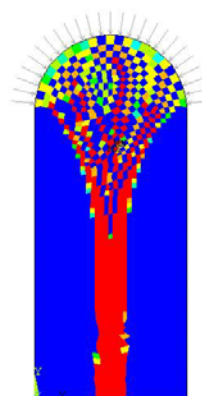
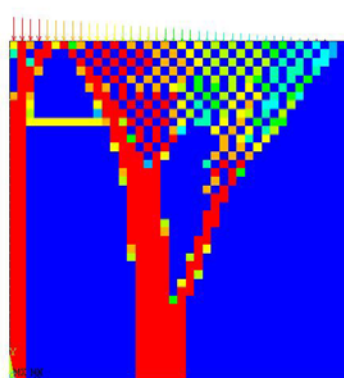




Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Μηχανολογικών Κατασκευών & Αυτομάτου Ελέγχου

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ Ευστράτιος Φ. Σπαθάρης

«Σύγκριση μοντέλων πεπερασμένων στοιχείων για τη
μελέτη της οστικής ανακατασκευής σε εικονικές δομές
απλής γεωμετρίας»



Επιβλέπων: Χρ. Προβατίδης
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Νοέμβριος 2007

Πρόλογος

Σε κλινικές μελέτες και έρευνες, σχετικά με την οστική ανακατασκευή και την εξέλιξη του οστού γενικότερα παρατηρείται μια μικρή απώλεια οστικής μάζας σαν μέρος της φυσιολογικής γήρανσης με συνέπεια τον κίνδυνο καταγμάτων και χρόνιες παθήσεις που συχνά ταλαιπωρούν τους ανθρώπους. Η επιστήμη της Εμβιομηχανικής, που προέρχεται από τη σύμπραξη των επιστημών της ιατρικής και της μηχανικής, μελετά τέτοια προβλήματα με σκοπό την αποκατάσταση της λειτουργικότητάς των μελών του ανθρώπινου σώματος.

Το φαινόμενο που είναι θεμελιώδες για την ρύθμιση της μηχανικής συμπεριφοράς των οστών ονομάζεται *οστική ανακατασκευή*. Είναι μία βιολογική διαδικασία όπου επιφέρει αλλαγές στην εσωτερική αρχιτεκτονική και την εξωτερική διάπλαση του οστού λόγω αλλαγής στην λειτουργία και το μηχανικό περιβάλλον του. Με δεδομένη τη ραγδαία αύξηση της υπολογιστικής ισχύος και την ανάπτυξη σύγχρονου λογισμικού παρέχεται πλέον η δυνατότητα της υπολογιστικής προσομοίωσης των ιδιοτήτων των οστών και πολύπλοκων λειτουργιών τους όπως η οστική ανακατασκευή..

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας (Δ.Ε.) είναι η μελέτη και αξιολόγηση διαφορετικών τρόπων μοντελοποίησης της φυσικής διαδικασίας της οστικής ανακατασκευής μέσω της υπολογιστικής προσομοίωσής τους σε απλοποιημένες γεωμετρίες.

Κλείνοντας θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Αναπληρωτή Καθηγητή, της Σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών του Ε.Μ.Π, κύριο Χριστόφορο Προβατίδη για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε με την ανάθεση αυτής της εργασίας καθώς και για τη διαρκή του υποστήριξη. Ιδιαίτερες ευχαριστίες θα ήθελα να εκφράσω στους υποψήφιους διδάκτορες Κλειώ Βόσου και Ιωάννη Κουκούλη για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγηση που μου παρείχαν καθ' όλη τη διάρκεια της εργασίας αυτής, καθώς και τα υπόλοιπα μέλη του εργαστηρίου. Τέλος, ευχαριστώ τον επιστήθιο φίλο μου και συνάδελφο Γεώργιο Σάββα για την συμπαράστασή του σε αυτή τη προσπάθεια.

Πρόλογος.....	i
Λίστα Σχημάτων.....	vi
Περίληψη.....	xiii
Κεφάλαιο 1ο Εμβιομηχανική & Θεωρία Πεπερασμένων Στοιχείων	15
1.1 Εισαγωγή.....	1
1.2 Μακροσκοπική δομή των οστών.....	1
1.3 Κυτταρική δομή των οστών.....	2
1.4 Μηχανικές ιδιότητες οστίτου ιστού.....	5
1.5 Βέλτιστος σχεδιασμός του οστού.....	7
1.6 Οστεοπόρωση.....	8
1.7 Μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων στην εμβιομηχανική.....	10
1.7.1 Περιγραφή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων.....	11
1.7.2 Σχηματισμός μητρώου δυσκαμψίας.....	13
1.7.3 Υπολογισμός Ισοπαραμετρικών Πεπερασμένων Στοιχείων.....	14
1.7.4 Επίλυση του συστήματος.....	15
1.8 Αντίστροφος Σχεδιασμός– Ανάπτυξη Ψηφιακού Μοντέλου – Ταχεία Κατασκευή Πρωτοτύπων	15
Κεφάλαιο 2ο Ανακατασκευή Οστού: Θεωρίες&Μαθηματικά Μοντέλα.....	17
2.1 Εισαγωγή.....	19
2.2 Μαθηματική πρόβλεψη της οστικής ανακατασκευής.....	19
2.2.1 Kummer (1972).....	20
2.2.2 Gjelsvik (1973).....	20
2.2.3 Cowin (1976).....	21
2.2.4 Hart (1983).....	22
2.2.5 Carter et al. (1986).....	23
2.2.6 Huiskes (1987).....	23
Κεφάλαιο 3ο Υπολογιστικές Προσομοιώσεις Οστικής Ανακατασκευής.....	27
3.1 Εισαγωγή.....	29
3.2 Ιστορικό φόρτισης και αρχιτεκτονική μηριαίου οστού.....	29
3.3 Διδιάστατο εμβιομηχανικό μοντέλο σπονδύλου.....	34
3.4 Προσομοίωση της οστικής ανακατασκευής με βάση τη θεωρία ανάπτυξης μικροβλαβών.....	37
3.5 Προσομοιώσεις επιφανειακής οστικής ανακατασκευής μηριαίου οστού.....	40
3.6 Τριδιάστατη προσομοίωση οστικής ανακατασκευής μηριαίου οστού.....	42
3.7 Προσαρμοστική οστική ανακατασκευή σε περίπτωση εμφυτεύματος.....	45
Κεφάλαιο 4ο Ανάπτυξη Υπολογιστικής Μεθόδου Οστικής Ανακατασκευής.....	49
4.1 Περιγραφή υπολογιστικού μοντέλου οστικής ανακατασκευής του R.T.Hart.....	51
4.1.1 Το πρόγραμμα RFEM3D.....	51
4.1.2 Δεδομένα εισόδου στο RFEM3D.....	53

4.1.3	Υπορουτίνες του RFEM3D.....	54
4.2	Υπολογιστική μέθοδος οστικής ανακατασκευής που αναπτύχθηκε.....	55
4.2.1	Αριθμητική επίλυση διαφορικών εξισώσεων.....	56
4.2.2	Κώδικας οστικής Ανακατασκευής που αναπτύχθηκε στη γλώσσα APDL.....	58
4.3	Παραδείγματα ελέγχου της κάθε μεθόδου.....	60
4.3.1	Τετράγωνη πλάκα.....	61
4.3.2	Τυπική γεωμετρία ισχίου.....	62
Κεφάλαιο 5ο	Παραμορφωσιακό Μοντέλο Οστικής Ανακατασκευής.....	63
5.1	Ανάλυση μοντέλου εσωτερικής οστικής ανακατασκευής του Hart.....	65
5.2	Ισοδύναμη μορφή της διαφορικής εξίσωσης του Hart.....	65
5.3	Αποτελέσματα της χρήση της σχέσης του Hart σε ράβδο και σύγκριση με βιβλιογραφία.....	66
5.4	Αλλαγή των σταθερών στη διαφορική εξίσωση του Hart.....	68
5.5	Επίλυση και αποτελέσματα οστικής ανακατασκευής παραμορφωσιακού μοντέλου με αναφορά Β ₁	72
5.5.1	Τετράγωνη πλάκα.....	74
5.5.2	Τυπική γεωμετρία ισχίου.....	78
5.6	Επίλυση και αποτελέσματα οστικής ανακατασκευής παραμορφωσιακού μοντέλου με αναφορά Β ₂	81
5.6.1	Τετράγωνη πλάκα.....	81
5.6.2	Τυπική γεωμετρία ισχίου.....	86
5.7	Σύγκριση αποτελεσμάτων με βάση την αναφορά.....	90
Κεφάλαιο 6ο	Μοντέλο Οστικής Ανακατασκευής Με Πυκνότητα Τροπικής Ενέργειας... ..	93
6.1	Ενέργεια Παραμόρφωσης.....	95
6.1.1	Ενέργεια Παραμόρφωσης λόγω στατικής αξονικής δύναμης.....	95
6.1.2	Ενέργεια Παραμόρφωσης λόγω Διατμητικών Τάσεων.....	98
6.2	Ανάλυση μοντέλου οστικής ανακατασκευής με βάση την τροπική ενέργεια παραμόρφωσης.....	99
6.3	Επίλυση και αποτελέσματα οστικής ανακατασκευής ενεργειακού μοντέλου με μέτρο ελαστικότητας Α.....	104
6.3.1	Τετράγωνη πλάκα.....	106
6.3.2	Τυπική γεωμετρία ισχίου.....	111
6.4	Επίλυση και αποτελέσματα οστικής ανακατασκευής ενεργειακού μοντέλου με μέτρο ελαστικότητας Β.....	115
6.4.1	Τετράγωνη Πλάκα.....	118
6.4.2	Τυπική γεωμετρία ισχίου.....	121
6.5	Σύγκριση αποτελεσμάτων με βάση το μέτρο ελαστικότητας.....	123
Κεφάλαιο 7ο	Μοντελο Οστικης Ανακατασκευης Με Πυκνοτητα Τροπικης Ενερργειας&Προβλεψη Υπερφορτισης.....	127

7.1	Εισαγωγή	129
7.2	Περιγραφή μοντέλου οστικής ανάπλασης που προβλέπει απορρόφηση οστού σε συνθήκες υπερφόρτισης.	129
7.3	Ανάλυση μοντέλου οστικής ανάπλασης που προβλέπει απορρόφηση οστού σε συνθήκες υπερφόρτισης.	130
7.4	Επίλυση και αποτελέσματα οστικής ανακατασκευής ενεργειακού μοντέλου για πρόβλεψη υπερφόρτισης με μέτρο ελαστικότητας A.....	133
7.4.1	Τετράγωνη πλάκα	135
7.4.2	Τυπική μορφή γεωμετρίας ισχίου.....	138
7.5	Επίλυση και αποτελέσματα οστικής ανακατασκευής ενεργειακού μοντέλου για πρόβλεψη υπερφόρτισης με μέτρο ελαστικότητας B.....	140
7.5.1	Τετράγωνη πλάκα	143
7.5.2	Τυπική μορφή ισχίου	146
7.6	Σύγκριση αποτελεσμάτων με βάση τους συνδυασμούς σχέσεων A και B.....	148
Κεφάλαιο 8ο	Αξιολόγηση Και Σύγκριση Μεθόδων Οστικής Ανακατασκευής.....	153
8.1	Καταγραφή Προσομοιώσεων Οστικής Ανακατασκευής.....	155
8.2	Σύγκριση των μεθόδων οστικής ανακατασκευής ως προς την χρονική πορεία.....	155
8.2.1	Παραμορφωσιακό μοντέλο.....	155
	Στα Σχήματα 8.1 και 8.2 παρατηρείται ότι η συνάρτηση F συγκλίνει και στις τέσσερις περιπτώσεις και σε χρόνο αρκετά μικρότερο του συνολικού.....	156
8.2.2	Ενεργειακό μοντέλο.....	156
8.2.3	Ενεργειακό μοντέλο που προβλέπει υπερφόρτιση	158
8.3	Δείκτης δυσκαμψίας	159
8.4	Γενικά Συμπεράσματα	160

Λίστα Σχημάτων και Πινάκων

Σχήμα 1.1 Δομή του οστού	1
Σχήμα 1.2 Σχηματικό διάγραμμα οστική ανακατασκευή	3
Σχήμα 1.3 Αναπτυξιακή (Bone Modeling) και προσαρμοστική (Bone Remodeling) ανακατασκευή	4
Σχήμα 1.4 Τυπικές καμπύλες τάσεων-παραμορφώσεων οστού διαφορετικών φαινόμενων πυκνοτήτων	6
Σχήμα 1.5 Επάνω εικόνα: βελτιστοποίηση γεωμετρίας, κάτω εικόνα γεωμετρία οστού	7
Σχήμα 1.6 Αύξηση της συχνότητας καταγμάτων λόγω της ελάττωσης της οστικής πυκνότητας με την πάροδο του χρόνου.....	8
Σχήμα 1.7 Μηχανική αντοχή και οστική πυκνότητα συναρτήσει της ηλικίας	9
Σχήμα 1.8 Δημιουργία αρνητικού ισοζυγίου στο οστό.....	9
Σχήμα 1.9 (α) Προοδευτική λέπτυνση οστεοδοκίδων, (β) Οστική απορρόφηση που γίνεται με προοδευτική σπογγιοποίηση του ενδοστικού δακτυλίου του φλοιού	10
Σχήμα 1.10 (α) Μοντέλο ισχίου με πεπερασμένα στοιχεία (β) Αποτελέσματα ανάλυσης Πεπερασμένων στοιχείων (Π.Σ. σε ένα σπόνδυλο)	11
Σχήμα 1.11 Κατάστρωση προβλήματος με πεπερασμένα στοιχεία	13
Σχήμα 1.12 Σημεία ολοκλήρωσης Gauss σε ένα επίπεδο στοιχείο.....	14
Σχήμα 1.13 Μεταλλικό εμφύτευμα ισχίου	15
Σχήμα 3.1 Το πλέγμα με πεπερασμένα στοιχεία και οι τρεις συνθήκες φόρτισης που χρησιμοποιήθηκαν στην ανάλυση. Το στοιχείο που επιλέχθηκε να έχει πυκνότητα $0.64 \text{ gr} \cdot \text{cm}^{-3}$ είναι μαυρισμένο	30
Σχήμα 3.2 Κατανομές πυκνοτήτων για (α) την πρώτη (β) τη δεύτερη και (γ) την τρίτη περίπτωση φόρτισης.....	32
Σχήμα 3.3 Κατανομές πυκνοτήτων για περίπτωση πολλαπλής φόρτισης (α) $M=1.0$ και (β) $M=4.0$	33
Σχήμα 3.4 (α) Φυσικό μοντέλο σπόνδυλου L_5 και (β) τριδιάστατο γεωμετρικό μοντέλο σπόνδυλου L_5	36
Σχήμα 3.5 Κατανομή (α) οστικής πυκνότητα και (β) πυκνότητας τροπικής ενέργειας μετά το πέρας της οστικής ανακατασκευής.....	36
Σχήμα 3.6 (α) Μεταβολή μάζας κατά τη διάρκεια της ανακατασκευής και (β) μεταβολή της συνάρτησης F κατά τη διάρκεια της ανακατασκευής.....	37
Σχήμα 3.7 Μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων του μπροστινού άκρου ενός προβάτου	38
Σχήμα 3.8 a. Συνδυαστική Φόρτιση: Μοντέλο υπό αξονική και καμπτική δύναμη. Κατανομή τάσης Von Mises στην τομή της b. αρχικής δομής c. βελτιστοποιημένης δομής d. βελτιστοποιημένης δομής ύστερα από επιπρόσθετη εισαγωγή στρεπτικής ροπής e. βελτιστοποιημένης δομής ύστερα από ταυτόχρονη επιβολή αξονικής δύναμης, κάμψης, στρέψης	41
Σχήμα 3.9 a Πιο φυσιολογική, ασύμμετρη δύναμη προσαγωγού μυ. Κατανομή τάσης Von Mises στην τομή της b. βελτιστοποιημένης δομής ύστερα από εναλλασσόμενη δύναμη προσαγωγού μυ και στρέψη c. βελτιστοποιημένης δομής ύστερα από ταυτόχρονη δύναμη προσαγωγού μυ και στρέψη	41
Σχήμα 3.10 (α) Τομή μηριαίας διάφυσης μιας 64-χρονης γυναίκας (β) Τομή μηριαίας διάφυσης ενός 19-χρονου άνδρα (γ) Τομή μηριαίας διάφυσης ενός 81-χρονου άνδρα.....	42
Σχήμα 3.11 Πρόοψη πλέγματος πεπερασμένων στοιχείων με τομές που δείχνουν τα στοιχεία που παρουσιάζονται στα διαγράμματα πυκνότητας – χρόνου.....	43
Σχήμα 3.12 Διαγράμματα της πυκνότητας συναρτήσει του χρόνου για 16 πεπερασμένα στοιχεία	44

Σχήμα 3.13 Τομή τριδιάστατου μηριαίου οστού ύστερα από 50, 100 και 300 επαναλήψεις	44
Σχήμα 3.14 Μοντέλα με πεπερασμένα στοιχεία του συμπαγούς οστού και του οστού με εμφύτευμα	45
Σχήμα 3.15 Κατανομή πυκνότητας και τάσης στο διαδιάστατο μοντέλο ύστερα από 300 ημέρες	46
Σχήμα 3.16 Κατανομή πυκνότητας από 100 ημέρες σε πρόσοψη και τομή (α) στο τριδιάστατο μοντέλο ύστερα και (β) στο τριδιάστατο μοντέλο με εμφύτευμα	47
Σχήμα 3.17 Κατανομή πυκνότητας στο άθικτο οστό με διαφορετικά πλέγματα: (α) Πλέγμα για χρήση πρόσθεσης Exeter και (β) Πλέγμα για χρήση πρόσθεσης SHP	48
Σχήμα 4.1 Μηχανισμός Οστικής Ανακατασκευής	51
Σχήμα 4.2 20-κομβικό χωρικό πεπερασμένο στοιχείο	52
Σχήμα 4.3 Αλγόριθμος ανακατασκευής οστού	53
Σχήμα 4.4 Διαδικασία Μοντελοποίησης Οστικής Ανακατασκευής	55
Σχήμα 4.5 Αλγόριθμος Προγράμματος που αναπτύχθηκε στο ANSYS	59
Σχήμα 4.6 Διδιάστατη εφαρμογή (α) σε τετράγωνη πλάκα (β) σε τυπική μορφή μακρέως οστού	61
Σχήμα 4.7 Γεωμετρία πεπερασμένου στοιχείου plane42	62
Σχήμα 4.8 Πλέγμα Π.Σ (α) σε τετράγωνη πλάκα (β) σε τυπική μορφή μακρέως οστού	62
Σχήμα 5.1 Αποτελέσματα από διδακτορικό Hart (α) αρχική κατανομή πυκνοτήτων 9 στοιχείων (β) τελική κατανομή	66
Σχήμα 5.2 Μοντέλο ράβδου κατά τον Hart με τις οριακές συνθήκες και χρήση εννέα υλικών διαφορετικής πυκνότητας	67
Σχήμα 5.3 Μεταβολές πυκνότητας σε μια χρονική μονάδα	67
Σχήμα 5.4 Εξάρτηση (α) συντελεστή $\alpha(\rho)$ και (β) συντελεστή $\beta(\rho)$ από την πυκνότητα για $0 \leq \rho \leq 3.5 \left(\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \right)$	69
Σχήμα 5.5 Διάγραμμα ορίου αναφοράς για πυκνότητες από 1.8 gr/cm^3 έως 2.7 gr/cm^3	69
Σχήμα 5.6 Μηχανική διέγερση και όριο αναφοράς συναρτήσει της οστικής πυκνότητας	70
Σχήμα 5.7 Απαιτούμενη παραμόρφωση για εναπόθεση οστού για διαφορετική οστική πυκνότητα	70
Σχήμα 5.8 Όριο αναφοράς B_1 και Όριο αναφοράς B_2	71
Σχήμα 5.9 Πυκνότητες στοιχείων τετράγωνης πλάκας σε 1 χρονική μονάδα για διαφορετικό μέγεθος βημάτων	72
Σχήμα 5.10 Πυκνότητες στοιχείων τυπικής γεωμετρίας ισχίου σε 1 χρονική μονάδα για διαφορετικό μέγεθος βημάτων	73
Σχήμα 5.11 Κατανομές στην αρχική κατάσταση (α) των ισοδύναμων παραμορφώσεων κατά Von Mises και (β) της πυκνότητας τροπικής ενέργειας	74
Σχήμα 5.12 Τελικές κατανομές (α) των παραμορφώσεων και (β) της πυκνότητα τροπικής ενέργειας	75
Σχήμα 5.13 Τελική κατανομή πυκνότητας (α) ανά στοιχείο, (β) με χρήση μέση τιμής τοπικά	76
Σχήμα 5.14 Χρονική μεταβολή μάζας της τετράγωνης πλάκας	77
Σχήμα 5.15 Κατανομή πυκνότητας ανά στοιχείο σε διαφορετικές χρονικές στιγμές	78
Σχήμα 5.16 Κατανομές στην αρχική κατάσταση (α) των ισοδύναμων παραμορφώσεων κατά Von Mises και (β) της πυκνότητας τροπικής ενέργειας	78
Σχήμα 5.17 Τελικές κατανομές (α) των παραμορφώσεων και (β) της πυκνότητα τροπικής ενέργειας	79
Σχήμα 5.18 Τελική κατανομή πυκνότητας (α) ανά στοιχείο, (β) με χρήση μέση τιμής	79

Σχήμα 5.19 Χρονική μεταβολή μάζας τυπικής μορφής ισχίου.....	80
Σχήμα 5.20 Κατανομή πυκνότητας ανά στοιχείου σε διαφορετικές χρονικές στιγμές.....	81
Σχήμα 5.21 Τελικές κατανομές (α) των παραμορφώσεων και (β) της πυκνότητα τροπικής ενέργειας.....	82
Σχήμα 5.22 Τελική κατανομή πυκνότητας (α) ανά στοιχείο, (β) με χρήση μέση τιμής τοπικά.....	82
Σχήμα 5.23 Χρονική μεταβολή μάζας τετράγωνης πλάκας.....	83
Σχήμα 5.24 Κατανομή πυκνότητας ανά στοιχείου σε διαφορετικές χρονικές στιγμές.....	84
Σχήμα 5.25 Μεταβολή πυκνοτήτων δύο γειτονικών στοιχείων στη διάρκεια του χρόνου.....	85
Σχήμα 5.26 Μεταβολή πυκνοτήτων δύο γειτονικών στοιχείων στη διάρκεια του χρόνου.....	86
Σχήμα 5.27 Τελικές κατανομές (α) των παραμορφώσεων και (β) της πυκνότητα τροπικής ενέργειας.....	86
Σχήμα 5.28 Τελική κατανομή πυκνότητας (α) ανά στοιχείο, (β) με χρήση μέση τιμής τοπικά.....	87
Σχήμα 5.29 Χρονική μεταβολή μάζας τυπικής γεωμετρίας ισχίου.....	87
Σχήμα 5.30 Κατανομή πυκνότητας ανά στοιχείου σε διαφορετικές χρονικές στιγμές.....	88
Σχήμα 5.31 Μεταβολή πυκνοτήτων δύο γειτονικών στοιχείων στη διάρκεια του χρόνου.....	89
Σχήμα 5.32 Μεταβολή πυκνοτήτων δύο γειτονικών στοιχείων στη διάρκεια του χρόνου.....	90
Σχήμα 5.33 Εστίαση στις κολώνες της τελικής δομής για (α) αναφορά B_1 , (β) αναφορά B_2	91
Σχήμα 5.34 Εστίαση στις κολώνες της τελικής δομής για (α) αναφορά B_1 , (β) αναφορά B_2	92
Σχήμα 6.1 Διάγραμμα Δύναμης – Επιμήκυνσης (α) Συνολικά (β) στην περιοχή αναλογίας.....	95
Σχήμα 6.2 Διάγραμμα Τάσεων τροπών.....	96
Σχήμα 6.3 Διάγραμμα διατμητικής τάσης - παραμόρφωσης.....	98
Σχήμα 6.4 Ρυθμός Μεταβολής Οστικής Πυκνότητας συναρτήσει της μηχανικής διέγερσης.....	100
Σχήμα 6.5 Η μηχανική διέγερση συναρτήσει της οστικής πυκνότητας σε κοινό διάγραμμα με το όριο αναφοράς.....	101
Σχήμα 6.6 Αρχικό διάγραμμα παραμορφώσεων και πυκνοτήτων τροπικής ενέργειας τετράγωνης πλάκας.....	102
Σχήμα 6.7 Αρχικό διάγραμμα παραμορφώσεων και πυκνοτήτων τροπικής ενέργειας τυπικής γεωμετρίας ισχίου.....	103
Σχήμα 6.8 Πυκνότητες στοιχείων τετράγωνης πλάκας σε 1 χρονική μονάδα για διαφορετικό μέγεθος βημάτων.....	104
Σχήμα 6.9 Διαφορά πυκνότητας σε 60 στοιχεία της τετράγωνης πλάκας ύστερα από μία μονάδα χρόνου για δύο διαφορετικά βήματα.....	105
Σχήμα 6.10 Πυκνότητες στοιχείων τυπικής γεωμετρίας ισχίου σε 1 χρονική μονάδα για διαφορετικό μέγεθος βημάτων.....	106
Σχήμα 6.11 Τελικά διαγράμματα (α) παραμορφώσεων και (β) πυκνότητας τροπικής ενέργειας.....	107
Σχήμα 6.12 Τελική κατανομή πυκνότητας (α) ανά στοιχείο, (β) με χρήση μέση τιμής τοπικά.....	107
Σχήμα 6.13 Χρονική μεταβολή μάζας της τετράγωνης πλάκας.....	108
Σχήμα 6.14 Κατανομή πυκνότητας ανά στοιχείου σε διαφορετικές χρονικές στιγμές.....	109
Σχήμα 6.15 Μεταβολή πυκνοτήτων δύο γειτονικών στοιχείων στη διάρκεια του χρόνου.....	110
Σχήμα 6.16 Μεταβολή πυκνοτήτων δύο γειτονικών στοιχείων στη διάρκεια του χρόνου.....	111

Σχήμα 6.17 Τελικά διαγράμματα (α) παραμορφώσεων και (β) πυκνότητας τροπικής ενέργειας	111
Σχήμα 6.18 Τελική κατανομή πυκνότητας (α) ανά στοιχείο, (β) με χρήση μέση τιμής τοπικά	112
Σχήμα 6.19 Χρονική μεταβολή μάζας της τυπικής μορφής ισχίου	112
Σχήμα 6.20 Κατανομή πυκνότητας ανά στοιχείο σε διαφορετικές χρονικές στιγμές	113
Σχήμα 6.21 Μεταβολή πυκνοτήτων δύο γειτονικών στοιχείων στη διάρκεια του χρόνου	114
Σχήμα 6.22 Μεταβολή πυκνοτήτων δύο γειτονικών στοιχείων στη διάρκεια του χρόνου	115
Σχήμα 6.23 Πυκνότητες στοιχείων τετράγωνης πλάκας σε 1 χρονική μονάδα για διαφορετικό μέγεθος βημάτων.	116
Σχήμα 6.24 Πυκνότητες στοιχείων τετράγωνης πλάκας σε 8 χρονικές μονάδες για διαφορετικό μέγεθος βημάτων.	117
Σχήμα 6.25 Πυκνότητες στοιχείων τυπικής γεωμετρίας ισχίου σε 8 χρονικές μονάδα για διαφορετικό μέγεθος βημάτων.	118
Σχήμα 6.26 Τελικά διαγράμματα (α) παραμορφώσεων και (β) πυκνότητας τροπικής ενέργειας	119
Σχήμα 6.27 Τελική κατανομή πυκνότητας (α) ανά στοιχείο, (β) με χρήση μέση τιμής τοπικά	119
Σχήμα 6.28 Χρονική μεταβολή μάζας της τετράγωνης πλάκας	120
Σχήμα 6.29 Κατανομή πυκνότητας ανά στοιχείο σε διαφορετικές χρονικές στιγμές	121
Σχήμα 6.30 Τελικά διαγράμματα (α) παραμορφώσεων και (β) πυκνότητας τροπικής ενέργειας	121
Σχήμα 6.31 Τελική κατανομή πυκνότητας (α) ανά στοιχείο, (β) με χρήση μέση τιμής τοπικά	122
Σχήμα 6.32 Χρονική μεταβολή μάζας της τυπικής μορφής ισχίου	122
Σχήμα 6.33 Κατανομή πυκνότητας ανά στοιχείο σε διαφορετικές χρονικές στιγμές	123
Σχήμα 6.34 Μέτρο Ελαστικότητας συναρτήσει οστικής πυκνότητας για (Α) $E = 100 \cdot \rho^2 MPa$ (Β) $E = 3790 \cdot \rho^3 MPa$	124
Σχήμα 6.35 Εστίαση στην ίδια περιοχή της τετράγωνης πλάκας για (α) $E = 100 \cdot \rho^2 MPa$ και (β) $E = 3790 \cdot \rho^3 MPa$	124
Σχήμα 6.36 Εστίαση στην ένωση των «κολώνων», (α) $E = 100 \cdot \rho^2 MPa$ (β) $E = 3790 \cdot \rho^3 MPa$	125
Σχήμα 6.37 Εστίαση στην ίδια περιοχή της τυπικής μορφής μακρέως οστού, (α) $E = 100 \cdot \rho^2 MPa$ (β) $E = 3790 \cdot \rho^3 MPa$	125
Σχήμα 7.1 Ρυθμός Οστικής Πυκνότητας συναρτήσει της μηχανικής διέγερσης για τις δύο εξισώσεις ανακατασκευής.	130
Σχήμα 7.2 Πυκνότητες στοιχείων τετράγωνης πλάκας σε 1 χρονική μονάδα για διαφορετικό μέγεθος βημάτων.	133
Σχήμα 7.3 Πυκνότητες στοιχείων τυπικής γεωμετρίας ισχίου σε 1 χρονική μονάδα για διαφορετικό μέγεθος βημάτων.	134
Σχήμα 7.4 Τελικά διαγράμματα (α) παραμορφώσεων και (β) πυκνότητας τροπικής ενέργειας	135
Σχήμα 7.5 Τελική κατανομή πυκνότητας (α) ανά στοιχείο, (β) με χρήση μέση τιμής τοπικά	136
Σχήμα 7.6 Χρονική μεταβολή μάζας της τετράγωνης πλάκας	136
Σχήμα 7.7 Κατανομή πυκνότητας ανά στοιχείο σε διαφορετικές χρονικές στιγμές	137

Σχήμα 7.8 Τελικά διαγράμματα (α) παραμορφώσεων και (β) πυκνότητας τροπικής ενέργειας.....	138
Σχήμα 7.9 Τελική κατανομή πυκνότητας (α) ανά στοιχείο, (β) με χρήση μέση τιμής τοπικά	139
Σχήμα 7.10 Χρονική μεταβολή μάζας της τυπικής μορφής ισχίου.....	139
Σχήμα 7.11 Κατανομή πυκνότητας ανά στοιχείο σε διαφορετικές χρονικές στιγμές.....	140
Σχήμα 7.12 Πυκνότητες στοιχείων τετράγωνης πλάκας σε 8 χρονικές μονάδες για διαφορετικό μέγεθος βημάτων.....	141
Σχήμα 7.13 Πυκνότητες στοιχείων τυπικής γεωμετρίας ισχίου σε 8 χρονικές μονάδες για διαφορετικό μέγεθος βημάτων.....	142
Σχήμα 7.14 Τελικό διάγραμμα πυκνότητας τροπικής ενέργειας (α) με διαβάθμιση μέχρι μέγιστη τιμή, (β) με διαβάθμιση μέχρι $0.034 \frac{J}{cm^3}$	143
Σχήμα 7.15 Τελική κατανομή πυκνότητας (α) ανά στοιχείο, (β) με χρήση μέση τιμής τοπικά	144
Σχήμα 7.16 Χρονική μεταβολή μάζας της τετράγωνης πλάκας.....	144
Σχήμα 7.17 Κατανομή πυκνότητας ανά στοιχείο σε διαφορετικές χρονικές στιγμές.....	145
Σχήμα 7.18 Τελικά διαγράμματα (α) παραμορφώσεων και (β) πυκνότητας τροπικής ενέργειας.....	146
Σχήμα 7.19 Τελική κατανομή πυκνότητας (α) ανά στοιχείο, (β) με χρήση μέση τιμής τοπικά	147
Σχήμα 7.20 Χρονική μεταβολή μάζας της τυπικής μορφής ισχίου.....	147
Σχήμα 7.21 Κατανομή πυκνότητας ανά στοιχείο σε διαφορετικές χρονικές στιγμές.....	148
Σχήμα 7.22 Εστίαση στην ίδια περιοχή της τελικής δομής για τετράγωνης πλάκας για (α) $E = 100 \cdot \rho^2 MPa$ και (β) $E = 3790 \cdot \rho^3 MPa$	149
Σχήμα 7.23 Εστίαση στην άνω αριστερά περιοχή της τελικής δομής για (α) $E = 100 \cdot \rho^2 MPa$ (β) $E = 3790 \cdot \rho^3 MPa$	150
Σχήμα 7.24 Εστίαση στην ίδια περιοχή της τυπικής μορφής μακρέως οστού, (α) $E = 100 \cdot \rho^2 MPa$ (β) $E = 3790 \cdot \rho^3 MPa$	150
Σχήμα 8.1 Χρονική μεταβολή της συνάρτησης F για αναφορά ίση με (α) 3000μstrain και (β) 2000μstrain για τετράγωνη πλάκα (κάθετος άξονας: τιμή της F)	156
Σχήμα 8.2 Χρονική μεταβολή της συνάρτησης F για αναφορά ίση με (α) 3000μstrain και (β) 2000μstrain για τετράγωνη πλάκα (κάθετος άξονας: τιμή της F) για ισχίο	156
Σχήμα 8.3 Χρονική μεταβολή των συναρτήσεων F με μέτρο ελαστικότητας (α) $E = 100\rho^2$ και (β) $E = 3790\rho^3$ για τετραγωνική πλάκα	157
Σχήμα 8.4 Χρονική μεταβολή των συναρτήσεων F με μέτρο ελαστικότητας (α) $E = 100\rho^2$ και (β) $E = 3790\rho^3$ για τυπική γεωμετρία ισχίου	157
Σχήμα 8.5 Χρονική μεταβολή της F με μέτρο ελαστικότητας (α) $E = 100\rho^2$ και (β) $E = 3790\rho^3$ για την τετραγωνική πλακά	158
Σχήμα 8.6 Χρονική μεταβολή της F με μέτρο ελαστικότητας (α) $E = 100\rho^2$ και (β) $E = 3790\rho^3$ για την τυπική γεωμετρία ισχίου	158
Σχήμα 8.7 Τελικές δομές για το παράδειγμα της τετράγωνης πλάκας για όλες τις δοκιμές που έγιναν.....	160
Σχήμα 8.8 Τελικές δομές για το παράδειγμα της τυπικής γεωμετρίας ισχίου για όλες τις δοκιμές που έγιναν	161

Πίνακας 6.1 Εξισώσεις οστικής ανακατασκευής	103
Πίνακας 1.1	132
Πίνακας 8.1 Δοκιμές που πραγματοποιήθηκαν	155
Πίνακας 8.2 Δείκτης Δυσκαμψίας για την τετράγωνη πλάκα	159
Πίνακας 8.2 Δείκτης Δυσκαμψίας για την τετράγωνη πλάκα	162

Περίληψη

Η διερεύνηση του φαινομένου της οστικής ανακατασκευής αποτελεί ένα ζήτημα που έχει απασχολήσει διακεκριμένες προσωπικότητες επι σειρά ετών, επιστήμονες με μεγάλο έργο και συνεισφορά στην βελτίωση των συνθηκών διαβίωσης του ανθρώπου. Η οστική ανακατασκευή που είναι μία βιολογική διαδικασία όπου επιφέρει αλλαγές στην εσωτερική αρχιτεκτονική και την εξωτερική διάπλαση του οστού λόγω αλλαγής στην λειτουργία του και τις μηχανικές συνθήκες του περιβάλλοντός.

Η κατανόηση των μηχανισμών που ενεργοποιούν τη διαδικασία αυτή αποτελεί επιτακτική ανάγκη έτσι ώστε να μελετηθούν περιπτώσεις όπως η οστεοπόρωση σπονδύλου, το κάταγμα ισχίου ή άλλες παθολογικές καταστάσεις, με σκοπό την αντιμετώπιση τους.

Λόγω της πολυπλοκότητας του ζητήματος και της δυσκολίας υλοποίησης πειραματικών μετρήσεων σε οστά in vivo έχουν αναπτυχθεί διάφορες θεωρίες για την εξιδανίκευση του φαινομένου. Αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η ανάπτυξη μεθόδου προσομοίωσης της οστικής ανακατασκευής και η εφαρμογή της σε δύο δοκιμές απλοποιημένης γεωμετρίας. Εφαρμόζοντας κάποιες από τις σημαντικότερες θεωρίες που έχουν αναπτυχθεί, έγινε προσπάθεια σύγκρισης των αποτελεσμάτων με κύριο στόχο να παρατηρηθούν οι ομοιότητες μέσω διαφορετικών προσεγγίσεων αλλά και να επισημανθούν οι διαφορές.

Αναλυτικότερα, στο Κεφάλαιο 1 επιδιώκεται η εισαγωγή σε ζητήματα που αφορούν την Εμβιομηχανική Επιστήμη, τις ιδιότητες του οστίτου ιστού και την περιγραφή του φαινομένου της οστικής ανακατασκευής, καθώς και τη διασύνδεση της Εμβιομηχανικής με τη Μεθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων (Finite Element Method) που θα αποτελέσει το υπολογιστικό εργαλείο.

Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζονται οι βασικότερες θεωρίες οστικής ανακατασκευής μαζί με τη μαθηματική τους έκφραση πάνω στις οποίες στηρίχθηκαν μετέπειτα πολλές μελέτες.

Στο Κεφάλαιο 3 συγκεντρώνονται ύστερα από βιβλιογραφική αναζήτηση παραδείγματα υπολογιστικών προσομοιώσεων βασισμένα στις θεωρήσεις του Κεφαλαίου 2, που κρίθηκε ότι μεθοδεύσαν και κατευθύναν την παρούσα Διπλωματική Εργασία. Υπάρχουν αναφορές για εφαρμογή της οστικής ανακατασκευής σε διδιάστατο μοντέλο σπονδύλου και ισχίου καθώς και σε τριδιάστατα μοντέλα μακρέων οστών μαζί με αποτελέσματα τους. Τέλος υπάρχουν προσομοιώσεις με μοντέλα πεπερασμένων στοιχείων οστών μαζί με εμφύτευμα.

Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζεται πλήρως η επαναληπτική μεθοδος της διαδικασίας που αναπτύχθηκε και περιλαμβάνει την αριθμητική επίλυση της διαφορικής εξίσωσης

οστικής ανακατασκευής καθώς και τον αλγόριθμο αντιστοίχισης των αποτελεσμάτων στο διακριτό μοντέλο πεπρασμένων στοιχείων.

Στο Κεφάλαιο 5 γίνεται μελέτη και εφαρμογή της μεθόδου οστικής ανακατασκευής βασισμένη σε θεωρία που συνδέει την οστική ανακατασκευή με το μηχανικό μέγεθος της παραμόρφωσης, στις δύο απλές γεωμετρίες.

Στο Κεφάλαιο 6 επαναλαμβάνεται η ίδια διαδικασία για θεωρία που συνδέει την διέγερση της οστικής ανακατασκευής με το μηχανικό μέγεθος της πυκνότητας τροπικής ενέργειας.

Στο Κεφάλαιο 7 γίνεται προσμείωση τη ίδιας διαδικασίας με χρήση θεωρίας που συνδέει την διέγερση της οστικής ανακατασκευής εκ νέου με το μηχανικό μέγεθος της πυκνότητας τροπικής ενέργειας, βασισμένη όμως σε διαφορετική μαθηματική έκφραση έτσι ώστε να προβλέπεται απορρόφηση οστού σε περίπτωση συγκέντρωσης τάσεων (π.χ εμφυτεύματα).

Στο Κεφάλαιο 8, τέλος, γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων και συνολική αξιολόγηση τους με γνώμονα την επαλήθευση του ίδιου φαινομένου, αυτού της οστικής ανακατασκευής.

**Κεφάλαιο 1ο Εμβιομηχανική & Θεωρία
Πεπερασμένων Στοιχείων**

1.1 Εισαγωγή

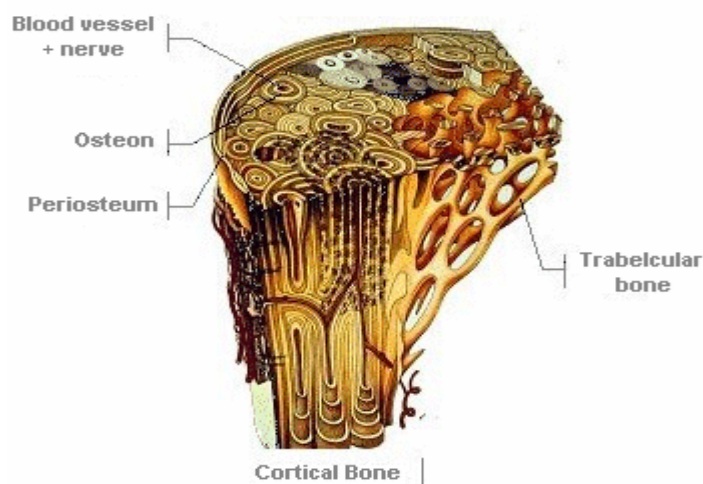
Ως Εμβιομηχανική ορίζεται η επιστήμη η οποία εφαρμόζει τις αρχές διαφόρων κλάδων της μηχανικής (Στατική, Δυναμική, Αντοχή των Υλικών, Μηχανική του Συνεχούς Μέσου, Μηχανική των Ρευστών, Ρομποτική) στο ανθρώπινο σώμα με σκοπό την μελέτη και την αποκατάσταση της λειτουργικότητάς του είτε με την ενίσχυση ορισμένων δομικών μελών του είτε με την ολοκληρωτική αντικατάστασή του. Βασικό υπολογιστικό εργαλείο, πλέον, του τομέα της Εμβιομηχανικής αποτελεί η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων.

1.2 Μακροσκοπική δομή των οστών

Τα οστά αποτελούν τα μοναδικά «ζωντανά» κατασκευαστικά υλικά. Με τις μηχανικές ιδιότητες που διαθέτουν και με την συμμετοχή τους στις μεταβολικές διαδικασίες του οργανισμού, προσφέρουν στο ανθρώπινο σώμα προστασία, κινητικότητα, ευελιξία και αντοχή, ενώ αποτελούν μια ανεξάντλητη μεταβολική αποθήκη αλάτων. Είναι ενεργά μέλη, με πολύπλοκη αιμάτωση, θεμέλιο ουσία που αποτιτανώνεται και εξειδικευμένους κυτταρικούς πληθυσμούς που είναι υπεύθυνοι για την συνεχή συντήρηση και ανακατασκευή τους.

Η μορφή και το σχήμα των οστών ποικίλει ανάλογα με την περιοχή που ευρίσκονται και την μηχανική λειτουργία που επιτελούν. Διακρίνονται σε μακρά (π.χ. μηριαίο) και σε βραχέα οστά (π.χ. σπόνδυλος). Παρόλο που το σχήμα των ανθρωπίνων οστών ποικίλει, συγκρίσεις με αντίστοιχα ζώων δείχνουν ότι η αρχιτεκτονική των σπονδυλωτών ειδών είναι αρκετά συντηρητική και στερεότυπη.

Από αρχιτεκτονικής πλευράς υπάρχουν δύο μορφές οστίτου ιστού: το *εξωτερικό, φλοιώδες (cortical bone)* και το *εσωτερικό, σπογγώδες και δοκιδώδες οστόν (trabecular/cancellous bone)* (Σχήμα 1.1).



Σχήμα 1.1 Δομή του οστού

Παρόλο που φλοιώδες και σπογγώδες οστό αποτελούνται από τον ίδιο ιστό και μακροσκοπικά έχουν κατά προσέγγιση παρόμοια αρχιτεκτονική, παρουσιάζουν

διαφορετική οστική πυκνότητα και μηχανική συμπεριφορά, καθώς σε μικροσκοπική κλίμακα φαίνεται ότι είναι ενεργοί ιστοί που συνεχώς προσαρμόζονται στο μηχανικό περιβάλλον τροποποιώντας την σύνθεση και την αρχιτεκτονική τους. Αυτή η ικανότητα να αισθάνονται την μηχανική φόρτιση που δέχονται και να αλλάζουν τις δομές τους ανάλογα, καλείται νόμος του Wolff και πρωτοδιατυπώθηκε το 1882. [1], [2]

1.3 Κυτταρική δομή των οστών

Υπάρχουν τέσσερα είδη κυττάρων που είναι υπεύθυνα για τον σχηματισμό, για την συντήρηση-επιδιόρθωση και για την προσαρμογή του οστίτου ιστού: τα *οστεοκύτταρα*, οι *οστεοβλάστες*, οι *οστεοκλάστες* και τα *αδιαφοροποίητα κύτταρα*.

Τα οστεοκύτταρα παίζουν σημαντικό ρόλο στη λειτουργία της προσαρμογής των οστών στο μηχανικό τους περιβάλλον και θεωρείται ότι έχουν τη δυνατότητα να μεταφέρουν το ερέθισμα μιας ενδεχόμενης αλλαγής των καταπονήσεων που δέχονται τα οστά.

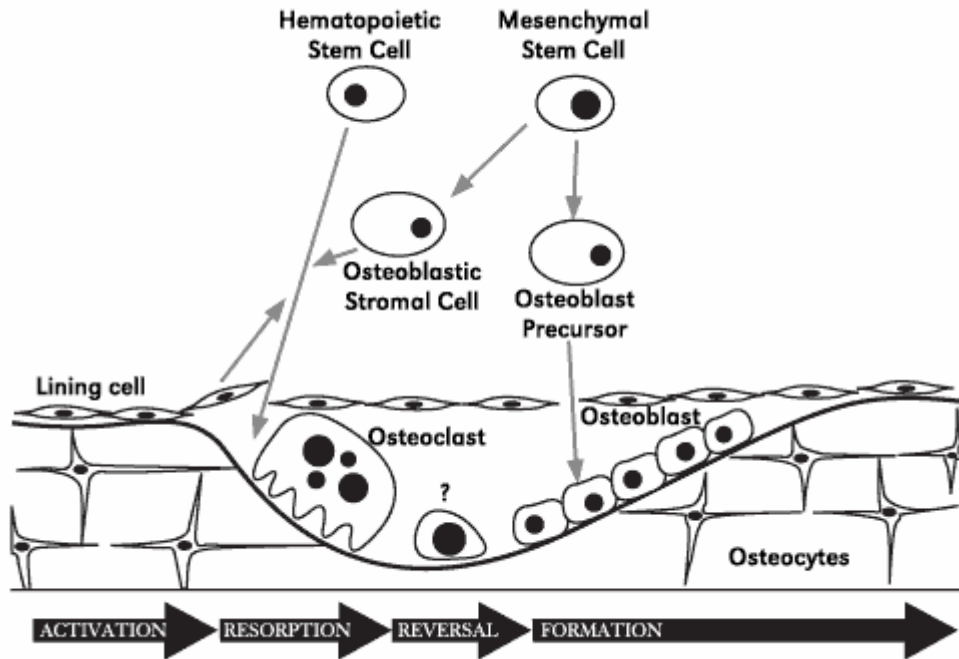
Οι οστεοβλάστες με την δράση τους παράγουν οστούν, ενώ οι οστεοκλάστες απορροφούν οστούν. Οι δύο αυτοί κυτταρικοί πληθυσμοί ευρίσκονται σε διαρκή συνεργασία και ισορροπία αλλά σε περιπτώσεις που ο οργανισμός έχει ανάγκη από πιο ισχυρή αρχιτεκτονική δομή, η οστεοβλαστική δραστηριότητα υπερισχύει της οστεοκλαστικής. Αυτή η κυτταρική συνεργασία περιγράφεται με το φαινόμενο της *οστικής ανακατασκευής*.

Τα αδιαφοροποίητα κύτταρα, τέλος, ή, αλλιώς, πρώιμες μορφές οστεοκυττάρων αν δεχθούν κατάλληλο ερέθισμα διαφοροποιούνται σε οστεοβλάστες.

Η οστική θεμέλιος ουσία αποτελείται από οργανικά μακρομόρια (κολλαγόνο) κατά 20%, ανόργανα άλατα (κυρίως υδροξυαπατίτης) κατά 70% και τα υγρά της θεμέλιας ουσίας. Το οργανικό τμήμα δίδει το σχήμα του οστού και συμβάλει στην αντοχή σε εφελκυσμό και απουσία της τα καθιστά εύθρυπτα. Το ανόργανο τμήμα συμβάλει στην αντοχή σε συμπίεση και ακαμψία. Η αποτιτάνωση (μετάλλωση) της θεμέλιος ουσίας είναι υπεύθυνη για τις μηχανικές ιδιότητες του ώριμου οστίτη ιστού. [1], [2]

Οστική Ανακατασκευή

Ο οστίτης ιστός παρουσιάζει από την έβδομη εμβρυϊκή εβδομάδα και μέχρι τον θάνατο μια σημαντική λειτουργία που ονομάζεται *οστική ανακατασκευή* (Bone Remodeling), η οποία αναφέρθηκε παραπάνω ως κυτταρική συνεργασία οστεοκλαστών και οστεοβλαστών. Αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας είναι η συνεχής απορρόφηση και παραγωγή του οστίτη ιστού, με σκοπό την σωστή ανάπτυξη των οστών, την επιδιόρθωση μικρών ζημιών που προκύπτουν από την καθημερινή καταπόνηση του σκελετού και την διατήρηση της λειτουργικότητας του σώματος. Μια σχηματική εικόνα της οστικής ανακατασκευής φαίνεται στο Σχήμα 1.2



Σχήμα 1.2 Σχηματικό διάγραμμα οστική ανακατασκευή

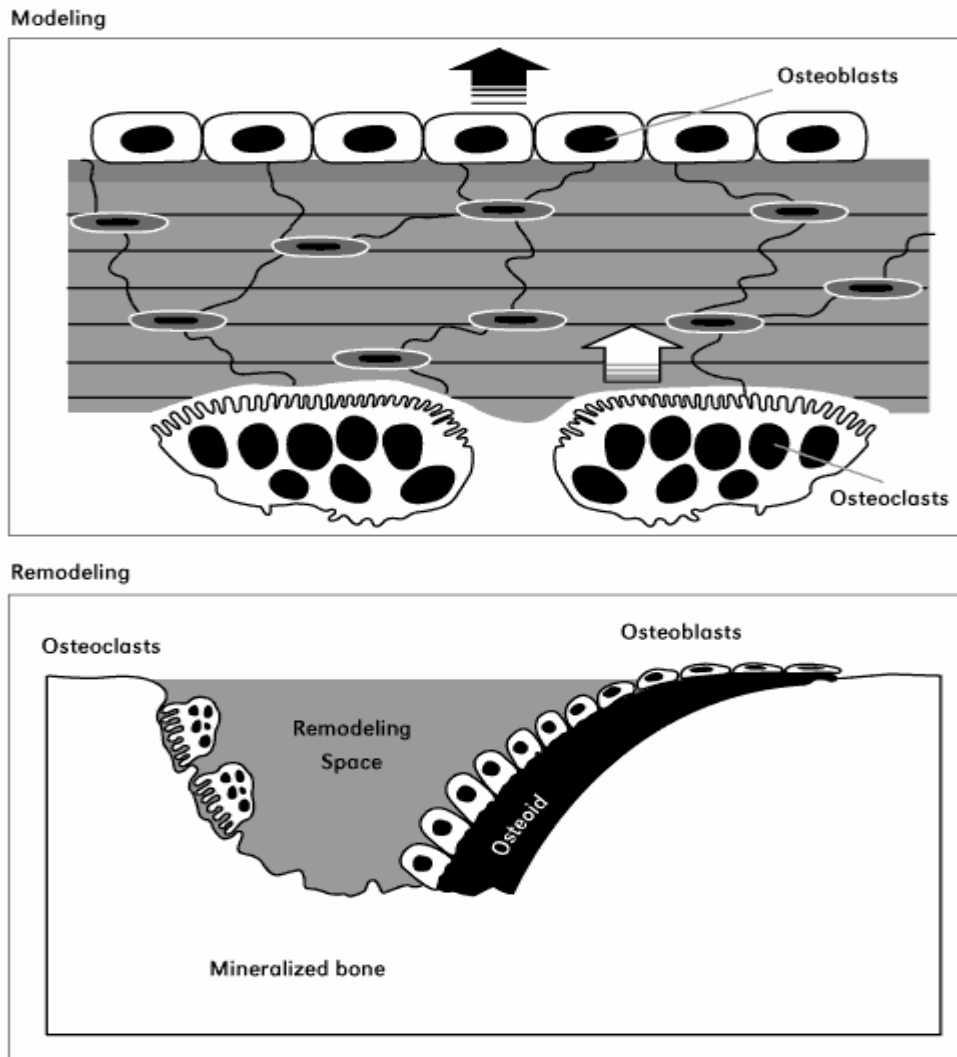
Υπάρχουν τέσσερις διαφορετικές περιπτώσεις οστικής ανακατασκευής:

A. Αναπτυξιακή Οστική Ανακατασκευή (Bone Modeling)

Το σχήμα και η αρχιτεκτονική των οστών, κατά τη διάρκεια της ανάπτυξης (μέχρι τα 18 έτη ηλικίας), αλλάζουν ώστε να προσαρμοστούν στις νέες καταπονήσεις και να μην υποστούν κακώσεις από υπερφόρτιση. Η αναπτυξιακή οστική ανακατασκευή λαμβάνει χώρα στο περίοστεο με αποτέλεσμα τα οστά να διογκώνονται. Προκαλεί πάντα θετικό ισοζύγιο οστού και μπορεί να επαναενεργοποιηθεί μετά από κάταγμα. Στο Σχήμα 1.3 φαίνεται σχηματικά η αναπτυξιακή οστική ανακατασκευή

B. Διατήρηση Οστίτου Ιστού

Αποσκοπεί στη διατήρηση και ανανέωση του ιστού καθ' όλη τη διάρκεια ζωής του, καθώς αντικαθίστανται περιοδικά περιοχές παλαιού ιστού από νέο. Λόγω της συνεχούς καταπόνησης και της φυσιολογικής γήρανσης που υφίσταται ο οστίτης ιστός θα πρέπει να ανανεώνεται συνεχώς για να μπορεί να διατηρεί τις μηχανικές του ιδιότητες. Υπάρχει ένα εύρος τιμών μηχανικής φόρτισης τις οποίες το οστόν αντιλαμβάνεται σαν φυσιολογική φόρτιση (καθημερινή κινητική λειτουργία). Εάν το οστόν φορτίζεται φυσιολογικά τότε ευρίσκεται σε συνθήκες ισορροπίας της οστικής ανακατασκευής (ισοζύγιο απορρόφησης και παραγωγής οστού) που ενεργοποιείται από ηλεκτρικά φαινόμενα που προκαλούν οι μικροπαραμορφώσεις.



Σχήμα 1.3 Αναπτυξιακή (Bone Modeling) και προσαρμοστική (Bone Remodeling) ανακατασκευή

Γ. Προσαρμογή Οστίου Ιστού (Adaptive Bone Remodeling)

Όταν ένα οστόν δεχθεί αυξημένη φόρτιση έχει τη δυνατότητα να προσαρμοσθεί στις νέες μηχανικές απαιτήσεις. Τότε προκαλείται θετικό ισοζύγιο ανακατασκευής, δηλαδή παράγεται περισσότερο οστόν απ' ότι απορροφάται, και ταυτόχρονα αλλάζει η αρχιτεκτονική (κατανομή οστικής μάζας στο χώρο) και η γεωμετρία του οστού με συνέπεια την αύξηση της μηχανικής αντοχής του. Αντίθετα, όταν η φόρτιση στα οστά ελαττώνεται σημαντικά (π.χ εφαρμογή γύψινου συνδέσμου, μακρόχρονος κλινοστασισμός, συνθήκες έλλειψης βαρύτητας) προκαλείται αρνητικό ισοζύγιο ανακατασκευής και παρατηρείται ελάττωση της οστικής μάζας. Στο Σχήμα 1.3 φαίνεται σχηματικά η προσαρμογή του οστίου ιστού.

Σημαντική παρατήρηση αποτελεί το γεγονός ότι το αρνητικό ισοζύγιο είναι ταχύτερο και πιο δύσκολο αναστρέψιμο απ' ό τι το θετικό.

Η σύγχρονη πρόοδος της ορθοπεδικής επιστήμης έκανε δυνατή τη μελέτη της προσαρμογής οστίτου ιστού και κάτω από συνθήκες υπερφόρτισής του. Σε αυτήν την περίπτωση παρατηρήθηκε ότι τις περισσότερες φορές τα οστά αντιδρούν με έντονες αλλαγές της αρχιτεκτονικής τους και μερικές φορές παρατηρούνται βαρύτατες και δυσεπίλυτες επιπλοκές.

Δ. Συντήρηση Οστίτου Ιστού

Όταν ο οστίτης ιστός δέχεται ασυνήθιστα υψηλές φορτίσεις υφίσταται φαινόμενα κόπωσης υλικού (μικροκατάγματα) και συσσωρευόμενη κόπωση μπορεί να προκαλέσει λύση της συνέχειας του οστού (κάταγμα). Η οστική ανακατασκευή προβλέπει ένα μηχανισμό αναζήτησης, εντοπισμού και επιδιόρθωσης των μικροκακώσεων

Γενικά, η οστική ανακατασκευή συνίσταται σε κυκλικές διαβρώσεις των οστικών επιφανειών, που ακολουθούνται από παραγωγή νέου οστού. Σε ένα ώριμο σκελετό υπολογίζεται ότι υπάρχουν 100.000.000 μικροκατασκευαστικές μονάδες σπογγώδους οστού. Η ανακατασκευή τους χαρακτηρίζεται από τον αριθμό των μονάδων που βρίσκονται σε ανακατασκευή, τον ρυθμό ανακύκλυσής της, δηλαδή την διάρκεια ενός πλήρους κύκλου ανακατασκευής, από το βάθος των κοιλοτήτων που σκάβουν οι οστεοκλάστες και το πάχος του νέου οστού που παράγουν οι οστεοβλάστες. Η διάρκεια του κύκλου της οστικής ανακατασκευής κυμαίνεται ανάλογα με τον τύπο του οστού και είναι 3 – 7 μήνες. Στο σπογγώδες οστό απαιτούνται συνήθως 3 – 4 μήνες, ενώ στο φλοιώδες 7 μήνες.

Στην Αναπτυξιακή οστική ανακατασκευή, η δράση οστεοβλάστων και οστεοκλάστων δεν συνδέεται και γρήγορες αλλαγές μπορεί να συμβούν στην ποσότητα το σχήμα και τη θέση του οστού. Αντίθετα, στην προσαρμοστική οστική ανακατασκευή, η δράση οστεοβλάστων και οστεοκλάστων συνδέεται. Οι αλλαγές στην ποσότητα και το σχήμα του οστού είναι μικρές εκτός και αν διαταραχθεί το ισοζύγιο. [1], [2]

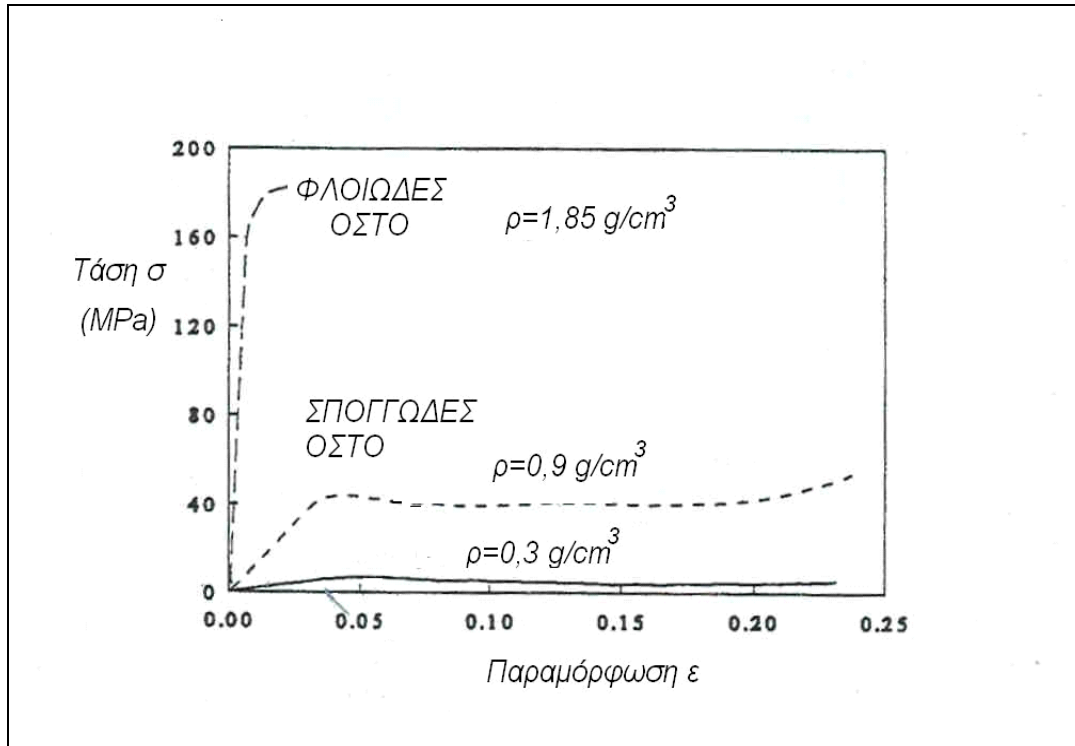
1.4 Μηχανικές ιδιότητες οστίτου ιστού

Τα οστά παρουσιάζουν σύνθετη μικροσκοπική και μακροσκοπική οργάνωση και έχουν συγκεκριμένες, ιδιαίτερες μηχανικές ιδιότητες που τους επιτρέπουν να επιτελέσουν τις βασικές τους λειτουργίες και τα διαφοροποιούν από άλλα απλά υλικά. Οι βασικές λειτουργίες των οστών είναι η προστασία και η στήριξη των εσωτερικών οργάνων, η παροχή περιοχών πρόσφυσης των μυών, η δημιουργία στέρεων ορθούμενων μονάδων και η διευκόλυνση της δράσης των μυών και της κίνησης ολόκληρου του σώματος.

Το οστόν είναι σύνθετο υλικό αποτελούμενο από κολλαγόνο και υδροξυαπατίτη. Οι κρύσταλλοι του υδροξυαπατίτη διατάσσονται κατά μήκος των ινιδίων κολλαγόνων. Το μέτρο ελαστικότητάς του είναι ενδιάμεσο μεταξύ του απατίτη και του κολλαγόνου και η αντοχή του είναι υψηλότερη τόσο από τον απατίτη όσο και από το κολλαγόνο, διότι το μαλακότερο συστατικό παρεμποδίζει το δυσκαμπτότερο από ψαθυρή ρηγμάτωση ενώ το δυσκαμπτότερο υλικό παρεμποδίζει το μαλακό από τη διαρροή. Οι μηχανικές ιδιότητες

του μεταβάλλονται με την ηλικία. Αμφότερα αντοχή και μέτρο ελαστικότητας ελαττώνονται περίπου 2% ανά δεκαετία από την ηλικία των 20 μέχρι των 90 ετών.

Στο Σχήμα 1.4 φαίνονται οι τυπικές καμπύλες τάσεων-παραμορφώσεων οστού διαφορετικών φαινόμενων πυκνοτήτων:



Σχήμα 1.4 Τυπικές καμπύλες τάσεων-παραμορφώσεων οστού διαφορετικών φαινόμενων πυκνοτήτων

Από το παραπάνω Σχήμα 1.4 παρατηρείται ότι το οστόν είναι σκληρό υλικό και έχει καμπύλη τάσεων-παραμορφώσεων παρόμοια με πολλά άλλα υλικά που είναι γνωστά στους μηχανικούς.

Λόγω του ότι τα οστά έχουν διαφορετική οργάνωση και δομή στις εγκάρσιες και επιμήκεις διατομές τους, παρουσιάζουν διαφορετική συμπεριφορά όταν φορτιστούν σε διαφορετικά επίπεδα, με τελικό αποτέλεσμα να παρουσιάζουν μεγαλύτερη αντοχή όταν φορτίζονται στις διευθύνσεις και στα επίπεδα φυσιολογικής φόρτισης, δηλαδή αποτελούν ανισότροπα υλικά

Μέσα στους μικροχώρους και σωληνίσκους των οστών κυκλοφορούν υγρά που είναι υπεύθυνα για τις δύο χαρακτηριστικές γλοιοελαστικές ιδιότητές τους. Εάν εφαρμοσθεί σταθερή δύναμη πάνω σε ένα οστικό δοκίμιο αυτό προοδευτικά θα παραμορφωθεί και θα προκληθεί στο τέλος μια μόνιμη παραμόρφωση (ερπυσμός), ενώ αντίθετα εάν με την εφαρμογή μιας δυνάμεως προκληθεί μια σταθερή παραμόρφωση τότε με την πάροδο του χρόνου η δύναμη που απαιτείται για να διατηρήσει την παραμόρφωση αυτή ελαττώνεται (χαλάρωση). Αυτές οι δύο μηχανικές ιδιότητες παίζουν σημαντικό ρόλο, όταν τοποθετούνται στα οστά υλικά οστεοσυνθέσεως σε περιοχή κατάγματος και τμήματα

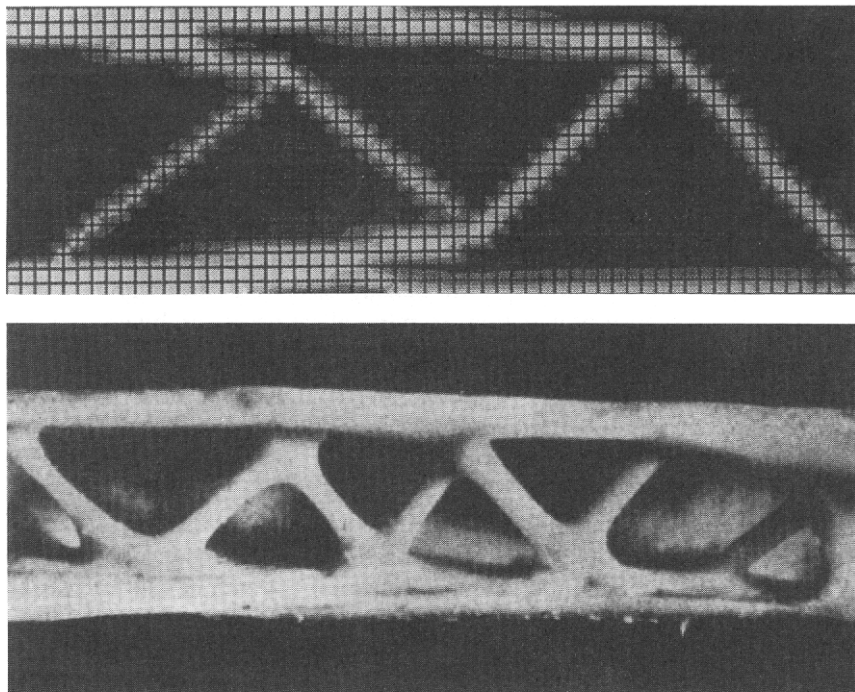
ολικών αρθροπλαστικών στις αρθρώσεις για την θεραπεία της αρθρίτιδας. Επίσης, η ευθρυπτότητα και η ευπλαστότητα των οστών αλλάζει σε σχέση με το ρυθμό φόρτισής τους. [1], [2], [15]

1.5 Βέλτιστος σχεδιασμός του οστού

Το πλέον αξιοσημείωτο χαρακτηριστικό του οστού είναι ότι ζει, ισχυρισμός που βασίζεται στην κυκλοφορία του αίματος. Το αίμα μεταφέρει υλικά, προς και από το αυτό, με αποτέλεσμα να μπορεί να αλλάξει, να αναπτυχθεί, ή να μετακινηθεί με απορρόφηση. Αυτές οι διαδικασίες φαίνεται να εξαρτώνται από τις αναπτυσσόμενες μηχανικές τάσεις.

Ένα οστόν που δε φορτίζεται μπορεί να γίνει ασθενέστερο όπως επίσης και ένα υπερφορτιζόμενο οστόν. Υπάρχει μια κατάλληλη περιοχή τάσεων που είναι βέλτιστη για το οστόν. Μαρτυρίες αυτών των βιολογικών δράσεων επικρατούν στην ορθοπεδική χειρουργική και την αποκατάσταση. Τοπική συγκέντρωση τάσεων που προέρχονται από ανεπτυχθείς κοχλίες σύνδεσης, περικόχλια και πείρους στη χειρουργική των οστών για παράδειγμα μπορούν να προκαλέσουν απορρόφηση και να καταλήξουν σε απώλεια αυτών των συνδέσεων με την πάροδο του χρόνου.

Πολλοί ερευνητές που μελέτησαν τη φυσική διεργασία της οστικής ανακατασκευής, διαισθάνθηκαν ότι η εξέλιξη του οστού οδηγεί στον βέλτιστο σχεδιασμό του: βέλτιστο με την έννοια που είναι οικεία στους μηχανολόγους όταν σχεδιάζουν ελαφρές κατασκευές όπως αεροσκάφη και διαστημόπλοια



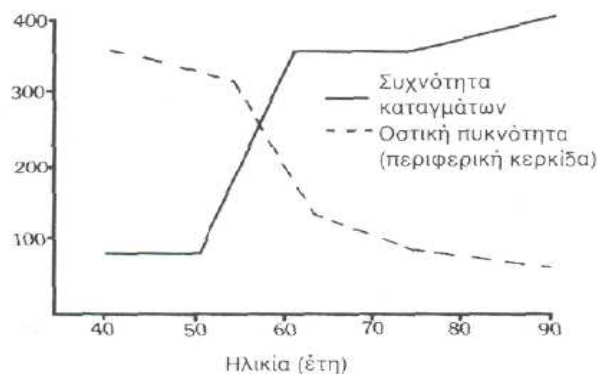
Σχήμα 1.5 Επάνω εικόνα: βελτιστοποίηση γεωμετρίας, κάτω εικόνα γεωμετρία οστού

Αυτή η έννοια περιλαμβάνει τη μεταβολή του εν γένει σχήματος της δομής καθώς και την μεταβολή της κατανομής του υλικού ώστε να επιτευχθεί ελάχιστο βάρος, έτσι ώστε υπό συγκεκριμένες συνθήκες φόρτισης να πληρούνται οι απαιτούμενες συνθήκες αντοχής και λειτουργικότητας. Μερικές πολύ γνωστές θεωρίες περί βέλτιστου σχεδιασμού περιλαμβάνουν (α) τη θεωρία της ομοιόμορφης αντοχής κατά την οποία κάθε τμήμα του υλικού έχει την ίδια μέγιστη τάση (μέγιστη ορθή αν είναι ψαθυρό, μέγιστη διατμητική αν είναι όλκιμο) υπό δοσμένες συνθήκες φόρτισης και (β) τη θεωρία της «τροχιακής» αρχιτεκτονικής (trajectorial architecture), που τοποθετεί υλικό μόνο στις διευθύνσεις μεταφοράς δυνάμεων και αφήνει κενά στις υπόλοιπες περιοχές.

Ο Roux (1895) διατύπωσε για το οστόν το *αξίωμα της λειτουργικής προσαρμοστικότητας*, η οποία σημαίνει την προσαρμογή ενός οργάνου στην λειτουργία του κατά την επιτέλεση αυτής, και το *αξίωμα του μέγιστου-ελάχιστου σχεδιασμού*, που σημαίνει ότι η μέγιστη αντοχή επιτυγχάνεται με το ελάχιστο του δομικού υλικού. Σημαντικές μελέτες έχουν γίνει από την εποχή της διατύπωσης των αξιωμάτων του Roux. Ο ίδιος προτείνει ότι το σπογγώδες οστόν αντιπροσωπεύει μια δομή τροχιών (1895). Ο Pauwels (1948) έδειξε ότι η αρχιτεκτονική της σπογγώδους ουσία είναι πράγματι τροχιακής μορφής. Η θεωρητική κατασκευή του Kummer (1972) ενός τριδιάστατου συστήματος τροχιών σε ένα μοντέλο μηρού ομοιάζει πολύ με τη δομή του πραγματικού οστού. [1], [21], [20]

1.6 Οστεοπόρωση

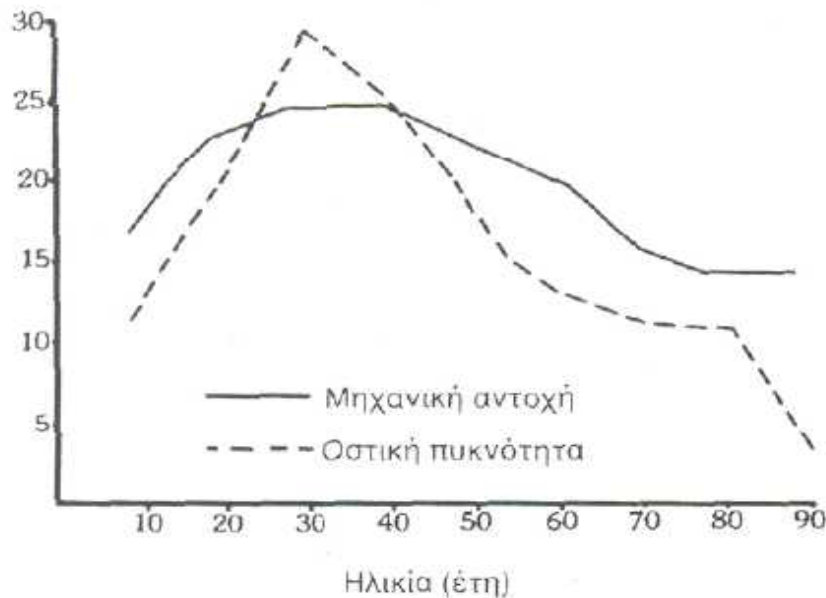
Η οστεοπόρωση είναι η πιο συχνή μεταβολική πάθηση των οστών και χαρακτηρίζεται από μείωση της οστικής μάζας και διαταραχή της μικροαρχιτεκτονικής του οστίτιου ιστού. Αυτό έχει σαν επακόλουθο την ελάττωση της μηχανικής αντοχής και την αυξημένη ευθραστότητα των οστών, τα οποία γίνονται επιρρεπή σε κατάγματα (Σχήμα 1.6).



Σχήμα 1.6 Αύξηση της συχνότητας καταγμάτων λόγω της ελάττωσης της οστικής πυκνότητας με την πάροδο του χρόνου

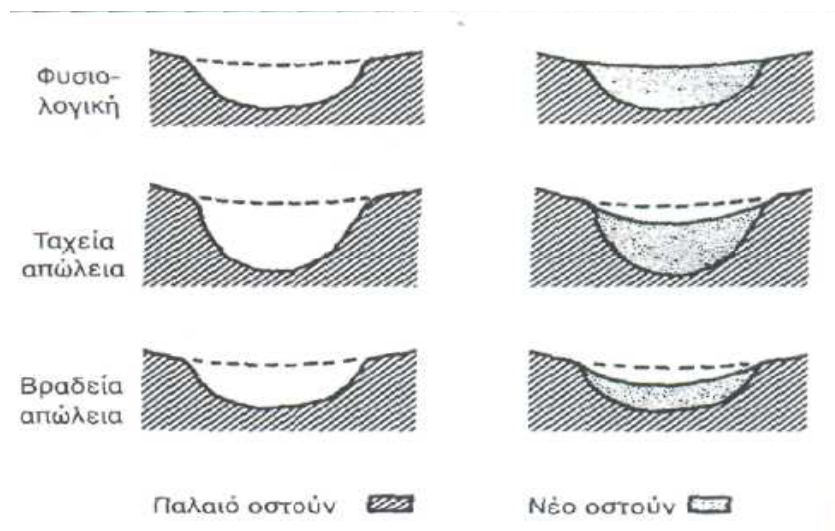
Η μηχανική αντοχή του οστού όμως δεν εξαρτάται μόνο από την πυκνότητά του (δηλαδή την ανά όγκο ποσότητά του) αλλά και από άλλους παράγοντες (Σχήμα 1.7). Επομένως, σύμφωνα με τις σημερινές απόψεις, η οστεοπόρωση είναι όχι μόνο μια ποσοτική διαταραχή του οστού, αλλά και ποιοτική μεταβολή που είναι δυνατόν να εκτιμηθεί με απευθείας μετρήσεις των εμβιομηχανικών ιδιοτήτων του. Στην κλινική πράξη είναι εφικτή

μόνο η μέτρηση της οστικής πυκνότητας με μη παρεμβατικές τεχνικές, ενώ δεν είναι δυνατή η ακριβής εκτίμηση των μηχανικών ιδιοτήτων του οστού.



