



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ ΚΑΙ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

**ΧΡΗΣΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ
ΕΛΑΣΤΟΜΕΡΩΝ ΔΙΑΤΑΞΕΩΝ
ΓΙΑ ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΙΩΑΝΝΗ Ε. ΣΑΠΟΥΝΤΖΑΚΗ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:

**Ι.Α. ΑΝΤΩΝΙΑΔΗΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Ε.Μ.Π.**

ΑΘΗΝΑ

ΙΟΥΛΙΟΣ 2013

Στους γονείς μου

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα διπλωματική εργασία ξεκίνησε τον Ιούλιο του 2012 και ολοκληρώθηκε τον Ιούλιο του 2013. Η επιτυχής ολοκλήρωσή της προϋποθέτει τις γνώσεις, τη σωστή καθοδήγηση και την πολύτιμη βοήθεια ενός Δασκάλου. Αρωγός και συμπαραστάτης σε αυτή την προσπάθεια ήταν ο κ. Ι. Αντωνιάδης, Καθηγητής του τομέα Μηχανολογικών Κατασκευών και Αυτομάτου Ελέγχου της Σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου. Αισθάνομαι την υποχρέωση να εκφράσω τις θερμές ευχαριστίες μου για τη συνεχή επιστημονική και ηθική υποστήριξη του, την καθημερινή συνεργασία και το συνεχές ενδιαφέρον του καθώς και για τις εύστοχες και εποικοδομητικές παρατηρήσεις του καθ'όλη τη διάρκεια εκπόνησης της παρούσας εργασίας.

Στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας αναπτύσσεται η μέθοδος παραγωγής ενέργειας από την χρήση μη γραμμικών διατάξεων. Στο δεύτερο και στο τρίτο κεφάλαιο περιγράφεται η θεωρία των λοξών ελατηρίων και του μηχανισμού σκλήρυνσης αντίστοιχα. Στην συνέχεια, στο τέταρτο κεφάλαιο, γίνεται ανάλυση της μεθόδου Harmonic Balance και του ταλαντωτή Duffing ενώ στο πέμπτο γίνεται περιγραφή του προβλήματος. Στο τελευταίο κεφάλαιο, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα μέσω διαγραμμάτων για τις διάφορες περιπτώσεις που έχουμε εξετάσει.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Περίληψη	4
Εισαγωγή	5
1. Παραγωγή ενέργειας από μία μη γραμμική διάταξη.....	8
2. Σύστημα με λοξά ελατήρια	11
2.1 Στατική ανάλυση λοξών ελατηρίων	12
3. Μηχανισμός σκλήρυνσης.....	15
4. Μέθοδος Harmonic Balance – Ταλαντωτής Duffing.....	21
4.1 Η μέθοδος Harmonic Balance	21
4.2 Σύνοψη της μεθόδου Harmonic Balance	23
4.3 Περιοδική διέγερση με γραμμική απόσβεση.....	23
4.4 Ταλαντωτής Duffing.....	25
5. Περιγραφή προβλήματος.....	27
5.1 Ενεργειακές εξισώσεις και εξισώσεις Lagrange	28
5.2 Ελαστομερής κατασκευή.....	30
5.3 Αδιάστατες εξισώσεις κίνησης.....	31
5.4 Εφαρμογή της μεθόδου Harmonic Balance στο συγκεκριμένο πρόβλημα	34
6. Παρουσίαση αποτελεσμάτων	38
Βιβλιογραφία.....	73

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Τα οφέλη από τη χρήση μη γραμμικής δυσκαμψίας σε μία συσκευή παραγωγής ενέργειας περιλαμβάνει ένα σύστημα μάζας-ελατηρίου-αμορτισέρ του συστήματος που διερευνάται. Η ανάλυση έχει ως βάση την αρχή διατήρησης της ενέργειας και αποκαλύπτει ένα θεμελιώδες όριο της αποτελεσματικότητας της κάθε μη γραμμικής συσκευής σε μια γραμμική διάταξη για μια τέτοια εφαρμογή. Δύο τύποι μη γραμμικής δυσκαμψίας θεωρείται ότι υπάρχουν. Το πρώτο σύστημα έχει ένα μη γραμμικό διασταθμό μηχανισμό. Αυτός ο μηχανισμός έχει ως αποτέλεσμα την κλίση της απόκρισης της μετατόπισης της μάζας ως συνάρτηση του χρόνου, με αποτέλεσμα να έχουμε υψηλότερη ταχύτητα για μια δεδομένη διέγερση εισόδου. Τα αριθμητικά αποτελέσματα δείχνουν ότι περισσότερη ενέργεια συλλέγεται από τον μηχανισμό αν η συχνότητα διέγερσης είναι αρκετά μικρότερη από τη φυσική συχνότητα. Το άλλο μη γραμμικό σύστημα που έχει μελετηθεί διαθέτει ένα σκληρό ελατήριο το οποίο έχει ως αποτέλεσμα την μετατόπιση της συχνότητας συντονισμού. Αριθμητικές και αναλυτικές μελέτες δείχνουν ότι η συσκευή με το σκληρό ελατήριο έχει ένα μεγαλύτερο εύρος ζώνης επί της οποίας η ισχύς μπορεί να συγκομισθεί λόγω της μετατόπισης της συχνότητας συντονισμού.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι συσκευές συγκομιδής ενέργειας που στηρίζονται στην ταλάντωση έχουν τραβήξει πολλή προσοχή τα τελευταία χρόνια, λόγω της ανάγκης για ισχύ σε ασύρματες συσκευές σε απομακρυσμένα ή εχθρικά περιβάλλοντα. Μέχρι σήμερα, μια ηχηρή γραμμική γεννήτρια υπήρξε ο πιο κοινός τύπος της γεννήτριας που χρησιμοποιούνταν για συγκομιδή ενέργειας. Απλή ρύθμιση και μέθοδοι μοντελοποίησης περιγράφονται και δίνουν μια πιο ευνοϊκή λύση Θεωρητικά, αν όχι πρακτικά. Το μοντέλο για μια τέτοια συσκευή παρέχει πολύτιμες πληροφορίες για την κύρια μεταγωγή μηχανισμών, όπως ηλεκτρομαγνητικά, πιεζοηλεκτρικά και ηλεκτροστατικά στοιχεία, που χρησιμοποιούνται για την εφαρμογή αυτή. Ωστόσο, η καλή απόδοση της γεννήτριας είναι περιορισμένη σε μια στενή ζώνη συχνοτήτων, όταν η συσκευή είναι άριστα συντονισμένη, ώστε η φυσική συχνότητα της να συμπίπτει με τη συχνότητα διέγερσης. Η απόδοση της γεννήτριας πέφτει γρήγορα, αν είναι κακοσυντονισμένη. Ο Sari έχει αναπτύξει μία ευρυζωνική μικρο-γεννήτρια προκειμένου να ξεπεραστεί αυτός ο περιορισμός χρησιμοποιώντας μια σειρά από προβόλους με διάφορα μήκη και συχνότητες συντονισμού, η οποία είναι κατάλληλη για εφαρμογές υψηλών συχνοτήτων (3.5-4.5 kHz). Επιπλέον, η ισχύς που συλλέχθηκε από μια συσκευή συντονισμού είναι ανάλογη προς τον κύβο της συχνότητας διέγερσης, η οποία στη συνέχεια περιορίζει την απόδοση της γεννήτριας συντονισμού ακόμη περισσότερο στις χαμηλές συχνότητες. Οι εφαρμογές χαμηλής συχνότητας του ενδιαφέροντος για το εργασία που παρουσιάζεται εδώ είναι στο σώμα συσκευές, όπως κινητά τηλέφωνα, iPods, ψηφιακές φωτογραφικές μηχανές και ένα κοχλιακό εμφύτευμα. Η συσκευή που έρχεται σε επαφή με το σώμα βελτιώνεται όσον αφορά την τεχνολογία και γίνεται όλο και μικρότερη σε μέγεθος. Από την οπτική γωνία της παραγωγής ενέργειας, αυτό θα περιορίσει την απόσταση που η μάζα στην γεννήτρια μπορεί να κινείται, ακόμα περισσότερο. Αυτό σημαίνει ότι το σύστημα απόσβεσης πρέπει να αυξηθεί για να περιορίσει την διαδρομή στην οποία κινείται η μάζα. Ωστόσο, μια αύξηση στο σύστημα απόσβεσης μειώνει σημαντικά την ισχύ που παράγεται από συντονισμένη λειτουργία της γεννήτριας κατά τον συντονισμό.

