



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΠΛΑΣΜΑΤΟΣ, ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ ΔΕΣΜΗΣ ΚΑΙ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ  
ΟΠΤΙΚΗΣ (Σχολής ΗΜΜΥ)

Χαμιλτονιανή δυναμική φορτισμένων σωματιδίων σε  
πολύπλοκες μαγνητικές τοπολογίες

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

Νικολάου Α. Βέργου

Επιβλέπων: Κυριάκος Χιτζανίδης  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2009





ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΠΛΑΣΜΑΤΟΣ, ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ ΔΕΣΜΗΣ ΚΑΙ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ  
ΟΠΤΙΚΗΣ (Σχολής ΗΜΜΥ)

Χαμιλτονιανή δυναμική φορτισμένων σωματιδίων σε  
πολύπλοκες μαγνητικές τοπολογίες

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

Νικολάου Α. Βέργου

Επιβλέπων: Κυριάκος Χιτζανίδης  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 10η Ιουλίου 2009.

.....  
Κυριάκος Χιτζανίδης  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....  
Ιωάννης Ρουμελιώτης  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....  
Εμμανουήλ Δρής  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2009

.....  
**Νικόλαος Α. Βέργος**

Διπλωματούχος Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών Ε.Μ.Π.

© 2009 Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. All rights reserved.

# Περίληψη

Αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη της κίνησης μεμονωμένων φορτισμένων σωματιδίων σε διάφορες μαγνητικές γεωμετρίες αυξανόμενης πολυπλοκότητας. Το βασικό ερέθισμα που οδήγησε στην ανάγκη για αυτή την προσέγγιση είναι ένα βασικό πρόβλημα της Φυσικής Πλάσματος: η μαγνητική συγκράτηση (Magnetic Confinement) των ηλεκτρονίων και των ιόντων που απαρτίζουν το θερμοπυρηνικό πλάσμα σε αντιδραστήρες πυρηνικής σύντηξης, με σκοπό την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας. Όπως θα δούμε, ο βέλτιστος τρόπος περιορισμού του πλάσματος είναι μέσω πολύπλοκων τοπολογικών μαγνητικών πεδίων.

Στο Κεφάλαιο 1 γίνεται μια γενική εισαγωγή στη Φυσική του Πλάσματος και αναφερόμαστε περιληπτικά στους τρεις διαφορετικούς τρόπους περιγραφής: τη μελέτη της δυναμικής μεμονωμένων φορτισμένων σωματιδίων, την προσέγγιση ρευστού και τη στατιστική θεώρηση μέσω της κινητικής θεωρίας.

Στο Κεφάλαιο 2 επικεντρωνόμαστε στην κλασική μελέτη της δυναμικής φορτισμένων σωματιδίων μέσω της νευτώνειας δυναμικής και της μηχανικής Lagrange - Hamilton. Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση του κέντρου περιστροφής μελετάμε την ελικοειδή κίνηση ενός φορτισμένου σωματιδίου γύρω από τις μαγνητικές γραμμές και κατά μήκος του πεδίου για απλές περιπτώσεις. Αναφερόμαστε στις διάφορων ειδών ανομοιογένειες στη μαγνητική γεωμετρία και στις ολισθήσεις που προκύπτουν λόγω αυτών. Στη συνέχεια εισάγουμε τις μεθόδους της Χαμιλτονιανής Μηχανικής με σκοπό να εκμεταλλευτούμε πλήρως τις χωρικές συμμετρίες στα μαγνητικά πεδία τα οποία μελετάμε και να εξάγουμε σταθερές της κίνησης. Εφ' όσον οι κινήσεις των σωματιδίων παρουσιάζουν περιοδικότητα, συζητάμε για τις *αδιαβατικές αναλλοίωτες* και τις μεταβλητές Δράσης - Γωνίας σε χαμιλτονιανά συστήματα.

Το Κεφάλαιο 3 περιέχει τη μελέτη της χαμιλτονιανής δυναμικής φορτισμένων σωματιδίων σε δεδομένες τοπολογίες: (α) εξωτερικά επιβαλλόμενα μαγνητικά και ηλεκτρικά πεδία και (β) μαγνητικά πεδία επαγόμενα από ηλεκτρικά

ρεύματα, και συγκεκριμένα από ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό, από επίπεδο κυκλικό ρευματοφόρο βρόχο και την υπέρθεση αυτών.

Στο Κεφάλαιο 4 εκτελούνται αριθμητικές προσομοιώσεις για την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων κίνησης των σωματιδίων μέσω μεθόδων Runge - Kutta 4ης τάξης σε όλα τα φυσικά συστήματα του προηγούμενου Κεφαλαίου. Παρατίθενται γραφήματα ενδεικτικών τροχιών για μεμονωμένα φορτισμένα σωματίδια, ενώ επισημαίνονται οι περιοδικές τους κινήσεις σε χαοτικά μαγνητικά πεδία που προκύπτουν από μη συμμετρικές κατανομές ρεύματος.

Τέλος, στα παραρτήματα της διπλωματικής εργασίας παρατίθενται: (α) η αναλυτική εξαγωγή των εκφράσεων του μαγνητικού πεδίου που επάγεται από κυκλικό βρόχο ρεύματος σε κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων και (β) οι κώδικες των αριθμητικών προσομοιώσεων του Κεφαλαίου 4 σε MATLAB και Fortran για τη σχεδίαση των πεδιακών γραμμών και των τροχιών των φορτισμένων σωματιδίων.

# Abstract

The main subject of this diploma thesis is the study of charged particles' motion in various magnetic geometries of progressive complexity. The initial stimulation that led to this approach is a fundamental problem of Plasma Physics: the magnetic confinement of the electrons and the ions that comprise the thermonuclear plasma in nuclear fusion reactions, aiming to produce energy. As we will see, the optimal method for plasma confinement is through complex magnetic fields topologies.

In Chapter 1 there is a general introduction to Plasma Physics and a brief description of the three approaches of plasma description: the study of single charged particle motion, the fluid dynamics approach and the statistical view through the kinetic theory.

In Chapter 2 we focus to the classical study of charged particle motion through Newtonian dynamics and Lagrange - Hamilton mechanics. Using the guiding center approximation we study the helical motion of a charged particle around the magnetic field lines and along the field for simple cases. We refer to the various inhomogeneities in the magnetic geometry and the resulting occurring drifts. Furthermore, we introduce the Hamiltonian methods so as to fully take advantage of the spatial symmetries in the magnetic fields, and extract constants of motion. Due to the periodicity in particle motion we discuss the adiabatic invariants and the Action - Angle variables in Hamiltonian systems.

Chapter 3 includes the study of charged particles hamiltonian dynamics in given topologies: (a) externally imposed magnetic and electric fields and (b) magnetic fields induced due to electric currents, and particularly due to a straight current-carrying wire, a circular planar current loop and their superposition.

In Chapter 4 we execute numerical simulations in order to solve the differential equations of motion with 4th order Runge - Kutta methods in all physical systems of the previous chapter. Plots of illustrative trajectories for single charged particles are presented, while we also remark their periodical motion in chaotic magnetic fields due to asymmetric current configurations.

Last, in the appendices of this diploma thesis we present: (a) the analytical extraction of the magnetic field expressions for a current loop in cylindrical coordinates and (b) the MATLAB and Fortran codes for the nu-

merical simulations of Chapter 4: design of magnetic field lines and indicative trajectories of charged particles.



# Ευχαριστίες

Ολοκληρώνοντας αυτή τη διπλωματική εργασία, νιώθω την ανάγκη να ευχαριστήσω κάποιους ανθρώπους, η συμβολή των οποίων ήταν καθοριστική. Αρχικά θέλω να ευχαριστήσω τα μέλη της εξεταστικής επιτροπής για την απόφαση να δεχθούν αυτό το ρόλο, και ιδιαίτερα τον επιβλέποντα Καθηγητή μου, κ. Κυριάκο Χιτζανίδη που μου ανέθεσε το συγκεκριμένο θέμα, ανοίγοντάς μου ένα παράθυρο στο συναρπαστικό τομέα της Φυσικής του Πλάσματος και της Ελεγχόμενης Θερμοπυρηνικής Σύντηξης. Η αρωγή του καθ' όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της εργασίας ήταν αποφασιστική, τόσο σε επιστημονικό, όσο και σε προσωπικό επίπεδο, και για αυτό ένα 'ευχαριστώ' είναι πολύ λίγο.

Είμαι ιδιαίτερα περήφανος που εργάστηκα στον ίδιο χώρο του *Εργαστηρίου Πλάσματος, Ηλεκτρονικής Δέσμης και Μη Γραμμικής Οπτικής* του Ε.Μ.Π. με εξαιρετικούς ανθρώπους όπως τους μεταδιδακτορικούς ερευνητές Γιάννη Κομίνη, Χρήστο Τσιρώνη, Κώστα Αβραμίδα και Ingmar Sandberg, καθώς και τους υποψήφιους διδάκτορες Γιώργο Αναστασίου και Νίκο Μοσχονά, οι οποίοι ανέχθηκαν τις πολλές απορίες μου, με βοήθησαν σε κάθε πρόβλημα που ανέκυπτε και με έκαναν από την πρώτη στιγμή να αισθανθώ ισότιμο μέλος της ομάδας. 'Λυπάμαι' που φεύγω για μεταπτυχιακές σπουδές, επειδή θα χάσω αυτή τη μοναδική καθημερινή ατμόσφαιρα στο Εργαστήριο. Τέλος, ευχαριστώ τον Δρ. Αναστάσιο Αναστασιάδη, διευθυντή ερευνών του Ινστιτούτου Διαστημικών Εφαρμογών και Τηλεπισκόπησης του Εθνικού Αστεροσκοπείου Αθηνών για τις συμβουλές που δίνει με έναν ξεχωριστό τρόπο.

I would particularly like to thank Prof. Dr. Abhay Ram of the Plasma Science and Fusion Center of the M.I.T. for his keen interest on my progress and his invaluable advice and support concerning both my diploma thesis and my pursuit of graduate studies in the field of Plasma Physics in the United States.

Επίσης θα ήθελα να εκφράσω απερίφραστα την ευγνωμοσύνη μου προς το *Εθνικό Πρόγραμμα Ελεγχόμενης Θερμοπυρηνικής Σύντηξης* και τον επιστη-

μονικό του υπεύθυνο, Καθηγητή κ. Ιωάννη Βομβορίδη για την ευκαιρία που μου προσέφεραν να παρακολουθήσω το 35ο EPS Conference on Plasma Physics στην Κρήτη τον Ιούνιο του 2008 και το συνέδριο Modern Challenges in Nonlinear Plasma Physics στη Χαλκιδική τον Ιούνιο του 2009. Η 'ώσμωση' με ό,τι πιο σύγχρονο στον τομέα της Φυσικής Πλάσματος μου έδωσε την ευκαιρία να διευρύνω τις γνώσεις μου και να αποκτήσω μια σφαιρικότερη εικόνα.

Σε πιο προσωπικό επίπεδο, θέλω να ευχαριστήσω από καρδιάς την οικογένειά μου για τη στήριξη σε ηθικό και υλικό επίπεδο όλα αυτά τα χρόνια. Χωρίς αυτούς, τίποτε από όλα αυτά δε θα μπορούσε να γίνει πραγματικότητα. Το ελάχιστο που μπορώ να κάνω είναι να τους αφιερώσω τη αυτή τη διπλωματική εργασία.

Ολοκληρώνω εκφράζοντας τις ειλικρινείς μου ευχαριστίες στους φίλους μου από το Ε.Μ.Π. και όχι μόνο, γιατί έχουν σημαντικότερο μερίδιο σε ό,τι έχω πετύχει: πίστεψαν σε εμένα, ακόμα και σε καιρούς που εγώ ο ίδιος δεν πίστευα ότι θα τα καταφέρω - και για αυτό το λόγο τους ευχαριστώ.

# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>3</b>
1.1	Η θερμοπυρηνική σύντηξη ως ριζική λύση . . . . .	4
1.2	Στοιχεία Φυσικής Πλάσματος . . . . .	6
1.2.1	Περιγραφή μέσω μη αλληλεπιδρώντων σωματιδίων . . . . .	9
1.2.2	Μοντέλο ενός ή πολλών ρευστών . . . . .	15
1.2.3	Κινητική θεωρία . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Δυναμική Φορτισμένων Σωματιδίων</b>	<b>25</b>
2.1	Νευτώνεια Δυναμική . . . . .	26
2.1.1	Στατικό και Ομογενές Μαγνητικό Πεδίο $\mathbf{B} = B\hat{z}$ . . . . .	27
2.1.2	Στατικό και Ομογενές Μαγνητικό Πεδίο παρουσία σταθερής εξωτερικής δύναμης ( $\mathbf{B} = B\hat{z}$ , $\mathbf{F} = \text{σταθ.}$ ) . . . . .	30
2.1.3	Ασθενώς Μη Ομογενές Στατικό Μαγνητικό Πεδίο . . . . .	34
2.1.4	Σύνοψη για τις ανομοιογένειες . . . . .	41
2.1.5	Τα όρια της προσέγγισης κέντρου περιστροφής . . . . .	42
2.2	Μηχανική Lagrange - Hamilton . . . . .	44
2.2.1	Η εξίσωση Hamilton - Jacobi . . . . .	46
2.2.2	Χώρος Φάσεων . . . . .	49
2.2.3	Μεταβλητές Δράσης - Γωνίας σε συστήματα ενός βαθμού ελευθερίας . . . . .	54
2.2.4	Αδιαβατικές Αναλλοίωτες . . . . .	58
2.3	Ισοδυναμία Νευτώνειας Δυναμικής με φορμαλισμό Lagrange - Hamilton . . . . .	65
<b>3</b>	<b>Μαγνητικές Τοπολογίες</b>	<b>69</b>
3.1	Ομογενές Μαγνητικό Πεδίο $\mathbf{B} = B\hat{z}$ . . . . .	70
3.2	Μαγνητικό Πεδίο επαγόμενο από ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό . . . . .	73
3.2.1	Κυλινδρικό Σύστημα Συντεταγμένων $(r, \varphi, z)$ . . . . .	74
3.2.2	Σφαιρικό Σύστημα Συντεταγμένων $(r, \vartheta, \varphi)$ . . . . .	80

3.3	Κυκλικός Ρευματοφόρος Βρόχος (Current Loop) . . . . .	86
3.3.1	Ο ρευματοφόρος βρόχος ως μαγνητικό δίπολο . . . . .	86
3.3.2	Ακριβής υπολογισμός . . . . .	93
3.4	Υπέρθωση κυκλικού βρόχου και ευθύγραμμου ρευματοφόρου α- γωγού . . . . .	96
3.5	Εξισώσεις κίνησης . . . . .	98
<b>4</b>	<b>Αριθμητικοί Υπολογισμοί</b>	<b>101</b>
4.1	Μέθοδος Runge - Kutta στις τρεις διαστάσεις . . . . .	101
4.2	Σχεδίαση πεδιακών γραμμών για διάφορες μαγνητικές τοπολογίες	104
4.3	Μοντελοποίηση κίνησης σωματιδίου σε Ηλεκτρικό - Μαγνητικό Πεδίο . . . . .	106
4.3.1	Στατικό και Ομογενές Μαγνητικό Πεδίο $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$ . . . . .	106
4.3.2	Ολίσθηση $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ . . . . .	109
4.3.3	Στατικό και Ομογενές Μαγνητικό Πεδίο $\mathbf{B} = B_y\hat{\mathbf{y}} + B_z\hat{\mathbf{z}}$	111
4.4	Σχετικιστική κίνηση . . . . .	114
4.4.1	Κίνηση σχετικιστικού φορτισμένου σωματιδίου σε Στα- τικό Ηλεκτρικό και Μαγνητικό Πεδίο . . . . .	115
4.4.2	Κίνηση σε πεδίο μαγνητικού διπόλου . . . . .	117
4.5	Μη συμμετρικές κατανομές ρεύματος - Χαστικά μαγνητικά πεδία	118
<b>5</b>	<b>Συμπεράσματα</b>	<b>123</b>
<b>A'</b>	<b>Μαγνητικό Πεδίο κυκλικού βρόχου - κυλινδρικές συντε- ταγμένες</b>	<b>125</b>
<b>B'</b>	<b>Κώδικες στο MATLAB και τη Fortran</b>	<b>133</b>
B'.1	Σχεδίαση Πεδιακών Γραμμών . . . . .	133
B'.2	Κώδικες Fortran - Αριθμητική Ολοκλήρωση Runge - Kutta . .	141

# Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Η αντίδραση σύντηξης δευτερίου - τριτίου . . . . .	5
2.1	Τροχιές Larmor . . . . .	30
2.2	Ολίσθηση $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ . . . . .	34
2.3	Μαγνητικός Καθρέφτης . . . . .	38
2.4	Τροχιές στο χώρο των φάσεων . . . . .	50
2.5	Διαδρομή ολοκλήρωσης για το ολοκλήρωμα δράσης . . . . .	51
4.1	Πεδιακές Γραμμές Μαγνητικού Πεδίου ευθύγραμμου ρευματοφόρου αγωγού $I_W$ . . . . .	104
4.2	Πεδιακές Γραμμές Μαγνητικού Πεδίου επίπεδου ρευματοφόρου βρόχου $I_L$ . . . . .	105
4.3	Υπέρθωση Πεδίων $\mathbf{B}_W$ και $\mathbf{B}_L$ - κάθετα και στο κέντρο . . . . .	105
4.4	Τροχιά φορτισμένου σωματιδίου σε στατικό μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$ - περίπτωση 1 . . . . .	107
4.5	Τροχιά φορτισμένου σωματιδίου σε στατικό μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$ - περίπτωση 2 . . . . .	107
4.6	Τροχιά φορτισμένου σωματιδίου σε στατικό μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$ - περίπτωση 3 . . . . .	108
4.7	Τροχιά φορτισμένου σωματιδίου σε στατικό μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$ και σταθερό ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E} = E_x\hat{\mathbf{x}} + E_y\hat{\mathbf{y}}$ - περίπτωση 1 . . . . .	110
4.8	Τροχιά φορτισμένου σωματιδίου σε στατικό μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$ και σταθερό ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E} = E_x\hat{\mathbf{x}} + E_y\hat{\mathbf{y}}$ - περίπτωση 2 . . . . .	110
4.9	Τροχιά φορτισμένου σωματιδίου σε στατικό μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$ και σταθερό ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E} = E_x\hat{\mathbf{x}} + E_y\hat{\mathbf{y}}$ - περίπτωση 3 . . . . .	111
4.10	Τροχιά φορτισμένου σωματιδίου σε στατικό μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B} = B_y\hat{\mathbf{y}} + B_z\hat{\mathbf{z}}$ - περίπτωση 1 . . . . .	113
4.11	Τροχιά φορτισμένου σωματιδίου σε στατικό μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B} = B_y\hat{\mathbf{y}} + B_z\hat{\mathbf{z}}$ - περίπτωση 1 . . . . .	113

4.12	Τροχιά σχετικιστικού φορτισμένου σωματιδίου σε στατικό μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B} = B_z \hat{\mathbf{z}}$ - περίπτωση 1 . . . . .	116
4.13	Τροχιά σχετικιστικού φορτισμένου σωματιδίου σε στατικό μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B} = B_z \hat{\mathbf{z}}$ και στατικού ηλεκτρικού πεδίου $\mathbf{E} = E_y \hat{\mathbf{y}}$	116
4.14	Τροχιά σχετικιστικού φορτισμένου σωματιδίου σε μαγνητικό πεδίο διπόλου . . . . .	117
4.15	Υπέρθεση $I_L, I_W$ - συμμετρική περίπτωση . . . . .	118
4.16	Τομή Poincaré για τη συμμετρική τοπολογία . . . . .	119
4.17	Υπέρθεση $I_L, I_W$ - μη συμμετρική περίπτωση 1 . . . . .	120
4.18	Υπέρθεση $I_L, I_W$ - μη συμμετρική περίπτωση 2 . . . . .	120
4.19	Περιοδική τροχιά φορτισμένου σωματιδίου που κινείται σε χαοτική περιοχή του μαγνητικού πεδίου . . . . .	121



# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

Τις τελευταίες δεκαετίες παρατηρείται μια ολοένα και εντονότερη στροφή του παγκόσμιου ενδιαφέροντος προς τα ζητήματα της προστασίας του φυσικού περιβάλλοντος. Έχει γίνει κάτι παραπάνω από προφανές ότι η συνεχιζόμενη αύξηση των αναγκών σε ενέργεια και πρώτες ύλες από τις ανεπτυγμένες - αλλά και τις πολυπληθέστατες αναπτυσσόμενες - χώρες και η εξ αυτής προερχόμενη αλόγιστη εκμετάλλευση των φυσικών πόρων, έχουν οδηγήσει σε ραγδαία αποψίλωση των παγκόσμιων αποθεμάτων, μόλυνση του περιβάλλοντος, επικίνδυνες κλιματικές αλλαγές και κατά συνέπεια υποβάθμιση της ποιότητας ζωής των ανθρώπων πάνω στη Γη.

Ολοένα και περισσότερο συζητώνται όροι όπως *Αειφορία* και *Πράσινη Ανάπτυξη* ενώ πολλές επενδύσεις, τόσο δημόσιες όσο και ιδιωτικές γίνονται για αυτό το λόγο στις λεγόμενες *Ανανεώσιμες Πηγές Ενέργειας* - ΑΠΕ (πχ αιολικά πάρκα, φωτοβολταϊκά) ως φιλικότερες προς το περιβάλλον. Παρόλα αυτά προβλέπεται από όλα τα σενάρια ότι οι ανάγκες της ανθρωπότητας σε ενέργεια πρόκειται να αυξηθούν κατακόρυφα με την πάροδο των ετών, καθώς δισεκατομμύρια πληθυσμού στην Κίνα και την Ινδία καλύπτουν με γοργά βήματα την απόσταση που τους χωρίζει από το δυτικό κόσμο - μόνο που, όπως αφήσαμε να εννοηθεί, δεν υπάρχει πλέον η πολυτέλεια στον Πλανήτη για ακόμη μια βαριά βιομηχανική επανάσταση και τις περιβαλλοντικές της συνέπειες.

Αυτός είναι και ο κυριότερος λόγος για τον οποίο αναζητώνται ριζικού χαρακτήρα λύσεις στο ενεργειακό πρόβλημα, για την κάλυψη των σημερινών, αλλά και των μελλοντικών, αναγκών σε ενέργεια με κύριο μέλημα την προστασία της Φύσης, και την προσπάθεια εφαρμογής των φυσικών μεθόδων παραγωγής ενέργειας. Το κοντινότερο παράδειγμα 'φυσικού εργοστασίου' είναι ο Ήλιος, ο οποίος παράγει ενέργεια μέσω αντιδράσεων *θερμοπυρηνικής σύντηξης*.



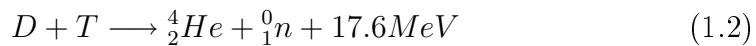
## 1.1 Η θερμοπυρηνική σύντηξη ως ριζική λύση

Η θερμοπυρηνική σύντηξη είναι η θεμελιώδης πηγή ενέργειας του κόσμου. Είναι η διαδικασία που δίνει ενέργεια στον ήλιο και τα αστέρια. Σε μια αντίδραση θερμοπυρηνικής σύντηξης, η ενέργεια απελευθερώνεται όταν συγχωνεύονται οι πυρήνες δύο ελαφριών ατόμων (όπως το υδρογόνο) για να σχηματίσουν ένα βαρύτερο. Φυσικά ο μηχανισμός της παραγωγής ενέργειας μέσω αυτής της οικογένειας πυρηνικών αντιδράσεων είναι η γνωστή εξίσωση της ισοδυναμίας μάζας - ενέργειας του Einstein:

$$E = mc^2 \quad (1.1)$$

Η πηγή αυτή ενέργειας προσφέρει την προοπτική μιας μακροπρόθεσμης, ασφαλούς, φιλικής προς το περιβάλλον επιλογής ώστε να ικανοποιηθούν οι ενεργειακές ανάγκες ενός αυξανόμενου παγκόσμιου πληθυσμού.

Είναι μια ιδιαίτερα ελκυστική ενεργειακή λύση δεδομένου ότι, σε αντίθεση με τις χρησιμοποιούμενες σήμερα αντιδράσεις σχάσης, χρησιμοποιεί καύσιμα που είναι άφθονα ή μπορούν να παρασκευαστούν εύκολα. Τα καύσιμα που χρησιμοποιούνται στη σύντηξη είναι ισότοπα του ελαφρού στοιχείου *υδρογόνου*. Με τη συγχώνευση των ισωτόπων αυτών σε πολύ υψηλές θερμοκρασίες είναι δυνατό να παραχθούν μεγάλα ποσά ενέργειας. Τα ισότοπα του υδρογόνου που χρησιμοποιούνται είναι το *δευτέριο*, που μπορεί να εξαχθεί εύκολα από το νερό (υπάρχουν γύρω στα 30 g δευτερίου σε κάθε κυβικό μέτρο νερού) και το *τρίτιο*, το οποίο μπορεί να παραχθεί από το λίθιο, ένα άφθονο ελαφρύ μέταλλο. Η αντίδραση που προκρίνεται για παραγωγή ενέργειας μέσω σύντηξης στο εργαστήριο είναι η εξής:



Ένα γραμμάριο καυσίμων θερμοπυρηνικής σύντηξης θα μπορούσε να παράγει 100.000 κιλοβατώρες ηλεκτρικής ενέργειας, δηλαδή έχει τη θερμογόνο δύναμη οκτώ τόνων άνθρακα. Το πρόσθετο νετρόνιο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να παράγει περισσότερα καύσιμα τριτίου από το λίθιο.

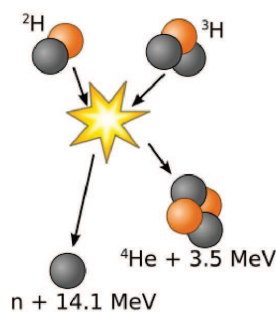
Οι αντιδράσεις θερμοπυρηνικής σύντηξης εμφανίζονται σε πολύ υψηλές θερμοκρασίες, όταν συγκρούονται οι πυρήνες με ικανοποιητική ενέργεια ώστε να υπερνικήσουν τις φυσικές απωστικές ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις. Το μέγιστο της ενεργού διατομής για την αντίδραση  $D - T$  είναι περίπου 100 KeV, ενώ για την επίτευξη της έναυσης (ignition) χρειάζεται ενέργεια μεταξύ 10 και 30 KeV, που αντιστοιχεί σε περίπου 100 εκατομμύρια βαθμούς Κελσίου. Αυτές οι συνθήκες είναι αρκετά παραπάνω από τη θερμοκρασία στην οποία ένα αέριο

ιονίζεται εντελώς και γίνεται **πλάσμα**, η επονομαζόμενη και 'τέταρτη κατάσταση της ύλης'. Σε ένα ιονισμένο πλάσμα οι θετικά φορτισμένοι πυρήνες και τα αρνητικά φορτισμένα ηλεκτρόνια των ατόμων είναι χωρισμένα και κινούνται ελεύθερα, όπως τα μόρια σε ένα αέριο. Περισσότερο από το 99% του σύμπαντος έχει τη μορφή πλάσματος.

Για να φθάσουμε σε τέτοιες θερμοκρασίες, είναι απαραίτητη ισχυρή θέρμανση, ενώ η απώλεια θερμότητας ή μέρους του θερμού πλάσματος πρέπει να περιοριστεί στο ελάχιστο, με συγκράτηση (περιορισμό) του θερμού πλάσματος, είτε με **κατάλληλα ισχυρά μαγνητικά πεδία**, είτε **αδρανειακά**. Αυτό είναι μια εξαιρετικά δύσκολη διαδικασία, τόσο από την άποψη της κατανόησης των σύνθετων φυσικών διαδικασιών που συμβαίνουν σε τέτοιες τιμές της θερμοκρασίας, όσο και από την ανάγκη για περίπλοκες τεχνολογίες.

Η θερμοπυρηνική σύντηξη εμφανίζεται φυσικά στον ήλιο σε θερμοκρασίες 10 - 15 εκατομμυρίων βαθμών Κελσίου, παράγοντας την ενέργεια που στηρίζει τη ζωή στη γη. Εντούτοις, στον ήλιο τα καύσιμα της θερμοπυρηνικής σύντηξης θερμαίνονται και συμπιέζονται από τις τεράστιες δυνάμεις βαρύτητας που επικρατούν εκεί. Στη Γη δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη βαρύτητα, έτσι η πρόκληση για τους ερευνητές της θερμοπυρηνικής σύντηξης είναι να την αντισταθμίσουν με τη θέρμανση ενός πλάσματος χαμηλής πυκνότητας σε μια υψηλότερη θερμοκρασία (περίπου 10 φορές πιο υψηλή από του πυρήνα του ήλιου), με άριστη συγκράτηση του πλάσματος, ώστε να αυτοσυντηρούνται οι αντιδράσεις θερμοπυρηνικής σύντηξης.

Είναι κατανοητό ότι εκ πρώτης όψεως η πυρηνική ενέργεια δε θεωρείται φιλική προς το περιβάλλον, ούτε ανανεώσιμη, και αυτό συμβαίνει λόγω των αντιδράσεων πυρηνικής σχάσης που χρησιμοποιούνται κατά κόρον σήμερα τόσο



Σχήμα 1.1: Η αντίδραση σύντηξης δευτερίου - τριτίου

για την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας, όσο και για την κατασκευή όπλων μεγάλης καταστρεπτικής ισχύος. Παρ' όλα αυτά η θερμοπυρηνική σύντηξη είναι μια ασφαλής και φιλική προς το περιβάλλον ενεργειακή επιλογή που προσφέρει τη δυνατότητα ενός καθαρού, σταθερού και μακροπρόθεσμα ανεξάντλητου ενεργειακού εφοδιασμού. Μερικά από τα πλεονεκτήματα της σύντηξης είναι τα εξής:

- Σχεδόν απεριόριστη διαθεσιμότητα καυσίμου
- Καμία εκπομπή αερίων του θερμοκηπίου (όπως  $CO_2$ )
- Καταλληλότητα για μεγάλης κλίμακας παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας
- Βραχύβια ραδιενεργά κατάλοιπα που δε θα επιβαρύνουν τις μελλοντικές γενιές
- Έμφυτη ευστάθεια κατά τη διαδικασία της σύντηξης - αποφυγή ατυχημάτων

## 1.2 Στοιχεία Φυσικής Πλάσματος

Όπως αναφέραμε, στις θερμοκρασίες οι οποίες μας ενδιαφέρουν για την επίτευξη της αντίδρασης της θερμοπυρηνικής σύντηξης, η ύλη βρίσκεται σε μορφή πλάσματος. Θα μπορούσαμε να ορίσουμε το πλάσμα ως ένα ιονισμένο αέριο που απαρτίζεται από πολύ μεγάλο αριθμό εξαιρετικά κινητικών φορτισμένων σωματιών (ηλεκτρονίων και ιόντων) παρουσία ή μη (στην περίπτωση πλήρους ιονισμού) ενός μικρού αριθμού ουδέτερων ατόμων ή/και μορίων. Ο όρος 'πλάσμα' εισήχθη πρώτη φορά το 1929 από τους Irving Langmuir και Lewi Tonks ως προσδιοριστικός όρος για το μακροσκοπικά ουδέτερο ιονισμένο αέριο σε σωλήνες ηλεκτρικών εκκενώσεων. Από παρατηρήσεις τους διαπιστώθηκε η δυνατότητα του πλάσματος να παρουσιάζει συλλογική συμπεριφορά στη δυναμική του.

Ένας πληρέστερος, σύγχρονος ορισμός του πλάσματος είναι ο εξής:

‘Μακροσκοπικά ουδέτερο, πλήρως εξιονισμένο αέριο ικανό για πλούσια συλλογική συμπεριφορά που υπερβαίνει αυτή ενός ουδέτερου αερίου. Πέραν των συλλογικών φαινομένων, σημαντική μπορεί να γίνει και η συμπεριφορά και η δυναμική μεμονωμένων φορτισμένων σωματιών του μέσου αυτού. Τα σωματία κινούνται και αλληλεπιδρούν όχι μόνο με άλλα μεμονωμένα (μέσω σκεδάσεων Coulomb) αλλά και με τα πεδία που συλλογικά διαμορφώνουν όλα τα συστατικά

του πλάσματος από κοινού.’

Βέβαια, αυτός ο ορισμός δεν κατατάσσει αυτόματα οποιοδήποτε φορτισμένο αέριο στην κατηγορία του πλάσματος. Για να εμφανίζει μια συλλογή φορτισμένων και ουδέτερων σωματιδίων συμπεριφορά πλάσματος πρέπει να ικανοποιεί συγκεκριμένα κριτήρια. Η ουσία των κριτηρίων αυτών έγκειται στο ότι (α) στο πλάσμα οι δυνάμεις που προσδιορίζουν την κίνηση των σωματιδίων είναι οι ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις Coulomb (μεγάλης εμβέλειας), ενώ σε ένα συνηθισμένο αέριο τα μόρια αλληλεπιδρούν μόνο κατά τη διάρκεια των συγκρούσεων, δηλαδή με δυνάμεις μικρής εμβέλειας, (β) το πλάσμα εμφανίζει ‘μακροσκοπική ουδετερότητα’, δηλαδή σε περιοχές με διαστάσεις αρκετά μεγάλες ώστε να περιέχεται επαρκής αριθμός σωματιδίων, αλλά και αρκετά μικρές σε σχέση με τις χωρικές ανομοιογένειες του πλάσματος, το συνολικό φορτίο είναι πρακτικά μηδέν.

Για να περιγράψουμε πλήρως ένα πλάσμα, θα πρέπει να καταγράψουμε τις θέσεις και τις ταχύτητες όλων των σωματιδίων που το συνθέτουν, και να λύσουμε τις εξισώσεις κίνησης για κάθε ένα από αυτά, λαμβάνοντας υπόψιν το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο που βλέπει κάθε σωματίο ανά πάσα χρονική στιγμή. Προφανώς αυτό είναι αδύνατον, εφόσον αναφέραμε ότι το πλάσμα απαρτίζεται από εξαιρετικά μεγάλο αριθμό σωματιδίων τα οποία αλληλεπιδρούν ηλεκτρομαγνητικά τόσο μεταξύ τους, όσο και με τα εξωτερικά επιβαλλόμενα πεδία.

Αυτός είναι ο λόγος που, εκμεταλλευόμενοι τα βασικά χαρακτηριστικά του πλάσματος όπως την οιονεί ουδετερότητα και τη συλλογική συμπεριφορά που παρουσιάζει, χρησιμοποιούμε προσεγγιστικές μεθόδους :

1. Μελέτη της κίνησης μεμονωμένων σωματιδίων μέσα σε ηλεκτρομαγνητικά πεδία
2. Προσέγγιση ρευστού, κατά την οποία αντιμετωπίζουμε το πλάσμα ως μαγνητισμένο ρευστό στο οποίο αποδίδονται μακροσκοπικές ποσότητες, όπως πίεση, πυκνότητα κλπ. Χρησιμοποιούνται οι μέθοδοι της Μαγνητο-υδροδυναμικής, οι οποίες συνδυάζουν τις εξισώσεις των ρευστών (Navier - Stokes, εξίσωση συνέχειας) με αυτές του Maxwell για τον ηλεκτρομαγνητισμό.
3. Κινητική θεωρία, κατά την οποία καταφεύγουμε σε στατιστική περιγραφή, εφόσον έχουμε μια συνάρτηση κατανομής ταχυτήτων για τα σωματίδια,  $f(x, v, t)$

Ένα πλήρες και αυτοσυνεπές μοντέλο για την περιγραφή του πλάσματος θα πρέπει να υπολογίζει συγχρόνως: (α) Την κίνηση των σωματιδίων που αποτελούν το πλάσμα υπό την επίδραση των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων που δημιουργούν τα ίδια τα σωματίδια και των όποιων εξωτερικών πεδίων εφαρμόζονται, (β) Την εξέλιξη όλων των πεδίων υπό την επίδραση των σωματιδίων. Όσον αφορά το πρώτο σκέλος, η δυναμική συμπεριφορά των σωματιδίων καθορίζεται από την εξίσωση κίνησης που προκύπτει πχ από τους νόμους του Newton

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.3)$$

Η εξέλιξη των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων δίνεται από τις εξισώσεις του Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left( \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (1.7)$$

όπου οι πυκνότητες φορτίου  $\rho$  και ρεύματος  $\mathbf{j}$  μπορούν να εκφραστούν ως

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{\Delta V} \sum_j q_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \quad (1.8)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\Delta V} \sum_j q_j \mathbf{v}_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \quad (1.9)$$

δηλαδή ως προς τα σωματίδια του πλάσματος που βρίσκονται εντός στοιχειώδους όγκου  $\Delta V$  γύρω από τη θέση αναφοράς  $\mathbf{r}$ . Ο όγκος  $\Delta V$  ορίζεται ως αρκετά μεγάλος ώστε να περιλαμβάνει στατιστικά επαρκή αριθμό φορτίων, αλλά και αρκετά μικρότερος από τις διαστάσεις του πλάσματος. Αν επρόκειτο να εξεταστεί σύστημα με λίγα σωματίδια, οι παραπάνω εξισώσεις θα ήταν δυνατό να επιλυθούν (αναλυτικά ή αριθμητικά). Αυτό όμως δε συμβαίνει στην περίπτωση του πλάσματος, επειδή η επιλογή μικρού αριθμού σωματιδίων αντιβαίνει στην προϋπόθεση για συλλογικά φαινόμενα. Επομένως, το πλήρες μοντέλο για την περιγραφή του πλάσματος καθίσταται πρακτικά μη υλοποιήσιμο, τουλάχιστον χωρίς σημαντικές απλοποιήσεις που ενδεχομένως θα επηρεάσουν την πληρότητα της περιγραφής.

Τίθεται λοιπόν το ερώτημα: 'Πώς μπορούμε να υπολογίσουμε τη συμπεριφορά του πλάσματος σε μια δεδομένη κατάσταση και με καλή ακρίβεια.' Επειδή το πλάσμα συναντάται σε ποικίλες περιοχές πυκνότητας και θερμοκρασίας, και σε κάθε μία επικρατούν διαφορετικές φυσικές ιδιότητες, είναι πολύ δύσκολο να υπάρξει ένα ενιαίο μοντέλο σε όλο το εύρος των παραμέτρων. Για παράδειγμα, σε χαμηλές πυκνότητες τα συλλογικά φαινόμενα δεν είναι ισχυρά και τα φορτία κινούνται σχεδόν χωρίς να αλληλεπιδρούν, ενώ σε υψηλές πυκνότητες η κύρια κίνηση είναι συλλογική, δηλαδή τύπου ροής. Άλλες φορές το πλάσμα συμπεριφέρεται σαν συλλογή ανεξάρτητων φορτίων, άλλες φορές σαν συλλογή αλληλεπιδρώντων φορτίων και άλλες εμφανίζει και τις δύο συμπεριφορές ταυτόχρονα. Συνέπως, χρειάζεται διαφορετική προσέγγιση ανάλογα με την περιοχή παραμέτρων του εκάστοτε προβλήματος. Εν γένει, σκοπός για ένα μοντέλο είναι να παρέχει τις πυκνότητες φορτίου και ρεύματος στο πλάσμα, οι οποίες εκτός από την περιγραφή καθ' εαυτού του πλάσματος μπορούν να αξιοποιηθούν στις εξισώσεις Maxwell για μια αυτοσυνεπή περιγραφή.

Στη συνέχεια αυτής της ενότητας παρουσιάζουμε τα τρία κύρια μοντέλα περιγραφής του πλάσματος: Το μοντέλο των ανεξάρτητων σωματιδίων (μικροσκοπικό), το μοντέλο του ενός ή των πολλών ρευστών (μακροσκοπικό) και το κινητικό (στατιστικό) μοντέλο. (βλ. [7]) Το πρώτο αντιμετωπίζει το πλάσμα σαν ένα σύστημα σωματιδίων που δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, και επομένως κινούνται μόνο υπό την επίδραση εξωτερικών δυνάμεων (πχ κύματα). Στο δεύτερο μοντέλο, το πλάσμα προσεγγίζεται είτε ως μείγμα από πολλά αγώγιμα ρευστά, ένα για κάθε διαφορετικό πληθυσμό φορτίων (ηλεκτρόνια, ιόντα), είτε συνολικά ως ένα ρευστό. Εδώ δεν εστιάζουμε στις λεπτομέρειες της κίνησης των φορτίων και η περιγραφή γίνεται στα πλαίσια εξισώσεων παρόμοιων με της Ρευστομηχανικής. Το τρίτο μοντέλο, το οποίο όπως θα δείξουμε εμπεριέχει και τα δύο προηγούμενα, περιγράφει το πλάσμα στα πλαίσια των συναρτήσεων κατανομής των διαφορετικών πληθυσμών, δηλαδή της πιθανότητας ένα σωματίδιο να βρίσκεται σε μια συγκεκριμένη κατάσταση στο χώρο φάσεων.

### 1.2.1 Περιγραφή μέσω μη αλληλεπιδρώντων σωματιδίων

Η πρώτη προσέγγιση ενός προβλήματος στο πλάσμα έγκειται στη διερεύνηση των τροχιών των φορτισμένων σωματιδίων. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, οι δυνάμεις που παίζουν τον κύριο ρόλο στην εξέλιξη των φορτίων του πλάσματος είναι ηλεκτρομαγνητικές (οι δυνάμεις βαρύτητας είναι πολλές τάξεις μεγέθους μικρότερες), και διακρίνονται σε εσωτερικές (από τα υπόλοιπα φορτία) και εξωτερικές. Στη γενική περίπτωση που οι εσωτερικές δυνάμεις συμπεριλαμβάνον-

ται στη μελέτη, το πρόβλημα παρουσιάζει τις ίδιες πρακτικές δυσκολίες με το πλήρες μοντέλο. Σε περιπτώσεις όμως όπου (α) τα εξωτερικά πεδία είναι πολύ πιο ισχυρά από τα συλλογικά πεδία (πχ σε αραιό πλάσμα), (β) η ενέργεια που μεταφέρουν τα συλλογικά πεδία στα φορτία είναι σχετικά μικρή (σποραδικές συγκρούσεις), το πρόβλημα απλοποιείται αρκετά διότι οι συλλογικές επιδράσεις μπορούν να αγνοηθούν και η κίνηση των φορτίων να μελετηθεί μόνο υπό την επίδραση των εξωτερικών πεδίων. Παρ' ότι απλοϊκή, η προσέγγιση αυτή εντός των ορίων ισχύος της είναι ακριβής, αλλά και εκτός αυτών παρέχει τη δυνατότητα εξαγωγής ποιοτικών συμπερασμάτων για τη μακροσκοπική συμπεριφορά του πλάσματος σε δεδομένες μαγνητικές τοπολογίες.

Η μελέτη της κίνησης φορτισμένων σωματιδίων μέσα σε ηλεκτρομαγνητικά πεδία γίνεται καταρχήν με την εξίσωση Newton (1.3). Για μη σχετικιστικά σωματίδια είναι  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ , και η εξίσωση κίνησης εκφράζεται απλά σε σχέση με την ταχύτητα:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.10)$$

Η Εξ. (1.3) καλύπτει και την περίπτωση που το φορτίο είναι σχετικιστικό. Η σχετικιστική διόρθωση για την ορμή είναι  $\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v}$ , όπου  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$  ο παράγοντας Lorentz, και η εξίσωση κίνησης παίρνει τη μορφή

$$\gamma m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{q}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{v} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.11)$$

Εν συγκρίσει με τη μη σχετικιστική περίπτωση, η εξίσωση κίνησης περιλαμβάνει επιπλέον τον παράγοντα Lorentz. Ο ρυθμός μεταβολής του  $\gamma$  προσδιορίζεται από τη σχέση ισχύος-δύναμης  $d\mathcal{E}/dt = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$  ( $\mathcal{E} = mc^2\gamma$  η ενέργεια)

$$mc^2 \frac{d\gamma}{dt} = q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \quad (1.12)$$

Οι εξισώσεις αυτές, μολονότι έχουν όλη την πληροφορία για την περιγραφή των τροχιών, δεν είναι πάντοτε ο ευκολότερος τρόπος για την επίλυση του προβλήματος. Η διανυσματική μορφή διευκολύνει όταν οι συντεταγμένες είναι καρτεσιανές, όταν όμως χρειάζεται να μεταβούμε σε καμπυλόγραμμο σύστημα, όπως πχ. σε κινήσεις εντός κεντρικών πεδίων (ώστε να αξιοποιήσουμε την αζιμουθιακή συμμετρία), παράγωγοι όπως η  $d\mathbf{v}/dt$  περιλαμβάνουν και όρους που προκύπτουν από τη χρονική μεταβολή των μοναδιαίων διανυσμάτων. Ενδιαφέρον παρουσιάζει και το ενδεχόμενο εύρεσης ποσοτήτων που παραμένουν σταθερές κατά τη διάρκεια της κίνησης. Εκτός του ότι η μελέτη απλοποιείται αρκετά, αναλυτικά αλλά και αριθμητικά, η ύπαρξη τέτοιων ποσοτήτων εμπεριέχει σημαντική φυσική πληροφορία. Μέσω των εξισώσεων Newton, η αναζήτηση για σταθερές ποσότητες μπορεί να γίνει μόνο με μαθηματικά τεχνάσματα, όπως

π.χ. στη μη σχετικιστική περίπτωση, αν πολλαπλασιάσουμε την Εξ. (1.10) κατά μέλη εσωτερικά με  $\mathbf{v}$  θα λάβουμε μια σχέση όμοια της (1.12) που υποδεικνύει ότι η ολική ενέργεια διατηρείται.

**Στοιχεία Αναλυτικής Μηχανικής (Lagrange - Hamilton)** Ένας εναλλακτικός τρόπος μελέτης της δυναμικής των σωματιδίων είναι στο πλαίσιο της Αναλυτικής Μηχανικής με τη συνάρτηση Lagrange (ή Lagrangian, Λαγκρανζιανή)  $\mathcal{L} = T - U$ , όπου  $T$ ,  $U$  είναι αντίστοιχα η κινητική και η δυναμική ενέργεια του σωματιδίου. Το μεγάλο πλεονέκτημα της μεθόδου αυτής είναι η ευελιξία στην επιλογή του συστήματος συντεταγμένων, με μόνη προϋπόθεση αυτές να συνδέονται με αλγεβρική σχέση με τις καρτεσιανές συντεταγμένες. Αυτό συμβαίνει διότι, εξ' ορισμού, η συνάρτηση Lagrange δε συνδέεται με το διανυσματικό μέγεθος της δύναμης αλλά με το βαθμωτό της ενέργειας. Από τη συνάρτηση Lagrange, η εξίσωση κίνησης προκύπτει μέσω των σχέσεων [8]

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0, \quad (1.13)$$

με  $q_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) τις γενικευμένες συντεταγμένες και  $\dot{q}_j = dq_j/dt$ . Είναι εύκολο ναδειχθεί ότι οι παραπάνω εξισώσεις είναι ισοδύναμες με αυτές του Newton. Όπως είπαμε πριν, ο μόνος περιορισμός είναι η επιλογή των  $q_j$  να είναι τέτοια ώστε οι σχέσεις  $q_j = q_j(x, y, z)$  να είναι επιλύσιμες ως προς  $x, y, z$ , δηλαδή η Jacobian  $\mathcal{J}(q_1, q_2, q_3, x, y, z)$  να είναι μη μηδενική. Η ευελιξία στην επιλογή των  $q_j$  προσφέρει εν μέρει τη δυνατότητα 'κατασκευής' σταθερών της κίνησης. Για παράδειγμα, αν είναι δυνατή μια επιλογή τέτοια ώστε  $\partial \mathcal{L} / \partial q_j = 0$  τότε η ποσότητα  $p_j = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}_j$ , η οποία αποτελεί τη γενικευμένη ορμή του σωματιδίου, είναι σταθερή.