Σχήμα 1.7 Μηχανική αντοχή και οστική πυκνότητα συναρτήσει της ηλικίας

Η βασική αιτία πρόκλησης της οστεοπόρωσης είναι η δημιουργία ενός μακροχρόνιου αρνητικού ισοζυγίου ανακατασκευής του οστού. Η υπερβολική μείωση της οστικής ανακατασκευής οδηγεί τελικά σε αύξηση της ευθραυστότητας του οστού.

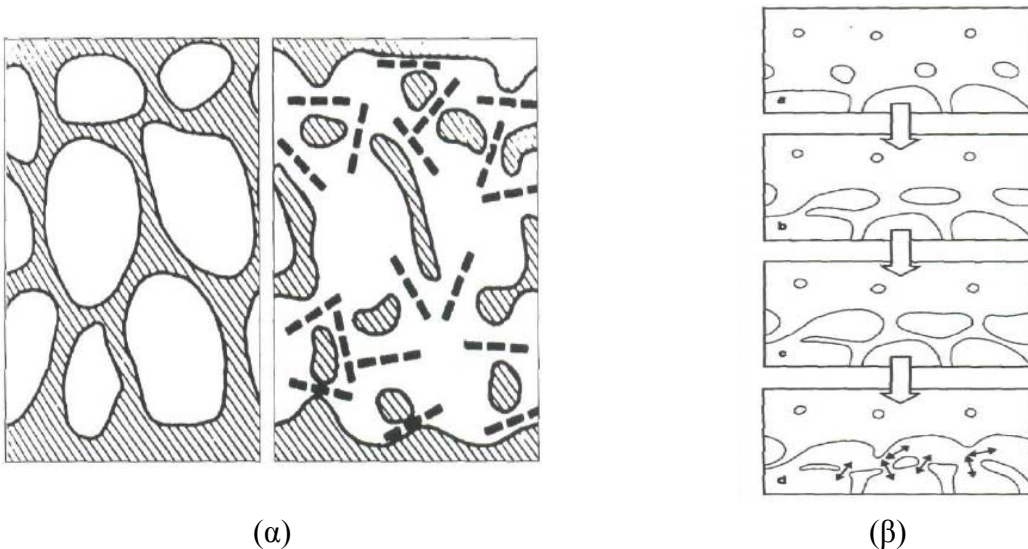


Σχήμα 1.8 Δημιουργία αρνητικού ισοζυγίου στο οστό

Στο Σχήμα 1.8 φαίνεται ότι το αρνητικό αυτό ισοζύγιο μπορεί να οφείλεται είτε σε αυξημένη οστεοκλαστική δραστηριότητα και συγχρόνως φυσιολογική οστεοβλαστική δράση (πράγμα που συμβαίνει κυρίως στην οστεοπόρωση τύπου I) είτε σε φυσιολογική οστεοκλαστική δράση, αλλά συγχρόνως σε μειωμένη οστεοβλαστική δραστηριότητα (συμβαίνει κυρίως στην οστεοπόρωση τύπου II). Στην περίπτωση έντονης

οστεοκλαστικής δράσης, οι κοιλότητες που δημιουργούν οι οστεοκλάστες είναι πολύ βαθύτερες από το πάχος του οστού που μπορούν να παράγουν οι οστεοβλάστες, πράγμα που οδηγεί σε αρνητικό ισοζύγιο. Αυτό συμβαίνει σε ηλικιωμένα άτομα.

Το αρνητικό ισοζύγιο, και στις δυο περιπτώσεις, επιφέρει προοδευτική λέπτυνση των οστεοδοκίδων και τελικά τις απορροφά τόσο στο σπογγώδες (Σχήμα 1.9(α)), όσο και στο φλοιώδες οστό, που η οστική απορρόφηση γίνεται με προοδευτική σπογγοποίηση του ενδοστικού δακτυλίου του φλοιού (Σχήμα 1.9(β)). Με τον τρόπο αυτό ο φλοιός γίνεται λεπτότερος και περισσότερο σπογγώδης, ενώ αντίστοιχα, οι οστεοδοκίδες του σπογγώδους οστού αραιώνουν και λεπταίνουν.



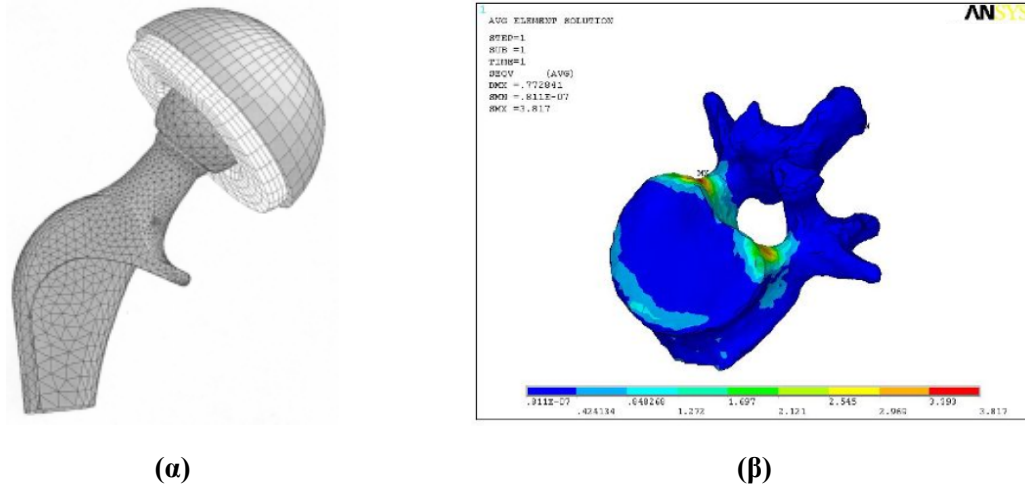
Σχήμα 1.9 (α) Προοδευτική λέπτυνση οστεοδοκίδων, (β) Οστική απορρόφηση που γίνεται με προοδευτική σπογγοποίηση του ενδοστικού δακτυλίου του φλοιού

1.7 Μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων στην εμβιομηχανική

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων αποτελεί σημαντικό εργαλείο σε διάφορες δραστηριοτήτων του μηχανικού. Αναπτύχθηκε, αρχικά το 1950 στην αεροπορική βιομηχανία και εξακολουθεί να εφαρμόζεται ευρέως μέχρι σήμερα για τον υπολογισμό και τη σχεδίαση πολλών σημαντικών βιομηχανικών εξαρτημάτων. Η πρώτη εφαρμογή της μεθόδου στον τομέα της εμβιομηχανικής έγινε το 1972. Από τότε ο αριθμός των εφαρμογών στο συγκεκριμένο τομέα έχει πολλαπλασιαστεί με σκοπό τη λεπτομερειακή μελέτη και ανάλυση της μηχανικής συμπεριφοράς των ανθρωπίνων οργάνων.

Η μελέτη ανθρώπινων μελών εκ φύσεως είναι πολύπλοκο πρόβλημα λόγω του γεγονότος ότι βρίσκονται μέσα στον ανθρώπινο οργανισμό και είναι συνεχώς μεταβαλλόμενα. Η αύξηση της υπολογιστικής ισχύος των ηλεκτρονικών υπολογιστών, που παρατηρείται στις μέρες μας, δίνει τη δυνατότητα μελέτης και ανάλυσης αυτών των σύνθετων προβλημάτων. Ειδικότερα στην ορθοπαιδική επιστήμη, έχει αποκτήσει μεγάλη σημασία εξαιτίας του ακανόνιστου σχήματος των οστών, της μεταβλητότητας των μηχανικών τους ιδιοτήτων και του ενδιαφέροντος μελέτης των τάσεων που δημιουργούνται όταν ένα εμφύτευμα τοποθετείται σε ένα οστό. Μια περίπτωση εφαρμογής της μεθόδου των

πεπερασμένων στοιχείων στην ορθοπεδική παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.10 (α) όπου φαίνεται ένα παράδειγμα μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων που αποτελείται από ένα εμφύτευμα ισχίου και την άρθρωσή του. Στην περίπτωση αυτή ασκούνται δυνάμεις σε κάποια στοιχεία στην επιφάνεια της κεφαλής του εμφυτεύματος από την άρθρωση



Σχήμα 1.10 (α) Μοντέλο ισχίου με πεπερασμένα στοιχεία (β) Αποτελέσματα ανάλυσης Πεπερασμένων στοιχείων (Π.Σ. σε ένα σπόνδυλο)

Πέρα από την περίπτωση των εμφυτευμάτων μελετώνται και περιπτώσεις μεμονωμένων οστών όπως στο Σχήμα 1.10 (β) όπου φαίνεται τα αποτελέσματα ανάλυσης πεπερασμένων στοιχείων (Π.Σ.) σε ένα σπόνδυλο με σκοπό την καλύτερη κατανόηση της λειτουργίας της σπονδυλικής στήλης και την αντιμετώπιση των ιατρικών προβλημάτων που συνδέονται με αυτήν.

Η μοντελοποίηση με πεπερασμένα στοιχεία ιδιαίτερα στην περίπτωση της εμβιομηχανικής δίνει πληροφορίες, σε ορισμένες περιπτώσεις, που τα εργαστηριακά πειράματα αδυνατούν να δώσουν, χωρίς βέβαια να αμελείται η σημαντική συμβολή των πειραμάτων για την επιβεβαίωση των υπολογιστικών μοντέλων. Για παράδειγμα, καθιστά δυνατή τη μελέτη ενός τεραστίου εύρους συνθηκών που βοηθά στην καλύτερη και σε βάθος κατανόηση της εμβιομηχανικής οποιουδήποτε συστήματος. Επιπρόσθετα, παρέχει τη δυνατότητα μελέτης διαφορετικών μεθόδων θεραπείας και χειρουργικών επεμβάσεων, χωρίς κανένα κόστος για την υγεία του ασθενούς. Έτσι, συνεισφέρει στην επιλογή της καταλληλότερης θεραπείας ή χειρουργικής επέμβασης, αλλά και στη βελτίωση των εμφυτευμάτων που χρησιμοποιούνται από τους γιατρούς.

1.7.1 Περιγραφή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων αποτελεί μια προσεγγιστική μέθοδο της αριθμητικής ανάλυσης. Μέσω της μεθόδου αυτής γίνεται φυσική προσέγγιση του προβλήματος διακριτοποιώντας το χώρο σε επιμέρους χωρία (πεπερασμένα στοιχεία) στα οποία ορίζονται εξισώσεις που έχουν ακριβή λύση. Εφόσον τα προβλήματα της μηχανικής

του παραμορφώσιμου στερεού περιγράφονται με διαφορικές εξισώσεις μερικών παραγώγων μπορούν να επιλυθούν με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Οι διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν τα προβλήματα της μηχανικής προκύπτουν από σχέσεις όπως οι ακόλουθες [22], [23]:

Σύνδεση ανηγμένων παραμορφώσεων-μετατοπίσεων:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.1)$$

και

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad (1.2)$$

οι οποίες συνοψίζονται ως $\varepsilon = Lu$

Εξισώσεις συμβιβαστού των παραμορφώσεων:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_i}{\partial j^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_j}{\partial i^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{ij}}{\partial i \partial j} \quad (1.3)$$

όπου τα i, j είναι x, y ή y, z ή z, x .

Εξισώσεις ισορροπίας:

$$\frac{\partial \sigma_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{iy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{iz}}{\partial z} + F_i = 0 \quad (1.4)$$

όπου τα $i=x,y,z$ και F_i οι εξωτερικές δυνάμεις.

Κάθε πρόβλημα που εκφράζεται με διαφορικές εξισώσεις έχει κάποιες συνοριακές συνθήκες. Έτσι, και στα συγκεκριμένα προβλήματα έχουμε φυσικές συνοριακές συνθήκες (φορτίσεις κλπ) και βασικές συνοριακές συνθήκες (συνθήκες Dirichlet και Neumann) (δεσμεύσεις, στηρίξεις κλπ.).

Για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος χρησιμοποιείται η αρχή των δυνατών έργων [23], 0. Έστω σ_{ij} και ε_{ij} είναι οι ταυστες των τάσεων και των ανηγμένων παραμορφώσεων αντίστοιχα και P_i, δ_i είναι τα φορτία και οι δυνατές μετακινήσεις. Το έργο που προκαλείται από τα φορτία πρέπει να ισούται με το δυνατό έργο των παραμορφώσεων. Δηλαδή:

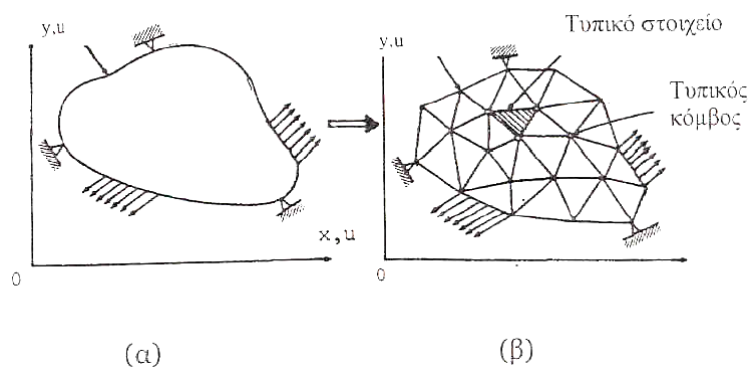
$$\sum P_i \delta_i = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \quad (1.5)$$

Η εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων προϋποθέτει το διαχωρισμό του πεδίου του προβλήματος, που καταλαμβάνει κάποιο πεπερασμένο όγκο, σε πεπερασμένο αριθμό στοιχείων απλούστερου σχήματος. Καθένα από τα πεπερασμένα στοιχεία στα οποία χωρίζεται το πεδίο του προβλήματος αποτελείται από κάποιο αριθμό κόμβων, ενώ κάθε κόμβος έχει κάποιους βαθμούς ελευθερίας. Το πρόβλημα λοιπόν ανάγεται στην απόδοση τιμών σε αυτούς τους βαθμούς ελευθερίας. Τα στοιχεία συνδέονται σε κάποιους κοινούς κόμβους που συνεπάγεται κοινούς βαθμούς ελευθερίας στο συγκεκριμένο σημεία για 2 ή περισσότερα πεπερασμένα στοιχεία. Το πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί ως εξής [23], 0.

$$[K] \cdot u = F \quad (1.6)$$

Όπου u είναι διάνυσμα διάστασης n , όπου n είναι το σύνολο των βαθμών ελευθερίας του προβλήματος. Κάποιοι από τους βαθμούς ελευθερίας είναι δεσμευμένοι και αποτελούν τις συνθήκες Dirichlet. Το F είναι επίσης διάνυσμα διάστασης n και περιέχει τις συνοριακές συνθήκες των φορτίσεων (πιέσεις στις πλευρές των στοιχείων, μαζικές δυνάμεις) οι οποίες μεταφράζονται με κομβικές δυνάμεις ή ροπές, ανάλογα με το είδος του βαθμού ελευθερίας που αναφέρονται, μεταφορά ή στροφή. Ο πίνακας $[K]$ έχει διαστάσεις $n \times n$ και καλείται μητρώο δυσκαμψίας, καθώς δείχνει τη δυσκαμψία του προβλήματος να αντιδράσει σε κάποια εξωτερική φόρτιση- ή αλλιώς την απόκριση του συστήματος σε εξωτερικά αίτια. Περιλαμβάνει δε τη γεωμετρία και τις μηχανικές ιδιότητες των υλικών του προβλήματος. Προκειμένου να επιλυθεί το πρόβλημα επιλύεται το σύστημα $[K] \cdot u = F$ ως προς u . Αφού προσδιοριστούν οι τιμές των u με κατάλληλες αναγωγές μπορούν να προκύψουν και άλλα παράγωγα μεγέθη όπως οι τάσεις.

Στο Σχήμα 1.11 Σχήμα 1.12 παρουσιάζεται η κατάστρωση ενός προβλήματος με πεπερασμένα στοιχεία. Φαίνεται το πεδίο του προβλήματος, η διακριτοποίησή του σε πεπερασμένα στοιχεία που συνδέονται σε κόμβους καθώς και οι συνοριακές συνθήκες.



Σχήμα 1.11 Κατάστρωση προβλήματος με πεπερασμένα στοιχεία

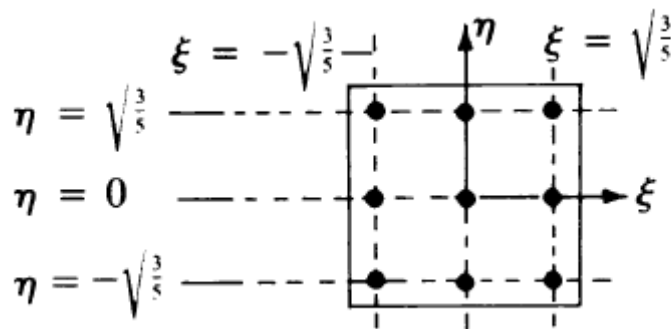
1.7.2 Σχηματισμός μητρώου δυσκαμψίας

Προκειμένου να σχηματιστεί ο πίνακας δυσκαμψίας $[K]$ της συνολικής κατασκευής γίνεται υπολογισμός των επιμέρους τοπικών μητρώων δυσκαμψίας του κάθε πεπερασμένου στοιχείου $[K_i]$. Για τον υπολογισμό των μητρώων απαιτείται ο ορισμός των συναρτήσεων μορφής, οι συναρτήσεις μορφής είναι πολυώνυμα. Ανάλογα με το βαθμό των πολυωνύμων λαμβάνεται και ανάλογη τάξη στα στοιχεία. Έτσι κάνοντας χρήση πολυωνύμων πρώτου βαθμού, στα στερεά προκύπτουν εξαπλευρικά ισοπαραμετρικά στοιχεία 8 κόμβων ή πυραμίδες 4 κόμβων. Αν χρησιμοποιηθούν πολυώνυμα ανώτερης τάξης, προκύπτουν στοιχεία περισσότερων κόμβων όπως εξαπλευρικά στοιχεία 20 κόμβων ή πυραμίδες 10 κόμβων. Μεγαλύτερη τάξη στοιχείων συνεπάγεται και καλύτερη ακρίβεια στη λύση, σημειώνεται ότι τα ισοπαραμετρικά στοιχεία (8 κόμβων) έχουν ιδιαίτερα καλύτερη ακρίβεια σε σχέση με τις πυραμίδες (4 κόμβων) λόγω του ότι

χρησιμοποιείται η αριθμητική ολοκλήρωση με τη μέθοδο των σημείων Gauss και δίνεται η δυνατότητα υπολογισμού του τασικού και παραμορφωσιακού πεδίου σε σημεία μέσα στον όγκο του και όχι μόνο μίας τιμής ανά στοιχείο. Η ακρίβεια στη λύση μπορεί να επιτευχθεί και πυκνώνοντας το πλέγμα των πεπερασμένων στοιχείων όπου και σε αυτή την περίπτωση υπάρχει αύξηση των βαθμών ελευθερίας. Η αύξηση της ακρίβειας είτε με την αύξηση της τάξης (περισσότεροι κόμβοι ανά στοιχείο) είτε με την πύκνωση του πλέγματος (περισσότερα στοιχεία) έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση και του υπολογιστικού χρόνου.

1.7.3 Υπολογισμός Ισοπαραμετρικών Πεπερασμένων Στοιχείων

Τα πολυώνυμα μορφής εκφράζονται σε ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων (ξ, η, ζ) το οποίο έχει κέντρο στο εσωτερικό του στοιχείου. Οι τιμές των συντεταγμένων στο τοπικό σύστημα παίρνουν τιμές από -1 έως 1. Τα πολυώνυμα μορφής παραγωγίζονται εύκολα ως προς τα (ξ, η, ζ) και σχηματίζουν τα μητρώα $[B_i]$ με τις παραγώγους τους. Στο Σχήμα 1.12 φαίνονται τα σημεία ολοκλήρωσης Gauss για ένα διδιάστατο στοιχείο. Για τριδιάστατα στοιχεία υπάρχουν τρία τέτοια διατεταγμένα επίπεδα.



Σχήμα 1.12 Σημεία ολοκλήρωσης Gauss σε ένα επίπεδο στοιχείο

Προκειμένου να αυξηθεί η ακρίβεια ολοκλήρωσης με τη μέθοδο Gauss αυξάνεται ο αριθμός σημείων ολοκλήρωσης. Ο τελικός τύπος για το σχηματισμό του μητρώου δυσκαμψίας ενός στοιχείου $[K_e]$ είναι:

$$K_e = \int_V [B]^T [D] [B] dV \quad (1.7)$$

Ο παραπάνω τύπος με τη βοήθεια της αριθμητικής ολοκλήρωσης μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα διακριτών όρων:

$$K_e = \sum_{i=1}^n H_i [B(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)]^T [D] [B(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)] |J(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)| \quad (1.8)$$

Οι H_i είναι συντελεστές της ολοκλήρωσης Gauss σε n διακριτά σημεία με συντεταγμένες (ξ_i, η_i, ζ_i) , ενώ η J είναι η Ιακωβιανή μετασχηματισμού από το καθολικό σύστημα συντεταγμένων X, Y, Z στο ξ, η, ζ . Το $[D]$ είναι το μητρώο ελαστικότητας.

1.7.4 Επίλυση του συστήματος

Αφού επιλυθεί το σύστημα $[K] \cdot u = F$ προκύπτουν οι τιμές των u . Ας θεωρήσουμε ότι τα u είναι μετατοπίσεις στους βαθμούς ελευθερίας (κατά x, y, z στους κόμβους). Μετά την επίλυση, πέραν των μετατοπίσεων χρήσιμα μεγέθη είναι οι παραμορφώσεις και οι τάσεις καθώς και διάφορα άλλα παράγωγα μεγέθη. Με αριθμητικές παραγωγίσεις του πεδίου είναι δυνατό να υπολογιστούν οι ανηγμένες παραμορφώσεις ($\varepsilon = Lu$) καθώς και οι τάσεις στο πεδίο του προβλήματος ($\sigma = E \varepsilon$). Η κατανομή του πεδίου των μετατοπίσεων είναι συνεχής, δεν ισχύει όμως το ίδιο και για τα παράγωγα μεγέθη τα οποία ενδέχεται να μην έχουν συνέχεια. Σε περίπτωση που τα πολυώνυμα μορφής είναι 1^{ου} βαθμού, οι παράγωγοι είναι σταθεροί αριθμοί και η κατανομή τους για κάποιο στοιχείο είναι σταθερή. Φαίνεται λοιπόν ότι με αύξηση της τάξης του μεγέθους των στοιχείων, βελτιώνεται η ακρίβεια των αποτελεσμάτων.

1.8 Αντίστροφος Σχεδιασμός– Ανάπτυξη Ψηφιακού Μοντέλου – Ταχεία Κατασκευή Πρωτοτύπων

Η διαδικασία του *αντίστροφου σχεδιασμού* (Reverse Engineering – RE) είναι η δημιουργία του συνόλου των τεχνικών δεδομένων που περιγράφουν πλήρως ένα υφιστάμενο αντικείμενο όταν αυτά είναι για διάφορους λόγους ελλιπή, ανύπαρκτα ή απλά δεν είναι διαθέσιμα.

Αφετηρία σε μια τέτοια διαδικασία είναι το πραγματικό αντικείμενο και ζητούμενο ένα τριδιάστατο *ψηφιακό μοντέλο* (3D CAD Model). Η δημιουργία ενός τέτοιου μοντέλου, αξιοποιούμενο από τα συστήματα CAD/CAM/CAE, ανοίγει το δρόμο για την περαιτέρω ανάλυση (π.χ. με τη μέθοδο των Π.Σ.) και τη σχεδιαστική και κατασκευαστική βελτιστοποίηση του αρχικού αντικειμένου (π.χ. στην περίπτωση μεταλλικού εμφυτεύματος που φαίνεται στο Σχήμα 1.13)



Σχήμα 1.13 Μεταλλικό εμφύτευμα ισχίου

Σε κάποιου ειδικού τύπου προβλήματα, όπως είναι αυτά που αντιμετωπίζονται στο χώρο της ιατρικής και της Εμβιομηχανικής τεχνολογίας, η κατανόηση ενός φυσικού πραγματικού αντικειμένου μπορεί να έχει μεγάλη σημασία. Έτσι, ενώ ένα μοντέλο CAD σε μια οθόνη Η/Υ ή κάποια τυπωμένα σχέδια δεν είναι αρκετά για το σκοπό αυτό, ένα φυσικό πρωτότυπο στη φυσική του κλίμακα είναι αυτό που μπορεί να δώσει σαφή και πραγματική αντίληψη της μορφής, γεωμετρίας και λειτουργίας του αντικειμένου.

Η τεχνολογία της *Ταχείας Κατασκευής Προτοτύπων* (Rapid Prototyping – RP) δίνει ακριβώς αυτή τη δυνατότητα της γρήγορης και με ακρίβεια κατασκευής ενός φυσικού πρωτοτύπου ενός αντικειμένου για το οποίο υπάρχει το τριδιάστατο μοντέλο. Η διαδικασία για την κατά το δυνατόν λεπτομερέστερη τριδιάστατη αποτύπωση της γεωμετρίας της υπό εξέταση δομής μπορεί να γίνει με τους ακόλουθους τρόπους:

- Οπτική αναγνώριση (στατικές και δυναμικές εικόνες: π.χ. φωτογραφίες, CCD κάμερα)
- Ψηφιοποίηση με σαρωτές τύπου laser (laser digitizers)
- Μηχανική ψηφιοποίηση ακίδας (μηχανές CMM: Coordinate Measuring Machines)
- Επεξεργασία αρχείων από αξονικούς τομογράφους (CT)
- Επεξεργασία ακτινογραφιών

Κεφάλαιο 2ο Ανακατασκευή Οστού: Θεωρίες & Μαθηματικά Μοντέλα

2.1 Εισαγωγή

Σημαντικό έργο στην περιγραφή των μεταβολών στο οστόν, αποτελεί η συλλογή έργων του Γερμανού ορθοπεδικού Julius Wolff (1892), ο οποίος διατύπωσε τον *νόμο μετασηματισμού των οστών* (μεταβολή της αρχιτεκτονικής κάτω από παθολογικές μεταβολές της εξωτερικής μορφής και της φόρτισης των οστών). Συμφωνά με αυτόν το νόμο, στο σύγγραμμα του «Das Gesetz der Transformation der Knochen», η μορφή του οστού διαμορφώνεται ανάλογα με τη λειτουργία του. *«Κάθε αλλαγή στην λειτουργία του οστού ακολουθείται από κάποιες αλλαγές στην αρχιτεκτονική και εξωτερική διάπλαση σε συμφωνία με τους μαθηματικούς νόμους»* [15].

Μετά τον Wolff ακολούθησαν πολλοί ερευνητές που είχαν ως στόχο την κατανόηση των μηχανισμών που διέπουν την ανακατασκευή του οστού. Παρόλα αυτά, υπάρχουν ακόμα ερωτήματα που απασχολούν την επιστήμη, τα οποία δεν έχουν διασαφηνιστεί πλήρως.

2.2 Μαθηματική πρόβλεψη της οστικής ανακατασκευής

Η σχέση μεταξύ της τάσης ή της παραμόρφωσης από τη μια μεριά, και του ρυθμού ανακατασκευής από την άλλη δεν έχει, μέχρι στιγμής, ποσοτικοποιηθεί με ακρίβεια λόγω πολυπλοκότητας σε πειραματικό επίπεδο.

Από την πληθώρα των θεωριών που εντοπίζονται στη βιβλιογραφία προκύπτουν παράγοντες που επηρεάζουν το μηχανισμό ενεργοποίησης οστικής ανακατασκευής σε κατάσταση τροπής [1]. Τέτοιοι είναι:

- Η μεταβολή της διαλυτότητας του υδροξυαπατίτη, αυξανόμενη ή μειούμενη εξαρτώμενη από την επιβαλλόμενη τάση ή τροπή.
- Εξωκυτταρικό υγρό που αντιδρά στις επιβαλλόμενες δυνάμεις.
- Ευθεία αντίδραση των κυττάρων στην κατάσταση τάσης ή παραμόρφωσης
- Μαγνητικά πεδία που προκαλούν αντίδραση στο κύτταρο
- Το πιεζοηλεκτρικό ρεύμα
- Μικροθράυση του οστού λόγω της επιβαλλόμενης φόρτισης.

Ένας ή οποιοσδήποτε συνδυασμός αυτών θα μπορούσε να είναι ο μηχανισμός οστικής ανακατασκευής, ή ακόμα και ένας τρίτος παράγοντας που μέχρι στιγμής δεν έχει καθοριστεί. Από τα ανωτέρω είναι σαφές ότι ένα οστόν αντιδρά ανάλογα με τις τάσεις και τις τροπές που ασκούνται πάνω του. Στο παρελθόν έχουν γίνει απόπειρες καταγραφής εξισώσεων για την οστική ανακατασκευή.

Ανάμεσα στις μαθηματικές σχέσεις που έχουν αναπτυχθεί για την μοντελοποίηση του φαινομένου της οστικής ανακατασκευής, κάποιες προσομοιώνουν το αίτιο και το αποτέλεσμα χωρίς ιδιαίτερη έμφαση στο μηχανισμό (φαινομενολογικά μοντέλα), ενώ κάποιες άλλες ενσωματώνουν τμήματα των βιολογικών διαδικασιών (μηχανιστικά φαινόμενα). Αυτές οι εξισώσεις αναπτύσσονται αναλυτικότερα στις παραγράφους που ακολουθούν:

2.2.1 Kummer (1972)

$$R = \alpha \left[(\sigma_s - \sigma_u)^2 (\sigma_i - \sigma_s)^2 - (\sigma_i - \sigma_s)^3 \right] \quad (2.1)$$

όπου

R , το δυναμικό οστικής ανακατασκευής (θετικό παριστάνει εναπόθεση,

αρνητικές τιμές παριστάνουν απορρόφηση)

α , συντελεστής αναλογίας

σ_i , πραγματική τάση

σ_s , βέλτιστη τάση (η σχέση της με την αστοχία δίνει το συντελεστή ασφαλείας)

σ_u , κατώτερο όριο ανοχής

σ_o , ανώτερο όριο ανοχής (ισοδύναμο με το $-\sigma_u$)

Όπως τονίζει ο Kummer [1], αυτή η σχέση θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για την ανάπτυξη ενός μοντέλου για την πρόβλεψη της ανακατασκευής

2.2.2 Gjelsvik (1973)

$$U = \alpha Px - \dot{u} \quad \text{για } P \geq 0 \quad (2.2)$$

$$U = \beta Px - \dot{u} \quad \text{για } P \leq 0 \quad (2.3)$$

όπου

U , ο προς τα έξω ρυθμός κίνησης του οστού κάθετα προς την επιφάνεια του \dot{u} , μια διαδικασία απορρόφησης που λαμβάνει χώρα σε ένα σταθερό ρυθμό ανεξάρτητα από οποιαδήποτε δραστηριότητα.

P_x , η κατά τον άξονα x συνιστώσα του διανύσματος πόλωσης, $P_x = d_{14} \sigma_{yx}$

α, β , σταθερές έτσι ώστε $\alpha > \beta > -\alpha$

d_{14} ο όρος από το μητρώο πιεζοηλεκτρισμού

σ_{yx} , η διατμητική τάση

Σε αυτό το μοντέλο ο Gjelsvik [26] ξεκινά από τη θεώρηση ότι η οστική ανακατασκευή εξαρτάται από την ηλεκτρική πόλωση που εισάγεται μέσω των αναπτυσσόμενων τάσεων. Το μοντέλο του χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της συμπεριφοράς του οστού υπό

αξονικά καμπτικά φορτία και για την περίπτωση θραύσης κάνοντας κάποιες παραδοχές. Θεωρεί ότι η ανακατασκευή είναι κάθετη προς την επιφάνεια, ενώ ο διατμητικός όρος είναι η μόνη σημαντική συνιστώσα στην ανακατασκευή. Το υλικό που αποθηκεύεται είναι χωρίς τάσεις και οι αριστερές και δεξιές πλευρές του σώματος παράγουν πόλωση αντίθετου πρόσημου. Ο Gjelsvik δείχνει ότι η αντίδραση του οστού προβλέπεται ποσοτικά με τον αλγοριθμο ανακατασκευής.

2.2.3 Cowin (1976)

Από το 1976-1990 ο Cowin [15] έχει δημοσιεύσει μια σειρά άρθρων με άλλους συγγραφείς, στα οποία η ελαστικότητα παρουσιάζεται σαν παράγοντας που κυβερνά την ανακατασκευή του οστού. Αυτό συμπυκνώνεται σε δύο εξισώσεις που έχουν εφαρμοσθεί στην ανακατασκευή:

$$C = U_{ij}(n, \bar{o}) [\varepsilon_{ij}(\bar{o}) - \varepsilon^c_{ij}(\bar{o})] \quad (2.4)$$

όπου

- U_{ij} , η ταχύτητα ανακατασκευής της επιφάνειας στην κάθετη προς αυτή διεύθυνση
- $C_{ij}(\bar{o})$, συντελεστές ρυθμού ανακατασκευής επιφάνειας εξαρτώμενοι από το κάθετο προς την επιφάνεια διάνυσμα και το σημείο \bar{o}
- $\varepsilon_{ij}(\bar{o})$, η τροπή στο σημείο \bar{o}
- $\varepsilon^c_{ij}(\bar{o})$, τανυστής τροπής αναφοράς στο σημείο για το οποίο δε συμβαίνει καμμία ανακατασκευή

και

$$\dot{e} = a(e) + A_{ij}(e)\varepsilon_{ij} + B_{ijk}(e)\varepsilon_{ij}\varepsilon_{km} \quad (2.5)$$

όπου,

- $a(e), A_{ij}(e)\varepsilon_{ij}, B_{ijk}(e)$ είναι ιδιότητες υλικού
- ε_{ij} είναι ο τανυστής των τροπών
- ε_{km} είναι ο τανυστής των μετατοπίσεων στον γενικευμένο νόμο του Hooke
- e είναι η μεταβολή στο κλάσμα όγκου
- \dot{e} είναι ο ρυθμός μεταβολής του κλάσματος όγκου

Η Εξίσωση (2.4) ελέγχει την επιφανειακή ανακατασκευή του οστού, ενώ η δεύτερη (2.5) την εσωτερική ανακατασκευή μέσω της αύξησης ή μείωσης του κλάσματος όγκου του εκάστοτε υλικού. Η εσωτερική και εξωτερική ανακατασκευή θεωρούνται ανεξάρτητα, όπως προτάθηκε από τον Frost.

Γίνεται η παραδοχή ότι ο ρυθμός επιφανειακής ανακατασκευής είναι κάθετος προς την επιφάνεια του οστού και είναι ανάλογος της απόκλισης των τοπικών τρόπων μετρημένων από τη στάθμη τιμών αναφοράς ε^c_{ij} .

Ο αλγόριθμος της εσωτερικής ανακατασκευής εγκαθιδρύεται κάνοντας το μητρώο δυσκαμψίας ανεξάρτητο από το κλάσμα όγκου του εκάστοτε μητρώου υλικού του οστού. Τα μεγαλύτερα προβλήματα με αυτήν την εργασία είναι πώς να υπολογίσει κανείς τις τροπές ε^c_{ij} που είναι αρχικά παρούσες στο σώμα και τις σταθερές υλικού. Η πειραματική μέτρηση αυτών των τιμών είναι μια πολύ δύσκολη, αν όχι αδύνατη διαδικασία.

2.2.4 Hart (1983)

Ο Hart [5] μελέτησε τους βιολογικούς παράγοντες C_{ij} του μοντέλου που ανέπτυξε ο Cowin και οι συνεργάτες του για την επιφάνεια ανακατασκευής με περισσότερη λεπτομέρεια. Αυτό το μοντέλο είναι ανεξάρτητο από το πλήθος των παρόντων οστεοβλαστών και οστεοκλαστών, τη δράση τους και την επιφάνεια πάνω στην οποία δρουν. Αυτή η δράση συσχετίστηκε με ένα μηχανισμό τροπής ή δραστηριοποίησης που ελέγχει την ανακατασκευή.

Ο αλγόριθμος επιφανειακής ανακατασκευής είναι λογικός από φυσικής σκοπιάς αλλά οι βιολογικές συσχετίσεις γίνονται τυχαία καθώς δεν υπάρχει επαρκής πειραματική πληροφορία. Έτσι, η επιφανειακή ανακατασκευή που προτάθηκε από τον Hart είναι ο αλγόριθμος του Cowin εφαρμοσμένος με χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων. Αυτός χρησιμοποιήθηκε, για τη γραμμική περίπτωση, στην ακόλουθη μορφή :

$$\dot{d} = C_1 \cdot \bar{\varepsilon} + C_2 \quad (2.6)$$

Μια επιπλέον δευτεροβάθμια έκφραση ανακατασκευής προτάθηκε ως εξής:

$$\dot{d} = C^0_1 \cdot \bar{\varepsilon}^2 + C^0_2 \cdot \bar{\varepsilon} + C^0_3 \quad (2.7)$$

όπου

$C^0_1, C^0_2, C^0_3, C_1, C_2$ είναι τανυστές εξαρτώμενοι από βιολογικές δράσεις

$\bar{\varepsilon}$ είναι το μητρώο τροπής

\dot{d} είναι η ταχύτητα της οστικής ανακατασκευής

Έτσι, δίνοντας τιμές στις φυσιολογικές σταθερές, αυτό το ποσοτικό μοντέλο θα μπορούσε να ενσωματώσει το άγνωστο βιολογικό φαινόμενο μέσα σε ένα μαθηματικό τύπο οδηγώντας σε μία αριθμητική λύση.

Η εσωτερική ανακατασκευή αντιμετωπίζεται ρύθμιση της τιμής του μέτρου του Young εξαρτώμενο από το χρόνο.

Η πρόοδος που έγινε από το Hart έγκειται στο ότι συμπεριλαμβάνεται ένας όρος που επιτρέπει να συμπεριληφθούν στο μοντέλο ο ρυθμός τροπής και η χρονική διάρκεια. Εκτενής αναφορά στο μοντέλο του Hart γίνεται σε επόμενο κεφάλαιο.

2.2.5 Carter et al. (1986)

Οι Carter και Fyhie [6] έχουν λάβει την πυκνότητα της ενέργειας της ελαστικής παραμόρφωσης σαν τον προεξέχοντα παράγοντα αναπτύσσοντας μία θεωρία που είναι δυνατόν να προσαρμοσθεί στη φαινόμενη πυκνότητα, ρ , χρησιμοποιώντας την δρώσα τάση, σ_{eff} . Σε αυτό το μοντέλο έγινε η παραδοχή ότι το οστόν είναι αυτοπροσαρμοζόμενο σε όρους προσανατολισμού των δοκίδων (trabeculae) με τις κύριες διευθύνσεις των τάσεων, και ότι το φλοιώδες οστό είναι μια πιο πυκνή παραλλαγή του σπογγώδους. Προκειμένου να διερευνηθεί αυτό, έχει χρησιμοποιηθεί ο ακόλουθος τύπος :

$$\rho = A \cdot \sigma_{eff}^c \quad (2.8)$$

Η δρώσα τάση προβλέφθηκε χρησιμοποιώντας είτε κριτήρια αστοχίας είτε ενεργειακά κριτήρια, με c μια σταθερά εξαρτώμενη από το κριτήριο που έχει επιλεγεί.

Το μοντέλο χρησιμοποιήθηκε για να προβλέψει την πυκνότητα του υπόψη οστού. Εάν το ρ τείνει στο μηδέν τότε γίνεται παραδεκτό ότι δεν υπάρχει καθόλου υλικό και τίθεται ένα μέγιστο στην πυκνότητα ώστε να συμφωνεί με τη μέγιστη πυκνότητα του οστού. Ωστόσο, το μοντέλο αυτό απεδείχθη ανακριβές σε επιφάνεια πλησίον ενός εμφυτεύματος που μελετήθηκε [Fyhie]. Η θεωρία που παρουσιάστηκε εδώ δεν συμπεριλαμβάνει τον προσανατολισμό των δοκίδων παρόλο που η γενικευμένη θεωρία του Fyhie το επιτρέπει. Ωστόσο, η πλήρης θεωρία του Fyhie, μέχρι στιγμής, δεν έχει εφαρμοσθεί στην περίπτωση της οστικής ανακατασκευής.

2.2.6 Huiskes (1987)

Στα άρθρα του ο Huiskes [28] συνδύασε την εργασία των Cowin και Carter προκειμένου να παράγει ένα μοντέλο βασισμένο στην πυκνότητα της ελαστικής ενέργειας παραμόρφωσης (Stress Energy Density – SED) που προβλέπει ανεξάρτητα την επιφανειακή και εσωτερική ανακατασκευή:

$$\frac{dE}{dt} = C_e (S - S_n) \quad (2.9)$$

$$\frac{dX}{dt} = C_x (S - S_n) \quad (2.10)$$

όπου,

C_e και C_x είναι σταθερές

S είναι η πραγματική τοπική πυκνότητα της ελαστικής ενέργειας

$$\text{παραμόρφωσης, } \left(S = \frac{1}{2 \cdot \varepsilon_{ij} \cdot \sigma_{ij}} \right)$$

S_n είναι η ομοστατική (homeostatic) πυκνότητα της ελαστικής ενέργειας παραμόρφωσης

E είναι το μέτρο του Young

X είναι η κάθετη προς την επιφάνεια του οστού μετατόπιση.

Αυτό το μοντέλο χρησιμοποιήθηκε για να προβλέψει την απόκριση της οστικής ανακατασκευής σε διάστατα μοντέλα Π.Σ. μακρέων οστών προκειμένου να καθοριστεί η πυκνότητα τους υπό κάθετες συνθήκες φόρτισης και η ανακατασκευή του οστού μετά την χρήση εμφυτεύματος. Προβλέπει επιτυχώς το αποτέλεσμα της τοποθέτησης ενός εμφυτεύματος μέσα στο οστόν και η αριθμητική λύση επιβεβαιώνεται από πειραματικά αποτελέσματα. Το μοντέλο δεν συμπεριλαμβάνει οποιεσδήποτε γεωμετρικές μη-γραμμικότητες και η χρησιμοποιηθείσα μέθοδος δεν εξασφαλίζει σύγκλιση.

Οι παραπάνω θεωρίες καθώς και μερικές που δεν αναφέρθηκαν για λόγους συντομίας, συνοψίζονται Πίνακα 2.1 που ακολουθεί [1]

Πίνακας 2.1 Αντιπροσωπευτικός κατάλογος θεωριών οστικής ανακατασκευής

Κύριοι Ερευνητές	Περιγραφή της Θεωρίας	Κατηγορία
Wolff, 1892	Ο Νόμος Μετασχηματισμού των Οστών	
Frost, 1964	Μοντέλα μεταφοράς φλοιώδους οστού, ενδομυελική οργάνωση	Φαινομενολογικά μοντέλα
Pauwels & Kummer, 1968 – 1972	Παρατηρήσεις, μαθηματικά μοντέλα	
Gjelsvik, 1973	Πιεζοηλεκτρικά μοντέλα	
Cowin, Hegedus & Van Burkirk, 1976	Προσαρμοσμένη ελαστικότητα: Επιφανειακή, εσωτερική, δοκιδική προσαρμογή. Εξαρμογή σε υπολογιστικά μοντέλα	Φαινομενολογικά μοντέλα
Davy, Hart & Heiple, 1983	Υπολογιστική Εφαρμογή, θεωρία	Μηχανιστικά μοντέλα

	βασισμένη στο κύτταρο	
Guzelsu & Saha, 1984	Ηλεκτρομηχανικό μοντέλο	
Carter, Fyhrie, Beaupre & Orr, 1986	Αναπροσαρμογή δοκίδων : Αντικειμενικές συναρτήσεις, Υπολογιστικές εφαρμογές	Φαινομενολογικά μοντέλα
Huiskes, Weinans, Gootenboer & Kuiper, 1987	Πυκνότητα ελαστικής ενέργειας, Υπολογιστικές εφαρμογές, Εφαρμογή σε εμφυτεύματα	Φαινομενολογικά μοντέλα
McNamara, Prendergast & Taylor, 1992	Επισκευή βλάβης από κόπωση, υπολογιστική εφαρμογή	Μηχανιστικά μοντέλα

Κεφάλαιο 3ο Υπολογιστικές Προσομοιώσεις Οστικής Ανακατασκευής

3.1 Εισαγωγή

Στην υπολογιστική μοντελοποίηση της οστικής ανακατασκευής έχουν προταθεί τρεις διαφορετικές αντιμετώπισεις.

- Η εξωτερική ανακατασκευή (external remodeling) που περιγράφεται όταν η πυκνότητα είναι σταθερή και η εξωτερική γεωμετρία του οστού μεταβάλλεται με το χρόνο (π.χ. προσέγγιση Huiskes et al 1987)
- Η εσωτερική ανακατασκευή (internal remodeling) που περιγράφεται όταν η εξωτερική γεωμετρία είναι σταθερή και η πυκνότητα μεταβάλλεται με το χρόνο (π.χ. Weinans et al 1992)
- Η εσωτερική και η εξωτερική ανακατασκευή συνδυασμένες (π.χ. Beaupré et al 1990)

3.2 Ιστορικό φόρτισης και αρχιτεκτονική μηριαίου οστού

Θέλοντας να εξηγήσει την πρόσθετη βιολογική διέγερση που δημιουργείται από φόρτιση σε διαφορετικές κατευθύνσεις ο Carter [6] (1987) παρουσίασε την προσέγγιση «χωριστής φόρτισης» για την πρόβλεψη της οστικής πυκνότητας η οποία και εμπεριέχει το ιστορικό πολλαπλής φόρτισης του οστού για κάποια καθορισμένη χρονική περίοδο.

Σε αυτό το πλαίσιο παρουσίασε μαζί με τους Orr και Fyhrie μια μελέτη για τη σχέση μεταξύ ιστορικού φόρτισης και την αρχιτεκτονική του σπογγώδους μηριαίου οστού. Το σχέδιο για την πρόβλεψη της πυκνότητας που χρησιμοποιήθηκε στη μελέτη αυτή διέφερε από εκείνα που εφαρμόστηκαν από άλλους ερευνητές (Hart 1984, Huiskes 1987) καθώς θεωρούσε ότι το οστό ανακατασκευάζεται προς μια κατάσταση όπου η μηχανική διέγερση στον ιστό είναι ανεξάρτητη από την ανατομική του θέση μέσα στο οστό και καθορίζεται από την αθροιστική επίδραση πολλών κύκλων φόρτισης και φορτίσεων από διαφορετικές διευθύνσεις. Ο τύπος που χρησιμοποίησαν για την φαινόμενη τοπική πυκνότητα είναι:

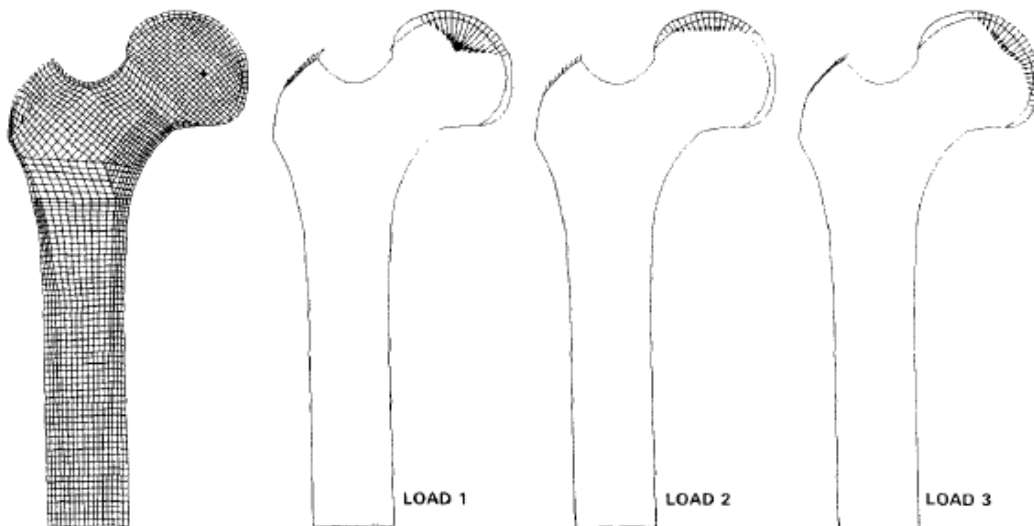
$$\rho = K \left(\sum_{i=1}^c n_i \sigma_i^M \right)^{(1/2M)} \quad (3.1)$$

όπου η καθημερινή φόρτιση έχει αθροιστεί ως c διακριτές συνθήκες φόρτισης. Ο δείκτης i συμβολίζει μια συγκεκριμένη τέτοια φόρτιση, n είναι ο αριθμός των κύκλων φόρτισης, σ_i η μέγιστη τάση που εμφανίζεται σε κάποιο κύκλο φόρτισης. Ως κατάλληλη τάση θεωρήθηκε η $\sigma_{energy} = \sqrt{2EU}$, με E το μέτρο ελαστικότητας και U την Πυκνότητα Τροπικής Ενέργειας. Τέλος, K είναι η σταθερά αναλογικότητας και M ο συντελεστής βαρύτητας για την επίδραση της τάσης.

Μέθοδοι προσδιορισμού της M έχουν δοθεί από τον Whalen (1988) με προτεινόμενη τιμή μεγαλύτερη του 1.0 και μεταξύ 2.0 και 6.0, αλλά εδώ επιλέχθηκαν $M=1$ και $M=4$.

Η τιμή της K προσδιορίζεται από την αρχική πυκνότητα που τίθεται. Στο παράδειγμα που πραγματοποιήθηκε τέθηκε $\rho_0 = 0,64 \frac{g}{cm^3}$. Εκτός από πυκνότητα θεωρήθηκε ίδιο αρχικό μέτρο ελαστικότητας E ίσο με 1000MPa και σταθερός λόγος Poisson $\nu=0,2$. Εφαρμόζοντας τις συνθήκες φόρτισης στη διδιάστατη γεωμετρία που κατασκευάστηκε για την προσομοίωση του μηριαίου οστού ενός ενήλικα, και αναλύθηκε με 2042 τετράπλευρα και τρίγωνα πεπερασμένα στοιχεία, προκύπτει η πυκνότητα τροπικής ενέργειας κι επομένως η σ_{energy} για κάθε φόρτιση. Έτσι προκύπτουν νέες τιμές πυκνότητας κι επομένως νέο E . Για τη συσχέτιση E και ρ επιλέχθηκε η σχέση $E = 3790 \rho^3$ κι έτσι προκύπτει ένα ετερογενές μοντέλο για το οστό.

Βασιζόμενοι στην εργασία του Evans (1973) οι Carter-Orr-Fyhrie επέλεξαν ένα πεπερασμένο στοιχείο να διατηρεί σταθερή την πυκνότητά του και ίση με $\rho_0 = 0,64 \frac{g}{cm^3}$ σε όλη τη διάρκεια της δοκιμής (Σχήμα 3.1).



Σχήμα 3.1 Το πλέγμα με πεπερασμένα στοιχεία και οι τρεις συνθήκες φόρτισης που χρησιμοποιήθηκαν στην ανάλυση. Το στοιχείο που επιλέχθηκε να έχει πυκνότητα $0.64 gr \cdot cm^{-3}$ είναι μαυρισμένο

Θεώρησαν $c=3$ (3 συνθήκες φόρτισης) και $n_1=n_2=n_3=1$ χωρίς αυτή η επιλογή να επηρεάζει τη γενικότητα.. Με τις νέες ιδιότητες υπολογισμένες η ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων επαναλήφθηκε. Καθορίζεται νέα τιμή της σταθεράς K (τέτοια ώστε το επιλεγμένο στοιχείο να διατηρεί πυκνότητα $0.64 \frac{gr}{cm^3}$) και η νέα κατανομή πυκνότητας υπολογίζεται. Η επαναληπτική αυτή διαδικασία συνεχίζεται και λαμβάνεται η κατανομή της πυκνότητας.

Όσον αφορά στην ανισοτροπία, σε αντίθεση με τον Wolff (και τις αντίστοιχες παρατηρήσεις του Culmann) που θεωρούσε ότι καθορίζεται από τις κατευθύνσεις των κύριων τάσεων που δημιουργούνται από μια μόνη συνθήκη φόρτισης ή οποιοδήποτε τύπο τανυστή τάσεων (Cowin 1986) θεώρησαν μια εναλλακτική προσέγγιση. Συγκεκριμένα, πρότειναν ως μέγεθος που εκφράζει τη διέγερση του οστού ώστε να οργανωθεί προς συγκεκριμένη διεύθυνση, κι επομένως αντιστοιχεί σε κατευθυντικές διαφορές της δυσκαμψίας και της αντοχής, την κάθετη συνιστώσα της τάσης που δρα σε κάθε στοιχείο:

$$\sigma_n = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{xz} nl + 2\tau_{xy} lm \quad (3.2)$$

όπου

l, m, n είναι τα συνημίτονα κατεύθυνσης του κάθετου διανύσματος κάθε στοιχείου ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων x, y, z ,

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ είναι οι κύριες ως προς το σύστημα συντεταγμένων x, y, z

$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ οι διατμητικές τάσεις ως προς το σύστημα συντεταγμένων x, y, z .

Για το σύνολο των c φορτίσεων που υποτέθηκαν ο τύπος είναι:

$$\sigma_n^*(l, m, n) = \left[\sum_{i=1}^c (n_i/n_t) |\sigma_{n_i}(l, m, n)|^M \right]^{1/M} \quad (3.3)$$

$$\text{με } n_t = \sum_{i=1}^c n_i .$$

Πραγματοποιήθηκαν τρεις διαφορετικές δοκιμές:

για $c=1$ (μία φόρτιση),

για $c=3$ και $M=1$,

για $c=3$ και $M=4$.

Οι παράμετροι που ελέγχθηκαν ανά κάθε χρονικό βήμα ήταν:

$$\% \Delta E_{ave} = (100\%/N_{el}) \left[\sum_{\text{elements}} (E_{new} - E_{old})^2 \right]^{1/2} \quad (3.4)$$

και

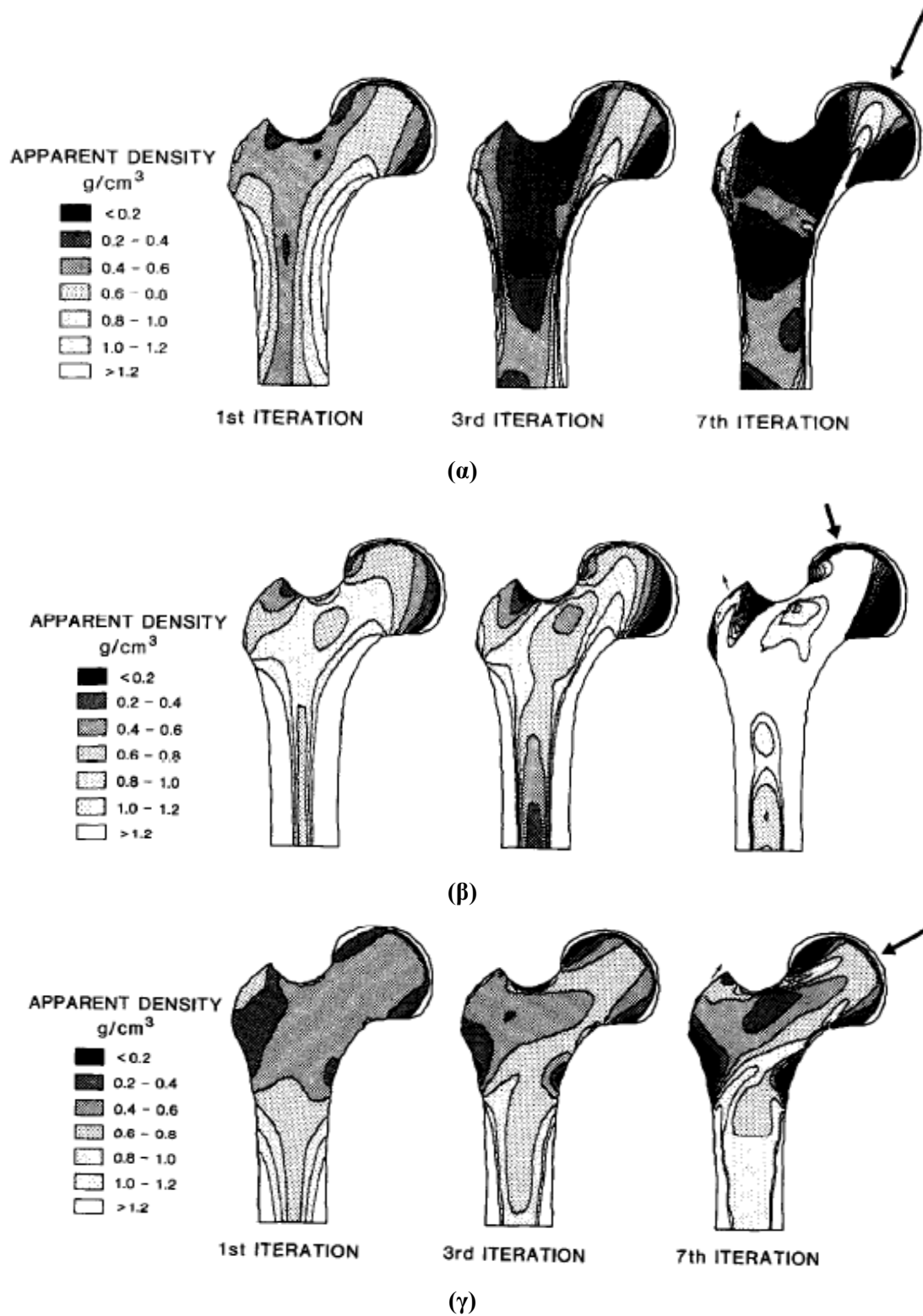
$$\Delta \rho_{ave} = 1/N_{el} \left[\sum_{\text{elements}} |\rho_{new} - \rho_{old}| \right] \quad (3.5)$$

όπου,

N_{el} ο αριθμός των στοιχείων στο μοντέλο

E_{new}, E_{old} το νέο και το παλιό μέτρο ελαστικότητας κάθε στοιχείου

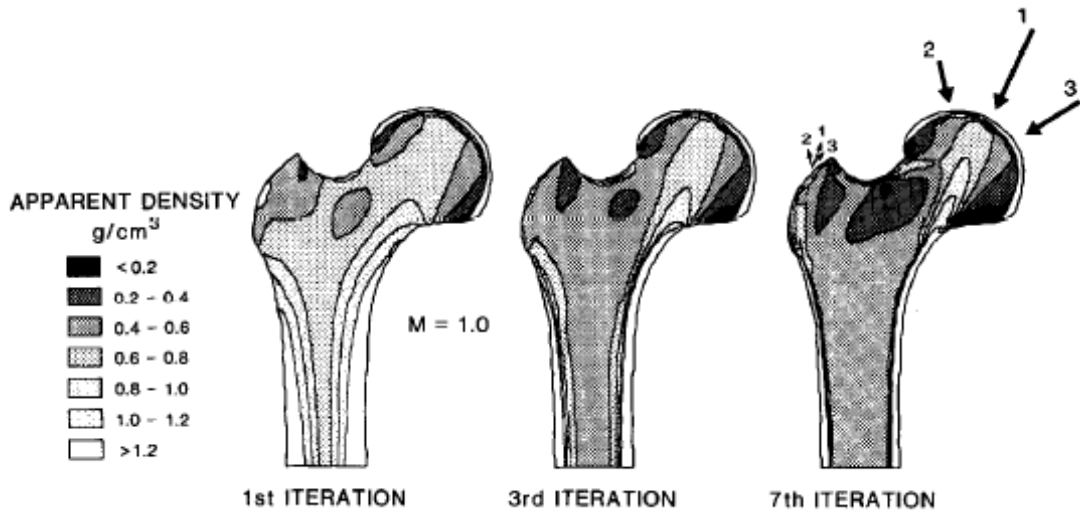
ρ_{new}, ρ_{old} η νέα και η παλιά πυκνότητα κάθε στοιχείου.



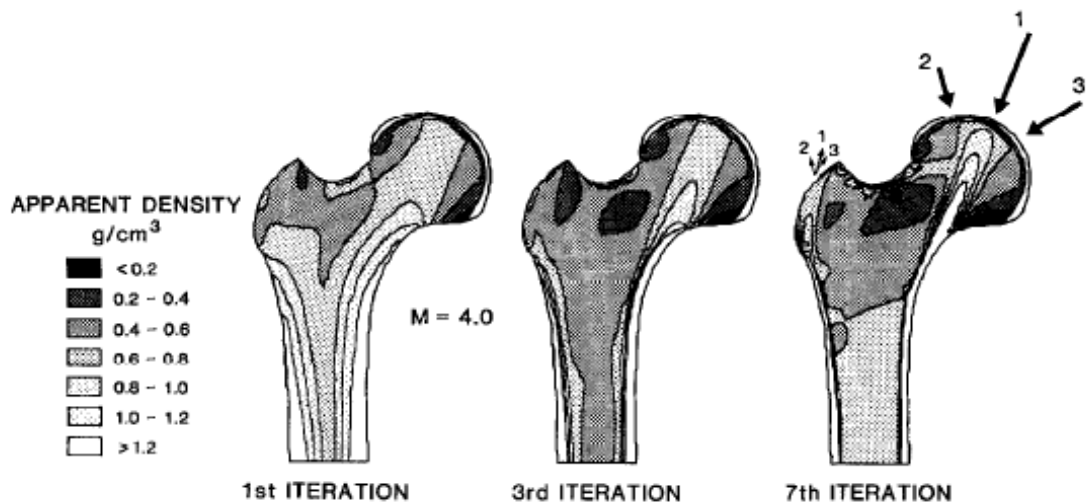
Σχήμα 3.2 Κατανομές πυκνοτήτων για (α) την πρώτη (β) τη δεύτερη και (γ) την τρίτη περίπτωση φόρτισης

Σε όλες τις δοκιμές παρατηρήθηκε μεγάλη αλλαγή στο πρώτο βήμα όσον αφορά στο μέτρο ελαστικότητας και την πυκνότητα. Από το δεύτερο όμως βήμα και έπειτα οι μεγαλύτερες αλλαγές στα $\% \Delta E_{ave}$ και $\Delta \rho_{ave}$ έφτασαν μέχρι 1%. Σε ορισμένα, όμως, στοιχεία παρατηρήθηκαν μεγάλες αυξήσεις στην πυκνότητα. Αυτά τα στοιχεία ήταν κοντά

στην φλοιώδη διάφυση (κύριο σώμα του φλοιώδους οστού-εκτός των άκρων) και αντιπροσώπευαν μια γρήγορη σταθεροποίηση του σπογγώδους οστού (cancellous) σε συμπαγές οστό. Επιλέχθηκαν το πρώτο, τρίτο και έβδομο βήμα για τη λήψη εικόνων των διαβαθμίσεων της πυκνότητας και του μέτρου ελαστικότητας.



(α)



(β)

Σχήμα 3.3 Κατανομές πυκνοτήτων για περίπτωση πολλαπλής φόρτισης (α) $M=1.0$ και (β) $M=4.0$

Παρατηρήθηκε ότι αυτές ήταν φυσιολογικές για τα βήματα 1 και 3, αλλά στο έβδομο βήμα ήταν πολύ μεγαλύτερες από αυτές που είχαν παρατηρηθεί παλαιότερα (Brown και Ferguson 1980, Evans 1973). Θεωρήθηκε, λοιπόν, ότι οι λύσεις που υπολογίστηκαν υποδεικνύουν πως η αρχιτεκτονική του οστού προσεγγίζεται με λίγα βήματα. Λαμβάνοντας υπόψη μελέτες που αποδεικνύουν ότι το μέτρο ελαστικότητας είναι ανάλογο του τετραγώνου της πυκνότητας (Harrigan 1981, Bensusan 1983, Gibson 1985) πραγματοποίησαν επιπλέον δοκιμές με τη νέα αυτή σχέση E και ρ . Συμπεράναν ότι η

διαφορά κατανομής της πυκνότητας μεταξύ τρίτου και έβδομου βήματος ήταν πολύ μικρότερη για τετραγωνική εξάρτηση του E σε σχέση με την κυβική. Τέλος, μια εφαρμογή με περισσότερες φορτίσεις (π.χ. $c=8$) και με διαφορετικό αριθμό κύκλων θα μπορούσε να αποδώσει καλύτερα την καθημερινή φόρτιση κι επομένως να προσεγγίσει καλύτερα τη μορφολογία του οστού

3.3 Διδιάστατο εμβιομηχανικό μοντέλο σπονδύλου

Οι Jovanovic et al. (2004) [8], [7] ερεύνησαν τη δυνατότητα δημιουργίας βιομηχανικού μοντέλου του οσφυϊκού σπονδύλου L₅ το οποίο, σχεδιασμένο σύμφωνα με τη μηχανική φόρτιση που οφείλεται στις καθημερινές δραστηριότητες, θα αποτελέσει αρχικό μοντέλο για την ανάλυση της συμπεριφοράς του οστού μετά την εμφύτευση. Η προσομοίωση της ανακατασκευής που χρησιμοποιήθηκε βασίστηκε στο μοντέλο των Mullender et al. (1994) [29] όπου κάθε πεπερασμένο στοιχείο περιέχει ένα αισθητήριο κύτταρο στο κέντρο βάρους του. Κάθε τέτοιος αισθητήρας αφού διεγερθεί από κάποια μηχανική φόρτιση, που εκκινεί την ανακατασκευή του οστού, στέλνει σήμα που ισοδυναμεί με ενεργοποίηση της διαδικασίας προσαρμογής με εύρος που εκτείνεται πέρα από τα όρια των στοιχείων μέσα στα οποία βρίσκονται τα κύτταρα. Η επίδραση αυτού του σήματος στην ανακατασκευή μειώνεται όσο η απόσταση από τη θέση του κυττάρου-αισθητήρα αυξάνεται. Αυτή η υπόθεση περιλαμβάνει την επίδραση όλων των κυττάρων-κελιών ανάλογα με την απόσταση τους από την τοποθεσία που η οστική ανακατασκευή λαμβάνει χώρα. Η εξίσωση της οστικής ανακατασκευής μπορεί λοιπόν να εκφραστεί ως:

$$\frac{d\rho(x,t)}{dt} = B \cdot \sum_{i=1}^n f_i(x) \cdot \left[\frac{U_i}{\rho_i} - k \right] \quad \text{για } 0 < \rho < \rho_{cb} \quad (3.6)$$

όπου

n είναι ο αριθμός των πεπερασμένων στοιχείων ,

U_i η πυκνότητα τροπικής ενέργειας στο κέντρο βάρους του πεπερασμένου στοιχείου,

ρ_i η πυκνότητα του οστού,

k η τιμή διέγερσης αναφοράς και B η σταθερά της οστικής ανακατασκευής.

Η $f_i(x)$ είναι η συνάρτηση χωρικής επίδρασης που προσομοιάζει την επιρροή των κυττάρων-αισθητήρων στον γειτονικό οστικό ιστό:

$$f_i(x) = e^{-\frac{d_i(x)}{D}} \quad (3.7)$$

όπου $d_i(x)$ είναι η απόσταση από το κύτταρο-αισθητήρα μέχρι τη θέση x και D το εύρος της επίδρασης του κυττάρου-αισθητήρα.

Το μέτρο ελαστικότητας του Young θεωρήθηκε ότι καθορίζεται από την εξίσωση:

$$E = C \cdot \rho^\gamma \quad (3.8)$$

με C, γ σταθερές.

Ο Mullender μετέτρεψε τη διαφορική εξίσωση της οστικής ανακατασκευής χρησιμοποιώντας σταθερό χρονικό βήμα Δt στην ακόλουθη μορφή:

$$\Delta \rho(x, t) = \Delta t \cdot B \cdot \sum_{i=1}^n f_i(x) \cdot \left[\frac{U_i}{\rho_i} - k \right] \text{ για } 0 < \rho < \rho_{cb} \quad (3.9)$$

Νέα τιμή της πυκνότητας κάθε πεπερασμένου στοιχείου μπορεί επομένως να καθοριστεί από την ακόλουθη έκφραση:

$$\rho(x, t + \Delta t) = \rho(x, t) + \Delta \rho(x, t) \quad (3.10)$$

Η ανακατασκευή σε κάθε πεπερασμένο στοιχείο θεωρείται ότι συγκλίνει είτε όταν ο λόγος μεταξύ πυκνότητας τροπικής ενέργειας και οστικής πυκνότητας φτάσει την τιμή της προκαθορισμένης διέγερσης αναφοράς K είτε όταν η οστική πυκνότητα όλων των στοιχείων προσεγγίσει μια από τις οριακές τιμές ($\rho = 1,74 \frac{g}{cm^3}$ και $\rho = 0,01 \frac{g}{cm^3}$).

Η συγκλίνουσα συμπεριφορά της οστικής ανακατασκευής μπορεί να ερευνηθεί με την αντικειμενική συνάρτηση F που καθορίζεται από την ακόλουθη έκφραση:

$$F = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left| \sum_{i=1}^m f_i(x) \left(\frac{U_i}{\rho_i} - k \right) \right| \quad (3.11)$$

όπου m είναι ο αριθμός των πεπερασμένων στοιχείων στα οποία η οστική ανακατασκευή συνεχίζεται.

Οι τιμές των παραμέτρων του μοντέλου που χρησιμοποιήθηκαν στη συγκεκριμένη μελέτη είναι: $B = 1 \left(g/cm^3 \right)^2 / (MPa \cdot time \ unit)$, $C = 100 MPa \left(g/cm^3 \right)^2$, $\gamma = 2$, και $\nu = 0,3$ ο λόγος του Poisson. Ως αρχική πυκνότητα του οστού σε όλα τα πεπερασμένα στοιχεία στην έναρξη της προσομοίωσης της οστικής ανακατασκευής θεωρήθηκε η τιμή $\rho_0 = 0,8 g/cm^3$.

Οι υπόλοιπες παράμετροι του μοντέλου επιλέχθηκαν έτσι ώστε να εξασφαλιστεί η ευστάθεια του αποτελέσματος της οστικής ανακατασκευής ενώ η τελική δομή του οστικού ιστού να είναι παρόμοια με την πραγματική: $D = 0,5 mm$, $k = 0,006 j/gr$, $\Delta t = 2$ χρονικές μονάδες (*time units*).



Σχήμα 3.4 (α) Φυσικό μοντέλο σπόνδυλου L_5 και (β) τριδιάστατο γεωμετρικό μοντέλο σπόνδυλου L_5

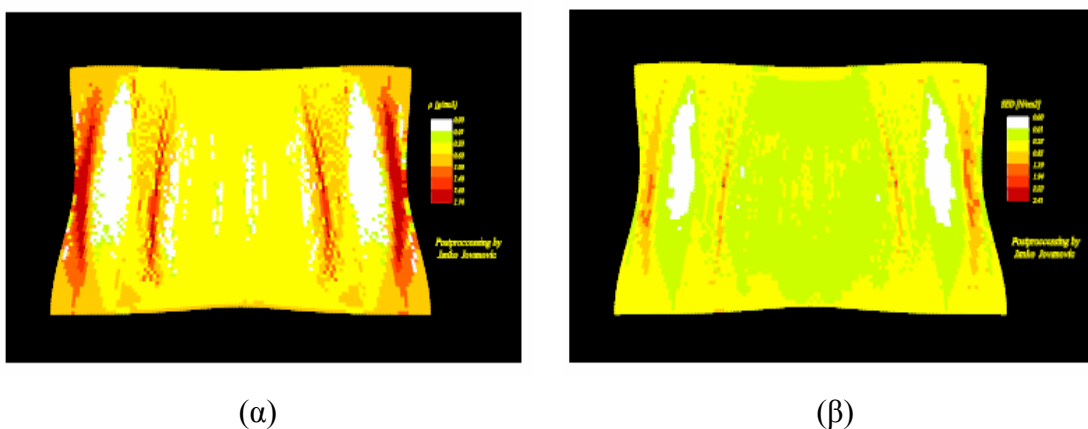
Για την δημιουργία του γεωμετρικού του μοντέλου χρησιμοποιήθηκε ως βάση το φυσικό μοντέλο του οσφυϊκού σπονδύλου L_5 που φαίνεται στο Σχήμα 3.4 (α) ενώ το τριδιάστατο μοντέλο του δημιουργήθηκε φαίνεται στο Σχήμα 3.4 (β). Το παραπάνω τριδιάστατο γεωμετρικό μοντέλο χρησιμοποιήθηκε ως βάση για τη δημιουργία του αντίστοιχου διδιάστατου της κατακόρυφης τομής του σώματος του σπονδύλου. Στο διδιάστατο μοντέλο έγινε πλέγμα με τετρακομβικά ισοπαραμετρικά επίπεδα γραμμικά στοιχεία.

Σύμφωνα με έρευνα των Xingua et al. (2002) [8] το σχήμα της κατανομής της φόρτισης είναι συμμετρικά κοίλη παραβολή και το συνολικό μέγεθος της κάθετης δύναμης είναι 117,3N. Τέλος, οι παραπάνω απαιτήσεις καθόρισαν και τις τιμές των παραμέτρων της κατανομής της φόρτισης των άνω και κάτω άκρων αντίστοιχα του σώματος του σπονδύλου:

Άνω πίεση Μέγιστη $P_{max,u} = 4,8N/mm^2$, Ελάχιστη $P_{min,u} = 1,6N/mm^2$,

Κάτω πίεση Μέγιστη $P_{max,l} = 4,525N/mm^2$, Ελάχιστη $P_{min,l} = 1,325N/mm^2$

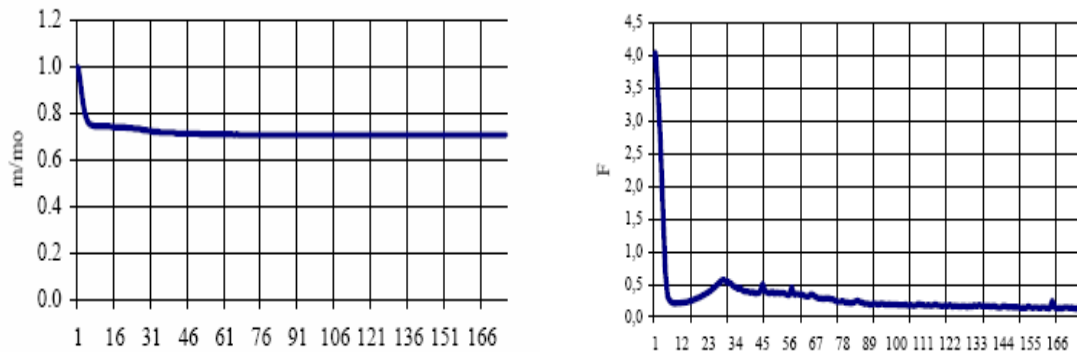
Η διαδικασία θεωρήθηκε ότι ολοκληρώθηκε όταν η οστική ανακατασκευή έλαβε τέλος σε κάθε πεπερασμένο στοιχείο πράγμα που συνέβη ύστερα από 170 χρονικές επαναλήψεις.



Σχήμα 3.5 Κατανομή (α) οστικής πυκνότητα και (β) πυκνότητας τροπικής ενέργειας μετά το πέρας της οστικής ανακατασκευής

Η κατανομή οστικής πυκνότητας και πυκνότητας τροπικής ενέργειας στο τέλος της οστικής ανακατασκευής φαίνεται στο Σχήμα 3.5.

Επίσης παρουσιάζεται ο λόγος τρέχουσας μάζας m προς αρχική μάζα m_0 και η αντικειμενική συνάρτηση F κατά τη διάρκεια των 170 επαναλήψεων (Σχήμα 3.6).



Σχήμα 3.6 (α) Μεταβολή μάζας κατά τη διάρκεια της ανακατασκευής και (β) μεταβολή της συνάρτησης F κατά τη διάρκεια της ανακατασκευής

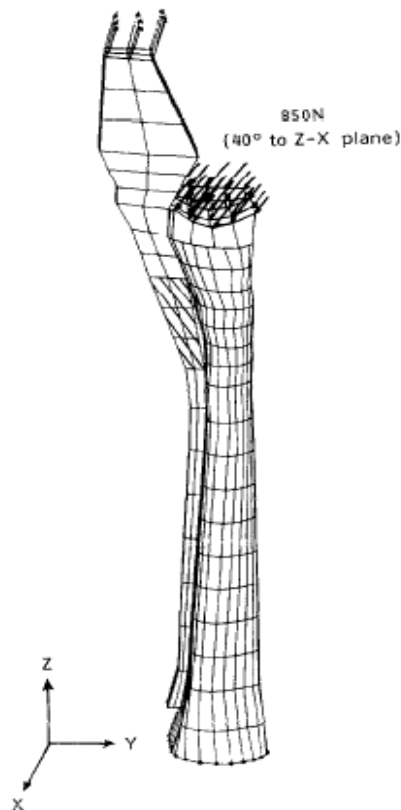
Μετά την ολοκλήρωση της μελέτης κατέληξαν ότι παρά τις διάφορες απλοποιήσεις και υποθέσεις, όπως ο ισχυρισμός ότι το μοντέλο ήταν 2-διάστατο, η πρόχειρη προσέγγιση της σχέσης μέτρου ελαστικότητας και πυκνότητας αλλά και η επιλογή της πυκνότητας τροπικής ενέργειας ως μηχανικής διέγερσης, η κατανομή οστικής πυκνότητας που προέκυψε ήταν πολύ κοντά στην πραγματική.

