

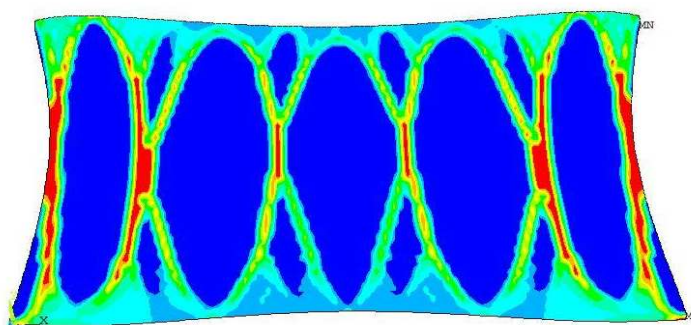
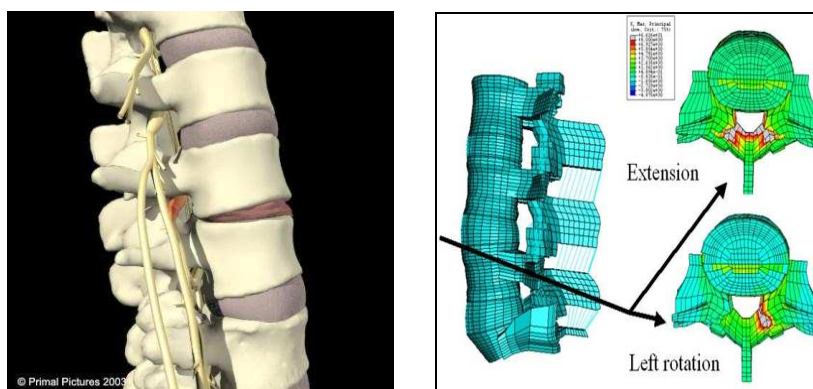


Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Μηχανολογικών Κατασκευών & Αυτομάτου Ελέγχου

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Ανάπτυξη μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων για τη μελέτη της οστικής ανακατασκευής βραχέων οστών»

Σάββα Γεώργιος



Επιβλέπων: Χρ. Προβατίδης
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Νοέμβριος 2007

Πρόλογος

Ο κλάδος της μηχανικής εμφανίζει μεγάλο εύρος εφαρμογών τόσο ως αυτόνομη επιστήμη όσο και σε συνδυασμό με κλάδους άλλων επιστημών. Στα πλαίσια αυτά, ευρεία εφαρμογή παρουσιάζει τα τελευταία χρόνια ο κλάδος της εμβιομηχανικής που επιδιώκει να συνδυάσει τις γνώσεις μηχανικής και ιατρικής, προσανατολισμένες προς όφελος του ανθρώπου. Το φυσικό αντικείμενο μελέτης, για παράδειγμα ένα ανθρώπινο οστό, προσομοιώνεται μέσω ενός υπολογιστικού μοντέλου, η μελέτη του οποίου προσφέρει αξιόλογα συμπεράσματα για το πρώτο. Τη μεγαλύτερη ώθηση στην προσπάθεια αυτή προσέφερε αναμφισβήτητα η ραγδαία τεχνολογική εξέλιξη των υπολογιστών, η οποία κατέστησε δυνατή και σύντομη τη μαθηματική επίλυση των αντίστοιχων μοντέλων. Στην εργασία αυτή μελετάται η ιδιότητα των οστών να αντιδρούν στη μηχανική φόρτιση που δέχονται στην επιφάνειά τους, γνωστή ως οστική ανακατασκευή. Στα πλαίσια, λοιπόν, της παραπάνω μελέτης, επιχειρήθηκε η ανάπτυξη ενός μοντέλου για τη μελέτη της οστικής ανακατασκευής και η εφαρμογή του σε διδιάστατη προσεγγιστική τομή σπονδύλου αλλά και σε τριδιάστατη πραγματική γεωμετρία. Σκοπός της εργασίας αυτής είναι η ανάλυση του μηχανισμού της οστικής ανακατασκευής, η διερεύνηση των παραμέτρων της διαφορικής εξίσωσης που τη διέπει και η εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων για την μετέπειτα εφαρμογή της σε διαφορετικές συνθήκες φόρτισης και σε διαφορετικές γεωμετρίες.

Κλείνοντας θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Αναπληρωτή Καθηγητή του τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών του Ε.Μ.Π κύριο Χριστόφορο Προβατίδη για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε στην ανάθεση της ακόλουθης εργασίας και τη συνεργασία που αναπτύχθηκε. Ιδιαίτερες ευχαριστίες θα ήθελα να εκφράσω στους υποψήφιους διδάκτορες Κλειώ Βόσου και Ιωάννη Κουκούλη για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγηση που μου παρείχαν σε όλη τη διάρκεια της εργασίας αυτής καθώς και τα υπόλοιπα μέλη του εργαστηρίου. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω το συνάδελφο και εκλεκτό φίλο Ευστράτιο Σπαθάρη για τη διαρκή υποστήριξη που μου παρείχε, αλλά και για την αρμονική συνεργασία τόσων χρόνων.

Περιεχόμενα

Πρόλογος.....	iii
Περιεχόμενα	iv
Λίστα Σχημάτων.....	vi
Λίστα Πινάκων.....	ix
Περίληψη.....	xi
Κεφάλαιο 1ο Εμβιομηχανική του οστού.....	1
1.1 Εισαγωγή – Μορφολογία και σύσταση οστού	3
1.2 Μηχανικές ιδιότητες οστού	6
1.2.1 Μηχανική αντοχή-δυσκαμψία οστού και δημιουργία καταγμάτων.....	6
1.2.2 Μηχανικές ιδιότητες φλοιώδους οστού	8
1.2.3 Μηχανικές ιδιότητες σπογγώδους οστού	9
Κεφάλαιο 2ο Ανατομία σπονδυλικής στήλης και οστεοπόρωση.....	11
2.1 Σπόνδυλος και σπονδυλική στήλη	13
2.2 Οστεοπόρωση.....	14
Κεφάλαιο 3ο Γενικά για τα μοντέλα οστικής ανακατασκευής	17
3.1 Θεωρίες οστικής ανακατασκευής.....	19
3.1.1 Φαινομενολογικά μοντέλα	19
3.1.2 Μηχανιστικά μοντέλα	19
3.2 Επισκόπηση κύριων θεωριών οστικής ανακατασκευής.....	20
Κεφάλαιο 4ο Μελέτες σχετικές με την οστική ανακατασκευή.....	25
4.1 Ιστορική αναδρομή στις πρώτες θεωρίες οστικής ανακατασκευής	27
4.2 Ιστορική αναδρομή στις υποθέσεις σχετικά με τους μηχανισμούς που εκκινούν την οστική ανακατασκευή	29
4.3 Υπολογιστικά μοντέλα προσομοίωσης οστικής ανακατασκευής	31
4.3.1 Με βάση την πυκνότητα τροπικής ενέργειας.....	31
4.3.2 Με βάση στη θεωρία των μικρορωγμάτων.....	35
4.3.3 Σε μηριαίο οστό.....	37
4.3.4 Εφαρμογή οστικής ανακατασκευής σε εμφυτεύματα-προσθέσεις	40
4.3.5 Σε σπόνδυλο	42
4.3.6 Προβλήματα υπολογιστικών μεθόδων	46
4.3.7 Οστική Ανακατασκευή ως βελτιστοποίηση.....	48
4.3.8 Εξωτερική ανακατασκευή οστού	50
Κεφάλαιο 5ο Μοντέλο οστικής ανακατασκευής με πυκνότητα τροπικής ενέργειας.....	53
5.1 Πυκνότητα τροπικής ενέργειας	55
5.2 Επισκόπηση μοντέλου οστικής ανακατασκευής.....	59
5.2.1 Ανάλυση της διαφορικής εξίσωσης οστικής ανακατασκευής 5.16.....	60
5.3 Μέτρο ελαστικότητας οστού.....	61
5.4 Σύγκλιση αριθμητικής διαδικασίας οστικής ανακατασκευής.....	62
Κεφάλαιο 6ο Αριθμητική επίλυση Adams Bashforth - Runge Kutta	63
6.1 Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση	65
6.1.1 Μέθοδοι πολλαπλών βημάτων - Adams-Bashforth τέταρτης τάξης.....	66
6.1.2 Μέθοδος Runge-Kutta τέταρτης τάξης	68
Κεφάλαιο 7ο Ανάλυση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων	69
7.1 Μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων.....	71
7.1.1 Μητρώο δυσκαμψίας K.....	73
7.1.2 Υπολογισμός Ισοπαραμετρικών Πεπερασμένων Στοιχείων	74
7.1.3 Επίλυση του συστήματος	75
7.2 Χρήση Πεπερασμένων Στοιχείων στην οστική ανακατασκευή.....	76

Κεφάλαιο 8ο Εφαρμογή οστικής ανακατασκευής σε διδιάστατο μοντέλο σπονδύλου	79
8.1 Παρουσίαση διδιάστατου μοντέλου προσομοίωσης σπόνδυλου.....	81
8.1.1 Νεαρό άτομο	82
8.1.2 Ηλικιωμένο άτομο	84
8.2 Παρουσίαση αποτελεσμάτων του διδιάστατου μοντέλου σπονδύλου	86
8.2.1 Νεαρό άτομο (μοντέλο χωρίς εισαγωγή μη γραμμικοτήτων)	86
8.2.2 Νεαρό άτομο-μοντέλο με εισαγωγή μη γραμμικοτήτων	93
8.2.3 Ηλικιωμένο άτομο.	109
8.3 Κριτήρια αξιολόγησης αποτελεσμάτων	115
8.4 Αξιολόγηση αποτελεσμάτων	116
8.4.1 Νεαρό άτομο χωρίς εισαγωγή μη γραμμικοτήτων	116
8.4.2 Νεαρό άτομο με εισαγωγή μη γραμμικοτήτων	124
8.4.3 Ηλικιωμένο άτομο	132
Κεφάλαιο 9ο Εφαρμογή οστικής ανακατασκευής σε τριδιάστατο μοντέλο σπονδύλου	135
9.1 Ανάλυση τριδιάστατου μοντέλου σπονδύλου	137
9.1.1 Ορισμός αναφοράς k	141
9.1.2 Ορισμός συντελεστή B	142
9.2 Παρουσίαση αποτελεσμάτων τριδιάστατου σπονδύλου	142
9.2.1 Εκκίνηση από υλικό 7 ($\rho_0=0,628 \text{ g/cm}^3$).....	142
9.2.2 Εκκίνηση από υλικό 3 ($\rho_0=0,178 \text{ g/cm}^3$).....	149
9.2.3 Εκκίνηση από υλικό 9 ($\rho_0=1,128 \text{ g/cm}^3$).....	156
9.3 Αξιολόγηση αποτελεσμάτων τριδιάστατου σπονδύλου	161
9.3.1 Εκκίνηση από υλικό 7 ($\rho_0=0,628 \text{ g/cm}^3$).....	161
9.3.2 Εκκίνηση από υλικό 3 ($\rho_0=0,178 \text{ g/cm}^3$)	163
9.3.3 Εκκίνηση από υλικό 9 ($\rho_0=1,128 \text{ g/cm}^3$).....	165
Κεφάλαιο 10ο Σύγκριση-Συμπεράσματα	169
10.1 Τομή σπονδύλου	171
10.2 Τριδιάστατος σπόνδυλος	177
Βιβλιογραφικές Πηγές	185

Λίστα Σχημάτων

Σχήμα 1.1 Μακρύ οστό (επάνω) και δομή του οστέινου ιστού (κάτω)	4
Σχήμα 1.2 Επίδραση ρυθμού παραμόρφωσης στην αντοχή σε εφελκυσμό και το μέτρο ελαστικότητας φλοιώδους οστού	8
Σχήμα 1.3 Αντοχή σε θλίψη & μέτρο ελαστικότητας σπογγώδους οστού συναρτήσει της φαινόμενης πυκνότητας	10
Σχήμα 2.1 Σπονδυλική στήλη του ανθρώπου.....	13
Σχήμα 2.2 Κύρια σημεία εκδήλωσης οστεοπόρωσης	15
Σχήμα 4.1 Κλειστό κελί.....	50
Σχήμα 4.2 Ανοιχτό κελί.....	50
Σχήμα 4.3 Μοντέλο υλικού για το σπογγώδες οστό σύμφωνα με Folgado et al(2004).....	50
Σχήμα 5.1 Διάγραμμα P-δ.	55
Σχήμα 5.2 Περιοχή αναλογίας διαγράμματος P-δ.....	56
Σχήμα 5.3 Διάγραμμα τάσεων-παραμορφώσεων για σπογγώδες και φλοιώδες οστό	56
Σχήμα 5.4 Διάγραμμα διατμητικής τάσης - παραμόρφωσης.....	59
Σχήμα 7.1 Κατάστρωση προβλήματος δοκού σε εφελκυσμό με τριγωνικά πεπερασμένα στοιχεία	73
Σχήμα 7.2 Σημεία ολοκλήρωσης Gauss σε ένα επίπεδο στοιχείο	74
Σχήμα 8.1 Διδιάστατο μοντέλο προσομοίωσης πέμπτου οσφυϊκού σπονδύλου O ₅	81
Σχήμα 8.2 Γεωμετρία πεπερασμένου στοιχείου plane42	81
Σχήμα 8.3 Πολυώνυμο φόρτισης στην άνω επιφυσιακή πλάκα νεαρού ατόμου	82
Σχήμα 8.4 Πολυώνυμο φόρτισης στην κάτω επιφυσιακή πλάκα νεαρού ατόμου	83
Σχήμα 8.5 Φορτίσεις άνω και κάτω επιφυσιακής πλάκας νεαρού ατόμου	84
Σχήμα 8.6 Πολυώνυμο φόρτισης στην άνω επιφυσιακή πλάκα ηλικιωμένου ατόμου	84
Σχήμα 8.7 Πολυώνυμο φόρτισης στην κάτω επιφυσιακή πλάκα ηλικιωμένου ατόμου.....	85
Σχήμα 8.8 Φορτίσεις άνω και κάτω επιφυσιακής πλάκας ηλικιωμένου ατόμου	86
Σχήμα 8.9 Πυκνότητα τροπικής ενέργειας (α) και παραμορφώσεις κατά Von Mises (β) του οστού με την αρχική πυκνότητα ($0,8 \text{ g/cm}^3$)	86
Σχήμα 8.10 Τελική κατανομή (α) πυκνότητας τροπικής ενέργειας και (β) ισοδύναμων παραμορφώσεων	88
Σχήμα 8.11 Τελική κατανομή οστικής πυκνότητας ύστερα από 1400 επαναλήψεις (α) μέση τιμή (β) ανά Π.Σ.	88
Σχήμα 8.12 Κατανομή οστικής πυκνότητας ανά Π.Σ. σε διαφορετικές χρονικές στιγμές της διαδικασίας.....	91
Σχήμα 8.13 Τελική κατανομή (α) πυκνότητας τροπικής ενέργειας και (β) ισοδύναμων παραμορφώσεων κατά Von Mises	94
Σχήμα 8.14 Παραμορφώσεις κατά Von Mises προσαρμοσμένες στο εύρος των αντίστοιχων για $\alpha=1$	95
Σχήμα 8.15 Τελική κατανομή οστικής πυκνότητας ύστερα από 1400 επαναλήψεις	95
Σχήμα 8.16 Κατανομή οστικής πυκνότητας ανά Π.Σ. σε διαφορετικές χρονικές στιγμές της διαδικασίας.....	97
Σχήμα 8.17 Τελική κατανομή της (α) πυκνότητας τροπικής ενέργειας και (β) Ισοδύναμων παραμορφώσεων κατά Von Mises	100

Σχήμα 8.18 Παραμορφώσεις κατά Von Mises προσαρμοσμένες στο εύρος των αντίστοιχων για $\alpha=1$ και B σταθερό	101
Σχήμα 8.19 Τελική κατανομή οστικής πυκνότητας ύστερα από 1400 επαναλήψεις	101
Σχήμα 8.20 Κατανομή οστικής πυκνότητας ανά Π.Σ. σε διαφορετικές χρονικές στιγμές της διαδικασίας	103
Σχήμα 8.21 Τελική κατανομή της (α) πυκνότητας τροπικής ενέργειας και (β) Ισοδύναμων παραμορφώσεων κατά Von Mises.....	104
Σχήμα 8.22 Τελική κατανομή οστικής πυκνότητας ύστερα από 1400 επαναλήψεις	105
Σχήμα 8.23 Κατανομή οστικής πυκνότητας ανά Π.Σ. σε διαφορετικές χρονικές στιγμές της διαδικασίας.....	107
Σχήμα 8.24 Τελική κατανομή της (α) πυκνότητας τροπικής ενέργειας και (β) Ισοδύναμων παραμορφώσεων κατά Von Mises.....	108
Σχήμα 8.25 Τελική κατανομή οστικής πυκνότητας ύστερα από 1400 επαναλήψεις	108
Σχήμα 8.26 Διαφορετικές μορφές συντελεστή B συναρτήσει του χρόνου	109
Σχήμα 8.27 Πυκνότητα τροπικής ενέργειας (α) και παραμορφώσεις κατά Von Mises (β) του οστού με την αρχική πυκνότητα ($0,8 \text{ g/cm}^3$).....	110
Σχήμα 8.28 Τελική κατανομή της (α) πυκνότητας τροπικής ενέργειας και (β) Ισοδύναμων παραμορφώσεων κατά Von Mises.....	111
Σχήμα 8.29 Τελική κατανομή οστικής πυκνότητας ύστερα από 1400 επαναλήψεις	111
Σχήμα 8.30 Κατανομή οστικής πυκνότητας ανά Π.Σ. σε διαφορετικές χρονικές στιγμές της διαδικασίας.....	113
Σχήμα 8.31 Διάγραμμα συνολικής μάζας σπονδύλου	117
Σχήμα 8.32 Διάγραμμα της μάζας του σπονδύλου στις 50 πρώτες επαναλήψεις	117
Σχήμα 8.33 Διάγραμμα της μάζας του σπονδύλου από τις 51 έως τις 265 επαναλήψεις.....	118
Σχήμα 8.34 Διάγραμμα του σπονδύλου από τις 266 έως τις 475 επαναλήψεις.....	119
Σχήμα 8.35 Διάγραμμα του σπονδύλου από τις 476 έως τις 1400 επαναλήψεις.....	119
Σχήμα 8.36 Διάγραμμα λόγου μάζας του σπονδύλου	120
Σχήμα 8.37 Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης F.....	121
Σχήμα 8.38 Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης F για τις επαναλήψεις 1 έως 71.....	121
Σχήμα 8.39 Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης F για τις επαναλήψεις 72 έως 722.....	122
Σχήμα 8.40 Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης F για τις επαναλήψεις 723 έως 1400	122
Σχήμα 8.41 Μέση απαιτούμενη αλλαγή πυκνότητας για κάθε πεπερασμένο στοιχείο έτσι ώστε η διαδικασία να συγκλίνει.....	123
Σχήμα 8.42 Διάγραμμα συνολικής μάζας σπονδύλου για B σταθερό και $\alpha=2,25$	124
Σχήμα 8.43 Διάγραμμα λόγου μάζας του σπονδύλου για B σταθερό και $\alpha=2,25$	125
Σχήμα 8.44 Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης F για B σταθερό και $\alpha=2,25$	126
Σχήμα 8.45 Διάγραμμα συνολικής μάζας σπονδύλου για B(t) εκθετικά μεταβαλλόμενο και $\alpha=1$	127
Σχήμα 8.46 Διάγραμμα λόγου μάζας του σπονδύλου για B εκθετικά μεταβαλλόμενο και $\alpha=1$	128
Σχήμα 8.47 Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης F για B(t) εκθετικά μεταβαλλόμενο και $\alpha=1$	128
Σχήμα 8.48 Διάγραμμα συνολικής μάζας σπονδύλου για B(t) εκθετικά μεταβαλλόμενο και $\alpha=2,25$	129

Σχήμα 8.49 Διάγραμμα λόγου μάζας του σπονδύλου για B εκθετικά μεταβαλλόμενο και $\alpha=2,25$	130
Σχήμα 8.50 Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης F για B εκθετικά μεταβαλλόμενο και $\alpha=2,25$	131
Σχήμα 8.51 Διάγραμμα συνολικής μάζας σπονδύλου ηλικιωμένου ατόμου για B σταθερό και $\alpha=1$	132
Σχήμα 8.52 Διάγραμμα λόγου μάζας του σπονδύλου ηλικιωμένου ατόμου για B σταθερό και $\alpha=1$	133
Σχήμα 8.53 Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης F ηλικιωμένου ατόμου για B σταθερό και $\alpha=1$	133
Σχήμα 8.54 Διαφορά συνολικής μάζας μεταξύ βημάτων 0,03 και 0,06 για τις 50 πρώτες επαναλήψεις.....	134
Σχήμα 9.1 Πεπερασμένο στοιχείο Solid 92.....	139
Σχήμα 9.2 Μοντέλο τριδιάστατου σπονδύλου και εφαρμοζόμενη πίεση	140
Σχήμα 9.3 Τάσεις κατά Von Mises, παραμορφώσεις κατά Von Mises και πυκνότητα τροπικής ενέργειας ύστερα από την εφαρμογή της υπάρχουσας πίεσης	143
Σχήμα 9.4 Διαφορές πυκνοτήτων για τα πρώτα 32.000 πεπερασμένα στοιχεία μεταξύ βημάτων 0,06 και 0,2	144
Σχήμα 9.5 Διαφορές πυκνοτήτων για τα πρώτα 32.000 πεπερασμένα στοιχεία μεταξύ βημάτων 0,2 και 0,6	144
Σχήμα 9.6 Τάσεις κατά Von Mises, παραμορφώσεις κατά Von Mises και πυκνότητα τροπικής ενέργειας για αρχικό υλικό το έβδομο ύστερα από 500 επαναλήψεις.....	145
Σχήμα 9.7 Κατανομή υλικών στο εσωτερικό του σπονδύλου μετά από 100 χρονικές μονάδες.....	148
Σχήμα 9.8 Όγκος κάθε υλικού ως ποσοστό του συνολικού όγκου του σπονδύλου.....	148
Σχήμα 9.9 Μέση πυκνότητα κάθε υλικού μετά την ολοκλήρωση της διαδικασίας της ανακατασκευής.....	149
Σχήμα 9.10 Τάσεις κατά Von Mises, παραμορφώσεις κατά Von Mises και πυκνότητα τροπικής ενέργειας ύστερα από την εφαρμογή της υπάρχουσας πίεσης	150
Σχήμα 9.11 Τάσεις κατά Von Mises, παραμορφώσεις κατά Von Mises και πυκνότητα τροπικής ενέργειας για αρχικό υλικό το τρίτο ύστερα από 750 επαναλήψεις.....	151
Σχήμα 9.12 Κατανομή υλικών στο εσωτερικό του σπονδύλου μετά από 150 χρονικές μονάδες.....	154
Σχήμα 9.13 Όγκος κάθε υλικού ως ποσοστό του συνολικού όγκου του σπονδύλου.....	154
Σχήμα 9.14 Μέση πυκνότητα κάθε υλικού μετά την ολοκλήρωση της διαδικασίας της ανακατασκευής.....	155
Σχήμα 9.15 Τάσεις κατά Von Mises, παραμορφώσεις κατά Von Mises και πυκνότητα τροπικής ενέργειας ύστερα από την εφαρμογή της υπάρχουσας πίεσης	156
Σχήμα 9.16 Τάσεις κατά Von Mises, παραμορφώσεις κατά Von Mises και πυκνότητα τροπικής ενέργειας για αρχικό υλικό το έβδομο ύστερα από 1000 επαναλήψεις.....	157
Σχήμα 9.17 Κατανομή υλικών στο εσωτερικό του σπονδύλου μετά από 150 χρονικές μονάδες.....	159
Σχήμα 9.18 Όγκος κάθε υλικού ως ποσοστό του συνολικού όγκου του σπονδύλου.....	160
Σχήμα 9.19 Μέση πυκνότητα κάθε υλικού μετά την ολοκλήρωση της διαδικασίας της ανακατασκευής.....	161
Σχήμα 9.20 Διάγραμμα συνολικής μάζας σπονδύλου για εκκίνηση με το έβδομο υλικό.....	162

Σχήμα 9.21 Διάγραμμα λόγου μάζας του σπονδύλου για εκκίνηση με το έβδομο υλικό	162
Σχήμα 9.22 Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης F του σπονδύλου για εκκίνηση με το έβδομο υλικό	163
Σχήμα 9.23 Διάγραμμα συνολικής μάζας σπονδύλου για εκκίνηση με το τρίτο υλικό....	164
Σχήμα 9.24 Διάγραμμα λόγου μάζας του σπονδύλου για εκκίνηση με το τρίτο υλικό....	164
Σχήμα 9.25 Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης F του σπονδύλου για εκκίνηση με το τρίτο υλικό	165
Σχήμα 9.26 Διάγραμμα συνολικής μάζας σπονδύλου για εκκίνηση με το ένατο υλικό...	166
Σχήμα 9.27 Διάγραμμα λόγου μάζας του σπονδύλου για εκκίνηση με το ένατο υλικό ...	166
Σχήμα 9.28 Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης F του σπονδύλου για εκκίνηση με το έβδομο υλικό	167
Σχήμα 10.1 Κατανομή οστικής πυκνότητας ύστερα από 1400 επαναλήψεις.....	171
Σχήμα 10.2 Διάγραμμα συνολικής μάζας του σπονδύλου.....	174
Σχήμα 10.3 Αντικειμενικές συναρτήσεις F (σε J/g) ως προς τις επαναλήψεις για τα τέσσερα μελετώμενα μοντέλα νεαρού ατόμου	176
Σχήμα 10.4 Ποσοστό όγκου κάθε υλικού ως προς το συνολικό	178
Σχήμα 10.5 Μέση οστική πυκνότητα κάθε υλικού (σε g/cm ³).....	179
Σχήμα 10.6 Μάζα του σπονδύλου συναρτήσει των επαναλήψεων	181
Σχήμα 10.7 Αντικειμενικές συναρτήσεις F (σε J/g) ως προς τις επαναλήψεις για τα τρία μελετώμενα μοντέλα	182

Λίστα Πινάκων

Πίνακας 1.1 Μέτρα ελαστικότητας φλοιώδους οστού του μηρού	9
Πίνακας 2.1 Δύο Τύποι Οστεοπόρωσης.....	15
Πίνακας 7.1 Διαδικασία Υποδιαίρεσης και Επανένωσης Πεπερασμένων Στοιχείων	75
Πίνακας 8.1 Δείκτης δυσκαμψίας \bar{K} για $\alpha=1$ και $\alpha=2,25$ και ποσοστιαία διαφορά τους	126
Πίνακας 9.1 Σχέση σύνδεσης Πυκνότητας-Μέτρου Ελαστικότητας	138
Πίνακας 9.2 Μέτρα Ελαστικότητας των εννέα υλικών που συνθέτουν τον ανθρώπινο σπόνδυλο2	138
Πίνακας 10.1 Τελική μάζα σπονδύλου για τις πέντε πραγματοποιούμενες δοκιμές.....	175
Πίνακας 10.2 Δείκτης δυσκαμψίας K για τις πέντε πραγματοποιούμενες δοκιμές.....	177
Πίνακας 10.3 Τελική μάζα σπονδύλου για διαφορετικό υλικό εκκίνησης	181
Πίνακας 10.4 Δείκτης δυσκαμψίας K για τις τρεις πραγματοποιούμενες δοκιμές.....	183

Περίληψη

Βασικό αντικείμενο μελέτης της παρούσας διπλωματικής εργασίας αποτελεί η ιδιότητα του οστίτη ιστού να ανακατασκευάζεται ανάλογα με τις μηχανικές συνθήκες του περιβάλλοντός του. Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται οστική ανακατασκευή (*Bone remodeling*) και είναι υπεύθυνη, πέραν της προσαρμογής στο μηχανικό ερέθισμα, και για την ανάπτυξη, τη διατήρηση και τη συντήρηση του οστού. Η αρκετά ενδιαφέρουσα αυτή ιδιότητα εξαρτάται από δύο ειδών παράγοντες, αρκετά διαφορετικούς μεταξύ τους. Το πρώτο είδος περιλαμβάνει βιολογικούς παράγοντες, όπως οι ορμονικές μεταβολές ενώ το δεύτερο περιλαμβάνει μηχανικούς παράγοντες, όπως οι φορτίσεις. Το οστό, ανταποκρινόμενο στις μηχανικές φορτίσεις, υφίσταται μορφολογικές αλλαγές τροποποιώντας την εξωτερική γεωμετρία του (*surface remodeling*) και πολύ περισσότερο μεταβάλλοντας την εσωτερική δομή του μέσω αλλαγών στην οστική του πυκνότητα (*internal remodeling*). Το ζήτημα της οστικής ανακατασκευής λόγω της σύνθετης φύσης του, έχει απασχολήσει κατά καιρούς μελετητές από διάφορους επιστημονικούς κλάδους. Αρχικά, οι περισσότερες προσπάθειες ήταν προσανατολισμένες στην ποιοτική προσέγγιση του όλου προβλήματος και η εξαγωγή συμπερασμάτων ως προς το ποιο μηχανικό μέγεθος αποτελεί τη διέγερση που εγείρει την ανακατασκευή. Προτάθηκαν διάφορα μοντέλα προσομοίωσης της οστικής ανακατασκευής, με κύρια διαφορά τους το μηχανικό μέγεθος γύρω από το οποίο αναπτύσσεται η εκάστοτε θεωρία. Κύρια παραδείγματα τέτοιων θεωριών αποτελούν το παραμορφωσιακό μοντέλο, το τασικό μοντέλο, το μοντέλο πυκνότητας τροπικής ενέργειας και η θεωρία των μικροβλαβών. Η πρόοδος όμως της επιστήμης των υπολογιστών τις τελευταίες δεκαετίες, κατέστησε δυνατή και την προσπάθεια ποσοτικής συσχέτισης μηχανικής διέγερσης-οστικής ανακατασκευής. Στα πλαίσια της συγκεκριμένης διπλωματικής εργασίας, μελετήθηκε το μοντέλο πυκνότητας τροπικής ενέργειας ως προς τη διαφορική εξίσωση που αντιπροσωπεύει την εσωτερική οστική ανακατασκευή αλλά και ως προς την εφαρμογή του σε βραχέα οστά.

Στο Κεφάλαιο 1, περιγράφεται αναλυτικά η μορφολογία του οστίτη ιστού και οι μηχανικές του ιδιότητες. Με τον τρόπο αυτό παρατίθενται τα κύρια στοιχεία τόσο βιολογίας όσο και μηχανικής που συσχετίζονται με το υπό μελέτη φαινόμενο.

Εφόσον η εφαρμογή του περιγραφόμενου μοντέλου σε βραχέα οστά αποτελεί το κυρίως μέρος της εν λόγω έρευνας επιχειρείται στο Κεφάλαιο 2 μια συνοπτική περιγραφή της ανατομίας των σπονδύλων, οι οποίοι αποτελούν κύριο εκπρόσωπο βραχέων οστών.

Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζονται με χρονολογική σειρά οι βασικές θεωρίες οστικής ανακατασκευής ενώ συνοδεύονται και από μια συνοπτική αξιολόγησή τους.

Στο Κεφάλαιο 4 καταγράφονται μερικές από τις σημαντικότερες πειραματικές μελέτες γύρω από την ανακατασκευή των οστών και τα κύρια υπολογιστικά μοντέλα

προσομοίωσής της. Επιπρόσθετα, πραγματοποιείται μία εμβάθυνση ως προς τα προβλήματα των χρησιμοποιούμενων υπολογιστικών μεθόδων, την προσέγγιση της ανακατασκευής ως διαδικασίας βελτιστοποίησης αλλά και της χρησιμότητάς της στην έρευνα γύρω από ιατρικά εμφυτεύματα.

Στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζεται εκτενώς το χρησιμοποιούμενο μοντέλο οστικής ανακατασκευής βασισμένο στην πυκνότητα τροπικής ενέργειας και πραγματοποιείται μια πρώτη ανάλυση της διαφορικής εξίσωσης που το διέπει.

Το Κεφάλαιο 6 παρουσιάζει τη μέθοδο αριθμητικής επίλυσης που χρησιμοποιήθηκε για την εφαρμογή της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης σε γεωμετρικά σχήματα προσεγγιστικής τομής αλλά και πραγματικού σπονδύλου.

Η εφαρμογή της διαφορικής εξίσωσης στα προαναφερόμενα σχήματα προϋποθέτει τον υπολογισμό των αντίστοιχων μηχανικών μεγεθών στο εσωτερικό των γεωμετριών αυτών. Για να είναι κάτι τέτοιο υλοποιήσιμο, απαιτείται η διακριτοποίηση της συνολικής γεωμετρίας σε επιμέρους μικρότερες γεωμετρίες. Το υπολογιστικό εργαλείο που χρησιμοποιήθηκε για το σκοπό αυτό είναι η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (*finite element method*) και περιγράφεται διεξοδικά στο Κεφάλαιο 7.

Το Κεφάλαιο 8 περιλαμβάνει την εφαρμογή της οστικής ανακατασκευής σε διδιάστατο μοντέλο σπονδύλου, τη μελέτη της εισαγωγής μη γραμμικοτήτων στη διαφορική της εξίσωση και την αξιολόγηση των εξαγόμενων αποτελεσμάτων.

Στο Κεφάλαιο 9 παρουσιάζεται η εφαρμογή του μοντέλου της οστικής ανακατασκευής σε πραγματικό τριδιάστατο σπόνδυλο, η μελέτη εκκίνησης της διαδικασίας με διαφορετικό αρχικό υλικό και η αξιολόγηση των αντίστοιχων αποτελεσμάτων.

Τέλος, στο Κεφάλαιο 10 συνοψίζονται τα βασικά συμπεράσματα της προηγηθείσας μελέτης έτσι ώστε να είναι διαθέσιμα για περαιτέρω έρευνα της οστικής ανακατασκευής προς κάθε κατεύθυνση, με γνώμονα τη βελτίωση της ανθρώπινης ζωής.

Κεφάλαιο 1ο Εμβιομηχανική του οστού

1.1 Εισαγωγή – Μορφολογία και σύσταση οστού

Η Εμβιομηχανική και γενικότερα η βιοϊατρική τεχνολογία είναι ένας σύγχρονος κλάδος των επιστημών ο οποίος επιδιώκει να συνδυάσει τις γνώσεις της ιατρικής και της μηχανικής με σκοπό την πρόβλεψη και θεραπεία και, σε ένα ευρύτερο πλαίσιο, τη βελτίωση της ανθρώπινης ζωής [1].

Στην παρούσα εργασία, αντικείμενο μελέτης αποτελούν τα ανθρώπινα οστά. Τα οστά είναι ιδιαίτερα ενεργά όργανα με πολύπλοκη αιμάτωση, θεμέλιο ουσία που αποτιτανώνεται και εξειδικευμένους κυτταρικούς πληθυσμούς (οστεοκύτταρα, οστεοβλάστες και οστεοκλάστες κ.λ.π.) που είναι υπεύθυνοι για τη συνεχή συντήρηση και ανακατασκευή τους. Βασικές λειτουργίες των οστών είναι: προστασία και στήριξη εσωτερικών οργάνων, παροχή περιοχών πρόσφυσης των μυών, δημιουργία στέρεων αρθρούμενων μονάδων και διευκόλυνση της δράσης των μυών και της κίνησης ολόκληρου του σώματος.

Η μορφή των οστών ποικίλει ανάλογα την περιοχή που ευρίσκονται και τη μηχανική λειτουργία που επιτελούν. Διακρίνονται σε μακρά (π.χ. μηριαίο οστό, κνήμη) και σε βραχέα αυλοειδή οστά (π.χ. μετακάρπια και σπόνδυλοι) και σε επίπεδα οστά (π.χ. οστό της ωμοπλάτης) [2].

Από αρχιτεκτονικής πλευράς, υπάρχουν δύο μορφές οστίτη ιστού:

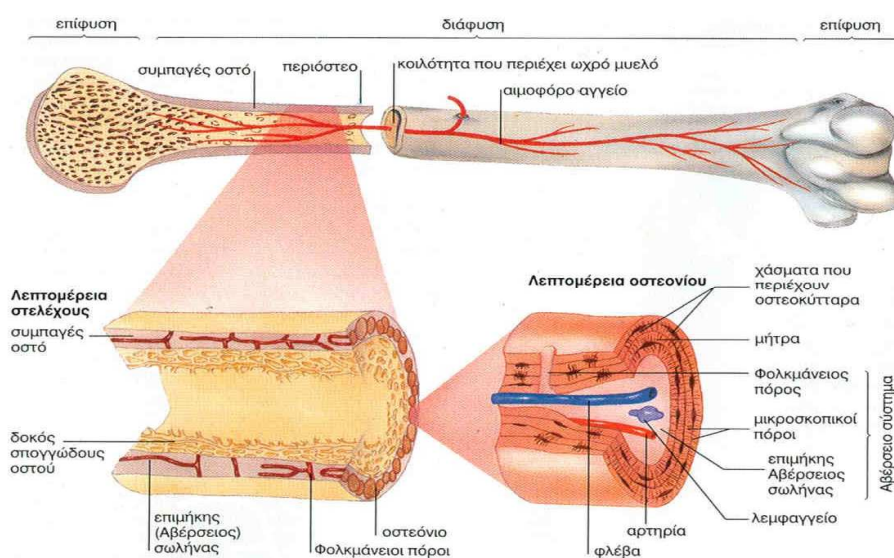
- Το φλοιώδες οστό και
- Το σπογγώδες οστό

Το 80% των οστών αποτελείται από φλοιώδες οστό. Και οι δύο μορφές οστού έχουν την ίδια σύσταση και δομή, αλλά η πυκνότητα του φλοιώδους είναι πολύ μεγαλύτερη από αυτή του σπογγώδους (η μέγιστη πυκνότητα που μπορεί να φτάσει το σπογγώδες οστό ισούται περίπου με την πυκνότητα του φλοιώδους). Αυτό έχει ως συνέπεια να διαφέρει και το πορώδες τους. Ως πορώδες (porosity) ενός υλικού ορίζεται ο λόγος των εσωτερικών κενών προς το συνολικό όγκο του. Όντως το φλοιώδες οστό έχει μικρότερο πορώδες ($\approx 10\%$) σε σχέση με το σπογγώδες (50-90%). Τέλος, το σπογγώδες οστό συχνά έχει υψηλότερο ρυθμό μεταβολικής δραστηριότητας και φαίνεται να ανταποκρίνεται καλύτερα στις μεταβολές των μηχανικών φορτίσεων.

Η διάφυση των μακρών υαλοειδών οστών αποτελείται από έναν εξωτερικό κύλινδρο φλοιώδους οστού που περιβάλλει τον μυελικό αυλό και έχει μικρή ποσότητα σπογγώδους οστού. Στις μεταφύσεις των ίδιων οστών το πάχος του φλοιώδους οστού λεπτύνεται, και μεγάλη ποσότητα σπογγώδους οστού καταλαμβάνει τη μυελική κοιλότητα. Τα βραχέα και πλατέα οστά αποτελούνται από σπογγώδες οστό που περιβάλλεται από μία λεπτή επιφάνεια φλοιώδους οστού.

Κατά την ανάπτυξη του οστού, τα κατάλληλα κύτταρα (οστεοβλάστες) σχηματίζουν επιφάνειες από μη αποτιτανωμένη θεμέλιο ουσία, το οστεοειδές, πάνω στις επιφάνειες της ήδη αποτιτανωμένης ουσίας. Σημειώνεται εδώ ότι με τον όρο αποτιτανώση εννοούμε την εναπόθεση στους ιστούς αλάτων ασβεστίου. Αμέσως μετά το σχηματισμό του το οστεοειδές μεταλλάσσεται. Το οστεοειδές είναι μαλακό, εύπλαστο και παρουσιάζει μειωμένη μηχανική αντοχή. Έτσι, σε παθολογικές καταστάσεις όπου δε γίνεται μετάλλωσή του παρουσιάζονται κατάγματα (οστεομαλακία) και παραμορφώσεις (ραχιτισμός). Ως προς τη σύστασή του, το οστεοειδές αποτελείται από ένα δίκτυο ινών κολλαγόνου τύπου I, που βρίσκεται σε ένα περιβάλλον από γλυκοζαμινογλυκάνες, οι οποίες περιέχουν ειδικές γλυκοπρωτεΐνες (για παράδειγμα οστεοκαλσίνη). Ανάλογα με τον τρόπο που διατάσσονται οι ίνες κολλαγόνου, για να σχηματίσουν το οστεοειδές, διακρίνονται δύο τύποι μεταλλωμένου οστού:

- *άμορφο ή δικτυωτό*. Πρόκειται για ανώριμο, πρωτογενές οστό, με ακανόνιστη διάταξη των ινών κολλαγόνου και μετάλλωση. Παρουσιάζεται στον εμβρυϊκό και αναπτυσσόμενο σκελετό (μέχρι το 3-4 ηλικιακό έτος) αλλά και στη μεταφυσική πλευρά της επίφυσης. Επίσης, σε περιπτώσεις αυξημένου οστικού μεταβολισμού όπως σε κατάγματα, μεταβολικά νοσήματα των οστών, νεοπλάσματα και φλεγμονώδεις παθήσεις.
- *πεταλώδες*. Πρόκειται για ώριμο, δευτερογενές οστό, με κανονική διάταξη των ινών κολλαγόνου και μετάλλωση



Σχήμα 1.1 Μακρύ οστό (επάνω) και δομή του οστέινου ιστού (κάτω)

Το άμορφο οστό αντικαθίσταται γρήγορα από ώριμο πεταλώδες οστό που παρουσιάζει μικρότερη κυτταροβρίθεια και μεταβολική δραστηριότητα, ταυτόχρονα όμως και μεγαλύτερη μηχανική αντοχή.

Στο Σχήμα 1.1 φαίνεται η δομή ενός μακρέως οστού. Τα κύτταρα που είναι υπεύθυνα για το σχηματισμό, συντήρηση-επιδιόρθωση και προσαρμογή του οστίτη ιστού μπορούν να ταξινομηθούν σε τέσσερα είδη, ως ακολούθως:

- ο *Αδιαφοροποίητα κύτταρα* ή πρώιμες μορφές κυττάρων. Πρόκειται για μικρά, μονοπύρηνια και με λίγα οργανίδια κύτταρα που βρίσκονται στα κανάλια των οστών, στο ενδόστεο και το περίοστέο. Αν δεχθούν κατάλληλο ερέθισμα διαφοροποιούνται σε οστεοβλάστες .
- ο Οι *οστεοβλάστες* είναι κυβοειδή κύτταρα με ένα συνήθως έκκεντρο πυρήνα, περιέχουν μεγάλο αριθμό συνθετικών οργανιδίων, εκτεταμένο ενδοπλασματικό δίκτυο και μεμβράνες του Golgi. Βρίσκονται πάνω στις ελεύθερες οστικές επιφάνειες και όταν διεγερθούν αλλάζουν σχήμα (στρογγυλό, ελλειψοειδές ή πολυεδρικό), σχηματίζουν νέα οστική οργανική θεμέλιο ουσία και ρυθμίζουν την αποτιάνωση. Παρουσιάζουν κυτταροπλασματικές προσεκβολές που επεκτείνονται μέσα στην αποτιτανωμένη θεμέλιο ουσία και φέρνουν σε επικοινωνία τους οστεοβλάστες με τα οστεοκύτταρα. Όταν απενεργοποιηθούν, λαμβάνουν επίπεδο σχήμα και σχηματίζουν τα επενδυματικά κύτταρα των ελεύθερων οστικών επιφανειών ή αυτοπεριβάλλονται από αποτιτανωμένη θεμέλιο ουσία και μετατρέπονται σε οστεοκύτταρα.
- ο Οι *οστεοκλάστες* σχηματίζονται από συνένωση πολλαπλών μονοπύρηνων κυττάρων που προέρχονται από το μυελό των οστών (αιμοποιητικό σύστημα). Είναι μεγάλα, ανώμαλου σχήματος κύτταρα με πολλούς πυρήνες ενώ το κυτταρόπλασμα τους περιέχει πολλά μιτοχόνδρια που δίνουν στους οστεοκλάστες την απαραίτητη ενέργεια για την κύρια λειτουργία τους: την απορρόφηση οστού. Βρίσκονται στις οστικές επιφάνειες του ενδόστεου, του περίοστεου και των Αβέρσειων συστημάτων και επικάθονται πάνω στη θεμέλιο ουσία. Όταν τελειώσουν την απορροφητική τους δραστηριότητα έχουν τη δυνατότητα είτε να μετακινηθούν σε παρακείμενη οστική επιφάνεια, ή να διαιρεθούν σε πολλαπλά μονοκύτταρα κύτταρα. Το βασικότερο μορφολογικό χαρακτηριστικό ενός ενεργού οστεοκλάστη είναι η σύνθετη αναδίπλωση της κυτταροπλασματικής μεμβράνης του προς την πλευρά της απορροφούμενης ουσίας. Η αναδίπλωση αυτή σχηματίζει ένα σύνθετο όξινο μικροπεριβάλλον όπου υπάρχει μεγάλη συγκέντρωση ιόντων υδρογόνου και πρωτεολυτικά ένζυμα. Στο περιβάλλον αυτό αφαιρούνται τα μεταλλικά ιόντα από τη θεμέλιο ουσία, η οποία διαλύεται στη συνέχεια από τα ένζυμα. Στα σπογγώδη οστά, από ένα οστεοκλάστη σχηματίζεται μια χαρακτηριστική κοιλότητα, ενώ στα φλοιώδη, από πολλαπλούς οστεοκλάστες σχηματίζεται ο κοπτικός κώνος του Αβέρσειου συστήματος.

- ο Τα *οστεοκύτταρα* αποτελούν το 90% των κυττάρων του ώριμου σκελετού. Έχουν ελλειψοειδές σχήμα και εμφανίζουν μεγάλο αριθμό κυτταροπλασματικών προσεκβολών, οι οποίες τους επιτρέπουν να επικοινωνούν με τα άλλα οστεοκύτταρα της αποτιτανωμένης θεμελίου ουσίας και με τους οστεοβλάστες των ελεύθερων επιφανειών και της οργανικής θεμελίου ουσίας. Η επικοινωνία αυτή είναι πολύ σημαντική για την ομοιοστασία του ασβεστίου αλλά και τη
- ο διακίνηση και τη ροή των υγρών μέσα στον οστίτη ιστό (γλοιοελαστικές ιδιότητες οστού, ηλεκτρικά φαινόμενα). Ουσιαστικά, τα οστεοκύτταρα έχουν τη δυνατότητα μεταφοράς «μηνυμάτων» σχετικών με αλλαγές του μηχανικού περιβάλλοντος και των καταπονήσεων των οστών κι έτσι επηρεάζουν σημαντικά την προσαρμογή των οστών όπως αυτή θα αναλυθεί παρακάτω.

Όπως είναι φανερό από όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, οι οστεοβλάστες παράγουν οστό ενώ οι οστεοκλάστες απορροφούν οστό. Οι δύο αυτοί οργανισμοί βρίσκονται, υπό φυσιολογικές συνθήκες, σε μία διαρκή συνεργασία και ισορροπία: όσο οστό απορροφάται τόσο οστό παράγεται. Σε περιπτώσεις προσαρμογής του σκελετού σε νέες συνθήκες μηχανικής καταπόνησης όπου ο σκελετός έχει ανάγκη από υψηλότερη μηχανική αντοχή, η οστεοβλαστική δραστηριότητα υπερिशύχει της οστεοκλαστικής (εναπόθεση οστού). Αντίθετα, σε περιπτώσεις μειωμένων μηχανικών απαιτήσεων η οστεοκλαστική δραστηριότητα είναι αυτή που θα υπερिशύχει της οστεοβλαστικής (απορρόφηση οστού). Η δομή του οστού, γενικά, αλλάζει ανταποκρινόμενη στην εφαρμοζόμενη φόρτιση, στην ακινητοποίηση, στις ορμονικές μεταβολές και σε άλλους παράγοντες. Το οστό υφίσταται μορφολογικές αλλαγές ανταποκρινόμενο στις μηχανικές φορτίσεις τροποποιώντας την εξωτερική γεωμετρία του και πολύ περισσότερο μεταβάλλοντας την εσωτερική δομή του. Η λειτουργία του οστού που είναι υπεύθυνη για την ανάπτυξη, τη διατήρηση, τη συντήρηση αλλά και την προσαρμογή του στο μηχανικό ερέθισμα ονομάζεται *Οστική Ανακατασκευή* (Bone Remodeling). Η ικανότητα του σκελετικού συστήματος του ανθρώπου να αυτορυθμίζεται ώστε να ανταπεξέλθει στις δομικές του απαιτήσεις απασχόλησε από νωρίς αρκετούς επιστήμονες (ανατομιστές, φυσικούς και μηχανικούς) χωρίς ωστόσο αρχικά να έχει βρεθεί μια αριθμητική σχέση προσομοίωσης της οστικής ανακατασκευής.

1.2 Μηχανικές ιδιότητες οστού

1.2.1 Μηχανική αντοχή-δυσκαμψία οστού και δημιουργία καταγμάτων

Η οστική θεμέλιος ουσία αποτελείται από οργανικά μακρομόρια (20% του συνολικού οστικού βάρους), ανόργανα άλατα, κυρίως υδροξυαπατίτη, (70%) και υγρά (8-10%). Το οργανικό τμήμα του οστού, του δίδει το σχήμα του και συμβάλλει στην αντοχή του σε εφελκυσμό. Το ανόργανο τμήμα συμβάλλει στην αντοχή του σε συμπίεση. Το μέτρο

ελαστικότητας του υδροξυαπατίτη είναι πολύ μεγαλύτερο (δύο τάξεις μεγέθους) από εκείνο του κολλαγόνου, ενώ το μέτρο ελαστικότητας του οστού έχει ενδιάμεση τιμή. Ως σύνθετο όμως υλικό, το οστό έχει υψηλότερη αντοχή τόσο από τον απατίτη όσο και από το κολλαγόνο. Εάν αφαιρεθεί το ανόργανο τμήμα, τα οστά γίνονται ιδιαίτερα εύκαμπτα και είναι δυνατόν να στρεβλωθούν ή να καμφθούν χωρίς να συμβεί κάταγμα. Όταν αφαιρεθεί το οργανικό τμήμα τα οστά γίνονται ιδιαίτερα εύθρυπτα. Η αποτιτάνωση (μετάλλωση) της θεμελίου ουσίας είναι υπεύθυνη για της μηχανικές ιδιότητες του ώριμου οστίτη ιστού (αντοχή και δυσκαμψία). Η ωρίμανση της θεμελίου ουσίας συνεπάγεται αύξηση της δυσκαμψίας του οστού, γεγονός που εξηγεί και τη διαφορετική μηχανική συμπεριφορά των οστών των παιδιών όταν υφίστανται κάταγμα (σπάσιμο οστού).

Η μηχανική συμπεριφορά των οστών εξαρτάται από την αντοχή τους, τα γεωμετρικά τους χαρακτηριστικά και από τον τύπο, την ταχύτητα και τη συχνότητα της φόρτισης. Κατά τη διάρκεια της καθημερινής δραστηριότητας και κάτω από συνθήκες αυξημένων μηχανικών καταπονήσεων τα οστά δέχονται την επίδραση δυνάμεων και ροπών. Οι γενικευμένες αυτές δυνάμεις επιδρούν πάνω στα οστά προς διάφορες κατευθύνσεις και προκαλούν διάφορου τύπου φορτίσεις: εφελκυσμό, θλίψη, διάτμηση, κάμψη, στρέψη ή και συνδυασμό τους.

➤ *Εφελκυσμός*

Η εφαρμογή εφελκυστικών δυνάμεων σε ένα οστό έχει ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη συμμετρικών εσωτερικών τάσεων και παραμορφώσεων που οδηγούν σε επιμήκυνση και λέπτυνση του οστού. Κατάγματα από την επίδραση εφελκυστικών δυνάμεων εμφανίζονται σε οστά με μεγάλη αναλογία σπογγώδους οστού (π.χ. αποσπαστικό κάταγμα πτέρνας-Αχιλλείου).

➤ *Θλίψη*

Η εφαρμογή θλιπτικών δυνάμεων σε ένα οστό έχει ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη συμμετρικών εσωτερικών τάσεων και παραμορφώσεων που οδηγούν σε βράχυνση και διεύρυνση του οστού. Κατάγματα από την επίδραση θλιπτικών δυνάμεων εμφανίζονται σε σπογγώδη οστά (π.χ. σπόνδυλοι) ή στις μεταφύσεις μακρών οστών (π.χ. μηριαίο).

➤ *Διάτμηση*

Η εφαρμογή διατμητικών δυνάμεων σε ένα οστό έχει ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη εσωτερικών διατμητικών τάσεων και παραμορφώσεων. Στην πραγματικότητα, όταν εφαρμόζονται φορτία θλίψης και στρέψης σε ένα οστό ένα μέρος τους μετατρέπεται σε διατμητικά φορτία. Κατάγματα από την επίδραση διατμητικών δυνάμεων εμφανίζονται σε φλοιώδη οστά (π.χ. κατάγματα των μηριαίων και κνημιαίων κονδύλων).

➤ *Κάμψη*

Η εφαρμογή καμπτικών φορτίων έχει ως αποτέλεσμα την κάμψη των οστών γύρω από ένα άξονα. Όταν ένα οστό κάμπτεται υφίσταται ένα συνδυασμό εφελκυστικών δυνάμεων από

τη μία πλευρά του ουδέτερου άξονα και θλιπτικών από την άλλη (κατά μήκος του ουδέτερου άξονα δεν αναπτύσσονται πιέσεις και παραμορφώσεις). Το μέγεθος των πιέσεων και παραμορφώσεων είναι ανάλογο της απόστασής τους από τον ουδέτερο άξονα. Κατάγματα από κάμψη εμφανίζονται κυρίως σε μακρά οστά.

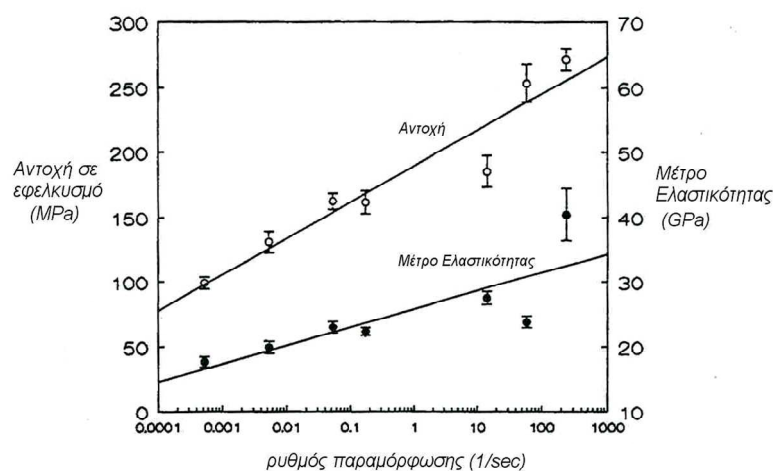
➤ Στρέψη

Υπό την εφαρμογή στροφικών καταπονήσεων το οστό τείνει να περιστραφεί γύρω από έναν άξονα, ενώ στο εσωτερικό του αναπτύσσονται στροφικές ροπές. Ακόμη, αναπτύσσονται διατμητικές τάσεις και παραμορφώσεις σε επίπεδα κάθετα και παράλληλα στον άξονα στρέψης και θλιπτικές τάσεις και παραμορφώσεις σε επίπεδα διαγώνια προς τον ίδιο άξονα. Κατάγματα από στρέψη λαμβάνουν χώρα σε μακρά αυλοειδή οστά (π.χ. κνήμη, μηριαίο)

Κατάγματα μπορούν να συμβούν είτε με την εφαρμογή ενός φορτίου το οποίο θα υπερβαίνει την αντοχή του συγκεκριμένου οστού ή με την εφαρμογή μικρότερων επαναλαμβανόμενων φορτίων (κόπωση υλικού). Στον οστίτη ιστό με την επίδραση επαναλαμβανόμενων φορτίσεων προκαλείται κυτταρική νέκρωση, μικροκάκωση και άθροιση μικροκαταγμάτων. Το φαινόμενο της κόπωσης στα οστά δεν εξαρτάται μόνο από το μέγεθος του φορτίου και τον αριθμό των επαναλήψεων, αλλά και από τη συχνότητα των φορτίσεων. Η τελευταία εξάρτηση οφείλεται στη λειτουργία της οστικής ανακατασκευής: όταν η συχνότητα εφαρμογής φορτίων είναι μικρή, δίδεται στο οστό ο απαιτούμενος χρόνος για ανίχνευση και επιδιόρθωση της βλάβης [1].

1.2.2 Μηχανικές ιδιότητες φλοιώδους οστού

Το φλοιώδες οστό είναι ένα ιξωδοελαστικό υλικό του οποίου οι ιδιότητες εξαρτώνται από το ρυθμό φόρτισης.



Σχήμα 1.2 Επίδραση ρυθμού παραμόρφωσης στην αντοχή σε εφελκυσμό και το μέτρο ελαστικότητας φλοιώδους οστού

Το μέτρο ελαστικότητας και η μέγιστη αντοχή, όπως παρουσιάζεται στο *Σχήμα 1.2*, είναι κατά προσέγγιση ανάλογα προς το ρυθμό παραμόρφωσης υψωμένο στη δύναμη του 0,06. Έτσι, για ένα μεγάλο εύρος ρυθμών παραμόρφωσης, η μέγιστη αντοχή αυξάνει με ένα συντελεστή περίπου 3 ενώ το μέτρο ελαστικότητας με ένα συντελεστή περίπου 2.

Επίσης, η συμπεριφορά τάσεων και παραμορφώσεων εξαρτάται από τον τύπο της φόρτισης αλλά και τον προσανατολισμό της μικροδομής του οστού ως προς τη διεύθυνση φόρτισης. Το φλοιώδες οστό παρουσιάζει μεγαλύτερη αντοχή σε θλίψη, μικρότερη σε εφελκυσμό και ακόμα μικρότερη σε διάτμηση. Ακόμη έχει βρεθεί ότι τα μακρά οστά, η διάφυση των οποίων αποτελείται σε μεγάλο βαθμό από φλοιώδες οστό, ανθίστανται καλύτερα σε τάσεις κατά τη διεύθυνση του άξονά τους παρά κατά την ακτινική κατεύθυνση. Όπως γίνεται λοιπόν εύκολα αντιληπτό το οστό είναι ανισοτροπικό υλικό. Στον *Πίνακα 1.1* παρουσιάζονται ενδεικτικά οι τιμές των μέτρων ελαστικότητας για φλοιώδες μηριαίο οστό ενηλίκων:

Πίνακας 1.1 Μέτρα ελαστικότητας φλοιώδους οστού του μηρού

Μέτρο Ελαστικότητας	Τιμή Μέτρου Ελαστικότητας (GPa)
Διαμήκες	17,0
Εγκάρσιο	11,5
Διατμητικό	3,3

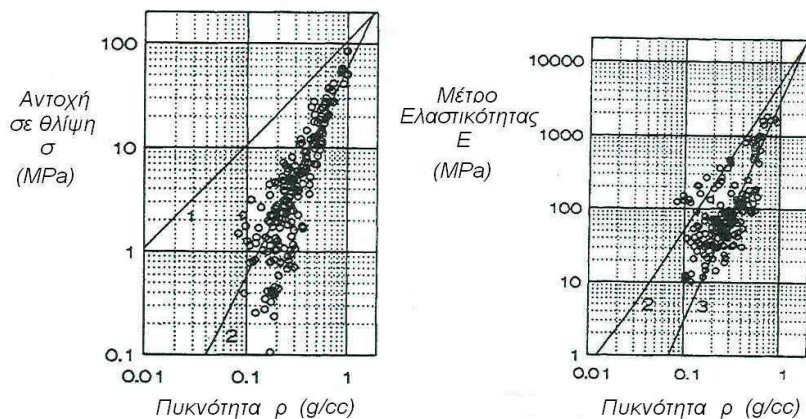
Τέλος, οι μηχανικές ιδιότητες του φλοιώδους οστού εξαρτώνται και από την ηλικία. Τόσο η αντοχή όσο και το μέτρο ελαστικότητας ελαττώνονται περίπου 2% ανά δεκαετία από την ηλικία των 20 μέχρι την ηλικία των 90 ετών.

1.2.3 Μηχανικές ιδιότητες σπογγώδους οστού

Ο κύριος παράγοντας που επηρεάζει τις μηχανικές ιδιότητες του σπογγώδους οστού είναι η φαινόμενη πυκνότητά του. Η τελευταία ορίζεται ως ο λόγος μάζας προς τον κύριο όγκο (συνυπολογισμένων των κενών) και επηρεάζει τις ιδιότητες του σπογγώδους οστού, για δοκιμή σε θλίψη, σύμφωνα με τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\sigma_c = A \cdot \rho^\beta \quad (\text{Σχέση 1.1}) \quad \text{και} \quad E_c = C \cdot \rho^\gamma \quad (\text{Σχέση 1.2})$$

όπου σ_c είναι η αντοχή του σπογγώδη οστού σε θλίψη ενώ E_c το μέτρο ελαστικότητας του σπογγώδη οστού σε θλίψη. Ο συντελεστής β είναι περίπου ίσος με 2 ενώ ο συντελεστής γ λαμβάνει τιμές μεταξύ 2 και 3. Γραφικά οι *σχέσεις 1.2.1* και *1.2.2* λαμβάνουν την μορφή του *Σχήμα 1.3*:



Σχήμα 1.3 Αντοχή σε θλίψη & μέτρο ελαστικότητας σπογγώδους οστού συναρτήσει της φαινόμενης πυκνότητας

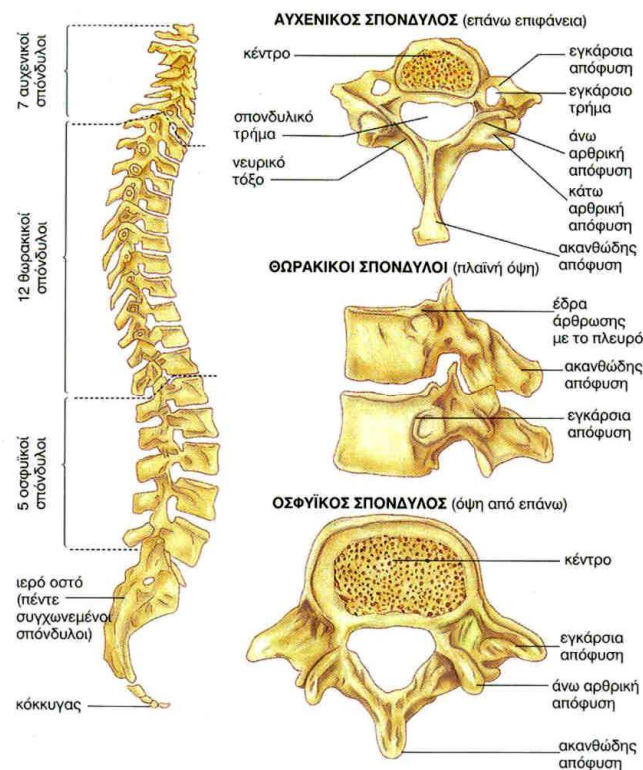
Δοκιμές που πραγματοποιήθηκαν σε σπογγώδες οστό έδειξαν ότι η αντοχή του σε εφελκυσμό καθώς και το μέτρο ελαστικότητάς του σε εφελκυσμό είναι περίπου ίδια με τα αντίστοιχα της θλίψης. Μελετώντας τις Σχέσεις 1.1 και 1.2 μπορούμε να συμπεράνουμε το εξής: μικρή μεταβολή στη φαινόμενη πυκνότητα του σπογγώδους οστού μπορεί να προξενήσει μεγάλες αλλαγές στο μέτρο ελαστικότητας και την αντοχή.

Κεφάλαιο 2ο Ανατομία σπονδυλικής στήλης και οστεοπόρωση

2.1 Σπόνδυλος και σπονδυλική στήλη

Η σπονδυλική στήλη (Σ.Σ.) είναι το βασικό τμήμα του αξονικού σκελετού και φέρει το βάρος του κορμού του σώματος. Σχηματίζει μια σειρά φυσικών καμπυλών που βοηθούν στην ισορροπία και στην απορρόφηση των κραδασμών. Αποτελείται από πολλά οστά, τοποθετημένα το ένα πάνω στο άλλο με κανονικό τρόπο, τα οποία ονομάζονται *σπόνδυλοι*. Οι σπόνδυλοι έχουν διαφορετικά σχήματα στα διαφορετικά σημεία της Σ.Σ., ανάλογα με τη λειτουργία τους [35].

Γενικά, γίνονται σταδιακά ευρύτεροι και παχύτεροι προς το κάτω μέρος της Σ.Σ.. Στο ανθρώπινο έμβρυο, η Σ.Σ. αποτελείται από 33 σπονδύλους: 7 στην *αυχενική* περιοχή, 12 στη *θωρακική*, 5 στην *οσφυϊκή*, 5 στην *ιερή* περιοχή και 4 ή 5 στην *κοκκυγική* περιοχή (το άκρο της Σ.Σ.). Οι αυχενικοί είναι οι μικρότεροι και οι πιο ευκίνητοι. Οι θωρακικοί αντιστοιχούν στην περιοχή της πλάτης και είναι πιο ογκώδεις και λιγότερο ευκίνητοι από τους αυχενικούς. Οι ιεροί είναι συνοστεωμένοι μεταξύ τους. Κατά την ανάπτυξη οι ιεροί σπόνδυλοι ενώνονται για να σχηματίσουν το ιερό οστό, που είναι πολύ ανθεκτικό και χρησιμεύει ως βάση της σπονδυλικής στήλης. Οι κοκκυγικοί ενώνονται συνήθως για να σχηματίσουν ένα ή δύο οστά του κόκκυγα. Η σπονδυλική στήλη των ενηλίκων έχει επομένως 26 ή 27 σπονδύλους μετά την ένωση του ιερού οστού και του κόκκυγα.



Σχήμα 2.1 Σπονδυλική στήλη του ανθρώπου

Κάθε σπόνδυλος έχει ένα συμπαγές σώμα, το κέντρο, από το οποίο ξεκινά το νευρικό τόξο που περικλείει ένα άνοιγμα, το σπονδυλικό τρήμα. Στη σπονδυλική στήλη, τα ανοίγματα αυτά, συλλογικά σχηματίζουν το σπονδυλικό σωλήνα, μέσα στον οποίο υπάρχει ο νωτιαίος μυελός. Από το νευρικό τόξο ξεκινούν πολλές οστέινες προεκτάσεις, που καλούνται αποφύσεις, των οποίων οι επίπεδες άκρες (έδρες) αρθρώνονται με άλλους σπονδύλους και με τα πλευρά. Μεγάλο μέρος της επιφάνειας αυτών των αποφύσεων αποτελεί τόπο ένωσης για συνδέσμους και τένοντες.

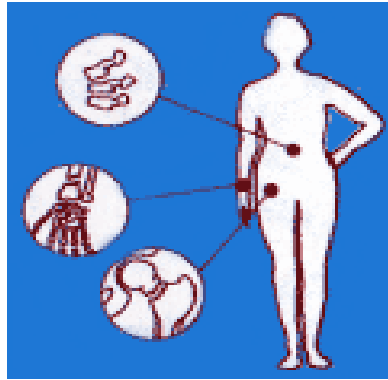
Οι δύο πρώτοι αυχενικοί σπόνδυλοι, που ονομάζονται άτλαντας (ατελής σπόνδυλος) και άξονας, αρθρώνονται με το κρανίο. Ευρείες αρθρωτικές επιφάνειες στον άτλαντα επιτρέπουν στο κεφάλι να κινείται πάνω-κάτω, ενώ ο οδοντοειδής γόμφος του άξονα προβάλλεται μέσα από τον άτλαντα και λειτουργεί ως άξονας για το κρανίο, επιτρέποντας την πλευρική περιστροφή του λαιμού. Οι επτά αυχενικοί σπόνδυλοι έχουν ένα μικρό άνοιγμα, το εγκάρσιο τρήμα, σε κάθε πλευρά. Τα δύο αυτά ανοίγματα φέρουν τις σπονδυλικές αρτηρίες που τροφοδοτούν τον εγκέφαλο.

Οι δώδεκα θωρακικοί σπόνδυλοι είναι γενικά πιο ανθεκτικοί από τους αυχενικούς. Παρέχουν έδρες για την άρθρωση 12 ζευγών πλευρών, που μαζί με το στέρνο αποτελούν το σχεδόν θολωτό τοίχωμα της θωρακικής κοιλότητας. Το τοίχωμα αυτό χρησιμεύει για την προστασία της καρδιάς και των πνευμόνων. Οι κινήσεις των πλευρών συμβάλλουν ακόμη και στο μηχανισμό της αναπνοής.

Οι οσφυϊκοί σπόνδυλοι πρέπει να στηρίζουν ολόκληρο το βάρος του πάνω σώματος και είναι ανάλογα ευρείς και ανθεκτικοί. Αντιστοιχούν στην περιοχή της μέσης και έχουν αρκετή ευκινησία. Οι βραχείες τους παχιές αποφύσεις είναι σημεία σύνδεσης για τους μυς της πλάτης. Τέλος, ο πέμπτος οσφυϊκός σπόνδυλος ενώνεται με το τριγωνικό ιερό οστό, που με τη σειρά του ενώνεται με την πυελική ζώνη.

2.2 Οστεοπόρωση

Η Οστεοπόρωση [3] αποτελεί πάθηση κατά την οποία ο οργανισμός αδυνατεί να εναποθέσει νέα ποσότητα του οστού στη θέση αυτού απορροφάται. Χαρακτηρίζεται από χαμηλή οστική μάζα αλλά και διαταραχή της μικροαρχιτεκτονικής του οστίτη ιστού. Κατά την οστεοπόρωση, η οστική πυκνότητα μειώνεται κάτω από ένα κρίσιμο όριο ενώ αρχίζουν να εμφανίζονται ποικίλα προβλήματα όπως μείωση του αναστήματος, πόνος στην πλάτη και τη μέση, αύξηση της οστικής ευθραυστότητας και αυξημένος κίνδυνος κατάγματος (μειωμένη αντοχή των οστών).



Σχήμα 2.2 Κύρια σημεία εκδήλωσης οστεοπόρωσης

Η οστεοπόρωση, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.2, εκδηλώνεται κυρίως:

- στους σπονδύλους
- στον καρπό
- στην κεφαλή του μηριαίου οστού

Εδώ, θα πρέπει να γίνει μια διάκριση μεταξύ αληθούς οστεοπόρωσης (οστεοπόρωση τύπου I) και φυσιολογικών οστεοπενιών (οστεοπόρωση τύπου II). Ο Πίνακας 2.1 παρουσιάζει τα κύρια χαρακτηριστικά τους .

Πίνακας 2.1 Δύο Τύποι Οστεοπόρωσης

	<i>Οστεοπόρωση τύπου I</i>	<i>Οστεοπόρωση τύπου II</i>
Ηλικίες	51-75	>70
Αναλογία Γυναίκες/Άνδρες	6:1	2:1
Είδος οστικής απώλειας	Σπογγώδες Οστό	Σπογγώδες & Φλοιώδες Οστό
Ρυθμός εξέλιξης	Ταχύς	Όχι Ταχύς
Αίτια	Εμμηνόπαυση / Προδιαθεσικοί Παράγοντες	Παράγοντες σχετιζόμενοι με τη γήρανση

Κατά την οστεοπόρωση τύπου I εμφανίζεται μεγάλη ευθραυστότητα στο οστό με αποτέλεσμα να προκαλούνται κατάγματα σχεδόν αυτόματα κατά τη φυσιολογική σωματική δραστηριότητα (κυρίως στη Σ.Σ.). Επίσης, εμφανίζεται έντονη ραχιαλγία και

προοδευτική απώλεια του αναστήματος που συνοδεύεται από κύφωση ως αποτέλεσμα της σφηνοειδούς παραμόρφωσης των ανωτέρω, συνήθως, θωρακικών σπονδύλων.

Στην οστεοπόρωση τύπου II, η οστική μάζα και αντοχή μειώνονται ως απάντηση στη μείωση της φυσικής δραστηριότητας και της μυϊκής ισχύος. Τα κατάγματα που προκαλούνται κατά την οστεοπενία αποτελούν μια βασική αιτία νοσηρότητας και αυξημένης θνητότητας της τρίτης ηλικίας.

Όπως γίνεται κατανοητό η οστεοπόρωση αποτελεί μια διαταραχή που σχετίζεται με την ποσότητα της οστέινης ουσίας και την κατανομή της στο σκελετό. Εφόσον ο οστίτης ιστός χαρακτηρίζεται από συνεχή ανακατασκευαστική δραστηριότητα, η αναφερόμενη ποσοτική διαταραχή οφείλεται είτε σε αυξημένη οστική απώλεια ή σε ελαττωμένη απόθεση οστέινης ουσίας φυσιολογικής σύστασης. Η διαταραχή του ισοζυγίου σύνθεσης-απορρόφησης (remodeling imbalance) προκύπτει λόγω δυσλειτουργίας της σύζευξης μεταξύ οστεοβλαστικής και οστεοκλαστικής δραστηριότητας λόγω μεταβολών στην έκλυση ορμονών. Η οστεοπόρωση δεν είναι μόνο μία ποσοτική διαταραχή του οστού, αλλά και ποιοτική μεταβολή του που θα μπορούσε να υπολογιστεί με μετρήσεις των εμβιομηχανικών ιδιοτήτων του.

Κεφάλαιο 3ο Γενικά για τα μοντέλα οστικής ανακατασκευής

3.1 Θεωρίες οστικής ανακατασκευής

Στο Κεφάλαιο αυτό παρατίθενται, αναφορικά, οι γενικές ιδέες των κύριων θεωριών της οστικής ανακατασκευής και γίνεται αξιολόγησή τους. Η οστική ανακατασκευή, όσον αφορά στην ανάλυσή της θα μπορούσαμε να πούμε ότι παρουσιάζει δύο διαφορετικές πλευρές: τη *βιολογική* και τη *μηχανική*. Το αίτιο της ανακατασκευής του οστού είναι το μηχανικό περιβάλλον του ενώ ο μηχανισμός της ανακατασκευής συνδέεται με τη βιολογική πλευρά της. Με γνώμονα την πλευρά που εξετάζουν τα μοντέλα της οστικής ανακατασκευής μπορούν να χωριστούν σε δύο κατηγορίες, τα *φαινομενολογικά* και τα *μηχανιστικά μοντέλα*.

3.1.1 Φαινομενολογικά μοντέλα

Τα μοντέλα αυτά προσπαθούν να προσομοιάσουν το αίτιο και το αποτέλεσμα της ανακατασκευής (μηχανική πλευρά) χωρίς ιδιαίτερη έμφαση στο μηχανισμό. Κυριότερα εξ αυτών είναι τα παρακάτω:

- Frost (αρχές 1960)



Ο Frost χρησιμοποίησε τη θεωρία της κάμψης του ουδέτερου άξονα για να διατυπώσει μερικές κλινικές παρατηρήσεις επανευθυγράμμισης οστού. Επαναλαμβανόμενα μη-τετριμμένα δυναμικά φορτία προκαλούν παραμορφώσεις που στη συνέχεια παράγουν μετατοπίσεις.