Η συγκεκριμένη μορφή της συνάρτησης Lagrange για τη μη σχετικιστική κίνηση φορτισμένων σωματιδίων σε ηλεκτρομαγνητικά πεδία είναι

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m v^2 - q\phi + \frac{q}{c} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \quad (1.14)$$

όπου  $\phi$ ,  $\mathbf{A}$  είναι αντίστοιχα το βαθμωτό και το διανυσματικό δυναμικό των πεδίων  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ . Τα πεδία συνδέονται με τα δυναμικά μέσω των σχέσεων

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (1.15)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (1.16)$$

οι οποίες είναι συνέπεια των εξισώσεων Maxwell (2.5) και (2.4) αντίστοιχα. Το ότι η μέθοδος του Lagrange βασίζεται στα δυναμικά και όχι στα πεδία αποτελεί ένα επιπρόσθετο πλεονέκτημα διότι (κατά κανόνα) η εξέλιξη των δυναμικών



υπακούει σε εξισώσεις απλούστερες από εκείνες των πεδίων. Η συνάρτηση Lagrange για τη σχετικιστική περίπτωση είναι διαφορετική μόνο όσον αφορά την κινητική ενέργεια

$$\mathcal{L} = -\frac{mc^2}{\gamma} - q(\phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \quad (1.17)$$

Η οδός για να βρεθεί η ακριβής μορφή των εξισώσεων κίνησης είναι να εκφραστούν η ταχύτητα και τα δυναμικά συναρτήσει των γενικευμένων συντεταγμένων και να αντικατασταθεί το αποτέλεσμα στη συνάρτηση Lagrange.

Μια προέκταση της θεωρίας Lagrange, η οποία συστηματοποιεί ακόμη περισσότερο τη μελέτη των σωματιδιακών κινήσεων, είναι η θεωρία Hamilton. Η συνάρτηση Hamilton (ή Hamiltonian, *Χαμιλτονιανή*), η οποία καθορίζει την εξέλιξη του συστήματος, προκύπτει από την εφαρμογή του δυϊκού μετασχηματισμού Legendre  $(q_j, \dot{q}_j) \rightarrow (q_j, p_j)$  στη συνάρτηση Lagrange. Επομένως, στα πλαίσια της θεωρίας Hamilton η περιγραφή της κίνησης δε γίνεται μόνο με τις γενικευμένες συντεταγμένες, όπως στη θεωρία Lagrange, αλλά εμπλέκονται και οι γενικευμένες ορμές. Οι συντεταγμένες και οι ορμές μαζί αποκαλούνται *κανονικές (ή συζυγείς) μεταβλητές*. Η μαθηματική σχέση του μετασχηματισμού Legendre είναι:

$$\mathcal{H} = \sum_j p_j \dot{q}_j - \mathcal{L} \quad (1.18)$$

και οι εξισώσεις κίνησης για τις κανονικές μεταβλητές προκύπτουν ως εξής:

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \quad (1.19)$$

$$\frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \quad (1.20)$$

Και εδώ είναι εύκολο να διαπιστωθεί η ισοδυναμία των εξισώσεων κίνησης Hamilton, Lagrange και Newton. Από τις παραπάνω εξισώσεις φαίνεται πάλι ότι η κατάλληλη επιλογή των  $q_j$  μπορεί να οδηγήσει σε σταθερές της κίνησης, π.χ. αν είναι τέτοια ώστε  $\partial \mathcal{H} / \partial q_j = 0$ , τότε η συζυγής ορμή  $p_j$  είναι σταθερή. Στην περίπτωση αυτή, η συντεταγμένη  $q_j$  ονομάζεται *κυκλική (ή αγνοήσιμη)*. Επιπρόσθετα, αν η συνάρτηση Hamilton δεν εξαρτάται ρητά από το χρόνο, τότε και αυτή είναι σταθερά της κίνησης.

Με μια πρώτη ματιά, η παραπάνω πρακτική φαίνεται σαν 'πισωγύρισμα', καθώς οι μεταβλητές κίνησης (και συνεπώς οι διαφορικές εξισώσεις προς επίλυση) γίνονται διπλάσιες σε αριθμό. Όμως, οι κανονικές εξισώσεις είναι 1<sup>ης</sup> τάξης και

η επίλυσή τους είναι απλούστερη σε σχέση με τις εξισώσεις 2<sup>ης</sup> τάξης του Lagrange. Επιπλέον, η θεωρία Hamilton εμφανίζει πολλά πλεονεκτήματα σε σχέση με τη συστηματοποίηση της μελέτης. Θα αναφέρουμε εν συντομία μερικά από αυτά (για περισσότερες λεπτομέρειες ο αναγνώστης παραπέμπεται στα βιβλία [15, 3]): Με την ενοποίηση συντεταγμένων-ορμών, για τη δυναμική περιγραφή του συστήματος, αντί των χώρων θέσεων και ταχυτήτων, καθιερώνεται η χρήση του ενιαίου χώρου  $(q_j, p_j)$  ο οποίος καλείται χώρος φάσεων (phase space). Στο χώρο φάσεων, η εποπτεία της εξέλιξης των καμπυλών είναι καλύτερη απ' ό,τι αυτή των πραγματικών τροχιών στο χώρο θέσεων, διότι κάθε φασική καμπύλη είναι μοναδική και δεν είναι δυνατό να τέμνεται με άλλες <sup>1</sup>.

Ένα δεύτερο πλεονέκτημα είναι ότι, με την εφαρμογή μετασχηματισμών που διατηρούν την κανονική μορφή των εξισώσεων Hamilton, είναι δυνατόν η συνάρτηση Hamilton να μετασχηματιστεί σε μια συνάρτηση απλής μορφής μέσω της δημιουργίας κυκλικών συντεταγμένων. Οι μετασχηματισμοί αυτοί ονομάζονται κανονικοί και χαρακτηρίζονται από μια γεννήτρια συνάρτηση  $\mathcal{F}_k$  (τύπου k) που συνδέει τις αρχικές (παλιές) μεταβλητές με τις τελικές (νέες). Οι βασικές γεννήτριες συναρτήσεις είναι τεσσάρων τύπων, ανάλογα με το ποιές από τις παλιές/νέες συντεταγμένες/ορμές είναι οι αρχικές μεταβλητές. Οι σχέσεις που συνδέουν τις παλιές με τις νέες μεταβλητές (τονούμενες) προσδιορίζονται μέσω της γενικής σχέσης

$$\sum_j p_j \dot{q}_j - \mathcal{H} = \sum_j p'_j \dot{q}'_j - \mathcal{H}' + \frac{d\mathcal{F}_k}{dt} \quad (1.21)$$

Εν γένει, ένας κανονικός μετασχηματισμός δε βασίζεται σε έναν μόνο από τους τέσσερις τύπους αλλά είναι συνδυασμός αυτών, δηλαδή είναι μικτού τύπου. Στην ιδανική περίπτωση, ζητάμε ο μετασχηματισμός να είναι τέτοιος ώστε  $\mathcal{H}' = 0$  και οι εξισώσεις Hamilton στις νέες μεταβλητές να ολοκληρώνονται απευθείας. Η γεννήτρια συνάρτηση για το μετασχηματισμό αυτό βρίσκεται ως λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης Hamilton-Jacobi, η οποία προκύπτει από τη σχέση μετασχηματισμού της συνάρτησης Hamilton

$$\mathcal{H} \left( q_j, \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_j}, t \right) + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = 0 \quad (1.22)$$

Για περαιτέρω εμβάθυνση στη θεωρία Hamilton - Jacobi αλλά και στην Αναλυτική Μηχανική, ο αναγνώστης ενθαρρύνεται να ανατρέξει στην πλούσια

---

<sup>1</sup>Αυτό είναι συνέπεια της μοναδικότητας της λύσης των διαφορικών εξισώσεων (Θεωρ. Cauchy-Lipschitz)

ελληνική και ξένη βιβλιογραφία συγγραμάτων Κλασικής Μηχανικής.

Ας δώσουμε τώρα τη σχετικιστική και μη σχετικιστική έκφραση της συνάρτησης Hamilton για την κίνηση φορτίων σε ηλεκτρομαγνητικά πεδία. Στη μη σχετικιστική περίπτωση, οι κανονικές ορμές είναι

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = (m\mathbf{v} + q\mathbf{A}) \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_j}$$

και με αντικατάσταση στην (1.18) μαζί με την (1.14) η  $\mathcal{H}$  προκύπτει

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}mv^2 + q\phi \quad (1.23)$$

Αντίστοιχα, στη σχετικιστική περίπτωση έχουμε για τις κανονικές ορμές

$$p_j = \frac{mc^2}{\gamma^2} \frac{\partial \gamma}{\partial \dot{q}_j} + q\mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_j} = \left( -\frac{\gamma \mathbf{v}}{c^2} + q\mathbf{A} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_j} \quad (1.24)$$

και με τον ίδιο τρόπο με προηγουμένως βρίσκουμε για την  $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H} = mc^2\gamma + q\phi \quad (1.25)$$

Σε αντιστοιχία με τη θεωρία Lagrange, για να βρεθούν επακριβώς οι εξισώσεις κίνησης πρέπει στη συνάρτηση Hamilton η ταχύτητα και τα δυναμικά να εκφραστούν ως προς τις κανονικές μεταβλητές  $q_j$ ,  $p_j$ .

Ήδη έχουμε πει ότι η μελέτη της κίνησης των σωματιδίων δίνει ποιοτικές πληροφορίες για τη συμπεριφορά του πλάσματος σε ηλεκτρομαγνητικά πεδία. Ενδεικτικά, αναφέρουμε καταρχήν τις διαφόρου τύπου ολισθήσεις των σωματιδίων λόγω των πεδίων. Από την ανάλυση της συνολικής κίνησης, η ολίσθηση προκύπτει ως κίνηση του κέντρου περιστροφής (guiding centre) της τροχιάς. Οι κυριότερες ολισθήσεις είναι λόγω:

- (α) ηλεκτρικού πεδίου (ολίσθηση  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ )
- (β) ανομοιογένειας ή/και καμπυλότητας του μαγνητικού πεδίου
- (γ) χρονικής μεταβολής του ηλεκτρικού πεδίου (ολίσθηση πόλωσης, polarization drift)

Σημαντικά συμπεράσματα για τις κινήσεις εξάγονται και από τις αδιαβατικές αναλλοίωτες (adiabatic invariants), οι οποίες είναι ποσότητες που μεταβάλλονται αργά στην εξέλιξη της κίνησης. Οι ποσότητες αυτές συνδέονται με περιοδικές κινήσεις που εκτελούν τα φορτία, και συναντούν εφαρμογή στη μελέτη της

παγίδευσης του πλάσματος. Η σημαντικότερη αδιαβατική αναλλοίωτη είναι η μαγνητική ροπή  $\mu \propto \oint \sum_j p_j dq_j$ . Σχετικά με τις αδιαβατικές αναλλοίωτες θα αναφερθούμε πιο εκτεταμένα στη συνέχεια.

## 1.2.2 Μοντέλο ενός ή πολλών ρευστών

Σε συνθήκες για το πλάσμα τελείως αντιδιαμετρικές με τις παραπάνω, όπου κυριαρχούν τα συλλογικά φαινόμενα και οι ουσιαστικές διαφορές ανάμεσα στις κινήσεις των φορτίων είναι ασήμαντες, όπως πχ συμβαίνει σε πυκνό πλάσμα, είναι προτιμότερο να χρησιμοποιηθεί ένα άλλο μοντέλο που επικεντρώνεται στην περιγραφή της συλλογικής κίνησης (ροής) του πλάσματος και όχι της λεπτομερούς κίνησης κάθε σωματιδίου. Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό, το πλάσμα θεωρείται ότι απαρτίζεται από ένα ή περισσότερα αλληλοεφαπτόμενα, αγωγιμα και μη σχετικιστικά ρευστά, τα οποία αντιστοιχούν στους διαφορετικούς πληθυσμούς σωματιδίων. Οι εξισώσεις της εξέλιξης των ρευστών έχουν σημαντικό φυσικό περιεχόμενο, καθώς αποτελούν τις μαθηματικές εκφράσεις των νόμων διατήρησης που ισχύουν στο πλάσμα. Ανάλογα με το πλήθος των ρευστών που θεωρούμε, το μοντέλο συναντάται σε διάφορες παραλλαγές τις οποίες και παρουσιάζουμε στη συνέχεια.

Στην απλή περίπτωση που έχουμε να κάνουμε με ηλεκτρόνια και μόνο ένα είδος ιόντων, τότε μιλάμε για το *μοντέλο των δύο ρευστών*. Εδώ ουσιαστικά χρειαζόμαστε δύο διαφορετικά σύνολα εξισώσεων, ένα για τα ιόντα (θετικά φορτισμένο ρευστό) και ένα για τα ηλεκτρόνια (αρνητικά φορτισμένο ρευστό). Οι πυκνότητες φορτίου και ρεύματος στο πλάσμα διατυπώνονται ως

$$\rho = n_i q_i + n_e q_e \quad (1.26)$$

$$\mathbf{j} = n_i q_i \mathbf{u}_i + n_e q_e \mathbf{u}_e \quad (1.27)$$

όπου  $\mathbf{u}_i$  και  $\mathbf{u}_e$  είναι οι ταχύτητες των δύο ρευστών, δηλαδή οι μακροσκοπικές ταχύτητες που περιγράφουν τις συλλογικές ροές στο πλάσμα.

Η *εξίσωση συνέχειας* είναι η πρώτη από τις εξισώσεις του μοντέλου. Απεικονίζει τη διατήρηση του ηλεκτρικού φορτίου (ή ισοδύναμα της μάζας) κατά τις μετακινήσεις των ηλεκτρονίων και των ιόντων εντός του πλάσματος, και συνδέει τις ποσότητες  $n_i$ ,  $n_e$ ,  $\mathbf{u}_i$  και  $\mathbf{u}_e$ . Η εξίσωση συνέχειας προκύπτει αν εφαρμόσουμε τον τελεστή  $\nabla \cdot$  στην εξίσωση Maxwell (2.6), και επιπλέον χρησιμοποιήσουμε την (2.3). Η εξίσωση αυτή, λαμβάνοντας υπόψη τη μορφή των πυκνοτήτων φορτίου και ρεύματος που δώσαμε παραπάνω, γράφεται για κάθε πληθυσμό

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla \cdot (n_s \mathbf{u}_s) = 0 \quad (1.28)$$

και ουσιαστικά υποδεικνύει ότι κάθε αλλαγή του αριθμού σωματιδίων σε μια περιοχή του πλάσματος συνδέεται με ροή σωματιδίων εκτός του συνόρου της περιοχής.

Η επόμενη εξίσωση του μοντέλου είναι η εξίσωση ισοζυγίου ορμής (momentum balance) και έχει να κάνει με τη διατήρηση της ορμής κατά τις μετατοπίσεις των σωματιδίων στις διαφορετικές διευθύνσεις. Η εξίσωση αυτή είναι αντίστοιχη με μια εξίσωση κίνησης και σχηματίζεται με γνώμονα τις υποθέσεις περί αυτοτελών ροών και αμελητέων κινήσεων κάθετα σε αυτές, λαμβάνοντας επιπλέον υπόψη την αλληλεπίδραση μεταξύ των ρευστών και τη μεταφορά ορμής από κάθε διεύθυνση προς όλες τις άλλες διευθύνσεις. Συγκεκριμένα, η εξίσωση προκύπτει από την (1.10) με πολλαπλασιασμό επί την πυκνότητα και αντικατάσταση της ολικής παραγωγού  $\partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$ , η οποία δίνει το ρυθμό μεταβολής κάθε ποσότητας που κινείται με το ρευστό, ενώ περιλαμβάνονται σαν ξεχωριστοί όροι η δύναμη τριβής  $\mathcal{T}$  μεταξύ των δύο ρευστών και η βαθμίδα του τανυστή πίεσης (stress tensor)  $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{P}}$  λόγω της μεταφοράς ορμής. Η τελική της μορφή λοιπόν είναι:

$$n_s m_s \left[ \frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} + (\mathbf{u}_s \cdot \nabla) \mathbf{u}_s \right] = n_s q_s (\mathbf{E} + \mathbf{u}_s \times \mathbf{B}) - \mathcal{T}_{ss'} - \nabla \cdot \tilde{\mathbf{P}}_s \quad (1.29)$$

Η δύναμη της τριβής προέρχεται από την αύξηση της ορμής του ενός πληθυσμού λόγω των συγκρούσεων με τα σωματίδια του άλλου, και μπορούμε να την εκφράσουμε μαθηματικά συναρτήσει της σχετικής ταχύτητας των δύο ρευστών και της ειδικής αντίστασης του πλάσματος (plasma resistivity)  $\eta_p$

$$\mathcal{T}_{ei} = -\mathcal{T}_{ie} = \eta_p n_e n_i |q_e|^2 (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i) \quad (1.30)$$

Ως φυσικό μέγεθος, η ειδική αντίσταση καταδεικνύει το ρόλο των συγκρούσεων στο να περιορίζουν το ρεύμα που μπορεί να επάγει ένα ηλεκτρικό πεδίο στο πλάσμα. Σε πολλές εφαρμογές, οι τιμές των παραμέτρων επιτρέπουν η ειδική αντίσταση να θεωρηθεί πολύ μικρή και η τριβή να αγνοηθεί.

Η πίεση είναι τανυστικό μέγεθος διότι, εν γένει, η κίνηση σε μια διεύθυνση δε μεταφέρει ορμή μόνο κατά μήκος της ίδιας αλλά και κατά μήκος των άλλων διευθύνσεων. Ο τανυστής της πίεσης είναι συμμετρικός και τα στοιχεία του  $P_{kl}$  περιγράφουν την κίνηση στη διεύθυνση  $k$  σαν αποτέλεσμα της συνιστώσας της ορμής στη διεύθυνση  $l$ . Τα διαγώνια στοιχεία του τανυστή λειτουργούν

αντίστοιχα με την κλασική υδροστατική πίεση, ενώ τα μη διαγώνια αντιπροσωπεύουν το ιξώδες (viscosity) του πλάσματος. Το ιξώδες είναι αντιστρόφως ανάλογο της συχνότητας συγκρούσεων, οπότε στην περίπτωση που οι συγκρούσεις είναι σποραδικές μπορεί να υποτεθεί με καλή ακρίβεια ότι η κίνηση σε μια διεύθυνση μεταφέρει ορμή μόνο σε αυτή τη διεύθυνση. Σαν συνέπεια, ο ταυνοστής πίεσης είναι διαγώνιος ( $P_{kl} = 0$  ( $k \neq l$ )) και η εξίσωση (1.29) απλοποιείται αρκετά. Όταν επιπλέον το πλάσμα είναι *ισότροπο*, δηλαδή οι διαφορετικές διευθύνσεις είναι ισοδύναμες από πλευράς φυσικής, τα στοιχεία του  $\tilde{\mathbf{P}}$  είναι ίσα μεταξύ τους και ο όρος  $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{P}}$  στην εξίσωση κίνησης μπορεί να αντικατασταθεί με τη βαθμίδα της βαθμωτής ποσότητας  $P_{xx} = P_{yy} = P_{zz} = P$ . Αν τώρα το πλάσμα δεν είναι *ισότροπο* (πχ υπάρχει μαγνητικό πεδίο), τότε η μόνη διαφορά είναι ότι τα διαγώνια στοιχεία δεν είναι όλα ίσα μεταξύ τους.

Το σύστημα των (1.28), (1.29) παρέχει όλη τη φυσική του ρευστού πλάσματος, όμως *δεν είναι κλειστό* διότι οι εξισώσεις είναι τέσσερις (από δύο εξισώσεις συνέχειας και κίνησης) αλλά οι άγνωστοι είναι έξι (από δύο πυκνότητες, ταχύτητες και πιέσεις). Για να κλείσει το σύστημα χρειάζονται σχέσεις που να συνδέουν τους ταυνοστές πίεσης με τα υπόλοιπα μεγέθη. Μια τέτοια σχέση ονομάζεται *καταστατική εξίσωση*, και έχει τη γενική μορφή  $P_{kl} = P_{kl}(n_s, T_s)$ . Η ακριβής μορφή εξαρτάται από συγκεκριμένες παραδοχές για την εξέλιξη του πλάσματος. Μαζί με τις καταστατικές εξισώσεις, οι (1.28), (1.29) παρέχουν πλήρη περιγραφή του συνολικού ρευστού, ενώ σε συνδυασμό με τις εξισώσεις Maxwell μπορούν να αποτελέσουν ένα αυτοσυνεπές μοντέλο πεδίων - ρευστού. Αν τώρα το πλάσμα, εκτός από τους δύο παραπάνω πληθυσμούς, περιέχει ουδέτερα άτομα ή/και άλλα είδη ιόντων, χρειάζονται οι ανάλογες εξισώσεις συνέχειας και κίνησης για κάθε επιπλέον πληθυσμό σωματιδίων. Μιλάμε τότε για ένα μοντέλο περισσότερων των δύο ρευστών, το οποίο όμως είναι παρόμοιο με ότι περιγράψαμε ως εδώ και αλλάζει μόνο ο συνολικός αριθμός των εξισώσεων.

Μετά την προσομοίωση του πλάσματος μέσω αυτοτελών ρευστών, και λόγω του ότι σε ένα πλήρως ιονισμένο πλάσμα οι κινήσεις των σωματιδίων είναι στενά συνδεδεμένες μεταξύ τους και οι οποιοσδήποτε διαφορές ενδέχεται να είναι πολύ μικρές, είναι λογικό το επόμενο βήμα να είναι η μετάβαση σε ένα απλούστερο μοντέλο που περιγράφει το πλάσμα σαν ενιαίο ρευστό. Το μοντέλο αυτό λέγεται *μαγνητοϋδροδυναμικό (magnetohydrodynamic - MHD)*, και η βάση του είναι ο γραμμικός συνδυασμός των εξισώσεων των πολλών ρευστών σε ένα σύνολο εξισώσεων που περιγράφει το πλάσμα ως ένα ουδέτερο, αγωγίμο ρευστό. Εδώ θα διατυπώσουμε τις εξισώσεις MHD για την απλή περίπτωση του *ισότροπου* πλάσματος δύο ρευστών χωρίς ιξώδες, όμως η διαδικασία αυτή εύκολα γενικεύεται και για τις άλλες περιπτώσεις. Για το συνολικό ρευστό υιοθετούμε

προσεγγιστικά τη μακροσκοπική ουδετερότητα, δηλαδή  $n_e \approx n_i \approx n_p$  αλλά με  $n_e - n_i \neq 0$ . Ορίζουμε τις πυκνότητες φορτίου  $\rho$ , μάζας  $\varrho$  και ρεύματος  $\mathbf{j}$ , καθώς και την ταχύτητα  $\mathbf{u}$  ως:

$$\rho = n_i q_i + n_e q_e = |q_e|(n_i - n_e) \neq 0 \quad (1.31)$$

$$\varrho = n_i m_i + n_e m_e \approx n_p(m_i + m_e) \quad (1.32)$$

$$\mathbf{j} = n_i q_i \mathbf{u}_i + n_e q_e \mathbf{u}_e \approx n_p |q_e| (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) \quad (1.33)$$

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\varrho} (n_i m_i \mathbf{u}_i + n_e m_e \mathbf{u}_e) \approx \frac{m_i \mathbf{u}_i + m_e \mathbf{u}_e}{m_i + m_e} \quad (1.34)$$

Με κατάλληλο συνδυασμό των παραπάνω ορισμών και των εξισώσεων των δύο ρευστών προκύπτουν οι εξισώσεις MHD. Από το άθροισμα και τη διαφορά των εξισώσεων συνέχειας (1.28) βρίσκουμε τις εξισώσεις συνέχειας για τις πυκνότητες μάζας  $\varrho$  και φορτίου  $\rho$  του ενιαίου ρευστού

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \mathbf{u}) = 0 \quad (1.35)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (1.36)$$

Εν συνεχεία, με πρόσθεση κατά μέλη των εξισώσεων ισοζυγίου ορμής (1.29), και ορίζοντας ως  $P = P_e + P_i$  την ολική πίεση, προκύπτει η αντίστοιχη εξίσωση κίνησης του μαγνητοϋδροδυναμικού ρευστού

$$\varrho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = \varrho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla P \quad (1.37)$$

Έχοντας αξιοποιήσει όλη τη διαθέσιμη γνώση από το μοντέλο των δύο ρευστών, παρατηρούμε ότι το σύστημα (;;), (1.37) μαζί με την καταστατική εξίσωση έχει τέσσερις εξισώσεις και πέντε αγνώστους ( $\rho$ ,  $\varrho$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $P$ ). Μπορούμε όμως να πάρουμε μια άλλη σημαντική εξίσωση με κατάλληλο συνδυασμό των εξισώσεων (1.29), πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση για το είδος  $s$  με  $m_s'/\varrho|q_e|$  και αφαιρώντας κατά μέλη

$$\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \eta_p \mathbf{j} + \frac{1}{n_p |q_e|} (\mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla P) \quad (1.38)$$

η οποία και κλείνει το σύστημα των εξισώσεων της μαγνητοϋδροδυναμικής. Ουσιαστικά, η Εξ. ((1.38)) αποτελεί μια γενίκευση του νόμου του Ohm.

Σε αυτό το σημείο είναι καλό να γίνει μια σύγκριση με την κοινή Υδροδυναμική. Τα συνηθισμένα ρευστά υπακούουν την εξίσωση Navier-Stokes :

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla P + \rho c_{vsc} \nabla^2 \mathbf{u},$$

με  $c_{vsc}$  τον κινηματικό συντελεστή ιξώδους. Η μόνη διαφορά με την εξίσωση ισοζυγίου ορμής της μαγνητοϋδροδυναμικής είναι η απουσία των ηλεκτρομαγνητικών δυνάμεων. Σε σχέση με τις Εξ. (1.29) λείπει ο όρος τριβής/συγκρούσεων, καθώς η Navier-Stokes περιγράφει ένα ρευστό και οι δυνάμεις αυτές, ως εσωτερικές, αλληλοαναιρούνται. Ο όρος  $\rho c_{vsc} \nabla^2 \mathbf{u}$ , ο οποίος περιγράφει την επίδραση του ιξώδους, αντιστοιχεί στην όποια συνεισφορά των συγκρούσεων στον όρο  $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{P}} - \nabla P$ . Η ύπαρξη συχνών συγκρούσεων είναι βασική παραδοχή για την περιγραφή Navier-Stokes, και λόγω της παραπάνω ομοιότητας αυτό σηματοδοτεί και τα όρια της ισχύος της θεωρίας ρευστού για το πλάσμα. Η ύπαρξη θερμοδυναμικής ισορροπίας στο πλάσμα προϋποθέτει την ύπαρξη συγκρούσεων. Ακόμη όμως και στην περίπτωση που οι συγκρούσεις είναι σποραδικές, η θεωρία ρευστού μπορεί να περιγράψει καταστάσεις όπου εμφανίζεται η ίδια φυσική συμπεριφορά λόγω κάποιου άλλου παράγοντα, π.χ. ενός ισχυρού μαγνητικού πεδίου που μειώνει τις γρήγορες ευθύγραμμες ροές, αναγκάζοντας τα φορτία σε κυκλικές περιστροφές Larmor.

Τελειώνοντας, αναφέρουμε συνοπτικά μερικές εφαρμογές της θεωρίας ρευστού. Μία σημαντική συνεισφορά, κεντρικής σημασίας για το εργαστηριακό πλάσμα, είναι στη μελέτη της ισορροπίας του πλάσματος. Παρόλο που το γενικό πρόβλημα του καθορισμού της ισορροπίας είναι πολύπλοκο, αρκετή φυσική πληροφορία περιέχεται στο μοντέλο MHD. Με τη βοήθεια της εξίσωσης (1.37), σε συνδυασμό με τις εξισώσεις Maxwell (2.4), (2.5), μπορούμε να μελετήσουμε την ισορροπία του πλάσματος αν αναλύσουμε τις χρονικά ανεξάρτητες λύσεις ( $\partial/\partial t = 0$ ). Σε αυτό το πλαίσιο, η εξίσωση (1.37) με αντικατάσταση της (2.5) παίρνει τη μορφή

$$\nabla \left( P + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

Ενδεικτικά, στην περίπτωση όπου δεν υπάρχει διαμήκης μεταβολή του μαγνητικού πεδίου, η παραπάνω εξίσωση δηλώνει ότι στην κατάσταση ισορροπίας το άθροισμα της κινητικής και της μαγνητικής πίεσης του πλάσματος είναι σταθερό. Έτσι, το πεδίο είναι υψηλό σε περιοχές όπου η πίεση είναι χαμηλή και αντίστροφα. Περαιτέρω, να αναφέρουμε ότι μέσω του μοντέλου MHD, όπως και του κινητικού μοντέλου που ακολουθεί, μπορεί να καθοριστεί η ευστάθεια της ισορροπίας του πλάσματος. Ο τρόπος υπολογισμού των ασταθειών και του



ρυθμού εξάπλωσής τους είναι παρόμοιος με το γενικό τρόπο υπολογισμού κυμάτων στο πλάσμα. Άλλες εφαρμογές είναι στη μελέτη της διάχυσης και των ολισθήσεων των ρευστών και της διάχυσης των μαγνητικών γραμμών.

### 1.2.3 Κινητική θεωρία

Στο μοντέλο που θα μας απασχολήσει εδώ, η περιγραφή είναι μεν στο μικροσκοπικό επίπεδο αλλά έχει στατιστικό χαρακτήρα. Με αυτό εννοούμε ότι δεν ενδιαφέρει η ακριβής θέση και ταχύτητα των σωματιδίων, αλλά μόνο η πιθανότητα να βρίσκονται στη ‘γειτονιά’ μιας συγκεκριμένης κατάστασης στο χώρο φάσεων. Η βάση γι’ αυτή την περιγραφή είναι η συνάρτηση κατανομής (distribution function)  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ , που δίνει την πυκνότητα πιθανότητας ένα σωματίδιο να βρίσκεται στην κατάσταση  $(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ , δηλαδή τη χρονική στιγμή  $t$  να βρίσκεται σε μια θέση στο διάστημα  $[\mathbf{r}, \mathbf{r} + d\mathbf{r}]$  με ορμή από  $\mathbf{p}$  ως  $\mathbf{p} + d\mathbf{p}$ . Η ακρίβεια μιας τέτοιας περιγραφής στηρίζεται στο ότι η επίδραση των δυνάμεων από μακρινές αποστάσεις διαρκεί πολύ περισσότερο χρόνο από την αντίστοιχη των κοντινών δυνάμεων. Αυτό επιτρέπει τη ‘μαζοποίηση’ των ισοενεργειακών σωματιδίων σε αποστάσεις  $n_p^{-1/3} < |d\mathbf{r}| \ll \lambda_D$ , δηλαδή τη μη αναγκαιότητα διάκρισης μεταξύ σωματιδίων που έχουν περίπου την ίδια ορμή και βρίσκονται γύρω από μια συγκεκριμένη θέση σε ακτίνα πολύ μικρότερη από τη χαρακτηριστική απόσταση επίδρασης των συλλογικών φαινομένων. (Με  $\lambda_D$  συμβολίζεται το μήκος Debye, μια χαρακτηριστική παράμετρος του πλάσματος η οποία αντιστοιχεί στην ελάχιστη ακτίνα θωράκισης του κάθε σωματιδίου από τα εξωτερικά ηλεκτρικά πεδία)

Για να υπολογίσει κανείς τη συνάρτηση κατανομής ξεκινά από το γεγονός ότι ο συνολικός αριθμός σωματιδίων σε οποιαδήποτε περιοχή του χώρου φάσεων δεν αλλάζει στο χρόνο. Αυτό σημαίνει ότι οι ρυθμοί εισόδου/εξόδου από το σύνορο της περιοχής και οι αλλαγές λόγω συγκρούσεων έχουν αλληλοαναιρούμενες μεταβολές. Στο πλαίσιο της συνάρτησης κατανομής, ο αριθμός σωματιδίων στο στοιχείο όγκου  $d^3r d^3p$  του 6-διάστατου χώρου φάσεων τη χρονική στιγμή  $t$  είναι  $\int f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d^3r d^3p$ . Με διαφορίση ως προς το χρόνο, και λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις  $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$  και την εξίσωση κίνησης (1.3), καταλήγουμε στην κινητική εξίσωση Boltzmann-Vlasov <sup>2</sup>

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{col} \quad (1.39)$$

Η εξίσωση αυτή είναι γενική (ισχύει και για κλασικά και για σχετικιστικά

<sup>2</sup>Στη βιβλιογραφία συνηθίζεται η κινητική εξίσωση να αναφέρεται σαν εξίσωση Boltzmann όταν συμπεριλαμβάνεται ο όρος συγκρούσεων και σαν Vlasov όταν δε συμπεριλαμβάνεται.

σωματίδια). Αυτό που αλλάζει σε κάθε περίπτωση είναι η μαθηματική σχέση μεταξύ ταχύτητας και ορμής που πρέπει να αντικαταστήσουμε ώστε να προχωρήσουμε στη λύση. Το άθροισμα των όρων στο αριστερό μέλος αποτελεί την ολική παράγωγο  $df/dt$ , ενώ ο όρος στο δεξί μέλος δίνει τις αλλαγές στην  $f$  λόγω συγκρούσεων.

Στην περίπτωση που οι συγκρούσεις είναι σημαντικές, ο καθορισμός του όρου συγκρούσεων παίζει πρωταγωνιστικό ρόλο στην επίλυση της εξίσωσης Boltzmann-Vlasov και τη μορφή της λύσης. Μερικές φορές είναι δυνατό να χρησιμοποιηθούν απλές μαθηματικές εκφράσεις για τον όρο συγκρούσεων, όπως π.χ.

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{col} = -\nu_{ei} (f - f|_{t=0}) \quad (1.40)$$

Η παραπάνω διατύπωση είναι επαρκής για να περιγράψει το πλάσμα καθώς οδεύει προς τη θερμοδυναμική ισορροπία, αλλά δε μπορεί να περιγράψει π.χ. το φαινόμενο της σκέδασης στο χώρο ταχυτήτων. Όταν είναι επιθυμητή η πλήρης περιγραφή των συγκρούσεων, πρέπει να καταφύγουμε στη διαφορική εξίσωση *Fokker-Planck*:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{col} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left( \frac{d\langle \Delta \mathbf{v} \rangle}{dt} f \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{v} \partial \mathbf{v}} \left( \frac{d\langle \Delta \mathbf{v} \Delta \mathbf{v} \rangle}{dt} f \right) \quad (1.41)$$

Στην εξίσωση αυτή, οι μεταβολές της ταχύτητας υπολογίζονται από τις τροχιές των σωματιδίων λύνοντας την αντίστοιχη εξίσωση κίνησης. Οι όροι  $d\langle \Delta \mathbf{v} \rangle / dt$  έχουν εν γένει αντίθετη φορά με την ταχύτητα και συνδέονται με τη δυναμική τριβή που προκαλούν οι συγκρούσεις, ενώ οι όροι  $d\langle \Delta \mathbf{v} \Delta \mathbf{v} \rangle / dt$  είναι ουσιαστικά συντελεστές διάχυσης, καθώς έχουν την τάση να προκαλούν εξάπλωση των τιμών της ταχύτητας σε μεγάλο εύρος εντός του χώρου ταχυτήτων.

Μια ειδική λύση με μεγάλο φυσικό ενδιαφέρον έχουμε στην περίπτωση που το πλάσμα βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία. Στην κατάσταση αυτή οι μακροσκοπικές παράμετροι δεν αλλάζουν με το χρόνο, ενώ τα μικροσκοπικά μεγέθη έχουν τυχαίες διακυμάνσεις γύρω από μέσες τιμές. Γενικά, το πλάσμα δε βρίσκεται σε μια τέτοια κατάσταση λόγω της επίδρασης εξωτερικών πεδίων ή ασταθειών. Όταν όμως δεν υπάρχει ισχυρή αλληλεπίδραση με το περιβάλλον, τότε λόγω του τυχαίου χαρακτήρα των συγκρούσεων το πλάσμα τελικά φτάνει στη θερμοδυναμική ισορροπία και παραμένει εκεί. Στην περίπτωση αυτή η κινητική εξίσωση απλοποιείται διότι όλες οι χρονικές παράγωγοι μηδενίζονται, και αν επιπλέον υποθέσουμε ότι η ισορροπία ισχύει ομογενώς σε όλο το πλάσμα

( $\partial f / \partial \mathbf{r} = 0$ ) η επίλυση είναι αρκετά απλή.

Η λύση αυτή είναι γνωστή ως συνάρτηση κατανομής Maxwell, και στη μη σχετικιστική της μορφή γράφεται

$$f(\mathbf{p}) = \frac{n}{\pi^{3/2} m^3 v_t^3} e^{-p^2 / (2m^2 v_t^2)} \quad (1.42)$$

Όταν το πλάσμα είναι σχετικιστικό, η κατανομή Maxwell έχει τη μορφή

$$f(\mathbf{p}) = \frac{n}{m^3 v_t^3 K_2(v_t^2/c^2)} e^{-\sqrt{p^2 + m^2 c^2} / (2m^2 v_t^2)} \quad (1.43)$$

όπου  $K_2(x)$  είναι η τροποποιημένη συνάρτηση Bessel τύπου 2 και 2<sup>ης</sup> τάξης.

Στην κατανομή Maxwell, η θερμοκρασία (εμφανίζεται στη θερμική ταχύτητα) είναι μια πολύ σημαντική παράμετρος<sup>3</sup>. Εν γένει, λόγω του διαφορετικού ρυθμού συγκρούσεων, σε κάθε πληθυσμό αντιστοιχεί διαφορετική θερμοκρασία και κατά συνέπεια και διαφορετική συνάρτηση κατανομής. Η κατάσταση γίνεται πίο πολύπλοκη όταν το πλάσμα είναι μαγνητισμένο, κι αυτό γιατί, λόγω της μορφής της δύναμης Lorentz, οι δυνάμεις που ασκούνται σε σωματίδια που κινούνται παράλληλα και κάθετα στο μαγνητικό πεδίο είναι διαφορετικές. Επομένως, οι ταχύτητες κάθετα και παράλληλα στο μαγνητικό πεδίο ενδέχεται να ανήκουν σε διαφορετικές κατανομές Maxwell με διαφορετικές θερμοκρασίες  $T_{\parallel}$ ,  $T_{\perp}$ .

Η κινητική θεωρία παρέχει την όσο το δυνατό πιο πλήρη περιγραφή σε όλο το φάσμα των παραμέτρων. Το στατιστικό μοντέλο είναι πληρέστερο από αυτό των ρευστών διότι μελετά το πλάσμα στο μικροσκοπικό επίπεδο, οπότε συμπεριλαμβάνει φυσικές λεπτομέρειες που η θεωρία ρευστού δε μπορεί λόγω του μακροσκοπικού της χαρακτήρα, αλλά και πίο πρακτικό από τη μικροσκοπική περιγραφή των κινήσεων σωματιδίων. Με την κινητική θεωρία μπορούν να μελετηθούν όλα τα προβλήματα που αναφέραμε σαν εφαρμογές στις προηγούμενες υποενότητες. Πέρα όμως από τις διαπιστώσεις αυτές, το πίο ισχυρό επιχείρημα για την πληρότητα της κινητικής θεωρίας είναι ότι εμπεριέχει στη δομή της τόσο την κινηματική των σωματιδίων όσο και τη θεωρία ρευστού.

Ας μιλήσουμε πρώτα για τη σχέση της κινητικής θεωρίας με την κίνηση του ενός σωματιδίου. Η γενική λύση της εξίσωσης κίνησης (1.3) περιλαμβάνει έξι σταθερές ολοκλήρωσης, έστω  $\mathcal{B}_j$  ( $j = 1, \dots, 6$ ), καθώς αυτή είναι 2<sup>ης</sup> τάξης διαφορική εξίσωση στις τρεις διαστάσεις. Είναι εύκολο να δειχθεί ότι οποιαδήποτε συνάρτηση των σταθερών κίνησης είναι συνάρτηση κατανομής, δηλαδή

<sup>3</sup>Στις εφαρμογές συνήθως λογίζεται σαν θερμοκρασία το  $k_B T$ , μετρούμενο σε eV.

λύση της κινητικής εξίσωσης. Πράγματι, αντικαθιστώντας μια τέτοια συνάρτηση  $f = f(\mathcal{B}_j) = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  (μπορούμε από την εξίσωση κίνησης να εκφράσουμε τις  $\mathcal{B}_j$  συναρτήσει των  $\mathbf{r}, \mathbf{p}, t$ ) στην εξίσωση (1.39) βρίσκουμε ότι την επαληθεύει

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \frac{df}{dt} = \sum_{j=1}^6 \frac{\partial f}{\partial \mathcal{B}_j} \frac{d\mathcal{B}_j}{dt} = 0$$

Συνεπώς, σε συνδυασμό με τις συγκεκριμένες αρχικές και συνοριακές συνθήκες, η λύση της κινητικής εξίσωσης καθορίζεται επακριβώς από τις τροχιές των σωματιδίων μέσω των σταθερών της κίνησης.

Η σύνδεση με τα μοντέλα ρευστών βρίσκεται στο ότι οι μακροσκοπικές ποσότητες που χαρακτηρίζουν το πλάσμα πηγάζουν ουσιαστικά από μέσες τιμές κατάλληλα ορισμένες με βάση τη συνάρτηση κατανομής. Συγκεκριμένα, η πυκνότητα, η ταχύτητα ροής και ο τανυστής πίεσης ορίζονται ως ακολούθως:

$$n_s(\mathbf{r}, t) = \int f_s(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d^3\mathbf{p} \quad (1.44)$$

$$\mathbf{u}_s(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{n_s(\mathbf{r}, t)} \int \mathbf{v} f_s(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d^3\mathbf{p} \quad (1.45)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_s(\mathbf{r}, t) = m_s \int (\mathbf{v} - \mathbf{u}_s) \star (\mathbf{v} - \mathbf{u}_s) f_s(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d^3\mathbf{p} \quad (1.46)$$

όπου με τον αστερίσκο συμβολίζουμε το δυϊκό γινόμενο (dual product) δύο διανυσμάτων. Σε αυτό το πλαίσιο, οι εξισώσεις των ρευστών προκύπτουν από τις στατιστικές ροπές της εξίσωσης Boltzmann-Vlasov. Ενδεικτικά, για τη ροπή μηδενικής τάξης, ολοκληρώνοντας την Εξ. (1.39) ως προς την ορμή και υπολογίζοντας τον κάθε όρο ξεχωριστά, καταλήγουμε απευθείας στην εξίσωση της συνέχειας. Οι πρώτοι δύο όροι δίνουν

$$\int \frac{\partial f_s}{\partial t} d^3\mathbf{p} = \frac{\partial}{\partial t} \int f_s d^3\mathbf{p} = \frac{\partial n_s}{\partial t}$$

$$\int \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{r}} d^3\mathbf{p} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \int \mathbf{v} f_s d^3\mathbf{p} = \nabla \cdot (n_s \mathbf{u}_s)$$

δηλαδή τους όρους της εξίσωσης συνέχειας. Ο τρίτος όρος παίρνει τη μορφή

$$\int (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{p}} d^3\mathbf{p} = \int \frac{\partial(f_s \mathbf{E})}{\partial \mathbf{p}} d^3\mathbf{p} + \int \frac{\partial(f_s \mathbf{v} \times \mathbf{B})}{\partial \mathbf{p}} d^3\mathbf{p} - \int f_s \frac{\partial(\mathbf{v} \times \mathbf{B})}{\partial \mathbf{p}} d^3\mathbf{p}$$

και είναι μηδέν διότι (α) τα δύο πρώτα ολοκληρώματα μετατρέπονται σε επιφανειακά, τα οποία είναι μηδενικά καθώς η συνάρτηση κατανομής μηδενίζεται

στο άπειρο ( $\beta$ ) το τρίτο ολοκλήρωμα είναι επίσης μηδέν διότι η μεταβολή του διανύσματος  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  είναι κάθετη στην ορμή. Στην περίπτωση που θεωρούμε και τον όρο στο δεύτερο μέλος, και αυτός είναι μηδέν διότι οι συγκρούσεις δεν αλλάζουν το συνολικό αριθμό των σωματιδίων. Με ακριβώς αντίστοιχο τρόπο προκύπτει η εξίσωση ισοζυγίου ορμής από τη ροπή πρώτης τάξης, πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση Boltzmann-Vlasov με την ταχύτητα και ολοκληρώνοντας ως προς την ορμή.

## Κεφάλαιο 2

# Δυναμική Φορτισμένων Σωματιδίων

Στη μελέτη του πλάσματος μας ενδιαφέρει περισσότερο η συλλογική συμπεριφορά των σωματιδίων, όπως αυτή εκφράζεται από τις εξισώσεις Vlasov ή Boltzmann που περιγράφουν τη χωροχρονική εξέλιξη μιας συνάρτησης κατανομής, όπως είδαμε από την *Κινητική Θεωρία*.

Ένας από τους παράγοντες που κάνουν την ανάλυση του πλάσματος αρκετά απαιτητική, είναι το γεγονός ότι οι πυκνότητες παίρνουν ενδιάμεσες τιμές. Τα ρευστά, όπως πχ το νερό είναι τόσο πυκνά, και κατά συνέπεια δεν λαμβάνουμε υπ' όψιν τις κινήσεις του καθενός μορίου ξεχωριστά. Οι συγκρούσεις κυριαρχούν, και οι απλές εξισώσεις της ρευστοδυναμικής αρκούν για την περιγραφή. Στο άλλο άκρο, σε συσκευές πολύ χαμηλής πυκνότητας όπως σε κάποιους επιταχυντές σωματιδίων, λαμβάνονται υπ'όψιν αποκλειστικά οι τροχιές μεμονωμένων σωματιδίων και τα συλλογικά φαινόμενα συχνά αγνοούνται. Το πλάσμα συμπεριφέρεται κάποιες φορές ως ρευστό, άλλες πάλι ως συλλογή μεμονωμένων σωματιδίων. Για αυτό το λόγο, το πρώτο βήμα προς την κατανόηση του πλάσματος είναι η μελέτη της κίνησης μεμονωμένων φορτισμένων σωματιδίων σε ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία.

Οι χαρακτηριστικές καμπύλες της εξίσωσης Boltzmann δίνονται από τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης των σωματιδίων, ενώ η λύση της εξίσωσης Vlasov προκύπτει ως συνάρτηση των πρώτων ολοκληρωμάτων της κίνησης.

Τέλος, μελετώντας τις κινήσεις μεμονωμένων φορτισμένων σωματιδίων, μπορούμε να εξάγουμε γενικότερα ποιοτικά συμπεράσματα όσον αφορά τη μακροσκοπική συμπεριφορά του πλάσματος (πχ μαγνητική συγκράτηση) σε κάποια δεδομένη τοπολογία μαγνητικού πεδίου.

Υπάρχουν δύο μαθηματικά ισοδύναμοι φορμαλισμοί για την περιγραφή της δυναμικής των φορτισμένων σωματιδίων:

- Οι εξισώσεις των Newton και Lorentz
- Ο φορμαλισμός Lagrange - Hamilton

Οι δύο διαφορετικοί τρόποι περιγραφής είναι κατ' ουσίαν συμπληρωματικοί. (βλ. και [11]) Η εξίσωση Lorentz είναι 'δαισθητική' και κατάλληλη για προσεγγιστικές μεθόδους, ενώ ο πιο αφηρημένος φορμαλισμός Lagrange - Hamilton εκμεταλλεύεται τις χωρικές και χρονικές συμμετρίες.

Αν και η κυρίως δουλειά μας θα γίνει χρησιμοποιώντας τη Χαμιλτονιανή Δυναμική, εντούτοις θα αναφερθούμε εκτενώς και στις δύο περιγραφές, τονίζοντας την ισοδυναμία τους στη θεώρηση της δυναμικής των σωματιδίων.

## 2.1 Νευτώνεια Δυναμική

Ξεκινάμε στη γενική περίπτωση θεωρώντας τις Νευτώνειες εξισώσεις κίνησης για ένα μεμονωμένο σωματίδιο φορτίου  $q$  που ακολουθεί τροχιά  $\mathbf{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$  το οποίο κινείται σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο το οποίο περιγράφεται από τις επιμέρους συνιστώσες  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  και  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  αντίστοιχα. Οι εξισώσεις κίνησης για αυτό το σωματίδιο είναι

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) \quad (2.1)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = q\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{q}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (2.2)$$

όπου  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$  και  $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$  είναι η ηλεκτρομαγνητική δύναμη Lorentz.

Εν γένει οι βαρυτικές δυνάμεις θεωρούνται ως αμελητέες (αν και όπως θα δούμε στη συνέχεια, υπό συνθήκες μπορεί να διαδραματίσουν σημαντικό ρόλο), ενώ οι πυρηνικές δυνάμεις, αν και ισχυρές, έχουν πολύ μικρό βεληνεκές μας απασχολούν μόνο σε δυαδικές κρούσεις σωματιδίων. Για αυτό το λόγο η ηλεκτρομαγνητική δύναμη Lorentz είναι η μόνη η οποία λαμβάνεται υπ' όψιν.