Ένας άλλος παράγοντας είναι ότι μία γραμμική διάταξη πρέπει να είναι σχεδιασμένη για να έχει χαμηλή φυσική συχνότητα, πράγμα που σημαίνει ότι απαιτούνται μια μεγάλη μάζα και ένα μαλακό ελατήριο. Επιπλέον, έχοντας μια μεγάλη μάζα που στηρίζεται σε ένα μαλακό ελατήριο μπορεί οδηγήσει σε κάποια μη γραμμικότητα λόγω της μεγάλης επέκτασης της άνοιξης. Έτσι, για

να ξεπεραστεί αυτός ο περιορισμός, άλλοι τύποι γεννητριών πρέπει να ερευνηθούν, συμπεριλαμβανομένων μη-συντονισμένων γεννητριών, οι οποίες έχουν παρόμοια ή καλύτερη απόδοση από μια συντονισμένη γεννήτρια. Οι Kulah και Najafi σχεδίασαν μια γεννήτρια που μετατρέπει χαμηλής συχνότητας ταλαντώσεις του περιβάλλοντος σε πολύ υψηλότερης συχνότητας μέσω ενός ηλεκτρομηχανικού αναβιβαστή συχνότητας χρησιμοποιώντας έναν μαγνήτη που παρέχει αποδοτική ενέργεια μετατροπής ακόμη και για χαμηλές συχνότητες. Ένας άλλος μηχανισμός αύξησης της συχνότητας έχει μελετηθεί από τον Lee που χρησιμοποιούσε πιεζοηλεκτρική τεχνολογία. Ο Mitcheson ασχολήθηκε με τρεις αρχιτεκτονικές για συσκευές παραγωγής ενέργειας. Μία από τις αρχιτεκτονικές περιγράφει είναι ένα νέο μη-συντονισμένο και μη γραμμικό μηχανισμό (γεννήτρια) που χρησιμοποιεί την παραμετρική δύναμη Coulomb (CFPG). Αυτός ο μηχανισμός είναι χρήσιμος όταν η επιτρεπόμενη μετατόπιση της μάζας είναι μικρή σε σύγκριση με το πλάτος της ταλάντωσης της πηγής και για συχνότητες πολύ χαμηλότερες της συχνότητας συντονισμού της συντονισμένης γεννήτριας. Ωστόσο, το όριο της αναλογίας της παραγόμενης ισχύος από την χρήση του μηχανισμού CFPG ως προς αυτήν από ένα συντονισμένο σύστημα βρέθηκε να είναι $4\beta/\pi$ όπου $0 < \beta < 1$. Αυτός ο μηχανισμός χρησιμοποιήθηκε στη συνέχεια, μαζί με άλλους μηχανισμούς που περιγράφονται για να μελετήσει το ποσό της ενέργειας που μπορεί να συλλεχθεί από το ανθρώπινο περπάτημα κινήσεως με τη χρήση μετρούμενων δεδομένων από διάφορα μέρη πάνω στο σώμα.

Μια πρόσφατη πρόοδος στον τομέα αυτό ενσωματώνει μια μη γραμμική συμπεριφορά, συνήθως μια σκλήρυνση του συστήματος, για να αυξηθεί το εύρος ζώνης του συστήματος με τη μετατόπιση της συχνότητας συντονισμού. Αυτή η εργασία περιγράφει δύο μη γραμμικούς μηχανισμούς για συσκευές παραγωγής ενέργειας. Αποτελούνται από δύο είδη μη γραμμικών ελατηρίων συνδεδεμένα με μια μάζα και ένα γραμμικό αποσβεστήρα, δηλαδή το μηχανικό στοιχείο του συστατικού παραγωγής ενέργειας. Η ανάλυση διεξάγεται χρησιμοποιώντας την αρχή της διατήρησης της ενέργειας αποκαλύπτοντας ένα θεμελιώδες όριο για την απόδοση της κάθε μη γραμμικής διάταξης σε σύγκριση με εκείνη ενός συντονισμένου γραμμικού συστήματος. Το πρώτο σύστημα χρησιμοποιεί ένα δισταθές ελατήριο που ονομάζεται συμπληρωματικός μηχανισμός, το οποίο κινεί με ταχείς ρυθμούς τη μάζα μεταξύ δύο σταθερών καταστάσεων. Ο στόχος είναι να αυξηθεί η καμπύλη απόκρισης της μετατόπισης της μάζας ως μία συνάρτηση του χρόνου, η οποία οδηγεί σε αύξηση της ταχύτητας για μια δεδομένη διέγερση, αυξάνοντας έτσι το ποσό της ενέργειας που παράγεται. Ο δεύτερος μη γραμμικός μηχανισμός που περιγράφεται στο παρόν κεφάλαιο χρησιμοποιεί ένα στοιχείο σκλήρυνσης-δυσκαμψίας. Ο στόχος αυτού του μηχανισμού είναι να παράσχει ένα

μεγαλύτερο εύρος ζώνης επί του οποίου η ισχύς μπορεί να παραχθεί, έτσι ώστε να μπορεί να αντιμετωπίσει έλλειψη συντονισμού. Η απόδοση κάθε μη γραμμικού συστήματος συγκρίνεται με το αντίστοιχο ισοδύναμο γραμμικό σύστημα.