- Cowin et al (1976)

Θεωρία της ελαστικής προσαρμοστικότητας

- Carter et al (1986)

Αναπροσαρμογή δοκίδων: αντικειμενικές συναρτήσεις, υπολογιστικές εφαρμογές

- Huiskes et al (1987)

Θεωρία της πυκνότητας τροπικής ενέργειας (Strain Energy Density)

- Mattheck (1991)

Ελαχιστοποίηση συγκέντρωσης τάσεων

3.1.2 Μηχανιστικά μοντέλα

Στα μοντέλα αυτά ενσωματώνονται τμήματα των βιολογικών διαδικασιών της οστικής ανακατασκευής. Παραδείγματα τέτοιων μοντέλων είναι τα ακόλουθα:

- McNamara et al (1992)

Επισκευή βλάβης από κόπωση

- Hart et al (1983-1995)

Υπολογιστική εφαρμογή, θεωρία βασισμένη στο κύτταρο

3.2 Επισκόπηση κύριων θεωριών οστικής ανακατασκευής

Είναι σαφές ότι ένα οστό αντιδρά σύμφωνα με τις φορτίσεις που ασκούνται πάνω του, παρόλο που μέχρι σήμερα υπάρχουν λίγες πειραματικές ενδείξεις ως προς τις τιμές του μηχανικού μεγέθους που επηρεάζουν τη διαδικασία της οστικής ανακατασκευής. Σύμφωνα με τον Frost, παραδείγματος χάριν η ελάχιστη δρώσα παραμόρφωση, κάτω από την οποία δε λαμβάνει χώρα ανακατασκευή, έχει τιμή κοντά στο 0,2%. Παρά την έλλειψη ποσοτικών πειραματικών δεδομένων, έχουν γίνει κάποιες εργασίες ως προς τις επικρατούσες εξισώσεις για ανακατασκευή.

Οι θεμελιώδεις θεωρίες χρονολογικά συνοψίζονται στις:



Σε αυτό το μοντέλο ο Gjelsvik [26] θεωρεί ότι η ανακατασκευή εξαρτάται από την ηλεκτρική πόλωση που εισάγεται από τις παρούσες τάσεις και ότι προβλέπεται ποσοτικά με τον ακόλουθο

Gjelsvik (1973) αλγόριθμο ανακατασκευής:

$$U = \alpha \cdot P \cdot x - \dot{u} \quad \text{για } P \geq 0 \quad (\text{σχέση 3.1})$$

$$U = \beta \cdot P \cdot x - \dot{u} \quad \text{για } P < 0 \quad (\text{σχέση 3.2})$$

όπου:

U είναι ο προς τα έξω ρυθμός κίνησης του οστού, κάθετα προς την επιφάνειά του

\dot{u} είναι η διαδικασία απορρόφησης που λαμβάνει χώρα με σταθερό ρυθμό, ανεξάρτητα από οποιαδήποτε δραστηριότητα.

P_x είναι η κατά τον άξονα x συνιστώσα του διανύσματος πόλωσης: $P_x = d_{14} \cdot \sigma_{yx}$

α, β είναι σταθερές έτσι ώστε $\alpha > \beta > -\alpha$

d_{14} είναι ο όρος από το μητρώο πιεζοηλεκτρισμού

σ_{yx} είναι η διατμητική τάση



Ο Cowin [15] έχει δημοσιεύσει μια σειρά άρθρων χρησιμοποιώντας την ελαστικότητα σαν παράγοντα που κυβερνά την ανακατασκευή του οστού. Οι εξισώσεις που εφάρμοσε στην ανακατασκευή είναι οι ακόλουθες:

Cowin (1976)

Για την εξωτερική ανακατασκευή (αφορά τις επιφάνειες του οστού):

$$U = C_{ij}(n, \bar{\sigma}) [\varepsilon_{ij}(\bar{\sigma}) - \varepsilon_{ij}^c(\bar{\sigma})] \quad (\text{σχέση 3.3})$$

όπου:

U είναι η ταχύτητα ανακατασκευής της επιφάνειας στην κάθετη σε αυτή διεύθυνση
 $C_{ij}(\bar{o})$ είναι οι συντελεστές ρυθμού ανακατασκευής επιφάνειας εξαρτώμενοι από το n , το
 κάθετο προς την επιφάνεια διάνυσμα και το σημείο \bar{o}
 $\varepsilon_{ij}(\bar{o})$ είναι η παραμόρφωση στο σημείο \bar{o}
 $\varepsilon_{ij}^c(\bar{o})$ είναι ο τανυστής παραμόρφωσης στο σημείο \bar{o} για τον οποίο δε συμβαίνει καμία
 ανακατασκευή
 και για την εσωτερική ανακατασκευή (αφορά την οστική πυκνότητα):

$$\dot{e} = \alpha(e) + A_{i\xi}(e)\varepsilon_{ij} + B_{ijkm}(e)\varepsilon_{ij}\varepsilon_{km} \quad (\text{σχέση 3.4})$$

όπου

$\alpha(e), A_{i\xi}(e)\varepsilon_{ij}, B_{ijkm}(e)$ είναι ιδιότητες του υλικού

ε_{ij} είναι ο τανυστής των παραμορφώσεων

ε_{km} είναι ο τανυστής των μετατοπίσεων στο γενικευμένο νόμο του Hooke

e είναι η μεταβολή στο κλάσμα όγκου

\dot{e} είναι ο ρυθμός μεταβολής του κλάσματος όγκου

Η μεγαλύτερη δυσκολία σε αυτό το μοντέλο είναι ο υπολογισμός των παραμορφώσεων ε_{ij}^c που είναι αρχικά παρούσες στο σώμα και τις σταθερές του υλικού. Η πειραματική μέτρηση αυτών των τιμών αποτελεί ιδιαίτερα δύσκολη διαδικασία.



Hart (1983)

Μελετώντας τους παράγοντες C_{ij} του μοντέλου του Cowin, ο Hart [5] πρότεινε την εισαγωγή της εξάρτησης από το πλήθος των παρόντων οστεοβλαστών και οστεοκλαστών, τη δράση τους και την επιφάνεια πάνω στην οποία δρουν. Η δράση αυτή συσχετίστηκε με ένα μηχανισμό παραμόρφωσης που ελέγχει την ανακατασκευή.

Η επιφανειακή ανακατασκευή που προτάθηκε από τον Hart είναι ο ακόλουθος αλγόριθμος:

$$\dot{d} = C_1 \bar{\varepsilon} + C_2 \quad (\text{σχέση 3.5})$$

Μια επιπλέον δευτεροβάθμια έκφραση ανακατασκευής που προτάθηκε ήταν η εξής:

$$\dot{d} = C_1^0 \bar{\varepsilon}^2 + C_2^0 \bar{\varepsilon} + C_3^0 \quad (\text{σχέση 3.6})$$

όπου:

$C_1^0, C_2^0, C_3^0, C_1, C_2$ είναι τανυστές εξαρτώμενοι από βιολογικές δράσεις

$\bar{\varepsilon}$ είναι το μητρώο παραμόρφωσης

\dot{d} είναι η ταχύτητα της οστικής επιφανείας

Τα πλεονεκτήματα αυτού του μοντέλου είναι ότι θα μπορούσε να ενσωματώσει το άγνωστο βιολογικό φαινόμενο σε ένα μαθηματικό τύπο και ότι εισάγει το ρυθμό τροπής και τη χρονική διάρκεια. Το μεγάλο μειονέκτημα είναι ότι οι βιολογικές σταθερές χρειάζονται πολλά πειραματικά δεδομένα για να προσδιοριστούν



Οι Carter και Fyhrie, [6] λαμβάνοντας την πυκνότητα τροπικής ενέργειας ως τον κύριο παράγοντα της ανακατασκευής, χρησιμοποίησαν την αντίστοιχη δρώσα τάση σ_{eff} και ανέπτυξαν μία θεωρία που είναι δυνατόν να προσαρμοσθεί στη φαινόμενη οστική πυκνότητα του οστού.

Ο τύπος για την οστική ανακατασκευή είναι:

$$\rho = A \sigma_{eff}^c \quad (3.7)$$

όπου:

A σταθερά και σ_{eff} η δρώσα τάση.

Η δρώσα τάση σ_{eff} προβλέφθηκε χρησιμοποιώντας είτε κριτήρια αστοχίας είτε ενεργειακά κριτήρια ενώ c είναι μια σταθερά εξαρτώμενη από το κριτήριο που επιλέξαμε

Οι κύριες παραδοχές αυτού του μοντέλου είναι ότι:

- ✓ το οστό είναι αυτό-προσαρμοζόμενο σε όρους προσανατολισμού των δοκίδων (trabeculae) με τις κυρίες διευθύνσεις των τάσεων
- ✓ το φλοιώδες οστό είναι μια πιο πυκνή παραλλαγή του σπογγώδους

Παρόλα αυτά, το παραπάνω μοντέλο αποδείχθηκε ανακριβές στην επιφάνεια πλησίον εμφυτευμάτων που μελετήθηκε από τον Fyhrie.



Ο Huiskes [28], [30] συνδυάζοντας την εργασία των Cowin και Carter παράγαγε ένα μοντέλο βασισμένο στην Πυκνότητα τροπικής ενέργειας που προβλέπει ανεξάρτητα την επιφανειακή και εσωτερική ανακατασκευή:

Huiskes(1987)

Ο βασικός τύπος που συνδέει την μεταβολή του μέτρου ελαστικότητας με την πυκνότητα τροπικής ενέργειας είναι

$$\frac{dE}{dt} = C_e (S - S_n) \quad (\text{σχέση 3.8})$$

$$\frac{dX}{dt} = C_x (S - S_n) \quad (\text{σχέση 3.9})$$

όπου:

C_e και C_x είναι σταθερές

S είναι η πραγματική τοπική πυκνότητα τροπικής ενέργειας ($= \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$)

S_n είναι η ομοστατική πυκνότητα τροπικής ενέργειας (αναφορά)

E είναι το μέτρο του Young και

X είναι η κάθετη προς την επιφάνεια του οστού μετατόπιση

Το μοντέλο αυτό, το οποίο κυρίως χρησιμοποιήθηκε για την πρόβλεψη της οστικής ανακατασκευής μετά από την εμφύτευση μιας πρόσθεσης, συγκλίνει προς τα πειραματικά αποτελέσματα. Η χρησιμοποιηθείσα μέθοδος δεν συμπεριλαμβάνει οποιαδήποτε γεωμετρική μη γραμμικότητα και δεν εξασφαλίζει τη σύγκλιση. Η επίδραση του χρόνου συμπεριλαμβάνεται στο μοντέλο αλλά έχει μικρή επίδραση καθώς περιορίζεται απλά στη θεώρηση της τελικής θέσης.

Κεφάλαιο 4ο Μελέτες σχετικές με την οστική ανακατασκευή

4.1 Ιστορική αναδρομή στις πρώτες θεωρίες οστικής ανακατασκευής

Η σχέση μεταξύ των μηχανικών τάσεων και της μορφολογίας του οστού αποτέλεσε κεντρικό ζήτημα στην σκελετική φυσιολογία για παραπάνω από έναν αιώνα. Οι περισσότεροι μελετητές που προσπάθησαν να εξηγήσουν την κατανομή της φαινόμενης πυκνότητας και την ανισοτροπία του οστού θεώρησαν είτε μια στατική φόρτιση ή μια μόνο τυπική (ή χρονικό μέσο όρο) συνθήκη φόρτισης στην οποία το οστό εκτίθεται σε επαναλαμβανόμενη βάση.

Η πρώτη σχετική θεωρία προτάθηκε από τον Γερμανό ανατομισμό Jullius Wolff (1870) και αναλύθηκε λεπτομερέστερα από τον ίδιο σε μια μονογραφία (1892). Ο «νόμος του Wolff», όπως ονομάστηκε αυτή η θεωρία, υποστήριζε ότι το οστό αντιδρά στις μηχανικές απαιτήσεις που εμφανίζονται σε αυτό από φόρτιση και μυϊκή δράση. Σε μία αύξηση λειτουργίας ή απαίτησης το οστό αντιδρά με εναπόθεση, ενώ σε μία μείωση με απορρόφηση οστού με τρόπο τέτοιο ώστε να προσεγγίζεται η ελάχιστη απαιτούμενη μάζα που αντέχει την φόρτιση. Ο Wolff, όπως ήταν φυσικό, προσέγγισε την ανακατασκευή ποιοτικά και όχι ποσοτικά εξαιτίας της μεγάλης απαιτούμενης υπολογιστικής ισχύος.

Αργότερα, παρόλο που πολλοί ερευνητές, (π.χ. ο D'arcy Thompson (1952)), αποδέχτηκαν το νόμο του Wolff, κλινικές ενδείξεις δημιούργησαν κάποιες αμφιβολίες. Για παράδειγμα, παρατηρήθηκε ότι οστό «εξαφανιζόταν» εύκολα γύρω από κάποιες ορθοπεδικές βίδες και μοσχεύματα όπου υπερβολικές συγκεντρώσεις τάσης αναμενόταν να εμφανισθούν. Κάτι τέτοιο οδήγησε στο συμπέρασμα ότι το οστό θα πρέπει είτε να είναι ευαίσθητο στον τύπο της εφαρμοζόμενης φόρτισης ή να υπάρχει ένα άνω επίπεδο αποκοπής φόρτισης πάνω από το οποίο αλλάζει η απόκρισή του.

Η ερμηνεία του Bassett (1965) πάνω στον νόμο του Wolff είναι ότι, δεδομένης της μορφής του, τα στοιχεία του οστού μετατοπίζουν τον εαυτό τους στη διεύθυνση της πίεσης λειτουργίας και αυξάνουν ή μειώνουν την μάζα τους με σκοπό να αντικατοπτρίσουν το μέγεθος της πίεσης λειτουργίας. Θεώρησε λοιπόν, ότι η «μηχανική απαίτηση» που παρουσιάζεται στο νόμο του Wolff είναι η πίεση ή με άλλα λόγια οι τάσεις που εμφανίζονται στο οστό κατά τη λειτουργία του. Επίσης, υποστήριξε ότι είναι γνωστό, τόσο κλινικά όσο και πειραματικά, ότι μία κοίλη περιοχή θα ενισχυθεί ενώ μια κυρτή θα αποδυναμωθεί.

Την ίδια χρονιά, οι Erker και Frost (1965), που ήταν πρωτεργάτες της σχετικής θεωρίας, διατύπωσαν τη θεωρία ότι ο σχηματισμός νέου οστού εμφανίζεται μόνο σε επιφάνειες περιοχών που γίνονται περισσότερο κοίλες λόγω της φόρτισης ενώ η απορρόφηση σε περιοχές που γίνονται κυρτές. Στα συμπεράσματα τους κατέληξαν μελετώντας τις δύο συχνότερα ερευνώμενες περιπτώσεις: α) *ορθοπεδική*: ευθυγράμμιση μη ευθυγραμμισμένου μηριαίου οστού με αξονική φόρτιση και β) *ορθοδοντική*:

περιστροφή κεντρικού κοπήρα με φόρτιση κάθετη στον άξονά του. Θεώρησαν μάλιστα ότι ο ίδιος μηχανισμός καλύπτει και τις δύο περιπτώσεις.

Ο Currey (1968) ερευνώντας τη θεωρία του Bassett αλλά και αυτή των Epker και Frost κατέληξε ότι παρουσιάζουν ελαττώματα. Πρότεινε, λοιπόν, το ακόλουθο μοντέλο, το οποίο θεώρησε ότι καλύπτει όλες τις κλινικές περιπτώσεις. Η θεωρία στην οποία στηρίζεται το μοντέλο αυτό απαιτεί να είναι γνωστό το «δίκτυο τάσης», όπως το ονόμασε, δηλαδή το πρόσημο της αξονικής συνισταμένης της τάσης. Το πρόσημο αυτό καθορίζει, σύμφωνα με τον πίνακα 4.1, τη διαδικασία της ανακατασκευής, με τα σύμβολα C και T να εκφράζουν θλίψη (Compression) και εφελκυσμό (Tension) αντίστοιχα.

Πίνακας 4.1 Μοντέλο οστικής ανακατασκευής του Currey

\	C	T
C >	A	S
C <	S	A

όπου το σύμβολο $C >$ δηλώνει ότι η τοπική τάση στην επιφάνεια του οστού είναι περισσότερο θλιπτική σε σχέση με την περιοχή κάτω από αυτή. Τα σύμβολα A και S δηλώνουν τότε προστίθεται (Added) ή τότε αφαιρείται (Subtracted) οστό.

Αργότερα, οι Chamay και Tschantz (1972) υποστήριξαν ότι όταν ένα οστό κάμπτεται κάτω από μια μηχανική φόρτιση τροποποιεί τη δομή του με απόθεση οστού στην κοίλη επιφάνεια και απορρόφηση οστού στην κυρτή.

Αξιοσημείωτη είναι η προσέγγιση των Wright και Yettram (1979) οι οποίοι και έλεγξαν την ισχύ των θεωριών των Currey, Bassett και Epker-Frost στις δύο περιπτώσεις που προαναφέρθηκαν: την *ορθοπεδική* και την *ορθοδοντική*. Στην ορθοδοντική περίπτωση ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει ο συσχετισμός της οστικής ανακατασκευής με τις κύριες διευθύνσεις ανάπτυξης της μικροδομής του οστού. Οι Wright και Yettram, καθώς δεν είχε εξακριβωθεί ως τότε ποιες είναι οι διευθύνσεις αυτές, θεώρησαν ότι υπάρχουν δύο πιθανές διευθύνσεις: α) η παράλληλη στον άξονα συμμετρίας του οδόντος και β) η κάθετη στο επίπεδο της πλάκας με την οποία προσομοίωσαν τον οδόντα. Νωρίτερα, ο Wright (1975) έδειξε ότι στην περίπτωση της ορθοδοντικής δύναμης έχουμε διέγερση προς ανακατασκευή του σχετικού οστικού ιστού, ενώ στη δύναμη κατά τη μάσηση καμία δομική αλλαγή δε λαμβάνει χώρα. Ανάλογα με την διεύθυνση ανάπτυξης του οστού παρατήρησαν τα ακόλουθα: Για την παράλληλη διεύθυνση οι θεωρίες των Bassett και Epker-Frost δε συμφωνούσαν με τα αποτελέσματα τους ενώ αυτή του Currey συμφωνούσε μόνο κατά το άνω τμήμα που βρισκόταν συνολικά σε δίκτυο εφελκυσμού (η πάνω πλευρά δεχόταν μεγαλύτερη, κατά μέτρο, εφελκυστική τάση από τη θλιπτική τάση

που δεχόταν η κάτω πλευρά). Για την κάθετη διεύθυνση μόνο η θεωρία των Erker-Frost επιβεβαιώθηκε. Συμπέραναν λοιπόν τα ακόλουθα: Αν και οι Erker και Frost δεν έλαβαν υπόψη τους τον προσανατολισμό ανάπτυξης του οστού οι διαθέσιμες ενδείξεις φανέρωναν ότι η εσωτερική δομή του οστού πιθανόν να παίζει σημαντικό ρόλο στην διαδικασία ανακατασκευής. Επομένως θεώρησαν αμφίβολο το κατά πόσο η θεωρία των Erker και Frost ήταν, ως είχε, απόλυτα ικανοποιητική. Η θεωρία του Bassett, παρόλο που περιορίζεται στις οστικές επιφάνειες του περιόστεου, απέτυχε να προβλέψει σωστά την ανακατασκευή και στις δύο περιπτώσεις. Τέλος, αν και τα αποτελέσματα που ελήφθησαν έδειξαν να υποστηρίζουν την υπόθεση του Currey, θεωρήθηκε απαραίτητη περαιτέρω έρευνα.

Στην *ορθοπεδική* περίπτωση εξέτασαν τόσο το περιόστεο όσο και το ενδόστεο και συμπέραναν ότι η θεωρία του Bassett, αν ληφθεί υπόψη και το περιόστεο, δεν ισχύει όπως είχε επισημάνει και ο Currey. Αντίθετα, η θεωρία του Currey αλλά και αυτή των Erker-Frost έδειξαν να προβλέπουν σωστά την ανακατασκευαστική απόκριση του οστού. Διατύπωσαν ωστόσο τις αμφιβολίες τους για το κατά πόσο ευθύνεται μόνο η δύναμη στην κεφαλή ενός κακώς ευθυγραμμισμένου μηριαίου οστού, και όχι και η αναδιάταξη των μυών λόγω της κακής ευθυγράμμισης του, για τη διέγερση της οστικής ανακατασκευής.

4.2 Ιστορική αναδρομή στις υποθέσεις σχετικά με τους μηχανισμούς που εκκινούν την οστική ανακατασκευή

Παράλληλα με τις θεωρίες οστικής ανακατασκευής αναπτύχθηκαν υποθέσεις σχετικά με τους μηχανισμούς που προκαλούν την ανακατασκευή του οστού.

Η πρώτη υπόθεση προτάθηκε από τον Γερμανό χειρουργό **Roux (1885)** ο οποίος υποστήριξε ότι τα κύτταρα του οστίτη ιστού λειτουργούν ως «αισθητήρες» μηχανικής φόρτισης και αντιδρούν σε αυτή τη διέγερση σε επίπεδο κυττάρου εκκινώντας την οστική ανακατασκευή. Πράγματι, πλέον, είναι γνωστό ότι αυτοί οι «αισθητήρες» είναι ειδικευμένα κύτταρα, οι *οστεοβλάστες* και οι *οστεοκλάστες*, που λειτουργούν ως ρυθμιστές της οστικής ανακατασκευής αυξάνοντας ή μειώνοντας την οστική μάζα αντίστοιχα. Οι μεταβολές στην οστική μάζα μπορούν να πραγματοποιηθούν με αλλαγή της οστικής πυκνότητας (εσωτερική ανακατασκευή οστού – internal remodeling) ή της γεωμετρίας του οστού (εξωτερική ανακατασκευή οστού – surface or external remodeling). Έτσι, σήμερα έχουν οριστεί δύο είδη ανακατασκευής: *εσωτερική*, όπου οι ιδιότητες του υλικού μεταβάλλονται με το χρόνο και *εξωτερική* όπου το σχήμα ή η γεωμετρία του οστού μεταβάλλεται με το χρόνο. Υπολογιστικά έχουν προταθεί 3 διαφορετικά είδη προσομοίωσης της συνολικής οστικής ανακατασκευής:

- Η εξωτερική ανακατασκευή (external remodeling) περιγράφεται όταν η πυκνότητα είναι σταθερή και η εξωτερική γεωμετρία του οστού μεταβάλλεται με το χρόνο (π.χ. προσέγγιση Huiskes et al. 1987)

- Η εσωτερική ανακατασκευή (internal remodeling) περιγράφεται όταν η εξωτερική γεωμετρία είναι σταθερή και η πυκνότητα μεταβάλλεται με το χρόνο (π.χ Weinans et al. 1992)
- Ο συνδυασμός των δύο παραπάνω μοντέλων (εσωτερική και η εξωτερική ανακατασκευή συνδυασμένη (π.χ Beaupré et al. 1990)

Παρόλο που λαμβάνουν χώρα και οι δύο αυτές διαδικασίες σε ένα ενήλικο άτομο, οι γεωμετρικές αλλαγές είναι ελάχιστες σε σχέση με την εσωτερική προσαρμογή. Για το λόγο αυτό είναι σύνηθες να μελετάται σε περισσότερο βάθος η εσωτερική ανακατασκευή.

Κλινικές ενδείξεις οδήγησαν στην υπόθεση ότι η θλίψη συνεπάγεται απορρόφηση οστού, ενώ ο εφελκυσμός εναπόθεση. Για παράδειγμα, ο Ackerman (1966) μοσχεύοντας ζευγάρια μαγνητών διαφορετικής ελκτικής δύναμης σε στέρνα περιστεριών παρατήρησε απορρόφηση οστού του στέρνου μεταξύ των αντίθετων πλευρών του μαγνητικού πεδίου. Παρόλα αυτά, η απορρόφηση οστού δεν έδειξε να εξαρτάται από το μέγεθος της εφαρμοζόμενης πίεσης στις διάφορες δοκιμές, ενώ φάνηκε να εξαρτάται από τη διάρκεια των πειραμάτων.

Στις αρχές του εικοστού αιώνα, ο Koch (1917) εφάρμοσε ένα μοντέλο απλής δέσμης ακτινών, ενώ, αργότερα, ο Fessler (1951) ανέλυσε ένα φυσιολογικό μηριαίο οστό χρησιμοποιώντας μια φωτοελαστική προσέγγιση δύο διαστάσεων. Πιο πρόσφατα, οι Williams και Svensson (1971) χρησιμοποίησαν επίσης την φωτοελαστική προσέγγιση σε τρεις όμως διαστάσεις. Ακόμη, ο Rybicki (1972) πραγματοποίησε μία ανάλυση χρησιμοποιώντας ένα μοντέλο παρόμοιο με του Fessler, λαμβάνοντας όμως υπόψη τόσο τις δυνάμεις στην κεφαλή του μηριαίου οστού όσο και αυτές της σύνδεσης με τους μύες. Τέλος, ο Gjelsvik (1973) εφάρμοσε έναν απλής δέσμης ακτινών τύπο τεχνικής ανάλυσης για τη μελέτη ενός κακώς ευθυγραμμισμένου μακρού οστού.

Σε μια προσπάθεια να καθορίσουν ποιοι πιθανοί μηχανισμοί ελέγχου είναι σημαντικοί για την οστική ανακατασκευή οι McDonald, Yettram και MacLeod (1994) πραγματοποίησαν μία *in vivo* μελέτη σε κουνέλια. Συνεχείς και ασυνεχείς φορτίσεις εφαρμόστηκαν στο κνημιαίο οστό κουνελιών με διάφορες τιμές μέγιστης φόρτισης. Επιπλέον, εξετάστηκαν ειδικές δυνάμεις που χρησιμοποιούνται ως θεραπευτική αγωγή στην ορθοδοντική. Συνοπτικά προέκυψαν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- στη δυναμική φόρτιση το σχήμα της καμπύλης δύναμης-χρόνου είναι μικρής σημασίας παράγοντας,
- η απόκριση εξαρτάται από τη συχνότητα και μάλιστα για υψηλότερες συχνότητες η απόκριση είναι μεγαλύτερη από εκείνη της συνεχούς φόρτισης.

Επίσης, δεν παρατηρήθηκε καμία στατιστική σημασία μεταξύ της θεραπευτικής αγωγής με «απότομη φόρτιση-αργή εξασθένιση» και «αργή φόρτιση-γρήγορη

εξασθένιση». Σε όλες τις περιπτώσεις περισσότερο οστό εναποτέθηκε στα μη ώριμα υποκείμενα του πειράματος σε σχέση με τα ενήλικα. Για τη συνεχή φόρτιση η απόκριση ήταν συνάρτηση της τιμής της φόρτισης. Τέλος, όσον αφορά στην οστεοκλαστική δράση, η εφαρμογή περιοδικής φόρτισης στα ενήλικα ζώα οδήγησε σε ισχυρότερη απορρόφηση οστού σε σχέση με τη στατική φόρτιση. Η διαφορά αυτή ήταν τόσο μεγαλύτερη όσο ο αριθμός των κύκλων φόρτισης ανά λεπτό αυξανόταν. Παρόλο που στα ενήλικα ζώα εμφανίστηκε μεγαλύτερη οστεοκλαστική δράση σε σχέση με τα ανώριμα, η στατιστική σημασία ήταν ελάχιστη.

Αυστηρές μαθηματικές εκφράσεις που συνδέουν τον τανυστή των τάσεων με την τοπική οστική πυκνότητα και ανισοτροπία παρουσιάστηκαν από τους Cowin και Hegedus (1976), ενώ στο αντίστοιχο μοντέλο τους οι Fyhrie και Carter (1986) θεώρησαν την ανακατασκευή του οστού ως μια διαδικασία βελτιστοποίησης όπου ο οστικός ιστός ρυθμίζει τη δομή και πυκνότητα του σύμφωνα με την κατάσταση τάσης - παραμόρφωσης. Θέλοντας να εξηγήσει την πρόσθετη βιολογική διέγερση που δημιουργείται από φόρτιση σε διαφορετικές κατευθύνσεις ο Carter (1987) παρουσίασε την προσέγγιση «χωριστής φόρτισης» για την πρόβλεψη της οστικής πυκνότητας η οποία και εμπεριέχει το ιστορικό πολλαπλής φόρτισης του οστού για κάποια καθορισμένη χρονική περίοδο.

Τελικά οι περισσότεροι ερευνητές έχουν ξεκάθαρα υποστηρίξει ή έμμεσα υπολογίσει ότι η κατανομή της μάζας του οστού βελτιστοποιείται με αναφορά κάποιο μέγεθος της τοπικής τάσης. Έτσι, προκύπτει ότι υψηλές τιμές τάσης θα αντιστοιχούν σε αυξημένη πυκνότητα οστού, ή αυξημένο πάχος φλοιώδους οστού, και αντίστροφα.

4.3 Υπολογιστικά μοντέλα προσομοίωσης οστικής ανακατασκευής

4.3.1 Με βάση την πυκνότητα τροπικής ενέργειας

Carter – Orr – Fyhrie

Μελετώντας τη διέγερση από φόρτιση σε διαφορετικές κατευθύνσεις, όπως προαναφέραμε, ο Carter παρουσίασε μαζί με τους Orr και Fyhrie (1989) [6] μια μελέτη για τη σχέση μεταξύ ιστορικού φόρτισης και την αρχιτεκτονική του σπογγώδους μηριαίου οστού. Το σχέδιο για την πρόβλεψη της πυκνότητας που χρησιμοποιήθηκε στη μελέτη αυτή διέφερε από εκείνα που εφαρμόστηκαν από άλλους ερευνητές (Hart 1984, Huijskes 1987) καθώς θεωρούσε ότι το οστό ανακατασκευάζεται προς μια κατάσταση όπου η μηχανική διέγερση στον ιστό είναι ανεξάρτητη από την ανατομική του θέση μέσα στο οστό και καθορίζεται από την αθροιστική επίδραση πολλών κύκλων φόρτισης και φορτίσεων από διαφορετικές διευθύνσεις.

Ο τύπος που χρησιμοποίησαν για την φαινόμενη τοπική πυκνότητα είναι:

$$\rho = K \left(\sum_{i=1}^c n_i \sigma_i^M \right)^{(1/2M)} \quad (\text{σχέση 4.1})$$

όπου η καθημερινή φόρτιση έχει αθροιστεί ως c διακριτές συνθήκες φόρτισης. Ο δείκτης i συμβολίζει μια συγκεκριμένη φόρτιση, n είναι ο αριθμός των κύκλων φόρτισης, σ_i η μέγιστη τάση που εμφανίζεται σε κάποιο κύκλο φόρτισης (ως κατάλληλη θεωρήθηκε η $\sigma_{\text{energy}} = \sqrt{2EU}$) με E το μέτρο ελαστικότητας και U την Πυκνότητα Τροπικής Ενέργειας (Strain Energy Density) ενώ K είναι η σταθερά αναλογικότητας και M ο συντελεστής βαρύτητας για την επίδραση της τάσης. Μέθοδοι προσδιορισμού της M έχουν δοθεί από τον Whalen (1988) με προτεινόμενη τιμή μεγαλύτερη του 1,0 και μεταξύ 2,0 και 6,0, αλλά εδώ επιλέχθηκαν $M=1$ και $M=4$. Η τιμή της K προσδιορίζεται από την αρχική πυκνότητα που θέτουμε. Στο παράδειγμα που πραγματοποιήθηκε τέθηκε $\rho_0 = 0,64 \frac{g}{cm^3}$. Εκτός από

πυκνότητα θεωρήθηκε ίδιο αρχικό μέτρο ελαστικότητας E ίσο με 1000MPa και σταθερός λόγος Poisson $\nu=0,2$. Εφαρμόζοντας τις συνθήκες φόρτισης στη διδιάστατη γεωμετρία που κατασκευάστηκε για την προσομοίωση του μηριαίου οστού ενός ενήλικα, και αναλύθηκε με 2042 τετράπλευρα και τρίγωνα πεπερασμένα στοιχεία, προκύπτει η πυκνότητα τροπικής ενέργειας κι επομένως η σ_{energy} για κάθε φόρτιση. Έτσι προκύπτουν νέες τιμές πυκνότητας κι επομένως νέο μέτρο ελαστικότητας. Ως τύπος συσχέτισης μέτρου ελαστικότητας (E) και οστικής πυκνότητας (ρ) επιλέχθηκε ο τύπος

$$E = 3790 \rho^3 \quad (\text{σχέση 4.2})$$

κι έτσι προκύπτει ένα ετερογενές μοντέλο για το οστό.

Βασιζόμενοι στην εργασία του Evans (1973) οι Carter et al. επέλεξαν ένα πεπερασμένο στοιχείο που διατηρεί σταθερή την πυκνότητά του και ίση με $\rho_0 = 0,64 \frac{g}{cm^3}$ σε όλη τη διάρκεια της δοκιμής. Θεώρησαν 3 συνθήκες φόρτισης ($c=3$) και $n_1=n_2=n_3=1$ χωρίς αυτή η επιλογή να επηρεάζει τη γενικότητα.. Με τις νέες ιδιότητες υπολογισμένες η ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων επαναλήφθηκε. Καθορίζεται νέα τιμή της σταθεράς K (τέτοια ώστε το επιλεγμένο στοιχείο να διατηρεί πυκνότητα ρ_0) και η νέα κατανομή πυκνότητας υπολογίζεται. Η επαναληπτική αυτή διαδικασία συνεχίζεται και λαμβάνεται η κατανομή της πυκνότητας. Όσον αφορά στην ανισοτροπία, σε αντίθεση με τον Wolff (και τις αντίστοιχες παρατηρήσεις του Culmann) που θεωρούσε ότι καθορίζεται από τις κατευθύνσεις των κύριων τάσεων που δημιουργούνται από μια μόνη συνθήκη φόρτισης ή οποιοδήποτε τύπο τανυστή τάσεων (Cowin 1986), θεώρησαν μια εναλλακτική προσέγγιση. Συγκεκριμένα, πρότειναν ως μέγεθος που εκφράζει τη διέγερση του οστού ώστε να οργανωθεί προς συγκεκριμένη διεύθυνση, κι επομένως αντιστοιχεί σε

κατευθυντικές διαφορές της δυσκαμψίας και της αντοχής, την κάθετη συνιστώσα της τάσης που δρα σε κάθε στοιχείο:

$$\sigma_n = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{xz} nl + 2\tau_{xy} lm \quad (\text{σχέση 4.3})$$

με l, m, n να είναι τα συνημίτονα κατεύθυνσης του κάθετου διανύσματος κάθε στοιχείου ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων x, y, z , ενώ $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ είναι οι κύριες και $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ οι διατμητικές τάσεις ως προς το σύστημα συντεταγμένων x, y, z . Για το σύνολο των c φορτίσεων που υποτέθηκαν ο τύπος είναι:

$$\sigma_n^*(l, m, n) = \left[\sum_{i=1}^c (n_i / n_t) |\sigma_{n_i}(l, m, n)|^M \right]^{1/M} \quad (\text{σχέση 4.4})$$

με $n_t = \sum_{i=1}^c n_i$.

Πραγματοποιήθηκαν 3 διαφορετικές δοκιμές: για $c=1$ (μία φόρτιση), για $c=3$ και $M=1$, για $c=3$ και $M=4$. Οι παράμετροι που ελέγχθηκαν ήταν:

$$\% \Delta E_{ave} = (100 \% / N_{el}) \left[\sum_{elements} (E_{new} - E_{old})^2 \right]^{1/2} \quad (\text{σχέση 4.5})$$

και

$$\Delta \rho_{ave} = 1 / N_{el} \left[\sum_{elements} |\rho_{new} - \rho_{old}| \right] \quad (\text{σχέση 4.6})$$

Σε όλες τις δοκιμές παρατηρήθηκε μεγάλη αλλαγή στο πρώτο βήμα όσον αφορά στο μέτρο ελαστικότητας και την πυκνότητα. Από το δεύτερο όμως βήμα και έπειτα οι μεγαλύτερες αλλαγές στα $\% \Delta E_{ave}$ και $\Delta \rho_{ave}$ έφτασαν μέχρι 1%. Σε ορισμένα όμως στοιχεία παρατηρήθηκαν μεγάλες αυξήσεις στην πυκνότητα. Αυτά τα στοιχεία ήταν κοντά στη φλοιώδη διάφυση (κύριο σώμα του φλοιώδους οστού – εκτός των άκρων) και αντιπροσώπευαν μια γρήγορη σταθεροποίηση του σπογγώδους οστού (cancellous) σε συμπαγές οστό. Επιλέχθηκαν το πρώτο, τρίτο και έβδομο βήμα για τη λήψη εικόνων των διαβαθμίσεων της πυκνότητας και του μέτρου ελαστικότητας. Παρατηρήθηκε ότι αυτές ήταν φυσιολογικές για τα βήματα 1 και 3, αλλά στο έβδομο βήμα ήταν πολύ μεγαλύτερες από αυτές που είχαν παρατηρηθεί παλαιότερα (Brown και Ferguson 1980, Evans 1973). Θεώρησαν λοιπόν ότι οι λύσεις που υπολογίστηκαν υποδεικνύουν πως η αρχιτεκτονική του οστού προσεγγίζεται με λίγα βήματα. Λαμβάνοντας υπόψη μελέτες που αποδεικνύουν ότι το μέτρο ελαστικότητας είναι ανάλογο του τετραγώνου της πυκνότητας (Harrigan 1981, Bensusan 1983, Gibson 1985) πραγματοποίησαν επιπλέον δοκιμές με τη νέα αυτή σχέση μέτρου ελαστικότητας και πυκνότητας. Συμπέραναν ότι η διαφορά κατανομής της πυκνότητας μεταξύ τρίτου και έβδομου βήματος ήταν πολύ μικρότερη για τετραγωνική

εξάρτηση του E σε σχέση με την κυβική. Τέλος, μια εφαρμογή με περισσότερες φορτίσεις (π.χ. $c=8$) και με διαφορετικό αριθμό κύκλων θα μπορούσε να αποδώσει καλύτερα την καθημερινή φόρτιση κι επομένως να προσεγγίσει καλύτερα τη μορφολογία του οστού.

Harrigan – Hamilton [33]

Οι Harrigan και Hamilton (1992) πραγματοποίησαν μία μελέτη προς αυτή την κατεύθυνση με σκοπό να αναγνωρίσουν κάποιες από τις αιτίες της ασταθούς συμπεριφοράς στις προσομοιώσεις της οστικής ανακατασκευής. Συγκεκριμένα, επιδίωξαν να ξεκαθαρίσουν ποτέ οι αστάθειες που εμφανίζονται σε κάποιες προσομοιώσεις οφείλονται στη φυσική διαδικασία ανακατασκευής του οστού, στις εξιδανικεύσεις και προτάσεις που χρησιμοποιούνται ώστε να χαρακτηριστεί μαθηματικά η οστική ανακατασκευή ή στις προσεγγίσεις που χρησιμοποιούνται για να εφαρμόσουν το μαθηματικό χαρακτηρισμό σε μια αριθμητική προσομοίωση. Οι Harrigan και Hamilton χρησιμοποίησαν σε αυτή τους τη μελέτη αντί για τη γνωστή εκθετική σχέση μέτρου ελαστικότητας – πυκνότητας την ακόλουθη σχέση: $E = K \cdot \phi^n$

όπου ϕ είναι η ογκομετρική πυκνότητα του σκληρυνόμενου με ασβέστιο ιστού (Beaupré et al 1990),

ο συντελεστής K είναι μια σταθερά αναλογίας και

ο n ένας εκθέτης

προκύπτουν δε και οι δύο από καμπύλες πειραματικών πληροφοριών.

Η διέγερση που χρησιμοποίησαν για την ανακατασκευή είναι: $U_t = \frac{U}{\phi^m}$, όπου U η πυκνότητα τροπικής ενέργειας και m εκθέτης. Η διαφορική εξίσωση που χρησιμοποίησαν για την αλλαγή της πυκνότητας ήταν:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = R \cdot (U_t - A) \quad (\text{σχέση 4.7})$$

όπου R σταθερά αναλογίας και

A η τιμή ισορροπίας της πυκνότητας τροπικής ενέργειας προσαρμοσμένης στη μικροδομή (τιμή αναφοράς).

Εφαρμόζοντας αυτές τις σχέσεις αρχικά για αξονική φόρτιση και στη συνέχεια για καμπτική ροπή συμπεράναν ότι για ένα είδος διαταραχών (ορθογωνικές) αναγκαία συνθήκη ευστάθειας, δηλαδή ικανότητας του οστού να φτάνει αλλά και να διατηρεί μια σταθερή δομή, είναι ο εκθέτης n να είναι μικρότερος του m .

Ωστόσο η σχέση $n < m$ δεν αποτελεί και ικανή συνθήκη, καθώς θα πρέπει η ευστάθεια του συστήματος να ελεγχθεί και σε άλλου είδους διαταραχές με ευστάθεια ή αστάθεια για διαφορετικές σχέσεις των n και m . Εφόσον δε χρησιμοποιήθηκαν αριθμητικές

προσεγγίσεις, οι αστάθειες που εμφανίστηκαν δεν οφείλονται σε αριθμητικές μεθόδους. Επίσης, οι αστάθειες αυτές δεν εμφανίζονται in vivo επομένως δεν οφείλονται στις φυσικές διαδικασίες ανακατασκευής. Κατέληξαν, λοιπόν, ότι οι αστάθειες που παρουσιάζονται σε ορισμένες προσομοιώσεις της οστικής ανακατασκευής οφείλονται (τουλάχιστον για τα παραδείγματα που μελετήθηκαν) στη μαθηματική μοντελοποίηση που χρησιμοποιείται.

4.3.2 Με βάση στη θεωρία των μικρορωγματοώσεων

Prendergast, Taylor και McNamara (1992) [9]

Παρατηρήσεις που συσχετίζουν μικροδομές του οστού με την κατάσταση τοπικών τάσεων (Ascenzi) πρότειναν ότι η ανακατασκευή πρέπει να διεγείρεται έτσι ώστε να προκύψει μια βέλτιστη αντοχή. Την προσέγγιση αυτή παρουσίασαν και εφάρμοσαν οι Prendergast, Taylor και McNamara (1992) με σκοπό την πρόβλεψη παρόμοιας οστικής ανακατασκευής με αυτή που παρατηρήθηκε σε πειράματα σε ζώα. Δημιούργησαν για αυτό το σκοπό ένα ανατομικό μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων του μπροστινού άκρου ενός προβάτου. Η προσέγγιση που χρησιμοποιήθηκε βασίστηκε στην ιδέα της ύπαρξης σχέσης μεταξύ βλάβης σε μορφή μικρορωγματοώσεων και απόθεση/απορρόφηση οστού στις επιφάνειες περιόστεου και ενδόστεου και στην επιφάνεια των εσωτερικών πόρων. Έγιναν επίσης δύο υποθέσεις ώστε να είναι ικανή αυτή η ιδέα να χρησιμοποιηθεί για να προβλέψει την προσαρμογή του οστού κατά τη διάρκεια του χρόνου. Η πρώτη είναι ότι υπάρχει ένας καταμερισμός της μικροβλάβης στο οστό κατά την ισορροπία της ανακατασκευής. Σε μία αύξηση της φόρτισης αυτό το ποσό της μικροβλάβης θα αυξηθεί ενώ σε μία μείωση της φόρτισης θα μειωθεί. Η αλλαγή στην ποσότητα της βλάβης καλείται ενεργός βλάβη και συμβολίζεται ω_{eff} . Ισχύει:

$$\frac{dX}{dt} = C \cdot \omega_{eff} \quad (\text{σχέση 4.8})$$

όπου X είναι το μέγεθος μιας προσαρμοστικής διαδικασίας και

C μια σταθερά.

Η δεύτερη υπόθεση είναι ότι η διόρθωση της μικροβλάβης καθορίζεται από τη σχετική με τη φυσιολογία τάση. Τα πρώτα αποτελέσματα υπέδειξαν ένα αρχικό μοτίβο προσαρμογής του οστού παρόμοιο με εκείνο που είχε παρατηρηθεί πειραματικά χωρίς την ανάγκη χρήσης αυθαίρετα διαφορετικών σταθερών για τις επιφάνειες ενδόστεου και περιόστεου. Έτσι, πρότειναν ότι ο νόμος της ανακατασκευής που βασίζεται στη βλάβη και επιδιόρθωση δίνει ένα καλύτερο μοντέλο για την πρόβλεψη της προσαρμογής του οστού σε σχέση με προηγούμενα μοντέλα.

Βασίζόμενοι στην υπόθεση ότι η ανάπτυξη μικροβλαβών μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως βάση για τη διέγερση της οστικής ανακατασκευής, οι Prendergast και Taylor (1994) παρουσίασαν μια αντίστοιχη προσέγγιση.

Μια παράμετρος ω καθορίστηκε ως παράμετρος βλάβης με τιμές από 0 (οστό χωρίς βλάβη) μέχρι 1 (οστό με κάταγμα):

$$\omega = \frac{\alpha}{\alpha_f} \text{ με } \alpha \text{ το μήκος της μικρορωγμής και } \alpha_f \text{ το αντίστοιχο μήκος κατά την αστοχία.}$$

Ως διέγερση (stimulus) για την ανακατασκευή θεωρήθηκε η ακόλουθη ποσότητα:

$$\int_{-\infty}^t (\dot{\omega} - \dot{\omega}_{RE}) dt \quad (\text{σχέση 4.9})$$

όπου $\dot{\omega}$ είναι ο πραγματικός ρυθμός παραγωγής βλάβης ενώ

$\dot{\omega}_{RE}$ είναι ο ρυθμός επιδιόρθωσης της βλάβης αυτής.

Ισχύει επίσης: $\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dN}$ με N τον αριθμό των κύκλων φόρτισης.

Ως εξίσωση (μη γραμμική) του ρυθμού βλάβης μπορεί να θεωρηθεί η

$$\frac{d\omega}{dN} = \left(\frac{1}{N_f} \right)^\alpha \quad (\text{σχέση 4.10})$$

όπου N_f ο αριθμός των κύκλων μέχρι την αστοχία.

Ο αριθμός των απαιτούμενων κύκλων N_f συνδέεται με την τάση και την πυκνότητα από τις αντίστοιχες σχέσεις:

$$\text{Log}(N_f) = H \text{Log}(\sigma) + A \quad (\text{σχέση 4.11})$$

όπου H και A σταθερές του υλικού και

$$\text{Log}(N_f) = D + E\rho \quad (\text{σχέση 4.12})$$

με D, E σταθερές.

Το μοντέλο αυτό βασίζεται τέλος σε δύο βασικές υποθέσεις:

- Υπάρχει ένα ποσό μικροσκοπικής βλάβης στο οστό κατά την κατάσταση ισορροπίας της ανακατασκευής
- Ο ρυθμός επιδιόρθωσης της μικροσκοπικής βλάβης είναι μια σταθερά που καθορίζεται μόνο από τη σχετική με τη φυσιολογία τάση.

Πραγματοποιώντας μια μελέτη σύγκρισης του μοντέλου με βάση την πυκνότητα τροπικής ενέργειας και του μοντέλου με βάση τη βλάβη οι MacNamara et al. 1997 συμπέραναν ότι

το ποσό $\frac{d\omega}{dN}$ είναι ισοδύναμο, ως ποσό διέγερσης της ανακατασκευής, με την πυκνότητα τροπικής ενέργειας υψωμένη σε μία δύναμη $n/2$. Μια τυπική πειραματική τιμή της n στο φλοιώδες οστό είναι 4,529 η οποία δίνει έναν εκθέτη $\frac{n}{2} = 2,25$.

Αυτό το αποτέλεσμα συμφωνεί με τα πορίσματα άλλων μελετητών (π.χ Weinans, Huiskes, Grootenboer 1994) που συμπέραναν ότι η καλύτερη πρόβλεψη επιτυγχάνεται με την πυκνότητα τροπικής ενέργειας υψωμένη σε έναν εκθέτη μεταξύ 2 και 3. Παρόλα αυτά κατέληξαν ότι το βασισμένο στη βλάβη μοντέλο έχει ένα βασικό πλεονέκτημα όσον αφορά στη μη γραμμικότητα που απαιτείται στην προσομοίωση της οστικής ανακατασκευής για να αναπαραχθούν τα κλινικά παρατηρούμενα μοντέλα. Η μη γραμμικότητα αυτή μπορεί να προσδιοριστεί θεωρητικά για τα μοντέλα με βάση τη βλάβη ενώ σε αυτά της τροπής υποθέτονται εμπειρικές σχέσεις.

4.3.3 Σε μηριαίο οστό

Stülpmner et al 1997 [11]

Παρόλο που οι μελέτες σε διδιάστατη γεωμετρία είναι χρήσιμες και προσφέρουν μια καλύτερη κατανόηση της οστικής ανακατασκευής είναι πολύ σημαντική η πραγματοποίηση αντίστοιχων μελετών σε πλήρη τριδιάστατη κατάσταση για δύο κύριους λόγους:

Πρώτον, η πραγματική γεωμετρία του οστού είναι τριδιάστατη επομένως κάθε διδιάστατη μελέτη αναπαριστά ουσιαστικά μια προσέγγιση της πραγματικής κατάστασης. Δεύτερον, οι διδιάστατες αναλύσεις δεν προσφέρουν τη δυνατότητα μελέτης των επιδράσεων μιας «εκτός πλάκας» φόρτισης.

Προς αυτή την κατεύθυνση, οι Stülpmner, Reddy, Starke και Spirakis (1997) πραγματοποίησαν μια τριδιάστατη ανάλυση για το μηριαίο οστό. Τριδιάστατα πλέγματα πεπερασμένων στοιχείων του μηριαίου οστού είχαν αναπτυχθεί και από τους Huiskes et al (1992) και Poss et al (1988) χωρίς όμως να αναπτυχθεί κάποια ανάλυση ανακατασκευής στα μοντέλα αυτά. Θεωρώντας οι Stülpmner et al. το οστό ισοτροπικό και γραμμικά ελαστικό η τάση σ και η παραμόρφωση ϵ συνδέονταν σύμφωνα με τη σχέση 4.13:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \epsilon_{kl} \quad (\text{σχέση 4.13})$$

Ο τανυστής ελαστικότητας C δίνεται από τη σχέση 4.14:

$$C_{ijkl} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\nu \delta_{ij} \delta_{kl} + (1-2\nu) \delta_{jk} \delta_{il} \right] \quad (\text{σχέση 4.14})$$

όπου E το μέτρο ελαστικότητας και ν ο λόγος Poisson, τα οποία συνδέονται με την πυκνότητα σύμφωνα με τις σχέσεις (Jacobs 1994):

$$E = \begin{cases} 2014\rho^{2,5} & \text{όταν } \rho \leq 1.2 \text{ g/cc} \\ 1763\rho^{3,2} & \text{όταν } \rho \geq 1.2 \text{ g/cc} \end{cases} \quad \nu = \begin{cases} 0,2 \\ 0,32 \end{cases}$$

Ακολουθώντας παρόμοια προσέγγιση με άλλους ερευνητές (Mikié και Carter 1995) εισήγαγαν ως διέγερση ισοδύναμης τροπής την $\bar{\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon_{ij} \cdot \varepsilon_{ij}}$ και αφαιρώντας από αυτή μια τροπή αναφοράς ε_{rem} υπολόγισαν ένα σφάλμα e της ανακατασκευής:

$$e = \left(\sum_{i=1}^N n_i (\bar{\varepsilon}_i - \varepsilon_{rem})^{m_i} \right)^{1/m_i} \quad (\text{σχέση 4.15})$$

όπου

N είναι ο συνολικός αριθμός των διαφορετικών περιπτώσεων φόρτισης,

ο δείκτης I αναπαριστά την i -οστή περίπτωση φόρτισης,

n_i είναι ο αριθμός των κύκλων ανά μέρα της i -οστής φόρτισης,

m_i είναι θετικές τιμές και

ε_{rem} μια ομοιοστατική τιμή παραμόρφωσης.

Η ταχύτητα \dot{r} της ανακατασκευής δίδεται από τη διπλή σιγμοειδή συνάρτηση:

$$\dot{r}(e) = \begin{cases} c_1 / (1 + \exp[-\gamma(e-e_0)]) & \text{για } e > 0 \\ -c_2 / (1 + \exp[-\gamma(e-e_0)]) & \text{για } e < 0 \end{cases}$$

ενώ για $e = 0$ παίρνει την τιμή 0.

Ενδεικτικές τιμές των χρησιμοποιούμενων παραμέτρων είναι: $c_1 = 10 \mu\text{m/day}$, $c_2 = 2 \mu\text{m/day}$, $\gamma = 3000$.

Η σημαντικότερη φόρτιση στο κεντρικό μηριαίο οστό είναι το σύνολο των δυνάμεων που αναπτύσσονται κατά τον κύκλο της βάδισης. Παρουσιάζουν δε μέγιστη τιμή στα μέσα του κύκλου αυτού. Η παραπάνω, λοιπόν, μελέτη έδωσε ρεαλιστικά αποτελέσματα παρόλο που η ανάλυση πολλαπλής φόρτισης που έγινε ήταν μια απλοποίηση του πραγματικού ιστορικού της φόρτισης.

Ορισμένες δομές όπως το φλοιώδες οστό στο στέλεχος και οι δοκιδοειδείς στηρίξεις κατά πλάτος της κεφαλής του μηριαίου οστού ήταν εμφανείς. Κάποιες άλλες όμως δομές που έχουν παρατηρηθεί στην πραγματικότητα δεν έγινε εφικτό να εξαχθούν. Τέλος, σε σχέση με αντίστοιχες διδιάστατες αναλύσεις, η συγκεκριμένη τριδιάστατη ανάλυση εμφανίστηκε απαλλαγμένη από ανακρίβειες και αστάθειες με τη μορφή πολύ μεγάλων διαβαθμίσεων πυκνότητας και διατάξεις με μορφή «σκακιέρας» (εναλλαγή μέγιστης και ελάχιστης πυκνότητας σε γειτονικά πεπερασμένα στοιχεία τα οποία αν χρωματιστούν με μαύρο και άσπρο χρώμα αντίστοιχα εμφανίζουν μορφή σκακιέρας).

Doblaré και García 2001 [13]

Οι Doblaré και García παρουσίασαν (2001) μία μελέτη του μηριαίου οστού πριν και μετά από ολική αντικατάσταση ισχίου με βάση μια θεωρία βλάβης-διόρθωσης. Σε αντίθεση με τις προηγούμενες θεωρίες βλάβης όπως αυτή που παρουσιάστηκε ανωτέρω, η ιδέα της βλάβης που χρησιμοποίησαν ταυτιζόταν με το πορώδες χωρίς να υποδηλώνεται κανένα είδος πραγματικού μικροσπασίματος ή μεταβολικής βλάβης. Εφάρμοσαν το μοντέλο τους αυτό σε 4 παραδείγματα, μία διδιάστατη και μια τριδιάστατη αναπαράσταση του ακέραίου οστού, πριν την εμφύτευση, και τις αντίστοιχες αναπαραστάσεις για το οστό μετά την εμφύτευση.

Για το ακέραιο οστό και τα δύο μοντέλα έδωσαν παρόμοια συμπεράσματα και πρόβλεψαν σημαντικά φυσικά αποτελέσματα. Για παράδειγμα, το φλοιώδες στρώμα προβλέφθηκε αποτελεσματικά, κάτι που δεν είχε αναπαραχθεί πλήρως σε αντίστοιχες μελέτες όπως των Stülper et al. (1997), που παρουσιάστηκε προηγουμένως, πιθανόν λόγω ακατάλληλων φορτίσεων.

Στο τριδιάστατο μοντέλο, η ευθυγράμμιση της κατεύθυνσης της οστικής μάζας κατά μήκος της διάφυσης παράγει μία σχεδόν εγκάρσια ισεντροπική συμπεριφορά που ευθυγραμμίζεται επίσης με τις κύριες διευθύνσεις της τάσης. Το φαινόμενο αυτό δεν παρατηρήθηκε στο διδιάστατο μοντέλο.

Όσον αφορά στα μοντέλα μετά την εμφύτευση παρουσιάστηκε δυνατό να αναπαραχθεί η μικρή διαπλάτυνση του φλοιώδους στρώματος στο περιφερικό άκρο της πρόσθεσης, η απορρόφηση οστού γύρω από την πρόσθεση, κυρίως γύρω από την κεντρική περιοχή.

Όσον αφορά στην ανισοτροπία παρατηρήθηκε μια ελαφρά τροποποίηση του βαθμού ανισοτροπίας στο φλοιώδες στρώμα λόγω της εμφύτευσης. Η τροποποίηση αυτή φάνηκε να εξαρτάται από το μέγεθος της διάφυσης, εξαιτίας της εξάρτησης του λόγου μεταξύ κάθετων και εφαπτόμενων τάσεων από το πλάτος της διάφυσης. Όταν η διάφυση ήταν μεγαλύτερη, η καμπτική δυσκαμψία ήταν επίσης μεγαλύτερη, οι κάθετες τάσεις μειώνονταν σε σχέση με τις εφαπτόμενες και ο συντελεστής ανισοτροπίας μειωνόταν αντίστοιχα.

4.3.4 Εφαρμογή οστικής ανακατασκευής σε εμφυτεύματα-προσθέσεις

Όταν μια πρόσθεση σχεδιάζεται κύριος σκοπός είναι να διατηρηθεί η λειτουργικότητα του σχετιζόμενου τμήματος με τη μικρότερη απώλεια οστού. Για να επιτευχθεί αυτό παράγοντες όπως η δυσκαμψία, το σχήμα και η θέση τοποθέτησης της πρόσθεσης, το τελείωμα της επιφάνειας και επιπρόσθετα υλικά όπως ακρυλικό τσιμέντο πρέπει να ληφθούν υπόψη.

Η απορρόφηση οστού αποτέλεσε σημαντικό πρόβλημα στις προσθέσεις μηριαίου οστού χωρίς ακρυλικό τσιμέντο οι οποίες και απαιτούν μεγαλύτερη ακρίβεια σε σχέση με τα εμφυτεύματα ακρυλικού τσιμέντου (επειδή πρέπει να γεμίσουν το εσωτερικό κανάλι του μηριαίου οστού). Δεδομένου ότι τα υλικά των προσθέσεων συνήθως έχουν ένα πολύ μεγαλύτερο μέτρο ελαστικότητας σε σχέση με το οστό που τις υποστηρίζει (ακόμη και 10 φορές μεγαλύτερο), ένας βαθμός προστασίας έναντι τάσεων είναι αναπόφευκτος. Η προκύπτουσα, λοιπόν, μείωση των πιέσεων αντιστοιχεί σε παρατηρούμενες περιοχές απορρόφησης οστού και επομένως αστοχία του εμφυτεύματος

Ανάλυση της επίδρασης διαφορετικών τύπων εμφυτευμάτων ισχίου στην αλλαγή της μηχανικής φόρτισης και της οστικής ανακατασκευής στο μηριαίο οστό έχει πραγματοποιηθεί από τους Wiade et al (2003). Η συγκεκριμένη έρευνα απέδειξε πειραματικά και θεωρητικά ότι η μικρότερη κλινική επιτυχία του εμφυτεύματος Muller-Curved σε σχέση με το Lubinus SPII οφείλεται στη διαφορετική διαδικασία προσαρμογής που προκαλούν οι διαφορετικές συνθήκες μετά την εμφύτευση.

Οι García et al. (2002) παρουσίασαν μια ποιοτική υπολογιστική μελέτη της μακράς περιόδου οστικής εξέλιξης, ειδικά του ανθρώπινου μηριαίου οστού όπου διαφορετικοί τύποι εμφυτευμάτων έχουν εφαρμοστεί ώστε να σταθεροποιήσουν διάφορα είδη βλαβών.

Αρχικά, πραγματοποίησαν μια συγκριτική ανάλυση μεταξύ δύο προσθέσεων ολικής αντικατάστασης ισχίου ευρέως χρησιμοποιούμενων, όπως η Exeter και η SHP. Και οι δύο προσθέσεις έδωσαν παρόμοια αποτελέσματα, το ποσοστό της απορρόφησης οστού εξαιτίας της πρόσθεσης αυξάνεται κοντά στο κεντρικό τμήμα εκτός από το άκρο της πρόσθεσης όπου στην πραγματικότητα ένας συγκεντρωτής προστίθεται για την αποφυγή αυτής της συνέπειας.

Στη συνέχεια, μελέτησαν την θεραπεία βλαβών του κεντρικού μηριαίου οστού με εσωτερικές (intramedular) και εξωτερικές (extramedular) σταθεροποιήσεις. Ως εσωτερική μελετήθηκε η Gamma nail ενώ ως εξωτερική το δυναμικό σύστημα ισχίου (DHS). Συμπέραναν δε διαφορετικές συμπεριφορές: Για την Gamma nail παρατηρήθηκε απορρόφηση οστού μεταξύ καρφιού και βιδών και απόθεση οστού σε περιφερικό τμήμα. Για την DHS παρατηρήθηκε απορρόφηση του οστού ακριβώς κάτω από την κεφαλή του μηριαίου οστού ενώ απόθεση οστού δίπλα στις τέσσερις χρησιμοποιούμενες βίδες.

Τέλος, μελέτησαν περιφερικές βλάβες με θεραπεία από πλάκες (LISS plate) ή βίδες (DFN) και συμπέραναν διαφορετική συμπεριφορά. Όσον αφορά στη LISS παρατηρήθηκε μια καθαρή απορρόφηση οστού στη ζώνη της βλάβης, ενώ μια απόθεση στη ζώνη δίπλα στην πλάκα. Στην DFN παρατηρήθηκε απλά μια απορρόφηση οστού στο φλοιώδες στρώμα στην περιοχή της βλάβης. Έτσι, κατέληξαν ότι η DFN παράγει μικρότερη απορρόφηση οστού και βοηθά στην καλύτερη κατανομή της τάσης στο οστό.

Σε αντιστοιχία με τα εμφυτεύματα ισχίου, για τον ανασχηματισμό του γονάτου γίνεται αντικατάσταση μιας νοσηρής ή φθαρμένης επιφάνειας της άρθρωσης με μία τεχνητή. Αυτή η μορφή θεραπείας θεωρείται αποδεκτή και επιτυχημένη. Τα εμφυτεύματα από υψηλής πυκνότητας πολυαιθυλένιο (UHMWPE) και μεταλλικά εξαρτήματα άρθρωσης εμφάνισαν μειονεκτήματα όταν εφαρμόστηκαν σε νεαρά, πιο ενεργητικά άτομα και σε όσα ήταν παχύσαρκα. Υψηλές φορτίσεις οδηγούσαν σε φθορά το UHMWPE κάτι που μπορούσε να οδηγήσει και σε φλεγμονώδη αντίδραση του ιστού. Ο συνδυασμός αυτών των μηχανικών και βιολογικών φαινομένων οδηγούσε σε αστοχίες υλικού και χαλάρωση της σύνδεσης. Έτσι σε έρευνα που παρουσίασαν οι Wevers, Dujonne, Guzzwell και Cooke (1991) μελέτησαν τη βελτίωση του σχεδιασμού εμφυτευμάτων μέσω της ανάλυσης της μορφολογίας, της σκληρότητας του κνημιαίου οστού και των χαρακτηριστικών αντοχής του σε φόρτιση. Θεώρησαν λοιπόν ότι ο σχεδιασμός και ο έλεγχος της διαδικασίας θα πρέπει να έχει την ακόλουθη ροή: οι πληροφορίες και γνώσεις που υπάρχουν για τη φυσιολογία του οστού καθώς και κλινικά αποτελέσματα εμφυτευμάτων συνδυάζονται για το σχεδιασμό του νέου εμφυτεύματος. Ακολουθεί η ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων, ο έλεγχος εγκυρότητάς της και τέλος η παραγωγή πρωτοτύπου. Στη συνέχεια ακολουθεί εφαρμογή αυτού (ζώα, κλινική) η οποία λειτουργεί και ως ανάδραση για τη βελτίωση του σχεδιασμού.

Ένα παράδειγμα των νέων συνθηκών φόρτισης που εμφανίζονται μετά την εμφύτευση είναι το εξής: Τα μοντέλα που χρησιμοποιήθηκαν έδειξαν ότι το πιο κεντρικό επιφυσιακό φλοιώδες οστό δέχεται φόρτιση ενώ πριν την εμφύτευση το ακέραιο κνημιαίο κεντρικό φλοιώδες οστό (επίφυση) δεν είχε. Παρόλα αυτά οι αναπτυσσόμενες τάσεις παραμένουν πολύ μικρότερες από την αντοχή των χρησιμοποιούμενων υλικών. Συμπέραναν επίσης ότι οι τεχνητές αντικαταστάσεις θα πρέπει να ταιριάζουν με τα χαρακτηριστικά του φυσικού κνημιαίου οστού το οποίο δε συνέβαινε με τα έως τότε σχέδια ολικού ανασχεδιασμού γονάτου. Υλικά όπως κράματα κοβαλτίου – χρωμίου ή τιτάνιο είναι πολύ πιο δύσκαμπτο από το οστό και οδηγούν σε αύξηση της δυσκαμψίας και μη φυσιολογική φόρτιση. Ο σχεδιασμός λοιπόν νέων εμφυτευμάτων θα πρέπει να ρυθμιστεί έτσι ώστε να αναπαριστά καλύτερα τη φυσιολογία του κνημιαίου οστού και να προσδίδει βελτιωμένη απόδοση και μακροζωία. Παράδειγμα της συγκεκριμένης προσέγγισης αποτελεί και ο σχεδιασμός της εύκαμπτης πλάκας που προτείνεται στη συγκεκριμένη μελέτη.

Η περιπροσθετική προσαρμοστική οστική ανακατασκευή ύστερα από ολική αρθροπλαστική οστού μπορεί να προσομοιωθεί σε υπολογιστικά μοντέλα, συνδυάζοντας τη θεωρία οστικής ανακατασκευής με την ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων. Χρησιμοποιώντας αντιπροσωπευτικά δείγματα οστών, που είχαν αναλυθεί σε προηγούμενες μελέτες με μέτρηση απορρόφησης ακτινών X (DEXA) (Engh 1992, 1994, 1995) και βιντεομέτρηση πυκνότητας (McGovern et al. 1994), οι Kerner et al. 1999 κατασκεύασαν ειδικά τριδιάστατα μοντέλα πεπερασμένων στοιχείων και εφάρμοσαν προσομοιώσεις οστικής ανακατασκευής σε αυτά. Η προβλεπόμενη απώλεια οστού που προέκυψε από τη μελέτη αντιστοιχίζεται πολύ καλά με τις μετρήσεις DEXA. Το ποσό αυτής της απώλειας βρέθηκε να είναι αντίστροφα ανάλογο της αρχικής μεταλλικής σύστασης του οστού.

Συμπέραναν λοιπόν ότι η ίδια κλινικά παρατηρούμενη αναλογία μπορεί να ερμηνευθεί από τη μηχανικά οφειλόμενη ανακατασκευή. Αυτή η ανακάλυψη αυξάνει τη χρησιμότητα της εφαρμογής του αριθμητικού προ-κλινικού ελέγχου στην ανάλυση της αλληλεπίδρασης μεταξύ σχεδιασμού εμφυτεύματος και αρχικής κατάστασης του οστού. Η οστική ανακατασκευή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την πρόβλεψη της μορφογένεσης του οστού όπως και των αλλαγών που εισάγονται από προσθετικά εμφυτεύματα οι οποίες μπορεί να παράγουν οστεοπόρωση, αστάθειες εμφυτεύματος κ.α. Το πορώδες του οστού αποτελεί την πιο σημαντική μεταβλητή που επηρεάζεται από τη διαδικασία ανακατασκευής. Για αυτό το λόγο τα περισσότερα μοντέλα χρησιμοποιούν το πορώδες ή ισοδύναμα τη φαινόμενη πυκνότητα για τον καθορισμό της κατάστασης ανακατασκευής.

Σε μελέτη σχετικά με τη σχέση της δομής των ακτινογραφιών και τις αλλαγές στην οστική πυκνότητα που πραγματοποίησαν οι Wilding et al (1994) κατέληξαν στα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Ο προσανατολισμός της διαβάθμισης στην ακτινογραφία εμφανίζεται να αναπαριστά τους κύριους προσανατολισμούς των δοκίδων του οστού.
- Η κλασματική δοκιδοειδής διάσταση του οστού ίσως είναι ένας χρήσιμος δείκτης των ηλικιακών αλλαγών λόγω της οστεοπόρωσης.
- Το οστό μεταβάλλεται αποκρινόμενο στην παρουσία ενός εμφυτεύματος, ιδιαίτερα στην περιοχή του οστού πλησιέστερα στο «λαιμό» του εμφυτεύματος.
- Τέλος, οι αλλαγές στο οστό που υποστηρίζει τα εμφυτεύματα δείχνουν να εμφανίζονται ανεξάρτητα στον ίδιο ασθενή.

4.3.5 Σε σπόνδυλο

Xinghua et al (2002) [8]

Βασιζόμενοι στα μοντέλα των Weinans et al. (1992) και Mullender et al. (1994), που περιγράφηκαν πιο πάνω, οι Xinghua et al. (2002) εισήγαγαν δύο μη-γραμμικότητες στη σχέση της οστικής ανακατασκευής: το συντελεστή ανακατασκευής $B(t)$ και το βαθμό της μη-γραμμικής εξίσωσης ανακατασκευής α .

Πρότειναν λοιπόν το ακόλουθο τροποποιημένο μοντέλο:

$$\frac{d\rho(x,t)}{dt} = B(t) \cdot \left(\sum_{i=1}^N f_i(x) \cdot (\beta_i^\alpha - 1) \right) \quad (\text{σχέση 4.16})$$

και $0 < \rho(x) \leq \rho_{cb}$

με N τον αριθμό πεπερασμένων κελιών και

α σταθερό συντελεστή.

Όπου $\beta_i = \frac{U_a(i)}{\rho_i k}$ και $U_a = \left(\frac{1}{n} \right) \sum_{i=1}^n U_i$ με

n τον αριθμό των υποθέσεων φόρτισης και

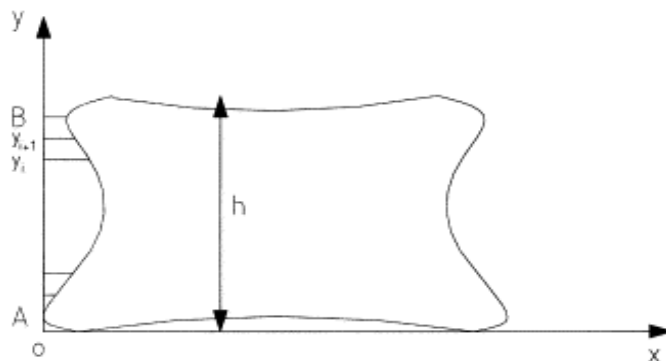
U_i τη φαινόμενη πυκνότητα τροπικής ενέργειας για την υπόθεση φόρτισης i .

Το μοντέλο τους αυτό το εφαρμόσαν σε δύο περιπτώσεις: μία πλάκα με κεκλιμένη φόρτιση και ένα 2-διάστατο μοντέλο της τομής ενός σπονδύλου.

Για τον συντελεστή $B(t)$ επιλέχθηκε η έκφραση:

$$B(t) = (B_0 - B_T) / e^{0,02t} + B_T \quad (\text{σχέση 4.17})$$

όπου B_0 είναι η αρχική (μέγιστη) τιμή του B και B_T η τελική (ελάχιστη) τιμή.



Σχήμα 4.1 Μοντέλο σπονδύλου που χρησιμοποιήθηκε από τους Xinghua et al (2002)

Η πρώτη περίπτωση της πλάκας είναι ίδια με εκείνη που εφαρμόστηκε παλαιότερα από τους Mullender et al. (1994). Στη δεύτερη περίπτωση του σπονδύλου εφαρμόστηκαν

φορτίσεις αντιπροσωπευτικές για το σπόνδυλο σε νεαρό και σε ηλικιωμένο άτομο. Το μοντέλο του σπονδύλου που χρησιμοποιήθηκε ήταν δε αυτό το σχήματος 4.1.

Jovanovic et al (2004) Κεφάλαιο 1o[7]

Η γνώση των μηχανισμών της οστικής ανακατασκευής είναι ιδιαίτερος σημαντική για τον σχεδιασμό εμφυτευμάτων καθώς μας καθιστά ικανούς να ελέγξουμε τη συμπεριφορά του οστικού ιστού κάτω από τις νέες συνθήκες μηχανικής φόρτισης, μετά την εμφύτευση, οι οποίες και αρχικοποιούν την ανακατασκευή. Η εφαρμογή αυτή αποτέλεσε αντικείμενο αρκετών ερευνών όπως των Huiskes et al. 1987, Martinez et al. 1998 και Waide et al. 2003. Στα πλαίσια της ίδιας αρχής οι Jovanovic et al. 2004 ερεύνησαν τη δυνατότητα δημιουργίας βιομηχανικού μοντέλου του οσφυϊκού σπονδύλου L₅ το οποίο, σχεδιασμένο σύμφωνα με τη μηχανική φόρτιση που οφείλεται στις καθημερινές δραστηριότητες, θα αποτελέσει αρχικό μοντέλο για την ανάλυση της συμπεριφοράς του οστού μετά την εμφύτευση.

Η προσομοίωση της ανακατασκευής που χρησιμοποιήθηκε βασίστηκε στο μοντέλο των Mullender et al. 1994 [29] όπου κάθε πεπερασμένο στοιχείο περιέχει ένα αισθητήριο κύτταρο στο κέντρο βάρους του. Κάθε τέτοιος αισθητήρας αφού διεγερθεί από κάποια μηχανική φόρτιση, που εκκινεί την ανακατασκευή του οστού, στέλνει σήμα που ισοδυναμεί με ενεργοποίηση της διαδικασίας προσαρμογής με εύρος που εκτείνεται πέρα από τα όρια των στοιχείων μέσα στα οποία βρίσκονται τα κύτταρα. Η επίδραση αυτού του σήματος στην ανακατασκευή μειώνεται όσο η απόσταση από τη θέση του κυττάρου-αισθητήρα αυξάνεται. Αυτή η υπόθεση περιλαμβάνει την επίδραση στην ανακατασκευή όλων των κυττάρων – κελιών ανάλογα με την απόσταση τους από την τοποθεσία που η οστική ανακατασκευή λαμβάνει χώρα. Η εξίσωση της οστικής ανακατασκευής μπορεί λοιπόν να εκφραστεί ως:

$$\frac{d\rho(x,t)}{dt} = B \cdot \sum_{i=1}^n f_i(x) \cdot \left[\frac{U_i}{\rho_i} - k \right] \quad (\text{σχέση 4.18})$$

με $0 < \rho \leq \rho_{cb}$

όπου n είναι ο αριθμός των πεπερασμένων στοιχείων,

U_i η πυκνότητα τροπικής ενέργειας στο κέντρο βάρους του πεπερασμένου στοιχείου,

ρ_i η πυκνότητα του οστού,

k η τιμή διέγερσης αναφοράς και

B η σταθερά της οστικής ανακατασκευής.

Η συνάρτηση $f_i(x)$ είναι η συνάρτηση χωρικής επίδρασης που προσομοιάζει την επιρροή των κυττάρων-αισθητήρων στον γειτονικό οστικό ιστό:

$$f_i(x) = e^{-\frac{d_i(x)}{D}}$$

όπου $d_i(x)$ είναι η απόσταση από το κύτταρο-αισθητήρα μέχρι τη θέση x και

D το εύρος της επίδρασης του κυττάρου-αισθητήρα.

Το μέτρο ελαστικότητας του Young θεωρήθηκε ότι καθορίζεται από την εξίσωση:

$$E = C \cdot \rho^\gamma$$

με C , γ σταθερές και

ρ η οστική πυκνότητα.

Ο Mullender μετέτρεψε τη διαφορική εξίσωση της οστικής ανακατασκευής χρησιμοποιώντας σταθερό χρονικό βήμα Δt στην ακόλουθη μορφή:

$$\Delta\rho(x,t) = \Delta t \cdot B \cdot \sum_{i=1}^n f_i(x) \cdot \left[\frac{U_i}{\rho_i} - k \right] \quad (\text{σχέση 4.19})$$

$$0 < \rho \leq \rho_{cb}$$

Νέα τιμή της πυκνότητας κάθε πεπερασμένου στοιχείου μπορεί επομένως να καθοριστεί από την ακόλουθη έκφραση:

$$\rho(x, t + \Delta t) = \rho(x, t) + \Delta\rho(x, t)$$

Η ανακατασκευή σε κάθε πεπερασμένο στοιχείο θεωρείται ότι συγκλίνει όταν μία από τις ακόλουθες τρεις συνθήκες ικανοποιηθεί :

(i) ο λόγος μεταξύ πυκνότητας τροπικής ενέργειας και οστικής πυκνότητας φτάσει την τιμή της προκαθορισμένης διέγερσης αναφοράς K ,

(ii) επιτευχθεί η πυκνότητα του φλοιώδους οστού $\rho = \rho_{cb}$,

(iii) εμφανισθεί πλήρης απορρόφηση οστού πεπερασμένου στοιχείου $\rho = 0,01 \frac{g}{cm^3}$.