Η εξέλιξη των πεδίων  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  και  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  δίνεται από τις εξισώσεις του Maxwell :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left( \mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (2.6)$$

όπου το  $\rho(\mathbf{r}, t)$  αντιστοιχεί στην πυκνότητα φορτίου και το  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$  στην πυκνότητα ρεύματος.

Οι εξισώσεις (2.4) και (2.6) ικανοποιούνται εάν εκφράσουμε τα πεδία συναρτήσει ενός βαθμωτού δυναμικού  $\phi(\mathbf{r}, t)$  και ενός διανυσματικού δυναμικού  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  ως εξής:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (2.8)$$

Εφ' εξής, για λόγους συντομίας αντί για  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  και  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  θα γράφουμε  $\mathbf{E}$  και  $\mathbf{B}$ .

### 2.1.1 Στατικό και Ομογενές Μαγνητικό Πεδίο

$$\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$$

Η κίνηση σωματιδίου μάζας  $m$  και φορτίου  $q$  μέσα σε χρονικά σταθερό και ομογενές μαγνητικό πεδίο περιγράφεται, όπως είπαμε, από την εξίσωση (2.2), η οποία απουσία ηλεκτρικού πεδίου γράφεται ως εξής:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2.9)$$

Εάν το μαγνητικό πεδίο είναι  $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$  και η ταχύτητα  $\mathbf{v}$  αναλυθεί σε μία συνιστώσα κάθετη προς το μαγνητικό πεδίο και μία παράλληλη, δηλαδή  $\mathbf{v} = v_{\perp} \mathbf{e}_{\perp} + v_{\parallel} \mathbf{e}_{\parallel}$ , τότε η εξίσωση (2.9) γράφεται

$$\frac{dv_{\parallel}}{dt} = 0 \quad (2.10)$$

και



$$\frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} = \left(\frac{qB}{mc}\right) \mathbf{v}_\perp \times \hat{\mathbf{z}} \quad (2.11)$$

Το φορτίο περιστρέφεται γύρω από το μαγνητικό πεδίο με *κυκλοτρονική συχνότητα* (*cyclotron frequency*)

$$\omega_c \equiv \frac{|q|B}{mc} \quad (2.12)$$

Η εξίσωση κίνησης του φορτίου μέσα σε αυτό το ομογενές στατικό μαγνητικό πεδίο λοιπόν θα γράφεται ως εξής (βλ. και [2]):

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \pm\omega_c (\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{z}}) \quad (2.13)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη αυτής της εξίσωσης εσωτερικά με την ταχύτητα  $\mathbf{v}$  βρίσκουμε ότι  $d(mv^2/2)/dt = 0$ , δηλαδή η ολική κινητική ενέργεια διατηρείται αφού η δύναμη  $\mathbf{F} = (q/c)\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  είναι κάθετη στην ταχύτητα. Στο εγκάρσιο ως προς το μαγνητικό πεδίο επίπεδο  $x - y$  η δύναμη είναι πάντα κάθετη στην τροχιά (ταχύτητα), συνεπώς έχει το ρόλο κεντρομόλου δύναμης και συνεπάγεται κυκλική (κυκλοτρονική) κίνηση με:

- Κυκλοτρονική συχνότητα  $\omega_c = \frac{|q|B}{mc}$
- Ταχύτητα σταθερού μέτρου κατά μήκος του μαγνητικού πεδίου  $v_\perp = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$
- Σταθερή ακτίνα περιστροφής  $\rho_L = v_\perp/|\omega_c|$  (ακτίνα *Larmor*)

Η εξίσωση κίνησης (2.9) γράφεται για κάθε διεύθυνση ως εξής ([13]):

$$m\dot{v}_x = qBv_y \quad (2.14)$$

$$m\dot{v}_y = -qBv_x \quad (2.15)$$

$$m\dot{v}_z = 0 \quad (2.16)$$

$$\ddot{v}_x = \frac{qB}{m}\dot{v}_y = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x \quad (2.17)$$

$$\ddot{v}_y = \frac{qB}{m}\dot{v}_x = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_y \quad (2.18)$$

Βλέπουμε ότι αντιστοιχεί σε κίνηση απλού αρμονικού ταλαντωτή με συχνότητα  $\omega_c$ .

Θεωρώντας ότι δεν έχουμε αρχική φάση στην κίνηση, η λύση του ανωτέρω συστήματος εξισώσεων μας δίνει

$$v_{x,y} = v_{\perp} \exp(\pm i \omega_c t) \quad (2.19)$$

όπου το  $\pm$  έχει να κάνει με το πρόσημο του φορτίου και με  $i$  συμβολίζουμε τη φανταστική μονάδα. Συνεπώς:

$$v_x = v_{\perp} e^{i \omega_c t} = \dot{x} \quad (2.20)$$

$$v_y = \frac{m}{qB} \dot{v}_x = \pm \frac{1}{\omega_c} \dot{v}_x = \pm i v_{\perp} e^{i \omega_c t} = \dot{y} \quad (2.21)$$

Ενώ εκτελώντας άλλη μια ολοκλήρωση καταλήγουμε στις σχέσεις:

$$x - x_0 = -i \frac{v_{\perp}}{\omega_c} e^{i \omega_c t} \quad y - y_0 = \pm \frac{v_{\perp}}{\omega_c} e^{i \omega_c t} \quad (2.22)$$

Κρατώντας μόνο τα *πραγματικά μέρη* των ανωτέρω εξισώσεων, και εισάγοντας την έκφραση για την ακτίνα Larmor, η κίνηση περιγράφεται πλήρως ([4]) από τις εξισώσεις (θεωρώντας ότι δεν έχουμε αρχική φάση στην περιστροφή):

$$x(t) = x_0 + \rho_L \sin(\omega_c t)$$

$$y(t) = y_0 \pm \rho_L \cos(\omega_c t)$$

$$z(t) = z_0 + v_{\parallel} t$$

και

$$v_x = -v_{\perp} \sin(\omega_c t)$$

$$v_y = -v_{\perp} \cos(\omega_c t)$$

όπου  $(x_0, y_0, z_0)$  οι συντεταγμένες του κέντρου περιστροφής (guiding center). Κατά την κίνηση σε εξωτερικά επιβαλλόμενο στατικό ομογενές μαγνητικό πεδίο, η θέση του κέντρου περιστροφής παραμένει αμετάβλητη στο επίπεδο  $x-y$ , ενώ το ίδιο ολισθαίνει κινούμενο κατά μήκος του άξονα  $z$ . Το φορτίο ακολουθεί μια *ελικοειδή τροχιά* στο χώρο με σταθερό βήμα όταν κινείται μέσα σε στατικό ομογενές μαγνητικό πεδίο. Η κατεύθυνση της περιστροφικής κίνησης είναι τέτοια, ώστε το επαγόμενο εκ του περιστρεφόμενου φορτισμένου σωματιδίου μαγνητικό πεδίο να αντιτίθεται στο εξωτερικά επιβεβλημένο πεδίο. Αυτός είναι

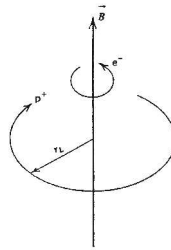
ο λόγος που το πλάσμα παρουσιάζει *διαμαγνητικές* ιδιότητες.

Εφόσον η δύναμη Lorentz είναι κάθετη στην ταχύτητα σε κάθε περίπτωση, δεν παράγει έργο ([20]). Λαμβάνοντας το εσωτερικό γινόμενο:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = 0 \quad (2.23)$$

καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι τόσο η κινητική ενέργεια του σωματιδίου, όσο και η ταχύτητα, είναι σταθερές. Αυτό το αποτέλεσμα ισχύει για οποιαδήποτε χωρική εξάρτηση του  $\mathbf{B}$ , δεδομένου ότι αυτό παραμένει στατικό - χρονοανεξάρτητο.

Γενικά έχουμε θεωρήσει ότι η ενέργεια του σωματιδίου μεταβάλλεται μόνο λόγω του έργου που παράγεται από εξωτερικά επιβαλλόμενα πεδία. Αυτή η υπόθεση δεν είναι απόλυτα σωστή, δεδομένου ότι ένα επιταχυνόμενο φορτισμένο σωματίδιο ακτινοβολεί ενέργεια υπό μορφή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Εντούτοις, η επίδραση αυτή είναι πολύ μικρή και γενικά θα αγνοηθεί από εδώ και στο εξής.



Σχήμα 2.1: Τροχιές Larmor

### 2.1.2 Στατικό και Ομογενές Μαγνητικό Πεδίο παρουσία σταθερής εξωτερικής δύναμης ( $\mathbf{B} = B\hat{z}$ , $\mathbf{F} = \text{σταθ.}$ )

Η εξίσωση κίνησης του σωματιδίου μάζας  $m$  και φορτίου  $q$  γράφεται ([2])

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \mathbf{F} \quad (2.24)$$

η οποία αναλύεται και πάλι στις εξής:

$$m \frac{d\mathbf{v}_{\parallel}}{dt} = \mathbf{F}_{\parallel} \quad (2.25)$$

και

$$m \frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} = (qB) (\mathbf{v}_{\perp} \times \hat{\mathbf{z}}) + \mathbf{F}_{\perp} \quad (2.26)$$

Αναλύοντας την ταχύτητα  $\mathbf{v}_{\perp}$  σε δύο συνιστώσες  $\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{u} + \mathbf{w}_D^F$ , όπου

$$\mathbf{w}_D^F = \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{qB^2} \quad (2.27)$$

και αντικαθιστώντας στην εξίσωση (2.26) βρίσκουμε ότι

$$m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = q (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (2.28)$$

δηλαδή το φορτίο εκτελεί μια κυκλική περιοδική τροχιά (εάν  $v_{\perp} = F_{\perp} = 0$ ) σε ένα σύστημα αναφοράς που κινείται με σταθερή ταχύτητα  $\mathbf{w}_D^F$ . Η ταχύτητα αυτή ονομάζεται *ταχύτητα ολίσθησης* (*drift velocity*) και γενικά εξαρτάται από το φορτίο του σωματιδίου ως προς μέτρο και πρόσημο. Το κέντρο περιστροφής, όπως έχουμε δει, ονομάζεται 'guiding center' και σύμφωνα με όσα περιγράψαμε κινείται με την ταχύτητα ολίσθησης  $\mathbf{w}_D^F$ . Η κίνηση του κέντρου περιστροφής φαίνεται να μην ακολουθεί τους νόμους του Νεύτωνα και να αντιδρά διαφορετικά στις εξωτερικές δυνάμεις  $\mathbf{F}_{\parallel}$  και  $\mathbf{F}_{\perp}$ , δηλαδή να επιταχύνεται κατά μήκος των μαγνητικών γραμμών και να κινείται με σταθερή ταχύτητα κάθετα προς αυτές.

Δύο είδη σταθερών εξωτερικών δυνάμεων έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον στη φύση:

1. Το σταθερό εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο ( $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ ) και
2. Το βαρυτικό πεδίο ( $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ )

Η ταχύτητα ολίσθησης του φορτίου κατά την πρώτη περίπτωση, μέσα σε σταθερό ηλεκτρικό πεδίο είναι

$$\mathbf{w}_D^E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (2.29)$$

Παρατηρούμε ότι σε αυτή την περίπτωση τα ηλεκτρόνια και τα ιόντα κινούνται με την ίδια ταχύτητα. Μπορούμε λοιπόν να μεταφερθούμε σε ένα νέο σύστημα αναφοράς, κινούμενο με την ταχύτητα ολίσθησης, στο οποίο το ηλεκτρικό πεδίο να είναι μηδέν.

Μελετώντας την περίπτωση κατά την οποία έχουμε στατικό ομογενές μαγνητικό πεδίο παρουσία ηλεκτρικού πεδίου, η κίνηση του φορτισμένου σωματιδίου θα είναι η υπέρθεση δύο επιμέρους κινήσεων: της συνήθους κυκλικής περιστροφής Larmor που είδαμε πριν και της ολίσθησης του κέντρου περιστροφής. Επιλέγουμε το  $\mathbf{E}$  στο επίπεδο  $x - z$  ούτως ώστε να έχουμε  $E_y = 0$ . Όπως είδαμε και προηγουμένως, η  $z$  συνιστώσα της ταχύτητας δε συσχετίζεται με τις εγκάρσιες συνιστώσες και μπορεί να αντιμετωπιστεί ξεχωριστά. Η εξίσωση κίνησης τώρα είναι η γνωστή μας:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2.30)$$

της οποίας η  $z$  συνιστώσα είναι

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{q}{m} E_z \Rightarrow v_z = \frac{qE_z}{m} t + v_{z0} \quad (2.31)$$

Βλέπουμε την επιτάχυνση κατά μήκος του  $\mathbf{B}$ . Οι εγκάρσιες συνιστώσες της ταχύτητας θα είναι αντίστοιχα:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{q}{m} E_x \pm \omega_c v_y \quad (2.32)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = 0 \mp \omega_c v_x \quad (2.33)$$

Διαφορίζοντας άλλη μια φορά (για σταθερό  $\mathbf{E}$ ), παίρνουμε:

$$\ddot{v}_x = -\omega_c^2 v_x \quad (2.34)$$

$$\ddot{v}_y = \mp \omega_c \left( \frac{q}{m} E_x \pm \omega_c v_y \right) = -\omega_c^2 \left( v_y + \frac{E_x}{B} \right) \quad (2.35)$$

Μπορούμε να γράψουμε την τελευταία σχέση ως

$$\frac{d^2}{dt^2} \left( v_y + \frac{E_x}{B} \right) = -\omega_c^2 \left( v_y + \frac{E_x}{B} \right) \quad (2.36)$$

Με αυτόν τον τρόπο έχουμε ευθεία αναγωγή στο προηγούμενο πρόβλημα (ύπαρξη μόνο στατικού μαγνητικού πεδίου), όπου έχουμε αντικαταστήσει την  $v_y$  με την  $v_y + E_x/B$ . Οι σχέσεις που μας δίνουν λοιπόν την ταχύτητα θα πάρουν ανάλογα τη μορφή:

$$v_x = v_{\perp} e^{i\omega_c t} \quad (2.37)$$

$$v_y = \pm i v_{\perp} e^{i\omega_c t} - \frac{E_x}{B} \quad (2.38)$$

Η περιστροφική κίνηση Larmor είναι η ίδια με πριν, τώρα όμως έχει υπερτεθεί η ολίσθηση του κέντρου περιστροφής στην κατεύθυνση  $-y$ . (για  $E_x > 0$ )

Για να εξάγουμε έναν γενικότερο τύπο για την ταχύτητα ολίσθησης, μπορούμε να επιστρέψουμε στην αρχική εξίσωση κίνησης (2.30) και να την επιλύσουμε διανυσματικά. Αγνοούμε τον όρο  $m d\mathbf{v}/dt$  ο οποίος μας δίνει τη γνωστή μας κυκλοτρονική κίνησης συχνότητας  $\omega_c$  και ασχολούμαστε με την εξίσωση

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0 \quad (2.39)$$

Πολλαπλασιάζοντας εξωτερικά με το  $\mathbf{B}$ , παίρνουμε

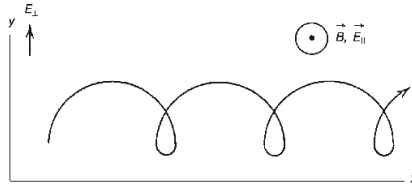
$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \mathbf{v} B^2 - \mathbf{B} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \quad (2.40)$$

Οι εγκάρσιες συνιστώσες αυτής της εξίσωσης είναι

$$\mathbf{v}_\perp = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \equiv \mathbf{w}_D^E \quad (2.41)$$

**Ολίσθηση  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$**  Αυτή η ολίσθηση είναι πολύ σημαντική στη Φυσική Πλάσματος. Ονομάζεται *Ολίσθηση  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$*  και αποτελεί ιδιότητα των πεδίων, μη εξαρτώμενη από τη μάζα ή το φορτίο των σωματιδίων. Αυτό εξηγείται ως εξής: Στην πρώτη ‘ημιπερίοδο’, το θετικά φορτισμένο ιόν αυξάνει σε ενέργεια από το ηλεκτρικό πεδίο, και ως εκ τούτου αυξάνονται τόσο η  $v_\perp$  του, όσο και η  $\rho_L$  του. Στο δεύτερο μισό της τροχιάς του, χάνει ενέργεια και μειώνεται η  $\rho_L$  του. Αυτή η διαφορά της ακτίνας Larmor στη δεξιά και την αριστερή πλευρά της τροχιάς οδηγεί στην ολίσθηση  $\mathbf{w}_D^E$ . Αντίστοιχα ένα αρνητικά φορτισμένο ηλεκτρόνιο περιστρέφεται στην αντίθετη κατεύθυνση, αλλά κερδίζει την ενέργειά του από την αντίθετη κατεύθυνση. Εν τέλει ολισθαίνει προς την ίδια κατεύθυνση με το θετικό ιόν. Για σωματίδια της ίδιας ταχύτητας, αλλά διαφορετικής μάζας, το πιο ελαφρύ θα έχει μικρότερη  $\rho_L$ , με συνέπεια να ολισθαίνει λιγότερο ανά περίοδο. Εντούτοις, η κυκλοτρονική συχνότητα περιστροφής του θα είναι μεγαλύτερη, και οι δύο επιδράσεις θα αλληλοαναιρούνται. Δύο σωματίδια της ίδιας μάζας αλλά διαφορετικών ενεργειών θα έχουν την ίδια  $\omega_c$ . Το πιο αργό θα έχει μικρότερη  $\rho_L$ , και ως εκ τούτου θα κερδίζει λιγότερη ενέργεια από το ηλεκτρικό πεδίο σε μια ημιπερίοδο. Όμως αντίστοιχα για σωματίδια χαμηλότερης ενέργειας η αλλαγή της  $\rho_L$  για δεδομένη αλλαγή στην ενέργεια είναι μεγαλύτερη, οπότε και αυτές οι δύο επιδράσεις αλληλοεξουδετερώνονται.

Η παρουσία σταθερού ηλεκτρικού πεδίου επηρεάζει με τον ίδιο τρόπο ηλεκτρόνια και ιόντα, συνεπώς δε διαταράσσει τη *μακροσκοπική οιονεί ουδετερότητα* του πλάσματος.



Σχήμα 2.2: Ολίσθηση  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$

Αντίστοιχα στη δεύτερη περίπτωση, όπου η φύση της εξωτερικής δύναμης είναι βαρυτική, η ταχύτητα της ολίσθησης μέσα στο πεδίο βαρύτητας παίρνει τη μορφή

$$\mathbf{w}_D^g = \frac{m \mathbf{g} \times \mathbf{B}}{q B^2} \quad (2.42)$$

όπου  $g$  η επιτάχυνση της βαρύτητας. Στην περίπτωση αυτή, όπως φαίνεται, τα ηλεκτρόνια και τα ιόντα κινούνται με διαφορετικές ταχύτητες και δημιουργούν ηλεκτρικό ρεύμα πυκνότητας  $\mathbf{J} = n_0 e (\mathbf{w}_{D_j}^g - \mathbf{w}_{D_e}^g)$ , το οποίο διεγείρει τη βαρυτική αστάθεια (gravitational instability) στο πλάσμα.

### 2.1.3 Ασθενώς Μη Ομογενές Στατικό Μαγνητικό Πεδίο

Θα ασχοληθούμε τώρα με την κινητική κατάσταση των φορτισμένων σωματιδίων σε περίπτωση μη ομογενών στατικών μαγνητικών πεδίων.

Όπως είδαμε μέχρι στιγμής, είμαστε σε θέση να εξάγουμε ακριβείς εκφράσεις για τις ολισθήσεις του κέντρου περιστροφής στην περίπτωση ομογενών πεδίων. Το πρόβλημα γίνεται αρκετά πολύπλοκο με την εισαγωγή ανομοιογένειας, και για αυτό το λόγο θα περιοριστούμε σε μια προκαταρκτική μελέτη για ασθενείς (ήπιες) ανομοιογένειες, κατά τις οποίες το χαρακτηριστικό μήκος των χωρικών μεταβολών του μαγνητικού πεδίου είναι κατά πολύ μεγαλύτερο από το χαρακτηριστικό μήκος της τροχιάς. (βλέπε και [9], [4])

Σε σχέση με την κυκλοτρονική κίνηση του φορτισμένου σωματιδίου στην περίπτωση του ομογενούς πεδίου, η τροχιά θα είναι ελαφρώς διαταραγμένη.

Η ανομοιογένεια εν γένει περιγράφεται από τον πίνακα:

$$\nabla \mathbf{B} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial x} & \frac{\partial B_x}{\partial y} & \frac{\partial B_x}{\partial z} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} & \frac{\partial B_y}{\partial y} & \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ \frac{\partial B_z}{\partial x} & \frac{\partial B_z}{\partial y} & \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

οι όροι του οποίου δεν είναι ανεξάρτητοι, αλλά συνδέονται μεταξύ τους με τις σχέσεις

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = 0 \end{array} \right\} \quad (2.44)$$

Η δεύτερη εξίσωση ισχύει όπως γνωρίζουμε από τις εξισώσεις του Maxwell στην περίπτωση όπου απουσιάζουν ηλεκτρικά ρεύματα ή/και χρονικά μεταβαλλόμενα ηλεκτρικά πεδία.

Η κινητική κατάσταση του σωματιδίου υπαγορεύει μεγέθη ακτίνων καμπυλότητας Larmor τέτοια ώστε :

$$\rho_L \left| \frac{\partial \ln B}{\partial r_{\perp}} \right| \ll 1 \quad (2.45)$$

όπου με  $r_{\perp}$  υποδηλώνουμε τη διάσταση εγκάρσια (κάθετα) στο τοπικό μαγνητικό πεδίο. Η (2.45) απλά δηλώνει ότι η χωρική μεταβολή του μαγνητικού πεδίου εγκάρσια σε αυτό πρέπει να είναι ασήμαντη σε σχέση με την τοπική τιμή της ακτίνας Larmor, ώστε να θεωρηθεί η ανομοιογένεια ήπια. Οι σχέσεις (2.44) εξασφαλίζουν το τι θα ισχύει κατά μήκος των μαγνητικών γραμμών του πεδίου. Λόγω των (2.44), μπορούμε να ξαναγράψουμε την (2.45) ως εξής:

$$\rho_L \left| \frac{\partial \ln B}{\partial z} \right| \ll 1 \quad (2.46)$$

Θεωρούμε ένα σύστημα συντεταγμένων, το οποίο στο κέντρο περιστροφής του σωματιδίου (αρχή τοπικών συντεταγμένων) να έχει προσανατολισμό τέτοιο, ώστε  $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$ , δηλαδή  $B_z = B = \text{σταθ.}$  και  $B_x = B_y = 0$  ενώ κοντά στο σημείο αυτό και συγκεκριμένα στην τροχιά του σωματιδίου να ισχύει  $\mathbf{B} \neq B\hat{\mathbf{z}}$ .

Διακρίνουμε τρία είδη ανομοιογένειας:

1. Διαμήκη Ανομοιογένεια  $\partial B_z / \partial z \neq 0$ . Η σχέση  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  συνεπάγεται την ανάπτυξη συνιστωσών  $B_x, B_y$ .



2. Εγκάρσια Ανομοιογένεια  $\partial B_z / \partial x \neq 0$

3. Καμπυλότητα Πεδιακών Γραμμών  $\partial B_x / \partial z \neq 0$

Οι δύο τελευταίες πάντοτε συνυπάρχουν λόγω της σχέσης  $\nabla \times \mathbf{B} = 0$

**Διαμήκης Ανομοιογένεια  $\partial B_z / \partial z \neq 0$**

Από τη σχέση  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  λαμβάνουμε ότι

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial z} \neq 0$$

Εκφράζουμε τις δύο πρώτες παραγώγους συναρτήσει της τρίτης, επιμερίζοντας ως εξής:

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = -\alpha \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial y} = (\alpha - 1) \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

όπου  $\alpha$  είναι μια σταθερά που εκφράζει την ελλειπτικότητα της συγκλίνουσας ή αποκλίνουσας δέσμης μαγνητικών γραμμών. Στην περίπτωση που  $\alpha = 1/2$  έχουμε κυλινδρική συμμετρία.

Αναπτύσσουμε κατά Taylor τα πεδία γύρω από το κέντρο περιστροφής  $(x, y) = (0, 0)$ , και παίρνουμε για τα μέτρα τους:

$$B_x = -\alpha \frac{\partial B_z}{\partial z} x$$

$$B_y = (\alpha - 1) \frac{\partial B_z}{\partial z} y$$

Η συνιστώσα της δύναμης Lorentz κατά μήκος του μαγνητικού πεδίου είναι

$$F_z = q(v_x B_y - v_y B_x) = q \frac{\partial B_z}{\partial z} [(\alpha - 1)v_x y + \alpha v_y x]$$

Χρησιμοποιώντας ως εκτιμήσεις τις λύσεις της περίπτωσης ομογενούς στατικού μαγνητικού πεδίου, για  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  έχουμε:

$$\begin{aligned}
F_z &= q \frac{\partial B_z}{\partial z} [(\alpha - 1) \sin^2(\omega_c t) - \alpha \cos^2(\omega_c t)] \rho_L v_\perp \\
&= -\frac{1}{2} q \frac{\partial B_z}{\partial z} [1 + (2\alpha - 1) \cos(2\omega_c t)] \rho_L v_\perp
\end{aligned}$$

Η δύναμη περιλαμβάνει ένα σταθερό μέρος, και ένα ταχέως εναλλασσόμενο μέρος, κυκλικής συχνότητας  $2\omega_c$ .

Για χρονικά διαστήματα μεγάλα σε σχέση με την περίοδο περιστροφής, το εναλλασσόμενο μέρος δεν προκαλεί 'μόνιμα' αποτελέσματα στις τροχιές, ως μηδενικό κατά μέσο όρο. Κατά συνέπεια μπορούμε να το αγνοήσουμε. (Η μαθηματικά αυστηρή απόδειξη γίνεται με averaging theory)

Συνεπώς,

$$F_z = -\frac{1}{2} q \frac{\partial B_z}{\partial z} \rho_L v_\perp = -\frac{1}{2} m v_\perp^2 \frac{1}{B_z} \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Από την εξίσωση κίνησης παίρνουμε

$$F_z = m \frac{dv_\parallel}{dt} = m v_\parallel \frac{\partial v_\parallel}{\partial z} = \frac{1}{2} m \frac{\partial v_\parallel^2}{\partial z} = -\frac{1}{2} m \frac{\partial v_\perp^2}{\partial z}$$

όπου έχουμε κάνει αλλαγή μεταβλητής  $z \rightarrow t$  και έχουμε επίσης λάβει υπόψιν τη διατήρηση της κινητικής ενέργειας  $T$ :

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (T_\perp + T_\parallel) = \frac{1}{2} m (v_\perp^2 + v_\parallel^2) = 0$$

Από τα παραπάνω άμεσα προκύπτει

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{T_\perp}{B_z} \right) = 0$$

Λόγω της κυκλικής κίνησης του φορτισμένου σωματιδίου περί το μαγνητικό πεδίο, εμφανίζεται ένα κυκλικό ηλεκτρικό ρεύμα  $I$  (κυκλικός ρευματοφόρος βρόχος, *current loop*). Το μαγνητικό πεδίο που επάγεται από αυτόν το βρόχο, προσομοιάζει αυτό του μαγνητικού διπόλου σε αποστάσεις πολύ μεγαλύτερες από την ακτίνα Larmor. Για δεδομένο μαγνητικό πεδίο, το ηλεκτρικό ρεύμα που επάγεται από την κίνηση τόσο των ηλεκτρονίων, όσο και των ιόντων είναι στην ίδια κατεύθυνση, αν και τα σωματίδια καθ' εαυτά κινούνται με αντίθετη φορά. Σκοπός είναι τα μαγνητικά πεδία που επάγονται από την περιστροφική κίνηση των σωματιδίων να αντιτίθενται στο εξωτερικά επιβεβλημένο πεδίο  $\mathbf{B}$ .

Η μαγνητική ροπή φορτισμένου σωματιδίου ορίζεται ως

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2} \int (\mathbf{r} \times \mathbf{j}) d^3x = \frac{I}{2} \oint \mathbf{r} \times d\mathbf{l} = -\frac{1}{2} q \rho_L v_{\perp} \mathbf{B} = -\frac{\frac{1}{2} m v_{\perp}^2}{B} \mathbf{B} = -\frac{T_{\perp}}{B} \mathbf{B} \quad (2.47)$$

Ορίζουμε λοιπόν

$$\boldsymbol{\mu} \equiv \frac{T_{\perp}}{B_z} \hat{\mathbf{z}} \quad (2.48)$$

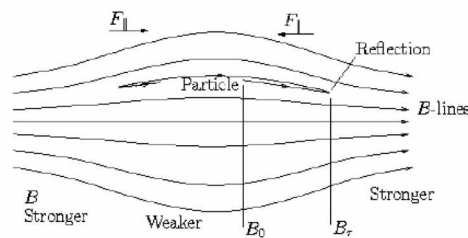
που αντιστοιχεί στη ροπή μαγνητικού διπόλου  $I \int d\mathbf{S}$  που δημιουργείται από ηλεκτρικό ρεύμα  $I = q\omega_c/2\pi$  σε ακτίνα  $\rho_L$ .

Η μαγνητική ροπή είναι τόσο σταθερή, όσο ήπια είναι η ανομοιογένεια, δηλαδή μεταβάλλεται αργά. Τέτοιου είδους σταθερές ονομάζονται *αδιαβατικές*, και θα αναφερθούμε σε αυτές με λεπτομέρεια στη συνέχεια.

Από τις δύο αυτές σταθερές (Κινητική Ενέργεια, Μαγνητική Ροπή) προκύπτει το συμπέρασμα:

- Αύξηση  $B_z \rightarrow$  αύξηση  $T_{\perp}$  (διατήρηση μαγνητικής ροπής)
- Αύξηση  $T_{\perp} \rightarrow$  μείωση  $T_{\parallel}$  (διατήρηση ολικής κινητικής ενέργειας)
- $T_{\perp} = T \rightarrow T_{\parallel} = 0$ , και καθώς η δύναμη είναι πάντοτε μη μηδενική, το σωματίδιο *ανακλάται*.

Εκμεταλλευόμαστε τη διαμήκη ανομοιογένεια του μαγνητικού πεδίου στους *μαγνητικούς καθρέφτες*, οι οποίοι είναι διατάξεις μαγνητικής συγκράτησης φορτισμένων σωματιδίων.



Σχήμα 2.3: Μαγνητικός Καθρέφτης

### Εγκάρσια Ανομοιογένεια $\partial B_z/\partial x \neq 0$

Θεωρούμε  $\partial B_z/\partial x > 0$ , οπότε το μαγνητικό πεδίο

$$B_z = B + \frac{\partial B_z}{\partial x} x$$

θα είναι ισχυρότερο για  $x > 0$  και ασθενέστερο για  $x < 0$ . Συνεπώς, η ακτίνα Larmor θα είναι μικρότερη για  $x > 0$  και μεγαλύτερη για  $x < 0$ . Αντίστοιχα με το φυσικό μηχανισμό της ολίσθησης  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  που έχουμε περιγράψει, προκύπτει ολίσθηση κατά μήκος του άξονα  $y$ .

Και πάλι ανατρέχουμε στις εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση στο στατικό ομογενές μαγνητικό πεδίο, στις οποίες τώρα όμως εισάγουμε μια σταθερή ταχύτητα ολίσθησης  $\dot{y}_c$ :

$$\begin{aligned} x &= \rho_L \cos(\omega_c t) \\ y &= y_c - \rho_L \sin(\omega_c t) \\ v_x &= -v_\perp \sin(\omega_c t) \\ v_y &= \dot{y}_c - v_\perp \cos(\omega_c t) \end{aligned}$$

όπου η κυκλοτρονική συχνότητα  $\omega_c$  είναι υπολογισμένη στο στατικό ομογενές μαγνητικό πεδίο  $B$ .

Η εξίσωση κίνησης για τη  $x$  - συνιστώσα γράφεται ως

$$\frac{dv_x}{dt} = qv_y B_z = \omega_c v_y \left( 1 + \frac{1}{B} \frac{\partial B_z}{\partial x} x \right)$$

Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, αντικαθιστούμε τις παραπάνω εξισώσεις στην εξίσωση κίνησης και επιλύουμε ως προς  $\dot{y}_c$ . Αγνοούμε τους όρους που μεταβάλλονται με συχνότητες  $\omega_c, 2\omega_c$  επειδή συνεπάγονται μηδενική κατά μέσο όρο συνεισφορά στην κίνηση.

$$\dot{y}_c = \frac{1}{2} \frac{1}{B} \frac{\partial B_z}{\partial x} \rho_L v_\perp = \frac{1}{q} \frac{T_\perp}{B_0^2} \frac{\partial B_z}{\partial x} \equiv \mathbf{v}_{\nabla B}$$

Παρατηρούμε ότι η ολίσθηση στον  $y$  άξονα εξαρτάται από το πρόσημο του ηλεκτρικού φορτίου, συνεπώς τείνει να προκαλέσει διαχωρισμό θετικών και αρνητικών φορτίων. Λόγω αυτού του διαχωρισμού επάγεται και ηλεκτρικό ρεύμα το οποίο καλείται ρεύμα μαγνήτισης.

### Καμπυλότητα Πεδιακών Γραμμών $\partial B_x/\partial z \neq 0$

Εδώ οι δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου είναι καμπυλωμένες με μια σταθερή ακτίνα καμπυλότητας  $R$ , ενώ θεωρούμε το μέτρο του πεδίου  $B$  σταθερό. Είχαμε μιλήσει σε προηγούμενη ενότητα για την ολίσθηση  $\mathbf{F} \times \mathbf{B}$  που έχουμε όποτε υπάρχει σταθερή εξωτερικά επιβαλλόμενη δύναμη σε σωματίδιο που κινείται σε στατικό ομογενές μαγνητικό πεδίο. Καθώς τα σωματίδια κινούνται κατά μήκος των καμπύλων πεδιακών γραμμών, εμφανίζεται άλλη μια ολίσθηση του κέντρου περιστροφής (Curvature Drift) λόγω της φυγόκεντρος δύναμης.

Εάν με  $v_{\parallel}^2$  συμβολίσουμε το μέσο τετράγωνο της ταχύτητας του σωματιδίου κατά μήκος των πεδιακών γραμμών, η μέση φυγόκεντρος δύναμη θα είναι

$$\mathbf{F}_{cf} = \frac{mv_{\parallel}^2}{R} \hat{\mathbf{r}} = mv_{\parallel}^2 \frac{\mathbf{R}}{R^2} \quad (2.49)$$

Βάσει της εξίσωσης (2.27) που μας δίνει την ταχύτητα ολίσθησης λόγω σταθερής εξωτερικής δύναμης, εισάγοντας τη φυγόκεντρο δύναμη θα έχουμε την εξής ταχύτητα ολίσθησης:

$$\mathbf{v}_R = \frac{1}{q} \frac{\mathbf{F}_{cf} \times \mathbf{B}}{B^2} = \frac{mv_{\parallel}^2}{qB^2} \frac{\mathbf{R} \times \mathbf{B}}{R^2} \quad (2.50)$$

Μετασχηματίζουμε σε σύστημα συντεταγμένων περιστρεφόμενο με γωνιακή ταχύτητα μέτρου  $\Omega = v_{\parallel}/R$ . Υποθέτοντας ότι

$$\mathbf{v}_{\parallel} = v_{\parallel} \hat{\mathbf{z}} \quad (2.51)$$

$$\mathbf{R} = R \hat{\mathbf{x}} \quad (2.52)$$

Το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής του συστήματος συντεταγμένων θα είναι  $\boldsymbol{\Omega} = -\Omega \hat{\mathbf{y}}$ .

Στο περιστρεφόμενο σύστημα, το σωματίδιο κινείται υπό την επίδραση της δύναμης:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B} - 2m\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{\perp} + m \frac{v_{\parallel}^2}{R^2} \mathbf{R} \quad (2.53)$$

**α' όρος :** Η δύναμη *Lorentz* που προκαλεί την κυκλοτρονική κίνηση

**β' όρος :** Η δύναμη *Coriolis* μεταβάλλει συνεχώς πρόσημο, με μηδενικό συνολικό αποτέλεσμα κατά μέσο όρο.

γ' όρος : Η φυγόκεντρος δύναμη σταθερής διεύθυνσης, η οποία όπως έχουμε δείξει προκαλεί ολίσθηση:

$$\mathbf{v}_R = \frac{mv_{\parallel}^2}{qR^2} \frac{\mathbf{R} \times \mathbf{B}}{B^2} = \frac{2T_{\parallel}}{qRB} \frac{\mathbf{R} \times \mathbf{B}}{RB} \quad (2.54)$$

### 2.1.4 Σύνοψη για τις ανομοιογένειες

Όπως είδαμε, η κάθε ανομοιογένεια που εισάγεται σε στατικά ομογενή μαγνητικά πεδία οδηγεί σε ολίσθηση των φορτισμένων σωματιδίων ως προς τις πεδιακές γραμμές. Αντίστοιχη ολίσθηση παρατηρείται και όταν ασκήσουμε σταθερή εξωτερική δύναμη σε ομογενές πεδίο, με σημαντικότερα παραδείγματα την ηλεκτρική δύναμη (ολίσθηση  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ) και τη βαρυτική δύναμη.

Η εγκάρσια ανομοιογένεια και η καμπυλότητα των πεδιακών γραμμών συνυπάρχουν πάντοτε λόγω του αστρόβιλου χαρακτήρα του μαγνητικού πεδίου ( $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ ). Αυτό συνεπάγεται ότι εάν καμπυλώσουμε ένα μαγνητικό πεδίο μέσα σε μια τοροειδή γεωμετρία με σκοπό να συγκρατήσουμε μαγνητικά τα φορτισμένα σωματίδια, αυτά θα τείνουν να διαφύγουν από την κλειστή τοπολογία συγκράτησης. Θα υπολογίσουμε αμέσως τώρα τη συνολική ολίσθηση που προκύπτει λόγω των δύο αυτών ανομοιογενειών.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\frac{B}{R}, \hat{\mathbf{y}} = -\frac{\mathbf{R} \times \mathbf{B}}{RB}$$

και συνδυάζοντας τις δύο ολισθήσεις, λαμβάνουμε εν τέλει:

$$\mathbf{v}_R + \mathbf{v}_{\nabla B} = \frac{m}{q} \frac{\mathbf{R} \times \mathbf{B}}{R^2 B^2} \left( v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} v_{\perp}^2 \right) = \frac{2T_{\parallel} + T_{\perp}}{qRB} \frac{\mathbf{R} \times \mathbf{B}}{RB} \quad (2.55)$$

Η ομοιότητα με την ολίσθηση  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  έγκειται στο ότι η κατεύθυνση ολίσθησης και στις δύο περιπτώσεις είναι εγκάρσια προς το μαγνητικό πεδίο και προς την 'πηγή' της διαταραχής (το ηλεκτρικό πεδίο ή την ανομοιογένεια).

Οι διαφορές των δύο ολισθήσεων είναι οι εξής:

- Η ολίσθηση  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  δεν εξαρτάται από σωματιδιακά μεγέθη, όπως έχουμε δει. Αντίθετα, η ολίσθηση που προκύπτει από την εγκάρσια ανομοιογένεια του πεδίου και την καμπυλότητα των πεδιακών γραμμών εξαρτάται σαφώς από το φορτίο, τη μάζα, την κινητική ενέργεια και τον επιμερισμό αυτής εγκάρσια και κατά μήκος του μαγνητικού πεδίου.

- Η εξίσωση για την ολίσθηση  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  είναι ακριβής. Αντίθετα, η (2.55) ισχύει κατά μέσο όρο, για χρονικά διαστήματα μεγάλα σε σχέση με την περίοδο περιστροφής. Έχουν αγνοηθεί οι ταχέως μεταβαλλόμενοι όροι, ενώ πάντα υπάρχει η προϋπόθεση της ασθενούς (ήπιας) ανομοιογένειας στο πεδίο.

Σε κλειστά συστήματα μαγνητικής συγκράτησης πλάσματος, το πρόβλημα των ολισθήσεων αντιμετωπίζεται με την εισαγωγή ελικοειδούς περιέλιξης στις μαγνητικές γραμμές, ούτως ώστε η μαγνητική γραμμή να βρίσκεται άλλοτε στην πάνω, και άλλοτε στην κάτω πλευρά του τόρου. Κατά συνέπεια, η ολίσθηση αυτή άλλοτε θα απομακρύνει τα σωματίδια από το κέντρο, και άλλοτε θα τα επαναφέρει προς αυτό. Με κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων η μέση απομάκρυνση μπορεί να μηδενιστεί.

### 2.1.5 Τα όρια της προσέγγισης κέντρου περιστροφής

Μέχρι τώρα δείξαμε ότι η δύναμη Lorentz που ασκείται σε ένα φορτισμένο σωματίδιο που κινείται σε ένα εξωτερικά επιβεβλημένο στατικό μαγνητικό πεδίο, οδηγεί το σωματίδιο σε μια περιστροφική κίνηση (γυροκίνηση) περί κάποιον άξονα παράλληλο στις μαγνητικές γραμμές, ενώ το κέντρο περιστροφής (guiding center) υπόκειται σε διάφορες ολισθήσεις. Εάν η ακτίνα περιστροφής  $\rho_L$  (Larmor) είναι πολύ μικρότερη από την κλίμακα της ανομοιογένειας (2.45), και η συχνότητα περιστροφής είναι αρκετά μεγαλύτερη από τη χαρακτηριστική συχνότητα του πεδίου, τότε ισχύει η προσέγγιση του κέντρου περιστροφής. Στην προσέγγιση αυτή, η ελικοειδής τροχιά του σωματιδίου μέσα σε μαγνητικό πεδίο προσεγγίζεται από μια ομαλή ολίσθηση, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. [Σχήμα]. Οι εξισώσεις κίνησης του κέντρου περιστροφής που περιγράφουν αυτές τις ολισθήσεις εξήχθησαν για πρώτη φορά από τον Alfvén το 1940. Όσον αφορά την υπολογιστική περιγραφή της κίνησης του σωματιδίου, ως ένα πρόβλημα αρχικών τιμών με εξέλιξη της θέσης του σωματιδίου στο χρόνο, αυτή η προσέγγιση επιτρέπει μεγαλύτερα χρονικά βήματα, δεδομένου ότι δε λαμβάνεται υπ' όψιν η λεπτομερής περιστροφική κίνηση του σωματιδίου. (βλ. και [9])

Συγκεντρωτικά όλοι οι μηχανισμοί ολίσθησης που περιγράφησαν μέχρι τώρα μας δίνουν την εξής εξίσωση για την ταχύτητα ολίσθησης του κέντρου περιστροφής:

$$\mathbf{v} = v_{\parallel \mathbf{B}} + \frac{\mathbf{B}}{qB} \times (mv_{\parallel}^2 (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mu \nabla B + q \nabla \phi) \quad (2.56)$$

Ο πρώτος όρος σε αυτή την εξίσωση εκφράζει καθαρά την παράλληλη κίνηση του κέντρου περιστροφής κατά μήκος των μαγνητικών γραμμών, ενώ ο δεύτερος όρος περιγράφει τις κάθετες ολισθήσεις, και μπορεί να χωριστεί σε τρία μέρη:

- την κάθετη ολίσθηση λόγω της καμπυλότητας των πεδιακών γραμμών (curvature drift)
- την ολίσθηση  $\nabla B$  λόγω της εγκάρσιας ανομοιογένειας, καθώς η ένταση του πεδίου μεταβάλλεται κατά μήκος του.
- την ολίσθηση  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ , λόγω της κάθετης συνιστώσας του εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου. (αν υπάρχει)

Η προσέγγιση του κέντρου περιστροφής, στην οποία έχουμε βασιστεί για την ανάλυση που έχει γίνει μέχρι τώρα σε αυτό το κεφάλαιο, δικαιολογείται μόνο στη βάση της σχέσης (2.45). Εδώ υπάρχει ένα ιδιαίτερα λεπτό σημείο, το οποίο πρέπει να τονιστεί: Το σωματίδιο και το κέντρο περιστροφής του κινούνται και κατά μήκος των γραμμών του μαγνητικού πεδίου. Συνεπώς θα πρέπει ο ρυθμός μεταβολής του πεδίου τον οποίο 'βλέπει' το κινούμενο σωματίδιο να είναι τόσο μικρός, ώστε η μεταβολή του μαγνητικού πεδίου να είναι πολύ μικρή κατά τη διάρκεια μιας περιόδου της κυκλοτρονικής κίνησης.

Όταν η προσέγγιση του κέντρου περιστροφής παύει να ισχύει, πρέπει κανείς να λύσει τις εξισώσεις κίνησης. Κάτι τέτοιο είναι εν γένει εφικτό αριθμητικά για όλες τις περιπτώσεις. Εντούτοις, η γνώση ύπαρξης σταθερών της κίνησης είναι πάντοτε επιθυμητή λόγω της δυνατότητας βελτιστοποίησης ενός συστήματος συγκράτησης. Η ύπαρξη σταθερών της κίνησης είναι συνυφασμένη με την ύπαρξη αντίστοιχων συμμετριών. Η συζυγία αυτή αναδεικνύεται καλύτερα με τη λεγόμενη Χαμιλτονιανή περιγραφή, με την οποία θα ασχοληθούμε εκτεταμένα στη συνέχεια.



## 2.2 Μηχανική Lagrange - Hamilton

Όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, η προσέγγιση του κέντρου περιστροφής για τη μελέτη της κίνησης φορτισμένων σωματιδίων σε μαγνητικά πεδία θέτει κάποιους περιορισμούς ως προς τις χωρικές κλίμακες στις οποίες ισχύει. Γενικά θα μιλήσουμε για μαγνητικές τοπολογίες που διακρίνονται από χωρική συμμετρία, στις οποίες μας εξυπηρετεί καλύτερα και η εισαγωγή καμπυλόγραμμων συστημάτων συντεταγμένων, πέρα από τις καρτεσιανές. Οι συμμετρίες τις οποίες θα εκμεταλλευτούμε είναι συνυφασμένες με την ύπαρξη σταθερών της κίνησης στο πρόβλημα, όπως προκύπτει από το πρώτο θεώρημα της Noether. Θα ξεκινήσουμε αναφέροντας τους δομικούς λίθους της μηχανικής Lagrange και Hamilton, με αρκετά περισσότερες λεπτομέρειες από ότι στο Κεφάλαιο 1. Φυσικά η βιβλιογραφία Κλασικής Μηχανικής είναι πλούσια, και παραπέμπουμε τον αναγνώστη για περαιτέρω εμβάθυνση μεταξύ άλλων στα [15], [5], [;], [18].

Το κυριότερο μειονέκτημα της Νευτώνειας Δυναμικής για την εξαγωγή των εξισώσεων κίνησης, είναι ο διανυσματικός χαρακτήρας των εξισώσεων κίνησης στις οποίες καταλήγουμε από το συνδυασμό του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα και της δύναμης Lorentz. Σε καμπυλόγραμμα συστήματα συντεταγμένων η διατύπωση και επίλυσή τους καθίσταται αρκετά δύσκολη, δεδομένου ότι περιλαμβάνεται και χρονική μεταβολή των μοναδιαίων διανυσμάτων βάσης.