Κεφάλαιο 1

ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΑΠΟ ΜΙΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ

Σε αυτό το κεφάλαιο εξετάζεται η παραγωγή ενέργειας από μία διάταξη που μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ένα μη γραμμικό σύστημα με ένα βαθμό ελευθερίας που περιέχει τόσο γραμμικά όσο και μη γραμμικά ελατήρια. Όπως αναφέρουν οι Ramlan et. al. (2009) η εξίσωση κίνησης του συστήματος δίνεται από την σχέση

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y} \quad (1.1)$$

όπου m είναι η μάζα και k η σκληρότητα. Το ποσό της ενέργειας που μπορεί να παραχθεί εκπροσωπείται από την ενέργεια που διαχέεται από τον αποσβεστήρα, c , επειδή η μετατροπή της μηχανικής ενέργειας σε ηλεκτρική ενέργεια είναι πιθανόν να έχει το ίδιο αποτέλεσμα με την μηχανική απόσβεση. Υποθέτοντας ότι $y=Y\cos(\omega t)$ και πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης κίνησης με την σχετική ταχύτητα \dot{z} έχουμε ότι

$$m\dot{z}\ddot{z} + c\dot{z}^2 + kz\dot{z} = m\omega^2 Y(\cos \omega t)\dot{z} \quad (1.2)$$

Ολοκληρώνοντας κάθε όρο σε μία περίοδο της διέγερσης και αν υποτεθεί ότι η δύναμη που παράγεται σε έναν κύκλο είναι η ίδια με την ισχύ που απορροφάται από τους αποσβεστήρες ισχύει ότι

$$P_h = P_{in} \quad (1.3)$$

όπου P_h είναι η ενέργεια που συλλέγεται και είναι ίση με

$$P_h = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} c\dot{z}^2 dt \quad (1.4)$$

και P_{in} η ισχύς εισόδου που δίνεται από την σχέση

$$P_{in} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} c\dot{z}^2 m\omega^2 Y(\cos \omega t)\dot{z} dt \quad (1.5)$$

Θεωρώντας τώρα ένα μη γραμμικό σύστημα με την εξίσωση κίνησης να δίνεται ως

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + f(z) = -m\ddot{y} \quad (1.6)$$

όπου $f(z)$ είναι μια συντηρητική μη γραμμική δύναμη ελατηρίου. Εάν γίνει μια παρόμοια ανάλυση σε κάθε όρο στην παραπάνω εξίσωση είναι ολοκληρωμένη πάνω από ένα κύκλο, το αποτέλεσμα είναι το ίδιο με εκείνο στην (3). Σημειώστε ότι τα ολοκληρώματα που αφορούν τη μάζα και την ακαμψία μηδενίζονται από την καθαρή μεταβολή της κινητικής και δυναμικής ενέργειας του συστήματος πάνω από ένα χρονικό διάστημα κίνησης. Αυτό συμβαίνει για οποιαδήποτε μη γραμμική διάταξη λόγω των συντηρητικών ιδιοτήτων της μάζας και των στοιχείων του ελατηρίου. Η ισχύς που συγκομίζονται σε μία περίοδο για τον γραμμικό μηχανισμό δίνεται από την σχέση

$$P_t = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} c\dot{z}^2 m\omega^2 Y(\cos \omega t) \dot{z} dt = \frac{m\omega^3 YZ}{2} \quad (1.7)$$

όπου Z είναι το πλάτος της σχετικής μετατόπισης μεταξύ του περιβλήματος και της μάζας. Η εξίσωση (1.7) δείχνει ότι η μέγιστη παραγωγή ισχύος εξαρτάται από το μέγεθος της μάζας, το πλάτος της μετατόπισης εισόδου, το πλάτος της σχετικής μετατόπισης μεταξύ της μάζας και του περιβλήματος και τον κύβο της συχνότητας διέγερσης. Για μια συσκευή που περιέχει ένα μη γραμμικό ελατήριο η ταχύτητα \dot{z} δεν είναι αρμονική και έτσι το ολοκλήρωμα στην (1.7) δεν έχει αναλυτική λύση. Ωστόσο, το μέγιστο ποσό παραγωγής ενέργειας από την μη γραμμική διάταξη μπορεί να βρεθεί σημειώνοντας ότι

$$P_n \leq \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} c\dot{z}^2 m\omega^2 Y |(\cos \omega t)| |\dot{z}| dt \quad (1.8)$$

η ανισότητα στην (1.8) μπορεί να απλοποιηθεί περαιτέρω και να γίνει

$$P_n \leq \frac{m\omega^2 Y}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\dot{z}| dt \quad (1.9)$$

Επειδή η \dot{z} είναι μία περιοδική συνάρτηση, το παραπάνω ολοκλήρωμα μπορεί να γραφεί και ως

$$\int_0^{2\pi} |\dot{z}| dt = 4 \int_0^{2\pi} \dot{z} dt \quad (1.10)$$

Συνδυάζοντας όλες τις παραπάνω εξισώσεις έχουμε το μέγιστο ποσό της παραγόμενης ισχύος από μία διάταξη που περιλαμβάνει ένα μη γραμμικό ελατήριο

$$P_n \leq \frac{2m\omega^3 YZ}{\pi} \quad (1.11)$$

Η αναλογία της ισχύος που παράγεται από ένα μη γραμμικό σύστημα με αυτή μίας συντονισμένης γραμμικής διάταξης μπορεί να βρεθεί από διαίρεση της (10) με την (5) για να δώσει

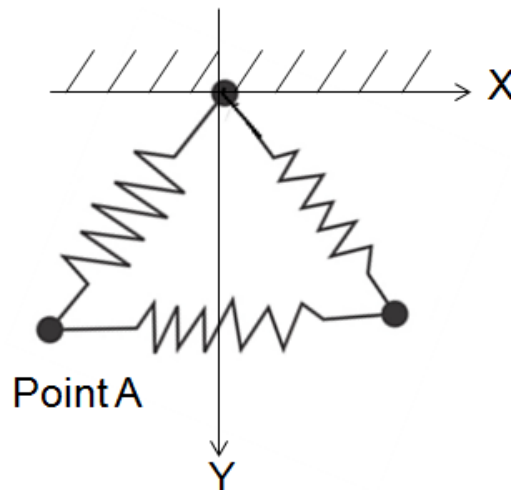
$$P_r = \frac{P_n}{P_l} \leq \frac{4}{\pi} \quad (1.12)$$