Η συμπεριφορά σύγκλισης της οστικής ανακατασκευής μπορεί να ερευνηθεί με την αντικειμενική συνάρτηση F που καθορίζεται από την ακόλουθη έκφραση:

$$F = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left| \sum_{i=1}^m f_i(x) \left(\frac{U_i}{\rho_i} - k \right) \right| \quad (\text{σχέση 4.20})$$

όπου m είναι ο αριθμός των πεπερασμένων στοιχείων στα οποία η οστική ανακατασκευή συνεχίζεται.

Οι τιμές των σταθερών παραμέτρων του μοντέλου που χρησιμοποιήθηκαν στη συγκεκριμένη μελέτη είναι:

$$D = 0,5mm$$

$$B = 1 \left(g / cm^3 \right)^2 / (MPa \cdot time \ unit),$$

$$\rho_{cb} = 1,74 g / cm^3 ,$$

$$C = 100MPa \left(g / cm^3 \right)^2 ,$$

$$\gamma = 2 ,$$

$$\nu = 0,3 \text{ ο λόγος του Poisson,}$$

$\rho_0 = 0,8 g / cm^3$ η πυκνότητα του οστού σε όλα τα πεπερασμένα στοιχεία στην έναρξη της προσομοίωσης της οστικής ανακατασκευής.

Οι υπόλοιπες παράμετροι του μοντέλου επιλέχθηκαν έτσι ώστε η ευστάθεια της οστικής ανακατασκευής να παραχθεί ενώ η τελική δομή του οστικού ιστού να είναι παρόμοια με την πραγματική.

Για την εξαγωγή του γεωμετρικού τους μοντέλου οι Jovanovic χρησιμοποίησαν ως βάση ένα φυσικό μοντέλο του πέμπτου οσφυϊκού σπονδύλου O5. Το τριδιάστατο μοντέλο του παράχθηκε στο περιβάλλον του γεωμετρικού μοντελοποιητή Mechanical Desktop 6 από αυτόματο γενετή γεωμετρικών μοντέλων σπονδύλων που παρουσιάστηκε σε παλαιότερη εργασία τους (2002). Το παραπάνω τριδιάστατο γεωμετρικό μοντέλο χρησιμοποιήθηκε ως βάση για τη δημιουργία του διδιάστατου γεωμετρικού μοντέλου της κατακόρυφης τομής του σώματος του σπονδύλου. Αντίστοιχα, το παραπάνω διδιάστατο μοντέλο χρησιμοποιήθηκε ως βάση για τη γένεση πλέγματος επίπεδων γραμμικών ισοπαραμετρικών στοιχείων με κόμβους σε κάθε γωνία. Η διαδικασία θεωρήθηκε ότι ολοκληρώθηκε όταν η οστική ανακατασκευή έλαβε τέλος σε κάθε πεπερασμένο στοιχείο. Παρά τις διάφορες απλοποιήσεις και υποθέσεις, όπως ο ισχυρισμός ότι το μοντέλο ήταν διδιάστατο, η πρόχειρη προσέγγιση της σχέσης μέτρου ελαστικότητας και πυκνότητας αλλά και η επιλογή της πυκνότητας τροπικής ενέργειας ως μηχανικής διέγερσης, η κατανομή οστικής πυκνότητας που προέκυψε ήταν πολύ κοντά στην πραγματική.

4.3.6 Προβλήματα υπολογιστικών μεθόδων

Ενώ οι προβλέψεις των διάφορων θεωριών οστικής ανακατασκευής είχε γίνει αντικείμενο πολλών μελετών, η ευστάθεια των μαθηματικών μοντέλων που

χρησιμοποιήθηκαν για να εξάγουν αυτές τις θεωρίες δεν είχαν μελετηθεί ευρέως (Weinans et al. 1989, Carter et al. 1989).

Δύο τύποι ασυνεχειών έχουν παρατηρηθεί στις αριθμητικές προσομοιώσεις της οστικής ανακατασκευής (Weinans 1992, Jacobs 1995). Ο πρώτος τύπος («κοντινού πεδίου») εμφανίζεται σε περιοχές κοντά σε εφαρμογή κατανεμημένης φόρτισης και χαρακτηρίζεται από διάταξη «σκακιέρας» της πυκνότητας όπου γειτονικά ανασκευασμένα στοιχεία μπορούν είτε να είναι κορεσμένα ή εντελώς απορροφημένα.

Ο δεύτερος τύπος ασυνέχειας («μακρινού πεδίου») εμφανίζεται μακριά από την εφαρμογή φόρτισης και χαρακτηρίζεται από περιοχές στοιχείων με μορφή «κολώνας», ενώ γειτονικές περιοχές είναι πλήρως απορροφημένες. Πιστεύεται ότι ο δεύτερος τύπος ασυνέχειας είναι μια ακριβής αναπαράσταση της φυσιολογίας του οστού, ενώ ο πρώτος τύπος σχετίζεται με την εφαρμογή της διακριτοποίησης των πεπερασμένων στοιχείων. Οι Chen et al. (2006) θεωρώντας ότι το φαινόμενο «σκακιέρας» οφείλεται στην προσέγγιση με βάση τα πεπερασμένα στοιχεία (elements), εφάρμοσαν μια προσέγγιση με βάση τους κόμβους (nodes) και σύγκριναν τα αποτελέσματα των δύο προσεγγίσεων. Επίσης, σύγκριναν τις αριθμητικές μεθόδους σύγκλισης Euler προς τα εμπρός (forward-method) και Adams-Bashforth πρώτης τάξης ως προς την ακρίβεια που παρέχουν αλλά και τον απαιτούμενο χρόνο σύγκλισης.

Θεώρησαν ως εξίσωση της οστικής ανακατασκευής την:

$$\frac{d\rho}{dt} = B \left(\frac{S}{\rho} - k \right)$$

Ο απλούστερος αριθμητικός αλγόριθμος για την επίλυση της είναι η προς τα εμπρός μέθοδος Euler που δίνεται από: $\rho_{n+1} = \rho_n + h f_n$, με $h = t_{n+1} - t_n$ να είναι το μέγεθος του βήματος, $\rho_n = \rho(t_n)$ και $f_n = f(\rho_n, t_n)$.

Η μέθοδος αυτή δε συστήνεται για οποιαδήποτε πρακτική χρήση καθώς: (α) δεν είναι ιδιαίτερα ακριβής και (β) δεν είναι ιδιαίτερα ευσταθής. Έτσι, εισήγαγαν την Adams-Bashforth πρώτης τάξης:

$$\rho_1 = \rho_0 + h f_0 \quad \rho_{n+1} = \rho_n + h \left(\frac{3}{2} f_n - \frac{1}{2} f_{n-1} \right)$$

με $n \geq 1$, που χρησιμοποιεί τις λύσεις στις χρονικές στιγμές t_{n-1} και t_n για να προσεγγίσει τη λύση στην t_{n+1} . Επειδή οι λύσεις στις στιγμές t_{n-1} και t_n είναι ήδη διαθέσιμες, δεν απαιτείται κανένα επιπλέον υπολογιστικό κόστος.

Συμπεράναν τα ακόλουθα: Η «μακρινού πεδίου» ασυνέχεια εμφανίστηκε και στις δύο προσεγγίσεις κι έτσι θεωρήθηκε ότι είναι ακριβής αναπαράσταση της μορφολογίας

του οστού. Στη βασισμένη στα στοιχεία προσέγγιση η κατανομή της πυκνότητας είχε 3 κολώνες, ενώ στη βασισμένη στους κόμβους προσέγγιση είχε 2 κολώνες κατανομή που θεωρείται και πιο ακριβής. Η «κοντινού πεδίου» ασυνέχεια εμφανίστηκε μόνο στη βασισμένη στα στοιχεία προσέγγιση και θεωρήθηκε ότι σχετίζεται με την εφαρμογή της διακριτοποίησης των πεπερασμένων στοιχείων. Παρόλα αυτά η βασισμένη στους κόμβους προσέγγιση απαιτούσε περίπου πέντε φορές περισσότερο υπολογιστικό κόστος. Τέλος, υποστήριξαν ότι η μέθοδος πρώτης τάξης Adams-Bashforth είναι ταχύτερη και ακριβέστερη από την Euler. Επομένως, πρότειναν ως καταλληλότερη ανάλυση της οστικής ανακατασκευής τη βασισμένη στους κόμβους προσέγγιση σε συνδυασμό με τη μέθοδο αριθμητικής επίλυσης Adams-Bashforth πρώτης τάξης.

4.3.7 Οστική Ανακατασκευή ως βελτιστοποίηση

Ο αλγόριθμος που παρουσίασαν οι Bendsøe και Kikuchi(1988), για τα προβλήματα βελτιστοποίησης τοπολογίας, όταν εφαρμόστηκε για τον προσδιορισμό της κατανομής του οστού έδειξε να υποστηρίζει τις υποθέσεις του Wolff. Μια πρώτη πρωτοτυπία που εμφανίστηκε εδώ ήταν η μετατροπή του αρχικού προβλήματος σε ένα πρόβλημα κατανομής υλικού, όπου σύνθετα υλικά χρησιμοποιήθηκαν ως το βασικό υλικό. Μια άλλη πρωτοτυπία ήταν η εφαρμογή της θεωρίας ομογενοποίησης (Bensoussan, Lions, Papanikolaou 1978 και Murat, Tartar 1997) για τον καθορισμό των μακροσκοπικών ιδιοτήτων υλικού από τα μικροσκοπικά συστατικά υλικού (Allaire 2002, Bendsøe 1989, Diaz-Sigmund 1992, Pedersen 1989). Η προσέγγιση αυτή ακολουθήθηκε και για την επίλυση προβλημάτων ανακατασκευής όπως στις μελέτες των Bagge (2000), Fernandes et al. (1998), Pedersen (1999) και των Machado-Trabucho (2004) κι επίσης έδωσε αποτελέσματα σε συμφωνία με το νόμο του Wolff (προσανατολισμός ανισοτροπίας ανάλογος με την κατανομή των τάσεων).

Folgado et al. (2004) [34]

Η οστική ανακατασκευή σε πολλές μελέτες έχει προσομοιωθεί ως διαδικασία με βάση προσεγγίσεις βελτιστοποίησης. Έχουν παρουσιαστεί διάφορες αντικειμενικές συναρτήσεις ως παράγοντες βελτιστοποίησης, μεταξύ των οποίων: α) η κατανομή μιας σταθερής μάζας του οστικού ιστού βελτιστοποιείται με σκοπό την ελαχιστοποίηση της τροπικής ενέργειας στη δομή του οστού, β) το βάρος ελαχιστοποιείται για μία δεδομένη δυσκαμψία της δομής του οστού, γ) ένα άθροισμα της συνολικής λανθάνουσας ενέργειας με συντελεστές βαρύτητας και ένα σύστημα μέτρησης της μάζας στη δομή του οστού χρησιμοποιούνται ως συνάρτηση βελτιστοποίησης.

Η οστεοπόρωση είναι μια ασθένεια που οδηγεί σε μείωση της οστικής μάζας, αυξάνοντας τον κίνδυνο βλάβης ακόμη και για μικρές φορτίσεις. Σε σχετική έρευνά τους οι Folgado et al. (2004) μελέτησαν τη συμπεριφορά του οστού εξαιτίας της μείωσης της μάζας του λόγω της οστεοπόρωσης. Το μοντέλο οστικής ανακατασκευής που

χρησιμοποίησαν βασίζεται στη βελτιστοποίηση της δομής και είχε παρουσιαστεί από τους Fernandes et al. (1999). Το μοντέλο αυτό συνδυάζει ένα κριτήριο δυσκαμψίας με μεταβολικούς παράγοντες για τον έλεγχο της οστικής μάζας. Συγκεκριμένα, το πρόβλημα της ανακατασκευής θεωρήθηκε ότι σε διακριτή μορφή μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\min_{q, \theta} \left(\sum_{P=1}^{NC} \alpha^P f^P u^P + \beta \cdot V(q) \right) \quad (\text{σχέση 4.21})$$

όπου οι μετατοπίσεις u^P είναι λύσεις του συνόλου των ακόλουθων σχέσεων:

$$K(q, \theta) u^P = f^P \text{ όπου}$$

f^P το σύνολο των φορτίσεων επιφανείας,

NC ο αριθμός των εφαρμοζόμενων φορτίσεων,

P η κάθε φόρτιση και

V το συνολικό ποσό της οστικής μάζας.

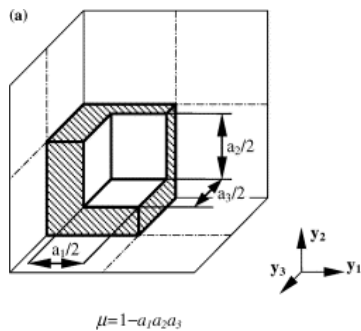
Οι σχεδιαστικές παράμετροι q είναι οι παράμετροι κελιών (a για κλειστό κελί και b για ανοικτό) και ισχύει: $0 \leq q_i \leq 1$, ενώ θ είναι ο προσανατολισμός κάθε κελιού. Για τους

συντελεστές βαρύτητας κάθε φόρτισης a^P ισχύει: $\sum_{P=1}^{NC} a^P = 1$.

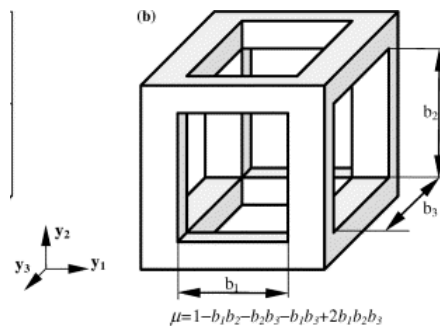
Τέλος, χρησιμοποιήθηκε η μεταβλητή β που αντιστοιχεί στο μεταβολικό κόστος της απόθεσης οστού για κάθε ξεχωριστό άτομο και περιλαμβάνει βιολογικούς παράγοντες όπως ηλικία, ορμονική κατάσταση, ασθένεια κλπ. Στη συγκεκριμένη περίπτωση η β αντιστοιχεί σε υψηλό επίπεδο οστεοπόρωσης κι έτσι σε χαμηλή τιμή οστικής μάζας. Οι συνθήκες ισορροπίας όπου δε λάμβανε χώρα καμία ανακατασκευή ήταν δε οι ακόλουθες:

$$\sum_{P=1}^{NC} \left(a^P u^P \frac{\partial K(q, \theta)}{\partial q_i} u^P - \beta \frac{\partial V(q)}{\partial q_i} \right) = 0 \quad \text{και} \quad \sum_{P=1}^{NC} \left(a^P u^P \frac{\partial K(q, \theta)}{\partial \theta} u^P \right) = 0.$$

Ακόμη, το σπογγώδες οστό μοντελοποιήθηκε από ένα πορώδες υλικό με περιοδική ορθοτροπική μικροδομή, εφαρμόζοντας διαφορετικές αλλαγές των ελαστικών ιδιοτήτων σε διαφορετικές κατευθύνσεις υλικού. Χρησιμοποιήθηκαν 2 διαφορετικές μικροδομές στο μοντέλο αυτό: ένα κλειστό μοναδιαίο κελί (κυβικό με πρισματική κοιλότητα) και ένα ανοικτό μοναδιαίο κελί για μία καλύτερη προσέγγιση. Στη συνέχεια το μοντέλο αυτό εφαρμόστηκε για τη μελέτη ενός ανθρώπινου σπονδύλου.

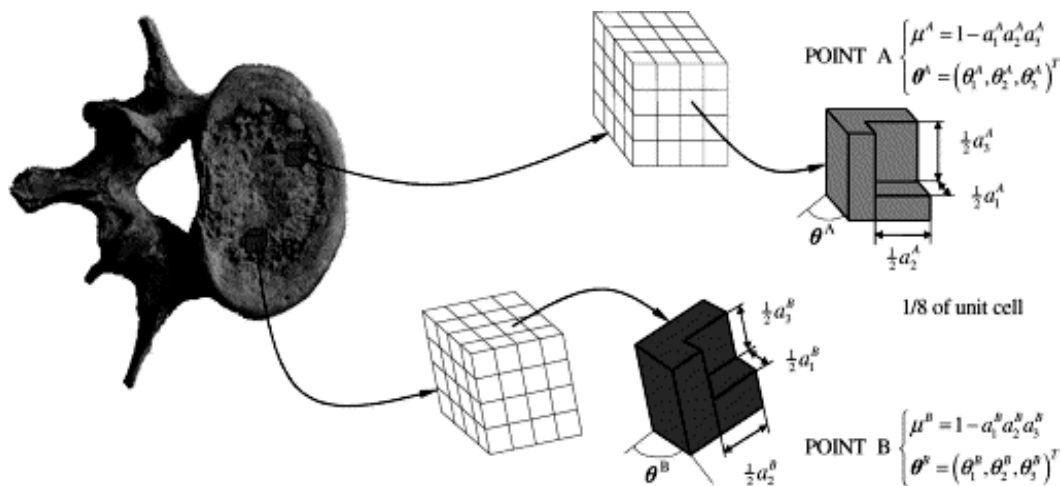


Σχήμα 4.1 Κλειστό κελί



Σχήμα 4.2 Ανοιχτό κελί

Ισχύει $0 < \mu \leq 1$ με $0 < \mu < 1$ για το σπογγώδες οστό και $\mu = 1$ για το φλοιώδες οστό.



Σχήμα 4.3 Μοντέλο υλικού για το σπογγώδες οστό σύμφωνα με Folgado et al(2004)

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι όταν το επίπεδο οστεοπόρωσης αυξάνεται (αύξηση μεταβλητής β), οι ιδιότητες του υλικού ευθυγραμμίζονται με την κατεύθυνση της κυρίαρχης φόρτισης έχοντας μικρότερη μείωση της δυσκαμψίας από ότι στις άλλες κατευθύνσεις. Συνεπώς, όταν η ολική οστική μάζα μειώνεται η διαφορά μεταξύ μηχανικών ιδιοτήτων σε διαφορετικές κατευθύνσεις ορθοτροπίας αυξάνεται. Τέλος, παρατηρήθηκε ότι τα ανοιχτά κελιά έδωσαν πιο ρεαλιστικά αποτελέσματα σε σχέση με τα κλειστά.

4.3.8 Εξωτερική ανακατασκευή οστού

Θεωρώντας ότι το ιστορικό της φόρτισης είναι υπεύθυνο για τη γεωμετρία του ανθρώπινου οστού (Pauwels 1965), οι Mittlemeier et al. 1994 [10] ερεύνησαν τις συνθήκες φόρτισης που είναι υπεύθυνες για τη γεωμετρία της διάφυσης του ανθρώπινου μηριαίου οστού. Αξονική θλίψη, στρεπτικές και καμπτικές δυνάμεις εφαρμόστηκαν

ανεξάρτητα, κατά σειρά ή σε διάφορους συνδυασμούς. Επιπρόσθετα, ιδιαίτερη προσοχή δόθηκε στην προσομοίωση της γραμμής δράσης της αντίστοιχης μυϊκής ομάδας. Αφού κατασκεύασαν ένα κατάλληλο πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων, εισήγαγαν ένα λεπτό επιφανειακό στρώμα στην εξωτερική επιφάνεια (περίοστεο) του κυλίνδρου που χρησιμοποιήθηκε για την προσομοίωση της διάφυσης του μηριαίου οστού. Το στρώμα αυτό είχε μέτρο ελαστικότητας 400 φορές μικρότερο από εκείνο της κεντρικής δομής. Υπολογίζοντας τις αναπτυσσόμενες τάσεις κατά Von Misses σ_v και αφαιρώντας μια τάση αναφοράς σ_{Ref} προκύπτει:

$$\sigma_D = \sigma_v - \sigma_{Ref} \quad (\text{σχέση 4.22})$$

$$\text{όπου } \sigma_v = \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{1/2}$$

Η προκύπτουσα διαφορά τάσης τέθηκε ίση με ένα θερμοκρασιακό πεδίο που θερμαίνει την όλη δομή κι έτσι διαστέλλεται το λεπτό στρώμα που την καλύπτει. Ο συντελεστής θερμικής διαστολής στο λεπτό επιφανειακό στρώμα τίθεται $\alpha=1$, ενώ στο κεντρικό υλικό $\alpha=0$ κι έτσι μόνο το στρώμα αυτό μπορεί να διαστέλλεται ή να συστέλλεται. Οι θερμικές παραμορφώσεις που προκύπτουν αφού αυξηθούν με ένα λογικό παράγοντα, ώστε να εκφραστούν σε ορατές μετατοπίσεις, προστίθενται στις συντεταγμένες των κόμβων της μη παραμορφωμένης δομής. Μετακινώντας το εσωτερικό όριο του στρώματος, το πάχος του παραμένει σταθερό ενώ μεταβάλλεται η κεντρική δομή. Εφαρμόζοντας το μοντέλο αυτό, συμπέραναν ότι οι συνηθισμένες υποθέσεις φόρτισης (θλίψη, στρέψη, κάμψη) αλλά και οι συνδυασμοί αυτών (με διαφορετική μάλιστα χρονική σειρά) δεν είναι ικανές να παράγουν μια μορφολογία αντίστοιχη αυτής που συναντάται στο μηριαίο οστό. Επίσης, η αξονική φόρτιση και η επίδραση του σωματικού βάρους μπορούν να αμεληθούν ως μη αποφασιστικοί παράγοντες. Αντίθετα, η σύγκριση του μαθηματικού μοντέλου με τρία ex vivo δείγματα μηριαίου οστού έδειξε ότι πρέπει να αναλυθούν οι κύρια δρώσες δυνάμεις με ιδιαίτερη έμφαση στο ρόλο των δυνάμεων από τους μύες ως παράγοντες καθορισμού της μορφολογίας

Κεφάλαιο 5ο Μοντέλο οστικής ανακατασκευής με πυκνότητα τροπικής ενέργειας

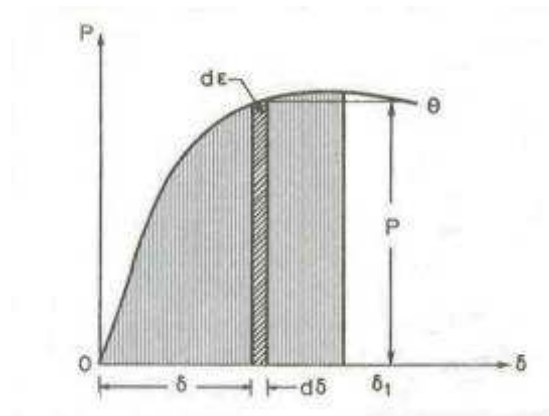
5.1 Πυκνότητα τροπικής ενέργειας

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται μια ανάλυση για το μέγεθος της πυκνότητας ελαστικής ενέργειας παραμόρφωσης που θα βοηθήσει στην κατανόηση της έννοιάς του. [18].

Αν εφαρμοστεί μία αξονική δύναμη P (εφελκυστική ή θλιπτική) σε μία ράβδο μήκους L και διατομής A η ράβδος θα επιμηκυνθεί κατά $d\delta$ (ή θα συμπιεστεί κατά $d\delta$ αν πρόκειται για θλίψη). Το διάγραμμα P - δ χαρακτηρίζει το υλικό από το οποίο αποτελείται η ράβδος. Το στοιχειώδες έργο $\delta\varepsilon$ που παράγει το φορτίο P καθώς η ράβδος επιμηκύνεται κατά $d\delta$ είναι το εξής:

$$\delta\varepsilon = P \cdot d\delta \quad (\text{σχέση 5.1})$$

και δίνεται από το εμβαδό της γραμμοσκιασμένης στοιχειώδους επιφάνειας του διαγράμματος P - δ στο Σχήμα 5.1:



Σχήμα 5.1 Διάγραμμα P - δ .

Το ολικό έργο ε που παράγει η φόρτιση P μέχρι η ράβδος να αποκτήσει μία επιμήκυνση δ_1 είναι:

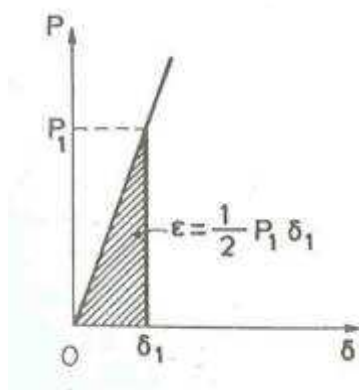
$$\varepsilon = \int_0^{\delta_1} P \cdot d\delta \quad (\text{σχέση 5.2})$$

Αν δεν υπάρχουν απώλειες (ως θερμότητα) το έργο αυτό αποθηκεύεται στη ράβδο με τη μορφή ενέργειας. Η ενέργεια αυτή, έστω W , καλείται *τροπική ενέργεια*. Επομένως ισχύει:

$$W = \varepsilon = \int_0^{\delta_1} P \cdot d\delta \quad (\text{σχέση 5.3})$$

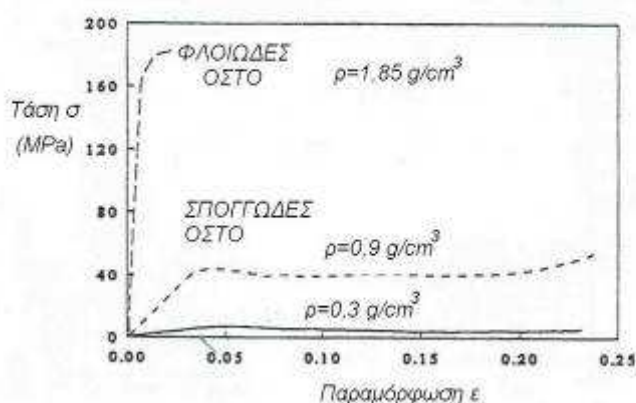
Στην περιοχή αναλογίας του διαγράμματος P - δ (Σχήμα 5.2), όπου $P = k \cdot \delta$, το έργο ε θα είναι:

$$\varepsilon = \int_0^{\delta_1} k \cdot \delta \cdot d\delta = \frac{1}{2} k \delta_1^2 = \frac{1}{2} P_1 \delta_1 \quad (\text{σχέση 5.4})$$



Σχήμα 5.2 Περιοχή αναλογίας διαγράμματος P-δ

Τα παραπάνω διαγράμματα εμφανίζουν εξάρτηση από το αρχικό μήκος L της ράβδου και το εμβαδό της διατομής A . Επομένως, το έργο ε άρα και η ενέργεια W εξαρτάται από αυτά τα μεγέθη. Για να γίνει το διάγραμμα P - δ ανεξάρτητο, διαιρείται το φορτίο P με το εμβαδό A ενώ η μήκυνση δ με το αρχικό μήκος L . Έτσι προκύπτει το διάγραμμα τάσεων-παραμορφώσεων (τροπών), σ - ε . Ένα τυπικό τέτοιο διάγραμμα για φλοιώδες και για σπογγώδες οστό διαφορετικών φαινομένων πυκνοτήτων παρουσιάζεται στο σχήμα 5.3:



Σχήμα 5.3 Διάγραμμα τάσεων-παραμορφώσεων για σπογγώδες και φλοιώδες οστό

Η κλίση των καμπυλών στο Σχήμα 5.3, στην περιοχή της ελαστικής παραμόρφωσης αντιπροσωπεύει τη δυσκαμψία του οστού. Όπως φαίνεται λοιπόν από τις παραπάνω καμπύλες, ο φλοιώδης οστίτης ιστός είναι πιο δύσκαμπτος, αντέχει μεγαλύτερες πιέσεις και παραμορφώνεται λιγότερο σε σχέση με τον σπογγώδη. Ο

σπογγώδης ιστός λόγω της πορώδους σύστασής του έχει μεγαλύτερη δυνατότητα απορρόφησης ενέργειας.

Η μετάβαση αυτή από το διάγραμμα P - δ στο διάγραμμα σ - ε , και η διαίρεση με A και L των P και δ αντίστοιχα, ισοδυναμεί με διαίρεση του έργου ε με τον όγκο $V = A \cdot L$ του υλικού επομένως προκύπτει:

$$\frac{W}{V} = \int_0^{\delta_1} \frac{P}{A} \cdot \frac{d\delta}{L} = \int_0^{\varepsilon_1} \sigma \cdot d\varepsilon \quad \text{όπου} \quad d\varepsilon = \frac{d\delta}{L} \quad (\text{σχέση 5.5})$$

και ε_1 είναι η τροπή που αντιστοιχεί στην επιμήκυνση δ_1

Η τροπική ενέργεια ανά μονάδα όγκου, $\frac{W}{V}$, ονομάζεται πυκνότητα τροπικής ενέργειας (Strain Energy Density) και αν τη συμβολίσουμε με U ισχύει:

$$U = \int_0^{\varepsilon_1} \sigma \cdot d\varepsilon \quad (\text{σχέση 5.6})$$

Εάν το υλικό παρουσιάζει γραμμική ελαστική συμπεριφορά ισχύει $\sigma = E \cdot \varepsilon$ και η πυκνότητα τροπικής ενέργειας γράφεται:

$$U = \int_0^{\varepsilon_1} E \cdot \varepsilon \cdot d\varepsilon = \frac{E \cdot \varepsilon_1^2}{2} = \frac{1}{2} \sigma_1 \cdot \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1^2}{2E} \quad (\text{σχέση 5.7})$$

Είναι γεγονός ότι οι περισσότερες κατασκευές λειτουργούν κάτω από το όριο αναλογίας του διαγράμματος σ - E επομένως έχουν γραμμική ελαστική συμπεριφορά. Αν μελετήσει κάποιος το παραπάνω διάγραμμα σ - E για το οστό θα παρατηρήσει ότι για συνήθεις φορτίσεις όπως αυτές που αναφέρονται στη βιβλιογραφία (μερικά MPa) το οστό βρίσκεται στη γραμμικά ελαστική περιοχή. Εξάγεται, λοιπόν, το συμπέρασμα ότι η παραπάνω σχέση για την πυκνότητα τροπικής ενέργειας βρίσκει εφαρμογή στην εμβιομηχανική του οστίτη ιστού.

Σημειώνεται εδώ ότι από τον ορισμό της πυκνότητας τροπικής ενέργειας προκύπτει ότι πρέπει σε κάθε αύξηση της τροπής να αντιστοιχεί μια απορρόφηση πρόσθετης ενέργειας και όχι απόδοση ενέργειας από το υλικό. Για να ισχύει αυτό θα πρέπει η $U(\varepsilon)$ να είναι θετικά ορισμένη. Αυτό ισοδυναμεί, για τη συγκεκριμένη περίπτωση, με την απαίτηση η δεύτερη παράγωγος της $U(\varepsilon)$ να είναι θετική. Δηλαδή:

$$\frac{dW}{d\varepsilon} = \sigma \Rightarrow \frac{d^2W}{d\varepsilon^2} = E \quad (\text{σχέση 5.8})$$

και προφανώς η απαίτησή αυτή ικανοποιείται πάντα εφόσον είναι $E > 0$.

Εάν, είτε η διατομή A της ράβδου, είτε το μέτρο ελαστικότητας, είτε η αξονική δύναμη P , είτε και τα τρία παραπάνω μεγέθη μεταβάλλονται κατά μήκος του άξονα της

ράβδου, είναι δηλαδή συναρτήσεις της απόστασης x από το άκρο της ράβδου, τότε η πυκνότητα τροπικής ενέργειας λαμβάνει διαφορετική τιμή σε κάθε σημείο. Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (5.7) προκύπτει :

$$U = \frac{1}{2} \sigma_1(x) \varepsilon_1(x) = \frac{1}{2} \frac{P^2(x)}{E(x)A^2(x)} \quad (\text{σχέση 5.9})$$

Στην περίπτωση αυτή, η τροπική ενέργεια είναι το ολοκλήρωμα της (5.9) στον όγκο V όλης της ράβδου:

$$W = \int_V U dv = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{P^2(x)}{E(x)A^2(x)} dx \int_A dA = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{P^2(x)}{E(x)A(x)} dx \quad (\text{σχέση 5.10})$$

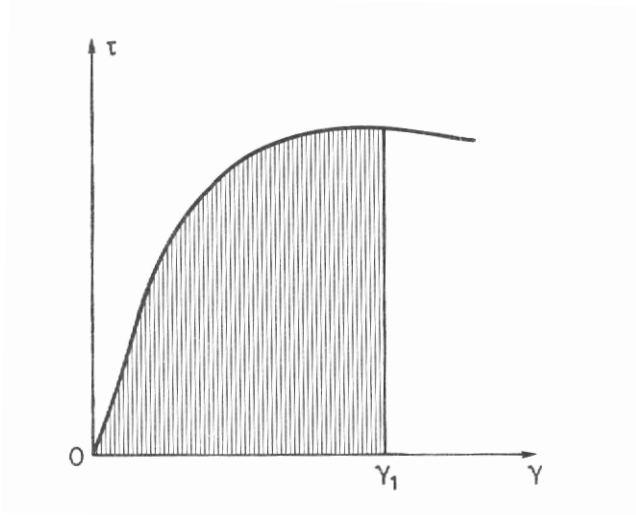
Στα μη ελαστικά υλικά, η τάση δεν είναι μονοσήμαντη συνάρτηση της τροπής ε , αλλά εξαρτάται από την προηγούμενη ιστορία της φόρτισης. Αν ένα μη ελαστικό υλικό αποφορτιστεί, τότε υπάρχει μία παραμένουσα – πλαστική τροπή ε^p . Έτσι, μόνο ένα μέρος της τροπικής ενέργειας αποδίδεται ως έργο, ενώ το υπόλοιπο τμήμα της δεν είναι αντιστρεπτό.

Η τιμή της $U(\varepsilon_1)$ που προκύπτει παίρνοντας $\varepsilon_1 = \varepsilon_\theta$, όπου ε_θ είναι η τροπή κατά την θραύση, ονομάζεται μέτρο στερερότητας και είναι ίση με το εμβαδό του ολικού διαγράμματος τάσεων – τροπών. Η τιμή αυτή παριστάνει την ενέργεια ανά μονάδα όγκου που απαιτείται για να σπάσει το υλικό, χαρακτηρίζει δηλαδή την ολκιμότητα του υλικού.

Στην περίπτωση ενός υλικού που υποβάλλεται σε διατμητική τάση τ , η πυκνότητα τροπικής ενέργειας μπορεί να γραφεί ως εξής :

$$U = \int_0^{\gamma_1} \tau \cdot d\gamma \quad (\text{σχέση 5.11})$$

όπου γ είναι η τελική διατμητική τροπή για την οποία ζητείται η U . Αυτό σημαίνει ότι η τροπική ενέργεια είναι ίση με το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου τμήματος του διαγράμματος διατμητικών τάσεων – διατμητικών τροπών (Σχήμα 5.4).



Σχήμα 5.4 Διάγραμμα διατμητικής τάσης - παραμόρφωσης

Στην περίπτωση ελαστικού υλικού (γραμμικό, μη γραμμικό), θα έχουμε

$$\frac{dU}{d\gamma} = \tau \quad (\text{σχέση 5.12})$$

Εάν το υλικό παρουσιάζει γραμμική ελαστική συμπεριφορά έχουμε από το νόμο του Hooke :

$$\tau = G\gamma \quad (\text{σχέση 5.13})$$

Αντικαθιστώντας την (5.13) στην (5.12) βρίσκουμε

$$U = \frac{1}{2}G\gamma^2 = \frac{1}{2}\tau\gamma = \frac{\tau^2}{2G} \quad (\text{σχέση 5.14})$$

Όταν συνυπάρχει αξονική και διατμητική τάση τότε η πυκνότητα ενέργειας παραμόρφωσης είναι το άθροισμα της (5.6) και της (5.11). Τέλος, για την ελαστική περιοχή, η ολική πυκνότητα στροφικής ενέργειας είναι το άθροισμα της (5.7) και (5.14).

5.2 Επισκόπηση μοντέλου οστικής ανακατασκευής

Το 1987 ο Huiskes συνδυάζοντας την εργασία των Cowin και Carter παράγαγε ένα μοντέλο βασισμένο στην πυκνότητα της τροπικής ενέργειας παραμόρφωσης (*Strain Energy Density*) για την πρόβλεψη της εσωτερικής και εξωτερικής ανακατασκευής του οστού. Θεώρησε ότι η οστική πυκνότητα αποτελεί τον παράγοντα που χαρακτηρίζει τις μηχανικές ιδιότητες του οστού ενώ η πυκνότητα τροπικής ενέργειας αποτελεί τη διέγερση για την αλλαγή τους (μέσω αλλαγών στην οστική πυκνότητα).

Σε μετέπειτα μελέτες του με τους Weinans et al. (1992) [30], [29] αλλά και τους Mullender et al. (1994) παρουσίασαν την ακόλουθη διαφορική εξίσωση οστικής ανακατασκευής:

$$\frac{d\rho}{dt} = B \cdot \left[\frac{U}{\rho} - k \right] \quad (\text{σχέση 5.16})$$

όπου U είναι η πυκνότητα τροπικής ενέργειας στη συγκεκριμένη τοποθεσία (π.χ. κάθε πεπερασμένο στοιχείο),

ρ η πυκνότητα του οστού στη θέση αυτή,

k η τιμή διέγερσης αναφοράς και

B ο συντελεστής της οστικής ανακατασκευής.

Σε σχετική μελέτη του (2000) ο Huiskes παρουσίασε ένα υπολογιστικό μοντέλο της μεταβολικής διαδικασίας του οστού εξηγώντας τη σημασία και την προσαρμοστικότητα της αρχιτεκτονικής του σπογγώδους οστού ως μια βέλτιστη μηχανική κατασκευή. Τέλος, συμπέρανε ότι η μηχανική ανάδραση είναι ένας αποτελεσματικός ρυθμιστής της σύνθετης βιοχημικής μεταβολικής διαδικασίας.

5.2.1 Ανάλυση της διαφορικής εξίσωσης οστικής ανακατασκευής 5.16

Εξετάζοντας τη διαφορική εξίσωση 1^{ης} τάξης, (5.16) της οστικής ανακατασκευής με βάση την πυκνότητα τροπικής ενέργειας μπορούμε να κάνουμε την ακόλουθη παρατήρηση: Η ποσότητα U ανά πεπερασμένο στοιχείο διαιρείται με την πυκνότητα του πεπερασμένου στοιχείου i πριν συγκριθεί με την τιμή της αναφοράς k . Αυτό σημαίνει ότι η αναφορά k είναι «οικουμενική» καθώς δεν αφαιρείται απλά από την πυκνότητα τροπικής ενέργειας αλλά λαμβάνει υπόψη της και την πυκνότητα του κάθε πεπερασμένου στοιχείου. Όπως ακριβώς η πίεση εκφράζει την επίδραση που έχει η άσκηση μιας δύναμης λαμβάνοντας όμως υπόψη τη διατομή στην οποία ασκείται, έτσι και η αναφορά k εκφράζει την επίδραση που έχει στην πυκνότητα ενός υλικού η πυκνότητα τροπικής ενέργειας, λαμβανομένης όμως υπόψη και της πυκνότητας του υλικού. Ο λόγος $\frac{U}{\rho}$ εκφράζει, λοιπόν, το ποσοστό της αποθηκευμένης ενέργειας λόγω παραμόρφωσης (και άρα το μέγεθος της καταπόνησης) προσαρμοσμένο όμως στην πυκνότητα του στοιχείου.

Επομένως:

- Σε στοιχεία με μικρότερη πυκνότητα σε σχέση με άλλα, αρκεί μικρότερη πυκνότητα τροπικής ενέργειας ώστε να ξεπεράσουν την τιμή της αναφοράς k και να αυξήσουν την πυκνότητά τους ή αντίστροφα η αναφορά k να ξεπεράσει την ποσότητα $\frac{U}{\rho}$ και να μειώσουν την πυκνότητά τους. Αντίθετα, στοιχεία με μεγαλύτερη πυκνότητα θα

αυξήσουν ή θα μειώσουν την πυκνότητά τους για μεγαλύτερες τιμές της πυκνότητας τροπικής ενέργειας.

Από τη διαφορική εξίσωση της οστικής ανακατασκευής προκύπτει ότι για ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα Δt η αντίστοιχη μεταβολή της οστικής πυκνότητας $\Delta\rho$ θα είναι:

$$\Delta\rho = \Delta t \cdot B \cdot \left[\frac{U}{\rho} - k \right] \quad (\text{σχέση 5.17})$$

επομένως η σταθερά αναλογίας B εκφράζει την αναλογία με την οποία το άθροισμα των διαφορών $\left[\frac{U}{\rho} - k \right]$, για κάθε πεπερασμένο στοιχείο, προκαλεί αλλαγή $\Delta\rho$ στην οστική πυκνότητα σε χρονικό διάστημα Δt . Αποτελεί λοιπόν δείκτη του ρυθμού μεταβολής της πυκνότητας του οστού και άρα της ταχύτητας με την οποία εξελίσσεται το φαινόμενο.

Η νέα τιμή της πυκνότητας κάθε πεπερασμένου στοιχείο καθορίζεται από την ακόλουθη έκφραση:

$$\rho(x, t + \Delta t) = \rho(x, t) + \Delta\rho(x, t) \quad (\text{σχέση 5.18})$$

Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν παραπάνω για το μοντέλο της οστικής ανακατασκευής με βάση την πυκνότητα τροπικής ενέργειας αλλά και για τη φυσιολογία του οστίτη ιστού, είναι προφανές ότι έχει γίνει η εξής υπόθεση: το οστό διαθέτει αισθητήρες (οστεοβλάστες, οστεοκλάστες) οι οποίοι μπορούν να εντοπίσουν ένα μηχανικό σήμα (πυκνότητα τροπικής ενέργειας) και να εκκινήσουν τοπικούς οστικούς μετασχηματισμούς. Συνδυάζοντας τη θεωρία της ανακατασκευής με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (*FEM*) μπορούμε να προσεγγίσουμε τους μετασχηματισμούς αυτούς.

5.3 Μέτρο ελαστικότητας οστού

Αφού επιλεγεί η διαφορική εξίσωση της ανακατασκευής απομένει ο τύπος της συσχέτισης φαινόμενης οστικής πυκνότητας ρ και μέτρου ελαστικότητας E σε κάθε πεπερασμένο στοιχείο. Η γενική μορφή της σχέσης που συνδέει τα δύο αυτά μεγέθη είναι:

$$E = C \cdot \rho^\gamma \quad (\text{σχέση 5.19})$$

Η σχετική με την οστική ανακατασκευή βιβλιογραφία αναφέρει δύο βασικές τέτοιες σχέσεις για ισοτροπικό μοντέλο:

- Η πρώτη συσχετίζει το μέτρο ελαστικότητας [6], [16] με τον κύβο της οστικής πυκνότητας και είναι η ακόλουθη:

$$E = 3790 \cdot \rho^3 \quad (\text{σχέση 5.20})$$

- Η δεύτερη συσχετίζει το μέτρο ελαστικότητας [7], [8] με το τετράγωνο της οστικής πυκνότητας και είναι η ακόλουθη:

$$E = 100 \cdot \rho^2 \quad (\text{σχέση 5.21})$$

5.4 Σύγκλιση αριθμητικής διαδικασίας οστικής ανακατασκευής

Η διαδικασία της οστικής ανακατασκευής συνεχίζεται με τον προαναφερθέντα τρόπο εωσότου να *ισορροπήσει* σε όλα τα πεπερασμένα στοιχεία. Η συνθήκη ισορροπίας είναι καθορισμένη από τη θεωρία της οστικής ανακατασκευής και είναι η ακόλουθη:

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (\text{σχέση 5.22})$$

Ικανοποιείται δε, σε κάθε πεπερασμένο στοιχείο, αν ισχύει ένα από τα ακόλουθα:

- $\frac{U}{\rho} = k$
- $\rho = \rho_{\min}$
- $\rho = \rho_{\max}$

**Κεφάλαιο 6ο Αριθμητική επίλυση Adams
Bashforth - Runge Kutta**

6.1 Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση

Η διαφορική εξίσωση της οστικής ανακατασκευής αν και είναι πρώτης τάξης είναι σε πεπλεγμένη μορφή :

$$\frac{d\rho}{dt} = B \cdot \left[\frac{U}{\rho} - k \right] = g(\rho, t) \quad (\text{σχέση 6.1})$$

Πρόκειται για πρόβλημα οριακών τιμών ή αλλιώς συνοριακών τιμών (boundary value problem) καθώς η αριθμητική επίλυση της διαφορικής εξίσωσης της οστικής ανακατασκευής έχει καθορισμένες τιμές της πυκνότητας ρ για $t=0$, ίση με $\rho(0) = \text{σταθερο}$.

Ως αριθμητική επίλυση της διαφορικής εξίσωσης με προκαθορισμένη αρχική συνθήκη $\rho(0) = \rho_0$ εννοούμε την αναζήτηση μιας συνάρτησης $\rho(t)$ που θα ικανοποιεί τις δύο παραπάνω εξισώσεις, ορισμένης σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $\alpha=t_0$ (συνήθως $t_0=0$) και $\beta=t_{\text{ολικό}}$. Αναζητώντας αριθμητικά μία λύση $\rho(t)$, που είναι αδύνατο να βρεθεί αναλυτικά, δηλαδή στη μορφή συνάρτησης $f(t)$ στόχος μας είναι να βρεθούν οι τιμές της $f(t)$ σε διακριτές θέσεις-σημεία του διαστήματος $[t_0, t_{\text{ολικό}}]$. Υπεισέρχεται επομένως η έννοια της διακριτοποίησης ή διακριτής διαχείρισης της λύσης. Το διάστημα $[t_0, t_{\text{ολικό}}]$ διακριτοποιείται σε N υποδιαστήματα χρησιμοποιώντας $N+1$ διακριτά σημεία $t_i, i=0, \dots, N$, όπου $t_0=t(0)$ και $t_N=t_{\text{ολικό}}$. Δεν είναι υποχρεωτικό τα σημεία αυτά να ισαπέχουν, η υπόθεση όμως ότι αυτά ισαπέχουν βοηθά αρκετά την αριθμητική επίλυση.

Θεωρούμε λοιπόν ότι ισχύει: $t_i = t_0 + i \cdot \Delta t$ με $i = 0, 1, 2, \dots, N$ και $\Delta t = \frac{t_{\text{ολικό}} - t_0}{N}$ το σταθερό βήμα διακριτοποίησης.

Μέσω της διακριτοποίησης, αναζητούμε τις τιμές της συνάρτησης-λύσης στα $N+1$ διακριτά σημεία $t_i, i = 0, \dots, N$. Συμβολίζουμε με ρ_i τις τιμές-λύσεις που προκύπτουν από την αριθμητική επίλυση της διαφορικής εξίσωσης της ανακατασκευής στα $N+1$ παραπάνω διακριτά σημεία. Η διαφορά ανάμεσα στην αριθμητικά υπολογισμένη τιμή ρ_i της συνάρτησης και στην πραγματική της τιμή (έστω $\rho(t_i)$) καλείται σφάλμα διακριτοποίησης ή τοπικό σφάλμα αποκοπής (*discretization* ή *truncation error*). Ισχύει δηλαδή:

$$\varepsilon = \rho_i - \rho(t_i) \quad (\text{σχέση 6.2})$$

Ο μόνος παράγοντας που επηρεάζει το σφάλμα αποκοπής είναι η μέθοδος της αριθμητικής επίλυσης που θα επιλέξουμε.

Αντίθετα υπάρχει κι ένα άλλο σφάλμα, το σφάλμα στρογγυλοποίησης (round-off error), το οποίο εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά των υπολογιστικών μέσων (υλικό, hardware) που χρησιμοποιούμε. Το σφάλμα αυτό οφείλεται στη στρογγυλοποίηση των αριθμών με περισσότερα σημαντικά δεκαδικά ψηφία από εκείνα που μπορεί να αποθηκεύσει ο ηλεκτρονικός υπολογιστής. Γενικά, αγνοούμε το σφάλμα αυτό και επικεντρωνόμαστε στο σφάλμα αποκοπής και τις μεθόδους ελαχιστοποίησής του (επιλογή κατάλληλης μεθόδου αριθμητικής επίλυσης και της τιμής του βήματος Δt).

Οι μέθοδοι αριθμητικής ολοκλήρωσης συνήθων διαφορικών εξισώσεων διακρίνονται, μεταξύ άλλων, σε:

- Μεθόδους απλού βήματος ή ενός βήματος (one-step methods)
- Μεθόδους πολλών ή πολλαπλών βημάτων (multi-step methods)

Οι μέθοδοι απλού βήματος (χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η μέθοδος Runge-Kutta) επιτρέπουν τον υπολογισμό της τιμής ρ_{i+1} της λύσης στο σημείο t_{i+1} με πληροφορία η οποία αντλείται μόνο από το διάστημα $[t_i, t_{i+1}]$. Αντίθετα, οι μέθοδοι πολλαπλών βημάτων (χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η μέθοδος Adams-Bashforth) απαιτούν πληροφορία για τιμές ρ και έξω από το διάστημα $[t_i, t_{i+1}]$. Η μέθοδος αριθμητικής επίλυσης που επιλέχθηκε για τη διαφορική εξίσωση της οστικής ανακατασκευής είναι η μέθοδος Adams-Bashforth τέταρτης τάξης. Εφόσον όμως πρόκειται για μια μέθοδο πολλαπλών βημάτων, δεν είναι αυτό-εκκινούμενη διαδικασία, αλλά απαιτεί τον υπολογισμό των ρ_1, ρ_2, ρ_3 (πέραν της ρ_0 που είναι γνωστή ως αρχική συνθήκη) πριν την εκκίνησή της. Αυτή η απαίτηση μπορεί να ικανοποιηθεί με τη χρήση μιας μεθόδου ενός βήματος, για παράδειγμα εδώ επιλέχθηκε η Runge-Kutta τέταρτης τάξης, για τα τρία πρώτα βήματα της επίλυσης.

Εδώ θα πρέπει να γίνει η εξής διευκρίνιση: τα βήματα της επίλυσης δε θα πρέπει να συγχέονται με τα βήματα που χρησιμοποιεί κάθε μέθοδος για να υπολογίσει τις τιμές της πυκνότητας σε κάθε βήμα της επίλυσης. Ο αριθμός των βημάτων της επίλυσης προέρχεται από τη διαίρεση του συνολικού χρόνου που θεωρούμε ότι χρειάζεται η διαφορική εξίσωση της ανακατασκευής για να συγκλίνει.

Παρακάτω παρατίθενται ορισμένα στοιχεία για τις δύο αυτές μεθόδους αριθμητικής επίλυσης που επιλέχθηκαν στην ακολουθούμενη διαδικασία.

6.1.1 Μέθοδοι πολλαπλών βημάτων - Adams-Bashforth τέταρτης τάξης

Οι μέθοδοι πολλαπλών βημάτων χωρίζονται σε μεθόδους ανοιχτής και κλειστής ολοκλήρωσης. Η ουσιαστική διαφορά τους, για την περίπτωση μας, είναι ότι μια μέθοδος κλειστής ολοκλήρωσης θα συμπεριλάβει στην παρεμβολή που θα χρησιμοποιήσει και το

σημείο (t_{i+1}, ρ_{i+1}) για τον υπολογισμό της ίδιας της ρ_{i+1} . Για αυτό το λόγο το σχήμα της κλειστής ολοκλήρωσης ονομάζεται πεπλεγμένο ενώ το σχήμα της ανοιχτής ολοκλήρωσης ονομάζεται ρητό. Όπως γίνεται αντιληπτό, σε επίπεδο απλότητας εφαρμογής υπερτερεί σαφώς το σχήμα της ανοιχτής ολοκλήρωσης, σε επίπεδο όμως σφάλματος αποκοπής η σύγκριση αποβαίνει υπέρ του σχήματος κλειστής ολοκλήρωσης.

Για να συνδυάσουμε τα πλεονεκτήματα των δύο μεθόδων αλλά και να μετριάσουμε τα μειονεκτήματα τους χρησιμοποιούμε τις μεθόδους πρόβλεψης-διόρθωσης (*prediction-corrector*). Τέτοια μέθοδος είναι και η Adams-Bashforth τέταρτης τάξης η οποία αρχικά προβλέπει την τιμή της ρ_{i+1} μέσω ενός σχήματος ανοιχτής ολοκλήρωσης και στη συνέχεια διορθώνει τη μορφή αυτή με ένα επαναληπτικό σχήμα κλειστής ολοκλήρωσης. Η προβλεπόμενη τιμή από την ανοιχτή ολοκλήρωση για την ρ_{i+1} είναι απαραίτητη για την κλειστή ολοκλήρωση καθώς η τελευταία απαιτεί τον προσδιορισμό της τιμής της συνάρτησης g_{i+1} .

Αν θεωρήσουμε ότι τα βήματα αυτά είναι $s+1$ το πλήθος, τότε η νέα πυκνότητα για το βήμα $i+1$ θα είναι για την περίπτωση της ανοιχτής ολοκλήρωσης που αποτελεί την πρόβλεψη:

$$\rho_{i+1} = \rho_i + \Delta t \sum_{j=0}^s b_j g(t_{i-j}, y_{i-j}), \quad 0 \leq r \leq i \quad (\text{σχέση 6.3})$$

όπου :

$$b_j = \frac{(-1)^j}{j!(s-j)!} \int_{0=0, i \neq j}^1 \prod_{i=0, i \neq j}^s (u+i) du, \quad j = 0, \dots, s \quad (\text{σχέση 6.4})$$

Επιλέγοντας Adams-Bashforth τέταρτης τάξης προκύπτει ότι: $s+1=4 \Rightarrow s=3$ και αντικαθιστώντας το στις παραπάνω εξισώσεις καταλήγουμε στην ακόλουθη μορφή για την πρόβλεψη:

$$\rho_{i+1} = \rho_i + \frac{\Delta t}{24} (55g_i - 59g_{i-1} + 37g_{i-2} - 9g_{i-3}) \quad (\text{σχέση 6.5})$$

Το σφάλμα αποκοπής για την ανοιχτή ολοκλήρωση τέταρτης τάξης θα είναι $O(\Delta t^5)$, δηλαδή όρος ανάλογος του Δt^5 .

Για την περίπτωση της κλειστής ολοκλήρωσης που αποτελεί τη διόρθωση έχουμε επίσης:

$$\rho_{i+1} = \rho_i + \Delta t \sum_{j=0}^s b_j g(t_{i-j}, y_{i-j}), \quad 0 \leq r \leq i \quad (\text{σχέση 6.6})$$

όπου όμως:

$$b_j = \frac{(-1)^j}{j!(s-j)!} \int_0^1 \prod_{i=0, i \neq j}^s (u+i-1) du, \quad j=0, \dots, s \quad (\text{σχέση 6.7})$$

Εφόσον η ολοκλήρωση είναι τέταρτης τάξης προκύπτει και πάλι ότι: $s+1=4 \Rightarrow s=3$ και αντικαθιστώντας το στις παραπάνω εξισώσεις καταλήγουμε στην ακόλουθη μορφή για τη διόρθωση:

$$\rho_{i+1} = \rho_i + \frac{\Delta t}{24} (9g_{i+1} + 19g_i - 5g_{i-1} + g_{i-2}) \quad (\text{σχέση 6.8})$$

Το σφάλμα αποκοπής για την ανοιχτή ολοκλήρωση τέταρτης τάξης θα είναι επίσης $O(\Delta t^5)$, δηλαδή όρος ανάλογος του Δt^5 .

6.1.2 Μέθοδος Runge-Kutta τέταρτης τάξης

Όπως είπαμε και παραπάνω για την εκκίνηση της Adams-Bashforth είναι απαραίτητο να προηγηθούν αρχικά 3 βήματα (της επίλυσης) με τη μέθοδο Runge-Kutta. Η εξίσωση που δίνει τη νέα πυκνότητα μετά από ένα βήμα για τη Runge-Kutta τέταρτης τάξης είναι η εξής:

$$\rho_{i+1} = \rho_i + \frac{\Delta t}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (\text{σχέση 6.9})$$

όπου:

$$k_1 = g(t_i, \rho_i)$$

$$k_2 = g\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, \rho_i + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = g\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, \rho_i + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = g(t_{i+1}, \rho_i + k_3)$$

Το τοπικό σφάλμα αποκοπής και για την Runge-Kutta τέταρτης τάξης είναι $O(\Delta t^5)$, δηλαδή όρος ανάλογος του Δt^5 .

Τελικά, η μέθοδος που θα ακολουθηθεί για την αριθμητική επίλυση της διαφορικής εξίσωσης είναι η εξής: αφού πραγματοποιηθεί για τα τρία πρώτα χρονικά βήματα η διαδικασία που μόλις αναφέραμε για τη Runge-Kutta, η αριθμητική επίλυση για τα υπόλοιπα βήματα της διαδικασίας μέχρι τον τελικό χρόνο θα γίνει με τη μέθοδο Adams-Bashforth,

Κεφάλαιο 7ο Ανάλυση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων

7.1 Μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων

Το πρόβλημα της κατανομής διάφορων εξωτερικών μεγεθών στο εσωτερικό ενός σώματος συνδέεται άμεσα με τις ακόλουθες υπολογιστικές μεθόδους:

- Πεπερασμένων στοιχείων
- Πεπερασμένων διαφορών/όγκων
- Συνοριακών στοιχείων

Γενικά, οι προσεγγιστικές αυτές μέθοδοι, που βασίζονται στα ενεργειακά θεωρήματα, προσφέρουν μεγάλες δυνατότητες και δίνουν λύσεις σε σημεία που οι υπόλοιπες μέθοδοι αδυνατούν. Βασικό χαρακτηριστικό των προσεγγιστικών μεθόδων είναι η ανάγκη προσδιορισμού ενός παραδεκτού πεδίου (για παράδειγμα μετατοπίσεων) μέσω συναρτήσεων που ορίζονται σε όλο το σώμα και ικανοποιούν κάποιες συνθήκες στα σύνορα. Έτσι, το αρχικό πρόβλημα του προσδιορισμού του πεδίου των μετατοπίσεων σε κάθε σημείο του σώματος (άπειρος βαθμός ελευθερίας κίνησης) μετασχηματίζεται στο πρόβλημα προσδιορισμού πεπερασμένου αριθμού άγνωστων συντελεστών. Προκύπτει, λοιπόν, μια προσεγγιστική λύση στο αρχικό πρόβλημα.

Όταν το σύνορο του σώματος είναι απλό, η κατασκευή των συναρτήσεων που ικανοποιούν τις συνθήκες στα σύνορα είναι σχετικά απλή υπόθεση. Όταν όμως το σύνορο γίνει πολύπλοκο, η ικανοποίηση των οριακών συνθηκών γίνεται σχεδόν αδύνατη. Η δυσκολία αυτή ξεπερνιέται με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή το σώμα χωρίζεται σε ένα πλήθος περιοχών που καλούνται στοιχεία. Οι *συναρτήσεις μορφής* που χρησιμοποιούνται μέσα στα στοιχεία είναι απλές και συνήθως πολυωνυμικής μορφής.

Εφόσον τα προβλήματα της μηχανικής του παραμορφώσιμου στερεού περιγράφονται με διαφορικές εξισώσεις μερικών παραγώγων μπορούν να επιλυθούν με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Οι διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν τα προβλήματα της μηχανικής προκύπτουν από σχέσεις όπως οι ακόλουθες [22], [23]:

Σύνδεση ανηγμένων παραμορφώσεων-μετατοπίσεων:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (\text{σχέση 7.1})$$

και

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (\text{σχέση 7.2})$$

οι οποίες συνοψίζονται ως $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{u}$ (σχέση 7.3)

Εξισώσεις συμβιβαστού των παραμορφώσεων:

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\varepsilon}_i}{\partial j^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varepsilon}_j}{\partial i^2} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{\gamma}_{ij}}{\partial i \partial j} \quad (\text{σχέση 7.4})$$

όπου τα i, j είναι x, y ή y, z ή z, x .

Εξισώσεις ισοροπίας:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{iy}}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{iz}}{\partial z} + \mathbf{F}_i = 0 \quad (\text{σχέση 7.5})$$

όπου τα $i=x,y,z$ και \mathbf{F}_i οι εξωτερικές δυνάμεις.

Κάθε πρόβλημα που εκφράζεται με διαφορικές εξισώσεις έχει κάποιες συνοριακές συνθήκες. Έτσι και στα συγκεκριμένα προβλήματα έχουμε φυσικές συνοριακές συνθήκες (φορτίσεις κλπ) και βασικές συνοριακές συνθήκες (συνθήκες Dirichlet και Neumann) (δεσμεύσεις, στηρίξεις κλπ.).

Για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος χρησιμοποιείται η αρχή των δυνατών έργων [24], [25]. Έστω σ_{ij} και ε_{ij} είναι οι τανυστές των τάσεων και των ανηγμένων παραμορφώσεων αντίστοιχα και P_i , δ_i είναι τα φορτία και οι δυνατές μετακινήσεις. Το έργο που προκαλείται από τα φορτία πρέπει να ισούται με το δυνατό έργο των παραμορφώσεων. Δηλαδή:

$$\sum P_i \delta_i = \int_V \boldsymbol{\sigma}_{ij} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} dV \quad (\text{σχέση 7.6})$$

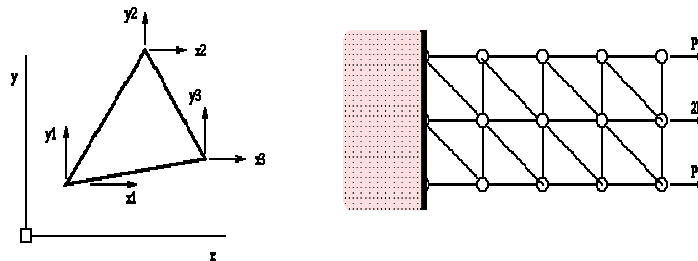
Η εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων προϋποθέτει το διαχωρισμό του πεδίου του προβλήματος, που καταλαμβάνει κάποιο πεπερασμένο όγκο, σε πεπερασμένο αριθμό στοιχείων απλούστερου σχήματος. Καθένα από τα πεπερασμένα στοιχεία στα οποία χωρίζεται το πεδίο του προβλήματος αποτελείται από κάποιο αριθμό κόμβων, ενώ κάθε κόμβος έχει κάποιους βαθμούς ελευθερίας. Το πρόβλημα λοιπόν ανάγεται στην απόδοση τιμών σε αυτούς τους βαθμούς ελευθερίας. Τα στοιχεία συνδέονται σε κάποιους κοινούς κόμβους που συνεπάγεται κοινούς βαθμούς ελευθερίας στο συγκεκριμένο σημεία για 2 ή περισσότερα πεπερασμένα στοιχεία. Το πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί ως εξής [24], [25]:

$$[K] \cdot \mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (\text{σχέση 7.7})$$

Όπου \mathbf{u} είναι διάνυσμα διάστασης n , όπου n είναι το σύνολο των βαθμών ελευθερίας του προβλήματος. Κάποιοι από τους βαθμούς ελευθερίας είναι δεσμευμένοι και αποτελούν τις συνθήκες Dirichlet. Το \mathbf{F} είναι επίσης διάνυσμα διάστασης n και περιέχει τις συνοριακές συνθήκες των φορτίσεων (πιέσεις στις πλευρές των στοιχείων, μαζικές δυνάμεις) οι

οποίες μεταφράζονται με κομβικές δυνάμεις ή ροπές, ανάλογα με το είδος του βαθμού ελευθερίας που αναφέρονται, μεταφορά ή στροφή. Ο πίνακας $[K]$ έχει διαστάσεις $n \times n$ και καλείται μητρώο δυσκαμψίας, καθώς δείχνει τη δυσκαμψία του προβλήματος να αντιδράσει σε κάποια εξωτερική φόρτιση- ή αλλιώς την απόκριση του συστήματος σε εξωτερικά αίτια. Περιλαμβάνει δε τη γεωμετρία και τις μηχανικές ιδιότητες των υλικών του προβλήματος. Προκειμένου να επιλυθεί το πρόβλημα επιλύεται το σύστημα $[K] \cdot u = F$ ως προς u . Αφού προσδιοριστούν οι τιμές των u με κατάλληλες αναγωγές μπορούν να προκύψουν και άλλα παράγωγα μεγέθη όπως οι τάσεις.

Στο **Σχήμα 7.1** παρουσιάζεται η κατάστροψη ενός προβλήματος με πεπερασμένα στοιχεία. Φαίνεται το πεδίο του προβλήματος, η διακριτοποίησή του σε πεπερασμένα στοιχεία που συνδέονται σε κόμβους καθώς και οι συνοριακές συνθήκες.



Σχήμα 7.1 Κατάστροψη προβλήματος δοκού σε εφελκυσμό με τριγωνικά πεπερασμένα στοιχεία

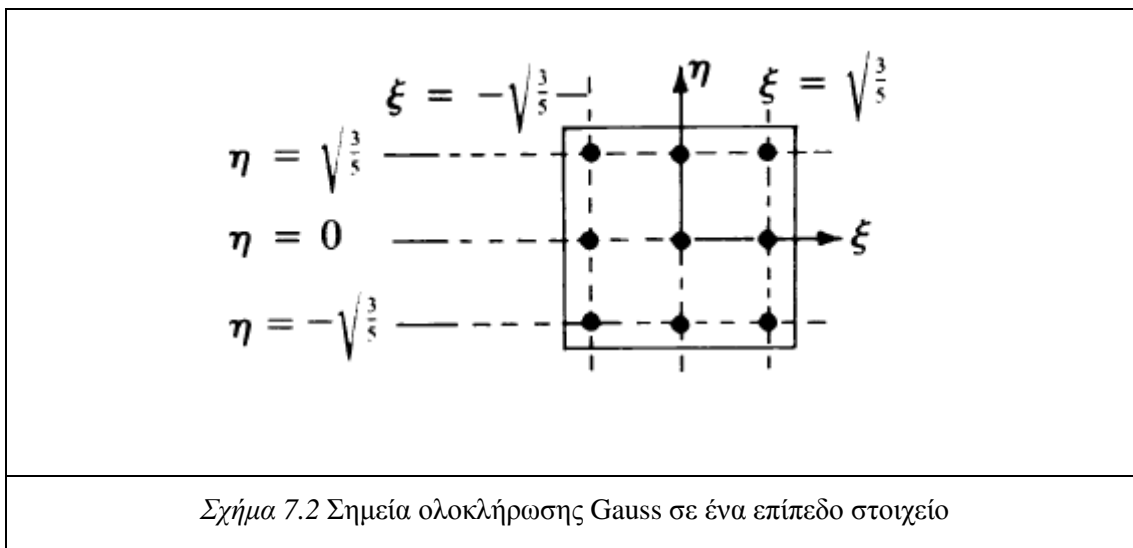
7.1.1 Μητρώο δυσκαμψίας K

Προκειμένου να σχηματιστεί ο πίνακας δυσκαμψίας $[K]$ της συνολικής κατασκευής γίνεται υπολογισμός των επιμέρους τοπικών μητρώων δυσκαμψίας του κάθε πεπερασμένου στοιχείου $[K_i]$. Για τον υπολογισμό των μητρώων απαιτείται ο ορισμός των συναρτήσεων μορφής. Ανάλογα με το βαθμό των πολυωνύμων λαμβάνεται και ανάλογη τάξη στα στοιχεία. Έτσι κάνοντας χρήση πολυωνύμων πρώτου βαθμού, στα στερεά προκύπτουν εξαπλευρικά ισοπαραμετρικά στοιχεία 8 κόμβων ή πυραμίδες 4 κόμβων. Αν χρησιμοποιηθούν πολυώνυμα ανώτερης τάξης, προκύπτουν στοιχεία περισσότερων κόμβων όπως εξαπλευρικά στοιχεία 20 κόμβων ή πυραμίδες 10 κόμβων. Μεγαλύτερη τάξη στοιχείων συνεπάγεται και καλύτερη ακρίβεια στη λύση, σημειώνεται ότι τα ισοπαραμετρικά στοιχεία (8 κόμβων) έχουν ιδιαίτερα καλύτερη ακρίβεια σε σχέση με τις πυραμίδες (4 κόμβων) λόγω του ότι χρησιμοποιείται η αριθμητική ολοκλήρωση με τη μέθοδο των σημείων Gauss και δίνεται η δυνατότητα υπολογισμού του τασικού και παραμορφωσιακού πεδίου σε σημεία μέσα στον όγκο του και όχι μόνο μίας τιμής ανά στοιχείο. Η ακρίβεια στη λύση μπορεί να επιτευχθεί και πυκνώνοντας το πλέγμα των πεπερασμένων στοιχείων όπου και σε αυτή την περίπτωση υπάρχει αύξηση των βαθμών

ελευθερίας. Η αύξηση της ακρίβειας είτε με την αύξηση της τάξης (περισσότεροι κόμβοι ανά στοιχείο) είτε με την πυκνωση του πλέγματος (περισσότερα στοιχεία) έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση και του υπολογιστικού χρόνου .

7.1.2 Υπολογισμός Ισοπαραμετρικών Πεπερασμένων Στοιχείων

Τα πολυώνυμα μορφής εκφράζονται σε ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων (ξ, η, ζ) το οποίο έχει κέντρο στο εσωτερικό του στοιχείου. Οι τιμές των συντεταγμένων στο τοπικό σύστημα παίρνουν τιμές από -1 έως 1. Τα πολυώνυμα μορφής παραγωγίζονται εύκολα ως προς τα (ξ, η, ζ) και σχηματίζουν τα μητρώα $[B_i]$ με τις παραγώγους τους. Στο Σχήμα 7.2 φαίνονται τα σημεία ολοκλήρωσης Gauss για ένα διδιάστατο στοιχείο. Για τριδιάστατα στοιχεία υπάρχουν τρία τέτοια διατεταγμένα επίπεδα.



Προκειμένου να αυξηθεί η ακρίβεια ολοκλήρωσης με τη μέθοδο Gauss αυξάνεται ο αριθμός σημείων ολοκλήρωσης.

Ο τελικός τύπος για το σχηματισμό του μητρώου δυσκαμψίας ενός στοιχείου $[K_e]$ είναι:

$$K_e = \int_V [B]^T [D] [B] dV \quad (\text{σχέση 7.8})$$

Ο παραπάνω τύπος με τη βοήθεια της αριθμητικής ολοκλήρωσης μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα διακριτών όρων:

$$K_e = \sum_{i=1}^n H_i [B(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)]^T [D] [B(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)] J(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \quad (\text{σχέση 7.9})$$

Οι H_i είναι συντελεστές της ολοκλήρωσης Gauss σε n διακριτά σημεία με συντεταγμένες (ξ_i, η_i, ζ_i) , ενώ η J είναι η Ιακωβιανή μετασχηματισμού από το καθολικό σύστημα συντεταγμένων X, Y, Z στο ξ, η, ζ . Το μητρώο $[D]$ καλείται μητρώο ελαστικότητας.

7.1.3 Επίλυση του συστήματος

Αφού επιλυθεί το σύστημα $[K] \cdot u = F$ προκύπτουν οι τιμές των u . Ας θεωρήσουμε ότι τα u είναι μετατοπίσεις στους βαθμούς ελευθερίας (κατά x, y, z στους κόμβους). Μετά την επίλυση, πέραν των μετατοπίσεων χρήσιμα μεγέθη είναι οι παραμορφώσεις και οι τάσεις καθώς και διάφορα άλλα παράγωγα μεγέθη. Με αριθμητικές παραγωγίσεις του πεδίου είναι δυνατό να υπολογιστούν οι ανηγμένες παραμορφώσεις (σχέση 7.3) καθώς και οι τάσεις στο πεδίο του προβλήματος ($\sigma = E \cdot \varepsilon$). Η κατανομή του πεδίου των μετατοπίσεων είναι συνεχής, δεν ισχύει όμως το ίδιο και για τα παράγωγα μεγέθη τα οποία ενδέχεται να μην έχουν συνέχεια. Σε περίπτωση που τα πολυώνυμα μορφής είναι 1^{ου} βαθμού, οι παράγωγοι είναι σταθεροί αριθμοί και η κατανομή τους για κάποιο στοιχείο είναι σταθερή. Φαίνεται λοιπόν ότι με αύξηση της τάξης του μεγέθους των στοιχείων, βελτιώνεται η ακρίβεια των αποτελεσμάτων [4].

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων μπορεί να υπαχθεί στις μεθοδολογίες *Ritz* ή *Galerkin* (προσεγγιστικές ενεργειακές μέθοδοι βασιζόμενες στην αρχή του ελαχίστου της δυναμικής ενέργειας ή στην αρχή των δυνατών έργων), παρουσιάζει όμως επιπλέον τα ακόλουθα πλεονεκτήματα:

- Δεν απαιτείται η ικανοποίηση συνθηκών στα όρια του σώματος ενώ οι συναρτήσεις είναι απλούστερες
- Οι ολοκληρώσεις γίνονται σε κάθε στοιχείο χωριστά (εκτός στοιχείου η τιμή τους είναι μηδέν) κι έτσι το αποτέλεσμα προκύπτει εύκολα με αναλυτικό τρόπο ή για πιο σύνθετες περιπτώσεις με αριθμητική ολοκλήρωση.

Η ονομασία *πεπερασμένα στοιχεία (Π.Σ)* προέρχεται από την υποδιαίρεση του πεδίου λύσης ενός προβλήματος σε $n=1,2,\dots$ στοιχειώδεις όγκους nV , επιφάνειες nA και μήκη nL στα οποία και εφαρμόζεται η μέθοδος Ritz.

Στην περίπτωση ενός δικτυώματος θα μπορούσαμε να παραθέσουμε τον ακόλουθο πίνακα που περιγράφει τη διαδικασία η οποία ακολουθείται για την εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων:

Πίνακας 7.1 Διαδικασία Υποδιαίρεσης και Επανένωσης Πεπερασμένων Στοιχείων

1. Εισαγεται ένα καθολικό (χωρόδετο) σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων.
2. Τοποθετείται το σώμα (δικτύωμα) στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων.
3. Ορίζεται σε κάθε ράβδο ένα πεπερασμένο στοιχείο μήκους nL , θέτοντας αυτή κόμβους.
4. Εισάγονται, σε κάθε κόμβο, οι καθολικοί βαθμοί ελευθερίας που

αντιστοιχούν στους κόμβους του πεπερασμένου στοιχείου.

5. Σε κάθε πεπερασμένο στοιχείο εισάγονται οι (τοπικοί) βαθμοί ελευθερίας στο τοπικό καρτεσιανό σύστημα και υπολογίζονται τα *μητρώα μάζας M, δυσκαμψίας K* και τα *διανύσματα μετατοπίσεων u και δυνάμεων f και r*.

6. Από τους τοπικούς βαθμούς ελευθερίας δημιουργείται μητρώο αντιστοιχίας nB μεταξύ τοπικών-καθολικών βαθμών ελευθερίας.