Η Χαμιλτονιανή περιγραφή (όπως θα την ονομάζουμε για συντομία από εδώ και στο εξής) έχει πολλά πλεονεκτήματα:

- είναι ανεξάρτητη του συστήματος συντεταγμένων
- οι βαθμωτές συναρτήσεις Lagrange και Hamilton στις οποίες στηρίζεται παρέχουν όλη την πληροφορία για τη δυναμική των σωματιδίων
- αντί για τα πεδία  $\mathbf{E}$  και  $\mathbf{B}$  χειρίζεται δυναμικά  $\phi$  και  $\mathbf{A}$ , τα οποία συνήθως δίνονται από απλούστερες εξισώσεις
- μας επιτρέπει την ποιοτική μελέτη και εξαγωγή γενικότερων συμπερασμάτων, καθώς και τη μελέτη πολύπλοκων (χαοτικών) τροχιών

Οι εξισώσεις κίνησης μπορούν να διατυπωθούν σε διάφορες ισοδύναμες μορφές που αλληλοσυνδέονται με αντίστοιχους μετασχηματισμούς συντεταγμένων. Μια τέτοια μορφή προκύπτει ορίζοντας μια συνάρτηση *Lagrange* (Lagrangian, Λαγκρανζιανή)

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - U(\mathbf{q}, t) \quad (2.57)$$

όπου  $\mathbf{q} \equiv \{q_i\}$  η διανυσματική θέση και  $\dot{\mathbf{q}} \equiv \{dq_i/dt\}$  η διανυσματική ταχύτητα όλων των βαθμών ελευθερίας σε γενικευμένο σύστημα συντεταγμένων. Οι επιμέρους συναρτήσεις  $T$  και  $U$  είναι η κινητική ενέργεια και η γενικευμένη δυναμική ενέργεια αντίστοιχα. Οι όποιοι περιορισμοί (σύνδεσμοι, constraints) υπάρχουν είναι χρονικά ανεξάρτητοι. (σκληρόνομοι)

Η δύναμη ορίζεται ως

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \right) \quad (2.58)$$

ή

$$\mathbf{F} = -\nabla_q U + \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{q}} U \quad (2.59)$$

Οι αντίστοιχες εξισώσεις κίνησης για κάθε συντεταγμένη  $q_i$  (σε κάθε βαθμό ελευθερίας) δίνονται από τις σχέσεις

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad (2.60)$$

οι οποίες ονομάζονται εξισώσεις *Euler - Lagrange*. Η (2.60) προκύπτει ως προϋπόθεση για την ελαχιστοποίηση του ολοκληρώματος δράσης

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \quad (2.61)$$

μεταξύ δύο δεδομένων χρονικών στιγμών  $t_1$  και  $t_2$ . Η (2.60) είναι ισοδύναμη με τη μεταβολική αρχή (*variational principle*)

$$\delta \mathcal{S} = 0 \quad (2.62)$$

Στην περίπτωση ηλεκτρομαγνητικού πεδίου και μη σχετικιστικής δυναμικής έχουμε:

$$U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = q [\phi(\mathbf{r}, t) - \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)] \quad (2.63)$$

όπου το 4-διάστατο δυναμικό  $(\phi, \mathbf{A})$  αποτελεί τη βάση των πεδίων:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \end{aligned} \right\} \quad (2.64)$$

Ορίζοντας τη Χαμιλτονιανή (*Hamiltonian*) μέσω μετασχηματισμού Legendre ως

$$\mathcal{H}(p, q, t) \equiv \sum_i \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}(\dot{q}, q, t) \quad (2.65)$$

όπου τα  $\dot{q}$  θεωρούνται συνάρτηση των  $q$  και διαφορίζοντας, προκύπτει η αναγκαία συνθήκη:

$$p_i \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \quad (2.66)$$

Υπό αυτήν την συνθήκη, η Χαμιλτονιανή μορφή των εξισώσεων κίνησης περιέχει μόνο πρώτες παραγώγους και είναι η ακόλουθη:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \quad \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \quad (2.67)$$

Οι εξισώσεις (2.67) ονομάζονται *εξισώσεις Hamilton*.

Επίσης:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \quad (2.68)$$

Οι μεταβλητές  $p, q$  ορίζονται ως *γενικευμένες ορμές* και *θέσεις*, αντίστοιχα, και κάθε ζεύγος μεταβλητών των οποίων η χρονική εξέλιξη δίνεται από εξισώσεις της προηγούμενης μορφής ονομάζεται *ζεύγος κανονικών μεταβλητών* ενώ τα  $p_i$  και  $q_i$  αναφέρονται ως *συζυγείς (conjugate) μεταβλητές*.

### 2.2.1 Η εξίσωση Hamilton - Jacobi

Για να μετασχηματίσουμε από ένα αρχικό ζεύγος κανονικών μεταβλητών  $q, p$  σε ένα νέο  $\bar{q}, \bar{p}$  μπορούμε να συσχετίσουμε αυτά τα ζεύγη χρησιμοποιώντας μια συνάρτηση των αρχικών και των νέων μεταβλητών ως εξής: Δεδομένου ότι η συνάρτηση Lagrange προκύπτει από την μεταβολική αρχή (2.62), χρησιμοποιώντας τον ορισμό της Χαμιλτονιανής (2.65) έχουμε την σχέση:

$$\delta \left[ \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_i \dot{q}_i p_i - \mathcal{H}(p, q, t) \right) dt \right] = 0 \quad (2.69)$$

η οποία ισχύει τόσο για τις αρχικές όσο και για τις νέες μεταβλητές. Συνεπώς, η έκφραση του ορίσματος του ολοκληρώματος ως προς τις αρχικές μεταβλητές μπορεί να διαφέρει μόνο ως προς ένα διαφορικό από την έκφρασή του ως προς τις νέες μεταβλητές, δηλαδή

$$\sum_i \dot{q}_i p_i - \mathcal{H}(p, q, t) = \sum_i \dot{\bar{q}}_i \bar{p}_i - \mathcal{H}(\bar{p}, \bar{q}, t) + \frac{d}{dt} \mathcal{F}_1(q, \bar{q}, t) \quad (2.70)$$

όπου έχουμε αυθαίρετα επιλέξει την  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$  σαν συνάρτηση των μεταβλητών  $q$  και  $\bar{q}$ . Αναπτύσσοντας την ολική παράγωγο της  $\mathcal{F}_1$  έχουμε

$$\frac{d}{dt} \mathcal{F}_1(q, \bar{q}, t) = \sum_i \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \bar{q}_i} \dot{\bar{q}}_i + \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial t} \quad (2.71)$$

Θεωρώντας τις μεταβλητές στην (2.71) ως ανεξάρτητες, συγκρίνοντας με την (2.70) και απαιτώντας τον μηδενισμό των όρων  $\dot{q}_i$  και  $\dot{\bar{q}}_i$ , προκύπτουν τα εξής:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q_i} \quad (2.72)$$

$$\bar{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \bar{q}_i} \quad (2.73)$$

$$\bar{\mathcal{H}}(\bar{p}, \bar{q}, t) = \mathcal{H}(p, q, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}_1(q, \bar{q}, t) \quad (2.74)$$

Οι εξισώσεις (2.72) αποτελούν έναν κανονικό μετασχηματισμό συντεταγμένων με γεννήτρια συνάρτηση την  $\mathcal{F}_1$ , σύμφωνα με τον οποίο οι νέες μεταβλητές συνδέονται με τις αρχικές και η νέα Χαμιλτονιανή με την αρχική.

Μπορούμε επίσης να ορίσουμε γεννήτριες συναρτήσεις ως προς άλλα ζεύγη μεικτών αρχικών και νέων μεταβλητών:

$$\mathcal{F}_2(q, \bar{p}, t), \quad \mathcal{F}_3(p, \bar{q}, t), \quad \mathcal{F}_4(p, \bar{p}, t) \quad (2.75)$$

οι οποίες οδηγούν σε αντίστοιχους κανονικούς μετασχηματισμούς. Για παράδειγμα η  $\mathcal{F}_2$  μπορεί να προκύψει μέσω ενός μετασχηματισμού Legendre :

$$\mathcal{F}_2(q, \bar{p}, t) = \mathcal{F}_1(q, \bar{q}, t) + \sum_i \bar{q}_i \bar{p}_i \quad (2.76)$$

όπου τα  $\bar{q}$  θεωρούνται συνάρτηση των  $q$  και  $\bar{p}$ , οπότε προκύπτει ο ακόλουθος κανονικός μετασχηματισμός:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q_i} \quad (2.77)$$

$$\bar{q}_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \bar{p}_i} \quad (2.78)$$

$$\bar{\mathcal{H}}(\bar{p}, \bar{q}, t) = \mathcal{H}(p, q, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}_2(q, \bar{p}, t) \quad (2.79)$$

Οι κανονικοί μετασχηματισμοί, εκτός από τη δυνατότητα έκφρασης της δυναμικής ενός συστήματος με εναλλακτικούς τρόπους, παρέχουν επιπλέον και μια μέθοδο για τον τρόπο λύσης του συστήματος. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις εφαρμογής αυτής της μεθόδου: στην πρώτη η Χαμιλτονιανή εξαρτάται συναρτησιακά άμεσα από τον χρόνο ενώ στη δεύτερη η Χαμιλτονιανή δεν εξαρτάται από τον χρόνο. Τα Χαμιλτονιανά συστήματα που ανήκουν στην δεύτερη κατηγορία ονομάζονται *αυτόνομα*, ενώ αυτά της πρώτης κατηγορίας *μη-αυτόνομα*. Στην πρώτη περίπτωση το να θέσουμε τη νέα (μετασχηματισμένη) Χαμιλτονιανή ίση με το μηδέν  $\bar{\mathcal{H}} \equiv 0$ , ισοδυναμεί με το να βρούμε νέες κανονικές μεταβλητές των οποίων οι χρονικοί παράγωγοι όπως προκύπτουν από τις κανονικές εξισώσεις της κίνησης είναι μηδενικές. Οι νέες μεταβλητές είναι σταθερές (ως προς τον χρόνο) οι οποίες μπορούν να ερμηνευτούν ως αρχικές τιμές των αρχικών μεταβλητών. Έτσι, οι εξισώσεις του κανονικού μετασχηματισμού αποτελούν ουσιαστικά τη λύση του συστήματος, η οποία δίνει τη γενικευμένη θέση και την γενικευμένη ορμή σε κάθε χρονική στιγμή σαν συνάρτηση των αρχικών τιμών.

Εκτελώντας τις αντικαταστάσεις στις (2.77) και θέτοντας  $\bar{\mathcal{H}} = 0$ , προκύπτει η ακόλουθη μερική διαφορική εξίσωση για τη γεννήτρια συνάρτηση του μετασχηματισμού

$$\mathcal{H} \left( \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q}, q, t \right) + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial t} = 0 \quad (2.80)$$

όπου η λύση της αναφέρεται συνήθως ως *κύρια συνάρτηση Hamilton (Hamilton's principal function)*

Στην δεύτερη περίπτωση (αυτόνομα συστήματα) θέτουμε τη νέα Χαμιλτονιανή ίση με μια σταθερά  $\bar{\mathcal{H}} \equiv E$  και ο μετασχηματισμός ικανοποιεί την *εξίσωση Hamilton-Jacobi*

$$\mathcal{H} \left( \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q}, q \right) = E \quad (2.81)$$

Η λύση της εξίσωσης αυτής είναι γνωστή ως *χαρακτηριστική συνάρτηση Hamilton*. (*Hamilton's characteristic function*)

**Αγκύλες Poisson** Μια σημαντική ποσότητα που αναφέρεται [15] στη μελέτη Χαμιλτονιανών δυναμικών συστημάτων είναι η *αγκύλη Poisson* που ορίζεται ως εξής:

$$[u, v] = \sum_k \left( \frac{\partial u}{\partial q_k} \frac{\partial v}{\partial p_k} - \frac{\partial v}{\partial q_k} \frac{\partial u}{\partial p_k} \right) \quad (2.82)$$

όπου  $u$  και  $v$  είναι οποιεσδήποτε συναρτήσεις των γενικευμένων συντεταγμένων. Οι αγκύλες Poisson διευκολύνουν την φορμαλιστική έκφραση διαφορών εξισώσεων που αφορούν στη δυναμική ενός Χαμιλτονιανού συστήματος:

1. Οι Χαμιλτονιανές εξισώσεις της κίνησης μπορούν να γραφτούν ως

$$\dot{q}_i = [q_i, \mathcal{H}] \quad (2.83)$$

$$\dot{p}_i = [p_i, \mathcal{H}] \quad (2.84)$$

2. Η συνολική χρονική παράγωγος μιας συνάρτησης  $\chi = \chi(q, p, t)$  μπορεί να γραφτεί ως

$$\frac{d\chi}{dt} = [\chi, \mathcal{H}] + \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (2.85)$$

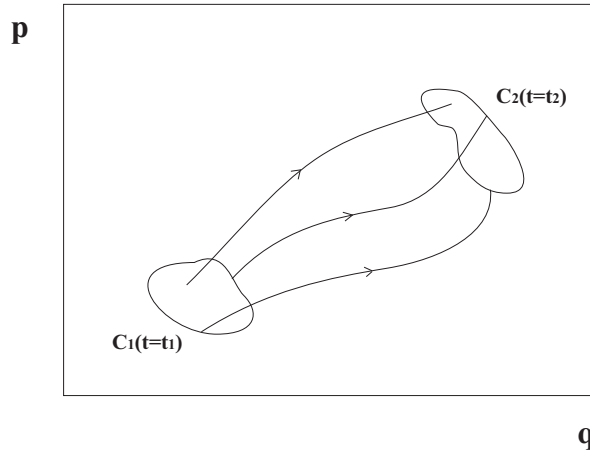
3. Μια συνάρτηση των γενικευμένων μεταβλητών  $I = I(q, p)$  αποτελεί σταθερά της κίνησης αν και μόνο αν βρίσκεται σε *ενέλιξη (involution)* με την Χαμιλτονιανή :

$$[I, \mathcal{H}] = 0 \quad (2.86)$$

## 2.2.2 Χώρος Φάσεων

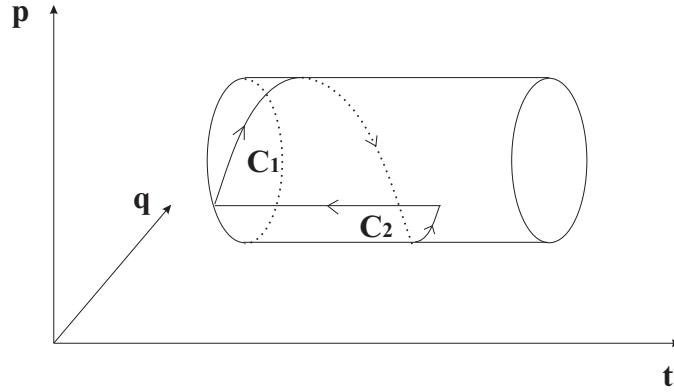
Το σύστημα που περιγράφουν οι εξισώσεις Hamilton της κίνησης έχει στη γενική του μορφή  $N$  βαθμούς ελευθερίας ( $i = 1 \dots N$ ). Οι αρχικές τιμές των γενικευμένων θέσεων και ορμών αποτελούν ένα σύνολο από  $2N$  σταθερές της κίνησης οι οποίες καθορίζουν την δυναμική εξέλιξη του συστήματος. Η εξέλιξη αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως κίνηση ενός σημειακού σώματος μέσα σε ένα χώρο  $2N$  διαστάσεων. Υποθέτοντας ότι έχουμε την λύση των εξισώσεων της κίνησης που δίνει τα  $p$  και  $q$  σαν συναρτήσεις του χρόνου, μπορούμε να διαγράψουμε την τροχιά αυτού του σώματος από ένα αρχικό σημείο  $(p_1, q_1)$  όπου βρισκόταν

την χρονική στιγμή  $t_1$  προς οποιοδήποτε σημείο στο οποίο θα βρεθεί σε μια μεταγενέστερη στιγμή  $t_2$ . Ο  $2N$ -διάστατος χώρος  $p - q$  ονομάζεται *χώρος φάσεων* (ή *φασικός χώρος*) του συστήματος [3] και έχει μερικές σημαντικές ιδιότητες οι οποίες αναφέρονται παρακάτω:



Σχήμα 2.4: Τροχιές στο χώρο των φάσεων

1. Οι τροχιές κίνησης στον χώρο των φάσεων δεν μπορεί να τέμνονται σε μια δεδομένη χρονική στιγμή, όπως προκύπτει από το γεγονός ότι κάθε αρχική θέση στο χώρο προσδιορίζει με τρόπο μονοσήμαντο την ακόλουθη εξέλιξη του συστήματος. Αν η Χαμιλτονιανή είναι ανεξάρτητη του χρόνου (αυτόνομο σύστημα) δεν είναι δυνατό να υπάρχουν τεμνόμενες τροχιές στον φασικό χώρο.
2. Μιά κλειστή υπερεπιφάνεια  $C_1$  του φασικού χώρου που περικλείει ένα σύνολο από αρχικές συνθήκες την χρονική στιγμή  $t_1$  εξελίσσεται σε μια κλειστή υπερεπιφάνεια  $C_2$  την χρονική στιγμή  $t_2$  που περικλείει σημεία καθένα από τα οποία αποτελεί εξέλιξη κάποιου σημείου που περικλείεται στην  $C_1$ . Η ιδιότητα αυτή προκύπτει άμεσα από την προηγούμενη καθώς κάθε τροχιά που ξεκινά από ένα σημείο εντός της  $C_1$  δεν μπορεί να τέμνει την  $C_1$  καθώς τότε οι ταυτόσημες αρχικές συνθήκες (στο σημείο τομής) σε μια δεδομένη χρονική στιγμή θα επέβαλαν ταυτόσημη εξέλιξη. Χρήσιμη συνέπεια αυτής της ιδιότητας αποτελεί το γεγονός ότι η μελέτη της εξέλιξης ενός μεγάλου αριθμού γειτονικών σημείων του φασικού χώρου μπορεί να πραγματοποιηθεί χρησιμοποιώντας ένα μικρότερο σύνολο σημείων (υπερεπιφάνεια) που περικλείει τον προηγούμενο χώρο και η εξέλιξη του οποίου αποτελεί σύνορο της εξέλιξης του αρχικού συνόλου.



Σχήμα 2.5: Διαδρομή ολοκλήρωσης για το ολοκλήρωμα δράσης

3. Θεωρούμε ένα σύνολο από αρχικές συνθήκες, κάθε μια από τις οποίες αντιστοιχεί σε μια πιθανή κατάσταση του συστήματος. Η πιθανότητα ενός συνόλου ή η κατανομή πυκνότητας των καταστάσεων του συστήματος στο φασικό χώρο μπορεί να εκφραστεί ως

$$\tau = \tau(p, q, t) \quad (2.87)$$

Αν κανονικοποιήσουμε την συνάρτηση  $\tau$  έτσι ώστε να ισχύει

$$\int_{\text{φασικός χώρος}} \tau \prod_i dp_i dq_i = 1 \quad (2.88)$$

τότε  $d\mathcal{N} = \tau \prod_i dp_i dq_i$  είναι η πιθανότητα κατά την χρονική στιγμή  $t$ , το σύστημα να βρίσκεται σε μια κατάσταση στην οποία οι  $i$ -στές συντεταγμένες να βρίσκονται η μεν θέση μεταξύ  $q_i$  και  $q_i + dq_i$ , η δε ορμή μεταξύ  $p_i$  και  $p_i + dp_i$ . Ο ρυθμός αλλαγής του αριθμού των φασικών σημείων  $d\mathcal{N}$ , που περιέχονται στον απειροστό όγκο του φασικού χώρου:

$$\prod_i dp_i dq_i = 1 \quad (2.89)$$

προσδιορίζεται από την εξίσωση συνέχειας

$$\frac{\partial d\mathcal{N}}{\partial t} + \sum_i \left( \frac{\partial}{\partial p_i} (d\mathcal{N} \dot{p}_i) + \frac{\partial}{\partial q_i} (d\mathcal{N} \dot{q}_i) \right) = 0 \quad (2.90)$$



Διαιρώντας με τον όγκο προκύπτει ο ρυθμός αλλαγής της πυκνότητας σε ένα σημείο του φασικού χώρου

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \sum_i \left( \dot{p}_i \frac{\partial \tau}{\partial p_i} + \tau \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} + \dot{q}_i \frac{\partial \tau}{\partial q_i} + \tau \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} \right) = 0 \quad (2.91)$$

Από τις εξισώσεις Hamilton για τα  $\dot{p}_i$  και  $\dot{q}_i$ , ο δεύτερος και ο τέταρτος όρος απλοποιούνται και προκύπτει

$$\sum_i \left( \dot{p}_i \frac{\partial \tau}{\partial p_i} + \dot{q}_i \frac{\partial \tau}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial \tau}{\partial t} = 0 \quad (2.92)$$

Η εξίσωση αυτή αποτελεί διατύπωση της ασυμπιεστότητας (incompressibility) της ροής στο φασικό χώρο και είναι γνωστή και ως *θεώρημα του Liouville*.

### Ολοκληρωτικές Σταθερές

Οι προαναφερθείσες ιδιότητες προσδίδουν σημαντικές ευκολίες στη μελέτη της δυναμικής ενός συστήματος στο φασικό χώρο. Συγκεκριμένα από την εξίσωση (2.92) απορρέει το γεγονός ότι η ποσότητα

$$\int \prod_i dp_i dq_i \quad (2.93)$$

όπου το  $2N$ -διάστατο ολοκλήρωμα υπολογίζεται σε μια δεδομένη χρονική στιγμή  $t$ , είναι μια σταθερά της κίνησης. Ένα ιεραρχημένο σύνολο από τέτοιες σταθερές αύξουσας διάστασης στο φασικό χώρο μελετήθηκε αρχικά από τον Poincaré (1892). Οι ολοκληρωτικές σταθερές είναι θεμελιώδεις για την θεωρία των Χαμιλτονιανών ροών και μπορεί να αποτελέσει βάση θεμελίωσης του συνόλου της δυναμικής θεωρίας. Στην συνέχεια εξετάζεται το πρώτο μέλος αυτού του συνόλου (του οποίου η ποσότητα (2.93) αποτελεί το  $N$ -οστό μέλος):

$$\int \int \sum_i dp_i dq_i = \text{σταθερά} \quad (2.94)$$

όπου το ολοκλήρωμα είναι πάνω σε μια  $2$ -διάστατη επιφάνεια του φασικού χώρου σε κάποια χρονική στιγμή  $t$ .

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Stokes στην (2.94), προκύπτει η σταθερά

$$\oint \sum_i p_i dq_i = \text{σταθερά} \quad (2.95)$$

όπου η ολοκλήρωση πραγματοποιείται πάνω σε μια κλειστή διαδρομή στο φασικό χώρο κάποια χρονική στιγμή  $t$ , και είναι ιδιαίτερα σημαντική στην μελέτη ταλαντωτικών συστημάτων όπως θα φανεί στην συνέχεια.

### 2.2.3 Μεταβλητές Δράσης - Γωνίας σε συστήματα ενός βαθμού ελευθερίας

Η συνάρτηση Hamilton ενός αυτόνομου συστήματος με ένα βαθμό ελευθερίας, έχει τη μορφή ([3])

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(q, p) = h \quad (2.96)$$

όπου το  $h$  ανήκει στο σύνολο των σταθερών τιμών της συνάρτησης  $\mathcal{H}$ . Η σχέση (2.96) παριστάνει μια μονοπαραμετρική οικογένεια καμπυλών στο διδιάστατο χώρο φάσεων. Για τις τιμές της  $h$  που δεν αντιστοιχούν σε μηδενισμό της κλίσης της Χαμιλτονιανής (σημεία ισορροπίας), οι αντίστοιχες φασικές καμπύλες δεν τέμνουν τον εαυτό τους. Αν επιπλέον η κίνηση είναι περατωμένη, όταν η Χαμιλτονιανή είναι παραγωγίσιμη, τότε μια φασική καμπύλη που παριστάνεται από την εξίσωση (2.96) δε μπορεί να έχει σημεία συσσώρευσης. Οι περατωμένες φασικές καμπύλες είναι κλειστές, και η αντίστοιχη κίνηση είναι περιοδική. Πάνω σε αυτές τις κλειστές φασικές καμπύλες το διανυσματικό πεδίο του Hamilton είναι παντού ομαλό.

Εν γένει έχουμε δύο τύπους κλειστών φασικών καμπυλών, ανάλογα με τη φύση της γενικευμένης συντεταγμένης  $q$ :

Στην πρώτη περίπτωση, μετά από κάποιο χρονικό διάστημα  $T$ , οι μεταβλητές  $q, p$  επανέρχονται στις αρχικές τους τιμές:

$$q(t + T) = q(t), \quad p(t + T) = p(t)$$

Στην περίπτωση αυτή, η φασική τροχιά είναι μια κλειστή καμπύλη στο επίπεδο  $(q, p)$  και η αντίστοιχη κίνηση ονομάζεται *λίκνιση*. (*libration*)

Στη δεύτερη περίπτωση, η συνάρτηση Hamilton είναι περιοδική συνάρτηση της γενικευμένης συντεταγμένης  $q$  με περίοδο  $q_0$ , δηλαδή  $\mathcal{H}(q + q_0, p) = \mathcal{H}(q, p)$ . Η περίπτωση αυτή εμφανίζεται συνήθως όταν η  $q$  είναι γωνιακή συντεταγμένη, και τότε η  $q_0$  ισούται με  $2\pi$ . Ο χώρος φάσεων είναι κυλινδρικός ως προς την  $q$  και το φασικό σημείο  $(q + q_0, p)$  συμπίπτει με το  $(q, p)$ . Τότε, μετά από κάποιο χρονικό διάστημα  $T$ , η γενικευμένη ορμή  $p$  επανέρχεται στην αρχική της τιμή, αλλά η γενικευμένη συντεταγμένη  $q$  μπορεί να αυξάνεται κατά την ποσότητα  $q_0$ :

$$q(t + T) = q(t) + q_0, \quad p(t + T) = p(t)$$

Η φασική τροχιά στο επίπεδο  $(q, p)$  είναι μια περιοδική ως προς  $q$  καμπύλη με περίοδο  $q_0$ , όμως στον κυλινδρικό χώρο φάσεων η φασική τροχιά είναι μια κλειστή καμπύλη. Η περιοδική κίνηση αυτού του τύπου ονομάζεται *περιστροφή*

(rotation). Είναι δυνατόν να εμφανίζονται στο ίδιο σύστημα και οι δύο τύποι περιοδικών κινήσεων.

Εφ' όσον εργαζόμαστε σε περιοχές τιμών του  $h$  που δεν αντιστοιχούν σε σημεία μηδενισμού της κλίσης της Χαμιλτονιανής (σημεία ισορροπίας), η σχέση (2.96) επιλύεται ως προς την ορμή:

$$p = p(q, h) \quad (2.97)$$

Η μεταβλητή δράσης ορίζεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα:

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint p(q, h) dq \quad (2.98)$$

όπου η ολοκλήρωση γίνεται κατά μήκος των κλειστών φασικών τροχιών του συστήματος, για μια πλήρη περίοδο λίκνισης ή περιστροφής.. Μπορούμε να δούμε ότι η δράση  $J$  εξαρτάται μόνο από τη σταθερά  $h$ , συνεπώς είναι ολοκλήρωμα της κίνησης, εξαρτώμενο από τη Χαμιλτονιανή. Αν αντιστρέψουμε αυτή τη σχέση ( $h = h(J)$ ) και αντικαταστήσουμε στη σχέση (2.97), θα έχουμε:

$$p = p(q, J) \quad (2.99)$$

Ορίζουμε τώρα τη συνάρτηση

$$W = W(q, J) = \int p(q, J) dq \quad (2.100)$$

την οποία θα χρησιμοποιήσουμε ως γεννήτρια συνάρτηση κανονικού μετασχηματισμού δεύτερου τύπου, όπου η δράση  $J$  είναι η νέα γενικευμένη ορμή. Η συζυγής συντεταγμένη της  $J$ , η οποία δίνεται από τη σχέση

$$w = \frac{\partial W}{\partial J} = \frac{\partial}{\partial J} \int p(q, J) dq \quad (2.101)$$

ονομάζεται *μεταβλητή γωνίας*, ενώ ο κανονικός μετασχηματισμός συμπληρώνεται από τη σχέση  $p = \partial W / \partial q = p(q, J)$ , η οποία συμπίπτει με την (2.99).

Η συνάρτηση Hamilton, εκπεφρασμένη στις νέες μεταβλητές, όπως φαίνεται και από τη σχέση  $h = h(J)$  θα εξαρτάται μόνο από τη δράση:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(J) \quad (2.102)$$

και οι κανονικές εξισώσεις γίνονται:

$$\dot{J} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial w} = 0 \quad \dot{w} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J} = \omega(J) \quad (2.103)$$

Η πρώτη από τις κανονικές εξισώσεις δίνει την προφανή λύση  $J = \text{σταθ}$ . Αφού η  $w$  είναι συνάρτηση μόνο της σταθερής δράσης, θα είναι επίσης σταθερή, και η δεύτερη εξίσωση ολοκληρώνεται αμέσως:

$$w = \omega(J)t + \vartheta \quad (2.104)$$

όπου η σταθερά ολοκλήρωσης  $\vartheta$  συμπίπτει με την αρχική τιμή της μεταβλητής γωνίας  $w(0)$ . Θα δείξουμε ότι η μεταβλητή  $w$  αποτελεί γωνιακή συντεταγμένη πάνω στις κλειστές φασικές καμπύλες του συστήματος.

Έστω  $\Delta w$  η συνολική μεταβολή του  $w$  για μια πλήρη περιστροφή κατά μήκος μιας κλειστής φασικής καμπύλης, δηλαδή:

$$\Delta w = \oint \frac{\partial w}{\partial q} dq = \oint \frac{\partial^2 W}{\partial J \partial q} dq \quad (2.105)$$

Εφ' όσον η δράση  $J$  παραμένει σταθερή κατά μήκος της ολοκλήρωσης η (2.105) γράφεται

$$\Delta w = \frac{\partial}{\partial J} \oint \frac{\partial W}{\partial q} dq = \frac{\partial}{\partial J} \oint p(q, h) dq = 2\pi \quad (2.106)$$

Παρατηρούμε ότι κατά μία πλήρη περιστροφή επάνω στις κλειστές φασικές καμπύλες του συστήματος, η  $w$  μεταβάλλεται κατά  $2\pi$ , συνεπώς είναι καλή γωνιακή συντεταγμένη.

Αν  $T$  είναι η χρονική περίοδος της λίκνισης ή της περιστροφής, η  $\Delta w$  μπορεί επίσης να υπολογιστεί από την εξίσωση της κίνησης (2.104) :

$$\Delta w = w(t + T) - w(t) = \omega T \quad (2.107)$$

Συγκρίνοντας τώρα τις δύο τελευταίες σχέσεις, βλέπουμε ότι η σταθερά  $\omega$  συμπίπτει με τη γωνιακή συχνότητα της κίνησης :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (2.108)$$

Στην περιοχή των λικνίσεων, οι μεταβλητές δράσης - γωνίας αποτελούν σύστημα πολικών συντεταγμένων στο χώρο των φάσεων. Κάθε φασική τροχιά παριστάνεται από έναν κύκλο, η ακτίνα του οποίου προσδιορίζεται από τη σταθερή τιμή της μεταβλητής δράσης, ενώ η μεταβλητή γωνίας αποτελεί γωνιακή συντεταγμένη κατά μήκος της τροχιάς. Παρατηρούμε ότι το ολοκλήρωμα

$$\oint p(q, h) dq$$

το οποίο είναι το εμβαδό που περικλείει η αντίστοιχη φασική καμπύλη, ισούται με  $2\pi J$ . Η ακτίνα του αντίστοιχου κύκλου θα ισούται με  $\sqrt{2J}$ . Οι αντίστοιχες καρτεσιανές συντεταγμένες στο επίπεδο του σχήματος αυτού είναι:

$$X = \sqrt{2J} \sin w \quad Y = \sqrt{2J} \cos w \quad (2.109)$$

Οι συντεταγμένες  $X, Y$  είναι κανονικές, αφού επαληθεύουν τη σχέση

$$[X, Y] = 1$$

Στην περίπτωση περιστροφής, οι  $J, w$  αποτελούν σύστημα συντεταγμένων στην επιφάνεια κυλίνδρου, και οι κλειστές φασικές καμπύλες παριστάνονται από τους κύκλους  $J = \text{σταθ}$ . Και στις δύο περιπτώσεις η συχνότητα εξαρτάται εν γένει από τη δράση ( $\omega = \omega(J)$ ), συνεπώς μεταβάλλεται από τροχιά σε τροχιά. Όταν όμως η εξάρτηση της  $\mathcal{H}$  από το  $J$  είναι γραμμική, τότε η συχνότητα (άρα και η περίοδος) είναι ανεξάρτητη του  $J$  και η ίδια για όλες τις τροχιές. Σε αυτή την περίπτωση ισχύει ότι  $d\omega/dJ = 0$  και το σύστημα ονομάζεται *εκφυλισμένο*.

Αντίστοιχα ορίζονται οι μεταβλητές δράσης και γωνίας  $(J_i, w_i)$  για συστήματα με περισσότερους βαθμούς ελευθερίας.

## 2.2.4 Αδιαβατικές Αναλλοίωτες

Σε περιπτώσεις όπου ένα φυσικό σύστημα παρουσιάζει περιοδικότητα στην κίνηση, οι μεταβλητές Δράσης - Γωνίας αποδεικνύονται χρήσιμο εργαλείο, δεδομένου ότι επιτρέπουν την εύρεση των συχνοτήτων των περιοδικών κινήσεων του συστήματος χωρίς την πλήρη επίλυσή του. (βλέπε και [6]) Εάν το υπό μελέτη σύστημα έχει εξάρτηση από κάποια παράμετρο  $\lambda(t)$  που μεταβάλλεται αργά με το χρόνο, τότε οι μεταβλητές δράσης μένουν πρακτικά σταθερές. Για την ιδιότητά τους αυτή χαρακτηρίζονται ως *αδιαβατικές αναλλοίωτες* (*adiabatic invariants*).

Πιο αναλυτικά, θεωρούμε σύστημα με Χαμιλτονιανή της μορφής

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(q_i, p_i, \lambda) \quad (2.110)$$

όπου  $\lambda$  σταθερή παράμετρος. Οι μεταβλητές δράσης - γωνίας θα παρουσιάζουν και αυτές εξάρτηση από την παράμετρο  $\lambda$  και παίρνουν τη μορφή  $J(q_i, p_i, \lambda), \theta(q_i, p_i, \lambda)$ . Αντικαθιστώντας τη σταθερή παράμετρο  $\lambda$  με τη χρονοεξαρτώμενη  $\lambda(t)$ , οι δρασσεογωνιακές μεταβλητές γίνονται συναρτήσεις του χρόνου, δηλαδή  $J(q_i, p_i, \lambda(t)), \theta(q_i, p_i, \lambda(t))$ . Η μεταβλητή δράσης  $J$  δεν αποτελεί πλέον σταθερά της κίνησης. Εντούτοις αποδεικνύεται ότι, εάν η παράμετρος  $\lambda$  μεταβάλλεται κατά  $\Delta\lambda$  σε χρονικό διάστημα  $\Delta t$ , τότε η μεταβολή  $\Delta J$  της  $J$  είναι ανάλογη του  $\Delta\lambda/\Delta t$ :

$$\Delta J \sim \Delta\lambda/\Delta t$$

Είναι συνεπώς δυνατόν να επιφέρουμε όσο μεγάλη μεταβολή επιθυμούμε στην παράμετρο  $\lambda$  δίχως να αλλάξει η  $J$ , αρκεί αυτή να γίνει σε μεγάλη χρονική περίοδο  $\Delta t$ .

Η κίνηση φορτισμένων σωματιδίων εντός μαγνητικών πεδίων παρουσιάζει περιοδικότητα, οπότε οι δρασσεογωνιακές μεταβλητές βρίσκουν εφαρμογή. Με τις αδιαβατικές αναλλοίωτες μπορούμε να ερμηνεύσουμε την παγίδευση φορτισμένων σωματιδίων σε μαγνητικά πεδία διπόλων, όπως το μαγνητικό πεδίο της Γης.

Για να βρούμε τις αδιαβατικές αναλλοίωτες αναλύουμε το πρόβλημα με βάση την ταχύτητα των σωματιδίων. Η γενική έκφραση για το ολοκλήρωμα δράσης είναι:

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint_C pdq \quad (2.111)$$

Συμβολίζοντας με  $ds$  το στοιχείο μήκους της τροχιάς του σωματιδίου, θα έχουμε

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint_C \mathbf{p} \cdot ds \quad (2.112)$$

Πριν γενικεύσουμε για κάθε φορτισμένο σωματίδιο, θα ασχοληθούμε με το ηλεκτρόνιο. Η ορμή σωματιδίου με φορτίο  $q = e$  (ηλεκτρονίου) θα είναι λοιπόν

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} + e\mathbf{A} \quad (2.113)$$

Αντικαθιστώντας, βρίσκουμε τη γενικότερη έκφραση για το ολοκλήρωμα δράσης:

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint_C m\mathbf{v} \cdot ds + \frac{1}{2\pi} \oint_C e\mathbf{A} \cdot ds \quad (2.114)$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Stokes και τη σχέση  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  έχουμε:

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint_C m\mathbf{v} \cdot ds + \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} e\mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (2.115)$$

όπου  $C$  η καμπύλη που περιβάλλει την επιφάνεια  $\Sigma$ .

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε τις αδιαβατικές αναλλοίωτες που συναντάμε στην κίνηση φορτίων σε μεταβαλλόμενο (μη ομογενές) μαγνητικό πεδίο, και συγκεκριμένα σε ένα μαγνητικό δίπολο, το οποίο θα μας απασχολήσει αρκετά. Η κίνηση αυτή έχει μεγάλη σημασία γιατί τα μαγνητικά δίπολα τα συναντάμε τακτικά στη μαγνητόσφαιρα της γης, τους πλανήτες και άλλα αστροφυσικά αντικείμενα, ενώ η τοπολογία μαγνητικού πεδίου που επάγεται από κυκλικό βρόχο ρεύματος (current loop) είναι περίπου η ίδια (κατά μια προσέγγιση που θα αναλυθεί στο επόμενο Κεφάλαιο) με αυτή του μαγνητικού διπόλου.

Το φορτίο εκτελεί μέσα στο μαγνητικό δίπολο τρεις χαρακτηριστικές περιοδικές κινήσεις:

1. Περιστρέφεται γύρω από τις μαγνητικές γραμμές με κυκλοτρονική συχνότητα  $\omega_c$
2. Το κέντρο περιστροφής του φορτίου ολισθαίνει κατά μήκος των μαγνητικών γραμμών λόγω διαμήκους ανομοιογένειας, και εάν παγιδευτεί μέσα στο δίπολο εκτελεί μια ταλάντωση μεταξύ των πόλων
3. Το κέντρο περιστροφής του σωματιδίου κινείται εγκάρσια (κάθετα) προς τις μαγνητικές γραμμές, γιατί το μαγνητικό πεδίο του διπόλου εξαρτάται από την απόσταση από το κέντρο του.



Τις τρεις αδιαβατικές κινήσεις που περιγράψαμε συνοδεύουν, όπως θα δείξουμε στη συνέχεια, αντίστοιχες τρεις *αδιαβατικές αναλλοίωτες*.

### Πρώτη Αδιαβατική Αναλλοίωτη: Μαγνητική Ροπή

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει ακροθιγώς, η μαγνητική ροπή της κυκλοτρονικής κίνησης του φορτισμένου σωματιδίου περί τις μαγνητικές γραμμές είναι μια αδιαβατική αναλλοίωτη. Ας αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα αναλυτικά:

Το πρώτο ολοκλήρωμα δράσης που θα υπολογίσουμε συνδέεται με την περιστροφική κίνηση των φορτισμένων σωματιδίων γύρω από τις μαγνητικές γραμμές. Η κατάλληλη επιλογή για ορμή σε αυτή την περίπτωση είναι η κάθετη στις μαγνητικές γραμμές (εγκάρσια) συνιστώσα της ορμής:

$$\mathbf{p}_\perp = m\mathbf{v}_\perp - q\mathbf{A}_\perp \quad (2.116)$$

Για το ολοκλήρωμα δράσης έχουμε:

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{2\pi} \oint_C \mathbf{p}_\perp \cdot d\mathbf{s} \\ &= \frac{1}{2\pi} \oint_C (m\mathbf{v}_\perp + e\mathbf{A}_\perp) \cdot d\mathbf{s} \\ &= \frac{1}{2\pi} \oint_C m\mathbf{v}_\perp \cdot d\mathbf{s} + \frac{1}{2\pi} \oint_C e\mathbf{A}_\perp \cdot d\mathbf{s} \end{aligned} \quad (2.117)$$

Χρησιμοποιώντας ότι  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_\perp$  και την έκφραση για την ακτίνα Larmor

$$\rho_L = \frac{mv_\perp}{eB} \quad (2.118)$$

έχουμε:

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{2\pi} \oint_C mv_\perp \rho_L \hat{\boldsymbol{\theta}} d\theta + \frac{1}{2\pi} \oint_C e\mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \\ &= \frac{1}{2\pi} mv_\perp 2\pi \rho_L + \frac{1}{2\pi} \iint_\Sigma e\nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} \\ &= mv_\perp \rho_L + \frac{1}{2\pi} \iint_\Sigma e\mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \\ &= mv_\perp \rho_L - \frac{1}{2\pi} eB\pi\rho_L^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{(mv_\perp)^2}{eB} \end{aligned} \quad (2.119)$$

Το αρνητικό πρόσημο προέκυψε λόγω της ολοκλήρωσης στην καμπύλη με τη φορά των δεικτών του ρολογιού.

Για αργές μεταβολές του  $B$ , η ποσότητα  $J_1$  είναι αδιαβατική αναλλοίωτη του συστήματος. Η ποσότητα (μέτρο)

$$\mu = \frac{eJ_1}{m} = \frac{p_{d\perp}^2}{2mB} \quad (2.120)$$

ονομάζεται *πρώτη αδιαβατική αναλλοίωτη*, (Alfvén 1950) είναι η *μαγνητική ροπή της κυκλοτρονικής τροχιάς* και παίζει σημαντικό ρόλο στη φυσική πλάσματος στις προσπάθειες περιορισμού φορτισμένων σωματιδίων σε φραγμένες περιοχές. Η ποσότητα  $p_{d\perp}$  είναι η κάθετη στις μαγνητικές γραμμές συνιστώσα της δυναμικής ορμής. ( $m\mathbf{v}$ )

### Δεύτερη Αδιαβατική Αναλλοίωτη: Διαμήκης (longitudinal)

Η δεύτερη αδιαβατική αναλλοίωτη έχει άμεση σχέση με τη διαμήκη ανομοιογένεια σε μη ομογενή στατικά μαγνητικά πεδία, όπως αυτό του μαγνητικού διπόλου. Το φορτισμένο σωματίδιο μπορεί να επιταχυνθεί κατά τη φορά των μαγνητικών γραμμών. Όπως θα δούμε πιο κάτω, αυτή η κίνηση είναι περιοδική. Το σωματίδιο διαγράφει σχεδόν κλειστή τροχιά γύρω από τις μαγνητικές γραμμές, ταλαντούμενο μεταξύ σημείων αναπήδησης. Η θεώρηση ότι η τροχιά είναι κλειστή δεν είναι απόλυτα ακριβής, λόγω της αξιμουθιακής μετατόπισης (ολίσθησης) την οποία επίσης εκτελεί το σωματίδιο. Τη θεωρούμε όμως αμελητέα, και την τροχιά ως εκ τούτου κλειστή.

Εφ' όσον έχουμε περιοδική κίνηση, αναμένουμε ότι θα υπάρχει άλλο ένα ολοκλήρωμα δράσης. Πράγματι, υπάρχει το ολοκλήρωμα δράσης  $J_2$  που ονομάζεται *δεύτερη αδιαβατική αναλλοίωτη ή διαμήκης (longitudinal) αδιαβατική αναλλοίωτη*.

Επιστρέφουμε στη σχέση (2.115), επιλέγοντας αυτή τη φορά την παράλληλη συνιστώσα της ορμής του σωματιδίου:

$$\mathbf{p}_{\parallel} = m\mathbf{v}_{\parallel} - q\mathbf{A}_{\parallel} \quad (2.121)$$

Έχουμε λοιπόν:

$$J_2 = \frac{1}{2\pi} \oint_C m\mathbf{v}_{\parallel} \cdot d\mathbf{s} - \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} q\mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (2.122)$$

Στην προκειμένη περίπτωση η επιφάνεια ολοκλήρωσης είναι κάθετη στις μαγνητικές γραμμές (διαγράφουμε τροχιά κατά μήκος του  $\mathbf{B}$ ) συνεπώς ο δεύτερος όρος μηδενίζεται:

$$J_2 = \frac{1}{2\pi} \oint_C mv_{\parallel} ds \quad (2.123)$$

Όταν η ολική ενέργεια διατηρείται, το ολοκλήρωμα δράσης  $J_2$  εξαρτάται μόνο από το μαγνητικό πεδίο  $B$ . Η ολική ενέργεια οφείλεται στην κάθετη και την παράλληλη συνιστώσα της ταχύτητας:

$$\begin{aligned} E &= E_{\perp} + E_{\parallel} \Rightarrow \\ E_{\parallel} &= E - E_{\perp} = \frac{1}{2}mv_{\parallel}^2 \Rightarrow \\ v_{\parallel} &= \sqrt{\frac{2}{m}E} \sqrt{1 - \frac{E_{\perp}}{E}} \end{aligned} \quad (2.124)$$

Το  $J_1$  εξακολουθεί να αποτελεί αδιαβατική αναλλοίωτη, συνεπώς λόγω της σχέσης (2.120) έχουμε:

$$v_{\parallel} = \sqrt{\frac{2}{m}E} \sqrt{1 - \frac{\mu B}{E}} \quad (2.125)$$

Όταν η ολική ενέργεια διατηρείται, μπορούμε να αντικαταστήσουμε την τιμή της με εκείνη που λαμβάνει στο σημείο αναπήδησης, η οποία ισούται με την κάθετη ενέργεια:

$$E = E_{mir} = E_{\perp} = \mu B_{mir} \quad (2.126)$$

οπότε τελικά προκύπτει

$$v_{\parallel} = \sqrt{\frac{2}{m}E} \sqrt{1 - \frac{B}{B_{mir}}} \quad (2.127)$$

και

$$J_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{2mE} \oint_{\Sigma_A} \sqrt{1 - \frac{B}{B_{mir}}} ds \quad (2.128)$$

Για μικρές αλλαγές του μαγνητικού πεδίου η  $J_2$  αποτελεί αδιαβατική αναλλοίωτη, ενώ πιο αυστηρή απόδειξη για σχετικιστικά σωματίδια έχει γίνει από τους Northrop και Teller το 1960. [19]

Μέχρι στιγμής έχουμε θεωρήσει ως δεδομένο ότι τα σωματίδια εκτελούν περιοδική κίνηση μεταξύ σημείων αναπήδησης. Θα δείξουμε ότι πράγματι αυτό συμβαίνει. Από την ολική ενέργεια του συστήματος έχουμε:

$$E = \frac{1}{2\pi} (p_{d\perp}^2 + p_{d\parallel}^2) \quad (2.129)$$

σχέση η οποία μέσω της (2.120) γίνεται:

$$p_{d\parallel} = \sqrt{2mE - p_{d\perp}^2} = \sqrt{2m(E - \mu B)} \quad (2.130)$$

Υποθέτουμε αδιαβατική μεταβολή του μαγνητικού πεδίου καθώς κινείται το σωματίδιο. Όταν το μαγνητικό πεδίο αποκτήσει το μέγιστο της τιμής του  $B = B_{max} = E/\mu$  η παράλληλη συνιστώσα της δυναμικής ορμής μηδενίζεται. ( $p_{\parallel} = 0$ ) Το γεγονός αυτό 'γεννάει' ένα σημείο επιστροφής. Το σωματίδιο αρχίζει και κινείται κατά την αντίθετη κατεύθυνση, όπου και συναντάει μαγνητικό πεδίο το οποίο αρχικά μειώνεται σε ένταση, με συνέπεια να επιταχύνεται. Κάποια στιγμή όμως θα φτάσει πάλι σε σημείο με μέγιστη ένταση οπότε και θα επαναληφθεί η ίδια διαδικασία. Καθ' όλη τη διάρκεια της κίνησης που περιγράφουμε, το σωματίδιο εξακολουθεί να εκτελεί την κυκλοτρονική κίνηση. Τα σημεία επιστροφής ονομάζονται *κατοπτρικά σημεία* και έχουν μεγάλη σημασία στη φυσική πλάσματος.