Ωστόσο, η πραγματική ισχύς που παράγεται από ένα μη γραμμικό σύστημα εξαρτάται από τη μορφή της μη γραμμικότητας $f(z)$. Από την εξίσωση αυτή προκύπτει ότι, εάν είναι βέλτιστα συντονισμένη, το μέγιστο ποσό ισχύος που παράγεται από μια μη γραμμική διάταξη, είναι $4/\pi$ φορές μεγαλύτερο από την ισχύ που παράγεται από το συντονισμένο γραμμικό σύστημα. Στην βέλτιστη περίπτωση μη γραμμικού συστήματος, η απόκριση της μετατόπισης προσεγγίζει ένα τετραγωνικό κύμα, έτσι ώστε η ταχύτητα \dot{z} να είναι μη μηδενική μόνο όταν $|\cos\omega t| \approx 1$. Ωστόσο, θα πρέπει να είναι τονίσουμε ότι ο λόγος της ισχύος που παράγεται από μία συσκευή με ένα μη γραμμικό μηχανισμό με εκείνη ενός γραμμικού συστήματος μπορεί να είναι μεγαλύτερος από $4/\pi$ όταν το γραμμικό σύστημα δεν είναι συντονισμένο και ως εκ τούτου το μη γραμμικό σύστημα μπορεί να είναι σε θέση να αντιμετωπίσει καλύτερα μία έλλειψη συντονισμού από ένα γραμμικό σύστημα.

Κεφάλαιο 2

ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΕ ΛΟΞΑ ΕΛΑΤΗΡΙΑ

Το σχήμα 2.1 δείχνει μία δυνατή διάταξη του λοξών ελατηρίων. Το σύστημα αποτελείται από δύο γραμμικά πλάγια ελατήρια που συνδέονται με μία μάζα και ένα αμορτισέρ. Σε αντίθεση με ένα γραμμικό σύστημα, όταν τα ελατήρια δεν είναι τεντωμένα, είναι κεκλιμένα κατά μία γωνία $\pm \theta$ στον άξονα $x = 0$. Παρά το γεγονός ότι τα ελατήρια παρέχουν μία γραμμική δύναμη επαφής κατά μήκος των αξόνων τους, αυτή η συγκεκριμένη διάταξη δίνει μία μη γραμμική δύναμη επαφής κατά την κατεύθυνση του άξονα x . Σύμφωνα με τους Ramlan et. al. (2009) ο σκοπός αυτού του μηχανισμού είναι να αυξηθεί η κλίση της καμπύλης μετατόπισης ως συνάρτηση του χρόνου, έτσι ώστε να προσεγγίζει το τετράγωνο ενός κύματος. Το συμπληρωματικό πρόγραμμα μέσω του μηχανισμού έχει μελετηθεί από τον Brennan, με το μοντέλο του μηχανισμού πτήσης ενός εντόμου καθορίζοντας την μέγιστη κινητική ενέργεια που μπορεί να παραχθεί χρησιμοποιώντας αυτό τον μηχανισμό και σε σύγκριση με εκείνη από το γραμμικό σύστημα.



Σχήμα 2.1: Σύστημα λοξών ελατηρίων

2.1 Στατική ανάλυση λοξών ελατηρίων

Αυτό το κεφάλαιο εστιάζει σε μια στατική ανάλυση των δύο πλαγίων ελατηρίων και δείχνει πώς η συγκεκριμένη διάταξη έχει ως αποτέλεσμα την παρουσία αρνητικής δυσκαμψίας. Στο σχήμα φαίνονται δύο κεκλιμένα ελατήρια που συνδέονται μεταξύ τους με μία αξονική δύναμη που δρα και στα δύο ελατήρια. Η συνολική συνιστώσα της αξονικής δύναμης F του ελατηρίου για οποιαδήποτε μετατόπιση είναι

$$F = 2F_k \quad (2.1)$$

όπου F_k είναι η αξονική συνιστώσα κάθε δύναμης ελατηρίου. Η συνολική αξονική δύναμη επαναφοράς ως συνάρτηση του x δίνεται από

$$F = 2k_s(\sqrt{x^2 + l^2} - l_0)\sin\theta \quad (2.2)$$

και

$$\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + l^2}} \quad (2.3)$$

και αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση έχουμε

$$F = 2k_s(\sqrt{x^2 + l^2} - l_0)\frac{x}{\sqrt{x^2 + l^2}} \quad (2.4)$$

και σε αδιάστατη μορφή

$$\hat{F} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\hat{x}^2 + \gamma^2}}\right)\hat{x} \quad (2.5)$$

όπου

$$\hat{F} = \frac{1}{2k_s l_0} \quad (2.6\alpha)$$

$$\gamma = \frac{l}{l_0} \quad (2.6\beta)$$

$$\hat{x} = \frac{x}{l_0} \quad (2.6\gamma)$$

και το αδιάστατο μητρώο ακαμψίας

$$k = \frac{d\hat{F}}{d\hat{x}} \quad (2.7)$$

είναι

$$\hat{k} = 1 - \frac{\gamma^2}{(\hat{x}^2 + \gamma^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.8)$$

Η συνολική δυναμική ενέργεια δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$E_P = 2\left[\frac{1}{2}k_s(\sqrt{x^2 + l^2} - l_0)^2\right] \quad (2.9)$$

και σε αδιάστατη μορφή

$$\hat{E} = (\sqrt{\hat{x}^2 + \gamma^2} - 1)^2 \quad (2.10)$$

όπου

$$\hat{E} = \frac{E_P}{k_s l_0^2} \quad (2.11)$$

Η αδιάστατη δυναμική ενέργεια παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα και οι θέσεις ισορροπίας του συστήματος προκύπτουν από τις ακόλουθες εξισώσεις

$$\hat{x}_1 = \sqrt{1 - \gamma^2} \quad (2.12\alpha)$$

$$\hat{x}_2 = -\sqrt{1 - \gamma^2} \quad (2.12\beta)$$

$$\hat{x}_3 = 0 \quad (2.12\gamma)$$

Εάν το πλάτος της κίνησης είναι μικρό, το σύστημα θα ταλαντώνεται γύρω από μία από τις σταθερές θέσεις ισορροπίας του ανάλογα με τις αρχικές συνθήκες. Εάν το εύρος είναι μεγάλο, το σύστημα αρχίζει να ταλαντώνεται μεταξύ των δύο σταθερών θέσεων ισορροπίας, η οποία μπορεί επίσης να περιγραφεί ως

διασταυρούμενη κίνηση. Η κρίσιμη στατική δύναμη $\hat{F} = \frac{d\hat{F}}{d\hat{x}}$ που το σύστημα μπορεί να αντέξει δίνεται από την εξίσωση

$$\hat{F}_C = (1 - \gamma^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} \quad (2.13)$$

Αυτό δείχνει ότι όσο μικρότερη είναι η τιμή του γ , τόσο μεγαλύτερη είναι η δύναμη που χρειάζεται για να σπάσει απότομα το ελατήριο από τη μία θέση