3.4 Προσομοίωση της οστικής ανακατασκευής με βάση τη θεωρία ανάπτυξης μικροβλαβών

Παρατηρήσεις που συσχέτιζαν μικροδομές του οστού με την κατάσταση τοπικών τάσεων (Ascenzi, 1988) πρότειναν ότι η ανακατασκευή πρέπει να διεγείρεται έτσι ώστε να προκύψει η βέλτιστη αντοχή. Την προσέγγιση αυτή παρουσίασαν και εφάρμοσαν οι Prendergast, Taylor και McNamara (1992) [9] με σκοπό την πρόβλεψη παρόμοιας οστικής ανακατασκευής με αυτή που παρατηρήθηκε σε πειράματα σε ζώα. Δημιούργησαν για αυτό το σκοπό ένα ανατομικό μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων του μπροστινού άκρου ενός προβάτου (Σχήμα 3.7).

Η προσέγγιση που χρησιμοποιήθηκε βασίστηκε στην ιδέα της ύπαρξης σχέσης μεταξύ βλάβης σε μορφή μικροραγισμάτων και απόθεσης ή απορρόφησης οστού στις επιφάνειες περιόστεου και ενδόστεου και στην επιφάνεια των εσωτερικών πόρων.

Έγιναν δύο υποθέσεις ώστε να είναι ικανή αυτή η ιδέα να χρησιμοποιηθεί για να προβλέψει την προσαρμογή του οστού κατά τη διάρκεια του χρόνου.



Σχήμα 3.7 Μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων του μπροστινού άκρου ενός προβάτου

Η πρώτη είναι ότι υπάρχει ένας καταμερισμός της μικροβλάβης στο οστό κατά την ισορροπία της ανακατασκευής. Σε μία αύξηση της φόρτισης αυτό το ποσό της μικροβλάβης θα αυξηθεί ενώ σε μία μείωση της φόρτισης θα μειωθεί. Η αλλαγή στην ποσότητα της βλάβης καλείται ενεργός βλάβη και συμβολίζεται ω_{eff} . Ισχύει:

$$\frac{dX}{dt} = C \cdot \omega_{eff} \quad (3.12)$$

όπου X είναι το μέγεθος μιας προσαρμοστικής διαδικασίας και C μια σταθερά.

Η δεύτερη υπόθεση είναι ότι η διόρθωση της μικροβλάβης καθορίζεται από τη σχετική με τη φυσιολογία τάση.

Τα πρώτα αποτελέσματα υπέδειξαν ένα αρχικό μοτίβο προσαρμογής του οστού παρόμοιο με εκείνο που είχε παρατηρηθεί πειραματικά χωρίς την ανάγκη χρήσης αυθαίρετα διαφορετικών σταθερών για τις επιφάνειες ενδόστεου και περιόστεου. Έτσι, πρότειναν ότι ο νόμος της ανακατασκευής που βασίζεται στη βλάβη και επιδιόρθωση δίνει ένα καλύτερο μοντέλο για την πρόβλεψη της προσαρμογής του οστού σε σχέση με προηγούμενα μοντέλα.

Βασιζόμενοι στην υπόθεση ότι η ανάπτυξη μικροβλαβών μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως βάση για τη διέγερση της οστικής ανακατασκευής, οι Prendergast και Taylor (1994)

παρουσίασαν μια αντίστοιχη προσέγγιση. Μια παράμετρος ω καθορίστηκε ως παράμετρος βλάβης με τιμές από 0 (οστό χωρίς βλάβη) μέχρι 1 (οστό με κάταγμα):

$$\omega = \frac{\alpha}{\alpha_f} \quad (3.13)$$

με α το μήκος του μικροσπασίματος και α_f το αντίστοιχο μήκος κατά την αστοχία.

Ως διέγερση για την ανακατασκευή θεωρήθηκε η ακόλουθη ποσότητα:

$$\int_{-\infty}^t (\dot{\omega} - \dot{\omega}_{RE}) dt \quad (3.14)$$

όπου

$\dot{\omega}$ είναι ο πραγματικός ρυθμός παραγωγής βλάβης

$\dot{\omega}_{RE}$ είναι ο ρυθμός επιδιόρθωσης της βλάβης αυτής.

Ισχύει επίσης: $\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dN}$ με N τον αριθμό των κύκλων φόρτισης.

Ως εξίσωση (μη γραμμική) του ρυθμού βλάβης μπορεί να θεωρηθεί η

$$\frac{d\omega}{dN} = \left(\frac{1}{N_f} \right)^\alpha \quad (3.15)$$

όπου N_f ο αριθμός των κύκλων μέχρι την αστοχία.

Ο αριθμός των απαιτούμενων κύκλων N_f συνδέεται με την τάση και την πυκνότητα από τις αντίστοιχες σχέσεις: $\text{Log}(N_f) = H \text{Log}(\sigma) + A$ όπου H και A σταθερές του υλικού και $\text{Log}(N_f) = D + E\rho$ με D, E σταθερές.

Το μοντέλο αυτό βασίζεται τέλος σε δύο βασικές υποθέσεις. Κατ' αρχήν ότι υπάρχει ένα ποσό μικροσκοπικής βλάβης στο οστό κατά την κατάσταση ισορροπίας της ανακατασκευής, και δεύτερον ότι ο ρυθμός επιδιόρθωσης της μικροσκοπικής βλάβης είναι μια σταθερά που καθορίζεται μόνο από τη σχετική με τη φυσιολογία τάση.

Πραγματοποιώντας μια μελέτη σύγκρισης του μοντέλου με βάση την πυκνότητα τροπικής ενέργειας και του μοντέλου με βάση τη βλάβη οι MacNamara et al. (1997) συμπέραναν ότι το ποσό $\frac{d\omega}{dN}$ είναι ισοδύναμο, ως ποσό διέγερσης της ανακατασκευής, με την πυκνότητα τροπικής ενέργειας υψωμένη σε μία δύναμη $n/2$. Μια τυπική πειραματική τιμή

της n στο φλοιώδες οστό είναι 4,529 η οποία δίνει έναν εκθέτη $\frac{n}{2} = 2,25$. Αυτό το αποτέλεσμα συμφωνεί με τα πορίσματα άλλων μελετητών (π.χ. Weinans, Huiskes, Grootenboer (1994)) που συμπέραναν ότι η καλύτερη πρόβλεψη επιτυγχάνεται με την πυκνότητα τροπικής ενέργειας υψωμένη σε έναν εκθέτη μεταξύ 2 και 3. Παρόλα αυτά κατέληξαν ότι το βασισμένο στη βλάβη μοντέλο έχει ένα βασικό πλεονέκτημα όσον αφορά στη μη γραμμικότητα που απαιτείται στην προσομοίωση της οστικής ανακατασκευής για να αναπαραχθούν τα κλινικά παρατηρούμενα μοντέλα. Η μη γραμμικότητα αυτή μπορεί να προσδιοριστεί θεωρητικά για τα μοντέλα με βάση τη βλάβη ενώ σε αυτά της τροπής υποθέτονται εμπειρικές σχέσεις.

3.5 Προσομοιώσεις επιφανειακής οστικής ανακατασκευής μηριαίου οστού

Θεωρώντας ότι το ιστορικό της φόρτισης είναι υπεύθυνο για τη γεωμετρία του ανθρώπινου οστού (Pauwels 1965), οι Mittlemeier et al (1994) ερεύνησαν τις συνθήκες φόρτισης που είναι υπεύθυνες για τη γεωμετρία της διάφυσης του ανθρώπινου μηριαίου οστού. Αξονική θλίψη, στρεπτικές και καμπτικές δυνάμεις εφαρμόστηκαν ανεξάρτητα, κατά σειρά ή σε διάφορους συνδυασμούς. Επιπρόσθετα, ιδιαίτερη προσοχή δόθηκε στην προσομοίωση της γραμμής δράσης της αντίστοιχης μυϊκής ομάδας. Αφού κατασκεύασαν ένα κατάλληλο πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων, εισήγαγαν ένα λεπτό επιφανειακό στρώμα στοιχείων στην εξωτερική πλευρά (περιόστεο) του κυλίνδρου που χρησιμοποιήθηκε για την προσομοίωση της διάφυσης του μηριαίου οστού. Τα στοιχεία που ανήκαν στο στρώμα αυτό είχαν μέτρο ελαστικότητας 400 φορές μικρότερο από εκείνο της κεντρικής δομής.

Υπολογίζοντας τις αναπτυσσόμενες τάσεις κατά Von Mises σ_v και αφαιρώντας μια τάση αναφοράς σ_{Ref} προκύπτει:

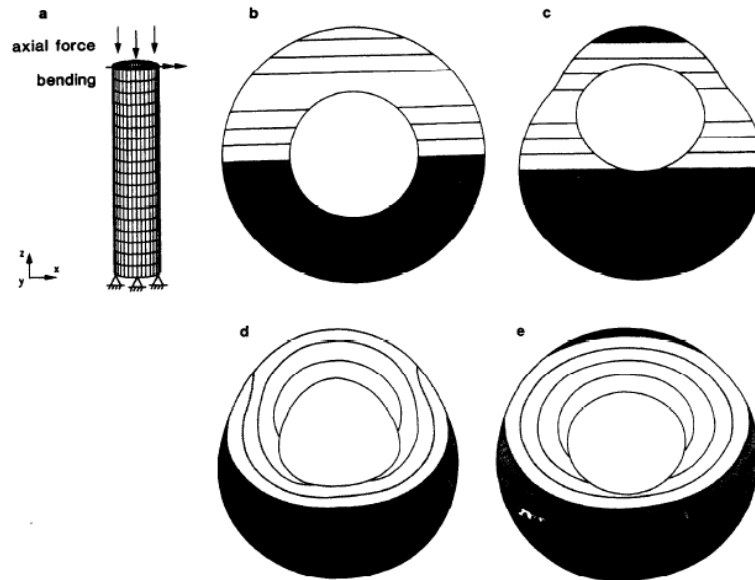
$$\sigma_D = \sigma_v - \sigma_{Ref} \quad (3.16)$$

$$\text{όπου } \sigma_v = \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{1/2}$$

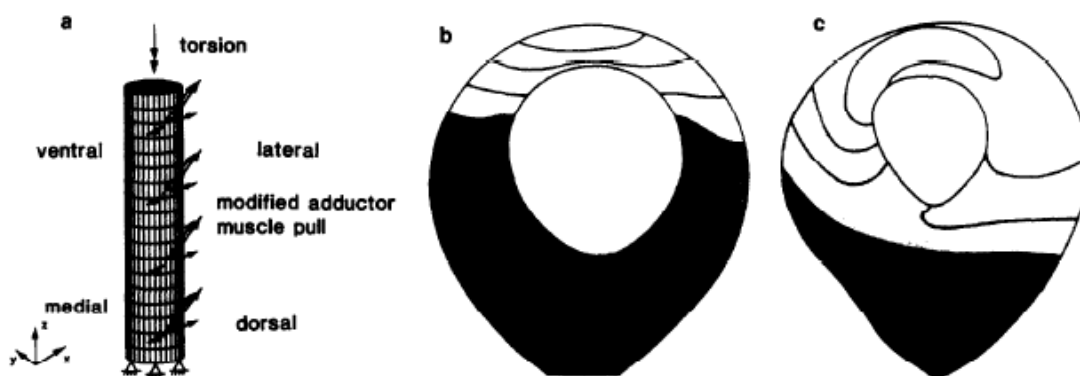
Η προκύπτουσα διαφορά τάσης τέθηκε ίση με ένα θερμοκρασιακό πεδίο που θερμαίνει την όλη δομή κι έτσι διαστέλλεται το λεπτό στρώμα που την καλύπτει. Ο συντελεστής θερμικής διαστολής στο λεπτό επιφανειακό στρώμα τίθεται $\alpha=1$, ενώ στο κεντρικό υλικό $\alpha=0$ κι έτσι μόνο το στρώμα αυτό μπορεί να διαστέλλεται ή να συστέλλεται. Οι θερμικές παραμορφώσεις που προκύπτουν αφού αυξηθούν με ένα λογικό παράγοντα, ώστε να εκφραστούν σε ορατές μετατοπίσεις, προστίθενται στις συντεταγμένες των κόμβων της μη παραμορφωμένης δομής. Μετακινώντας το εσωτερικό όριο του στρώματος, το πάχος του παραμένει σταθερό ενώ μεταβάλλεται η κεντρική δομή.

Σαν τυπική μορφή διάφυσης μηριαίου οστού μοντελοποιήθηκε ένας κυλινδρικός σωλήνας με ύψος ίσο με 160mm και εξωτερική και εσωτερική διάμετρο ίσες με 30mm και 15mm αντίστοιχα. Το μέτρο ελαστικότητας θεωρήθηκε ίσο με 20000Nmm^{-2} και ο λόγος Poisson 0.3. Το πλέγμα αποτελείται από 3648 κόμβους και 2880 πεπερασμένα στοιχεία.

Κάποια από τα αποτελέσματα φαίνονται στο Σχήμα 3.8 και Σχήμα 3.9



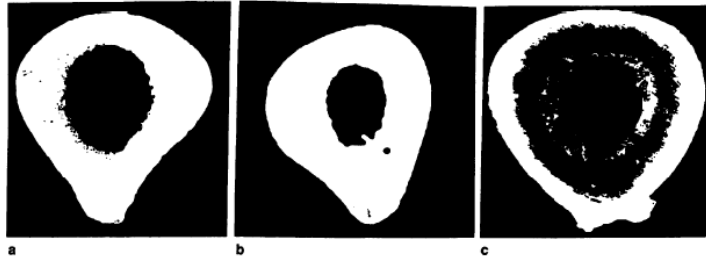
Σχήμα 3.8 α. Συνδυαστική Φόρτιση: Μοντέλο υπό αξονική και καμπτική δύναμη. Κατανομή τάσης Von Mises στην τομή της β. αρχικής δομής γ. βελτιστοποιημένης δομής δ. βελτιστοποιημένης δομής ύστερα από επιπρόσθετη εισαγωγή στρεπτικής ροπής ε. βελτιστοποιημένης δομής ύστερα από ταυτόχρονη επιβολή αξονικής δύναμης, κάμψης, στρέψης



Σχήμα 3.9 α Πιο φυσιολογική, ασύμετρη δύναμη προσαγωγού μυ. Κατανομή τάσης Von Mises στην τομή της β. βελτιστοποιημένης δομής ύστερα από εναλλασσόμενη δύναμη προσαγωγού μυ και στρέψη γ. βελτιστοποιημένης δομής ύστερα από ταυτόχρονη δύναμη προσαγωγού μυ και στρέψη

Εφαρμόζοντας το παρόν μοντέλο οστικής ανακατασκευής, συμπεράναν ότι οι συνηθισμένες υποθέσεις φόρτισης (θλίψη, στρέψη, κάμψη) αλλά και οι συνδυασμοί αυτών (με διαφορετική μάλιστα χρονική σειρά) δεν είναι ικανές να παράγουν μια

μορφολογία αντίστοιχη αυτής που συναντάται στο μηριαίο οστό. Επίσης, η αξονική φόρτιση και η επίδραση του σωματικού βάρους μπορούν να αμεληθούν ως μη αποφασιστικοί παράγοντες. Αντίθετα, η σύγκριση του μαθηματικού μοντέλου με τρία ex vivo δείγματα μηριαίου οστού (Σχήμα 3.10) έδειξε ότι πρέπει να αναλυθούν οι κύρια δρώσες δυνάμεις με ιδιαίτερη έμφαση στο ρόλο των δυνάμεων από τους μύες ως παράγοντες καθορισμού της μορφολογίας.



Σχήμα 3.10 (α) Τομή μηριαίας διάφυσης μιας 64-χρονης γυναίκας (β) Τομή μηριαίας διάφυσης ενός 19-χρονου άνδρα (γ) Τομή μηριαίας διάφυσης ενός 81-χρονου άνδρα

3.6 Τριδιάστατη προσομοίωση οστικής ανακατασκευής μηριαίου οστού

Οι Stülpner, Reddy, Starke και Spirakis (1997) [11] πραγματοποίησαν μια τριδιάστατη ανάλυση για το μηριαίο οστό. Θεωρώντας το οστό ισοτροπικό και γραμμικά ελαστικό οι τάσεις σ και η παραμόρφωση ε συνδέονται σύμφωνα με τη σχέση:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad (3.17)$$

Ο τανυστής ελαστικότητας C δίνεται από την εξίσωση:

$$C_{ijkl} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\nu \delta_{ij} \delta_{kl} + (1-2\nu) \delta_{jk} \delta_{il} \right] \quad (3.18)$$

όπου E το μέτρο Young και ν ο λόγος Poisson, τα οποία συνδέονται με την πυκνότητα σύμφωνα με τις σχέσεις (Jacobs 1994) [32]:

$$E = \begin{cases} 2014\rho^{2.5} & \text{και} & \nu \begin{cases} 0.2 & \text{όταν } \rho \leq 1.2\text{g/cc} \\ 0.32 & \text{όταν } \rho \geq 1.2\text{g/cc} \end{cases} \\ 1763\rho^{3.2} & & \end{cases}$$

Ακολουθώντας παρόμοια προσέγγιση με άλλους ερευνητές (Mikié και Carter 1995) εισήγαγαν ως διεγερση ισοδύναμης τροπής την $\bar{\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon_{ij} \cdot \varepsilon_{ij}}$ και αφαιρώντας από αυτή μια τροπή αναφοράς ε_{rem} υπολόγισαν ένα σφάλμα e της ανακατασκευής:

$$e = \left(\sum_{i=1}^N n_i (\bar{\varepsilon}_i - \varepsilon_{rem})^{m_i} \right)^{1/m_i} \quad (3.19)$$

όπου

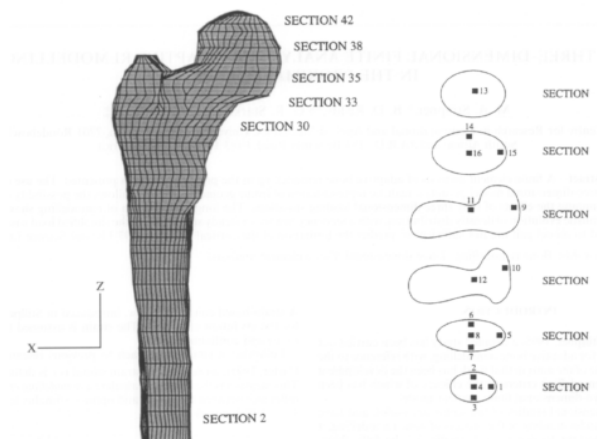
N είναι ο συνολικός αριθμός των διαφορετικών περιπτώσεων φόρτισης,
 ο δείκτης i αναπαριστά την i -οστή περίπτωση φόρτισης,
 n_i είναι ο αριθμός των κύκλων ανά μέρα της i -οστής φόρτισης,
 m_i είναι θετικές τιμές
 e_{rem} μια ομοιοστατική τιμή παραμόρφωσης.

Η ταχύτητα \dot{r} της ανακατασκευής δίδεται από τη διπλή σιγμοειδή συνάρτηση:

$$r(\dot{e}) = \begin{cases} c_1 / (1 + \exp[-\gamma(e - e_0)]) & \text{για } e > 0 \\ -c_2 / (1 + \exp[-\gamma(e - e_0)]) & \text{για } e < 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

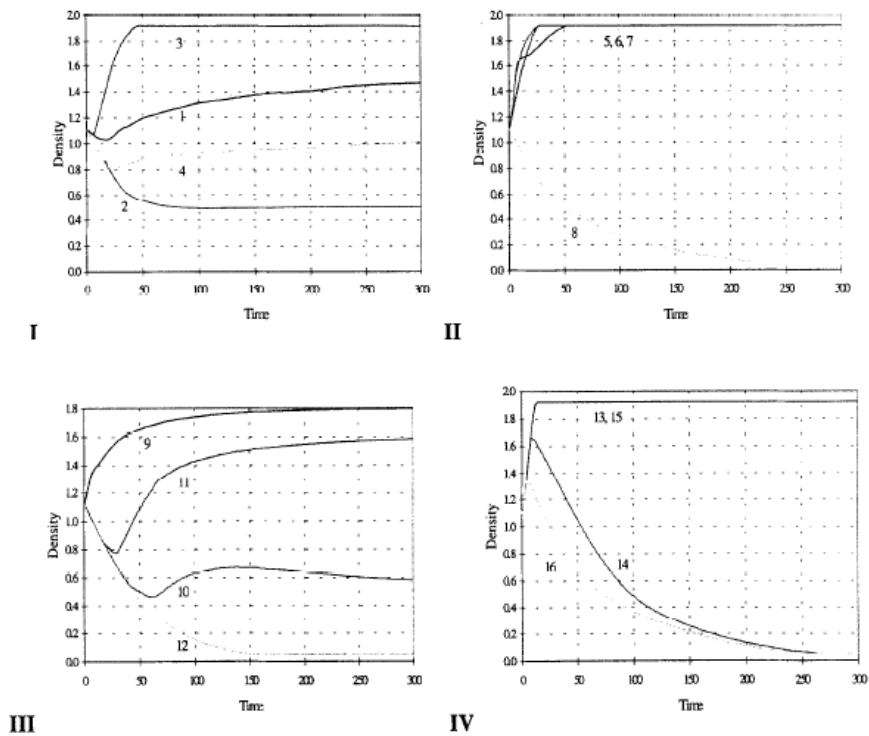
ενώ για $e=0$ παίρνει την τιμή 0.

Για το πλέγμα του μοντέλου χρησιμοποιήθηκαν ισοπαραμετρικά οκτακομβικά στοιχεία με $2 \times 2 \times 2$ Gauss ολοκλήρωση (Σχήμα 3.11).



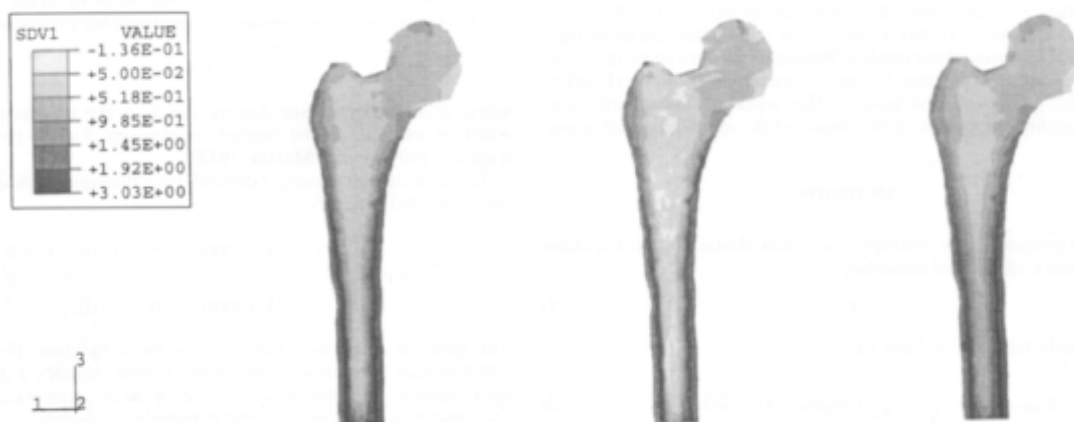
Σχήμα 3.11 Πρόοψη πλέγματος πεπερασμένων στοιχείων με τομές που δείχνουν τα στοιχεία που παρουσιάζονται στα διαγράμματα πυκνότητας – χρόνου

Οι τιμές των παραμέτρων που χρησιμοποιήθηκαν είναι: $c_1 = 10 \mu m/day$, $c_2 = 2 \mu m/day$, $\gamma = 3000$. Η σημαντικότερη φόρτιση στο κεντρικό μηριαίο οστό είναι το σύνολο των δυνάμεων που αναπτύσσονται κατά τον κύκλο της βάρδισης. Παρουσιάζουν δε μέγιστη τιμή στα μέσα του κύκλου αυτού.



Σχήμα 3.12 Διαγράμματα της πυκνότητας συναρτήσει του χρόνου για 16 πεπερασμένα στοιχεία

Η παραπάνω, λοιπόν, μελέτη έδωσε ρεαλιστικά αποτελέσματα παρόλο που η ανάλυση πολλαπλής φόρτισης που έγινε ήταν μια απλοποίηση του πραγματικού ιστορικού της φόρτισης. Ορισμένες δομές όπως το φλοιώδες οστό στο στέλεχος και οι δοκιδοειδείς στηρίξεις κατά πλάτος της κεφαλής του μηριαίου οστού ήταν εμφανείς. Κάποιες άλλες όμως δομές που έχουν παρατηρηθεί στην πραγματικότητα δεν έγινε εφικτό να εξαχθούν. Τέλος, σε σχέση με αντίστοιχες δισδιάστατες αναλύσεις, η συγκεκριμένη τριδιάστατη ανάλυση εμφανίστηκε απαλλαγμένη από ανακρίβειες και αστάθειες.

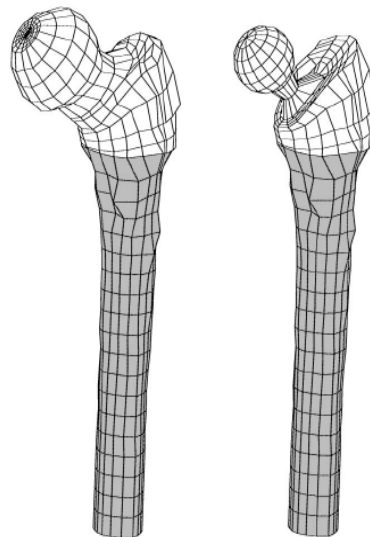


Σχήμα 3.13 Τομή τριδιάστατου μηριαίου οστού ύστερα από 50, 100 και 300 επαναλήψεις

3.7 Προσαρμοστική οστική ανακατασκευή σε περίπτωση εμφυτεύματος

Όταν μια πρόσθεση σχεδιάζεται κύριος σκοπός είναι να διατηρηθεί η λειτουργικότητα του σχετιζόμενου τμήματος με τη μικρότερη απώλεια οστού. Για να επιτευχθεί αυτό πολλοί παράγοντες πρέπει να ληφθούν υπόψη: η δυσκαμψία της πρόσθεσης, το σχήμα, το τελείωμα της επιφάνειας, επιπρόσθετα υλικά όπως ακρυλικό τσιμέντο, η θέση, κ.α.

Η περιπροσθετική προσαρμοστική οστική ανακατασκευή ύστερα από ολική αρθροπλαστική οστού μπορεί να προσομοιωθεί σε υπολογιστικά μοντέλα, συνδυάζοντας τη θεωρία οστικής ανακατασκευής με την ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων. Χρησιμοποιώντας αντιπροσωπευτικά δείγματα οστών, που είχαν αναλυθεί σε προηγούμενες μελέτες με μέτρηση απορρόφησης ακτινών X (DEXA) (Engh et al. 1992, 1994, 1995) και βιντεομέτρηση πυκνότητας (McGovern et al, 1994), οι Kerner et al. (1999) κατασκεύασαν ειδικά τριδιάστατα μοντέλα πεπερασμένων στοιχείων και εφάρμοσαν προσομοιώσεις οστικής ανακατασκευής σε αυτά (Σχήμα 3.14).

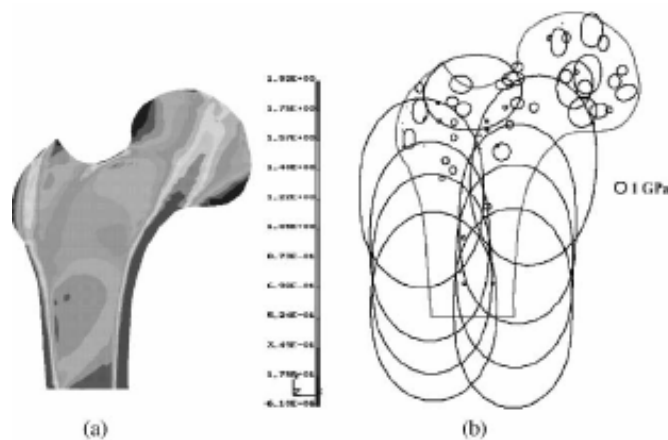


Σχήμα 3.14 Μοντέλα με πεπερασμένα στοιχεία του συμπαγούς οστού και του οστού με εμφύτευμα

Η προβλεπόμενη απώλεια οστού που προέκυψε από τη μελέτη αντιστοιχίζει πολύ καλά με τις μετρήσεις DEXA. Το ποσό αυτής της απώλειας βρέθηκε να είναι αντίστροφα ανάλογο της αρχικής μεταλλικής σύστασης του οστού. Συμπεράναν λοιπόν ότι η ίδια κλινικά παρατηρούμενη αναλογία μπορεί να ερμηνευθεί από τη μηχανικά οφειλόμενη ανακατασκευή. Αυτή η ανακάλυψη αυξάνει τη χρησιμότητα της εφαρμογής του αριθμητικού προ-κλινικού ελέγχου στην ανάλυση της αλληλεπίδρασης μεταξύ σχεδιασμού εμφυτεύματος και αρχικής κατάστασης του οστού. Η οστική ανακατασκευή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την πρόβλεψη της μορφογένεσης του οστού όπως και των αλλαγών που εισάγονται από προσθετικά εμφυτεύματα οι οποίες μπορεί να παράγουν οστεοπόρωση, αστάθειες εμφυτεύματος κ.α. Το πορώδες του οστού αποτελεί την πιο σημαντική μεταβλητή που επηρεάζεται από τη διαδικασία ανακατασκευής. Για αυτό το

λόγο τα περισσότερα μοντέλα χρησιμοποιούν το πορώδες ή ισοδύναμα τη φαινόμενη πυκνότητα για τον καθορισμό της κατάστασης ανακατασκευής [13], [12].

Οι Doblaré και García παρουσίασαν (2001) μία μελέτη του μηριαίου οστού πριν και μετά από ολική αντικατάσταση ισχίου με βάση μια θεωρία βλάβης - διόρθωσης. Σε αντίθεση με τις προηγούμενες θεωρίες βλάβης όπως αυτή που παρουσιάστηκε ανωτέρω, η ιδέα της βλάβης που χρησιμοποίησαν ταυτιζόταν με το πορώδες χωρίς να υποδηλώνεται κανένα είδος πραγματικού μικροσπασίματος ή μεταβολικής βλάβης. Εφάρμοσαν το μοντέλο τους αυτό σε 4 παραδείγματα, μία διδιάστατη και μια τριδιάστατη αναπαράσταση του ακέραιου, πριν την εμφύτευση, οστού και τις αντίστοιχες αναπαραστάσεις για το οστό μετά την εμφύτευση. Για τα μοντέλα χρησιμοποίησαν ανισοτροπικά υλικά.

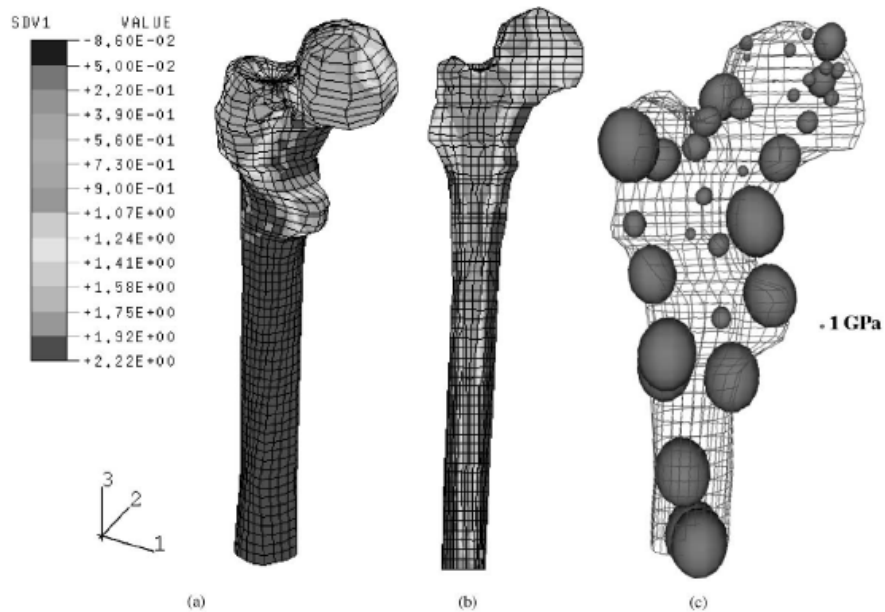


Σχήμα 3.15 Κατανομή πυκνότητας και τάσης στο διαδιάστατο μοντέλο ύστερα από 300 ημέρες

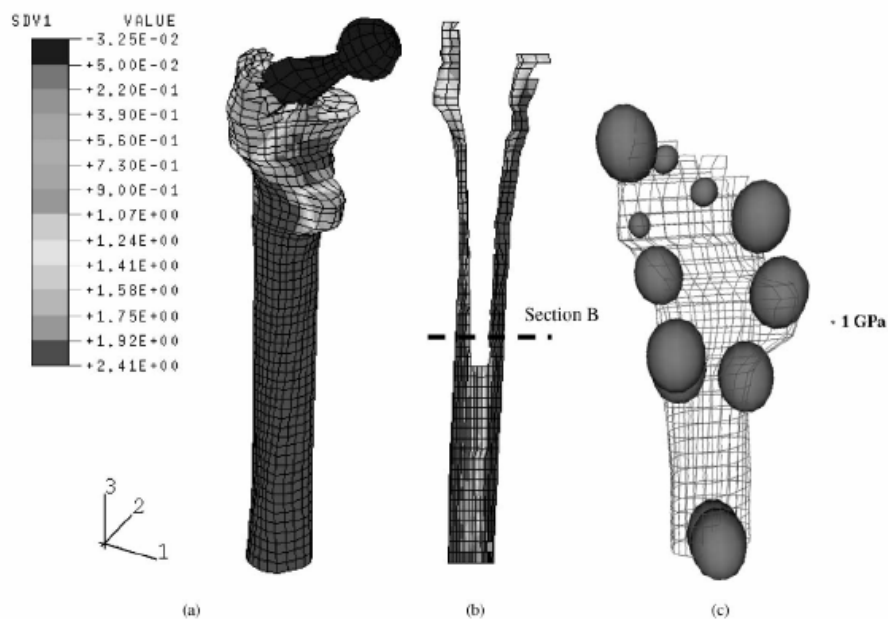
Για το ακέραιο οστό και τα δύο μοντέλα έδωσαν παρόμοια συμπεράσματα και προέβλεψαν σημαντικά φυσικά αποτελέσματα. Για παράδειγμα, το φλοιώδες στρώμα προβλέφθηκε αποτελεσματικά, κάτι που δεν είχε αναπαραχθεί πλήρως σε αντίστοιχες μελέτες όπως των Stülper et al. (1997), που παρουσιάστηκε προηγουμένως, πιθανόν λόγω ακατάλληλων φορτίσεων.

Στο τριδιάστατο μοντέλο, η ευθυγράμμιση της κατεύθυνσης της οστικής μάζας κατά μήκος της διάφυσης παράγει μία σχεδόν εγκάρσια ισηντροπική συμπεριφορά που ευθυγραμμίζεται επίσης με τις κύριες διευθύνσεις της τάσης. Το φαινόμενο αυτό δεν παρατηρήθηκε στο διδιάστατο μοντέλο. Όσον αφορά στα μοντέλα μετά την εμφύτευση παρουσιάστηκε δυνατό να αναπαραχθεί η μικρή διαπλάτυνση του φλοιώδους στρώματος στο περιφερικό άκρο της πρόσθεσης, η απορρόφηση οστού γύρω από την πρόσθεση, κυρίως γύρω από την κεντρική περιοχή. Όσον αφορά στην ανισοτροπία παρατηρήθηκε μια ελαφρά τροποποίηση του βαθμού ανισοτροπίας στο φλοιώδες στρώμα λόγω της εμφύτευσης. Η τροποποίηση αυτή φάνηκε να εξαρτάται από το μέγεθος της διάφυσης, εξαιτίας της εξάρτησης του λόγου μεταξύ κάθετων και εφαπτόμενων τάσεων από το πλάτος της διάφυσης. Όταν η διάφυση ήταν μεγαλύτερη, η καμπτική δυσκαμψία ήταν

επίσης μεγαλύτερη, οι κάθετες τάσεις μειώνονταν σε σχέση με τις εφαπτόμενες και ο συντελεστής ανισοτροπίας μειωνόταν αντίστοιχα.



(α)

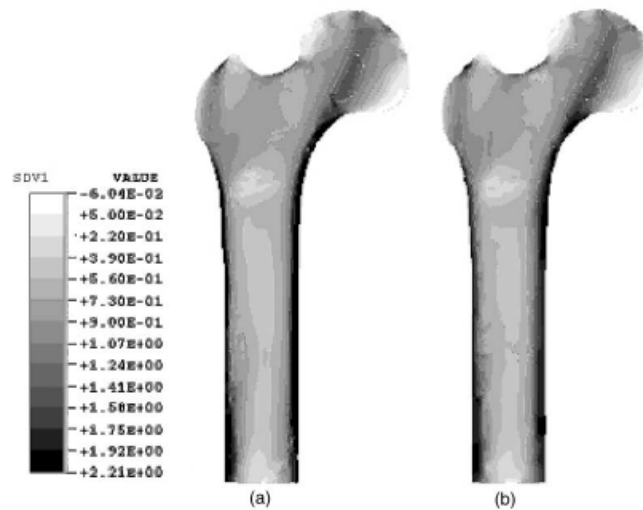


(β)

Σχήμα 3.16 Κατανομή πυκνότητας από 100 ημέρες σε πρόσοψη και τομή (α) στο τριδιάστατο μοντέλο ύστερα και (β) στο τριδιάστατο μοντέλο με εμφύτευμα

Οι García et al. (2002) παρουσίασαν μια ποιοτική υπολογιστική μελέτη της μακράς περιόδου οστικής εξέλιξης, ειδικά του ανθρώπινου μηριαίου οστού όπου διαφορετικοί

τύποι εμφυτευμάτων έχουν εφαρμοστεί ώστε να σταθεροποιήσουν διάφορα είδη βλαβών. Αρχικά, πραγματοποίησαν μια συγκριτική ανάλυση μεταξύ δύο προσθέσεων ολικής αντικατάστασης ισχίου ευρέως χρησιμοποιούμενων, όπως η Exeter και η SHP.



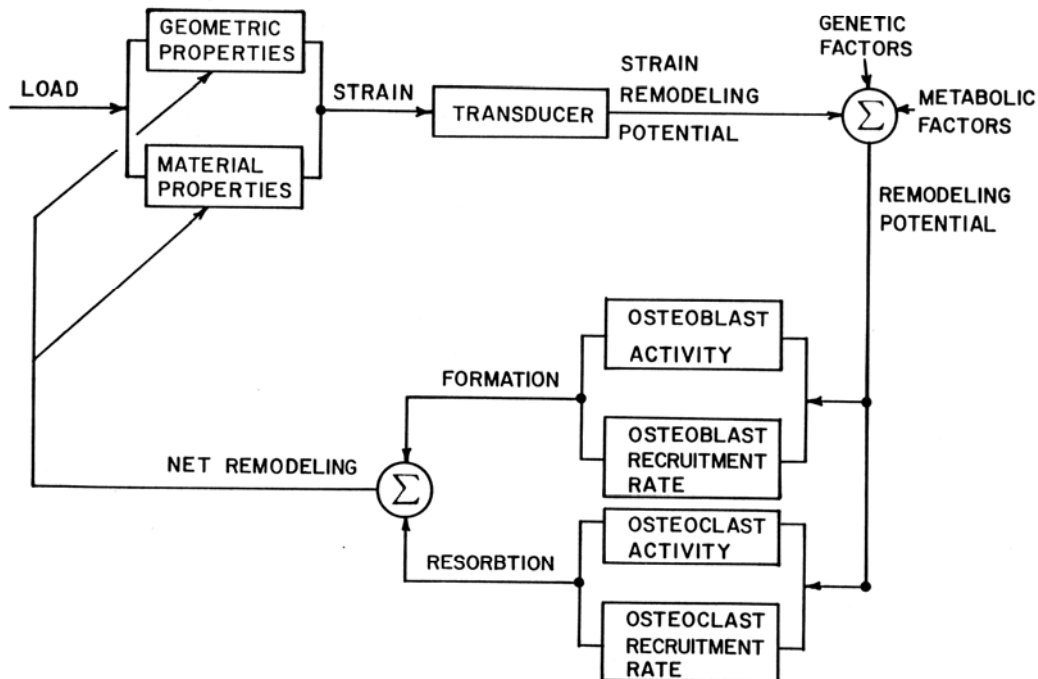
Σχήμα 3.17 Κατανομή πυκνότητας στο άθικτο οστό με διαφορετικά πλέγματα: (a) Πλέγμα για χρήση πρόσθεσης Exeter και (b) Πλέγμα για χρήση πρόσθεσης SHP

Και οι δύο προσθέσεις έδωσαν παρόμοια αποτελέσματα. Το ποσοστό της απορρόφησης οστού εξαιτίας της πρόσθεσης αυξάνεται κοντά στο κεντρικό τμήμα εκτός από το άκρο της πρόσθεσης, όπου στην πραγματικότητα ένας συγκεντρωτής προστίθεται για την αποφυγή αυτής της συνέπειας. Στη συνέχεια, μελέτησαν την θεραπεία βλαβών του κεντρικού μηριαίου οστού με εσωτερικές (intramedular) και εξωτερικές (extramedular) σταθεροποιήσεις. Ως εσωτερική μελετήθηκε η Gamma nail ενώ ως εξωτερική το δυναμικό σύστημα ισχίου (DHS). Συμπέραναν δε διαφορετικές συμπεριφορές: Για την Gamma nail παρατηρήθηκε απορρόφηση οστού μεταξύ καρφίου και βιδών και απόθεση οστού σε περιφερικό τμήμα. Για την DHS παρατηρήθηκε απορρόφηση του οστού ακριβώς κάτω από την κεφαλή του μηριαίου οστού ενώ απόθεση οστού δίπλα στις τέσσερις χρησιμοποιούμενες βίδες. Τέλος, μελέτησαν περιφερικές βλάβες με θεραπεία από πλάκες (LISS plate) ή βίδες (DFN) και συμπέραναν διαφορετική συμπεριφορά. Όσον αφορά στη LISS παρατηρήθηκε μια καθαρή απορρόφηση οστού στη ζώνη της βλάβης, ενώ μια απόθεση στη ζώνη δίπλα στην πλάκα. Στην DFN παρατηρήθηκε απλά μια απορρόφηση οστού στο φλοιώδες στρώμα στην περιοχή της βλάβης. Έτσι, κατέληξαν ότι η DFN παράγει μικρότερη απορρόφηση οστού και βοηθά στην καλύτερη κατανομή της τάσης στο οστό.

**Κεφάλαιο 4ο Ανάπτυξη Υπολογιστικής
Μεθόδου Οστικής Ανακατασκευής**

4.1 Περιγραφή υπολογιστικού μοντέλου οστικής ανακατασκευής του R.T.Hart

Ο Richard Trapnell Hart το 1983 [5] δημιούργησε τέσσερα προγράμματα σε γλώσσα προγραμματισμού FORTRAN με σκοπό την προσομοίωση, με τη χρήση της θεωρίας των πεπερασμένων στοιχείων, της επίδρασης της παραμόρφωσης, στην ενεργοποίηση και εξέλιξη του μηχανισμού οστικής ανακατασκευής (strain-induced bone remodeling).



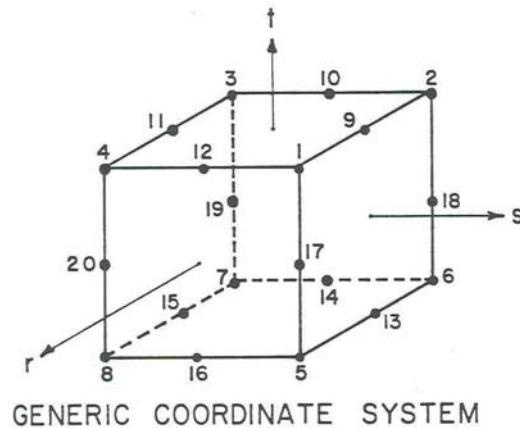
Σχήμα 4.1 Μηχανισμός Οστικής Ανακατασκευής

Στα τέσσερα προγράμματα έδωσε τις ονομασίες *RFEM3D*, *PLTMOD*, *MOD3D* και *CRESLT*. Το *RFEM3D* περιλαμβάνει ρουτίνες για την ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων (Finite Element Analysis) και την ανάλυση της οστικής ανακατασκευής (Remodeling Analysis). Στα *PLTMOD* και *MOD3D* περιγράφεται και σχεδιάζεται η γεωμετρία της δομής, ενώ το *CRESLT* γραφική αναπαράσταση των αποτελεσμάτων.

Στη συνέχεια θα αναλυθεί το πρόγραμμα *RFEM3D*, γιατί θα αποτελέσει την βάση της παρούσας ΔΕ.

4.1.1 Το πρόγραμμα *RFEM3D*

Το *RFEM3D* είναι ένα πρόγραμμα που αποτελείται από περισσότερες από 2500 σειρές κώδικα οργανωμένο σε πολλές υπορουτίνες. Τα πεπερασμένα στοιχεία που χρησιμοποιεί για την ανάλυση είναι εικοσακομβικά ισοπαραμετρικά πεπερασμένα στοιχεία (20-node isoparametric solid elements), και η μορφή τους φαίνεται στο Σχήμα 4.2 που ακολουθεί.



Σχήμα 4.2 20-κομβικό χωρικό πεπερασμένο στοιχείο

Η διαδικασία που ακολουθείται περιγράφεται παρακάτω:

Εισαγωγή δεδομένων

Προετοιμασία αποθηκευτικού χώρου για Καθολικό Μητρώο Δυσκαμψίας

Συμπλήρωση Καθολικού Μητρώου Δυσκαμψίας (Συνοριακές Συνθήκες κάθε Στοιχείου

Υπολογισμός μετατοπίσεων, παραμορφώσεων, τάσεων

Ανάλυση Οστικής Ανακατασκευής

Πριν γίνει η ανάλυση του αλγορίθμου της οστικής ανακατασκευής πρέπει να διευκρινισθεί ότι, στο συγκεκριμένο πρόγραμμα, υπάρχει διαχωρισμός ανάμεσα σε *επιφανειακή ή εξωτερική οστική ανακατασκευή* (surface or external remodeling) και σε *εσωτερική ανακατασκευή* (internal remodeling).

Η επιφανειακή οστική ανακατασκευή εστιάζει στους κόμβους (nodes) των πεπερασμένων στοιχείων και επιφέρει γεωμετρικές αλλαγές στη μορφή του οστού μέσω της αλλαγής των αρχικών συντεταγμένων των κόμβων του.

Η εσωτερική οστική ανακατασκευή εστιάζει στα πεπερασμένα στοιχεία (elements) και επιφέρει αλλαγή στην πυκνότητα τους η οποία συνδέεται άμεσα, μέσω εμπειρικών σχέσεων με τις μηχανικές ιδιότητες (μέτρο ελαστικότητας & λόγος Poisson) του οστού.

Υπολογιστικά η οστική ανακατασκευή πραγματοποιείται στα παρακάτω βήματα

Υπολογισμός όγκου στοιχείου

Πραγματοποίηση Επιφανειακής Ανακατασκευής

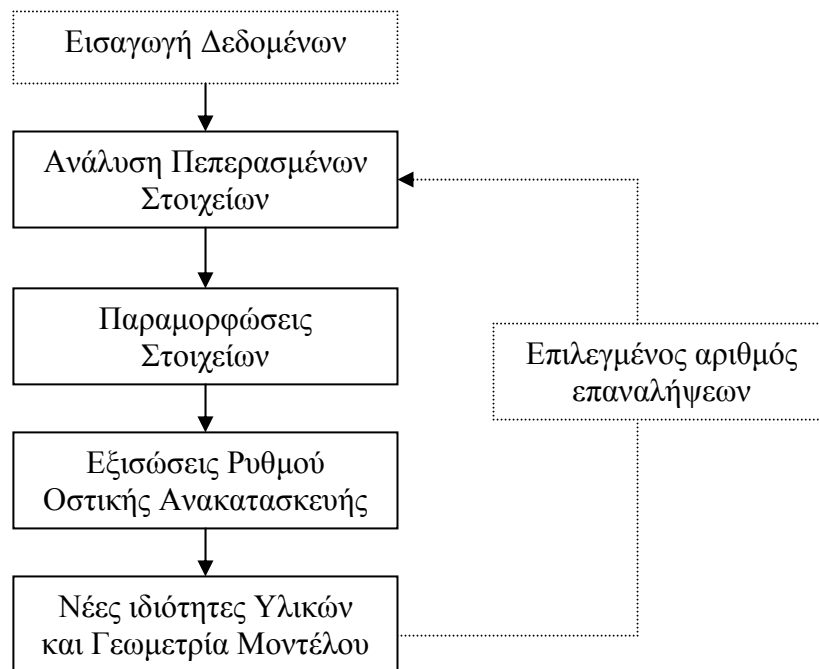
Πραγματοποίηση Εσωτερικής Ανακατασκευής

Υπολογισμός νέου όγκου στοιχείου

Αλλαγή ιδιοτήτων οστού

Συνοπτικά από ένα αρχείο εισαγωγής δεδομένων (Data Input), καθορίζονται η αρχική γεωμετρία του μοντέλου, οι ιδιότητες των υλικών, η φόρτιση και η στήριξη του. Ύστερα, από την ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία, προκύπτουν οι μετατοπίσεις, οι παραμορφώσεις και οι τάσεις. Μέσω των εξισώσεων του ρυθμού ανακατασκευής προβλέπονται οι νέες ιδιότητες υλικού των οστών και η νέα γεωμετρία του μοντέλου.

Η διαδικασία επαναλαμβάνεται για προεπιλεγμένο αριθμό χρονικών βημάτων.



Σχήμα 4.3 Αλγόριθμος ανακατασκευής οστού

4.1.2 Δεδομένα εισόδου στο RFEM3D

Τα δεδομένα εισόδου για την εκτέλεση του προγράμματος δίνονται σε αρχείο κειμένου που δημιουργείται από τον χρήστη, και πρέπει να έχει συγκεκριμένη μορφή. Τα απαραίτητα δεδομένα για τη λειτουργία του προγράμματος είναι 14 ειδών:

- Στοιχεία Μοντέλου Πεπερασμένων στοιχείων (Π.Σ.) (Αριθμός Π.Σ. και κόμβων)
- Πληροφορίες σχετικές με τους κόμβων (Συντεταγμένες και Στήριξη)
- Ιδιότητες υλικών
- Τρόπος σύνδεσης των κόμβων για τη δημιουργία του πλέγματος (Συνδετικότητα)
- Κομβικές Φορτίσεις (Μέτρο, Διεύθυνση και Αριθμός Κόμβου)
- Κατανεμημένες Επιφανειακές φορτίσεις
- Ο αριθμός των στοιχείων που υπόκεινται σε Επιφανειακή Ανακατασκευή
- Ο αριθμός των στοιχείων που υπόκεινται σε Εσωτερική Ανακατασκευή
- Συνολικός Χρόνος και Χρονικό Βήμα Ανακατασκευής
- Παράμετρος Επιφανειακής Ανακατασκευής για την Επιφάνεια του Περιόστεου
- Παράμετρος Επιφανειακής Ανακατασκευής για την Επιφάνεια του Ενδόστευου

- Παράμετρος Επιφανειακής Ανακατασκευής για το Όριο Παραμόρφωσης για Εναπόθεση Οστού στην Επιφάνεια του Περίοστεου
- Παράμετρος Επιφανειακής Ανακατασκευής για το Όριο Παραμόρφωσης για Εναπόθεση Οστού στην Επιφάνεια του Περίοστεου

Σημαντικό πρόβλημα στην εκτέλεση του προγράμματος είναι η δημιουργία γεωμετρίας και πλέγματος ιδιαίτερα σε περίπλοκες γεωμετρίες. Επίσης οι παράμετροι των εξισώσεων επιφανειακής ανακατασκευής αποτελούν δεδομένα εισαγωγής από το χρήστη του προγράμματος.

4.1.3 Υπορουτίνες του *RFEM3D*

Πλήρης εικόνα του προγράμματος μπορεί να αποκτηθεί με την περιγραφή των υπορουτίνων που το αποτελούν. Το πρόγραμμα χωρίζεται σε δύο ενότητες : Την Ανάλυση Πεπερασμένων Στοιχείων και την Ανάλυση Οστικής Ανακατασκευής. Κάθε μία ενότητα έχει τις δικές της υπορουτίνες. Ακολουθούν τα ονόματα των υπορουτίνων και ο ρόλος τους.

A. Ανάλυση Πεπερασμένων Στοιχείων

- MINPUT → Ανάγνωση αρχικών Δεδομένων Εισόδου (Συνολικός Αριθμός Κόμβων, Στοιχείων και Υλικών)
- AINPUT → Ανάγνωση υπόλοιπων Δεδομένων Εισόδου
- DENPRP → Σύνδεση Πυκνότητας και Μηχανικών Ιδιοτήτων
- RINPUT → Ανάγνωση Δεδομένων Εισόδου που Σχετίζονται με την Οστική Ανακατασκευή
- OPTIC2 → Δημιουργία πίνακα για την αποθήκευση του Καθολικού Μητρώου Δυσκαμψίας
- DLOADS → Μετασχηματισμός Κατανεμημένων Δυνάμεων σε Κομβικές Δυνάμεις
- ESTIF → Σχηματισμός του Μητρώου Δυσκαμψίας ανά Στοιχείο
- OPTZER → Καθορισμός Συνοριακών Συνθηκών ανά Στοιχείο
- OPTADD → Πρόσθεση του Τοπικού Μητρώου Δυσκαμψίας στον Πίνακα του Καθολικού Μητρώου Δυσκαμψίας
- OPTSOL → Επίλυση Εξισώσεων για την εύρεση των μετατοπίσεων
- STASTR → Υπολογισμός Τάσεων και Παραμορφώσεων

B. Ανάλυση Οστικής Ανακατασκευής

- VOLUME → Έυρεση Όγκου ανά Στοιχείο

REMS2 → Υπολογισμός Εξωτερικής Ανακατασκευής

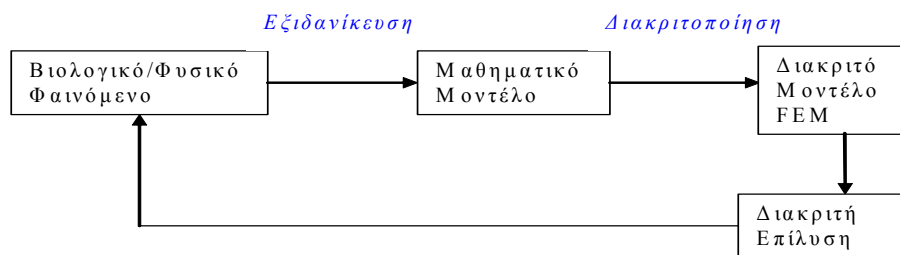
REMI2 → Υπολογισμός Εσωτερικής Ανακατασκευής

ADDEN → Υπολογισμός Πυκνότητας Στοιχείου λόγω Εσωτερικής Ανακατασκευής

ADDREM → Υπολογισμός Συντεταγμένων Κόμβου λόγω Εξωτερικής Ανακατασκευής

4.2 Υπολογιστική μέθοδος οστικής ανακατασκευής που αναπτύχθηκε

Η απαραίτητη για την εφαρμογή της οστικής αναπαραγωγής ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων πραγματοποιείται στο λογισμικό ANSYS v10.0®. Η οστική ανακατασκευή, είναι μια διαδικασία που επαναλαμβάνεται για πολλά χρονικά βήματα, και έχει προγραμματισθεί στην γλώσσα προγραμματισμού του ANSYS, apdl.



Σχήμα 4.4 Διαδικασία Μοντελοποίησης Οστικής Ανακατασκευής

Η υπολογιστική μέθοδος που αναπτύχθηκε (Σχήμα 4.4) στηρίζεται στην εξιδανίκευση του φαινομένου της οστικής ανακατασκευής χρησιμοποιώντας ένα μαθηματικό μοντέλο όπως αυτά που αναφέρθηκαν στο Κεφάλαιο 2. Οι περισσότερες μαθηματικές σχέσεις για την οστική ανακατασκευή είναι εξισώσεις ρυθμού (rate equations). Είναι συνήθως της μορφής :

$$\frac{d\rho}{dt} = f(\rho, x(t), t) \quad (4.1)$$

όπου ρ η οστική πυκνότητα και $x(t)$ κάποιο μηχανικό μέγεθος, όπως η τάση, η παραμόρφωση, η ενέργεια παραμόρφωσης, μεταβαλλόμενο στο χρόνο. Συνήθως, ο ρυθμός μεταβολής οστικής πυκνότητας είναι ανάλογος της διαφοράς μηχανικής διέγερσης από κάποια τιμή αναφοράς (threshold). Σε κάποιες άλλες θεωρήσεις υπάρχουν μη-γραμμικοί όροι στις εξισώσεις.

Το μαθηματικό μοντέλο ολοκληρώνεται από μία σχέση της μορφής :

$$E = C\rho^r \quad (4.2)$$

που συσχετίζει την οστική πυκνότητα με το μέτρο ελαστικότητας του οστού. Όπου C και r είναι σταθερές.

Η διαδικασία διακριτοποιείται αφ' ενός δημιουργώντας το μοντέλο του οστού με τη χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων και αφ' ετέρου με την αριθμητική επίλυση της διαφορικής εξίσωσης για έναν αριθμό χρονικών βημάτων. Ζητούμενο είναι η διακριτή αυτή επίλυση να επαληθεύει το φυσικό φαινόμενο που αντιπροσωπεύει.

4.2.1 Αριθμητική επίλυση διαφορικών εξισώσεων

Θεωρείται η ακόλουθη μη – γραμμική εξίσωση μιας μεταβλητής:

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (4.3)$$

Οι συνηθέστερες τεχνικές αριθμητικής ολοκλήρωσης που χρησιμοποιούνται προέρχονται από τη σειρά Taylor. Σκοπός κάθε τεχνικής είναι ο κατά προσέγγιση υπολογισμός της μεταβλητής x σε χρόνο $(t + \Delta t)$ όταν είναι γνωστή η τιμή της x το χρόνο t , δηλαδή η $x(t)$ και το βήμα ολοκλήρωσης Δt .

Η ανάπτυξη της συνάρτησης σε σειρά Taylor για μια μικρή μεταβολή Δt γύρω από την τιμή t είναι:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + x^{(1)}(t)\Delta t + x^{(2)}(t)\frac{\Delta t^2}{2!} + x^{(3)}(t)\frac{\Delta t^3}{3!} + x^{(4)}(t)\frac{\Delta t^4}{4!} + \dots \quad (4.1)$$

Οι συνηθέστερες τεχνικές αριθμητικής ολοκλήρωσης διαφέρουν στον αριθμό των όρων που χρησιμοποιούν από τη σειρά Taylor. Οι πιο διαδεδομένες τεχνικές είναι αυτές που χρησιμοποιούν έναν και τέσσερις όρους.

1ης Τάξης Τεχνική ολοκλήρωσης

Η 1^{ης} Τάξης Τεχνική ολοκλήρωσης είναι γνωστή και σαν τεχνική Euler. Χρησιμοποιεί μόνο τον όρο της πρώτης παραγώγου για την εκτίμηση της διορθωτικής ποσότητας Δx .

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \dot{x}(t)\Delta t \quad (4.2)$$

Αντικαθιστώντας την παράγωγο,

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (4.6)$$

προκύπτει η σχέση,

$$x(t + \Delta t) = x(t) + f(x, t)\Delta t \quad (4.7)$$

Χρησιμοποιώντας τον ανωτέρω τύπο προχωρούμε κατά βήμα Δt . Η διαδικασία είναι επαναληπτική και ξεκινάει από την αρχική συνθήκη, υπολογίζει την κλίση και προχωρεί στον υπολογισμό του Δx και μετά του $x(t + \Delta t)$. Η νέα αυτή τιμή χρησιμεύει ως αρχική συνθήκη για το επόμενο βήμα υπολογισμού.

Runge – Kutta 4^{ης} Τάξης

Η μέθοδος των Runge – Kutta δεν κάνει άμεσο υπολογισμό των παραγώγων και ο αλγόριθμός της βασίζεται στις τέσσερις πρώτες παραγώγους. Η σύνοψη της μεθόδου περιγράφεται παρακάτω.

Δεδομένης της εξίσωσης $\dot{x} = f(x, t)$, υπολογίζονται οι ποσότητες:

$$K_0 = \Delta t \cdot f(x, t) \quad (4.8)$$

$$K_1 = \Delta t \cdot f\left(x + \frac{1}{2}K_0, t + \frac{\Delta t}{2}\right) \quad (4.9)$$

$$K_2 = \Delta t \cdot f\left(x + \frac{1}{2}K_1, t + \frac{\Delta t}{2}\right) \quad (4.10)$$

$$K_3 = \Delta t \cdot f(x + K_2, t + \Delta t) \quad (4.11)$$

Η τιμή της μεταβλητής x σε χρόνο $(t + \Delta t)$ υπολογίζεται τελικά από τη σχέση

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \frac{1}{6}(K_0 + 2K_1 + 2K_2 + K_3) \quad (4.12)$$

Η μέθοδος ισοδυναμεί με σειρά Taylor 4^{ης} τάξης. Διαρκεί τέσσερις φορές περισσότερο από την τεχνική πρώτης τάξης αφού η $f(x, t)$ υπολογίζεται τέσσερις φορές σε κάθε βήμα και η ακρίβειά της είναι της τάξης $(\Delta t)^5$. Η Runge – Kutta 4^{ης} Τάξης είναι η πιο διαδεδομένη τεχνική ολοκλήρωσης.

Adams-Bashorth 4^{ης} Ταξης

Μέθοδοι της οι Euler και Runge-Kutta καλούνται μέθοδοι μονού βήματος επειδή χρησιμοποιούν μόνο την πληροφορία από το ένα προηγούμενο σημείο για να υπολογίσουν το διαδοχικό σημείο. Αυτό σημαίνει ότι χρησιμοποιείται μόνο το αρχικό σημείο (x_0, t_0) για να υπολογιστεί το (x_1, t_1) και γενικά χρειάζεται το (x_k, t_k) για να υπολογιστεί το (x_{k+1}, t_{k+1}) .

Η μέθοδος Adams-Bashorth αντίθετα, χρησιμοποιεί τα σημεία (x_{k-3}, t_{k-3}) , (x_{k-2}, t_{k-2}) , (x_{k-1}, t_{k-1}) και (x_k, t_k) για να υπολογίσει το (x_k, t_k) . Αυτή η μέθοδος, δηλαδή, δεν είναι της-εκκινούμενη, αλλά πρέπει να δοθούν τέσσερα αρχικά σημεία εκ των προτέρων.

Μια επιθυμητή ιδιότητα της μεθόδου πολλαπλών βημάτων είναι ότι το τοπικό σφάλμα αποκοπής μπορεί να προσδιορισθεί, και της διορθωτικός όρος μπορεί να συμπεριληφθεί στον υπολογισμό του επόμενου βήματος ώστε να βελτιωθεί η ακρίβεια απόκρισης κάθε βήματος.

Το μέγεθος του βήματος πρέπει να είναι αρκετά μικρό ώστε να επιτευχθεί ακριβής τιμή για το x_{k+1} , αλλά αρκετά υψηλό ώστε να εξαλειφθούν περιττοί υπολογισμοί. Ο συνδυασμός δύο παραγόντων, πρόβλεψης και διόρθωσης, απαιτεί μόνο δύο αποτιμήσεις της συνάρτησης $f(x, t)$ ανά βήμα.

Η σύνοψη της μεθόδου ακολουθεί.

Δεδομένης της εξίσωσης $\dot{x} = f(x, t)$, για Δt βήμα ολοκλήρωσης ($t_{k+1} = t_k + \Delta t$), υπολογίζεται η ποσότητα πρόβλεψης,

$$p_{k+1} = x_k + \frac{\Delta t}{24}(-9f_{k-3} + 37f_{k-2} - 59f_{k-1} + 55f_k) \quad (4.3)$$

για $\kappa=3, 4, \dots, m-1$ σε συνολικό χρόνο ολοκλήρωσης $(m-1)\Delta t$

όπου

$$f_{\kappa-3} = f(x_{\kappa-3}, t_{\kappa-3}) \quad (4.4)$$

$$f_{\kappa-2} = f(x_{\kappa-2}, t_{\kappa-2}) \quad (4.5)$$

$$f_{\kappa-1} = f(x_{\kappa-1}, t_{\kappa-1}) \quad (4.6)$$

$$f_{\kappa} = f(x_{\kappa}, t_{\kappa}) \quad (4.7)$$

Η τιμή της μεταβλητής x σε χρόνο $(t + \Delta t)$ υπολογίζεται από τη σχέση

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \frac{\Delta t}{24} [f_{\kappa-2} - 5f_{\kappa-1} + 19f_{\kappa} + 9f(p_{\kappa+1}, t_{\kappa+1})] \quad (4.8)$$

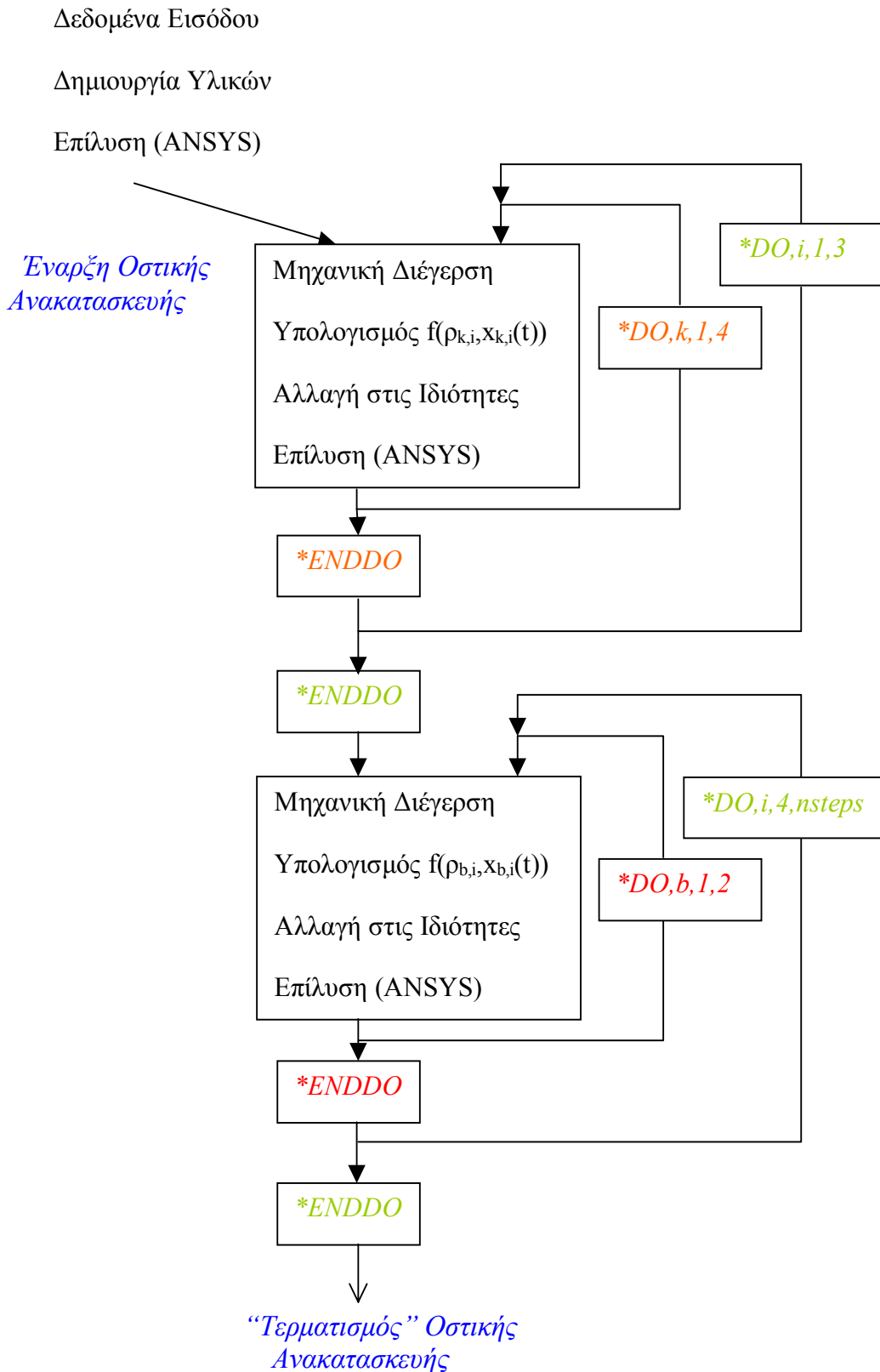
Η ακρίβεια της μεθόδου είναι της τάξης $(\Delta t)^5$

4.2.2 Κώδικας οστικής Ανακατασκευής που αναπτύχθηκε στη γλώσσα APDL

Όπως προαναφέρθηκε αναπτύχθηκε κώδικας σε γλώσσα APDL όπου:

- Θεωρείται αρχική πυκνότητα για κάθε πεπερασμένο στοιχείο που αντιστοιχεί στο αρχικό μέτρο ελαστικότητας.
- Γίνεται ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων και υπολογίζονται τα απαραίτητα μηχανικά μεγέθη για προκαθορισμένες φορτίσεις
- Επιλύεται αριθμητικά η διαφορική εξίσωση της οστικής ανακατασκευής και υπολογίζεται η νέα πυκνότητα σε κάθε στοιχείο στις απαιτούμενες χρονικές στιγμές.
- Υπολογίζεται νέο μέτρο ελαστικότητας για κάθε Π.Σ.
- Λόγω της αλλαγής των μηχανικών ιδιοτήτων, με επίλυση στο ANSYS υπολογίζεται η νέα τιμή της μηχανική διέγερση σε κάθε Π.Σ.
- Η νέα μηχανική διέγερση του στοιχείου χρησιμοποιείται στην διαφορική εξίσωση της οστικής ανακατασκευής για το επόμενο χρονικό βήμα.
- Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται.

Ακολουθεί στο Σχήμα 4.5 η αναπαράσταση του αλγορίθμου του προγράμματος που αναπτύχθηκε. Από το παρακάτω σχήμα απουσιάζει ο νοητός βρόχος για την επανάληψη της διαδικασίας σε κάθε Π.Σ.



Σχήμα 4.5 Αλγόριθμος Προγράμματος που αναπτύχθηκε στο ANSYS

Για να ξεκινήσει η εκτέλεση του κώδικα πρέπει να καθοριστεί η γεωμετρία του οστού. Στη συνέχεια πρέπει να γεννηθεί πλέγμα Π.Σ. και να οριστούν οι οριακές συνθήκες.

Δεδομένα εισόδου του προγράμματος αποτελούν

- ο συνολικός χρόνος προσομοίωσης
- το μέγεθος του βήματος ανάλυσης
- οι συντελεστές της διαφορικής εξίσωσης της οστικής ανακατασκευής και
- οι συντελεστές C και γ για τη συσχέτιση μέτρου ελαστικότητας και οστικής πυκνότητας.

Η παραμετροποίηση του κώδικα είναι τέτοια ώστε να μπορεί, χωρίς αλλαγές, να εφαρμοσθεί τόσο σε διδιάστατο όσο και τριδιάστατο πρόβλημα, σε οποιαδήποτε γεωμετρία, για οποιοδήποτε πλέγμα Π.Σ. και οριακές συνθήκες.

Η συνθήκη ισορροπίας για την οστική ανακατασκευή σε κάθε στοιχείο, προσδιοριζόμενη από την τη θεωρία οστικής ανακατασκευής, είναι :

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad \text{ή} \quad \rho = \rho_{\max} \quad \text{ή} \quad \rho = \rho_{\min}$$

Στους κώδικες που αναπτύχθηκαν έχει τεθεί ως άνω όριο οστικής πυκνότητας η τιμή

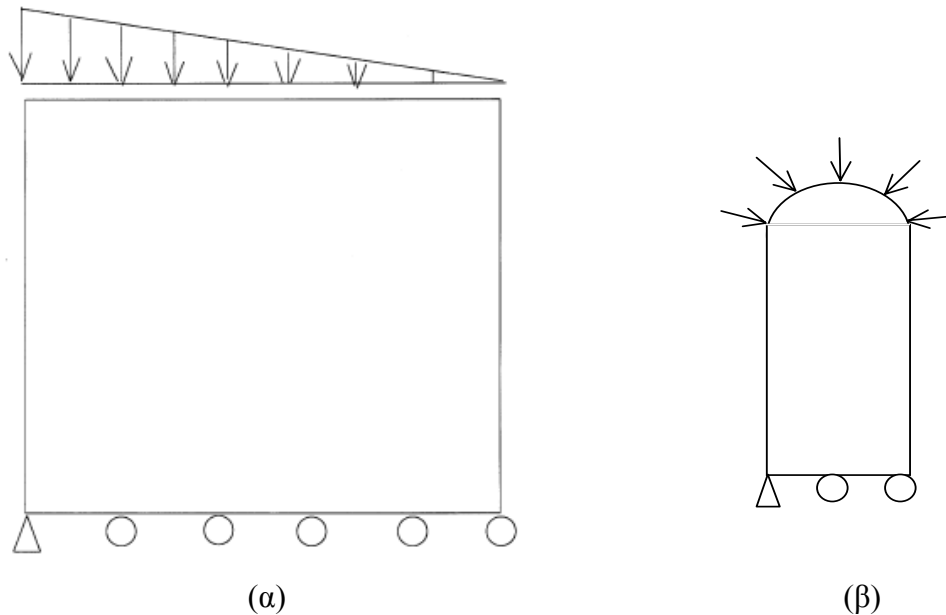
$$\rho_{\max} = 1.74 \frac{gr}{cm^3}, \text{ ενώ ως κάτω όριο } \rho_{\min} = 0.01 \frac{gr}{cm^3}$$

Η αριθμητική ολοκλήρωση γίνεται με τη βοήθεια των μεθόδων Runge – Kutta και Adams Bashforth 4^{ης} τάξης. Για τα τρία πρώτα βήματα χρησιμοποιείται η μέθοδος Runge – Kutta, ώστε να μπορεί να εκκινήσει η Adams Bashforth η οποία χρησιμοποιείται σε τα υπόλοιπα βήματα. Έτσι, επιτυγχάνεται γρήγορη σύγκλιση και υψηλή ακρίβεια στο αποτέλεσμα. Κατά τη διάρκεια κάθε βήματος της μεθόδου Runge-Kutta απαιτούνται 4 επιλύσεις στο πρόγραμμα ANSYS για τον υπολογισμό των απαραίτητων ενδιάμεσων τιμών, ενώ για κάθε βήμα της μεθόδου Adams Bashford απαιτούνται δύο επιλύσεις για τον ίδιο λόγο

4.3 Παραδείγματα ελέγχου της κάθε μεθόδου

Η διαδικασία στην παρούσα διπλωματική εργασία θα υλοποιηθεί σε δύο απλές διδιάστατες γεωμετρικές δομές που εμφανίζονται στη βιβλιογραφία της οστικής ανακατασκευής [31], [30](Σχήμα 4.6):

- Μια τετράγωνη πλάκα
- Μια τυπική γεωμετρία ισχίου



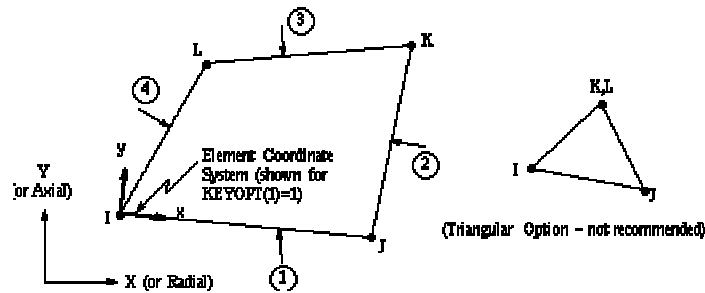
Σχήμα 4.6 Διδιάστατη εφαρμογή (α) σε τετράγωνη πλάκα (β) σε τυπική μορφή μακρέως οστού

Το υλικό που έχει θεωρηθεί και για τις δύο δομές είναι ιστροπικό δηλαδή το μέτρο ελαστικότητάς του είναι ίσο στις τρεις κατευθύνσεις. Στην αρχική κατάσταση το υλικό είναι συμπαγές, σταθερής αρχικής πυκνότητας. Οι οριακές συνθήκες κάθε κατασκευής φαίνονται στο Σχήμα 4.6 και θα διατηρούνται σταθερές καθ' όλη τη διάρκεια της προσομοίωσης. Το μέγεθος που μεταβάλλεται, μέσω της μηχανικής διέγερσης, είναι η οστική πυκνότητα κάθε στοιχείου ανεξάρτητα.