**Γωνία κλίσης (pitch angle)** Η γωνία κλίσης  $\alpha$  ορίζεται η γωνία μεταξύ της ταχύτητας  $\mathbf{v}$  του σωματιδίου και του μαγνητικού πεδίου  $\mathbf{B}$ . Οι συνιστώσες της ταχύτητας εκφράζονται τότε ως εξής:

$$v_{\parallel} = v \cos \alpha \quad (2.131)$$

$$v_{\perp} = v \sin \alpha \quad (2.132)$$

Ως εκ τούτου μπορούμε να γράψουμε την πρώτη αδιαβατική αναλλοίωτη ως εξής:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{T_{\perp}}{B} \\ &= \frac{\frac{1}{2}mv_{\perp}^2}{B} \\ &= \frac{\frac{1}{2}m(v \sin \alpha)^2}{B} \\ &= \frac{T \sin^2 \alpha}{B} \end{aligned} \quad (2.133)$$

Επειδή η ποσότητα  $\mu$  διατηρείται, παίρνουμε τις εκφράσεις της που αντιστοιχούν σε κατοπτρικό και σε ισημερινό σημείο:

$$\mu = \frac{T \sin^2 \alpha_{eq}}{B_{eq}} = \frac{T}{B_{mir}} \quad (2.134)$$

Συνεπώς :

$$\sin^2 \alpha_{eq} = \frac{B_{eq}}{B_{mir}} \quad (2.135)$$

Η δεύτερη αδιαβατική αναλλοίωτη συναρτήσει της γωνίας κλίσης γράφεται:

$$J_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{2mT} \oint_{\Sigma A} \sqrt{1 - \frac{B}{B_{eq}} \sin^2 \alpha_{eq}} \, ds \quad (2.136)$$

Ένα σωματίδιο με μηδενική ισημερινή γωνία κλίσης θα αναπηδήσει στο άπειρο. Στην περίπτωση του γήινου μαγνητικού πεδίου, το άπειρο αντιστοιχεί στο κέντρο της γης. Εάν η τιμή του μαγνητικού πεδίου στο σημείο αναπήδησης είναι αρκετά υψηλή, δηλαδή μεγαλύτερη από μια κρίσιμη τιμή  $B_{eq}^{crit}$ , το σωματίδιο θα επιστρέψει στον ισημερινό:

$$\sin^2 \alpha_{eq}^{loss} = \frac{B_{eq}}{B_{eq}^{crit}} \quad (2.137)$$

Σωματίδια με γωνία κλίσης στον ισημερινό μικρότερη της  $\alpha_{eq}^{loss}$  εισέρχονται στην ατμόσφαιρα της γης, αντί να υποστούν ανάκλαση σκεδάζονται και χάνονται από τον πληθυσμό των σωματιδίων. Αυτή η γωνία κλίσης ονομάζεται *ισημερινός κώνος απώλειας*. (*equatorial loss cone*)

### Τρίτη Αδιαβατική Αναλλοίωτη : Μαγνητική Ροή - Magnetic Flux

Μέχρι στιγμής έχουμε δει ότι η κάθε αδιαβατική αναλλοίωτη συνδέεται με έναν τύπο κίνησης του σωματιδίου: η  $J_1$  με την κυκλοτρονική κίνηση του σωματιδίου και η  $J_2$  με την κίνηση κατά μήκος των πεδιακών γραμμών. Υπάρχει και μια τρίτη αδιαβατική αναλλοίωτη (περιοδική κίνηση) που συνδέεται με την αργή ολίσθηση του κέντρου περιστροφής διαμέσου των μαγνητικών γραμμών.

Καθώς το σωματίδιο περιστρέφεται αξιμουθιακά γύρω από το μαγνητικό δίπολο, δεν υπάρχει κάποιος λόγος να υποθέσουμε ότι θα επιστρέψει στην ίδια τροχιά, ειδικά στην περίπτωση μη ομογενούς πεδίου. Με άλλα λόγια, ενδέχεται το σωματίδιο να καταλήξει σε διαφορετική μαγνητική γραμμή, επιστρέφοντας

στην ίδια αξιμουθιακή γωνία. Στην πραγματικότητα όμως, το σωματίδιο επιστρέφει στην ίδια μαγνητική γραμμή, υπό την προϋπόθεση ότι η ποσότητα  $J_2$  διατηρείται. Ποιοτικά αυτό μπορεί να διαπιστωθεί από τη σχέση (2.128). Για σωματίδια με δεδομένη  $\mu$  και  $T$  σε κάθε πεδιακή γραμμή αντιστοιχεί διαφορετική  $J_2$ . Όταν λοιπόν η  $J_2$  διατηρείται, το σωματίδιο αναγκαστικά επιστρέφει στην ίδια δυναμική γραμμή - η διατήρηση της  $J_2$  εμποδίζει τα σωματίδια από το να κινηθούν ακτινικά.

Το σωματίδιο λοιπόν είναι αναγκασμένο σε περιοδική αξιμουθιακή κίνηση ακόμα και σε πεδία χωρίς αξονική συμμετρία. (πχ το πεδίο μαγνητικού διπόλου) Η περιοδική αυτή κίνηση συνοδεύεται από μια αδιαβατική αναλλοίωτη. Θέτοντας στην εξίσωση (2.115) ως ορμή την

$$p_\phi = mv_\phi - q\mathbf{A}_\phi \quad (2.138)$$

θα έχουμε:

$$J_3 = \frac{1}{2\pi} \oint_C mv_\phi ds - \frac{1}{2\pi} \oint_C q\mathbf{A}_\phi ds \quad (2.139)$$

Η ταχύτητα ολίσθησης  $v_\phi$  είναι πολύ μικρή, συνεπώς το πρώτο ολοκλήρωμα μπορεί να αγνοηθεί, οπότε καταλήγουμε στη σχέση

$$J_3 = -\frac{1}{2\pi} \oint_C q\mathbf{A}_\phi ds = -q\Phi \quad (2.140)$$

όπου  $\Phi$  η ολική Μαγνητική Ροή που περιβάλλει η τροχιά του σωματιδίου κατά την αξιμουθιακή του κίνηση. Σε περιπτώσεις που το μαγνητικό πεδίο παραμένει πρακτικά αμετάβλητο σε μεγάλα χρονικά διαστήματα, η μαγνητική ροή  $\Phi$  αποτελεί την τρίτη αδιαβατική αναλλοίωτη. Περαιτέρω συζήτηση σχετικά με την τρίτη αδιαβατική αναλλοίωτη γίνεται και από τον Chen στο κλασικό σύγγραμμα Φυσικής Πλάσματος ([13]).

## 2.3 Ισοδυναμία Νευτώνειας Δυναμικής με φορμαλισμό Lagrange - Hamilton

Γράφουμε τη Χαμιλτονιανή συνάρτηση στη μορφή

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sum_i (p_i \cdot \dot{q}_i) - \mathcal{L} \quad (2.141)$$

όπου η  $\mathbf{p} \equiv \{p_i\}$  ονομάζεται κανονική (γενικευμένη) ορμή και  $\mathbf{q} \equiv \{q_i\}$

$$\mathbf{p} \equiv \nabla_q \mathcal{L} \equiv \nabla_q \mathcal{H} \quad (2.142)$$

Οι μερικές παράγωγοι της Χαμιλτονιανής ως προς  $p_i$  και  $q_i$  δίνουν τις αντίστοιχες εξισώσεις *Hamilton* :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \quad (2.143)$$

Η μερική παράγωγος της Χαμιλτονιανής ως προς το χρόνο θα είναι

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \sum_i \frac{dp_i}{dt} \dot{q}_i + \sum_i p_i \frac{d\dot{q}_i}{dt} - \left( \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \quad (2.144)$$

Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι εάν η Λαγκρανζιανή δεν εξαρτάται από το χρόνο, τότε η Χαμιλτονιανή είναι μια σταθερά της κίνησης, το οποίο σημαίνει ότι η ολική ενέργεια διατηρείται. Συνεπώς, η ενέργεια είναι συζυγής (conjugate) ως προς το χρόνο, όπως αντίστοιχα η κανονική ορμή είναι συζυγής ως προς τη θέση. ([14])

Η (κανονικοποιημένη ως προς  $c$ ) Λαγκρανζιανή για ένα (μη σχετικιστικό) φορτισμένο σωματίδιο μέσα σε ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο είναι

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 - q\phi + q(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \quad (2.145)$$

Θα αποδείξουμε στη γενική περίπτωση την ισχύ της εξίσωσης (2.145) θέτοντας την ανωτέρω έκφραση στην εξίσωση του Lagrange :

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \quad (2.146)$$

όπου  $p_i \equiv \partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}_i$  η κανονική ορμή. Εν τέλει θα εξάγουμε την έκφραση που μας δίνει τη δύναμη Lorentz. Εφ' όσον δεν δουλεύουμε σε συγκεκριμένη τοπολογία, δεν υπάρχει λόγος επιλογής συγκεκριμένου συστήματος συντεταγμένων, και για αυτό το λόγο θα θεωρήσουμε τις καρτεσιανές συντεταγμένες ως κανονικές θέσεις. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε για την κανονική ορμή:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} + q\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \quad (2.147)$$

Το αριστερό μέλος της εξίσωσης (2.146) δίνει τώρα

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + q \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{A} \right) \quad (2.148)$$

Ενώ το δεξί μέλος:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}} &= q\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - q\nabla\phi \\
 &= q(\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{A} + \mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{A}) - q\nabla\phi \\
 &= q(\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{A} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - q\nabla\phi
 \end{aligned} \tag{2.149}$$

Εξισώνοντας τις δύο ανωτέρω εκφράσεις, καταλήγουμε στην εξίσωση Lorentz, αφού λάβουμε υπ' όψιν ότι  $\mathbf{E} = -\partial\mathbf{A}/\partial t - \nabla\phi$ , βάσει του νόμου του Faraday. Έχουμε αποδείξει λοιπόν ότι ο φορμαλισμός Lagrange είναι μαθηματικά ισοδύναμος με την εξίσωση Lorentz, εάν έχει εφαρμοστεί στη βάση της αρχής της ελάχιστης δράσης.

Η Χαμιλτονιανή για την κίνηση του φορτισμένου σωματιδίου σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο (καρτεσιανές συντεταγμένες) είναι:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H} &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - \mathcal{L} \\
 &= \frac{1}{2}mv^2 + q\phi \\
 &= \frac{(\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{x}, t))^2}{2m} + q\phi(\mathbf{x}, t)
 \end{aligned} \tag{2.150}$$

Συνεπώς στις τρεις διαστάσεις γράφουμε:

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{2m}|\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)|^2 + q\phi(\mathbf{r}, t) \tag{2.151}$$

Από την εξίσωση (2.151) φαίνεται ότι η Χαμιλτονιανή αντιστοιχεί στην ολική ενέργεια του σωματιδίου. Αν και τόσο οι γενικευμένες θέσεις  $q$ , όσο και οι γενικευμένες ορμές  $p$  εξαρτώνται από το χρόνο στη γενική περίπτωση, η ενέργεια είναι χρονοεξαρτημένη μόνο σε περίπτωση που η Χαμιλτονιανή εξαρτάται από το χρόνο, ειδάλλως η ενέργεια είναι σταθερή.

Οι εξισώσεις κίνησης Euler - Lagrange αντικαθίστανται τώρα από τις εξισώσεις Hamilton - Jacobi

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}}, \quad \frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \tag{2.152}$$

Αξιοπρόσεκτο επίσης είναι ότι αφού η (2.150) αντιστοιχεί στην πραγματικότητα στην ολική ενέργεια, η ποσότητα  $\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  είναι η μηχανική ορμή, δηλαδή:

$$\mathbf{p}_m = \mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \tag{2.153}$$



Αυτή είναι η σχέση μεταξύ μηχανικής και κανονικής (γενικευμένης) ορμής. Οι εξισώσεις Hamilton - Jacobi πλεονεχτούν συγκριτικά με τις Euler - Lagrange στο γεγονός ότι είναι πρωτοβάθμιες. Επιπλέον, όταν υπάρχει συμμετρία ως προς μία κανονική μεταβλητή  $q_s$ , τότε αυτή απουσιάζει από την Χαμιλτονιανή και επομένως:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_s} = 0 \Rightarrow \frac{dp_s}{dt} = 0 \quad (2.154)$$

δηλαδή η συζυγής γενικευμένη ορμή της  $q_s$  είναι αναλλοίωτη της κίνησης. (σταθερά της κίνησης, πρώτο ολοκλήρωμα)

Οι κανονικές μεταβλητές οι οποίες απουσιάζουν από τη Χαμιλτονιανή ονομάζονται κυκλικές ή αγνοήσιμες.

Η διάσταση των  $\mathbf{q}$  και  $\mathbf{p}$  αποτελεί τον αριθμό των βαθμών ελευθερίας της δυναμικής. Όταν ο αριθμός των αναλλοίωτων της κίνησης ταυτίζεται με αυτόν των βαθμών ελευθερίας, τότε η δυναμική είναι πλήρως ολοκληρώσιμη.

Ολοκληρώνοντας και αυτό το Κεφάλαιο, χρήσιμο είναι να επισημάνουμε τα εξής:

- Η ύπαρξη μιας σταθεράς της κίνησης σχετίζεται πάντοτε με μια συμμετρία του συστήματος
- Η συμμετρία μπορεί να είναι προφανής (τοπολογική) ή κρυμμένη και χωρίς φυσικό νόημα
- Η ύπαρξη  $N$  συμμετριών σε ένα σύστημα  $N$  βαθμών ελευθερίας εξασφαλίζει ολοκληρωσιμότητα (*integrability*)
- Η ύπαρξη  $N$  ανεξάρτητων ολοκληρωμάτων δεν αποδεικνύεται εκ των προτέρων

Είμαστε έτοιμοι τώρα να προχωρήσουμε στη μελέτη της δυναμικής μεμονωμένων φορτισμένων σωματιδίων σε διάφορες μαγνητικές τοπολογίες που παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τη Φυσική του Πλάσματος.

## Κεφάλαιο 3

# Μαγνητικές Τοπολογίες

Εφ' όσον αναφερθήκαμε με λεπτομέρεια τόσο στη νευτώνεια δυναμική, όσο και στο φορμαλισμό Lagrange - Hamilton για την κίνηση μεμονωμένου φορτισμένου σωματιδίου σε ομογενή ή μη ομογενή στατικά μαγνητικά πεδία, μπορούμε τώρα να μελετήσουμε περαιτέρω μαγνητικές τοπολογίες, οι οποίες είναι ιδιαίτερα χρήσιμες για τη μαγνητική συγκράτηση του θερμοπυρηνικού πλάσματος. Κατά κύριο λόγο θα χρησιμοποιήσουμε τον Χαμιλτονιανό φορμαλισμό, λόγω του ότι τα μαγνητικά πεδία με τα οποία θα ασχοληθούμε έχουν χωρικές συμμετρίες που όπως είδαμε 'κρύβουν' σταθερές της κίνησης.

Όλα τα μαγνητικά πεδία εφ' εξής θα είναι στατικά (χρονοανεξάρτητα). Οι τοπολογίες στις οποίες θα αναφερθούμε είναι οι εξής:

1. Ομογενές Μαγνητικό Πεδίο  $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$
2. Μαγνητικό πεδίο επαγόμενο από ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό  $I_W$
3. Μαγνητικό πεδίο επαγόμενο από κυκλικό ρευματοφόρο βρόχο  $I_L$  (current loop)
4. Συνδυασμοί των 2. και 3. όπου ο ευθύγραμμος ρευματοφόρος αγωγός (α) είναι κάθετος στο κέντρο του επιπέδου του ρευματοφόρου βρόχου στο σημείο  $(0, 0, 0)$ , (β) προσπίπτει υπό γωνία στο επίπεδο του βρόχου και (γ) ο ευθύγραμμος ρευματοφόρος αγωγός προσπίπτει υπό γωνία και εκτός του κέντρου του βρόχου

Θα κατασκευάσουμε αναλυτικά τα μαγνητικά πεδία που επάγονται από ηλεκτρικά ρεύματα, βάσει του νόμου των Biot - Savart, όπως θα δούμε με λεπτομέρειες στη συνέχεια.

### 3.1 Ομογενές Μαγνητικό Πεδίο $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$

Ξεκινάμε από το ομογενές μαγνητικό πεδίο  $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$ , το οποίο ξαναείδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο όταν χιζίσαμε τη δυναμική του φορτισμένου σωματιδίου βασισμένοι στην εξίσωση Lorentz. Όπως θυμόμαστε, είχαμε καταλήξει στο ότι φορτισμένο σωματίδιο που βρίσκεται στο ομογενές αυτό μαγνητικό πεδίο εκτελεί κυκλοτρονική τροχιά περί τις μαγνητικές γραμμές του πεδίου με συχνότητα ίση με

$$\omega_c = \frac{qB}{m} \quad (3.1)$$

και σταθερή ακτίνα περιστροφής  $\rho_L$  που ονομάζεται ακτίνα Larmor και ισούται με

$$\rho_L = \frac{v_{\perp}}{|\omega_c|} \quad (3.2)$$

όπου  $v_{\perp}$  η εγκάρσια συνιστώσα της ταχύτητας του φορτισμένου σωματιδίου ως προς τις μαγνητικές γραμμές του πεδίου.

Επιλύοντας την εξίσωση Lorentz απουσία ηλεκτρικού πεδίου ( $\phi = 0$ ) είχαμε καταλήξει στις εξής σχέσεις που περιγράφουν πλήρως την κίνηση του σωματιδίου:

$$x(t) = x_0 + \rho_L \sin(\omega_c t)$$

$$y(t) = y_0 \pm \rho_L \cos(\omega_c t)$$

$$z(t) = z_0 + v_{\parallel} t$$

και

$$v_x = -v_{\perp} \sin(\omega_c t)$$

$$v_y = -v_{\perp} \cos(\omega_c t)$$

όπου η αρχική φάση είναι μηδενική,  $(x_0, y_0, z_0)$  είναι οι συντεταγμένες του κέντρου περιστροφής και όσον αφορά το  $y(t)$ , κρατάμε το  $+$  για θετικά φορτισμένο ιόν και το  $-$  για ηλεκτρόνιο. Για ευκολία στο συγκεκριμένο πρόβλημα έχουμε κανονικοποιήσει την κυκλοτρονική συχνότητα  $\omega_c$  ως προς την ταχύτητα του φωτός  $c$ .

Θα καταλήξουμε στο ίδιο συμπέρασμα και μέσω της χαμιλτονιανής δυναμικής:

Το διανυσματικό δυναμικό  $\mathbf{A}$  το οποίο αντιστοιχεί στο συγκεκριμένο μαγνητικό πεδίο δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένο, λόγω της σχέσης  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  που πρέπει να ικανοποιείται. Επιλέγουμε

$$\mathbf{A} = Bx\hat{\mathbf{y}} \quad (3.3)$$

με  $\hat{\mathbf{y}}$  το μοναδιαίο διάνυσμα βάσης στον άξονα των  $y$  του καρτεσιανού τρισορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων.

Η Λαγκρανζιανή για το πεδίο αυτό θα είναι:

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{q}{c}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \quad (3.4)$$

Ενώ η αντίστοιχη Χαμιλτονιανή θα είναι:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) &= \frac{1}{2m}|\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)|^2 \\ &= \frac{1}{2m} [p_x^2 + (p_y - qBx)^2 + p_z^2] \end{aligned} \quad (3.5)$$

εφ' όσον  $\phi = 0$  (απουσία ηλεκτρικού πεδίου) και το διανυσματικό δυναμικό έχει μόνο  $y$  συνιστώσα.

Υπολογίζουμε τις τρεις συνιστώσες της ορμής για  $i = \{x, y, z\}$  από τη σχέση:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \quad (3.6)$$

Συνεπώς:

$$\mathcal{L}_z = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + q(\mathbf{v}_z \cdot \mathbf{A}_z) = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 \quad (3.7)$$

και

$$p_z = \frac{\partial \mathcal{L}_z}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \quad (3.8)$$

Αφού το διανυσματικό δυναμικό έχει μόνο  $y$  συνιστώσα.

Αντίστοιχα :

$$\mathcal{L}_y = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + q(\mathbf{v}_y \cdot \mathbf{A}_y) = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + q(\dot{y}Bx) \quad (3.9)$$

και

$$p_y = \frac{\partial \mathcal{L}_y}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + qBx = m\dot{y} + \omega_c mx = m(\dot{y} + \omega_c x) \quad (3.10)$$

όπου προφανώς έχουμε κάνει χρήση της σχέσης (3.1).  
Αντίστοιχα υπολογίζουμε και για τη  $x$  συνιστώσα:

$$\mathcal{L}_x = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + q(\mathbf{v}_x \cdot \mathbf{A}_x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad (3.11)$$

και

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}_x}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad (3.12)$$

Οι εξισώσεις του Hamilton είναι

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \quad \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \quad (3.13)$$

Από τις οποίες παίρνουμε:

$$\dot{p}_z = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} = 0 \quad (3.14)$$

$$\dot{p}_y = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = 0 \quad (3.15)$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = \frac{qB}{m}(p_y - qBx) \quad (3.16)$$

Γράφοντας τη Χαμιλτονιανή συναρτήσεϊ των ταχυτήτων (για την ακρίβεια συναρτήσεϊ των ρυθμών μεταβολής των γενικευμένων θέσεων, οι οποίες στην περίπτωσή μας είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x, y, z)$ ), καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι αντιστοιχεί στην ολική κινητική ενέργεια:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{2m} [m^2\dot{x}^2 + (m\dot{y} + m\omega_c x - m\omega_c x)^2 + m^2\dot{z}^2] \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Καταλήγουμε στην εξίσωση κίνησης

$$\ddot{x} + \omega_c^2 x = \frac{\omega_c}{m} p_y \quad (3.18)$$

η οποία αντιστοιχεί σε κυκλοτρονική κίνηση περί το κέντρο περιστροφής με συχνότητα  $\omega_c = \frac{qB}{m}$

Στα ίδια αποτελέσματα θα είχαμε καταλήξει αν είχαμε επιλέξει διαφορετικό διανυσματικό δυναμικό για το μαγνητικό πεδίο (σε καρτεσιανές συντεταγμένες), ενώ ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση κατά την οποία θα επιλέγαμε διαφορετικό σύστημα συντεταγμένων (πχ κυλινδρικό) για να εκμεταλλευτούμε την προφανή συμμετρία του προβλήματος.

### 3.2 Μαγνητικό Πεδίο επαγόμενο από ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό

Εφ' εξής οι μαγνητικές τοπολογίες με τις οποίες θα ασχοληθούμε επάγονται από ηλεκτρικά ρεύματα. Όπως γνωρίζουμε από τη μαγνητοστατική, κινούμενα ηλεκτρικά φορτία επάγουν μαγνητικό πεδίο. Οι νόμοι που διέπουν αυτά τα μαγνητικά πεδία είναι αυτοί των Biot - Savart και Ampère. Ο νόμος του Ampère για τον ηλεκτρομαγνητισμό είναι μία από τις τέσσερις εξισώσεις του *Maxwell*.

Οι θεμελιώδεις διαφορικοί νόμοι της μαγνητοστατικής (απουσία ηλεκτρικού πεδίου) είναι:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

όπου  $\mathbf{J}$  είναι η πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος. Από τις θεμελιώδεις ιδιότητες του διανυσματικού λογισμού, εφ' όσον η απόκλιση του μαγνητικού πεδίου ισούται με μηδέν παντού, το  $\mathbf{B}$  πρέπει να ισούται με το στροβιλισμό κάποιου άλλου διανύσματος  $\mathbf{A}$ , το οποίο όπως έχουμε δει ονομάζεται (μαγνητικό) διανυσματικό δυναμικό, δηλαδή:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.20)$$

Από τον νόμο των Biot - Savart έχουμε για το μαγνητικό πεδίο:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (3.21)$$

όπου  $I$  είναι το σταθερό ηλεκτρικό ρεύμα,  $d\mathbf{l}$  είναι ένα διάνυσμα με μέτρο το στοιχειώδες μήκος του αγωγού και κατεύθυνση αυτή του ηλεκτρικού ρεύματος  $I$ ,  $\mu_0$  είναι η μαγνητική σταθερά (γνωστή και ως διαπερατότητα του κενού) που ισούται με  $4\pi \times 10^{-7} \text{N/A}^2$ , και  $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$  είναι το διάνυσμα μετατόπισης από το στοιχειώδες μήκος του αγωγού ως το σημείο στο οποίο υπολογίζεται το μαγνητικό πεδίο. Η ισχύς του νόμου αυτού βασίζεται στην αρχή της υπέρθεσης για

τα μαγνητικά πεδία. Η ολοκλήρωση γίνεται κατά μήκος του αγωγού. Αποδεικνύεται ότι ο νόμος των Biot - Savart ικανοποιεί πάντοτε τόσο τον νόμο του Gauss για τον μαγνητισμό, όσο και τον νόμο του Ampère.

### 3.2.1 Κυλινδρικό Σύστημα Συντεταγμένων $(r, \varphi, z)$

Στην περίπτωση μας, το πρόβλημα έχει προφανή κυλινδρική συμμετρία, και για αυτό το λόγο θα εργαστούμε αρχικά σε κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων  $(r, \varphi, z)$ . Στην αμέσως επόμενη ενότητα θα επαναλάβουμε την ίδια διαδικασία και για σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων.

Συμβολίζουμε με  $I_W$  το ηλεκτρικό ρεύμα στον ευθύγραμμο αγωγό (straight current-carrying wire), το οποίο θεωρούμε ότι μηδενίζεται στο άπειρο. Το  $I_W$  επάγει μαγνητικό πεδίο  $B_W$  το οποίο είναι ο στροβιλισμός του δυναμικού  $A_W$ . Συνεπώς έχουμε:

$$\mathbf{A}_W = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{I}_W}{r} \quad (3.22)$$

και ως εκ τούτου:

$$\mathbf{B}_W = \nabla \times \mathbf{A}_W = \frac{\mu_0 I_W}{2\pi r} \hat{\varphi} \quad (3.23)$$

όπου  $(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\varphi}, \hat{\mathbf{z}})$  τα μοναδιαία διανύσματα στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων.

Η σχέση που συνδέει τα μοναδιαία διανύσματα μεταξύ καρτεσιανού και κυλινδρικού συστήματος συντεταγμένων είναι η εξής:

$$\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{x}} \cos \varphi + \hat{\mathbf{y}} \sin \varphi \quad (3.24)$$

$$\hat{\varphi} = -\hat{\mathbf{x}} \sin \varphi + \hat{\mathbf{y}} \cos \varphi \quad (3.25)$$

$$\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}} \quad (3.26)$$

Ενώ η κάθετη απόσταση από το ρευματοφόρο αγωγό δίνεται από την ευκλείδια νόρμα:

$$\|\mathbf{r}\| = r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3.27)$$

Και επίσης ισχύει  $\tan \varphi = y/x$ .

Συγκεντρώνοντας όσα αναφέραμε μέχρι στιγμής, έχουμε για το μαγνητικό πεδίο:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_W &= \frac{\mu_0 I_W}{2\pi r} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} &= -\hat{\mathbf{x}} \sin \varphi + \hat{\mathbf{y}} \cos \varphi \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \varphi &= \frac{y}{x}\end{aligned}$$

Όπως έχουμε αναφέρει, η Lagrangian για την κίνηση φορτισμένου σωματιδίου σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο είναι η

$$\mathcal{L}_{em} = \frac{1}{2}mv^2 - q\phi + \frac{q}{c}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \quad (3.28)$$

ενώ η απουσία ηλεκτρικού πεδίου συνεπάγεται:

$$\mathcal{L}_m = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{q}{c}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \quad (3.29)$$

Θα υπολογίσουμε το μαγνητικό διανυσματικό δυναμικό  $\mathbf{A}_W$  σε σημείο  $P$ , ευρισκόμενο στο  $x - y$  επίπεδο σε εγκάρσια απόσταση  $r$  από τον ρευματοφόρο αγωγό. Η ανάλυση που θα κάνουμε ισχύει τόσο για πεπερασμένου μήκους, όσο και για άπειρου μήκους αγωγό. Ακολουθούμε τη διαδικασία όπως δίνεται σε γνωστά εγχειρίδια μαγνητοστατικής (πχ [17], [16])

$$d\mathbf{A}_W = \hat{\mathbf{z}} \frac{\mu_0 I_W}{4\pi} \frac{dz}{\sqrt{r^2 + z^2}} \Rightarrow \mathbf{A}_W = \hat{\mathbf{z}} \frac{\mu_0 I_W}{2\pi} \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{r^2 + z^2}} \quad (3.30)$$

Αρχικά ολοκληρώνουμε σε τμήμα του αγωγού, μήκους  $2\ell$ :

$$\mathbf{A}_W = \hat{\mathbf{z}} \frac{\mu_0 I_W}{2\pi} \int_0^\ell \frac{dz}{\sqrt{r^2 + z^2}} \quad (3.31)$$

Και εκτελώντας τις αντικαταστάσεις  $z = r \tan \theta$  και  $\ell = r \tan \alpha$  έχουμε:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_W &= \hat{\mathbf{z}} \frac{\mu_0 I_W}{2\pi} \int_0^\alpha \sec \theta \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{A}_W &= \hat{\mathbf{z}} \frac{\mu_0 I_W}{2\pi} \ln(\sec \alpha + \tan \alpha) \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{A}_W &= \hat{\mathbf{z}} \frac{\mu_0 I_W}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{\ell^2 + r^2} + \ell}{r}\end{aligned} \quad (3.32)$$



Η σχέση στην οποία καταλήξαμε ισχύει για αγωγό πεπερασμένου μήκους. Για  $\ell \gg r$  (αγωγός άπειρου μήκους) έχουμε

$$\mathbf{A}_W = \hat{\mathbf{z}} \frac{\mu_0 I_W}{2\pi} \ln \left( \frac{2\ell}{r} \right) \quad (3.33)$$

Το μαγνητικό διανυσματικό δυναμικό  $\mathbf{A}_W$  κοντά σε ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό θα είναι ένα διανυσματικό πεδίο παράλληλο στον αγωγό ( $\mathbf{A}_W = A_W \hat{\mathbf{z}}$ )

Σε κυλινδρικές συντεταγμένες το διάνυσμα του δυναμικού αναλύεται ως εξής:

$$\mathbf{A}_W = \mathbf{A}_r + \mathbf{A}_\varphi + \mathbf{A}_z$$

Ενώ ο στροβιλισμός του θα είναι:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A}_W = & \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial \mathbf{A}_\varphi}{\partial z} \right) \cdot \hat{\mathbf{r}} + \left( \frac{\partial \mathbf{A}_r}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial r} \right) \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ & + \frac{1}{r} \left( \mathbf{A}_\varphi + r \frac{\partial \mathbf{A}_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial \mathbf{A}_r}{\partial \varphi} \right) \cdot \hat{\mathbf{z}} \quad (3.34) \end{aligned}$$

Όπως είδαμε, εδώ το διανυσματικό δυναμικό έχει μόνο  $\mathbf{z}$  συνιστώσα, οπότε η ανωτέρω σχέση απλοποιείται στην:

$$\nabla \times \mathbf{A}_W = \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial \varphi} \cdot \hat{\mathbf{r}} - \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial r} \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}} \quad (3.35)$$

Από την έκφραση που έχουμε εξάγει για το  $\mathbf{A}_W$ , βλέπουμε ότι εξαρτάται μόνο από την ακτινική συνιστώσα  $r$ , δηλαδή  $\mathbf{A}_z = \mathbf{A}_z(r)$ , συνεπώς:

$$\mathbf{B}_W = \frac{\mu_0 I_W}{2\pi} \frac{1}{r} \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}} \Rightarrow \mathbf{B}_W = \frac{\mu_0 I_W}{2\pi r} \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}} \quad (3.36)$$

Το διάνυσμα του μαγνητικού πεδίου εποπτικά μπορεί να δοθεί από τον κανόνα του δεξιού χεριού, όπου ο αντίχειρας δείχνει κατά τη φορά του ρεύματος  $I_W$  και τα άλλα τέσσερα δάκτυλα δείχνουν την αζιμουθιακή φορά των μαγνητικών γραμμών του πεδίου.

Εφ' όσον υπολογίσαμε το διανυσματικό δυναμικό και το μαγνητικό πεδίο  $\mathbf{B}_W$  που προέρχεται από το στροβιλισμό του, μπορούμε τώρα να εφαρμόσουμε τις αρχές της Μηχανικής Lagrange - Hamilton για να βρούμε τα ολοκληρώματα της κίνησης φορτισμένου σωματιδίου σε αυτή τη μαγνητική γεωμετρία. Θα χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση του 'άπειρου' ρευματοφόρου βρόχου, οπότε

το διανυσματικό δυναμικό θα δίνεται όπως είδαμε από τη σχέση (3.33). Φυσικά η διαδικασία είναι απαράλλακτη, ακόμα και αν επιλέξουμε την προσέγγιση του αγωγού πεπερασμένου μήκους, όπως αυτή δίνεται από τη σχέση (3.32).

Η *Λαγκρανζιανή* αυτού του μαγνητικού πεδίου θα είναι:

$$\mathcal{L}_m = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{q\mu_0 I_W}{2\pi r c} \ln\left(\frac{2\ell}{r}\right) \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{z}} \quad (3.37)$$

Το *διάνυσμα θέσης* του σημείου  $P$  στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων θα είναι

$$\mathbf{r} = r \cos \varphi \hat{\mathbf{x}} + r \sin \varphi \hat{\mathbf{y}} + z \hat{\mathbf{z}} \quad (3.38)$$

ενώ η ταχύτητα θα είναι προφανώς η παράγωγος αυτού του ανύσματος ως προς το χρόνο:

$$\dot{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \dots = \dot{r} \hat{\mathbf{r}} + r \dot{\varphi} \hat{\boldsymbol{\varphi}} + \dot{z} \hat{\mathbf{z}} \quad (3.39)$$

Και  $v = |\dot{\mathbf{r}}| = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}$ .

Το διάνυσμα της ταχύτητας θα είναι

$$\mathbf{v} = (\dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi) \hat{\mathbf{x}} + (\dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi) \hat{\mathbf{y}} + \dot{z} \hat{\mathbf{z}} \quad (3.40)$$

Άρα για την ποσότητα  $\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{z}}$  που απαντάται στη *Λαγκρανζιανή* θα έχουμε:

$$\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{z}} = (\dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi) \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{z}} + (\dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi) \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{z}} + \dot{z} \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{z}} \quad (3.41)$$

και λόγω της ορθογωνιότητας ανά δύο των μοναδιαίων διανυσμάτων βάσης του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων, εν τέλει έχουμε  $\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \dot{z}$  και η *Λαγκρανζιανή* γράφεται:

$$\mathcal{L}_m = \frac{1}{2}m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{q\mu_0 I_W}{2\pi r c} \cdot \dot{z} \cdot \ln\left(\frac{2\ell}{r}\right) \quad (3.42)$$

Γνωρίζοντας πλέον τη μορφή της *Λαγκρανζιανής* του μαγνητοστατικού πεδίου, εξάγουμε μέσω του μετασχηματισμού Legendre την αντίστοιχη *Χαμιλτονιανή*:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_m &= \sum_{j=1}^3 p_j q_j - \mathcal{L}_m \\
&= \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \dot{r}} \dot{r} + \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi} + \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \dot{z}} \dot{z} - \mathcal{L}_m
\end{aligned} \tag{3.43}$$

όπου οι επιμέρους μερικές παράγωγοι της Λαγκρανζιανής είναι:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} = p_r \tag{3.44}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = p_\varphi \tag{3.45}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} + \frac{q\mu_0 I_W}{2\pi r c} \ln\left(\frac{2\ell}{r}\right) = p_z \tag{3.46}$$

Αντικαθιστώντας τις παραστάσεις αυτές, η Χαμιλτονιανή του συστήματος γίνεται:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_m &= m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\varphi}^2 + m\dot{z}^2 + \frac{q\mu_0 I_W}{2\pi r c} \ln\left(\frac{2\ell}{r}\right) - \\
&\quad - \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - \frac{q\mu_0 I_W}{2\pi r c} \ln\left(\frac{2\ell}{r}\right) \Rightarrow \\
\Rightarrow \mathcal{H}_m &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Στη συνέχεια εκφράζουμε τη Χαμιλτονιανή αποκλειστικά συναρτήσει των γενικευμένων θέσεων και ορμών του συστήματος, και τελικά έχουμε

$$\mathcal{H}_m = \frac{1}{2m} \left\{ \left( p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} + p_z^2 \right) + \left( \frac{q^2 \mu_0^2 I_W^2 \ln\left(\frac{2\ell}{r}\right)}{4\pi^2 r^2 c^2} - \frac{q\mu_0 I_W \ln\left(\frac{2\ell}{r}\right)}{\pi r c} \cdot p_z \right) \right\} \tag{3.48}$$

Είμαστε τώρα έτοιμοι να γράψουμε τις εξισώσεις του *Hamilton* (3.3.1) και να βρούμε τα ολοκληρώματα της κίνησης για φορτισμένο σωματίδιο που κινείται στη δεδομένη μαγνητική τοπολογία.

Για συντομία από εδώ και στο εξής θα γράφουμε  $\mathcal{H}$  και  $\mathcal{L}$  αντί για  $\mathcal{H}_m$  και  $\mathcal{L}_m$ . Εννοείται ύπαρξη μόνο μαγνητικών πεδίων.

Θυμίζουμε τις εξισώσεις του Hamilton σε σύστημα  $i$  βαθμών ελευθερίας:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \quad \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}$$

Συνεπώς έχουμε:

$$\dot{r} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \quad (3.49)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2} \quad (3.50)$$

$$\dot{z} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m} - \frac{q\mu_0 I_W \ln\left(\frac{2\ell}{r}\right)}{2m\pi r c} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_r = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} = & \frac{p_\varphi^2}{mr^3} \\ & - \frac{q\mu_0 I_W p_z}{2m\pi r^2 c} + \frac{q^2 \mu_0^2 I_W^2 \ln\left(\frac{2\ell}{r}\right)}{4m\pi^2 r^3 c^2} \\ & - \frac{q\mu_0 I_W p_z \ln\left(\frac{2\ell}{r}\right)}{2m\pi r^2 c} + \frac{q^2 \mu_0^2 I_W^2 \ln^2\left(\frac{2\ell}{r}\right)}{4m\pi^2 r^3 c^2} \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} = 0 \\ \dot{p}_z = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.53)$$

Οι δύο τελευταίες σχέσεις μας δίνουν τη διατήρηση των γενικευμένων ορμών  $p_\varphi, p_z$  εφ' όσον οι συντεταγμένες  $\varphi, z$  είναι αγνοήσιμες. Εμφανής γίνεται μέσα από τη χαμιλτονιανή περιγραφή της δυναμικής και η συμμετρία του προβλήματος (ανεξαρτησία) ως προς την αξιμουθιακή συνιστώσα  $\varphi$ , αλλά και ως προς το ύψος  $z$  από το επίπεδο  $x - y$ .

Επίσης, παρατηρούμε ότι  $\partial \mathcal{H} / \partial t = 0$ , συνεπώς υπάρχει το ολοκλήρωμα του Jacobi και η ολική ενέργεια διατηρείται. Γράφουμε λοιπόν τα εξής ολοκληρώματα της κίνησης για τη δεδομένη μαγνητική τοπολογία:

$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} = \text{σταθερά} \quad (3.54)$$

$$p_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} + \frac{q\mu_0 I_W}{2\pi r c} \ln \left( \frac{2\ell}{r} \right) = \text{σταθερά} \quad (3.55)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0 \rightarrow \mathcal{H} = \text{σταθερά} \quad (3.56)$$

**Επέκταση για  $N$  σωματίδια** Φυσικά η ανωτέρω σχέση αποτελεί τη Χαμιλτονιανή του προβλήματος για ένα φορτισμένο σωματίδιο. Για σύστημα  $N$  όμοιων (με ίδιες μάζες  $m$  και φορτίο  $q$ ) που κινούνται σε μαγνητικό πεδίο ευθύγραμμου ρευματοφόρου αγωγού, και με την παραδοχή/προσέγγιση ότι τα σωματίδια δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους ( $V|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| \approx 0$ ) η Χαμιλτονιανή  $\mathcal{H}_m$  θα ισούται με  $\sum_{i=1}^N \mathcal{H}_i$ , όπου  $\mathcal{H}_i$  είναι η Χαμιλτονιανή που μόλις γράψαμε στη σχέση (3.48), με τις εξής αντικαταστάσεις:

$$\{r \rightarrow r_i, \varphi \rightarrow \varphi_i, z \rightarrow z_i, p_r \rightarrow p_{r_i}, p_\varphi \rightarrow p_{\varphi_i}, p_z \rightarrow p_{z_i}\}$$

Από εδώ και στο εξής, εκτός αν αναφέρεται ρητά το αντίθετο, θα εξυπακούεται ότι οι Χαμιλτονιανές που βρίσκουμε για κάθε μαγνητική τοπολογία θα μπορούν να περιγράψουν και την κίνηση περισσότερων του ενός μη αλληλεπιδρώντων φορτισμένων σωματιδίων, όσο ακόμα βρισκόμαστε στη μελέτη της κίνησης μεμονωμένων σωματιδίων στο πλάσμα, και όχι σε μοντέλα ρευστών ή κινητική θεωρία.

### 3.2.2 Σφαιρικό Σύστημα Συντεταγμένων $(r, \vartheta, \varphi)$

Ουσιαστικά θα ακολουθήσουμε τα ίδια ακριβώς βήματα όπως και στη μελέτη της κίνησης σε κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων, με σκοπό να καταλήξουμε σε κάποια άλλα ολοκληρώματα της κίνησης, χρησιμοποιώντας τη χαμιλτονιανή μηχανική.

Όπως είδαμε στην προηγούμενη ανάλυση που κάναμε (σχέσεις (3.32) και (3.33)), το διανυσματικό δυναμικό που επάγεται από ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό θα είναι:

$$\mathbf{A}_W = \mathbf{A}_z = \hat{\mathbf{z}} \frac{\mu_0 I_W}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{\ell^2 + r^2} + \ell}{r}$$

ενώ για  $\ell \gg r$  ισχύει:

$$\mathbf{A}_W = \hat{\mathbf{z}} \frac{\mu_0 I_W}{2\pi} \ln \left( \frac{2\ell}{r} \right)$$

Και πάλι για λόγους ευκολίας θα προτιμήσουμε την προσέγγιση του ρευματοφόρου αγωγού απείρου μήκους. Το μοναδιαίο διάνυσμα βάσης  $\hat{\mathbf{z}}$  του κυλινδρικού (αλλά και καρτεσιανού) συστήματος συντεταγμένων, αναλύεται στις σφαιρικές συντεταγμένες  $(r, \vartheta, \varphi)$  ως εξής:

$$\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{r}} \cos \vartheta - \hat{\boldsymbol{\vartheta}} \sin \vartheta \quad (3.57)$$

Οπότε θα έχουμε για το διανυσματικό δυναμικό:

$$\mathbf{A}_W = \mathbf{A}_{cyl} = \mathbf{A}_{r_{sph}} + \mathbf{A}_{\vartheta_{sph}} \quad (3.58)$$

$$= \hat{\mathbf{r}} \cos \vartheta \frac{\mu_0 I_W}{2\pi} \ln \left( \frac{2\ell}{r} \right) - \hat{\boldsymbol{\vartheta}} \sin \vartheta \frac{\mu_0 I_W}{2\pi} \ln \left( \frac{2\ell}{r} \right) \quad (3.59)$$

Η Λαγκρανζιανή είναι ανεξάρτητη του συστήματος συντεταγμένων, συνεπώς και για τις σφαιρικές συντεταγμένες, απουσία ηλεκτρικού πεδίου θα γράφεται όπως στη σχέση (3.29):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{q}{c} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$$

Εδώ θα χρειαστούμε το άνωμα θέσης του σημείου  $P$ , όπου και θέλουμε να υπολογίσουμε το μαγνητικό πεδίο, στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων:

$$\mathbf{r} = r \sin \vartheta \cos \varphi \cdot \hat{\mathbf{x}} + r \sin \vartheta \sin \varphi \cdot \hat{\mathbf{y}} + r \cos \vartheta \cdot \hat{\mathbf{z}} \quad (3.60)$$

Όμοια, το άνωμα της ταχύτητας θα ισούται με:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} &= \left( \dot{r} \sin \vartheta \cos \varphi + r \cos \vartheta \dot{\vartheta} \cos \varphi - r \sin \vartheta \sin \varphi \dot{\varphi} \right) \cdot \hat{\mathbf{x}} + \\ &+ \left( \dot{r} \sin \vartheta \sin \varphi + r \cos \vartheta \dot{\vartheta} \sin \varphi + r \sin \vartheta \cos \varphi \dot{\varphi} \right) \cdot \hat{\mathbf{y}} \\ &+ \left( \dot{r} \cos \vartheta - r \sin \vartheta \dot{\vartheta} \right) \cdot \hat{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (3.61)$$

Μετά από τετριμμένες πράξεις παίρνουμε:

$$v^2 = \dot{\mathbf{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 \quad (3.62)$$

Όσον αφορά το γινόμενο  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$  που εμφανίζεται μέσα στη Λαγκρανζιανή, θυμόμαστε ότι στο καρτεσιανό σύστημα το μαγνητικό διανυσματικό δυναμικό

$\mathbf{A}_W$  έχει μόνο  $z$  συνιστώσα. Οι όροι που έχουν  $\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{z}}$ ,  $\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{z}}$  θα μηδενίζονται λόγω ορθογωνιότητας. Συνεπώς:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} &= \left( \dot{r} \cos \vartheta - r \sin \vartheta \dot{\vartheta} \right) \cdot \frac{\mu_0 I_W}{2\pi} \cdot \ln \left( \frac{2\ell}{r} \right) \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{z}} \\ &= \frac{\mu_0 I_W}{2\pi} \left( \dot{r} \cos \vartheta - r \sin \vartheta \dot{\vartheta} \right) \cdot \ln \left( \frac{2\ell}{r} \right) \end{aligned} \quad (3.63)$$

Εισάγοντας τα παραπάνω αποτελέσματα ((3.62),(3.63)) στη Λαγκρανζιανή, παίρνουμε την εξής έκφραση για το σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}m \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 \right) + \\ &+ \frac{q\mu_0 I_W}{2\pi c} \left( \dot{r} \cos \vartheta - r \sin \vartheta \dot{\vartheta} \right) \cdot \ln \left( \frac{2\ell}{r} \right) \end{aligned} \quad (3.64)$$

$\Rightarrow$  Με γνωστή τη Λαγκρανζιανή, μέσω του μετασχηματισμού Legendre μπορούμε τώρα να εξάγουμε τη Χαμιλτονιανή:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \sum_{j=1}^3 p_j q_j - \mathcal{L} \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \dot{r} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} \dot{\vartheta} - \mathcal{L} \end{aligned} \quad (3.65)$$

όπου οι επιμέρους μερικές παράγωγοι της Λαγκρανζιανής είναι:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} + \frac{q\mu_0 I_W \cos \vartheta \ln \left( \frac{2\ell}{r} \right)}{2\pi c} = p_r \quad (3.66)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} \sin^2 \vartheta = p_\varphi \quad (3.67)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} = mr^2 \dot{\vartheta} - \frac{q\mu_0 I_W r \sin \vartheta \ln \left( \frac{2\ell}{r} \right)}{2\pi c} = p_\vartheta \quad (3.68)$$

Αντικαθιστώντας τις παραστάσεις αυτές, η Χαμιλτονιανή του συστήματος γίνεται:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= m\dot{r}^2 + \frac{q\mu_0 I_W \cos \vartheta \ln\left(\frac{2\ell}{r}\right)}{2\pi c} \dot{r} + mr^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta + mr^2 \dot{\vartheta}^2 - \\
&\quad - \frac{q\mu_0 I_W r \sin \vartheta \ln\left(\frac{2\ell}{r}\right)}{2\pi c} \dot{\vartheta} - \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \frac{1}{2} m r^2 \dot{\vartheta}^2 - \\
&\quad - \frac{1}{2} m r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 - \frac{q\mu_0 I_W \cos \vartheta \ln\left(\frac{2\ell}{r}\right)}{2\pi c} \dot{r} + \frac{q\mu_0 I_W r \sin \vartheta \ln\left(\frac{2\ell}{r}\right)}{2\pi c} \dot{\vartheta} \Rightarrow \\
\Rightarrow \mathcal{H} &= \frac{1}{2} m \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 \right)
\end{aligned} \tag{3.69}$$

Στη συνέχεια εκφράζουμε τη Χαμιλτονιανή αποκλειστικά συναρτήσει των γενικευμένων θέσεων και ορμών του συστήματος, και τελικά έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \left\{ \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \vartheta} \right) + \frac{q^2 \mu_0^2 I_W^2 m \cos^2 \vartheta \ln^2\left(\frac{2\ell}{r}\right)}{8\pi^2 c^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{q^2 \mu_0^2 I_W^2 \sin^2 \vartheta \ln^2\left(\frac{2\ell}{r}\right)}{8m\pi^2 c^2} - \frac{q\mu_0 I_W \ln\left(\frac{2\ell}{r}\right) p_r \cos \vartheta}{2\pi c} + \frac{q\mu_0 I_W \ln\left(\frac{2\ell}{r}\right) p_\vartheta \sin \vartheta}{2m\pi c r} \right\}
\end{aligned} \tag{3.70}$$

η οποία όπως αναμέναμε (βλέπε [18]) είναι της μορφής

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \vartheta} \right) + U(r, \vartheta, \varphi) \tag{3.71}$$

Από την έκφραση της Χαμιλτονιανής είναι προφανές ότι το κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων απηχεί πολύ καλύτερα τη συμμετρία του προβλήματος, κάτι το οποίο θα φανεί και κατά τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων της κίνησης μέσω των εξισώσεων Hamilton:

$$\dot{r} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} - \frac{q\mu_0 I_W \cos \vartheta \ln\left(\frac{2\ell}{r}\right)}{2m\pi c} \tag{3.72}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2 \sin^2 \vartheta} \tag{3.73}$$

$$\dot{\vartheta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\vartheta} = \frac{p_\vartheta}{mr^2} - \frac{q\mu_0 I_W \sin \vartheta \ln\left(\frac{2\ell}{r}\right)}{2m\pi r c} \tag{3.74}$$



$$\begin{aligned}
\dot{p}_r = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} &= \frac{p_\vartheta^2}{mr^3} - \frac{q\mu_0 I_W p_r \cos \vartheta}{2\pi r c} + \frac{p_\varphi^2}{mr^3 \sin^2 \vartheta} \\
&+ \frac{q^2 \mu_0^2 I_W^2 m \cos^2 \vartheta \ln\left(\frac{2\ell}{r}\right)}{4\pi^2 r c^2} + \frac{q\mu_0 I_W p_\vartheta \sin \vartheta \ln\left(\frac{2\ell}{r}\right)}{2m\pi c r^2} \\
&+ \frac{q^2 \mu_0^2 I_W^2 \sin^2 \vartheta \ln\left(\frac{2\ell}{r}\right)}{4m\pi^2 c^2 r}
\end{aligned} \tag{3.75}$$

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} = 0 \tag{3.76}$$

$$\begin{aligned}
\dot{p}_\vartheta = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vartheta} &= \frac{p_\varphi^2}{mr^2 \tan \vartheta \sin^2 \vartheta} - \frac{q\mu_0 I_W p_\vartheta \cos \vartheta \ln\left(\frac{2\ell}{r}\right)}{2m\pi c r} \\
&- \frac{q\mu_0 I_W p_r \sin \vartheta \ln\left(\frac{2\ell}{r}\right)}{2\pi c} - \frac{q^2 \mu_0^2 I_W^2 \ln^2\left(\frac{2\ell}{r}\right) \sin \vartheta \cos \vartheta}{4m\pi^2 c^2} \\
&+ \frac{q^2 \mu_0^2 I_W^2 m \ln^2\left(\frac{2\ell}{r}\right) \sin \vartheta \cos \vartheta}{4\pi c^2}
\end{aligned} \tag{3.77}$$

Επίσης,  $\partial \mathcal{H} / \partial t = 0 \Rightarrow$  υπάρχει το ολοκλήρωμα Jacobi και εκφράζει τη διατήρηση της ενέργειας. Επίσης, εφ' όσον η  $\varphi$  είναι αγνοήσιμη ( $\dot{p}_\varphi = 0$ ) θα υπάρχει το ολοκλήρωμα της στροφορμής και η αντίστοιχη γενικευμένη ορμή  $p_\varphi$  θα διατηρείται.