ισορροπίας σε μια άλλη. Αντικαθιστώντας και λύνοντας ως προς \hat{x} δίνεται η θέση στην οποία η εμφανίζεται το σπάσιμο

$$\hat{x}_C = \gamma^{\frac{2}{3}} \sqrt{1 - \gamma^{\frac{2}{3}}} \quad (2.14)$$

Από την παραπάνω εξίσωση προκύπτει ότι το μέγιστο ποσό της ισχύς που μπορεί να παραχθεί από ένα μη γραμμικό μηχανισμό μπορεί να είναι στο μέγιστο κατά $4/\pi$ μεγαλύτερο από το συντονισμένο γραμμικό σύστημα, θεωρώντας ότι η μετατόπιση εξόδου, για μία δεδομένη ημιτονοειδή είσοδο, είναι ένα τετραγωνικό κύμα. Ωστόσο το παραπάνω σχήμα δείχνει ότι η ισχύς που συγκομίζεται από το συμπληρωματικό πρόγραμμα μέσω του μηχανισμού είναι πολύ μεγαλύτερη από εκείνη που συγκομίζεται από το γραμμικό σύστημα σε χαμηλές συχνότητες. Αυτό συμβαίνει επειδή το γραμμικό σύστημα είναι συντονισμένο σε μία μόνο συχνότητα διέγερσης και η συγκομιδή ισχύος πέφτει γρήγορα για διέγερση αρκετά διαφορετική από τη φυσική συχνότητα της συσκευής. Η ιδανική αντίδραση του συγκεκριμένου μηχανισμού είναι ένα τετραγωνικό κύμα ως μετατόπιση. Ωστόσο, η απόκριση πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση της κίνησης που δίνεται, έτσι ώστε η προσέγγιση προς το τετραγωνικό κύμα να παράγεται, αντ' αυτού. Η προσέγγιση αυτή γίνεται χειρότερη σε υψηλές συχνότητες. Για να παραχθεί μια καλή προσέγγιση ενός τετραγωνικού κύματος, ο χρόνος ανόδου τ_R πρέπει να είναι πολύ μικρότερη από το ένα τέταρτο της περιόδου, δηλαδή $\tau_R \ll T/4$, όπου $T = 2\pi/\Omega$ είναι η περίοδος ταλάντωσης. Για ένα δεδομένο φυσικό σύστημα, το τ_R περιορίζεται ακόμη περισσότερο από την παρουσία της μάζας και του αποσβετήρα. Καθώς αυξάνει η συχνότητα, το σύστημα δεν είναι σε θέση να παράγει ένα τετραγωνικό κύμα ως απόκριση δεδομένου ότι η περίοδος γίνεται μικρότερη και η συνθήκη $\tau_R \ll T/4$ δεν μπορεί πλέον να ικανοποιηθεί. Ως αποτέλεσμα, μια κατά προσέγγιση ημιτονοειδής απόκριση παράγεται σε υψηλές συχνότητες αντί για ένα τετραγωνικό κύμα, το οποίο οδηγεί σε ένα παρόμοιο ποσό ενέργειας που παράγεται από την γραμμική διάταξη. Η ισχύς που παράγεται σε χαμηλές συχνότητες από το γραμμικό σύστημα κυλά μακριά σε υψηλότερο ρυθμό σε σχέση με το σύστημα του προαναφερθέντος μηχανισμού. Έτσι, ένα δυνητικό όφελος αυτού του μηχανισμού είναι ότι μπορεί να φιλοξενήσει mistune καλύτερα. Επίσης, το σχήμα δείχνει ότι το πραγματικό όφελος του συγκεκριμένου μηχανισμού φαίνεται κατά την ύπαρξη ενός συστήματος με μία πολύ υψηλότερη φυσική συχνότητα σε σύγκριση με τη συχνότητα διέγερσης.

Κεφάλαιο 3

ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΣ ΣΚΛΗΡΥΝΣΗΣ

Έχει δειχθεί ότι δεν είναι δυνατόν για ένα μηχανικό σύστημα για να παράγει ένα τέλειο τετράγωνο κύμα. Έτσι, το ποσοστό απόδοσης του $4/\pi$ μεταξύ ενός μη γραμμικού και ενός γραμμικού συστήματος μπορεί να μην είναι εφικτό. Σε αυτό το κεφάλαιο, εισάγουμε έναν άλλο τύπο μη γραμμικού συστήματος που ονομάζεται μηχανισμός σκλήρυνσης. Αυτό το είδος του μη γραμμικού συστήματος χρησιμοποιείται για να παρέχει ένα μεγαλύτερο εύρος ζώνης επί της οποίας η ισχύς μπορεί να συλλεχθεί με τη μετατόπιση της συχνότητας συντονισμού σε υψηλότερη συχνότητα. Έτσι, η συζήτηση σχετικά με το μηχανισμό σκλήρυνσης εστιάζει κυρίως στον καθορισμό του εύρους ζώνης. Η εξίσωση της κίνησης που χρησιμοποιείται εδώ είναι

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + k_l z(1 + \frac{k_n}{k_l} z^2) = -m\ddot{y} \quad (3.1)$$

Το σύστημα αποτελείται από μία μάζα συνδεδεμένη σε σειρά με ένα παράλληλο συνδυασμό ενός αποσβεστήρα και ενός μη γραμμικού ελατηρίου του οποίου η δύναμη ελατηρίου είναι της μορφής $k_l x + k_n x^3$. Η παραπάνω εξίσωση κίνησης μπορεί να εκφραστεί σε αδιάστατη μορφή ως

$$u'' + 2\zeta u' + u + au^3 = \hat{Y}_e \cos(\Omega\tau) \quad (3.2)$$

όπου

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_l}{m}} \quad (3.3\alpha)$$

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_n} \quad (3.3\beta)$$

$$u = \frac{z}{x_0} \quad (3.3\gamma)$$

$$X_0 = \frac{mg}{k_l} |k_n = 0, \omega = 0 \quad (3.3\delta)$$

$$\alpha = \frac{k_n X_0^2}{k_l} \quad (3.3\varepsilon)$$

$$\hat{Y}_e = \frac{\Omega^2 Y}{X_0} \quad (3.3\sigma\tau)$$

Η λύση σε σταθερή κατάσταση είναι της μορφής

$$u = U \cos(\Omega \tau + \varphi) \quad (3.4)$$

όπου U είναι το πλάτος και φ η φάση της απόκρισης. Επιλύοντας την εξίσωση με την μέθοδο Harmonic Balance έχουμε ότι

$$\left(\frac{3}{4}aU^2 + 1 - \Omega^2\right)^2 + (2\zeta\Omega)^2 = \left(\frac{\hat{Y}_e}{U}\right)^2 \quad (3.5)$$