7. Οι συνεισφορές κάθε Π.Σ. στα προαναφερθέντα μητρώα του βήματος 5 τοποθετούνται στα αντίστοιχα νέα μητρώα με βάση το μητρώο αντιστοιχίας B

8. Στο προκύπτον σύστημα εξισώσεων που έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\delta u^T \cdot \left\{ M \cdot \ddot{u} + K \cdot u = f + r \right\} \text{ εφαρμόζονται οι οριακές συνθήκες και επιλύεται.}$$

Ήδη από τα τέλη της δεκαετίας του '70 είχε αρχίσει να εκδηλώνεται μια έντονη ενασχόληση με την εφαρμογή των υπολογιστικών μεθόδων στις επιστήμες της Βιοϊατρικής Τεχνολογίας και Εμβιομηχανικής. Λόγω της πολυπλοκότητας που εμφανίζει το ανθρώπινο σώμα, η εφαρμογή των μεθόδων αυτών έγινε δυνατή μόνο όταν οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές απέκτησαν υψηλές επιδόσεις. Εκείνο που διαφοροποιεί τα πράγματα, κατά την εφαρμογή της μεθόδου των Π.Σ. στοιχείων για την οστική ανακατασκευή, είναι ότι δε μπορούμε να εξετάσουμε ένα τμήμα του ανθρώπινου σκελετού σαν ένα απλό τμήμα μιας κατασκευής. Το πρόβλημα γίνεται πλέον γεωμετρικά μη γραμμικό και η εφαρμογή της μεθόδου των Π.Σ. γίνεται επαναληπτικά (ανά ορισμένα χρονικά βήματα). Η μοντελοποίηση με πεπερασμένα στοιχεία δίνει πληροφορίες που τα εργαστηριακά πειράματα αδυνατούν να δώσουν. Για παράδειγμα, καθιστά δυνατή τη μελέτη ενός τεραστίου εύρους φυσιολογικών συνθηκών που βοηθά στην καλύτερη και σε βάθος κατανόηση της εμβιομηχανικής του συστήματος. Επιπρόσθετα, παρέχει τη δυνατότητα μελέτης διαφορετικών μεθόδων θεραπείας και χειρουργικών επεμβάσεων, χωρίς κανένα κόστος για την υγεία του ασθενούς. Έτσι, συνεισφέρει στην επιλογή της καταλληλότερης θεραπείας ή χειρουργικής επέμβασης, αλλά και στη βελτίωση των εμφυτευμάτων που χρησιμοποιούνται από τους γιατρούς.

7.2 Χρήση Πεπερασμένων Στοιχείων στην οστική ανακατασκευή

Στις μέρες μας υπάρχει πληθώρα εμπορικών προγραμμάτων ηλεκτρονικού υπολογιστή για την επίλυση προβλημάτων με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, μεταξύ των οποίων τα ANSYS, ABAQUS, DYTRAN, NASTRAN, PATRAN, SOLVIA. Στην παρούσα διπλωματική εργασία έχει χρησιμοποιηθεί το εμπορικό πρόγραμμα

ANSYS 10.0® οπότε η ανάλυση που ακολουθεί είναι προσανατολισμένη σε αυτό το πρόγραμμα.

Γενικά, για τη μοντελοποίηση μιας κατασκευής με Π.Σ. ακολουθούνται τα εξής βήματα:

1. Κατασκευή της γεωμετρίας

Το στάδιο αυτό μπορεί να πραγματοποιηθεί με τρεις τρόπους:

- Δημιουργία κρίσιμων σημείων ελέγχου (keypoints), από αυτά δημιουργία γραμμών (lines), στη συνέχεια από τις γραμμές δημιουργία επιφανειών (areas) και τελικά από τις επιφάνειες κατασκευή όγκων (volumes).
- Κατασκευή απευθείας όγκων ή επιφανειών, είτε από σημεία χωρίς τη δημιουργία γραμμών ή δίνοντας διαστάσεις
- Κατασκευή γεωμετρίας στο περιβάλλον ενός σχεδιαστικού προγράμματος CAD και στη συνέχεια εισαγωγή της στο πρόγραμμα των πεπερασμένων στοιχείων ANSYS

2. Επιλογή του είδους των Π.Σ. και διακριτοποίηση της γεωμετρίας

Το είδος του Π.Σ. καθορίζεται από τις ανάγκες της ανάλυσης που έχει επιλεγεί. Σύμφωνα με την επικείμενη ανάλυση γίνεται η επιλογή του Π.Σ. από τη βιβλιοθήκη του ANSYS και ακολουθεί η διακριτοποίηση της γεωμετρίας. Αυτό μπορεί να γίνει είτε με εισαγωγή επιθυμητών διαστάσεων των Π.Σ. από το χρήστη ή από το ίδιο το πρόγραμμα (αυτόματο πλέγμα, ορισμός επιθυμητών διαμερίσεων σε γραμμές ή μεγέθους στοιχείων, Smart Size-προσαρμογή του πλέγματος στη γεωμετρία).

3. Ορισμός φυσικών και μηχανικών ιδιοτήτων των υλικών και επιβολή των οριακών συνθηκών

Γενικά, οι μηχανικές και φυσικές ιδιότητες των υλικών ορίζονται μονοσήμαντα. Οι ιδιότητες που απαιτούνται σε κάθε περίπτωση είναι διαφορετικές και εξαρτώνται από την φύση της ανάλυσης. Στην γενικότητά τους είναι το μέτρο ελαστικότητας και ο λόγος Poisson (γραμμική στατική ελαστική ανάλυση). Επίσης και στην περίπτωση των οριακών συνθηκών υπάρχει εξάρτηση τόσο από την φύση της ανάλυσης όσο και από την φύση των Π.Σ., τα οποία καθορίζουν τους βαθμούς ελευθερίας.

4. Επιλογή του τρόπου επίλυσης και επίλυση

Ανάλογα με τις απαιτήσεις του προβλήματος καθορίζεται και η επιλογή του τρόπου επίλυσης. Όσον αφορά στην επίλυση είναι δυνατή η χρήση επιλύτης

ευθείας επίλυσης αλλά και ορισμένων επαναληπτικών αλγορίθμων επίλυσης. Στην πρώτη περίπτωση ο υπολογιστικός χρόνος είναι περισσότερος όπως και οι απαιτήσεις σε μνήμη υπολογιστή αλλά τα αποτελέσματα ακριβέστερα. Συνεπώς σε μικρά μοντέλα (λίγων βαθμών ελευθερίας) είναι προτιμότερη η ευθεία επίλυση.

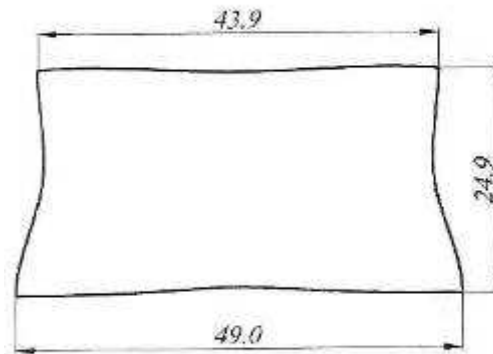
5. Ανάγνωση αποτελεσμάτων και γραφική παρουσίασή τους

Υπάρχουν πολλοί τρόποι να δει κανείς τα αποτελέσματα της επίλυσης. Για παράδειγμα μπορεί να επιλεγθεί παρουσίαση των αποτελεσμάτων στους κόμβους (*Nodal Solution*) ή στα Π.Σ. (*Element Solution*). Στους κόμβους δίνεται η τιμή του μέσου όρου που προκύπτει από τα Π.Σ στα οποία είναι κοινός ο κόμβος και έχει συνεχή τιμή. Στα Π.Σ. δίνεται μία τιμή ανά στοιχείο, (στα ισοπαραμετρικά μπορεί να επιλεγεί παρουσίαση αποτελεσμάτων στα σημεία Gauss). Τέλος, υπάρχει η αρκετά χρήσιμη δυνατότητα επιλογής του *Element Table* μέσω του οποίου μπορούμε να κάνουμε ομαλοποίηση των αποτελεσμάτων βγάζοντας μέσους όρους (*Element Table Average*).

**Κεφάλαιο 8ο Εφαρμογή οστικής
ανακατασκευής σε διδιάστατο μοντέλο
σπονδύλου**

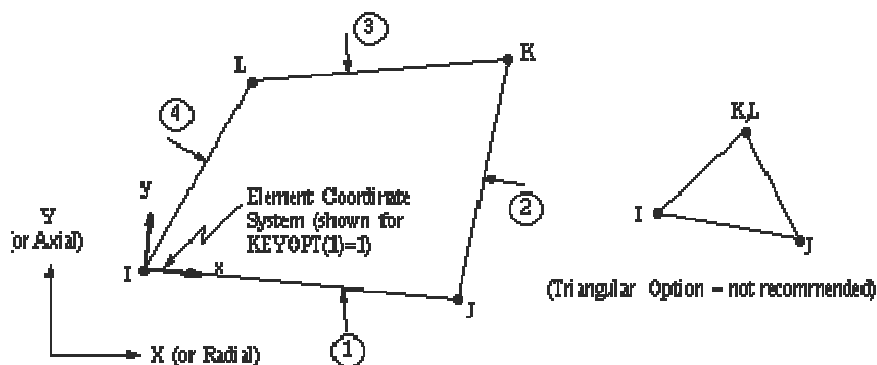
8.1 Παρουσίαση διδιάστατου μοντέλου προσομοίωσης σπόνδυλου

Το διδιάστατο γεωμετρικό μοντέλο του σπονδύλου που φαίνεται στο Σχήμα 8.1 χρησιμοποιήθηκε ως βάση για τη δημιουργία του διδιάστατου υπολογιστικού μοντέλου που χρησιμοποιήθηκε. Σημειώνεται ότι το παραπάνω μοντέλο αντιπροσωπεύει τον πέμπτο οσφυϊκό σπόνδυλο O_5 .



Σχήμα 8.1 Διδιάστατο μοντέλο προσομοίωσης πέμπτου οσφυϊκού σπονδύλου O_5

Για τη διακριτοποίηση της γεωμετρίας του διδιάστατου σπονδύλου επιλέχθηκαν πεπερασμένα στοιχεία τύπου επίπεδης εντατικής κατάστασης (*plane42*). Το πεπερασμένο στοιχείο *plane42* χρησιμοποιείται για τη διδιάστατη μοντελοποίηση στερεών κατασκευών επίπεδης κατάστασης, είτε παραμορφωσιακής είτε εντατικής αλλά ακόμα και στην περίπτωση αξονοσυμμετρικής κατασκευής. Καθορίζεται από 4 κόμβους, έχοντας δύο βαθμούς ελευθερίας σε κάθε κόμβο: μετατόπιση στις κατευθύνσεις x και y των κόμβων. Στο Σχήμα 8.2 παρουσιάζεται η γεωμετρία του πεπερασμένου στοιχείου *plane42*:



Σχήμα 8.2 Γεωμετρία πεπερασμένου στοιχείου *plane42*

Το πλέγμα που δημιουργήθηκε στο χρησιμοποιούμενο μοντέλο αποτελείται από 70×110 Π.Σ., συνολικά 7700, που δημιουργεί μοντέλο με 15.762 βαθμούς ελευθερίας..

Η φόρτιση της τομής του σώματος του σπονδύλου, η οποία οφείλεται στις καθημερινές δραστηριότητες, εξαρτάται από το στάδιο ανάπτυξης του ατόμου. Σε διαφορετικά στάδια ανάπτυξης το οστό έχει διαφορετική δομή κι επομένως παρουσιάζει και διαφορετικές διαδικασίες προσαρμογής στο μηχανικό του περιβάλλον. Έτσι επιλέχθηκε να πραγματοποιηθούν δύο διαφορετικές δοκιμές: μία για νεαρό άτομο (20-25 χρονών) και μία για ηλικιωμένο άτομο (60-65 χρονών).

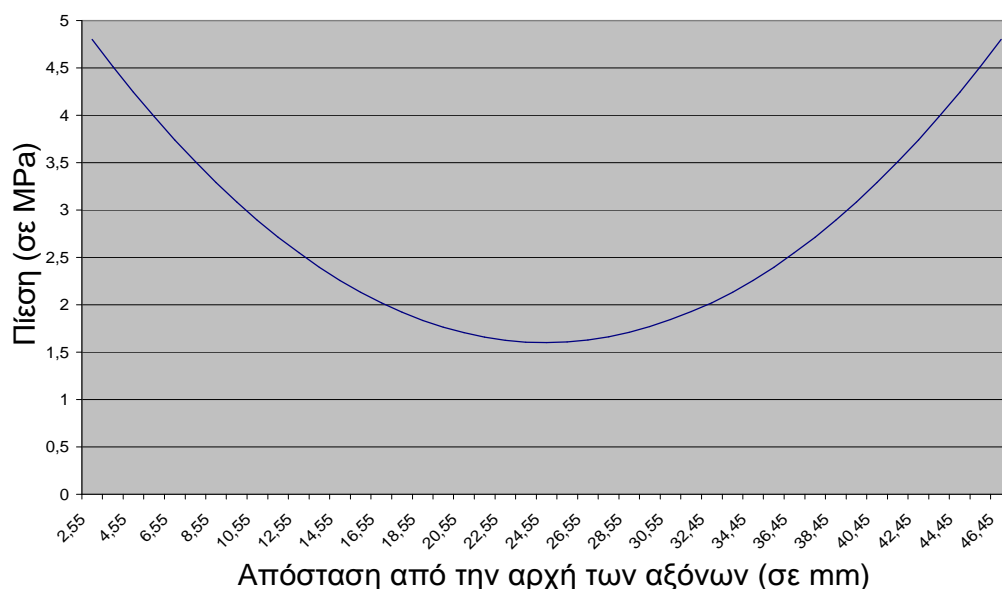
Οι επιβαλλόμενες φορτίσεις για τις περιπτώσεις που μελετήθηκαν παρουσιάζονται αναλυτικά στα υποκεφάλαια 8.1.1 και 8.1.2. Τέλος, σημειώνεται ότι για τη στήριξη της κάτω πλευράς του σπονδύλου που αντιπροσωπεύει την κάτω επιφυσιακή πλάκα θεωρήθηκαν αρθρώσεις στα δύο της άκρα.

8.1.1 Νεαρό άτομο

Η φόρτιση που αντιστοιχεί σε νεαρό άτομο σύμφωνα με τη βιβλιογραφία (Xinghua 2002) είναι θλιπτική πίεση με μορφή συμμετρικής κοίλης παραβολής τόσο στη άνω όσο και την κάτω επιφυσιακή πλάκα. Οι μέγιστες και ελάχιστες τιμές του πολυωνύμου της πίεσης διαφέρουν για την άνω και την κάτω πλάκα με τις μικρότερες τιμές να εμφανίζονται στην τελευταία. Τα αντιπροσωπευτικά πολυώνυμα μαζί με τα διαγράμματά τους είναι τα ακόλουθα:

Άνω επιφυσιακή πλάκα

$$y = 0,006641726 \cdot x^2 - 0,325444555 \cdot x + 5,586695566 \quad (\text{σχέση } 8.1)$$



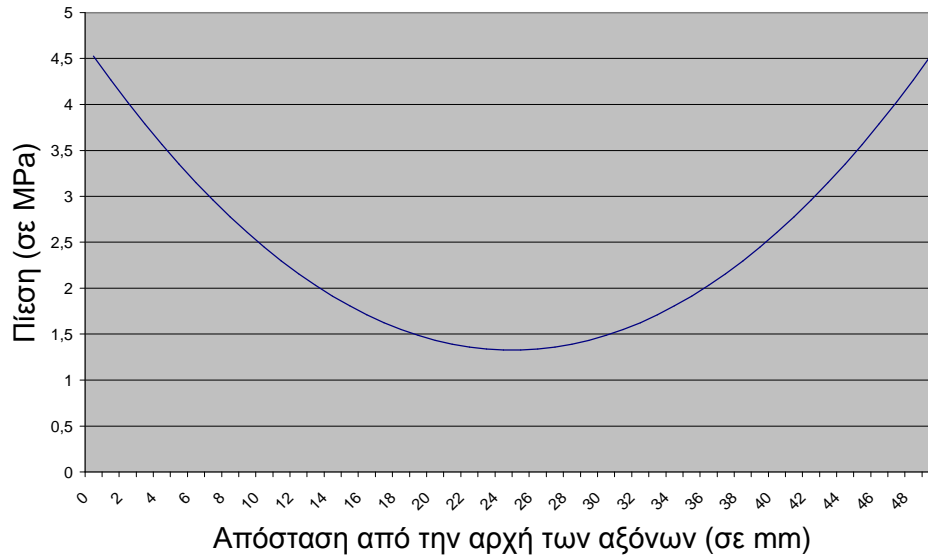
Σχήμα 8.3 Πολυώνυμο φόρτισης στην άνω επιφυσιακή πλάκα νεαρού ατόμου

Σημειώνεται ότι ως αρχή των αξόνων, η οποία αντιστοιχεί στην τιμή 0 του οριζόντιου άξονα, έχει θεωρηθεί το αριστερό άκρο της κάτω επιφυσιακής πλάκας. Από την εφαρμογή του παραπάνω πολυωνύμου στην άνω επιφυσιακή πλάκα του σπονδύλου

νεαρού ατόμου προκύπτει μέγιστη πίεση άνω επιφυσιακής πλάκας: $p_{\max,u} = 4,8 N / mm^2$ και ελάχιστη πίεση άνω επιφυσιακής πλάκας: $p_{\min,u} = 1,6 N / mm^2$.

Κάτω επιφυσιακή πλάκα

$$y = 0,005331 \cdot x^2 - 0,2612 \cdot x + 4,525 \quad (\text{σχέση } 8.2)$$

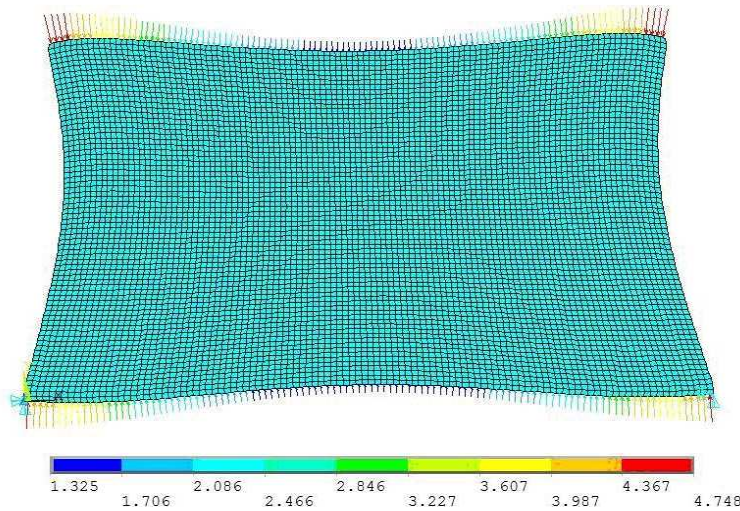


Σχήμα 8.4 Πολυώνυμο φόρτισης στην κάτω επιφυσιακή πλάκα νεαρού ατόμου

Από την εφαρμογή του παραπάνω πολυωνύμου στην κάτω επιφυσιακή πλάκα του σπονδύλου νεαρού ατόμου προκύπτει η μέγιστη εφαρμοζόμενη πίεση κάτω επιφυσιακής πλάκας στα άκρα της: $p_{\max,l} = 4,525 N / mm^2$ και η ελάχιστη πίεση κάτω επιφυσιακής πλάκας στο κέντρο : $p_{\min,l} = 1,325 N / mm^2$

Σημειώνεται ότι το συνολικό μέγεθος της κάθετης φόρτισης που δέχεται ο σπόνδυλος O₅ νεαρού ατόμου είναι, τόσο για την άνω όσο και για την κάτω επιφυσιακή πλάκα, ίση με F=-117,3 N.

Τα παραπάνω δύο πολυώνυμα φόρτισης ασκούμενα στις επιφυσιακές πλάκες του υπό μελέτη σπονδύλου δίνουν, μέσω του προγράμματος ANSYS, την ακόλουθη μορφή (Σχήμα 8.5). Σημειώνεται ότι οι τιμές της πίεσης δίνονται σε MPa.



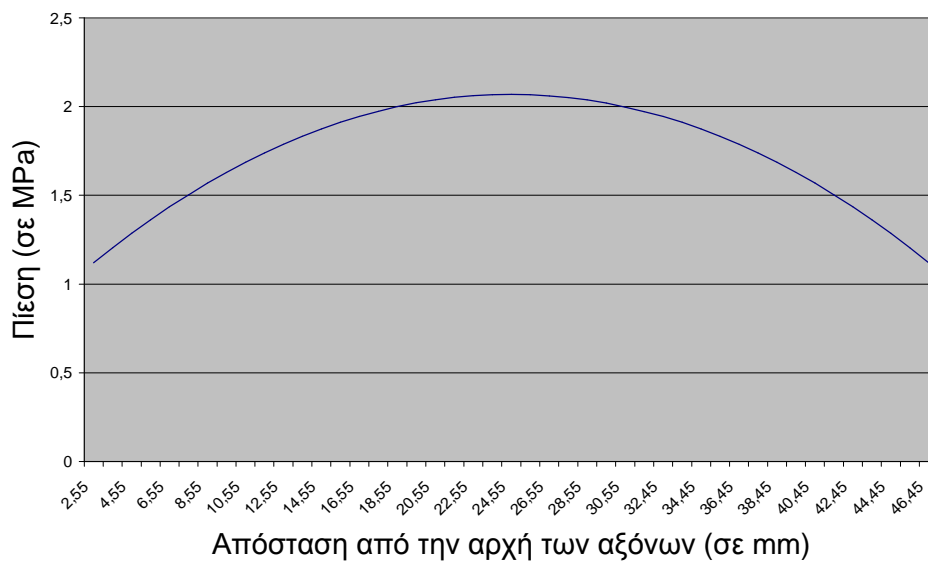
Σχήμα 8.5 Φορτίσεις άνω και κάτω επιφυσιακής πλάκας νεαρού ατόμου

8.1.2 Ηλικιωμένο άτομο

Η φόρτιση που αντιστοιχεί σε ηλικιωμένο άτομο σύμφωνα με τη βιβλιογραφία (Xinghua 2002) είναι θλιπτική πίεση με μορφή συμμετρικής κυρτής παραβολής τόσο στη άνω όσο και την κάτω επιφυσιακή πλάκα. Οι μέγιστες και ελάχιστες τιμές του πολυωνύμου της πίεσης διαφέρουν για άνω και κάτω πλάκα με τις μικρότερες τιμές να εμφανίζονται στην τελευταία. Τα αντιπροσωπευτικά πολυώνυμα μαζί με τα διαγράμματά τους παρουσιάζονται στα σχήματα που ακολουθούν (Σχήμα 8.6 - Σχήμα 8.8)

Άνω επιφυσιακή πλάκα

$$y = -0,001972 \cdot x^2 + 0,09653 \cdot x + 0,88666 \quad (\text{σχέση } 8.3)$$

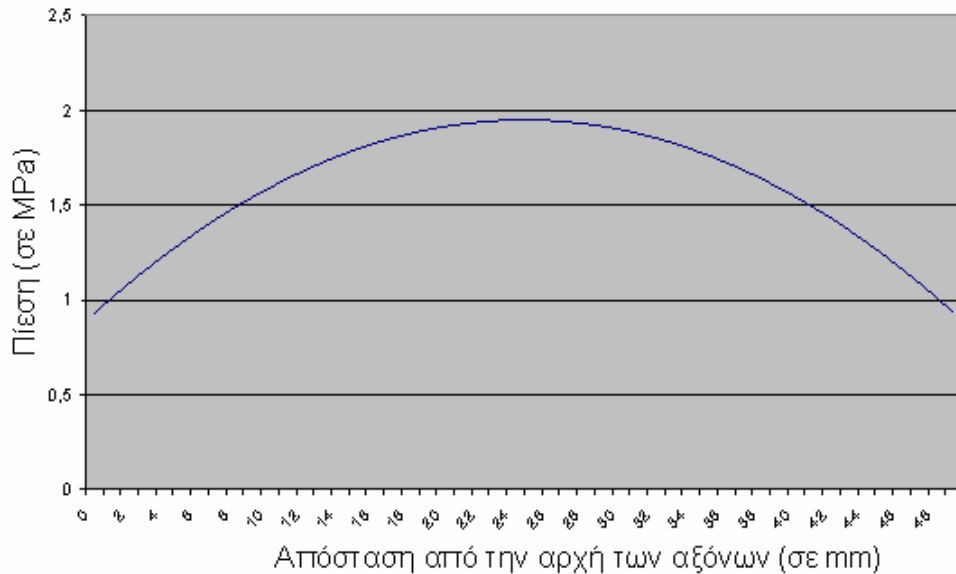


Σχήμα 8.6 Πολυώνυμο φόρτισης στην άνω επιφυσιακή πλάκα ηλικιωμένου ατόμου

Από την εφαρμογή του παραπάνω πολυωνύμου φόρτισης στην άνω επιφυσιακή πλάκα του σπονδύλου ηλικιωμένου ατόμου προκύπτει η μέγιστη εφαρμοζόμενη πίεση άνω επιφυσιακής πλάκας στο κέντρο της: $p_{\max, u} = 2,07 \text{ N/mm}^2$ και ελάχιστη πίεση άνω επιφυσιακής πλάκας στα άκρα: $p_{\min, u} = 1,12 \text{ N/mm}^2$

Κάτω επιφυσιακή πλάκα

$$y = -0,001699 \cdot x^2 + 0,08326 \cdot x + 0,9300 \quad (\text{σχέση } 8.4)$$



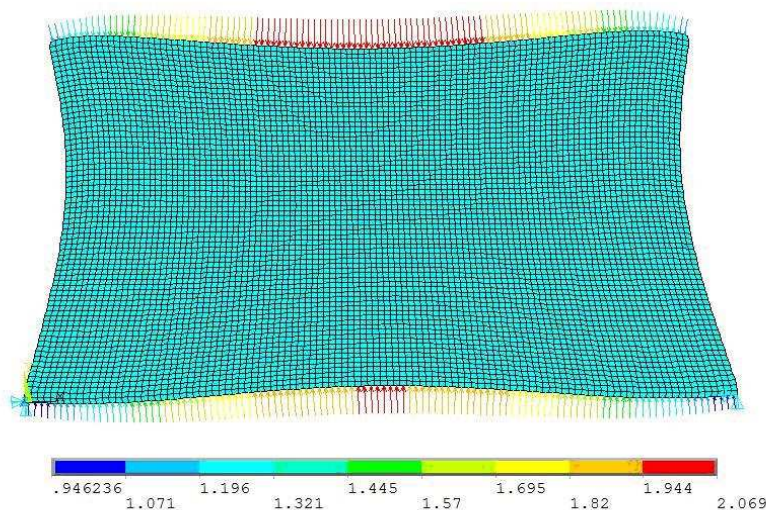
Σχήμα 8.7 Πολυώνυμο φόρτισης στην κάτω επιφυσιακή πλάκα ηλικιωμένου ατόμου

Από την εφαρμογή του παραπάνω πολυωνύμου φόρτισης στην κάτω επιφυσιακή πλάκα του σπονδύλου ηλικιωμένου ατόμου προκύπτει η μέγιστη πίεση κάτω επιφυσιακής πλάκας: $p_{\max, l} = 1,95 \text{ N/mm}^2$ και ελάχιστη πίεση κάτω επιφυσιακής πλάκας:

$$p_{\min, l} = 0,93 \text{ N/mm}^2$$

Σημειώνεται ότι το συνολικό μέγεθος της κάθετης φόρτισης που δέχεται ο σπόνδυλος O_5 ηλικιωμένου ατόμου είναι, τόσο για την άνω όσο και για την κάτω επιφυσιακή πλάκα, ίση με $F = -41,87 \text{ N}$.

Τα παραπάνω δύο πολυώνυμα φόρτισης ασκούμενα στις επιφυσιακές πλάκες του μελετώμενου σπονδύλου δίνουν, μέσω του προγράμματος ANSYS, την ακόλουθη μορφή του σχήματος 8.8. Σημειώνεται ότι οι τιμές της πίεσης δίνονται σε MPa.



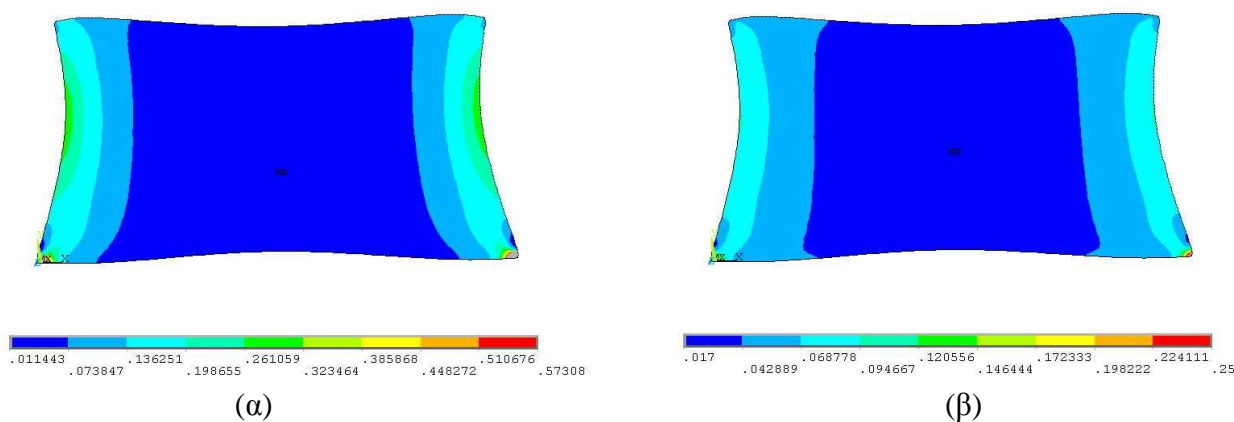
Σχήμα 8.8 Φορτίσεις άνω και κάτω επιφανειακής πλάκας ηλικιωμένου ατόμου

8.2 Παρουσίαση αποτελεσμάτων του διδιάστατου μοντέλου σπονδύλου

8.2.1 Νεαρό άτομο (μοντέλο χωρίς εισαγωγή μη γραμμικοτήτων)

Αποτελέσματα της μηχανικής ανάλυσης του μοντέλου του σπονδύλου με αρχική οστική πυκνότητα $0,8\text{g/cm}^3$

Αρχικά εφαρμόζεται στο διδιάστατο σπόνδυλο η πίεση που αντιστοιχεί στην τυπική φόρτιση που δέχεται ο ανθρώπινος σπόνδυλος νεαρού ατόμου. Στο Σχήμα 8.9 που ακολουθεί, παρουσιάζονται οι κατανομές της πυκνότητας τροπικής ενέργειας (*Strain Energy Density*) και των ισοδύναμων παραμορφώσεων κατά Von Mises του οστού με την αρχική του πυκνότητα.



Σχήμα 8.9 Πυκνότητα τροπικής ενέργειας (α) και παραμορφώσεις κατά Von Mises (β) του οστού με την αρχική πυκνότητα ($0,8\text{ g/cm}^3$)

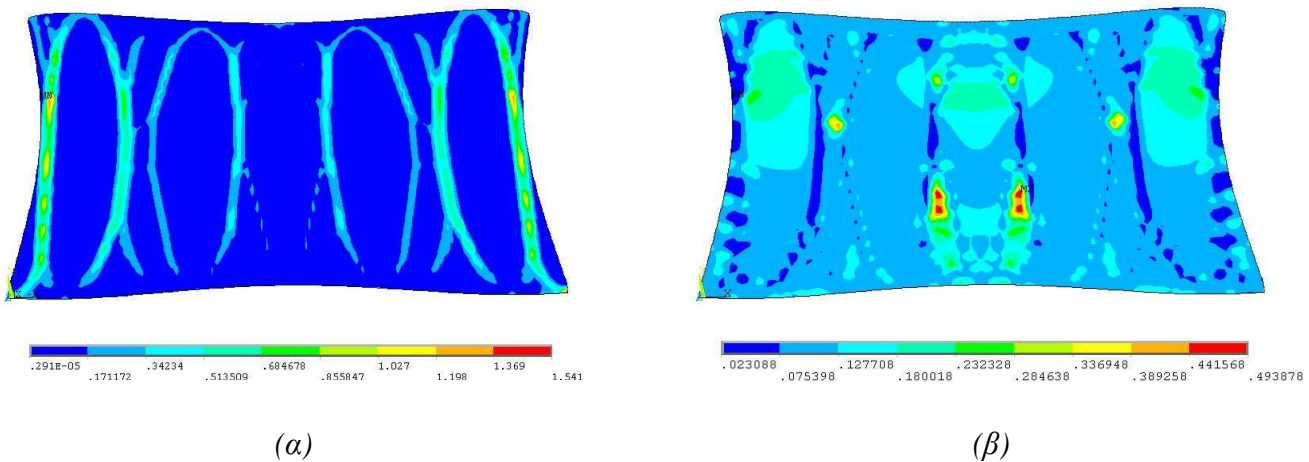
Σημειώνεται ότι η μέγιστη εμφανιζόμενη πυκνότητα τροπικής ενέργειας είναι $3,266 \text{ J/cm}^3$ (ή $3,266 \text{ MPa}$), ενώ η ελάχιστη είναι περίπου ίση με $0,011 \text{ J/cm}^3$. Η μέγιστη παραμόρφωση κατά Von Mises είναι περίπου $0,356 \text{ strains}$ (δηλαδή $35,62\%$) ενώ η ελάχιστη είναι περίπου ίση με $0,018 \text{ strains}$ (δηλαδή $1,77\%$). Τόσο οι μέγιστες παραμορφώσεις όσο και οι μέγιστες πυκνότητες τροπικής ενέργειας εμφανίζονται κοντά στις στηρίξεις ενώ οι ελάχιστες στο κέντρο του σπονδύλου.

Εναρξη της αριθμητικής επίλυσης της διαφορικής εξίσωσης της οστικής ανακατασκευής

Οι πυκνότητες τροπικής ενέργειας που προέκυψαν από την αρχική κατάσταση του οστού, εισάγονται στη διαφορική εξίσωση της ανακατασκευής $\frac{d\rho}{dt} = B \cdot \left[\frac{U}{\rho} - k \right]$ και υπολογίζονται νέες οστικές πυκνότητες. Από βιβλιογραφία (Xinghua 2002 και Jovanovic 2004) ο συντελεστής B λαμβάνει την τιμή $1 \frac{(g/cm^3)^2}{(MPa \cdot \text{time unit})}$ ενώ η αναφορά k λαμβάνει την τιμή $0,25 \frac{J}{g}$. Επιλέχθηκε επίσης χρονικό βήμα $0,06$ και 1400 επαναλήψεις που αντιστοιχούν σε χρόνο 84 χρονικές μονάδες. Μονάδα χρόνου θεωρείται το 1 time unit και συνδέεται άμεσα με το χρόνο ανά τον οποίο γίνεται η παρατήρηση της οστικής ανακατασκευής. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε, από τη διαφορική εξίσωση της ανακατασκευής, νέες πυκνότητες και από αυτές νέα μέτρα ελαστικότητας. Στα νέα μέτρα ελαστικότητας που προκύπτουν εφαρμόζουμε ξανά τη φόρτιση του σπονδύλου.

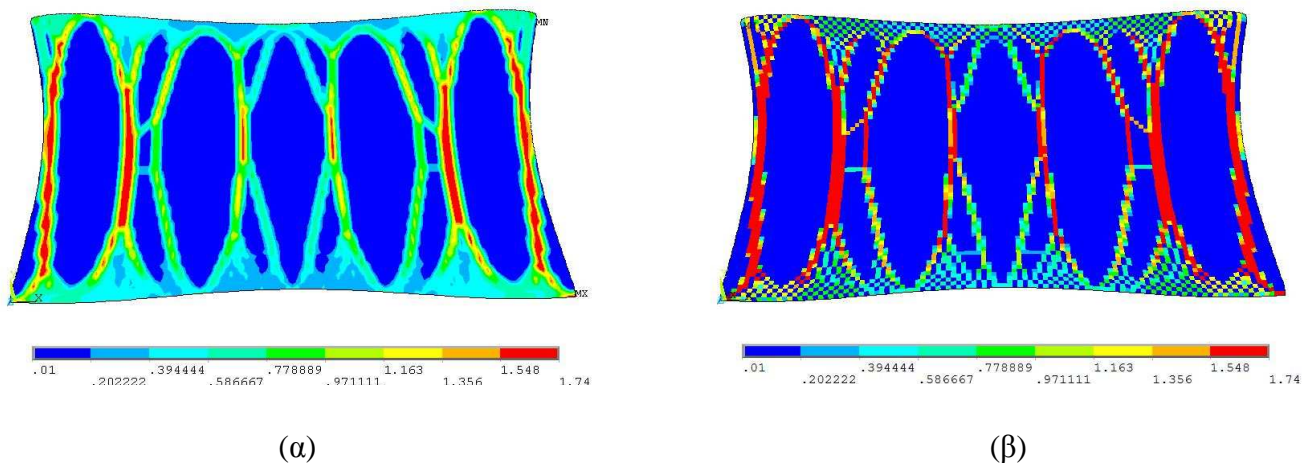
Οι νέες τιμές πυκνότητας τροπικής ενέργειας που προκύπτουν εισάγονται ξανά στη διαφορική εξίσωση και δίνουν νέες μεταβολές οστικής πυκνότητας. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται για τον προκαθορισμένο αριθμό χρονικών μονάδων στις οποίες η διαδικασία οστικής ανακατασκευής αποτελεί αντικείμενο μελέτης.

Ύστερα από 1400 επαναλήψεις που αντιστοιχούν σε χρόνο 84 χρονικές μονάδες το διάγραμμα της πυκνότητας τροπικής ενέργειας και των παραμορφώσεων κατά Von Mises έχουν τη μορφή του Σχήμα 8.10:



Σχήμα 8.10 Τελική κατανομή (α) πυκνότητας τροπικής ενέργειας και (β) ισοδύναμων παραμορφώσεων κατά Von Mises

Η μέγιστη πυκνότητα τροπικής ενέργειας (στην περιοχή του κόκκινου χρώματος το δεξί άκρο) έχει τιμή $1,541 \text{ J/cm}^3$ ενώ η ελάχιστη τιμή της (στην περιοχή με το μπλε χρώμα στην αριστερή πλευρά) είναι $0,291\text{E-}5 \text{ J/cm}^3$. Η μέγιστη ισοδύναμη παραμόρφωση κατά Von Mises έχει τιμή $0,494 \text{ strains}$ (περίπου 49,39%), ενώ η ελάχιστη τιμή της είναι $0,023 \text{ strains}$ (περίπου 2,3%).



Σχήμα 8.11 Τελική κατανομή οστικής πυκνότητας ύστερα από 1400 επαναλήψεις (α) μέση τιμή (β) ανά Π.Σ.

Οι τελικές πυκνότητες που προέκυψαν ύστερα από 1400 επαναληπτικά βήματα παρουσιάζομενες ως μέσος όρος των γειτονικών Π.Σ. και ανά Π.Σ. φαίνονται στο Σχήμα 8.11. Αν συγκρίνουμε το τελικό διάγραμμα πυκνότητας τροπικής ενέργειας και αυτό των τελικών πυκνοτήτων παρατηρούμε ότι οι μεγαλύτερες τιμές των πυκνοτήτων εμφανίζονται αντίστοιχα στις περιοχές με μέγιστη τροπική ενέργεια και υπάρχει μια

γενικότερη μεταξύ τους αντιστοιχία. Το διάγραμμα των πυκνοτήτων που παρουσιάζεται στο Σχήμα 8.11(α) καταδεικνύει το σχηματισμό οχτώ κολώνων εκ των οποίων έξι βασικές με μεγαλύτερες τιμές πυκνότητας προς την κεντρική τους περιοχή, σταδιακά μειούμενη προς την άνω και την κάτω επιφυσιακή πλάκα. Επίσης, στο κέντρο του σπονδύλου εμφανίζονται και κολώνες μικρότερης πυκνότητας που συνδέουν τις βασικές με την άνω και κάτω επιφυσιακή πλάκα. Η μέγιστη τιμή οστικής πυκνότητας είναι ίση με αυτή του φλοιώδους οστού δηλαδή $1,74 \text{ g/cm}^3$ (άνωτερο όριο πυκνότητας που τέθηκε), ενώ η ελάχιστη τιμή οστικής πυκνότητας είναι $0,01 \text{ g/cm}^3$ (κατώτερο όριο πυκνότητας που τέθηκε).

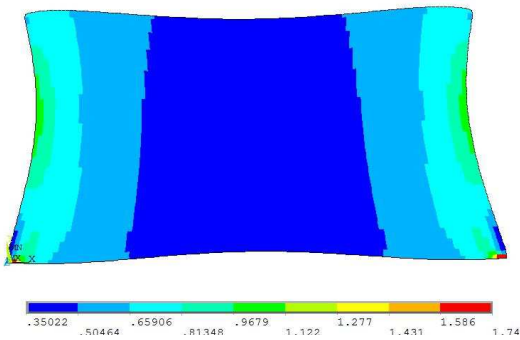
Αντίστοιχα στο Σχήμα 8.11(β) παρουσιάζονται ξανά οι τελικές οστικές πυκνότητες αυτή τη φορά όμως παρουσιασμένες ανά πεπερασμένο στοιχείο. Στην εικόνα αυτή είναι περισσότερο εμφανής η δοκιδωτή μορφή του σπογγώδους οστού. Σε αντίθεση με την προηγούμενη εικόνα εδώ εμφανίζεται το φαινόμενο «σκακιέρας» που έχει αναφερθεί στο Κεφάλαιο 3.

Συγκρίνοντας τις δύο εικόνες της κατανομής της οστικής πυκνότητας παρατηρούμε τα ακόλουθα:

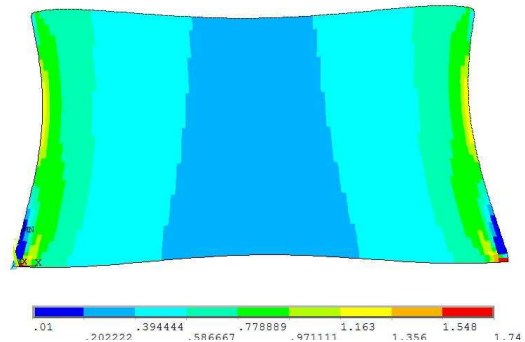
- Στο Σχήμα 8.11(β) με πυκνότητες ανά πεπερασμένο στοιχείο εμφανίζονται μέγιστες πυκνότητες και σε άλλες δύο κολώνες πέρα των βασικών. Στο Σχήμα 8.11(α) με τον μέσο όρο των πυκνοτήτων δεν παρατηρείται το φαινόμενο αυτό καθώς τα γειτονικά τους στοιχεία έχουν μικρές τιμές οστικής πυκνότητας κι έτσι ο μέσος όρος είναι αρκετά μικρότερος των μέγιστων τιμών.
- Στις βασικές κολώνες το εύρος των περιοχών με μέγιστες τιμές πυκνότητας είναι μεγαλύτερο για την κατανομή ανά πεπερασμένο στοιχείο σε σχέση με την κατανομή με βάση τον μέσο όρο. Αιτία είναι και πάλι η μικρή τιμή των γειτονικών στοιχείων που μειώνει σημαντικά τη μέση τιμή των πυκνοτήτων. Τέλος, στην κατανομή ανά στοιχείο παρατηρείται σύνδεση των περιοχών με μέγιστες πυκνότητες μεταξύ των γειτονικών κολώνων.
- Η περιοχή στοιχείων με τη μικρότερη οστική πυκνότητα (μπλε χρώμα) είναι επίσης μεγαλύτερη για την κατανομή ανά στοιχείο. Και εδώ αιτία είναι τα γειτονικά στοιχεία, τα οποία, στην κατανομή με βάση τον μέσο όρο, έχοντας μεγαλύτερη οστική πυκνότητα επηρεάζουν τα στοιχεία αυτά.

Στο Σχήμα 8.12 παρουσιάζονται κατανομές οστικής πυκνότητας ανά πεπερασμένο στοιχείο για ορισμένες ενδιάμεσες επαναλήψεις. Αυτές είναι οι εξής: 34, 84, 167, 334, 500, 834 και 1334. Οι επαναλήψεις αυτές πολλαπλασιαζόμενες με το χρονικό βήμα 0,06 χρονικές μονάδες δίνουν τους αντίστοιχους χρόνους ανακατασκευής: 2,04 χρονικές μονάδες, 5,04 χρονικές μονάδες, 10,02 χρονικές μονάδες, 20,04 χρονικές μονάδες, 30

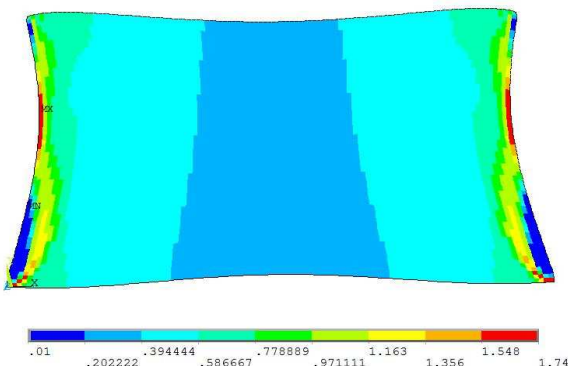
χρονικές μονάδες, 50,04 χρονικές μονάδες και 80,04 χρονικές μονάδες. Τέλος, για σύγκριση με την τελική κατάσταση, παρατίθεται στο ίδιο σχήμα και η τελική κατανομή πυκνότητας μετά από τις 1400 επαναλήψεις (συνολικός χρόνος 84 χρονικές μονάδες)



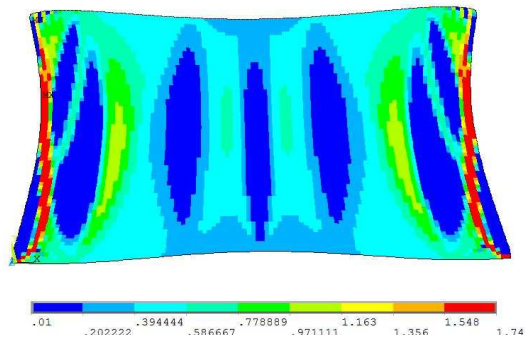
(α) 34 επαναλήψεις



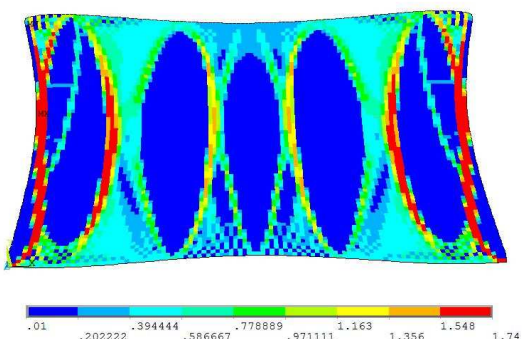
(β) 84 επαναλήψεις



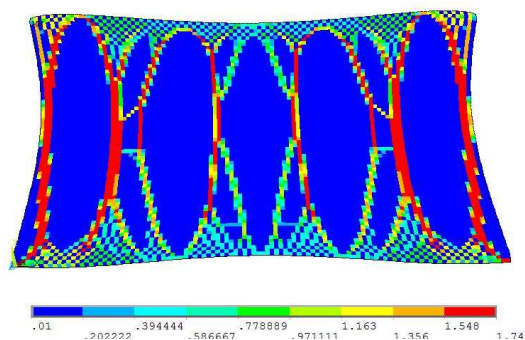
(γ) 167 επαναλήψεις



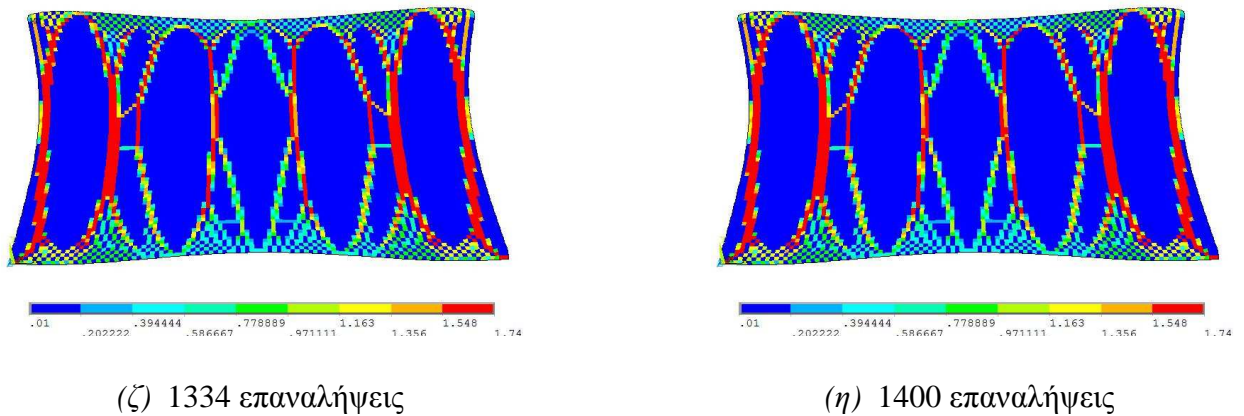
(δ) 334 επαναλήψεις



(ε) 500 επαναλήψεις



(στ) 834 επαναλήψεις



Σχήμα 8.12 Κατανομή οστικής πυκνότητας ανά Π.Σ. σε διαφορετικές χρονικές στιγμές της διαδικασίας

Για την κατανομή της οστικής πυκνότητας ύστερα από 34 επαναλήψεις (Σχήμα 8.12 (α)) παρατηρούμε τα εξής: οι μέγιστες πυκνότητες (κόκκινο χρώμα και $\rho=1,74 \text{ g/cm}^3$) εμφανίζονται μόνο κοντά στην περιοχή που εφαρμόσαμε τις αρθρώσεις (δύο ακραίοι κόμβοι της κάτω επιφυσιακής πλάκας). Ακόμα, δεν έχει σχηματιστεί καμία κολώνα μέγιστης πυκνότητας. Όσον αφορά στην ελάχιστη πυκνότητα, αυτή δεν έχει την τιμή του κατώτερου ορίου της αλλά έχει περίπου την τιμή $0,35 \text{ g/cm}^3$ (κατώτερο όριο περιοχής σκούρου μπλε χρώματος). Η αρχική πυκνότητα του σπονδύλου με τιμή $0,8 \text{ g/cm}^3$ βρίσκεται κοντά στο άνω όριο της περιοχής του γαλάζιου χρώματος. Επομένως τα στοιχεία με τυρκουάζ χρώμα έχουν αυξήσει την πυκνότητά τους (έως $0,9679 \text{ g/cm}^3$) ενώ στοιχεία με γαλάζιο χρώμα έχουν μειώσει την πυκνότητά τους (έως $0,6591 \text{ g/cm}^3$). Η περιοχή με πράσινο χρώμα περιέχει στοιχεία που έχουν αυξήσει την πυκνότητά τους έως $1,122 \text{ g/cm}^3$. Τα στοιχεία με ανοιχτό πράσινο χρώμα έχουν αυξήσει την πυκνότητά τους μέχρι $1,277 \text{ g/cm}^3$, τα στοιχεία με κίτρινο χρώμα έχουν αυξήσει την πυκνότητά τους μέχρι $1,431 \text{ g/cm}^3$ και τα στοιχεία με χρώμα πορτοκαλί έχουν αυξήσει την πυκνότητά τους μέχρι $1,586 \text{ g/cm}^3$. Αντιθέτως, τα στοιχεία με ανοιχτό μπλε χρώμα έχουν μειώσει την πυκνότητά τους έως $0,5046 \text{ g/cm}^3$. Καταλήγουμε επομένως στο εξής συμπέρασμα παρατηρώντας την κατανομή των πυκνοτήτων: Ο σπόνδυλος έχει μειωμένη πυκνότητα στο κέντρο του ενώ αυξημένη κοντά στις πλαϊνές πλευρές του. Παρατηρείται παρόλα αυτά μείωση πυκνότητας σε μια περιοχή στις πλαϊνές πλευρές κοντά στους αρθρωμένους κόμβους.

Ύστερα από 84 επαναλήψεις (Σχήμα 8.12 (β)) παρατηρούμε τα ακόλουθα: μικρή αύξηση της περιοχής με ελάχιστη πυκνότητα που είχε επισημανθεί κοντά στην άρθρωση ενώ αρχίζουν να σχηματίζονται δύο ακραίες κολώνες με αυξημένη οστική πυκνότητα. Όσον αφορά στην ελάχιστη πυκνότητα, έχει πάρει την τιμή του κατώτερου ορίου οστικής

πυκνότητας δηλαδή $0,010\text{g/cm}^3$. Επιπρόσθετα, παρουσιάζεται μια αύξηση πυκνοτήτων προς το εσωτερικό του σπονδύλου. Σημειώνεται εδώ ότι εφόσον έχουν επιτευχθεί και τα δύο άκρα του εύρους πυκνοτήτων οι υπόλοιπες εικόνες είναι άμεσα συγκρίσιμες χρωματικά, καθώς τα όρια κάθε χρώματος θα είναι σταθερά.

Επιλέξαμε επίσης να πάρουμε εικόνα των πυκνοτήτων ύστερα από 167 επαναλήψεις. Ύστερα από 167 επαναλήψεις (Σχήμα 8.12 (γ)) και για την αντίστοιχη κατανομή πυκνότητας παρατηρούμε κυρίως τα ακόλουθα: οι περιοχές με ελάχιστη πυκνότητα στα κάτω άκρα του σπονδύλου έχουν αυξηθεί ενώ στις κολώνες με αυξημένη πυκνότητα, που είχαν παρατηρηθεί ήδη στις 84 επαναλήψεις, αρχίζουν να εμφανίζονται και στοιχεία με πυκνότητα ίση με το άνω όριο ($1,74\text{g/cm}^3$).

Η κατανομή της πυκνότητας μετά από 334 επαναλήψεις (Σχήμα 8.12 (δ)) μας οδηγεί στα ακόλουθα συμπεράσματα: Οι περιοχές με ελάχιστες πυκνότητες στα κάτω άκρα του σπονδύλου έχουν αυξηθεί, ενώ αρχίζουν να δημιουργούνται περιοχές ελάχιστης πυκνότητας και στα άνω άκρα του. Επίσης, έχουν σχηματιστεί περιοχές ελάχιστης πυκνότητας και στο εσωτερικό του σπονδύλου. Παράλληλα με το σχηματισμό αυτό εμφανίζονται και έξι εσωτερικές κολώνες με αυξημένη πυκνότητα. Τέλος, στις δύο ακριανές κολώνες έχουν αυξηθεί τα στοιχεία με μέγιστη οστική πυκνότητα.

Σε χρόνο 30 χρονικές μονάδες, ο οποίος αντιστοιχεί σε 500 επαναλήψεις (Σχήμα 8.12 (ε)), η κατανομή της οστικής πυκνότητας μπορεί να περιγραφεί συνοπτικά από τα εξής: έχει αρχίσει να εμφανίζεται το φαινόμενο «σκακιέρας», δηλαδή γειτονικά Π.Σ. με μεγάλες διαφορές πυκνότητας. Οι εσωτερικές κολώνες που είχαν παρατηρηθεί έχουν λεπτύνει αλλά περιλαμβάνουν στοιχεία με αυξημένες πυκνότητες (κίτρινο και κόκκινο χρώμα). Τα στοιχεία των εξωτερικών κολώνων που βρίσκονται κοντά στην άνω επιφυσιακή πλάκα έχουν αυξήσει την πυκνότητά τους (περιοχή κόκκινου χρώματος), ενώ έχουν αυξηθεί και οι περιοχές ελάχιστης πυκνότητας στο εσωτερικό του σπονδύλου. Τέλος, έχουν σχηματιστεί μικρότερες κολώνες στο εσωτερικό του σπονδύλου οι οποίες συνδέουν τις κύριες κολώνες με την άνω και κάτω επιφυσιακή πλάκα.

Μετά την ολοκλήρωση 834 επαναλήψεων (Σχήμα 8.12 (στ)) τα συμπεράσματα που εξάγονται είναι τα παρακάτω: η δοκιδωτή δομή του σπογγώδους οστού είναι περισσότερο εμφανής ενώ έχουν αυξηθεί οι περιοχές με ελάχιστες πυκνότητες στο εσωτερικό του σπονδύλου. Έχουν σχηματιστεί πλέον οκτώ κύριες κολώνες με μέγιστη πυκνότητα, εκ των οποίων οι τέσσερις ακριανές είναι περισσότερο ενισχυμένες. Επίσης έχουν δημιουργηθεί έξι μικρές, σχεδόν οριζόντιες, κολώνες που συνδέουν τις κύριες κολώνες μεταξύ τους στο κέντρο του σπονδύλου. Οι δευτερεύουσες κολώνες που συνέδεαν τις κεντρικές κολώνες με τις επιφυσιακές πλάκες έχουν ενισχυθεί, ενώ εκείνες που συνέδεαν τις ακριανές με την άνω επιφυσιακή πλάκα έχουν απορροφηθεί. Τέλος, οι ακριανές κολώνες τείνουν να ενωθούν με τις διπλανές τους όσο πλησιάζουν προς τις επιφυσιακές πλάκες.

Λίγα βήματα πριν ολοκληρωθεί η δοκιμή, και συγκεκριμένα στις 1334 επαναλήψεις (Σχήμα 8.12 (ζ)), η κατανομή της οστικής πυκνότητας διαφέρει ελάχιστα από την αντίστοιχη για τις 834 επαναλήψεις. Οι ακριανές κολώνες δεν εμφανίζουν καμία αλλαγή ενώ πολύ μικρές αλλαγές εμφανίζονται στο εσωτερικό του σπονδύλου.

8.2.2 Νεαρό άτομο-μοντέλο με εισαγωγή μη γραμμικότητας

Ανάλυση μη γραμμικότητας στην εξίσωση οστικής ανακατασκευής

Στη βιβλιογραφία (Xinghua 2002), όπως προαναφέρθηκε, εμφανίζεται η εισαγωγή δύο μη γραμμικότητας στη διαφορική εξίσωση της οστικής ανακατασκευής: ενός συντελεστή α και ενός εκθετικά εξαρτημένος από το χρόνο συντελεστή $B(t)$. Ο συντελεστής α εισάγεται στη διαφορική εξίσωση ως δύναμη στον όρο $\frac{U}{\rho \cdot k}$ ενώ ο συντελεστής $B(t)$ αντικαθιστά το σταθερό συντελεστή αναλογίας B . Προκύπτει δε η διαφορική εξίσωση της Σχέσης 8.5 :

$$\frac{d\rho}{dt} = B(t) \cdot \left[\left(\frac{U}{\rho \cdot k} \right)^\alpha - 1 \right] \quad (\text{σχέση 8.5})$$

8.2.2.1 Σταθερός συντελεστής αναλογίας B

Αν θεωρήσουμε σταθερό συντελεστή B στη Σχέση 8.5 προκύπτει η Σχέση 8.6:

$$\frac{d\rho}{dt} = B \cdot \left[\left(\frac{U}{\rho \cdot k} \right)^\alpha - 1 \right] \quad (\text{σχέση 8.6})$$

Αν θεωρήσουμε και τιμή για τον συντελεστή α ίση με 1, η Σχέση 8.6 γίνεται

$$\frac{d\rho}{dt} = B \cdot \left[\left(\frac{U}{\rho \cdot k} \right) - 1 \right] \quad (\text{σχέση 8.7})$$

Η Σχέση 8.7 εκφυλλίζεται στο μοντέλο χωρίς γραμμικότητες που περιγράψαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Συγκρίνοντας τη Σχέση 8.7 με το μοντέλο εκείνο, παρατηρούμε ότι το εσωτερικό της αγκύλης είναι πλέον διαιρεμένο με την αναφορά k . Επομένως, για να είναι όμοια τα δύο μοντέλα θα πρέπει ο συντελεστής B να πολλαπλασιαστεί με την αναφορά $0,25 \frac{J}{g}$, οπότε

προκύπτει νέα τιμή του συντελεστή B ίση με $0,25 \frac{(g/cm^3)^2}{(MPa \cdot \text{time unit})}$. Τα αποτελέσματα

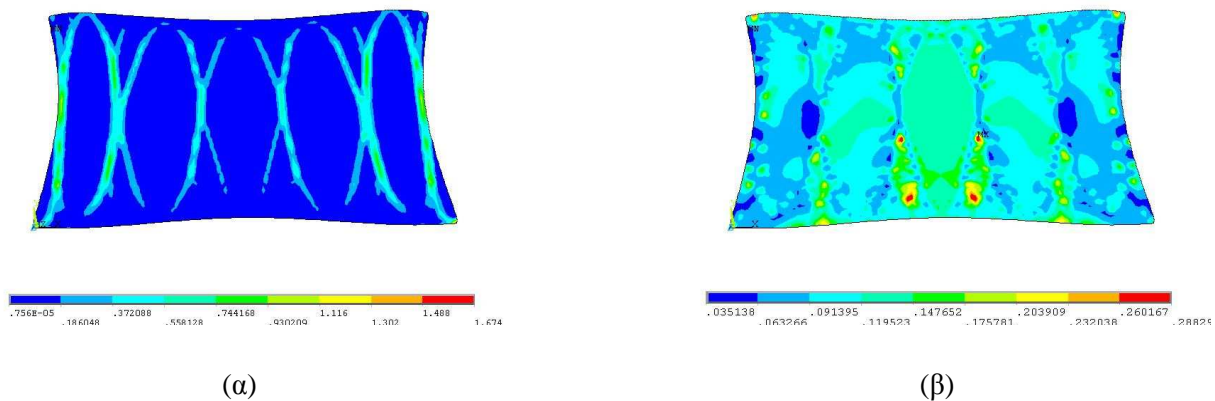
που προκύπτουν είναι ίδια λοιπόν με εκείνα του Κεφαλαίου 8.2. Όπως επισημάνθηκε και στο Κεφάλαιο 4.3.2, από πειράματα που πραγματοποιήθηκαν σύμφωνα με το μοντέλο των

μικρο-ρωγματώσεων (McNamara et al 1992) η τιμή $\alpha=2,25$ προσεγγίζει καλύτερα την πραγματική κατάσταση του σπονδύλου. Η αύξηση του βαθμού μη γραμμικότητας α της διαφορικής εξίσωσης της οστικής ανακατασκευής μπορεί να αυξήσει αρκετά την απορρόφηση της τοπικής πυκνότητας όπου η μηχανική διέγερση $\frac{U}{\rho}$ είναι πολύ μικρότερη

από την τιμή αναφοράς k , κάτι που υπονοεί την ενίσχυση της οστεοκλαστικής δραστηριότητας. Μπορεί όμως ακόμη να αυξήσει την προσθήκη τοπικής πυκνότητας όπου η μηχανική διέγερση είναι πολύ μεγαλύτερη της τιμής αναφοράς, κάτι που υπονοεί την ενίσχυση της οστεοβλαστικής δραστηριότητας. Ως εκ τούτου, τα κινητικά της διαδικασίας της ανακατασκευής μεταβάλλονται. Η ενίσχυση της οστεοκλαστικής (οστεοβλαστικής) δραστηριότητας μπορεί να είναι διαφορετική ανάλογα με την ηλικία ή την ανατομική πλευρά. Έτσι, υποθέσαμε ότι το οστό σε διαφορετικές ανατομικές πλευρές ή σε διαφορετικά στάδια ανάπτυξης μπορεί να αντιστοιχεί σε διαφορετικούς βαθμούς μη γραμμικότητας. Ο συντελεστής α μπορεί να αναπαριστά μια έννοια εξέλιξης και θα ήταν χρήσιμος στη μελέτη της ανάπτυξης και εξέλιξης του οστού. Στα πλαίσια της εργασίας αυτής πραγματοποιήθηκε μία δοκιμή παρόμοια με αυτή του Κεφαλαίου 8.2, με B σταθερό (και ίσο με $0,25 \frac{(g/cm^3)^2}{(MPa \cdot time\ unit)}$ για τη διατήρηση της αντιστοιχίας), αλλά με $\alpha=2,25$ αυτή τη φορά.

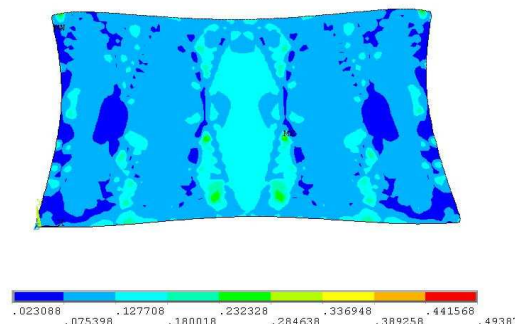
Αποτελέσματα μηχανικής ανάλυσης του μοντέλου του σπονδύλου με αρχική οστική πυκνότητα $0,8g/cm^3$

Ύστερα από 1400 επαναλήψεις που αντιστοιχούν σε χρόνο 84 χρονικές μονάδες το διάγραμμα της πυκνότητας τροπικής ενέργειας και των παραμορφώσεων κατά Von Mises έχουν τη μορφή που φαίνεται στο Σχήμα 8.13:



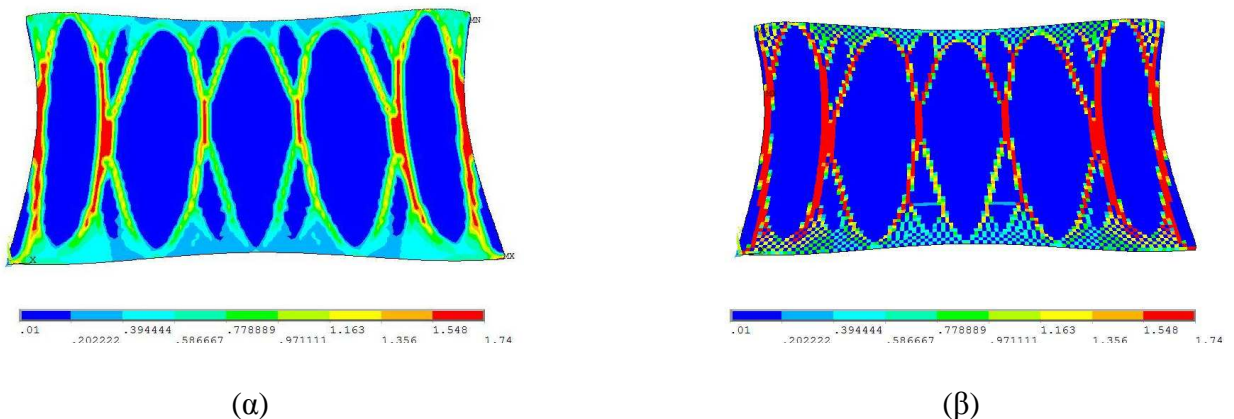
Σχήμα 8.13 Τελική κατανομή (α) πυκνότητας τροπικής ενέργειας και (β) ισοδύναμων παραμορφώσεων κατά Von Mises

Η μέγιστη πυκνότητα τροπικής ενέργειας (στην περιοχή του κόκκινου χρώματος το δεξί άκρο) έχει τιμή $1,674 \text{ J/cm}^3$ ενώ η ελάχιστη τιμή της (στην περιοχή με το μπλε χρώμα στην αριστερή πλευρά) είναι $0,756\text{E-}5 \text{ J/cm}^3$. Συγκρινόμενη με την αντίστοιχη για $\alpha=1$, η κατανομή πυκνότητας τροπικής ενέργειας εμφανίζει μεγαλύτερη μέγιστη τιμή και ταυτόχρονα μεγαλύτερη ελάχιστη τιμή. Η μέγιστη παραμόρφωση κατά Von Mises έχει τιμή $0,2883 \text{ strains}$ (28,83%), ενώ η ελάχιστη τιμή της είναι $0,0351 \text{ strains}$ (3,51%). Για καλύτερη σύγκριση των τελικών παραμορφώσεων μεταξύ των δύο μοντέλων παρουσιάζουμε τις τελικές παραμορφώσεις για $\alpha=2,25$ προσαρμοσμένες όμως στο χρωματισμό των περιοχών παραμορφώσεων για $\alpha=1$ (Σχήμα 8.14). Προκύπτει λοιπόν από παρατήρηση του ότι εμφανίζονται μικρότερες τελικές παραμορφώσεις για εκθέτη $\alpha=2,25$.



Σχήμα 8.14 Παραμορφώσεις κατά Von Mises προσαρμοσμένες στο εύρος των αντίστοιχων για $\alpha=1$

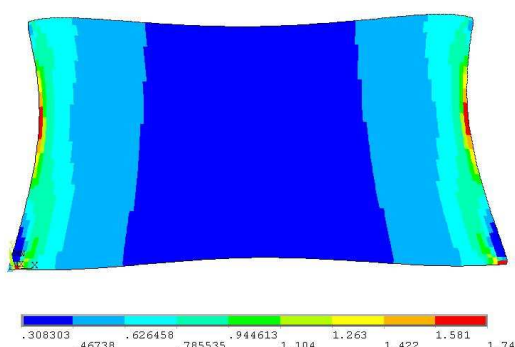
Οι τελικές πυκνότητες που προέκυψαν ύστερα από 1400 επαναληπτικά βήματα παρουσιάζονται ως μέσος όρος των γειτονικών στοιχείων (Σχήμα 8.15(α)) και ανά πεπερασμένο στοιχείο (Σχήμα 8.15(β)) έχουν την ακόλουθη κατανομή:



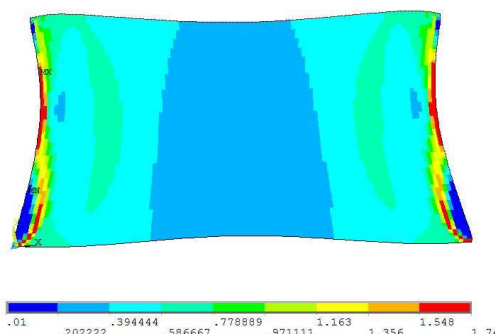
Σχήμα 8.15 Τελική κατανομή οστικής πυκνότητας ύστερα από 1400 επαναλήψεις

Αν συγκρίνουμε το τελικό διάγραμμα πυκνότητας τροπικής ενέργειας και αυτό των τελικών πυκνοτήτων παρατηρούμε ότι οι μεγαλύτερες τιμές των πυκνοτήτων εμφανίζονται αντίστοιχα στις περιοχές με μέγιστη τροπική ενέργεια και ότι υπάρχει μια γενικότερη μεταξύ τους αντιστοιχία. Η κατανομή των πυκνοτήτων που παρουσιάζεται στο Σχήμα 8.15 καταδεικνύει το σχηματισμό οχτώ κολώνων εκ των οποίων έξι βασικές με μεγαλύτερες τιμές πυκνότητας προς την κεντρική τους περιοχή, σταδιακά μειούμενη προς την άνω και την κάτω επιφυσιακή πλάκα. Συγκρινόμενη με την αντίστοιχη κατανομή για $\alpha=1$, η πυκνότητα ανά πεπερασμένο στοιχείο μας οδηγεί στα ακόλουθα συμπεράσματα: οι οριζόντιες κολώνες που ένωναν τις βασικές δεν εμφανίζονται για $\alpha=2,25$. Αντίθετα, οι γειτονικές εσωτερικές κολώνες πλησιάζουν σταδιακά και ενώνονται μεταξύ τους στο κέντρο του σπονδύλου. Επίσης, οι δύο ακριανές κολώνες βρίσκονται ακόμη πιο κοντά στις εξωτερικές πλευρές του σπονδύλου. Τέλος παρατηρούνται μεγαλύτερες τιμές οστικής πυκνότητας κοντά στα σημεία σύνδεσης των κολώνων με τις επιφυσιακές πλάκες. Η μέγιστη τιμή οστικής πυκνότητας είναι ίση με αυτή του φλοιώδους οστού δηλαδή $1,74 \text{ g/cm}^3$ (άνωτερο όριο πυκνότητας που τέθηκε), ενώ η ελάχιστη τιμή οστικής πυκνότητας είναι $0,01 \text{ g/cm}^3$ (κατώτερο όριο πυκνότητας που τέθηκε).

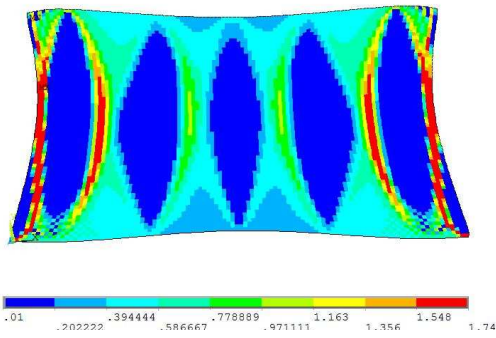
Στο παρακάτω Σχήμα 8.16 παρουσιάζονται κατανομές οστικής πυκνότητας ανά πεπερασμένο στοιχείο για τις ίδιες ενδιάμεσες επαναλήψεις με εκείνες που επιλέχθηκαν για $\alpha=1$. Αυτές είναι οι εξής: 34, 84, 167, 334, 500, 834 και 1334. Οι επαναλήψεις αυτές πολλαπλασιαζόμενες με το χρονικό βήμα 0,06 χρονικές μονάδες δίνουν τους αντίστοιχους χρόνους ανακατασκευής: 2,04 χρονικές μονάδες, 5,04 χρονικές μονάδες, 10,02 χρονικές μονάδες, 20,04 χρονικές μονάδες, 30 χρονικές μονάδες, 50,04 χρονικές μονάδες και 80,04 χρονικές μονάδες. Τέλος, για σύγκριση με την τελική κατάσταση, παρατίθεται στο ίδιο σχήμα και η τελική κατανομή πυκνότητας μετά από τις 1400 επαναλήψεις (συνολικός χρόνος 84 χρονικές μονάδες)



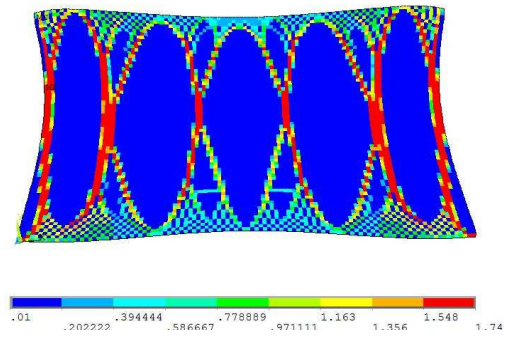
(α) 34 επαναλήψεις



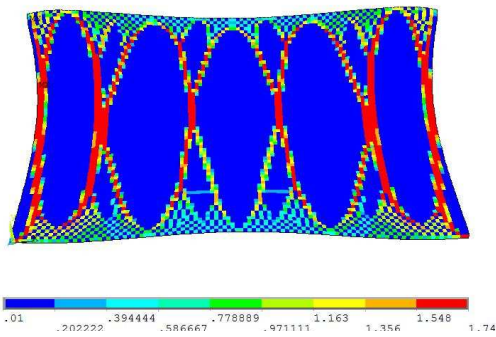
(β) 84 επαναλήψεις



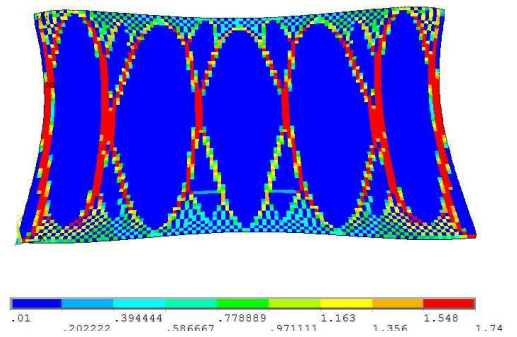
(γ) 167 επαναλήψεις



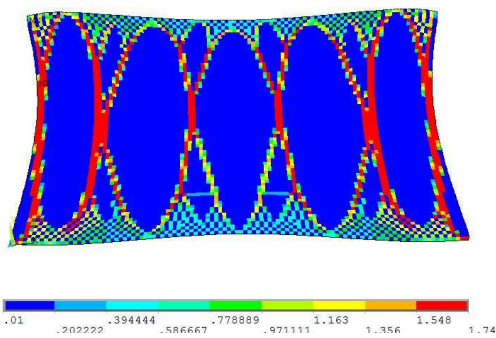
(δ) 334 επαναλήψεις



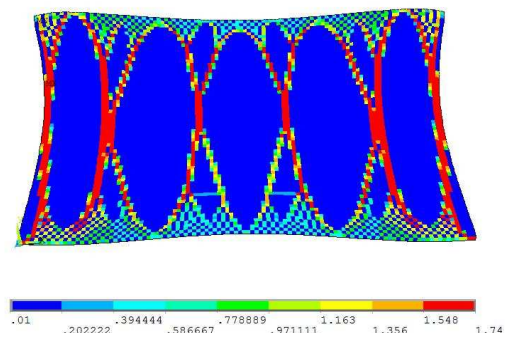
(ε) 500 επαναλήψεις



(στ) 834 επαναλήψεις



(ζ) 1334 επαναλήψεις



(η) 1400 επαναλήψεις

Σχήμα 8.16 Κατανομή οστικής πυκνότητας ανά Π.Σ. σε διαφορετικές χρονικές στιγμές της διαδικασίας

Για την κατανομή της οστικής πυκνότητας ύστερα από 34 επαναλήψεις (Σχήμα 8.16 (α)) παρατηρούμε τα εξής: οι μέγιστες πυκνότητες (κόκκινο χρώμα και $\rho=1,74 \text{ g/cm}^3$) δεν εμφανίζονται μόνο κοντά στην περιοχή που εφαρμόσαμε τις αρθρώσεις (δύο ακραίοι κόμβοι της κάτω επιφυσιακής πλάκας) αλλά και στα μέσα των δύο ακραίων

πλευρών του σπονδυλικού σώματος. Αρχίζουν λοιπόν να σχηματίζονται οι ακριανές κολώνες σε αντίθεση με τη δοκιμή για $\alpha=1$ όπου καμία κολώνα μέγιστης πυκνότητας δεν είχε σχηματιστεί στον αντίστοιχο χρόνο. Όσον αφορά στην ελάχιστη πυκνότητα, αυτή δεν έχει την τιμή του κατώτερου ορίου της αλλά έχει περίπου την τιμή $0,3083 \text{ g/cm}^3$ (κατώτερο όριο περιοχής σκούρου μπλε χρώματος). Για $\alpha=1$ είχε προκύψει μεγαλύτερη τιμή ελάχιστης πυκνότητας (περίπου $0,35 \text{ g/cm}^3$). Η αρχική πυκνότητα του σπονδύλου με τιμή $0,8 \text{ g/cm}^3$ βρίσκεται κοντά στο κάτω όριο της περιοχής του τυρκουάζ χρώματος. Επομένως τα στοιχεία με τυρκουάζ χρώμα έχουν αυξήσει την πυκνότητά τους (έως $0,9446 \text{ g/cm}^3$) ενώ στοιχεία με γαλάζιο χρώμα έχουν μειώσει την πυκνότητά τους (έως περίπου $0,6265 \text{ g/cm}^3$). Η περιοχή με πράσινο χρώμα περιέχει στοιχεία που έχουν αυξήσει την πυκνότητά τους έως $1,104 \text{ g/cm}^3$. Τα στοιχεία με ανοιχτό πράσινο χρώμα έχουν αυξήσει την πυκνότητά τους μέχρι $1,263 \text{ g/cm}^3$, τα στοιχεία με κίτρινο χρώμα έχουν αυξήσει την πυκνότητά τους μέχρι $1,422 \text{ g/cm}^3$ και τα στοιχεία με χρώμα πορτοκαλί έχουν αυξήσει την πυκνότητά τους μέχρι $1,581 \text{ g/cm}^3$. Αντιθέτως, τα στοιχεία με ανοιχτό μπλε χρώμα έχουν μειώσει την πυκνότητά τους έως $0,467 \text{ g/cm}^3$. Καταλήγουμε επομένως στο εξής συμπέρασμα παρατηρώντας την κατανομή των πυκνοτήτων: Ο σπόνδυλος έχει μειωμένη πυκνότητα στο κέντρο του ενώ αυξημένη κοντά στις πλαϊνές πλευρές του. Παρατηρείται παρόλα αυτά μείωση πυκνότητας σε μια περιοχή στις πλαϊνές πλευρές κοντά στους αρθρωμένους κόμβους.