4.3.1 Τετράγωνη πλάκα

Η διδιάστατη πλάκα είναι διαστάσεων $10\text{cm} \times 10\text{cm}$. Εφαρμόζεται, σε αυτήν σταθερή, κατανεμημένη γραμμική πίεση με αρνητική κλίση στην άνω πλευρά. Η μέγιστη τιμή είναι $p_{\max} = 10\text{MPa}$ στην άνω αριστερή κορυφή και μηδενική στην άνω δεξιά. Στον κόμβο που αντιστοιχεί στην κάτω αριστερά κορυφή δεσμεύονται όλοι η βαθμοί ελευθερίας του, ενώ σε όλη την κάτω πλευρά εφαρμόζεται κύλιση.

Δημιουργείται πλέγμα με 40×40 τετρακομβικά στοιχεία *plane 42*. Το πεπερασμένο στοιχείο *plane42* χρησιμοποιείται για τη διδιάστατη μοντελοποίηση στερεών κατασκευών. Το στοιχείο αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί είτε ως επίπεδο στοιχείο (επίπεδη τάση ή επίπεδη παραμόρφωση) ή ως αξονοσυμμετρικό στοιχείο. Καθορίζεται δε από 4 κόμβους, έχοντας δύο βαθμούς ελευθερίας σε κάθε κόμβο: μετατόπιση στις κατευθύνσεις x και y των κόμβων. Στο Σχήμα 4.7 παρουσιάζεται η γεωμετρία του πεπερασμένου στοιχείου *plane42*.



Σχήμα 4.7 Γεωμετρία πεπερασμένου στοιχείου plane42

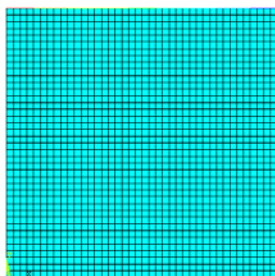
Γενικά, η πύκνωση του πλέγματος οδηγεί σε αύξηση της ακρίβειας αλλά και του υπολογιστικού κόστους, κάτι που, ειδικά στην συγκεκριμένη περίπτωση που η διαδικασία είναι επαναληπτική μπορεί να δημιουργήσει προβλήματα. Κρίνεται ότι η συγκεκριμένη πυκνότητα πλέγματος είναι επαρκής.

Ο λόγος Poisson διατηρείται σταθερός και ίσος με 0.3, ενώ το διαρκώς μεταβαλλόμενο ύστερα από κάθε χρονικό βήμα μέτρο ελαστικότητας κάθε στοιχείου υπολογίζεται συναρτήσει της πυκνότητας (Σχήμα 4.8(α)).

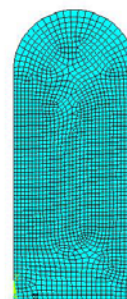
4.3.2 Τυπική γεωμετρία ισχίου

Η τυπική γεωμετρία ισχίου αποτελεί μια διδιάστατη δομή πλάτους 2.5cm και μέγιστου ύψους 61.25cm , όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.8(β). Το άνω μέρος καταλήγει σε ημικύκλιο ακτίνας 1.25cm και προσιδιάζει την κεφαλή ενός μακρέως οστού όπως στο μηριαίο. Στην κεφαλή εφαρμόζεται σταθερή πίεση, με τιμή $p = 5\text{MPa}$, ενώ σε όλη την κάτω πλευρά κύλιση στον κάτω αριστερά κόμβο δεσμεύονται όλοι οι βαθμοί ελευθερίας.

Το πλέγμα που δημιουργείται αποτελείται από 2022 ισοπαραμετρικά διδιάστατα Π.Σ. plane42 και επιλέγεται αρχική πυκνότητα $\rho_0 = 0.8\text{gr}/\text{cm}^3$ ίση για όλα τα Π.Σ. Ο λόγος Poisson διατηρείται σταθερός και ίσος με 0.3, ενώ το διαρκώς μεταβαλλόμενο ύστερα από κάθε χρονικό βήμα μέτρο ελαστικότητας κάθε στοιχείου υπολογίζεται, όπως και στην πλάκα.



(α)



(β)

Σχήμα 4.8 Πλέγμα Π.Σ (α) σε τετράγωνη πλάκα (β) σε τυπική μορφή μακρέως οστού

**Κεφάλαιο 5ο Παραμορφωσιακό Μοντέλο
Οστικής Ανακατασκευής**

5.1 Ανάλυση μοντέλου εσωτερικής οστικής ανακατασκευής του Hart

Ο Hart μετά από πειραματική έρευνα και ανάλυση το 1982 [5] θεώρησε, για το ρυθμό μεταβολής της παραμέτρου ανακατασκευής του οστού a , όπως την ονόμασε (remodeling parameter rate), μια διαφορική εξίσωση 1^{ης} τάξης ως προς την οστική πυκνότητα. Σύμφωνα με αυτή την εξίσωση, ο ρυθμός μεταβολής της παραμέτρου ανακατασκευής εξαρτάται άμεσα από την παραμόρφωση του οστού κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες φόρτισης.

$$\frac{da}{dt} = 0.4734 - 4.7334 \cdot a + 7.8897 \cdot a^2 + 788.94 \cdot a \cdot \varepsilon + 788.94 \cdot \varepsilon \quad (5.1)$$

όπου a είναι η παράμετρος ανακατασκευής του οστού και

ε η παραμόρφωση

Η παράμετρος ανακατασκευής συνδέεται άμεσα με την πυκνότητα του οστού μέσω της σχέσης

$$\rho = 2.0179 \cdot (a + 0.892) \quad (5.2)$$

Τέλος, σύμφωνα με τις πειραματικές μελέτες του Hart, το μέτρο ελαστικότητας του οστού υπολογίζεται συναρτήσει της πυκνότητάς του μέσω της σχέσης :

$$E = C \cdot \rho^r \quad (5.3)$$

$$C = 3.2527 \frac{GPa}{\left(\frac{gr}{cm^3}\right)^2} \quad \text{όπου} \quad \text{και} \quad r = 3$$

5.2 Ισοδύναμη μορφή της διαφορικής εξίσωσης του Hart

Στις περισσότερες υπολογιστικές εφαρμογές εσωτερικής οστικής ανακατασκευής που αναπτύχθηκαν σε προηγούμενο κεφάλαιο το μηχανικό μέγεθος που θέτει σε λειτουργία τον μηχανισμό της οστικής αναπαραγωγής συνδέεται άμεσα με την μεταβολή της οστικής πυκνότητας.

Παραγωγίζοντας τη σχέση (5.2) ως προς το χρόνο προκύπτει ότι:

$$\frac{d\rho}{dt} = 2.0179 \cdot \frac{da}{dt} \quad (5.4)$$

Επιλύοντας την σχέση (5.2) ως προς a και αντικαθιστώντας τη σχέση (5.4) στην σχέση (5.1), προκύπτει η σχέση του ρυθμού μεταβολής της οστικής πυκνότητας συναρτήσει της παραμόρφωσης:

$$\frac{d\rho}{dt} = 22.14278 - 18.80866 \cdot \rho + 3.90986 \cdot \rho^2 + \varepsilon \cdot (171.934 + 778.9399 \cdot \rho) \quad (5.5)$$

5.3 Αποτελέσματα της χρήσης της σχέσης του Hart σε ράβδο και σύγκριση με βιβλιογραφία.

Ο Hart παρουσίασε τη μεταβολή των πυκνοτήτων σε μία ράβδο, μοντελοποιημένη με 9 εικοσακομβικά ισοπαραμετρικά Π.Σ, υπό συνθήκες κάμψης.

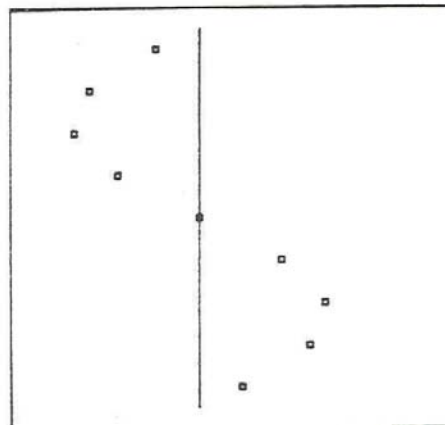
Δημιούργησε μία τριδιάστατη δομή με διαστάσεις $1mm \times 1mm \times 9mm$ και δεσμεύοντας όλους τους βαθμούς ελευθερίας των τεσσάρων κάτω γωνιακών κόμβων εφάρμοσε τέσσερις καμπτικές δυνάμεις, μέτρου 0.02 N η κάθε μία, στους τέσσερις άνω γωνιακούς κόμβους.

Θεώρησε 9 διαφορετικά υλικά με πυκνότητες με ημιτονοειδή κατανομή καθ' ύψος, και υπολόγισε το μέτρο ελαστικότητας κάθε Π.Σ. με χρήση της σχέσης (5.3).

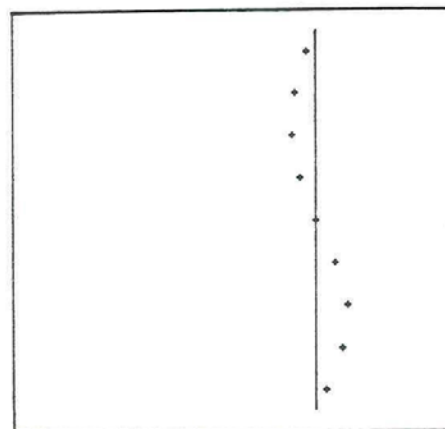
Σκοπός του ήταν να δείξει πώς θα μεταβληθούν οι πυκνότητες των Π.Σ. σε μια χρονική μονάδα κατά τη διαδικασία της οστικής ανακατασκευής (Σχέση(5.5)). Τελικά παρατήρησε ότι η κατανομή τους εξομαλύνθηκε και οι τιμές τους πλησίασαν.

Το μηχανικό μέγεθος που επηρεάζει την οστική ανακατασκευή κατά τον Hart ήταν παραμόρφωση κατά τη διεύθυνση z.

a) Initial Density Distribution

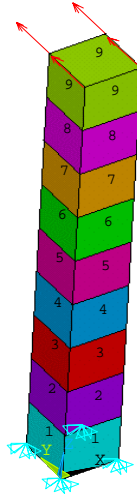


b) Density Distribution after time = 1τ



Σχήμα 5.1 Αποτελέσματα από διδακτορικό Hart (α) αρχική κατανομή πυκνοτήτων 9 στοιχείων (β) τελική κατανομή

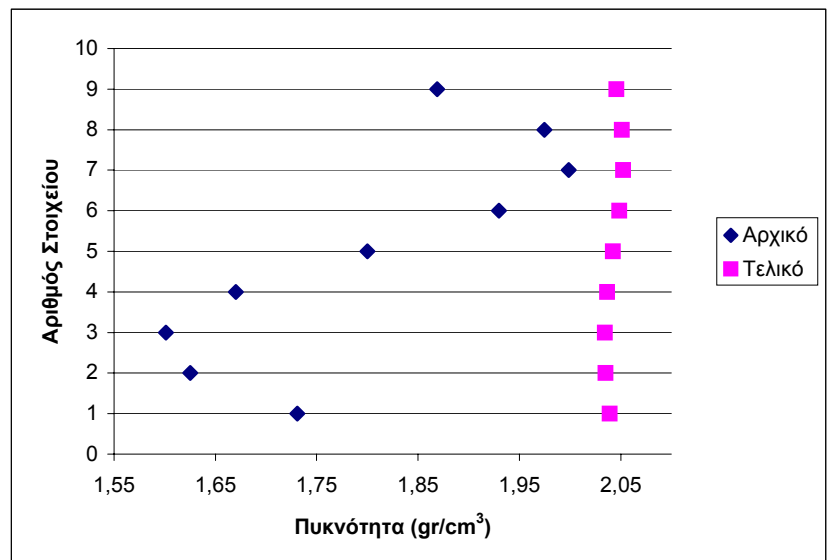
Στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας έγινε αναπαραγωγή του ίδιου παραδείγματος ώστε να ελεγχθεί η ορθή μεταφορά του κώδικα FORTRAN σε APDL. Η γεωμετρία, τα 9 Π.Σ που αντιστοιχούν σε εννέα διαφορετικά υλικά, οι κομβικές δυνάμεις και η στήριξη φαίνονται στο Σχήμα 5.2 που ακολουθεί.



Σχήμα 5.2 Μοντέλο ράβδου κατά τον Hart με τις οριακές συνθήκες και χρήση εννέα υλικών διαφορετικής πυκνότητας

Χρησιμοποιώντας τις ίδιες τιμές αρχικής πυκνότητας με αυτές που αναφέρει ο Hart, μετά από μια χρονική μονάδα, με την αριθμητική ολοκλήρωση της Σχέσης (5.5) σε πέντε χρονικά βήματα, προέκυψαν τα αποτελέσματα που φαίνονται στο Σχήμα 5.3 που ακολουθεί.

Αριθμός Στοιχείου	t = 0	t = 1
1	1,739	2,039
2	1,625	2,035
3	1,601	2,034
4	1,670	2,037
5	1,800	2,042
6	1,930	2,049
7	1,999	2,052
8	1,975	2,051
9	1,869	2,045



Σχήμα 5.3 Μεταβολές πυκνότητας σε μια χρονική μονάδα

Όπως φαίνεται αυξήθηκαν οι πυκνότητες σε όλα τα Π.Σ. αλλά έχουν πλέον πολύ κοντινή τιμή, δηλαδή συνεχίζουν να έχουν ημιτονοειδή κατανομή πολύ μικρότερου πλάτους.

5.4 Αλλαγή των σταθερών στη διαφορική εξίσωση του Hart

Στη συνέχεια ακολουθεί η μαθηματική τροποποίηση της υπάρχουσας διαφορικής εξίσωσης, ώστε να ενσωματώσει στοιχεία που αφορούν τις ιδιότητες του οστού και τις τελευταίες εξελίξεις στη σχετική με την οστική ανακατασκευή έρευνα [15].

Η Σχέση (5.5) είναι της μορφής:

$$\frac{d\rho}{dt} = \alpha(\rho) \cdot \varepsilon + \beta(\rho) \quad \text{με } \alpha(\rho) > 0 \quad (5.6)$$

όπου

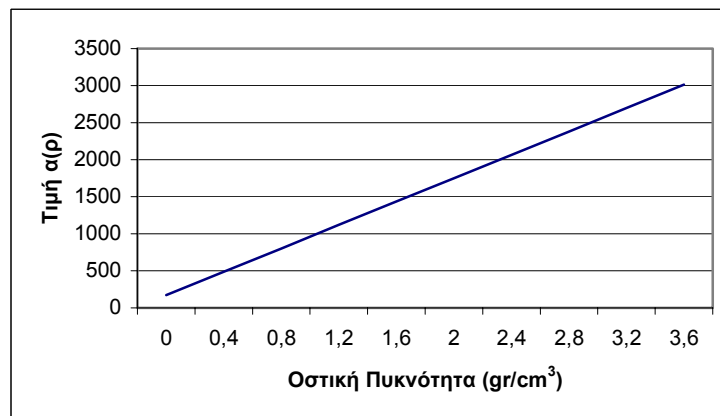
$$\beta(\rho) = 22.1428 - 18.80866 \cdot \rho + 3.90986 \cdot \rho^2 \quad (5.7)$$

$$\alpha(\rho) = 171.934 + 778.9399 \cdot \rho \quad (5.8)$$

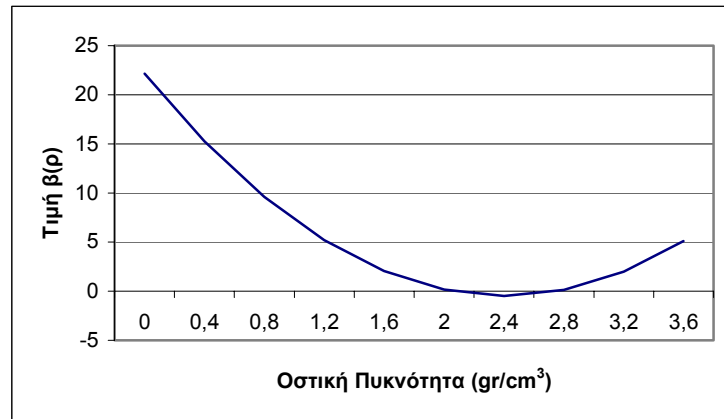
Σε αυτή τη μορφή, φαίνεται ότι το πρόσημο του ρυθμού μεταβολής της πυκνότητας εξαρτάται από το πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού $\beta(\rho)$, για θετική παραμόρφωση ε . Το $\beta(\rho)$ λοιπόν μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελεί το *όριο αναφοράς* (threshold) για το αν θα αυξηθεί ή θα μειωθεί η οστική πυκνότητα για δεδομένη *μηχανική διέγερση* $\alpha(\rho) \cdot \varepsilon$.

Το όριο αναφοράς $\beta(\rho)$ εξαρτάται από την πυκνότητα. Συνεπώς για διαφορετική πυκνότητα οστού απαιτείται διαφορετική τιμή παραμόρφωσης για το οριακά θετικό ισοζύγιο ανακατασκευής.

Η επίδραση της πυκνότητας στα $\alpha(\rho)$ και $\beta(\rho)$ αναπαρίσταται γραφικά στο Σχήμα 5.4



(α)

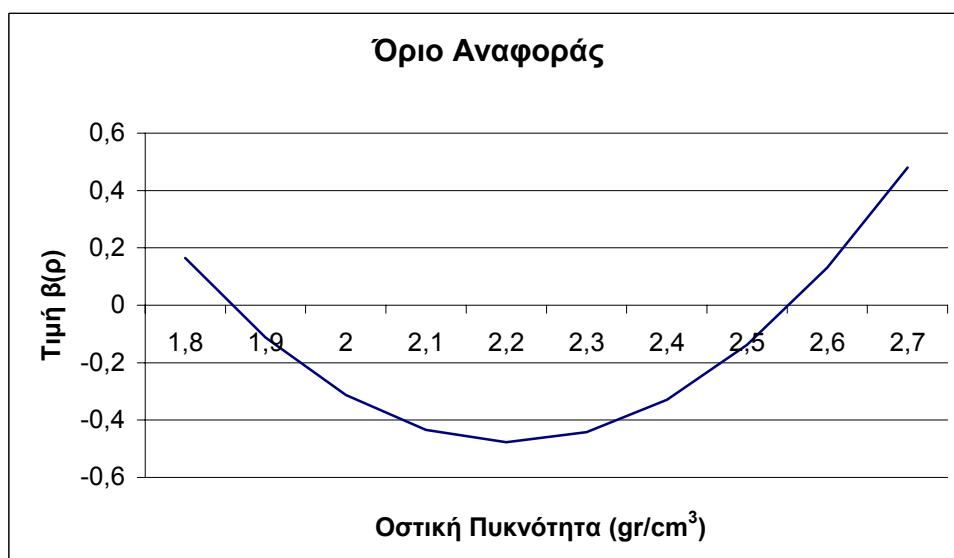


(β)

Σχήμα 5.4 Εξάρτηση (α) συντελεστή $\alpha(\rho)$ και (β) συντελεστή $\beta(\rho)$ από την πυκνότητα για

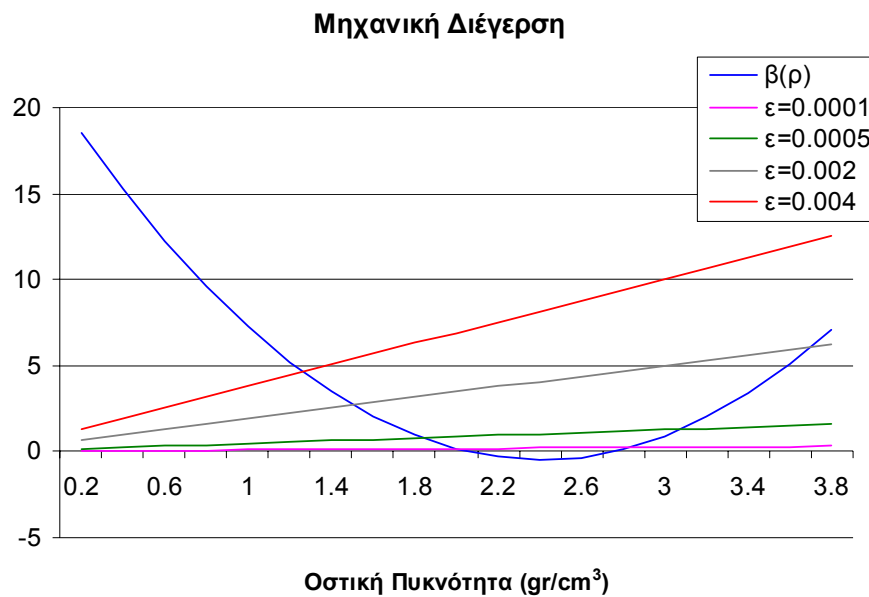
$$0 \leq \rho \leq 3.5 \left(\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \right)$$

Στο διάγραμμα παραβολικής μορφής (Σχήμα 5.4(β)) φαίνεται το όριο αναφοράς που αποτελεί πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού ως προς την πυκνότητα. Αν ο όρος $\beta(\rho)$ είναι θετικός, η πυκνότητα συμφωνά με τη Σχέση (5.6) θα αυξάνεται πάντα για οποιαδήποτε φόρτιση – ακόμα και χωρίς φόρτιση. Συμπερασματικά, η προσέγγιση του Hart (Σχέση 5.6) μπορεί να έχει ισχύει μόνο για εφαρμογή με καθορισμένα όρια πυκνότητας μεταξύ 1.86 gr/cm^3 και 2.68 gr/cm^3 όπου ο συντελεστής $\beta(\rho)$ είναι αρνητικός. όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.5. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με αυτό που αναφέρεται στη βιβλιογραφία για την οστική πυκνότητα, δηλαδή ότι φτάνει έως 1.8 gr/cm^3 .



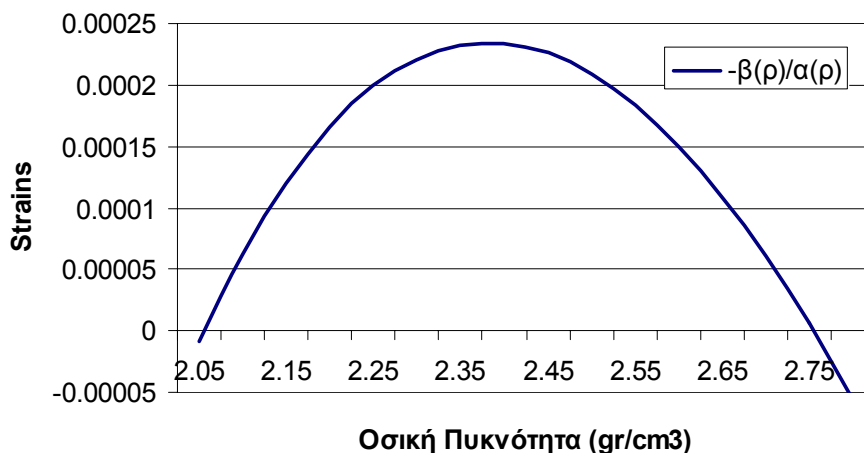
Σχήμα 5.5 Διάγραμμα ορίου αναφοράς για πυκνότητες από 1.8 gr/cm^3 έως 2.7 gr/cm^3

Θεωρώντας διαφορετικές τιμές παραμόρφωσης πολλαπλασιασμένες με το συντελεστή $\alpha(\rho)$ προκύπτει το Σχήμα 5.6 στο οποίο φαίνεται και η γραφική παράσταση του ορίου αναφοράς.



Σχήμα 5.6 Μηχανική διέγερση και όριο αναφοράς συναρτήσει της οστικής πυκνότητας

Ο όρος $\alpha(\rho) \cdot \varepsilon$ αντιπροσωπεύει τη μηχανική διέγερση του οστού και η διαφορά του από την αναφορά $\beta(\rho)$ ενεργοποιεί ποιοτικά (απορρόφηση ή εναπόθεση οστού) και ποσοτικά (μέτρο του ρυθμού μεταβολής πυκνότητας) την οστική ανακατασκευή. Ο όρος $\alpha(\rho)$ είναι πολυώνυμο 1^{ου} βαθμού ως προς την πυκνότητα και οδηγεί σε γραμμική αύξηση της επίπτωσης παραμόρφωσης ίδιας τιμής για στοιχεία μεγαλύτερης πυκνότητας.



Σχήμα 5.7 Απαιτούμενη παραμόρφωση για εναπόθεση οστού για διαφορετική οστική πυκνότητα

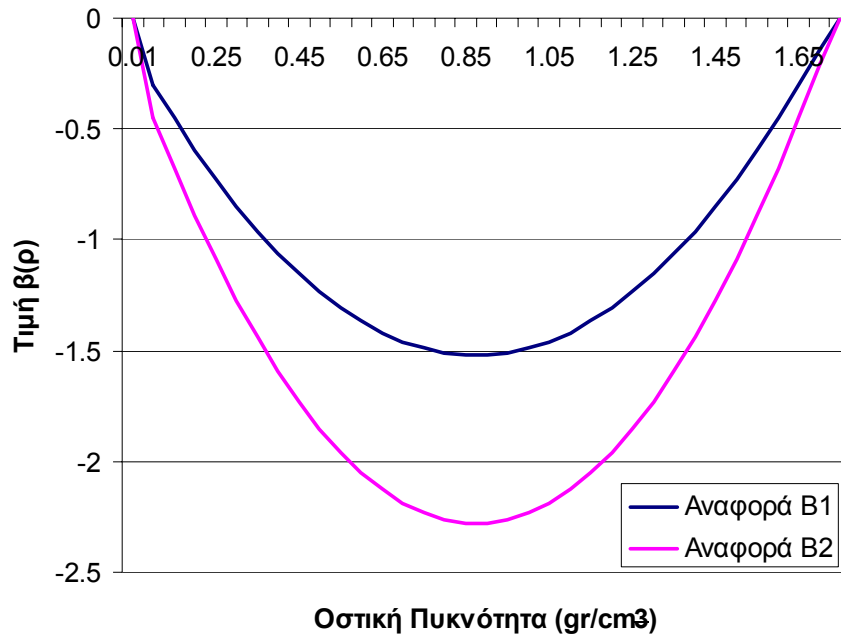
Στο Σχήμα 5.7 φαίνεται η απαιτούμενη παραμόρφωση, συναρτήσει της οστικής πυκνότητας, σε ένα Π.Σ. οστού για να υπάρχει θετικό ισοζύγιο οστικής ανακατασκευής, δηλαδή θετικός ρυθμός μεταβολής της πυκνότητας. Για παράδειγμα, για πυκνότητα οστού

2.5 gr/cm³ και μέτρο ελαστικότητας του υλικού 50.8 GPa (Σχέση 5.3) υπάρχει θετικό ισοζύγιο ανακατασκευής, για παραμόρφωση περίπου 200 μstrains και άνω.

Με σκοπό να προσαρμοστεί η Σχέση (5.6) σε βιβλιογραφικά δεδομένα που αναφέρθηκαν παραπάνω, τροποποιείται μέσω της αλλαγής των συντελεστών του πολυωνύμου $\beta(\rho)$, που αντιπροσωπεύει το όριο αναφοράς. Αυτό μπορεί να γίνει με δύο τρόπους:

Ρυθμίζοντας το εύρος πυκνοτήτων (αλλάζοντας την απόσταση μεταξύ των ριζών)

Ρυθμίζοντας την τιμή της παραμόρφωσης για την οποία υπάρχει οριακά θετικό ισοζύγιο συναρτήσει της πυκνότητας (αλλάζοντας την ελάχιστη τιμή του πολυωνύμου, δηλαδή)



Σχήμα 5.8 Όριο αναφοράς B₁ και Όριο αναφοράς B₂

Στο Σχήμα 5.8 η καμπύλη B₁ αποτελεί το όριο αναφοράς για εύρος πυκνοτήτων από 0.01 έως 1,74 gr/cm³ και η μαθηματική της έκφραση είναι το πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού

$$B_1(\rho) = 2.03313(\rho - 0.01)(\rho - 1.74) \quad (5.9)$$

Η καμπύλη B₂ είναι το όριο αναφοράς για εύρος πυκνοτήτων από 0.01 έως 1.74gr/cm³ και η μαθηματική της έκφραση είναι το πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού

$$B_2(\rho) = 3.04960(\rho - 0.01)(\rho - 1.74) \quad (5.10)$$

Η προς, επίλυση αριθμητική, διαφορική εξίσωση τελικά γίνεται:

$$\frac{d\rho}{dt} = B_1(\rho) + \varepsilon \cdot (171.934 + 788.9399 \cdot \rho) \quad (5.11)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = B_2(\rho) + \varepsilon \cdot (171.934 + 788.9399 \cdot \rho) \quad (5.12)$$

όπου ε , η κατά Von Mises παραμόρφωση κάθε στοιχείου

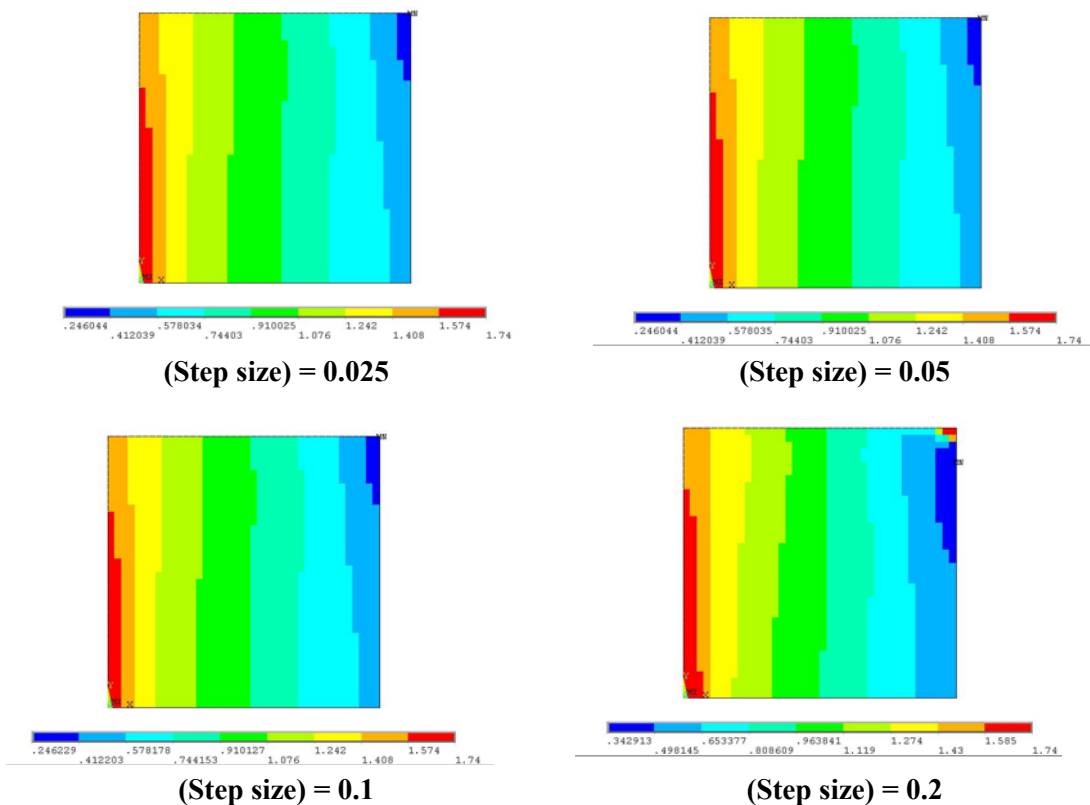
ρ , η πυκνότητα κάθε στοιχείου

5.5 Επίλυση και αποτελέσματα οστικής ανακατασκευής παραμορφωσιακού μοντέλου με αναφορά B₁

Η απαραίτητη για την εφαρμογή της οστικής ανακατασκευής ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων πραγματοποιείται στο λογισμικό ANSYS v10.0. Η διαδικασία της ανακατασκευής, έχει προγραμματισθεί στην γλώσσα προγραμματισμού του ANSYS, apdl.

Η διαδικασία επαναλαμβάνεται για πολλά χρονικά βήματα. Με σκοπό την επιτάχυνση της διαδικασίας, χωρίς την απώλεια της ακριβείας, πρέπει να επιλεγθεί χρονικό βήμα κατάλληλου μεγέθους. Γενικά, όσο μεγαλύτερο βήμα επιλεγθεί τόσο μικρότερη είναι η ακρίβεια του τελικού αποτελέσματος ενώ υπάρχει κίνδυνος αστάθειας της μεθόδου. Αντίστοιχα, όσο μικρότερο είναι το βήμα πολλαπλασιάζονται οι απαιτήσεις της μεθόδου σε υπολογιστική ισχύ.

Ο Hart στις εφαρμογές τις μεθόδου που πραγματοποίησε χρησιμοποίησε βήμα μεγέθους 0.2. Για την εκλογή του κατάλληλου βήματος, θα γίνουν δοκιμές σε συνολικό χρόνο μιας χρονικής μονάδας και θα δοκιμαστούν με 4 διαφορετικά χρονικά βήματα. Στο Σχήμα 5.9 που ακολουθεί φαίνονται τα αποτελέσματα:

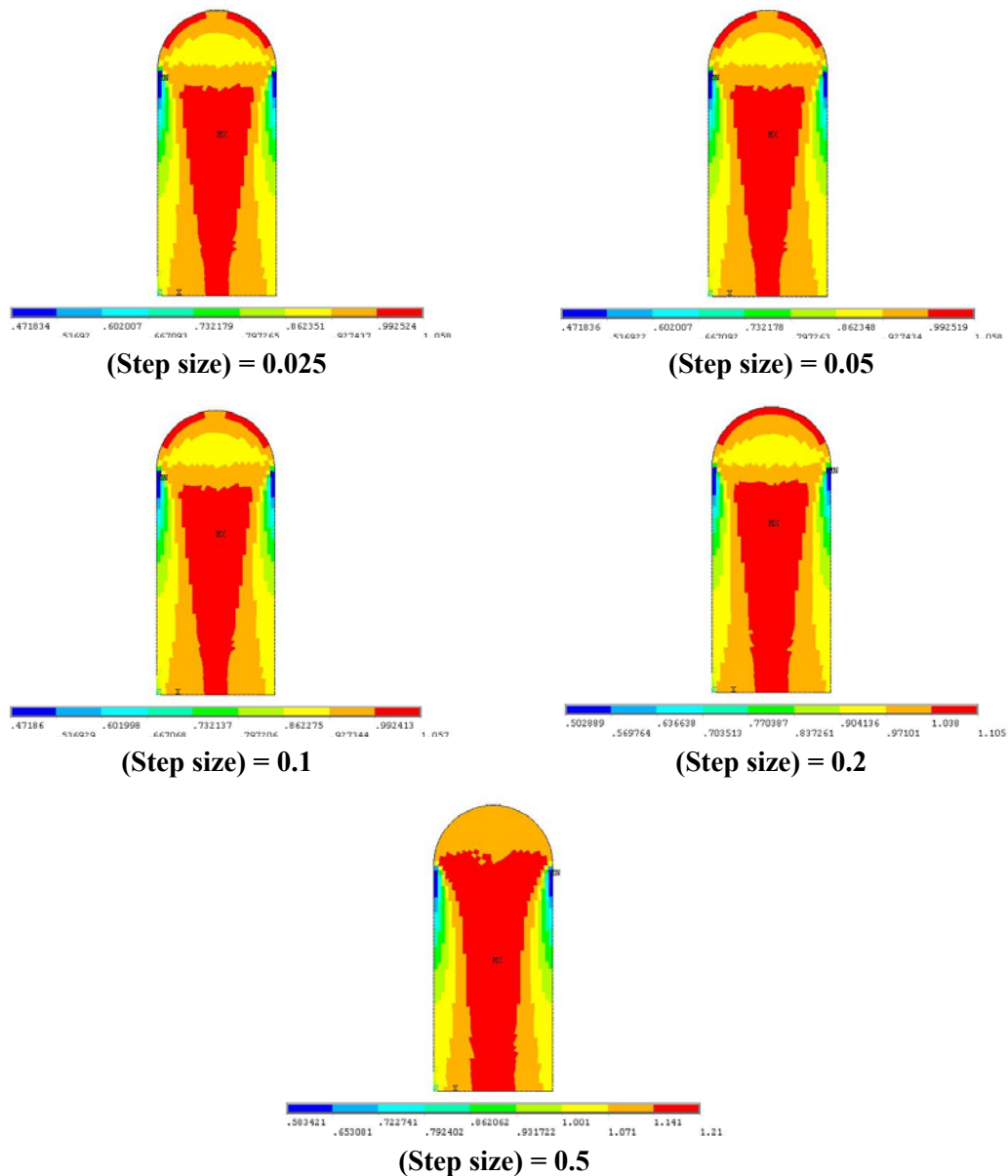


Σχήμα 5.9 Πυκνότητες στοιχείων τετράγωνης πλάκας σε 1 χρονική μονάδα για διαφορετικό μέγεθος βημάτων

Σε σύγκριση με το αποτέλεσμα με βήμα 0.025, για βήμα 0.05 η μέγιστη διαφορά σε πυκνότητα στοιχείου είναι της τάξης του $10^{-7} \frac{gr}{cm^3}$, ενώ για βήμα 0.1 της τάξης του

$10^{-3} gr/cm^3$ και οι κατανομές είναι ακριβώς της ίδιας μορφής. Το βήμα 0.2 κρίνεται απαγορευτικό καθώς οι κατανομές είναι διαφορετικές από αυτές που έχουμε για μικρότερα βήματα όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.9

Η μελέτη επαναλαμβάνεται και για την τυπική γεωμετρία ισχίου για 1 μονάδα χρόνου. Λόγω των μικρότερων διαστάσεων των στοιχείων αλλά και του πιο πυκνού πλέγματος ξεκινά η αναζήτηση του καταλληλότερου βήματος από μικρότερες τιμές.



Σχήμα 5.10 Πυκνότητες στοιχείων τυπικής γεωμετρίας ισχίου σε 1 χρονική μονάδα για διαφορετικό μέγεθος βημάτων.

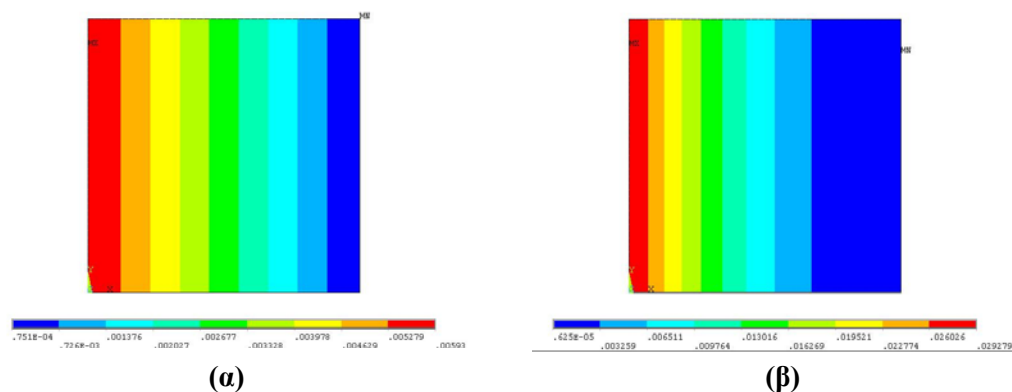
Σε σύγκριση με το αποτέλεσμα με βήμα 0.025, για βήμα 0.05 η μέγιστη διαφορά σε πυκνότητα στοιχείου είναι της τάξης του $10^{-8} gr/cm^3$ και οι κατανομές είναι ίδιες. Για

βήμα 0.1 η απόκλιση των πυκνοτήτων είναι της τάξης του 10^{-4} gr/cm^3 και οι κατανομές είναι επίσης ίδιες. Για βήμα 0.2 η μέγιστη απόκλιση είναι πολύ μεγαλύτερη και πλέον διαφέρει και η κατανομή.

Από τα παραπάνω αποτελέσματα εξάγεται το συμπέρασμα ότι για σταθερό βήμα $\Delta t = 0.05$ και στις δύο εφαρμογές επιτυγχάνεται η καλύτερη ισορροπία ακρίβεια και υπολογιστικού κόστους. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται για συνολικό χρόνο 175 χρονικών μονάδων δηλαδή πραγματοποιούνται 3500 χρονικά βήματα. Κατά τη διάρκεια κάθε βήματος της μεθόδου Runge-Kutta απαιτούνται 4 επιλύσεις στο πρόγραμμα ANSYS για τον υπολογισμό των απαραίτητων μηχανικών μεγεθών ενώ για κάθε βήμα της μεθόδου Adams Bashforth απαιτούνται δύο επιλύσεις για τον ίδιο λόγο. Έτσι, στο σύνολο το ANSYS θα εκτελέσει $4 \times 3 + 2 \times 3497 = 7006$ επιλύσεις

5.5.1 Τετράγωνη πλάκα

Αρχικά παρατίθενται στο Σχήμα 5.11 οι κατανομές ισοδύναμων παραμορφώσεων κατά Von Mises και πυκνότητας τροπικής ενέργειας για την αρχική κατάσταση ($\rho_0 = 0.8 \text{ gr/cm}^3$, $T = 0$) με δεδομένες φορτίσεις και στηρίξεις. Όλα τα στοιχεία με την αρχική πυκνότητα έχουν αρχικό μέτρο ελαστικότητας $E_0 \approx 1665 \text{ MPa}$ ενώ το μέγιστο μέτρο ελαστικότητας που μπορεί να προκύψει είναι $E_{\max} \approx 17135 \text{ MPa}$



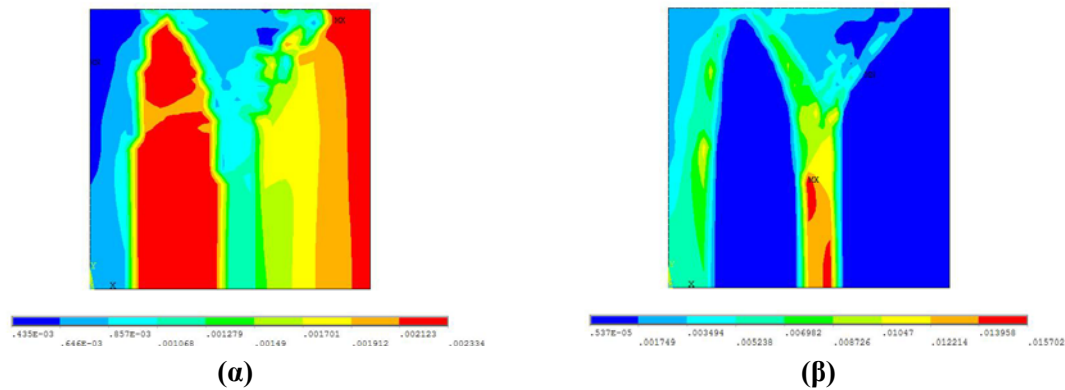
Σχήμα 5.11 Κατανομές στην αρχική κατάσταση (α) των ισοδύναμων παραμορφώσεων κατά Von Mises και (β) της πυκνότητας τροπικής ενέργειας

Παρατηρείται στο Σχήμα 5.11 ότι η μέγιστη τιμή ισοδύναμων παραμορφώσεων κατά Von Mises είναι $5930 \mu\text{strains}$ ενώ η μέγιστη τιμή πυκνότητας τροπικής ενέργειας είναι 0.029 J/cm^3 .

Το όριο αναφοράς $B_l(\rho)$ επιλέχθηκε έτσι ώστε για πυκνότητα $\rho_0 = 0.8 \text{ gr/cm}^3$ να δημιουργείται θετικό ισοζύγιο ανακατασκευής στα στοιχεία που η ισοδύναμη παραμόρφωσή τους είναι $2000 \mu\text{strain}$ και άνω. Όπως φαίνεται, από το αρχικό διάγραμμα παραμορφώσεων κατά Von Mises από τη θέση $x = 6.6 \text{ cm}$ και δεξιά θα μειωθούν οι

πυκνότητες ενώ αριστερά από αυτό το σημείο θα αυξηθούν, ύστερα από το πρώτο χρονικό βήμα.

Μετά από 3500 χρονικά βήματα, τα τελικά διαγράμματα των ισοδύναμων παραμορφώσεων κατά Von Mises και της πυκνότητα τροπικής ενέργειας φαίνονται στο Σχήμα 5.12.



Σχήμα 5.12 Τελικές κατανομές (α) των παραμορφώσεων και (β) της πυκνότητα τροπικής ενέργειας

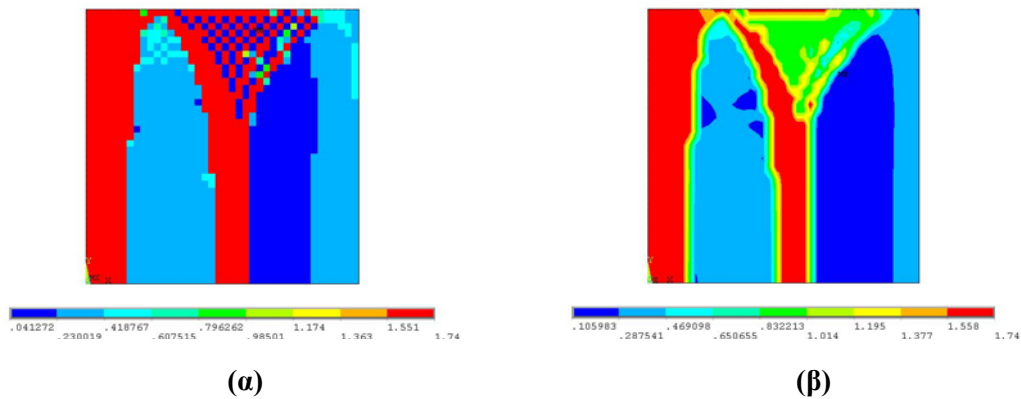
Στο χρόνο $T=175$ παρατηρείται ότι η μέγιστη τιμή της ισοδύναμης παραμόρφωσης κατά Von Mises είναι 2300 $\mu\text{strains}$, ενώ η μέγιστη τιμή πυκνότητας τροπικής ενέργειας είναι 0.016 J/cm^3 .

Συγκρίνοντας τις αντίστοιχες τιμές για το χρόνο $T=0$ και $T=175$ παρατηρείται ότι ενώ η μέγιστη τιμή της ισοδύναμης παραμόρφωσης κατά Von Mises μειώθηκε κατά 3600 $\mu\text{Strains}$ η μέγιστη τιμή της πυκνότητας τροπικής ενέργειας μειώθηκε κατά 0.013 J/cm^3 .

Παρατηρείται, επίσης ότι η μορφή των αντίστοιχων διαγραμμάτων είναι εντελώς διαφορετική από τα αντίστοιχα σε χρόνο $T=0$, γεγονός που αποδεικνύει ότι έχουν επέλθει πολλές αλλαγές στις μηχανικές ιδιότητες των στοιχείων. Η τελική κατανομή των πυκνοτήτων φαίνεται στο Σχήμα 5.13.

Από τις παρακάτω εικόνες φαίνεται ότι η διαδικασία της αριθμητικής προσομοίωσης της οστικής ανακατασκευής δημιουργεί ασυνέχειες στην κατανομή της πυκνότητας του υλικού, παρατήρηση που έχει επισημανθεί και στη βιβλιογραφία. Το παράδοξο σε αυτό το αποτέλεσμα είναι ότι για να αναπαρασταθεί μια ασυνεχής δομή, όπως η δοκιδώδης μορφή του οστού, χρησιμοποιήθηκε συμπαγές, συνεχές υλικό και οδήγησε τελικώς σε ασυνεχή δομή.

Οι τελικές μηχανικές ιδιότητες των υλικών ακολουθούν την κατανομή των πυκνοτήτων με μέγιστο μέτρο ελαστικότητας $E_{\max} = 17135.3 \text{ MPa}$.



Σχήμα 5.13 Τελική κατανομή πυκνότητας (α) ανά στοιχείο, (β) με χρήση μέση τιμής τοπικά

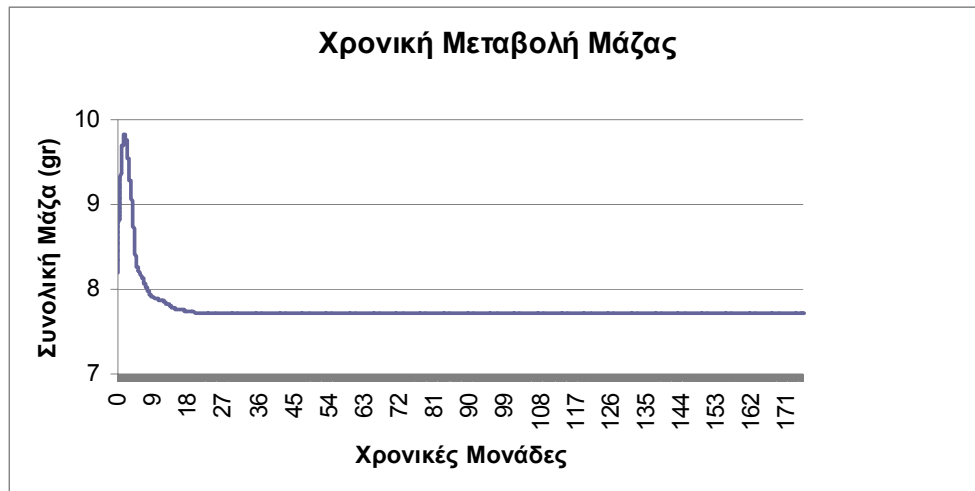
Συγκεκριμένα, βιβλιογραφικά, δύο τύποι ασυνεχειών παρατηρούνται [17]:

- Ο πρώτος τύπος («κοντινού πεδίου») εμφανίζεται σε περιοχές κοντά στην εφαρμογή κατανεμημένης φόρτισης και χαρακτηρίζεται από διάταξη ακραίων πυκνοτήτων όπου γειτονικά ανασκευασμένα στοιχεία είναι είτε κορεσμένα είτε εντελώς απορροφημένα (διάταξη «σκακιέρας»).
- Ο δεύτερος τύπος ασυνέχειας («μακρινού πεδίου») εμφανίζεται μακριά από την εφαρμογή φόρτισης και χαρακτηρίζεται από περιοχές στοιχείων με μορφή «κολώνας», ενώ γειτονικές περιοχές είναι πλήρως απορροφημένες

Πιστεύεται ότι ο δεύτερος τύπος ασυνέχειας είναι μια ακριβής αναπαράσταση της φυσιολογίας του οστού, ενώ ο πρώτος τύπος σχετίζεται με την εφαρμογή της διακριτοποίησης των πεπερασμένων στοιχείων. Στο δεύτερο τύπο ασυνέχειας οφείλεται η διαφορά στα δύο διαγράμματα μέσης πυκνότητας και πυκνότητας ανά πεπερασμένο στοιχείο, όπως φαίνονται στο Σχήμα 5.13. Αξιοσημείωτο είναι ότι οι δυο κολώνες δημιουργήθηκαν προς την πλευρά της υψηλής φόρτισης όπου καταπόνηση ήταν υψηλότερη. Αντίθετα προς την πλευρά της χαμηλής φόρτισης παρατηρήθηκαν πολύ υψηλά ποσοστά απορρόφησης στοιχείων.

Οι Chen et al. (2006) θεωρώντας ότι το φαινόμενο «σκακιέρας» οφείλεται στην προσέγγιση με βάση τα στοιχεία, προτείνουν μια προσέγγιση με βάση τους κόμβους. Από άλλες βιβλιογραφικές πηγές προβλέπεται ότι για δύναμη μικρότερη του 1 στη σχέση πυκνότητας και μέτρου του ελαστικότητας αποφεύγονται ασυνέχειες αλλά θέλει άπειρο χρόνο για να συγκλίνει η διαδικασία (και ανάλογη υπολογιστική ισχύ), ενώ συμφωνά με άλλες αναφορές η σχέση πυκνότητας και μέτρου του Young για οστό προσεγγίζεται ικανοποιητικά μόνο για δύναμη μεταξύ 2 με 3.[30]

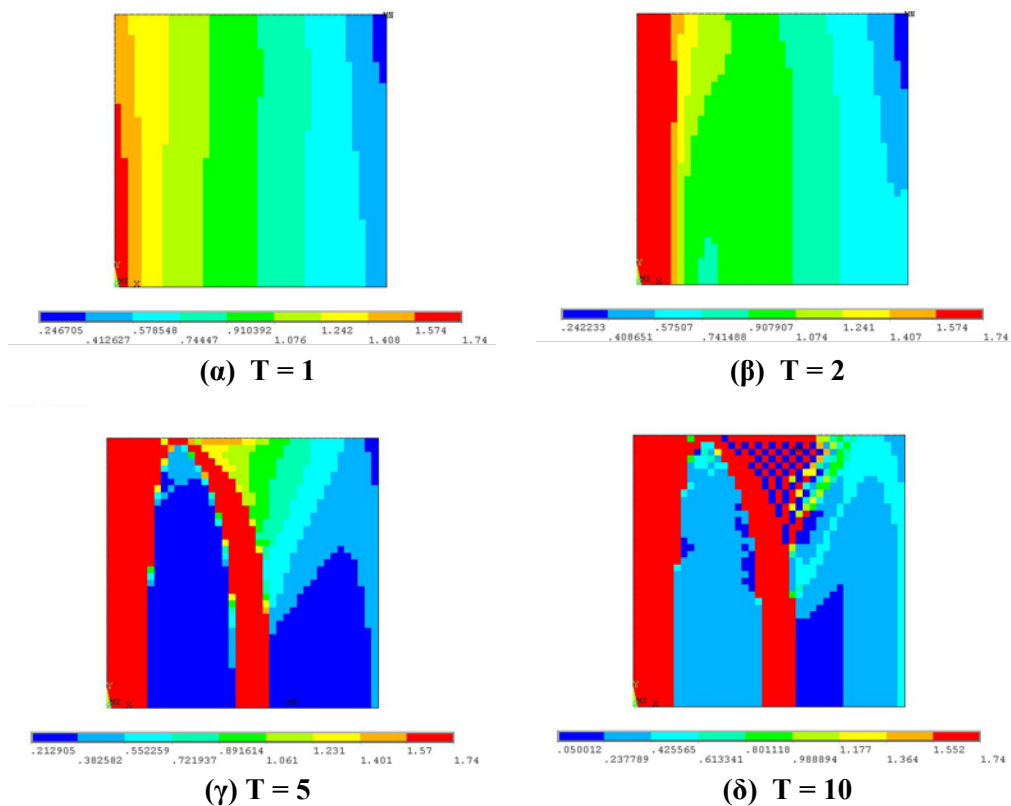
Σημαντικό μέγεθος για την παρακολούθηση της πορείας της οστικής ανακατασκευής είναι η μάζα της πλάκας. Η αρχική μάζα της πλάκας ήταν 8.00gr. Στην πραγματικότητα η τιμή αυτή αντιστοιχεί σε μάζα (τριδιάστατης πλάκας) με πάχος 1mm.

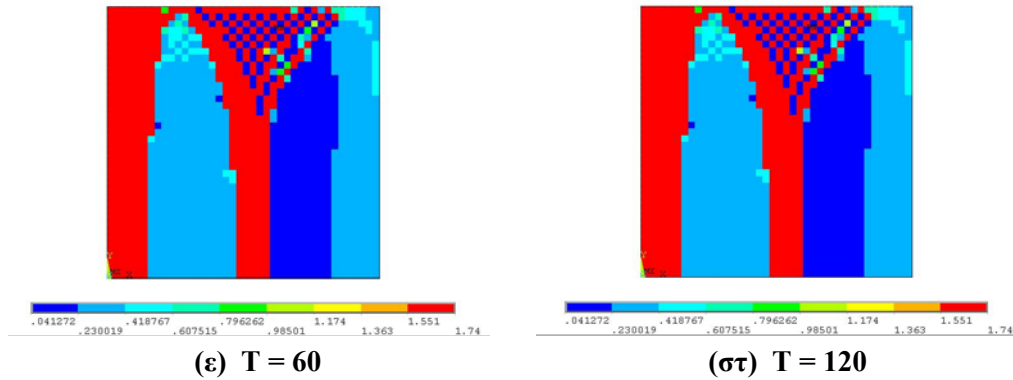


Σχήμα 5.14 Χρονική μεταβολή μάζας της τετράγωνης πλάκας

Στο Σχήμα 5.14 φαίνεται το διάγραμμα μεταβολής της συνολικής μάζας στην πορεία του χρόνου. Ενώ, υπήρξε σημαντική αύξηση στην συνολική μάζα μέχρι τις δύο πρώτες χρονικές μονάδες, η τελική μάζα είναι 7.723gr, δηλαδή μειώθηκε κατά 0.277gr ή 3.5%. Η μάζα διατηρείται σταθερή από τις 19 χρονικές μονάδες και μετά.

Στο Σχήμα 5.15 φαίνεται η κατανομή της πυκνότητας στην τετράγωνη πλάκα για διάφορες χρονικές στιγμές της διαδικασίας.



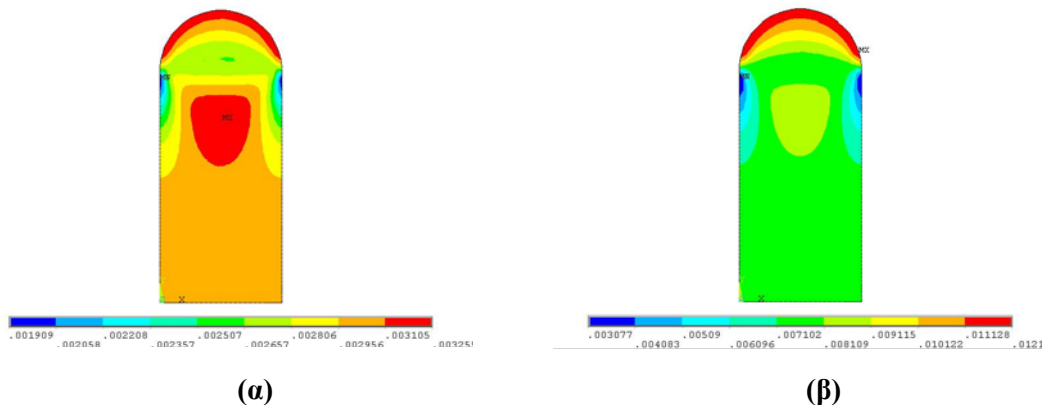


Σχήμα 5.15 Κατανομή πυκνότητας ανά στοιχείου σε διαφορετικές χρονικές στιγμές

Σε 5 χρονικές μονάδες οι πυκνότητες των στοιχείων διαφέρουν αρκετά από τις τελικές, ωστόσο έχουν ήδη σχηματιστεί πλήρως οι κολώνες της τελικής δομής. Μόλις σε 10 χρονικές μονάδες φαίνεται ότι η κατανομή οστικών πυκνοτήτων είναι κοντά στην τελική πράγμα που δηλώνει ότι η μέθοδος μπορεί να μας δώσει πριν τη σύγκλιση του αλγορίθμου σημαντικές πληροφορίες. Τα Σχήμα 5.15 (ε) και (στ) που παρουσιάζουν τις κατανομές των πυκνοτήτων για τις 60 και 120 χρονικές μονάδες διαφέρουν ελάχιστα.

5.5.2 Τοπική γεωμετρία ισχίου

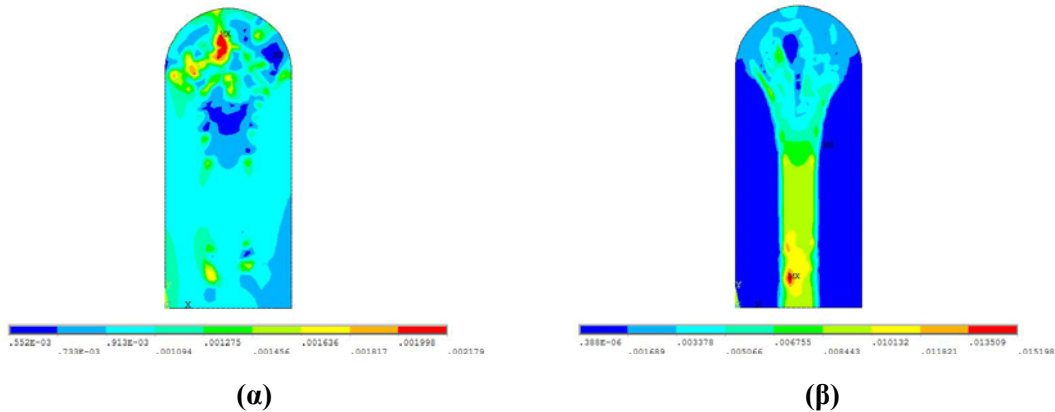
Ακολουθούν τα διαγράμματα ισοδύναμων παραμορφώσεων κατά Von Mises και πυκνότητας τροπικής ενέργειας για την αρχική κατάσταση ($\rho_0 = 0.8 \text{ gr/cm}^3$, $T = 0$) υπό συγκεκριμένες συνθήκες φόρτισης που περιγράφονται σε προηγούμενο κεφάλαιο.



Σχήμα 5.16 Κατανομές στην αρχική κατάσταση (α) των ισοδύναμων παραμορφώσεων κατά Von Mises και (β) της πυκνότητας τροπικής ενέργειας

Στο Σχήμα 5.16 **Κατανομές στην αρχική κατάσταση (α) των ισοδύναμων παραμορφώσεων κατά Von Mises και (β) της πυκνότητας τροπικής ενέργειας** παρατηρείται ότι η μέγιστη τιμή ισοδύναμης παραμόρφωσης κατά Von Mises είναι 3255 $\mu\text{strains}$, ενώ η μέγιστη τιμή πυκνότητας τροπικής ενέργειας είναι 0.012 J/cm^3 .

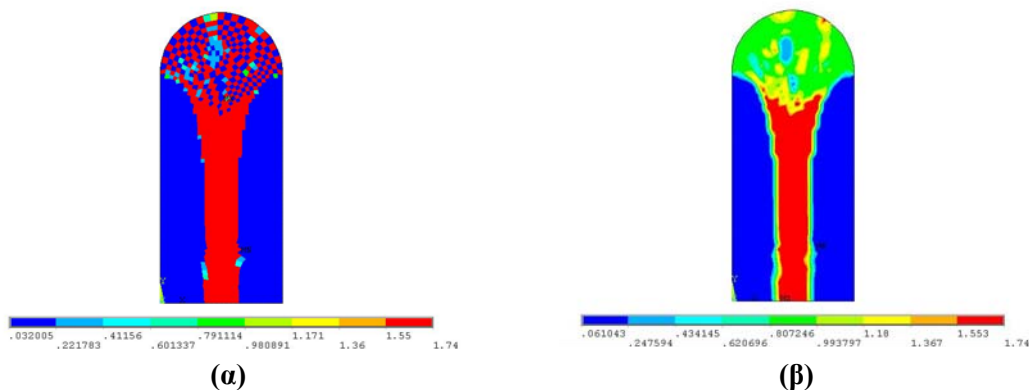
Μετά από 3500 χρονικά βήματα, τα τελικά διαγράμματα των παραμορφώσεων και της πυκνότητας τροπικής ενέργειας φαίνονται παρακάτω.



Σχήμα 5.17 Τελικές κατανομές (α) των παραμορφώσεων και (β) της πυκνότητα τροπικής ενέργειας

Η μέγιστη τιμή ισοδύναμης παραμόρφωσης κατά Von Mises όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.17 είναι 2200 $\mu\text{strains}$, ενώ η μέγιστη τιμή πυκνότητας τροπικής ενέργειας είναι 0.015 J/cm^3 . Παρατηρείται ότι οι κατανομές και των δύο μεγεθών είναι διαφορετικές από τις αντίστοιχες αρχικές.

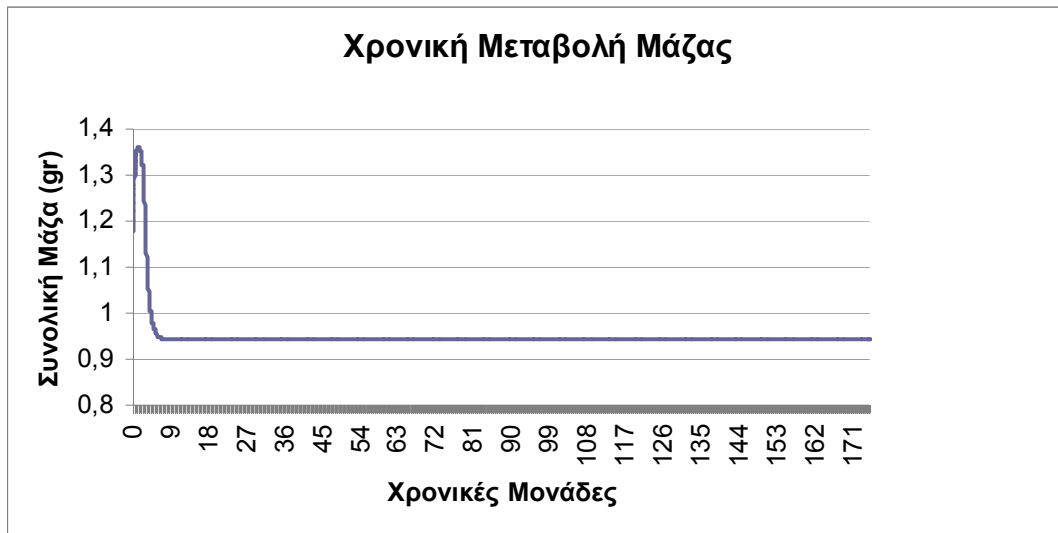
Η τελική κατανομή των πυκνοτήτων των πεπερασμένων στοιχείων φαίνεται στο Σχήμα 5.18 που ακολουθεί:



Σχήμα 5.18 Τελική κατανομή πυκνότητας (α) ανά στοιχείο, (β) με χρήση μέση τιμής τοπικά

Στο παραπάνω σχήμα παρατηρούνται οι δύο τύποι ασυνεχειών που διαπιστώθηκαν και στην περίπτωση της τετράγωνης πλάκας. Στην περίπτωση της τυπικής γεωμετρίας ισχίου, βέβαια δημιουργήθηκε μια κεντρική κολώνα στο μέσο της δομής λόγω της συμμετρίας της φόρτισης και της μικρότερης αναλογίας πλάτους προς ύψος.

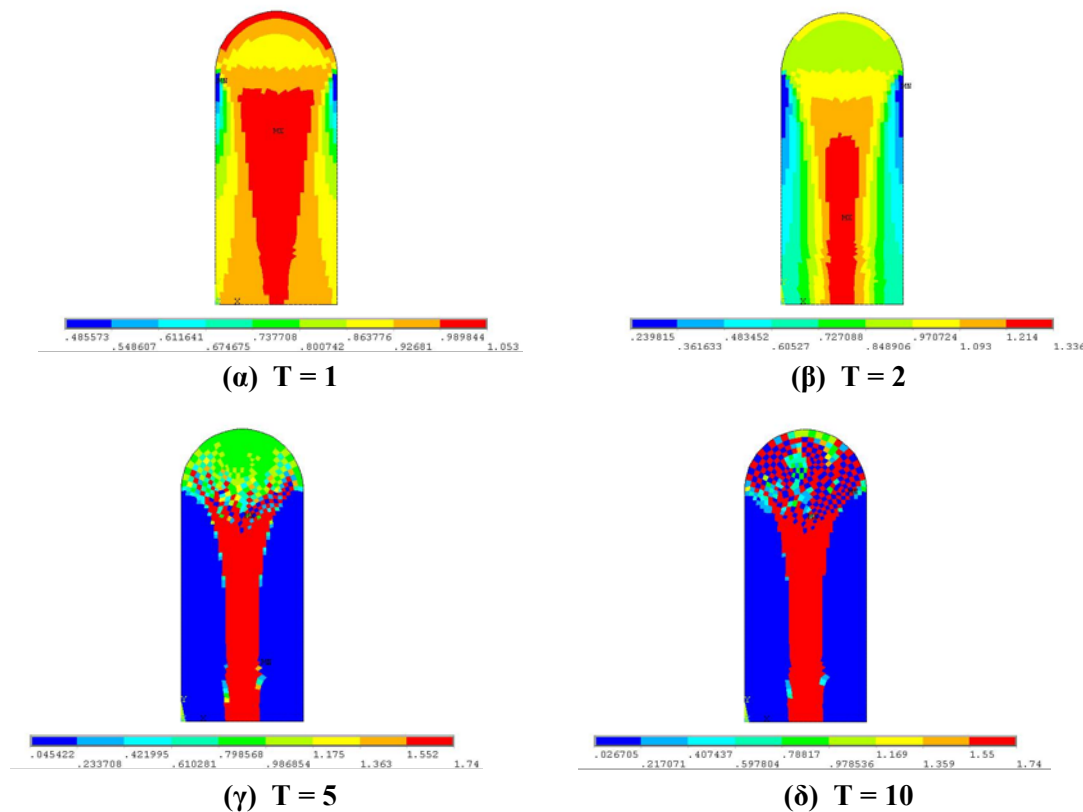
Η αρχική μάζα του μοντέλου ήταν 1.146gr. Στην πραγματικότητα η τιμή αυτή αντιστοιχεί σε μάζα (τριδιάστατης δομής) με πάχος 1mm. Ακολουθεί το διάγραμμα της μάζας στην πορεία του χρόνου στο Σχήμα 5.19.

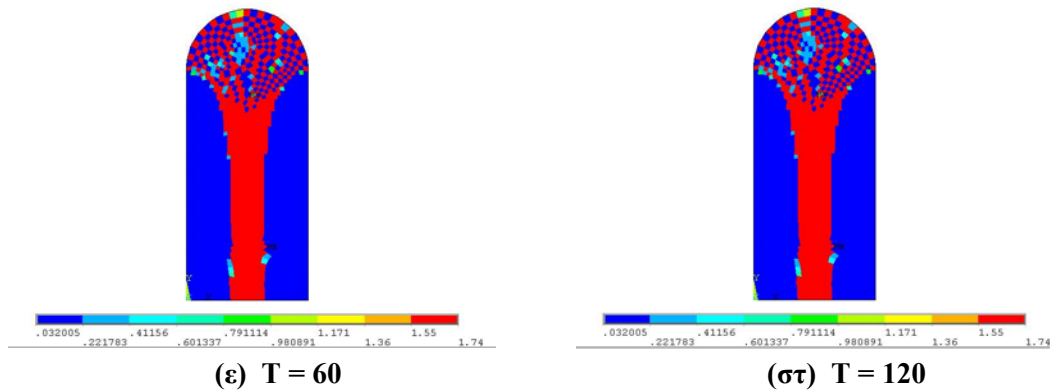


Σχήμα 5.19 Χρονική μεταβολή μάζας τυπικής μορφής ισχίου

Ενώ, αρχικά, υπήρξε αύξηση στην συνολική μάζα μέχρι τις δύο πρώτες χρονικές μονάδες, στην συνέχεια παρατηρήθηκε μείωσή της με υψηλό ρυθμό. Η συνολική τελική μάζα διατηρείται σταθερή από τις 10 χρονικές μονάδες και είναι 0.942gr, δηλαδή μειώθηκε κατά 0.207gr ή 18%.

Στο Σχήμα 5.19 φαίνεται η κατανομή της οστικής πυκνότητας στην τυπική γεωμετρία ισχίου για διάφορα χρονικά βήματα της διαδικασίας





Σχήμα 5.20 Κατανομή πυκνότητας ανά στοιχείου σε διαφορετικές χρονικές στιγμές

Σε 5 μονάδες χρόνου έχει ήδη δημιουργηθεί κεντρική κολώνα, ωστόσο οι οστικές πυκνότητες σε κάποια Π.Σ. διαφέρουν αρκετά από τις τελικές. Επίσης παρατηρείται ότι υπάρχουν στοιχεία που έχουν αποκτήσει τη μέγιστη πυκνότητα ενώ άλλα έχουν απορροφηθεί πλήρως, σε αντίθεση με την κατάσταση σε 2 πρώτες μονάδες όπου μέγιστη πυκνότητα ήταν 1.334 gr/cm^3 . Σε 10 μόλις μονάδες χρόνου η κατανομή της πυκνότητας προσεγγίζει την τελικής κατάστασης.

5.6 Επίλυση και αποτελέσματα οστικής ανακατασκευής παραμορφωσιακού μοντέλου με αναφορά B₂

Το όριο αναφοράς B₂ επιλέχθηκε έτσι ώστε για πυκνότητα $\rho_0 = 0.8 \text{ gr/cm}^3$ να δημιουργείται θετικό ισοζύγιο ανακατασκευής στα στοιχεία που παραμορφώνονται κατά 3000 μstrain και άνω.

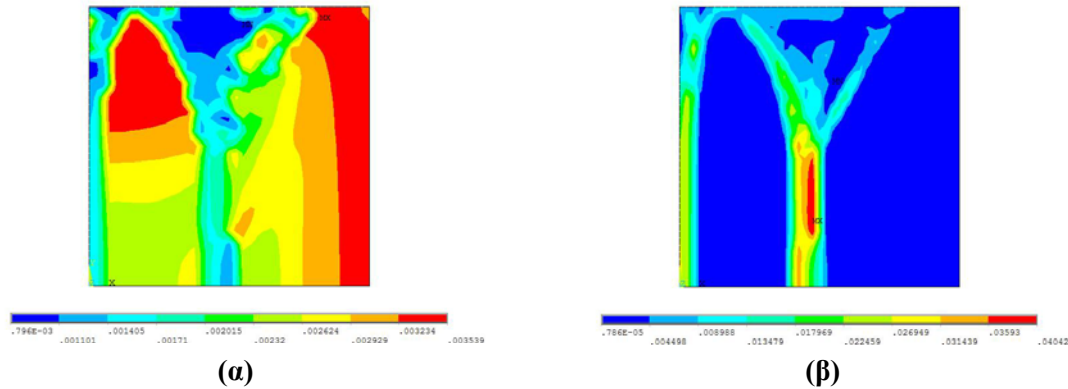
Η διαδικασία οστικής ανακατασκευής επαναλαμβάνεται και πάλι για συνολικό χρόνο 175 με σταθερό βήμα $\Delta t = 0.05$.

5.6.1 Τετράγωνη πλάκα

Οι κατανομές ισοδύναμων παραμορφώσεων κατά Von Mises και πυκνότητας τροπικής ενέργειας για την αρχική κατάσταση ($\rho_0 = 0.8 \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3}$, $T=0$) με δεδομένες φορτίσεις και στηρίξεις φαίνονται στο Σχήμα 5.16 που προηγήθηκε.

Όπως φαίνεται από το αρχικό διάγραμμα ισοδύναμων παραμορφώσεων Von Mises, μετά το πρώτο χρονικό βήμα, περίπου από τη θέση $x=0.5 \text{ cm}$ και δεξιά οι οστικές πυκνότητες θα μειωθούν ενώ αριστερά θα αυξηθούν.

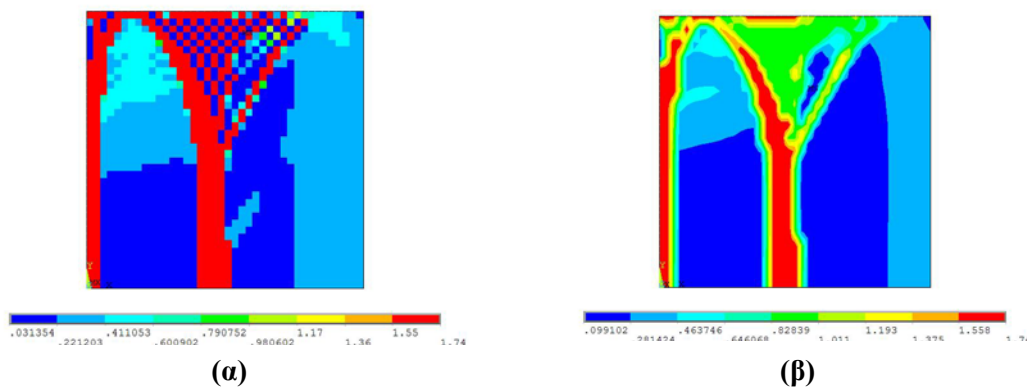
Μετά από 3500 χρονικά βήματα, τα τελικά διαγράμματα των παραμορφώσεων και της πυκνότητα τροπικής ενέργειας φαίνονται παρακάτω.



Σχήμα 5.21 Τελικές κατανομές (α) των παραμορφώσεων και (β) της πυκνότητα τροπικής ενέργειας

Σε χρόνο 175 μονάδων παρατηρείται ότι η μέγιστη τιμή της ισοδύναμης παραμόρφωσης κατά Von Mises είναι 3500 $\mu\text{strains}$, ενώ η μέγιστη τιμή πυκνότητας τροπικής ενέργειας είναι $0.04 \frac{J}{\text{cm}^3}$.