και επιλύοντας την παραπάνω εξίσωση για θετικό Ω για $\zeta \ll 1$ έχουμε ότι

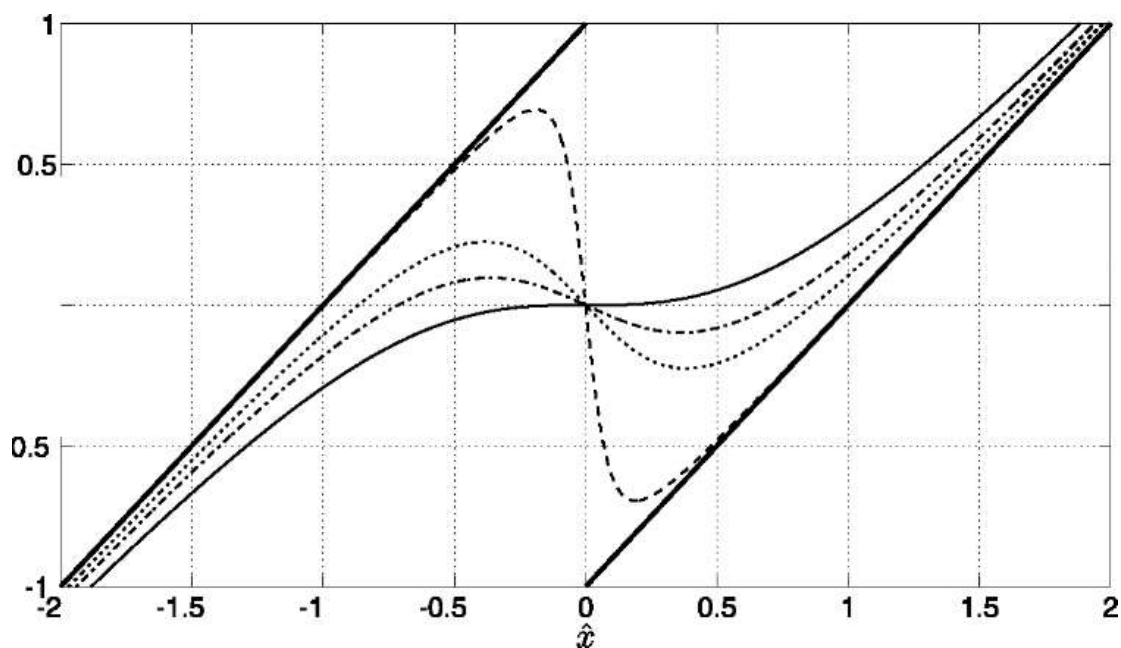
$$\Omega_a \approx \left[1 + \frac{3}{4}aU^2 - \frac{(\hat{Y}_e^2 - 3a\zeta U^4 - 4\zeta^2 U^2)^{\frac{1}{2}}}{U}\right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.6\alpha)$$

$$\Omega_b \approx \left[1 + \frac{3}{4}aU^2 + \frac{(\hat{Y}_e^2 - 3a\zeta U^4 - 4\zeta^2 U^2)^{\frac{1}{2}}}{U}\right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.6\beta)$$

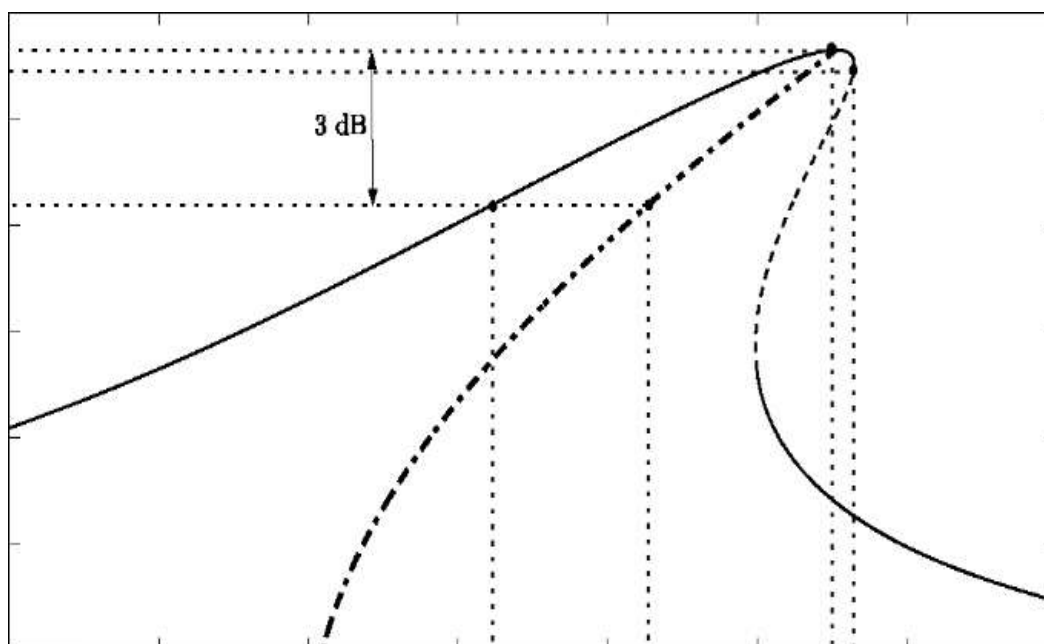
όπου η πρώτη εξίσωση δίνει την απόκριση σε σταθερή κατάσταση με ένα μεγαλύτερο πλάτος σε μια δεδομένη συχνότητα ενώ η δεύτερη σε σταθερή κατάσταση με ένα μικρότερο πλάτος σε μια δεδομένη συχνότητα, στην περιοχή όπου υπάρχουν πολλές σταθερές λύσεις.

Στο σχήμα 3.2 φαίνεται μια τυπική καμπύλη συχνότητας - απόκρισης για ένα μηχανισμό σκλήρυνσης που προκύπτει με χρήση των εξισώσεων που δίνουν τις λύσεις της απόκρισης για τις αυθαίρετες παραμέτρους του συστήματος. Η συνεχής γραμμή αντιπροσωπεύει τη απόκριση σταθερής κατάστασης και η διακεκομμένη γραμμή παρουσιάζει την ασταθή λύση.

Μία από τις κύριες διαφορές μεταξύ ενός γραμμικού και ενός μη γραμμικού συστήματος είναι ότι ένα μη γραμμικό σύστημα μπορεί να παράγει πολλές λύσεις σταθερή κατάστασης που να εξαρτώνται από μια σειρά από αρχικές συνθήκες. Ένα γραμμικό σύστημα αντίθετα παράγει πάντα μία μοναδική σταθερή λύση για όλες τις αρχικές συνθήκες. Στο κεφάλαιο αυτό, μελετώνται οι αναλυτικές και αριθμητικές λύσεις του συστήματος σκλήρυνσης.



