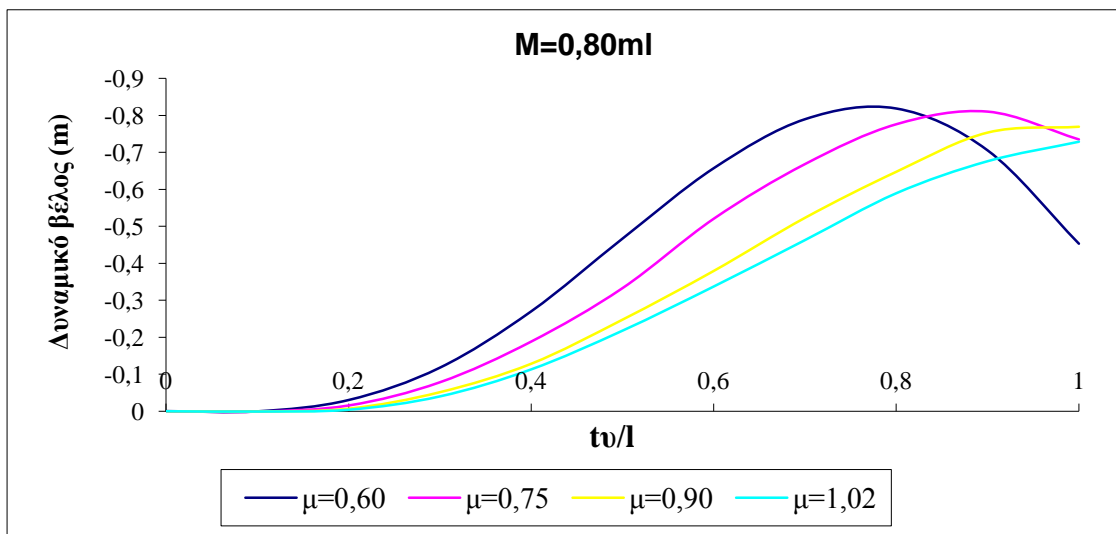
Σχήμα 5.6 Απόκριση της γέφυρας στην μεσαία διατομή για κίνηση οχήματος μάζας 9,11ton με διάφορες ταχύτητες.



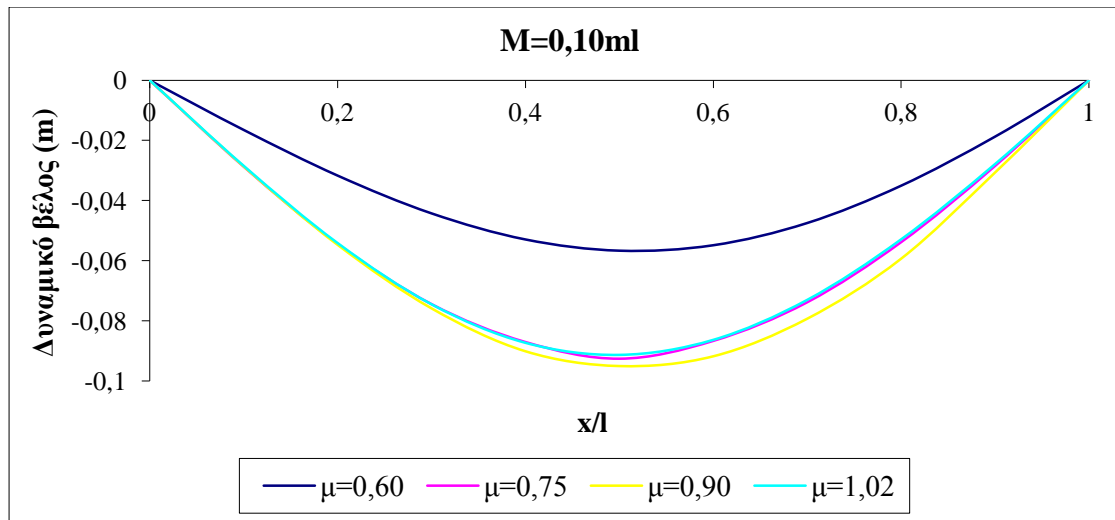
Σχήμα 5.7 Απόκριση της γέφυρας στην μεσαία διατομή για κίνηση οχήματος μάζας 27,64ton με διάφορες ταχύτητες.