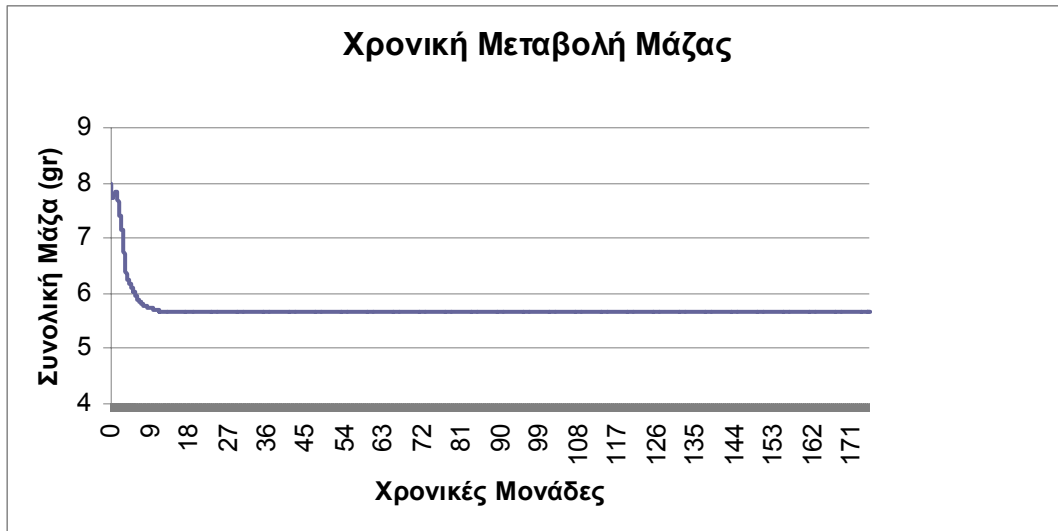
Η τελική κατανομή των πυκνοτήτων φαίνεται στο Σχήμα 5.22



Σχήμα 5.22 Τελική κατανομή πυκνότητας (α) ανά στοιχείο, (β) με χρήση μέση τιμής τοπικά

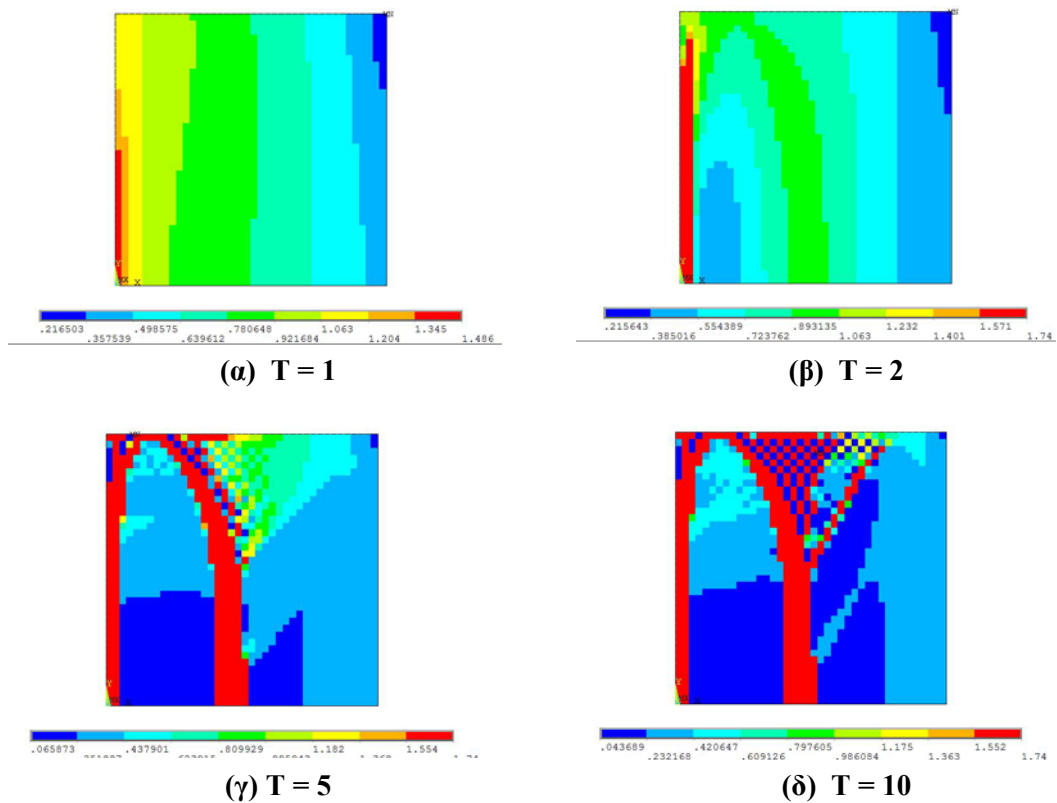
Στο παραπάνω σχήμα παρατηρούνται οι δύο τύποι ασυνεχειών που διαπιστώθηκαν και για την αναφορά B_1 . Επίσης, σχηματίστηκαν δυο κολώνες στις ίδιες θέσεις που σχηματίστηκαν για αναφορά B_1 με τη διαφορά ότι είναι μικρότερου πάχους, δηλαδή πιο «λεπτές».

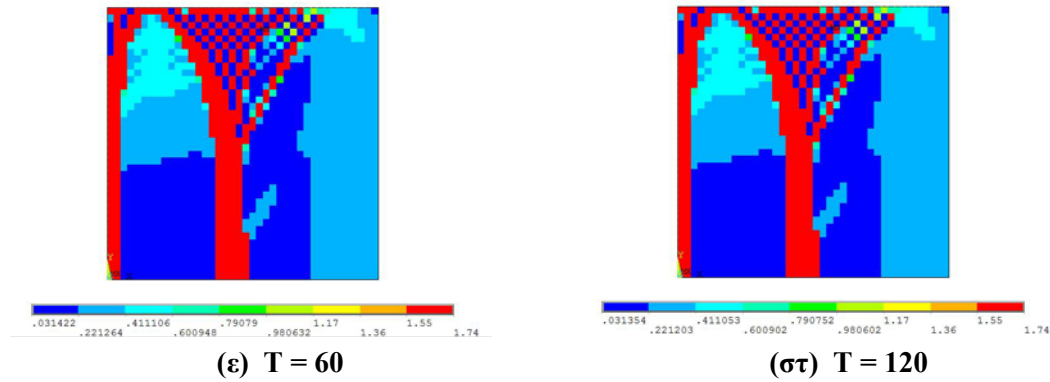
Σημαντικό μέγεθος για την παρακολούθηση της πορείας της ανακατασκευής είναι η μάζα της πλάκας. Στο Σχήμα 5.23 Χρονική μεταβολή μάζας τετράγωνης πλάκας φαίνεται το διάγραμμα μεταβολής της συνολικής μάζας στην πορεία του χρόνου



Σχήμα 5.23 Χρονική μεταβολή μάζας τετράγωνης πλάκας

Η τελική μάζα είναι 5.677gr, δηλαδή μειώθηκε κατά 2.323gr ή 29.2%. Η μάζα διατηρείται σταθερή από τις 11 χρονικές μονάδες και μετά. Στο Σχήμα 5.24 φαίνεται η κατανομή της πυκνότητας στην τετράγωνη πλάκα σε διάφορα βήματα της διαδικασίας

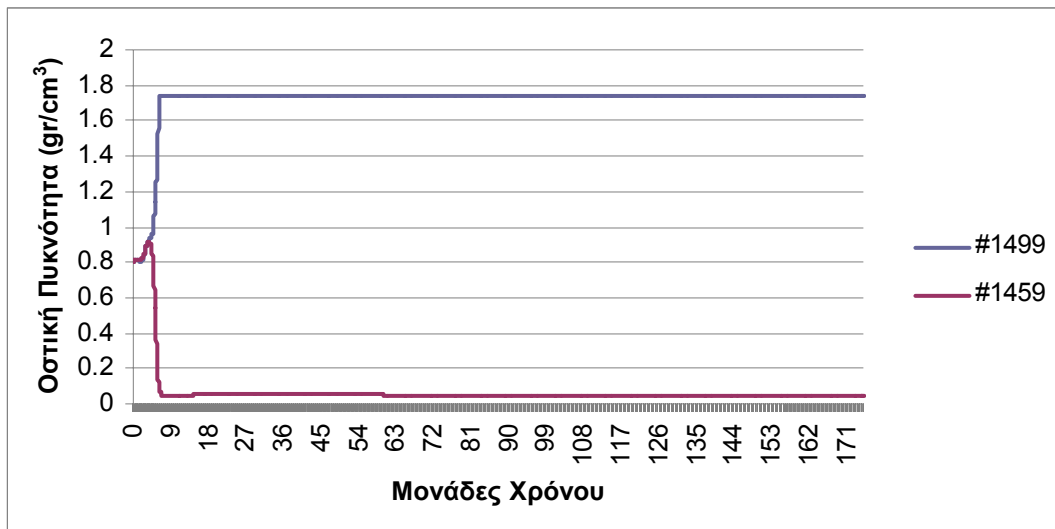




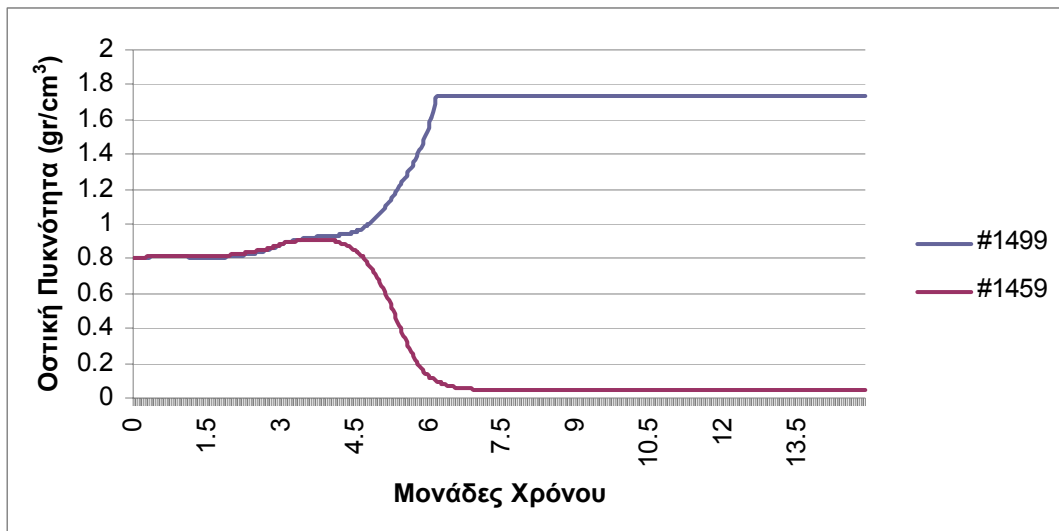
Σχήμα 5.24 Κατανομή πυκνότητας ανά στοιχείου σε διαφορετικές χρονικές στιγμές

Σε 5 χρονικές μονάδες έχουν ήδη σχηματιστεί πλήρως οι κολώνες της τελικής δομής. Μόλις σε 10 χρονικές μονάδες η κατανομή των πυκνοτήτων έχει προσεγγίσει την τελική, πράγμα που δηλώνει ότι η μέθοδος μπορεί να δώσει πριν τη σύγκλιση του αλγορίθμου σημαντικές πληροφορίες. Τα Σχήμα 5.24 (ε) και (στ) που αντιπροσωπεύουν τις κατανομές πυκνοτήτων για χρόνο 60 και 120 χρονικές μονάδες, αντίστοιχα, διαφέρουν ελάχιστα από την τελική κατανομή.

Στη συνέχεια θα παρουσιαστεί η μεταβολή των πυκνοτήτων δύο γειτονικών στοιχείων εκ των οποίων το ένα κατέληξε σε μέγιστη και το άλλο σε ελάχιστη πυκνότητα. Τα στοιχεία αυτά ανήκουν στην περιοχή που παρατηρείται το φαινόμενο της σκακιέρας. Η θέση τους περιγράφεται από τις συντεταγμένες του κέντρου βάρους τους. Συγκεκριμένα, το στοιχείο (#1499) έχει κέντρο βάρους (4.625cm, 9.375cm) ενώ το στοιχείο (#1459) έχει κέντρο βάρους (4.625cm, 9.125cm)



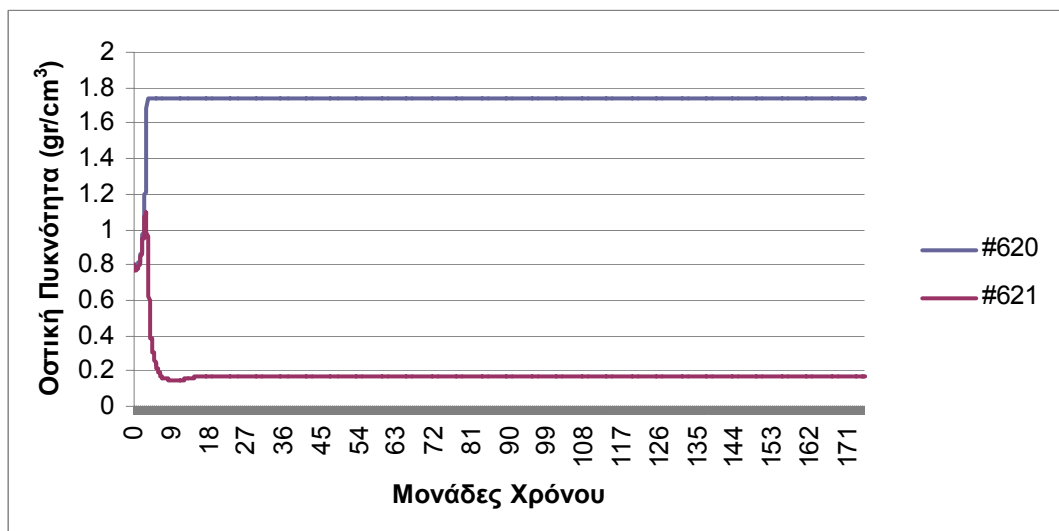
(α)



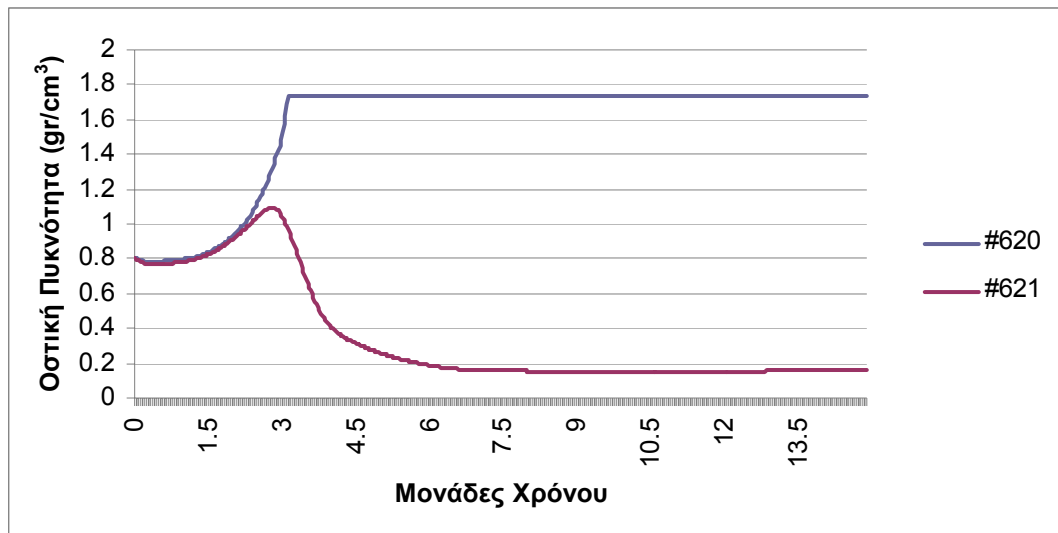
(β) Λεπτομέρεια διαγράμματος α

Σχήμα 5.25 Μεταβολή πυκνοτήτων δύο γειτονικών στοιχείων στη διάρκεια του χρόνου

Αντίστοιχα στο Σχήμα 5.26 φαίνεται η μεταβολή της πυκνότητας δύο γειτονικών στοιχείων που το ένα κατέληξε σε μέγιστη τιμή και ανήκει σε κολόνα και το άλλο σε ελάχιστη. Στο στοιχείο με πυκνότητα $1,74 \text{ gr/cm}^3$ όλα τα γειτονικά του είχαν $0,02 \text{ gr/cm}^3$ ενώ στο στοιχείο $0,02 \text{ gr/cm}^3$ όλα τα γειτονικά $1,74 \text{ gr/cm}^3$. Το στοιχείο (#620) έχει κέντρο βάρους (4.875cm, 3.875cm) ενώ το στοιχείο (#621) έχει κέντρο βάρους (5.125cm, 3.875cm)



(α)



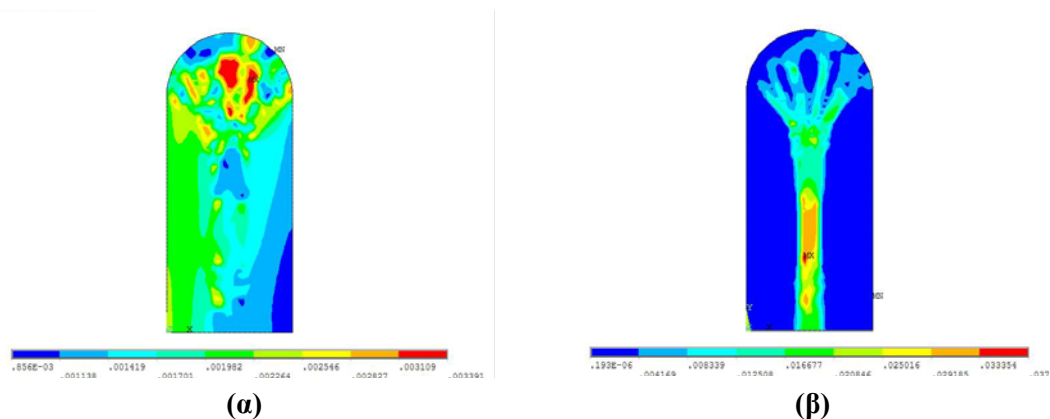
(β)

Σχήμα 5.26 Μεταβολή πυκνοτήτων δύο γειτονικών στοιχείων στη διάρκεια του χρόνου

5.6.2 Τοπική γεωμετρία ισχίου

Οι κατανομές ισοδύναμων παραμορφώσεων κατά Von Mises και πυκνότητας τροπικής ενέργειας για την αρχική κατάσταση ($\rho_0 = 0.8 \text{ gr/cm}^3$, $T = 0$) για δεδομένες φορτίσεις και στηρίξεις υπάρχουν στο Σχήμα 5.16

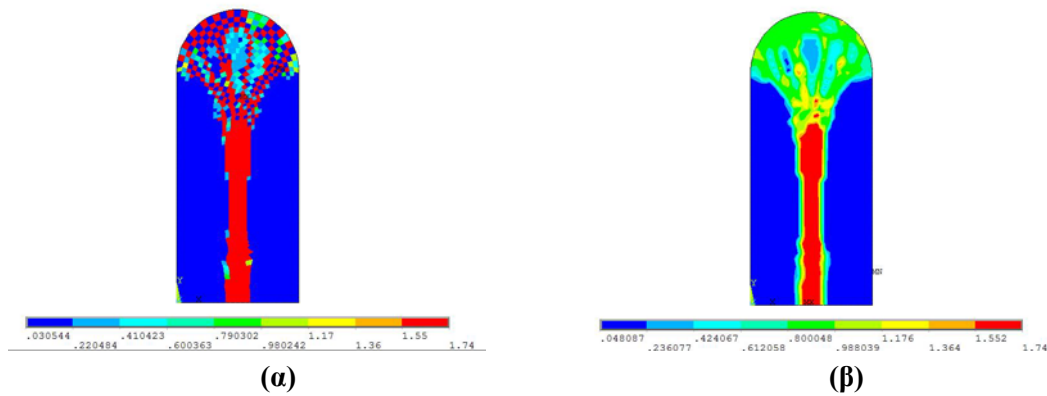
Μετά από 3500 χρονικά βήματα, τα τελικά διαγράμματα των παραμορφώσεων και της πυκνότητας τροπικής ενέργειας φαίνονται παρακάτω.



Σχήμα 5.27 Τελικές κατανομές (α) των παραμορφώσεων και (β) της πυκνότητα τροπικής ενέργειας

Μέγιστη τιμή ισοδύναμης παραμόρφωσης κατά Von Mises όπως φαίνεται στο **Σχήμα 5.27** Τελικές κατανομές (α) των παραμορφώσεων και (β) της πυκνότητα τροπικής ενέργειας είναι $3400 \mu\text{strains}$, ενώ η μέγιστη τιμή πυκνότητας τροπικής ενέργειας είναι $0.038 \frac{J}{\text{cm}^3}$.

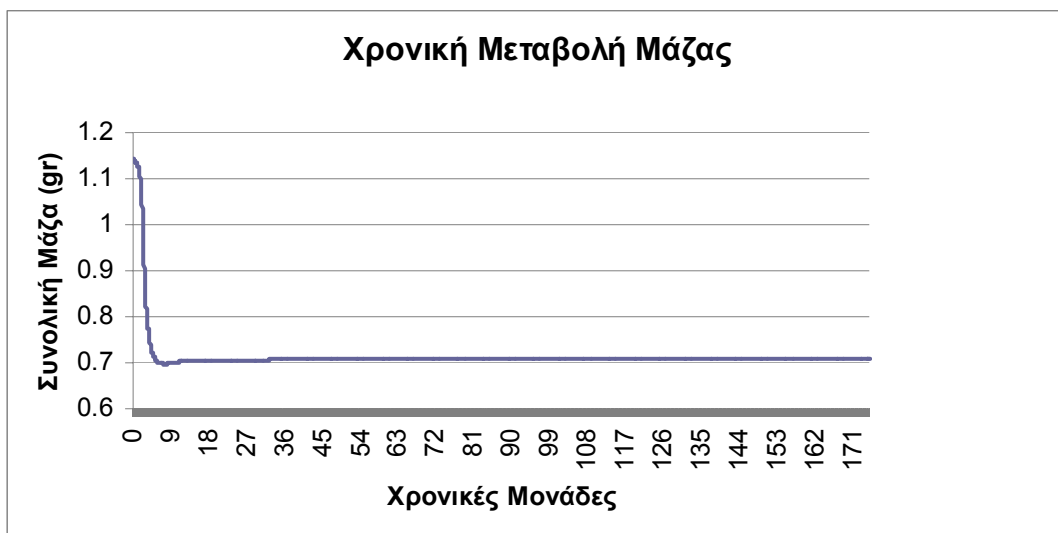
Η τελική κατανομή των πυκνοτήτων των Π.Σ. στο Σχήμα 5.28 που ακολουθεί:



Σχήμα 5.28 Τελική κατανομή πυκνότητας (α) ανά στοιχείο, (β) με χρήση μέση τιμής τοπικά

Στο παραπάνω σχήμα παρατηρούνται οι δύο τύποι ασυνεχειών που διαπιστώθηκαν και παραπάνω. Σχηματίστηκε μια κολώνα στην ίδια θέση που σχηματίστηκε και με τη χρήση της αναφοράς B₁ με τη διαφορά ότι είναι μικρότερου πάχους, δηλαδή η μέγιστη πυκνότητα εντοπίζεται σε λιγότερα στοιχεία.

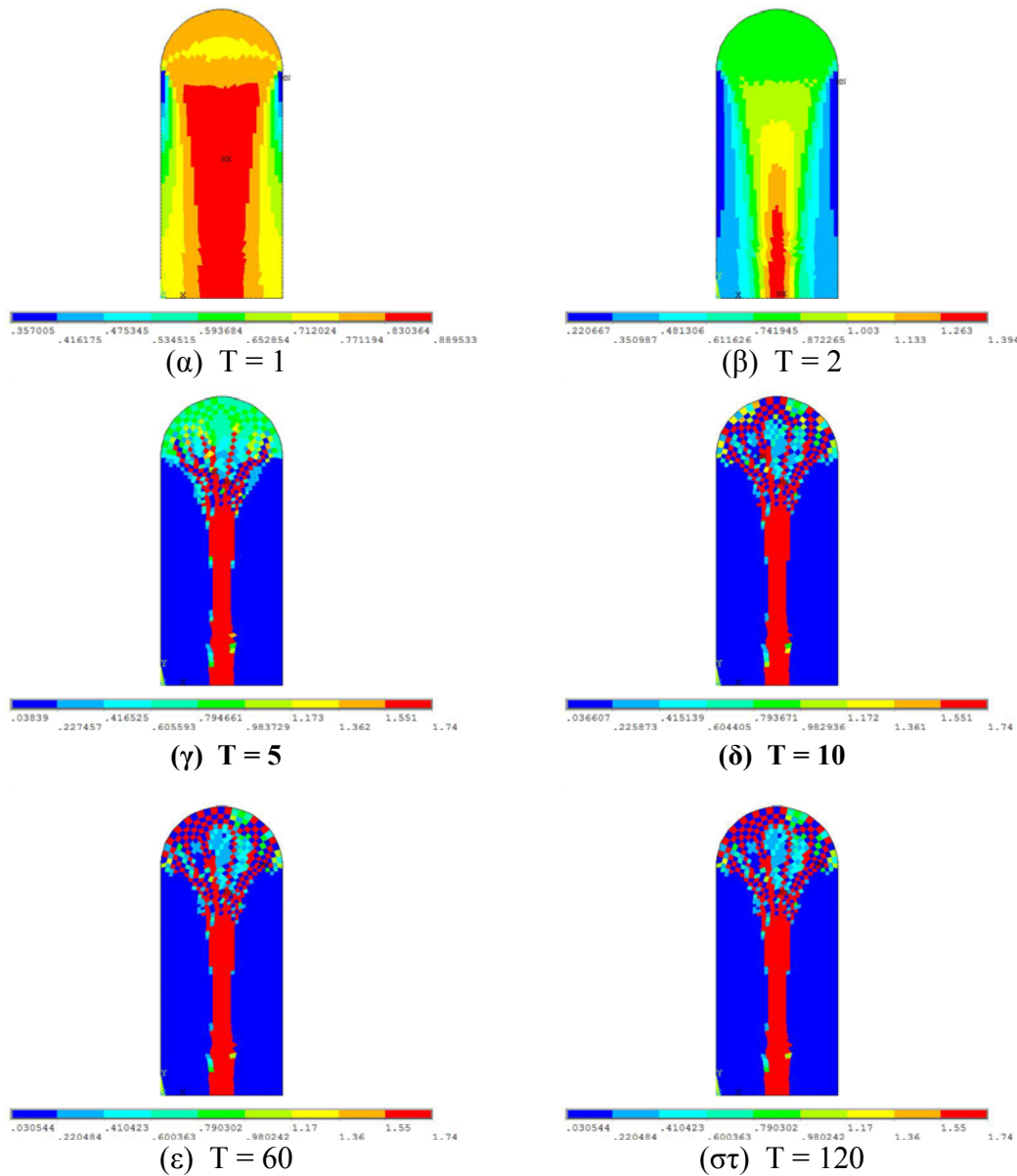
Στο Σχήμα 5.29, ακολουθεί το διάγραμμα της μάζας στην πορεία του χρόνου



Σχήμα 5.29 Χρονική μεταβολή μάζας τυπικής γεωμετρίας ισχίου

Στις πρώτες επαναλήψεις υπήρξε συνεχόμενη μείωση της συνολικής μάζας μέχρι την τελική τιμή που είναι 0.707gr, δηλαδή μειώθηκε κατά 0.439gr ή 38.3%. Η μάζα διατηρείται σταθερή με μικρή απόκλιση μόλις από τις 10 χρονικές μονάδες και μετά.

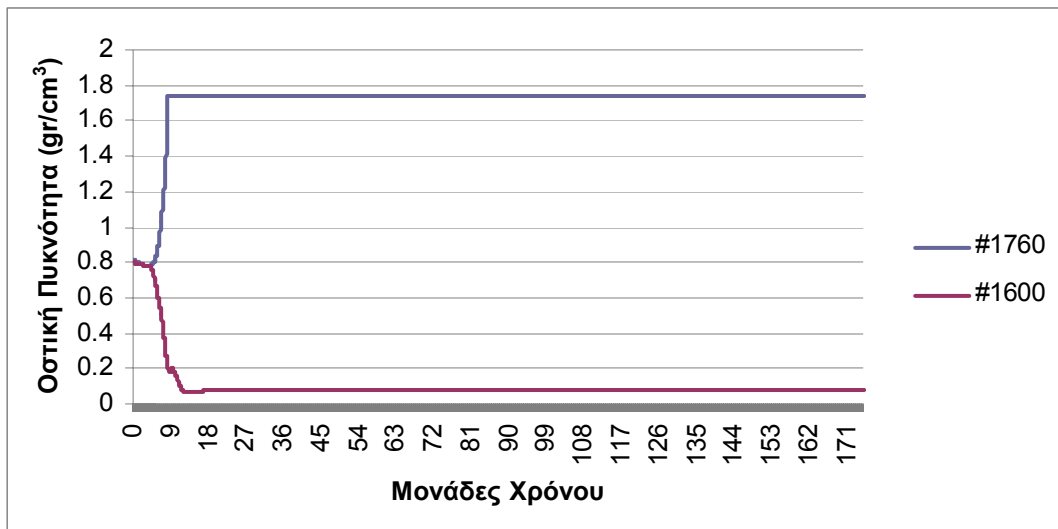
Στο Σχήμα 5.30 φαίνεται η κατανομή της πυκνότητας στην τυπική γεωμετρία ισχίου για διάφορα βήματα της διαδικασίας



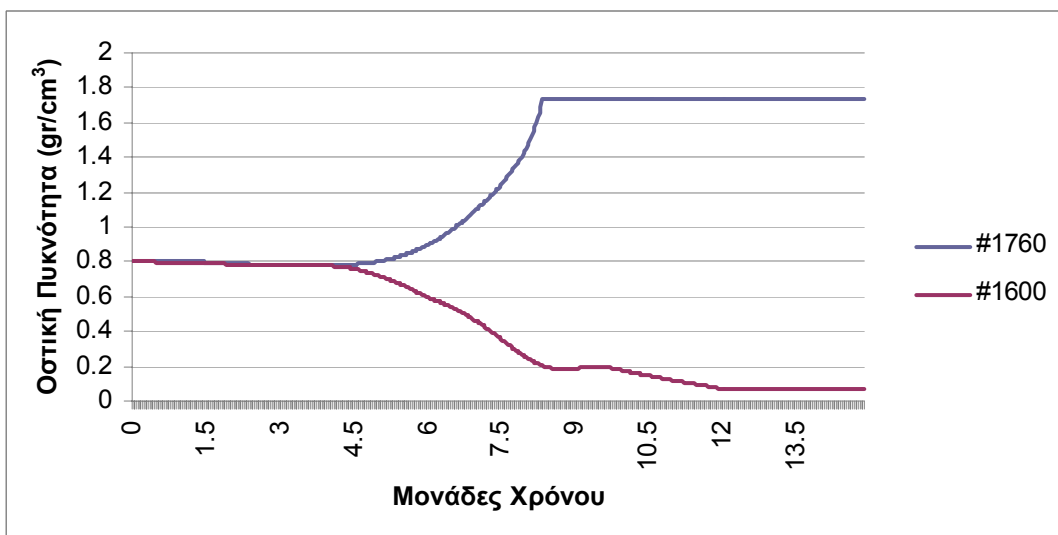
Σχήμα 5.30 Κατανομή πυκνότητας ανά στοιχείο σε διαφορετικές χρονικές στιγμές

Σε 5 μονάδες χρόνου οι πυκνότητες σε στοιχεία διαφέρουν αρκετά, ωστόσο έχει ήδη δημιουργηθεί κεντρική κολώνα ενώ υπάρχουν στοιχεία που έχουν αποκτήσει τη μέγιστη πυκνότητα και άλλα που έχουν απορροφηθεί πλήρως, σε αντίθεση με την κατάσταση ύστερα από 2 πρώτες μονάδες όπου μέγιστη πυκνότητα ήταν 1.394 gr/cm^3 . Σε 10 μόλις μονάδες χρόνου φαίνεται ότι έχει προσεγγιστεί η τελική κατάσταση.

Στη συνέχεια θα παρουσιαστεί η μεταβολή των πυκνοτήτων δύο γειτονικών στοιχείων εκ των οποίων το ένα κατέληξε σε μέγιστη και το άλλο σε ελάχιστη πυκνότητα. Τα στοιχεία αυτά ανήκουν στην περιοχή που παρατηρείται το φαινόμενο της σκακιέρας. Πιο συγκεκριμένα είναι το στοιχείο (#1760) έχει κέντρο βάρους (1.24cm, 5.79cm) και το στοιχείο (#1600) έχει κέντρο βάρους (1.24cm, 5.69cm).



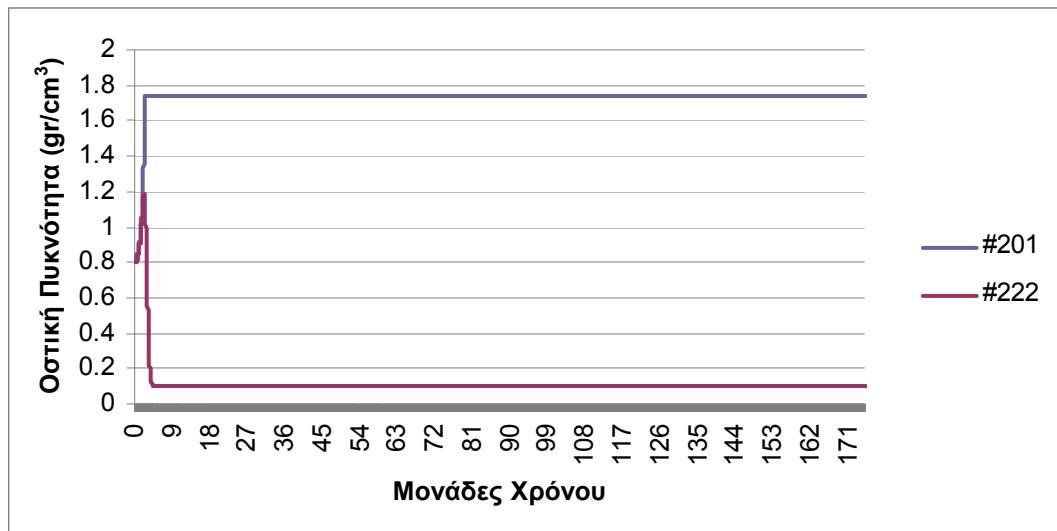
(α)



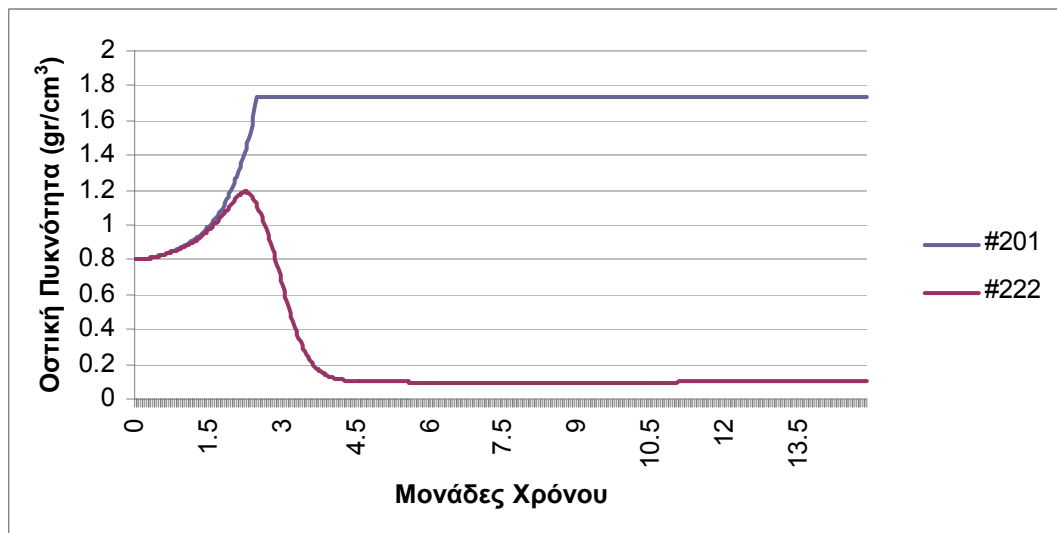
(β)

Σχήμα 5.31 Μεταβολή πυκνοτήτων δύο γειτονικών στοιχείων στη διάρκεια του χρόνου

Αντίστοιχα στο Σχήμα 5.32 **Μεταβολή πυκνοτήτων δύο γειτονικών στοιχείων στη διάρκεια του χρόνου** φαίνεται η μεταβολή της πυκνότητας δύο γειτονικών στοιχείων που το ένα κατέληξε σε μέγιστη τιμή και ανήκει σε κολόνα και το άλλο σε ελάχιστη. Στο στοιχείο με πυκνότητα $1,74 \text{ gr/cm}^3$ όλα τα γειτονικά του είχαν $0,02 \text{ gr/cm}^3$ ενώ στο στοιχείο $0,02 \text{ gr/cm}^3$ όλα τα γειτονικά $1,74 \text{ gr/cm}^3$. Το στοιχείο (#201) έχει κέντρο βάρους (1.41cm, 1.76cm) ενώ το στοιχείο (#222) έχει κέντρο βάρους (1.49cm, 1.77cm)



(α)



(β)

Σχήμα 5.32 Μεταβολή πυκνοτήτων δύο γειτονικών στοιχείων στη διάρκεια του χρόνου

Συγκρίνοντας τα δύο τελευταία σχήματα γίνεται εμφανές ότι οι ασυνέχειες κολώνας εμφανίστηκαν στα υπό εξέταση στοιχεία πριν την εμφάνιση ασυνέχειας τύπου σκακιέρας.

5.7 Σύγκριση αποτελεσμάτων με βάση την αναφορά.

Στις δοκιμές που έγιναν διατηρήθηκαν όλες οι παράμετροι ίδιες και η μόνη τροποποίηση ήταν στο πολυώνυμο δευτέρου βαθμού που λαμβάνεται ως αναφορά. Συγκριτικά για αναφορά B_1 απαιτείται μικρότερη παραμόρφωση για να υπάρξει εναπόθεση οστού σε σχέση με την αναφορά B_2 για στοιχείο ίδιας πυκνότητας. Το κοινό χαρακτηριστικό και στα δύο πολυώνυμα αναφοράς, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.8, είναι ότι μηδενίζονται για πυκνότητα στοιχείου $\rho_{\max} = 1.74 \frac{gr}{cm^3}$ και $\rho_{\min} = 0.01 \frac{gr}{cm^3}$.

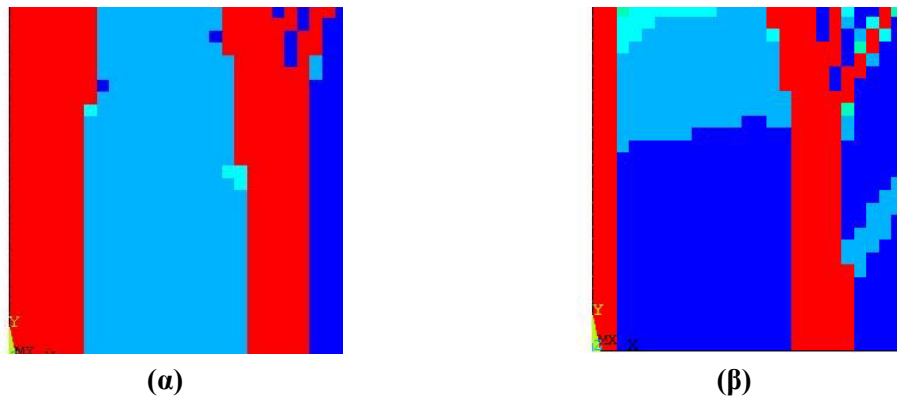
Αυτό είχε ίδια επίπτωση στα αποτελέσματα όλων των δοκιμών :

- 1) Υπάρχουν πολλά στοιχεία με οστική πυκνότητα $\rho_{\max} = 1.74 \text{ gr/cm}^3$.
- 2) Δεν υπάρχουν στοιχεία με οστική πυκνότητα $\rho_{\min} = 0.01 \text{ gr/cm}^3$ αλλά με πολύ κοντινή τιμή (περίπου $\rho_{\min} = 0.02 \text{ gr/cm}^3$) και πρακτικά θεωρούνται απορροφημένα.

Το πρώτο συμπέρασμα εξηγείται θεωρώντας ένα στοιχείο με αυξημένη πυκνότητα που συνεχίζει να δέχεται μηχανική διέγερση. Η αναφορά του συνεχώς μειώνεται και έτσι διατηρείται θετικός ο ρυθμός μεταβολής της πυκνότητας μέχρι να αποκτήσει τη μέγιστη πυκνότητα.

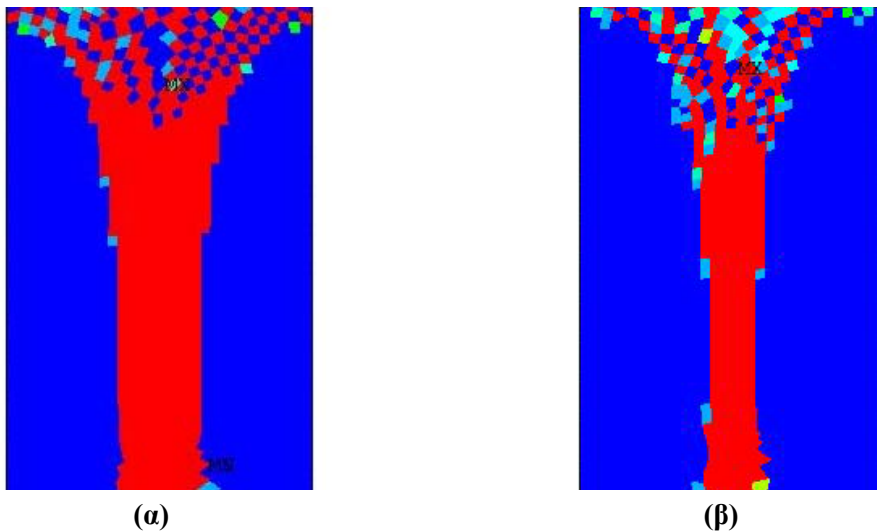
Το δεύτερο συμπέρασμα εξηγείται θεωρώντας ένα στοιχείο με πολύ μικρή πυκνότητα που δέχεται ελάχιστη παραμόρφωση. Καθώς θα τείνει να αποκτήσει πυκνότητα $\rho_{\min} = 0.01 \text{ gr/cm}^3$, το όριο αναφοράς θα τείνει στο μηδέν και συνεπώς ο ρυθμός μεταβολής πυκνότητας θα τείνει να γίνει θετικός.

Στο παράδειγμα της τετράγωνης πλάκας, η διαφορά που παρατηρήθηκε στην τελική κατανομή είναι ότι εμφανίστηκαν πιο «λεπτές» κολώνες για μεγαλύτερη αναφορά, ή διαφορετικά πιο «ισχυρές» για μικρότερη με τις ίδιες οριακές συνθήκες. Μεγάλη σημασία έχει ότι η τοπολογία στις δύο κολώνες είναι ίδια και συνολικά η τελική δομή όμοια. Στο Σχήμα 5.33 φαίνεται μια λεπτομέρεια από τις τελικές κατανομές πυκνοτήτων για τις δύο διαφορετικές κατανομές.



Σχήμα 5.33 Εστίαση στις κολώνες της τελικής δομής για (α) αναφορά B_1 , (β) αναφορά B_2

Τα ίδια συμπεράσματα προέκυψαν και από τη σύγκριση των δοκιμών με διαφορετική αναφορά στην τυπική γεωμετρία ισχίου. Προέκυψε, και πάλι όμοια τελική δομή με μικρότερη συνολική μάζα και πιο λεπτή κεντρική κολώνα για αναφορά B_2 . Στο Σχήμα 5.34 φαίνεται μια λεπτομέρεια από τις τελικές κατανομές πυκνοτήτων για τις δύο διαφορετικές κατανομές.



Σχήμα 5.34 Εστίαση στις κολώνες της τελικής δομής για (α) αναφορά B₁, (β) αναφορά B₂

Όσον αφορά τις τελικές μάζες στην περίπτωση της τετραγωνικής πλάκας ήταν 7,723gr για αναφορά B₁ και 5.677gr για αναφορά B₂. Δηλαδή η τελική μάζα για αναφορά B₁ μειώθηκε κατά 3.5% ενώ για αναφορά B₂ κατά 29.2%. Αντίστοιχα στην περίπτωση της τυπικής γεωμετρίας ισχίου τις τελικές μάζες στην περίπτωση της τετραγωνικής πλάκας ήταν 0.942gr για αναφορά B₁ και 0.707gr για αναφορά B₂. Δηλαδή η τελική μάζα για αναφορά B₁ μειώθηκε κατά 18.0% ενώ για αναφορά B₂ κατά 38.3%.

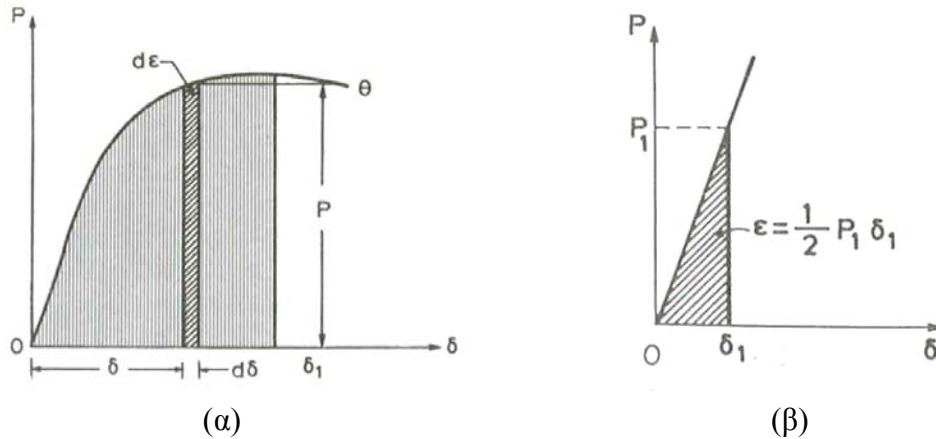
Παρατηρείται ότι και στις δύο γεωμετρίες η τελική τιμή της μάζας για την αναφορά B₂ είναι μικρότερη. Αυτό συμβαίνει γιατί για το ίδιο μέγεθος μηχανικής διέγερσης, αν αυτό βρίσκεται ανάμεσα στις καμπύλες των δύο αναφορών Σχήμα 5.8, με χρήση της αναφοράς B₁ θα γίνει ανάπτυξη οστού ενώ με χρήση αναφοράς B₂ απορρόφησή του.

Κεφάλαιο 6ο Μοντέλο Οστικής
Ανακατασκευής Με Πυκνότητα Τροπικής
Ενέργειας

6.1 Ενέργεια Παραμόρφωσης

6.1.1 Ενέργεια Παραμόρφωσης λόγω στατικής αξονικής δύναμης.

Αν σε μία ράβδο ΒΓ με μήκος L και διατομή A , που στερεώνεται στο Β επιβληθεί στο Γ μία ομαλά αυξανόμενη δύναμη P , τότε η ράβδος επιμηκύνεται κατά δ . Το διάγραμμα P - δ (Σχήμα 6.1(α)) χαρακτηρίζει το υλικό από το οποίο αποτελείται η ράβδος.



Σχήμα 6.1 Διάγραμμα Δύναμης – Επιμήκυνσης (α) Συνολικά (β) στην περιοχή αναλογίας

Το στοιχειώδες έργο που επιτελεί το φορτίο P καθώς η ράβδος επιμηκύνεται κατά $d\delta$ είναι:

$$dE = P \cdot d\delta \quad (6.1)$$

και παριστάνεται από το εμβαδό της γραμμοσκιασμένης στοιχειώδους επιφάνειας στο Σχήμα 6.1(α).

Το ολικό έργο E που επιτελεί η δύναμη P μέχρι να αποκτήσει η ράβδος μία επιμήκυνση δ_1 είναι:

$$E = \int_0^{\delta_1} P \cdot d\delta \quad (6.2)$$

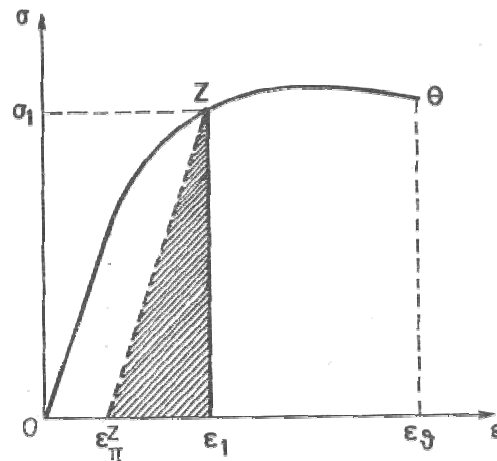
Το έργο αυτό, αν δεν υπάρχουν απώλειες (με τη μορφή θερμότητας), αποθηκεύεται στη ράβδο με τη μορφή ενέργειας. Η ενέργεια αυτή U , λέγεται *τροπική ενέργεια*. Άρα ισχύει :

$$W = \varepsilon = \int_0^{\delta_1} P \cdot d\delta \quad (6.3)$$

Στην περιοχή αναλογίας (Σχήμα 6.1(β)), όπου $P = k \cdot \delta$, το έργο E που επιτελεί η P (και που είναι ίσο με την ενέργεια W που αποθηκεύεται θα είναι :

$$E = \int_0^{\delta_1} k \cdot \delta \cdot d\delta = \frac{1}{2} k \delta_1^2 \quad (6.4)$$

$$E = \frac{1}{2} P_1 \delta_1 \quad (6.5)$$



Σχήμα 6.2 Διάγραμμα Τάσεων τροπών

Τα διαγράμματα του Σχήμα 6.1, εξαρτώνται από το αρχικό μήκος L της ράβδου και το εμβαδό της διατομής A . Άρα, το έργο E και επομένως η ενέργεια W , εξαρτάται από τα μεγέθη αυτά. Για να γίνει το διάγραμμα ανεξάρτητο από τα μεγέθη αυτά, διαιρείται το P με το εμβαδό A και η μήκυνση δ , με το αρχικό μήκος L και έτσι δημιουργείται το διάγραμμα τάσεων σ – τροπών ε (Σχήμα 6.2). Αυτό ισοδυναμεί με τη διαίρεση του έργου E με τον όγκο $V = AL$ του υλικού, οπότε η Σχέση (6.3) γράφεται:

$$\frac{W}{V} = \int_0^{\delta_1} \frac{P}{A} \frac{d\delta}{L} \quad (6.6)$$

$$\frac{W}{V} = \int_0^{\varepsilon_1} \sigma \cdot d\varepsilon \quad (6.7)$$

όπου ε_1 είναι η τροπή που αντιστοιχεί στην επιμήκυνση δ_1 ($\varepsilon_1 = \delta_1 / L$).

Η τροπική ενέργεια ανά μονάδα όγκου, $\frac{W}{V}$, ονομάζεται πυκνότητα τροπικής ενέργειας και συμβολίζεται με U :

$$U = \int_0^{\varepsilon_1} \sigma \cdot d\varepsilon \quad (6.8)$$

Η πυκνότητα τροπικής ενέργειας, παριστάνεται από το εμβαδό μεταξύ της καμπύλης σ - ε και του άξονα $O\varepsilon$ μέχρι την τροπή ε_1 . Στα ελαστικά υλικά η τάση είναι μονοσήμαντη συνάρτηση της τροπής ($\sigma(\varepsilon)$). Κατά συνέπεια, το ολοκλήρωμα (6.8) δεν εξαρτάται από τον τρόπο μεταβολής της τροπής, αλλά από την τελική τιμή ε_1 . Ακόμα, αν αφαιρεθεί η τάση, η τροπή μηδενίζεται και η ενέργεια αποδίδεται πλήρως. Επομένως η U είναι μονοσήμαντη συνάρτηση του ε και η όλη διαδικασία παραγωγής τροπικής ενέργειας είναι αντιστρεπτή.

Ειδικά αν το υλικό παρουσιάζει γραμμική ελαστική συμπεριφορά, η πυκνότητα τροπικής ενέργειας γράφεται :

$$U = \int_0^{\varepsilon_1} E\varepsilon \cdot d\varepsilon = \frac{E\varepsilon_1^2}{2} = \frac{1}{2}\sigma_1\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1^2}{2E} \quad (6.9)$$

Στην περιοχή αναλογίας η πυκνότητα τροπικής ενέργειας εκφράζεται σαν συνάρτηση της τελικής τροπής μόνο. Αντιστρέφοντας μπορεί να ειπωθεί ότι ένα υλικό είναι ελαστικό (όχι κατ' ανάγκη γραμμικά ελαστικό) αν η πυκνότητα τροπικής ενέργειας εκφράζεται σαν συνάρτηση της τροπής μόνο ($U = U(\varepsilon)$), χωρίς να εξαρτάται από την ιστορία φόρτισης. Εκείνο που χαρακτηρίζει τα ελαστικά σώματα, είναι η ιδιότητα τους να επανέρχονται στην αρχική κατάσταση ($\sigma = \varepsilon = 0$) όταν αφαιρεθούν τα φορτία. Άρα θα έχουμε $U(0) = 0$. Επιπλέον πρέπει σε κάθε αύξηση της τροπής να αντιστοιχεί μία απορρόφηση πρόσθετης ενέργειας και όχι απόδοση ενέργειας από το υλικό. Για να συμβαίνει αυτό, πρέπει η $U(\varepsilon)$ να είναι θετικά ορισμένη. Αυτό ισοδυναμεί με το να απαιτηθεί η δεύτερη παράγωγος της $U(\varepsilon)$ να είναι θετική. Στα ελαστικά υλικά από τη σχέση (6.8) βρίσκουμε :

$$\frac{dU}{d\varepsilon} = \sigma \quad (6.10)$$

οπότε

$$\frac{d^2U}{d\varepsilon^2} = E > 0 \quad (6.11)$$

Αν, είτε η διατομή A της ράβδου, είτε το μέτρο ελαστικότητας, είτε η αξονική δύναμη P , είτε και τα τρία παραπάνω μεγέθη μεταβάλλονται κατά μήκος του άξονα της ράβδου, είναι δηλαδή συναρτήσεις της απόστασης x από το άκρο B, τότε η πυκνότητα τροπικής ενέργειας παίρνει διαφορετική τιμή σε κάθε σημείο της ράβδου. Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (6.9) έχουμε :

$$U = \frac{1}{2}\sigma_1(x)\varepsilon_1(x) = \frac{1}{2} \frac{P^2(x)}{E(x)A^2(x)} \quad (6.12)$$

Σε αυτήν την περίπτωση, η τροπική ενέργεια της ράβδου είναι το ολοκλήρωμα της (6.12) στον όγκο V όλης της ράβδου

$$W = \int_V Udv = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{P^2(x)}{E(x)A^2(x)} dx \int_A dA = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{P^2(x)}{E(x)A(x)} dx \quad (6.13)$$

Στα μη ελαστικά υλικά, η τάση δεν είναι μονοσήμαντη συνάρτηση της τροπής ε , αλλά εξαρτάται από την προηγούμενη ιστορία της φόρτισης. Αν ένα μη ελαστικό υλικό αποφορτιστεί (Σχήμα 6.2), τότε υπάρχει μία παραμένουσα – πλαστική τροπή ε^p . Άρα μόνο το τμήμα της τροπικής ενέργειας που φαίνεται γραμμοσκιασμένο στο Σχήμα 6.2 αποδίδεται ως έργο, ενώ το υπόλοιπο τμήμα της δεν είναι αντιστρεπτό.

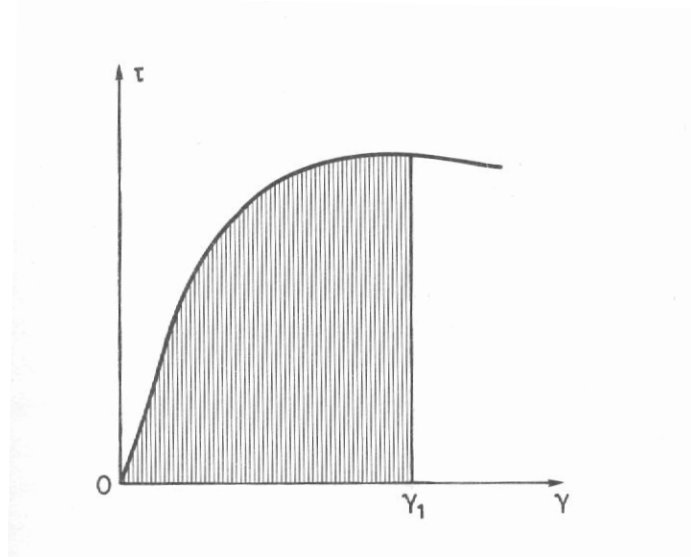
Η τιμή της $U(\varepsilon_I)$ που βρίσκεται παίρνοντας $\varepsilon_I = \varepsilon_\theta$, όπου ε_θ είναι η τροπή κατά την θραύση, ονομάζεται μέτρο στερερότητας και είναι ίση με το εμβαδό του ολικού διαγράμματος τάσεων – τροπών και παριστάνει την ενέργεια ανά μονάδα όγκου που απαιτείται για να σπάσει το υλικό, χαρακτηρίζει δηλαδή την ολκιμότητα του υλικού.

6.1.2 Ενέργεια Παραμόρφωσης λόγω Διατμητικών Τάσεων.

Όταν ένα υλικό υποβάλλεται σε διατμητική τάση τ , η πυκνότητα τροπικής ενέργειας μπορεί να εκφραστεί ως εξής :

$$U = \int_0^{\gamma_1} \tau \cdot d\gamma \quad (6.14)$$

όπου γ είναι η τελική διατμητική τροπή για την οποία ζητείται η U . Αυτό σημαίνει ότι η τροπική ενέργεια είναι ίση με το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου τμήματος του διαγράμματος διατμητικών τάσεων – διατμητικών τροπών (Σχήμα 6.3).



Σχήμα 6.3 Διάγραμμα διατμητικής τάσης - παραμόρφωσης

Για ελαστικό υλικό (γραμμικό, μη γραμμικό), θα έχουμε

$$\frac{dU}{d\gamma} = \tau \quad (6.15)$$

Αν το υλικό παρουσιάζει γραμμική ελαστική συμπεριφορά έχουμε από το νόμο του Hooke :

$$\tau = G\gamma \quad (6.16)$$

Αντικαθιστώντας την (6.16) στην (6.15) βρίσκουμε

$$U = \frac{1}{2} G\gamma^2 = \frac{1}{2} \tau\gamma = \frac{\tau^2}{2G} \quad (6.17)$$

Όταν συνυπάρχει αξονική και διατμητική τάση τότε η πυκνότητα ενέργειας παραμόρφωσης είναι το άθροισμα της (6.8) και της (6.15). Στην ελαστική περιοχή η ολική πυκνότητα στροφικής ενέργειας είναι το άθροισμα της (6.9) και (6.17).

6.2 Ανάλυση μοντέλου οστικής ανακατασκευής με βάση την τροπική ενέργεια παραμόρφωσης

Στη θεωρία οστικής ανακατασκευής που αναπτύχθηκε από τους Huiskes et al. (1987) η μεταβολή στην οστική πυκνότητα εκφράζεται σαν συνάρτηση της μηχανικής διέγερσης μέσω της ακόλουθης σχέσης:

$$\frac{d\rho}{dt} = C(U - U_n) \quad (6.17)$$

όπου,

ρ , η οστική πυκνότητα

U , η πυκνότητα τροπικής ενέργειας

U_n , το μέγεθος της πυκνότητας τροπικής ενέργειας που προσδιορίζει το όριο ανάμεσα σε εναπόθεση ή απορρόφηση οστού

C , η παράμετρος που ποσοτικοποιεί την αύξηση ή απώλεια οστού.

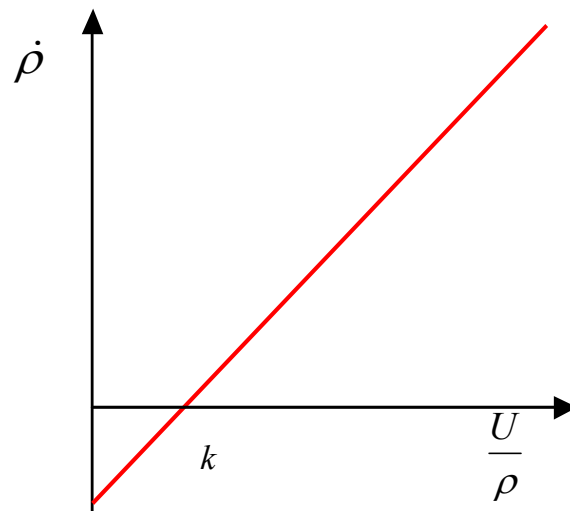
Οι Weinans et al. (1992) και Turner et al. (1997) θέτοντας $C = B/\rho$ και $U_n = \rho k$ τροποποίησαν τη σχέση (6.17) στη μορφή

$$\frac{d\rho}{dt} = B \left(\frac{U}{\rho} - k \right) \quad (6.18)$$

Η σχέση (6.18) αποτελεί διαφορική εξίσωση 1^{ης} τάξης για το ρυθμό μεταβολής οστικής πυκνότητας με βάση την πυκνότητα τροπικής ενέργειας (Strain Energy Density-S.E.D). Ο ρυθμός μεταβολής οστικής πυκνότητας είναι ανάλογος της διαφοράς μηχανικής διέγερσης $\left(\frac{U}{\rho} \right)$ από μια τιμή αναφοράς k .

Οι παράμετροι B και k παραμένουν σταθερές σε όλη τη διάρκεια της οστικής ανακατασκευής. Αν οι συνθήκες φόρτισης προκαλούν μηχανική διέγερση χαμηλότερη από την τιμή αναφοράς k , ο ρυθμός μεταβολής της πυκνότητας θα είναι αρνητικός και αυτό έχει σαν αποτέλεσμα απώλεια οστού. Αντίθετα, αν η μηχανική διέγερση είναι υψηλότερη από την τιμή αναφοράς k , ο ρυθμός μεταβολής της οστικής πυκνότητας είναι θετικός και παρατηρείται ανάπτυξη του οστού.

Ο ρυθμός μεταβολής της πυκνότητας συναρτήσει της μηχανικής διέγερσης U/ρ , σύμφωνα με τη εξίσωση (6.18) φαίνεται στο Σχήμα 6.4.



Σχήμα 6.4 Ρυθμός Μεταβολής Οστικής Πυκνότητας συναρτήσει της μηχανικής διέγερσης

Ο ρυθμός μεταβολής της οστικής πυκνότητας είναι θετικός για οποιαδήποτε διέγερση μεγαλύτερη της τιμής αναφοράς k και αρνητικός για οποιαδήποτε διέγερση μικρότερη της τιμής αναφοράς. Από προηγούμενες δημοσιεύσεις των Huijkes, Weinans και Turner δοθήκαν στις παραμέτρους της Σχέσης (6.18) οι ακόλουθες τιμές :

$$k = 0.25 \frac{J}{g}$$

$$B = 1 \frac{\left(\frac{g}{cm^3}\right)^2}{(MPa \cdot [time\ units])}$$

Το μέτρο ελαστικότητας του οστού υπολογίζεται συναρτήσει της πυκνότητας του μέσω της σχέσης :

$$E = C \cdot \rho^r \tag{6.19}$$

όπου στις ίδιες βιβλιογραφικές πηγές έχουν τις τιμές

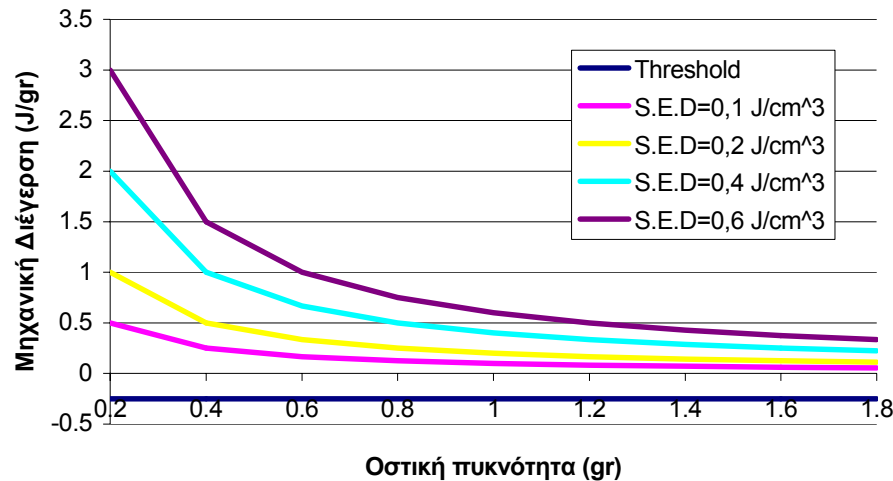
$$C = 100 \frac{MPa}{\left(\frac{gr}{cm^3}\right)^2}$$

$$r = 2$$

Η έννοια του χρόνου εξαρτάται από τις μονάδες της παραμέτρου B . Για σταθερή μηχανική διέγερση $1.25 \frac{J}{gr}$, αφαιρώντας την αναφορά $0.25 \frac{J}{g}$, η πυκνότητα σε ένα στοιχείο θα αυξηθεί κατά $1 \frac{gr}{cm^3}$ σε μία «μονάδα χρόνου» (time unit). Συνεπώς ο ρόλος του B είναι μια σταθερά αναλογίας που εμπεριέχει το χρόνο ενσωματώνοντας τον στη διαδικασία.

Συνεπώς, ο συντελεστής B εξαρτάται από το στάδιο ανάπτυξης και την ανατομική θέση του οστού.

Θεωρώντας διαφορετικές τιμές σταθερής πυκνότητας τροπικής ενέργειας δημιουργήθηκε το διάγραμμα για τη μηχανική διέγερση συναρτήσει της οστικής πυκνότητας σε κοινό διάγραμμα με το όριο αναφοράς και παρουσιάζεται στο Σχήμα 6.5 **Η μηχανική διέγερση συναρτήσει της οστικής πυκνότητας σε κοινό διάγραμμα με το όριο αναφοράς**



Σχήμα 6.5 Η μηχανική διέγερση συναρτήσει της οστικής πυκνότητας σε κοινό διάγραμμα με το όριο αναφοράς

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.5 Η μηχανική διέγερση συναρτήσει της οστικής πυκνότητας σε κοινό διάγραμμα με το όριο αναφοράς, για τιμή οστικής πυκνότητας ίση με 0.8 gr/cm^3 και πυκνότητα τροπικής ενέργειας περίπου 0.2 J/cm^3 και άνω, υπάρχει θετικό ισοζύγιο οστικής ανακατασκευής. Αντίθετα για την ίδια τιμή οστικής πυκνότητας και τιμή πυκνότητας τροπικής ενέργειας μικρότερη από 0.2 J/cm^3 υπάρχει αρνητικό ισοζύγιο ανακατασκευής. Γενικεύοντας προκύπτει ότι, αν παραμείνει σταθερή η πυκνότητα τροπικής ενέργειας καθώς μειώνεται η οστική πυκνότητα αυξάνεται η μηχανική διέγερση. Βέβαια, αν οι συνθήκες φόρτισης διατηρηθούν σταθερές, όσο μεταβάλλεται η πυκνότητα σε ένα πεπερασμένο στοιχείο, η αποθηκευμένη πυκνότητα τροπικής ενέργειας δεν μπορεί να παραμείνει σταθερή διότι μεταβάλλεται το μέτρο ελαστικότητας.

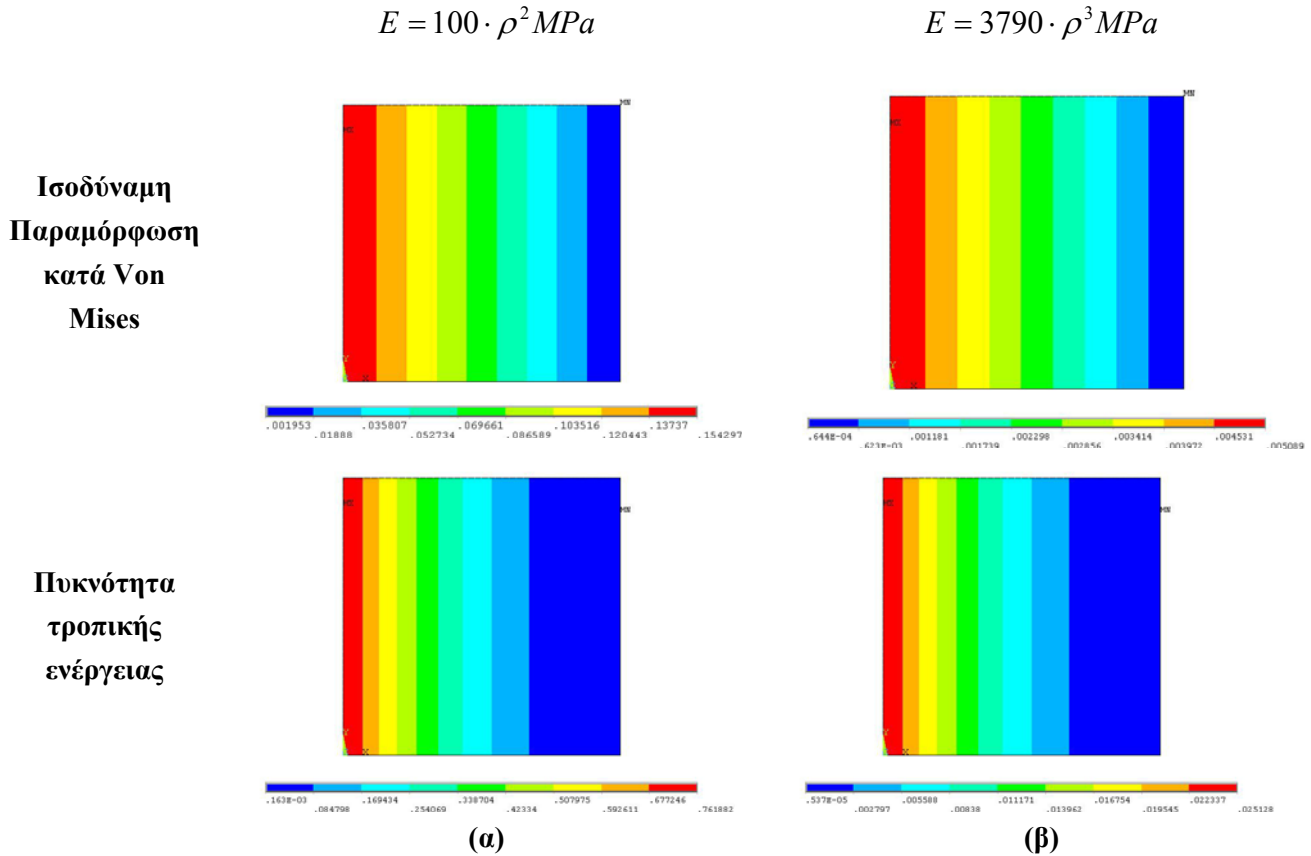
Από άλλες πηγές ([6], [16]) στον τύπο συσχέτισης μέτρου ελαστικότητας E με οστική πυκνότητα ρ προτείνονται ως τιμές σταθερών στη Σχέση (6.19) οι:

$$C = 3790 \text{ MPa} / \left(\frac{\text{gr}}{\text{cm}^3} \right)^3$$

$$r = 3$$

Χρησιμοποιώντας διαφορετικούς συντελεστές στην γενική μορφή $E = C \cdot \rho^r$, μεταβάλλεται το μηχανικό μέγεθος που συμμετέχει στον υπολογισμό της μηχανικής διέγερσης ανά στοιχείο παρόλο που η φόρτιση είναι ίδια, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.6.

Παρουσιάζονται τα διαγράμματα ισοδύναμων παραμορφώσεων Von Mises και πυκνότητας τροπικής ενέργειας στην αρχική κατάσταση (πριν την έναρξη οστικής της ανακατασκευής) στα παραδείγματα της τετράγωνης πλάκας και της τυπικής γεωμετρίας ισχίου.

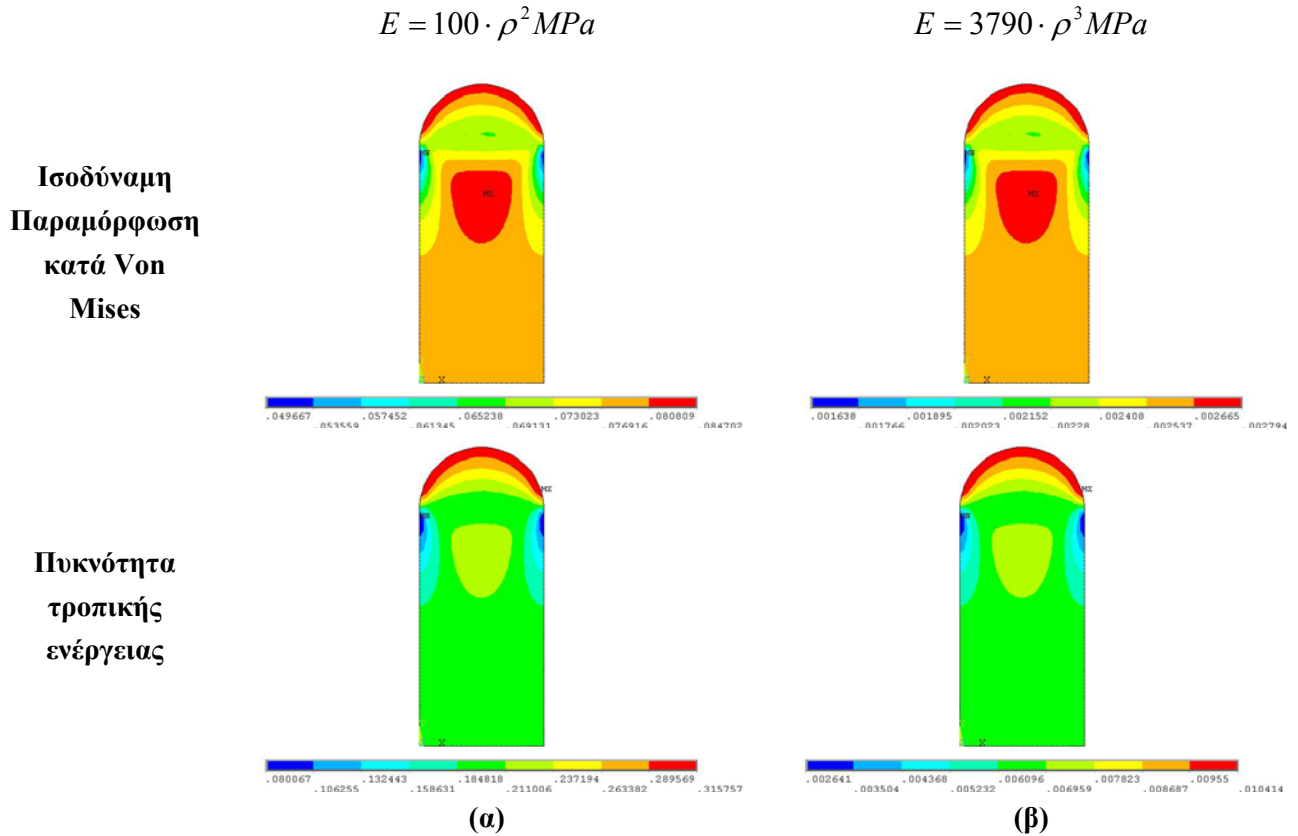


Σχήμα 6.6 Αρχικό διάγραμμα παραμορφώσεων και πυκνοτήτων τροπικής ενέργειας τετράγωνης πλάκας

Από το Σχήμα 6.6 προκύπτει ότι στην τετράγωνη πλάκα για $E_0 = 100 \cdot 0.8^2 = 64 \text{MPa}$ η μέγιστη παραμόρφωση κατά Von Mises που εμφανίζεται είναι 0.154Strains και μέγιστη πυκνότητα τροπικής ενέργειας $0.762 \frac{\text{J}}{\text{cm}^3}$. Αντίστοιχα, για $E_0 = 3790 \cdot 0.8^3 \approx 1940 \text{MPa}$, η μέγιστη παραμόρφωση κατά Von Mises που εμφανίζεται είναι 0.005Strains και η μέγιστη πυκνότητα τροπικής ενέργειας $0.025 \frac{\text{J}}{\text{cm}^3}$.

Παρατηρείται ότι με την αύξηση του μέτρου ελαστικότητας, δηλαδή την αλλαγή των σταθερών στη Σχέση (6.19), οι τιμές και των δύο μηχανικών μεγεθών μειώθηκαν.

Ακολουθούν τα ίδια Σχήματα για τη γεωμετρία του ισχίου.