Σχήμα 3.1: Καμπύλη μη γραμμικής αδιάστατης παραμένουσας δύναμης F



Σχήμα 3.2: Καμπύλη απόκρισης συχνότητας

Οι αριθμητικές λύσεις που βρέθηκαν με την χρήση άμεσης ολοκλήρωσης της εξίσωσης κίνησης και η λύση σταθερής κατάστασης συγκρίνονται με την προσέγγιση της λύσης που λαμβάνεται με την μέθοδο Harmonic Balance. Μπορεί να βγει το συμπέρασμα ότι οι αναλυτικές λύσεις συμφωνούν αρκετά καλά με τα αριθμητικά αποτελέσματα, για τις παραμέτρους που επιλέχθηκαν.

Στο εύρος συχνοτήτων όπου εμφανίζονται πολλές σταθερές λύσεις διαφορετικές αρχικές συνθήκες δίνουν διαφορετικές λύσεις σταθερής κατάστασης. Εάν ορισμένες αρχικές συνθήκες εφαρμοστούν στο σύστημα, η λύση σταθερής κατάστασης συγκλίνει με την χαμηλότερη από τις δύο πιθανές τιμές. Για τη μελέτη της επίδρασης των αρχικών συνθηκών στην απόκριση σταθερής κατάστασης συστήματος σκλήρυνσης, οι λεκάνες έλξης που παράγονται για κάθε περίπτωση φαίνονται στο σχήμα. Η λεκάνη έλξης παρουσιάζεται με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε

- Η λευκή περιοχή δίνει τις αρχικές συνθήκες που έχουν ως αποτέλεσμα την απόκριση στο συντονισμένο κλάδο (μεγαλύτερο πλάτος).
- Η σκούρα περιοχή δίνει τις αρχικές συνθήκες που έχουν ως αποτέλεσμα την απόκριση στο μη-συντονισμένο κλάδο (μικρότερου πλάτους).

Για την περίπτωση όπου $\alpha = 0.001$ (μέτρια μη γραμμικότητα), σε συχνότητα αρκετά μακριά από την συχνότητα του άλματος προς τα κάτω, υπάρχει ένα αρκετά μεγάλο σύνολο αρχικών συνθηκών για τις οποίες η λύση σταθερής κατάστασης είναι στο συντονισμένο τμήμα του διαγράμματος. Καθώς η συχνότητα πλησιάζει την συχνότητα του άλματος προς τα κάτω, το σύνολο των αρχικών συνθηκών για τις οποίες η λύση σταθερής κατάστασης είναι στο ηχητικό τμήμα, μειώνεται. Για μεγαλύτερη μη γραμμικότητα, $\alpha = 0.01$, η αλλαγή στην περιοχή λεκάνης απορροής για το συντονισμένο τμήμα γίνεται μεγαλύτερη ιδιαίτερα στην περιοχή κοντά στο σημείο του άλματος προς τα κάτω. Υποθέτοντας ότι είναι δυνατό να ληφθεί μια αριθμητική λύση με χρήση κατάλληλων αρχικών συνθηκών που συγκλίνει με τον συντονισμένο κλάδο, η ισχύς που παράγεται στο αμορτισέρ μπορεί επίσης να υπολογιστεί αριθμητικά. Σε αυτή την περίπτωση,

$$\hat{P} = \frac{P}{m\omega_n^3 X_0^2} \quad (3.7)$$

Ακόμη και αν η μέγιστη μετατόπιση μειώνεται με την μη γραμμικότητα (α), η μέγιστη ισχύς που παράγεται είναι σχεδόν η ίδια για όλες τις περιπτώσεις, αλλά εμφανίζεται σε διαφορετικές συχνότητες. Στην πράξη, ωστόσο, μπορεί να μην είναι δυνατό να επιτευχθεί αυτό, λόγω των αρχικών συνθηκών που απαιτούνται. Ο ευνοϊκός συνδυασμός αυτών είναι γενικά αρκετά περιορισμένος.

Για να μελετηθεί η επίδραση της μη γραμμικότητας α στην παραγωγή της μέγιστης ισχύς, είναι αναγκαίο να εξετάσει η FRC για την απόκριση της

ταχύτητας και όχι της μετατόπισης δεδομένου ότι η ισχύς είναι μία συνάρτηση της ταχύτητας. Το πλάτος της απόκρισης της ταχύτητας δίνεται από την σχέση

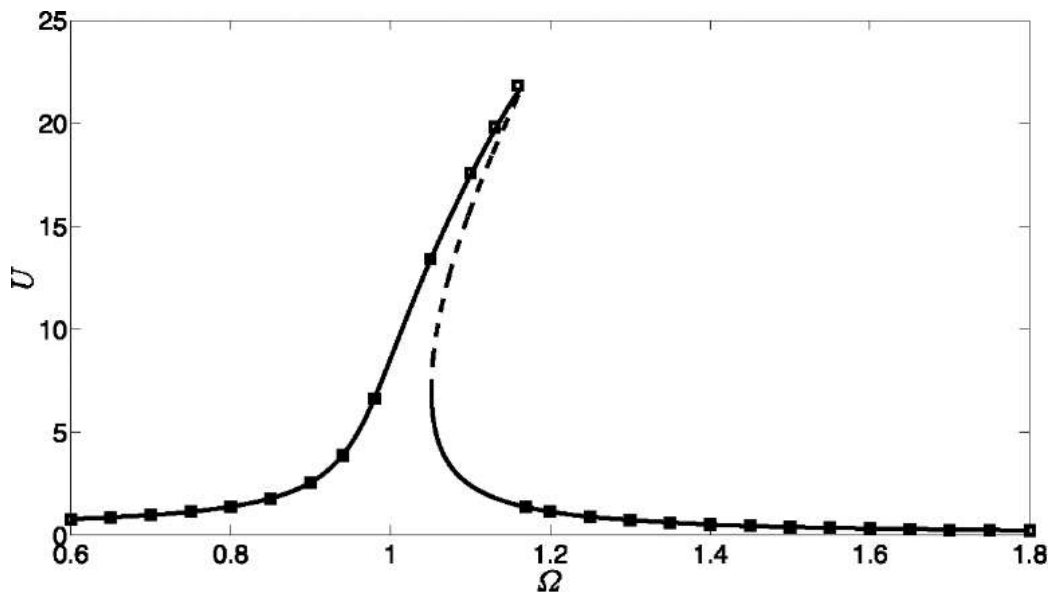
$$|u'| = \Omega U \quad (3.8)$$

Το πλάτος της ταχύτητας, στην συχνότητα του άλματος προς τα κάτω, το οποίο είναι περίπου ίσο με την μέγιστη ταχύτητα, δίνεται από την σχέση