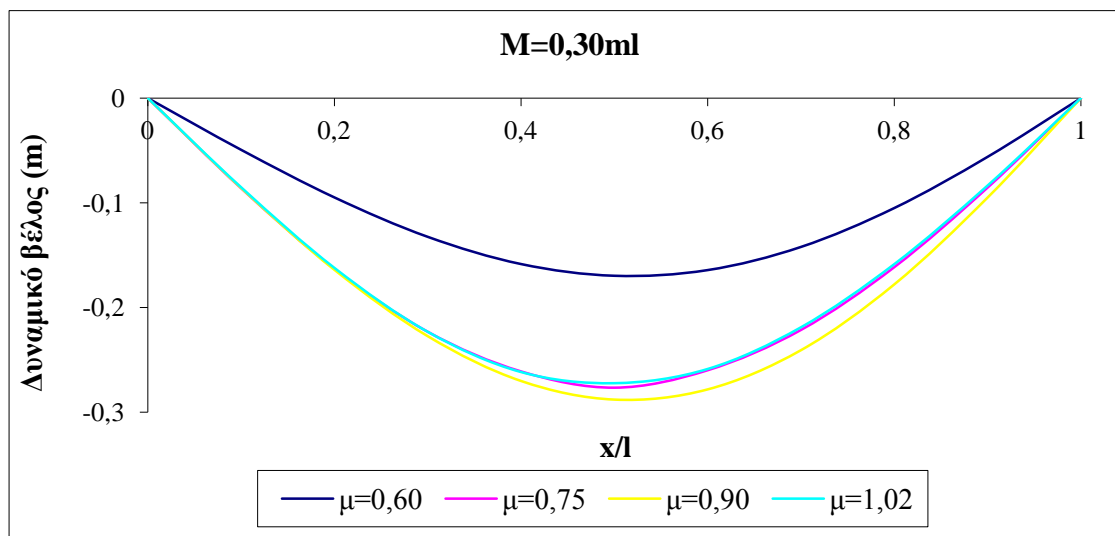
Σχήμα 5.8 Απόκριση της γέφυρας στην μεσαία διατομή για κίνηση οχήματος μάζας 45,58ton με διάφορες ταχύτητες.



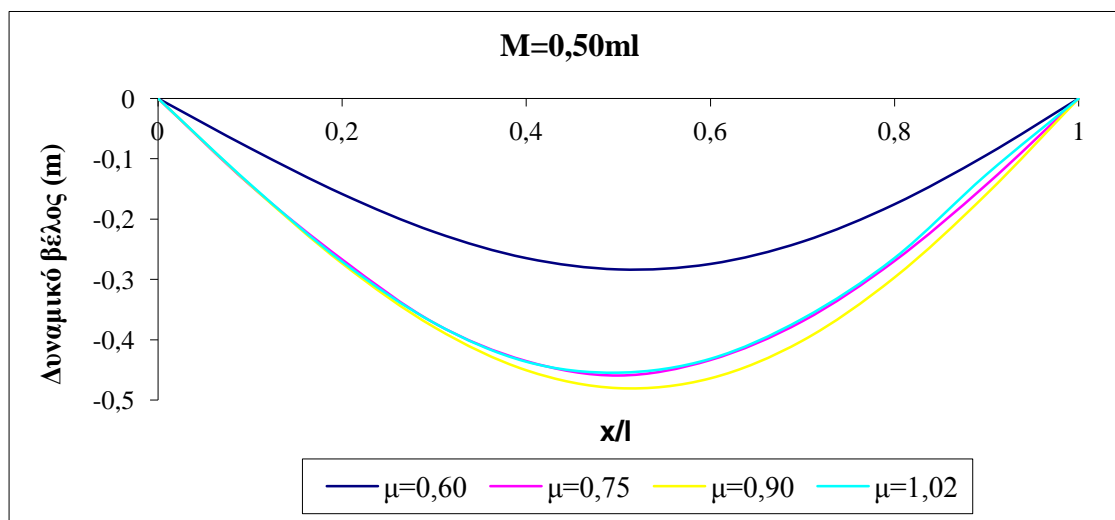
Σχήμα 5.9 Απόκριση της γέφυρας στην μεσαία διατομή για κίνηση οχήματος μάζας 72,91ton με διάφορες ταχύτητες.