Σχήμα 6.7 Αρχικό διάγραμμα παραμορφώσεων και πυκνοτήτων τροπικής ενέργειας τυπικής γεωμετρίας ισχίου

Ομοίως στην τυπική μορφή ισχίου, για $E_0 = 64MPa$ μέγιστη παραμόρφωση Von Misses που δέχεται στοιχείο είναι 0.084 και μέγιστη πυκνότητα τροπικής ενέργειας $0.326 J/cm^3$ ενώ για $E_0 \approx 1940MPa$, η μέγιστη παραμόρφωση Von Misses που δέχεται στοιχείο είναι 0.0028 και η μέγιστη πυκνότητα τροπικής ενέργειας $0.01 J/cm^3$. Είναι προφανές ότι και εδώ οι τιμές των μεγίστων των υπό εξέταση μηχανικών μεγεθών μειώθηκαν με την αλλαγή των συντελεστών στην Σχέση (6.19). Συνεπώς, τροποποιώντας τους συντελεστές στη Σχέση (6.19) πρέπει να μεταβληθεί κατάλληλα και η τιμή της αναφοράς k της διαφορικής εξίσωσης (6.18). Με αυτό το σκεπτικό και με βάση τη βιβλιογραφία [16] επιλέγεται $k = 0.006 J/g$. Στις ενότητες που ακολουθούν θα γίνουν δοκιμές στα δύο παραδείγματα ελέγχου για τους δύο ακόλουθους συνδυασμούς εξισώσεων:

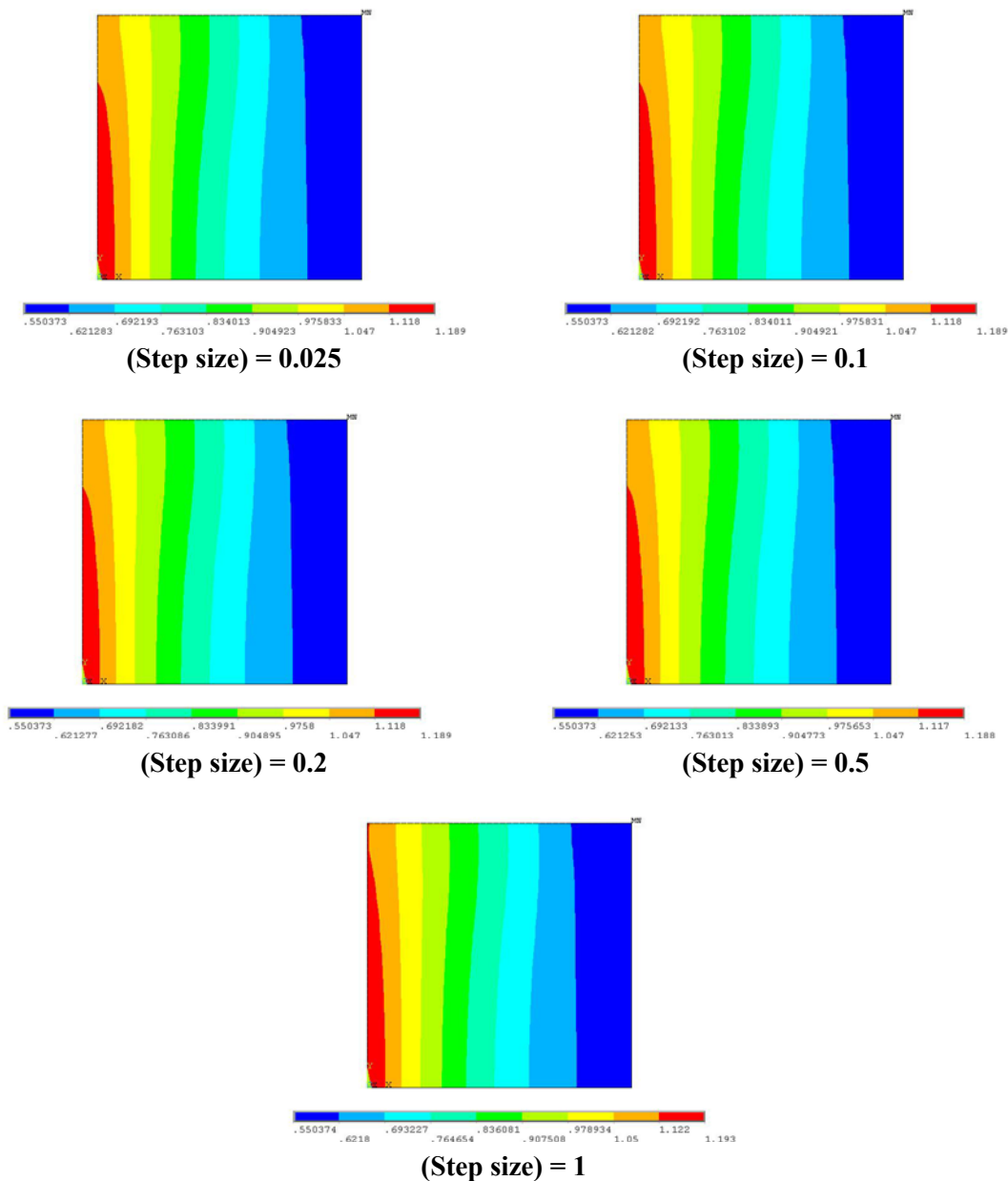
Πίνακας 6.1 Εξισώσεις οστικής ανακατασκευής

(A)	(B)
$\frac{d\rho}{dt} = 1 \cdot \left(\frac{U}{\rho} - 0.25 \right)$	$\frac{d\rho}{dt} = 1 \cdot \left(\frac{U}{\rho} - 0.006 \right)$
$E = 100 \cdot \rho^2 MPa$	$E = 3790 \cdot \rho^3 MPa$

Σημειώνεται ότι η σχέση μέτρου ελαστικότητας (B) μπορεί να θεωρηθεί ισοδύναμη με αυτή που προτάθηκε από τον Hart και χρησιμοποιήθηκε στο Κεφάλαιο 5.

6.3 Επίλυση και αποτελέσματα οστικής ανακατασκευής ενεργειακού μοντέλου με μέτρο ελαστικότητας A

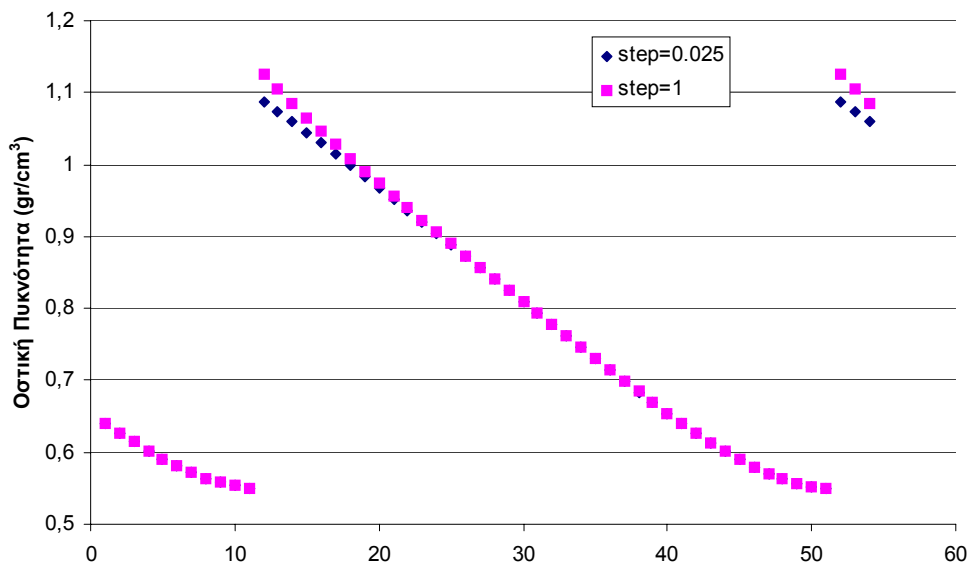
Η διαφορική εξίσωση της οστικής ανακατασκευής, Σχέση (6.18), επιλύεται με τη μέθοδο που αναπτύχθηκε και παρουσιάστηκε, στο Κεφάλαιο 5. Όπως έγινε και στο προηγούμενο Κεφάλαιο, αρχικά διερευνάται το μέγεθος του βήματος που θα χρησιμοποιηθεί. Σε βιβλιογραφικές πηγές προτείνονται τιμές από $\Delta t = 0.01$ [8] έως $\Delta t = 2$ [7].



Σχήμα 6.8 Πυκνότητες στοιχείων τετράγωνης πλάκας σε 1 χρονική μονάδα για διαφορετικό μέγεθος βημάτων.

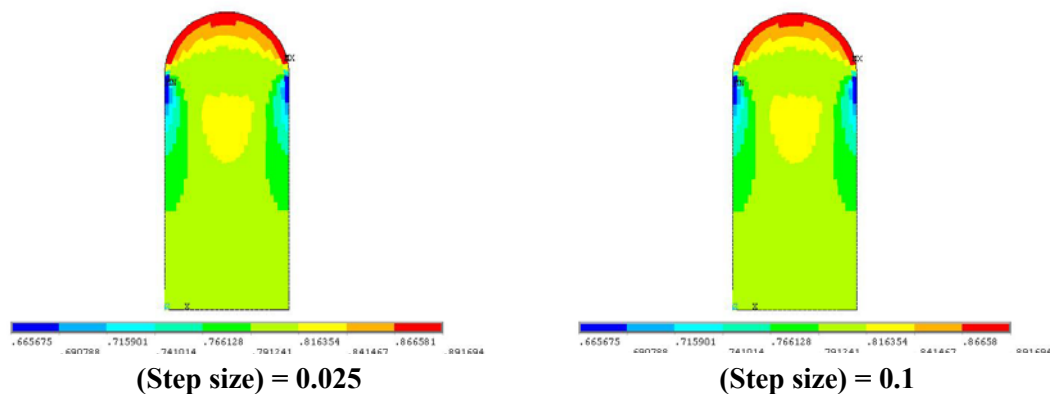
Για την εκλογή του κατάλληλου βήματος, έχει επιλυθεί η διαφορική εξίσωση σε συνολικό χρόνο 1 χρονική μονάδα, με 5 διαφορετικές τιμές βήματος. Στο Σχήμα 6.8 που προηγείται φαίνονται τα αποτελέσματα. Στο παραπάνω σχήμα φαίνεται ότι οι κατανομές των πυκνοτήτων διαφοροποιούνται μόνο για βήμα $\Delta t=1$.

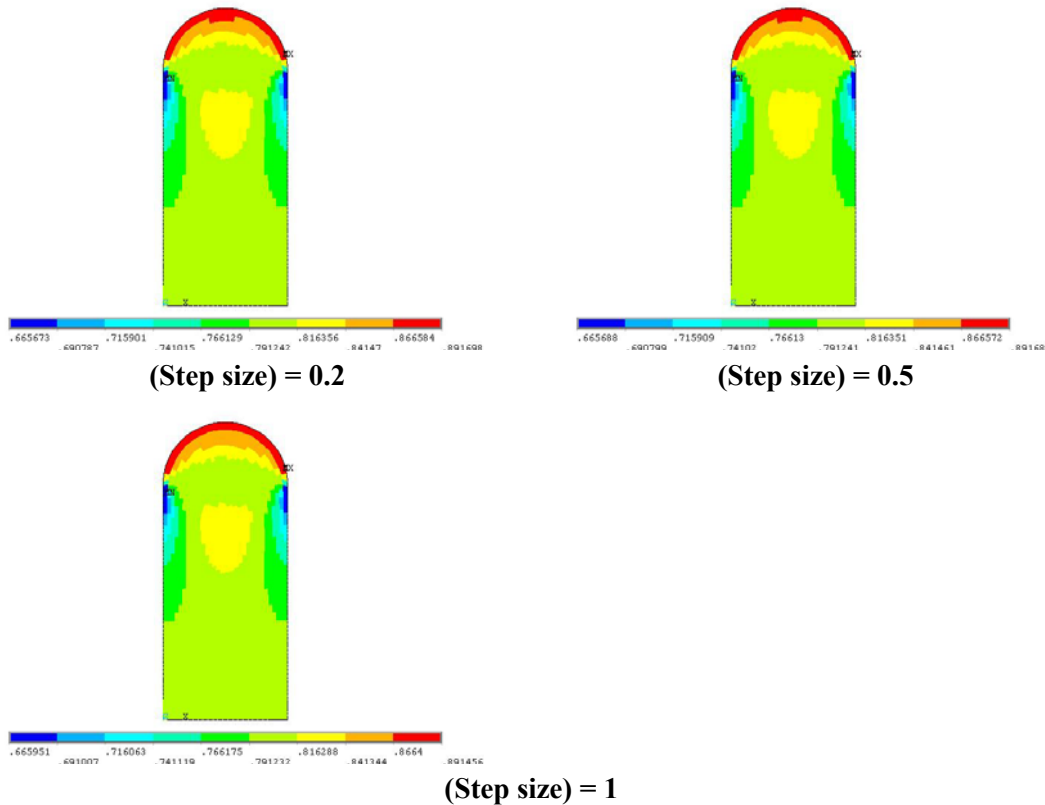
Όσον αφορά τις αριθμητικές τιμές των πυκνοτήτων και θεωρώντας ως βάση τις τιμές που ελήφθησαν με βήμα 0.025 φαίνεται ότι αν το βήμα γίνει $\Delta t=1$ η μέγιστη διαφορά σε πυκνότητα Π.Σ. στοιχείου είναι 0.04 gr/cm^3 , ενώ για βήμα $\Delta t=0.1$ είναι της τάξης του 10^{-6} gr/cm^3 . Στο Σχήμα 6.9 φαίνεται η διαφορά στη πυκνότητα για βήματα 1 και 0.025 σε μία μονάδα χρόνου σε 60 τυχαία Π.Σ..



Σχήμα 6.9 Διαφορά πυκνότητας σε 60 στοιχεία της τετράγωνης πλάκας ύστερα από μία μονάδα χρόνου για δύο διαφορετικά βήματα

Η ίδια διερεύνηση γίνεται και για την τυπική γεωμετρία ισχίου για 1 μονάδα χρόνου, διότι λόγω των μικρότερων διαστάσεων των Π.Σ. αλλά και του πιο πυκνού πλέγματος πιθανόν να απαιτείται διαφορετικό βήμα.





Σχήμα 6.10 Πυκνότητες στοιχείων τυπικής γεωμετρίας ισχύου σε 1 χρονική μονάδα για διαφορετικό μέγεθος βημάτων.

Σε σύγκριση με το αποτέλεσμα με βήμα $\Delta t=0.025$, για βήμα $\Delta t=1$ η μέγιστη διαφορά σε πυκνότητα στοιχείου είναι μόλις $5 \cdot 10^{-4} \frac{gr}{cm^3}$, ενώ για βήμα $\Delta t=0.1$ της τάξης του $10^{-6} \frac{gr}{cm^3}$.

Από την παραπάνω μελέτη εξάγεται το συμπέρασμα ότι επιτυγχάνεται ικανοποιητική ακρίβεια με αριθμητική ολοκλήρωση για βήμα $\Delta t=0.1$ και στις δύο εφαρμογές. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται για συνολικό χρόνο 175 με σταθερό βήμα $\Delta t=0.1$, που συνεπάγεται 1750 επαναλήψεις. Συνολικά, στο ANSYS θα γίνουν $4 \times 3 + 2 \times 1747 = 3506$ επιλύσεις.

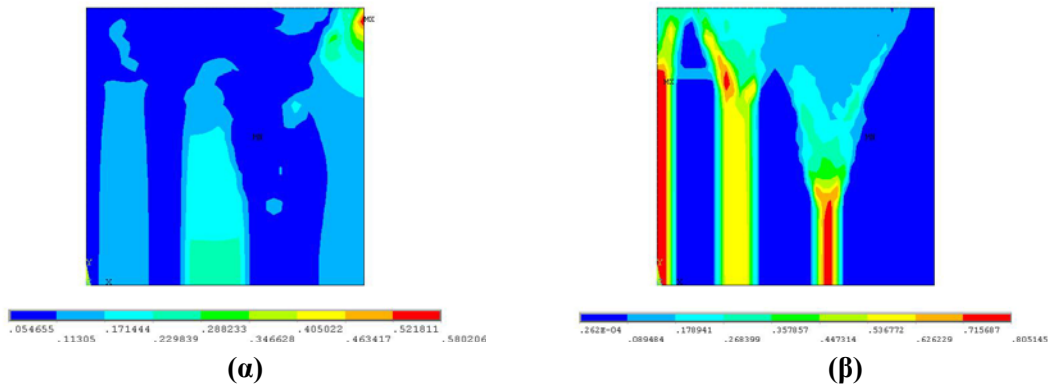
6.3.1 Τετράγωνη πλάκα

Αρχικό μέτρο ελαστικότητας για όλα τα στοιχεία είναι $E_0 = 64MPa$, ενώ το μέγιστο μέτρο ελαστικότητας που μπορεί να προκύψει είναι $E_{max} = 302.76MPa$

Τα διαγράμματα παραμορφώσεων κατά Von Mises και πυκνότητας τροπικής ενέργειας για την αρχική κατάσταση ($\rho_0 = 0.8 \text{ gr/cm}^3$, $T = 0$) με δεδομένες οριακές συνθήκες έχουν παρουσιαστεί στο Σχήμα 6.6.

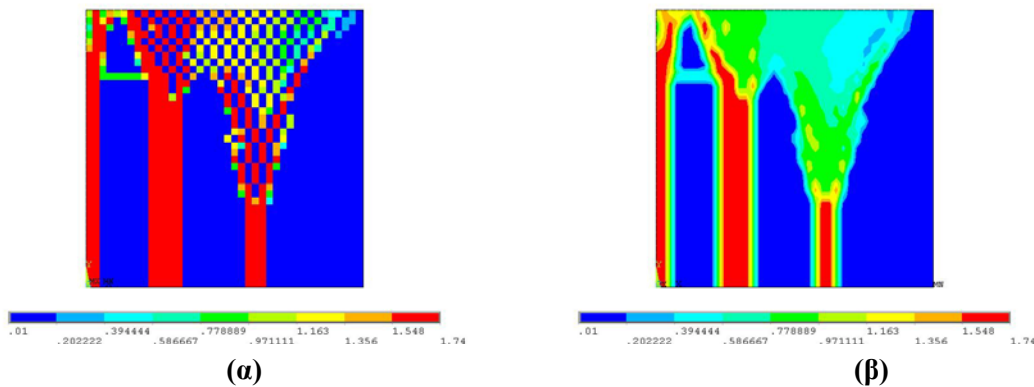
Συμφωνά με το όριο αναφοράς στη Σχέση (6.19), για αρχική οστική πυκνότητα $\rho_0 = 0.8 \text{ gr/cm}^3$ δημιουργείται θετικό ισοζύγιο ανακατασκευής στα Π.Σ. με πυκνότητα

τροπικής ενέργειας $0.2 \frac{J}{cm^3}$ και άνω. Τα τελικά διαγράμματα των παραμορφώσεων και της πυκνότητα τροπικής ενέργειας φαίνονται στο Σχήμα 6.11, παρακάτω.



Σχήμα 6.11 Τελικά διαγράμματα (α) παραμορφώσεων και (β) πυκνότητας τροπικής ενέργειας. Μέγιστη τιμή ισοδύναμης παραμόρφωσης Von Mises είναι 0.58 Strains ενώ η μέγιστη τιμή πυκνότητας τροπικής ενέργειας είναι $0.8 \frac{J}{cm^3}$.

Η τελική κατανομή των πυκνοτήτων φαίνεται στο Σχήμα 6.12 που ακολουθεί:

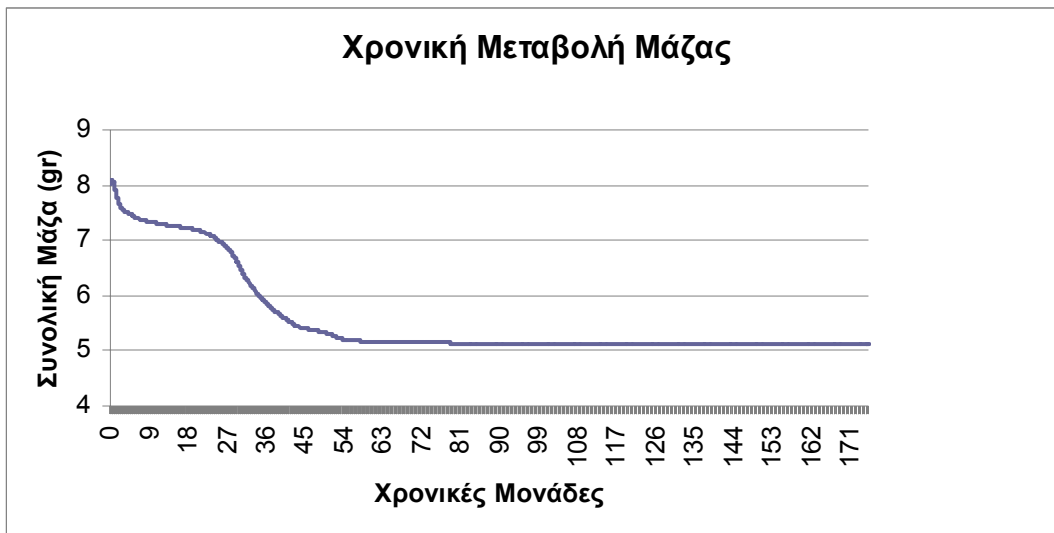


Σχήμα 6.12 Τελική κατανομή πυκνότητας (α) ανά στοιχείο, (β) με χρήση μέση τιμής τοπικά

Παρατηρείται ότι, μετά την ολοκλήρωση της οστικής ανακατασκευής, δημιουργήθηκαν τρεις κολώνες προς την πλευρά της υψηλής φόρτισης όπου η καταπόνηση ήταν υψηλότερη. Προς την πλευρά της χαμηλής φόρτισης παρατηρήθηκαν υψηλά ποσοστά απορρόφησης Π.Σ., δηλαδή Π.Σ. με την ελάχιστη τιμή οστικής πυκνότητας.

Σημαντικό μέγεθος κατά την πορεία της οστικής ανακατασκευής είναι η μάζα της πλάκας. Ακολουθεί στο Σχήμα 6.13 διάγραμμα της μάζας στην πορεία του χρόνου.

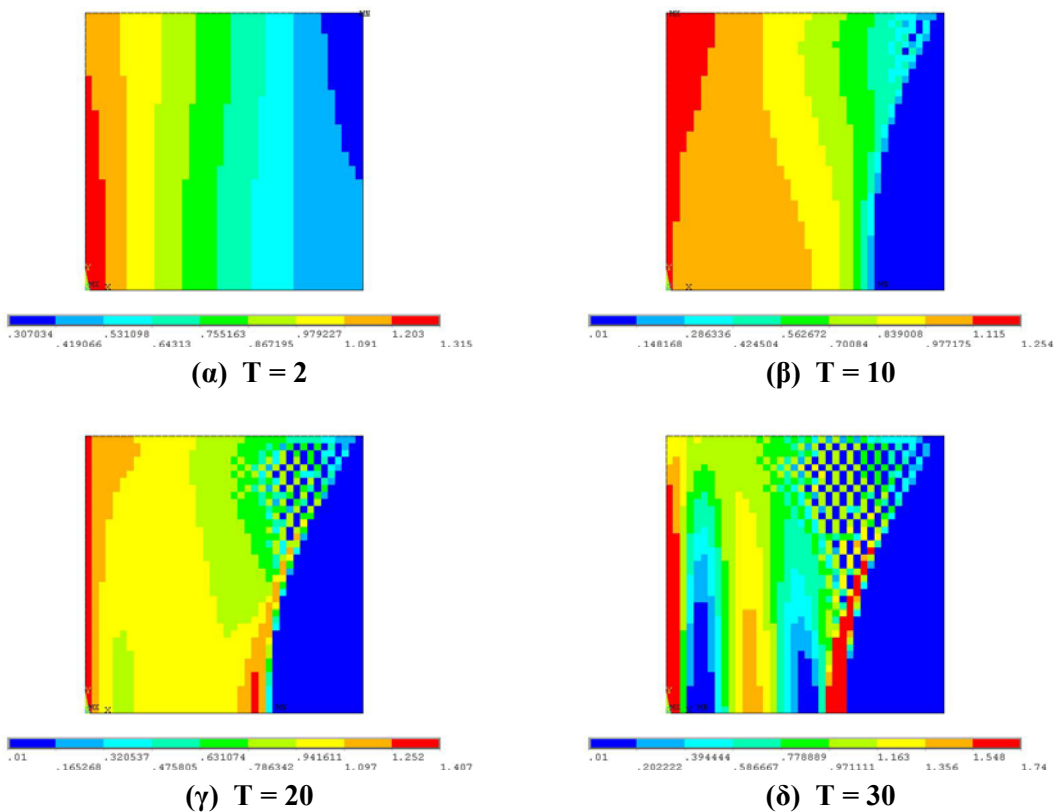
Η συνολική τελική μάζα είναι 5.130gr, δηλαδή μειώθηκε κατά 2.870gr, ή 35.8%.

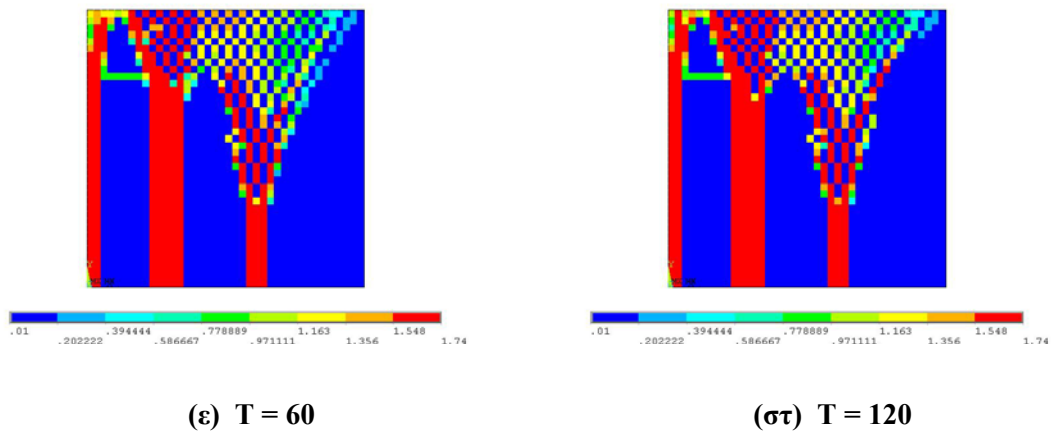


Σχήμα 6.13 Χρονική μεταβολή μάζας της τετράγωνης πλάκας

Η μάζα αφού μεταβάλλεται τις πρώτες 80 μονάδες χρόνου στη συνέχεια παραμένει σταθερή, ενώ ήδη από τις 52 χρονικές μονάδες μέχρι τις 80 μεταβλήθηκε κατά 2% από την τελική. Στο χρονικό διάστημα μέχρι τις 52 χρονικές μονάδες παρατηρούνται δύο απότομες μειώσεις. Η πρώτη είναι στο διάστημα 0 έως 6 χρονικές μονάδες και αντιστοιχεί σε μείωση κατά 0.7gr και η δεύτερη στο διάστημα από 20 έως 40 χρονικές μονάδες όπου η μάζα μεταβλήθηκε κατά 1.5gr

Στο Σχήμα 6.14 φαίνεται η κατανομή της πυκνότητας στην τετράγωνη πλάκα για διάφορες χρονικές στιγμές της διαδικασίας.

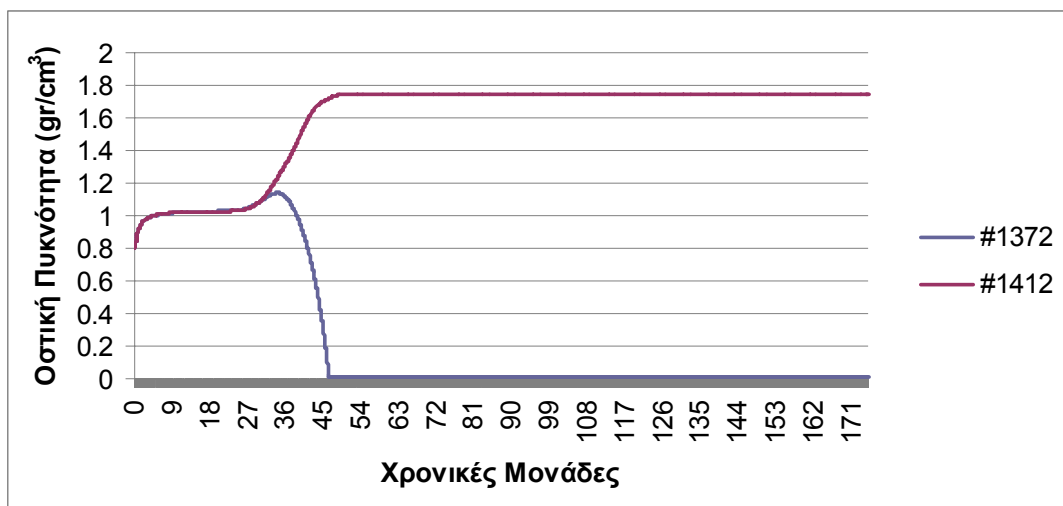




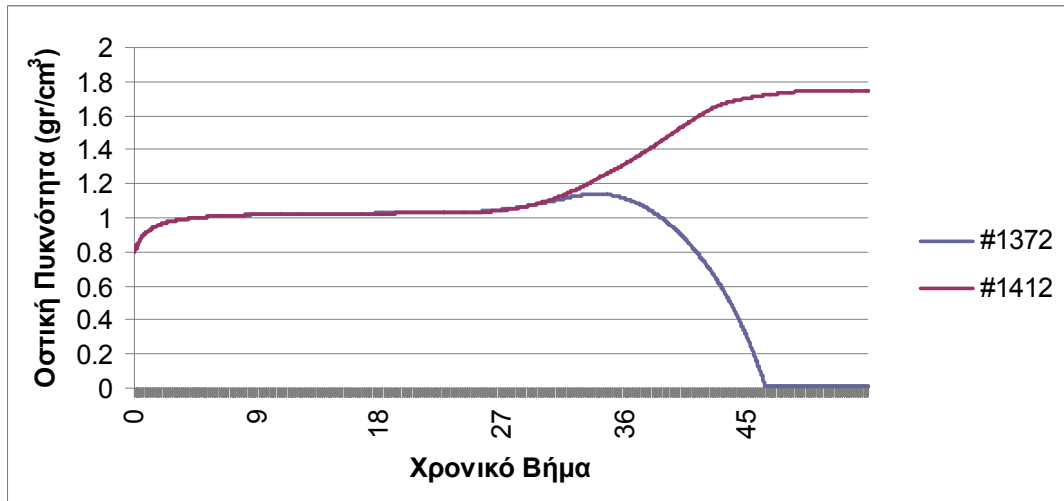
Σχήμα 6.14 Κατανομή πυκνότητας ανά στοιχείου σε διαφορετικές χρονικές στιγμές

Στο παραπάνω σχήμα φαίνεται σταδιακά στην εξέλιξη του χρόνου πως απορροφήθηκαν οι πρώτες περιοχές οστού και πώς σχηματίζονται οι τρεις κολώνες. Μέχρι χρόνο 20 (Σχήμα 6.14(γ)), είχε απορροφηθεί η περιοχή Π.Σ. στην πλευρά της χαμηλής φόρτισης ενώ το υπόλοιπο οστό δείχνει συμπαγές, πέρα από κάποιες ασυνέχειες κοντά στη φόρτιση. Μετά τις 30 χρονικές μονάδες σχηματίζονται οι τρεις κολώνες. Σε χρόνο 60 χρονικών μονάδων η δομή είναι πολύ καλή προσέγγιση της τελικής κατάστασης.

Στη συνέχεια στο Σχήμα 6.15 διερευνάται η εξέλιξη της οστικής πυκνότητας σε δύο τυχαία γειτονικά στοιχεία τα οποία κατέληξαν το ένα σε μέγιστη και το άλλο σε ελάχιστη οστική πυκνότητα και ανήκουν στην περιοχή της σκακιέρας.



(α)

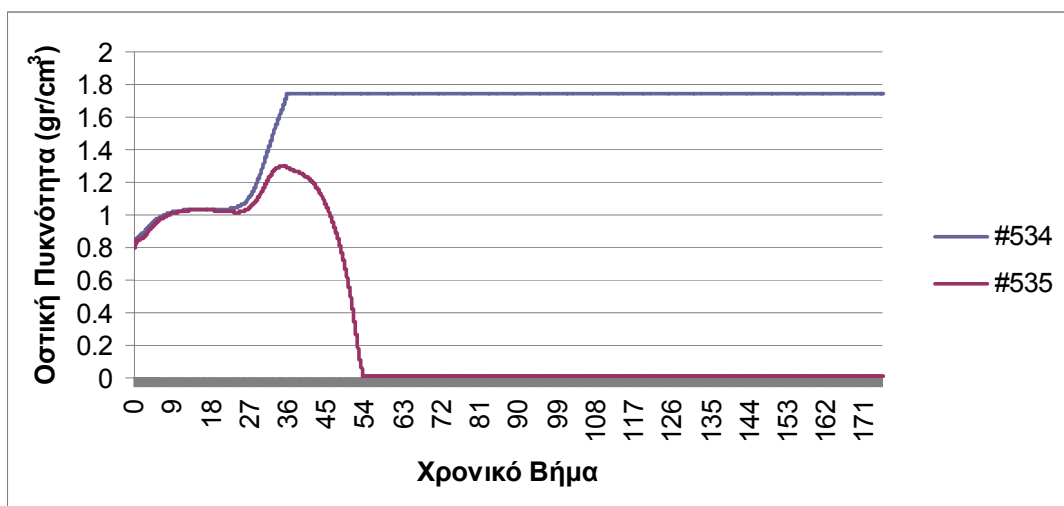


(β)

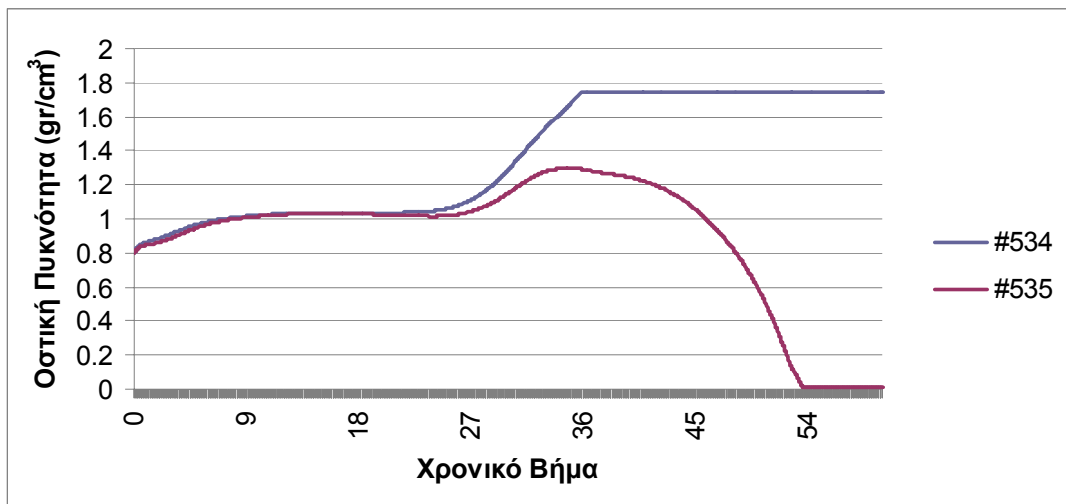
Σχήμα 6.15 Μεταβολή πυκνοτήτων δύο γειτονικών στοιχείων στη διάρκεια του χρόνου

Τα κέντρα βάρους των στοιχείων, σε cm, που η πορεία τους εμφανίζεται στα παραπάνω διαγράμματα είναι για το στοιχείο #1372 (2.875, 8.625) και για το στοιχείο #1412 (2.875, 8.875)

Στη συνέχεια, δίνονται τα ίδια διαγράμματα Σχήμα 6.16 για την περιοχή στο κάτω μέρος των κολώνων, για τα στοιχεία με κέντρα βάρους, σε cm, #534 (3.375, 3.375) και #535 (3.625, 3.375).



(α)



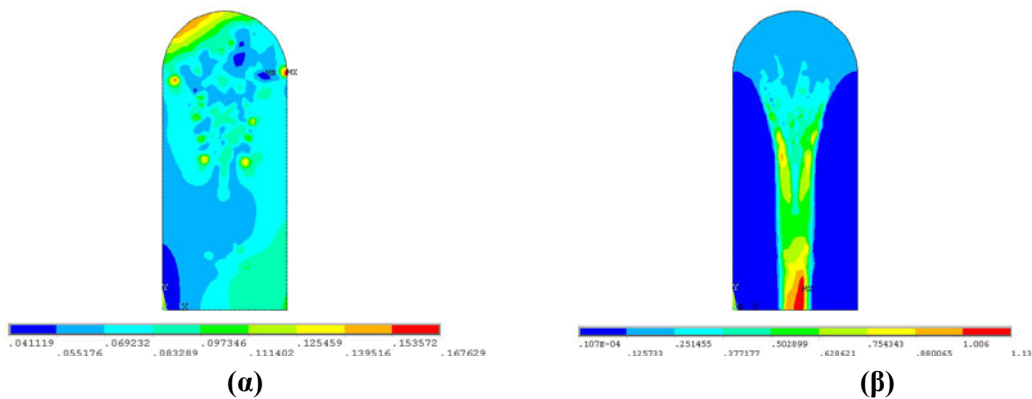
(β)

Σχήμα 6.16 Μεταβολή πυκνοτήτων δύο γειτονικών στοιχείων στη διάρκεια του χρόνου

Από τα παραπάνω διαγράμματα παρατηρείται ότι δημιουργείται πρώτα η ασυνέχεια μορφής κολόνας

6.3.2 Τυπική γεωμετρία ισχίου

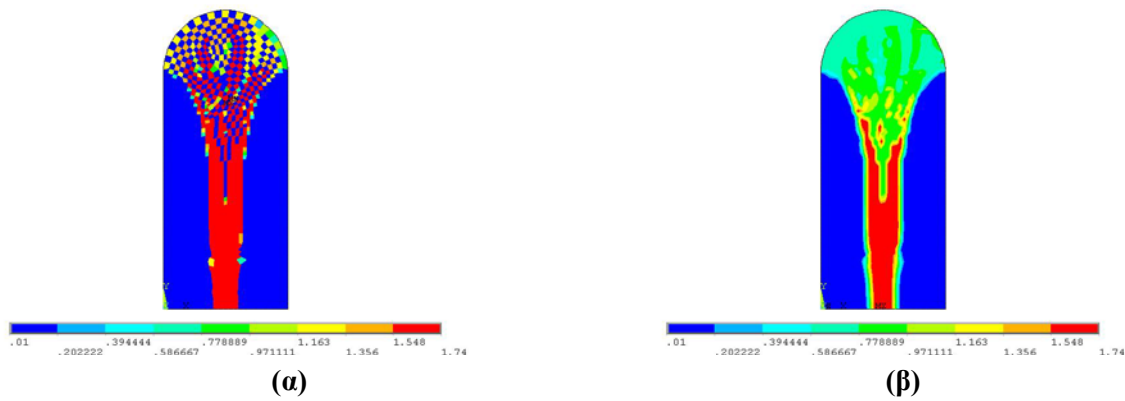
Μετά από 175 χρονικά βήματα, οι τελικές κατανομές των παραμορφώσεων κατά Von Mises και της πυκνότητας τροπικής ενέργειας φαίνονται στο παρακάτω Σχήμα 6.17.



Σχήμα 6.17 Τελικά διαγράμματα (α) παραμορφώσεων και (β) πυκνότητας τροπικής ενέργειας

Η μέγιστη τιμή ισοδύναμης παραμόρφωσης κατά Von Mises είναι 0.168 Strains ενώ η μέγιστη τιμή πυκνότητας τροπικής ενέργειας είναι $1.13 \frac{J}{cm^3}$.

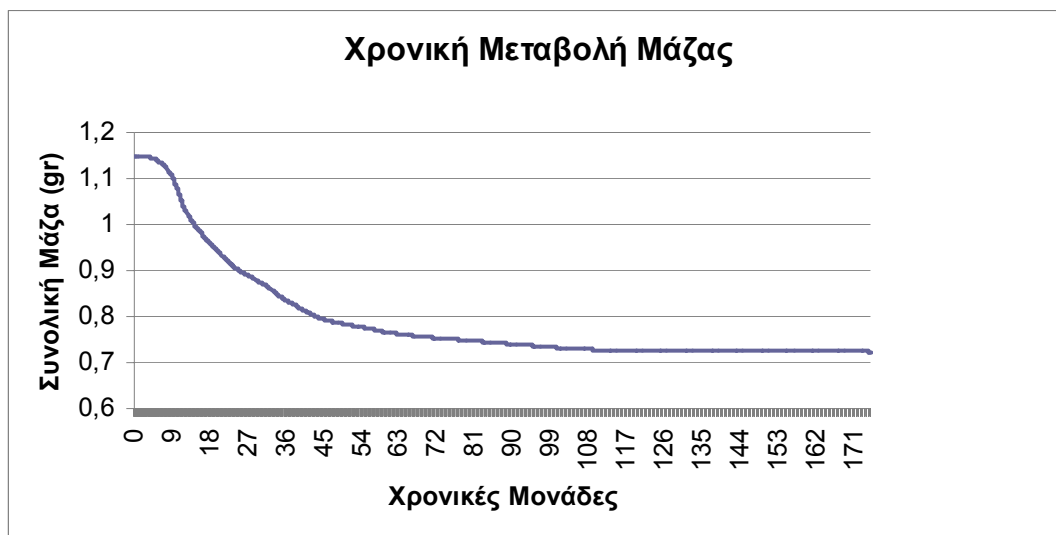
Η τελική κατανομή των πυκνοτήτων φαίνεται στο Σχήμα 6.18 που ακολουθεί:



Σχήμα 6.18 Τελική κατανομή πυκνότητας (α) ανά στοιχείο, (β) με χρήση μέση τιμής τοπικά

Παρατηρούνται οι δύο τύποι ασυνεχειών που αναφέρθηκαν και στο προηγούμενο κεφάλαιο, ενώ δημιουργήθηκε η κεντρική κολώνα στο μέσο της δομής. Η γενική εικόνα είναι παρόμοια με τις αντίστοιχες του προηγούμενου κεφαλαίου.

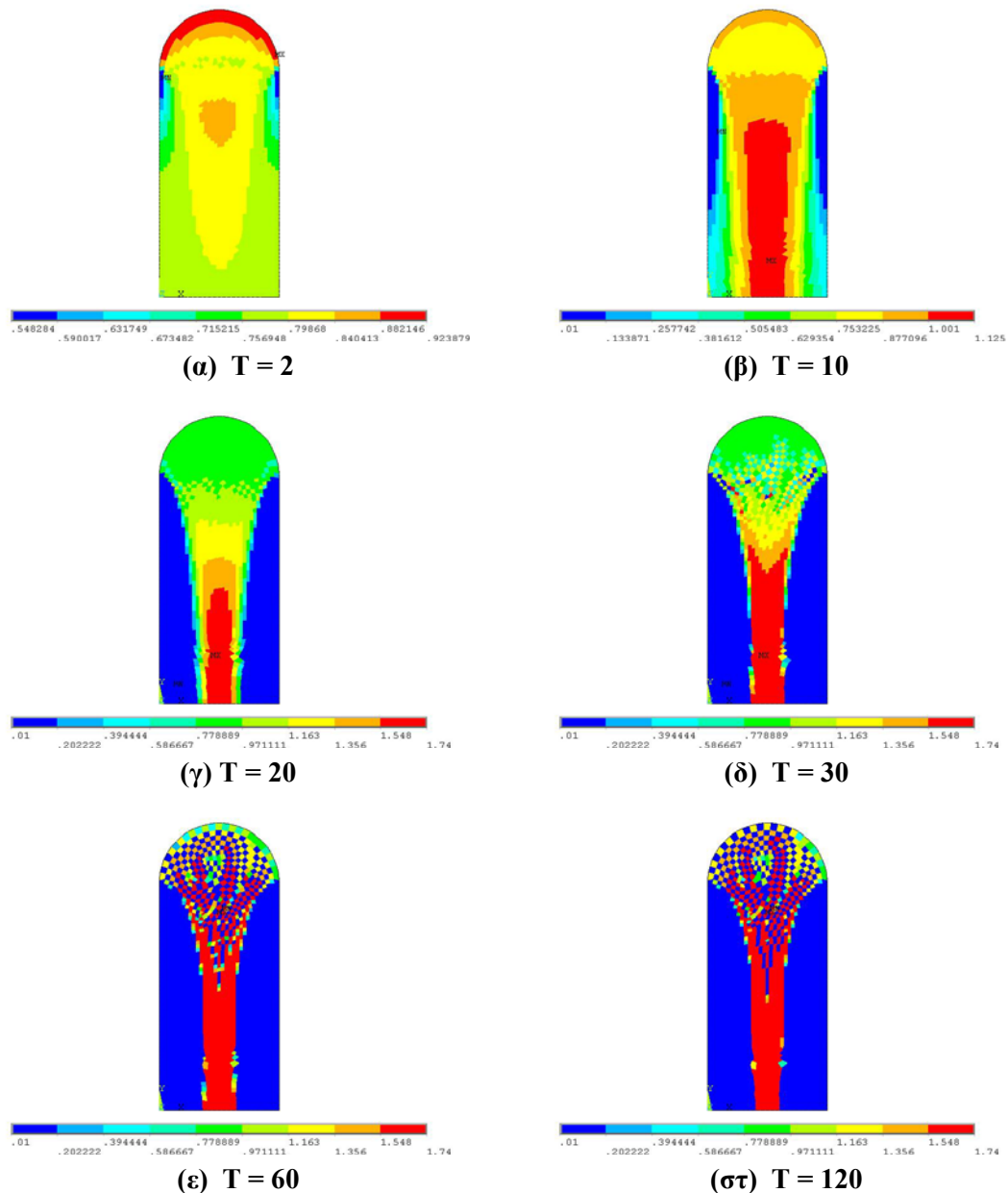
Ακολουθεί διάγραμμα της μάζας στην πορεία του χρόνου στο Σχήμα 6.19.



Σχήμα 6.19 Χρονική μεταβολή μάζας της τυπικής μορφής ισχίου

Η συνολική τελική μάζα είναι 0.724gr, δηλαδή μειώθηκε κατά 0.422gr ή 36,8%.

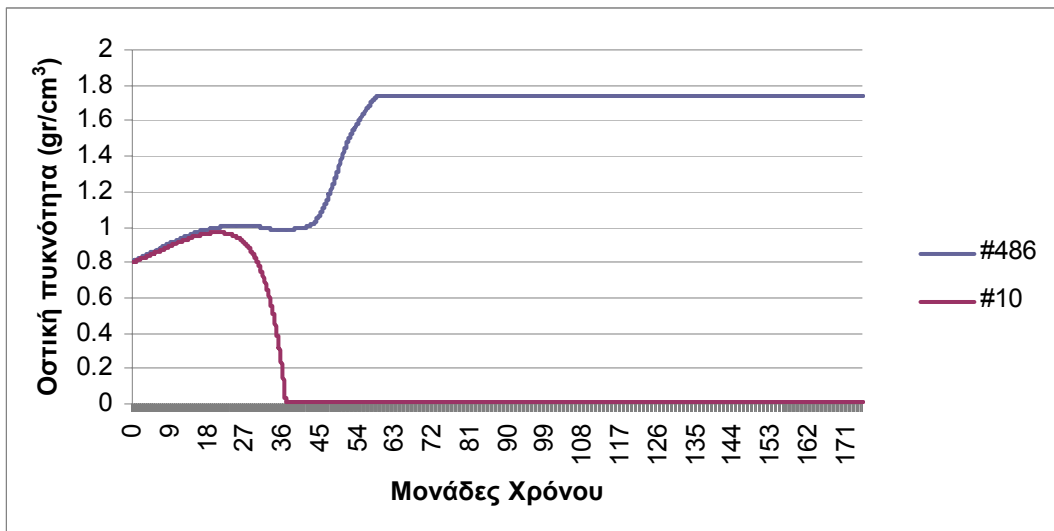
Για να σταθεροποιηθεί η τιμή της μάζας χρειάστηκαν 110 μονάδες χρόνου, ενώ μέχρι αυτή τη χρονική στιγμή η τιμή της μειωνόταν με διαρκώς μειούμενο ρυθμό. Στο Σχήμα 6.20 φαίνεται η κατανομή της πυκνότητας στην τυπική μορφή ισχίου σε διάφορα βήματα της διαδικασίας



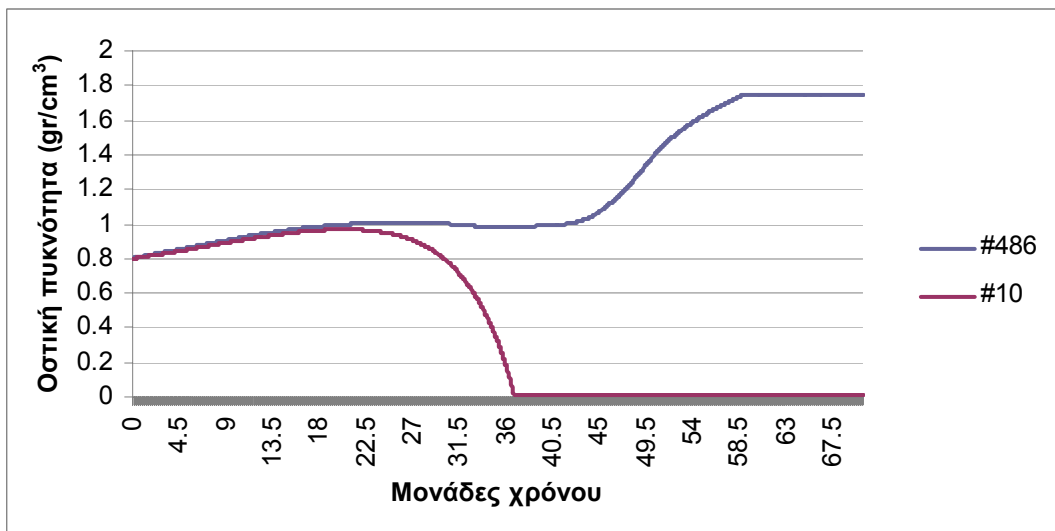
Σχήμα 6.20 Κατανομή πυκνότητας ανά στοιχείο σε διαφορετικές χρονικές στιγμές

Σε χρόνο 10 ξεκινούν να εμφανίζονται τα πρώτα Π.Σ. με την ελάχιστη τιμή οστικής πυκνότητας, για να σχηματιστεί τελικά σε χρόνο 20 η κεντρική κολώνα. Η διαδικασία κινείται με αργούς ρυθμούς. Σε χρόνο 60 χρονικών μονάδων η κατανομή των τελικών πυκνοτήτων είναι κοντά στην τελική κατανομή που προκύπτει (Σχήμα 6.20(ε)).

Στο **Σχήμα 6.21** Μεταβολή πυκνοτήτων **δύο** γειτονικών στοιχείων στη διάρκεια του χρόνου φαίνεται η εξέλιξη της τιμής της οστικής πυκνότητας σε δύο γειτονικά στοιχεία τα οποία κατέληξαν, το ένα σε μέγιστη και το άλλο σε ελάχιστη τιμή οστικής πυκνότητας. Τα στοιχεία αυτά ανήκουν στην περιοχή που εμφανίστηκε η ασυνέχεια με μορφή σκακιάρας και έχουν κέντρα βάρους στις θέσεις #486 (0.985, 4.372) και #10 (1.282, 4.485).



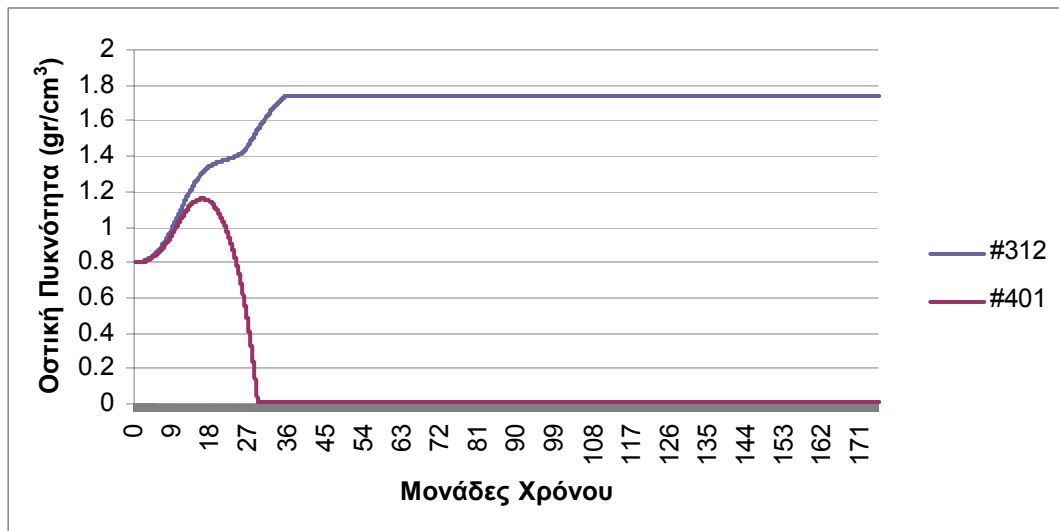
(α)



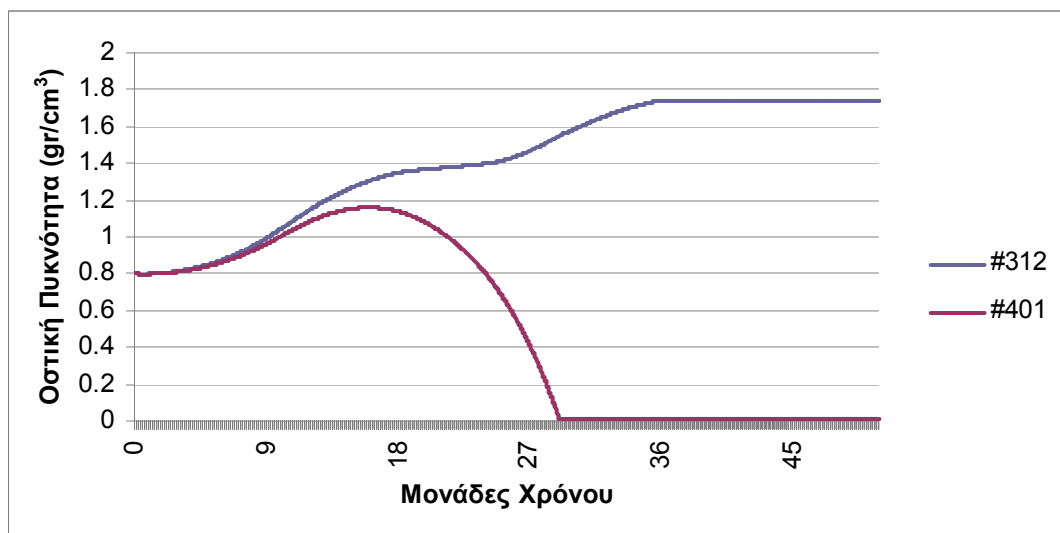
(β)

Σχήμα 6.21 Μεταβολή πυκνοτήτων δύο γειτονικών στοιχείων στη διάρκεια του χρόνου

Το αντίστοιχο διάγραμμα ακολουθεί για δύο στοιχεία από την περιοχή του σχηματισμού της κολώνας (Σχήμα 6.22). Τα κέντρα βάρους των στοιχείων είναι #312 (1.561, 1.700) και #401 (1.641, 1.700).



(α)



(β)

Σχήμα 6.22 Μεταβολή πυκνοτήτων δύο γειτονικών στοιχείων στη διάρκεια του χρόνου

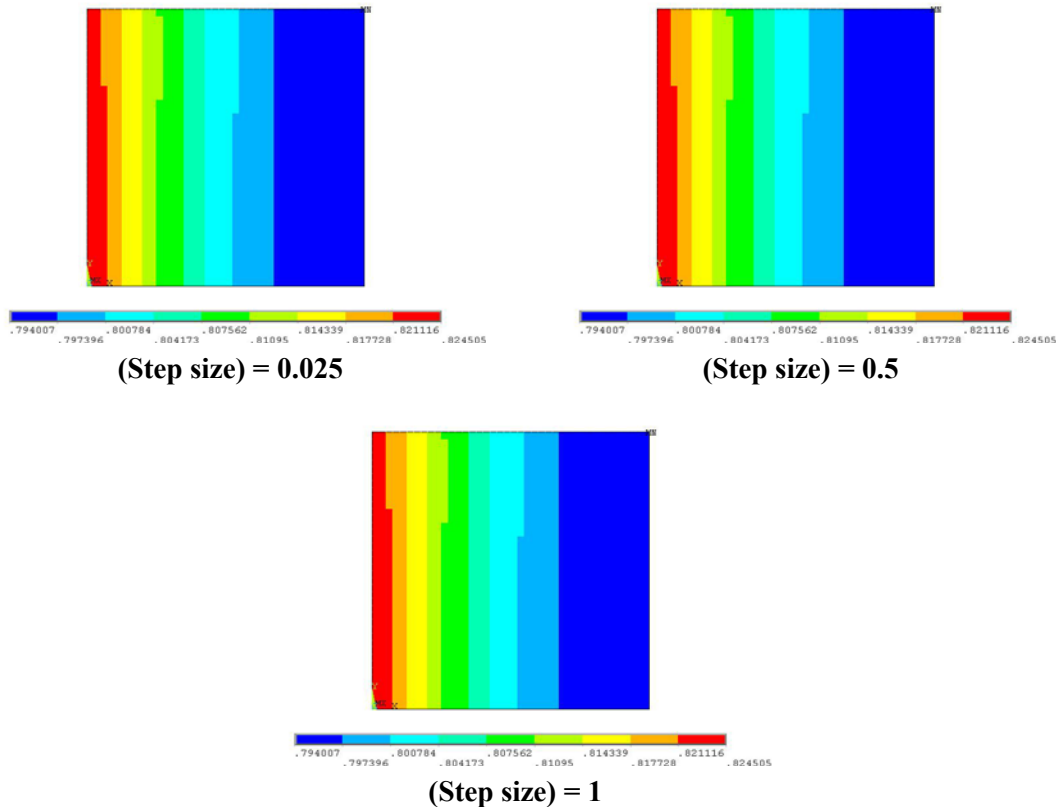
6.4 Επίλυση και αποτελέσματα οστικής ανακατασκευής ενεργειακού μοντέλου με μέτρο ελαστικότητας B

Όπως και στην προηγούμενη ενότητα έτσι και εδώ, αρχικά θα διερευνηθεί το μέγεθος του βήματος που θα χρησιμοποιηθεί και για τους δύο συνδυασμούς σχέσεων που αναφέρθηκαν στην Ενότητα 6.2. Για το συνδυασμό (B) δεν υπάρχουν βιβλιογραφικές αναφορές για το χρονικό βήμα.

Ύστερα από δοκιμές που διεξήχθησαν, παρατηρήθηκε ότι η πυκνότητα για το μέτρο ελαστικότητας B μεταβάλλεται με μικρότερο ρυθμό με αποτέλεσμα να καθυστερεί να φτάσει σε μια τελική σταθερή δομή. Αν θεωρηθεί ζητούμενο η τελική σταθερή δομή, χρειάζονται πολλές χρονικές επαναλήψεις και αυξάνεται πολύ το υπολογιστικό κόστος. Αυτό οφείλεται στην αύξηση του μέτρου ελαστικότητας που συνεπάγεται μικρότερη τιμή

πυκνότητας τροπικής ενέργειας - για την ίδια οστική πυκνότητα και οριακές συνθήκες. Αυτό οδηγεί σε μείωση της μηχανικής διέγερσης. Από τα Σχήματα (6.5) έως (6.8) προέκυψε ότι η μείωση στην τιμή της μηχανικής διέγερσης είναι τουλάχιστον κατά μια τάξη μεγέθους. Έτσι και ο ρυθμός μεταβολής πυκνότητας κάθε στοιχείου, που είναι ανάλογος αυτής της διέγερσης, μειώθηκε αντίστοιχα.

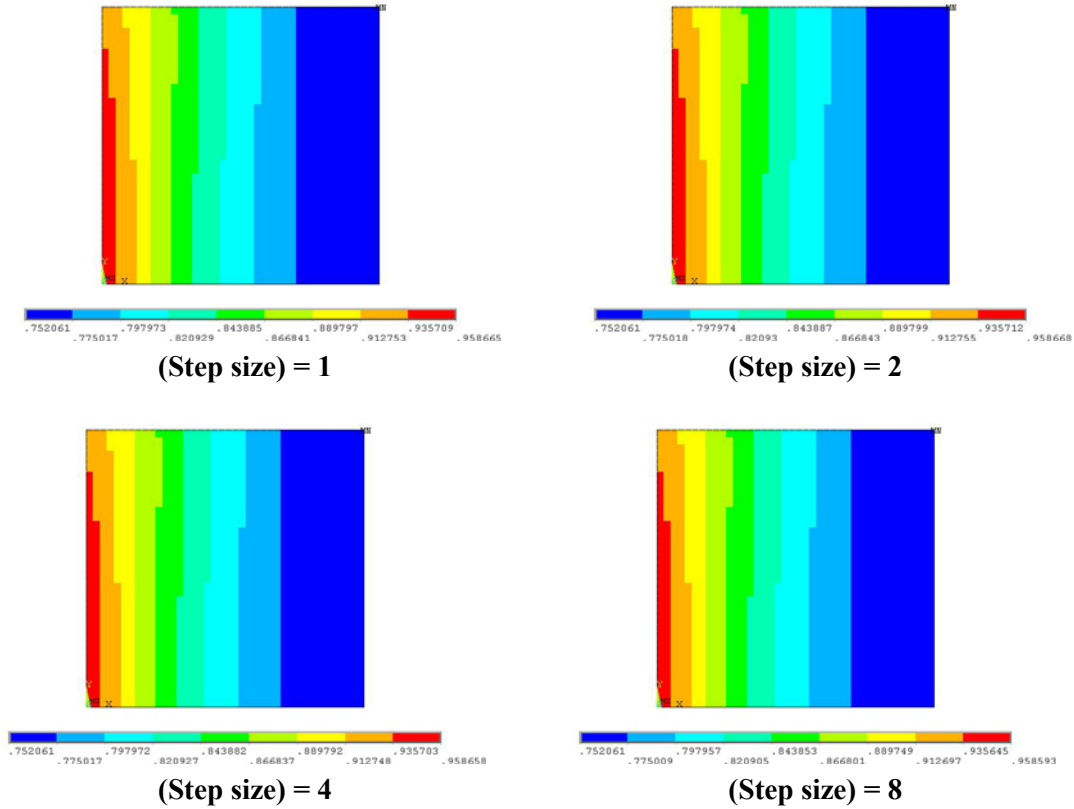
Για την εκλογή του κατάλληλου βήματος, δοκιμάστηκαν διαφορετικές τιμές χρονικού βήματος σε σύντομες επιλύσεις της διαφορικής εξίσωσης για 1 χρονική μονάδα. Στο Σχήμα 6.23 που ακολουθεί φαίνονται τα αποτελέσματα:



Σχήμα 6.23 Πυκνότητες στοιχείων τετράγωνης πλάκας σε 1 χρονική μονάδα για διαφορετικό μέγεθος βημάτων.

Σε σύγκριση με το αποτέλεσμα με βήμα $\Delta t=0.025$, για βήμα $\Delta t=1$ η μέγιστη διαφορά σε πυκνότητα στοιχείου είναι μόλις $5 \cdot 10^{-8} \frac{gr}{cm^3}$, ενώ οι κατανομές των πυκνοτήτων είναι ίδιες και για τα τρία βήματα που δοκιμάστηκαν.

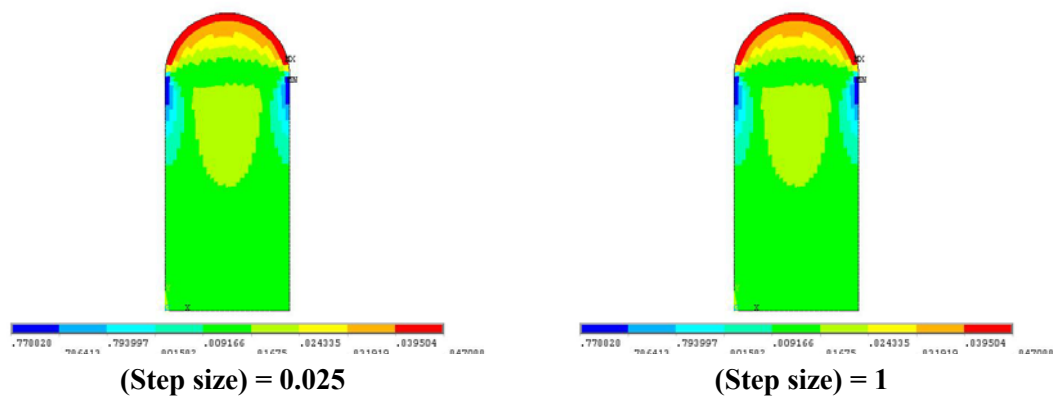
Μετά από αυτό το αποτέλεσμα, δοκιμάστηκαν σε μεγαλύτερο χρόνο, συνολικό χρόνο 8 μονάδες, επιλύσεις της διαφορικής εξίσωσης με 4 διαφορετικά χρονικά βήματα, ακόμα μεγαλύτερα από τα προηγούμενα. Στο Σχήμα 6.24 που ακολουθεί φαίνονται τα αποτελέσματα:

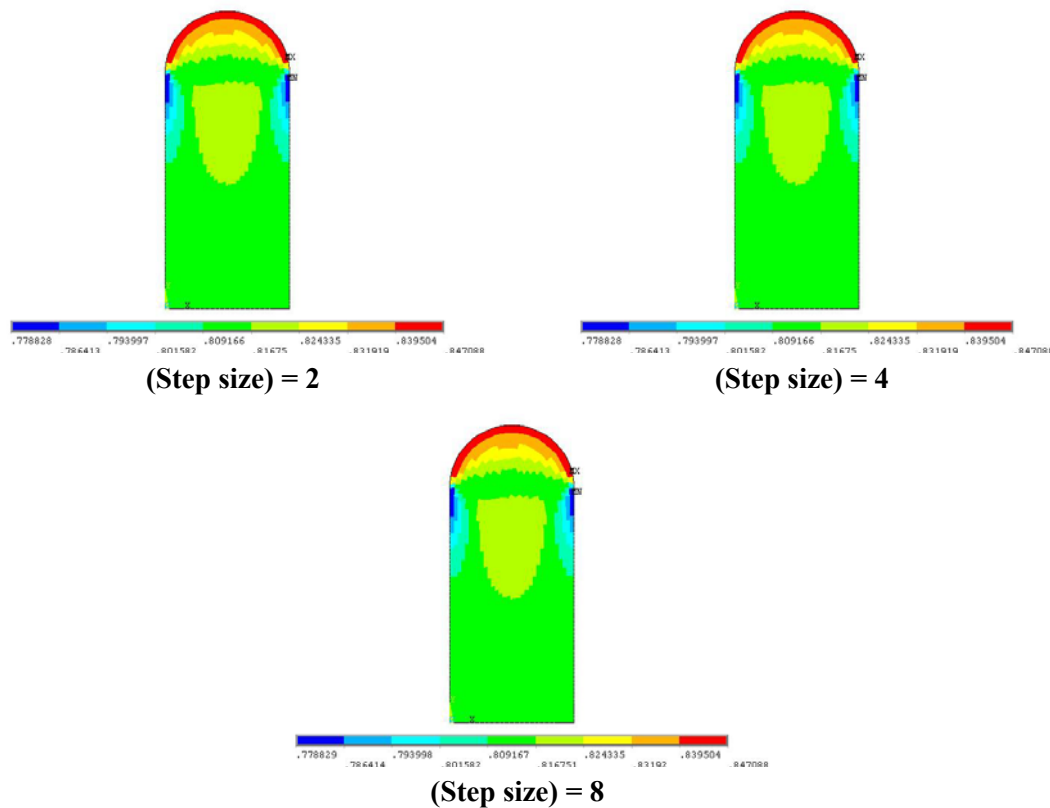


Σχήμα 6.24 Πυκνότητες στοιχείων τετράγωνης πλάκας σε 8 χρονικές μονάδες για διαφορετικό μέγεθος βημάτων.

Σε σύγκριση με το αποτέλεσμα για οκτώ βήματα μεγέθους $\Delta t=1$, για ένα βήμα μεγέθους $\Delta t=8$ η μέγιστη διαφορά σε πυκνότητα στοιχείου είναι $5 \cdot 10^{-4} \frac{gr}{cm^3}$.

Η μελέτη επαναλαμβάνεται και για την τυπική γεωμετρία του ισχίου για 8 μονάδες χρόνο με 5 διαφορετικά χρονικά βήματα.





Σχήμα 6.25 Πυκνότητες στοιχείων τυπικής γεωμετρίας ισχύου σε 8 χρονικές μονάδα για διαφορετικό μέγεθος βημάτων.

Σε σύγκριση με το αποτέλεσμα για 320 βήματα μεγέθους $\Delta t=0.025$, για 8 βήματα μεγέθους $\Delta t=1$ η μέγιστη διαφορά σε πυκνότητα στοιχείου είναι μόλις $5 \cdot 10^{-9} \frac{gr}{cm^3}$, ενώ για ένα βήμα μεγέθους $\Delta t=8$ της τάξης του $2 \cdot 10^{-6} \frac{gr}{cm^3}$.

Από τα παραπάνω αποτελέσματα εξάγεται το συμπέρασμα ότι επιτυγχάνεται ικανοποιητική ακρίβεια στην αριθμητική ολοκλήρωση για βήμα $\Delta t=1$ και στις δύο εφαρμογές. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται για συνολικό χρόνο 1800 και στις δύο περιπτώσεις με σταθερό βήμα, που συνεπάγεται 1800 επαναλήψεις. Συνολικά στο ANSYS θα εκτελεστούν $4 \times 3 + 2 \times 1797 = 3606$ επιλύσεις

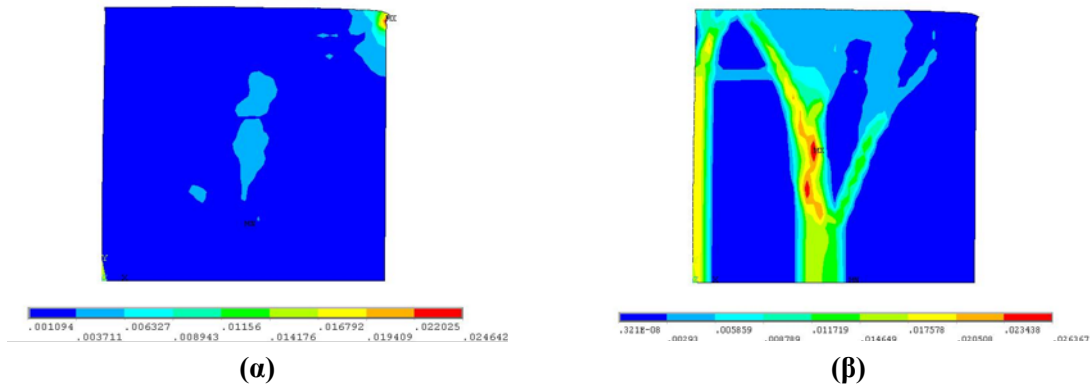
6.4.1 Τετράγωνη Πλάκα

Αρχικό μέτρο ελαστικότητας για όλα τα στοιχεία είναι $E_0 = 1940.5MPa$, ενώ το μέγιστο μέτρο ελαστικότητας που μπορεί να προκύψει είναι $E_{max} = 19965.8MPa$

Τα διαγράμματα παραμορφώσεων κατά Von Mises και πυκνότητας τροπικής ενέργειας για την αρχική κατάσταση ($\rho_0 = 0.8 \text{ gr/cm}^3$, $T = 0$) κάτω από το προκαθορισμένο μηχανικό περιβάλλον έχουν παρουσιαστεί παραπάνω. Συμφωνά με το όριο αναφοράς στη

Σχέση (6.18), για πυκνότητα $\rho_0 = 0.8 \text{ gr/cm}^3$ δημιουργείται θετικό ισοζύγιο ανακατασκευής στα στοιχεία με πυκνότητα τροπικής ενέργειας 0.0075 J/cm^3 και άνω.

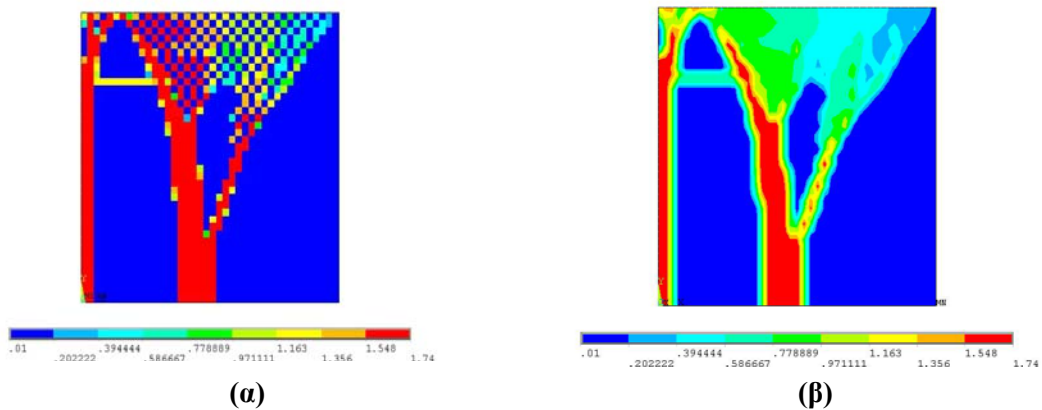
Μετά από 1800 χρονικές μονάδες, τα τελικά διαγράμματα των παραμορφώσεων και της πυκνότητας τροπικής ενέργειας φαίνονται παρακάτω.



Σχήμα 6.26 Τελικά διαγράμματα (α) παραμορφώσεων και (β) πυκνότητας τροπικής ενέργειας

Μέγιστη τιμή ισοδύναμης παραμόρφωσης Von Mises είναι 0.58 Strains ενώ η μέγιστη τιμή πυκνότητας τροπικής ενέργειας είναι 0.8 J/cm^3 .

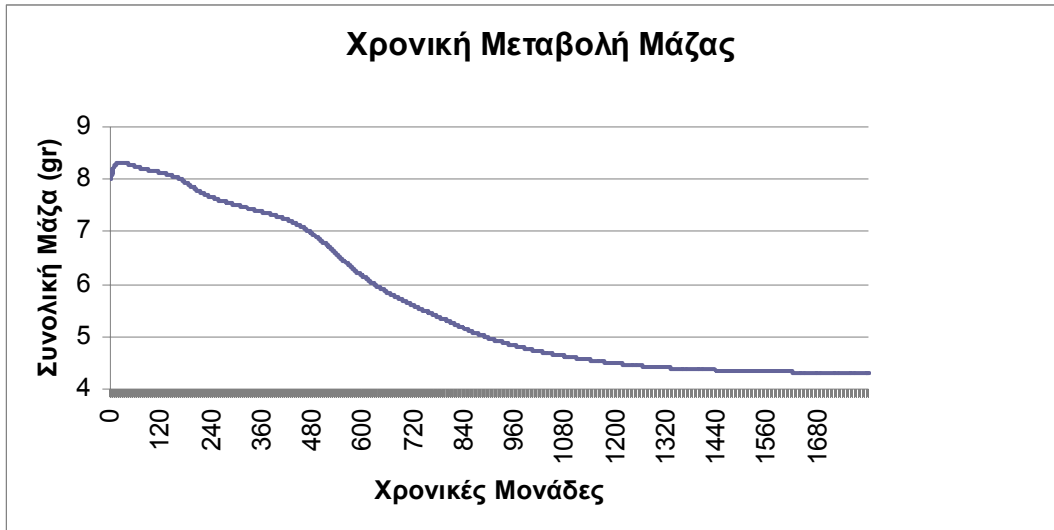
Η τελική κατανομή των πυκνοτήτων φαίνεται στο Σχήμα 6.27 που ακολουθεί:



Σχήμα 6.27 Τελική κατανομή πυκνότητας (α) ανά στοιχείο, (β) με χρήση μέση τιμής τοπικά

Στην τελική δομή παρατηρούνται και πάλι οι δύο μορφές ασυνέχειας. Δημιουργήθηκαν δύο κολώνες προς την πλευρά της υψηλής φόρτισης όπου η καταπόνηση ήταν υψηλότερη, σε αντίθεση με το αποτέλεσμα της προηγούμενης ενότητας όπου παρατηρήθηκε ο σχηματισμός τριών κολώνων. Σημειώνεται ότι στο κεφάλαιο 5 δημιουργήθηκαν κατά την προσομοίωση πάλι δύο κολώνες, ενώ είχε χρησιμοποιηθεί σχεδόν ίδια σχέση για τη συσχέτιση μέτρου ελαστικότητας και οστικής πυκνότητας.