Συνεπώς για την ίδια μαγνητική τοπολογία, μελετημένη στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων, έχουμε ένα ολοκλήρωμα της κίνησης λιγότερο για το φορτισμένο σωματίδιο που κινείται σε αυτό το πεδίο. Συγκεκριμένα τα ολοκληρώματα της κίνησης εδώ είναι:

$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} \sin^2 \vartheta = \text{σταθερά} \tag{3.78}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0 \rightarrow \mathcal{H} = \text{σταθερά} \tag{3.79}$$

Μελετώντας αυτό το μαγνητικό πεδίο στις σφαιρικές συντεταγμένες, δεν εκμεταλλευόμαστε την κυλινδρική συμμετρία, η οποία μας έδινε άλλο ένα ολοκλήρωμα της κίνησης, την  $p_z$

Εξυπακούεται ότι με τον ίδιο τρόπο που είδαμε και στις κυλινδρικές συντεταγμένες, η μελέτη μας μπορεί να επεκταθεί και για  $N$  μη αλληλεπιδρώντα σωματίδια, οπότε αντίστοιχα θα γράψουμε  $6N$  εξισώσεις Hamilton και θα καταλήξουμε σε  $N + 1$  ολοκληρώματα της κίνησης.

### 3.3 Κυκλικός Ρευματοφόρος Βρόχος (Current Loop)

Θεωρούμε έναν επίπεδο κυκλικό βρόχο (planar current loop), ο οποίος διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα  $I_L$ . Αν και δε θα μας απασχολήσει ακόμη, επειδή στη συνέχεια θα συνδυάσουμε το ρευματοφόρο βρόχο με τον ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό που μελετήσαμε προηγουμένως, αναφέρουμε απλώς ότι ο κυκλικός βρόχος βρίσκεται στο επίπεδο  $x - y$  και έχει το κέντρο του στο σημείο  $(0, 0, 0)$  του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων.

Η αναλυτική εξαγωγή των εκφράσεων για το μαγνητικό πεδίο του βρόχου, καθώς και του μαγνητικού διανυσματικού δυναμικού, είναι μια αρκετά πολύπλοκη διαδικασία λόγω της μορφής των πεδίων αυτών. Παρόλα αυτά, σε πρώτη προσέγγιση ο κυκλικός ρευματοφόρος βρόχος μπορεί να αντιμετωπιστεί ως μαγνητικό δίπολο.

#### 3.3.1 Ο ρευματοφόρος βρόχος ως μαγνητικό δίπολο

Ο βρόχος ρεύματος που θα μελετήσουμε, είναι μια εντοπισμένη κατανομή ρεύματος στο επίπεδο  $x - y$ . Το διανυσματικό δυναμικό της κατανομής αυτής σε κάθε σημείο του χώρου δίνεται υπό μορφή πολυπολικού αναπτύγματος. ([16]) Γράφοντας το δυναμικό υπό μορφή σειράς ως προς τις δυνάμεις του  $1/r$ , παρατηρούμε ότι για μεγάλες αποστάσεις η σειρά κυριαρχείται από τον πρώτο μη μηδενικό όρο, ενώ οι ανώτεροι όροι είναι αμελητέοι.

Πιο συγκεκριμένα, το διανυσματικό δυναμικό ενός βρόχου που διαρρέεται από ρεύμα  $I_L$  μπορεί να γραφεί ως:

$$\mathbf{A}_L = \frac{\mu_0 I_L}{4\pi} \left[ \frac{1}{r} \oint d\mathbf{l} + \frac{1}{r^2} r' \cos \vartheta \cdot d\mathbf{l} + \frac{1}{r^3} \oint (r')^2 \left( \frac{3}{2} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2} \right) \cdot d\mathbf{l} + \dots \right] \quad (3.80)$$

Ο πρώτος όρος (που φθίνει με ρυθμό  $1/r$ ) ονομάζεται μονοπολικός. Ο δεύτερος (που φθίνει με ρυθμό  $1/r^2$ ) ονομάζεται διπολικός, ο τρίτος όρος λέγεται τετραπολικός κ.ο.κ.

Ο μονοπολικός μαγνητικός όρος είναι πάντοτε μηδέν, διότι το αντίστοιχο ολοκλήρωμα αναπαριστά τη συνολική διανυσματική μετατόπιση κατά μήκος ενός κλειστού βρόχου. Αυτό φυσικά είναι μια επανεπιβεβαίωση του γεγονότος ότι δεν υπάρχουν μαγνητικά μονόπολα στη φύση, κάτι που προβλέπεται από το

νόμο του Gauss για τη μαγνητοστατική :  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

Με τη μονοπολική συνεισφορά να απουσιάζει, κυρίαρχος όρος γίνεται ο διπολικός. Μετά από κάποιες απλοποιήσεις στον όρο του ολοκληρώματος, το διπολικό δυναμικό γίνεται:

$$\mathbf{A}_{Ldip} = \frac{\mu_0 I_L}{4\pi r^2} \left[ \frac{1}{2} \hat{\mathbf{r}} \times \oint (\mathbf{r}' \times d\mathbf{l}) \right] \quad (3.81)$$

ή, σε πιο συμπαγή μορφή:

$$\mathbf{A}_L = \frac{\mu_0 \boldsymbol{\mu} \times \hat{\mathbf{r}}}{4\pi r^2} \quad (3.82)$$

όπου

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2} I_L \oint \mathbf{r}' \times d\mathbf{l} \quad (3.83)$$

είναι η μαγνητική διπολική ροπή του βρόχου. Στην ειδική περίπτωση του επίπεδου βρόχου, το ανωτέρω ολοκλήρωμα (για την ακρίβεια το 1/2 αυτού) επιδέχεται μια απλή γεωμετρική ερμηνεία : δεν είναι τίποτα περισσότερο από το εμβαδόν της επίπεδης επιφάνειας που ορίζεται από το βρόχο :

$$\frac{1}{2} \oint \mathbf{r}' \times d\mathbf{l} = \mathbf{a} \Rightarrow \boldsymbol{\mu} = I_L \mathbf{a} \quad (3.84)$$

Δεδομένου ότι αυτή είναι η πιο συνήθης περίπτωση, η εξίσωση (3.84) θεωρείται ευρέως ως ο ορισμός της μαγνητικής διπολικής ροπής. Οι πιο γενικές κατανομές ρεύματος ουσιαστικά μπορούν να συντεθούν από πολλούς απειροστούς επίπεδους βρόχους, οι διπολικές ροπές των οποίων προστίθενται διανυσματικά.

Μολονότι ο διπολικός όρος κυριαρχεί στο πολυπολικό ανάπτυγμα και εν γένει προσφέρει καλή προσέγγιση του πραγματικού δυναμικού, εντούτοις δεν ταυτίζεται μαζί του, λόγω της παρουσίας τετραπολικών, οκταπολικών και ανώτερης τάξης συνεισφορών. Παρ'όλα αυτά, για μεγάλες αποστάσεις (σε σχέση με τις διαστάσεις του βρόχου, φυσικά) τόσο το δυναμικό, όσο και το μαγνητικό πεδίο που προκύπτει από το στροβιλισμό του λόγω του ηλεκτρικού ρεύματος θα ταυτίζεται με αυτό ενός μαγνητικού διπόλου.

Για λόγους απλοποίησης των υπολογισμών, τοποθετούμε το  $\boldsymbol{\mu}$  στην αρχή των αξόνων ενός τρισσορθογωνίου καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων, με φορά προς τον θετικό ημιάξονα  $z$ . Οι συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου (σε Tesla) στο σημείο  $(x, y, z)$  του τριδιάστατου χώρου θα είναι :

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} 3\mu \frac{xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \quad (3.85)$$

$$B_y = \frac{\mu_0}{4\pi} 3\mu \frac{yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \quad (3.86)$$

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} 3\mu \frac{z^2 - \frac{1}{3}(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \quad (3.87)$$

και η εγκάρσια συνιστώσα του πεδίου θα είναι

$$B_{\perp} = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} 3\mu \frac{z\sqrt{x^2 + y^2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \quad (3.88)$$

Σε όλες τις ανωτέρω σχέσεις με  $\mu_0$  συμβολίζεται η μαγνητική σταθερά (μαγνητική διαπερατότητα του κενού) και με  $\mu$  το μέτρο του διανύσματος  $\boldsymbol{\mu}$  της μαγνητικής διπολικής ροπής.

Λόγω της προφανούς κυλινδρικής συμμετρίας του προβλήματος, είναι περισσότερο δόκιμο να χρησιμοποιούμε συστήματα συντεταγμένων που εκμεταλλεύονται τη γωνιακή εξάρτηση του πεδίου.

Στο επίπεδο  $x - z$ , όπου  $y = 0$  ισχύει  $\sin \vartheta = x/r$  και  $\cos \vartheta = z/r$ . Αντικαθιστώντας στις σχέσεις που γράψαμε πιο πάνω παίρνουμε:

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\mu \sin \vartheta \cos \vartheta}{r^3} \quad (3.89)$$

$$B_y = 0 \quad (3.90)$$

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mu (3 \cos^2 \vartheta - 1)}{r^3} \quad (3.91)$$

Σε σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων  $(r, \vartheta, \varphi)$  το διανυσματικό δυναμικό θα είναι:

$$\mathbf{A}_L = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mu \sin \vartheta}{r^2} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \quad (3.92)$$

Συνεπώς το μαγνητικό πεδίο θα δίνεται από το στροβιλισμό:

$$\mathbf{B}_L = \nabla \times \mathbf{A}_L = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi r^3} \left( 2 \cos \vartheta \hat{\mathbf{r}} + \sin \vartheta \hat{\boldsymbol{\theta}} \right) \quad (3.93)$$

**Εξισώσεις Hamilton** Εφ' όσον αναφέραμε όλα αυτά, μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε στη μελέτη της κίνησης ενός σωματιδίου μάζας  $m$  και φορτίου  $q$  μέσα στο πεδίο του μαγνητικού διπόλου, βάσει της θεωρίας των Lagrange - Hamilton. Για λόγους αποφυγής σύγχυσης, θα συμβολίζουμε με  $m$  τη μάζα του σωματιδίου, ενώ το μέτρο της μαγνητικής διπολικής ροπής θα γράφεται στην πληρέστερη μορφή  $I_L |\mathbf{a}|$ . Το διάνυσμα  $\mathbf{a}$  είναι κάθετο στην επιφάνεια του βρόχου με φορά που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Θεωρώντας ως κάθετο άξονα  $z$ , παράλληλο στο άνυσμα  $\mathbf{a}$  ( $\hat{\mathbf{z}} \parallel \mathbf{a}$ ), το διανυσματικό δυναμικό του διπόλου γράφεται ως

$$\mathbf{A}_L = \frac{\mu_0 I_L \mathbf{a} \times \hat{\mathbf{r}}}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I_L |\mathbf{a}| \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{r}}}{4\pi r^2} \quad (3.94)$$

Κατά τα γνωστά (βλ. σχέση (3.29)), η Λαγκρανζιανή που περιγράφει την κίνηση φορτισμένου σωματιδίου σε μαγνητικό πεδίο απουσία ηλεκτρικής συνιστώσας είναι η εξής:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{q}{c} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$$

Εισάγοντας την έκφραση που έχουμε για το διανυσματικό δυναμικό του διπόλου (σχέση (3.94)) καταλήγουμε στην εξής Λαγκρανζιανή:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{q \mu_0 I_L |\mathbf{a}|}{4\pi c} \frac{\mathbf{v} \cdot (\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{r}})}{r^2} \quad (3.95)$$

Επιλέγουμε το σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων για τη μελέτη μας.

Το άνυσμα θέσης σημείου  $P$  σε σφαιρικές συντεταγμένες, όπως έχουμε δει (3.60) είναι

$$\mathbf{r} = r \sin \vartheta \cos \varphi \hat{\mathbf{x}} + r \sin \vartheta \sin \varphi \hat{\mathbf{y}} + r \cos \vartheta \hat{\mathbf{z}}$$

και αντίστοιχα το διάνυσμα της ταχύτητας (βλ. (3.61)) θα είναι

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} &= \left( \dot{r} \sin \vartheta \cos \varphi + r \cos \vartheta \dot{\vartheta} \cos \varphi - r \sin \vartheta \sin \varphi \dot{\varphi} \right) \cdot \hat{\mathbf{x}} + \\
&+ \left( \dot{r} \sin \vartheta \sin \varphi + r \cos \vartheta \dot{\vartheta} \sin \varphi + r \sin \vartheta \cos \varphi \dot{\varphi} \right) \cdot \hat{\mathbf{y}} \\
&+ \left( \dot{r} \cos \vartheta - r \sin \vartheta \dot{\vartheta} \right) \cdot \hat{\mathbf{z}}
\end{aligned}$$

από την οποία μετά από τετριμμένες πράξεις προκύπτει τελικά

$$v^2 = \dot{\mathbf{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2$$

⇒ Το εξωτερικό γινόμενο  $\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{r}}$  γράφεται:

$$\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{r}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 0 & 0 & 1 \\ \sin \vartheta \cos \varphi & \sin \vartheta \sin \varphi & \cos \vartheta \end{vmatrix} = -\sin \vartheta \sin \varphi \cdot \hat{\mathbf{x}} + \sin \vartheta \cos \varphi \cdot \hat{\mathbf{y}} \quad (3.96)$$

⇒ Ο όρος  $\mathbf{v} \cdot (\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{r}})$  της Λαγκρανζιανής λοιπόν είναι

$$\mathbf{v} \cdot (\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{r}}) = r \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} \quad (3.97)$$

Κατά συνέπεια η Λαγκρανζιανή έχει τώρα την εξής έκφραση:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 \right) + \frac{q\mu_0 I_L |\mathbf{a}| \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}}{4\pi c r} \quad (3.98)$$

Με γνωστή τη Λαγκρανζιανή, και χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς Legendre, βρίσκουμε τη Χαμιλτονιανή:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \sum_{j=1}^3 p_j q_j - \mathcal{L} \\
&= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \dot{r} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} \dot{\vartheta} - \mathcal{L}
\end{aligned} \quad (3.99)$$

όπου οι επιμέρους μερικές παράγωγοι της Λαγκρανζιανής είναι:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} = p_r \quad (3.100)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} + \frac{q\mu_0 I_L |\mathbf{a}| \sin^2 \vartheta}{4\pi c r} = p_\varphi \quad (3.101)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} = mr^2 \dot{\vartheta} = p_\vartheta \quad (3.102)$$

Αντικαθιστώντας τις παραστάσεις αυτές, η Χαμιλτονιανή του συστήματος γίνεται:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}m \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 \right) \quad (3.103)$$

Στη συνέχεια εκφράζουμε τη Χαμιλτονιανή αποκλειστικά συναρτήσει των γενικευμένων θέσεων και ορμών του συστήματος, και τελικά έχουμε

$$\mathcal{H} = \left\{ \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \vartheta} \right) + \frac{1}{2mr^2} \left[ \left( \frac{q\mu_0 I_L |\mathbf{a}|}{4\pi c} \right)^2 \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2} - \frac{q\mu_0 I_L |\mathbf{a}| p_\varphi}{2\pi c r} \right] \right\} \quad (3.104)$$

η οποία και πάλι, όπως αναμέναμε, (βλέπε [18]) είναι της μορφής

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \vartheta} \right) + U(r, \vartheta, \varphi) \quad (3.105)$$

Έχοντας υπολογίσει τη Χαμιλτονιανή και τις γενικευμένες ορμές για το σύστημά μας, μπορούμε πλέον να επιλύσουμε τις εξισώσεις Hamilton και να εξάγουμε τα ολοκληρώματα της κίνησης ενός (ή  $N$  μη αλληλεπιδρώντων) φορτισμένου σωματιδίου στη δεδομένη τοπολογία μαγνητικού πεδίου.

Θυμίζουμε τις εξισώσεις Hamilton:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \quad \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}$$

οπότε γράφουμε τις εξής (έξι το πλήθος) εξισώσεις:



$$\dot{r} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \quad (3.106)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2 \sin \vartheta} - \frac{q\mu_0 I_L |\mathbf{a}| \sin^2 \vartheta}{2\pi c r} \quad (3.107)$$

$$\dot{\vartheta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\vartheta} = \frac{p_\vartheta}{mr^2} \quad (3.108)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_r = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} = & \frac{p_\vartheta^2}{mr^3} + \frac{p_\varphi^2}{mr^3 \sin^2 \vartheta} + \\ & + \left( \frac{q\mu_0 I_L |\mathbf{a}|}{4\pi c} \right)^2 \frac{2 \sin^2 \vartheta}{mr^5} - \frac{q\mu_0 I_L |\mathbf{a}|}{2\pi c} p_\varphi \frac{3}{2mr^4} \end{aligned} \quad (3.109)$$

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} = 0 \quad (3.110)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_\vartheta = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vartheta} = & \frac{p_\varphi^2}{mr^2} \sin \vartheta \cos \vartheta - \\ & - \left( \frac{q\mu_0 I_L |\mathbf{a}|}{4\pi c} \right)^2 \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{mr^4} \end{aligned} \quad (3.111)$$

Επίσης,  $\partial \mathcal{H} / \partial t = 0 \Rightarrow$  υπάρχει το ολοκλήρωμα Jacobi και εκφράζει τη διατήρηση της ενέργειας. Επίσης, εφ' όσον η  $\varphi$  είναι αγνοήσιμη ( $\dot{p}_\varphi = 0$ ) θα υπάρχει το ολοκλήρωμα της στροφορμής και η αντίστοιχη γενικευμένη ορμή  $p_\varphi$  θα διατηρείται.

Καταλήγουμε λοιπόν στα εξής ολοκληρώματα της κίνησης:

$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} + \frac{q\mu_0 I_L |\mathbf{a}| \sin^2 \vartheta}{4\pi c r} = \text{σταθερά} \quad (3.112)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0 \rightarrow \mathcal{H} = \text{σταθερά} \quad (3.113)$$

Έχοντας φτάσει σε αυτό το σημείο, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει στη συνέχεια η εύρεση των *αδιαβατικών αναλλοίωτων* για την κίνηση φορτισμένου σωματιδίου στο πεδίο μαγνητικού διπόλου, διαδικασία την οποία έχουμε εκτελέσει στο Κεφάλαιο 2.

### 3.3.2 Ακριβής υπολογισμός

Αν και η προσέγγιση μαγνητικού διπόλου λειτουργεί πολύ ικανοποιητικά σε απόσταση από το ρευματοφόρο βρόχο, θα προχωρήσουμε τώρα στον απευθείας ακριβή υπολογισμό του μαγνητικού πεδίου. Η μελέτη μπορεί να γίνει φυσικά σε οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων μας εξυπηρετεί, και περιλαμβάνει τον αριθμητικό υπολογισμό των *πλήρων ελλειπτικών ολοκληρωμάτων 1ου και 2ου είδους*,  $K(k)$  και  $E(k)$  αντίστοιχα.

Θα ακολουθήσουμε τα βήματα της μελέτης που κάνει ο Jackson, στο κλασικό του σύγγραμμα για την ηλεκτροδυναμική ([17])

Η *πυκνότητα ρεύματος* σε κυκλικό ρευματοφόρο βρόχο στο  $x - y$  επίπεδο, με κέντρο το σημείο  $(0, 0, 0)$ , ο οποίος διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα  $I_L$ , έχει μόνο  $\varphi$  συνιστώσα και ισούται με

$$\mathbf{J}_\varphi = I_L \sin \vartheta' \delta(\cos \vartheta') \frac{\delta(r' - \alpha)}{\alpha} \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}} \quad (3.114)$$

Οι συναρτήσεις δέλτα περιορίζουν τη ροή του ηλεκτρικού ρεύματος σε δακτύλιο (βρόχο) ακτίνας  $\alpha$ . Διανυσματικά μπορούμε να γράψουμε:

$$\mathbf{J} = -J_\varphi \cdot \sin \varphi' \hat{\mathbf{x}} + J_\varphi \cdot \cos \varphi' \hat{\mathbf{y}} \quad (3.115)$$

Εφ' όσον έχουμε κυλινδρική συμμετρία, μπορούμε να θέσουμε  $\varphi = 0$  (παράτηρηση στο  $x - z$  επίπεδο). Αφού η αζιμουθιακή ολοκλήρωση στη σχέση

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \quad (3.116)$$

είναι συμμετρική γύρω από το  $\varphi' = 0$ , η  $x$  συνιστώσα του ρεύματος δε συνεισφέρει στο διανυσματικό δυναμικό. Μένει μόνο η  $y$  συνιστώσα, η οποία δίνει το  $\mathbf{A}_\varphi$  με μέτρο:

$$A_\varphi(r, \vartheta) = \frac{\mu_0 I_L}{4\pi\alpha} \int r'^2 dr' d\Omega' \frac{\sin \vartheta' \cos \varphi' \delta(\cos \vartheta') \delta(r' - \alpha)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3.117)$$

όπου  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = [r^2 + r'^2 - 2rr'(\cos\vartheta \cos\vartheta' + \sin\vartheta \sin\vartheta' \cos\varphi')]^{1/2}$ .

Ολοκληρώνοντας ως προς τις συναρτήσεις δέλτα παίρνουμε το εξής αποτέλεσμα:

$$A_\varphi(r, \vartheta) = \frac{\mu_0 I_L \alpha}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi' d\varphi'}{(\alpha^2 + r^2 - 2\alpha r \sin \vartheta \cos \varphi')^{1/2}} \quad (3.118)$$

Το ολοκλήρωμα (3.118) μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει των πλήρων ελλειπτικών ολοκληρωμάτων  $K, E$ :

$$A_\varphi(r, \vartheta) = \frac{\mu_0}{\pi} \frac{I_L \alpha}{(\alpha^2 + r^2 - 2\alpha r \sin \vartheta \cos \varphi')^{1/2}} \left[ \frac{(2 - k^2)K(k) - 2E(k)}{k^2} \right] \quad (3.119)$$

όπου το όρισμα των ελλειπτικών ολοκληρωμάτων είναι:

$$k^2 = \frac{4\alpha r \sin \vartheta}{\alpha^2 + r^2 + 2\alpha r \sin \vartheta} \quad (3.120)$$

Σε κάποια βιβλία μαθηματικής φυσικής το  $k^2$  συμβολίζεται ως  $m$  ([10])

Συνοψίζοντας, το τελικό αποτέλεσμα όσον αφορά το μαγνητικό διανυσματικό δυναμικό του πεδίου που επάγεται από κυκλικό ρευματοφόρο βρόχο είναι:

$$A_\varphi(r, \vartheta) = \frac{\mu_0 I_L}{2\pi} \frac{\alpha}{(\alpha^2 + r^2 - 2\alpha r \sin \vartheta \cos \varphi')^{1/2}} \cdot F(k) \quad (3.121)$$

όπου:

- $\mu_0$  η μαγνητική σταθερά
- $I_L$  το ηλεκτρικό ρεύμα που διαρρέει το βρόχο ακτίνας  $\alpha$
- $r, \vartheta, \varphi$  οι σφαιρικές συντεταγμένες
- $F(k) = \frac{1}{k^2}[(2 - k^2)K(k) - 2E(k)]$

- $K(k), E(k)$  τα πλήρη ελλειπτικά ολοκληρώματα πρώτου και δεύτερου είδους αντίστοιχα.

Συνεπώς, οι συνιστώσες του επαγόμενου από το  $A_\varphi$  μαγνητικού πεδίου θα είναι οι εξής:

$$\left. \begin{aligned} B_r &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta A_\varphi) \\ B_\vartheta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \\ B_\varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.122)$$

Εννοείται ότι μπορούμε να γράψουμε τις πλήρεις εκφράσεις στις σχέσεις (3.122) αντικαθιστώντας το  $A_\varphi$  με αυτό που βρήκαμε στη σχέση (3.121). Τα αποτελέσματα δεν είναι ιδιαίτερα διαφωτιστικά, αλλά είναι αρκετά χρήσιμα για ακριβείς υπολογισμούς.

Για αρκετά μεγάλες αποστάσεις από τον κυκλικό βρόχο, οι εξισώσεις του μαγνητικού πεδίου είναι ταυτόσημες με αυτές του πεδίου του μαγνητικού διπόλου, επαληθεύοντας την ορθότητα της προσέγγισης του μαγνητικού διπόλου στην οποία αναφερθήκαμε στην αμέσως προηγούμενη ενότητα. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν και κάποιες άλλες ειδικές περιπτώσεις, όπως πχ για  $\vartheta = 0$  και  $r \rightarrow 0$ .

Εφ' όσον έχουμε την πλήρη έκφραση για το διανυσματικό δυναμικό, μέσω της τετριμμένης διαδικασίας την οποία έχουμε ακολουθήσει μέχρι τώρα, μπορούμε να υπολογίσουμε τη Λαγκρανζιανή και τη Χαμιλτονιανή του πεδίου, και να καταλήξουμε στα ολοκληρώματα της κίνησης.

Η διαδικασία αυστηρής και αναλυτικής εξαγωγής των ανωτέρω εκφράσεων για το διανυσματικό δυναμικό μέσω των ελλειπτικών ολοκληρωμάτων είναι μακρά και παρατίθεται σε βιβλία μαθηματικής φυσικής (πχ [10]). Η ίδια εργασία μπορεί να γίνει και στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων, και την παραθέτουμε στο *Παράρτημα Α* της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

### 3.4 Υπέρθεση κυκλικού βρόχου και ευθύγραμμου ρευματοφόρου αγωγού

Η σημαντικότερη μαγνητική τοπολογία την οποία θα μελετήσουμε είναι αυτή που προκύπτει από την υπέρθεση δύο ξεχωριστών μαγνητικών πεδίων, ουσιαστικά δηλαδή από την υπέρθεση δύο ηλεκτρικών ρευμάτων. Θεωρούμε επίπεδο κυκλικό βρόχο ακτίνας  $a$ , ο οποίος διαρρέεται από ρεύμα  $I_L$ . Ο βρόχος βρίσκεται στο  $x - y$  επίπεδο και το κέντρο του είναι το σημείο τομής με τον  $z$  άξονα σε τρισσορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα, δηλαδή το σημείο  $(0, 0, 0)$ . Λόγω της ύπαρξης του κυκλικού ρευματοφόρου βρόχου, στο χώρο επάγεται μαγνητικό πεδίο  $\mathbf{B}_L$ .

Στην υπάρχουσα γεωμετρία προστίθεται τώρα ένας ευθύγραμμος ρευματοφόρος αγωγός που διαρρέεται από  $I_W$ , και το μαγνητικό πεδίο  $\mathbf{B}_W$ , το οποίο επάγεται λόγω της προσθήκης του αγωγού, υπερτίθεται (προστίθεται διανυσματικά) στο πεδίο του βρόχου, ώστε συνολικά να έχουμε ένα μαγνητικό πεδίο  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_W$ . Αρχικά ο ευθύγραμμος αγωγός τοποθετείται κάθετα στο κέντρο του βρόχου, δηλαδή ακολουθεί τον άξονα  $z$  του καρτεσιανού συστήματος και τέμνει το επίπεδο  $x - y$  στο σημείο  $(0, 0, 0)$ .

Έχουμε τώρα μια νέα, συνθετότερη μαγνητική τοπολογία. Η υπέρθεση των δύο αυτών μαγνητικών πεδίων και η μελέτη της δυναμικής του φορτισμένου σωματιδίου στο συνολικό μαγνητικό πεδίο μπορούν να μας δώσουν πολύ χρήσιμα συμπεράσματα, ειδικά όταν διαταράξουμε τη συμμετρία με έναν από τους εξής τρόπους:

- μετακινώντας το σημείο τομής του ευθύγραμμου αγωγού με το επίπεδο από το κέντρο του βρόχου,
- αλλάζοντας τη ‘γωνία πρόσπτωσης’ του αγωγού στο επίπεδο, ή
- και τα δύο ταυτόχρονα.

Αυτό που πρέπει να γίνει αρχικά, είναι να ξαναγράψουμε σε πλήρη μορφή και σε σφαιρικές συντεταγμένες τις εξισώσεις για το μαγνητικό πεδίο που επάγεται από την παρουσία του ευθύγραμμου ρευματοφόρου αγωγού, ο οποίος είναι ‘προσαρμοσμένος’ (fixed) στο επίπεδο του κυκλικού βρόχου, λαμβάνοντας υπ’ όψιν όμως αυτή τη φορά και τις πιθανές διαταραχές στη συμμετρία που προαναφέραμε.

⇒ Έστω ότι ο ευθύγραμμος αγωγός βρίσκεται στη θέση  $r = r_0$  και  $\varphi = \varphi_0$  στο σφαιρικό σύστημα.

⇒ ‘μετακινούμε’ το σύστημα συντεταγμένων πάνω στο  $x - y$  επίπεδο, ώστε η αρχή του να γίνει το σημείο τομής του ευθύγραμμου αγωγού με αυτό.

⇒ Με  $(x', y', z')$  συμβολίζουμε το σημείο στο οποίο βρίσκεται ο παρατηρητής, στο σύστημα αναφοράς όπου το σύστημα συντεταγμένων είναι ‘ευθυγραμμισμένο’ ως προς τον αγωγό.

⇒ Με  $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$  συμβολίζουμε τις συντεταγμένες του παρατηρητή στο σύστημα αναφοράς του οποίου αρχή είναι το σημείο τομής του αγωγού με το επίπεδο  $x - y$ .

Στην αναπαράσταση  $(x', y', z')$ , το σύστημα συντεταγμένων έχει περιστραφεί δύο φορές:

1. για να ευθυγραμμίσει τον νέο άξονα  $x$  κατά μήκος της γραμμής που συνδέει το  $(0, 0, 0)$  με το ‘νέο’ σημείο τομής αγωγού και επιπέδου, και
2. για να ευθυγραμμίσει τον νέο άξονα  $z$  κατά μήκος του αγωγού.

Τούτων δοθέντων, η θέση ως προς το ρευματοφόρο αγωγό δίνεται πλέον από τα:

$$\tilde{x} = x - r_0 \cos \varphi_0 \quad (3.123)$$

$$\tilde{y} = y - r_0 \sin \varphi_0 \quad (3.124)$$

$$\tilde{z} = z \quad (3.125)$$

Γράφουμε τις συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου του ρευματοφόρου αγωγού σε σφαιρικές συντεταγμένες, λαμβάνοντας υπ' όψιν ό,τι έχουμε αναφέρει μέχρι τώρα σχετικά με στροφές και μετατοπίσεις. Οι αλγεβρικές ενδιάμεσες πράξεις (μετατροπές μεταξύ συστημάτων συντεταγμένων, στροφές, κλπ) παρατίθενται στο παράρτημα:

$$\mathbf{B}_r = \frac{\mu_0 I_W}{2\pi r'} \{ -\sin \varphi' [\cos \vartheta_0 \sin \vartheta \cos(\varphi - \varphi_0) - \sin \vartheta_0 \cos \vartheta] + \cos \varphi' [\sin \vartheta \sin(\varphi - \varphi_0)] \} \cdot \hat{\mathbf{r}} \quad (3.126)$$

$$\mathbf{B}_\vartheta = \frac{\mu_0 I_W}{2\pi r'} \{ -\sin \varphi' [\cos \vartheta_0 \cos \vartheta \cos(\varphi - \varphi_0) + \sin \vartheta_0 \sin \vartheta] + \cos \varphi' [\cos \vartheta \sin(\varphi - \varphi_0)] \} \cdot \hat{\boldsymbol{\vartheta}} \quad (3.127)$$

$$\mathbf{B}_\varphi = \frac{\mu_0 I W}{2\pi r'} \{ -\sin \varphi' [\cos \vartheta_0 \sin(\varphi - \varphi_0)] + \cos \varphi' [\cos \vartheta \sin(\varphi - \varphi_0)] \} \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}} \quad (3.128)$$

ενώ ισχύουν τα εξής:

- $\tan \varphi' = y'/x'$
- $x' = r \sin \vartheta \cos \vartheta_0 \cos(\varphi - \varphi_0) - r \cos \vartheta \sin \vartheta_0 - r_0 \cos \vartheta_0$
- $y' = r \sin \vartheta \sin(\varphi - \varphi_0)$
- $r' = (x'^2 + y'^2)^{1/2}$

Μπορούμε φυσικά, επιλέγοντας κατάλληλη έκφραση για το διανυσματικό δυναμικό αυτού του σύνθετου μαγνητικού πεδίου, να εφαρμόσουμε τις γνωστές μεθόδους της Χαμιλτονιανής μηχανικής και να καταλήξουμε σε γενικές μορφές των ολοκληρωμάτων της κίνησης. Έχοντας τώρα σε πλήρη μορφή τις εξισώσεις που δίνουν τις συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου του ευθύγραμμου ρευματοφόρου αγωγού (σχέσεις (3.126) - (3.128)) αλλά και αυτές που μας δίνουν το μαγνητικό πεδίο του κυκλικού βρόχου (σχέσεις (3.122)) και προσθέτοντας τις επιμέρους συνιστώσες διανυσματικά, έχουμε την πλήρη μαγνητική τοπολογία κατά περίπτωση, και μπορούμε να προχωρήσουμε στη μελέτη της κίνησης φορτισμένου σωματιδίου.

### 3.5 Εξισώσεις κίνησης

Όπως καλά γνωρίζουμε, η κυρίαρχη δύναμη που ασκείται στα φορτισμένα σωματίδια τα οποία εισάγονται στις μαγνητικές τοπολογίες που μελετάμε είναι η ηλεκτρομαγνητική (δύναμη Lorentz). Αν και ο προσφορότερος τρόπος μελέτης της κίνησης είναι μέσω της Χαμιλτονιανής Δυναμικής, όπως ήδη έχουμε δει, λόγω της ανεξαρτησίας την οποία προσφέρει από το σύστημα συντεταγμένων, θα γράψουμε τώρα τις εξισώσεις κίνησης σε σφαιρικές συντεταγμένες, από τη στιγμή που όλα μας τα πεδία είναι πια σε αυτό το σύστημα.

Θυμίζουμε:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\dot{\mathbf{v}} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (3.129)$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \quad (3.130)$$

Έχουμε

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{r}} = v_r \\ \dot{\boldsymbol{\vartheta}} = \frac{v_\vartheta}{r} \\ \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{v_\varphi}{r \sin \vartheta} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_r = \dot{\mathbf{r}} \\ v_\vartheta = r \dot{\boldsymbol{\vartheta}} \\ v_\varphi = r \sin \vartheta \dot{\boldsymbol{\varphi}} \end{array} \right\} \quad (3.131)$$

Ενώ για τις επιταχύνσεις  $\mathbf{a}$  ισχύει:

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{\mathbf{r}} - r \dot{\boldsymbol{\vartheta}}^2 - r \sin^2 \vartheta \dot{\boldsymbol{\varphi}}^2 = \\ &= \ddot{\mathbf{r}} - \frac{\mathbf{v}_\vartheta^2}{r} - \frac{v_\varphi^2}{r} \end{aligned} \quad (3.132)$$

$$\begin{aligned} a_\vartheta &= r \ddot{\boldsymbol{\vartheta}} + 2\dot{\mathbf{r}}\dot{\boldsymbol{\vartheta}} - r \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\boldsymbol{\varphi}}^2 = \\ &= r \ddot{\boldsymbol{\vartheta}} + 2\mathbf{v}_r \frac{\mathbf{v}_\vartheta}{r} - \frac{\mathbf{v}_\varphi^2}{r \sin \vartheta} \cos \vartheta \end{aligned} \quad (3.133)$$

$$\begin{aligned} a_\varphi &= r \sin \vartheta \ddot{\boldsymbol{\varphi}} + 2\dot{\mathbf{r}} \sin \vartheta \dot{\boldsymbol{\varphi}} + 2r \cos \vartheta \dot{\boldsymbol{\vartheta}} \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \\ &= r \sin \vartheta \ddot{\boldsymbol{\varphi}} + 2\mathbf{v}_r \frac{\mathbf{v}_\varphi}{r} + 2\mathbf{v}_\vartheta \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{\mathbf{v}_\varphi}{r} \end{aligned} \quad (3.134)$$

Η συνολική δύναμη Lorentz που ασκείται σε φορτισμένο σωματίδιο μέσα σε μαγνητικό πεδίο  $\mathbf{B}$ , γράφεται:

$$\begin{aligned} \frac{q}{m} \mathbf{v} \times \mathbf{B} &= \frac{q}{m} (\mathbf{v}_\vartheta \mathbf{B}_\varphi - \mathbf{v}_\varphi \mathbf{B}_\vartheta) \cdot \hat{\mathbf{r}} + \\ &+ \frac{q}{m} (\mathbf{v}_\varphi \mathbf{B}_r - \mathbf{v}_r \mathbf{B}_\varphi) \cdot \hat{\boldsymbol{\vartheta}} + \\ &+ \frac{q}{m} (\mathbf{v}_r \mathbf{B}_\vartheta - \mathbf{v}_\vartheta \mathbf{B}_r) \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}} \end{aligned} \quad (3.135)$$

(Έχουμε κανονικοποιήσει παντού ως προς έναν παράγοντα  $\mu_0/4\pi$ )

Κανονικοποιώντας περαιτέρω τις ανωτέρω εκφράσεις, γράφουμε εν τέλει για τις επιταχύνσεις τα εξής:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{v}_\vartheta^2}{r} + \frac{\mathbf{v}_\varphi^2}{r} + (\mathbf{v}_\vartheta \mathbf{B}_\varphi - \mathbf{v}_\varphi \mathbf{B}_\vartheta) \quad (3.136)$$



$$\ddot{\vartheta} = -\frac{2}{r^2} \mathbf{v}_r \mathbf{v}_\vartheta + \frac{1}{r^2} \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \mathbf{v}_\vartheta^2 + \frac{1}{r} (\mathbf{v}_\varphi \mathbf{B}_r - \mathbf{v}_r \mathbf{B}_\varphi) \quad (3.137)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} = & -\frac{2}{r^2} \frac{1}{\sin \vartheta} \mathbf{v}_r \mathbf{v}_\varphi - \frac{2 \cos \vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} \mathbf{v}_\vartheta \mathbf{v}_\varphi + \\ & + \frac{1}{r \sin \vartheta} (\mathbf{v}_r \mathbf{B}_\vartheta - \mathbf{v}_\vartheta \mathbf{B}_r) \end{aligned} \quad (3.138)$$

και αντικαθιστώντας:

$$\frac{d\mathbf{v}_r}{dt} = \ddot{\mathbf{r}} \quad (3.139)$$

$$\frac{d\mathbf{v}_\vartheta}{dt} = -\frac{1}{r} \mathbf{v}_r \mathbf{v}_\vartheta + \frac{1}{r} \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \mathbf{v}_\vartheta^2 + (\mathbf{v}_\varphi \mathbf{B}_r - \mathbf{v}_r \mathbf{B}_\varphi) \quad (3.140)$$

$$\frac{d\mathbf{v}_\varphi}{dt} = -\frac{1}{r} \mathbf{v}_r \mathbf{v}_\varphi - \frac{1}{r} \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \mathbf{v}_\vartheta \mathbf{v}_\varphi + (\mathbf{v}_r \mathbf{B}_\vartheta - \mathbf{v}_\vartheta \mathbf{B}_r) \quad (3.141)$$

## Κεφάλαιο 4

# Αριθμητικοί Υπολογισμοί

Η κίνηση ενός φορτισμένου σωματιδίου σε τρεις διαστάσεις στις μαγνητικές τοπολογίες που αναφέρθηκαν μπορεί φυσικά να μελετηθεί και αριθμητικά, ως ένα πρόβλημα αρχικών τιμών. Θα χρησιμοποιήσουμε το ελεύθερα διαθέσιμο λογισμικό `rksuite` των R.W. Brankin, I. Gladwell, L.F. Shampine. ([1],[12])

### 4.1 Μέθοδος Runge - Kutta στις τρεις διαστάσεις

Το πρόβλημα αρχικών τιμών που έχουμε να επιλύσουμε στις τρεις διαστάσεις του καρτεσιανού χώρου δίνεται από το σύστημα:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v_x & \frac{dv_x}{dt} &= a_x(t, x, v_x, y, v_y, z, v_z) \\ \frac{dy}{dt} &= v_y & \frac{dv_y}{dt} &= a_y(t, x, v_x, y, v_y, z, v_z) \\ \frac{dz}{dt} &= v_z & \frac{dv_z}{dt} &= a_z(t, x, v_x, y, v_y, z, v_z) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Στην περίπτωση αυτή θα χρησιμοποιήσουμε για αυξημένη ακρίβεια και σταθερότητα έναν αλγόριθμο της οικογένειας *Runge - Kutta* με προσαρμοζόμενο έλεγχο βήματος (adaptive stepsize control). Για λεπτομέρειες ο αναγνώστης παραπέμπεται σε ένα οποιοδήποτε εγχειρίδιο αριθμητικών μεθόδων ή υπολογιστικής φυσικής ([21]).

Το πακέτο `rksuite` περιέχει αλγόριθμους τύπου Runge - Kutta γραμμένους σε γλώσσα Fortran και αφορά πραγματικές μεταβλητές διπλής ακρίβειας (double

precision). Για να συνδέσουμε υποπρογράμματα στο δικό μας πρόγραμμα χρειαζόμαστε τις εξής βασικές πληροφορίες:

- **INPUT DATA:** Δηλαδή το πώς παρέχουμε στο πρόγραμμά μας τις απαραίτητες πληροφορίες για να εκτελεστεί ο υπολογισμός. Είναι σαφές πως στην περίπτωσή μας απαιτείται να δώσουμε τουλάχιστον τις αρχικές συνθήκες, το χρόνο ολοκλήρωσης και τον αριθμό των βημάτων. Επίσης πρέπει να παρέχουμε τις συναρτήσεις στο δεξί μέλος της (4.1), ενώ είναι δυνατόν να ζητώνται επίσης η επιθυμητή ακρίβεια, η διαθέσιμη αριθμητική ακρίβεια κλπ.
- **OUTPUT DATA:** Δηλαδή το πώς και το πού μας δίνει το πρόγραμμα τα αποτελέσματα του υπολογισμού, εάν αυτός έγινε ομαλά κλπ.
- **WORKSPACE:** Ειδικά σε ρουτίνες Fortran 77, όπου η μνήμη δε ζητάται δυναμικά, μπορεί να χρειαστεί να παρέχουμε στην υπορουτίνα χώρο στη μνήμη για τους ενδιάμεσους υπολογισμούς.

Εμείς θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο Runge - Kutta 4ης τάξης, αν και το πρόγραμμα rksuite επιτρέπει τη χρήση και άλλων τάξεων της μεθόδου. Οι κώδικες που θα χρησιμοποιηθούν παρατίθενται στο παράρτημα, και υπάρχουν ελεύθερα διαθέσιμοι και στο internet. Λόγω της ευρείας χρήσης της συγκεκριμένης μεθόδου για τη μελέτη τέτοιου είδους προβλημάτων της υπολογιστικής φυσικής, πολλές φορές αναφέρεται απλώς ως RK4.

Σκοπός φυσικά δεν είναι να γίνει αναλυτική επεξήγηση της μεθόδου Runge - Kutta για την αριθμητική επίλυση προβλημάτων αρχικών τιμών, εντούτοις θα αναφερθούμε με αδρές γραμμές στα χαρακτηριστικά της για ένα γενικότερο πρόβλημα.

Έστω πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$y' = f(t, y) \quad y(t_0) = y_0 \quad (4.2)$$

Για το δεδομένο πρόβλημα, η RK4 δίνεται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (4.3)$$

$$t_{n+1} = t_n + h \quad (4.4)$$

όπου με  $y_{n+1}$  συμβολίζουμε την RK4 προσέγγιση της  $y(t_{n+1})$  και:

$$k_1 = f(t_n, y_n) \quad (4.5)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1\right) \quad (4.6)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2\right) \quad (4.7)$$

$$k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_3) \quad (4.8)$$

Συνεπώς, η επόμενη τιμή  $y_{n+1}$  καθορίζεται από την ‘τωρινή’ τιμή  $y_n$  στην οποία έχει προστεθεί το γινόμενο του χρονικού διαστήματος (βήματος)  $h$  και μιας μέσης παραγώγου. Χρησιμοποιούμε τους παράγοντες  $k_1 - k_4$  όπου:

- $k_1$  είναι η παράγωγος στην αρχή του διαστήματος
- $k_2$  είναι η παράγωγος στο μέσον του διαστήματος, όπου έχει χρησιμοποιηθεί η μέθοδος Euler στην  $k_1$  για να βρεθεί η τιμή του  $y$  στο σημείο  $t_n + h/2$
- $k_3$  είναι και πάλι η παράγωγος στο μέσον του διαστήματος, όπου τώρα έχει χρησιμοποιηθεί το  $k_2$  για να υπολογιστεί η τιμή του  $y$ .
- $k_4$  είναι η παράγωγος στο τέλος του διαστήματος, με χρήση της  $k_3$  για τον υπολογισμό της τιμής του  $y$

Όπως βλέπουμε στις (4.3), το μεγαλύτερο βάρος δίνεται στις παραγώγους του ενδιάμεσου σημείου του διαστήματος. Το ότι η μέθοδος είναι 4ης τάξης σημαίνει ότι το σφάλμα της ανά βήμα είναι της τάξης της πέμπτης δύναμης του διαστήματος ( $h^5$ ), ενώ το συνολικό σφάλμα της μεθόδου είναι της τάξης της τέταρτης δύναμης,  $h^4$ . Επισημαίνεται ότι η ανωτέρω διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί τόσο για βαθμωτά, όσο και για διανυσματικά μεγέθη, όπως είναι τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία που εξετάζουμε. Η RK4 είναι μια γενική οικογένεια μεθόδων με πολλές επιμέρους περιπτώσεις, μία από τις οποίες είναι και η adaptive stepsize control RK4, με έλεγχο σφάλματος σε κάθε βήμα της.