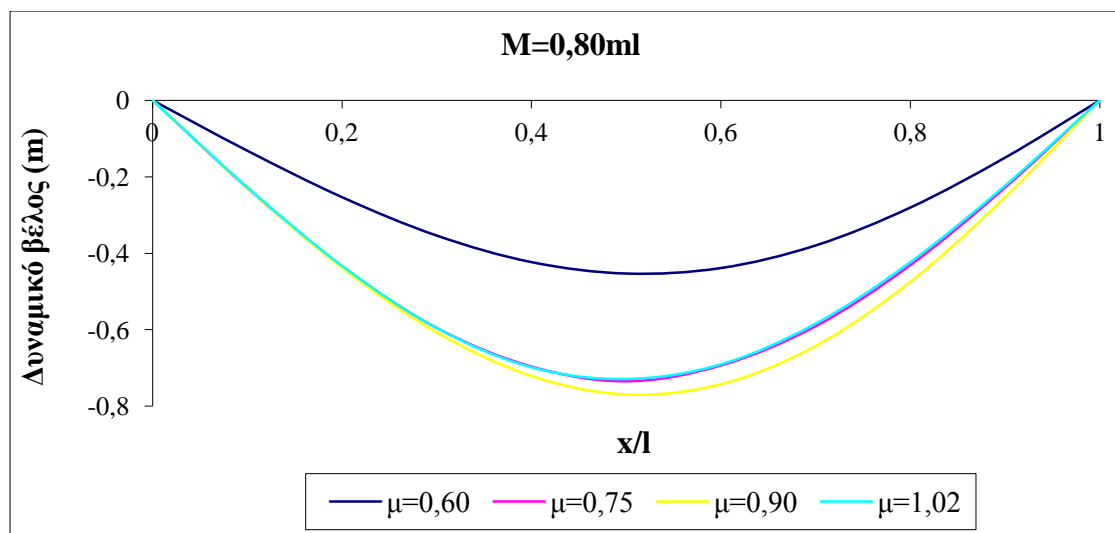
Σχήμα 5.10 Το σχήμα της γέφυρας τη στιγμή που το όχημα μάζας $M=0,10ml$, κινούμενο με διάφορες ταχύτητες, εξέρχεται από αυτήν.



Σχήμα 5.11 Το σχήμα της γέφυρας τη στιγμή που το όχημα μάζας $M=0,30ml$, κινούμενο με διάφορες ταχύτητες, εξέρχεται από αυτήν.



Σχήμα 5.12 Το σχήμα της γέφυρας τη στιγμή που το όχημα μάζας $M=0,50ml$, κινούμενο με διάφορες ταχύτητες, εξέρχεται από αυτήν.



Σχήμα 5.13 Το σχήμα της γέφυρας τη στιγμή που το όχημα μάζας $M=0,80ml$, κινούμενο με διάφορες ταχύτητες, εξέρχεται από αυτήν.

Τα αποτελέσματα της δυναμικής απόκρισης της μεσαίας διατομής της γέφυρας, με το πρόγραμμα Sap2000, συνυπολογίζοντας την πρώτη κανονική μορφή είναι όμοια με αυτά του κεφαλαίου τέσσερα με την θεώρηση κινητού φορτίου. Το δυναμικό βέλος της αμφιέριστης γέφυρας αυξάνεται ανάλογα με την αύξηση της μάζας του κινούμενου οχήματος. Το σχήμα της δοκού την στιγμή εξόδου του οχήματος από αυτήν είναι περίπου το ίδιο για $\mu > 0,75$ μόνο που εάν $\mu > 1$ η βύθιση συνεχίζει να μεγαλώνει, ενώ αν $\mu < 1$ μικραίνει. Το μεγαλύτερο βέλος της δοκού την στιγμή εξόδου εμφανίζεται για ταχύτητες οι οποίες πλησιάζουν την κρίσιμη.

6 Βιβλιογραφία

1. Αναστασιάδης Κ.,(1983). «Δυναμική των κατασκευών». Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.
2. Κατσικαδέλης Ι.Θ.,(2002). «Δυναμική των κατασκευών». Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα.
3. Κουνάδης Α.,(1989).«Δυναμική των συνεχών ελαστικών συστημάτων». Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα.
4. Μιχάλτσος Γ., (2005). «Προβλήματα δυναμικής των σιδηρών γεφυρών». Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα.
5. Chopra, Anil K.,(1989).«Δυναμική των κατασκευών». Εκδόσεις Γκιούρδας, Αθήνα.
6. Clough R. W., Penzien J.,(2003).«Δυναμική των κατασκευών». Εκδόσεις Φούντας, Αθήνα.
7. EN 1992-2 , (2003). «Ευρωκώδικας 1 –Δράσεις Μέρος 2^ο : Φορτία κυκλοφορίας σε γέφυρες».
8. Roy R. Craig, Jr. (1981).«Structural dynamics an introduction to computer methods». John Wiley & Sons, New York.