Ύστερα από 84 επαναλήψεις (Σχήμα 8.16 (β)) παρατηρούμε τα ακόλουθα: μικρή αύξηση της περιοχής με ελάχιστη πυκνότητα που είχε επισημανθεί κοντά στις αρθρώσεις ενώ αρχίζουν να σχηματίζονται δύο ακραίες κολώνες με αυξημένη οστική πυκνότητα. Οι κολώνες αυτές περιέχουν και στοιχεία με τη μέγιστη πυκνότητα $1,74 \text{ g/cm}^3$ σε αντίθεση με τις αντίστοιχες κολώνες για $\alpha=1$. Επιπρόσθετα αρχίζουν να σχηματίζονται και δύο εσωτερικές κολώνες με αυξημένη οστική πυκνότητα. Όσον αφορά στην ελάχιστη πυκνότητα, έχει πάρει την τιμή του κατώτερου ορίου οστικής πυκνότητας δηλαδή $0,01 \text{ g/cm}^3$. Ακόμη η περιοχή με ελάχιστες πυκνότητες στο κέντρο του σπονδύλου είναι μεγαλύτερη συγκρινόμενη με εκείνη για $\alpha=1$. Σημειώνεται εδώ ότι εφόσον έχουν επιτευχθεί και τα δύο άκρα του εύρους πυκνοτήτων οι υπόλοιπες εικόνες θα είναι άμεσα συγκρίσιμες χρωματικά, καθώς τα όρια κάθε χρώματος θα είναι σταθερά.

Ύστερα από 167 επαναλήψεις (Σχήμα 8.16 (γ)) και για την αντίστοιχη κατανομή πυκνότητας παρατηρούμε κυρίως τα ακόλουθα: οι περιοχές με ελάχιστη πυκνότητα στα κάτω άκρα του σπονδύλου έχουν αυξηθεί ενώ έχουν εμφανιστεί τέτοιες περιοχές και στο κέντρο του σπονδύλου μεταξύ των βασικών κολώνων. Οι βασικές κολώνες με αυξημένη πυκνότητα που έχουν σχηματιστεί είναι ήδη έξι, τέσσερις από τις οποίες περιέχουν και στοιχεία στην περιοχή μέγιστης πυκνότητας. Αντίθετα, για $\alpha=1$, οι βασικές κολώνες που είχαν σχηματιστεί στον αντίστοιχο χρόνο ήταν μόνο οι δύο ακριανές.

Μετά από 334 επαναλήψεις (Σχήμα 8.16 (δ)), έχουν προκύψει τα ακόλουθα συμπεράσματα: Η κατανομή της οστικής πυκνότητας προσεγγίζει αρκετά την τελική της μορφή, σε αντίθεση με εκείνη για $\alpha=1$, για τον ίδιο χρόνο. Η δοκιδωτή μορφή του σπογγώδους οστού (και το συσχετιζόμενο με αυτή φαινόμενο της «σκακιέρας») είναι πλέον έκδηλη. Τέλος, έχουν εμφανιστεί στο κέντρο του σπονδύλου δύο οριζόντιες κολώνες που ενώνουν τις γειτονικές βασικές μεταξύ τους. Σημειώνεται ότι οι κολώνες αυτές έχουν μεγαλύτερο μήκος συγκρινόμενες με εκείνες που εμφανίζονται στην τελική κατανομή πυκνότητας για $\alpha=1$.

Σε χρόνο 30 χρονικές μονάδες, ο οποίος αντιστοιχεί σε 500 επαναλήψεις (Σχήμα 8.16 (ε)), η κατανομή της οστικής πυκνότητας εμφανίζει μικρή αλλαγή σε σχέση με τις 334 επαναλήψεις ενώ μπορεί να περιγραφεί συνοπτικά από τα εξής: Οι εσωτερικές βασικές κολώνες που είχαν παρατηρηθεί έχουν ενισχυθεί, όπως επίσης και τα σημεία ένωσης των κολώνων με τις επιφυσιακές πλάκας. Τα στοιχεία που ανήκουν στην περιοχή ελάχιστης πυκνότητας έχουν αυξηθεί, ενώ οι οριζόντιες κολώνες που ενώνουν τις βασικές κοντά στην άνω επιφυσιακή πλάκα δείχνουν να έχουν απορροφηθεί.

Μετά την ολοκλήρωση 834 επαναλήψεων (Σχήμα 8.16 (στ)) τα συμπεράσματα που εξάγονται είναι τα παρακάτω: εμφανίζονται πολύ μικρές διαφορές σε σχέση με την κατανομή οστικής πυκνότητας στις 500 επαναλήψεις. Οι βασικές κολώνες με μέγιστη πυκνότητα συνεχίζουν να αυξάνουν την πυκνότητά τους, ενώ παρατηρείται και μια σχετική ελάττωση πυκνότητας σε περιοχές με χαμηλές τιμές πυκνότητας (κοντά στις ακριανές βασικές κολώνες). Επίσης έχουν δημιουργηθεί έξι μικρές σχεδόν οριζόντιες κολώνες που συνδέουν τις κύριες κολώνες μεταξύ τους στο κέντρο του σπονδύλου. Οι δευτερεύουσες κολώνες που συνέδεαν τις κεντρικές κολώνες με τις επιφυσιακές πλάκες έχουν ενισχυθεί ενώ εκείνες που συνέδεαν τις ακριανές με την άνω επιφυσιακή πλάκα έχουν απορροφηθεί. Τέλος, οι ακριανές κολώνες τείνουν να ενωθούν με τις διπλανές τους όσο πλησιάζουν προς τις επιφυσιακές πλάκες.

Λίγα βήματα πριν ολοκληρωθεί η δοκιμή, και συγκεκριμένα στις 1334 επαναλήψεις (Σχήμα 8.16 (ζ)), η κατανομή της οστικής πυκνότητας διαφέρει ελάχιστα από την τελική μορφή της. Οι βασικές κολώνες αυξάνουν την πυκνότητά τους κινούμενες προς τις δύο επιφυσιακές πλάκες, ενώ στοιχεία περιοχών με χαμηλές πυκνότητες εμφανίζουν μετάβαση σε περιοχές χαμηλότερης πυκνότητας.

8.2.2.2 Χρονικά μεταβαλλόμενος συντελεστής αναλογίας $B(t)$

Επίσης, από τη βιβλιογραφία (Xinghua 2002) προτάθηκε η χρήση εκθετικά μεταβαλλόμενου συντελεστή $B(t)$ για γρηγορότερη σύγκλιση. Η μορφή του $B(t)$ που εισήχθη στο μοντέλο του σπονδύλου νεαρού ατόμου ήταν η εξής:

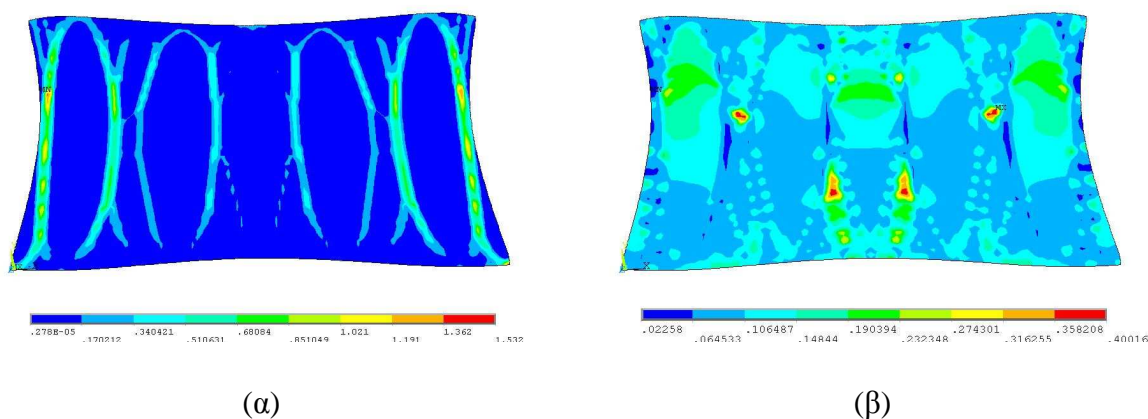
$$B(t) = (B_0 - B_T) / e^{0.02t} + B_T \quad (\text{σχέση 8.8})$$

με $B_T = 0,01(g/cm^3)^2 / (MPa \cdot time \cdot unit)$ και $B_0 = 1,0(g/cm^3)^2 / (MPa \cdot time \cdot unit)$

Πραγματοποιήθηκαν δύο δοκιμές, μία για εκθετικά μεταβαλλόμενο συντελεστή $B(t)$ και $\alpha=1$ και μία για εκθετικά μεταβαλλόμενο συντελεστή $B(t)$ και $\alpha=2,25$. Σημειώνεται ότι, και στις δύο δοκιμές, η τελική τιμή του B ύστερα από τις 1400 επαναλήψεις που πραγματοποιήθηκαν κατά τις δοκιμές (αντίστοιχος χρόνος 84 χρονικές μονάδες) ήταν $B_0 = 0,19451(g/cm^3)^2 / (MPa \cdot time \cdot unit)$.

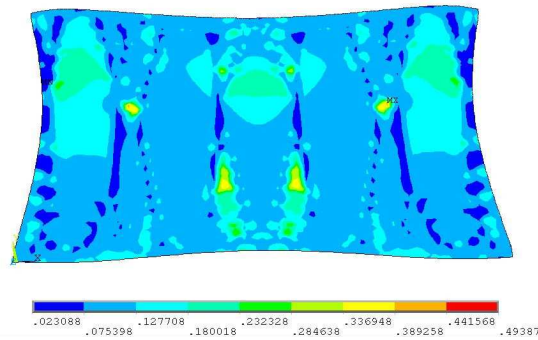
Αποτελέσματα μηχανικής ανάλυσης του μοντέλου του σπονδύλου με αρχική οστική πυκνότητα $0,8g/cm^3$ $B(t)$ εκθετικά μεταβαλλόμενο και $\alpha=1$

Ύστερα από 1400 βήματα που αντιστοιχούν σε χρόνο 84 χρονικές μονάδες, με $B(t)$ εκθετικά μεταβαλλόμενο όπως ορίστηκε παραπάνω και $\alpha=1$, το διάγραμμα της πυκνότητας τροπικής ενέργειας και των παραμορφώσεων κατά Von Mises έχουν τη μορφή του Σχήμα 8.17:



Σχήμα 8.17 Τελική κατανομή της (α) πυκνότητας τροπικής ενέργειας και (β) Ισοδύναμων παραμορφώσεων κατά Von Mises

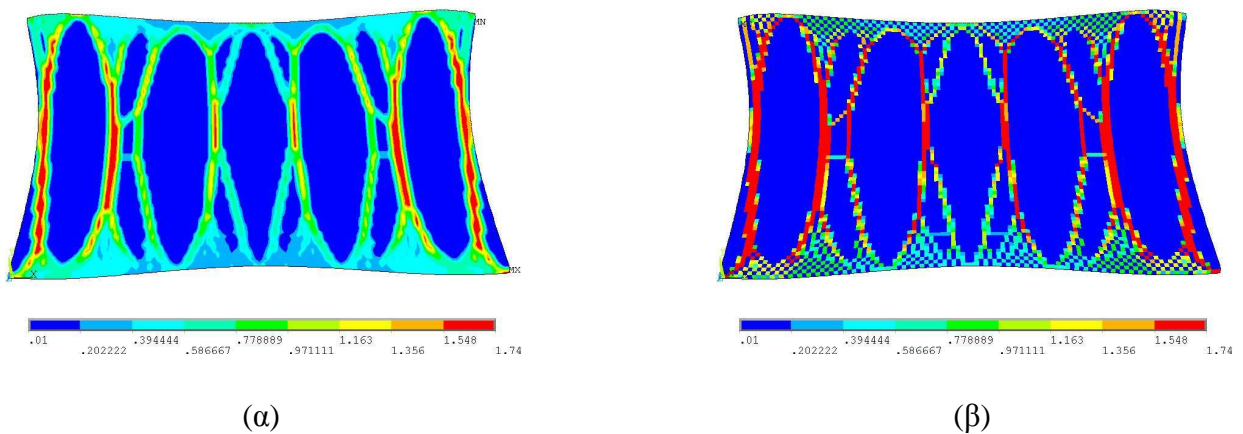
Η μέγιστη πυκνότητα τροπικής ενέργειας (στην περιοχή του κόκκινου χρώματος το δεξί άκρο) έχει τιμή $1,532 J/cm^3$ ενώ η ελάχιστη τιμή της (στην περιοχή με το μπλε χρώμα στην αριστερή πλευρά) είναι $0,278E-5 J/cm^3$. Συγκρινόμενη με την αντίστοιχη για B σταθερό και $\alpha=1$, η κατανομή πυκνότητας τροπικής ενέργειας εμφανίζει λίγο μικρότερη μέγιστη τιμή και ταυτόχρονα λίγο μικρότερη ελάχιστη τιμή. Η μέγιστη παραμόρφωση κατά Von Mises έχει τιμή $0,4001$ strains (40,01%), ενώ η ελάχιστη τιμή της είναι $0,0226$ strains (2,26%). Για καλύτερη σύγκριση των τελικών παραμορφώσεων μεταξύ των δύο μοντέλων παρουσιάζουμε τις τελικές παραμορφώσεις για $\alpha=1$ και $B(t)$ προσαρμοσμένες όμως στο χρωματισμό των περιοχών παραμορφώσεων για $\alpha=1$ και B σταθερό. Εξάγεται το αντίστοιχο Σχήμα 8.18:



Σχήμα 8.18 Παραμορφώσεις κατά Von Mises προσαρμοσμένες στο εύρος των αντίστοιχων για $\alpha=1$ και B σταθερό

Προκύπτει λοιπόν από το Σχήμα 8.18 ότι εμφανίζονται μέγιστες και ελάχιστες τελικές παραμορφώσεις μικρότερης τιμής για εκθετικά μεταβαλλόμενο $B(t)$.

Οι τελικές πυκνότητες που προέκυψαν ύστερα από 1400 επαναληπτικά βήματα παρουσιάζονται ως μέσος όρος των γειτονικών στοιχείων (Σχήμα 8.19 (α)) και ανά πεπερασμένο στοιχείο (Σχήμα 8.19 (β)) έχουν την ακόλουθη κατανομή:



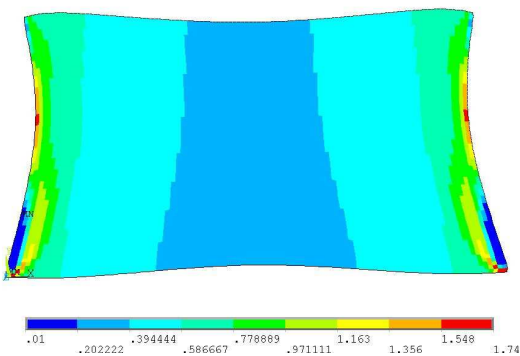
Σχήμα 8.19 Τελική κατανομή οστικής πυκνότητας ύστερα από 1400 επαναλήψεις

Το διάγραμμα των πυκνοτήτων που παρουσιάζεται στο Σχήμα 8.19 (α) και (β) καταδεικνύει το σχηματισμό οχτώ κολώνων εκ των οποίων έξι βασικές με μεγαλύτερες τιμές πυκνότητας προς την κεντρική τους περιοχή, σταδιακά μειούμενη προς την άνω και την κάτω επιφυσιακή πλάκα. Συγκρινόμενη με την αντίστοιχη κατανομή για B σταθερό, η οστική πυκνότητα παρουσιάζει μεγάλη ομοιότητα. Ελάχιστες διαφορές παρατηρούνται γύρω από τις βασικές κολώνες όπου μερικά στοιχεία με χαμηλότερες πυκνότητες

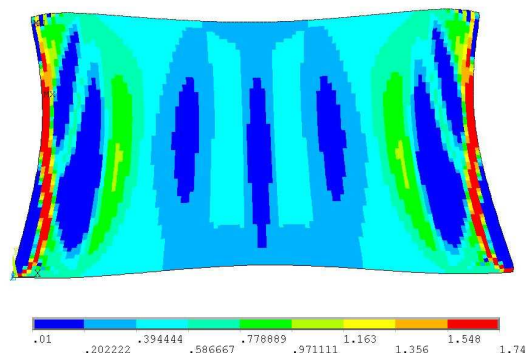
εμφανίζονται σε διαφορετικά εύρη πυκνοτήτων, αλλά και σε ορισμένα στοιχεία της περιοχής μεγίστων πυκνοτήτων που εμφανίζουν λίγο διαφορετικές τιμές. Έτσι οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η εισαγωγή του εκθετικού συντελεστή $B(t)$, με διατήρηση της τιμής $\alpha=1$, επηρεάζει ελάχιστα την τελική κατανομή των πυκνοτήτων.

Στο παρακάτω Σχήμα 8.20 παρουσιάζονται κατανομές οστικής πυκνότητας ανά πεπερασμένο στοιχείο για τις ίδιες ενδιάμεσες επαναλήψεις με εκείνες που επιλέχθηκαν για $\alpha=1$ και $B=0,25 \frac{(g/cm^3)^2}{(MPa \cdot time\ unit)}$. Αυτές είναι οι εξής: 34, 84, 167, 334, 500, 834 και

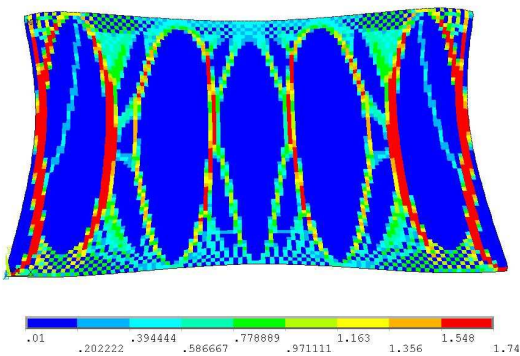
1334. Οι επαναλήψεις αυτές πολλαπλασιαζόμενες με το χρονικό βήμα 0,06 χρονικές μονάδες δίνουν τους αντίστοιχους χρόνους ανακατασκευής: 2,04 χρονικές μονάδες, 5,04 χρονικές μονάδες, 10,02 χρονικές μονάδες, 20,04 χρονικές μονάδες, 30 χρονικές μονάδες, 50,04 χρονικές μονάδες και 80,04 χρονικές μονάδες. Τέλος, για σύγκριση με την τελική κατάσταση, παρατίθεται στο ίδιο σχήμα και η τελική κατανομή πυκνότητας μετά από τις 1400 επαναλήψεις (συνολικός χρόνος 84 χρονικές μονάδες)



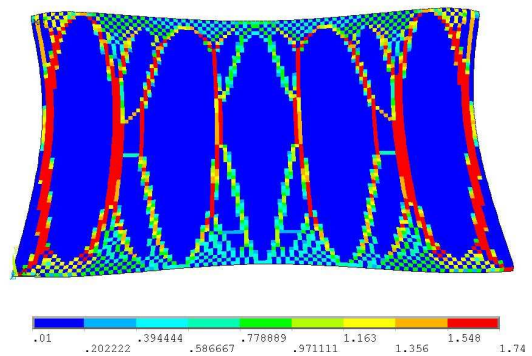
(α) 34 επαναλήψεις



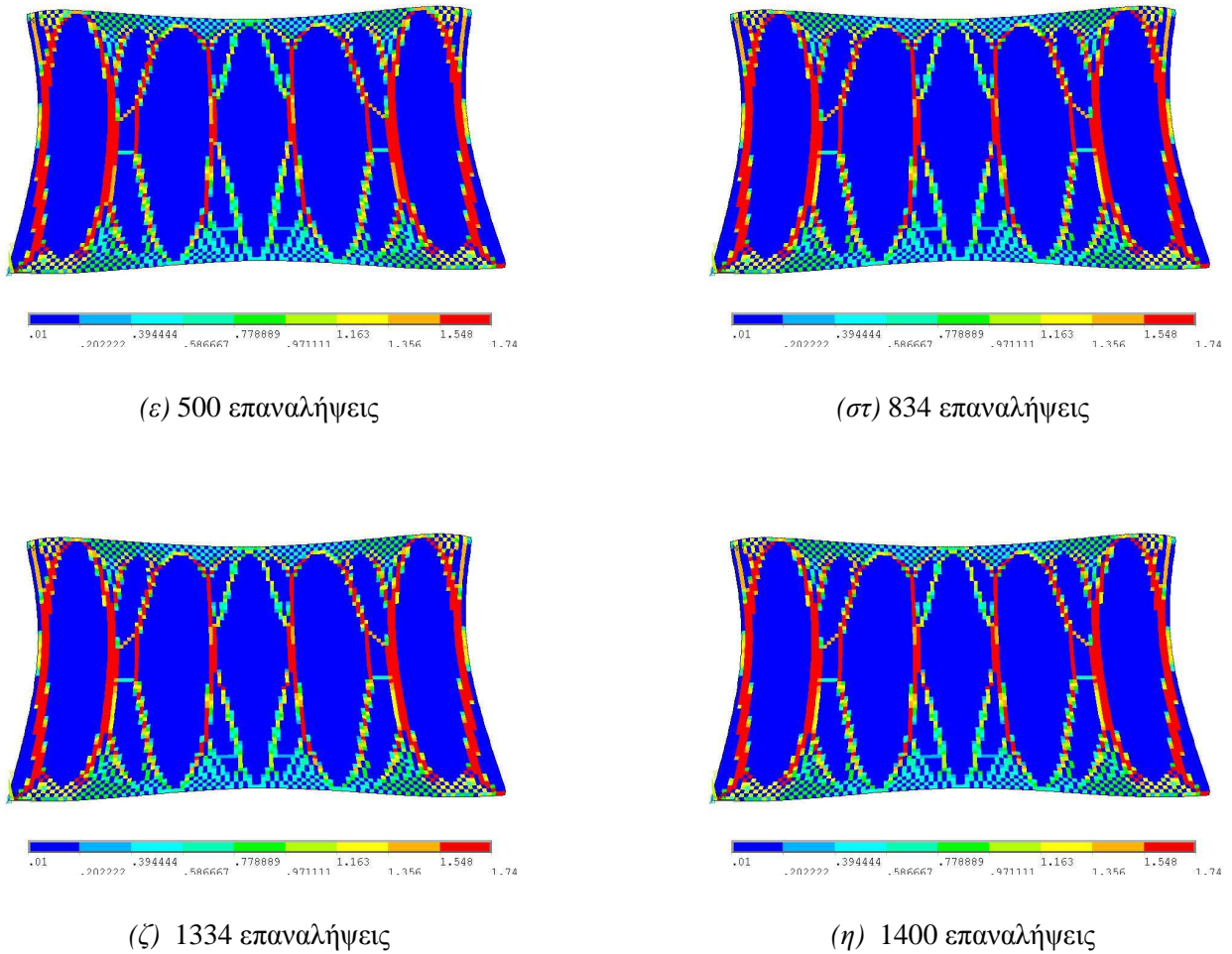
(β) 84 επαναλήψεις



(γ) 167 επαναλήψεις



(δ) 334 επαναλήψεις



Σχήμα 8.20 Κατανομή οστικής πυκνότητας ανά Π.Σ. σε διαφορετικές χρονικές στιγμές της διαδικασίας

Για την κατανομή της οστικής πυκνότητας ύστερα από 34 επαναλήψεις (Σχήμα 8.20 (α)) παρατηρούμε τα εξής: έχουν εμφανιστεί τόσο η μέγιστη πυκνότητα (κόκκινο χρώμα και $\rho=1,74 \text{ g/cm}^3$) όσο και η ελάχιστη πυκνότητα (μπλε χρώμα και $\rho=0,01 \text{ g/cm}^3$). Σημειώνεται ότι η τελευταία δεν είχε εμφανιστεί στον αντίστοιχο χρόνο για B σταθερό. Επίσης, προσεγγίζει σε μεγάλο βαθμό την κατανομή πυκνότητας ύστερα από 167 επαναλήψεις για $\alpha=1$ και B σταθερό. Δεδομένου ότι οι τελικές κατανομές πυκνότητας είναι αρκετά κοντινές για τα δύο μοντέλα, συμπεραίνουμε ότι με συντελεστή B εκθετικά μεταβαλλόμενο δείχνει να προσεγγίζεται γρηγορότερα η τελική κατανομή πυκνότητας.

Ύστερα από 84 επαναλήψεις (Σχήμα 8.20 (β)) παρατηρούμε ότι η κατανομή της οστικής πυκνότητας προσεγγίζει σε μεγάλο βαθμό την κατανομή πυκνότητας στις 334 επαναλήψεις για $\alpha=1$ και $B=0,25 \frac{(\text{g/cm}^3)^2}{(\text{MPa} \cdot \text{time unit})}$. Για το χρονικό βήμα 167 (Σχήμα 8.20 (γ)) και την αντίστοιχη κατανομή πυκνότητας παρατηρούμε ότι προσεγγίζει σε μεγάλο βαθμό την κατανομή πυκνότητας στις 834 επαναλήψεις για $\alpha=1$ και B σταθερό.

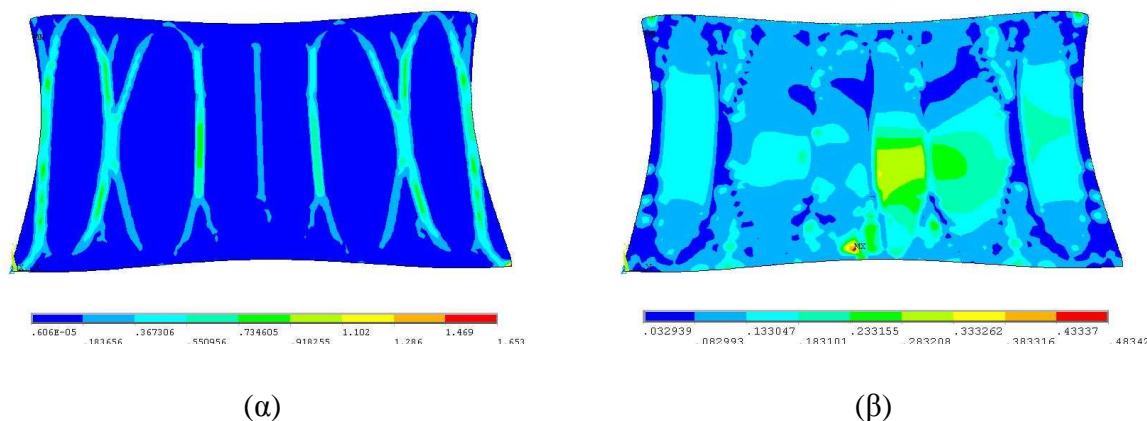
Συγκεκριμένα δείχνει να βρίσκεται, ως προς την εξέλιξη, ένα στάδιο πριν καθώς δεν έχει σχηματιστεί πλήρως η δοκιδωτή μορφή του σπογγώδους οστού.

Μετά από 334 επαναλήψεις (Σχήμα 8.20 (δ)) προκύπτει ότι η κατανομή της οστικής πυκνότητας προσεγγίζει σε μεγάλο βαθμό την κατανομή στις 1334 επαναλήψεις για $\alpha=1$ και B σταθερό.

Σε χρόνο 30 χρονικές μονάδες, ο οποίος αντιστοιχεί σε 500 επαναλήψεις (Σχήμα 8.20 (ε)), η κατανομή της οστικής πυκνότητας δεν εμφανίζει ουσιαστικές αλλαγές σε σχέση με τις 334 επαναλήψεις. Ομοίως, μετά την ολοκλήρωση 834 επαναλήψεων (Σχήμα 8.20 (στ)) η κατανομή των πυκνοτήτων έχει προσεγγίσει την τελική κατανομή κι έτσι και στην αντίστοιχη κατανομή πυκνότητας στις 1334 επαναλήψεις (Σχήμα 8.20 (ζ)) διατηρείται η ίδια μορφή.

Αποτελέσματα μηχανικής ανάλυσης του μοντέλου του σπονδύλου με αρχική οστική πυκνότητα $0,8\text{g/cm}^3$ $B(t)$ εκθετικά μεταβαλλόμενο και $\alpha=2,25$

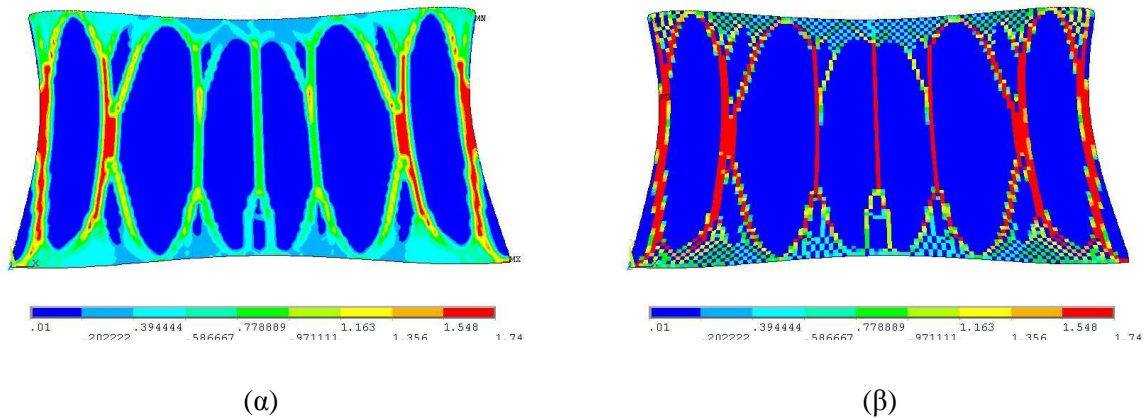
Επαναλάβαμε την ίδια δοκιμή με πριν για $B(t)$ εκθετικά μεταβαλλόμενο, αυτή τη φορά όμως με εκθέτη $\alpha=2,25$. Ύστερα από 1400 βήματα που αντιστοιχούν σε χρόνο 84 χρονικές μονάδες το διάγραμμα της πυκνότητας τροπικής ενέργειας και των παραμορφώσεων κατά Von Mises έχουν τη μορφή που φαίνεται στο Σχήμα 8.21:



Σχήμα 8.21 Τελική κατανομή της (α) πυκνότητας τροπικής ενέργειας και (β) Ισοδύναμων παραμορφώσεων κατά Von Mises

Η μέγιστη πυκνότητα τροπικής ενέργειας (στην περιοχή του κόκκινου χρώματος το δεξί άκρο) έχει τιμή $1,653\text{ J/cm}^3$ ενώ η ελάχιστη τιμή της (στην περιοχή με το μπλε χρώμα στην αριστερή πλευρά) είναι $0,606\text{E-}5\text{ J/cm}^3$. Η μέγιστη παραμόρφωση κατά Von Mises έχει τιμή $0,4834\text{ strains}$ (48,34%), ενώ η ελάχιστη τιμή της είναι $0,0330\text{ strains}$ (3,30%).

Οι τελικές πυκνότητες που προέκυψαν ύστερα από 1400 επαναληπτικά βήματα παρουσιάζονται ως μέσος όρος των γειτονικών στοιχείων (Σχήμα 8.22(α)) και ανά πεπερασμένο στοιχείο (Σχήμα 8.22(β)) έχουν την ακόλουθη κατανομή:

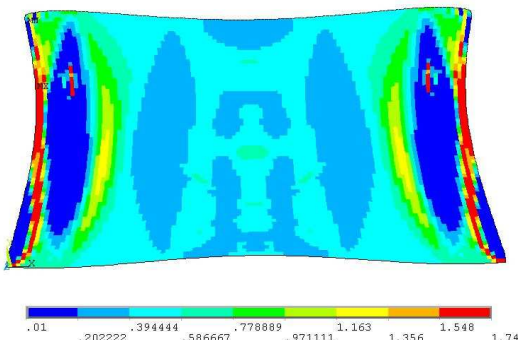


Σχήμα 8.22 Τελική κατανομή οστικής πυκνότητας ύστερα από 1400 επαναλήψεις

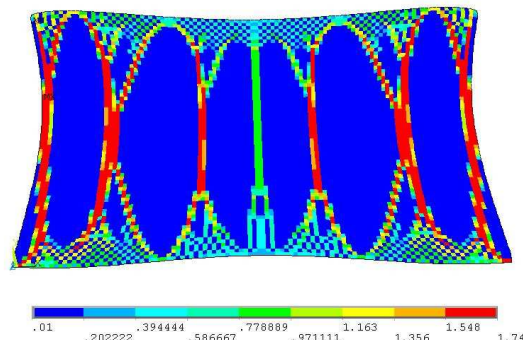
Αν συγκρίνουμε το τελικό διάγραμμα οστικής πυκνότητας με τις κατανομές των μοντέλων που παρουσιάστηκαν παραπάνω παρατηρούμε τα ακόλουθα: Ο σχηματισμός των εσωτερικών κολώνων ομοιάζει με τον αντίστοιχο για B σταθερό και $\alpha=2,25$. Εμφανίζονται δηλαδή οι ακριανές κολώνες πολύ κοντά στις πλευρές του σπονδύλου ενώ οι αμέσως επόμενες εσωτερικές κολώνες συνδέονται στο μέσο του σπονδύλου. Όσον αφορά στο κέντρο του σπονδύλου οι βασικές κολώνες εμφανίζονται να έχουν μεγαλύτερο μήκος ενώ οι δευτερεύουσες κολώνες που τις συνδέουν με τις επιφυσιακές πλάκες είναι μικρότερες. Επίσης εμφανίζεται μία νέα κάθετη κολώνα στο κέντρο του σπονδύλου, ο σχηματισμός της οποίας (και η στήριξη που προσφέρει) είναι υπεύθυνος για τις μικρότερες τιμές πυκνότητας στις γειτονικές κεντρικές κολώνες. Η κάθετη αυτή κολώνα συνδέεται μέσω μιας διακλάδωσης μικρών, δευτερευουσών, κολώνων με την κάτω επιφυσιακή πλάκα. Παρατηρώντας τις κατανομές στο Σχήμα 8.22 παρατηρούμε μια μικρή διαταραχή της συμμετρικότητας του σχήματος. Η διαταραχή αυτή είναι περισσότερο έκδηλη στην κατανομή των παραμορφώσεων στο Σχήμα 8.21(β) και οφείλεται στο πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε για τη διακριτοποίηση του σπονδύλου σε Π.Σ. σε συνδυασμό με την κατασκευασμένη γεωμετρία του ίδιου του σπονδύλου. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι το μοντέλο αυτό είναι περισσότερο ευαίσθητο, συγκρινόμενο με τα προηγούμενα παρουσιασμένα, στο χρησιμοποιούμενο πλέγμα.

Στο Σχήμα 8.23 παρουσιάζονται κατανομές οστικής πυκνότητας ανά πεπερασμένο στοιχείο για ορισμένες ενδιάμεσες επαναλήψεις. Αυτές, όπως και τα προηγούμενα μοντέλα, είναι οι εξής: 34, 84, 167, 334, 500, 834 και 1334. Οι επαναλήψεις αυτές πολλαπλασιαζόμενες με το χρονικό βήμα 0,06 χρονικές μονάδες δίνουν τους αντίστοιχους

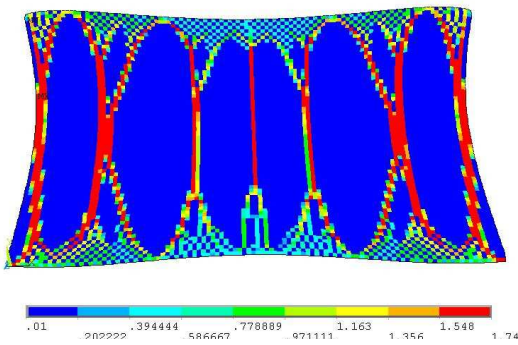
χρόνους ανακατασκευής: 2,04 χρονικές μονάδες, 5,04 χρονικές μονάδες, 10,02 χρονικές μονάδες, 20,04 χρονικές μονάδες, 30 χρονικές μονάδες, 50,04 χρονικές μονάδες και 80,04 χρονικές μονάδες. Τέλος, για σύγκριση με την τελική κατάσταση, παρατίθεται στο ίδιο σχήμα και η τελική κατανομή πυκνότητας μετά από τις 1400 επαναλήψεις (συνολικός χρόνος 84 χρονικές μονάδες)



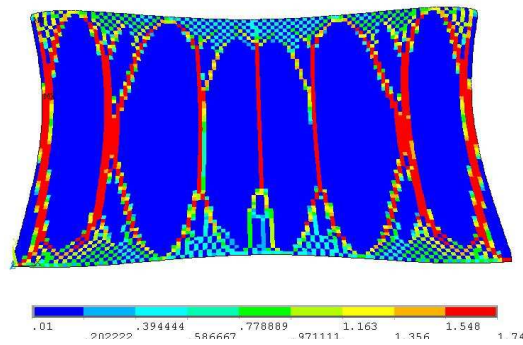
(α) 34 επαναλήψεις



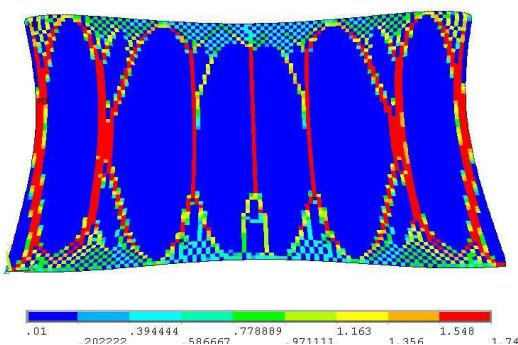
(β) 84 επαναλήψεις



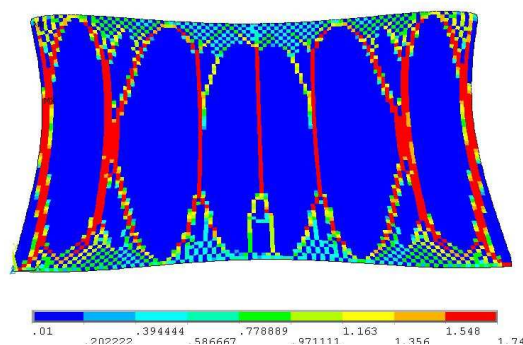
(γ) 167 επαναλήψεις



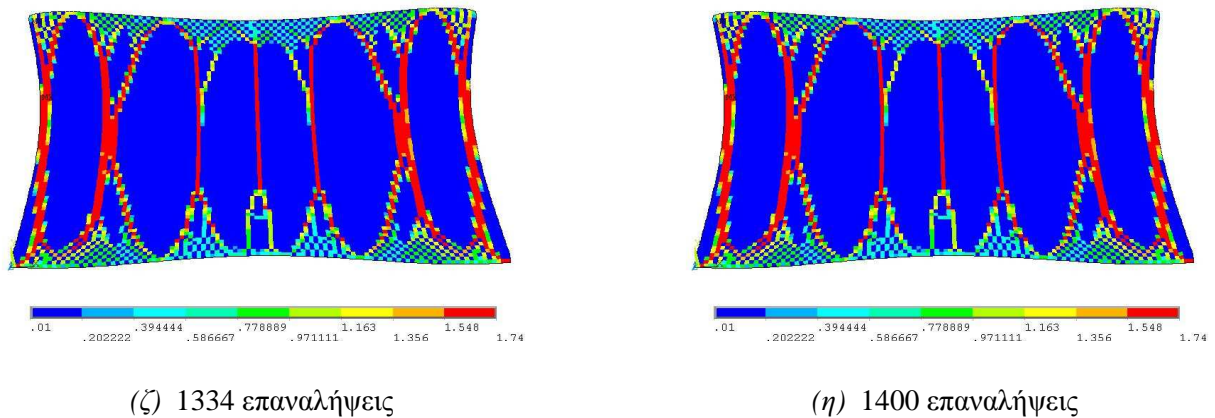
(δ) 334 επαναλήψεις



(ε) 500 επαναλήψεις



(στ) 834 επαναλήψεις



Σχήμα 8.23 Κατανομή οστικής πυκνότητας ανά Π.Σ. σε διαφορετικές χρονικές στιγμές της διαδικασίας

Για την κατανομή της οστικής πυκνότητας ύστερα από 34 επαναλήψεις (Σχήμα 8.23 (α)) παρατηρούμε τα εξής: έχουν σχηματιστεί οι δύο βασικές ακριανές κολώνες με μέγιστη πυκνότητα ενώ αρχίζουν να σχηματίζονται και δύο εσωτερικές κολώνες με αυξημένη πυκνότητα. Παρατηρούνται επίσης λίγα μεμονωμένα στοιχεία με μέγιστη πυκνότητα εντός των δύο πλαϊνών περιοχών με ελάχιστη πυκνότητα.

Ύστερα από 84 επαναλήψεις (Σχήμα 8.23 (β)) παρατηρούμε ότι η κατανομή της οστικής πυκνότητας αρχίζει να προσεγγίζει την τελική. Η εσωτερική κολώνα που σχηματίστηκε έχει μικρότερες τιμές πυκνότητας από τις υπόλοιπες βασικές.

Ύστερα από 167 επαναλήψεις (Σχήμα 8.23 (γ)) και για την αντίστοιχη κατανομή πυκνότητας παρατηρούμε ότι η κεντρική κολώνα έχει αποκτήσει κι αυτή στοιχεία που ανήκουν στην περιοχή μέγιστης πυκνότητας. Επίσης, εμφανίζεται μείωση της οστικής πυκνότητας γύρω από τις γειτονικές στην κεντρική βασικές κολώνες.

Από τις 500 επαναλήψεις έως και την ολοκλήρωση της δοκιμής (Σχήμα 8.23 (δ)-(η)), παρατηρούνται πολύ μικρές διαφοροποιήσεις στις οστικές πυκνότητες των πεπερασμένων στοιχείων, οπότε θεωρούμε ότι η κατανομή της οστικής πυκνότητας έχει καταλήξει στην τελική της μορφή.

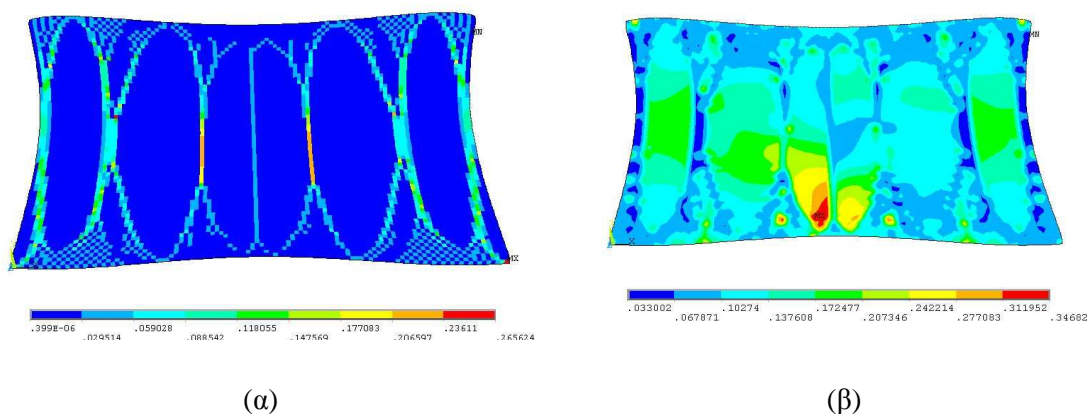
Αποτελέσματα μηχανικής ανάλυσης του μοντέλου του σπονδύλου με αρχική οστική πυκνότητα $0,8g/cm^3$ $B(t)$ εκθετικά μεταβαλλόμενο με διαφορετική εξίσωση και $\alpha=2,25$

Ο συντελεστής $B(t)$ μπορεί να εξισωθεί με διάφορες μορφές συνάρτησης και ο εκθέτης α με διάφορες σταθερές τιμές, κάτι που μπορεί να ρυθμίσει πιο αποτελεσματικά τις διαδικασίες ανακατασκευής των οστών σε διαφορετικά στάδια ανάπτυξης ή σε διαφορετικές ανατομικές θέσεις. Στα πλαίσια αυτής της προσέγγισης πραγματοποιήθηκε μία επιπλέον δοκιμή. Επιλέχθηκε τιμή εκθέτη $\alpha=2,25$ και συντελεστής $B(t)$ που δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$B(t) = (B_0 - B_T) / (e^{0.02t} + B_T) \quad (\text{σχέση } 8.9)$$

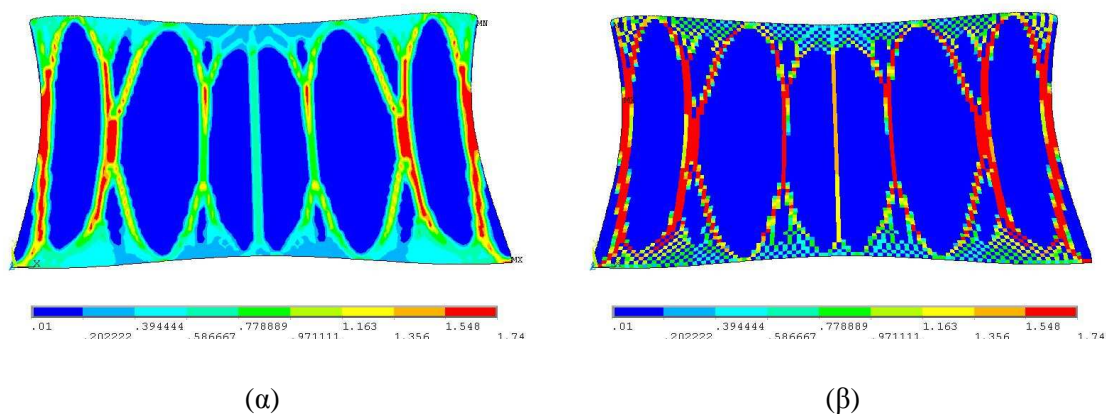
με $B_T = 0,01(g/cm^3)^2 / (MPa \cdot \text{time} \cdot \text{unit})$ και $B_0 = 1,0(g/cm^3)^2 / (MPa \cdot \text{time} \cdot \text{unit})$

Σημειώνεται ότι η τελική τιμή του B ύστερα από 1400 επαναλήψεις (αντίστοιχος χρόνος 84 χρονικές μονάδες) ήταν $B_0 = 0,18417(g/cm^3)^2 / (MPa \cdot \text{time} \cdot \text{unit})$ Προέκυψαν δε τα αποτελέσματα που φαίνονται στο Σχήμα 8.24 για την κατανομή της πυκνότητας τροπικής ενέργειας και την κατανομή της οστικής πυκνότητας:



Σχήμα 8.24 Τελική κατανομή της (α) πυκνότητας τροπικής ενέργειας και (β) Ισοδύναμων παραμορφώσεων κατά Von Mises

Αντίστοιχα στο Σχήμα 8.25 φαίνονται οι κατανομές οστικής πυκνότητας ανά στοιχείο και σε μορφή μέσου όρου

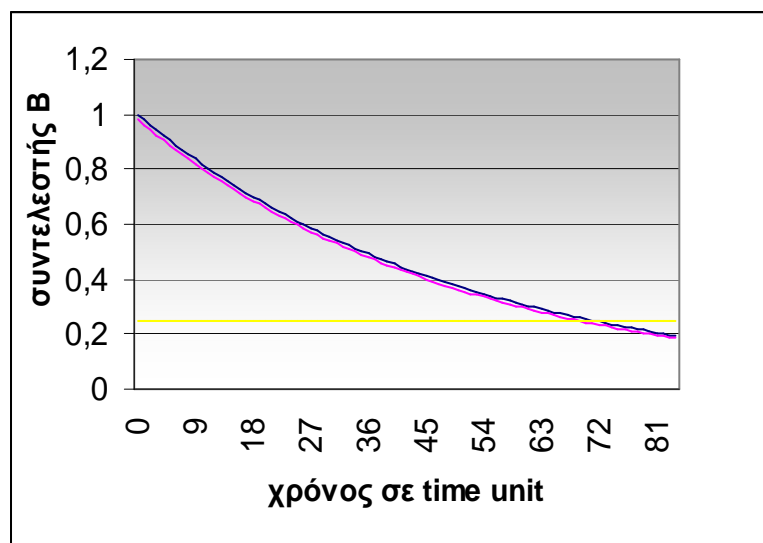


Σχήμα 8.25 Τελική κατανομή οστικής πυκνότητας ύστερα από 1400 επαναλήψεις

Από το Σχήμα 8.24 και Σχήμα 8.25 παρατηρούμε ότι η κύρια μεταβολή που επέφερε η αλλαγή της εξίσωσης του συντελεστή $B(t)$ είναι η εμφάνιση της κεντρικής

κάθετης κολώνας με μικρότερες τιμές πυκνοτήτων σε σχέση με πριν. Ταυτόχρονα, οι δευτερεύουσες κολώνες που τη συνδέουν με την άνω επιφυσιακή πλάκα εμφανίζονται να έχουν μεγαλύτερες πυκνότητες και μικρότερο μήκος. Τέλος, παρατηρείται έλλειψη δευτερευουσών κολώνων που να συνδέουν την κεντρική κολώνα με την κάτω επιφυσιακή πλάκα.

Στο Σχήμα 8.26 παρουσιάζονται οι τρεις διαφορετικές μορφές του συντελεστή B που παρουσιάστηκαν. Η κίτρινη γραμμή αναπαριστά τη μορφή σταθερού B , η μπλε γραμμή τη μορφή $B(t) = (B_0 - B_T) / e^{0.02t} + B_T$ ενώ η μωβ γραμμή τη μορφή $B(t) = (B_0 - B_T) / (e^{0.02t} + B_T)$.



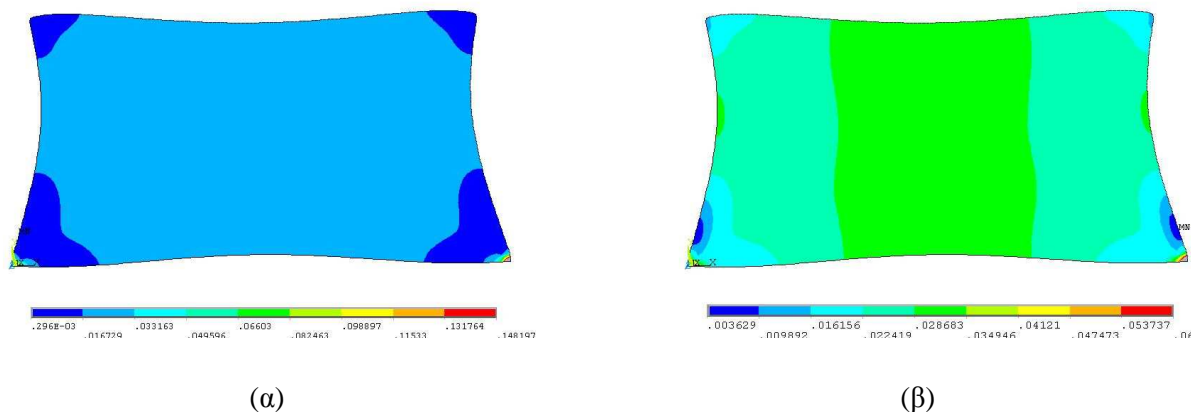
Σχήμα 8.26 Διαφορετικές μορφές συντελεστή B συναρτήσει του χρόνου

8.2.3 Ηλικιωμένο άτομο.

Αποτελέσματα μηχανικής ανάλυσης του μοντέλου του σπονδύλου με αρχική οστική πυκνότητα $0,8 \text{ g/cm}^3$.

Στην έκτη δοκιμή που πραγματοποιήθηκε, μελετήσαμε το διδιάστατο σπόνδυλο υπό την φόρτιση που δέχεται ο ανθρώπινος σπόνδυλος ηλικιωμένου ατόμου, όπως αυτή έχει υπολογισθεί και αναλυθεί παραπάνω. Έτσι, μελετήσαμε την επίδραση που έχει το είδος της φόρτισης στην εσωτερική ανακατασκευή του σπονδύλου.

Αρχικά εφαρμόζεται στο διδιάστατο σπόνδυλο η πίεση που αντιστοιχεί στην τυπική φόρτιση που δέχεται ο ανθρώπινος σπόνδυλος ηλικιωμένου ατόμου. Στο Σχήμα 8.27 που ακολουθεί, παρουσιάζονται οι κατανομές της πυκνότητας τροπικής ενέργειας του οστού (*Strain Energy Density*) και των ισοδύναμων παραμορφώσεων κατά *Von Mises* με την αρχική του πυκνότητα.



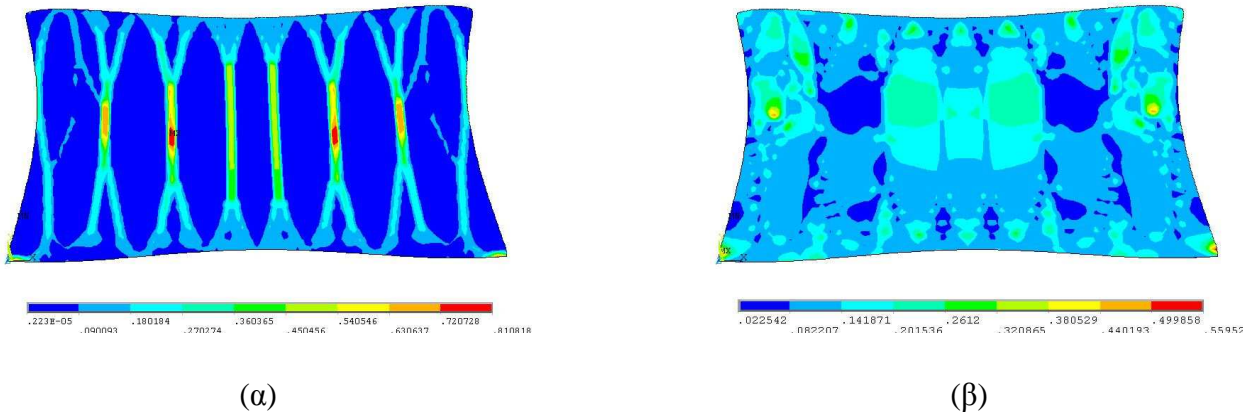
Σχήμα 8.27 Πυκνότητα τροπικής ενέργειας (α) και παραμορφώσεις κατά Von Mises (β) του οστού με την αρχική πυκνότητα (0,8 g/cm³)

Σημειώνεται ότι η μέγιστη εμφανιζόμενη πυκνότητα τροπικής ενέργειας είναι 0,2665 J/cm³, ενώ η ελάχιστη είναι περίπου ίση με 0,275E-3 J/cm³. Η μέγιστη παραμόρφωση κατά *Von Mises* είναι 0,1072 strains (10,72%) ενώ η ελάχιστη είναι ίση με 0,0035 strains (0,35%). Τόσο οι μέγιστες παραμορφώσεις όσο και οι μέγιστες πυκνότητες τροπικής ενέργειας εμφανίζονται κοντά στις στηρίξεις. Οι παραπάνω κατανομές συγκρινόμενες με τις αντίστοιχες για φορτίο νεαρού ατόμου δίνουν τα ακόλουθα: οι μέγιστες πυκνότητες τροπικής ενέργειας αλλά και οι μέγιστες παραμορφώσεις έχουν μικρότερες τιμές σε σχέση με εκείνες του νεαρού ατόμου. Ο λόγος είναι ότι οι μέγιστες πιέσεις ασκούνται πλέον στο κέντρο των επιφυσιακών πλακών κι έτσι δεν ενισχύεται το τοπικό φαινόμενο αυξημένων τιμών κοντά στις αρθρώσεις. Επίσης, στο κέντρο του σπονδύλου δεν εμφανίζονται πλέον ελάχιστες τιμές αλλά, αν εξαιρέσουμε τις περιοχές γύρω από τις αρθρώσεις, οι μέγιστες.

Εναρξη της αριθμητικής επίλυσης της διαφορικής εξίσωσης της οστικής ανακατασκευής

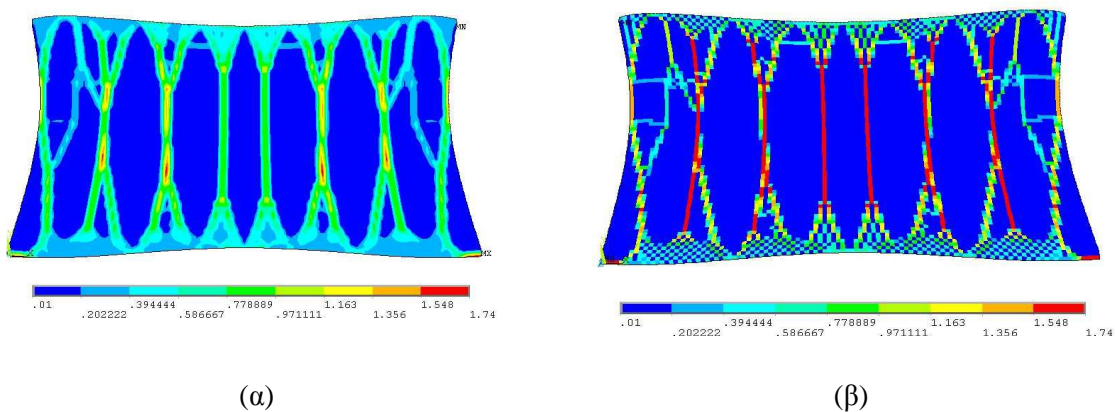
Οι πυκνότητες τροπικής ενέργειας που προέκυψαν από την αρχική κατάσταση του οστού, εισάγονται στη διαφορική εξίσωση της ανακατασκευής $\frac{d\rho}{dt} = B \cdot \left[\frac{U}{\rho} - k \right]$ και υπολογίζεται η απαιτούμενη αλλαγή πυκνότητας $\Delta\rho$. Ο συντελεστής B λαμβάνει την τιμή $1 \frac{(g/cm^3)^2}{(MPa \cdot time\ unit)}$ ενώ η αναφορά k λαμβάνει την τιμή $0,25 \frac{J}{g}$. Επιλέχθηκε επίσης χρονικό βήμα 0,06 και 1400 επαναλήψεις που αντιστοιχούν σε χρόνο 84 χρονικές μονάδες. Ύστερα από 1400 επαναλήψεις το διάγραμμα της πυκνότητας τροπικής

ενέργειας και των παραμορφώσεων κατά Von Mises έχουν τη μορφή που φαίνεται στο Σχήμα 8.28.



Σχήμα 8.28 Τελική κατανομή της (α) πυκνότητας τροπικής ενέργειας και (β) Ισοδύναμων παραμορφώσεων κατά Von Mises

Η μέγιστη πυκνότητα τροπικής ενέργειας (στην περιοχή του κόκκινου χρώματος το δεξί άκρο) έχει τιμή $0,811 \text{ J/cm}^3$ ενώ η ελάχιστη τιμή της (στην περιοχή με το μπλε χρώμα στην αριστερή πλευρά) είναι $0,223\text{E-}5 \text{ J/cm}^3$. Η μέγιστη παραμόρφωση κατά Von Mises έχει τιμή $0,559 \text{ strains}$ (περίπου 55,95%), ενώ η ελάχιστη τιμή της είναι $0,023 \text{ strains}$ (περίπου 2,3%). Συγκρίνοντας με τις αντίστοιχες τιμές για νεαρό άτομο, παρατηρούμε ότι τόσο οι ελάχιστες όσο και οι μέγιστες τιμές είναι μικρότερες στην περίπτωση του ηλικιωμένου ατόμου.

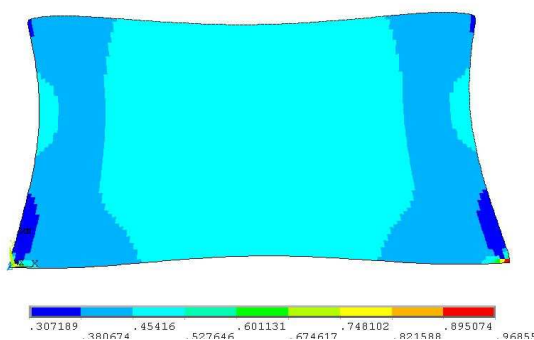


Σχήμα 8.29 Τελική κατανομή οστικής πυκνότητας ύστερα από 1400 επαναλήψεις

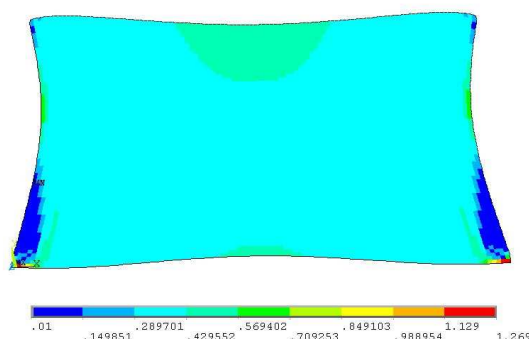
Οι τελικές πυκνότητες που προέκυψαν ύστερα από 1400 επαναληπτικά βήματα παρουσιάζόμενες ως μέσος όρος των γειτονικών στοιχείων (Σχήμα 8.29 (α)) και ανά πεπερασμένο στοιχείο (Σχήμα 8.29 (β)).

Αν συγκρίνουμε το τελικό διάγραμμα πυκνότητας τροπικής ενέργειας και αυτό των τελικών πυκνοτήτων παρατηρούμε ότι οι μεγαλύτερες τιμές των πυκνοτήτων εμφανίζονται αντίστοιχα στις περιοχές με μέγιστη τροπική ενέργεια και ότι υπάρχει μια γενικότερη μεταξύ τους αντιστοιχία. Το διάγραμμα των πυκνοτήτων που παρουσιάζεται στο Σχήμα 8.29 (α) καταδεικνύει το σχηματισμό οκτώ κολώνων εκ των οποίων έξι βασικές με μεγαλύτερες τιμές πυκνότητας. Οι δύο από τις έξι αυτές κολώνες εμφανίζονται στο κέντρο του σπονδύλου και είναι κάθετες ενώ οι τέσσερις γειτονικές τους εμφανίζουν καμπυλότητα. Οι δύο ακριανές κολώνες έχουν τιμές πυκνοτήτων μικρότερες από το κάτω όριο της περιοχής μεγίστων πυκνοτήτων ενώ εμφανίζουν έντονη καμπυλότητα. Σχηματίζονται επίσης, οκτώ δευτερεύουσες κολώνες με μικρότερη πυκνότητα που συνδέουν τις βασικές κολώνες με τις επιφυσιακές πλάκες. Τέλος, εμφανίζονται και 10 οριζόντιες κολώνες με μικρές πυκνότητες (στην περιοχή του ανοικτού μπλε χρώματος) που συνδέουν βασικές και δευτερεύουσες κολώνες μεταξύ τους. Η μέγιστη τιμή οστικής πυκνότητας είναι ίση με αυτή του φλοιώδους οστού δηλαδή $1,74 \text{ g/cm}^3$ (άνωτερο όριο πυκνότητας που τέθηκε), ενώ η ελάχιστη τιμή οστικής πυκνότητας είναι $0,01 \text{ g/cm}^3$ (κατώτερο όριο πυκνότητας που τέθηκε). Αντίστοιχα στο Σχήμα 8.29 (β) παρουσιάζονται ξανά οι τελικές οστικές πυκνότητες αυτή τη φορά όμως ανά πεπερασμένο στοιχείο.

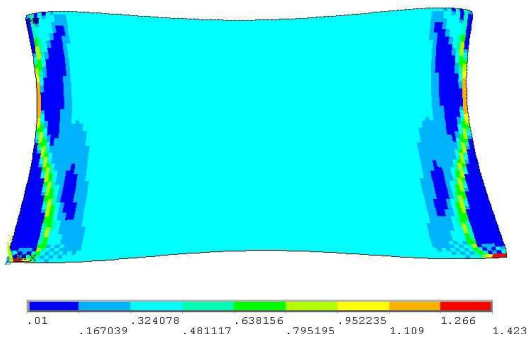
Στο παρακάτω Σχήμα 8.30 παρουσιάζονται κατανομές οστικής πυκνότητας ανά πεπερασμένο στοιχείο για ορισμένες ενδιάμεσες επαναλήψεις. Αυτές είναι οι εξής: 34, 84, 167, 334, 500, 834 και 1334. Οι επαναλήψεις αυτές πολλαπλασιαζόμενες με το χρονικό βήμα 0,06 χρονικές μονάδες δίνουν τους αντίστοιχους χρόνους ανακατασκευής: 2,04 χρονικές μονάδες, 5,04 χρονικές μονάδες, 10,02 χρονικές μονάδες, 20,04 χρονικές μονάδες, 30 χρονικές μονάδες, 50,04 χρονικές μονάδες και 80,04 χρονικές μονάδες. Τέλος, για σύγκριση με την τελική κατάσταση, παρατίθεται στο ίδιο σχήμα και η τελική κατανομή πυκνότητας μετά από τις 1400 επαναλήψεις (συνολικός χρόνος 84 χρονικές μονάδες).



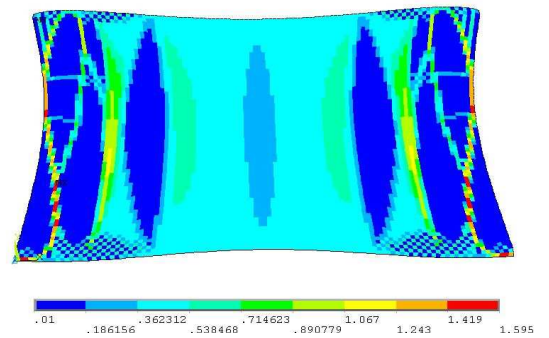
(α) 34 επαναλήψεις



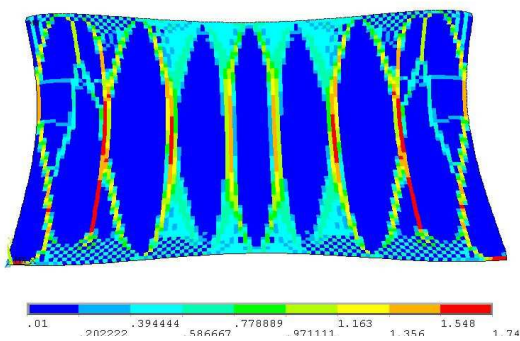
(β) 84 επαναλήψεις



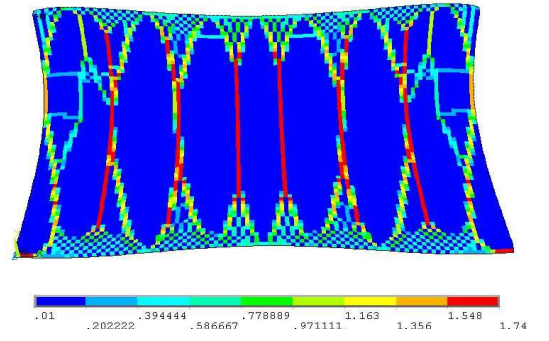
(γ) 167 επαναλήψεις



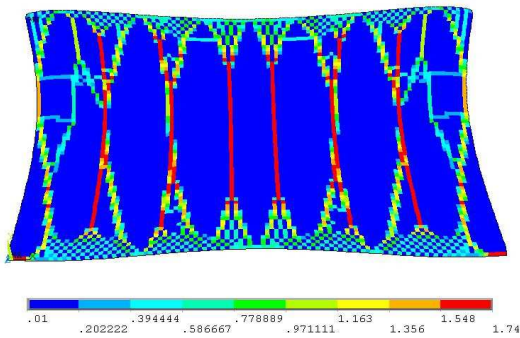
(δ) 334 επαναλήψεις



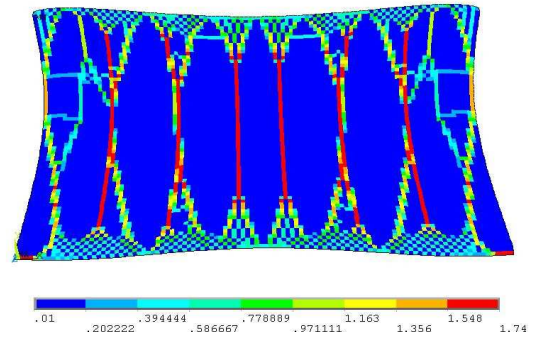
(ε) 500 επαναλήψεις



(στ) 834 επαναλήψεις



(ζ) 1334 επαναλήψεις



(η) 1400 επαναλήψεις

Σχήμα 8.30 Κατανομή οστικής πυκνότητας ανά Π.Σ. σε διαφορετικές χρονικές στιγμές της διαδικασίας

Για την κατανομή της οστικής πυκνότητας ύστερα από 34 επαναλήψεις (Σχήμα 8.30 (α)) παρατηρούμε τα εξής: οι μέγιστες πυκνότητες εμφανίζονται τοπικά στις αρθρώσεις και παίρνουν τιμές μέχρι $\rho=0,97 \text{ g/cm}^3$ (άνω όριο περιοχής κόκκινου χρώματος). Ακόμη, δεν έχει σχηματιστεί καμία κολώνα μέγιστης πυκνότητας. Όσον αφορά στην ελάχιστη πυκνότητα, αυτή δεν έχει την τιμή του κατώτερου ορίου της αλλά έχει περίπου την τιμή $0,31 \text{ g/cm}^3$ (κατώτερο όριο περιοχής σκούρου μπλε χρώματος). Η

αρχική πυκνότητα του σπονδύλου με τιμή $0,8 \text{ g/cm}^3$ βρίσκεται κοντά στο άνω όριο της περιοχής του κίτρινου χρώματος. Επομένως, με εξαίρεση την περιοχή στις αρθρώσεις, όλα τα στοιχεία έχουν μειώσει την πυκνότητά τους. Μικρότερη μείωση εμφανίζεται στο κέντρο του σπονδυλικού σώματος και στα μέσα των πλευρών του, δηλαδή στα στοιχεία γαλάζιου χρώματος, όπου εμφανίζονται τιμές πυκνότητας από $\rho=0,53 \text{ g/cm}^3$ έως περίπου $\rho=0,45 \text{ g/cm}^3$. Οι ελάχιστες πυκνότητες εμφανίζονται στις περιοχές πάνω από τις αρθρώσεις και στα ακριανά στοιχεία της άνω επιφυσιακής πλάκας.

Ύστερα από 84 επαναλήψεις (Σχήμα 8.30 (β)) παρατηρούμε τα ακόλουθα: μικρή αύξηση της περιοχής με ελάχιστη πυκνότητα που είχε επισημανθεί κοντά στις αρθρώσεις ενώ αρχίζουν να σχηματίζονται δύο ακραίες κολώνες με αυξημένη οστική πυκνότητα κοντά στην κάτω επιφυσιακή πλάκα. Όσον αφορά στην ελάχιστη πυκνότητα, έχει πάρει την τιμή του κατώτερου ορίου οστικής πυκνότητας δηλαδή $0,01 \text{ g/cm}^3$. Επιπρόσθετα, παρουσιάζονται στα μέσα των επιφυσιακών πλακών και των πλευρών του σπονδυλικού σώματος περιοχές με αυξημένες πυκνότητες (περιοχή τυρκουάζ χρώματος). Σημειώνεται επίσης, ότι η ελάχιστη πυκνότητα έχει φτάσει το κατώτερο όριο που είχε τεθεί ($0,01 \text{ g/cm}^3$) ενώ η μέγιστη έχει φτάσει μέχρι $1,269 \text{ g/cm}^3$.

Επιλέξαμε επίσης να πάρουμε εικόνα των πυκνοτήτων ύστερα από 167 επαναλήψεις. Ύστερα από 167 επαναλήψεις (Σχήμα 8.30 (γ)) και για την αντίστοιχη κατανομή πυκνότητας παρατηρούμε κυρίως τα ακόλουθα: Οι περιοχές με αυξημένες πυκνότητες που είχαν παρατηρηθεί στα μέσα των πλευρών του σπονδυλικού σώματος έχουν ενωθεί σχηματίζοντας τις δύο ακριανές κολώνες. Οι κολώνες αυτές παρουσιάζουν μέγιστες τιμές πυκνότητας στην περιοχή χρώματος πορτοκαλί (από $0,989 \text{ g/cm}^3$ έως $1,129 \text{ g/cm}^3$), ενώ αρχίζουν να δημιουργούνται περιοχές ελάχιστης πυκνότητας προς το κέντρο του σπονδύλου και προς το μέσω της άνω επιφυσιακής πλάκας. Σημειώνεται ότι η μέγιστη εμφανιζόμενη πυκνότητα έχει φτάσει την τιμή $1,423 \text{ g/cm}^3$.

Η κατανομή της πυκνότητας μετά από 334 επαναλήψεις (Σχήμα 8.30 (δ)) οδηγεί στις ακόλουθες παρατηρήσεις: τα στοιχεία των ακριανών κολώνων παρουσιάζουν αύξηση στις πυκνότητες τους ενώ έχουν αρχίσει να σχηματίζονται επιπλέον τέσσερις κολώνες αυξημένης οστικής πυκνότητας και δευτερεύουσες κολώνες σύνδεσης. Οι περιοχές ελάχιστης πυκνότητας έχουν αυξηθεί ενώ παρατηρείται περιοχή χαμηλής πυκνότητας στο κέντρο του σπονδύλου (τιμές πυκνότητας από $0,362 \text{ g/cm}^3$ έως $0,186 \text{ g/cm}^3$). Τέλος, σημειώνεται ότι η μέγιστη εμφανιζόμενη πυκνότητα έχει φτάσει την τιμή $1,595 \text{ g/cm}^3$.