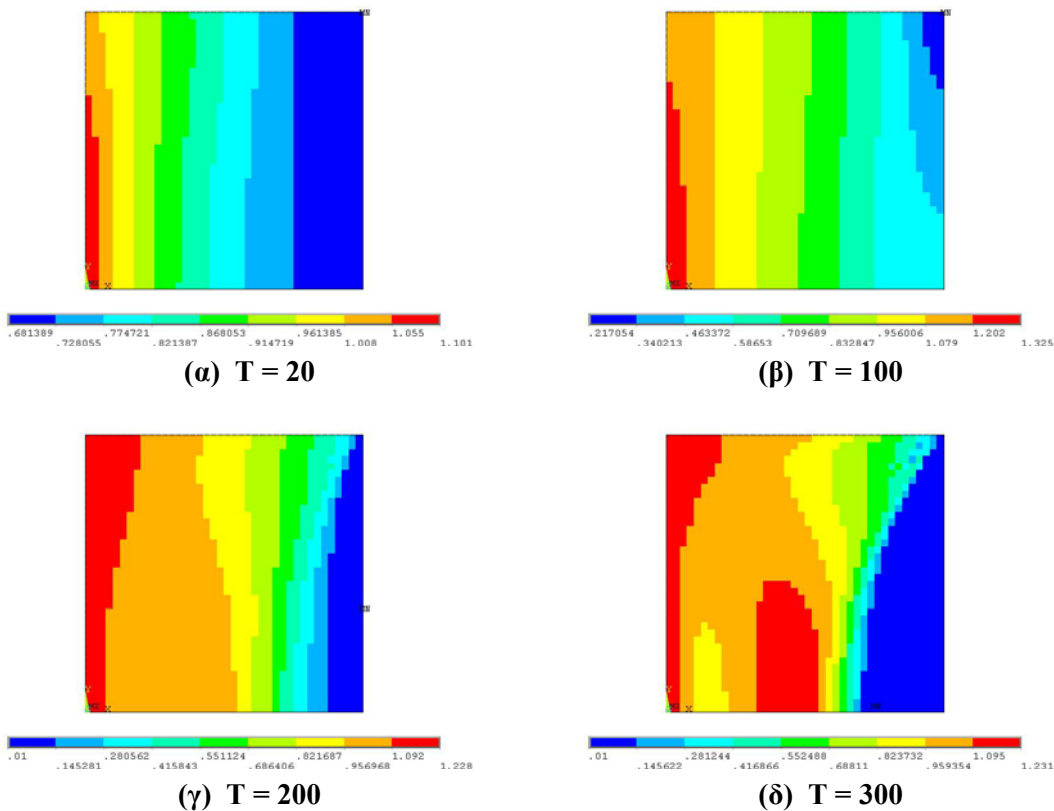
Ακολουθεί διάγραμμα της μάζας στην πορεία του χρόνου και του λόγου μάζας προς την αρχική μάζα (Σχήμα 6.28).

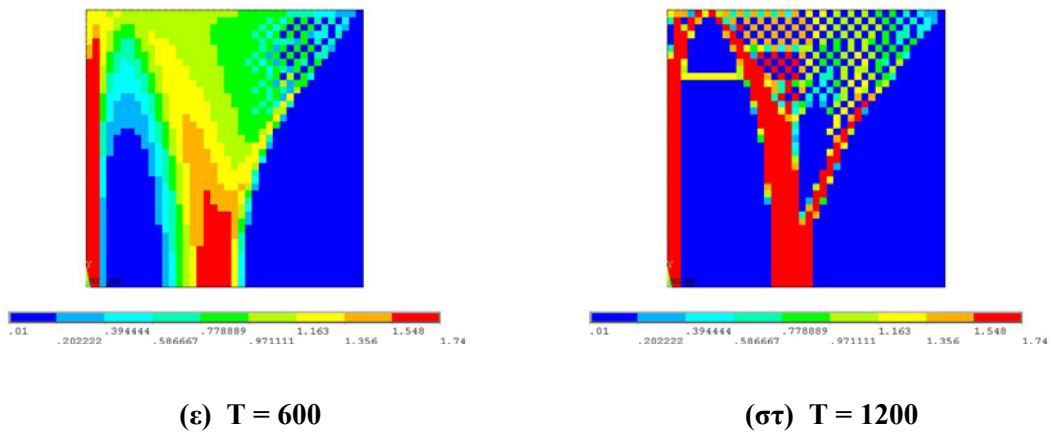


Σχήμα 6.28 Χρονική μεταβολή μάζας της τετράγωνης πλάκας

Η συνολική τελική μάζα είναι 4.295gr, δηλαδή μειώθηκε κατά 3.705gr, ή 46.3%. Η τιμή της σταθεροποιείται ύστερα από 1600 μονάδες χρόνου. Μέχρι τις 166 χρονικές μονάδες η τιμή της μάζας είναι μεγαλύτερη της αρχικής ενώ μειώνεται με αργούς ρυθμούς μέχρι την σταθεροποίηση της.

Στο Σχήμα 6.29 φαίνεται η κατανομή της πυκνότητας στην τετράγωνη πλάκα για διάφορες χρονικές στιγμές της διαδικασίας.



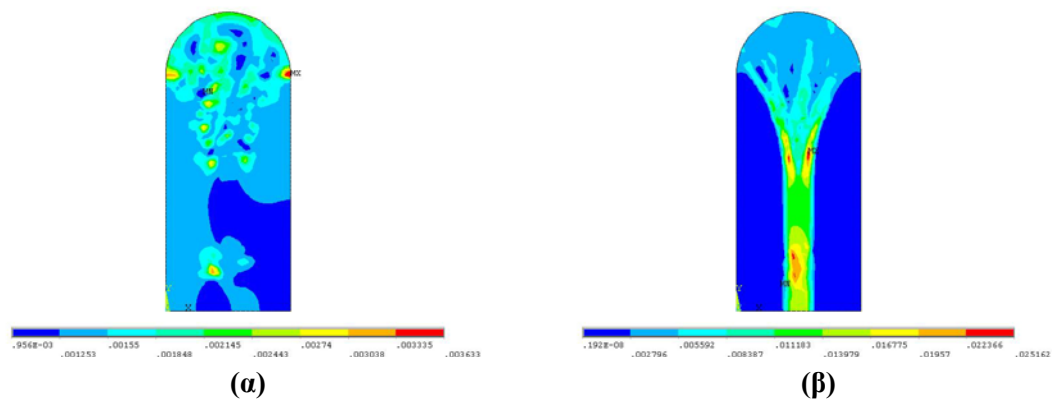


Σχήμα 6.29 Κατανομή πυκνότητας ανά στοιχείου σε διαφορετικές χρονικές στιγμές

Σε 200 μονάδες χρόνου, έχει αρχίσει να απορροφάται ένα ποσοστό των Π.Σ. στην περιοχή μικρότερης φόρτισης. Αντίστοιχη εικόνα στην προηγούμενη ενότητα (**Σχήμα 6.14**) εμφανίστηκε σε 10 χρονικές μονάδες. Μέχρι χρόνο 300 μονάδες μέγιστη πυκνότητα Π.Σ. είναι $1.231 \frac{gr}{cm^3}$. Τέλος σε 600 χρονικές μονάδες έχουν σχηματιστεί οι δύο κολώνες ενώ σε 1200 χρονικές μονάδες η εικόνα της κατανομής είναι πολύ κοντά στην τελική κατάσταση.

6.4.2 Τοπική γεωμετρία ισχίου

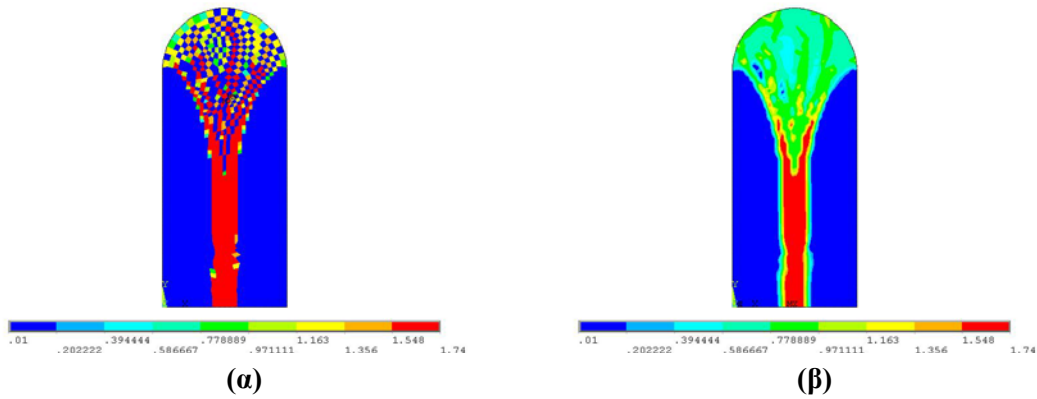
Μετά από 1800 χρονικές μονάδες, οι τελικές κατανομές των παραμορφώσεων και της πυκνότητας τροπικής ενέργειας φαίνονται στο **Σχήμα 6.30**.



Σχήμα 6.30 Τελικά διαγράμματα (α) παραμορφώσεων και (β) πυκνότητας τροπικής ενέργειας

Μέγιστη τιμή ισοδύναμης παραμόρφωσης Von Mises είναι 0.168Strains ενώ η μέγιστη τιμή πυκνότητας τροπικής ενέργειας είναι $1.13 \frac{J}{cm^3}$.

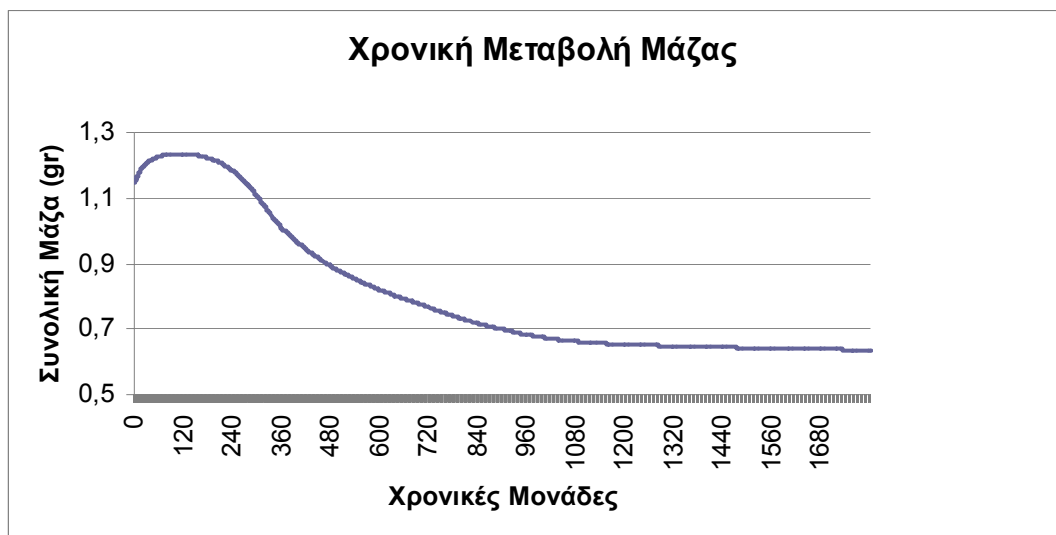
Η τελική κατανομή των πυκνοτήτων φαίνεται στο **Σχήμα 6.31** που ακολουθεί:



Σχήμα 6.31 Τελική κατανομή πυκνότητας (α) ανά στοιχείο, (β) με χρήση μέση τιμής τοπικά

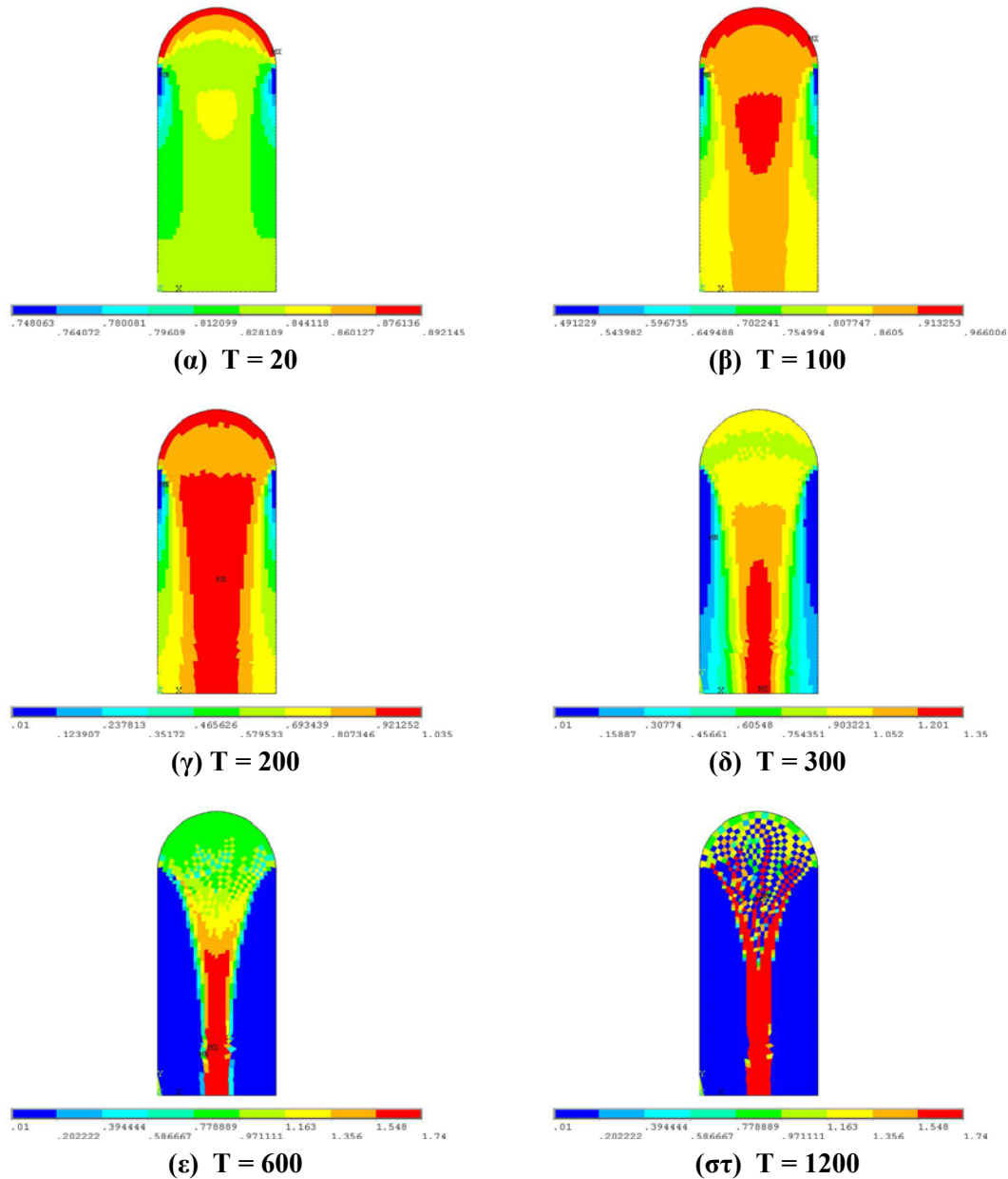
Παρατηρούνται και σε αυτή την περίπτωση και οι δύο τύποι ασυνεχειών, ενώ δημιουργήθηκε η κεντρική κολώνα στο μέσο της δομής. Η εικόνα είναι όμοια με την αντίστοιχες του προηγούμενου κεφαλαίου αλλά και της προηγούμενης ενότητας.

Ακολουθεί διάγραμμα της χρονικής μεταβολής της μάζας στο Σχήμα 6.32.



Σχήμα 6.32 Χρονική μεταβολή μάζας της τυπικής μορφής ισχίου

Η συνολική τελική μάζα είναι 0.636gr, δηλαδή μειώθηκε κατά 0.510gr ή 44.7%. Η μάζα αρχικά αυξήθηκε, στη συνέχεια μειώθηκε με αργό ρυθμό μέχρι τελικά να σταθεροποιηθεί σε 1700 μονάδες χρόνου. Στο Σχήμα 6.33 φαίνεται η κατανομή της πυκνότητας στην τυπική μορφή ισχίου σε διάφορα βήματα της διαδικασίας



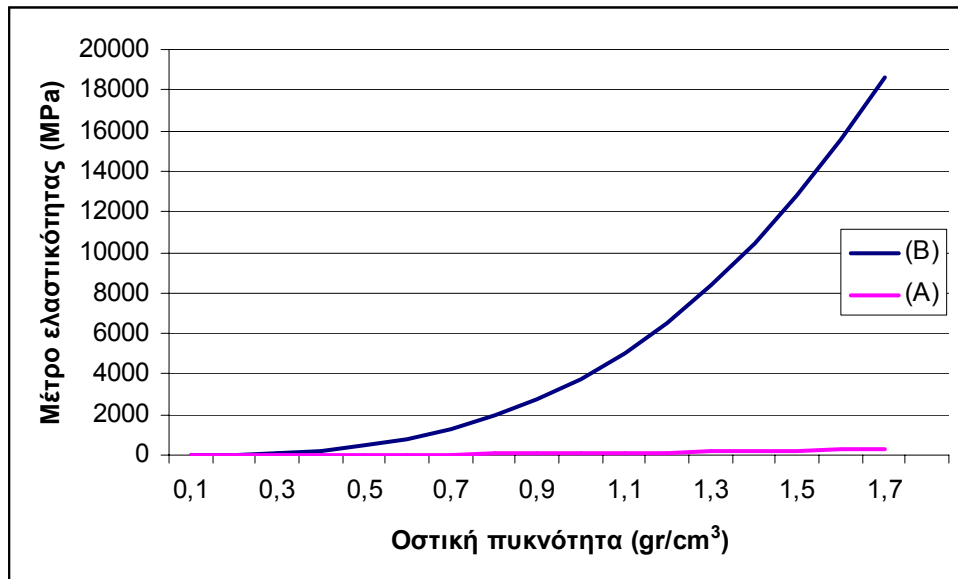
Σχήμα 6.33 Κατανομή πυκνότητας ανά στοιχείο σε διαφορετικές χρονικές στιγμές

Σε χρόνο 200 χρονικών μονάδων ξεκινά η απορρόφηση κάποιων Π.Σ. και σε 600 χρονικές μονάδες σχηματίζεται η κεντρική κολώνα. Η κατανομή των πυκνοτήτων μοιάζει αρκετά με την τελική κατάσταση που προκύπτει σε χρόνο 1200.

6.5 Σύγκριση αποτελεσμάτων με βάση το μέτρο ελαστικότητας

Η βασική διαφορά ανάμεσα στις δύο σχέσεις για τα μέτρα ελαστικότητα είναι ότι για τη σχέση $E = 3790 \cdot \rho^3 MPa$ η μεταβολή της οστικής πυκνότητας συντελείτε με πολύ αργό ρυθμό με αποτέλεσμα να απαιτείται τελικά 20πλάσιος χρόνος για να σταθεροποιηθεί η τιμή της μάζας και η μορφή της τελικής κατανομής σε σχέση με τη χρήση της εξίσωσης $E = 100 \cdot \rho^2 MPa$.

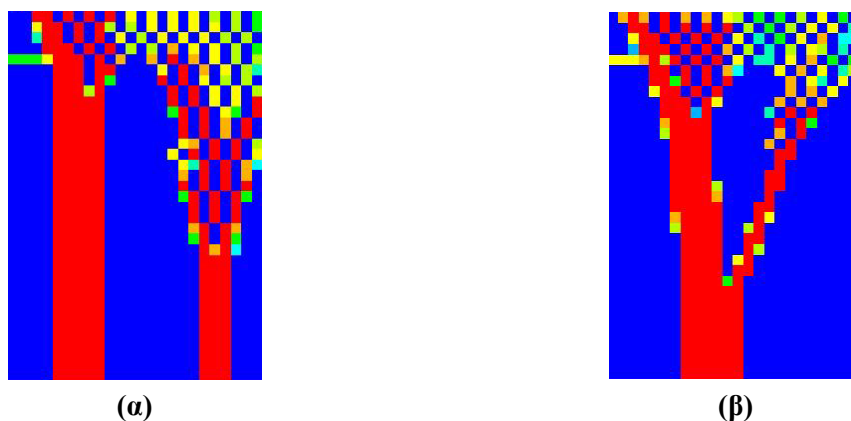
Στο διάγραμμα που ακολουθεί (Σχήμα 6.34) φαίνεται η διαφορά της δυσκαμψίας δύο στοιχείων ίδιας πυκνότητας για τη χρήση κάθε μίας σχέσης.



Σχήμα 6.34 Μέτρο Ελαστικότητας συναρτήσει οστικής πυκνότητας για (A)

$$E = 100 \cdot \rho^2 \text{MPa} \quad (\text{B}) \quad E = 3790 \cdot \rho^3 \text{MPa}$$

Στην τετραγωνική πλάκα με τη χρήση του μέτρου ελαστικότητας A εμφανίστηκαν τρεις κολώνες ενώ με το B δύο. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.35 αντί για την 2^η και 3^η κολώνα, στην περίπτωση χρήση του μέτρου ελαστικότητας B εμφανίζεται μια πιο παχιά κολώνα της οποίας η τοπολογία είναι το μέσο της περιοχής που εμφανίστηκαν οι δύο κολώνες στην περίπτωση (A).



Σχήμα 6.35 Εστίαση στην ίδια περιοχή της τετράγωνης πλάκας για (α) $E = 100 \cdot \rho^2 \text{MPa}$ και (β)

$$E = 3790 \cdot \rho^3 \text{MPa}$$

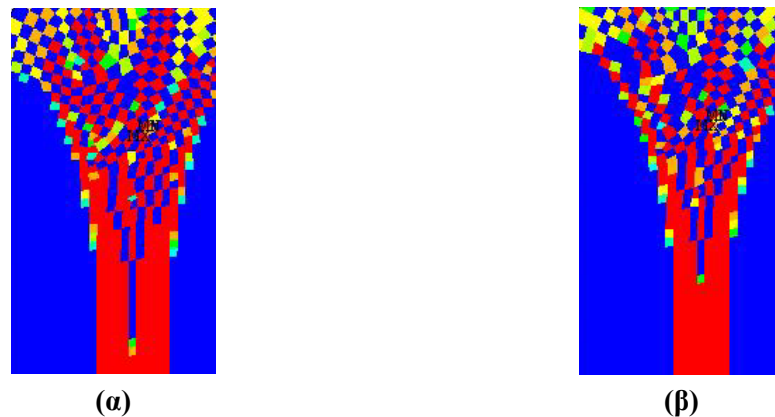
Στο Σχήμα 6.35(β) φαίνεται ότι η ελαφρώς πιο παχιά κολώνα διακλαδίζεται και μετά ενώνεται με την ασυνεχή μορφή τύπου «σκακιέρας» που βρίσκεται κοντά στη φόρτιση.

Στο Σχήμα 6.36 φαίνεται ότι οι δύο πρώτες κολώνες και στις δύο περιπτώσεις ενώνονται με τον ίδιο τρόπο.



Σχήμα 6.36 Εστίαση στην ένωση των «κολώνων», (α) $E = 100 \cdot \rho^2 MPa$ (β)
 $E = 3790 \cdot \rho^3 MPa$

Αντίστοιχα στην περίπτωση της τυπικής γεωμετρίας ισχίου η τελική μορφή και στις δύο περιπτώσεις είναι ίδια όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.37 που ακολουθεί.



Σχήμα 6.37 Εστίαση στην ίδια περιοχή της τυπικής μορφής μακρέως οστού, (α)
 $E = 100 \cdot \rho^2 MPa$ (β) $E = 3790 \cdot \rho^3 MPa$

Όσον αφορά τη μάζα στην περίπτωση της τετραγωνικής πλάκας, οι τελικές τιμές της ήταν 5,130gr στην πρώτη περίπτωση και 4,295gr στη δεύτερη. Με τη χρήση του μέτρου ελαστικότητας A η συνολική μάζα μειώθηκε κατά 35.8% ενώ με τη χρήση του μέτρου ελαστικότητας B και η συνολική μάζα μειώθηκε κατά 46.3%.

Αντίστοιχα οι τελικές τιμές της τυπικής γεωμετρίας ισχίου είναι 0,724gr για τη χρήση του μέτρου ελαστικότητας A και 0,636gr για τη χρήση του μέτρου ελαστικότητας B.

**Κεφάλαιο 7ο Μοντελο Οστικής
Ανακατασκευής Με Πυκνοτητα Τροπικής
Ενεργειας&Προβλεψη Υπερφορτισης**

7.1 Εισαγωγή

Η απορρόφηση οστού είναι ένα σημαντικό πρόβλημα στην προσθετική εμφύτευση καθώς προκαλεί χαλάρωση στη διασύνδεση οστού – εμφυτεύματος, με αποτέλεσμα τελικά, να εξασθενεί η ευστάθεια του συστήματος εμφύτευσης. Σκοπός σε αυτό το κεφάλαιο είναι η παρουσίαση και εφαρμογή ενός μοντέλου οστικής ανακατασκευής που μπορεί να προβλέψει απορρόφηση οστού τόσο σε συνθήκες χαμηλής όσο και υψηλής φόρτισης.

Βασισμένοι στο παραδοσιακό μοντέλο των Huiskes [30] και Weinans et al. [28], οι Li et al. [16] ανέπτυξαν μία νέα μαθηματική εξίσωση που συνδέει το ρυθμό μεταβολής της οστικής πυκνότητας με τη μηχανική διέγερση. Η νέα σχέση έχει ένα επιπρόσθετο όρο δευτέρου βαθμού που μπορεί να οδηγήσει σε μείωση της οστικής πυκνότητας σε υψηλά επίπεδα φόρτισης. Συνεπώς, το νέο μοντέλο μπορεί να περιγράψει την απορρόφηση οστού λόγω υπερφόρτισης, μία δυνατότητα που απουσιάζει από όλα τα άλλα μοντέλα.

7.2 Περιγραφή μοντέλου οστικής ανάπλασης που προβλέπει απορρόφηση οστού σε συνθήκες υπερφόρτισης.

Στο Κεφάλαιο 6 μελετήθηκε ένα μοντέλο οστικής ανακατασκευής με μέγεθος μηχανικής διέγερσης την πυκνότητα τροπικής ενέργειας που προτάθηκε από τον Weinans και βασίστηκε στη μαθηματική πρόβλεψη του Huiskes.

Η νέα μαθηματική εξίσωση που μπορεί να προβλέψει απορρόφηση οστού σε συνθήκες υπερφόρτισης, συνδέει επίσης το ρυθμό μεταβολής οστικής πυκνότητας με τη πυκνότητα τροπικής ενέργειας και περιγράφεται με την ακόλουθη σχέση :

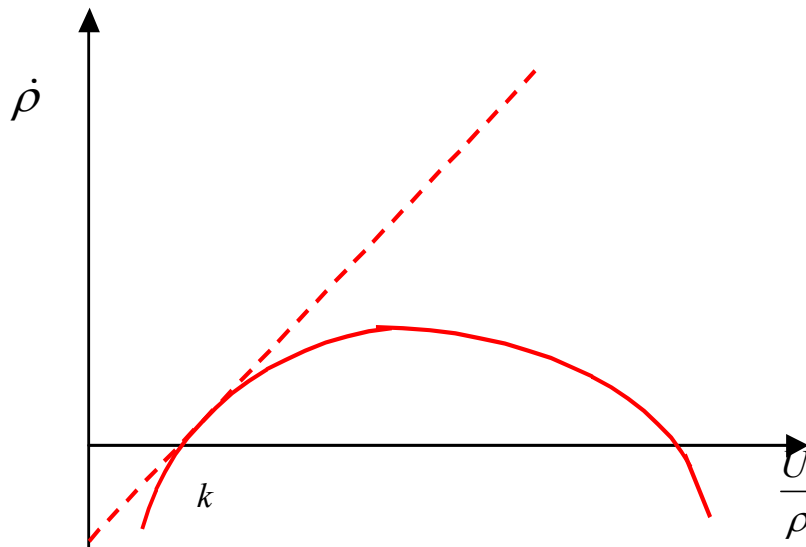
$$\frac{d\rho}{dt} = B\left(\frac{U}{\rho} - k\right) - D\left(\frac{U}{\rho} - k\right)^2 \quad (7.1)$$

όπου D μία σταθερά.

Η Σχέση (7.1) σε σύγκριση με τη Σχέση (6.18) έχει ένα επιπρόσθετο όρο δευτέρου βαθμού που μπορεί να οδηγήσει στη μείωση της οστικής πυκνότητας σε υψηλά επίπεδα φόρτισης. Όταν η διέγερση είναι μικρή, ο πρώτος, γραμμικός ως προς την πυκνότητα τροπικής ενέργειας, όρος κυριαρχεί και το μοντέλο συμπεριφέρεται παρόμοια με αυτό που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 6. Ωστόσο, όταν η διέγερση είναι μεγάλη, ο δευτεροβάθμιος όρος επικρατεί, προκαλώντας αρνητικό ρυθμό μεταβολής οστικής πυκνότητας, δηλαδή απορρόφηση οστού από υπερφόρτιση.

Η διαφορά ανάμεσα στις δύο σχέσεις είναι εμφανής στο Σχήμα 7.1. Η διακεκομμένη γραμμή δείχνει το ρυθμό μεταβολής της πυκνότητας συναρτήσει της μηχανικής διέγερσης U/ρ σύμφωνα με τη Σχέση (6.18). Φαίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής της οστικής πυκνότητας είναι θετικός για οποιαδήποτε διέγερση μεγαλύτερη της αναφοράς k , γεγονός που δεν συμφωνεί με την απορρόφηση οστού που επιφέρει η υπερφόρτιση. Η συμπεριφορά του ρυθμού μεταβολής της οστικής πυκνότητας σε σχέση με την πυκνότητα τροπικής ενέργειας αναπαρίσταται με μία δευτεροβάθμια καμπύλη όπως φαίνεται από τη

συνεχή γραμμή στο Σχήμα 7.1 που αντιπροσωπεύει τη Σχέση (7.1). Ο ρυθμός αύξησης της πυκνότητας, από ένα όριο διέγερσης και μετά, αρχίζει να ελαττώνεται, μέχρι τελικά να γίνει αρνητικός.



Σχήμα 7.1 Ρυθμός Οστικής Πυκνότητας συναρτήσει της μηχανικής διέγερσης για τις δύο εξισώσεις ανακατασκευής.

7.3 Ανάλυση μοντέλου οστικής ανάπλασης που προβλέπει απορρόφηση οστού σε συνθήκες υπερφόρτισης.

Η σταθερές k , B και D μπορούν να ρυθμίσουν τις κρίσιμες φορτίσεις, που χωρίζουν όλο το πεδίο φορτίσεων σε τρεις περιοχές :

Απορρόφηση οστού λόγω χαμηλής φόρτισης

Δημιουργία οστού σε μέσες φορτίσεις

Απορρόφηση οστού λόγω υπερφόρτισης

Αλλάζοντας τις τιμές αυτών των παραμέτρων, μπορεί να μεταβληθεί το σχήμα και η θέση της δευτεροβάθμιας καμπύλης ώστε να ταιριάζει με τη μηχανική συμπεριφορά των διαφορετικών ειδών οστού.

Οι τιμές που δίνονται στις σταθερές αυτές, με βάση προηγούμενα μοντέλα αλλά και μελέτες από τους Li et al., είναι :

$$k = 0.006 \frac{J}{gr}$$

$$B = 1.0 \frac{\left(\frac{gr}{cm^3} \right)^2}{Mpa \cdot (time \ unit)}$$

$$D = 45 \frac{\left(\frac{gr}{cm^3}\right)^3}{MPa^2 \cdot (time\ unit)}$$

Αντικαθιστώντας τις αριθμητικές τιμές των παραπάνω σταθερών προκύπτει η Σχέση 7.2:

$$\frac{d\rho}{dt} = \left(\frac{U}{\rho} - 0.006\right) - 45 \left(\frac{U}{\rho} - 0.006\right)^2 \quad (7.2)$$

Το μέτρο ελαστικότητας του υλικού υπολογίζεται συναρτήσει της πυκνότητας μέσω της σχέσης :

$$E = C \cdot \rho^r \quad (7.3)$$

όπου $C = 3.79 \frac{GPa}{\left(\frac{gr}{cm^3}\right)^3}$ και $r = 3$

Παραγοντοποιώντας τη Σχέση (7.3) ως προς την πυκνότητα τροπικής ενέργειας προκύπτει η Σχέση (7.4) :

$$\frac{d\rho}{dt} = -45 \left(\frac{U}{\rho}\right)^2 + 1.54 \frac{U}{\rho} - 0.00762 \quad (7.4)$$

Το πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού ως προς $\frac{U}{\rho}$ που βρίσκεται στο δεύτερο μέλος της Σχέσης (7.4)

παίρνει θετικές τιμές ανάμεσα στις ρίζες του οπότε προκύπτει το συμπέρασμα ότι για $0.006 < \frac{U}{\rho} < 0.02822$ ισχύει ότι $\frac{d\rho}{dt} > 0$ δηλαδή υπάρχει δημιουργία νέου οστού. Για τις υπόλοιπες τιμές της πυκνότητας τροπικής ενέργειας το οστό απορροφάται.

Η σημαντικότερη διαφορά σε σύγκριση με άλλες σχέσεις που μελετήθηκαν σε προηγούμενα κεφάλαια έγκειται στο γεγονός ότι υπάρχει άνω όριο στο ρυθμό αύξησης της οστικής πυκνότητας :

$$\text{maximum} \left(\frac{d\rho}{dt} \right) = 0.005556 \frac{gr}{cm^3 \cdot (time\ unit)} \quad \text{για} \quad \frac{U}{\rho} = 0.0171 \frac{J}{gr}$$

Θέτοντας στη Σχέση (7.3), για τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας, σύμφωνα με άλλες βιβλιογραφικές πηγές τους συντελεστές :

$$C = 100 \frac{MPa}{\left(\frac{gr}{cm^3}\right)^2} \quad \text{και} \quad r = 2$$

πρέπει να τροποποιηθούν και οι σταθερές της Σχέσης (7.1), διότι δεδομένη φόρτιση μεταβάλλεται η πυκνότητα τροπικής ενέργειας που σχετίζεται με το ποσό μηχανικής διέγερσης. Σε συμφωνία και με το Κεφαλαίο 6, επιλέγονται οι συντελεστές :

$$k = 0.25 \frac{J}{gr}$$

$$B = 1.0 \frac{\left(\frac{gr}{cm^3}\right)^2}{MPa \cdot (time\ unit)} \quad D = 1 \frac{\left(\frac{gr}{cm^3}\right)^3}{MPa^2 \cdot (time\ unit)}$$

Αντικαθιστώντας τις αριθμητικές τιμές των παραπάνω σταθερών προκύπτει η Σχέση (7.5):

$$\frac{d\rho}{dt} = \left(\frac{U}{\rho} - 0.25\right) - \left(\frac{U}{\rho} - 0.25\right)^2 \quad (7.5)$$

Παραγοντοποιώντας τη Σχέση (7.5) ως προς την πυκνότητα τροπικής ενέργειας προκύπτει η Σχέση (7.6):

$$\frac{d\rho}{dt} = -\left(\frac{U}{\rho}\right)^2 + 1.5\frac{U}{\rho} - 0.3125 \quad (7.6)$$

Το πολώνυμο 2^{ου} βαθμού ως προς $\frac{U}{\rho}$ που βρίσκεται στο δεύτερο μέλος της Σχέσης (7.6)

παίρνει θετικές τιμές ανάμεσα στις ρίζες του οπότε προκύπτει το συμπέρασμα ότι για $0.25 < \frac{U}{\rho} < 1.25$ ισχύει ότι $\frac{d\rho}{dt} > 0$ δηλαδή υπάρχει δημιουργία νέου οστού. Για τις

υπόλοιπες τιμές της πυκνότητας τροπικής ενέργειας το οστό απορροφάται. Για το άνω όριο στο ρυθμό αύξησης της οστικής πυκνότητας της Σχέσης (7.6) ισχύει:

$$\text{maximum}\left(\frac{d\rho}{dt}\right) = 0.25 \frac{gr}{cm^3 \cdot (time\ unit)} \quad \text{για} \quad \frac{U}{\rho} = 0.75 \frac{J}{gr}$$

Στις ενότητες που ακολουθούν θα γίνουν δοκιμές στα δύο παραδείγματα ελέγχου για τους δύο ακόλουθους συνδυασμούς εξισώσεων:

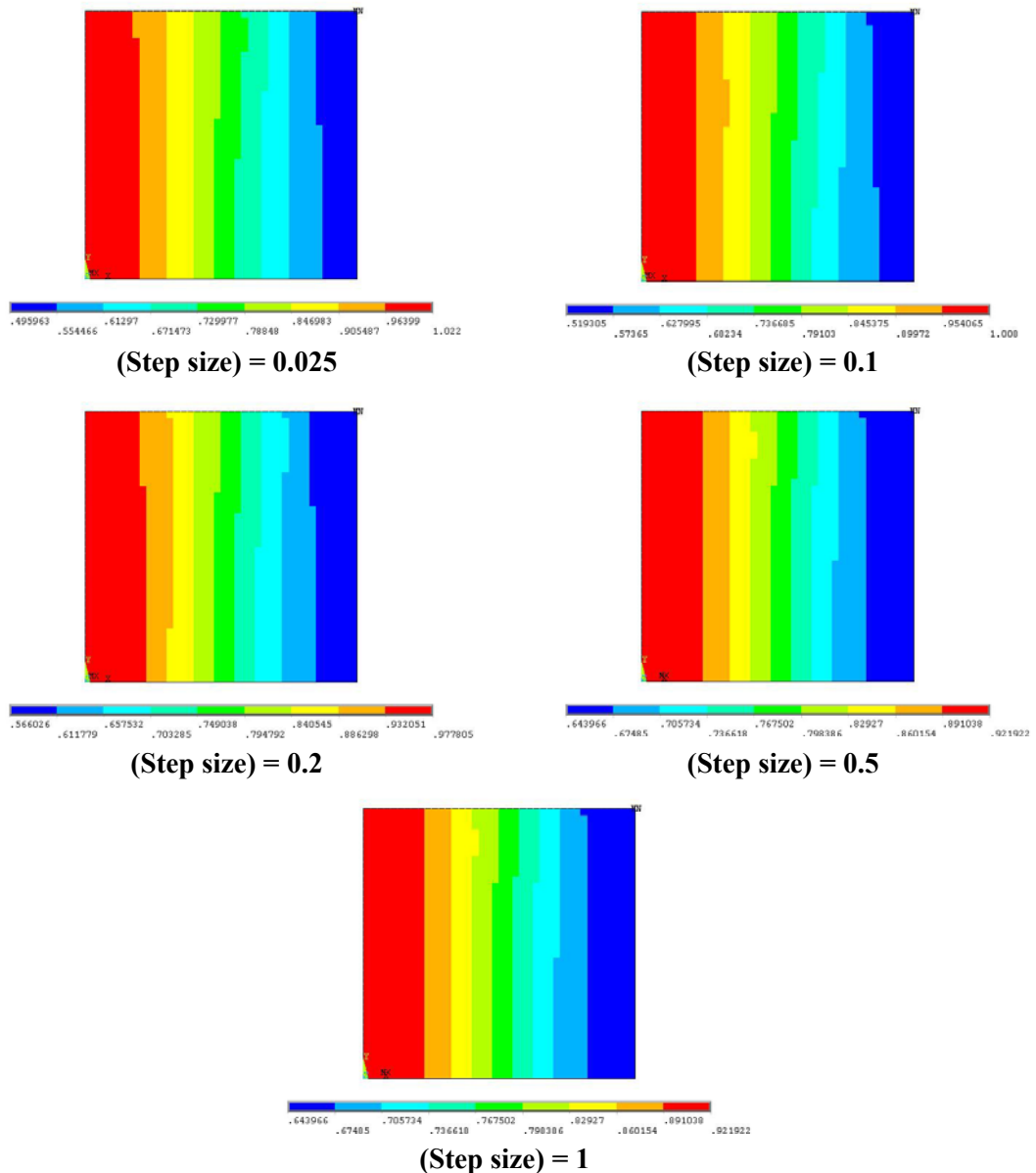
Πίνακας 7.1	
(A)	(B)
$\frac{d\rho}{dt} = \left(\frac{U}{\rho} - 0.25\right) - \left(\frac{U}{\rho} - 0.25\right)^2$ $E = 100 \cdot \rho^2 MPa$	$\frac{d\rho}{dt} = \left(\frac{U}{\rho} - 0.006\right) - 45\left(\frac{U}{\rho} - 0.006\right)^2$ $E = 3790 \cdot \rho^3 MPa$

Στο Πίνακα 7.1 αναπαρίστανται οι δύο σχέσεις μέτρου ελαστικότητας συναρτήσει της πυκνότητας

7.4 Επίλυση και αποτελέσματα οστικής ανακατασκευής ενεργειακού μοντέλου για πρόβλεψη υπερφόρτισης με μέτρο ελαστικότητας A

Η διαφορική εξίσωση 1^{ης} τάξης της οστικής ανακατασκευής, επιλύεται με τη μέθοδο που παρουσιάστηκε παραπάνω και εφαρμόστηκε και για τις προηγούμενες σχέσεις. Σε βιβλιογραφικές πηγές δεν υπάρχουν αναφορές για το μέγεθος βήματος επίλυσης στο συνδυασμό σχέσεων (A).

Για την εκλογή του κατάλληλου βήματος, θα δοκιμασθούν σε μία χρονική μονάδα, επιλύσεις της διαφορικής εξίσωσης με 5 διαφορετικές τιμές χρονικού βήματος. Στο Σχήμα 7.1 που ακολουθεί φαίνονται τα αποτελέσματα των δοκιμών:

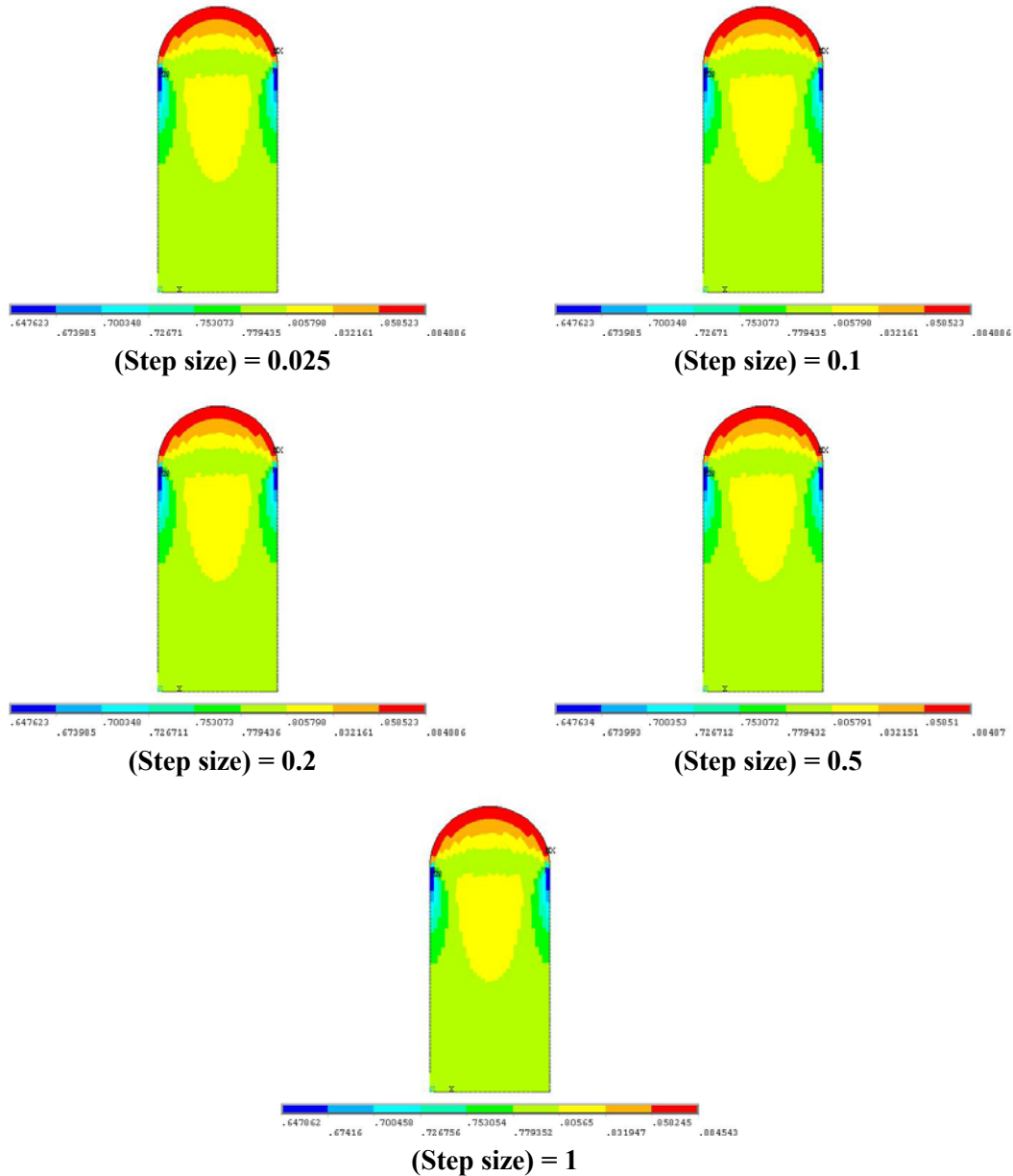


Σχήμα 7.2 Πυκνότητες στοιχείων τετράγωνης πλάκας σε 1 χρονική μονάδα για διαφορετικό μέγεθος βημάτων.

Κεφάλαιο 7^ο Μοντελο Οστικής Ανακατασκευής Με Πυκνότητα Τροπικής Ενεργειας & Υπερφορτίσης

Οι κατανομές των πυκνοτήτων είναι ίδιες στην περίπτωση του βήματος $\Delta t=0.5$ και $\Delta t=1$. Στην περίπτωση του βήματος $\Delta t=1$ και $\Delta t=0,025$ η μέγιστη διαφορά σε πυκνότητα Π.Σ. είναι $0.156 \frac{gr}{cm^3}$.

Η διερεύνηση επαναλαμβάνεται και για την τυπική γεωμετρία του ισχίου για 1 μονάδα χρόνου.



Σχήμα 7.3 Πυκνότητες στοιχείων τυπικής γεωμετρίας ισχίου σε 1 χρονική μονάδα για διαφορετικό μέγεθος βημάτων.

Σε αυτό το παράδειγμα φαίνεται ότι οι κατανομές οστικής πυκνότητας είναι ίδιες για όλες τις τιμές χρονικού βήματος. Όσον αφορά τις αριθμητικές τιμές των πυκνοτήτων παρατηρείται ότι σε σύγκριση με τα αποτελέσματα για βήμα $\Delta t=0.025$, για βήμα $\Delta t=1$ η

μέγιστη διαφορά πυκνότητας Π.Σ. είναι $4 \cdot 10^{-4} \text{ gr/cm}^3$, ενώ για βήμα $\Delta t=0.1$ είναι της τάξης του 10^{-7} gr/cm^3 .

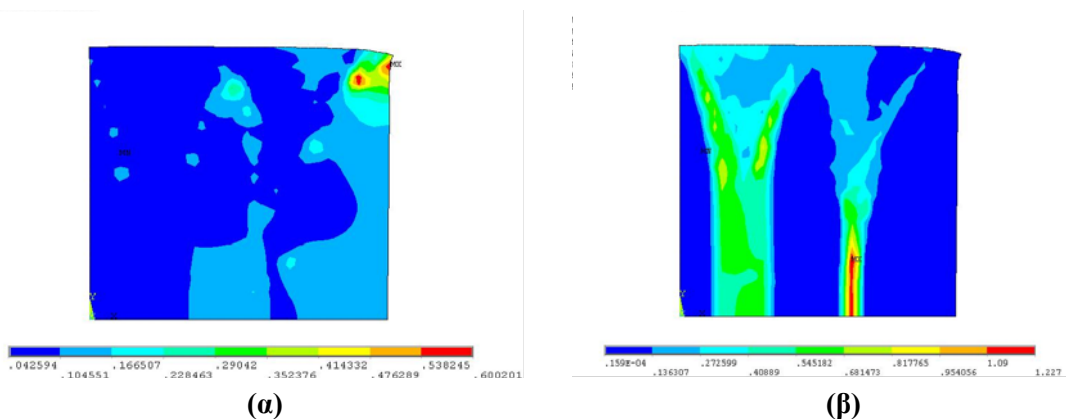
Από τα παραπάνω αποτελέσματα εξάγεται το συμπέρασμα ότι επιτυγχάνεται ικανοποιητική ακρίβεια στην αριθμητική ολοκλήρωση για βήμα $\Delta t=0.025$ στην εφαρμογή της τετράγωνης πλάκας και $\Delta t=0.1$ στην εφαρμογή της τυπικής μορφής ισχίου. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται και στις δύο περιπτώσεις για συνολικό χρόνο 175 με σταθερό βήμα. Αυτό συνεπάγεται 7000 επαναλήψεις για την τετράγωνη πλάκα και 1750 επαναλήψεις για την τυπική μορφή ισχίου. Η συγκεκριμένη δοκιμή είναι η πρώτη η οποία έχει διαφορετικό βήμα για την κάθε γεωμετρία.

7.4.1 Τετράγωνη πλάκα

Αρχικό μέτρο ελαστικότητας για όλα τα στοιχεία είναι $E_0 = 64 \text{ MPa}$, ενώ το μέγιστο μέτρο ελαστικότητας που μπορεί να προκύψει είναι $E_{\text{max}} = 302.76 \text{ MPa}$

Τα διαγράμματα παραμορφώσεων κατά Von Mises και πυκνότητας τροπικής ενέργειας για την αρχική κατάσταση ($\rho_0 = 0.8 \text{ gr/cm}^3$, $T = 0$) κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες φόρτισης έχουν παρουσιαστεί στο **Σχήμα 6.6** (α) και (β), αντίστοιχα.

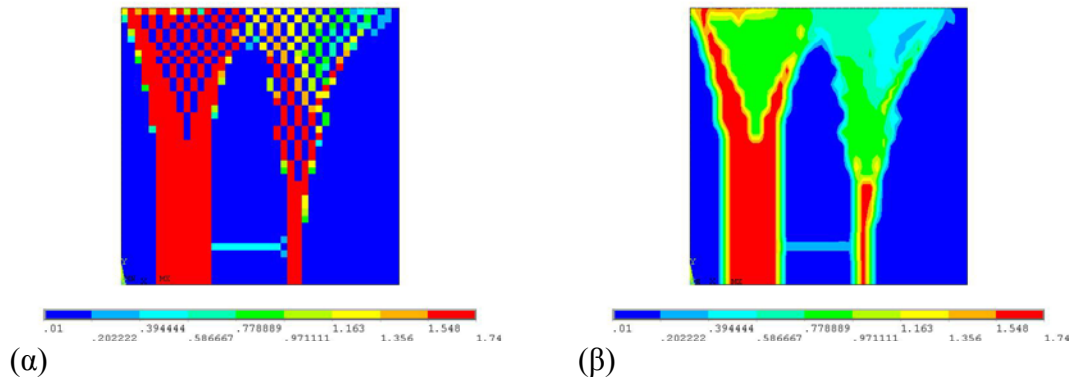
Συμφωνά με το όριο αναφοράς στη Σχέση (7.6), για πυκνότητα $\rho_0 = 0.8 \text{ gr/cm}^3$ δημιουργείται θετικό ισοζύγιο ανακατασκευής στα στοιχεία με πυκνότητα τροπικής ενέργειας από 0.2 J/cm^3 μέχρι 1 J/cm^3 . Σημειώνεται ότι στο αρχικό διάγραμμα μέγιστη πυκνότητα τροπικής ενέργειας που αποθηκεύεται σε στοιχείο είναι 0.762 J/cm^3 και παρατηρείται ότι είναι μικρότερη από το άνω όριο θετικού ισοζυγίου.



Σχήμα 7.4 Τελικά διαγράμματα (α) παραμορφώσεων και (β) πυκνότητας τροπικής ενέργειας

Τα τελικά διαγράμματα των παραμορφώσεων και της πυκνότητας τροπικής ενέργειας φαίνονται στο Σχήμα 7.4. Μέγιστη τιμή ισοδύναμης παραμόρφωσης Von Mises είναι 0.6 Strains ενώ η μέγιστη τιμή πυκνότητας τροπικής ενέργειας είναι 1.23 J/cm^3 .

Η τελική κατανομή των πυκνοτήτων φαίνεται στο Σχήμα 7.5 που ακολουθεί:



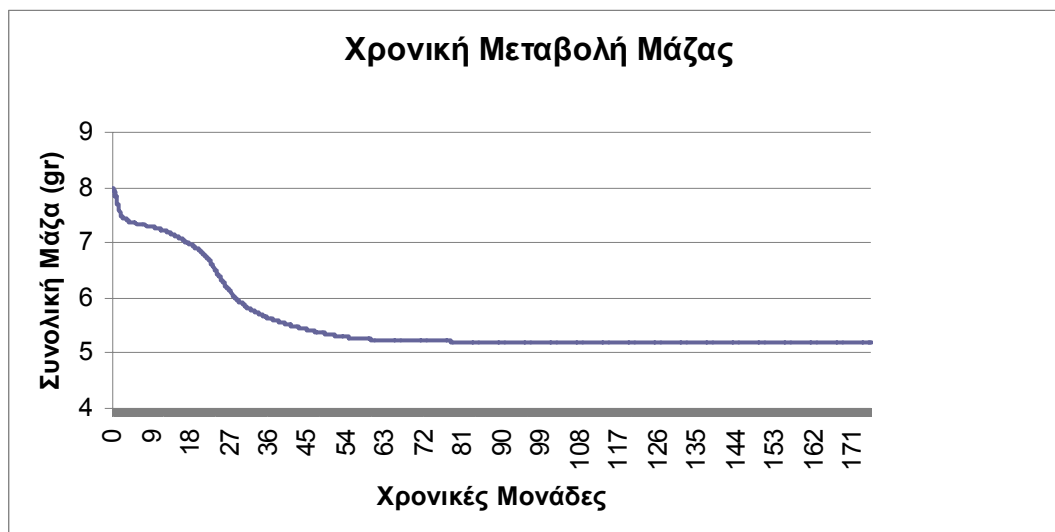
Σχήμα 7.5 Τελική κατανομή πυκνότητας (α) ανά στοιχείο, (β) με χρήση μέση τιμής τοπικά

Παρατηρείται ότι δημιουργήθηκαν δύο κολώνες προς την πλευρά της υψηλής φόρτισης όπου η καταπόνηση ήταν υψηλότερη. Προς την πλευρά της χαμηλής φόρτισης παρατηρήθηκαν πολύ υψηλά ποσοστά απορρόφησης στοιχείων. Επίσης, φαίνεται ότι η δεύτερη κολώνα είναι ιδιαίτερα λεπτή σε σχέση με την πρώτη. Τέλος, εμφανίζονται κάποια στοιχεία σύνδεσης χαμηλά ανάμεσα στις δύο κολώνες σαν ένα λεπτό «δοκάρι».

Σε αντιπαράθεση με όλες τις προηγούμενες προσομοιώσεις, που η πρώτη κολώνα δέσποζε στην αριστερή πλευρά της πλάκας όπου καταπονείται περισσότερο το οστό, σε αυτή την περιοχή τα στοιχεία έχουν απορροφηθεί. Συνεπώς, η πρώτη κολώνα βρίσκεται μετατοπισμένη προς τα δεξιά και είναι εμφανώς πιο παχιά προσφέροντας καλύτερη στήριξη, «δικαιολογώντας τη λάθος τοποθέτηση της». Η δεύτερη κολώνα είναι σαφώς πιο λεπτή. Τέλος παρατηρούνται κάποια στοιχεία σύνδεσης χαμηλά ανάμεσα στις δύο κολώνες σαν ένα λεπτό «δοκάρι».

Ακολουθεί το διάγραμμα της μάζας στην πορεία του χρόνου στο Σχήμα 7.6.

Η συνολική τελική μάζα είναι 5.199gr, δηλαδή μειώθηκε κατά 2.801gr, ή 35%.

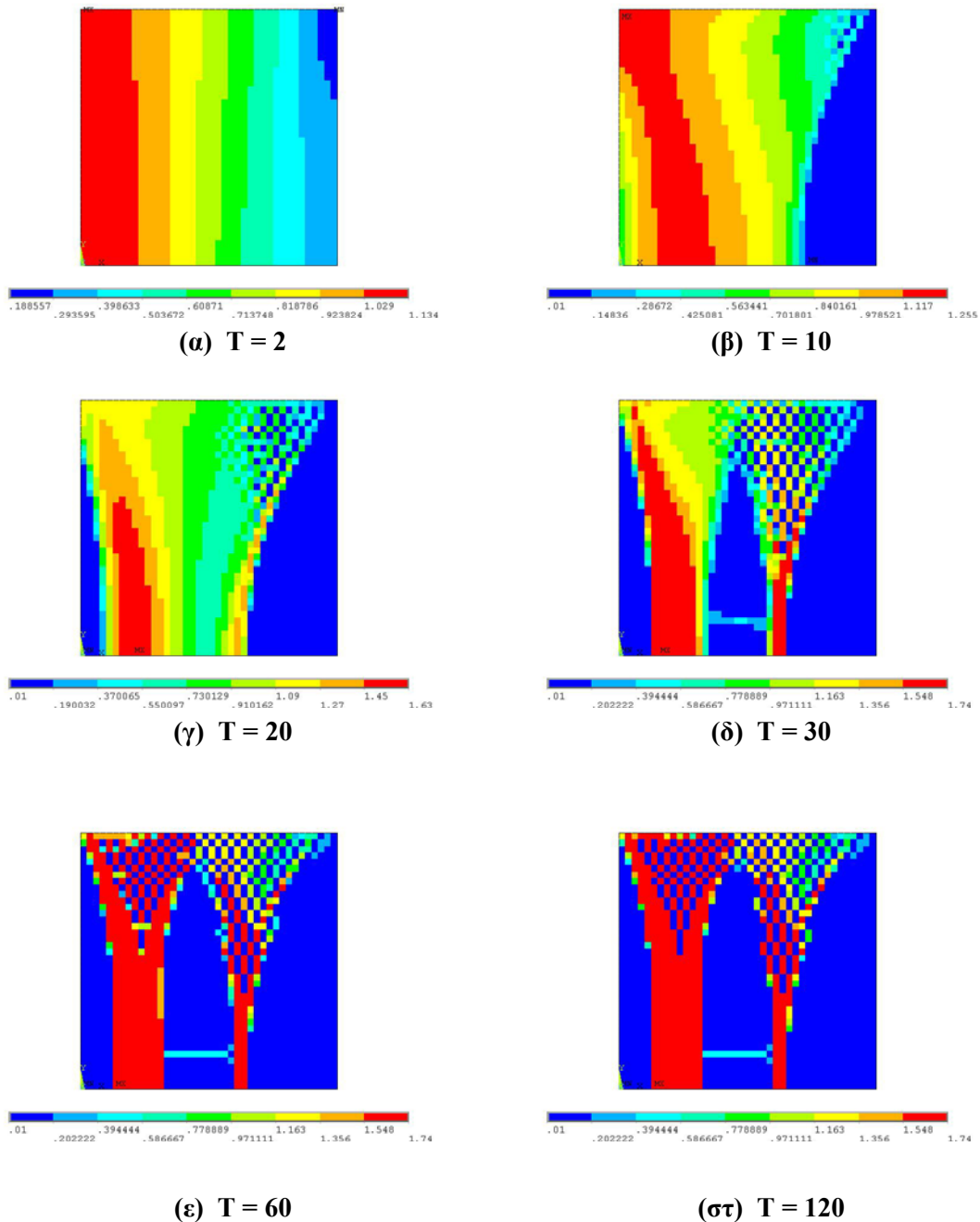


Σχήμα 7.6 Χρονική μεταβολή μάζας της τετράγωνης πλάκας

Κεφάλαιο 7^ο Μοντελο Οστικής Ανακατασκευής Με Πυκνότητα Τροπικής Ενεργειάς & Υπερφορτίσης

Η μάζα διατηρείται σταθερή ύστερα από 80 μονάδες χρόνου, ενώ ήδη από τις 52 μονάδες διέφερε μόλις 2% από την τελική. Σε χρόνο μέχρι 52 μονάδες παρατηρούνται δύο απότομες μειώσεις στο διάστημα 0 έως 4 κατά 0.62gr και 20 έως 40 κατά 1.32gr.

Στο Σχήμα 7.7 φαίνεται η κατανομή της πυκνότητας στην τετράγωνη πλάκα για διάφορες χρονικές στιγμές της διαδικασίας.



Σχήμα 7.7 Κατανομή πυκνότητας ανά στοιχείου σε διαφορετικές χρονικές στιγμές

Στο Σχήμα 7.7(α) φαίνεται ότι σε 2 χρονικές μονάδες έχουν μειωθεί οι πυκνότητες των Π.Σ. στις περιοχές χαμηλής φόρτισης, ενώ έχουν αυξηθεί στις υπόλοιπες, σε σχέση με

την αρχική πυκνότητα. Ελάχιστη πυκνότητα στοιχείου είναι 0.189 gr/cm^3 και μέγιστη 1.134 gr/cm^3 .

Αντίστοιχα σε 10 χρονικές μονάδες, έχει απορροφηθεί πλήρως η πρώτη περιοχή οστού λόγω χαμηλής φορτίσεως στο δεξί άκρο. Μέγιστη πυκνότητα στοιχείου είναι 1.255 gr/cm^3 .

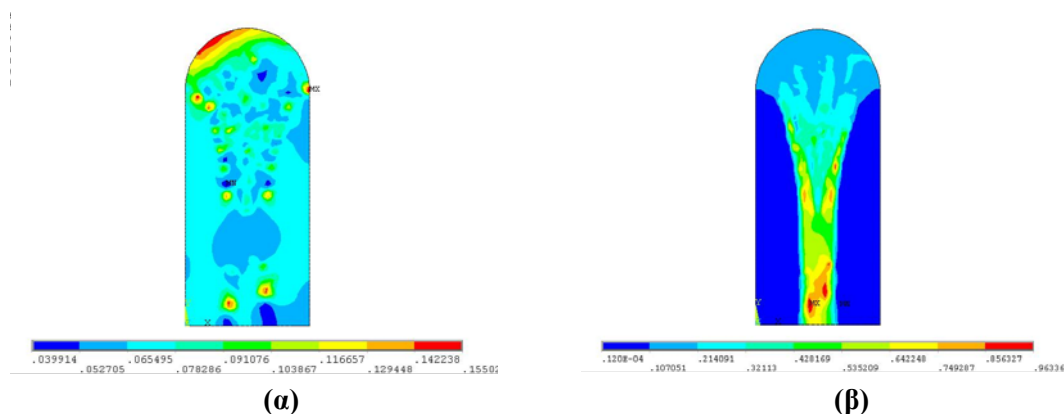
Ύστερα από 20 χρονικές μονάδες, έχει απορροφηθεί οστό και στην περιοχή υψηλής φορτίσεως στη δεξιά πλευρά. Η μέγιστη πυκνότητα στοιχείου έχει πλέον την τιμή 1.63 gr/cm^3 .

Ύστερα από 30 μονάδες χρόνου, σχηματίζονται οι κολώνες. Η μέγιστη πυκνότητα στοιχείου είναι 1.74 gr/cm^3 .

Τέλος, ανάμεσα στο Σχήμα 7.7(ε) και (στ), σε χρόνο 60 και 120 χρονικές μονάδες, η δομή μοιάζει πολύ με αυτήν της τελικής κατάστασης.

7.4.2 Τοπική μορφή γεωμετρίας ισχίου

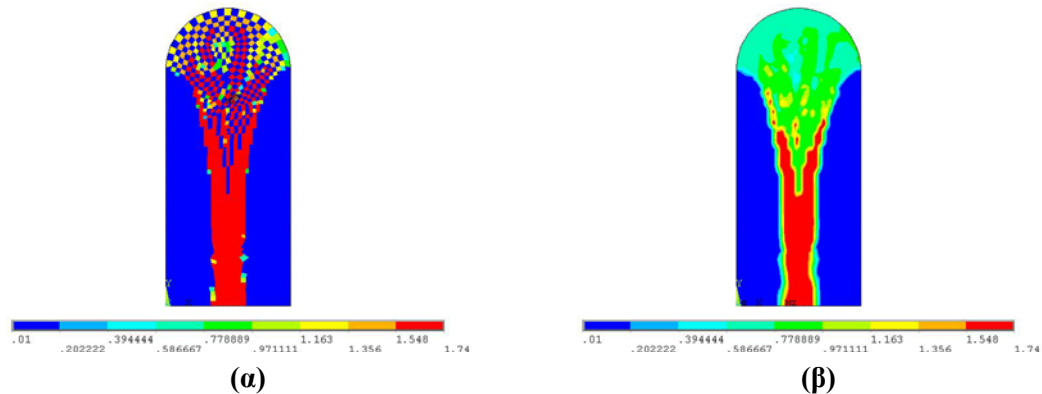
Τα διαγράμματα παραμορφώσεων κατά Von Mises και πυκνότητας τροπικής ενέργειας για την αρχική κατάσταση ($\rho_0 = 0.8 \text{ gr/cm}^3$, $T = 0$) σε χρόνο κάτω από το προκαθορισμένο μηχανικό περιβάλλον έχουν παρουσιαστεί στο Σχήμα 6.8 (α) και (β), αντίστοιχα. Σημειώνεται ότι στο Σχήμα 6.8 (α) μέγιστη πυκνότητα τροπικής ενέργειας που αποθηκεύεται σε στοιχείο είναι 0.31 J/cm^3 ενώ το όριο για το φαινόμενο της υπερφόρτισης είναι 1 J/cm^3 . Μετά από 175 χρονικές μονάδες, οι τελικές κατανομές των παραμορφώσεων και της πυκνότητας τροπικής ενέργειας φαίνονται στο Σχήμα 7.8.



Σχήμα 7.8 Τελικά διαγράμματα (α) παραμορφώσεων και (β) πυκνότητας τροπικής ενέργειας

Η μέγιστη τιμή ισοδύναμης παραμόρφωσης κατά Von Mises είναι 0.155 Strains ενώ η μέγιστη τιμή πυκνότητας τροπικής ενέργειας είναι 0.96 J/cm^3 .

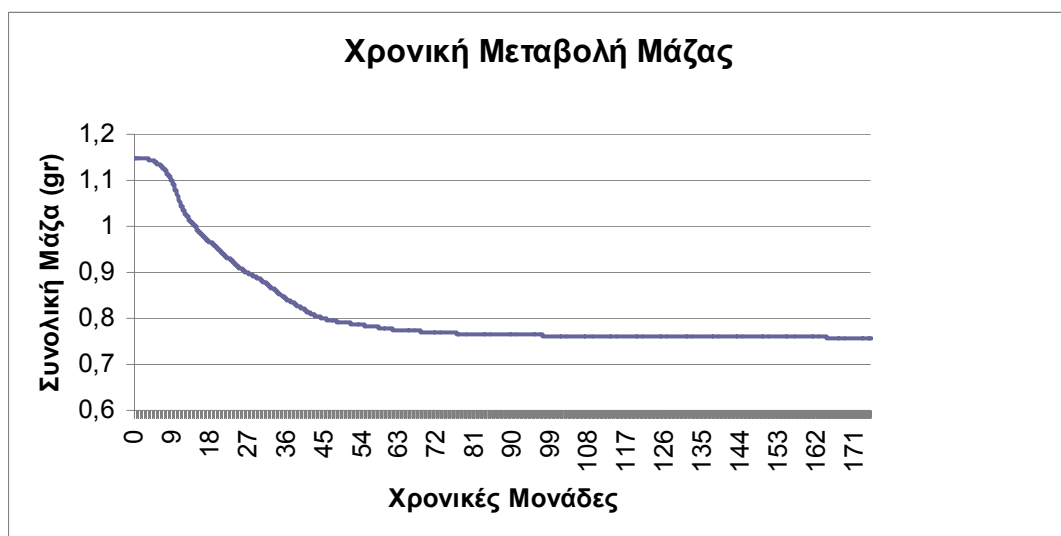
Η τελική κατανομή των πυκνοτήτων φαίνεται στο Σχήμα 7.9 που ακολουθεί:



Σχήμα 7.9 Τελική κατανομή πυκνότητας (α) ανά στοιχείο, (β) με χρήση μέση τιμής τοπικά

Παρατηρούνται, και πάλι, οι δύο τύποι ασυνεχειών, καθώς και η δημιουργία της κεντρικής κολώνας στο μέσο της δομής. Η εικόνα είναι όμοια με τις αντίστοιχες στα προηγούμενα κεφάλαια. Δεδομένης της ομοιόμορφης πίεσης 5MPa, δεν παρατηρούνται περιοχές απορρόφησης οστού λόγω υπερφόρτισης. Όπως αναφέρθηκε στην Ενότητα 7.2, όταν η διέγερση είναι μικρή, ο πρώτος, γραμμικός ως προς την πυκνότητα τροπικής ενέργειας, όρος κυριαρχεί και το μοντέλο συμπεριφέρεται παρόμοια με αυτό που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 6.

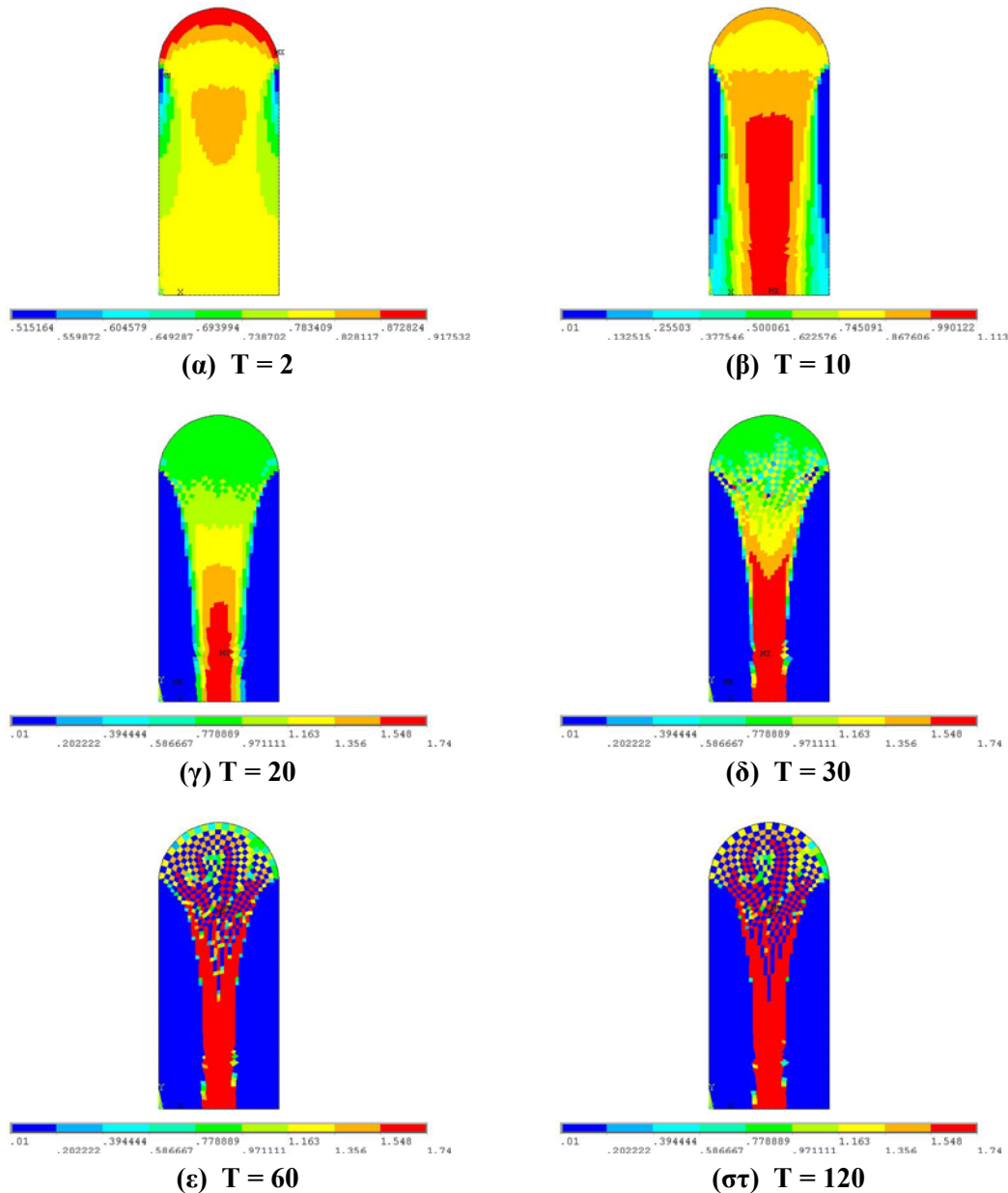
Ακολουθεί το διάγραμμα της μάζας στην πορεία του χρόνου στο Σχήμα 7.10.



Σχήμα 7.10 Χρονική μεταβολή μάζας της τυπικής μορφής ισχίου

Η συνολική τελική μάζα είναι 0.758gr, δηλαδή μειώθηκε κατά 0.388gr ή 33.8%. Για την πλήρη σταθεροποίηση της τιμής της μάζας χρειάστηκαν 160 χρονικές μονάδες. Μέχρι εκείνο το χρονικό σημείο η μάζα μειωνόταν με διαρκώς μειούμενο ρυθμό. Στις 58 χρονικές μονάδες η μάζα διαφέρει μόλις 3% από την τελική.

Στο Σχήμα 7.11 φαίνεται η κατανομή της πυκνότητας στην τετράγωνη πλάκα σε διάφορα βήματα της διαδικασίας



Σχήμα 7.11 Κατανομή πυκνότητας ανά στοιχείο σε διαφορετικές χρονικές στιγμές

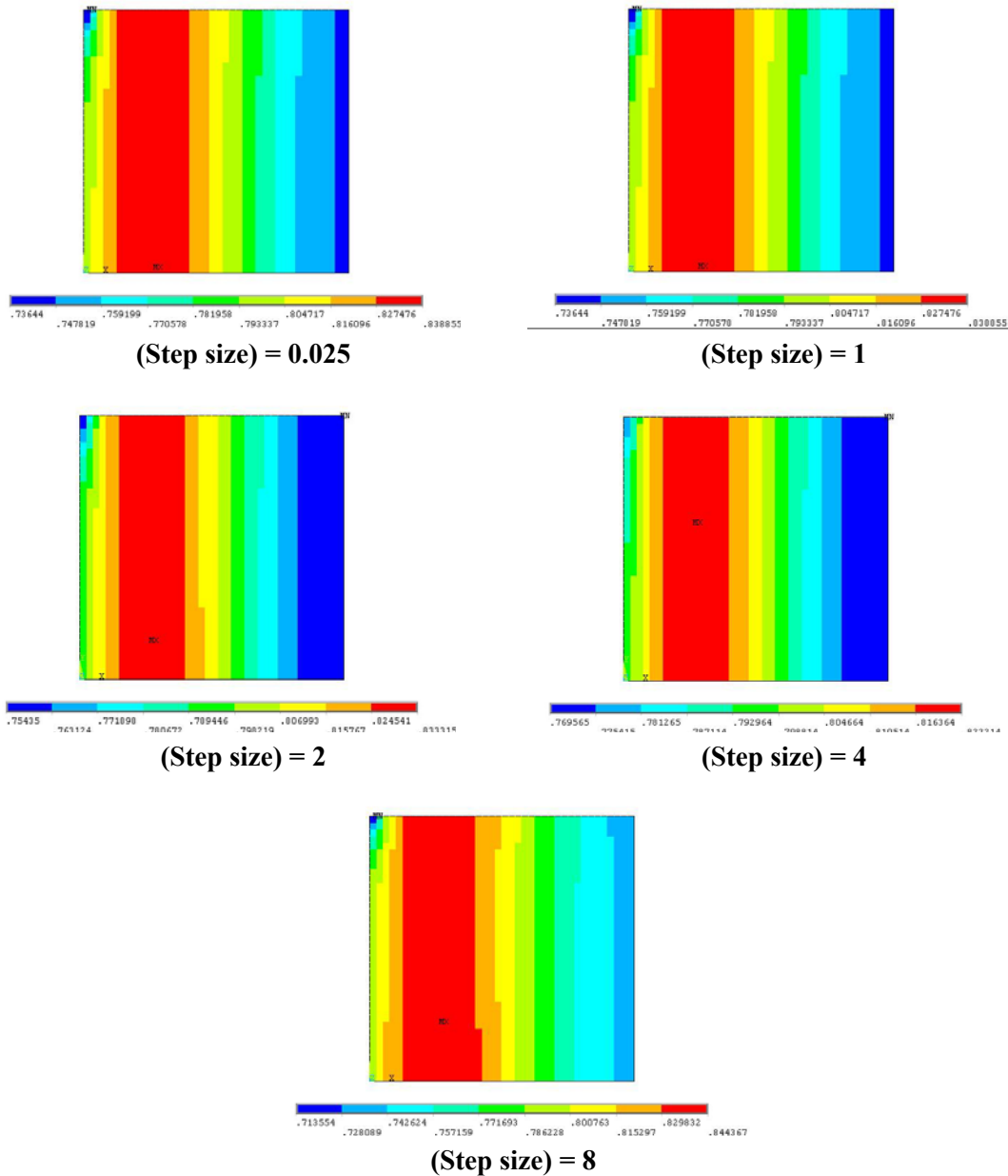
Από τις 10 χρονικές μονάδες απορροφούνται οι πρώτες περιοχές με Π.Σ. για να σχηματιστεί τελικά σε χρόνο 20 χρονικών μονάδων η κεντρική κολώνα. Η διαδικασία κινείται με αργούς ρυθμούς. Εικόνα κοντινή στην τελική κατάσταση προκύπτει σε 60 και 120 χρονικές μονάδες (Σχήμα 7.11(ε)).

7.5 Επίλυση και αποτελέσματα οστικής ανακατασκευής ενεργειακού μοντέλου για πρόβλεψη υπερφόρτισης με μέτρο ελαστικότητας B

Σε βιβλιογραφικές πηγές δεν υπάρχουν αναφορές για το μέγεθος βήματος επίλυσης στο συνδυασμό σχέσεων (B) που αναφέρθηκαν στην Ενότητα 7.3.