7 Κατάλογος σχημάτων

	<u>Σελίδα</u>
Σχήμα 2.1: Η γέφυρα του Quebec στον Καναδά στην φάση κατασκευής	13
Σχήμα 2.2: Η κατάρρευση της γέφυρας Tacoma στις Η.Π.Α.	14
Σχήμα 3.1: Μεταβολή του δυναμικού συντελεστή μεγεθύνσεως συναρτήσει της απόσβεσης και του λόγου συχνοτήτων.	23
Σχήμα 3.2: Απόκριση συστήματος ελεύθερης ταλάντωσης με κρίσιμη απόσβεση.	24
Σχήμα 3.3: Απόκριση συστήματος ελεύθερης ταλάντωσης με υποκρίσιμη απόσβεση για διάφορες τιμές του λόγου αποκρίσεως ξ .	25
Σχήμα 3.4: Απόκριση συστήματος ελεύθερης ταλάντωσης με υπερκρίσιμη απόσβεση.	26
Σχήμα 3.5: Χρονική εξέλιξη του λόγου αποκρίσεως στην περίπτωση συντονισμού χωρίς απόσβεση ($D \rightarrow 1/2\xi$ όταν $t \rightarrow \infty$).	27
Σχήμα 3.6: Χρονική εξέλιξη του λόγου αποκρίσεως στην περίπτωση συντονισμού με απόσβεση ($D \rightarrow 1/2\xi$ όταν $t \rightarrow \infty$).	27
Σχήμα 3.7: Διάνυσμα θέσεως υλικού σημείου τη χρονική στιγμή t .	30
Σχήμα 3.8: Διάγραμμα ροής για τον καθορισμό του κατά πόσο απαιτείται δυναμική ανάλυση.	32
Σχήμα 3.9: Όριο ιδιοσυχνοτήτων η_0 [Hz] ως συνάρτηση του ανοίγματος L [m] μίας γέφυρας.	34
Σχήμα 3.10: Συμπληρωματική απόσβεση $\Delta\zeta$ [%] ως συνάρτηση του μήκους του ανοίγματος L [m].	44
Σχήμα 4.1: Υλικό σημείο μάζας M κινούμενο επί αμφιέρειστης δοκού.	48
Σχήμα 4.2: Διάγραμμα ελεύθερου σώματος για την συγκεντρωμένη μάζα (M, J) στην περίπτωση (α) ισορροπίας τεμνουσών δυνάμεων και (β) ισορροπίας ροπών.	50
Σχήμα 4.3: Γραφική παράσταση της ορίζουσας σε συνάρτηση με το λ .	52
Σχήμα 4.4: Διατομή αμφιέρειστης δοκού κιβωτιοειδούς διατομής.	56
Σχήμα 4.5: Γραφική απεικόνιση του τετραγώνου της θεμελιώδους ιδιοσυχνότητας, επί της οποίας κινείται μάζα M , με $J=0$.	57
Σχήμα 4.6: Γραφική απεικόνιση του τετραγώνου της θεμελιώδους ιδιοσυχνότητας, επί της οποίας κινείται μάζα M , με $J \neq 0$.	58