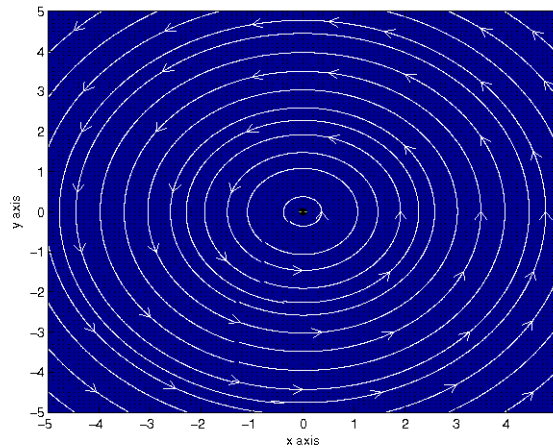
Όλοι οι κώδικες της Fortran που χρησιμοποιήσαμε για την εξαγωγή των τροχιών φορτισμένων σωματιδίων για κάθε τοπολογία, παρατίθενται στο παράρτημα Β. Στο παράρτημα αυτό επίσης παραθέτουμε κάποιους κώδικες που γράψαμε σε MATLAB (©), οι οποίοι αποτυπώνουν τις δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου.

Χρησιμοποιούμε έτοιμα scripts στα οποία δίνουμε ανά περίπτωση τις τιμές των  $k_i$ , τις αρχικές θέσεις και ταχύτητες σε τρεις διαστάσεις, τον αριθμό των

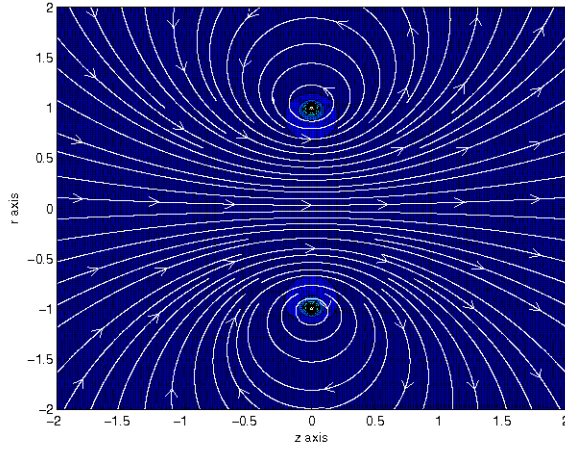
βημάτων της μεθόδου και το χρονικό διάστημα ολοκλήρωσης ( $t_0, t_f$ ).

## 4.2 Σχεδίαση πεδιακών γραμμών για διάφορες μαγνητικές τοπολογίες

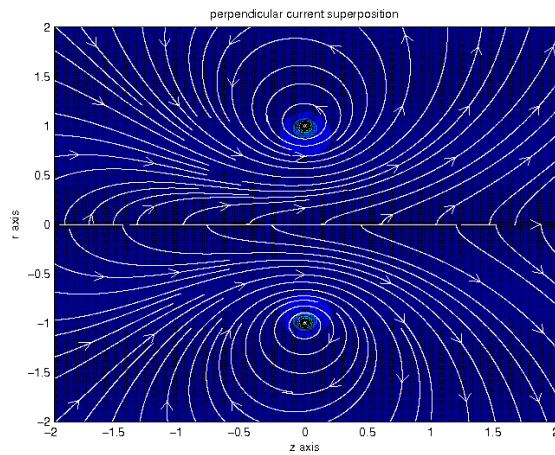
Προτού μελετήσουμε αριθμητικά τις τροχιές φορτισμένων σωματιδίων σε διάφορες μαγνητικές τοπολογίες, χρησιμοποιήσαμε το MATLAB για να σχεδιάσουμε ενδεικτικές μαγνητικές γραμμές για το μαγνητικό πεδίο που επάγεται από ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό, για αυτό που επάγεται από επίπεδο ρευματοφόρο βρόχο, καθώς και κάποιες πρωτόλειες απόπειρες υπέρθεσης αυτών. Επισημαίνουμε ότι τα αποτελέσματα (απεικονίσεις) που παίρνουμε είναι καθαρά ποιοτικά. Οι κώδικες παρατίθενται στο Παράρτημα Β.



Σχήμα 4.1: Πεδιακές Γραμμές Μαγνητικού Πεδίου ευθύγραμμου ρευματοφόρου αγωγού  $I_W$



Σχήμα 4.2: Πεδιακές Γραμμές Μαγνητικού Πεδίου επίπεδου ρευματοφόρου βρόχου  $I_L$



Σχήμα 4.3: Υπέρθωση Πεδίων  $\mathbf{B}_W$  και  $\mathbf{B}_L$  με  $I_W$  κάθετο στο κέντρο του επιπέδου του βρόχου  $I_L$

### 4.3 Μοντελοποίηση κίνησης σωματιδίου σε Ηλεκτρικό - Μαγνητικό Πεδίο

Έχοντας αναφέρει όλα τα παραπάνω, μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε στη μελέτη της κίνησης φορτισμένου σωματιδίου (μη σχετικιστικού) μέσα σε ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο. Κατά τα γνωστά, η δύναμη που κυριαρχεί στην κίνηση είναι η δύναμη Lorentz:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (4.9)$$

Η απλούστερη περίπτωση, όπως είδαμε και στο Κεφάλαιο 2, είναι όταν το μαγνητικό πεδίο είναι στατικό, ομογενές και της μορφής  $\mathbf{B} = B\hat{z}$ . Ας θεωρήσουμε και ύπαρξη εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου  $\mathbf{E} = E_x\hat{x} + E_y\hat{y} + E_z\hat{z}$ , του οποίου τις συνιστώσες μπορούμε να μηδενίσουμε στη συνέχεια εκτελώντας το πρόγραμμα, ώστε να δούμε γραφικά τις τροχιές των σωματιδίων που μας ενδιαφέρουν. Τα αποτελέσματα που λαμβάνουμε είναι ποιοτικά, και σκοπό έχουν να απεικονίσουν σε γενικές γραμμές τις τροχιές που μας ενδιαφέρουν.

Οι συνιστώσες της επιτάχυνσης (κατά μέτρο) θα είναι:

$$a_x = (qE_x/m) + (qB/m)v_y \quad (4.10)$$

$$a_y = (qE_y/m) + (qB/m)v_x \quad (4.11)$$

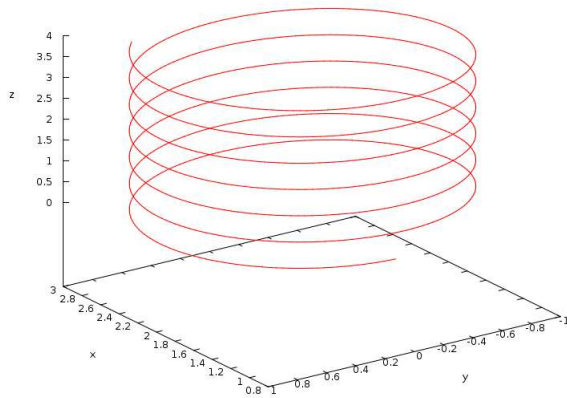
$$a_z = (qE_z)/m \quad (4.12)$$

Γράφουμε τον κώδικα υλοποίησης της RK4 στη Fortran, στο αρχείο `rk3_B.f` θέτοντας:

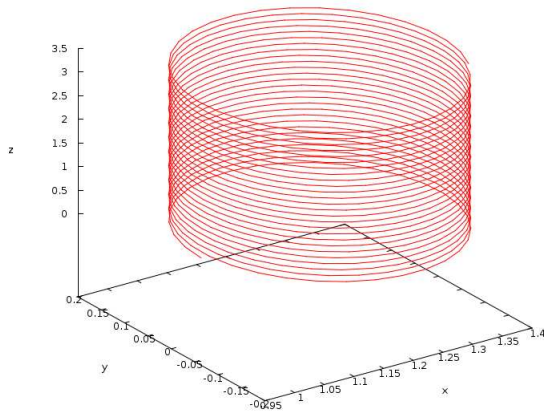
$$k_1 = qB/m, \quad k_2 = qE_x/m, \quad k_3 = qE_y/m, \quad k_4 = qE_z/m$$

#### 4.3.1 Στατικό και Ομογενές Μαγνητικό Πεδίο $\mathbf{B} = B\hat{z}$

Υλοποιώντας το script που εκτελεί τις ολοκληρώσεις και στη συνέχεια περνάει τα δεδομένα στο gnuplot, λαμβάνουμε τις απεικονίσεις για τις τροχιές φορτισμένου σωματιδίου που κινείται σε μαγνητικό πεδίο  $\mathbf{B} = B\hat{z}$ . Σημειώνουμε ότι οι τιμές που δίνουμε στις παραμέτρους οδηγούν στην εξαγωγή ποιοτικών συμπερασμάτων για τις τροχιές όταν πχ θέτουμε πολλαπλάσια ενός 'βασικού' μαγνητικού πεδίου ή μιας ταχύτητας. Εν γένει χρησιμοποιούμε κανονικοποιημένες μονάδες.

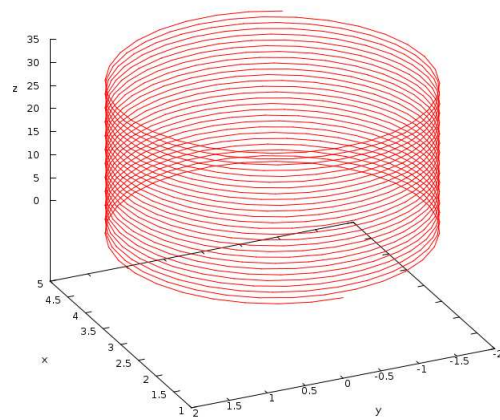


Σχήμα 4.4: Τροχιά φορτισμένου σωματιδίου σε στατικό μαγνητικό πεδίο  $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$  με  $qB/m = 1.0$ ,  $\mathbf{v}(0) = 1.0\hat{\mathbf{y}} + 0.1\hat{\mathbf{z}}$ .



Σχήμα 4.5: Τροχιά φορτισμένου σωματιδίου σε στατικό μαγνητικό πεδίο  $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$  με  $qB/m = 5.0$ ,  $\mathbf{v}(0) = 1.0\hat{\mathbf{y}} + 0.1\hat{\mathbf{z}}$ .





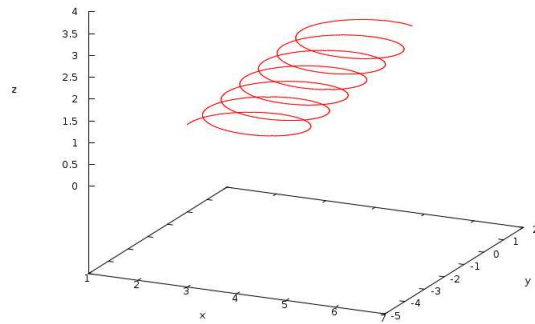
Σχήμα 4.6: Τροχιά φορτισμένου σωματιδίου σε στατικό μαγνητικό πεδίο  $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$  με  $qB/m = 5.0$ ,  $\mathbf{v}(0) = 10.0\hat{\mathbf{y}} + 0.1\hat{\mathbf{z}}$ .

Από τα τρία σχήματα που παραθέσαμε, είναι εμφανής η ελικοειδής τροχιά του φορτισμένου σωματιδίου κατά μήκος του άξονα  $z$ , η οποία αναλύεται στην περιστροφική κίνηση περί του κέντρου περιστροφής (γυροκίνηση) και τη μεταφορική κίνηση κατά μήκος του άξονα  $z$ . Στο δεύτερο σχήμα έχουμε πενταπλασιάσει το μέτρο του μαγνητικού πεδίου, το οποίο οδηγεί σε πολύ περισσότερες περιστροφικές κινήσεις, και μάλιστα με πολύ μικρότερες ακτίνες Larmor για το ίδιο χρονικό διάστημα, όπως αναμέναμε αφού η ακτίνα είναι αντιστρόφως ανάλογη από την κυκλοτρονική συχνότητα  $qB/m$ . Αντίστοιχα στο τρίτο σχήμα, κρατώντας το πενταπλάσιο μαγνητικό πεδίο έχουμε δεκαπλασιάσει την αρχική ταχύτητα του σωματιδίου ως προς την  $y$  συνιστώσα της, το οποίο οδηγεί σε δεκαπλασιασμό τόσο της (ανάλογης με την ταχύτητα) ακτίνας περιστροφής, αλλά και της μεταφορικής απόστασης την οποία διανύει το φορτίο κατά μήκος του μαγνητικού πεδίου. Και στις τρεις περιπτώσεις έχουμε χρησιμοποιήσει τη μέθοδο RK45 με 1000 βήματα για χρονικό διάστημα από  $t_0 = 0$  έως  $t_f = 40$ . Και στις τρεις περιπτώσεις η αρχική θέση είναι η  $\mathbf{r}(0) = 1.0\hat{x}$ . Οι διαφορές μεταξύ των τροχιών ήταν απόλυτα αναμενόμενες βάσει όσων συζητήσαμε στην ενότητα 2.1.1.

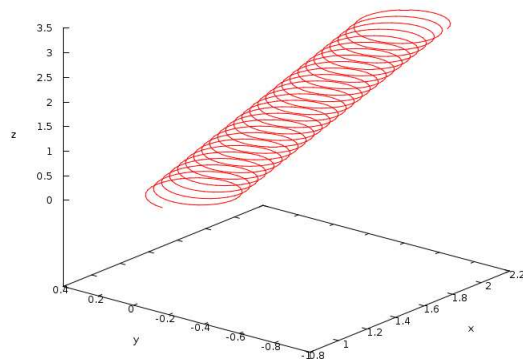
### 4.3.2 Ολίσθηση $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$

Όπως αναφέραμε, ο κώδικας **rk3\_B.f** περιλαμβάνει και συνιστώσες ηλεκτρικού πεδίου, τις οποίες αγνοήσαμε στην προηγούμενη περίπτωση μηδενίζοντας τα  $k_2, k_3, k_4$ . Με σκοπό να παρατηρήσουμε την ολίσθηση  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  στην οποία έχουμε αναφερθεί με λεπτομέρειες στην ενότητα , προσθέτουμε μια συνιστώσα ηλεκτρικού πεδίου στο πρόβλημα και πειραματιζόμαστε με κάποιες τιμές ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων.

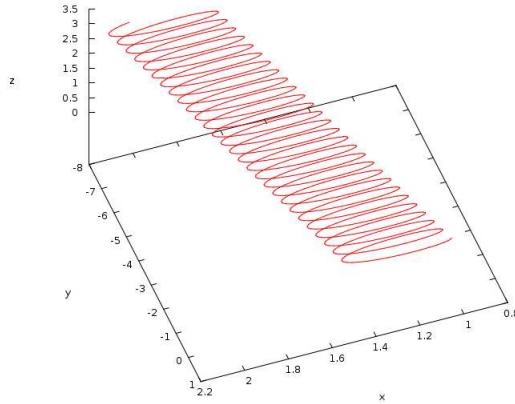
Παρατηρούμε ότι η προσθήκη ηλεκτρικών συνιστωσών οδηγεί σε ολίσθηση  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  προς τους αντίστοιχους άξονες του ηλεκτρικού πεδίου, ενώ όπως βλέπουμε και στα επόμενα δύο σχήματα, η άυξηση του μέτρου του μαγνητικού πεδίου οδηγεί και πάλι σε περισσότερες περιστροφικές κινήσεις Larmor στο ίδιο χρονικό διάστημα.



Σχήμα 4.7: Τροχιά φορτισμένου σωματιδίου σε στατικό μαγνητικό πεδίο  $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$  και σταθερό ηλεκτρικό πεδίο  $\mathbf{E} = E_x\hat{\mathbf{x}} + E_y\hat{\mathbf{y}}$  με  $qB/m = 1.0$ ,  $qE_x/m = qE_y/m = 0.1$ ,  $\mathbf{v}(0) = 1.0\hat{\mathbf{y}} + 0.1\hat{\mathbf{z}}$



Σχήμα 4.8: Τροχιά φορτισμένου σωματιδίου σε στατικό μαγνητικό πεδίο  $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$  και σταθερό ηλεκτρικό πεδίο  $\mathbf{E} = E_x\hat{\mathbf{x}} + E_y\hat{\mathbf{y}}$  με  $qB/m = 5.0$ ,  $qE_x/m = qE_y/m = 0.1$



Σχήμα 4.9: Τροχιά φορτισμένου σωματιδίου σε στατικό μαγνητικό πεδίο  $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$  και σταθερό ηλεκτρικό πεδίο  $\mathbf{E} = E_x\hat{\mathbf{x}} + E_y\hat{\mathbf{y}}$  με  $qB/m = 5.0$ ,  $qE_x/m = 1.0$ ,  $qE_y/m = 0.1$

### 4.3.3 Στατικό και Ομογενές Μαγνητικό Πεδίο $\mathbf{B} = B_y\hat{\mathbf{y}} + B_z\hat{\mathbf{z}}$

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να μελετήσουμε χωροεξαρτημένα μαγνητικά πεδία με παραπάνω από μία συνιστώσες. Ουσιαστικά πρέπει να μεταβάλλουμε τα  $k$  στον κώδικα, έχοντας όμως πάντοτε υπ' όψιν ότι οι επιλογές μας πρέπει να ικανοποιούν τις εξισώσεις του Maxwell, και πιο συγκεκριμένα τη σχέση που ορίζει ότι η απόκλιση του μαγνητικού πεδίου πρέπει να είναι μηδενική. Για να δούμε τον περιορισμό στο χώρο φορτισμένου σωματιδίου υπό την επίδραση μαγνητικού πεδίου, χρησιμοποιούμε την απλούστερη περίπτωση  $\mathbf{B} = B_y\hat{\mathbf{y}} + B_z\hat{\mathbf{z}}$ , με τις εξής εναλλακτικές:

- $qB_y/m = -k_2y$ ,  $qB_z/m = k_1 + k_2z$
- $qB_y/m = k_3z$ ,  $qB_z/m = k_1 + k_2y$

Παρατηρούμε ότι και στις δύο περιπτώσεις ισχύει  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ . Με αυτή την τοπολογία μπορούμε να απεικονίσουμε την τροχιά φορτισμένου σωματιδίου το οποίο κινείται στο μαγνητικό πεδίο που επάγεται από ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό ( $I_W$ ), όπως συζητήσαμε στην ενότητα 3.2. Θυμόμαστε ότι το μαγνητικό πεδίο που επάγεται δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού και έχει μόνο

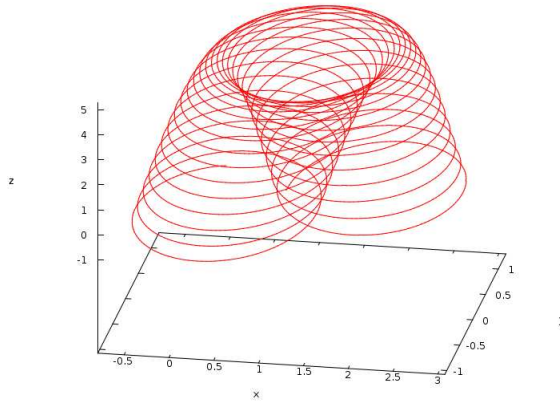
μια  $\varphi$  συνιστώσα στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων. Μετατρέποντας το διάνυσμα στο καρτεσιανό σύστημα, αποκτά δύο συνιστώσες,  $\hat{\mathbf{x}}$  και  $\hat{\mathbf{y}}$  ως εξής:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_W &= \frac{\mu_0 I_W}{2\pi r} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} &= -\hat{\mathbf{x}} \sin \varphi + \hat{\mathbf{y}} \cos \varphi \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \varphi &= \frac{y}{x}\end{aligned}$$

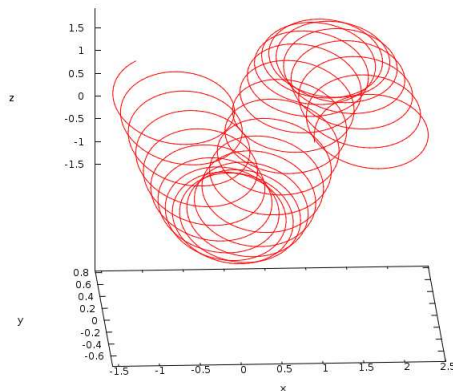
Άρα

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_W &= \mathbf{B}_x \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_y \hat{\mathbf{y}} \\ \mathbf{B}_x &= -B_W \cdot \sin \varphi \\ \mathbf{B}_y &= B_W \cdot \cos \varphi\end{aligned}$$

Στην περίπτωση μας έχουμε αναλύσει τις συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου σε  $y$  και  $z$  άξονες, οι οποίοι όμως και πάλι θα μας δώσουν την εικόνα που περιμένουμε. Εμφανές είναι ότι το φορτισμένο σωματίδιο ακολουθεί την καμπύλωση των μαγνητικών γραμμών (που προκύπτει από την υπέρθεση της  $y$  και  $z$  συνιστώσας ανά πάσα χρονική στιγμή), ενώ παράλληλα ακολουθεί και την ελικοειδή κίνηση, (υπέρθεση περιστροφικής Larmor και μεταφορικής κατά μήκος των γραμμών του πεδίου) όπως έχουμε αναφέρει εκτεταμένα. Στην επόμενη σελίδα παραθέτουμε τις απεικονίσεις τροχιών σε αυτό το μαγνητικό πεδίο:



Σχήμα 4.10: Τροχιά φορτισμένου σωματιδίου σε στατικό μαγνητικό πεδίο  $\mathbf{B} = B_y \hat{\mathbf{y}} + B_z \hat{\mathbf{z}}$  με  $qB_y/m = 0.02y$ ,  $qB_z/m = 1 + 0.02z$ ,  $\mathbf{v}(0) = 1.0\hat{\mathbf{y}} + 0.1\hat{\mathbf{z}}$   $\mathbf{r}(0) = 1.0\hat{\mathbf{x}}$ . Η ολοκλήρωση γίνεται με 10000 βήματα από  $t_0 = 0$  έως  $t_f = 500$ .



Σχήμα 4.11: Τροχιά φορτισμένου σωματιδίου σε στατικό μαγνητικό πεδίο  $\mathbf{B} = B_y \hat{\mathbf{y}} + B_z \hat{\mathbf{z}}$  με  $qB_y/m = 0.08z$ ,  $qB_z/m = 1.4 + 0.08y$ ,  $\mathbf{v}(0) = 1.0\hat{\mathbf{y}} + 0.1\hat{\mathbf{z}}$   $\mathbf{r}(0) = 1.0\hat{\mathbf{x}}$ . Η ολοκλήρωση γίνεται με 40000 βήματα από  $t_0 = 0$  έως  $t_f = 3000$ .

## 4.4 Σχετικιστική κίνηση

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε τις τροχιές φορτισμένων σωματιδίων μέσα σε μαγνητικό πεδίο, όταν όμως η ταχύτητά τους γίνεται συγκρίσιμη με την ταχύτητα του φωτός, και συνεπώς πρέπει να τροποποιήσουμε τις εξισώσεις του Νεύτωνα βάσει της *Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας (ΕΘΣ)* εισάγοντας τον παράγοντα Lorentz. (βλέπε και [1])

Για λόγους απλοποίησης του προβλήματος και του κώδικα, θεωρούμε την ταχύτητα του φωτός  $c$  ίση με τη μονάδα. Οι εξισώσεις κίνησης του σωματιδίου μάζας ηρεμίας  $m_0 > 0$ , μάζας  $m = m_0/\sqrt{1-v^2}$ , ορμής  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  και ενέργειας  $E = m = \sqrt{p^2 + m_0^2}$  μέσα σε δυναμικό πεδίο  $\mathbf{F}$  δίνονται από τις σχέσεις:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \quad (4.13)$$

Για να τις γράψουμε ως σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης χρησιμοποιούμε τις σχέσεις:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{m} = \frac{\mathbf{p}}{E} = \frac{\mathbf{p}}{\sqrt{p^2 + m_0^2}} \quad (4.14)$$

Οι οποίες μας δίνουν:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p_x/m_0}{\sqrt{1 + (p/m_0)^2}} \quad (4.15)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{p_y/m_0}{\sqrt{1 + (p/m_0)^2}} \quad (4.16)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{p_z/m_0}{\sqrt{1 + (p/m_0)^2}} \quad (4.17)$$

$$\frac{d(p_x/m_0)}{dt} = \frac{F_x}{m_0} \quad (4.18)$$

$$\frac{d(p_y/m_0)}{dt} = \frac{F_y}{m_0} \quad (4.19)$$

$$\frac{d(p_z/m_0)}{dt} = \frac{F_z}{m_0} \quad (4.20)$$

Οι σχέσεις αυτές αποτελούν ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης για τις συναρτήσεις  $x(t), y(t), z(t), (p_x/m_0)(t), (p_y/m_0)(t), (p_z/m_0)(t)$ . Για την επίλυση με τη μέθοδο Runge - Kutta προσαρμοσμένου βήματος 4ης τάξης χρειαζόμαστε τις αρχικές συνθήκες:  $x(0), y(0), z(0), (p_x/m_0)(0), (p_y/m_0)(0), (p_z/m_0)(0)$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$$p_x = \frac{v_x}{\sqrt{1-v^2}} \quad v_x = \frac{(p_x/m_0)}{\sqrt{1+(p/m_0)^2}} \quad (4.21)$$

$$p_y = \frac{v_y}{\sqrt{1-v^2}} \quad v_y = \frac{(p_y/m_0)}{\sqrt{1+(p/m_0)^2}} \quad (4.22)$$

$$p_z = \frac{v_z}{\sqrt{1-v^2}} \quad v_z = \frac{(p_z/m_0)}{\sqrt{1+(p/m_0)^2}} \quad (4.23)$$

μπορούμε να δώσουμε εναλλακτικά ως αρχικές συνθήκες τις θέσεις και τις ταχύτητες για  $t = 0$ .

Για τον προγραμματισμό του ανωτέρω προβλήματος χρειάζεται να μεταβάλλουμε ελαφρά τον κώδικα της Fortran, δίνοντας τις νέες σχέσεις ταχυτήτων και ορμών. Οι κώδικες **sr.f**, **sr\_B.f** δίνονται στο παράρτημα Β.

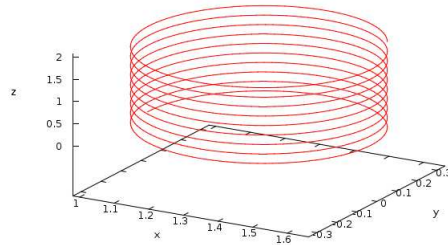
#### 4.4.1 Κίνηση σχετικιστικού φορτισμένου σωματιδίου σε Στατικό Ηλεκτρικό και Μαγνητικό Πεδίο

Αφού είδαμε το πώς αλλάζουν οι εξισώσεις κίνησης όταν περνάμε στη σχετικιστική περιοχή ταχυτήτων, η πρώτη μας απόπειρα είναι να μοντελοποιήσουμε την τροχιά ενός σχετικιστικού φορτισμένου σωματιδίου μέσα σε στατικό μαγνητικό πεδίο. Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να επιδείξουμε και στον σχετικιστικό ορισμό της κινητικής ενέργειας:

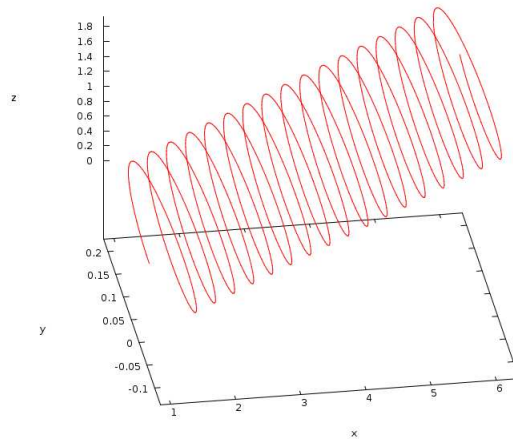
$$T = \left( \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} - 1 \right) m_0 = \left( \sqrt{1+(p/m_0)^2} - 1 \right) m_0 \quad (4.24)$$

Στα σχήματα που ακολουθούν παρατηρούμε (α) την κυκλοτρονική και μεταφορική κίνηση του φορτισμένου σωματιδίου, όπως αναμέναμε. Ιδιαίτερα προσέχουμε τις διαφορετικές κλίμακες στους άξονες. (β) Την ολίσθηση  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ :





Σχήμα 4.12: Τροχιά φορτισμένου σωματιδίου σε στατικό μαγνητικό πεδίο  $\mathbf{B} = B_z \hat{\mathbf{z}}$  με  $qB_z/m_0 = 10.0$ ,  $\mathbf{v}(0) = 0.95\hat{\mathbf{y}} + 0.10\hat{\mathbf{z}}$ ,  $\mathbf{r}(0) = 1.0\hat{\mathbf{x}}$ . Η ολοκλήρωση γίνεται με 1000 βήματα από  $t_0 = 0$  έως  $t_f = 20$ .

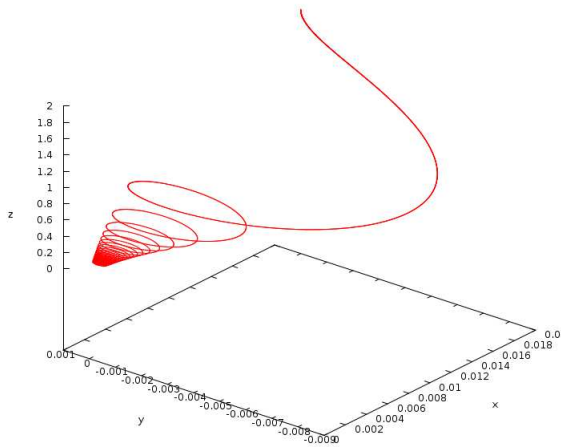


Σχήμα 4.13: Τροχιά φορτισμένου σωματιδίου σε στατικό μαγνητικό πεδίο  $\mathbf{B} = B_z \hat{\mathbf{z}}$  και στατικού ηλεκτρικού πεδίου  $\mathbf{E} = E_y \hat{\mathbf{y}}$  με  $qB_z/m_0 = 10.0$ ,  $q\mathbf{E}/m_0 = 5.0\hat{\mathbf{y}}$ ,  $\mathbf{v}(0) = 0.95\hat{\mathbf{y}} + 0.10\hat{\mathbf{z}}$ ,  $\mathbf{r}(0) = 1.0\hat{\mathbf{x}}$ . Η ολοκλήρωση γίνεται με 1000 βήματα από  $t_0 = 0$  έως  $t_f = 20$ .

#### 4.4.2 Κίνηση σε πεδίο μαγνητικού διπόλου

Χρησιμοποιούμε τώρα έναν νέο κώδικα, ο οποίος μοντελοποιεί την κίνηση σχετικιστικών φορτισμένων σωματιδίων στο μαγνητικό πεδίο του διπόλου, στο οποίο αναφερθήκαμε στην ενότητα 3.3.1. Με αυτόν τον τρόπο μοντελοποιείται η ακτινοβολία *Van Allen* (παγιδευμένα σωματίδια στη μαγνητόσφαιρα της Γης, η οποία έχει διπολική μορφή).

Ο κώδικας `sr_Bd.f` απλώς έχει ενσωματωμένες τις εξισώσεις που μας δίνουν το μαγνητικό πεδίο του διπόλου, και παρατίθεται στο παράρτημα Β.



Σχήμα 4.14: Τροχιά σχετικιστικού φορτισμένου σωματιδίου σε μαγνητικό πεδίο διπόλου με  $B_0 = 1000$ ,  $\mathbf{v} = -0.99999\hat{\mathbf{z}}$ ,  $\mathbf{r} = 0.02\hat{\mathbf{x}} + 2.00\hat{\mathbf{z}}$ . Η ολοκλήρωση γίνεται με 10000 βήματα από  $t_0 = 0$  έως  $t_f = 5$ . Παρατηρούμε τις πολύ λεπτές σπείρες που διαγράφουν τα φορτισμένα σωματίδια.

## 4.5 Μη συμμετρικές κατανομές ρεύματος - Χαοτικά μαγνητικά πεδία

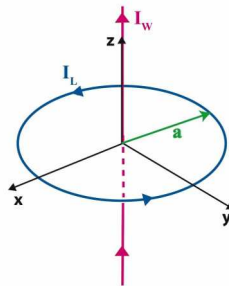
Η πιο πολύπλοκη μαγνητική τοπολογία που θα μελετήσουμε είναι αυτή που προκύπτει από την υπέρθεση δύο επιμέρους μαγνητικών πεδίων:

- Αυτού που επάγεται από τον επίπεδο ρευματοφόρο βρόχο  $I_L$
- Αυτού που επάγεται από τον ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό  $I_W$

Θεωρούμε λοιπόν μη συμμετρικά, μη γραμμικά στατικά μαγνητικά πεδία σε 3 διαστάσεις, επαγόμενα από ηλεκτρικά ρεύματα όπως αυτά που αναφέραμε. Θα δείξουμε ότι η κίνηση ενός φορτισμένου σωματιδίου σε ένα τριδιάστατο χαοτικό μαγνητικό πεδίο, δεν είναι απαραίτητα χαοτική, οπότε αποφεύγεται η διάχυση εκτός της διάταξης μαγνητικής συγκράτησης (“cross-field transport”) - και αυτή είναι η κεντρική ιδέα πίσω από την ελίκωση των μαγνητικών γραμμών στο Tokamak, όπως έχουμε ήδη επισημάνει.

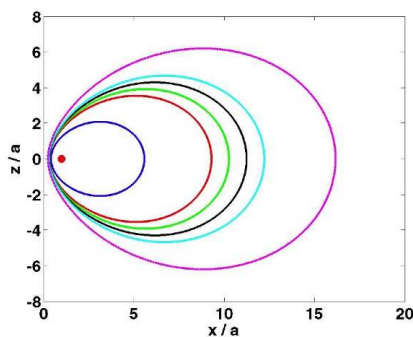
Ο κώδικας για την πλήρη μελέτη του προβλήματος είναι σε Fortran, χρησιμοποιεί βιβλιοθήκες IMSL, και υλοποιεί μεθόδους συμπλεκτικής ολοκλήρωσης για την επίλυση των εξισώσεων κίνησης στις πολύπλοκες αυτές τοπολογίες. Για τους σκοπούς αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι μια ευγενική προσφορά του Dr. Abhay Ram. (Plasma Science and Fusion Center, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA - USA)

Τόσο οι εξισώσεις που δίνουν το συνολικό μαγνητικό πεδίο, όσο και οι εξισώσεις κίνησης φορτισμένου σωματιδίου σε αυτό δίνονται στην ενότητα 3.4. Η μαγνητική γεωμετρία προκύπτει από την εξής υπέρθεση ρευματοφόρων αγωγών:



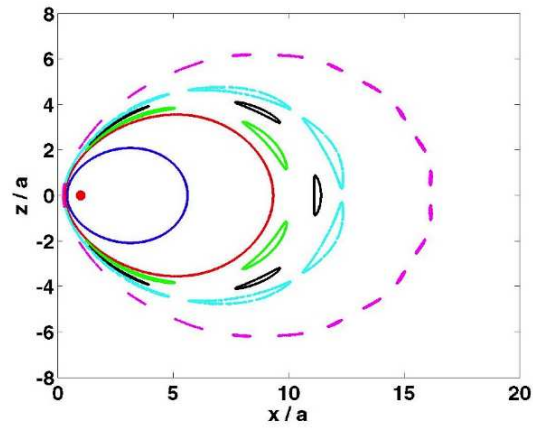
Σχήμα 4.15: Υπέρθεση  $I_L, I_W$  ( $I_L/I_W = 5$ )

Οι αποστάσεις είναι κανονικοποιημένες ως προς την ακτίνα  $a$  του βρόχου. Η επόμενη εικόνα δείχνει την τομή *Poincaré* για τη μαγνητική ροή στο επίπεδο  $x - z$ , δηλαδή η απεικόνιση της τροχιάς του φορτισμένου σωματιδίου στο χώρο των φάσεων (βλέπε ενότητα 2.2.2 και εξής). Παρατηρούμε ότι οι επιφάνειες μαγνητικής ροής προσομοιάζουν με αυτές ενός μαγνητικού διπόλου:

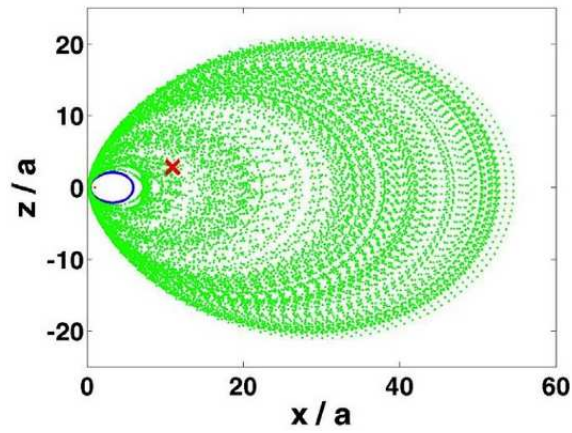


Σχήμα 4.16: Τομή Poincaré για τη συμμετρική τοπολογία

Εαν η συμμετρία στη μαγνητική τοπολογία διαταραχθεί έστω και ελάχιστα, μετακινώντας το σημείο τομής του ευθύγραμμου αγωγού με το επίπεδο του κυκλικού βρόχου κατά  $\Delta r/a = 0.001$  η εικόνα για την τομή Poincaré αλλάζει. Ο ευθύγραμμος αγωγός είναι ακόμη παράλληλος στον  $z$  άξονα, και οι αρχικές συνθήκες για το μαγνητικό πεδίο είναι οι ίδιες με την αμέσως προηγούμενη περίπτωση. Από την εικόνα βλέπουμε ότι ενώ οι εσωτερικές επιφάνειες της μαγνητικής ροής μένουν ίδιες, στο εξωτερικό αρχίζουν να σχηματίζονται *μαγνητικές νησίδες*, το μέγεθος των οποίων αυξάνεται καθώς απομακρυνόμαστε από το ρευματοφόρο βρόχο. Πλέον οι δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου δεν είναι ‘περιορισμένες’ σε μια επιφάνεια, αλλά καταλαμβάνουν πεπερασμένο χώρο στις τρεις διαστάσεις. Αντίστοιχα, όπως φαίνεται σε επόμενο σχήμα, αν μετακινήσουμε περισσότερο τον ευθύγραμμο αγωγό σε σχέση με το κέντρο του βρόχου, διαταράσσοντας ακόμη περισσότερο τη συμμετρία ( $\Delta r/a = 0.01$ ) βλέπουμε ότι αν και οι εσωτερικές μαγνητικές γραμμές διατηρούνται, το μαγνητικό πεδίο καθώς απομακρυνόμαστε από το κέντρο γίνεται *χαοτικό*.

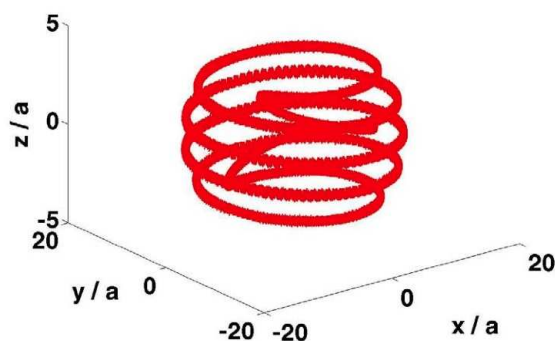


Σχήμα 4.17: Υπέρθυση  $I_L, I_W$  - μη συμμετρική περίπτωση 1 ( $\Delta r/\alpha = 0.001$ )



Σχήμα 4.18: Υπέρθυση  $I_L, I_W$  - μη συμμετρική περίπτωση 2 ( $\Delta r/\alpha = 0.01$ )

Επιλέγουμε ένα σωματίδιο που κινείται στη χαοτική περιοχή της δεύτερης μη συμμετρικής περίπτωσης, και συγκεκριμένα στο σημείο που έχουμε μαρκάρει στο ανωτέρω σχήμα, για να επιλύσουμε τις εξισώσεις κίνησής του και να δούμε την τροχιά του στις τρεις διαστάσεις. Είναι εμφανές ότι η τροχιά του είναι περιοδική:



Σχήμα 4.19: Περιοδική τροχιά φορτισμένου σωματιδίου που κινείται σε χαοτική περιοχή του μαγνητικού πεδίου

Αυτή η εργασία παρουσιάστηκε από τον Dr. Ram στο 35ο EPS - Plasma Physics Conference στην Κρήτη το 2008. ([22])

Υπό άλλες συνθήκες αποδεικνύεται ότι φορτισμένα σωματίδια που κινούνται σε χαοτικά μαγνητικά πεδία υφίστανται φαινόμενα μεταφοράς και διάχυσης, κάτι το οποίο έχει μελετηθεί κυρίως για τη διάχυση της κοσμικής ακτινοβολίας στα διαστρικά και διαπλανητικά μαγνητικά πεδία, ενώ έχει σημαντικές εφαρμογές φυσικά και στη μαγνητική συγκράτηση του θερμοπυρηνικού πλάσματος.



# Κεφάλαιο 5

## Συμπεράσματα

Στη διπλωματική αυτή εργασία δείξαμε ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα θεμέλια της Φυσικής, δηλαδή την Κλασική Μηχανική και τον Ηλεκτρομαγνητισμό για να εξάγουμε χρήσιμα συμπεράσματα για τη δυναμική φορτισμένων σωματιδίων σε διάφορες χαρακτηριστικές μαγνητικές γεωμετρίες. Έχοντας ως αφετηρία τη μελέτη της περιστροφικής κίνησης ενός φορτισμένου σωματιδίου κατά μήκος των μαγνητικών γραμμών ομογενούς στατικού πεδίου, περιγράψαμε διάφορες ολισθήσεις που παρατηρούνται λόγω εξωτερικών ηλεκτρικών πεδίων ή/και γεωμετρικού χαρακτήρα ανομοιογενειών και επισημάνθηκαν οι περιοδικές κινήσεις φορτισμένων σωματιδίων σε μη γραμμικά, χαοτικά μαγνητικά πεδία.

Απαραίτητο εργαλείο για κάθε βήμα της μελέτης είναι τόσο η νευτώνεια δυναμική, αλλά και η μηχανική Lagrange - Hamilton, η οποία εκμεταλλεύεται τις χωρικές συμμετρίες για να αναδεικνύει διατηρούμενες ποσότητες, σταθερές της κίνησης όπως τη στροφορμή και την ολική ενέργεια. Δεδομένου ότι η χαμιλτονιανή δυναμική βασίζεται σε ενέργειες και δυναμικά, καθίσταται ευχερέστερη η μελέτη της κίνησης σε πιο πολύπλοκες τοπολογίες που χαρακτηρίζονται από καμπυλόγραμμες συμμετρίες (κυλινδρικές, σφαιρικές, τορσοειδείς κλπ), πολλώ δε μάλλον από τη στιγμή που έχει γενικότερη ισχύ όταν η νευτώνεια προσέγγιση της μελέτης του κέντρου περιστροφής παύει να ισχύει, όπως είδαμε στο κεφάλαιο 2. Η Χαμιλτονιανή συνάρτηση περιέχει όλη την πληροφορία για την τοπολογία του μαγνητικού πεδίου, και όπως ακροθιγώς επισημάνθηκε στο Κεφάλαιο 4, η μελέτη μπορεί εύκολα να επεκταθεί και για σχετικιστικά σωματίδια. Εισάγοντας σε επόμενο στάδιο την Κανονική Θεωρία Διαταραχών και τη μελέτη της δυναμικής των φορτίων με χρήση των μεταβλητών Δράσης - Γωνίας, οι δυνατότητες γίνονται απεριόριστες. Έχοντας ασχοληθεί κανείς με την κίνηση μεμονωμένων φορτισμένων σωματιδίων σε ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία, μπορεί να επεκταθεί τόσο στη μακροσκοπική θεώρηση του πλάσματος μέσω



της Μαγνητοϋδροδυναμικής, όσο και στο στατιστικό μοντέλο της Κινητικής Θεωρίας, καθώς και να μελετήσει μεταξύ άλλων τη διάδοση πολλών ειδών ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας μέσα σε πλάσμα, τις αστάθειες και τα μη γραμμικά - χασοτικά φαινόμενα που παρατηρούνται.

Η Φυσική Πλάσματος είναι ένα ευρύτατο και πολυπεδιακό αντικείμενο, και αυτό είναι που την κάνει και τόσο συναρπαστική. Η παγκόσμια επιστημονική κοινότητα του πλάσματος ασχολείται από τώρα και στο εξής με την υλοποίηση του Διεθνούς Θερμοπυρηνικού Πειραματικού Αντιδραστήρα ITER, με σκοπό να αποδειχθεί ότι είναι εφικτή η παραγωγή καθαρής ενέργειας στη Γη όπως και στον Ήλιο, μέσω αντιδράσεων Ελεγχόμενης Θερμοπυρηνικής Σύντηξης. Για να πραγματοποιηθεί κάποια στιγμή ο μεγάλος στόχος της Σύντηξης στο Εργαστήριο, πρέπει να διασφαλιστεί η βέλτιστη συγκράτηση του πλάσματος μέσα στον αντιδραστήρα - και αυτό θα επιτευχθεί εγκλωβίζοντας φορτισμένα σωματίδια σε πολύπλοκες μαγνητικές τοπολογίες.

## Παράρτημα Α΄

### Μαγνητικό Πεδίο κυκλικού βρόχου - κυλινδρικές συντεταγμένες

Ο ακριβής υπολογισμός του συνολικού μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται γύρω από το βρόχο ρεύματος είναι δύσκολος, εφόσον περιλαμβάνει τον αριθμητικό υπολογισμό των πλήρων ελλειπτικών ολοκληρωμάτων 1ου και 2ου είδους,  $K(k)$  και  $E(k)$  αντίστοιχα. Ας ονομάσουμε  $z$  τον άξονα που περνάει **κάθετα** από το κέντρο του δακτυλίου ακτίνας  $a$  που διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα στην παραπάνω εικόνα. Ο υπολογισμός του μαγνητικού πεδίου στον άξονα  $z$  είναι τετριμμένη διαδικασία, αφού εξαντλείται σε μια απλή εφαρμογή του νόμου των Biot - Savart της μαγνητοστατικής (υποθέτουμε ότι είμαστε στο κενό):

$$d\mathbf{B}_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

όπου:

$I$  είναι το ρεύμα,  $dl$  είναι το στοιχείο του 'ρευματοφόρου αγωγού' με διεύθυνση και φορά αυτή της κίνησης του ηλεκτρικού ρεύματος,  $d\mathbf{B}_z$  το στοιχειώδες μαγνητικό πεδίο στον άξονα  $z$ , κάθετο στο επίπεδο του δακτυλίου, το οποίο δημιουργείται λόγω του ρεύματος που διαρρέει το  $dl$ ,  $\mu_0$  είναι η μαγνητική σταθερά,  $\hat{\mathbf{r}}$  το μοναδιαίο διάνυσμα της απόστασης μεταξύ του στοιχείου του ρευματοφόρου αγωγού και του άξονα στον οποίο υπολογίζεται το μαγνητικό πεδίο (τον  $z$  στην περίπτωσή μας) και  $r$  η απόσταση κατά μέτρο. Η προσέγγιση των Biot - Savart είναι απόλυτα σωστή αφού στην περίπτωσή μας δεν έχουμε κατόυσιαν ρευματοφόρο αγωγό με φυσικές διαστάσεις, αλλά μόνο ένα βρόχο ηλεκτρικού ρεύματος.

Το μαγνητικό πεδίο κατά μήκος του άξονα  $z$  λόγω του κυκλικού ρεύματος

υπολογίζεται τώρα από μια απλή ολοκλήρωση πάνω σε όλο το δακτύλιο. Έτσι, για κάθε σημείο  $z$ , το μαγνητικό πεδίο πάνω στον άξονα θα είναι κατά μέτρο:

$$dB_z = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi \cdot r^2} \cos \vartheta = \frac{\mu_0 I dl a}{4\pi \cdot r^2} \Rightarrow B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi a^2 I}{2 \cdot r^3}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi a^2 I}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 a^2 I}{2 \cdot (a^2 + z^2)^{3/2}}$$

αφού προφανώς  $\int dl = 2\pi a$

Πάνω στο επίπεδο  $x - y$  θα έχουμε  $z = 0$  και η παραπάνω σχέση απλοποιείται και μας δίνει το μέτρο του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο του δακτυλίου:  $B_{0z} = \mu_0 I / 2a$

Άλλη μια ειδική περίπτωση θα έχουμε για  $z \gg 0$ , κατά την οποία το μέτρο του μαγνητικού πεδίου για αυτή την απόσταση θα είναι  $B_z = \frac{\mu_0 I a^2}{2z^3}$ . Αυτή η έκφραση είναι ανάλογη του μέτρου του αξονικού μαγνητικού πεδίου που οφείλεται σε μαγνητικό δίπολο.