Σε χρόνο 30 χρονικές μονάδες, ο οποίος αντιστοιχεί σε 500 επαναλήψεις (Σχήμα 8.30 (ε)), η κατανομή της οστικής πυκνότητας μπορεί να περιγραφεί συνοπτικά από τα εξής: έχουν σχηματιστεί και οι οκτώ κολώνες αυξημένης πυκνότητας. Οι κεντρικές και οι ακριανές κολώνες εμφανίζουν μικρότερες τιμές πυκνοτήτων από τις υπόλοιπες τέσσερις. Οι περιοχές ελάχιστης πυκνότητας έχουν αυξηθεί και καταλαμβάνουν τους χώρους

μεταξύ των βασικών κολώνων. Τέλος, η μέγιστη εμφανιζόμενη πυκνότητα έχει φτάσει το άνω όριο που είχε τεθεί ($\rho=1,74 \text{ g/cm}^3$)

Μετά την ολοκλήρωση 834 επαναλήψεων (Σχήμα 8.30 (στ)) τα συμπεράσματα που εξάγονται είναι τα παρακάτω: οι κεντρικές κολώνες αλλά και οι γειτονικές τους έχουν περάσει στην περιοχή μεγίστων πυκνοτήτων, ενώ είναι πλέον εμφανής η δοκιδωτή μορφή του σπογγώδους οστού. Οι περιοχές σύνδεσης των κολώνων με τις επιφυσιακές πλάκες εμφανίζουν στοιχεία με αυξημένη πυκνότητα (περιοχή πράσινου χρώματος) και γειτονικά τους στοιχεία με ελάχιστη πυκνότητα (περιοχή μπλε χρώματος).

Λίγα βήματα πριν ολοκληρωθεί η δοκιμή, και συγκεκριμένα στις 1334 επαναλήψεις (Σχήμα 8.30 (ζ)), η κατανομή της οστικής πυκνότητας διαφέρει ελάχιστα από την αντίστοιχη για τις 834 επαναλήψεις ενώ προσεγγίζει σε μεγάλο βαθμό την τελική κατανομή των οστικών πυκνοτήτων.

8.3 Κριτήρια αξιολόγησης αποτελεσμάτων

Πέρα από την εικόνα της κατανομής των οστικών πυκνοτήτων στα διάφορα στάδια ανακατασκευής σε κάθε δοκιμή, είναι χρήσιμα και τα ακόλουθα κριτήρια για την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων:

- Κριτήριο μάζας

Με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, και σύμφωνα με την υπάρχουσα εξίσωση ανακατασκευής, κάθε στοιχείο μπορεί να επιδράσει στη μεταβολή μόνο του εαυτού του. Η διαφορική εξίσωση της ανακατασκευής εφαρμόζεται ξεχωριστά σε κάθε πεπερασμένο στοιχείο. Με χρήση του κριτηρίου μάζας λοιπόν, ελέγχεται εάν το τελικό αποτέλεσμα θα είναι παρόμοιο με την πραγματική κατανομή πυκνότητας και θα έχει τα χαρακτηριστικά ελάχιστης απαιτούμενης μάζας.

- Κριτήριο δυσκαμψίας [8]

Οι Zhao και Hornby (1998) εισήγαγαν τη γενική ιδέα του δείκτη αποδοτικότητας υλικού (material efficiency indicator) για την αξιολόγηση μιας κατασκευής από την οπτική γωνία του σχεδιασμού κατασκευής μέγιστης δυσκαμψίας. Πρότειναν, ότι η μέση δυσκαμψία της κατασκευής ανά μονάδα όγκου μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εξαχθεί συμπέρασμα για το πόσο αποτελεσματικά χρησιμοποιήθηκε το δομικό υλικό. Εφόσον η φαινόμενη πυκνότητα του οστού είναι μια ρυθμιζόμενη τιμή, συγκεκριμένα μεταξύ $0,01 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ (καθόλου οστό) και $1,74 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ (φλοιώδες οστό), στην περίπτωση της οστικής ανακατασκευής η μέση δυσκαμψία της κατασκευής ανά μονάδα μάζας μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εκφράσει το πόσο αποδοτικά χρησιμοποιήθηκε το δομικό υλικό του οστού. Καθώς η ολική δυσκαμψία μιας κατασκευής είναι αντιστρόφως ανάλογη του

συνολικά παραγόμενου έργου από όλες τις εξωτερικές φορτίσεις στην κατασκευή, ο δείκτης δυσκαμψίας των αποτελεσμάτων μπορεί να οριστεί ως:

$$\bar{K} = \frac{1}{W_E^s \cdot M^s} \quad (\text{σχέση 8.10})$$

όπου W_E^s είναι το συνολικά παραγόμενο έργο από όλες τις εξωτερικές δυνάμεις στην τρέχουσα δομή και M^s είναι η μάζα της τρέχουσας δομής. Το παραγόμενο έργο ανά Π.Σ. μπορεί να υπολογιστεί από την πυκνότητα τροπικής ενέργειας ενώ ο δείκτης δυσκαμψίας έχει μονάδες $\frac{cm^3}{J \cdot g}$.

- Αντικειμενική συνάρτηση F

Η συμπεριφορά της οστικής ανακατασκευής ως προς τη σύγκλιση μπορεί να μελετηθεί, επίσης, από την συνάρτηση F η οποία καθορίζεται από την ακόλουθη έκφραση:

$$F = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^m \left(\frac{U_i}{\rho_i} - k \right) \quad (\text{σχέση 8.11})$$

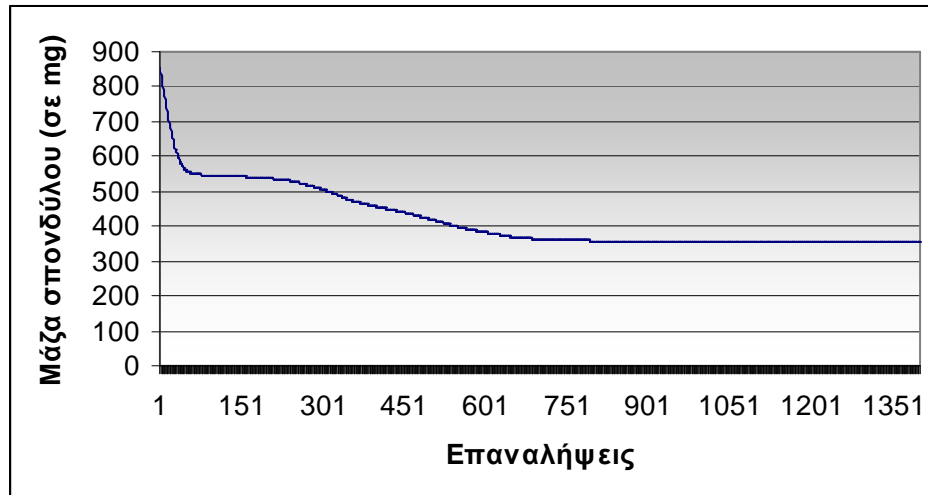
όπου m είναι ο αριθμός των πεπερασμένων στοιχείων εντός των οποίων η οστική ανακατασκευή συνεχίζεται, δηλαδή η τιμή της πυκνότητάς του δεν έχει φτάσει την ανώτερη ή την κατώτερη τιμή.

8.4 Αξιολόγηση αποτελεσμάτων

8.4.1 Νεαρό άτομο χωρίς εισαγωγή μη γραμμικοτήτων

- **Διάγραμμα Μεταβολής Μάζας**

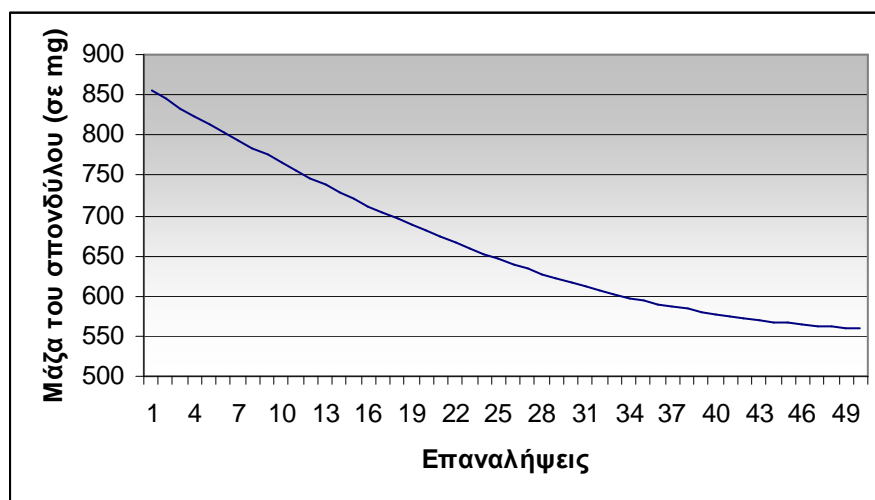
Το διάγραμμα της συνολικής μάζας του σπονδύλου για τα διάφορα χρονικά βήματα φαίνεται στο Σχήμα 8.31:



Σχήμα 8.31 Διάγραμμα συνολικής μάζας σπονδύλου

Η αρχική συνολική μάζα του σπονδύλου έχει τιμή 856,120 mg. Ύστερα από το πρώτο βήμα της Runge-Kutta η μάζα έχει μειωθεί σε 854,750 mg. Ομοίως, από το δεύτερο βήμα και έπειτα παρατηρούμε ότι η συνολική μάζα του σπονδύλου μειώνεται κατά τη διάρκεια των 1400 επαναλήψεων και καταλήγει στην τελική τιμή 354,99 mg.

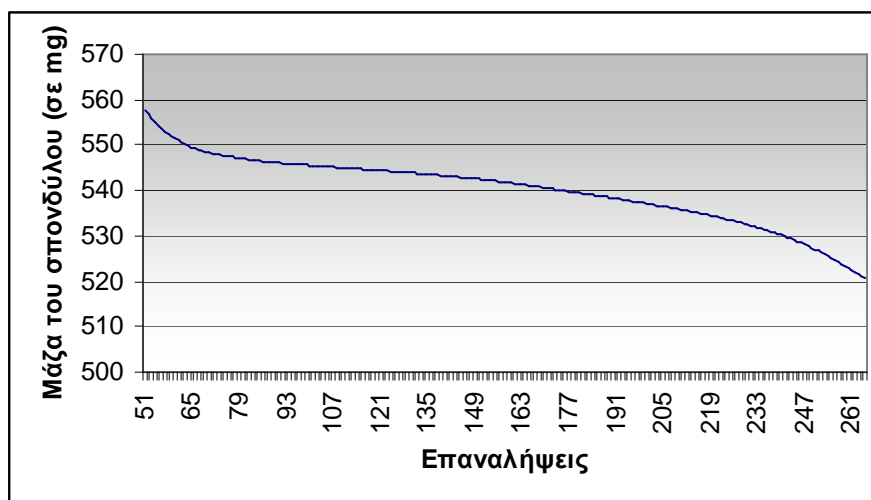
Το διάγραμμα της μεταβολής της μάζας, M , έχει περιοχές με διαφορετική κλίση που αντιπροσωπεύουν διαφορετικό ρυθμό μείωσης. Αρχικά ο ρυθμός μείωσης της μάζας είναι έντονος. Αυτό συμβαίνει για τις πρώτες 50 περίπου επαναλήψεις (αντίστοιχος συνολικός χρόνος 3 χρονικές μονάδες) και η μορφή του διαγράμματος είναι αυτή που φαίνεται παρακάτω Σχήμα 8.32:



Σχήμα 8.32 Διάγραμμα της μάζας του σπονδύλου στις 50 πρώτες επαναλήψεις

Ξεκινώντας από μάζα $M_0=856,120$ mg ύστερα από 50 επαναλήψεις καταλήγουμε σε μάζα 558,835 mg. Έχουμε δηλαδή μείωση περίπου 34,72% στη συνολική μάζα του σπονδύλου.

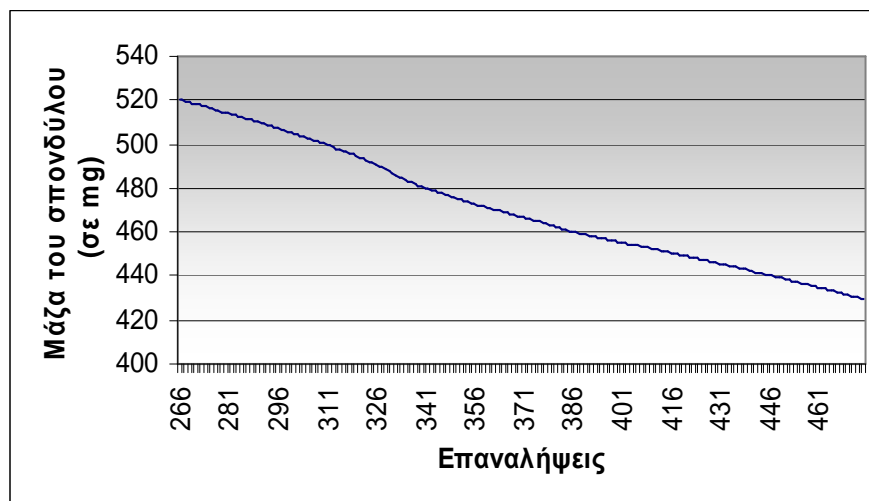
Στη συνέχεια, ακολουθεί μία περιοχή που μπορεί να χωριστεί σε δύο υπο-περιοχές, η πρώτη από τις οποίες στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, ενώ η δεύτερη στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω και φαίνεται στο Σχήμα 8.33.



Σχήμα 8.33 Διάγραμμα της μάζας του σπονδύλου από τις 51 έως τις 265 επαναλήψεις

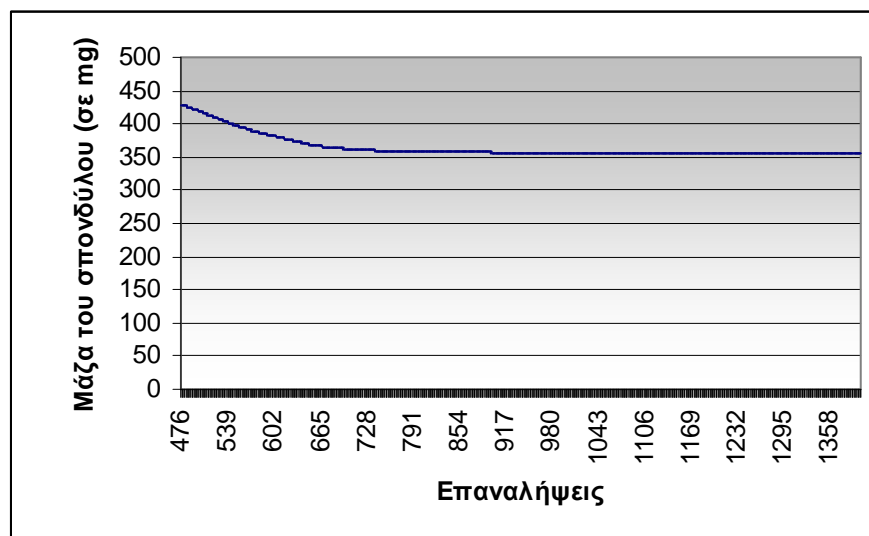
Η περιοχή αυτή λαμβάνει χώρα περίπου μέχρι τις 265 επαναλήψεις όπου η μάζα του σπονδύλου έχει τιμή 520,815 mg. Προκύπτει δηλαδή ότι ύστερα από $265-50=215$ επαναλήψεις υπάρχει μείωση μόλις 6,8 % της συνολικής μάζας η οποία και παρουσιάζεται στο Σχήμα 8.33.

Επιλέξαμε επίσης ένα σημείο για τη μελέτη της ανακατασκευής λίγο πριν η συνάρτηση της μάζας μπει στην τελευταία περιοχή της σύγκλισης. Το σημείο αυτό αντιστοιχεί στις 475 επαναλήψεις και σε μάζα σπονδύλου 429,389 mg. Η περιοχή στην οποία ανήκει το σημείο αυτό μπορεί να προσεγγιστεί από συνάρτηση γραμμικής μείωσης της μάζας. Παρατηρείται λοιπόν μία μείωση 18,13 % της συνολικής μάζας του σπονδύλου μέσα σε 210 βήματα. Συγκρινόμενη με τη μείωση της προηγούμενης περιοχής (6,8 %) και εφόσον ο αριθμός των ενδιάμεσων επαναλήψεων για την περιοχή που μελετάμε είναι μικρότερος (215 και 210 αντίστοιχα) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι σε αυτή την περιοχή υπάρχει μεγαλύτερος ρυθμός μείωσης. Το αντίστοιχο διάγραμμα μείωσης της μάζας από τις 266 έως τις 475 επαναλήψεις δίνεται στο Σχήμα 8.34:



Σχήμα 8.34 Διάγραμμα του σπονδύλου από τις 266 έως τις 475 επαναλήψεις

Τέλος, ακολουθεί η περιοχή της σύγκλισης γύρω από την τελική τιμή της μάζας (=354,992 mg). Η περιοχή αυτή ουσιαστικά διαρκεί για 567 χρονικά βήματα, από τις 834 έως τις 1400 επαναλήψεις. Σε όλο αυτό το διάστημα παρατηρείται μείωση της συνολικής μάζας του σπονδύλου από 357,404 mg σε 354,992 mg, δηλαδή μόλις κατά 0,675 %.

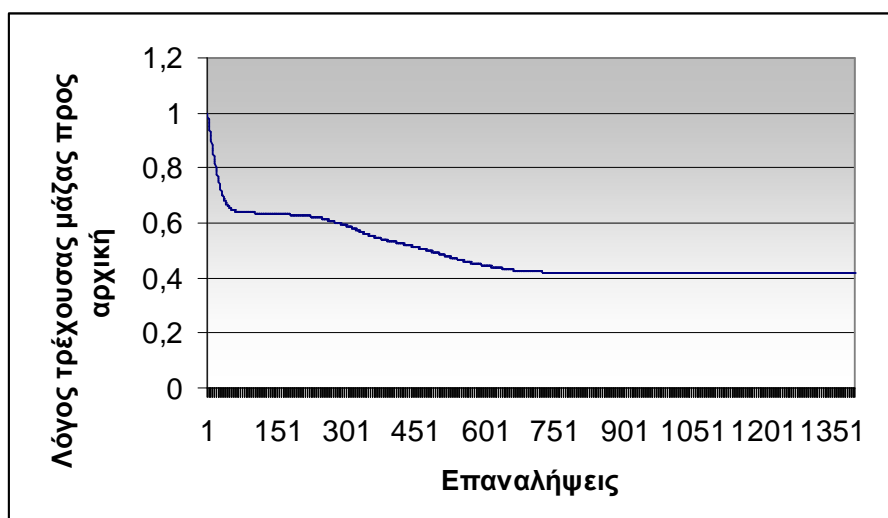


Σχήμα 8.35 Διάγραμμα του σπονδύλου από τις 476 έως τις 1400 επαναλήψεις

Στο παραπάνω διάγραμμα (Σχήμα 8.35) παρουσιάζουμε το υπόλοιπο της προηγούμενης περιγραφείσας περιοχής (από 476 έως και 833 επαναλήψεις) και την περιοχή της σύγκλισης (834 έως 1400 επαναλήψεις). Από τη μορφή του σχήματος 8.4.5 είναι φανερό ότι η διαδικασία οδηγείται προς τη σύγκλιση. Παρόλα αυτά, παρουσιάζεται μια διαφορά 0,01 mg μέσα στις τελευταίες 10 επαναλήψεις

- **Διάγραμμα πηλίκου τρέχουσας μάζας προς την αρχική**

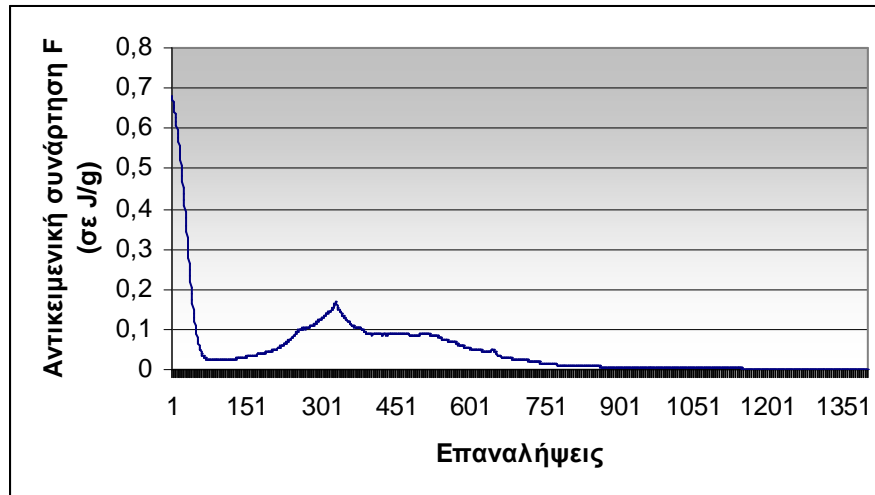
Στο Σχήμα 8.36 παρουσιάζεται ο λόγος των μαζών M/M_0 κατά τη διάρκεια του χρόνου. Προφανώς, η μορφή αυτού του διαγράμματος είναι ακριβώς ίδια με αυτή του διαγράμματος της μάζας, με τη διαφορά ότι το σύνολο τιμών είναι αδιαστατοποιημένο ως προς την αρχική μάζα του σπονδύλου M_0 . Σημειώνεται ότι ο λόγος μαζών στην πρώτη επανάληψη είναι 0,998 ενώ στην τελευταία επανάληψη είναι ίσος με 0,415. Το πλεονέκτημα που προσφέρει αυτό το διάγραμμα είναι ότι παρέχει τη δυνατότητα της εύρεσης της ποσοστιαίας μείωσης της μάζας του σπονδύλου σε κάθε επανάληψη.



Σχήμα 8.36 Διάγραμμα λόγου μάζας του σπονδύλου

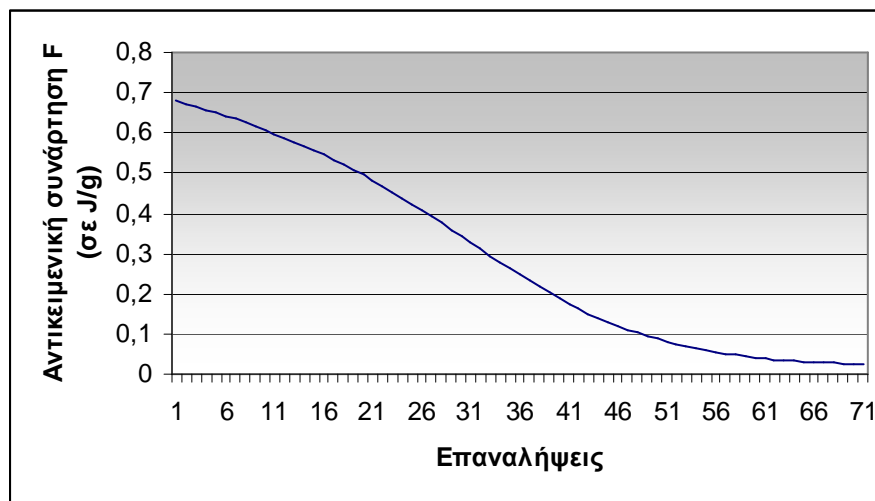
- **Διάγραμμα συνάρτησης F**

Το διάγραμμα της συνάρτησης F παρουσιάζεται στο Σχήμα 8.37. Η συνάρτηση F ξεκινά, μετά την πρώτη επανάληψη, με τιμή ίση περίπου με 0,680 J/g. Η τιμή αυτή αποτελεί και τη μέγιστη κατά τη διάρκεια των χρονικών βημάτων που ακολουθούν (1400 χρονικά βήματα).



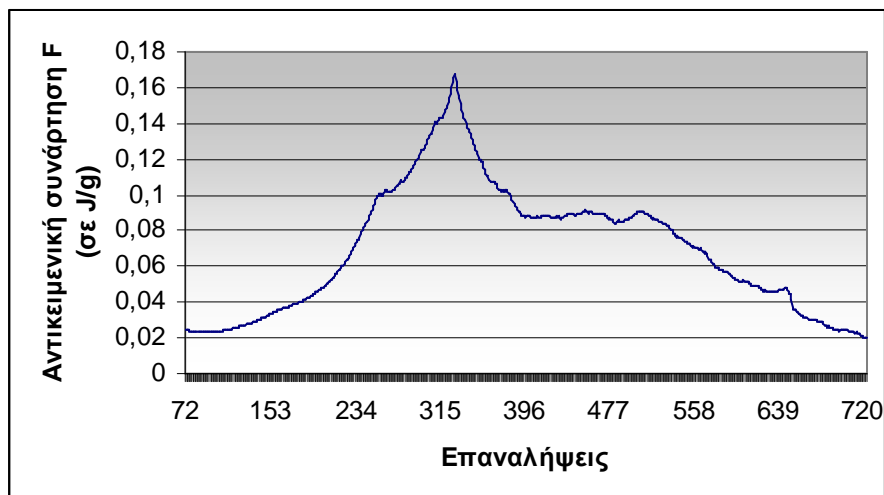
Σχήμα 8.37 Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης F

Ύστερα από 71 επαναλήψεις η τιμή της F έχει φτάσει στην τιμή 0,02538 J/g. Παρουσιάζει λοιπόν μια μείωση 96,27%. Το αντίστοιχο διάγραμμα για τις πρώτες 71 επαναλήψεις παρουσιάζεται στο Σχήμα 8.38.



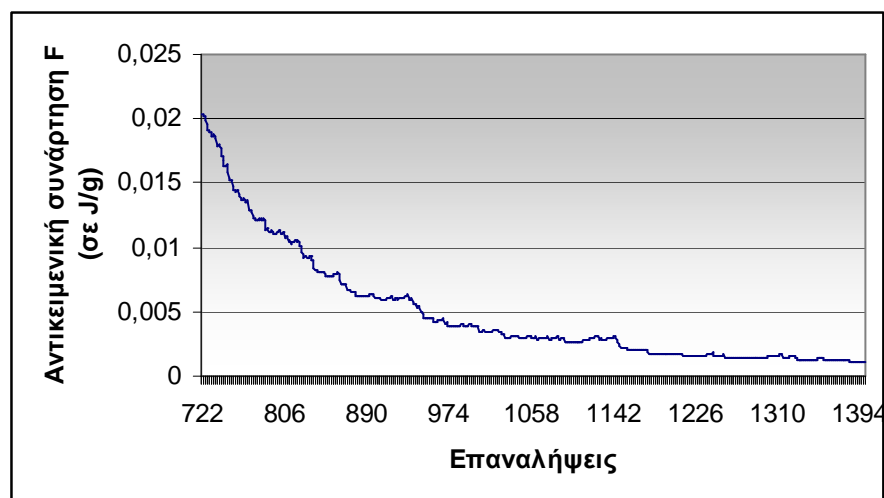
Σχήμα 8.38 Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης F για τις επαναλήψεις 1 έως 71

Έπειτα η F αυξάνεται (ένδειξη ότι η διαδικασία δεν έχει συγκλίνει ακόμα) μέχρι τις 331 επαναλήψεις όπου φτάνει την τιμή 0,167 J/g. Στη συνέχεια ξεκινά να μειώνεται πάλι μέχρι τις 720 επαναλήψεις όπου έχει τιμή 0,021 J/g. Παρόλα αυτά υπάρχουν μικρές αυξομειώσεις μεταξύ διαδοχικών επαναλήψεων όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.39.



Σχήμα 8.39 Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης F για τις επαναλήψεις 72 έως 722

Η F συνεχίζει να μειώνεται και μετά τις 1300 επαναλήψεις δείχνει να ξεκινά να συγκλίνει. Στις 1400 επαναλήψεις έχει φτάσει στην τιμή $1,15 \cdot 10^{-3} \text{ J/g}$ όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 8.40.



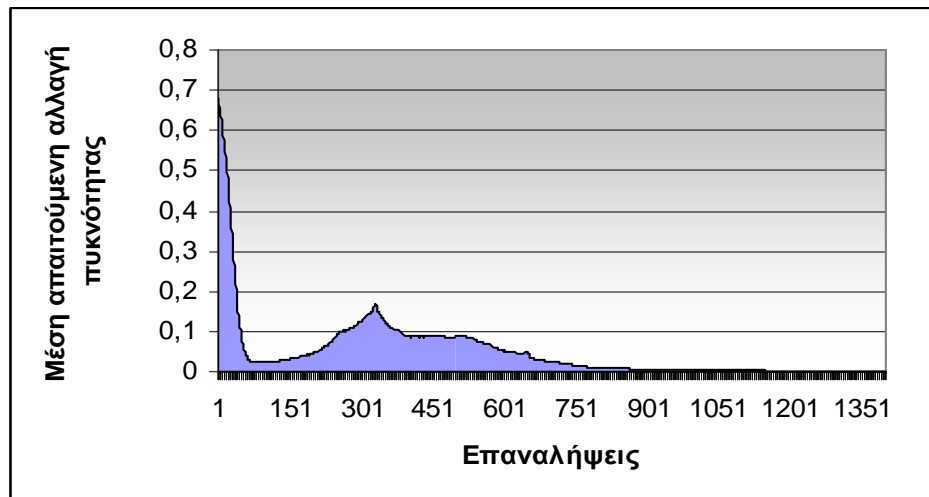
Σχήμα 8.40 Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης F για τις επαναλήψεις 723 έως 1400

Όπως προαναφέραμε η τιμή της συνάρτησης F υπολογίζεται ως το άθροισμα των απολύτων τιμών των διαφορών μεταξύ διέγερσης και αναφοράς σε κάθε Π.Σ στο οποίο συνεχίζεται η ανακατασκευή, προς το πλήθος των στοιχείων αυτών. Το πλήθος αυτό, όπως είναι λογικό, μειώνεται με την πάροδο του χρόνου καθώς ορισμένα στοιχεία φτάνουν στο ανώτερο ή το κατώτερο όριο πυκνότητας ή ισορροπούν ως προς την αναφορά κι έτσι αποκλείονται από τους υπολογισμούς της F.

Όπως έχουμε προαναφέρει η εξίσωση της οστικής ανακατασκευής για κάθε Π.Σ. είναι: $\frac{d\rho}{dt} = B \cdot \left[\frac{U}{\rho} - k \right]$ η οποία μετασχηματίζεται, στο χρονικό διάστημα ενός αρκετά μικρού βήματος, στην: $\Delta\rho = \Delta t \cdot B \cdot \left[\frac{U}{\rho} - k \right]$. Η μέση μεταβολή της πυκνότητας για τα στοιχεία m στα οποία συνεχίζεται η ανακατασκευή (και επομένως απαιτούν μεταβολή στην πυκνότητά τους) θα είναι: $\Delta\rho_m = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^m \Delta t \cdot B \cdot \left[\frac{U_i}{\rho_i} - k \right]$.

Εφόσον $\Delta t=0,06$ και $B = 1,0(g/cm^3)^2 / (MPa \cdot time \cdot unit)$ είναι κοινά για όλα τα πεπερασμένα στοιχεία, σε όλη τη διάρκεια του πειράματος, προκύπτει ότι:

$\Delta\rho_m = \frac{1}{m} \cdot \Delta t \cdot B \cdot \sum_{i=1}^m \left[\frac{U_i}{\rho_i} - k \right]$. Επομένως ο όρος $\frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^m \left[\frac{U_i}{\rho_i} - k \right]$ δηλώνει την μέση απαιτούμενη αλλαγή πυκνότητας (αύξηση ή μείωση) σε χρονικό διάστημα Δt . Ο όρος αυτός όμως είναι η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης F σε συγκεκριμένο χρονικό βήμα μετάβασης από μια επανάληψη στην αμέσως επόμενη της. Άρα, ισχύει ότι $|\Delta\rho_m| = \Delta t \cdot B \cdot F$. Για διαφορετικές τιμές του B ο όρος $\frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^m \left[\frac{U_i}{\rho_i} - k \right]$ δίνει τη μέση διαφορά διέγερσης-αναφοράς που καλύφθηκε μέχρι τον τερματισμό της διαδικασίας.



Σχήμα 8.41 Μέση απαιτούμενη αλλαγή πυκνότητας για κάθε πεπερασμένο στοιχείο έτσι ώστε η διαδικασία να συγκλίνει

Θεωρώντας ότι η ανακατασκευή έχει συγκλίνει, το εμβαδόν που περιέχεται μεταξύ της καμπύλης της F και του άξονα του χρόνου στο Σχήμα 8.41 δίνει, για $B=1$, τη μέση

απαιτούμενη αλλαγή πυκνότητας (είτε αύξηση, είτε μείωση) για το σπόνδυλο μέχρι η διαδικασία της οστικής ανακατασκευής να τερματιστεί.

- **Δείκτης δυσκαμψίας**

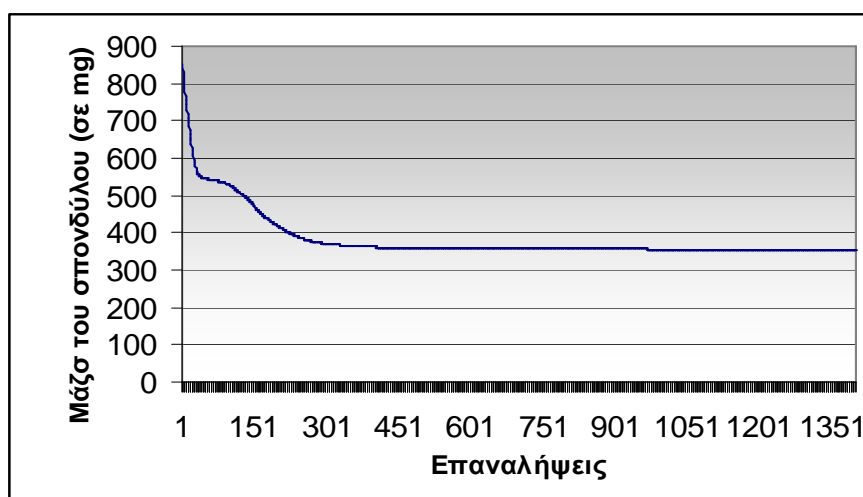
Για την τελική δομή ύστερα από 1400 επαναλήψεις το συνολικό έργο προέκυψε περίπου ίσο με $782,02 \text{ J/cm}^3$ και επομένως ο τελικός δείκτης δυσκαμψίας είναι $\bar{K} = 3,6 \cdot 10^{-3} \frac{\text{cm}^3}{\text{J} \cdot \text{g}}$.

8.4.2 Νεαρό άτομο με εισαγωγή μη γραμμικοτήτων

8.4.2.1 Σταθερός συντελεστής B και δείκτης $\alpha=2,25$

- **Διάγραμμα Μεταβολής Μάζας**

Το διάγραμμα της συνολικής μάζας του σπονδύλου για τα διάφορα χρονικά βήματα είναι αυτό που φαίνεται στο Σχήμα 8.42:



Σχήμα 8.42 Διάγραμμα συνολικής μάζας σπονδύλου για B σταθερό και $\alpha=2,25$

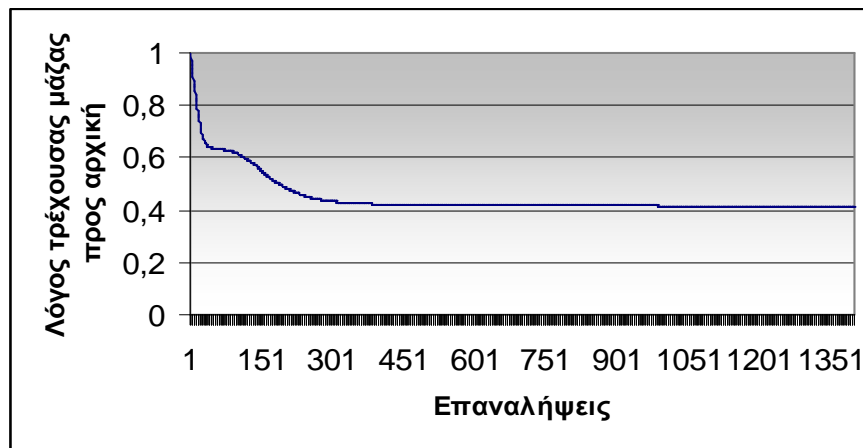
Η αρχική συνολική μάζα του σπονδύλου έχει τιμή 856,12 mg. Ύστερα από το πρώτο βήμα της Runge-Kutta η μάζα έχει μειωθεί σε 854,06 mg. Ομοίως, από το δεύτερο βήμα και έπειτα παρατηρείται ότι η συνολική μάζα του σπονδύλου μειώνεται κατά τη διάρκεια των 1400 επαναλήψεων και καταλήγει στην τελική τιμή 353,64 mg.

Συγκρινόμενο με το αντίστοιχο διάγραμμα για $\alpha=1$, το Σχήμα 8.42 οδηγεί στα ακόλουθα συμπεράσματα: Η τελική μάζα του σπονδύλου εμφανίζεται μικρότερη σε σχέση με το μοντέλο για $\alpha=1$ κατά 1,35 mg δηλαδή κατά 0,16% της αρχικής μάζας του σπονδύλου. Ακόμη, η μάζα του σπονδύλου εμφανίζεται να έχει πιο απότομη κλίση στις 300 πρώτες επαναλήψεις παρουσιάζοντας μία μείωση μάζας περίπου 56,7% έναντι 40,97% του μοντέλου χωρίς την εισαγωγή μη γραμμικοτήτων. Έτσι όπως φαίνεται και από Σχήμα 8.42

προσεγγίζει σε λιγότερες επαναλήψεις την τελική της τιμή. Σημειώνεται ότι η τελική μάζα δεν έχει σταθεροποιηθεί απόλυτα αλλά παρουσιάζει μια απόκλιση 0,051 mg μέσα στις τελευταίες 10 επαναλήψεις.

- **Διάγραμμα πηλίκου τρέχουσας μάζας προς την αρχική**

Στο Σχήμα 8.43 παρουσιάζεται ο λόγος των μαζών M/M_0 κατά τη διάρκεια των επαναλήψεων. Ο λόγος μαζών στην πρώτη επανάληψη είναι 0,998 ενώ στην τελευταία επανάληψη είναι ίσος με 0,413. Στις πρώτες 300 επαναλήψεις ο λόγος των μαζών βρίσκεται ήδη στην τιμή 0,433.



Σχήμα 8.43 Διάγραμμα λόγου μάζας του σπονδύλου για B σταθερό και $\alpha=2,25$

- **Διάγραμμα συνάρτησης σύγκλισης F**

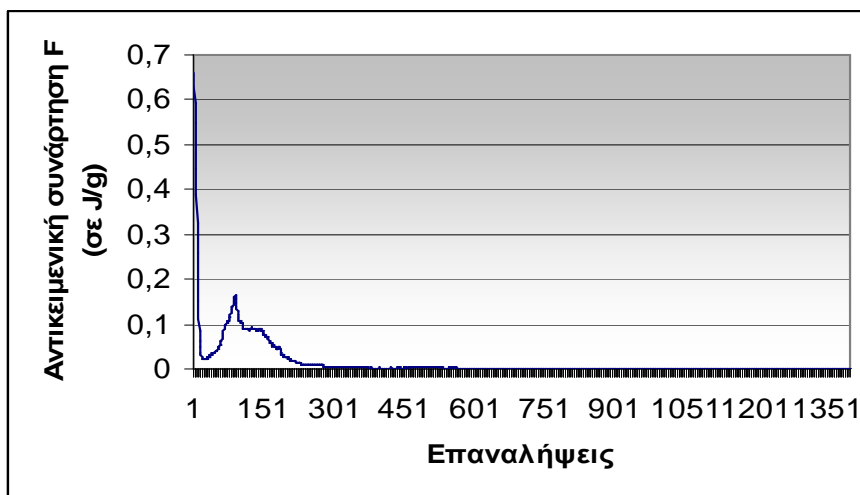
Η αντικειμενική συνάρτηση F μετά την εισαγωγή της μη γραμμικότητας του εκθέτη α λαμβάνει πλέον την ακόλουθη μορφή:

$$F = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^m \left| \left(\left(\frac{U_i}{\rho_i \cdot k} \right)^{\alpha} - 1 \right) \right| \quad (\text{σχέση 8.12})$$

όπου m είναι ο αριθμός των πεπερασμένων στοιχείων στα οποία συνεχίζεται η ανακατασκευή δηλαδή δεν έχει ικανοποιηθεί σε αυτά κανένα από τα κριτήρια ισορροπίας όπως έχουν οριστεί στο Κεφάλαιο 5.4. Όπως προαναφέραμε ο συντελεστής α λαμβάνει την τιμή 2,25.

Το διάγραμμα της συνάρτησης F παρουσιάζεται στο Σχήμα 8.44 που ακολουθεί. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση F ξεκινά αρχικά, μετά την πρώτη επανάληψη, με τιμή ίση περίπου με 0,659 J/g. Η τιμή αυτή είναι μικρότερη της αντίστοιχης του μοντέλου με $\alpha=1$ κατά 3,13%. Η ομοιότητα που παρουσιάζουν τα δύο μοντέλα είναι ότι η συνάρτηση F ενώ μειώνεται ξαφνικά αρχίζει να αυξάνεται μέχρι μιας τιμής κοντά στα 0,15 J/g και στη συνέχεια κατευθύνεται προς τη σύγκλιση. Η κύρια διαφορά τους είναι ότι για $\alpha=2,25$ η

συνάρτηση F δείχνει να συγκλίνει αρκετά νωρίτερα, προσεγγίζοντας ασυμπτωτικά τον οριζόντιο άξονα λίγο μετά τις 300 επαναλήψεις (η αντίστοιχη συμπεριφορά της F στο μοντέλο με $\alpha=1$ εμφανιζόταν λίγο μετά τις 900 επαναλήψεις). Στις 1400 επαναλήψεις η αντικειμενική συνάρτηση F έχει φτάσει στην τιμή $5,81 \text{ E-5 J/g}$, η οποία είναι 2 τάξεις μεγέθους μικρότερη της αντίστοιχης του γραμμικού μοντέλου.



Σχήμα 8.44 Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης F για B σταθερό και $\alpha=2,25$

- Δείκτης δυσκαμψίας

Για την τελική δομή ύστερα από 1400 επαναλήψεις το συνολικό έργο προέκυψε περίπου ίσο με $775,06 \text{ J/cm}^3$ δηλαδή 0,89% μικρότερο του αντίστοιχου έργου για $\alpha=1$. Προκύπτει λοιπόν ο Πίνακας 8.1.

Πίνακας 8.1 Δείκτης δυσκαμψίας \bar{K} για $\alpha=1$ και $\alpha=2,25$ και ποσοστιαία διαφορά τους

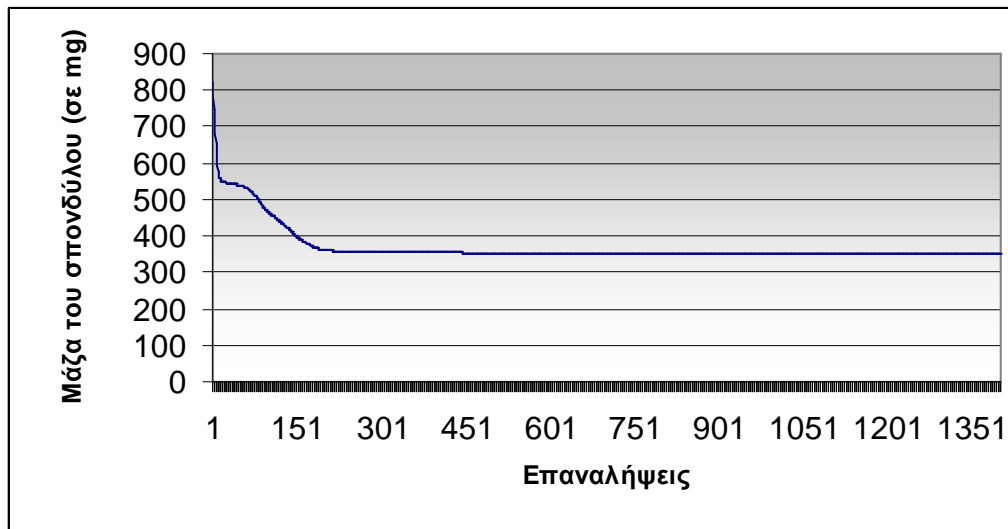
Δυσκαμψία ($\text{cm}^3/\text{J g}$)	
$\alpha=1$	3,6 E-3
$\alpha=2,25$	3,65 E-3
Ποσοστιαία διαφορά	5%

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι για $\alpha=2,25$ έχει χρησιμοποιηθεί πιο αποδοτικά, κατά 5%, το δομικό υλικό του οστού (μεγαλύτερος δείκτης δυσκαμψίας).

8.4.2.2 Εκθετικά μεταβαλλόμενος συντελεστής B και δείκτης $\alpha=1$

- **Διάγραμμα Μεταβολής Μάζας**

Για συντελεστή B προσδιοριζόμενο από τη σχέση: $B(t) = (B_0 - B_T) / e^{0,02t} + B_T$ με $B_T = 0,01(g/cm^3)^2 / (MPa \cdot time \cdot unit)$ και $B_0 = 1,0(g/cm^3)^2 / (MPa \cdot time \cdot unit)$ και για εκθέτη $\alpha=1$, το διάγραμμα της συνολικής μάζας του σπονδύλου για τα διάφορα χρονικά βήματα είναι αυτό που φαίνεται στο Σχήμα 8.45.



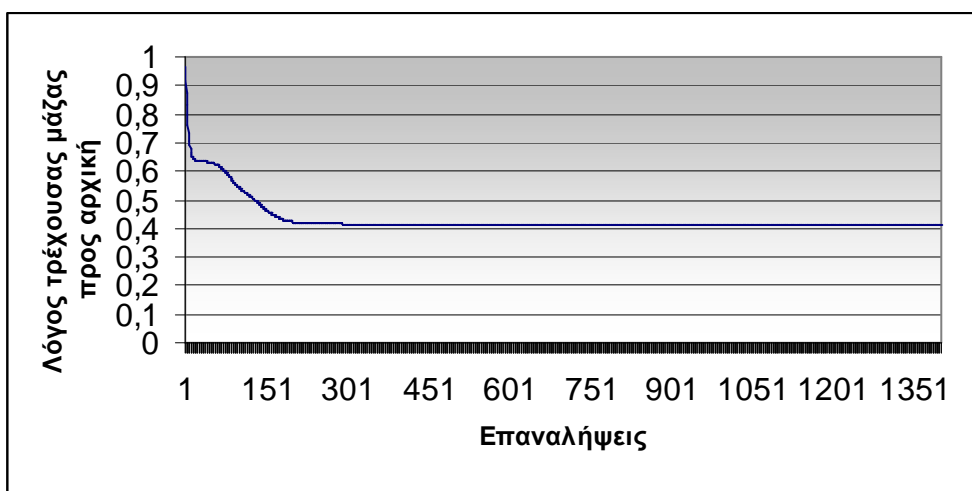
Σχήμα 8.45 Διάγραμμα συνολικής μάζας σπονδύλου για B(t) εκθετικά μεταβαλλόμενο και $\alpha=1$

Η αρχική συνολική μάζα του σπονδύλου έχει τιμή 856,120 mg. Ύστερα από το πρώτο βήμα της Runge-Kutta η μάζα έχει μειωθεί σε 823,813 mg. Ομοίως, από το δεύτερο βήμα και έπειτα παρατηρούμε ότι η συνολική μάζα του σπονδύλου μειώνεται κατά τη διάρκεια των 1400 επαναλήψεων και καταλήγει στην τελική τιμή 350,719 mg. Συγκρινόμενο με το αντίστοιχο διάγραμμα για $\alpha=1$, το Σχήμα 8.45 οδηγεί στα ακόλουθα συμπεράσματα: Η τελική μάζα του σπονδύλου εμφανίζεται μικρότερη σε σχέση με το μοντέλο για $\alpha=1$ κατά 4,273 mg δηλαδή κατά 4,99% της αρχικής μάζας του σπονδύλου. Παρατηρούμε λοιπόν ότι ενώ η αλλαγή της μη γραμμικότητας του εκθέτη α επηρέασε ελάχιστα την τελική μάζα, η εισαγωγή του B(t) επέφερε σημαντική αλλαγή στη μάζα του σπονδύλου. Ακόμη, η μάζα του σπονδύλου εμφανίζεται να έχει πιο απότομη κλίση στις 200 πρώτες επαναλήψεις παρουσιάζοντας μία μείωση μάζας περίπου 57,76% έναντι 37,26% του μοντέλου χωρίς την εισαγωγή μη γραμμικοτήτων. Στις 200 επαναλήψεις η τιμή της μάζας του σπονδύλου απέχει μόλις 1,28% μείωση της αρχικής μάζας από την αντίστοιχη τιμή στις 1400 επαναλήψεις. Έτσι όπως φαίνεται και από το Σχήμα 8.45

προσεγγίζει σε λιγότερες επαναλήψεις την τελική της τιμή. Η μάζα δεν έχει συγκλίνει ούτε σε αυτό το μοντέλο απόλυτα. Σημειώνεται ότι μέσα στις τελευταίες 10 επαναλήψεις παρατηρείται μια διαφορά 0,0004 mg.

- **Διάγραμμα πηλίκου τρέχουσας μάζας προς την αρχική**

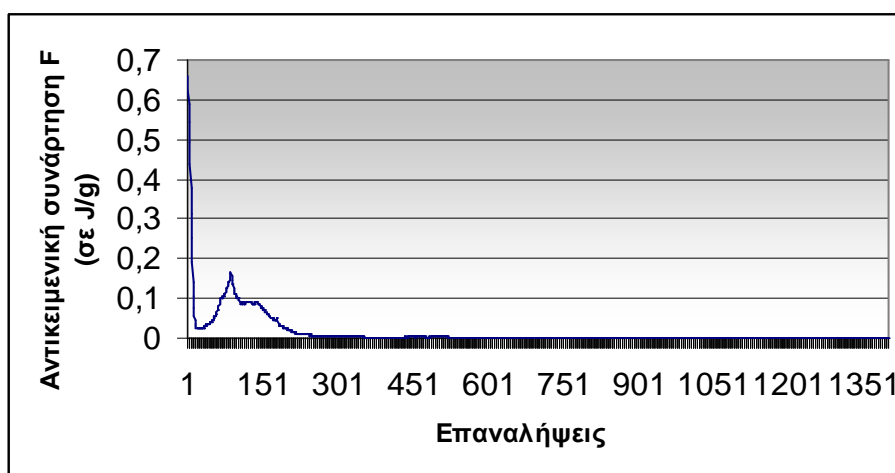
Στο Σχήμα 8.46 παρουσιάζεται ο λόγος των μαζών M/M_0 κατά τη διάρκεια των επαναλήψεων. Ο λόγος μαζών στην πρώτη επανάληψη είναι περίπου 0,9623 ενώ στην τελευταία επανάληψη είναι ίσος με 0,4097. Στις πρώτες 200 επαναλήψεις ο λόγος των μαζών βρίσκεται ήδη στην τιμή 0,4225.



Σχήμα 8.46 Διάγραμμα λόγου μάζας του σπονδύλου για B εκθετικά μεταβαλλόμενο και $\alpha=1$

- **Διάγραμμα συνάρτησης σύγκλισης F**

Το διάγραμμα της αντικειμενικής συνάρτησης F παρουσιάζεται στο Σχήμα 8.47.



Σχήμα 8.47 Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης F για B(t) εκθετικά μεταβαλλόμενο και $\alpha=1$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση F ξεκινά, μετά την πρώτη επανάληψη, με τιμή ίση περίπου με $0,658 \text{ J/g}$. Η τιμή αυτή είναι μικρότερη της αντίστοιχης του μοντέλου με $\alpha=1$ κατά $3,22\%$. Η ομοιότητα που παρουσιάζουν και τα τρία μοντέλα που έχουν αναλυθεί έως τώρα είναι ότι η συνάρτηση F ενώ μειώνεται, ξαφνικά αρχίζει να αυξάνεται μέχρι μιας τιμής κοντά στα $0,15 \text{ J/g}$ και στη συνέχεια κατευθύνεται προς τη σύγκλιση. Σε σχέση με το μοντέλο για B σταθερό και $\alpha=1$ το συγκεκριμένο μοντέλο που μελετάται συγκλίνει σαφώς γρηγορότερα. Αν συγκριθεί με το μοντέλο για B σταθερό και $\alpha=2,25$, παρόλο που η μάζα έδειξε να συγκλίνει νωρίτερα η συνάρτηση F δείχνει να συγκλίνει λίγο αργότερα. Στις 1400 επαναλήψεις η αντικειμενική συνάρτηση F έχει φτάσει στην τιμή $8,56 \text{ E-5 J/g}$, η οποία είναι 2 τάξεις μεγέθους μικρότερη της αντίστοιχης του γραμμικού μοντέλου και μεγαλύτερη κατά $47,33\%$ της αντίστοιχης τιμής για $B=0,25$ και $\alpha=2,25$.

- **Δείκτης δυσκαμψίας**

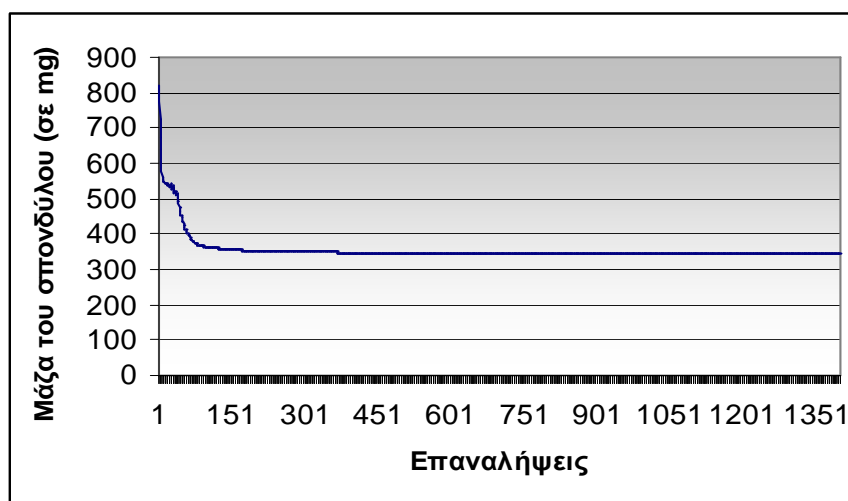
Για την τελική δομή ύστερα από 1400 επαναλήψεις το συνολικό έργο προέκυψε περίπου ίσο με $792,054 \text{ J/cm}^3$ δηλαδή $1,28\%$ μεγαλύτερο του αντίστοιχου έργου για $\alpha=1$. Πολλαπλασιαζόμενο όμως το παραπάνω έργο με τη μικρότερη τελική μάζα που προέκυψε για το μοντέλο αυτό, δίνει ίδια τιμή δυσκαμψίας με το γραμμικό μοντέλο, δηλαδή

$$\bar{K} = 3,6 \cdot 10^{-3} \frac{\text{cm}^3}{\text{J} \cdot \text{g}}$$

8.4.2.3 Εκθετικά μεταβαλλόμενος συντελεστής B και δείκτης $\alpha=2,25$

- **Διάγραμμα Μεταβολής Μάζας**

Το διάγραμμα της συνολικής μάζας του σπονδύλου για τα διάφορα χρονικά βήματα είναι αυτό που φαίνεται στο Σχήμα 8.48.



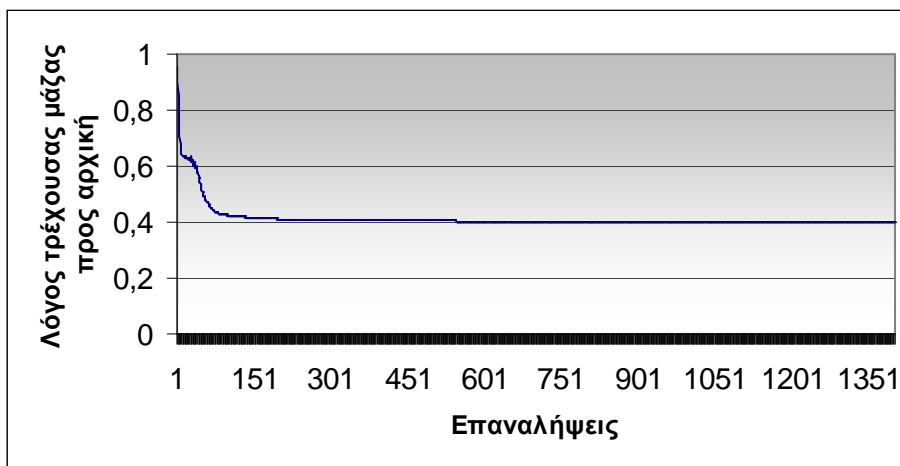
Σχήμα 8.48 Διάγραμμα συνολικής μάζας σπονδύλου για $B(t)$ εκθετικά μεταβαλλόμενο και $\alpha=2,25$

Η αρχική συνολική μάζα του σπονδύλου έχει τιμή 856,120 mg. Ύστερα από το πρώτο βήμα της Runge-Kutta η μάζα έχει μειωθεί σε 822,027 mg. Ομοίως, από το δεύτερο βήμα και έπειτα παρατηρούμε ότι η συνολική μάζα του σπονδύλου μειώνεται κατά τη διάρκεια των 1400 επαναλήψεων και καταλήγει περίπου στην τελική τιμή 345,50 mg.

Συγκρινόμενο με τα προηγούμενα μοντέλα, το Σχήμα 8.48 οδηγεί στα ακόλουθα συμπεράσματα: Η τελική μάζα του σπονδύλου εμφανίζεται μικρότερη σε σχέση με όλα τα μοντέλα και παρουσιάζει τη μεγαλύτερη διαφορά από το μοντέλο για $\alpha=1$, κατά 9,49 mg, δηλαδή κατά 1,11% της αρχικής μάζας του σπονδύλου. Η μάζα του σπονδύλου εμφανίζεται να έχει αρκετά απότομη κλίση στις 10 πρώτες επαναλήψεις παρουσιάζοντας μία μείωση μάζας περίπου 35,8%. Σημειώνεται ότι για τα προαναφερθέντα μοντέλα η μεγαλύτερη αντίστοιχη μείωση ήταν περίπου 32,48% για το μοντέλο με $B(t)$ εκθετικά μεταβαλλόμενο και $\alpha=1$. Έτσι όπως φαίνεται και από το Σχήμα 8.48 προσεγγίζει σε λιγότερες επαναλήψεις την τελική της τιμή. Σημειώνεται ότι από τις 668 επαναλήψεις η μάζα έχει συγκλίνει στην τελική τιμή της, κάτι που δεν είχε συμβεί σε κανένα από τα προηγούμενα μοντέλα.

- **Διάγραμμα ηλικίου τρέχουσας μάζας προς την αρχική**

Στο Σχήμα 8.49 παρουσιάζεται ο λόγος των μαζών M/M_0 κατά τη διάρκεια των επαναλήψεων. Ο λόγος μαζών στην πρώτη επανάληψη είναι 0,960 ενώ στην τελευταία επανάληψη είναι ίσος με 0,404. Στις πρώτες 10 επαναλήψεις ο λόγος των μαζών βρίσκεται ήδη στην τιμή 0,642.

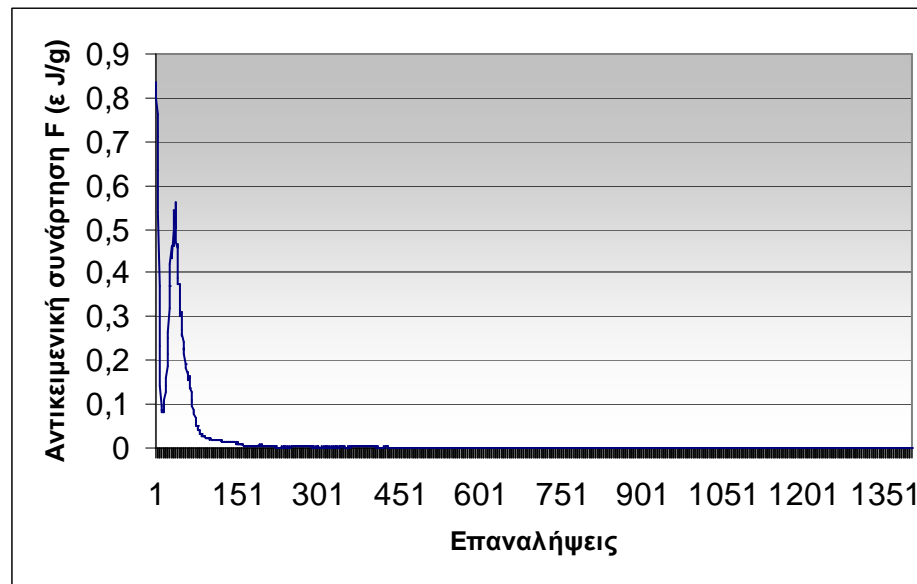


Σχήμα 8.49 Διάγραμμα λόγου μάζας του σπονδύλου για B εκθετικά μεταβαλλόμενο και $\alpha=2,25$

- **Διάγραμμα συνάρτησης σύγκλισης F**

Το διάγραμμα της αντικειμενικής συνάρτησης F παρουσιάζεται στο Σχήμα 8.50. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση F ξεκινά αρχικά, μετά την πρώτη επανάληψη, με τιμή ίση περίπου με 0,837 J/g. Η τιμή αυτή είναι η μεγαλύτερη παρουσιαζόμενη σε σχέση με τα

υπόλοιπα μοντέλα. Μια πρώτη ομοιότητα που παρατηρείται μεταξύ του μοντέλου αυτού και των υπολοίπων είναι ότι η συνάρτηση F, παρουσιάζει παρόμοια συμπεριφορά, με αρχική μείωση που ακολουθείται από αύξηση και στη συνέχεια σύγκλιση. Παρόλα αυτά, η αντικειμενική συνάρτηση F μειώνεται αρκετά στις 14 πρώτες επαναλήψεις έως 0,084 J/g αλλά στη συνέχεια αυξάνεται επίσης με μεγάλο ρυθμό φτάνοντας στις 38 επαναλήψεις την τιμή 0,56 J/g. Συγκρινόμενο με το μοντέλο για B σταθερό και $\alpha=2,25$, το συγκεκριμένο μοντέλο εμφανίζει μια πιο αργή προσέγγιση μέχρι τις 430 επαναλήψεις, στη συνέχεια όμως συγκλίνει αρκετά νωρίτερα. Στις 1400 επαναλήψεις η αντικειμενική συνάρτηση F έχει φτάσει στην τιμή $7 \cdot 10^{-10}$ J/g, η οποία είναι 5 τάξεις μεγέθους μικρότερη από την καλύτερη σύγκλιση μέχρι τώρα, την οποία είχε προσφέρει το μοντέλο με $\alpha=2,25$ και B σταθερό.



Σχήμα 8.50 Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης F για B εκθετικά μεταβαλλόμενο και $\alpha=2,25$

- **Δείκτης δυσκαμψίας**

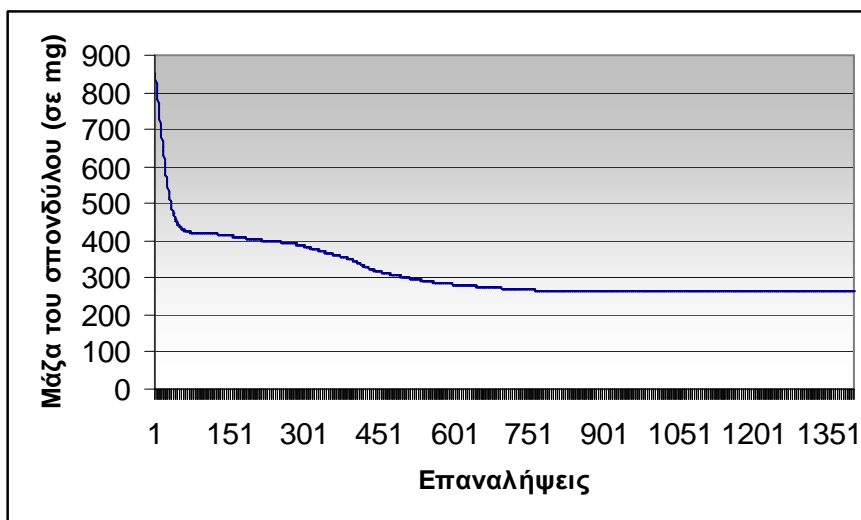
Για την τελική δομή ύστερα από 1400 επαναλήψεις το συνολικό έργο προέκυψε περίπου ίσο με $778,31 \text{ J/cm}^3$ δηλαδή 0,47% μικρότερο του αντίστοιχου έργου για $\alpha=1$ και B σταθερό. Ο συντελεστής δυσκαμψίας λαμβάνει την τιμή $\bar{K} = 3,719 \cdot 10^{-3} \frac{\text{cm}^3}{\text{J} \cdot \text{g}}$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το μοντέλο για B εκθετικό και $\alpha=2,25$ προσφέρει καλύτερη και γρηγορότερη σύγκλιση αλλά και μεγαλύτερη δυσκαμψία. Για το λόγο αυτό επιλέγεται και για την εφαρμογή σε τριδιάστατο σπόνδυλο του κεφαλαίου 9.

8.4.3 Ηλικιωμένο άτομο

Διάγραμμα Μεταβολής Μάζας

Το διάγραμμα της συνολικής μάζας του σπονδύλου για τα διάφορα χρονικά βήματα είναι αυτό που φαίνεται στο Σχήμα 8.51:

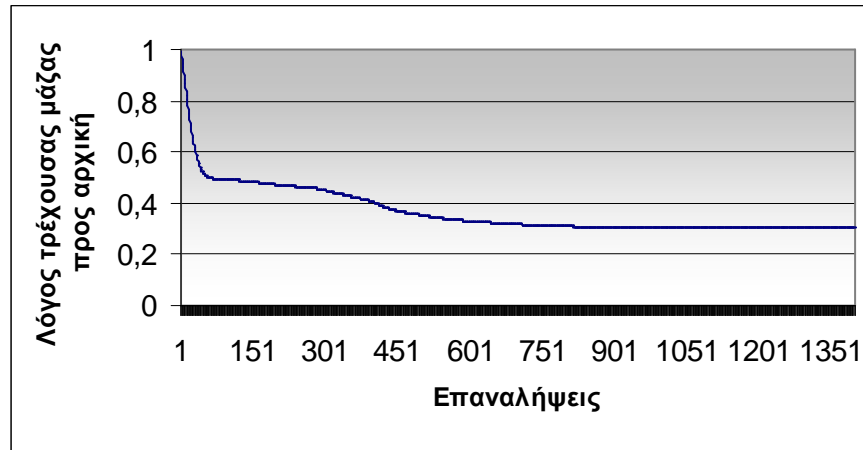


Σχήμα 8.51 Διάγραμμα συνολικής μάζας σπονδύλου ηλικιωμένου ατόμου για B σταθερό και $\alpha=1$

Η αρχική συνολική μάζα του σπονδύλου έχει τιμή 856,120 mg. Ύστερα από το πρώτο βήμα της Runge-Kutta η μάζα έχει μειωθεί σε 851,055 mg. Παρατηρείται ότι σε σχέση με το αντίστοιχο μοντέλο νεαρού ατόμου σημειώνεται μεγαλύτερη μείωση λόγω των μειωμένων μηχανικών απαιτήσεων που επέφερε η νέα φόρτιση. Ομοίως, από το δεύτερο βήμα και έπειτα παρατηρούμε ότι η συνολική μάζα του σπονδύλου μειώνεται κατά τη διάρκεια των 1400 επαναλήψεων και καταλήγει περίπου στην τελική τιμή 262,53 mg. Η τελική μάζα του σπονδύλου εμφανίζεται μικρότερη σε σχέση με του νεαρού ατόμου κατά 92,462 mg. δηλαδή 10,8% της αρχικής μάζας του σπονδύλου.

- **Διάγραμμα πηλίκου τρέχουσας μάζας προς την αρχική**

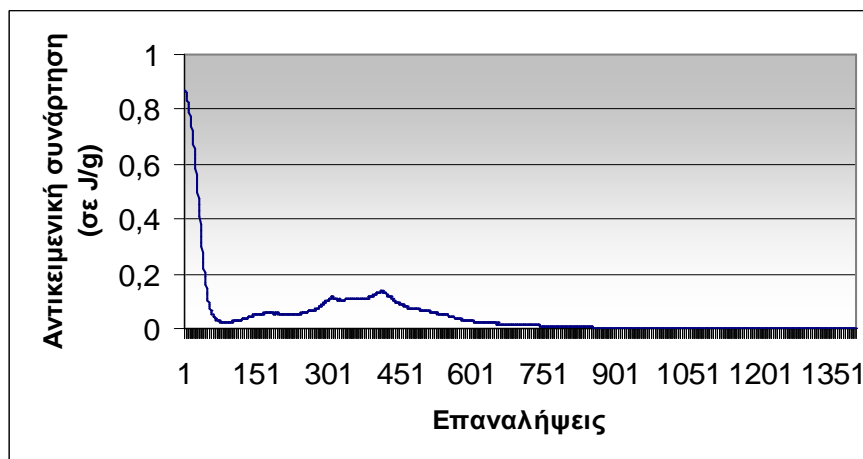
Στο Σχήμα 8.52 παρουσιάζεται ο λόγος των μαζών M/M_0 κατά τη διάρκεια των επαναλήψεων. Ο λόγος μαζών στην πρώτη επανάληψη είναι 0,9941 ενώ στην τελευταία επανάληψη είναι ίσος περίπου με 0,3067.



Σχήμα 8.52 Διάγραμμα λόγου μάζας του σπονδύλου ηλικιωμένου ατόμου για B σταθερό και $\alpha=1$

- **Διάγραμμα συνάρτησης σύγκλισης F**

Το διάγραμμα της αντικειμενικής συνάρτησης F παρουσιάζεται στο Σχήμα 8.53:



Σχήμα 8.53 Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης F ηλικιωμένου ατόμου για B σταθερό και $\alpha=1$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση F έχει την ίδια συμπεριφορά με την αντίστοιχη του νεαρού ατόμου για το ίδιο μοντέλο. Ξεκινά αρχικά, μετά την πρώτη επανάληψη, με τιμή ίση περίπου με 0,872 J/g. Η τιμή αυτή είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη του νεαρού ατόμου. Στις 1400 επαναλήψεις η αντικειμενική συνάρτηση F έχει φτάσει στην τιμή 0,254 E^{-3} J/g.

- **Δείκτης δυσκαμψίας**

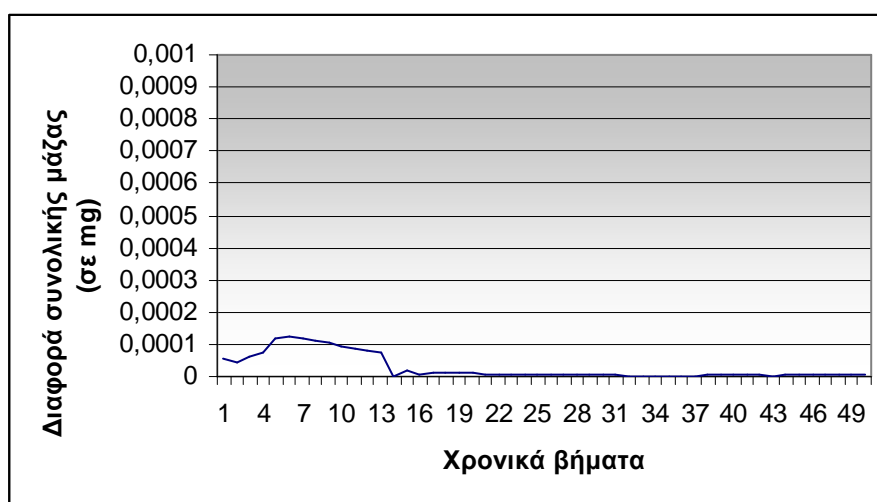
Για την τελική δομή ύστερα από 1400 επαναλήψεις το συνολικό έργο προέκυψε περίπου ίσο με 590,955 J/cm³ δηλαδή 24,43% μικρότερο του αντίστοιχου έργου για νεαρό

άτομο. Ο συντελεστής δυσκαμψίας λαμβάνει την τιμή $\bar{K} = 6,9 \cdot 10^{-3} \frac{cm^3}{J \cdot g}$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι για ηλικιωμένο άτομο υπάρχει περίπου η διπλάσια δυσκαμψία.

- Έλεγχος βήματος

Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία (Xinghua 2002) το χρησιμοποιούμενο βήμα για την αριθμητική επίλυση είναι 0,03. Πραγματοποιήσαμε μία δοκιμή για βήμα 0,03 και συγκρίναμε την συνολική μάζα σε κάθε επανάληψη για τα δύο διαφορετικά βήματα, 0,03 και 0,06 αντίστοιχα. Οι διαφορές ήταν της τάξης του 10^{-6} mg με εξαίρεση ορισμένα αρχικά βήματα όπου πήρε τιμές της τάξης του 10^{-4} mg. Η κλίση της μάζας στα βήματα αυτά ήταν πιο απότομη (όπως αναφέραμε και παραπάνω) και έτσι το μεγαλύτερο βήμα (0,06) προσέγγισε με λίγο μικρότερη ακρίβεια τη συνάρτηση. Οι διαφορές αυτές είναι πολύ μικρές και εφόσον οι αναφερόμενες διαφορές μάζας είναι σε mg το βήμα 0,06, που επιτάχυνε στο διπλάσιο τους υπολογισμούς, κρίθηκε ικανοποιητικό. Στο ακόλουθο Σχήμα 8.54 παρουσιάζεται η απόλυτη τιμή της διαφοράς της συνολικής μάζας για τα δύο βήματα μέχρι χρόνο 3 (50 επαναλήψεις):



Σχήμα 8.54 Διαφορά συνολικής μάζας μεταξύ βημάτων 0,03 και 0,06 για τις 50 πρώτες επαναλήψεις

**Κεφάλαιο 9ο Εφαρμογή οστικής
ανακατασκευής σε τρισδιάστατο μοντέλο
σπονδύλου**

9.1 Ανάλυση τριδιάστατου μοντέλου σπονδύλου

Εφόσον η πραγματική γεωμετρία του σπονδύλου υπάγεται στον τριδιάστατο γεωμετρικό χώρο είναι χρήσιμο να επιχειρηθεί η εφαρμογή ενός μοντέλου οστικής ανακατασκευής σε τρεις διαστάσεις. Αυτό συνεπάγεται την ανάγκη δημιουργίας ενός τριδιάστατου μοντέλου σπονδύλου ακριβούς γεωμετρίας. Για τη δημιουργία του τριδιάστατου μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων του σπονδύλου γίνεται χρήση των πληροφοριών που δίνονται από αξονικές τομογραφίες.

Συνήθης μορφή εξαγωγής των τομογραφιών αποτελεί η μορφή DICOM (Digital Imaging and Communication in Medicine) η οποία υποστηρίζεται, για τη μετέπειτα επεξεργασία των τομογραφιών, από αρκετά εμπορικά προγράμματα επεξεργασίας ιατρικών τομογραφιών (πχ MIMICS, MedCAD).

Η επεξεργασία των τομογραφιών είναι απαραίτητη καθώς κατά τη σάρωση από τον τομογράφο πέρα από τον εξεταζόμενο σπόνδυλο εμφανίζονται και μέρη από γειτονικούς σπονδύλους που πρέπει να αφαιρεθούν.