Σχήμα 4.7: Η συνάρτηση χρόνου για διάφορες ταχύτητες και $M=0,10\text{ml}$, $J=0$ με τη θεώρηση κινητής μάζας.	60
Σχήμα 4.8: Η συνάρτηση χρόνου για διάφορες ταχύτητες και $M=0,30\text{ml}$, $J=0$ με τη θεώρηση κινητής μάζας.	61
Σχήμα 4.9: Η συνάρτηση χρόνου για διάφορες ταχύτητες και $M=0,50\text{ml}$, $J=0$ με τη θεώρηση κινητής μάζας.	61
Σχήμα 4.10: Η συνάρτηση χρόνου για διάφορες ταχύτητες και $M=0,80\text{ml}$, $J=0$ με τη θεώρηση κινητής μάζας.	61
Σχήμα 4.11: Η συνάρτηση χρόνου για διάφορες ταχύτητες και $M=0,10\text{ml}$, $J=M$ με τη θεώρηση κινητής μάζας.	62
Σχήμα 4.12: Η συνάρτηση χρόνου για διάφορες ταχύτητες και $M=0,30\text{ml}$, $J=M$ με τη θεώρηση κινητής μάζας.	62
Σχήμα 4.13: Η συνάρτηση χρόνου για διάφορες ταχύτητες και $M=0,50\text{ml}$, $J=M$ με τη θεώρηση κινητής μάζας.	62
Σχήμα 4.14: Η συνάρτηση χρόνου για διάφορες ταχύτητες και $M=0,80\text{ml}$, $J=M$ με τη θεώρηση κινητής μάζας.	63
Σχήμα 4.15: Η συνάρτηση χρόνου για διάφορες ταχύτητες και $M=0,10\text{ml}$, με τη θεώρηση κινητού φορτίου.	64
Σχήμα 4.16: Η συνάρτηση χρόνου για διάφορες ταχύτητες και $M=0,30\text{ml}$, με τη θεώρηση κινητού φορτίου.	64
Σχήμα 4.17: Η συνάρτηση χρόνου για διάφορες ταχύτητες και $M=0,50\text{ml}$, με τη θεώρηση κινητού φορτίου.	65
Σχήμα 4.18: Η συνάρτηση χρόνου για διάφορες ταχύτητες και $M=0,80\text{ml}$, με τη θεώρηση κινητού φορτίου.	65
Σχήμα 4.19: Σύγκριση συναρτήσεων χρόνου για $M=0,10\text{ml}$, $J=0$ και ταχύτητα οχήματος (α)200km/hr (β)250km/hr (γ)300km/hr (δ)340km/hr.	66
Σχήμα 4.20: Σύγκριση συναρτήσεων χρόνου για $M=0,30\text{ml}$, $J=0$ και ταχύτητα οχήματος (α)200km/hr (β)250km/hr (γ)300km/hr (δ)340km/hr.	66
Σχήμα 4.21: Σύγκριση συναρτήσεων χρόνου για $M=0,50\text{ml}$, $J=0$ και ταχύτητα οχήματος (α)200km/hr (β)250km/hr (γ)300km/hr (δ)340km/hr.	67

- Σχήμα 4.22: Σύγκριση συναρτήσεων χρόνου για $M=0,80\text{ml}$, $J=0$ και ταχύτητα οχήματος (α)200km/hr (β)250km/hr (γ)300km/hr (δ)340km/hr. 67
- Σχήμα 4.23: Σύγκριση συναρτήσεων χρόνου για $M=0,10\text{ml}$, $J=M$ και ταχύτητα οχήματος (α)200km/hr (β)250km/hr (γ)300km/hr (δ)340km/hr. 68
- Σχήμα 4.24: Σύγκριση συναρτήσεων χρόνου για $M=0,30\text{ml}$, $J=M$ και ταχύτητα οχήματος (α)200km/hr (β)250km/hr (γ)300km/hr (δ)340km/hr. 68
- Σχήμα 4.25: Σύγκριση συναρτήσεων χρόνου για $M=0,50\text{ml}$, $J=M$ και ταχύτητα οχήματος (α)200km/hr (β)250km/hr (γ)300km/hr (δ)340km/hr. 69
- Σχήμα 4.26: Σύγκριση συναρτήσεων χρόνου για $M=0,80\text{ml}$, $J=M$ και ταχύτητα οχήματος (α)200km/hr (β)250km/hr (γ)300km/hr (δ)340km/hr. 69
- Σχήμα 4.27: Η μεταβολή του λόγου των βυθίσεων με την θεώρηση κινητής μάζας και φορτίου, στην μεσαία διατομή της γέφυρας, την στιγμή εξόδου του σώματος ($J=0$). 70
- Σχήμα 4.28: Η μεταβολή του λόγου των βυθίσεων με την θεώρηση κινητής μάζας και φορτίου, στην μεσαία διατομή της γέφυρας, την στιγμή εξόδου του σώματος ($J=M$). 70
- Σχήμα 4.29: Η μεταβολή του λόγου των μέγιστων βυθίσεων με την θεώρηση κινητής μάζας και φορτίου, στην μεσαία διατομή της γέφυρας, για $J=0$. 71
- Σχήμα 4.30: Η μεταβολή του λόγου των μέγιστων βυθίσεων με την θεώρηση κινητής μάζας και φορτίου, στην μεσαία διατομή της γέφυρας, για $J=M$. 71
- Σχήμα 5.1: (α)μονοδιάστατα(β)δισδιάστατα και (γ)τριδιάστατα στοιχεία για την διακριτοποίηση του φορέα κατά την ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία. 74
- Σχήμα 5.2: Διατομή αμφιέρειστης γέφυρας κιβωτιοειδούς διατομής στο Sap2000. 79
- Σχήμα 5.3: Η απαραμόρφωτη αμφιέρειστη γέφυρα στο λογισμικό Sap2000. 80