Προχωράμε τώρα στη μελέτη του μαγνητικού πεδίου εκτός του άξονα  $z$ , παντού αλλού στο χώρο. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, οι εκφράσεις που πήραμε από το νόμο των Biot - Savart πριν είναι υποπερίπτωση των γενικότερων εκφράσεων που θα εξάγουμε.

Εδώ θα χρειαστούμε τα πλήρη ελλειπτικά ολοκληρώματα πρώτου και δεύτερου είδους:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{da}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 a}} \text{ και } E(k) = \int_0^{\pi/2} da \sqrt{1 - k^2 \sin^2 a} \text{ αντίστοιχα.}$$

Αρχικά θα πρέπει να υπολογιστεί το μαγνητικό διανυσματικό δυναμικό  $\mathbf{A}$ , και στη συνέχεια μέσω του στροβιλισμού του θα βρεθεί το μαγνητικό πεδίο.

Από τις εκφράσεις των ελλειπτικών ολοκληρωμάτων που γράψαμε είναι προφανές ότι ισχύει

$$K(0) = E(0) = \int_0^{\pi/2} da = \frac{\pi}{2}$$

Η παράγωγος του  $K$  θα είναι:

$$\frac{dK}{dk} = \int_0^{\pi/2} \frac{k \sin^2 a}{(1 - k^2 \sin^2 a)^{3/2}} da$$

Εφ'όσον:

$$\frac{k \sin^2 a}{(1 - k^2 \sin^2 a)^{3/2}} = \frac{1}{k (1 - k^2 \sin^2 a)^{3/2}} - \frac{1}{k \sqrt{1 - k^2 \sin^2 a}}$$

η προηγούμενη σχέση μπορεί να γραφεί ως:

$$\frac{dK}{dk} = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{k (1 - k^2 \sin^2 a)^{3/2}} da - \int_0^{\pi/2} \frac{1}{k \sqrt{1 - k^2 \sin^2 a}} da$$

όπου το δεύτερο ολοκλήρωμα ισούται προφανώς με  $K/k$ . Από σύγκριση δυναμοσειρών επίσης προκύπτει ότι:

$$E(k) = (1 - k^2) \int_0^{\pi/2} \frac{da}{(1 - k^2 \sin^2 a)^{3/2}}$$

οπότε τελικά μπορούμε να γράψουμε τη σχέση της παραγώγου του  $K$  ως:

$$\frac{dK}{dk} = \frac{E}{k(1 - k)^2} - \frac{K}{k}$$

Με αντίστοιχη μέθοδο καταλήγουμε και στην εξής έκφραση για την παράγωγο του  $E$ :

$$\frac{dE}{dk} = \frac{E}{k} - \frac{K}{k}$$

Με δεδομένα αυτά τα εργαλεία, θα προχωρήσουμε τώρα στην εξαγωγή της εξίσωσης του μαγνητικού πεδίου που οφείλεται στην ύπαρξη του κυκλικού βρόχου ρεύματος (current loop). Θα ξεκινήσουμε βρίσκοντας το διανυσματικό δυναμικό  $\mathbf{A}$  από τη σχέση

$$A = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{ds}{R}$$

και στη συνέχεια θα εξάγουμε το μαγνητικό πεδίο από το στροβιλισμό του δυναμικού:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Η διαδικασία είναι ιδιαίτερα επώδυνη, τα συμπεράσματα στα οποία καταλήγουμε όμως είναι πολύ χρήσιμα και απλά στη γενικότητά τους. Κρατάμε από εδώ επίσης μια βασική ιδιότητα των σωληνοειδών πεδίων, όπως το  $\mathbf{B}$ : μπορούν να αναλυθούν σε μία πολοειδή και μία τοροειδή συνιστώσα.

Έστω  $a$  η ακτίνα του κυκλικού βρόχου, το κέντρο του οποίου βρίσκεται στον άξονα  $z$ . Ο βρόχος βρίσκεται σε επίπεδο παράλληλο του  $xy$ , έστω σε απόσταση  $h$  από τον άξονα  $x$ . Θα βρούμε το  $A$  σε ένα τυχαίο σημείο  $P$  του  $xz$  επιπέδου με συντεταγμένες  $(r, 0, z)$ . Αν  $\phi$  είναι η γωνία μεταξύ του  $x$  άξονα και δοθέντος σημείου στον κυκλικό βρόχο, οι συντεταγμένες αυτού του τυχόντος σημείου είναι  $(a \cos \phi, a \sin \phi, h)$ . Έτσι, η απόσταση μεταξύ του  $P$  και του τυχόντος σημείου στο βρόχο θα είναι:

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{(r - a \cos \phi)^2 + a^2 \sin^2 \phi + (z - h)^2} \\ &= \sqrt{r^2 - 2ar \cos \phi + a^2 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + (z - h)^2} \\ &= \sqrt{r^2 + a^2 + (z - h)^2 - 2ar \cos \phi} \end{aligned}$$

Εφ' όσον  $ds = -a \sin \phi d\phi \hat{\mathbf{x}} + a \cos \phi d\phi \hat{\mathbf{y}}$ , η αρχική σχέση που γράψαμε για το διανυσματικό δυναμικό μετασχηματίζεται στην:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-a \sin \phi d\phi}{\sqrt{r^2 + a^2 + (z - h)^2 - 2ar \cos \phi}} \hat{\mathbf{x}} + \\ &+ \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a \cos \phi d\phi}{\sqrt{r^2 + a^2 + (z - h)^2 - 2ar \cos \phi}} \hat{\mathbf{y}} \end{aligned}$$

Για κάθε  $\phi$  η συνεισφορά στο  $A$  στη διεύθυνση  $x$  αλληλοεξουδετερώνεται με τη συνεισφορά του  $-\phi$ . Για αυτό το λόγο δεν υπάρχει  $x$  συνιστώσα στο  $A$  και ο πρώτος όρος στην έκφραση που γράψαμε μηδενίζεται. Επιπλέον, η συνεισφορά στη διεύθυνση  $y$  από το  $\phi$  ισούται με αυτή από το  $-\phi$ , επομένως αντί να ολοκληρώνουμε από 0 ως  $2\pi$ , μπορούμε να ολοκληρώσουμε την  $y$  συνιστώσα από 0 έως  $\pi$  και να πολλαπλασιάσουμε με το 2. Τέλος, από τη γεωμετρία του προβλήματος προκύπτει ότι μας εξυπηρετεί να μεταφράσουμε σε κυλινδρικές συντεταγμένες, οπότε το  $y$  γίνεται  $\phi$  και το διανυσματικό δυναμικό γράφεται:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \phi d\phi}{\sqrt{r^2 + a^2 + (z - h)^2 - 2ar \cos \phi}} \hat{\phi}$$

Θα εκτελέσουμε τώρα διάφορες πράξεις και μετασχηματισμούς, ώστε να ξαναγράψουμε το διανυσματικό δυναμικό σε μορφή τέτοια, ώστε να μπορεί να υπολογιστεί αριθμητικά με τη χρήση των ελλειπτικών ολοκληρωμάτων  $K(k)$  και  $E(k)$ . Ο παρονομαστής μέσα στο ολοκλήρωμα μπορεί να ξαναγραφεί ως:

$$\sqrt{r^2 + a^2 + (z - h)^2 - 2ar \cos \phi} = \sqrt{(r + a)^2 + z^2 - 4ar \left( \frac{1 + \cos \phi}{2} \right)}$$

Έστω  $\phi = \pi - 2\alpha \Rightarrow \cos \phi = -\cos 2\alpha$ , και επειδή  $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$  θα ισχύει  $((1 + \cos \phi)/2) = \sin^2 \alpha$ . Με αυτή την αντικατάσταση και παραγοντοποιώντας κατάλληλα το  $(r + a)^2 + (z - h)^2$ , η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$\sqrt{(r + a)^2 + (z - h)^2} \sqrt{1 - \frac{4ar}{(r + a)^2 + (z - h)^2} \sin^2 \alpha}$$

Ορίζουμε

$$k = \sqrt{\frac{4ar}{(r + a)^2 + (z - h)^2}}$$

οπότε τελικά ο παρονομαστής γράφεται:

$$\frac{2\sqrt{ar}}{k} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}$$

Ο αριθμητής μπορεί να γραφεί ως  $-(1 - 2\sin^2 \alpha)$

Λαμβάνοντας υπόψιν και το γεγονός ότι  $d\phi = -2da$ , λαμβάνουμε την εξίσωση για το διανυσματικό δυναμικό :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \int_{\pi/2}^0 \frac{2(1 - 2\sin^2 \alpha) da}{\frac{2\sqrt{ar}}{k} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} \hat{\phi} = \\ &= \frac{\mu_0 I k}{2/\pi} \sqrt{\frac{a}{r}} \left[ \int_0^{\pi/2} \frac{-da}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} - \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} + \int_0^{\pi/2} \frac{2 \sin^2 \alpha da}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} \right] \hat{\phi} \end{aligned}$$

Ο πρώτος όρος μέσα στην αγκύλη είναι το  $K(k)$ . Για το δεύτερο όρο παρατηρούμε ότι

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} = \frac{1}{k^2} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} - \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} \right)$$

Για αυτό το λόγο ο δεύτερος όρος γράφεται:

$$\frac{2}{k^2} \left[ \int_0^{\pi/2} \frac{da}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} - \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} da \right]$$

και από τους ορισμούς των ελλειπτικών ολοκληρωμάτων γράφεται:

$$\frac{2}{k^2} (K(k) - E(k))$$

Καταλήγουμε στην πολύ κομψότερη έκφραση για το διανυσματικό δυναμικό:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \frac{\mu_0 I k}{2\pi} \sqrt{\frac{a}{r}} \left[ \frac{2}{k^2} (K(k) - E(k)) - K(k) \right] \hat{\phi} \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{A} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sqrt{\frac{a}{r}} \left[ \left( \frac{2}{k} - k \right) K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right] \hat{\phi}\end{aligned}$$

Όπως αναφέραμε στην αρχή της ανάλυσης, ο στροβιλισμός του διανυσματικού δυναμικού θα μας δώσει το  $\mathbf{B}$ .

Γενικά για μια διανυσματική συνάρτηση σε κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων

$$\mathbf{v} = v_r \hat{\mathbf{r}} + v_\phi \hat{\phi} + v_z \hat{\mathbf{z}}$$

Ο στροβιλισμός θα δίνεται από:

$$\nabla \times \mathbf{v} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{r}} + \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \hat{\phi} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} r v_\phi - \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right) \hat{\mathbf{z}}$$

Η συνάρτηση του διανυσματικού δυναμικού,  $A$ , έχει μόνο μια  $\phi$  συνιστώσα, οπότε:

$$\nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\partial A}{\partial z} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r A \hat{\mathbf{z}}$$

Αρχικά βρίσκουμε τις παραγώγους του  $k$  ως προς  $z$  και  $r$ .

$$\begin{aligned}\frac{\partial k}{\partial z} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(r+a)^2 + (z-h)^2}{4ar}} \cdot \frac{-8ar(z-h)}{[(r+a)^2 + (z-h)^2]^2} = \\ &= -\frac{k^3(z-h)}{4ar}\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\frac{\partial k}{\partial r} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(r+a)^2 + (z-h)^2}{4ar}} \cdot \frac{4a [(r+a)^2 + (z-h)^2] - 8ar(z-h)}{[(r+a)^2 + (z-h)^2]^2} = \\ &= \frac{k}{2r} - \frac{k^3(r+a)}{4ar}\end{aligned}$$

Εκτελώντας όλες τις αντικαταστάσεις των  $\partial k/\partial r, dK/dk, dE/dk$  και μετά από πράξεις καταλήγουμε στη σχέση για το μαγνητικό πεδίο:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I k}{4\pi\sqrt{ar^3}} \left[ -(z-h) \left( K - \frac{2-k^2}{2(1-k^2)} E \right) \hat{\mathbf{r}} + r \left( K + \frac{k^2(r+a) - 2r}{2r(1-k^2)} E \right) \hat{\mathbf{z}} \right]$$

Μετά από πράξεις προκύπτει ότι αν θέσουμε  $r = 0$  θα έχουμε  $B_r = 0$  και για το  $B_z$  θα εξάγουμε την ίδια σχέση με αυτή που μας δίνει ο νόμος των Biot - Savart, την οποία και βρήκαμε στην αρχή αυτής της ανάλυσης :

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I a^2}{2 [a^2 + (z-h)^2]^{3/2}} \hat{\mathbf{z}}$$

όπου  $R = \sqrt{a^2 + (z-h)^2}$ .





# Παράρτημα Β'

## Κώδικες στο MATLAB και τη Fortran

### Β'.1 Σχεδίαση Πεδιακών Γραμμών

Για τη γραφική απεικόνιση των μαγνητικών πεδίων χρησιμοποιήσαμε σε πρώτη φάση το περιβάλλον αριθμητικού προγραμματισμού MATLAB. Παραστήσαμε γραφικά σε δύο διαστάσεις (contour plots) τόσο τα επιμέρους μαγνητικά πεδία  $\mathbf{B}_W$  και  $\mathbf{B}_L$ , όσο και τις σύνθετες εικόνες που προκύπτουν από την υπέρθεση αυτών.

Θα παραθέσουμε τον κώδικα που γράψαμε:

Οι 2 βασικές functions που καλούμε είναι οι `m_field_Bf` και `m_field_loop`, οι οποίες ορίζονται στα αντίστοιχα m-files. Η `m_field_Bf` υπολογίζει το μαγνητικό πεδίο  $\mathbf{B}_W$  που επάγεται λόγω του ευθύγραμμου ρευματοφόρου αγωγού και ονομάζεται έτσι, γιατί το διάνυσμα του πεδίου είναι στη  $\varphi$  διεύθυνση, ενώ η `m_field_loop` υπολογίζει το μαγνητικό πεδίο  $\mathbf{B}_L$  που επάγεται λόγω του κυκλικού βρόχου ρεύματος.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%% m_field_Bf                %%%
%%%                            %%%
%%% Current Wire (z axis)     %%%
%%% Magnetic Field calculation %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
function [B,Bx,By]=m_field_Bf(i,xmin,xmax,ymin,ymax,step)
m0=4*pi*10^-7;
```

```

in1=1;
for x=xmin:step:xmax
    in2=1;
    for y=ymin:step:ymax
        r=sqrt(x^2+y^2);
        if r~=0
            B(in1,in2)=(m0*i)/(2*pi*r);
            Bx(in1,in2)=((-x)*B(in1,in2))/(r);
            By(in1,in2)=(y*B(in1,in2))/(r);
        else
            B(in1,in2)=0;
            Bx(in1,in2)=0;
            By(in1,in2)=0;
        end
        in2=in2+1;
    end
    in1=in1+1;
end

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% m_field_loop                %%
%%                               %%
%% Current Loop                %%
%% Magnetic Field calculation  %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

function [Bz,Br]=m_field_loop(i1,a,z0,r0,zmin,rmin,zmax,rmax,step)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% [Bz,Br]=m_field_loop(i1,a,z0,r0,zmin,rmin,zmax,rmax)
% Bz - axial comp. of mag. field
% Br - radial comp. of mag. field
% i=coil current;
% a=coil radius;
% r0 - current loop position on xy plane
% z0, y0 - coil coordinate
% zmin,ymin,zmax,ymax - interest domain for magnetic field
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
m0=4*pi*10^-7; %magnetic constant
B0=(i1*m0)/(2*a); %statheros oros
in1=1;
for z=(zmin-z0):step:(zmax-z0)

```

```

in2=1;
for r=(rmin-r0):step:(rmax-r0)
    if (r~=0)
        al=abs(r/a);
        be=abs(z/a);
        ga=(z/r);
        q=((1+al)^2+be^2);
        k=sqrt(4*al/q);
        [K,E] = ellipke(k^2); %elliptic integrals
        Bz(in1,in2)=B0*(1/(pi*sqrt(q)))...
            *(E*(1-al^2-be^2)/(q-4*al)+K);
        Br(in1,in2)=B0*(ga/(pi*sqrt(q)))...
            *(E*(1+al^2+be^2)/(q-4*al)-K);
    else
        Bz(in1,in2)=0;
        Br(in1,in2)=0;
    end
    Z(in1,in2)=z;
    R(in1,in2)=r;
    in2=in2+1;
end
in1=in1+1;
end
s=size(Bz);
for i=2:s(1)-1
    for j=2:s(2)-1
        if (Bz(i,j)==0 & Br(i,j)==0)
            Bz(i,j)=1/6*(Bz(i-1,j-1)+Bz(i-1,j+1)+Bz(i,j-1)...
                +Bz(i,j+1)+Bz(i+1,j-1)+Bz(i+1,j+1));
            Br(i,j)=1/6*(Br(i-1,j-1)+Br(i-1,j+1)+Br(i,j-1)...
                +Br(i,j+1)+Br(i+1,j-1)+Br(i+1,j+1));
        end
    end
end
end
end

```

**Μαγνητικό πεδίο  $\mathbf{B}_W$**  Όπως έχουμε προαναφέρει, η απλούστερη τοπολογία μαγνητικού πεδίου είναι αυτή που προκύπτει εάν έχουμε μόνο ένα κάθετο αξονικό ρεύμα  $I_W$ . Για να την αναπαραστήσουμε στο MATLAB γράψαμε ένα script με όνομα `only_wire.m` το οποίο καλεί την `m_field_Bf` για να υπολογίσει το πεδίο  $\mathbf{B}_W$ , και στη συνέχεια σχεδιάζει το γράφημα στους δύο άξονες  $x$  και

$y$  του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων.

Η  $x$  συνιστώσα του μοναδιαίου  $\hat{\phi}$  διανύσματος είναι  $-(y/r)$  και η  $y$  συνιστώσα είναι  $(x/r)$ . Αντίστοιχα, για τις καρτεσιανές συνιστώσες του  $\mathbf{B}_{W_\phi}$  έχουμε :

- $\mathbf{B}_{W_x} = -(y/r)\mathbf{B}_{W_\phi}$
- $\mathbf{B}_{W_y} = (x/r)\mathbf{B}_{W_\phi}$

Θέτουμε στον κώδικά μας την τιμή της μαγνητικής σταθεράς στο SI ίση με  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$  και μια τυχαία τιμή για το ρεύμα  $I_W = 0.1 \text{ A}$ . Εκτελούμε το script only\_wire.m. το οποίο και παραθέτουμε:

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%
%%% Magnetic Field graph (BW only)   %%%
%%% ONLY CURRENT - CARRYING WIRE    %%%
%%% NO CURRENT LOOP                  %%%
%%%                                   %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all;
clf;
format long e;
i = 0.1; %I_W
xmin = -5; xmax = 5;
ymin = -5; ymax = 5;
step = 0.1;
[B,Bx,By]=m_field_Bf(i,xmin,xmax,ymin,ymax,step); %function call
B=sqrt(Bx.^2+By.^2);
shading flat
colormap(jet)

[Z,R] = meshgrid (xmin:step:xmax,ymin:step:xmax);
contourf(Z,R,B,200);
hold on
quiver(Z,R,Bx,By,'k')
h=streamslice(Z,R,Bx,By);
set(h,'Color','w')
hold off
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

**Μαγνητικό πεδίο  $\mathbf{B}_L$**  Η επόμενη τοπολογία που μελετάμε είναι αυτή που επάγεται από τον κυκλικό βρόχο, ρεύματος  $I_L$ , ο οποίος είναι τοποθετημένος στη θέση  $z = 0$ , δηλαδή πάνω στο  $xy$  ή  $r\varphi$  επίπεδο, αναλόγως με το σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιούμε.

Για να την αναπαραστήσουμε στο MATLAB γράψαμε ένα script με όνομα `only_loop.m` το οποίο καλεί την `m_field_loop` για να υπολογίσει το πεδίο  $\mathbf{B}_L$ , και στη συνέχεια σχεδιάζει το γράφημα στους δύο άξονες  $r$  και  $z$  του κυλινδρικού συστήματος συντεταγμένων.

Όμοια με πριν, θέτουμε στον κώδικά μας την τιμή της μαγνητικής σταθεράς στο SI ίση με  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$  και μια τυχαία τιμή για το ρεύμα  $I_L = 0.1 \text{ A}$ . Εκτελούμε το script `only_loop.m` το οποίο και παραθέτουμε:

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%                               %%%
%%%   Magnetic Field graph (B_L only)   %%%
%%%   ONLY CURRENT LOOP                %%%
%%%   NO CURRENT - CARRYING WIRE       %%%
%%%                               %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all;
clf;
format long e;
i = 0.1; %I_L
a = 1; %loop radius
z0 = 0; %initial z
r0 = 0; %initial r
%%%%%%%% Area of Interest%%%%%%%%
zmin = -2;
zmax = 2;
rmin = -2;
rmax = 2;
%%%%%%%%%%
step = 0.01;
[Bz,Br]=m_field_loop(i,a,z0,r0,zmin,rmin,zmax,rmax,step);
Bz=Bz';
Br=Br';
B=sqrt(Bz.^2+Br.^2);
shading flat
colormap(jet)
```

```

[Z,R] = meshgrid (zmin:step:zmax,rmin:step:rmax);
contourf(Z,R,B,100);
hold on
quiver(Z,R,Bz,Br, 'k')
h=streamslice(Z,R,Bz,Br);
set(h, 'Color', 'w')
hold off
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

**Υπέρθεση Μαγνητικών πεδίων  $B_W$  και  $B_L$**  Το ουσιαστικότερο τμήμα της μέχρι τώρα μελέτης μας είναι αυτό που προκύπτει από την υπέρθεση των ανωτέρω πεδίων. Στην τοπολογία που προκύπτει θα εξετάσουμε στη συνέχεια την κίνηση φορτισμένων σωματιδίων. Γράψαμε στο MATLAB ένα συγκεντρωτικό script με όνομα `superposition.m` το οποίο καλεί τις ανωτέρω functions και επιστρέφει την εικόνα του τελικού μαγνητικού πεδίου που προκύπτει από την υπέρθεση. Μάλιστα, καθώς τρέχουμε τον κώδικα, το MATLAB μας ζητά τις τιμές των ρευμάτων (τόσο του ευθύγραμμου, όσο και του ρευματοφόρου βρόχου), τη θέση του ευθύγραμμου ρεύματος στον  $r$  άξονα, καθώς και τη γωνία  $\theta$  με την οποία τέμνει το  $r\phi$  επίπεδο. Όσον αφορά το κάθετο ρεύμα, έχουμε γράψει επιπλέον το script με όνομα `Bwire.m` μέσα στο οποίο υπολογίζεται η συνεισφορά του ευθύγραμμου ρευματοφόρου αγωγού στο συνολικό μαγνητικό πεδίο, καθώς επίσης και οι τυχούσες έκκεντρες μετακινήσεις ή/και στροφές.

Επιλέξαμε, μετά από δοκιμές, η ένταση του ρεύματος του βρόχου να είναι μία τάξη μεγέθους μεγαλύτερη από αυτή του κάθετου ρεύματος, ώστε να απεικονίζεται εμφανώς η υπέρθεση των δύο μαγνητικών πεδίων. Αυτή η διαφορά έχει να κάνει με τη διαφορετική εξάρτηση της έντασης του μαγνητικού πεδίου από το  $r$  λόγω του καθενός από τα επιμέρους ρεύματα.

Παραθέτουμε στη συνέχεια τον κώδικα για την υπέρθεση των πεδίων, το script που ορίζει την `Bwire`, καθώς και κάποιες εικόνες των τοπολογιών στους άξονες  $r$  και  $z$ .

```

% Magnetic Field graph
% BOTH CURRENT LOOP AND CURRENT CARRYING WIRE
% MANUAL INPUT OF POSITION AND ANGLE OF THE WIRE
% Superposition

clear all;
clf;

```

```

format long e;
i1 = input('revma current loop (se Amperes, 0.1): ');
i2 = input('revma current carrying wire (se Amperes, 0.01): ');
a = 1;
z0 = 0;
r0 = 0;
r0w = input('thesi r grammikou revmatos (metaksy -2 kai 2): ');
theta = input('gwnia klishs (se aktinia): ');
zmin = -2;
zmax = 2;
rmin = -2;
rmax = 2;
step = 0.02;
[Bz1,Br1] = m_field_loop(i1,a,z0,r0,zmin,rmin,zmax,rmax,step);
[Bz2,Br2] = Bwire(i2,a,z0,r0,r0w,zmin,rmin,zmax,rmax,step,theta);
Bz = Bz1+Bz2;
Br = Br1+Br2;
Bz=Bz'; Br=Br';
B=sqrt(Bz.^2+Br.^2);

shading flat
colormap(jet) % graph colours

[Z,R] = meshgrid (zmin:step:zmax,rmin:step:rmax);
contourf(Z,R,B);
hold on
quiver(Z,R,Bz,Br,'k')
h=streamslice(Z,R,Bz,Br);
set(h,'Color','w')
hold off
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%% Current Carrying wire          %%%
%%% Magnetic Field calculation     %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% r0w - position of the wire / r-axis

function [Bz,Br] = Bwire(i2,z0,r0,r0w,zmin,...
    rmin,zmax,rmax,step,theta)

```



```

m0=4*pi*10^-7;

in1=1;
for z=(zmin-z0):step:(zmax-z0)
    in2=1;
    for r=(rmin-r0):step:(rmax-r0)

        if (r~=0)
            Bz(in1,in2)=(i2*m0)/(2*pi*(r-r0w))...
                *sin(theta); % metakinshsh kai strofh
            Br(in1,in2)=(i2*m0)/(2*pi*(r-r0w))...
                *cos(theta); % metakinshsh kai strofh
        else
            Bz(in1,in2)=0;
            Br(in1,in2)=0;
        end
        in2=in2+1;
    end
    in1=in1+1;
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

Στην κλήση της Bwire πρέπει να σημειωθούν οι εκφράσεις που δώσαμε για τις επιμέρους συνιστώσες  $B_r$  και  $B_z$  που προκύπτουν όταν στρίψουμε τον ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό κατά μία γωνία  $\theta$  ως προς το  $r\varphi$  επίπεδο, καθώς και η πρόνοια για την έκκεντρη μετακίνηση του αγωγού στον άξονα  $r$ , όπως αυτή προβλέπεται από την εισαγωγή της μεταβλητής  $r0w$  στον κώδικα.

## B'.2 Κώδικες Fortran - Αριθμητική Ολοκλήρωση Runge - Kutta

Όπως αναφέραμε στο Κεφάλαιο 4, χρησιμοποιήσαμε το ελεύθερο λογισμικό rksuite για την αριθμητική ολοκλήρωση των διαφορικών εξισώσεων της κίνησης φορτισμένου σωματιδίου με τη μέθοδο Runge - Kutta 4ης τάξης. Η σουίτα αυτή έχει έτοιμα shell scripts που καλούν διάφορες ρουτίνες της Fortran, εκτελούν τους αριθμητικούς υπολογισμούς και στη συνέχεια σχεδιάζουν τα γραφήματα των τροχιών στο επίσης ελεύθερο λογισμικό gnuplot. Τα δεδομένα που πρέπει να δώσει ο χρήστης είναι:

- τα  $k$  της Runge - Kutta, τα οποία όπως έχουμε δει αντιστοιχούν στις επιμέρους συνιστώσες των ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων κατά περίπτωση,
- οι αρχικές θέσεις και ταχύτητες των σωματιδίων σε τρεις διαστάσεις
- τα βήματα εκτέλεσης της μεθόδου
- ο αρχικός και τελικός χρόνος

Στη συνέχεια παραθέτουμε τους κώδικες της Fortran που χρησιμοποιήσαμε:

```
C      CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C      Program to solve a 6 ODE system using Runge-Kutta Method
C      Output is written in file rk3.dat
C      CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
      program rk3_solve
      include 'rk3.inc'
      double precision T0,TF,X10,X20,X30,V10,V20,V30
      double precision t,dt,tstep
      integer STEPS
      integer i
      double precision energy
C      Arrays/variables needed by rksuite:
      double precision TOL,THRES(NEQ), WORK(LENWRK), Y(NEQ), YMAX(NEQ),
*      YP(NEQ), YSTART(NEQ),HSTART
      logical ERRASS, MESSAGE
      integer UFLAG
C      .. External Subroutines ..
      EXTERNAL          F, SETUP, STAT, UT
```

```

C      Input:
print *, 'Runge-Kutta Method for 6-ODEs Integration'
print *, 'Enter coupling constants k1,k2,k3,k4:'
read(5,*) k1,k2,k3,k4
print *, 'k1= ',k1,' k2= ',k2,' k3= ',k3,' k4= ',k4
print *, 'Enter STEPS,T0,TF,X10,X20,X30,V10,V20,V30:'
read(5,*) STEPS,T0,TF,X10,X20,X30,V10,V20,V30
print *, 'No. Steps= ',STEPS
print *, 'Time: Initial T0 =',T0,' Final TF=',TF
print *, '          X1(T0)=',X10,' X2(T0)=',X20,' X3(T0)=',X30
print *, '          V1(T0)=',V10,' V2(T0)=',V20,' V3(T0)=',V30

C      Initial Conditions
dt      = (TF-T0)/STEPS
YSTART(1) = X10
YSTART(2) = X20
YSTART(3) = X30
YSTART(4) = V10
YSTART(5) = V20
YSTART(6) = V30

C
C      Set error control parameters.
C
      TOL = 5.0D-6
      do i = 1, NEQ
          THRES(i) = 1.0D-10
      enddo
      MESSAGE = .TRUE.
      ERRASS  = .FALSE.
      HSTART  = 0.0D0

C      Initialization:
      call SETUP(NEQ,T0,YSTART,TF,TOL,THRES,METHOD,'Usual Task',
*           ERRASS,HSTART,WORK,LENWRK,MESSAGE)
      open(unit=11,file='rk3.dat')
      write(11,100) T0,YSTART(1),YSTART(2),YSTART(3),YSTART(4),
*           YSTART(5),YSTART(6),energy(tstep,Y)

C      Calculation:
      do i=1,STEPS
          t = T0 + i*dt

```

```

        call UT(F,t,tstep,Y,YP,YMAX,WORK,UFLAG)
        if(UFLAG.GT.2) goto 60
        write(11,100) tstep,Y(1),Y(2),Y(3),Y(4),Y(5),Y(6),
*          energy(tstep,Y)
        enddo
60    continue
        close(11)
100   format(8E25.15)
        end
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC

```

Αυτός ο κώδικας είναι που εκτελεί την ‘καρδιά’ της μεθόδου αριθμητικής ολοκλήρωσης.

```

C Particle in constant Magnetic and electric field
C q B/m = k1 z    q E/m = k2 x + k3 y + k4 z
  subroutine F(T,Y,YP)
  include 'rk3.inc'
  double precision t
  double precision Y(*),YP(*)
  double precision x1,x2,x3,v1,v2,v3
  x1 = Y(1)
  x2 = Y(2)
  x3 = Y(3)
  v1 = Y(4)
  v2 = Y(5)
  v3 = Y(6)
C Velocities:    dx_i/dt = v_i
  YP(1) = v1
  YP(2) = v2
  YP(3) = v3
C Acceleration: dv_i/dt = a_i
  YP(4) = k2 + k1 * v2
  YP(5) = k3 - k1 * v1
  YP(6) = k4
C   YP(4) = k3 * v1 - k2 * v2
C   YP(5) = k2 * v3 - k4 * v1
C   YP(6) = k3 * v1 - k2 * v2
  end

double precision function energy(T,Y)
include 'rk3.inc'

```

```

double precision t,e
double precision Y(*)
double precision x1,x2,x3,v1,v2,v3
x1 = Y(1)
x2 = Y(2)
x3 = Y(3)
v1 = Y(4)
v2 = Y(5)
v3 = Y(6)
C Kinetic Energy
e = 0.5*(v1*v1+v2*v2+v3*v3)
C Potential Energy
e = e - k2*x1 - k3*x2 - k4*x3
C e = e - k1*x1 - k1*x2 - k1*x3
energy = e
end
CCCCCCCCCCCCCCCCCC

```

Αυτός ο κώδικας μας επιτρέπει να δώσουμε συνιστώσες τόσο μαγνητικού, όσο και ηλεκτρικού πεδίου. Χρησιμοποιήθηκε για να μας δείξει την ελικοειδή κίνηση φορτίου περί στατικού και ομογενούς μαγνητικού πεδίου, καθώς και την ολίσθηση  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ .

```

C Particle in Magnetic field:
C q B_z/m = (k1 + k2 y) q B_y/m= k3 z
subroutine F(T,Y,YP)
include 'rk3.inc'
double precision t
double precision Y(*),YP(*)
double precision x1,x2,x3,v1,v2,v3,x3p
x1 = Y(1)
x2 = Y(2)
x3 = Y(3)
v1 = Y(4)
v2 = Y(5)
v3 = Y(6)
C Velocities: dx_i/dt = v_i
YP(1) = v1
YP(2) = v2
YP(3) = v3
C Acceleration: dv_i/dt = a_i
YP(4) = v2*(k1+k2*x2)-v3*k3*x3

```

```

YP(5) = -v1*(k1+k2*x2)
YP(6) = v1*k3*x3
end

double precision function energy(T,Y)
include 'rk3.inc'
double precision t,e
double precision Y(*)
double precision x1,x2,x3,v1,v2,v3
x1 = Y(1)
x2 = Y(2)
x3 = Y(3)
v1 = Y(4)
v2 = Y(5)
v3 = Y(6)
C Kinetic Energy
e = 0.5*(v1*v1+v2*v2+v3*v3)
energy = e
end
CCCCCCCCCCCCCCCC

C Particle in Magnetic field:
C  $q B_z/m = (k_1 + k_2 z)$   $q B_y/m = -k_2 y$ 
subroutine F(T,Y,YP)
include 'rk3.inc'
double precision t
double precision Y(*),YP(*)
double precision x1,x2,x3,v1,v2,v3,x3p
x1 = Y(1)
x2 = Y(2)
x3 = Y(3)
v1 = Y(4)
v2 = Y(5)
v3 = Y(6)
C Velocities:  $dx_i/dt = v_i$ 
YP(1) = v1
YP(2) = v2
YP(3) = v3
C If  $x_3 > 0$  we add a linear term to B:
x3p = 0.0D0
if(x3.gt.0.0D0) x3p = x3

```

```

C      Acceleration: dv_i/dt = a_i
      YP(4) = v2*(k1+k2*x3)+v3*k2*x2
      YP(5) = -v1*(k1+k2*x3)
      YP(6) = -v1*k2*x2
      end

      double precision function energy(T,Y)
      include 'rk3.inc'
      double precision t,e
      double precision Y(*)
      double precision x1,x2,x3,v1,v2,v3
      x1 = Y(1)
      x2 = Y(2)
      x3 = Y(3)
      v1 = Y(4)
      v2 = Y(5)
      v3 = Y(6)
C      Kinetic Energy
      e = 0.5*(v1*v1+v2*v2+v3*v3)
      energy = e
      end
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCC

```

Οι δύο αυτοί κώδικες δίνουν μαγνητικό πεδίο με χωρική εξάρτηση από τις  $y$  και  $z$  συνιστώσες. Χρησιμοποιήθηκαν για να δώσουν τις τροχιές σε πεδίο με κυλινδρική συμμετρία.

```

C      CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C      Program to solve a 6 ODE system using Runge-Kutta Method
C      Output is written in file sr.dat
C      Interface to be used with relativistic particles.
C      CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
      program sr_solve
      include 'sr.inc'
      double precision T0,TF,X10,X20,X30,V10,V20,V30
      double precision P10,P20,P30
      double precision P1,P2,P3,V1,V2,V3
      double precision t,dt,tstep
      integer STEPS
      integer i
      double precision energy

```

```

C   Arrays/variables needed by rksuite:
      double precision TOL,THRES(NEQ), WORK(LENWRK), Y(NEQ), YMAX(NEQ),
*     YP(NEQ), YSTART(NEQ),HSTART
      logical  ERRASS, MESSAGE
      integer  UFLAG
C   .. External Subroutines ..
      EXTERNAL          F, SETUP, STAT, UT

C   Input:
      print *,'Runge-Kutta Method for 6-ODEs Integration'
      print *,'Special Relativistic Particle:'
      print *,'Enter coupling constants k1,k2,k3,k4:'
      read(5,*) k1,k2,k3,k4
      print *,'k1= ',k1,' k2= ',k2,' k3= ',k3,' k4= ',k4
      print *,'Enter STEPS,T0,TF,X10,X20,X30,V10,V20,V30:'
      read(5,*) STEPS,T0,TF,X10,X20,X30,V10,V20,V30
      call momentum(V10,V20,V30,P10,P20,P30)
      print *,'No. Steps= ',STEPS
      print *,'Time: Initial T0 =',T0,' Final TF=',TF
      print *,'          X1(T0)=',X10,' X2(T0)=',X20,' X3(T0)=',X30
      print *,'          V1(T0)=',V10,' V2(T0)=',V20,' V3(T0)=',V30
      print *,'          P1(T0)=',P10,' P2(T0)=',P20,' P3(T0)=',P30

      call momentum(V10,V20,V30,P10,P20,P30)
C   Initial Conditions
      dt    = (TF-T0)/STEPS
      YSTART(1) = X10
      YSTART(2) = X20
      YSTART(3) = X30
      YSTART(4) = P10
      YSTART(5) = P20
      YSTART(6) = P30

C
C   Set error control parameters.
C
      TOL = 5.0D-6
      do i = 1, NEQ
          THRES(i) = 1.0D-10
      enddo
      MESSAGE = .TRUE.

```



```

ERRASS = .FALSE.
HSTART = 0.0D0
C Initialization:
call SETUP(NEQ,T0,YSTART,TF,TOL,THRES,METHOD,'Usual Task',
* ERRASS,HSTART,WORK,LENWRK,MESSAGE)
open(unit=11,file='sr.dat')
call velocity(YSTART(4),YSTART(5),YSTART(6),V1,V2,V3)
write(11,100) T0,YSTART(1),YSTART(2),YSTART(3),
* V1,V2,V3,
* energy(tstep,Y),
* YSTART(4),YSTART(5),YSTART(6)
C Calculation:
do i=1,STEPS
t = T0 + i*dt
call UT(F,t,tstep,Y,YP,YMAX,WORK,UFLAG)
if(UFLAG.GT.2) goto 60
call velocity(Y(4),Y(5),Y(6),V1,V2,V3)
write(11,100) tstep,Y(1),Y(2),Y(3),
* V1,V2,V3,
* energy(tstep,Y),
* Y(4),Y(5),Y(6)
enddo
60 continue
close(11)
100 format(11E25.15)
end

C momentum -> velocity transformation
subroutine velocity(p1,p2,p3,v1,v2,v3)
implicit none
double precision v1,v2,v3,p1,p2,p3,v,p,vsq,psq

psq = p1*p1+p2*p2+p3*p3

v1 = p1/dsqrt(1.0D0+psq)
v2 = p2/dsqrt(1.0D0+psq)
v3 = p3/dsqrt(1.0D0+psq)
end

C velocity -> momentum transformation
subroutine momentum(v1,v2,v3,p1,p2,p3)

```

```

implicit none
double precision v1,v2,v3,p1,p2,p3,v,p,vsq,psq

vsq = v1*v1+v2*v2+v3*v3
if(vsq .ge. 1.0D0 ) stop 'sub momentum: vsq >= 1'
p1 = v1/dsqrt(1.0D0-vsq)
p2 = v2/dsqrt(1.0D0-vsq)
p3 = v3/dsqrt(1.0D0-vsq)
end
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCC

```

Αυτός ο κώδικας ουσιαστικά είναι ο ίδιος με τον πρώτο που εκτελεί την αριθμητική ολοκλήρωση με τη μέθοδο Runge - Kutta, μόνο που έχουμε εισαγάγει τις σχετικιστικές διορθώσεις Lorentz για σωματίδια που κινούνται με ταχύτητες κοντά στην ταχύτητα του φωτός.

```

C Particle in constant Magnetic and electric field
C q B/m = k1 z    q E/m = k2 x + k3 y + k4 z
  subroutine F(T,Y,YP)
    include 'sr.inc'
    double precision t
    double precision Y(*),YP(*)
    double precision x1,x2,x3,v1,v2,v3,p1,p2,p3,pinv,psq
    x1 = Y(1)
    x2 = Y(2)
    x3 = Y(3)
    p1 = Y(4)
    p2 = Y(5)
    p3 = Y(6)
    call velocity(p1,p2,p3,v1,v2,v3)
C now we can use all x1,x2,x3,p1,p2,p3,v1,v2,v3
C Velocities:  dx_i/dt = p_i/sqrt(1+p^2) for m_0=1
    psq = p1*p1+p2*p2+p3*p3
    pinv = 1.0D0/dsqrt(1.0D0+psq)
    YP(1) = p1*pinv
    YP(2) = p2*pinv
    YP(3) = p3*pinv
C Acceleration:
    YP(4) = k2 + k1 * v2
    YP(5) = k3 - k1 * v1
    YP(6) = k4
  end

```

```

C      Energy per unit rest mass
      double precision function energy(T,Y)
      include 'rk3.inc'
      double precision t,e
      double precision Y(*)
      double precision x1,x2,x3,v1,v2,v3,p1,p2,p3,psq
      x1 = Y(1)
      x2 = Y(2)
      x3 = Y(3)
      p1 = Y(4)
      p2 = Y(5)
      p3 = Y(6)
      psq= p1*p1+p2*p2+p3*p3
C      Kinetic Energy/m_0
      e = dsqrt(1.0D0+psq)-1.0D0
C      Potential Energy/m_0
      e = e - k2*x1 - k3*x2 - k4*x3
      energy = e
      end
CCCCCCCCCCCCCCCC

```

Αντίστοιχα, αυτός ο κώδικας δίνει τροχιές σχετικιστικών φορτισμένων σωματιδίων σε μαγνητικά και ηλεκτρικά πεδία.

```

C      Particle in Magnetic dipole field:
C      q B_1/m = k1 (3 x1 x3)/r^5
C      q B_2/m = k1 (3 x2 x3)/r^5
C      q B_3/m = k1[(3 x3 x3)/r^5-1/r^3]
      subroutine F(T,Y,YP)
      include 'sr.inc'
      double precision t
      double precision Y(*),YP(*)
      double precision x1,x2,x3,v1,v2,v3,p1,p2,p3,pinv,psq
      double precision B1,B2,B3
      double precision r
      x1 = Y(1)
      x2 = Y(2)
      x3 = Y(3)
      p1 = Y(4)
      p2 = Y(5)
      p3 = Y(6)

```

```

    call velocity(p1,p2,p3,v1,v2,v3)
C   now we can use all x1,x2,x3,p1,p2,p3,v1,v2,v3
C   Velocities:  dx_i/dt = p_i/sqrt(1+p^2) for m_0=1
    psq   = p1*p1+p2*p2+p3*p3
    pinv  = 1.0D0/dsqrt(1.0D0+psq)
    YP(1) = p1*pinv
    YP(2) = p2*pinv
    YP(3) = p3*pinv
C   Acceleration:
    r      = dsqrt(x1*x1+x2*x2+x3*x3)
    if( r.gt.0.0D0)then
        B1   = k1*( 3.0D0*x1*x3)/r**5
        B2   = k1*( 3.0D0*x2*x3)/r**5
        B3   = k1*((3.0D0*x3*x3)/r**5-1/r**3)
        YP(4) = v2*B3-v3*B2
        YP(5) = v3*B1-v1*B3
        YP(6) = v1*B2-v2*B1
    else
        YP(4) = 0.0D0
        YP(5) = 0.0D0
        YP(6) = 0.0D0
    endif

    end

C   Energy per unit rest mass
    double precision function energy(T,Y)
    include 'rk3.inc'
    double precision t,e
    double precision Y(*)
    double precision x1,x2,x3,v1,v2,v3,p1,p2,p3,psq
    x1 = Y(1)
    x2 = Y(2)
    x3 = Y(3)
    p1 = Y(4)
    p2 = Y(5)
    p3 = Y(6)
    psq= p1*p1+p2*p2+p3*p3
C   Kinetic Energy/m_0
    e = dsqrt(1.0D0+psq)-1.0D0
    energy = e

```

end  
CCCCCCCCCCCCCCC

Τέλος, μέσω του κώδικα αυτού υπολογίζουμε τις τροχιές σωματιδίων που πα-  
γιδεύονται σε μαγνητικά δίπολα, παράδειγμα που χρησιμοποιήσαμε για να μελε-  
τήσουμε την ακτινοβολία Van Allen.

# Βιβλιογραφία

- [1] Αναγνωστόπουλος Κ. - *Σημειώσεις Υπολογιστικής Φυσικής I*, Εκδόσεις ΕΜΠ, Αθήνα (2008)
- [2] Βλάχος Λ. - *Φυσική Πλάσματος: Η τέταρτη κατάσταση της ύλης*, Εκδόσεις Τζιόλα, Θεσσαλονίκη (2000)
- [3] Ιχτιάρογλου Σ. - *Εισαγωγή στη Μηχανική Hamilton*, Εκδόσεις ΑΠΘ, Θεσσαλονίκη (2004)
- [4] Κομίνης Ι. - *Τροχιές φορτισμένων σωματιδίων σε στατικά και κυματικά πεδία - Διαφάνειες διάλεξης στο 7ο Σχολείο Φυσικής και Τεχνολογίας της Σύνηξης*, Βόλος (2008)
- [5] Κομίνης Ι. - *Μελέτη της Διάδοσης και Τεχνικών Ελέγχου Σολιτονίων σε Αμγώς Οπτικά Δίκτυα Τηλεπικοινωνιών - Διδακτορική Διατριβή* - Εκδόσεις ΕΜΠ, Αθήνα (2003)
- [6] Κουκαράς Εμ. - *Κίνηση φορτισμένων σωματιδίων σε πεδίο μαγνητικού διπόλου*, Πάτρα (2006)
- [7] Τσιρώνης Χ. - *Αλληλεπίδραση Ηλεκτρομαγνητικής Ακτινοβολίας με Πλάσμα και Εφαρμογές - Διδακτορική Διατριβή* - Εκδόσεις ΑΠΘ, Θεσσαλονίκη (2007)
- [8] Χατζηδημητρίου Ι. - *Θεωρητική Μηχανική*, Εκδόσεις Γιαχούδη - Γιαπούλη, Θεσσαλονίκη (2000)
- [9] Χιτζανίδης Κ. - *Εισαγωγή στη Φυσική και την Τεχνολογία της Ελεγχόμενης Θερμοπυρηνικής Σύνηξης*, Σημειώσεις μαθήματος σχολής ΗΜΜΥ - ΕΜΠ, Αθήνα (2009)
- [10] Abramowitz M., Stegun I., *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, New York (1965)

- [11] Bellan P., *Fundamentals of Plasma Physics*, Cambridge University Press, Cambridge (2006)
- [12] Brankin R.W., Gladwell I., Shampine L.F., *RKSUITE: a suite of Runge-Kutta codes for the initial value problem for ODEs*, Southern Methodist University, Dallas, Texas (1992)
- [13] Chen F., *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*, Plenum Press, New York (1984)
- [14] Fitzpatrick R., *Introduction to Plasma Physics*, University of Texas at Austin, Austin (1998)
- [15] Goldstein H., *Classical Mechanics*, Addison - Wesley, London (1980)
- [16] Griffiths D., *Introduction to Electrodynamics*, Prentice Hall, New Jersey (1996)
- [17] Jackson J.D., *Classical Electrodynamics*, Wiley, New York (1999)
- [18] Landau L.D., Lifshitz E.M., *Course of Theoretical Physics: Mechanics*, Butterworth - Heinemann, Oxford (1982)
- [19] Northrop T.G., Teller E., *Stability of the adiabatic motion of charged particles in the earth's field*, Phys. Rev., 117(215), 1960
- [20] Pinches S., *Nonlinear Interaction of Fast Particles with Alfvén Waves in Tokamaks* - PhD Thesis, Nottingham (1996)
- [21] Press W., Teukolsky S. et al., *Numerical Recipes in Fortran 90*, Cambridge University Press, Cambridge (1996)
- [22] Ram A., Dasgupta B., *Chaotic Magnetic Fields due to Asymmetric Current Configurations - Modeling Cross-Field Particle Diffusion in Cosmic Rays*, Proceedings of the 35th EPS Plasma Physics Conference, Crete, Greece (2008)