Με βάση τις φωτεινότητες κάθε εικονοστοιχείου (Hounsfield Unit ή HU) προκύπτουν, με γραμμικό τρόπο, οι αντίστοιχες πυκνότητες των στοιχείων του οστού. Η γραμμική σχέση μεταξύ φωτεινότητας και οστικής πυκνότητας εξαρτάται από τον τομογράφο στον οποίο πραγματοποιήθηκε η εξέταση. Για το συγκεκριμένο τομογράφο που χρησιμοποιήθηκε, έχει βρεθεί από μελέτες στο εργαστήριο, ότι η εξίσωση που συνδέει οστική πυκνότητα (BMD) και φωτεινότητα (CT number) είναι της μορφής:

$$BMD = 0,001 \cdot (CT\ number) - 0,072 \quad (\text{σχέση } 9.1)$$

Το μέτρο ελαστικότητας συνδέεται άμεσα με την οστική πυκνότητα και συνεπώς έμμεσα με τη φωτεινότητα. Ανάλογα με την παραδοχή που κάνουμε για το υλικό του οστού προκύπτουν και διαφορετικές τιμές μέτρου ελαστικότητας E . Θεωρώντας ισοτροπικό μοντέλο υλικού και εκθετική συσχέτιση μεταξύ μέτρου ελαστικότητας και οστικής πυκνότητας από τη βιβλιογραφία (Morgan et al. 2003 και Viceconti et al. 1998) βρέθηκαν οι σχέσεις που συνοψίζονται στον Πίνακα 9.1.

Πίνακας 9.1 Σχέση σύνδεσης Πυκνότητας-Μέτρου Ελαστικότητας

Σχέση Πυκνότητας-Μέτρου Ελαστικότητας	Είδος οστού
$E(GPa) = 4,73 \cdot \rho^{1,56} (kg / m^3)$	Σπογγώδες
$E(GPa) = 4,25 \cdot \rho^3 (kg / m^3)$	Φλοιώδες

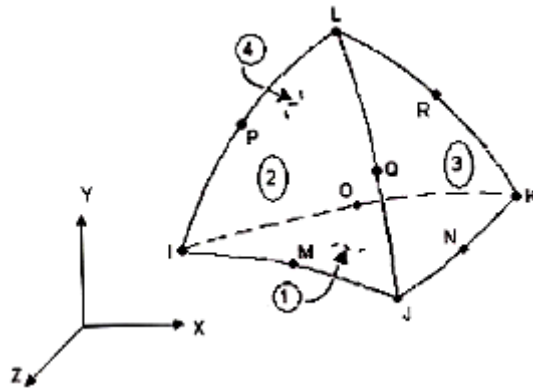
Με την παραδοχή ότι ο σπόνδυλος αποτελείται από 9 διαφορετικά υλικά, καταλήγουμε σε 9 διαστήματα πυκνοτήτων (ένα για κάθε υλικό) και αντίστοιχα μέτρα ελαστικότητας ανά υλικό (με βάση την κεντρική τιμή του εύρους των πυκνοτήτων ανά βαθμίδα), όπως παρουσιάζει αναλυτικά ο Πίνακας 9.2.

Πίνακας 9.2 Μέτρα Ελαστικότητας των εννέα υλικών που συνθέτουν τον ανθρώπινο σπόνδυλο

Υλικό	Φωτεινότητα (CT number)	Πυκνότητα (BMD) (g/cm^3)	Μέτρο Ελαστικότητας E (MPa= $10^6 N/mm^2$)
1	...-100	0-0,028	1
2	100-200	0,028-0,128	88
3	200-300	0,128-0,228	320
4	300-400	0,228-0,328	642
5	400-500	0,328-0,428	1556
6	500-600	0,428-0,528	2062
7	600-800	0,528-0,728	2861
8	800-1000	0,728-0,928	3987
9	1000-1400	0,928-1,328	6100

Στην παρούσα διπλωματική εργασία η διερεύνηση της διαδικασίας της οστικής ανακατασκευής στον τριδιάστατο οσφυϊκό σπόνδυλο O_1 έγινε ως εξής:

Επιλέχθηκαν πεπερασμένα στοιχεία τύπου πυραμίδας *solid92* (Σχήμα 9.1) που είναι τριδιάστατα πεπερασμένα στοιχεία δεύτερης τάξης (10κομβικά) και κατασκευάστηκε πλέγμα 45.417 στοιχείων.



Σχήμα 9.1 Πεπερασμένο στοιχείο Solid 92

Το στοιχείο *solid92* εκτός από τους τέσσερις γωνιακούς κόμβους (στις συνδέσεις των ακμών) έχει άλλους έξι ενδιάμεσους. Με αυτό τον τρόπο μπορεί να αναπαραστήσει πιστότερα τις επιθυμητές γεωμετρίες καθώς ακολουθεί την καμπυλότητα της προς προσέγγιση γραμμής. Ακόμη, οι βαθμοί ελευθερίας του *Solid92* είναι οι μετατοπίσεις κατά τους τρεις άξονες του για κάθε κόμβο. Τέλος η δυνατότητα χρήσης ισοπαραμετρικού στοιχείου δεν υφίσταται εφόσον δεν μπορεί να γίνει δομημένο πλέγμα

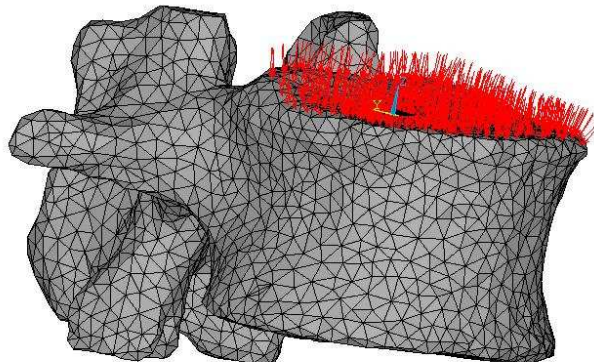
Θεωρήθηκε αρχικά ο σπόνδυλος ως ένα συμπαγές υλικό, με μέτρο ελαστικότητας ενός από τα εννέα υλικά που αναφέρει ο Πίνακας 9.2. Ως αρχική πυκνότητα θεωρήθηκε η μέση τιμή του εύρους των πυκνοτήτων που αποτελούν τα όρια του επιλεγμένου υλικού.

Στην υπάρχουσα γεωμετρία του σπονδύλου και με επιλεγμένο υλικό, κι επομένως αρχικές τιμές πυκνότητας ρ και μέτρου ελαστικότητας E , ορίστηκαν οι οριακές συνθήκες. Πιο συγκεκριμένα η κάτω επιφυσιακή πλάκα θεωρήθηκε πακτωμένη (δέσμευση όλων των βαθμών ελευθερίας των κόμβων που ανήκουν σε αυτή) και στην άνω επιφυσιακή πλάκα εφαρμόστηκε ομοιόμορφα κατανεμημένη δύναμη μέτρου 800N και φοράς προς την κάτω επιφυσιακή πλάκα του σπονδυλικού σώματος. Το εμβαδό της άνω επιφυσιακής πλάκας είναι ίσο με $A = 1234,57 \text{ mm}^2$. Επομένως η πίεση του σπονδύλου έχει μέτρο

$$P = \frac{F}{A} = \frac{800}{1234,57} \cong 0,648 \text{ MPa}$$

Θεωρήθηκε ότι οι αποφύσεις του σπονδύλου δεν δέχονται κάποια φόρτιση.

Στο Σχήμα 9.2 παρουσιάζεται το μοντέλο του τριδιάστατου οσφυϊκού σπονδύλου O_1 και η εφαρμοζόμενη πίεση.



Σχήμα 9.2 Μοντέλο τριδιάστατου σπονδύλου και εφαρμοζόμενη πίεση

Σημειώνεται ότι στη γεωμετρία του πραγματικού σπονδύλου εμφανίζεται μία ασυμμετρία. Η αριστερή πλευρά του σπονδυλικού σώματος έχει μικρότερο ύψος με τη δεξιά πλευρά.

Κάτω από τη συγκεκριμένη καταπόνηση το υλικό αναγκάζεται να μεταβάλλει τις μηχανικές του ιδιότητες ώστε να ανταπεξέλθει στις μηχανικές απαιτήσεις του περιβάλλοντος. Ως αντιπροσωπευτική θεωρία της οστικής ανακατασκευής επιλέξαμε αυτή της Πυκνότητας Τροπικής Ενέργειας (*Strain Energy Density*) όπως περιγράφηκε στα προηγούμενα κεφάλαια και ως καταλληλότερο μοντέλο, λόγω καλύτερης σύγκλισης και δυσκαμψίας, αυτό με την εισαγωγή των δύο μη γραμμικοτήτων.

Μετά την εφαρμογή των οριακών συνθηκών πραγματοποιείται μια πρώτη επίλυση. Οι μεταβολές που προκύπτουν για την πυκνότητα κάθε πεπερασμένου στοιχείου από τη σχέση της ανακατασκευής προστίθενται στην αρχική πυκνότητα του οστού (κοινή για όλα τα στοιχεία) κι έτσι προκύπτουν οι νέες οστικές πυκνότητες. Ακολούθως, υπολογίζονται τα αντίστοιχα μέτρα ελαστικότητας ως εξής: Οι τιμές πυκνότητας που έχουν προκύψει τοποθετούνται στα αντίστοιχα όρια των πυκνοτήτων των εννέα υλικών του Πίνακα 9.2 και λαμβάνεται ως τελική τιμή του E αυτή που αντιστοιχεί σε κάθε υλικό. Στη συνέχεια, ακολουθεί νέα επίλυση με τις νέες ιδιότητες υλικού που καθορίστηκαν για κάθε Π.Σ.. Αυτή η διαδικασία συνεχίζεται για το χρόνο που επιλέγεται κάθε φορά.

Πραγματοποιήθηκαν 3 διαφορετικές δοκιμές για το συγκεκριμένο σπόνδυλο. Η διαφορά των δοκιμών αυτών έγκειται στη διαφορετική τιμή αρχικής πυκνότητας (και αντίστοιχου υλικού) που θεωρήθηκε για την εκκίνηση της οστικής ανακατασκευής.

- Στην πρώτη δοκιμή θεωρήθηκε ως αρχικό υλικό το έβδομο καθώς σε αυτό παρουσιάζεται η μέση τιμή του εύρους των πυκνοτήτων. Συγκεκριμένα, τέθηκε ως αρχική πυκνότητα η κεντρική τιμή μεταξύ των ορίων του έβδομου υλικού δηλαδή $\rho_0 = \frac{0,528 + 0,728}{2} = 0,628 \frac{g}{cm^3}$.
- Στη δεύτερη δοκιμή εκκινήσαμε τη διαδικασία με αρχική τιμή πυκνότητας του συμπαγούς τριδιάστατου σπονδύλου αυτή του τρίτου υλικού δηλαδή: $\rho_0 = \frac{0,128 + 0,228}{2} = 0,178 \frac{g}{cm^3}$.
- Τέλος, στην τρίτη δοκιμή επιλέξαμε ως αρχική πυκνότητα αυτή του ένατου υλικού δηλαδή: $\rho_0 = \frac{0,928 + 1,328}{2} = 1,128 \frac{g}{cm^3}$.

Πριν την εφαρμογή της διαφορικής εξίσωσης της οστικής ανακατασκευής στο μοντέλο του τριδιάστατου σπονδύλου πρέπει να προηγηθεί ο προσδιορισμός των συντελεστών k και B .

Η σταθερά k της σχέσης της οστικής ανακατασκευής διαμορφώνεται από τις συνθήκες της δοκιμής και αντιπροσωπεύει την τιμή εκείνη του λόγου $\frac{U}{\rho}$ για την οποία καμία αλλαγή δεν πρόκειται να προκληθεί στην οστική πυκνότητα (τιμή διέγερσης αναφοράς). Είναι λοιπόν προφανές ότι η τάξη μεγέθους της σταθεράς k θα πρέπει να προσαρμοστεί στην τάξη μεγέθους των τιμών $\frac{U}{\rho}$ για να λειτουργεί όντως ως ρυθμιστής της μεταβολής της οστικής πυκνότητας.

Ο συντελεστής B αντιπροσωπεύει την επιρροή που έχει η διαφορά μεταξύ διέγερσης και αναφοράς στο ρυθμό μεταβολής της πυκνότητας. Από τη διαφορική εξίσωση της οστικής ανακατασκευής $\frac{d\rho}{dt} = B \cdot \sum_{i=1}^n \left[\frac{U_i}{\rho_i} - k \right]$, πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας με την αναφορά k προκύπτει: $\frac{d\rho}{dt} = B \cdot k \cdot \sum_{i=1}^n \left[\frac{U_i}{\rho_i k} - 1 \right]$.

9.1.1 Ορισμός αναφοράς k

Η τιμή της σταθεράς k σύμφωνα με τη βιβλιογραφία (Jovanovic 2004) για μέτρο ελαστικότητας μεταβαλλόμενο, συναρτήσει της πυκνότητας, από MPa έως GPa είναι 0,006 J/g (τάξη μεγέθους 10^{-3}). Οι τιμές $\frac{U}{\rho}$ για τη φόρτιση που έχει επιλεγεί στο συγκεκριμένο παράδειγμα είναι μία τάξη μεγέθους μικρότερες των αντίστοιχων τιμών που

προκύπτουν από τα παραδείγματα της βιβλιογραφίας. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι εφαρμοζόμενες πιέσεις της βιβλιογραφίας ήταν κι αυτές μια τάξη μεγέθους μεγαλύτερες της πίεσης που εφαρμόζεται. Μια πρώτη εκτίμηση θα ήταν λοιπόν τάξη μεγέθους 10^{-4} και $k=0,0006$. Αφού καθορίστηκε η τάξη μεγέθους απομένει ο ακριβέστερος προσδιορισμός της τιμής της σταθεράς k . Η τιμή αυτή της αναφοράς k εφαρμοζόμενη στη διαφορική εξίσωση της οστικής ανακατασκευής προκαλεί μείωση πυκνότητας ακόμα και για τις μεγαλύτερες εμφανιζόμενες πυκνότητες τροπικής ενέργειας. Αυτό σημαίνει ότι η τιμή της πρέπει να μειωθεί, και έτσι επελέγη η τιμή $k=0,0002$.

9.1.2 Ορισμός συντελεστή B

Ο σταθερός συντελεστής B που προκύπτει, σε αντιστοιχία με το μοντέλο του Mullender, είναι $B = 1 \cdot 0,0002 = 0,0002 \text{ (g/cm}^3\text{)}^2 / (\text{MPa} \cdot \text{time unit})$. Όπως προαναφέρθηκε, έχει επιλεγεί μοντέλο με εκθετικά μεταβαλλόμενο συντελεστή $B(t)$ οπότε προκύπτουν οι αντίστοιχοι συντελεστές:

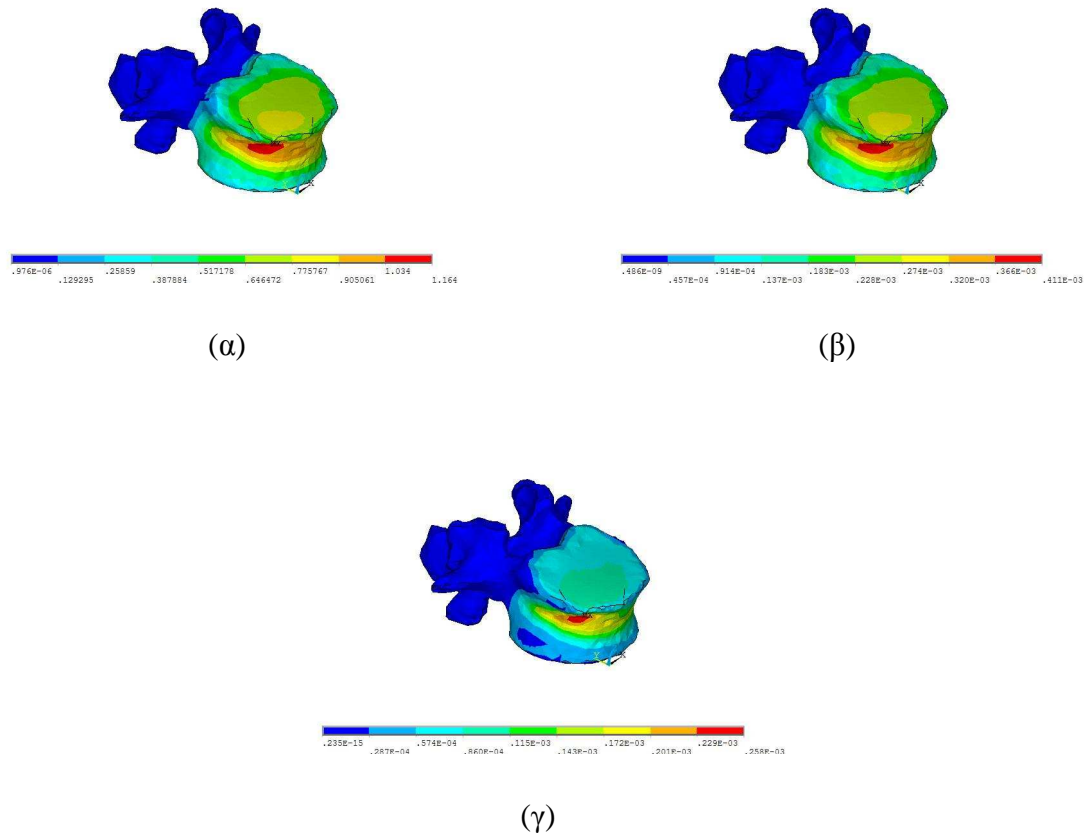
$$B_0 = 1 \cdot 0,0002 = 0,02 \text{ (g/cm}^3\text{)}^2 / (\text{MPa} \cdot \text{time unit}) \text{ και}$$

$$B_T = 0,0001 \text{ (g/cm}^3\text{)}^2 / (\text{MPa} \cdot \text{time unit})$$

9.2 Παρουσίαση αποτελεσμάτων τριδιάστατου σπονδύλου

9.2.1 Εκκίνηση από υλικό 7 ($\rho_0=0,628 \text{ g/cm}^3$)

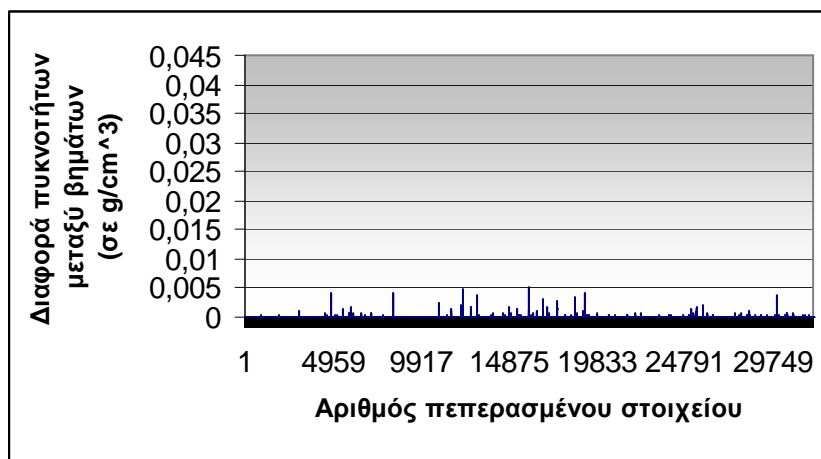
Αρχικά εφαρμόζουμε στον τριδιάστατο σπόνδυλο την πίεση που αντιστοιχεί στην φόρτιση που δέχεται ο ανθρώπινος σπόνδυλος. Η φόρτιση αυτή αντιστοιχεί σε πίεση 0,648 MPa στην άνω επιφυσιακή πλάκα. Η κατανομή των ισοδύναμων τάσεων κατά Von Mises που προκύπτει, μετά την εφαρμογή της παραπάνω πίεσης, παρουσιάζεται στο Σχήμα 9.3(α). Η μέγιστη τιμή της εμφανιζόμενης τάσης είναι 1,164 MPa. Η κατανομή των ισοδύναμων παραμορφώσεων κατά Von Mises και της πυκνότητας τροπικής ενέργειας δίνονται στο Σχήμα 9.3 (β) και (γ) αντίστοιχα. Η μέγιστη τιμή της εμφανιζόμενης παραμόρφωσης είναι $0,411 \text{E-3 strains}$ (0,0411%). Τέλος, η μέγιστη τιμή της εμφανιζόμενης πυκνότητας τροπικής ενέργειας είναι $2,58 \text{ E-3 J/cm}^3$ ενώ η ελάχιστη είναι $0,235 \text{E-15 J/cm}^3$.



Σχήμα 9.3 Τάσεις κατά Von Mises, παραμορφώσεις κατά Von Mises και πυκνότητα τροπικής ενέργειας ύστερα από την εφαρμογή της υπάρχουσας πίεσης

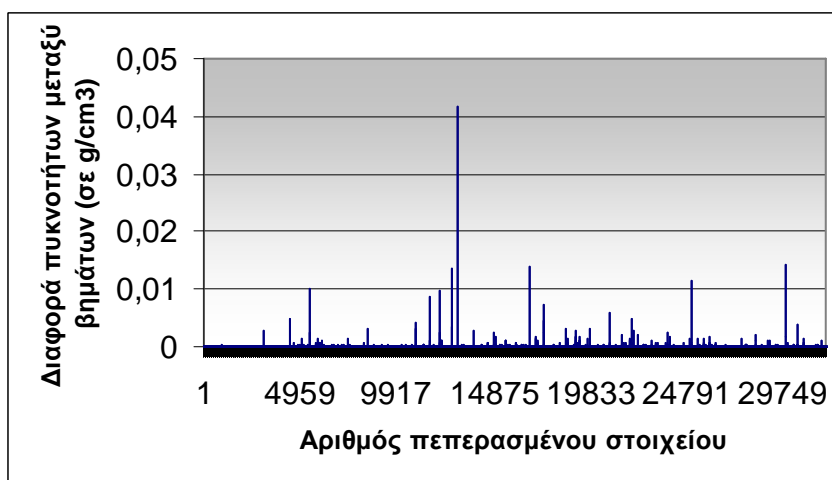
Έναρξη της αριθμητικής επίλυσης της διαφορικής εξίσωσης της οστικής ανακατασκευής:

Η αύξηση των υπολογισμών κατά το πέρασμα από το διδιάστατο στο τριδιάστατο μοντέλο, λόγω μεγαλύτερου πλήθους στοιχείων, αλλά και ο μεγαλύτερος απαιτούμενος χρόνος σύγκλισης οδήγησαν στην έρευνα των περιθωρίων αύξησης του χρονικού βήματος. Πραγματοποιήθηκε μία δοκιμή για χρόνο 0,6 χρονικών μονάδων με βήμα 0,06 και μία αντίστοιχη με βήμα 0,2. Προέκυψαν δε σε τιμές πυκνοτήτων, οι διαφορές που παρουσιάζονται στο Σχήμα 9.4:



Σχήμα 9.4 Διαφορές πυκνοτήτων για τα πρώτα 32.000 πεπερασμένα στοιχεία μεταξύ βημάτων 0,06 και 0,2

Έπειτα, πραγματοποιήθηκε μία επιπλέον δοκιμή για βήμα 0,6 και χρόνο 0,6. Τα αποτελέσματα των πυκνοτήτων συγκρίθηκαν με εκείνα για βήμα 0,2 και προέκυψαν οι διαφορές πυκνότητας στο Σχήμα 9.5.

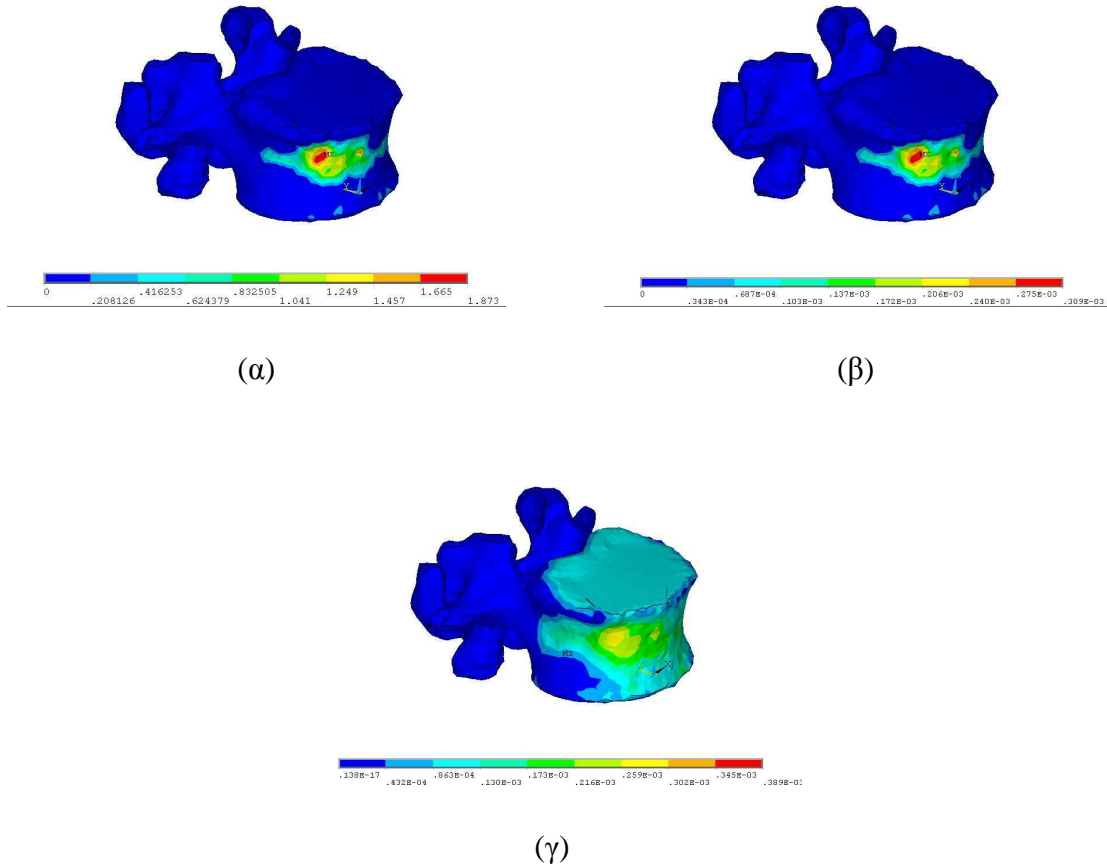


Σχήμα 9.5 Διαφορές πυκνοτήτων για τα πρώτα 32.000 πεπερασμένα στοιχεία μεταξύ βημάτων 0,2 και 0,6

Τα αποτελέσματα στο Σχήμα 9.4 κρίθηκαν ικανοποιητικά σε αντίθεση με εκείνα στο Σχήμα 9.5 κι επομένως επιλέχθηκε βήμα ίσο με 0,2 χρονικές μονάδες.

Στη συνέχεια υπολογίζουμε από τη διαφορική εξίσωση της οστικής ανακατασκευής τις νέες πυκνότητες και τα νέα μέτρα ελαστικότητας ανάλογα με την περιοχή στην οποία ανήκουν οι νέες τιμές πυκνότητας. Ύστερα από 500 επαναλήψεις (αντίστοιχος χρόνος 100 χρονικές μονάδες) οι κατανομές των ισοδύναμων τάσεων κατά

Von Mises, των ισοδύναμων παραμορφώσεων κατά Von Mises και της πυκνότητας τροπικής ενέργειας έχουν τη μορφή στο Σχήμα 9.6 (α), (β) και (γ) αντίστοιχα.

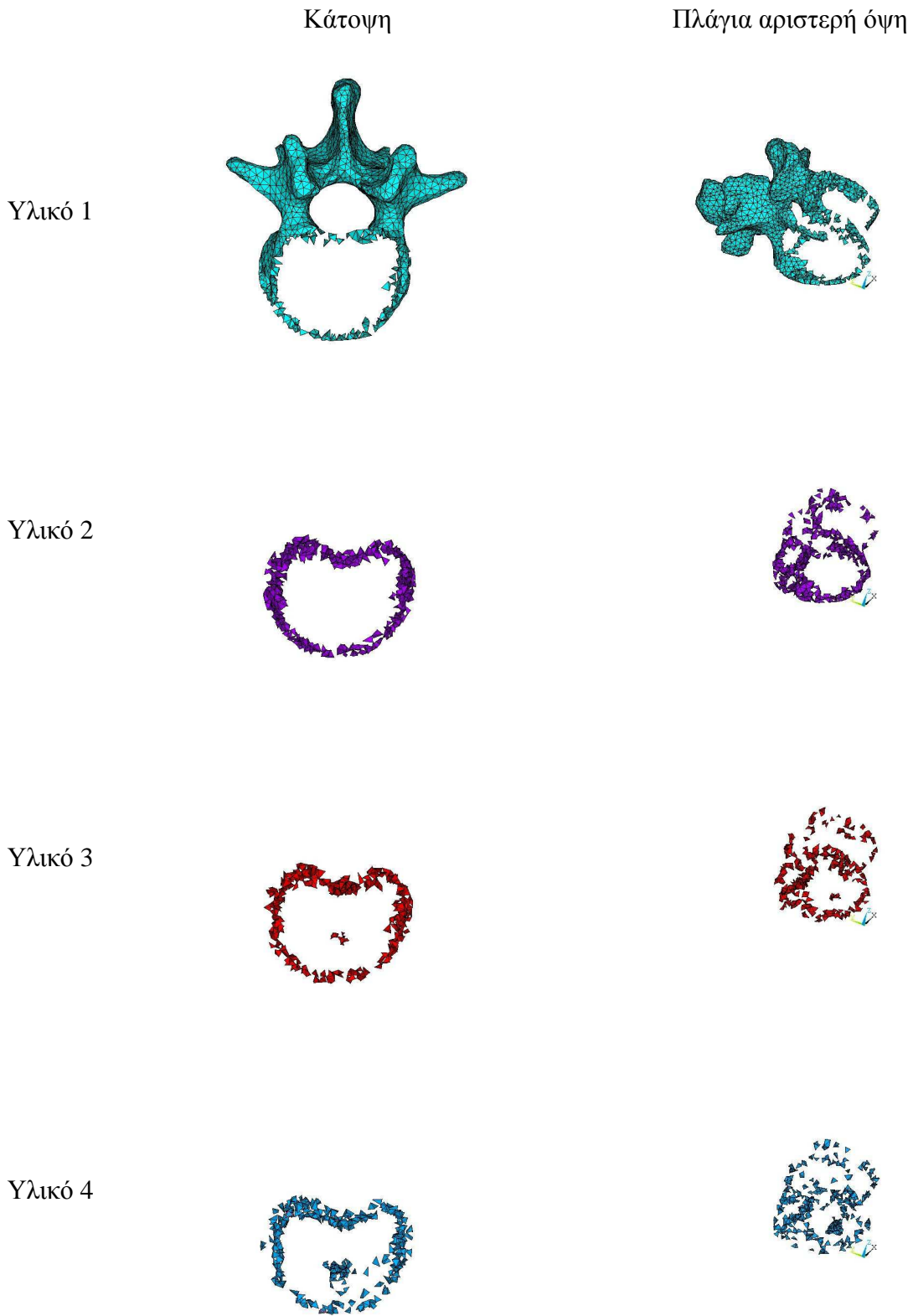


Σχήμα 9.6 Τάσεις κατά Von Mises, παραμορφώσεις κατά Von Mises και πυκνότητα τροπικής ενέργειας για αρχικό υλικό το έβδομο ύστερα από 500 επαναλήψεις

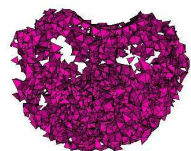
Οι μέγιστες τάσεις κατά Von Mises εμφανίζονται στην αριστερή πλευρά του σπονδυλικού σώματος. Η μέγιστη εμφανιζόμενη τιμή τάσης (άνω όριο περιοχής κόκκινου χρώματος) είναι 1,873 MPa ενώ η ελάχιστη τιμή της (κάτω όριο περιοχής μπλε χρώματος) εμφανίζεται στις αποφύσεις, οι οποίες είναι αφόρτιστες στην συγκεκριμένη περίπτωση μελέτης.

Οι μέγιστες παραμορφώσεις κατά Von Mises έχουν την ίδια κατανομή με αυτή των τάσεων. Η μέγιστη τιμή τους είναι 0,309E-3 strains= 0,031% . Τέλος, η μέγιστη πυκνότητα τροπικής ενέργειας εμφανίζει επίσης παρόμοια κατανομή και έχει μέγιστη τιμή 0,389 E-3 J/cm³ και ελάχιστη τιμή της είναι 0,138 E-17 J/cm³.

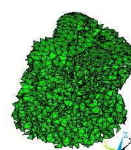
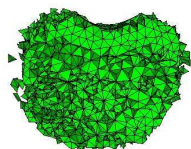
Η τελική κατανομή των υλικών όπως προέκυψε ύστερα από 500 επαναληπτικά βήματα έχει τη μορφή που φαίνεται στο Σχήμα 9.7.



Υλικό 5



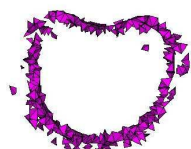
Υλικό 6



Υλικό 7



Υλικό 8



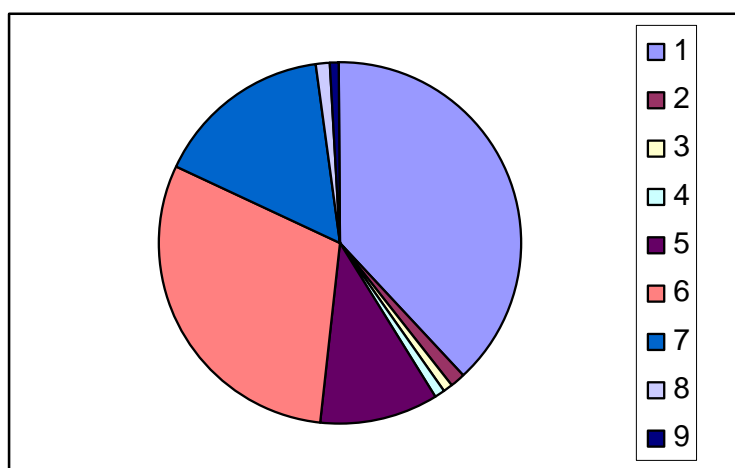
Υλικό 9



Σχήμα 9.7 Κατανομή υλικών στο εσωτερικό του σπονδύλου μετά από 100 χρονικές μονάδες

Από το Σχήμα 9.7 σχήματα παρατηρούμε τα ακόλουθα: το υλικό 1 εμφανίζεται στις αποφύσεις και στα σημεία σύνδεσης των αποφύσεων με το σπονδυλικό σώμα. Τα υλικά 2, 3 και 4 εμφανίζονται περιφερειακά πάνω στο σπονδυλικό σώμα ενώ τα υλικά 5, 6 και 7 εσωτερικά αυτών. Το υλικό 6 εμφανίζεται να είναι το πιο συμπαγές. Τα υλικά 8 και 9 εμφανίζονται περιφερειακά στο σπονδυλικό σώμα, στα σημεία που αντιστοιχούν στην περιοχή μεγίστης τροπικής ενέργειας. Τέλος, το υλικό 9 εμφανίζεται ενισχυμένο στην αριστερή πλευρά του σπονδυλικού σώματος στην περιοχή που υπάρχει η ασυμμετρία που αναφέρθηκε πιο πάνω.

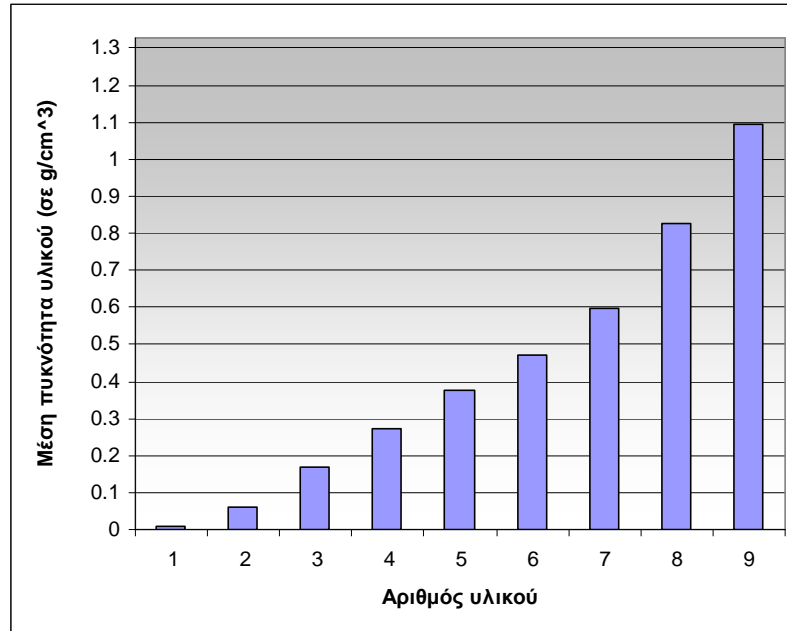
Στο Σχήμα 9.8 παρουσιάζονται οι όγκοι κάθε υλικού ως ποσοστό του συνολικού όγκου του σπονδύλου. Σημειώνεται ότι ο συνολικός όγκος του σπονδύλου είναι $V_{tot} = 62.694,5 \text{ mm}^3$



Σχήμα 9.8 Όγκος κάθε υλικού ως ποσοστό του συνολικού όγκου του σπονδύλου

Παρατηρούμε ότι το μεγαλύτερο ποσοστό του συνολικού όγκου του υλικού καταλαμβάνει το πρώτο υλικό. Το έκτο υλικό εμφανίζεται επίσης με υψηλό ποσοστό, περίπου 30%. Τα υλικά 7 και 5 εμφανίζονται σε ποσοστά 15,9% και 10,58%. Τέλος, τα

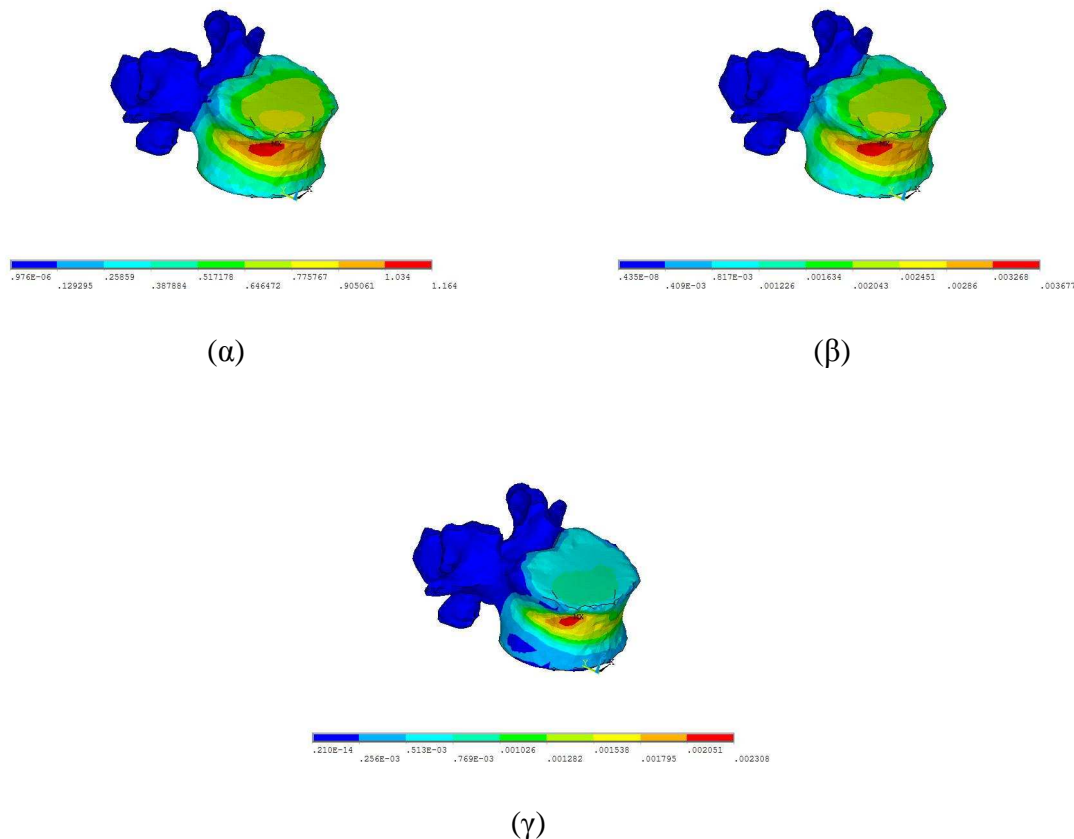
υλικά 2, 3, 4, 8 και 9 εμφανίζονται σε χαμηλά ποσοστά: από 0,76% έως 1,36%. Στο Σχήμα 9.9 παρουσιάζεται η μέση τιμή της πυκνότητας κάθε υλικού μετά την ολοκλήρωση της διαδικασίας της οστικής ανακατασκευής.



Σχήμα 9.9 Μέση πυκνότητα κάθε υλικού μετά την ολοκλήρωση της διαδικασίας της ανακατασκευής

9.2.2 Εκκίνηση από υλικό 3 ($\rho_0=0,178 \text{ g/cm}^3$)

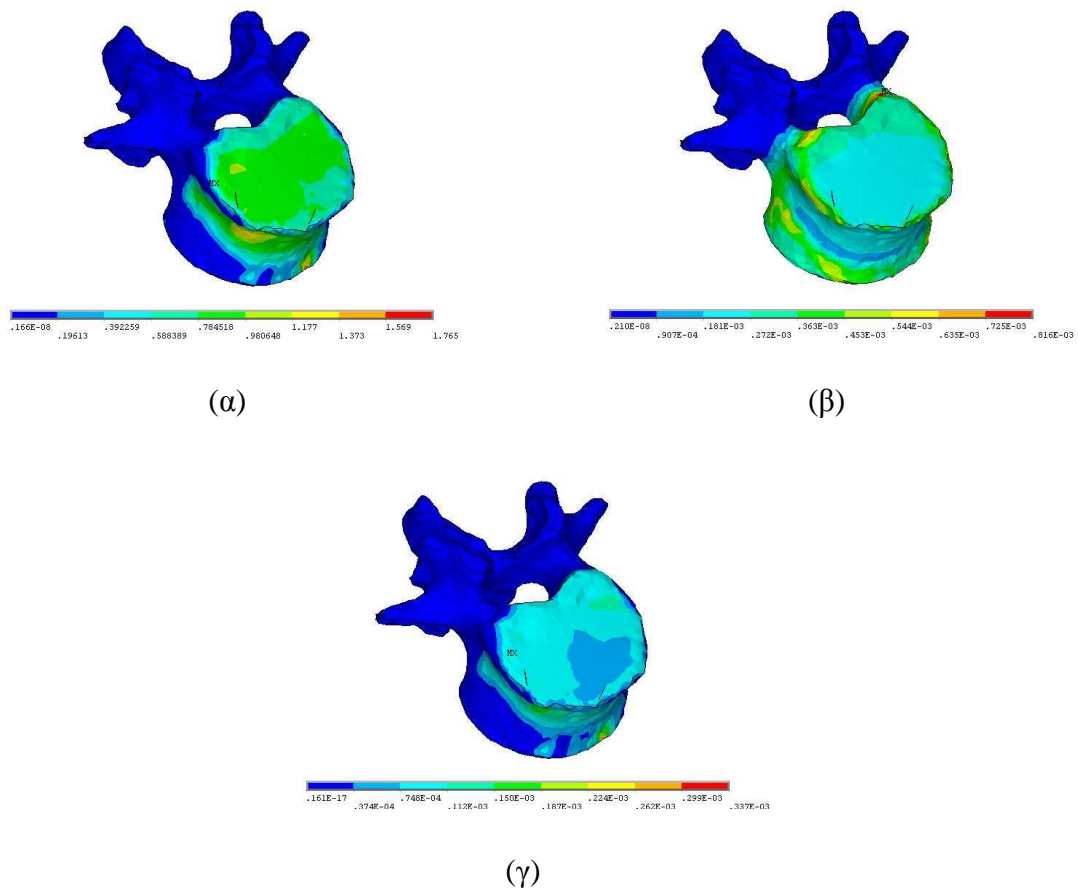
Οι οριακές συνθήκες και σε αυτή την περίπτωση είναι οι ίδιες, συνεπώς και πάλι εφαρμόζεται φόρτιση που αντιστοιχεί σε πίεση 0,648 MPa στην άνω επιφυσιακή πλάκα. Η κατανομή των τάσεων κατά Von Mises παρουσιάζεται στο Σχήμα 9.10(α) και η μέγιστη τιμή της είναι 1,164 MPa. Παρατηρείται ότι η κατανομή της τάσης, όντας ανεξάρτητη από το υλικό, είναι ίδια για εκκίνηση με το τρίτο υλικό και εκκίνηση με το έβδομο υλικό. Η κατανομή των παραμορφώσεων κατά Von Mises και της πυκνότητας τροπικής ενέργειας παρουσιάζονται αντίστοιχα στο Σχήμα 9.10 (β) και (γ) αντίστοιχα. Η μέγιστη τιμή της εμφανιζόμενης παραμόρφωσης είναι 0,00368 strains ενώ η μέγιστη τιμή της εμφανιζόμενης πυκνότητας τροπικής ενέργειας είναι 0,002308 J/cm³ και η ελάχιστη είναι 0,210 E-14 J/cm³.



Σχήμα 9.10 Τάσεις κατά Von Mises, παραμορφώσεις κατά Von Mises και πυκνότητα τροπικής ενέργειας ύστερα από την εφαρμογή της υπάρχουσας πίεσης

Εφαρμογή της πίεσης στην υπάρχουσα γεωμετρία (πριν την έναρξη της αριθμητικής επίλυσης της διαφορικής εξίσωσης της οστικής ανακατασκευής)

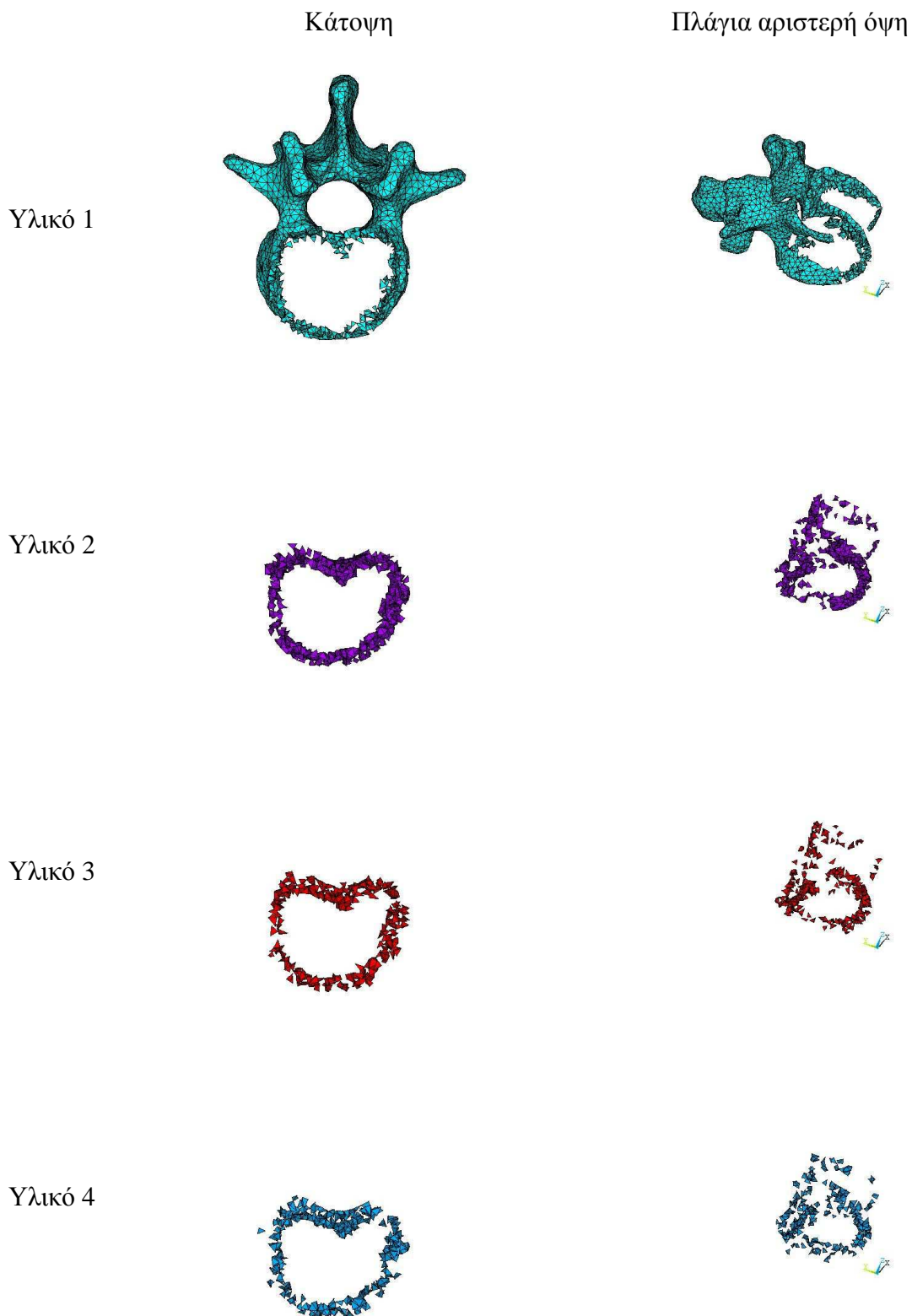
Στη συνέχεια υπολογίζουμε από τη διαφορική εξίσωση της οστικής ανακατασκευής νέες πυκνότητες και νέα μέτρα ελαστικότητας ανάλογα με την περιοχή στην οποία ανήκουν οι νέες τιμές πυκνότητας. Επειδή η εκκίνηση με το συγκεκριμένο υλικό εμφάνιζε πιο αργή μεταβολή επιλέχθηκαν 750 επαναλήψεις έτσι ώστε να προλάβουν να εμφανισθούν και τα εννέα υλικά. Ύστερα από 750 επαναλήψεις (αντίστοιχος χρόνος 150 χρονικές μονάδες) οι κατανομές των ισοδύναμων τάσεων κατά Von Mises, των ισοδύναμων παραμορφώσεων κατά Von Mises και της πυκνότητας τροπικής ενέργειας έχουν τη μορφή του Σχήμα 9.11 (α), (β) και (γ) αντίστοιχα.



Σχήμα 9.11 Τάσεις κατά Von Mises, παραμορφώσεις κατά Von Mises και πυκνότητα τροπικής ενέργειας για αρχικό υλικό το τρίτο ύστερα από 750 επαναλήψεις

Η μέγιστη εμφανιζόμενη τιμή τάσης (άνω όριο περιοχής κόκκινου χρώματος) είναι 1,765 MPa ενώ η ελάχιστη τιμή της (κάτω όριο περιοχής μπλε χρώματος) εμφανίζεται στις αποφύσεις, οι οποίες έχουν θεωρηθεί αφόρτιστες. Οι μέγιστες παραμορφώσεις κατά Von Mises έχουν την ίδια κατανομή με αυτή των τάσεων. Η μέγιστη τιμή τους είναι $0,816E-3 \text{ strains} = 0,082\%$. Τέλος η μέγιστη πυκνότητα τροπικής ενέργειας εμφανίζει επίσης παρόμοια κατανομή και έχει μέγιστη τιμή $0,337 E-3 \text{ J/cm}^3$ και ελάχιστη τιμή της είναι $0,161 E-17 \text{ J/cm}^3$.

Η τελική κατανομή των υλικών όπως προέκυψε ύστερα από 750 επαναληπτικά βήματα έχει τη μορφή που φαίνεται στο Σχήμα 9.12.



Υλικό 5



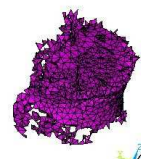
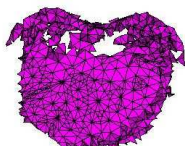
Υλικό 6



Υλικό 7



Υλικό 8



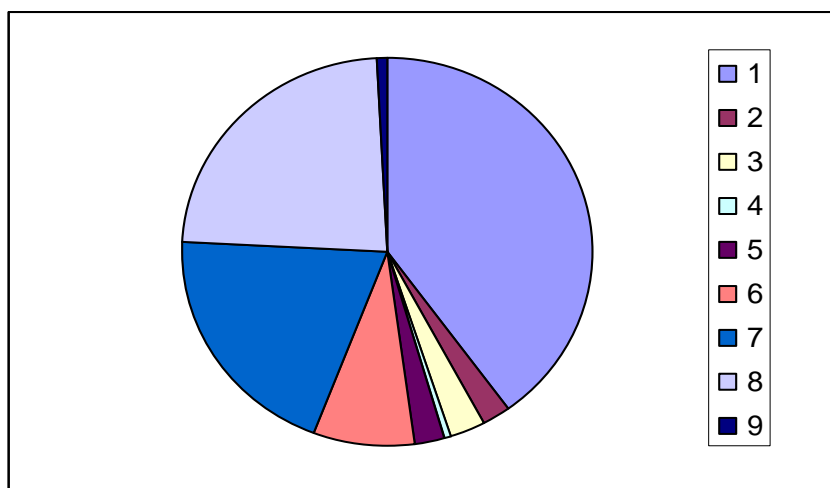
Υλικό 9



Σχήμα 9.12 Κατανομή υλικών στο εσωτερικό του σπονδύλου μετά από 150 χρονικές μονάδες

Από τα σχήματα κατανομής των υλικών παρατηρούμε τα ακόλουθα: το υλικό 1 εμφανίζεται στις αποφύσεις και στα σημεία σύνδεσης των αποφύσεων με το σπονδυλικό σώμα. Τα υλικά 2, 3, 4 και 5 εμφανίζονται περιφερειακά πάνω στο σπονδυλικό σώμα ενώ τα υλικά 6, 7 και 8 εσωτερικά αυτών. Τα υλικά 7 και 8 εμφανίζονται να είναι τα πιο συμπαγή. Το υλικό 8 εμφανίζεται κεντρικά σε αντίθεση με την αντίστοιχη κατανομή για εκκίνηση με το έβδομο υλικό. Το υλικό 9 εμφανίζεται περιφερειακά στο σπονδυλικό σώμα, στα σημεία που αντιστοιχούν στην περιοχή μεγίστης τροπικής ενέργειας. Τέλος, το υλικό 9 εμφανίζεται ενισχυμένο στην αριστερή πλευρά του σπονδυλικού σώματος στην περιοχή που υπάρχει η τοπική ανωμαλία.

Στο Σχήμα 9.13 παρουσιάζονται οι όγκοι κάθε υλικού ως ποσοστό του συνολικού όγκου του σπονδύλου. Σημειώνεται ότι ο συνολικός όγκος του σπονδύλου είναι $V_{tot} = 62.694,5 \text{ mm}^3$.

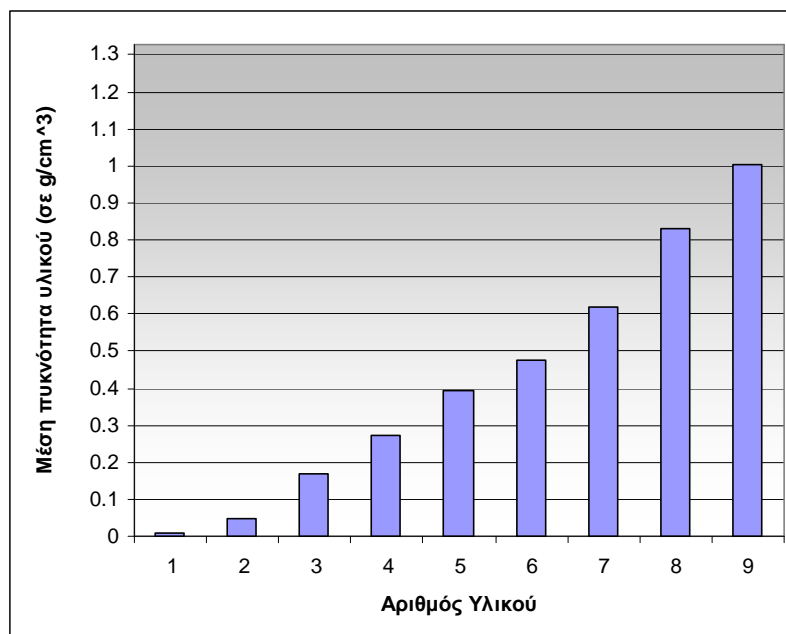


Σχήμα 9.13 Όγκος κάθε υλικού ως ποσοστό του συνολικού όγκου του σπονδύλου

Παρατηρείται ότι το υλικό 1 εμφανίζεται με μεγαλύτερο ποσοστό συγκριτικά με το αντίστοιχο για εκκίνηση με αρχικό υλικό το έβδομο. Επίσης με μεγαλύτερο ποσοστό

εμφανίζονται τα υλικά 2,3 και 7. Τα υλικά 4 και 9 εμφανίζονται με κοντινά ποσοστά. Τέλος, το υλικό 8 εμφανίζεται με αρκετά μεγαλύτερο ποσοστό σε σχέση με την προηγούμενη δοκιμή της εκκίνησης με το έβδομο υλικό.

Στο Σχήμα 9.14 παρουσιάζεται η μέση τιμή της πυκνότητας κάθε υλικού μετά την ολοκλήρωση της διαδικασίας της οστικής ανακατασκευής



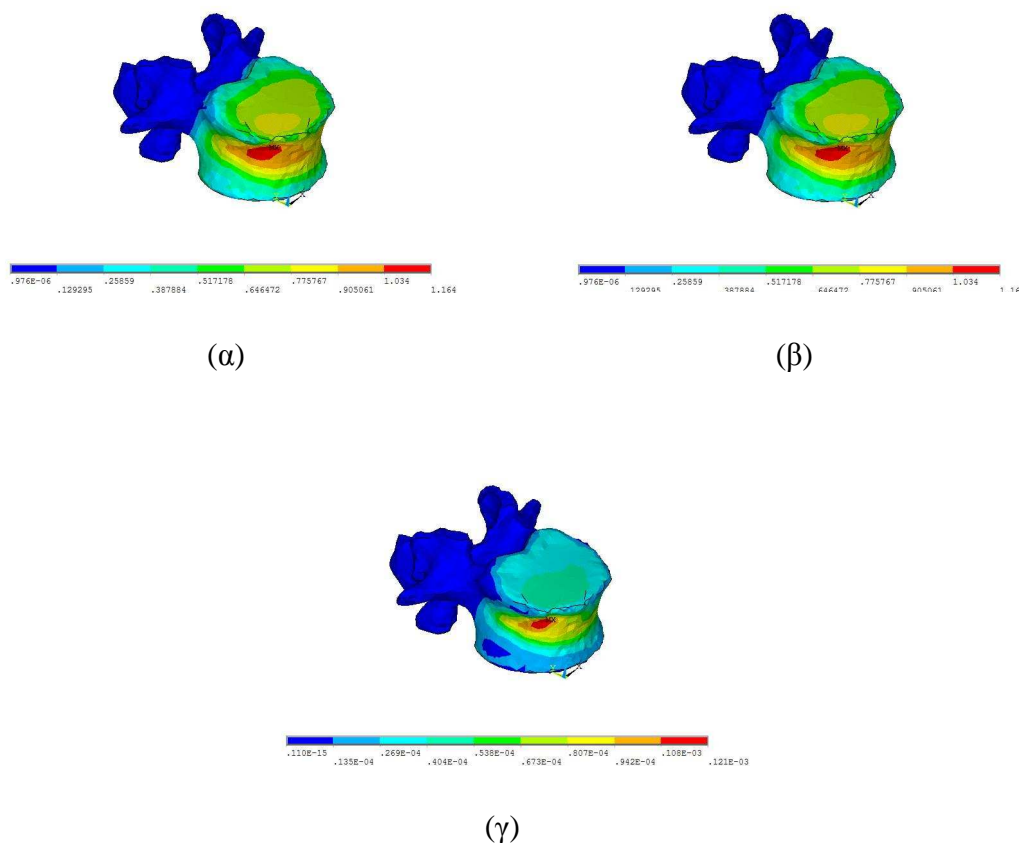
Σχήμα 9.14 Μέση πυκνότητα κάθε υλικού μετά την ολοκλήρωση της διαδικασίας της ανακατασκευής

Συγκρίνοντας το Σχήμα 9.14 με το αντίστοιχο Σχήμα 9.9 για εκκίνηση με το έβδομο αρχικό υλικό παρατηρούνται τα εξής: το πρώτο υλικό εμφανίζεται με κοντινές τιμές μέσης πυκνότητας, 0,01005 g/cm³ για εκκίνηση με το έβδομο υλικό και 0,01002 g/cm³ για εκκίνηση με το τρίτο υλικό. Το δεύτερο υλικό εμφανίζει μεγαλύτερη μέση πυκνότητα κατά 20,73% για εκκίνηση με το έβδομο υλικό με τιμή 0,05970 g/cm³. Τα υλικά 3 και 4 εμφανίζουν κοντινές τιμές, με το τρίτο υλικό να παρουσιάζει μείωση 1,29% ενώ το τέταρτο υλικό αύξηση 0,25% για εκκίνηση με το τρίτο υλικό. Το πέμπτο υλικό παρουσιάζει μεγαλύτερη μέση πυκνότητα κατά 4,3% για εκκίνηση με το τρίτο υλικό, ίση με 0,39155 g/cm³. Το έκτο, έβδομο και όγδοο υλικό εμφανίζουν μεγαλύτερη μέση πυκνότητα για εκκίνηση με το τρίτο υλικό και τιμές 0,47543 g/cm³, 0,61666 g/cm³ και 0,83106 g/cm³ αντίστοιχα. Τα αντίστοιχα ποσοστά είναι 0,96%, 2,88% και 0,65%. Τέλος, το ένατο υλικό εμφανίζει μεγαλύτερη μέση οστική πυκνότητα, κατά 0,9%, για εκκίνηση με το έβδομο υλικό και τιμή 1,09406 g/cm³.

9.2.3 Εκκίνηση από υλικό 9 ($\rho_0=1,128 \text{ g/cm}^3$)

Εφαρμογή της πίεσης στην υπάρχουσα γεωμετρία (πριν την έναρξη της ανακατασκευής)

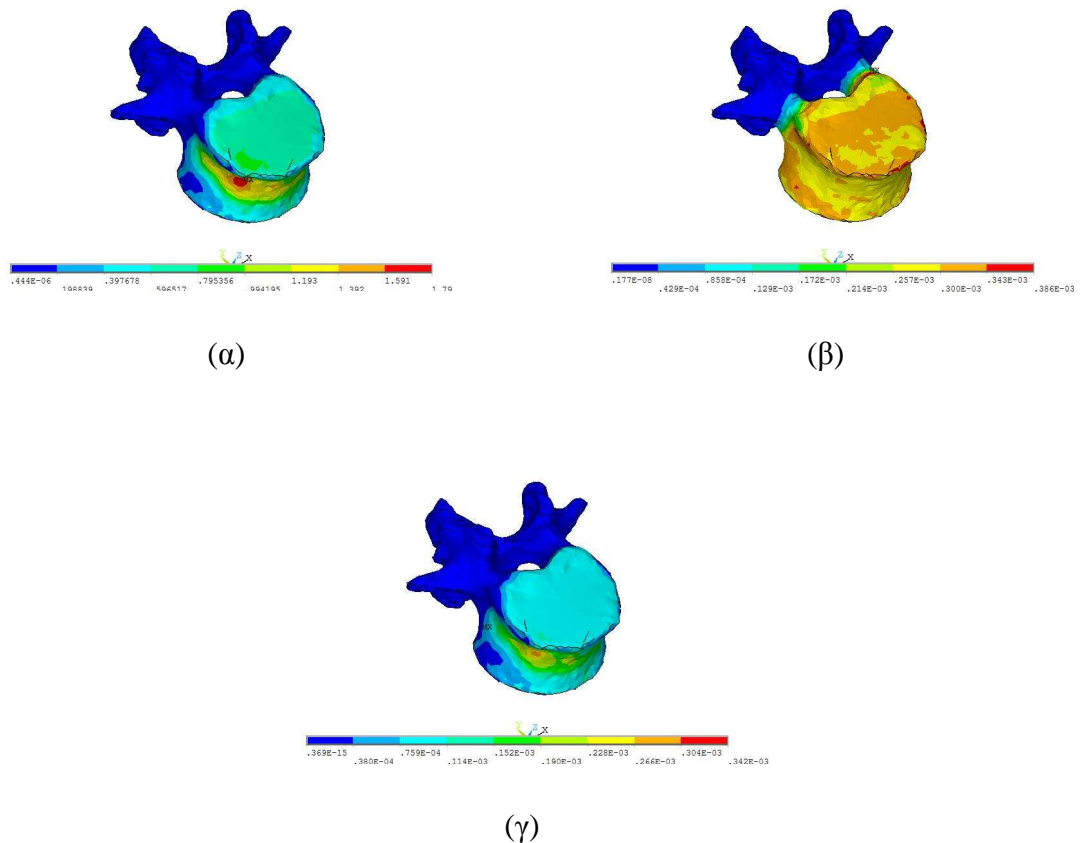
Με τις ίδιες, και πάλι, συνθήκες φόρτισης, η κατανομή των τάσεων κατά Von Mises που προκύπτει μετά την εφαρμογή της παραπάνω πίεσης παρουσιάζεται στο Σχήμα 9.15(α). Η κατανομή των τάσεων, και σε αυτή την περίπτωση, έχει κοινή μορφή και για εκκίνηση με το ένατο υλικό. Η κατανομή των παραμορφώσεων κατά Von Mises και της πυκνότητας τροπικής ενέργειας παρουσιάζονται στο Σχήμα 9.15(β) και (γ) αντίστοιχα. Η μέγιστη τιμή της εμφανιζόμενης παραμόρφωσης είναι $1,93 \text{ E-3}$. Τέλος, η μέγιστη τιμή της εμφανιζόμενης πυκνότητας τροπικής ενέργειας είναι $1,21 \text{ E-3 J/cm}^3$ ενώ η ελάχιστη τιμή της είναι $0,110 \text{ E-15 J/cm}^3$.



Σχήμα 9.15 Τάσεις κατά Von Mises, παραμορφώσεις κατά Von Mises και πυκνότητα τροπικής ενέργειας ύστερα από την εφαρμογή της υπάρχουσας πίεσης

Στη συνέχεια υπολογίζουμε από τη διαφορική εξίσωση της οστικής ανακατασκευής νέες πυκνότητες και νέα μέτρα ελαστικότητας ανάλογα με την περιοχή στην οποία ανήκουν οι νέες τιμές πυκνότητας. Στα νέα μέτρα ελαστικότητας που προκύπτουν εφαρμόζουμε ξανά τη φόρτιση του σπονδύλου.

Κατά την πραγματοποίηση της συγκεκριμένης δοκιμής επιλέχθηκαν 1000 επαναλήψεις, λόγω παρατηρούμενης πιο αργής μεταβολής. Ύστερα από 1000 επαναλήψεις (αντίστοιχος χρόνος 200 χρονικές μονάδες) οι κατανομές των ισοδύναμων τάσεων κατά Von Mises, των ισοδύναμων παραμορφώσεων κατά Von Mises και της πυκνότητας τροπικής ενέργειας έχουν τη μορφή του Σχήμα 9.16 (α), (β) και (γ) αντίστοιχα.



Σχήμα 9.16 Τάσεις κατά Von Mises, παραμορφώσεις κατά Von Mises και πυκνότητα τροπικής ενέργειας για αρχικό υλικό το έβδομο ύστερα από 1000 επαναλήψεις

Οι μέγιστες τάσεις κατά Von Mises εμφανίζονται στην αριστερή πλευρά του σπονδυλικού σώματος, στην περιοχή κάτω από την τοπική ανωμαλία που αναφέρθηκε παραπάνω. Η μέγιστη τιμή τάσης (άνω όριο περιοχής κόκκινου χρώματος) είναι 1,79 MPa. Οι μέγιστες παραμορφώσεις κατά Von Mises έχουν μέγιστη τιμή 0,386E-3 strains= 0,039%. Η πυκνότητα τροπικής ενέργειας εμφανίζει μέγιστη τιμή 0,342 E-3 J/cm³.

Η τελική κατανομή των υλικών όπως προέκυψε ύστερα από 1000 επαναληπτικά βήματα έχει τη μορφή που φαίνεται στο Σχήμα 9.17.

Κάτοψη

Πλάγια αριστερή όψη

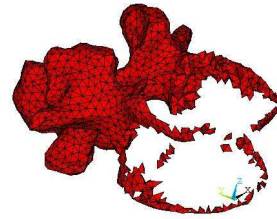
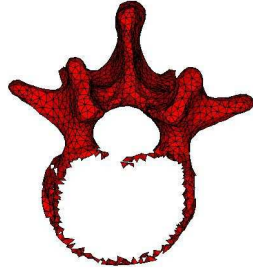
Υλικό 1

Δεν Εμφανίζεται

Υλικό 2

Δεν Εμφανίζεται

Υλικό 3



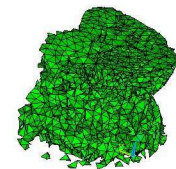
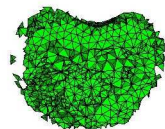
Υλικό 4



Υλικό 5



Υλικό 6



Υλικό 7



Υλικό 8



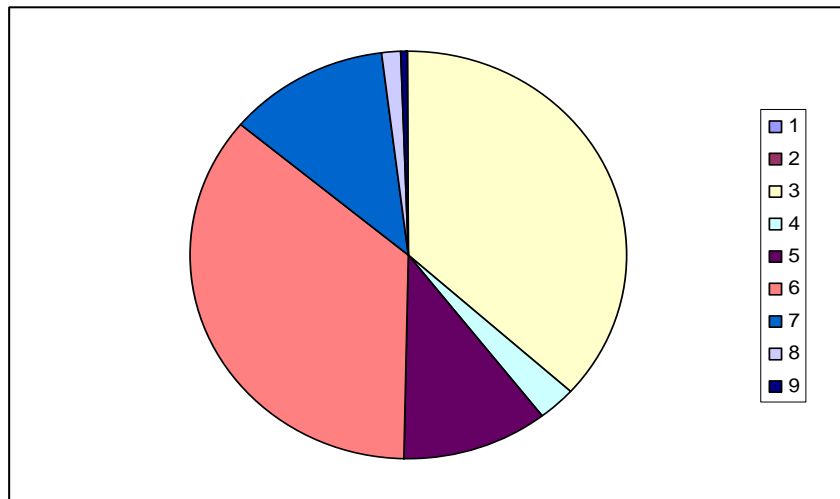
Υλικό 9



Σχήμα 9.17 Κατανομή υλικών στο εσωτερικό του σπονδύλου μετά από 150 χρονικές μονάδες

Από τα σχήματα κατανομής των υλικών παρατηρούμε τα ακόλουθα: δεν έχουν εμφανιστεί τα υλικά 1 και 2, καθώς δεν το επέτρεψε ο χαμηλός, σε σχέση με το υλικό εκκίνησης, ρυθμός μείωσης της οστικής πυκνότητας. Το υλικό 3 εμφανίζεται στις αποφύσεις και στα σημεία σύνδεσης αυτών με το σπονδυλικό σώμα ενώ τα υλικά 4 και 5 εμφανίζονται περισσότερο περιφερειακά πάνω στο σπονδυλικό σώμα. Τα υλικά 6 και 7 εμφανίζονται εσωτερικά αυτών. Τα υλικά 8 και 9 εμφανίζονται περιφερειακά στο σπονδυλικό σώμα, στα σημεία που αντιστοιχούν στην περιοχή μέγιστης τροπικής ενέργειας. Τέλος, το υλικό 9 εμφανίζεται ενισχυμένο στην αριστερή πλευρά του σπονδυλικού σώματος στην περιοχή που υπάρχει η τοπική ανωμαλία.

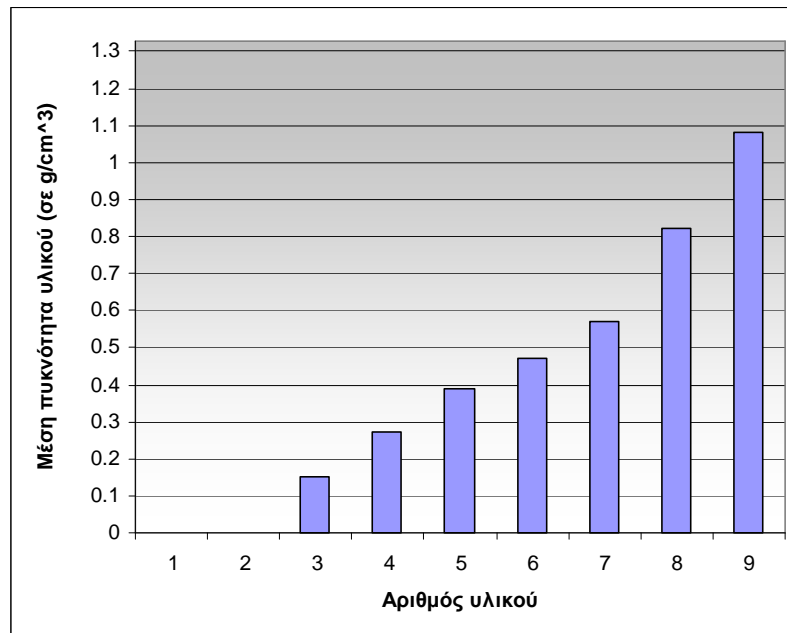
Στο Σχήμα 9.18 παρουσιάζονται οι όγκοι κάθε υλικού ως ποσοστό του συνολικού όγκου του σπονδύλου. Σημειώνεται ότι ο συνολικός όγκος του σπονδύλου είναι:
 $V_{tot} = 62.694,5 \text{ mm}^3$



Σχήμα 9.18 Όγκος κάθε υλικού ως ποσοστό του συνολικού όγκου του σπονδύλου

Από το σχήμα 9.18 προκύπτουν τα εξής: δεν έχουν εμφανιστεί τα υλικά 1 και 2, ενώ το υλικό 3 δείχνει να έχει αντικαταστήσει το υλικό 1 σε σχέση με τις προηγούμενες δοκιμές (καταλαμβάνοντας τις αποφύσεις και τα σημεία σύνδεσής τους με το σπονδυλικό σώμα). Τα υλικά 5 και 6 εμφανίζονται με αυξημένα ποσοστά σε σχέση με τη δοκιμή για εκκίνηση με το τρίτο υλικό αλλά παρόμοια με εκείνα για εκκίνηση με το έβδομο υλικό. Το υλικό 7 εμφανίζεται με μικρότερο ποσοστό σε σχέση με τις προηγούμενες δοκιμές. Το υλικό 8 εμφανίζεται με ποσοστό μικρότερο σε σχέση με την εκκίνηση με το τρίτο υλικό αλλά με ποσοστό κοντινό σε σχέση με την εκκίνηση από το έβδομο υλικό.

Στο Σχήμα 9.19 παρουσιάζεται η μέση τιμή της πυκνότητας κάθε υλικού κάθε υλικού μετά την ολοκλήρωση της διαδικασίας της οστικής ανακατασκευής



Σχήμα 9.19 Μέση πυκνότητα κάθε υλικού μετά την ολοκλήρωση της διαδικασίας της ανακατασκευής

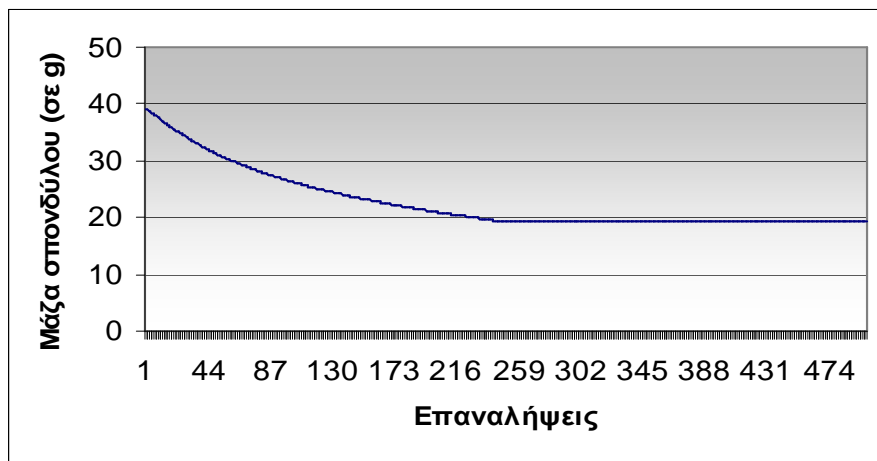
Παρατηρώντας το σχήμα 9.19, οι κύριες διαφορές που εντοπίζονται σε σχέση με τις προηγούμενες δοκιμές είναι οι ακόλουθες: το ένατο υλικό εμφανίζεται με μεγαλύτερη μέση οστική πυκνότητα σε σχέση με την εκκίνηση από το τρίτο υλικό κατά 7,7% περίπου. Το υλικό 7 εμφανίζεται με μικρότερη μέση οστική πυκνότητα σε σχέση με την εκκίνηση από το έβδομο υλικό κατά 7,2% περίπου. Τέλος, τα υλικά 4 και 6 εμφανίζονται με πολύ κοντινές τιμές.