Κεφάλαιο 7^ο Μοντελο Οστικής Ανακατασκευής Με Πυκνότητα Τροπικής Ενεργειάς & Υπερφορτίσης

Για την εκλογή του κατάλληλου βήματος, πραγματοποιήθηκαν σε συνολικό χρόνο 1 χρονική μονάδα, επιλύσεις της διαφορικής εξίσωσης με 5 διαφορετικές τιμές χρονικών βημάτων. Στο Σχήμα 7.12 που ακολουθεί φαίνονται τα αποτελέσματα:

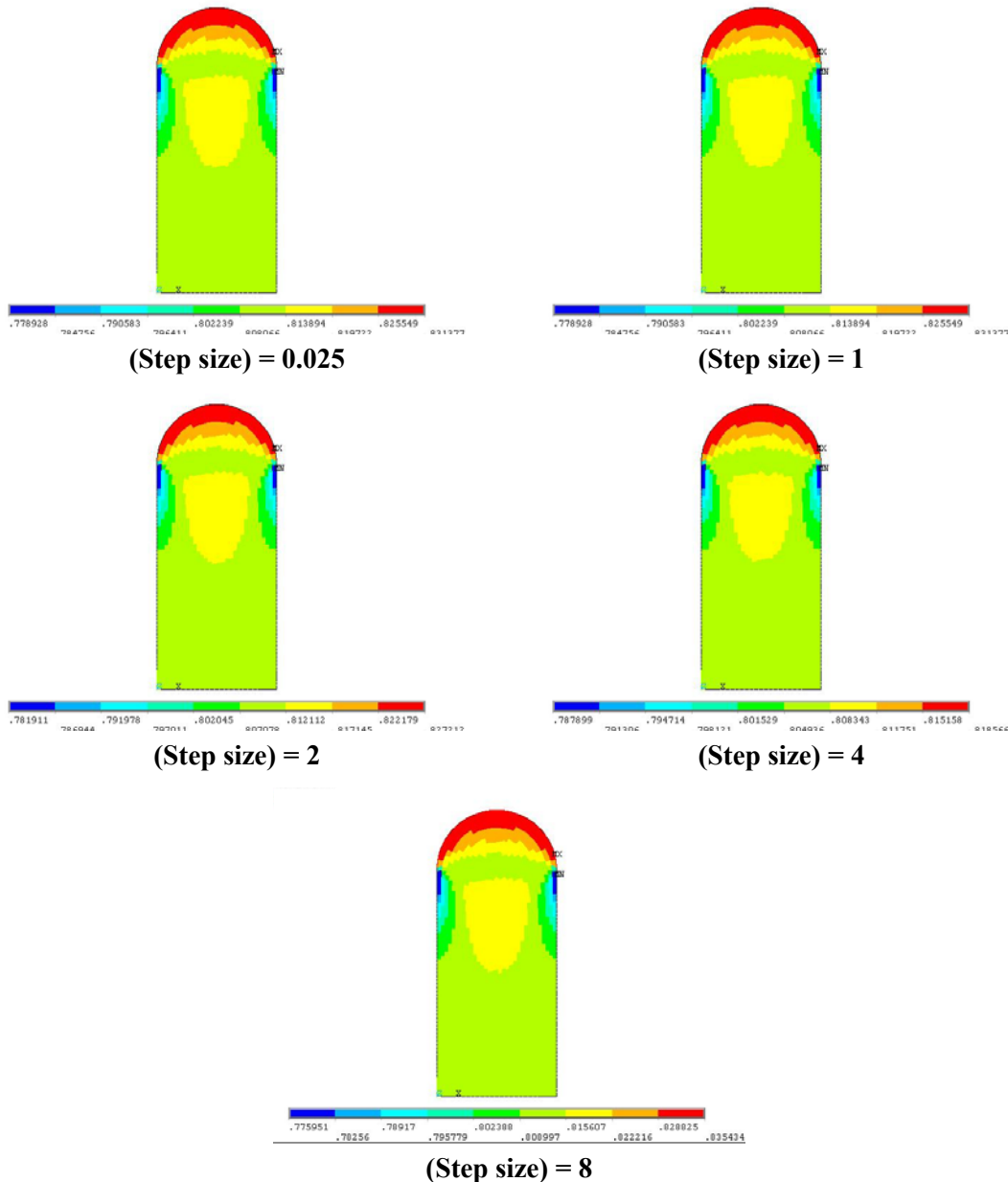


Σχήμα 7.12 Πυκνότητες στοιχείων τετράγωνης πλάκας σε 8 χρονικές μονάδες για διαφορετικό μέγεθος βημάτων.

Σε σύγκριση με το αποτέλεσμα που εξήχθει με 320 βήματα μεγέθους $\Delta t = 0.025$, για βήμα μεγέθους $\Delta t = 1$ η μέγιστη διαφορά στην τιμή οστικής πυκνότητας Π.Σ. είναι 10^{-6} gr/cm^3 , ενώ για ένα βήμα μεγέθους $\Delta t = 8$ είναι 0.007 gr/cm^3 .

Η μελέτη επαναλαμβάνεται και για την τυπική γεωμετρία του ισχίου για 8 χρονικές μονάδες.

Κεφάλαιο 7^ο Μοντελο Οστικής Ανακατασκευής Με Πυκνότητα Τροπικής Ενεργειας & Υπερφορτίσης



Σχήμα 7.13 Πυκνότητες στοιχείων τυπικής γεωμετρίας ισχίου σε 8 χρονικές μονάδες για διαφορετικό μέγεθος βημάτων.

Σε σύγκριση με τα αποτελέσματα που εξήχθησαν με τη χρήση βήματος $\Delta t=0.025$, για βήμα $\Delta t=1$ η μέγιστη διαφορά σε πυκνότητα στοιχείου είναι μόλις $5 \cdot 10^{-9} \text{ gr/cm}^3$, ενώ για ένα βήμα $\Delta t=8$ είναι $2 \cdot 10^{-6} \text{ gr/cm}^3$.

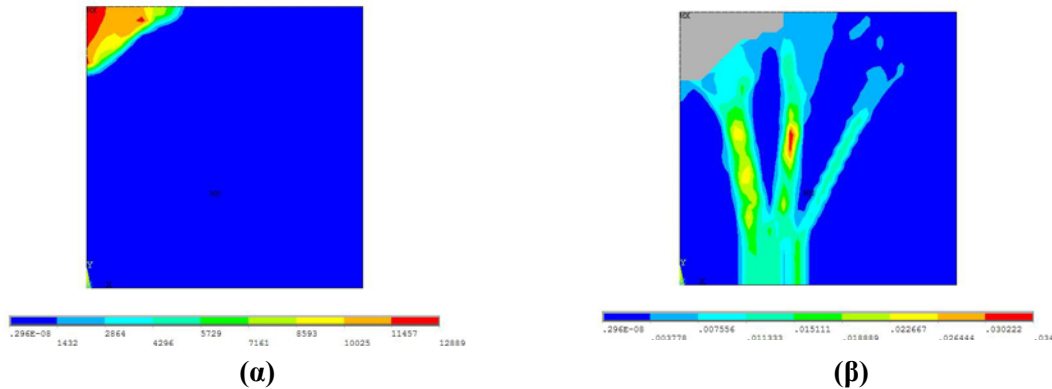
Τελικά η οστική ανακατασκευή υπολογίστηκε με βήμα ολοκλήρωσης $\Delta t = 0.5$ και στις δύο εφαρμογές. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται για συνολικό χρόνο 1800 με σταθερό βήμα, που συνεπάγεται 3600 επαναλήψεις, ενώ στο ANSYS θα πραγματοποιηθούν $4 \times 3 + 2 \times 3597 = 7206$ επιλύσεις για κάθε παράδειγμα

7.5.1 Τετράγωνη πλάκα

Αρχικό μέτρο ελαστικότητας για όλα τα στοιχεία είναι $E_0 = 1940.5MPa$, ενώ το μέγιστο μέτρο ελαστικότητας που μπορεί να προκύψει είναι $E_{max} = 19965.8MPa$

Συμφωνά με το όριο αναφοράς στη Σχέση (7.6), για πυκνότητα $\rho_0 = 0.8gr/cm^3$ δημιουργείται θετικό ισοζύγιο ανακατασκευής στα στοιχεία με πυκνότητα τροπικής ενέργειας από $0.0075 J/cm^3$ μέχρι $0.0358 J/cm^3$. Σημειώνεται ότι στο αρχικό διάγραμμα μέγιστη πυκνότητα τροπικής ενέργειας που αποθηκεύεται σε στοιχείο είναι $0.051 J/cm^3$, πράγμα που συνεπάγεται ότι από το πρώτο, κιάλας, χρονικό βήμα σε Π.Σ. που ασκείται υψηλή φόρτιση θα μειωθεί η πυκνότητα μέχρι τελικά να απορροφηθούν, αφού η μέγιστη πυκνότητα τροπικής ενέργειας είναι έξω από το παραπάνω διάστημα.

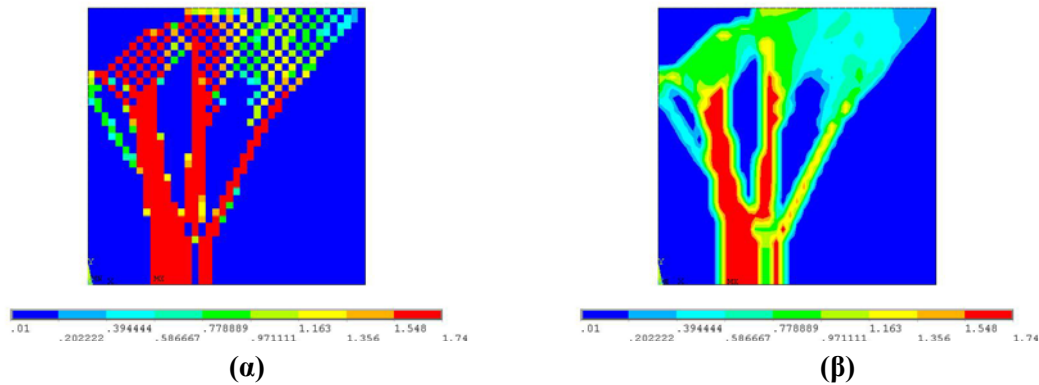
Τό τελικό διάγραμμα της πυκνότητας τροπικής ενέργειας φαίνεται στο Σχήμα 7.14.



Σχήμα 7.14 Τελικό διάγραμμα πυκνότητας τροπικής ενέργειας (α) με διαβάθμιση μέχρι μέγιστη τιμή, (β) με διαβάθμιση μέχρι $0.034 J/cm^3$

Στο Σχήμα 7.14(α) υπάρχει μόνο μια μικρή περιοχή με χρωματική διαβάθμιση ανάλογα με την αποθηκευμένη πυκνότητα τροπικής ενέργειας. Σε αυτή την περιοχή έχουν αποθηκευτεί μεγάλα ποσά πυκνότητας τροπικής ενέργειας. Αυτό συμβαίνει γιατί στην περιοχή αυτή ασκείται υψηλή φόρτιση και συγχρόνως το οστό έχει απορροφηθεί (πολύ μικρό μέτρο ελαστικότητας). Άρα από αυτό το διάγραμμα φαίνεται ποια περιοχή υποχωρεί λόγω υπερφόρτισης. Για τα υπόλοιπα στοιχεία δεν υπάρχει κάποια ένδειξη. Αν γίνει διαβάθμιση στο χρωματισμό μέχρι $0.034 J/cm^3$ προκύπτει το Σχήμα 7.14(β)

Η τελική κατανομή των πυκνοτήτων φαίνεται στο Σχήμα 7.15 που ακολουθεί:



Σχήμα 7.15 Τελική κατανομή πυκνότητας (α) ανά στοιχείο, (β) με χρήση μέση τιμής τοπικά

Από τις παραπάνω εικόνες φαίνεται ότι η συγκεκριμένη προσομοίωση έχει επιφέρει απορρόφηση οστού σε τρεις κύριες περιοχές είτε λόγω υπερφόρτισης είτε λόγω χαμηλής φόρτισης. Δημιουργήθηκε μία μεγάλη κολώνα προς την πλευρά της υψηλής φόρτισης (πλησιέστερα στην αριστερή πλευρά). Μπορεί να θεωρηθεί ότι καθ' ύψος χωρίζεται σε τέσσερα τμήματα, που ανάμεσα τους έχει απορροφηθεί πλήρως το οστό και καταλήγουν στην περιοχή με ασυνέχειες τύπου σκακιέρας. Σε αντιπαράθεση με όλες τις προηγούμενες προσομοιώσεις, για πρώτη φορά έχει απορροφηθεί υλικό σε θέση φορτίσεως (υψηλή φόρτιση άνω αριστερά)

Ακολουθεί διάγραμμα της μάζας στην πορεία του χρόνου στο Σχήμα 7.16

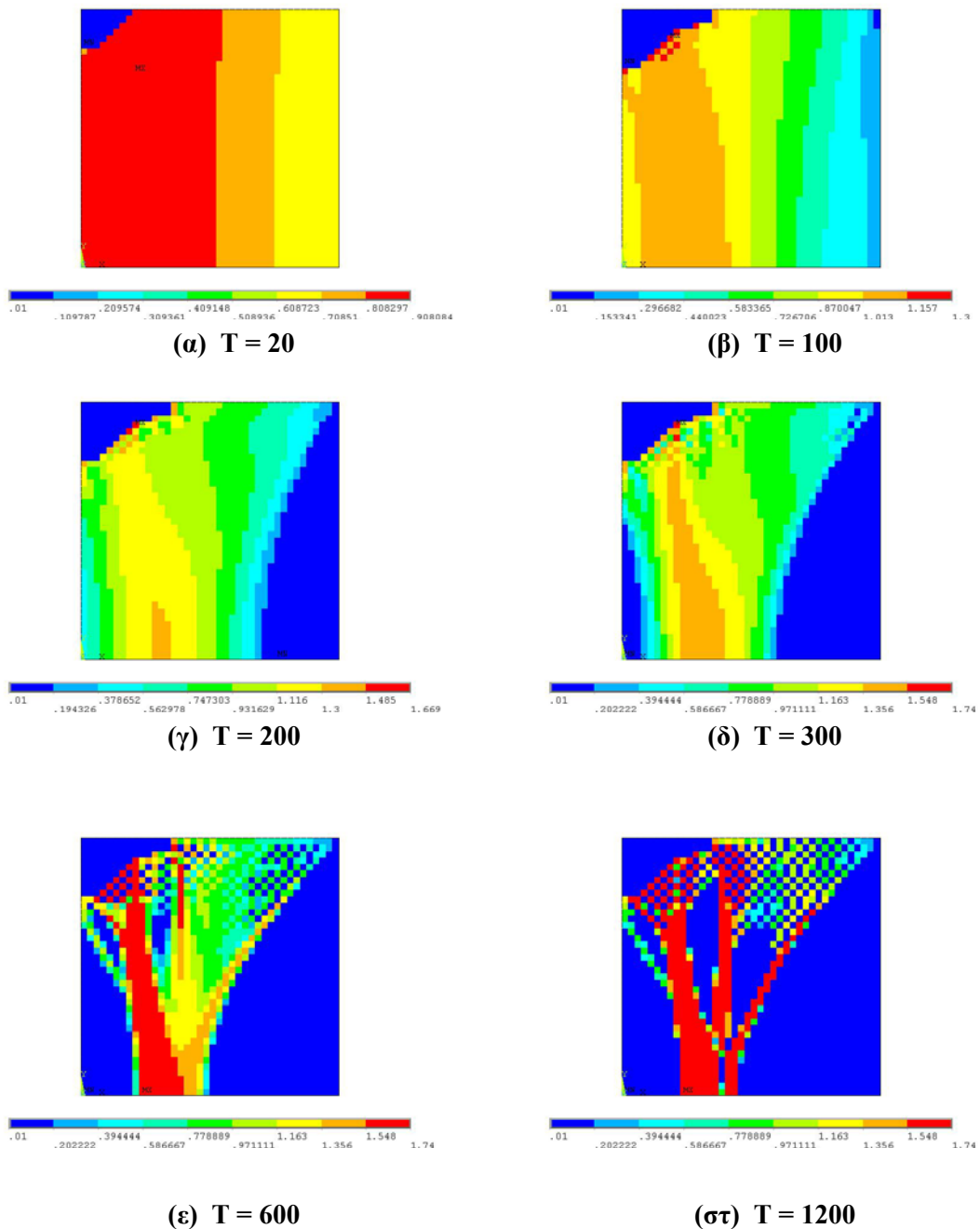


Σχήμα 7.16 Χρονική μεταβολή μάζας της τετράγωνης πλάκας

Η συνολική τελική μάζα είναι 4.186gr, δηλαδή μειώθηκε κατά 3.814gr, ή 47.7%. Η τιμή της μάζας μειώνεται με σταθερό ρυθμό από 0 έως 800 χρονικές μονάδες. Από εκείνο το χρονικό σημείο και έπειτα η τιμή της μειώνεται με διαρκώς μειούμενο ρυθμό μέχρι τελικά να σταθεροποιηθεί σε συνολικά 1600 μονάδες χρόνου.

Κεφάλαιο 7^ο Μοντελο Οστικής Ανακατασκευής Με Πυκνότητα Τροπικής Ενεργειας & Υπερφορτίσης

Στο Σχήμα 7.17 φαίνεται η κατανομή της πυκνότητας στην τετράγωνη πλάκα για διάφορες χρονικές στιγμές της διαδικασίας.



Σχήμα 7.17 Κατανομή πυκνότητας ανά στοιχείο σε διαφορετικές χρονικές στιγμές

Στο Σχήμα 7.17(α) φαίνεται ότι σε 20 χρονικές μονάδες, σε σχέση με την αρχική πυκνότητα, έχουν μειωθεί οι πυκνότητες των στοιχείων στις περιοχές χαμηλής φόρτισης, ενώ έχει απορροφηθεί πλήρως η πρώτη περιοχή οστού υπό την επίδραση υψηλής φορτίσεως στο άνω αριστερά άκρο. Μέγιστη πυκνότητα στοιχείου είναι $0.908 \frac{gr}{cm^3}$.

Κεφάλαιο 7^ο Μοντελο Οστικής Ανακατασκευής Με Πυκνότητα Τροπικής Ενέργειας & Υπερφορτίσης

Σε 100 χρονικές μονάδες, αρχίζει να απορροφάται οστό και στην περιοχή χαμηλής φορτίσεως στο άνω δεξιά άκρο. Μέγιστη πυκνότητα στοιχείου είναι $1.300 \frac{gr}{cm^3}$.

Ύστερα από 200 χρονικές μονάδες, έχει απορροφηθεί πλήρως η περιοχή όπου ασκείται η χαμηλότερη πίεση. Η μέγιστη πυκνότητα στοιχείου έχει πλέον την τιμή $1.669 \frac{gr}{cm^3}$.

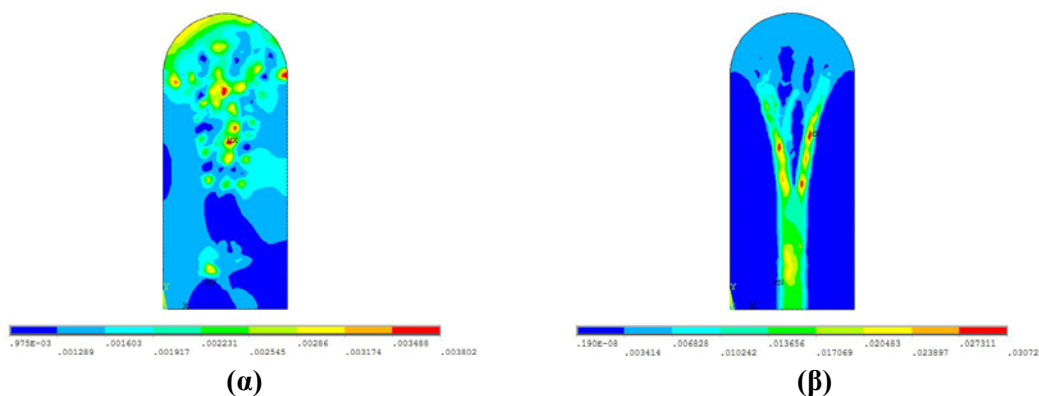
Σε 300 μονάδες χρόνου, αρχίζει να απορροφάται οστό και σε μια τρίτη περιοχή προς την πλευρά που ασκείται υψηλή πίεση. Η μέγιστη πυκνότητα στοιχείου είναι $1.74 \frac{gr}{cm^3}$.

Στο Σχήμα 7.17(ε), σε χρόνο 600 μονάδες, αρχίζει να διαχωρίζεται η μέχρι πρότινος συμπαγής δομή που σχηματίστηκε από τις τρεις απορροφημένες περιοχές και να εμφανίζονται κάποιες ασυνέχειες. Τέλος το Σχήμα 7.17(στ) σε χρόνο 1200 μονάδες, αποτελεί καλή προσέγγιση της τελικής κατάστασης.

7.5.2 Τοπική μορφή ισχύου

Τα διαγράμματα παραμορφώσεων κατά Von Mises και πυκνότητας τροπικής ενέργειας για την αρχική κατάσταση ($\rho_0 = 0.8 \frac{gr}{cm^3}, T = 0$) σε χρόνο κάτω από το προκαθορισμένο μηχανικό περιβάλλον έχουν παρουσιαστεί παραπάνω. Σημειώνεται ότι η μέγιστη πυκνότητα τροπικής ενέργειας που αποθηκεύεται σε στοιχείο είναι $0.011 \frac{J}{cm^3}$ ενώ το όριο για το φαινόμενο της υπερφόρτισης είναι $0.051 \frac{J}{cm^3}$, δηλαδή είναι μέσα στο διάστημα τιμών που ορίζει θετική ισοζύγιο ανακατασκευής.

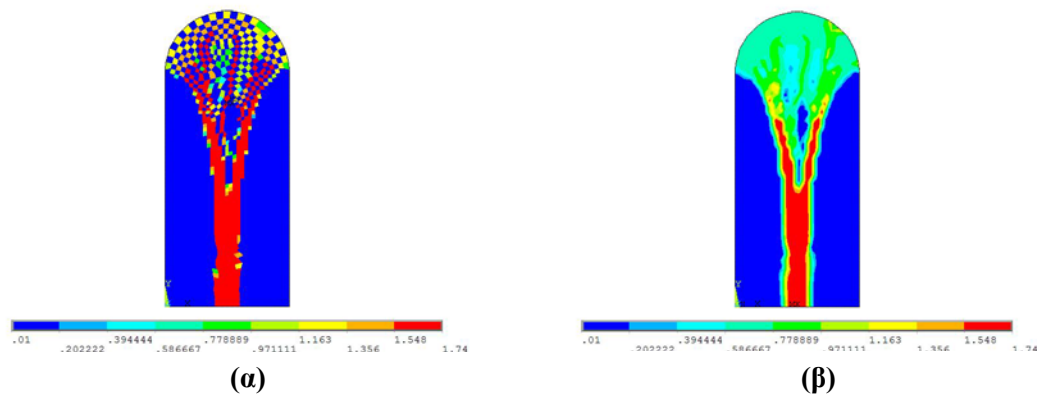
Μετά από 1800 χρονικές μονάδες, οι τελικές κατανομές των ισοδύναμων παραμορφώσεων κατά Von Mises και της πυκνότητας τροπικής ενέργειας φαίνονται στο Σχήμα 7.18.



Σχήμα 7.18 Τελικά διαγράμματα (α) παραμορφώσεων και (β) πυκνότητας τροπικής ενέργειας

Μέγιστη τιμή ισοδύναμης παραμόρφωσης Von Mises είναι 0.155 Strains ενώ η μέγιστη τιμή πυκνότητας τροπικής ενέργειας είναι $0.96 \frac{J}{cm^3}$.

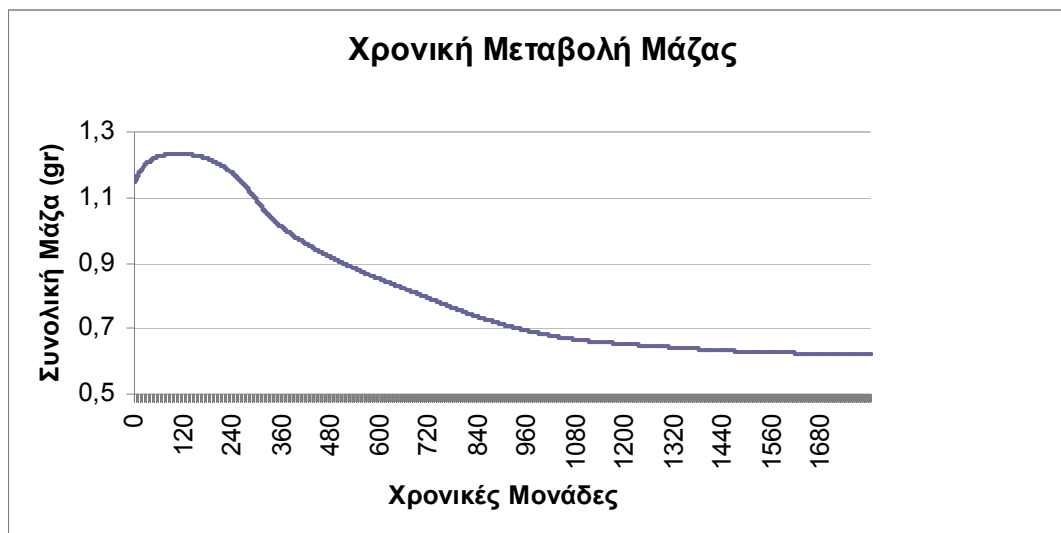
Η τελική κατανομή των πυκνοτήτων φαίνεται στο Σχήμα 7.19 που ακολουθεί:



Σχήμα 7.19 Τελική κατανομή πυκνότητας (α) ανά στοιχείο, (β) με χρήση μέσης τιμής τοπικά

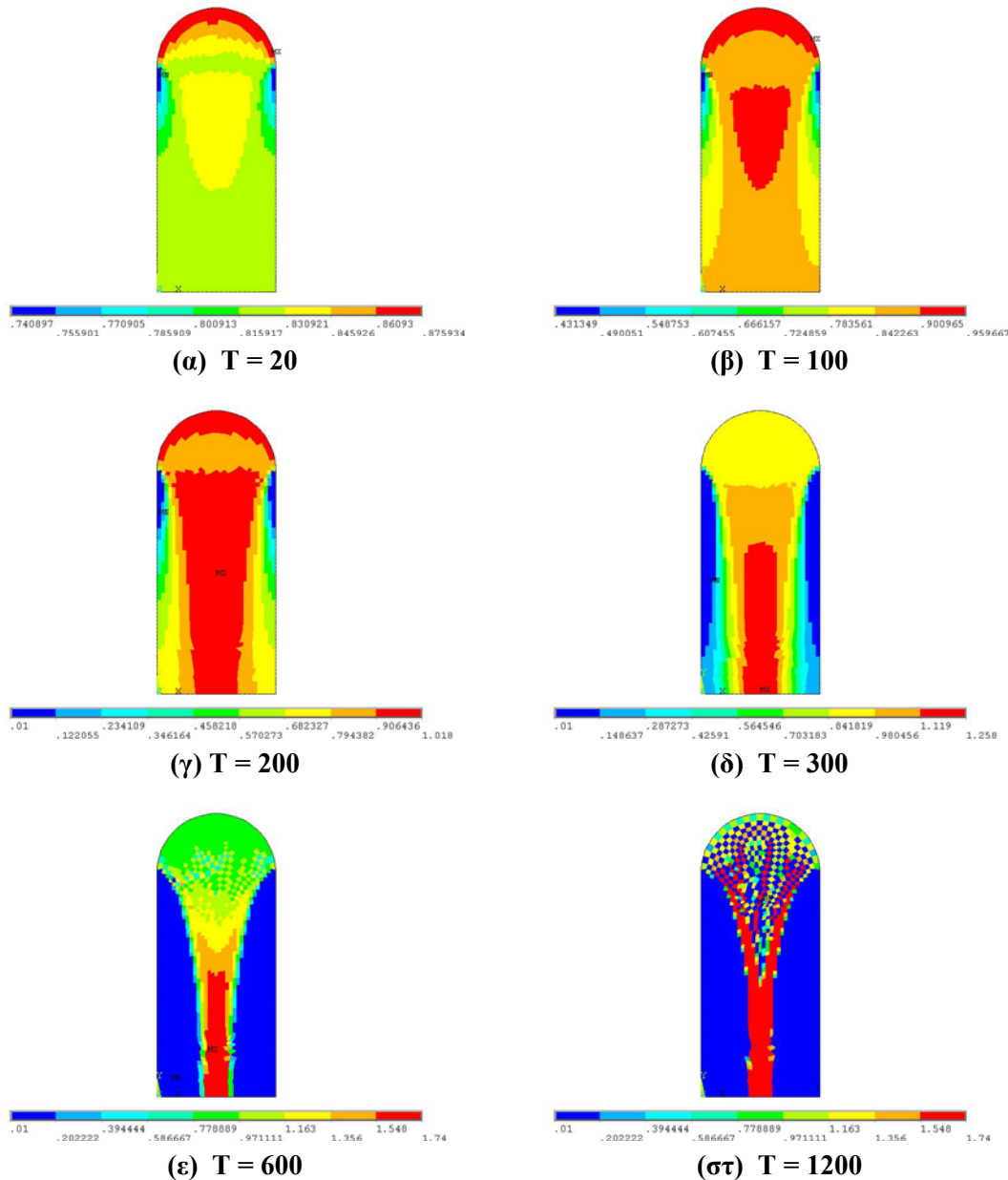
Από τις παραπάνω εικόνες φαίνεται ότι στη συγκεκριμένη προσομοίωση έχει δημιουργηθεί μία κύρια «κολώνα» όπως συνέβη και στα άλλα μοντέλα και έχει απορροφηθεί το οστό γύρω από αυτή, με μόνη διαφορά ότι χρειάστηκε περισσότερος χρόνος για να σταθεροποιηθεί η δομή. Δεδομένης της ομοιόμορφης πίεσης 5MPa, δεν παρατηρούνται περιοχές απορρόφησης οστού λόγω υπερφόρτισης. Όπως αναφέρθηκε στην Ενότητα 7.2, όταν η διέγερση είναι μικρή, ο πρώτος, γραμμικός ως προς την πυκνότητα τροπικής ενέργειας, όρος κυριαρχεί και το μοντέλο συμπεριφέρεται παρόμοια με αυτό που παρουσιάστηκε στην Ενότητα 6.4.2. Δεν συνέβη το ίδιο στην περίπτωση της τετράγωνης πλάκας όπου η κατανομημένη πίεση είχε μέγιστη τιμή 10MPa.

Ακολουθεί διάγραμμα της μάζας στην πορεία του χρόνου στο Σχήμα 7.20.



Σχήμα 7.20 Χρονική μεταβολή μάζας της τυπικής μορφής ισχίου

Η συνολική τελική μάζα είναι 0.622gr, δηλαδή μειώθηκε κατά 0.524gr ή 45.7%. Η μάζα αρχικά αυξήθηκε και στη συνέχεια μειώθηκε με αργό ρυθμό μέχρι τελικά να σταθεροποιηθεί σε 1700 μονάδες χρόνου. Στο Σχήμα 7.21 φαίνεται η κατανομή της πυκνότητας στην τυπική μορφή ισχίου σε διάφορα βήματα της διαδικασίας



Σχήμα 7.21 Κατανομή πυκνότητας ανά στοιχείο σε διαφορετικές χρονικές στιγμές

Η διαδικασία κινείται με αργούς ρυθμούς και χρειάζονται χρόνο 600 μονάδες χρόνου για να σχηματιστεί η κεντρική κολώνα (Σχήμα 7.21(ε)). Σε 1200 μονάδες χρόνου, προσεγγίζεται η τελική δομή.

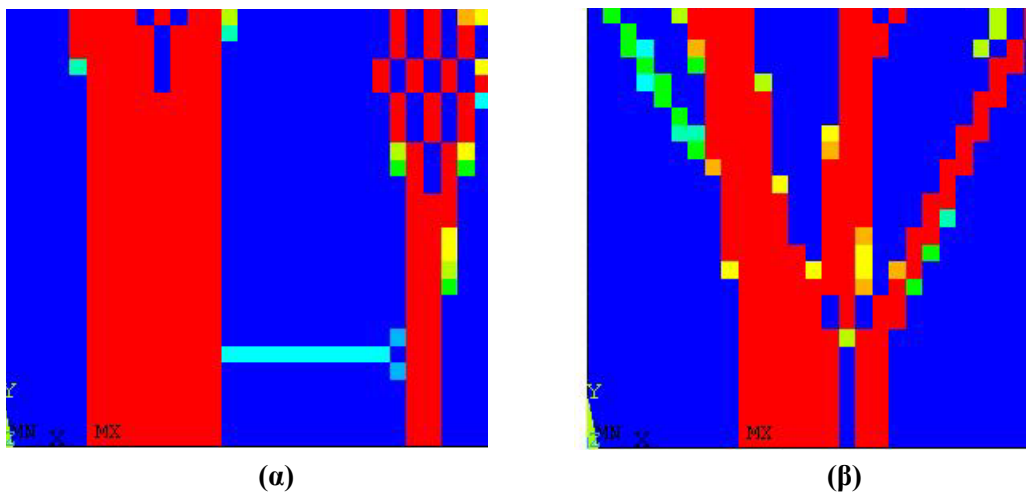
7.6 Σύγκριση αποτελεσμάτων με βάση τους συνδυασμούς σχέσεων Α και Β

Η βασική διαφορά ανάμεσα στους δύο συνδυασμούς σχέσεων είναι ότι για τη σχέση $E = 3790 \cdot \rho^3 MPa$ (συνδυασμός Β) η μεταβολή της οστικής πυκνότητας συντελείται με πολύ αργό ρυθμό με αποτέλεσμα να απαιτηθεί 20πλάσιος χρόνος για να σταθεροποιηθεί η μάζα και η τελική κατανομή της δομής σε σχέση με τη χρήση της εξίσωσης $E = 100 \cdot \rho^2 MPa$ (συνδυασμός Α). Οι συνδυασμοί όμως (Α) και (Β) πέρα από την

διαφορά στη συσχέτιση μέτρου ελαστικότητας και οστικής πυκνότητας, είχαν και διαφορετικό όριο για την απαιτούμενη μηχανική διέγερση κατά την οποία τα Π.Σ. «υπερφορτίζονται». Όπως επισημάνθηκε από το Κεφάλαιο 6 τροποποίηση στους συντελεστές της σχέσης $E = C \cdot \rho^r$ επιβάλλει αλλαγή και στους συντελεστές της εξίσωσης ρυθμού. Τονίζεται λοιπόν, ότι εξαιτίας αυτής της τροποποίησης για το συνδυασμό (Α) το περιθώριο ανάπτυξης του οστού λόγω του ορίου υπερφόρτισης είναι μεγαλύτερο σε σχέση με το συνδυασμό (Β).

Όσον αφορά την τετράγωνη πλάκα με τη χρήση του μέτρου ελαστικότητας Α εμφανίστηκαν δύο κολώνες ενώ με τη χρήση του μέτρου ελαστικότητας Β δημιουργήθηκε διαφορετική δομή.

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.22 που ακολουθεί, στην περίπτωση (Β) εμφανίζεται πιο παχιά κολώνα της οποίας η τοπολογία είναι στο μέσο της περιοχής που εμφανίστηκαν οι δύο κολώνες στην περίπτωση (Α).



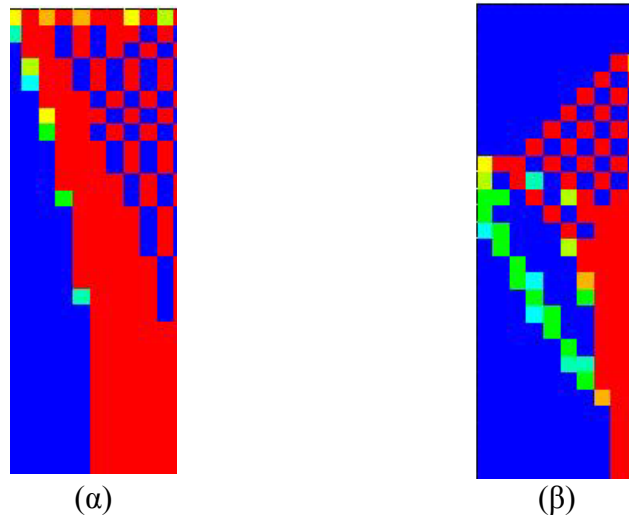
Σχήμα 7.22 Εστίαση στην ίδια περιοχή της τελικής δομής για τετράγωνης πλάκας για (α)

$$E = 100 \cdot \rho^2 \text{ MPa} \text{ και } (\beta) \quad E = 3790 \cdot \rho^3 \text{ MPa}$$

Η ελαφρώς πιο παχιά κολώνα διακλαδίζεται και μετά ενώνεται με την ασυνεχή μορφή τύπου «σκακιέρας» που βρίσκεται κοντά στη φόρτιση. Και στο Σχήμα 7.22(α), όμως φαίνεται ότι υπάρχει υποστήριξη ανάμεσα στις δύο κολώνες μέσω μίας οριζόντιας ένωσης στοιχείων.

Η τελική μάζα στην πρώτη περίπτωση είναι 5,199gr, δηλαδή κατά 35.0% ενώ στη δεύτερη περίπτωση η συνολική μάζα μειώθηκε κατά 47.7% καταλήγοντας στα 4,186gr

Στο Σχήμα 7.23 φαίνεται ότι οι πρώτες κολώνες και στις δύο περιπτώσεις ενώνονται με την αριστερή περιοχή υψηλής φόρτισης αλλά και είναι μετατοπισμένες, κάτι που δεν συνέβη σε καμία άλλη περίπτωση. Στην περιοχή που έχουν απορροφηθεί στοιχεία δέσποζε πάντα η πρώτη κολώνα.

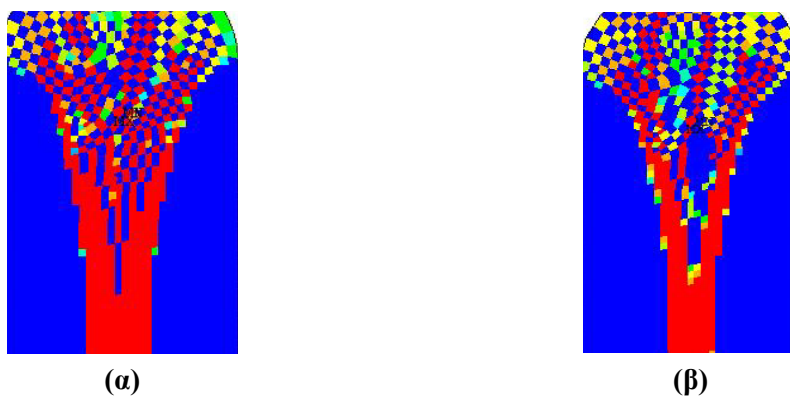


Σχήμα 7.23 Εστίαση στην άνω αριστερά περιοχή της τελικής δομής για (α) $E = 100 \cdot \rho^2 MPa$ (β) $E = 3790 \cdot \rho^3 MPa$

Παρά την κοινή μετατόπιση στις δύο δομές υπάρχει διαφορά. Στο **Σχήμα 7.23(β)** έχει απορροφηθεί πλήρως το άνω αριστερά άκρο που ήταν και θέση υψηλής φόρτισης για πίεση 6.5 MPa και άνω. Η απορρόφηση αυτής της περιοχής οδήγησε στη δημιουργία της δομής με μια κεντρική κολώνα που διακλαδίζεται.

Σχετικά με την τυπική γεωμετρία ισχίου η τελική μορφή και στις δύο περιπτώσεις είναι ίδια με μόνη διαφορά ότι για την χρήση του μέτρου ελαστικότητας A η τελική μάζα ήταν πιο μεγάλη. Πιο συγκεκριμένα, η τελική μάζα στην πρώτη περίπτωση είναι 0,758gr ενώ στη δεύτερη 0,622gr.

Μια λεπτομέρεια της τελικής δομής και για τα δύο μέτρα ελαστικότητας φαίνεται στο Σχήμα 7.24 που ακολουθεί.



Σχήμα 7.24 Εστίαση στην ίδια περιοχή της τυπικής μορφής μακρέως οστού, (α) $E = 100 \cdot \rho^2 MPa$ (β) $E = 3790 \cdot \rho^3 MPa$

Δεδομένης τις ομοιόμορφης πίεσης 5MPa, δεν παρατηρούνται περιοχές απορρόφησης οστού λόγω υπερφόρτισης, δεν συνέβη, όμως το ίδιο στην περίπτωση της τετράγωνης πλάκας όπου η κατανεμημένη πίεση είχε μέγιστη τιμή 10MPa Όπως αναφέρθηκε στην

Κεφάλαιο 7^ο Μοντελο Οστικής Ανακατασκευής Με Πυκνότητα Τροπικής Ενεργείας & Υπερφορτίσης

Ενότητα 7.2, όταν η διέγερση είναι μικρή, ο πρώτος, γραμμικός ως προς την πυκνότητα τροπικής ενέργειας, όρος κυριαρχεί. Ο δεύτερος όρος πιθανόν επηρέασε να το άνω μέρος της κολώνας όπου φαίνεται μία μικρή περιοχή με απορροφημένα στοιχεία που προκαλούν ένα διαχωρισμό στην κολώνα (Σχήμα 7.24(β)).

Κεφάλαιο 8ο Αξιολόγηση Και Σύγκριση Μεθόδων Οστικής Ανακατασκευής

8.1 Καταγραφή Προσομοιώσεων Οστικής Ανακατασκευής.

Στον Πίνακα 8.1 καταγράφονται όλες οι δοκιμές που πραγματοποιήθηκαν στην τετράγωνη πλάκα και στην τυπική γεωμετρία ισχίου και παρουσιάστηκαν αναλυτικά στα προηγούμενα κεφάλαια.

Πίνακας 8.1 Δοκιμές που πραγματοποιήθηκαν

Μέθοδος	Σχέση Μέτρου Ελαστικότητας & Πυκνότητας (MPa)	Όριο Αναφοράς	Όριο Απορρόφησης λόγω υπερφόρτισης	Συνολικός Χρόνος (χρονικές μονάδες)
Παραμορφωσιακό Μοντέλο	$3252.7\rho^3$	3000μstrain για $\rho=0.8\text{gr}/\text{cm}^3$	-	175
	$3252.7\rho^3$	2000μstrain για $\rho=0.8\text{gr}/\text{cm}^3$	-	175
Ενεργειακό Μοντέλο	$100\rho^2$	$0.25\text{J}/\text{gr}$	-	175
	$3790\rho^3$	$0.006\text{J}/\text{gr}$	-	1800
Ενεργειακό Μοντέλο με υπερφόρτιση	$100\rho^2$	$0.25\text{J}/\text{gr}$	$1.25\text{J}/\text{gr}$	175
	$3790\rho^3$	$0.006\text{J}/\text{gr}$	$0.0282\text{J}/\text{gr}$	1800

8.2 Σύγκριση των μεθόδων οστικής ανακατασκευής ως προς την χρονική πορεία

Για την περεταίρω αξιολόγηση των αποτελεσμάτων, πέρα από την εικόνα της κατανομής των οστικών πυκνοτήτων στα διάφορα στάδια ανακατασκευής, ελέγχθηκε και η συμπεριφορά της οστικής ανακατασκευής ως προς την πορεία σύγκλισης της με χρήση της συνάρτησης F η οποία καθορίζεται από την ακόλουθη έκφραση:

$$F = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^m \left| \frac{d\rho_i}{dt} \right| \quad (8.2)$$

όπου m είναι ο αριθμός των πεπερασμένων στοιχείων εντός των οποίων η οστική ανακατασκευή συνεχίζεται, δηλαδή η τιμή της πυκνότητάς του δεν έχει φτάσει την ανώτερη ή την κατώτερη τιμή. Ζητούμενο για την F είναι να τείνει στο μηδέν, γιατί αυτό σημαίνει ότι οι τιμές των πυκνοτήτων των στοιχείων έχουν ισορροπήσει σε μία τελική κατάσταση με πυκνότητα μεταξύ $\rho_{\min} = 0.01 \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3}$ και $\rho_{\max} = 1.74 \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3}$

8.2.1 Παραμορφωσιακό μοντέλο

Στο παραμορφωσιακό μοντέλο, ο μέσος απόλυτος ρυθμός μεταβολής οστικής πυκνότητας των στοιχείων δε αναμένονται να φτάσει στο μηδέν γιατί όσα στοιχεία έχουν πρακτικά απορροφηθεί δε θα έχουν αποκτήσει την τελική τιμή $\rho_{\min} = 0.01 \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3}$. Αυτό έχει συμβεί γιατί η αναφορά $\beta(\rho)$ λόγω της εξάρτησής της

από την πυκνότητα τείνει στο μηδέν για $\rho \rightarrow 0.01 \frac{gr}{cm^3}$, έτσι υπάρχει δυσκολία στο να σταθεροποιηθούν αυτά τα στοιχεία στην τιμή $\rho_{\min} = 0.01 \frac{gr}{cm^3}$, όπως αναφέρεται και στο Κεφάλαιο 5. Επί της ουσίας, τα στοιχεία αυτά μπορούν να θεωρούνται πλήρως απορροφημένα. Στη συνέχεια, παρατίθενται και για τις δύο τιμές αναφορών που χρησιμοποιήθηκαν στο παραμορφωσιακό μοντέλο τα διαγράμματα της συνάρτησης F ,



(α)



(β)

Σχήμα 8.1 Χρονική μεταβολή της συνάρτησης F για αναφορά ίση με (α) 3000μstrain και (β) 2000μstrain για τετράγωνη πλάκα (κάθετος άξονας: τιμή της F)

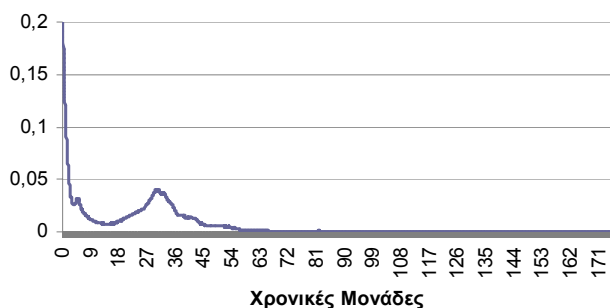


Σχήμα 8.2 Χρονική μεταβολή της συνάρτησης F για αναφορά ίση με (α) 3000μstrain και (β) 2000μstrain για τετράγωνη πλάκα (κάθετος άξονας: τιμή της F) για ισχίο

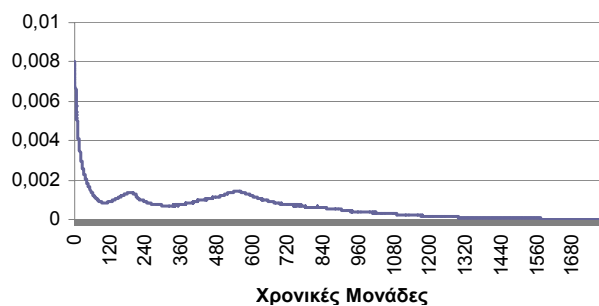
Στα Σχήματα 8.1 και 8.2 παρατηρείται ότι η συνάρτηση F συγκλίνει και στις τέσσερις περιπτώσεις και σε χρόνο αρκετά μικρότερο του συνολικού.

8.2.2 Ενεργειακό μοντέλο

Στη συνέχεια παρατίθεται τα διαγράμματα της συνάρτησης F και για τα δύο μέτρα ελαστικότητας που δοκιμάστηκαν τόσο στο ισχίο όσο και στην τετράγωνη πλάκα..

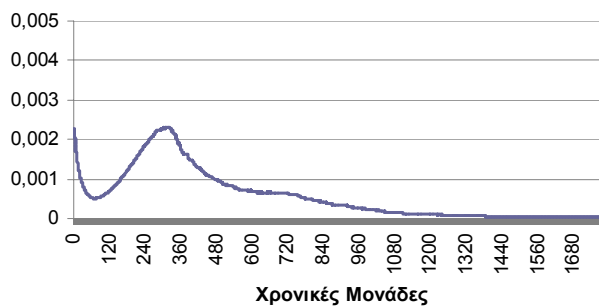
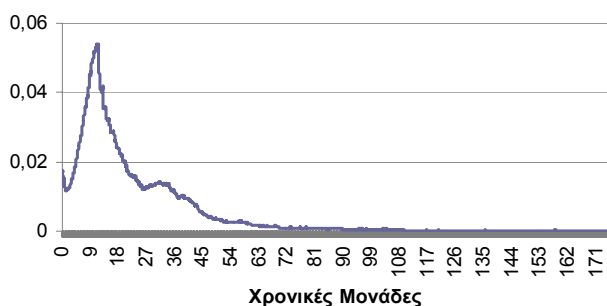


(α)



(β)

Σχήμα 8.3 Χρονική μεταβολή των συναρτήσεων F με μέτρο ελαστικότητας (α) $E = 100\rho^2$ και (β) $E = 3790\rho^3$ για τετραγωνική πλάκα



Σχήμα 8.4 Χρονική μεταβολή των συναρτήσεων F με μέτρο ελαστικότητας (α) $E = 100\rho^2$ και (β) $E = 3790\rho^3$ για τυπική γεωμετρία ισχίου

Παρατηρείται ότι και στα τέσσερα διαγράμματα η μέθοδος έχει συγκλίνει. Η επιλογή των συντελεστών στη σχέση μέτρου ελαστικότητας συναρτήσεως της πυκνότητας αποτέλεσε το σημαντικότερο παράγοντα για τον απαιτούμενο χρόνο σύγκλισης. Για $E = 3252.7\rho^3$ ο μέγιστος μέσος ρυθμός μεταβολής πυκνότητας των στοιχείων είναι μία τάξη μεγέθους μικρότερη από τον αντίστοιχο για $E = 100\rho^2$

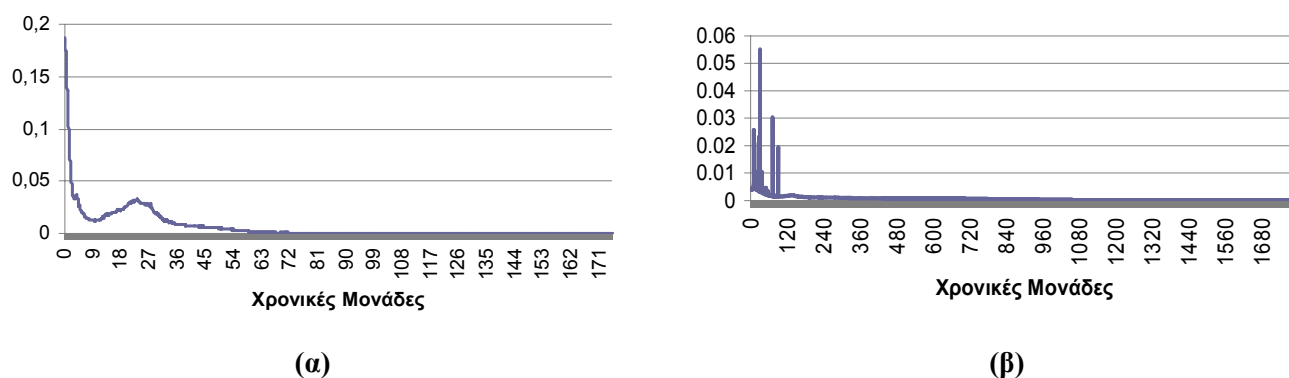
Σε σύγκριση με το παραμορφωσιακό μοντέλο με $E = 3252.7\rho^3$, για το ενεργειακό μοντέλο με $E = 3790\rho^3$ απαιτείται περίπου 100 φορές μεγαλύτερος χρόνος μέχρι την σταθεροποίηση της τιμής της F . Από αυτό εξάγεται το συμπέρασμα ότι υπάρχει και η ίδια αναλογία στο μέγεθος της μίας μονάδας χρόνου ανάμεσα στα δύο μοντέλα, δηλαδή στο παραμορφωσιακό μοντέλο η μονάδα χρόνου πρέπει να είναι 100 φορές μεγαλύτερη από το ενεργειακό μοντέλο περιγράφοντας το ίδιο φαινόμενο το φαινόμενο της οστικής ανακατασκευής.

Στην περίπτωση της τετραγωνικής πλάκας παρατηρείται συντομότερη σύγκλιση από ότι στο ισχίο. Σε αυτό συμβάλει το πυκνότερο πλέγμα και οι μικρότερες διαστάσεις των στοιχείων

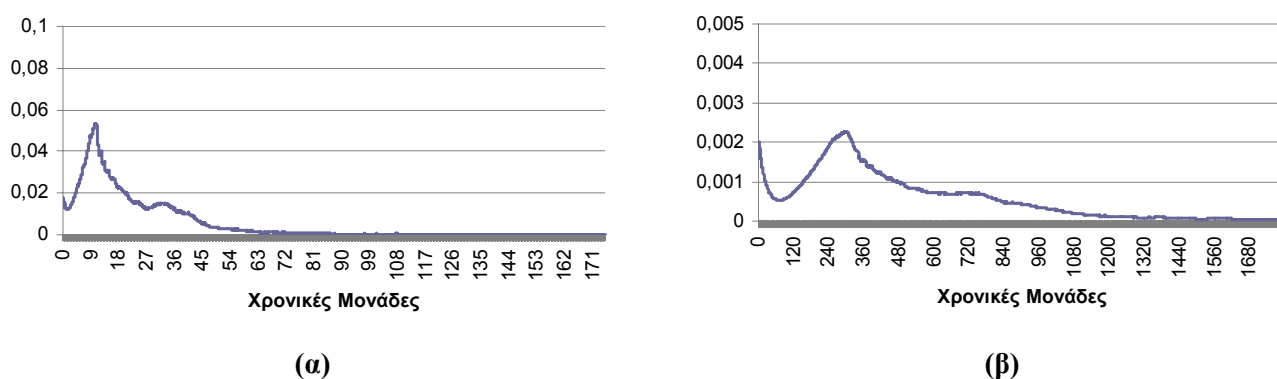
8.2.3 Ενεργειακό μοντέλο που προβλέπει υπερφόρτιση

Στο μοντέλο αυτό προβλέπεται να δημιουργηθούν ανωμαλίες από τα στοιχεία που τείνουν να απορροφηθούν από υπερφόρτιση διότι θα έχουν πολύ υψηλή πυκνότητα τροπικής ενέργειας και συγχρόνως μικρή οστική πυκνότητα. Έτσι θα έχουν πολύ υψηλή μηχανική διέγερση οπότε η απόκριση της F πιθανόν να παρουσιάζει απότομες μεταβολές.

Στη συνέχεια παρατίθενται τα διαγράμματα των τιμών της συνάρτησης F για την τετράγωνη πλάκα και το ισχίο.



Σχήμα 8.5 Χρονική μεταβολή της F με μέτρο ελαστικότητας (α) $E = 100\rho^2$ και (β) $E = 3790\rho^3$ για την τετραγωνική πλάκα



Σχήμα 8.6 Χρονική μεταβολή της F με μέτρο ελαστικότητας (α) $E = 100\rho^2$ και (β) $E = 3790\rho^3$ για την τυπική γεωμετρία ισχίου

Παρατηρείται ότι και στα τέσσερα διαγράμματα η μέθοδος έχει συγκλίνει. Η επιλογή των συντελεστών στη σχέση μέτρου ελαστικότητας συναρτήσει της πυκνότητας αποτέλεσε το σημαντικότερο παράγοντα για τον απαιτούμενο χρόνο σύγκλισης όπως

και στην περίπτωση του ενεργειακού μοντέλου χωρίς τον δευτεροβάθμιο όρο για πρόβλεψη υπερφόρτισης.

8.3 Δείκτης δυσκαμψίας

Οι Zhao και Hornby (1998) [8] εισήγαγαν τη γενική ιδέα του δείκτη αποδοτικότητας υλικού (material efficiency indicator) για την αξιολόγηση μιας κατασκευής από την οπτική γωνία του σχεδιασμού κατασκευής μέγιστης δυσκαμψίας. Πρότειναν ότι η μέση δυσκαμψία της κατασκευής ανά μονάδα όγκου μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εξαχθεί το πόσο αποτελεσματικά χρησιμοποιήθηκε το δομικό υλικό.

Στην περίπτωση της οστικής ανακατασκευής η μέση δυσκαμψία της κατασκευής ανά μονάδα μάζας μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εκφράσει το πόσο αποδοτικά χρησιμοποιήθηκε το δομικό υλικό του οστού. Καθώς η ολική δυσκαμψία μιας κατασκευής είναι αντιστρόφως ανάλογη του συνολικά παραγόμενου έργου από όλες τις εξωτερικές φορτίσεις στην κατασκευή, ο δείκτης δυσκαμψίας των αποτελεσμάτων μπορεί να οριστεί ως:

$$\bar{K} = \frac{1}{W_E^s \cdot M^s} \quad (8.10)$$

όπου W_E^s είναι το συνολικά παραγόμενο έργο από όλες τις εξωτερικές δυνάμεις στην τρέχουσα δομή και M^s είναι η μάζα της τρέχουσας δομής.

Ακολουθούν δύο πίνακες που περιλαμβάνουν για κάθε σχέση οστικής ανακατασκευής την τιμή του δείκτη δυσκαμψίας τόσο για την τετράγωνη πλάκα όσο και για την τυπική γεωμετρία ισχίου

Πίνακας 8.2 Δείκτης Δυσκαμψίας για την τετράγωνη πλάκα

Μεθοδος	Σχέση Μέτρου Ελαστικότητας & πυκνότητας (MPa)	Όριο Αναφοράς	Δείκτης Δυσκαμψίας [cm ³ /(J · gr)]	
			Πλάκα	Ισχίο
Παραμορφωσιακό Μοντέλο	3252.7ρ ³	3000μstrain για ρ=0.8gr/cm ³	3.815 E-03	2.21 E-01
		2000μstrain για ρ=0.8gr/cm ³	4.944 E-03	2.82 E-01
Ενεργειακό Μοντέλο	100ρ ²	0.25J/gr	1.139 E-04	5.447 E-03
	3790ρ ³	0.006J/gr	6.268 E-03	3.12 E-01
Ενεργειακό Μοντέλο για υπερφόρτιση	100ρ ²	0.25J/gr	1.13 E-04	5.456 E-03
	3790ρ ³	0.006J/gr	5.8 E-08	3.09 E-01

Σημαντικός παράγοντας στη σύγκριση του δείκτη δυσκαμψίας διαφορετικών μεθόδων είναι η σχέση μέτρου ελαστικότητας και οστικής πυκνότητας. Δεδομένης της σταθερής φόρτισης, για μέτρο ελαστικότητας ίσο με 3790ρ³ και 3252.7ρ³ το

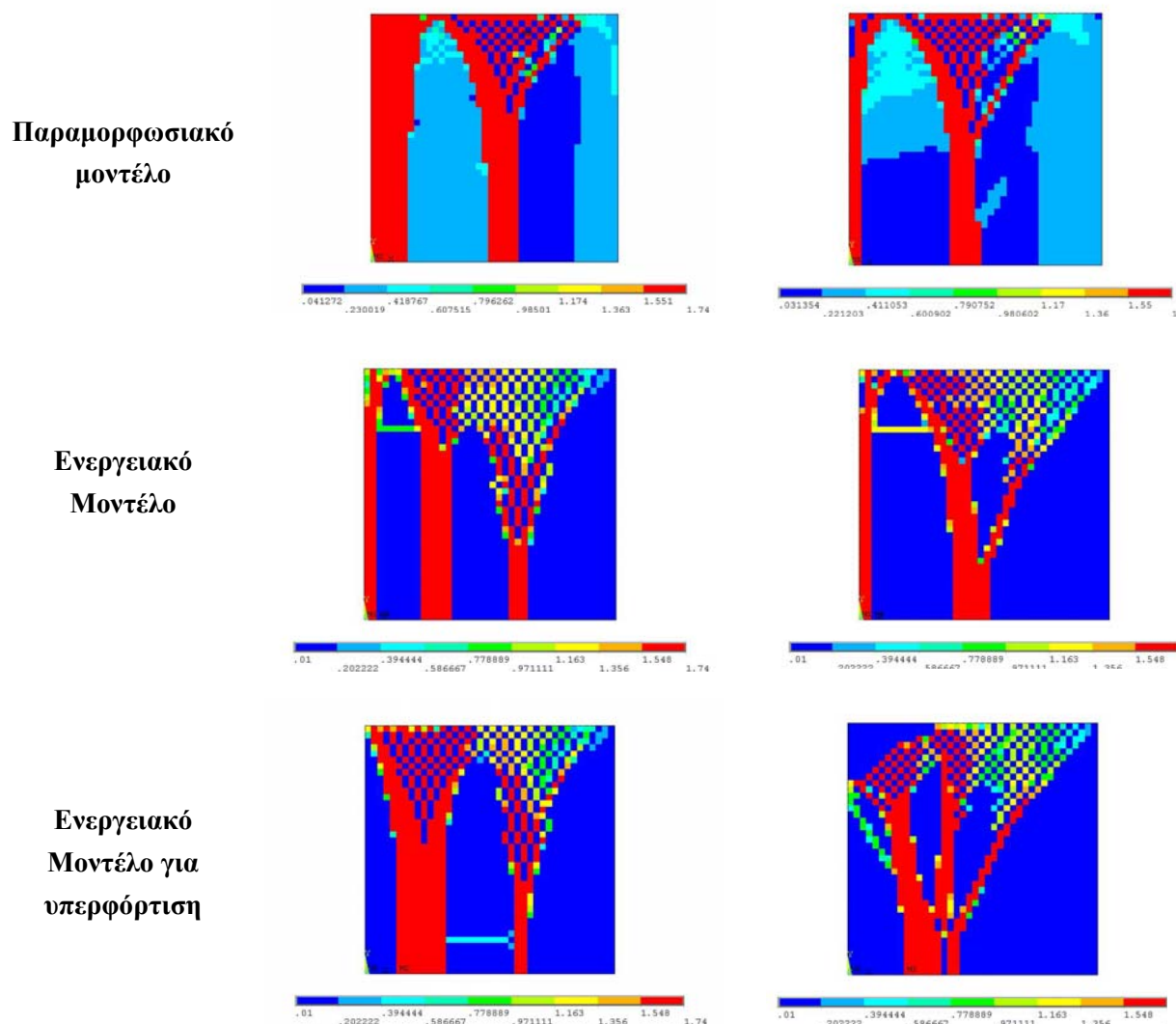
συνολικά παραγόμενο έργο εξωτερικών δυνάμεων είναι μικρότερο από την περίπτωση όπου χρησιμοποιείται μέτρο ελαστικότητας ίσο με $100\rho^2$

Το μοντέλο του ισχίου, σε σχέση με αυτό της πλάκας για τις αντίστοιχες προσομοιώσεις, έχει μεγαλύτερο δείκτη δυσκαμψίας δεδομένου ότι η τελική συνολική μάζα είναι μικρότερη (λόγω διαστάσεων) και το συνολικό έργο εξωτερικών δυνάμεων μικρότερο (λόγω μικρότερης φόρτισης).

Στον παραπάνω πίνακα φαίνεται ότι στην περίπτωση του μοντέλου υπερφόρτισης ο δείκτης δυσκαμψίας είναι πολύ μικρός δεδομένου ότι στην περιοχή που ασκείται υψηλή φόρτιση το οστό έχει απορροφηθεί και έχουν αποθηκευτεί μεγάλα ποσά πυκνότητας τροπικής ενέργειας.

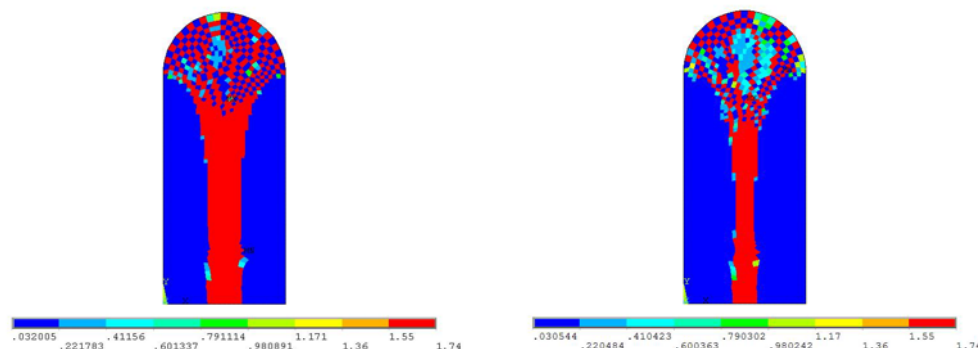
8.4 Γενικά Συμπεράσματα

Αρχικά παρατίθενται στο Σχήμα 8.7 και Σχήμα 8.8 αντίστοιχα, οι τελικές δομές που προέκυψαν από το σύνολο των δοκιμών που πραγματοποιήθηκαν.

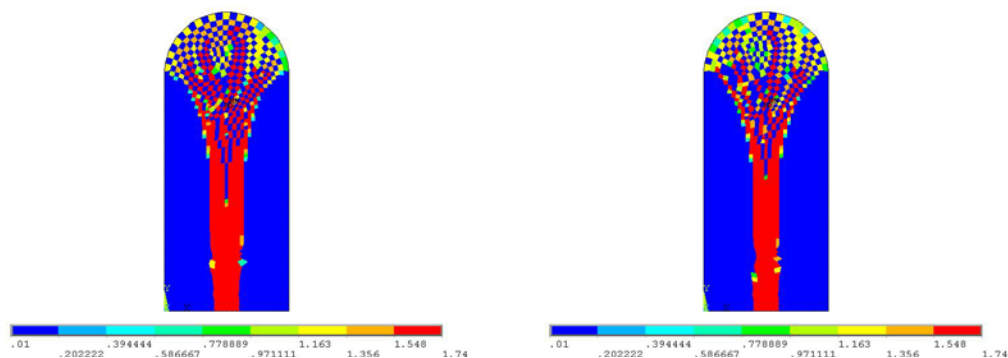


Σχήμα 8.7 Τελικές δομές για το παράδειγμα της τετράγωνης πλάκας για όλες τις δοκιμές που έγιναν

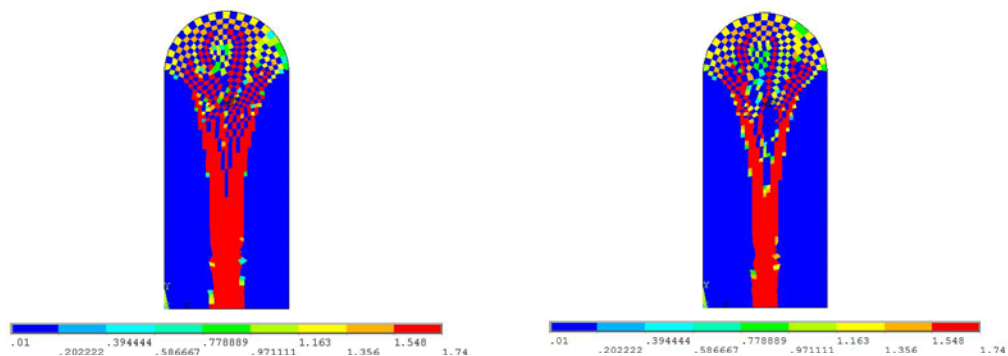
**Παραμορφωσιακό
μοντέλο**



**Ενεργειακό
Μοντέλο**



**Ενεργειακό
Μοντέλο για
υπερφόρτιση**



Σχήμα 8.8 Τελικές δομές για το παράδειγμα της τυπικής γεωμετρίας ισχίου για όλες τις δοκιμές που έγιναν

Από τη σύγκριση των τελικών δομών, στην περίπτωση της πλάκας, που προέκυψαν από τις δύο δοκιμές που πραγματοποιήθηκαν με το παραμορφωσιακό μοντέλο οστικής ανακατασκευής εξάγεται το συμπέρασμα ότι το όριο αναφοράς καθόρισε τη μορφή της τελικής δομής (πάχος τελικής κολώνας). Η διαφορά στο αποτέλεσμα δεν αναιρεί απαραίτητα την ορθότητα σε κάποια από τις δύο υποθέσεις. Το όριο αναφοράς μπορεί να θεωρηθεί ότι εξαρτάται από την τοπολογία, το είδος και το στάδιο ανάπτυξης του οστού, ενώ η εικασία ότι διαφέρει ανάλογα με τον οργανισμό δεν μπορεί να αντικρουστεί.

Παρατηρείται επίσης, ότι και στα δύο μοντέλα που χρησιμοποίησαν την πυκνότητα τροπικής ενέργειας, αύξηση του μέτρου ελαστικότητας οδήγησε στη συσσωμάτωση των κολώνων.

Στον Πίνακα 8.3 που ακολουθεί φαίνονται οι τελικές τιμές μάζας για όλες τις δοκιμές τόσο για την τετράγωνη πλάκα όσο και για την τυπική γεωμετρία ισχίου.

Πίνακας 8.3 Τελική μάζα για όλες τις δοκιμές και τις γεωμετρίες

Μεθοδος	Σχέση Μέτρου Ελαστικότητας & πυκνότητας (MPa)	Όριο Αναφοράς	Τελική Μάζα (gr)	
			Πλάκα	Ισχίο
Παραμορφωσιακό Μοντέλο	$3252.7\rho^3$	3000 μ strain για $\rho=0.8\text{gr}/\text{cm}^3$	5.677	0.707
		2000 μ strain για $\rho=0.8\text{gr}/\text{cm}^3$	7.723	0.942
Ενεργειακό Μοντέλο	$100\rho^2$	0.25J/gr	5.130	0.724
	$3790\rho^3$	0.006J/gr	4.295	0.636
Ενεργειακό Μοντέλο για υπερφόρτιση	$100\rho^2$	0.25J/gr	5.199	0.758
	$3790\rho^3$	0.006J/gr	4.126	0.622

Από τον παραπάνω πίνακα, φαίνεται ότι η χρήση δευτεροβάθμιου όρου για πρόβλεψη υπερφόρτισης δεν οδήγησε σε διαφορετικές τελικές μάζες σε σχέση με το μοντέλο που έλαβε υπόψη του μόνο την πυκνότητα τροπικής ενέργειας με γραμμικό συσχετισμό.

Τελικά, παρατηρείται ότι στα ενεργειακά μοντέλα στην πλάκα προέκυψαν παραπλήσιες μάζες αλλά διαφορετικές μορφές, ενώ στην τυπική γεωμετρία ισχίου είναι κοντινές και οι τιμές της τελικής μάζας αλλά και η τελική μορφή. Αυτό οφείλεται στη μακρόστενη γεωμετρία και τη συμμετρία της φόρτισης κατά τον άξονα y στην περίπτωση του ισχίου.

Εν κατακλείδι, έχει μεγάλη σημασία ο προσδιορισμός των ρεαλιστικών φορτίσεων (ακόμα και το ίδιο το βάρος των οστών) καθώς και η ρύθμιση συντελεστών που να πιστοποιούνται από πειραματικά αποτελέσματα και όχι από προσεγγίσεις για την εφαρμογή των υπό μελέτη θεωριών σε «πραγματικά οστά».

Βιβλιογραφικές Πηγές

- [1] Βιοϊατρική Τεχνολογία, Πρόχειρες σημειώσεις του μαθήματος, Χρ. Προβατίδης Επ. Καθηγητής ΕΜΠ, Αθήνα 2000
- [2] Skeletal Tissue Mechanics, R. Bruce Martin, David B. Burr, Neil A. Sharkey, εκδόσεις Springer, 1998
- [3] Οστεοπόρωση, Ι. Λυρίτης, Αθήνα 1998
- [4] Πεπερασμένα Στοιχεία στη Μηχανολογία, Α.Κανάραχος Καθηγητής ΕΜΠ και Χρ. Προβατίδης Επ. Καθηγητής ΕΜΠ, εκδόσεις Παπασωτηρίου, Αθήνα 2000
- [5] Quantitative response of bone mechanical stress. R. T. Hart, Phd, 1983.
- [6] Relationships Between Loading History and Femoral Cancellous Bone Architecture, D.R. Carter, T.E. Orr, D.P. Fyhrie, J. Biomechanics Vol. 22, 1989, pp 231-244
- [7] Biomechanical model of vertebra based on bone remodeling, Janko D. Jovanovic, Miomir Lj. Jovanovic, Medicine and Biology Vol. 11, 2004, pp. 35-39
- [8] A study of the effect of non-linearities in the equation of bone remodeling, Zhu Xingua, Gong He, Zhu Dong, Gao Bingzhao, J. Biomechanics Vol. 35, 2002, pp 951-960
- [9] Computer prediction of adaptive bone remodeling around noncemented femoral prostheses : the relationship between damage-based and strain-based algorithms, Brian P. McNamara, David Taylor, Patrick J. Prendergast, Med. Eng. Phys. Vol. 19, No. 5, pp. 454-463, 1997
- [10] Effects of mechanical loading on the profile of human femoral diaphyseal geometry, T. Mittlmeier, C. Mattheck, F. Dietrich, Med. Eng. Phys. 1994, Vol. 16
- [11] A three-dimensional finite analysis of adaptive remodeling in the proximal femur, M. A. Stupler, B. D. Reddy, G. R. Starke, A. Spirakis, J. Biomechanics Vol. 30, 1997, pp. 1063-1067
- [12] Correlation between pre-operative periprosthetic bone density and post-operative bone loss in THA can be explained by strain-adaptive remodeling, J. Biomechanics 32, 1999, pp. 695-703
- [13] Application of an anisotropic bone-remodeling model based on a damage-repair theory to the analysis of the proximal femur before and after total hip replacement, M. Doblare, J.M. Garcia, J. Biomechanics 34, 2001, pp.1157-1170

- [14] Bone remodeling simulation: a tool for implant design, J.M. Garcia, M. Doblare, J. Cegonino, Computational Material Science 25, 2002, pp. 100-114
- [15] Handbook Of Bone Mechanics, S.C. Cowin, CRC Press, Inc, 1989
- [16] A mathematical model for simulating the bone remodeling process under mechanical stimulus, Jianying Li, Haiyan Li, Li Shi, Alex S.L. Fok, Cemal Ucer, Hugh Devlin, Keith Horner, Nisk Silikas, Dental Materials, 2006
- [17] Comparison of two numerical approaches for bone remodeling, G. Chen, M. Perret, M.Pearcy, D.L.S. McElwain, Medical Engineering & Physics Vol. 29, 2007, pp 134-139
- [18] Μηχανική Παραμορφώσιμων Σωμάτων II, Γ.Ι.Τσαμασφύρος Αναπλ. Καθηγητής ΕΜΠ, εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 1991
- [19] Εγχειρίδια χρήσης (Help Manuals & Tutorials) του πακέτου λογισμικού ANSYS (εκδόσεις 10)
- [20] F. Gaynor Evans, “Methods of studying the biomechanical significance of bone form”
- [21] J. D. Currey, “The Adaptation of Bones to Stress”, J. Theoret. Biol. (1968):20, 91-106
- [22] Shame I.H & Cozzarelli F.A.; Elastic and Inelastic Stress Analysis; Prentice Hall,1992
- [23] Μυλωνάς Κ.Π; Μηχανική Παραμορφώσιμων σωμάτων; ΕΜΠ 1992
- [24] Beer and Watson; Introduction to Finite and Boundary Element Methods for Engineers; Juhn Wiley & sons, 1992
- [25] Reddy J.N ; Finite Element Method; McGrawHill, 1993
- [26] Gjelsvik, “Bone remodeling and piezoelectricity — I”, J. Biomechanics, vol. 6, 1973, pp. 69-77
- [27] Mette Bagge, “Time Simulation of Bone Adaptation”
- [28] Adaptive bone-remodeling theory applied to prosthetic-design analysis, R. Huiskes, H. Weinans, H. J. Grootenboer, M. Dalstra, B. Fudala And T. J. Slooff, *J. Biomechanics*, vol. 20, 1987, pp. 1135-1150
- [29] A physiological approach to the simulation of bone remodeling as a self-organizational control process, M. G. Mullender, R. Huiskes And H. Weinans, *J. Biomechanics*, Vol. 27, No. 11, Pp. 1389- 1394. 1994
- [30] The Behavior Of Adaptive Bone-Remodeling Simulation Model, H. Weinans, R. Huiskes and H. J. Grootenboert, *J Biomechanics* Vol. 25, No. 12, Pp. 1425-1441. 1992.

- [31] Observations Of Convergence And Uniqueness Of Node-Based Bone Remodeling Simulations, Kenneth J. Fischer, Chris R. Jacobs, Marc E. Levenston, And Dennis R. Carter, *Annals Of Biomedical Engineering*, Vol. 25, Pp. 261-268, 1997
- [32] Numerical instabilities in bone remodeling simulations: The advantages of a node-based finite element approach, Christopher R. Jacobs, Marc E. Levenston, Gary S. Beaupre, Juan C. Sirno and Dennis R. Carter, *J. Biomechanics* Vol. 28. No. 4. pp. 449-459, 1995

Πηγές στο Διαδίκτυο

<http://www.ansys.com>

<http://www.sciencedirect.com>