Σχήμα 5.4:Το μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων δοκού με συγκεντρωμένες τις μάζες του κάθε στοιχείου.	80
Σχήμα 5.5:Η θέση του οχήματος, το οποίο κινείται με ταχύτητα 198km/hr, την χρονική στιγμή $t=0,47\text{sec}$.	81
Σχήμα 5.6:Απόκριση της γέφυρας στην μεσαία διατομή για κίνηση οχήματος μάζας 9,11ton με διάφορες ταχύτητες.	81
Σχήμα 5.7:Απόκριση της γέφυρας στην μεσαία διατομή για κίνηση οχήματος μάζας 27,64ton με διάφορες ταχύτητες.	82
Σχήμα 5.8:Απόκριση της γέφυρας στην μεσαία διατομή για κίνηση οχήματος μάζας 45,58ton με διάφορες ταχύτητες.	82
Σχήμα 5.9:Απόκριση της γέφυρας στην μεσαία διατομή για κίνηση οχήματος μάζας 72,91ton με διάφορες ταχύτητες.	82
Σχήμα 5.10:Το σχήμα της γέφυρας τη στιγμή που το όχημα μάζας $M=0,10\text{ml}$, κινούμενο με διάφορες ταχύτητες, εξέρχεται από αυτήν.	83
Σχήμα 5.11:Το σχήμα της γέφυρας τη στιγμή που το όχημα μάζας $M=0,30\text{ml}$, κινούμενο με διάφορες ταχύτητες, εξέρχεται από αυτήν.	83
Σχήμα 5.12:Το σχήμα της γέφυρας τη στιγμή που το όχημα μάζας $M=0,50\text{ml}$, κινούμενο με διάφορες ταχύτητες, εξέρχεται από αυτήν.	83
Σχήμα 5.13:Το σχήμα της γέφυρας τη στιγμή που το όχημα μάζας $M=0,80\text{ml}$, κινούμενο με διάφορες ταχύτητες, εξέρχεται από αυτήν.	84

8 Κατάλογος πινάκων

	<u>Σελίδα</u>
Πίνακας 3.1: Μέγιστη τιμή του $(v/n_0)_{lim}$ για αμφιέρειστη δοκό ή πλάκα και μέγιστη επιτρεπόμενη επιτάχυνση $a_{max} < 5,0 \text{ m/s}^2$.	33
Πίνακας 3.2: Καθοριστικά μήκη L_{Φ}	37
Πίνακας 3.3: Τιμές της απόσβεσης που θα λαμβάνονται υπόψη στον σχεδιασμό.	42
Πίνακας 4.1: Οι χαρακτηριστικές τιμές λ ανά πέντε μέτρα για $M=0,10\text{ml}$, $J=0$.	52
Πίνακας 4.2: Οι χαρακτηριστικές τιμές λ ανά πέντε μέτρα για $M=0,30\text{ml}$, $J=0$.	53
Πίνακας 4.3: Οι χαρακτηριστικές τιμές λ ανά πέντε μέτρα για $M=0,50\text{ml}$, $J=0$.	53
Πίνακας 4.4: Οι χαρακτηριστικές τιμές λ ανά πέντε μέτρα για $M=0,80\text{ml}$, $J=0$.	53
Πίνακας 4.5: Οι χαρακτηριστικές τιμές λ ανά πέντε μέτρα για $M=0,10\text{ml}$, $J/M=5$.	54
Πίνακας 4.6: Οι χαρακτηριστικές τιμές λ ανά πέντε μέτρα για $M=0,30\text{ml}$, $J/M=15$.	54
Πίνακας 4.7: Οι χαρακτηριστικές τιμές λ ανά πέντε μέτρα για $M=0,50\text{ml}$, $J/M=25$.	54
Πίνακας 4.8: Οι χαρακτηριστικές τιμές λ ανά πέντε μέτρα για $M=0,80\text{ml}$, $J/M=40$.	55
Πίνακας 4.9: Τιμές των σταθερών των εξισώσεων σχήματος για $M=0,10\text{ml}$ και $J=0$.	55
Πίνακας 4.10: Τιμές των σταθερών των εξισώσεων σχήματος για $l_1=l_2=25\text{m}$.	56