9.3 Αξιολόγηση αποτελεσμάτων τριδιάστατου σπονδύλου

9.3.1 Εκκίνηση από υλικό 7 ($\rho_0=0,628 \text{ g/cm}^3$)

- **Διάγραμμα Μεταβολής Μάζας**

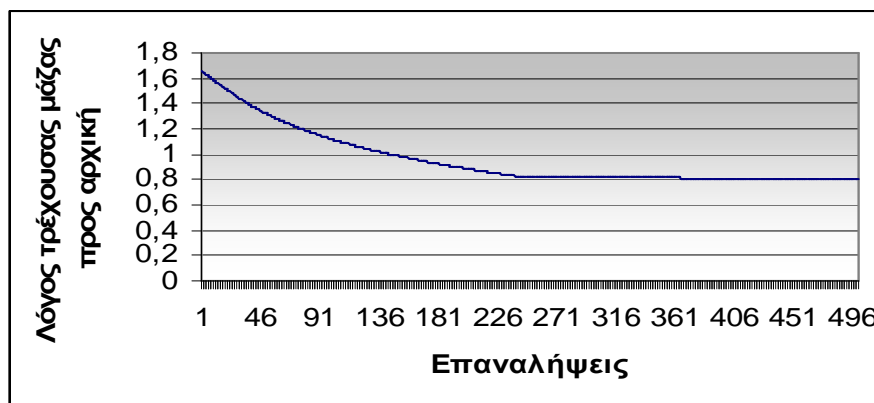
Το διάγραμμα της συνολικής μάζας του σπονδύλου για τα διάφορα χρονικά βήματα είναι αυτό του Σχήμα 9.20. Η αρχική συνολική μάζα του σπονδύλου έχει τιμή 23,691 g. Ύστερα από το πρώτο βήμα της Runge-Kutta η μάζα αυξάνεται σε 39,178 g. Από το δεύτερο βήμα και έπειτα παρατηρούμε ότι η συνολική μάζα του σπονδύλου μειώνεται κατά τη διάρκεια των 500 επαναλήψεων και καταλήγει περίπου στην τελική τιμή 19,246 g. Η τελική μάζα του σπονδύλου εμφανίζεται μικρότερη σε σχέση με την αρχική κατά 4,445 g. δηλαδή 18,76% περίπου της αρχικής μάζας του σπονδύλου.



Σχήμα 9.20 Διάγραμμα συνολικής μάζας σπονδύλου για εκκίνηση με το έβδομο υλικό

- **Διάγραμμα πηλίκου τρέχουσας μάζας προς την αρχική**

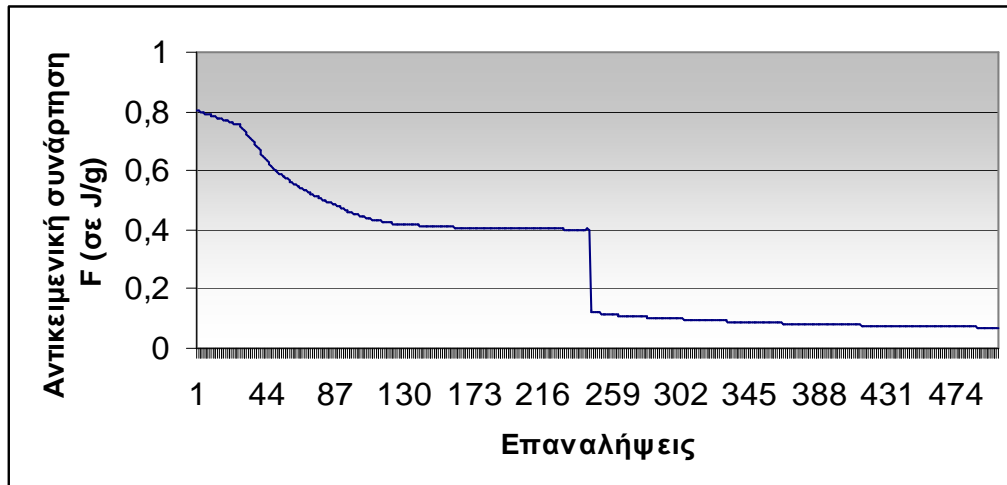
Στο Σχήμα 9.21 παρουσιάζεται ο λόγος των μαζών M/M_0 κατά τη διάρκεια των επαναλήψεων. Ο λόγος μαζών στην πρώτη επανάληψη είναι περίπου 1,654 ενώ στην τελευταία επανάληψη είναι ίσος περίπου με 0,812.



Σχήμα 9.21 Διάγραμμα λόγου μάζας του σπονδύλου για εκκίνηση με το έβδομο υλικό

- **Διάγραμμα συνάρτησης σύγκλισης F**

Το διάγραμμα της αντικειμενικής συνάρτησης F παρουσιάζεται στο Σχήμα 9.22.



Σχήμα 9.22 Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης F του σπονδύλου για εκκίνηση με το έβδομο υλικό

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση F παρουσιάζει μια απότομη βηματική αλλαγή κατά τη μετάβαση από τις 245 στις 246 επαναλήψεις. Η F ξεκινά, μετά την πρώτη επανάληψη, με τιμή ίση περίπου με 0,805 J/g και αυτή είναι η μεγαλύτερη εμφανιζόμενη. Στις 500 επαναλήψεις η αντικειμενική συνάρτηση F έχει φτάσει στην τιμή 0,070 J/g.

- **Δείκτης δυσκαμψίας**

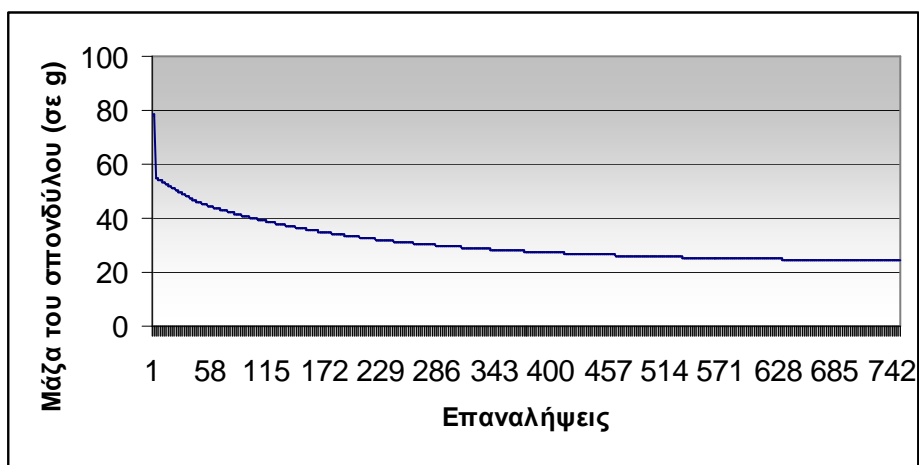
Για την τελική δομή ύστερα από 500 επαναλήψεις το συνολικό έργο προέκυψε περίπου ίσο με 2,967 J/cm³. Ο συντελεστής δυσκαμψίας λαμβάνει την τιμή

$$\bar{K} = 1,751 \cdot 10^{-2} \frac{cm^3}{J \cdot g}.$$

9.3.2 Εκκίνηση από υλικό 3 ($\rho_0=0,178 \text{ g/cm}^3$)

- **Διάγραμμα Μεταβολής Μάζας**

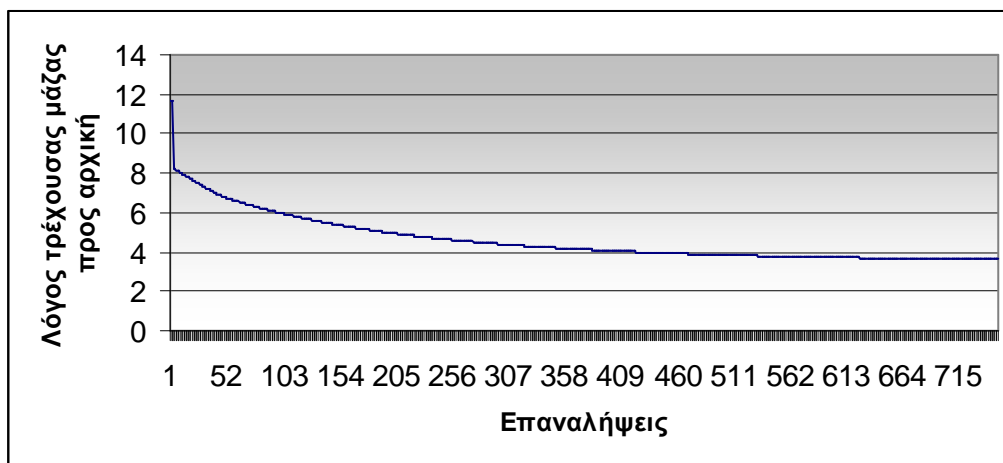
Το διάγραμμα της συνολικής μάζας του σπονδύλου για τα διάφορα χρονικά βήματα είναι αυτό του Σχήμα 9.23: Η αρχική συνολική μάζα του σπονδύλου έχει τιμή 6,715 g. Ύστερα από το πρώτο βήμα της Runge-Kutta η μάζα αυξάνεται σε 78,632 g. Από το δεύτερο βήμα και έπειτα παρατηρούμε ότι η συνολική μάζα του σπονδύλου μειώνεται κατά τη διάρκεια των 750 επαναλήψεων και καταλήγει περίπου στην τελική τιμή 24,268 g. Η τελική μάζα του σπονδύλου εμφανίζεται μεγαλύτερη σε σχέση με την αρχική κατά 17,533 g, δηλαδή 3,61 φορές μεγαλύτερη από την αρχική μάζα του σπονδύλου. Συγκρινόμενη με την αντίστοιχη τελική μάζα για εκκίνηση με το έβδομο υλικό ως αρχικό, παρατηρείται ότι η μάζα είναι 1,26 φορές μεγαλύτερη. Όπως όμως θα διαπιστωθεί παρακάτω από τη συνάρτηση F, η διαδικασία για τη συγκεκριμένη δοκιμή απέχει περισσότερο από την τελική σύγκλιση.



Σχήμα 9.23 Διάγραμμα συνολικής μάζας σπονδύλου για εκκίνηση με το τρίτο υλικό

- **Διάγραμμα πηλίκου τρέχουσας μάζας προς την αρχική**

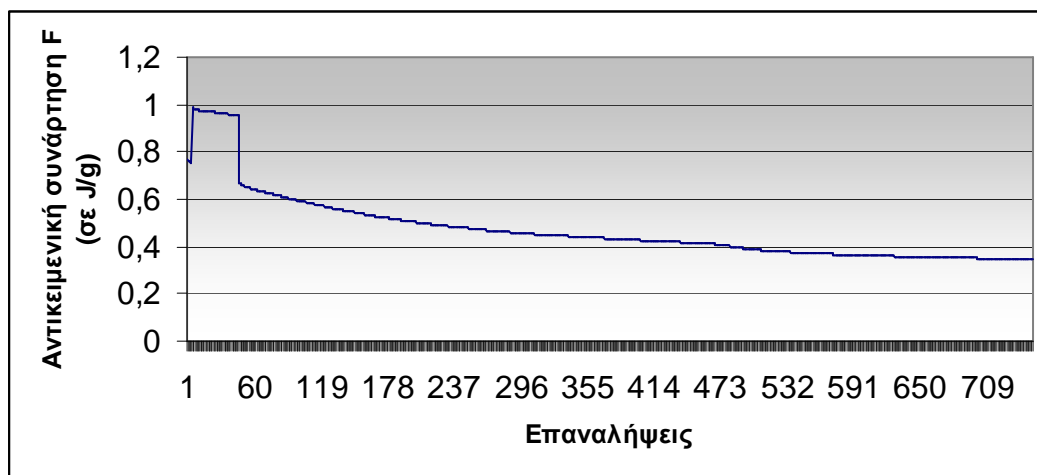
Στο Σχήμα 9.24 παρουσιάζεται ο λόγος των μαζών M/M_0 κατά τη διάρκεια των επαναλήψεων. Ο λόγος μαζών στην πρώτη επανάληψη είναι περίπου 11,710 ενώ στην τελευταία επανάληψη είναι ίσος περίπου με 3,614.



Σχήμα 9.24 Διάγραμμα λόγου μάζας του σπονδύλου για εκκίνηση με το τρίτο υλικό

- **Διάγραμμα συνάρτησης σύγκλισης F**

Το διάγραμμα της αντικειμενικής συνάρτησης F παρουσιάζεται Σχήμα 9.25



Σχήμα 9.25 Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης F του σπονδύλου για εκκίνηση με το τρίτο υλικό

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση F παρουσιάζει μια απότομη βηματική αλλαγή κατά τη μετάβαση από τις 4 στις 5 επαναλήψεις και άλλη μία κατά τη μετάβαση από τις 45 στις 46 επαναλήψεις. Η F ξεκινά, μετά την πρώτη επανάληψη, με τιμή ίση περίπου με 0,770 J/g και στην πέμπτη επανάληψη εμφανίζει τη μέγιστη τιμή της 0,987 J/g. Στις 750 επαναλήψεις η συνάρτηση F έχει φτάσει στην τιμή 0,347 J/g. Συγκρινόμενη, λοιπόν, με την αντίστοιχη αντικειμενική συνάρτηση για εκκίνηση με το έβδομο υλικό έχει τιμή μία τάξη μεγέθους μεγαλύτερη κι επομένως απέχει περισσότερο από το μηδενισμό της.

- **Δείκτης δυσκαμψίας**

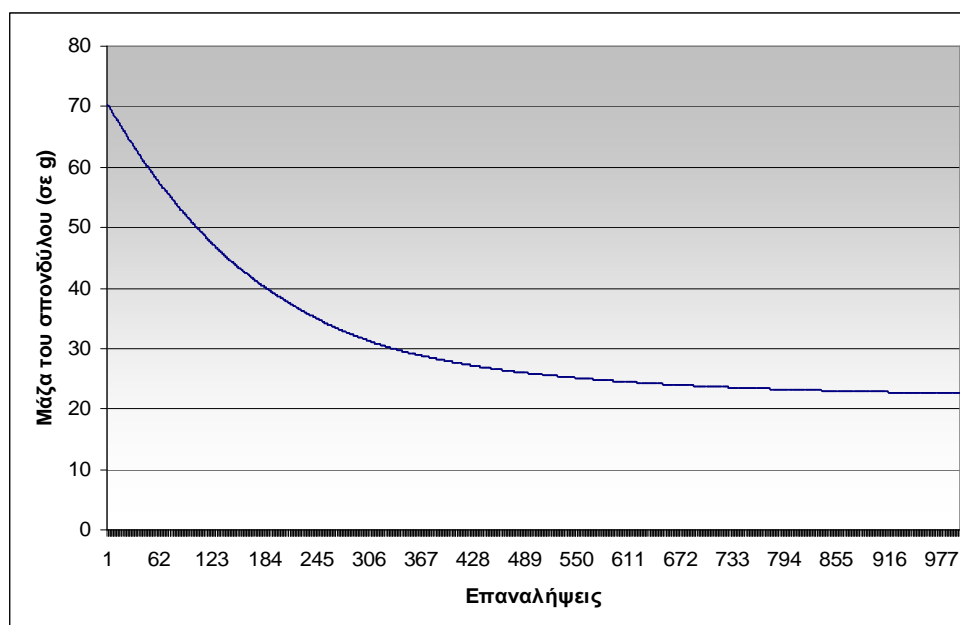
Για την τελική δομή ύστερα από 500 επαναλήψεις το συνολικό έργο προέκυψε περίπου ίσο με 2,4885 J/cm³. Ο δείκτης δυσκαμψίας λαμβάνει την τιμή $\bar{K} = 1,656 \cdot 10^{-2} \frac{cm^3}{J \cdot g}$. Συγκρινόμενος με τον αντίστοιχο για εκκίνηση με το έβδομο υλικό, ο δείκτης δυσκαμψίας εμφανίζεται 3,16% μικρότερος. Επομένως, προκύπτει ότι η εκκίνηση με το έβδομο υλικό έχει εκμεταλλευτεί καλύτερα το δομικό υλικό του σπονδύλου και μάλιστα στα 2/3 των επαναλήψεων.

9.3.3 Εκκίνηση από υλικό 9 ($\rho_0=1,128 \text{ g/cm}^3$)

- **Διάγραμμα Μεταβολής Μάζας**

Το διάγραμμα της συνολικής μάζας του σπονδύλου για τα διάφορα χρονικά βήματα είναι αυτό του Σχήμα 9.26: Η αρχική συνολική μάζα του σπονδύλου έχει τιμή 42,554 g. Ύστερα από το πρώτο βήμα της Runge-Kutta η μάζα αυξάνεται σε 70,472 g. Από το δεύτερο βήμα και έπειτα παρατηρούμε ότι η συνολική μάζα του σπονδύλου μειώνεται κατά τη διάρκεια των 1000 επαναλήψεων και καταλήγει περίπου στην τελική

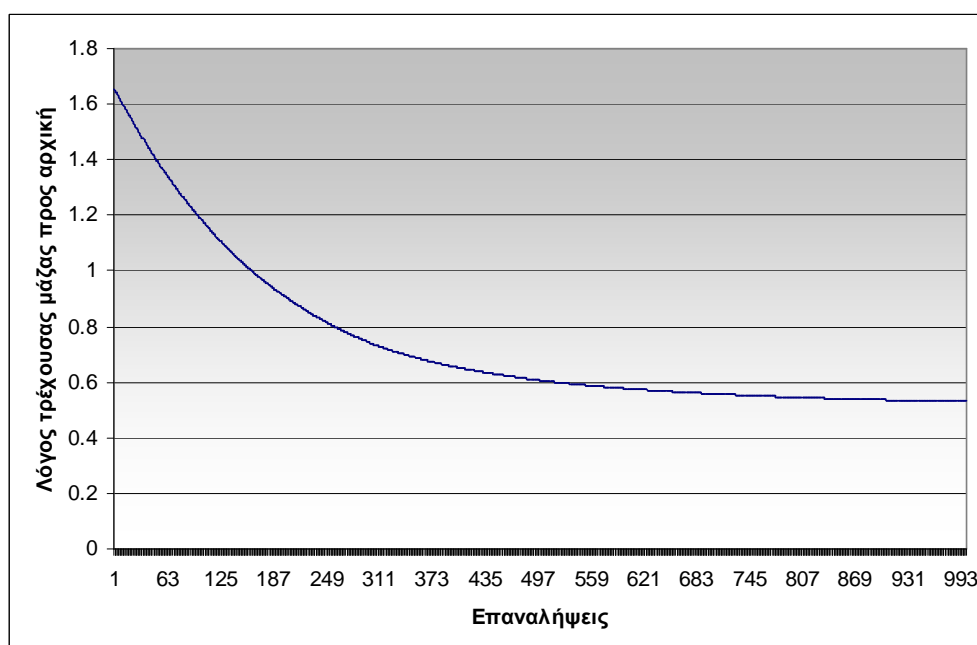
τιμή 22,586 g. Η τελική μάζα του σπονδύλου εμφανίζεται μικρότερη σε σχέση με την αρχική κατά 19,968 g, δηλαδή 53,08% περίπου της αρχικής μάζας του σπονδύλου.



Σχήμα 9.26 Διάγραμμα συνολικής μάζας σπονδύλου για εκκίνηση με το ένατο υλικό

- **Διάγραμμα ηλίκου τρέχουσας μάζας προς την αρχική**

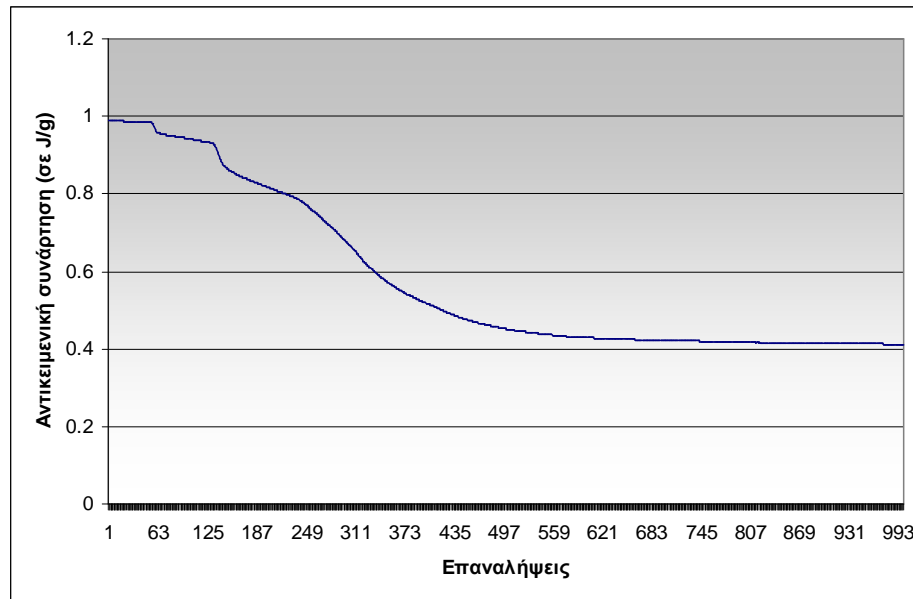
Το Σχήμα 9.27 δείχνει το λόγο των μαζών M/M_0 συναρτήσει των επαναλήψεων, ο οποίος στην πρώτη επανάληψη είναι 1,656 ενώ στην τελευταία 0,531.



Σχήμα 9.27 Διάγραμμα λόγου μάζας του σπονδύλου για εκκίνηση με το ένατο υλικό

- **Διάγραμμα συνάρτησης σύγκλισης F**

Το διάγραμμα της αντικειμενικής συνάρτησης F παρουσιάζεται στο Σχήμα 9.28



Σχήμα 9.28 Διάγραμμα αντικειμενικής συνάρτησης F του σπονδύλου για εκκίνηση με το έβδομο υλικό

Η συνάρτηση F εμφανίζει πιο ομαλή συμπεριφορά σε σχέση με τις προηγούμενες δοκιμές. Η F ξεκινά, μετά την πρώτη επανάληψη, με τιμή ίση περίπου με 0,989 J/g και αυτή είναι η μεγαλύτερη εμφανιζόμενη. Στις 1000 επαναλήψεις η αντικειμενική συνάρτηση F έχει φτάσει στην τιμή 0,412 J/g.

- **Δείκτης δυσκαμψίας**

Για την τελική δομή ύστερα από 1000 επαναλήψεις το συνολικό έργο προέκυψε περίπου ίσο με 2,946 J/cm³. Ο συντελεστής δυσκαμψίας λαμβάνει την τιμή

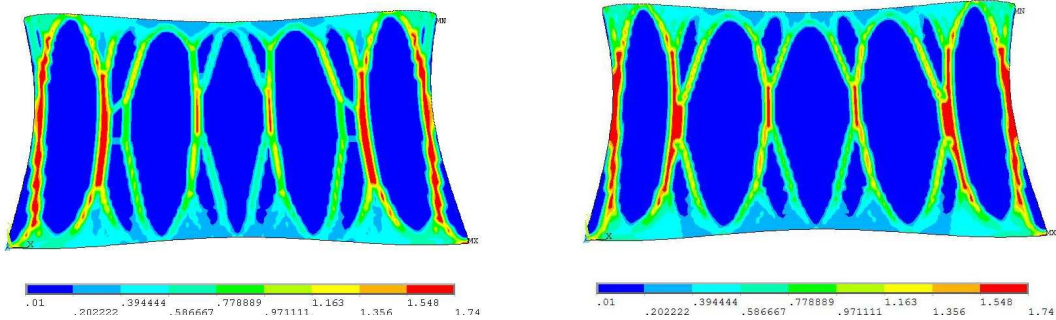
$$\bar{K} = 1,503 \cdot 10^{-2} \frac{cm^3}{J \cdot g}$$

Κεφάλαιο 10ο Σύγκριση-Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται μια συνοπτική σύγκριση των δοκιμών που πραγματοποιήθηκαν και η εξαγωγή των αντίστοιχων συμπερασμάτων.

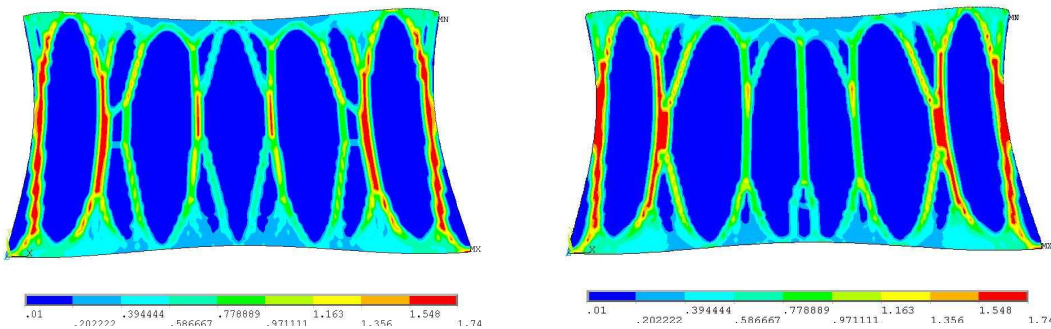
10.1 Τομή σπονδύλου

Στο Σχήμα 10.1 δίδονται οι τελικές κατανομές της οστικής πυκνότητας που προέκυψαν ύστερα από τις πέντε διαφορετικές δοκιμές:



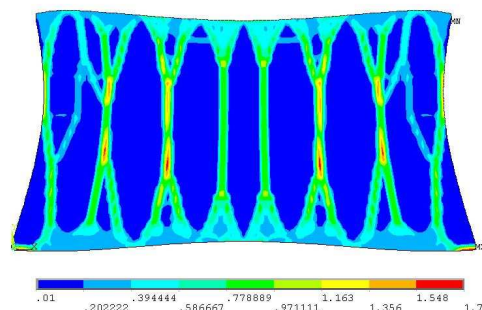
B σταθερό και $\alpha=1$ (νεαρό άτομο)

B σταθερό και $\alpha=2,25$ (νεαρό άτομο)



B εκθετικά μεταβαλλόμενο και $\alpha=1$
(νεαρό άτομο)

B εκθετικά μεταβαλλόμενο και $\alpha=2,25$
(νεαρό άτομο)



B σταθερό και $\alpha=1$ (ηλικιωμένο άτομο)

Σχήμα 10.1 Κατανομή οστικής πυκνότητας ύστερα από 1400 επαναλήψεις

Συγκρίνοντας τη δοκιμή για συντελεστή B σταθερό και $\alpha=1$ και τη δοκιμή για B σταθερό και $\alpha=2,25$, μπορούμε να εξάγουμε κάποια συμπεράσματα για τις αλλαγές που εισάγει η χρησιμοποίηση της μη γραμμικότητας του εκθέτη α . Όσον αφορά στην τελική κατανομή της οστικής πυκνότητας παρατηρούνται τα ακόλουθα: οι οριζόντιες κολώνες που ένωναν τις βασικές δεν εμφανίζονται για $\alpha=2,25$. Αντίθετα, οι γειτονικές εσωτερικές κολώνες πλησιάζουν σταδιακά και ενώνονται μεταξύ τους στο κέντρο του σπονδύλου. Ακόμη, οι δύο ακριανές κολώνες βρίσκονται πιο κοντά στις εξωτερικές πλευρές του σπονδύλου. Τέλος παρατηρούνται μεγαλύτερες τιμές οστικής πυκνότητας κοντά στα σημεία σύνδεσης των κολώνων με τις επιφυσιακές πλάκες. Επομένως, η εισαγωγή της μη γραμμικότητας μέσω του εκθέτη α επηρέασε την τελική κατανομή των οστικών πυκνοτήτων.

Συγκρίνοντας τη δοκιμή για σταθερό συντελεστή B και $\alpha=1$ με εκείνη για εκθετικά μεταβαλλόμενο συντελεστή B και $\alpha=1$ παρατηρούνται τα ακόλουθα: η τελική κατανομή της οστικής πυκνότητας παρουσιάζει μεγάλη ομοιότητα. Ελάχιστες διαφορές παρατηρούνται γύρω από τις βασικές κολώνες όπου μερικά στοιχεία με χαμηλότερες πυκνότητες εμφανίζονται σε διαφορετικά εύρη πυκνοτήτων, αλλά και σε ορισμένα στοιχεία της περιοχής μεγίστων πυκνοτήτων που εμφανίζουν λίγο διαφορετικές τιμές. Έτσι εξάγεται το συμπέρασμα ότι η εισαγωγή του εκθετικού συντελεστή $B(t)$, με διατήρηση της τιμής $\alpha=1$, επηρεάζει ελάχιστα την τελική κατανομή των πυκνοτήτων.

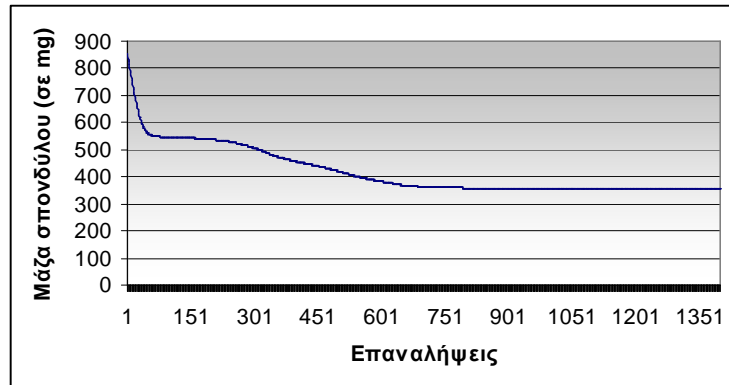
Συγκρίνοντας το τελικό διάγραμμα οστικής πυκνότητας για εκθετικά μεταβαλλόμενο συντελεστή B και $\alpha=2,25$ με τις κατανομές των μοντέλων που παρουσιάστηκαν παραπάνω παρατηρούνται τα ακόλουθα: Ο σχηματισμός των εσωτερικών κολώνων ομοιάζει με τον αντίστοιχο για B σταθερό και $\alpha=2,25$. Εμφανίζονται δηλαδή οι ακριανές κολώνες πολύ κοντά στις πλευρές του σπονδύλου ενώ οι αμέσως επόμενες εσωτερικές κολώνες συνδέονται στο μέσο του σπονδύλου. Όσον αφορά στο κέντρο του σπονδύλου οι βασικές κολώνες εμφανίζονται να έχουν μεγαλύτερο μήκος ενώ οι δευτερεύουσες κολώνες που τις συνδέουν με τις επιφυσιακές πλάκες είναι μικρότερες. Επίσης, εμφανίζεται μία νέα κάθετη κολώνα στο κέντρο του σπονδύλου, ο σχηματισμός της οποίας (και η στήριξη που προσφέρει) είναι υπεύθυνος για τις μικρότερες τιμές πυκνότητας στις γειτονικές κεντρικές κολώνες.

Συγκρίνοντας το τελικό διάγραμμα κατανομής οστικής πυκνότητας για νεαρό και για ηλικιωμένο άτομο χωρίς εισαγωγή μη γραμμικότητας παρατηρούνται τα εξής: Οι μέγιστες πυκνότητες στην περίπτωση ηλικιωμένου ατόμου εμφανίζονται στο κέντρο των επιφυσιακών πλακών, σε αντίθεση με εκείνη του νεαρού, κι έτσι δεν ενισχύεται το τοπικό φαινόμενο αυξημένων τιμών κοντά στις αρθρώσεις. Επίσης, εμφανίζονται δύο κάθετες κεντρικές κολώνες ενώ οι ακριανές εμφανίζουν μεγαλύτερη καμπυλότητα. Προκύπτει,

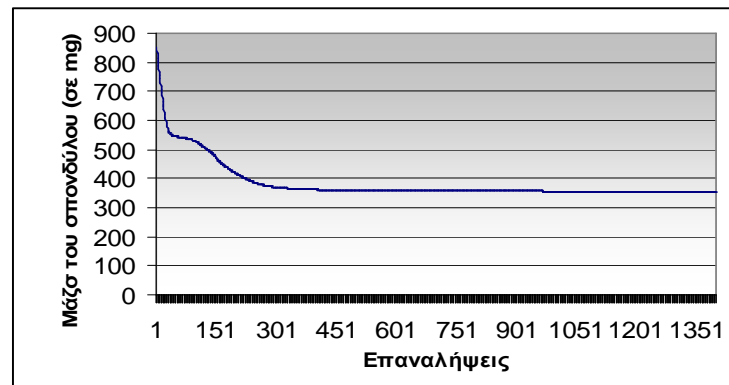
λοιπόν, ότι διαφορετικού είδους φόρτιση επηρεάζει ανάλογα την κατανομή των τελικών οστικών πυκνοτήτων.

Στο Σχήμα 10.2 παρουσιάζονται τα διαγράμματα μεταβολής της μάζας του σπονδύλου συναρτήσει των επαναλήψεων:

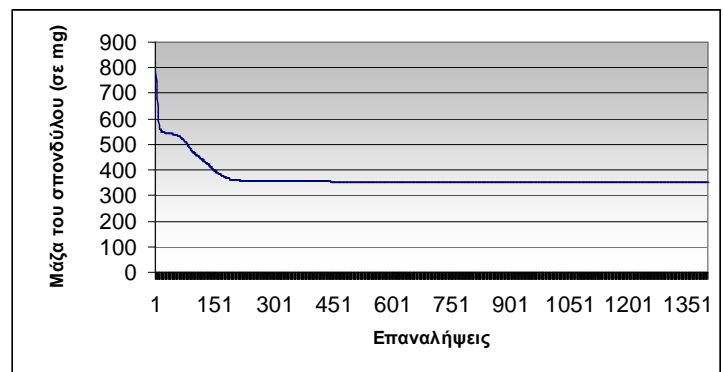
B σταθερό και $\alpha=1$
(νεαρό άτομο)



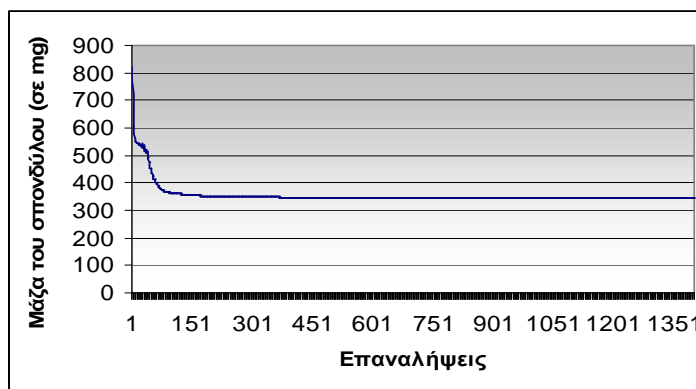
B σταθερό και $\alpha=2,25$
(νεαρό άτομο)



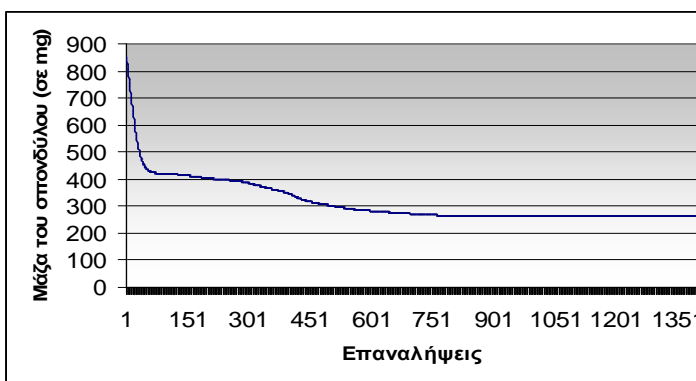
B εκθετικά μεταβαλλόμενο
και $\alpha=1$
(νεαρό άτομο)



B εκθετικά μεταβαλλόμενο
και $\alpha=2,25$
(νεαρό άτομο)



B σταθερό και $\alpha=1$
(ηλικιωμένο άτομο)



Σχήμα 10.2 Διάγραμμα συνολικής μάζας του σπονδύλου

Συγκρίνοντας το διάγραμμα μάζας του μοντέλου με B σταθερό και $\alpha=1$ με το αντίστοιχο διάγραμμα για B σταθερό και $\alpha=2,25$ προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα: Η τελική μάζα του σπονδύλου εμφανίζεται μικρότερη σε σχέση με το μοντέλο για $\alpha=1$ κατά 0,16% της αρχικής μάζας του σπονδύλου, ενώ προσεγγίζει σε λιγότερες επαναλήψεις την τιμή της τελικής προκύπτουσας μάζας.

Συγκρινόμενο με το αντίστοιχο διάγραμμα για B σταθερό και $\alpha=1$, το μοντέλο για B εκθετικά μεταβαλλόμενο και $\alpha=1$ οδηγεί στα ακόλουθα συμπεράσματα: Η τελική μάζα του σπονδύλου εμφανίζεται μικρότερη σε σχέση με το μοντέλο για $\alpha=1$ κατά 4,99% της αρχικής μάζας του σπονδύλου. Παρατηρείται λοιπόν ότι ενώ η αλλαγή της μη γραμμικότητας του εκθέτη α επηρέασε ελάχιστα την τελική μάζα, η εισαγωγή του $B(t)$ επέφερε σημαντική αλλαγή στη μάζα του σπονδύλου.

Συγκρίνοντας το διάγραμμα της μάζας για B εκθετικά μεταβαλλόμενο και $\alpha=2,25$ με τα υπόλοιπα μοντέλα προκύπτουν τα εξής: Η τελική μάζα του σπονδύλου εμφανίζεται μικρότερη σε σχέση με όλα τα μοντέλα και παρουσιάζει τη μεγαλύτερη διαφορά από το μοντέλο για $\alpha=1$, κατά 1,11% της αρχικής μάζας του σπονδύλου.

Συγκρίνοντας το διάγραμμα της μάζας νεαρού ατόμου, χωρίς εισαγωγή μη γραμμικότητας, με εκείνο του ηλικιωμένου ατόμου προκύπτουν τα παρακάτω: για την

περίπτωση ηλικιωμένου ατόμου παρατηρείται μεγαλύτερη μείωση λόγω των μειωμένων μηχανικών απαιτήσεων που επέφερε η νέα φόρτιση. Η τελική μάζα του σπονδύλου εμφανίζεται μικρότερη σε σχέση με του νεαρού ατόμου κατά 10,8% της αρχικής μάζας του σπονδύλου.

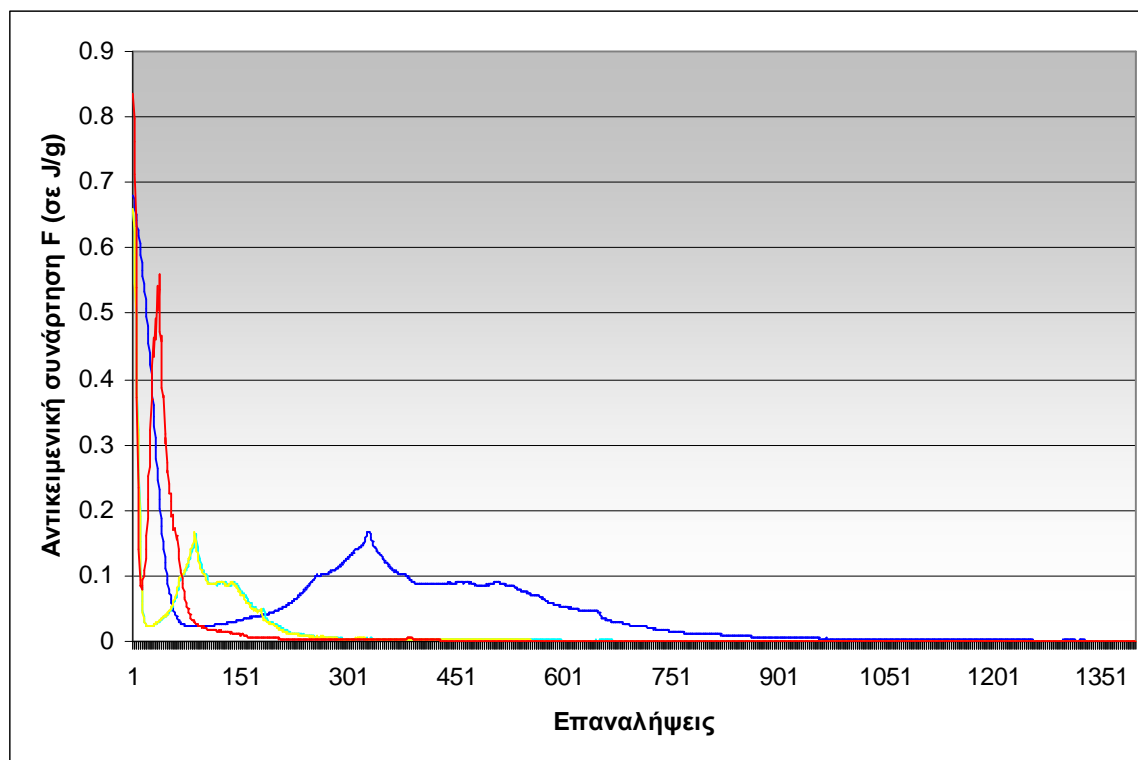
Στον Πίνακα 10.1 που ακολουθεί φαίνονται οι τελικές τιμές μάζας για το κάθε μοντέλο που εξετάστηκε.

Πίνακας 10.1 Τελική μάζα σπονδύλου για τις πέντε πραγματοποιούμενες δοκιμές

Δοκιμή	Τελική μάζα σπονδύλου (σε mg)
Νεαρό άτομο με B σταθερό και $\alpha=1$	355,0
Νεαρό άτομο με B σταθερό και $\alpha=2,25$	353,6
Νεαρό άτομο με B εκθετικό και $\alpha=1$	350,7
Νεαρό άτομο με B εκθετικό και $\alpha=2,25$	345,5
Ηλικιωμένο άτομο με B σταθερό και $\alpha=1$	262,5

Από τον πίνακα αυτόν προκύπτει ότι μικρότερη μάζα σπονδύλου, για νεαρό άτομο, προκύπτει για B εκθετικά μεταβαλλόμενο και $\alpha=2,25$. Ακόμη, για ηλικιωμένο άτομο, λόγω διαφορετικού είδους φόρτισης και μικρότερων τιμών, προκύπτει πολύ μικρότερη τελική μάζα σε σχέση με τις αντίστοιχες για νεαρό άτομο.

Στο Σχήμα 10.3 παρουσιάζονται σε κοινό διάγραμμα οι αντικειμενικές συναρτήσεις F που προέκυψαν για κάθε μοντέλο. Η μπλε γραμμή αντιπροσωπεύει το μοντέλο με $\alpha=1$ και B σταθερό, η τυρκουάζ για $\alpha=2,25$ και B σταθερό, η κίτρινη για $\alpha=1$ και B εκθετικά μεταβαλλόμενο και η κόκκινη για $\alpha=2,25$ και B εκθετικά μεταβαλλόμενο.



Σχήμα 10.3 Αντικειμενικές συναρτήσεις F (σε J/g) ως προς τις επαναλήψεις για τα τέσσερα μελετώμενα μοντέλα νεαρού ατόμου

Συγκρίνοντας την αντικειμενική συνάρτηση F για μοντέλο με B σταθερό και $\alpha=1$ με εκείνη για B σταθερό και $\alpha=2,25$ προκύπτει ότι για $\alpha=2,25$ είναι κατά 2 τάξεις μεγέθους μικρότερη της αντίστοιχης του γραμμικού μοντέλου..

Συγκρίνοντας την αντικειμενική συνάρτηση F για B εκθετικά μεταβαλλόμενο και $\alpha=1$ με τα δύο μοντέλα που συγκρίθηκαν προηγουμένως προκύπτει ότι είναι 2 τάξεις μεγέθους μικρότερη της αντίστοιχης του γραμμικού μοντέλου και μεγαλύτερη κατά 47,33% της αντίστοιχης τιμής για B σταθερό και $\alpha=2,25$.

Για την περίπτωση της χρήσης συντελεστή B εκθετικά μεταβαλλόμενου και εκθέτη $\alpha=2,25$ προκύπτει ότι στις 1400 επαναλήψεις η αντικειμενική συνάρτηση F έχει φτάσει στην τιμή $7E-10$ J/g, η οποία είναι 5 τάξεις μεγέθους μικρότερη από την καλύτερη σύγκλιση μέχρι τώρα, την οποία είχε προσφέρει το μοντέλο με $\alpha=2,25$ και B σταθερό. Εξάγεται λοιπόν το συμπέρασμα ότι τόσο ο εκθέτης α όσο και ο εκθετικά μεταβαλλόμενος συντελεστής B βελτιώνουν τη σύγκλιση της μεθόδου.

Στον

Πίνακα 10.2 παρουσιάζεται ο δείκτης δυσκαμψίας K για τις πέντε πραγματοποιούμενες δοκιμές:

Πίνακας 10.2 Δείκτης δυσκαμψίας K για τις πέντε πραγματοποιούμενες δοκιμές

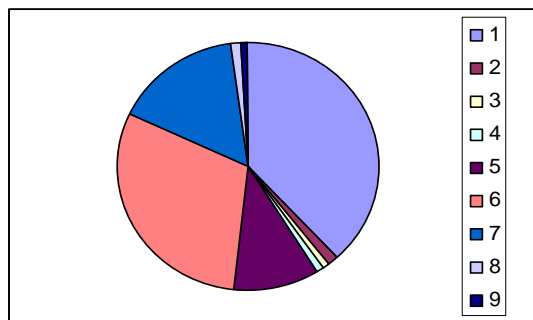
Δοκιμή	Δείκτης δυσκαμψίας (σε cm ³ /Jg)
Νεαρό άτομο με B σταθερό και α=1	3,60 E-3
Νεαρό άτομο με B σταθερό και α=2,25	3,65 E-3
Νεαρό άτομο με B εκθετικό και α=1	3,60 E-3
Νεαρό άτομο με B εκθετικό και α=2,25	3,72 E-3
Ηλικιωμένο άτομο με B σταθερό και α=1	6,90 E-3

Συγκρίνοντας το μοντέλο για B σταθερό και α=1 με το αντίστοιχο για B σταθερό και α=2,25 εξάγεται ότι: για α=2,25 έχει χρησιμοποιηθεί πιο αποδοτικά, κατά 5%, το δομικό υλικό του οστού (μεγαλύτερος δείκτης δυσκαμψίας). Επομένως ο εκθέτης α επηρεάζει σημαντικά τη δυσκαμψία του οστού. Συγκρίνοντας το μοντέλο για B σταθερό και α=1 με το αντίστοιχο για B εκθετικά μεταβαλλόμενο και α=1 προκύπτει το ακόλουθο συμπέρασμα: η εισαγωγή της μη γραμμικότητας του συντελεστή B δεν επηρεάζει το δείκτη δυσκαμψίας του οστού. Συγκεκριμένα, η τελική μάζα του σπονδύλου εμφανίστηκε μειωμένη για B εκθετικά μεταβαλλόμενο, αλλά η αύξηση του παραγόμενου έργου των εξωτερικών δυνάμεων οδήγησε σε ίδια τιμή του δείκτη δυσκαμψίας. Συγκρίνοντας το μοντέλο για B εκθετικά μεταβαλλόμενο και α=2,25 με τα υπόλοιπα μοντέλα προκύπτει ότι παρέχει μεγαλύτερη δυσκαμψία στο οστό.

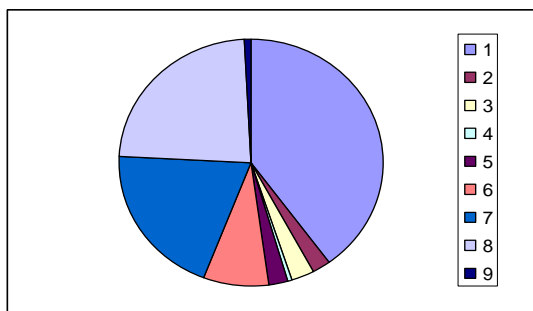
10.2 Τριδιάστατος σπόνδυλος

Στο Σχήμα 10.4 παρουσιάζονται τα ποσοστά όγκου κάθε υλικού ως προς το συνολικό όγκο του σπονδύλου για τις 3 δοκιμές που πραγματοποιήθηκαν:

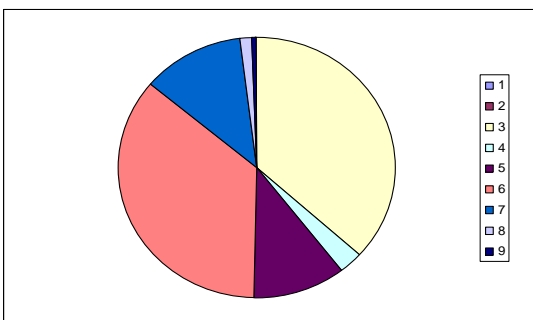
Εκκίνηση με το
έβδομο υλικό



Εκκίνηση με το
τρίτο υλικό



Εκκίνηση με το
ένατο υλικό

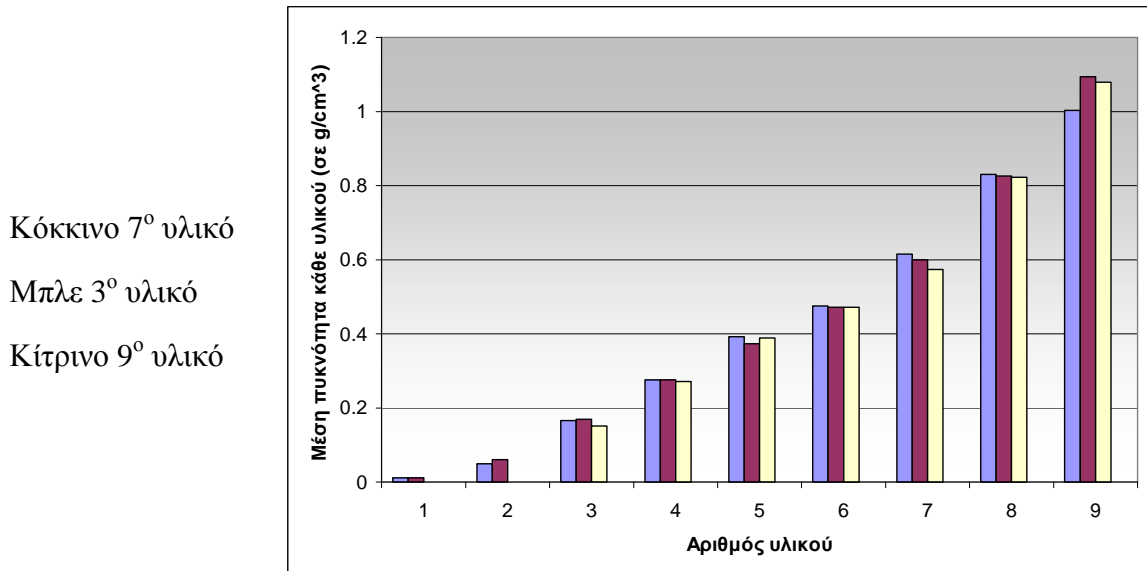


Σχήμα 10.4 Ποσοστό όγκου κάθε υλικού ως προς το συνολικό

Συγκρίνοντας τη δοκιμή για εκκίνηση με το έβδομο υλικό σε σχέση με εκκίνηση με το τρίτο υλικό εξάγονται τα παρακάτω: για εκκίνηση με το τρίτο υλικό, το υλικό 1 εμφανίζεται με μεγαλύτερο ποσοστό συγκριτικά με το αντίστοιχο για εκκίνηση με αρχικό υλικό το έβδομο. Επίσης, με μεγαλύτερο ποσοστό εμφανίζονται τα υλικά 2, 3 και 7. Τα υλικά 4 και 9 εμφανίζονται με κοντινά ποσοστά. Τέλος, το υλικό 8 εμφανίζεται με αρκετά μεγαλύτερο ποσοστό σε σχέση με την προηγούμενη δοκιμή της εκκίνησης με το έβδομο υλικό. Συγκρίνοντας τη δοκιμή για εκκίνηση με το ένατο υλικό σε σχέση με τις προηγούμενες δοκιμές εξάγονται τα εξής: δεν έχουν εμφανιστεί τα υλικά 1 και 2, ενώ το υλικό 3 δείχνει να έχει αντικαταστήσει το υλικό 1 σε σχέση με τις προηγούμενες δοκιμές (καταλαμβάνοντας τις αποφύσεις και τα σημεία σύνδεσής τους με το σπονδυλικό σώμα). Τα υλικά 5 και 6 εμφανίζονται με αυξημένα ποσοστά σε σχέση με τη δοκιμή για εκκίνηση με το τρίτο υλικό αλλά παρόμοια με εκείνα για εκκίνηση με το έβδομο υλικό. Το υλικό 7 εμφανίζεται με μικρότερο ποσοστό σε σχέση με τις προηγούμενες δοκιμές. Το υλικό 8

εμφανίζεται με ποσοστό μικρότερο σε σχέση με την εκκίνηση με το τρίτο υλικό αλλά με ποσοστό κοντινό σε σχέση με την εκκίνηση από το έβδομο υλικό.

Στο Σχήμα 10.5 φαίνεται η μέση οστική πυκνότητα των στοιχείων που ανήκουν στο κάθε υλικό και για τις τρεις περιπτώσεις που εξετάστηκαν.



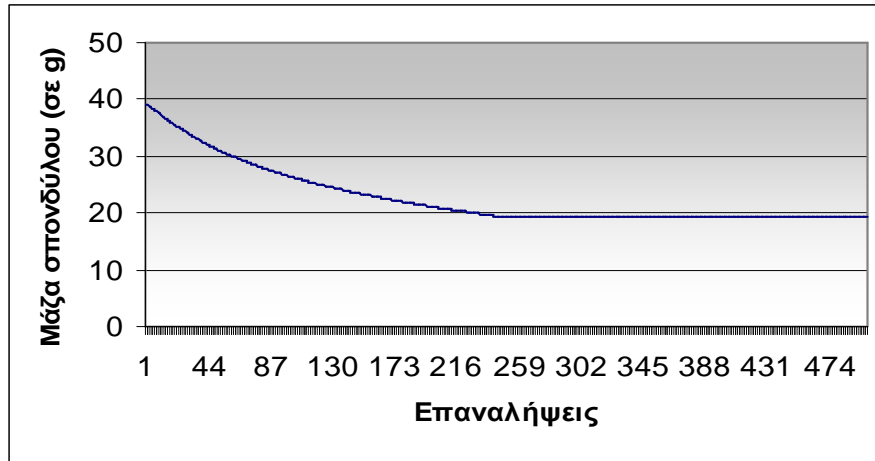
Σχήμα 10.5 Μέση οστική πυκνότητα κάθε υλικού (σε g/cm³)

Συγκρίνοντας τις μέσες οστικές πυκνότητες των υλικών για εκκίνηση με το έβδομο υλικό και για εκκίνηση με το τρίτο υλικό εξάγονται τα ακόλουθα συμπεράσματα: το πρώτο υλικό εμφανίζεται με κοντινές τιμές μέσης πυκνότητας, ενώ το δεύτερο υλικό εμφανίζει μεγαλύτερη μέση πυκνότητα κατά 20,73% για εκκίνηση με το έβδομο υλικό. Τα υλικά 3 και 4 εμφανίζουν επίσης κοντινές τιμές. Το πέμπτο υλικό παρουσιάζει μεγαλύτερη μέση πυκνότητα κατά 4,3% για εκκίνηση με το τρίτο υλικό. Το έκτο, έβδομο και όγδοο υλικό εμφανίζουν μεγαλύτερη μέση πυκνότητα για εκκίνηση με το τρίτο υλικό. Τέλος, το ένατο υλικό εμφανίζει μεγαλύτερη μέση οστική πυκνότητα, κατά 0,9%, για εκκίνηση με το έβδομο υλικό. Παρατηρώντας τις μέσες οστικές πυκνότητες για εκκίνηση με το ένατο υλικό, εντοπίζονται σε σχέση με τις προηγούμενες δοκιμές οι ακόλουθες διαφορές: το ένατο υλικό εμφανίζεται με μεγαλύτερη μέση οστική πυκνότητα σε σχέση με την εκκίνηση από το τρίτο υλικό κατά 7,7%. Το υλικό 7 εμφανίζεται με μικρότερη μέση οστική πυκνότητα σε σχέση με την εκκίνηση από το έβδομο υλικό κατά 7,2%. Τέλος, τα υλικά 4 και 6 εμφανίζονται με πολύ κοντινές τιμές. Προκύπτει λοιπόν ότι η εκκίνηση με διαφορετικό υλικό επηρεάζει τόσο τα υλικά που θα σχηματιστούν όσο και τις μέσες πυκνότητες που αυτά θα αποκτήσουν. Παρόλα αυτά η επιρροή αυτή δεν είναι ίδια για όλα τα υλικά. Τέλος, πολλαπλασιάζοντας τη μέση οστική πυκνότητα κάθε υλικού με τον όγκο του, που προκύπτει από το ποσοστό του όγκου του υλικού επί τον ολικό όγκο, μπορούν να

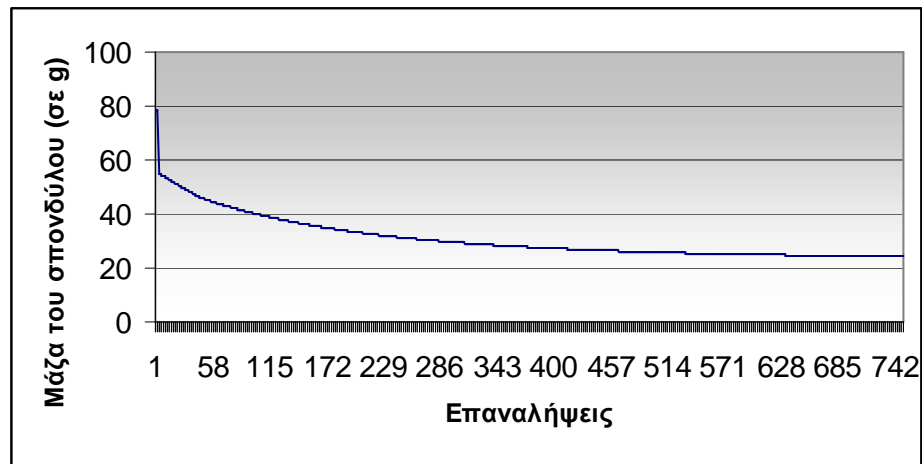
ληφθούν άμεσα προσεγγιστικές τιμές της μάζας καθενός από τα εννέα υλικά του σπονδύλου.

Στο Σχήμα 10.6 παρουσιάζονται τα διαγράμματα μεταβολής της συνολικής μάζας του σπονδύλου συναρτήσει των επαναλήψεων:

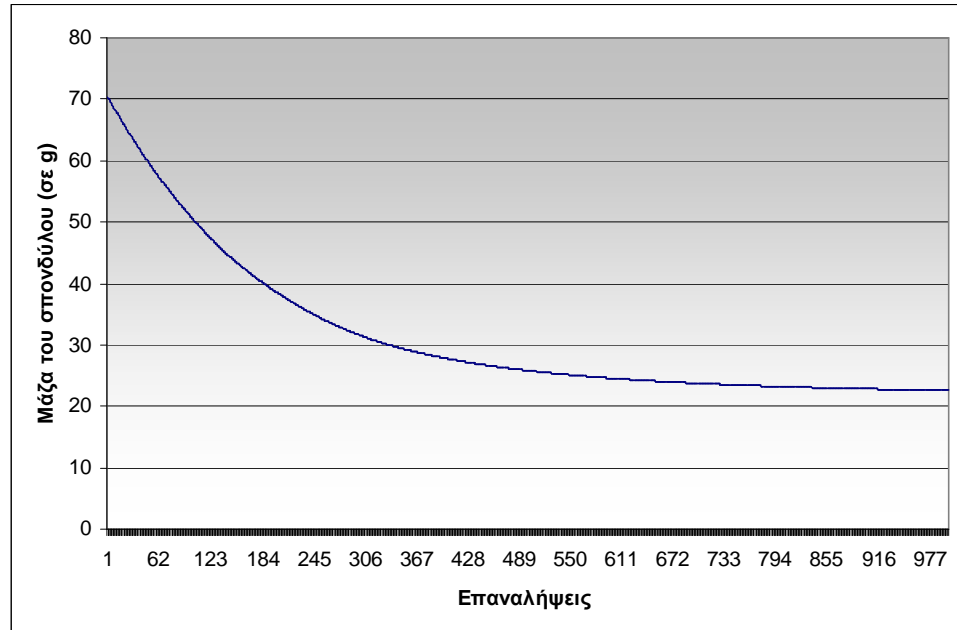
Εκκίνηση
με το
έβδομο
υλικό



Εκκίνηση
με το
τρίτο
υλικό



Εκκίνηση
με το
ένατο
υλικό



Σχήμα 10.6 Μάζα του σπονδύλου συναρτήσει των επαναλήψεων

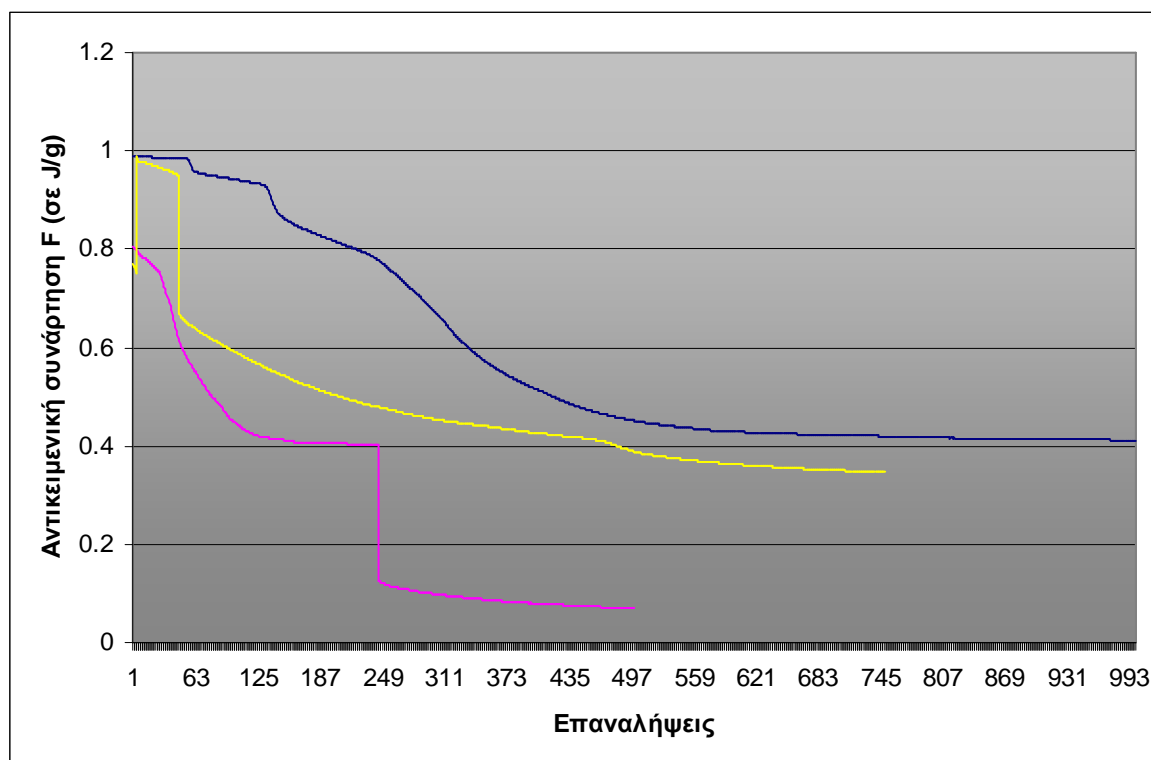
Από το Σχήμα 10.6 προκύπτουν τα εξής: συγκρίνοντας την τελική μάζα για εκκίνηση με το υλικό 3 σε σχέση με την αντίστοιχη τελική μάζα για εκκίνηση με το έβδομο υλικό ως αρχικό, παρατηρείται ότι η μάζα είναι 1,26 φορές μεγαλύτερη. Όπως όμως διαπιστώθηκε από τη συνάρτηση F, παρά τις 250 περισσότερες επαναλήψεις που πραγματοποιήθηκαν, η διαδικασία για τη δοκιμή με αρχικό υλικό το τρίτο απέχει περισσότερο από την τελική σύγκλιση (σταθεροποίηση). Όσον αφορά στη δοκιμή με αρχικό υλικό το ένατο, η τελική τιμή της μάζας εμφανίζεται αυξημένη κατά 17,35 % σε σχέση με την αντίστοιχη για εκκίνηση με αρχικό υλικό το έβδομο ενώ μειωμένη κατά 6,9% σε σχέση με την αντίστοιχη τιμή μάζας για εκκίνηση της διαδικασίας με αρχικό υλικό το τρίτο. Σημειώνεται ότι για εκκίνηση με το ένατο υλικό πραγματοποιήθηκαν 1000 επαναλήψεις. Η μάζα του σπονδύλου που προέκυψε από το μοντέλο εκκίνησης με το έβδομο υλικό είναι αρκετά κοντινή σε πραγματικές τιμές του πρώτου οσφυϊκού σπονδύλου.

Πίνακας 10.3 Τελική μάζα σπονδύλου για διαφορετικό υλικό εκκίνησης

Δοκιμή	Τελική μάζα σπονδύλου (σε g)
Εκκίνηση με αρχικό υλικό το έβδομο	19,246
Εκκίνηση με αρχικό υλικό το τρίτο	24,268
Εκκίνηση με αρχικό υλικό το ένατο	22,586

Στον Πίνακα 10.3 παραπάνω φαίνονται οι τελικές τιμές των μαζών του σπονδύλου για εκκίνηση από το κάθε υλικό. Το βασικό συμπέρασμα που εξάγεται είναι ότι μικρότερη μάζα σπονδύλου, προκύπτει για εκκίνηση με αρχικό υλικό το έβδομο. Επίσης παρατηρείται ότι και στις τρεις περιπτώσεις το βάρος δεν απέχει από τα όρια βάρους ενός φυσιολογικού σπονδύλου.

Στο Σχήμα 10.7 παρουσιάζονται σε κοινό διάγραμμα οι αντικειμενικές συναρτήσεις F των τριών μεθόδων με διαφορετικό αρχικό υλικό:



Σχήμα 10.7 Αντικειμενικές συναρτήσεις F (σε J/g) ως προς τις επαναλήψεις για τα τρία μελετώμενα μοντέλα

Μια πρώτη διαφορά που εξάγεται από το Σχήμα 10.7 είναι ότι η αντικειμενική συνάρτηση F ξεκινά με τη μικρότερη τιμή για εκκίνηση με το τρίτο υλικό ενώ με τη μέγιστη για εκκίνηση με το ένατο υλικό. Από τη μορφή της γραφικής παράστασης είναι φανερό ότι η μέθοδος που ξεκινά με αρχικό υλικό το έβδομο (μωβ γραμμή) βρίσκεται πιο κοντά στη σύγκλιση σε σχέση με τις υπόλοιπες μεθόδους. Η μέθοδος με αρχικό υλικό το τρίτο (κίτρινη γραμμή) αρχικά εμφανίζει μια αύξηση (από την τέταρτη επανάληψη στην πέμπτη) και στη συνέχεια μειώνεται μέχρι σχεδόν το μισό της αρχικής της τιμής. Τέλος, το μοντέλο με αρχικό υλικό το ένατο (μπλε γραμμή) εμφανίζει πιο ομαλή μείωση, ταυτόχρονα όμως και πιο αργή σύγκλιση. Πρέπει να πραγματοποιηθεί στο σημείο αυτό μια διευκρίνιση: οι εμφανιζόμενες τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης F πολλαπλασιάζονται με τον συντελεστή B και δίνουν τη μέση αλλαγή οστικής πυκνότητας.

Στην περίπτωση του τριδιάστατου σπονδύλου, η τιμή του B κυμαίνεται από 0,02 έως 0,0001. Επομένως, συγκρινόμενη με την τιμή $B=0,25$ του διδιάστατου σπονδύλου, προκύπτει ότι ίδιες τιμές της F προκαλούν μικρότερες μεταβολές οστικής πυκνότητας. Τέλος, είναι φανερό ότι η επιλογή της αναφοράς $k=0,0002$ J/g είναι περισσότερο προσαρμοσμένη στη δοκιμή με αρχικό υλικό το έβδομο.

Πίνακας 10.4 Δείκτης δυσκαμψίας K για τις τρεις πραγματοποιούμενες δοκιμές

Δοκιμή	Δείκτης δυσκαμψίας (σε cm^3/Jg)
Εκκίνηση με αρχικό υλικό το έβδομο	1,751 E-2
Εκκίνηση με αρχικό υλικό το τρίτο	1,656 E-2
Εκκίνηση με αρχικό υλικό το ένατο	1,503 E-2

Από τον Πίνακα 10.2 προκύπτει το εξής: η εκκίνηση με το έβδομο υλικό παρέχει τη μεγαλύτερη δυσκαμψία από τις άλλες δύο μεθόδους, με τη μέθοδο εκκίνησης από το τρίτο υλικό να εμφανίζει μεγαλύτερη δυσκαμψία σε σύγκριση με την εκκίνηση από το ένατο υλικό.

Βιβλιογραφικές Πηγές

- [1] Βιοϊατρική Τεχνολογία, Πρόχειρες σημειώσεις του μαθήματος, Χρ. Προβατίδης Επ. Καθηγητής ΕΜΠ, Αθήνα 2000
- [2] Skeletal Tissue Mechanics, R. Bruce Martin, David B. Burr, Neil A. Sharkey, εκδόσεις Springer, 1998
- [3] Οστεοπόρωση, Ι. Λυρίτης, Αθήνα 1998
- [4] Πεπερασμένα Στοιχεία στη Μηχανολογία, Α.Κανάραχος Καθηγητής ΕΜΠ και Χρ. Προβατίδης Επ. Καθηγητής ΕΜΠ, εκδόσεις Παπασωτηρίου, Αθήνα 2000
- [5] Quantitative response of bone mechanical stress. R. T. Hart, Phd, 1983.
- [6] Relationships Between Loading History and Femoral Cancellous Bone Architecture, D.R.Carter, T.E.Orr, D.P. Fyhrie, J. Biomechanics Vol. 22, 1989, pp 231-244
- [7] Biomechanical model of vertebra based on bone remodeling, Janko D. Jovanovic, Miomir Lj. Jovanovic, Medicine and Biology Vol. 11, 2004, pp. 35-39
- [8] A study of the effect of non-linearities in the equation of bone remodeling, Zhu Xingua, Gong He, Zhu Dong, Gao Bingzhao, J. Biomechanics Vol. 35, 2002, pp 951-960
- [9] Computer prediction of adaptive bone remodeling around noncemented femoral prostheses : the relationship between damage-based and strain-based algorithms, Brian P. McNamara, David Taylor, Patrick J. Prendergast, Med. Eng. Phys. Vol. 19, No. 5, pp. 454-463, 1997
- [10] Effects of mechanical loading on the profile of human femoral diaphyseal geometry, T. Mittlmeier, C. Mattheck, F. Dietrich, Med. Eng. Phys. 1994, Vol. 16
- [11] A three-dimensional finite analysis of adaptive remodeling in the proximal femur, M. A. Stupler, B. D. Reddy, G. R. Starke, A. Spirakis, J. Biomechanics Vol. 30, 1997, pp. 1063-1067
- [12] Correlation between pre-operative periprosthetic bone density and post-operative bone loss in THA can be explained by strain-adaptive remodeling, J. Biomechanics 32, 1999, pp. 695-703
- [13] Application of an anisotropic bone-remodeling model based on a damage-repair theory to the analysis of the proximal femur before and after total hip replacement, M. Doblare, J.M. Garcia, J. Biomechanics 34, 2001, pp.1157-1170

- [14] Bone remodeling simulation: a tool for implant design, J.M. Garcia, M. Doblare, J. Cegonino, Computational Material Science 25, 2002, pp. 100-114
- [15] Handbook Of Bone Mechanics, S.C. Cowin, CRC Press, Inc, 1989
- [16] A mathematical model for simulating the bone remodeling process under mechanical stimulus, Jianying Li, Haiyan Li, Li Shi, Alex S.L. Fok, Cemal Ucer, Hugh Devlin, Keith Horner, Nisk Silikas, Dental Materials, 2006
- [17] Comparison of two numerical approaches for bone remodeling, G. Chen, M. Perret, M.Pearcy, D.L.S. McElwain, Medical Engineering & Physics Vol. 29, 2007, pp 134-139
- [18] Μηχανική Παραμορφώσιμων Σωμάτων II, Γ.Ι.Τσαμασφύρος Αναπλ. Καθηγητής ΕΜΠ, εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 1991
- [19] Εγχειρίδια χρήσης (Help Manuals & Tutorials) του πακέτου λογισμικού ANSYS (εκδόσεις 10)
- [20] F. Gaynor Evans, “Methods of studying the biomechanical significance of bone form”
- [21] J. D. Currey, “The Adaptation of Bones to Stress”, J. Theoret. Biol. (1968):20, 91-106
- [22] Shame I.H & Cozzarelli F.A.; Elastic and Inelastic Stress Analysis; Prentice Hall,1992
- [23] Μυλωνάς Κ.Π; Μηχανική Παραμορφώσιμων σωμάτων; ΕΜΠ 1992
- [24] Beer and Watson; Introduction to Finite and Boundary Element Methods for Engineers; Juhn Wiley & sons, 1992
- [25] Reddy J.N ; Finite Element Method; McgrawHill, 1993
- [26] Gjelsvik, “Bone remodeling and piezoelectricity — I”, J. Biomechanics, vol. 6, 1973, pp. 69-77
- [27] Mette Bagge, “Time Simulation of Bone Adaptation”
- [28] Adaptive bone-remodeling theory applied to prosthetic-design analysis, R. Huiskes, H. Weinans, H. J. Grootenboer, M. Dalstra, B. Fudala And T. J. Slooff, *J. Biomechanics*, vol. 20, 1987, pp. 1135-1150
- [29] A physiological approach to the simulation of bone remodeling as a self-organizational control process, M. G. Mullender, R. Huiskes And H. Weinans, *J. Biomechanics*, Vol. 27, No. 11, Pp. 1389- 1394. 1994
- [30] The Behavior Of Adaptive Bone-Remodeling Simulation Model, H. Weinans, R. Huiskes and H. J. Grootenboert, *J Biomechanics* Vol. 25, No. 12, Pp. 1425-1441. 1992.

- [31] Observations Of Convergence And Uniqueness Of Node-Based Bone Remodeling Simulations, Kenneth J. Fischer, Chris R. Jacobs, Marc E. Levenston, And Dennis R. Carter, *Annals Of Biomedical Engineering*, Vol. 25, Pp. 261-268, 1997
- [32] Numerical instabilities in bone remodeling simulations: The advantages of a node-based finite element approach, Christopher R. Jacobs, Marc E. Levenston, Gary S. Beaupre, Juan C. Sirno and Dennis R. Carter, *J. Biomechanics* Vol. 28. No. 4. pp. 449-459, 1995
- [33] An Analytical And Numerical Study Of The Stability Of Bone Remodelling Theories: Dependence On Microstructural Stimulus, Timothy P. Harrigan And James J. Hamilton *J. Biomechanics* Vol. 25, No. 5, Pp. 477-488, 1992.
- [34] Evaluation of osteoporotic bone quality by a computational model for bone remodeling, Joao Folgado, Paulo R. Fernandes, Jose M. Guedes, Helder C. Rodrigues, *Computers and Structures* 82 (2004) 1381–1388
- [35] *Εγκυκλοπαίδεια Grand Larousse*, Τόμος 8^{ος}, 2001, *Ελληνικά Γράμματα*.

Πηγές στο Διαδίκτυο

- [36] <http://www.ansys.com>
- [37] <http://www.sciencedirect.com>