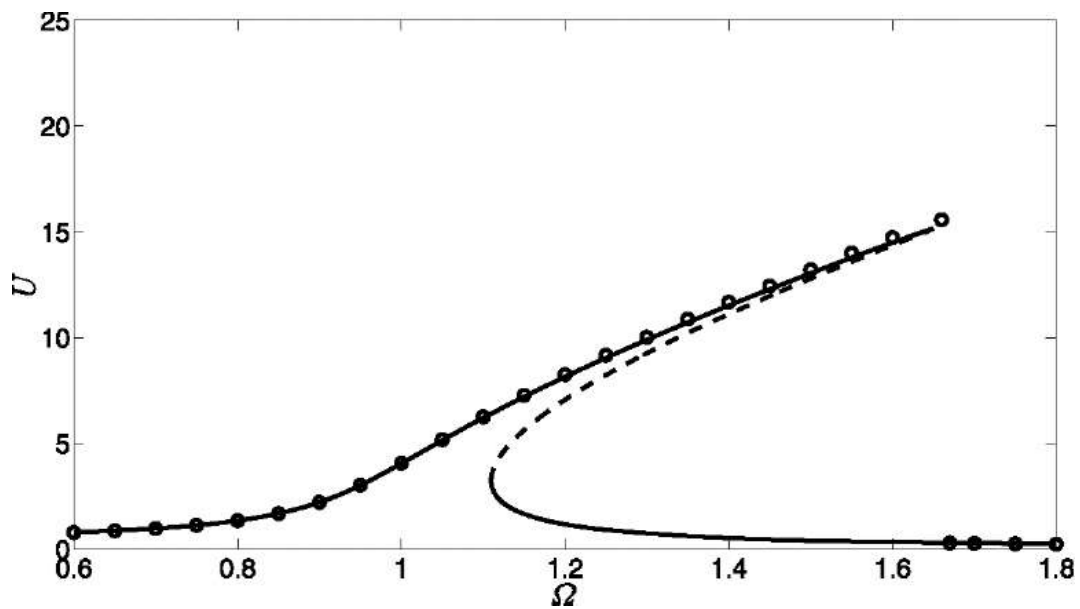
$$|u'|_m = \frac{\hat{Y}_e}{2\zeta} \quad (3.9)$$

Έτσι, επειδή η μέγιστη ταχύτητα είναι ανεξάρτητη από την μη γραμμικότητα α , η μέγιστη ισχύς που παράγεται για διαφορετικές τιμές του α είναι επίσης ανεξάρτητη από τη μη γραμμικότητα. Σε αυτό το κεφάλαιο διερευνήθηκαν δύο είδη μη γραμμικών μηχανισμών για την παραγωγή ενέργειας. Ο πρώτος ήταν ένα ενιαίο μη γραμμικό σύστημα ενός βαθμού ελευθερίας μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα, το οποίο οδηγεί σε μια αρνητική ακαμψία που μειώνει την κλίση της απόκρισης της μετατόπισης ως συνάρτηση του χρόνου και ως εκ τούτου αυξάνει τη μέγιστη ταχύτητα. Στατική ανάλυση πραγματοποιήθηκε για να δειχθεί πώς η διάταξη ελατηρίου μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την παραγωγή μιας περιοχής με αρνητική δυσκαμψία. Η μελέτη αποκάλυψε επίσης ότι το ποσό της ενέργειας που παράγεται από μια μη γραμμική διάταξη είναι το πολύ κατά $4/\pi$ μεγαλύτερο από εκείνο της συντονισμένης γραμμικής διάταξης που παράγει ένα τετραγωνικό κύμα εξόδου για δεδομένη ημιτονοειδή είσοδο. Το συμπληρωματικό πρόγραμμα μέσω του μηχανισμού δεν είναι σε θέση να παράγει ένα τετραγωνικό κύμα ως απόκριση που να ικανοποιεί όλες τις συνθήκες λειτουργίας, ωστόσο, ο μηχανισμός προσφέρει καλύτερη απόδοση από το γραμμικό σύστημα σε χαμηλές συχνότητες και έχει επίσης τη δυνατότητα να αντιμετωπίσει την όποια έλλειψη συντονισμού. Ο δεύτερος μηχανισμός είναι ένα μη γραμμικό σύστημα με μεγάλη δυσκαμψία. Η μέθοδος Harmonic Balance χρησιμοποιήθηκε για να λύσει την εξίσωση της κίνησης και να υπολογίσει την απόκριση της συχνότητας. Η ανάλυση δείχνει ότι το εύρος ζώνης του μηχανισμού σκλήρυνσης εξαρτάται από την ρυθμό απόσβεσης, την μη γραμμικότητα και την επιτάχυνση εισόδου. Αν και λύση της μεθόδου Harmonic Balance χρησιμοποιώντας μόνο ένα αρμονικό ταιριάζει με το αριθμητικό αποτελέσματα της προσομοίωσης για το σύνολο των παραμέτρων που έχουν μελετηθεί, οι λεκάνες της έλξης έδειξαν ότι μπορεί να μην είναι εύκολα εφικτό στην πράξη. Στην ιδανική περίπτωση, το μέγιστο ποσό της ενέργειας που παράγεται από ένα σύστημα με μεγάλη δυσκαμψία είναι ίδιο με αυτό που παράγεται από ένα γραμμικό σύστημα, ανεξάρτητα από το βαθμό μη

γραμμικότητας, αν και αυτό μπορεί να συμβεί σε διαφορετική συχνότητα ανάλογα με τον βαθμό της μη γραμμικότητας (Ramlan et. al., 2009).



Σχήμα 3.3α: Καμπύλη απόκρισης συχνότητας για $\alpha=0.01$



Σχήμα 3.3β: Καμπύλη απόκρισης συχνότητας για $\alpha=0.001$

Κεφάλαιο 4

ΜΕΘΟΔΟΣ HARMONIC BALANCE – ΤΑΛΑΝΤΩΤΗΣ DUFFING

4.1 Μέθοδος Harmonic Balance

Στο σημείο αυτό θα επιχειρήσουμε να αναλύσουμε μία μέθοδο για την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων κίνησης που προκύπτουν για τα διάφορα προβλήματα, την Harmonic Balance.

Θεωρώντας ένα μη γραμμικό σύστημα

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f_{\delta}(x, \dot{x}, \Omega t) \quad (4.1)$$

Ζητώντας την απόκριση στην μορφή

$$x = p \cos(\varphi + \psi) \quad (4.1\alpha)$$

$$\varphi = \Omega t \quad (4.1\beta)$$

Η παράγωγος της (4.1α) είναι :

$$\dot{x} = \dot{p} \cos(\varphi + \psi) - p\Omega \sin(\varphi + \psi) - p\dot{\psi} \sin(\varphi + \psi) \quad (4.2)$$

Θεωρώντας ότι η απόκριση είναι η ίδια με αυτήν του γραμμικού συστήματος τότε έχουμε ότι

$$\dot{x} = -p\Omega \sin(\varphi + \psi) \quad (4.3\alpha)$$

$$\dot{p} \cos(\varphi + \psi) - p\dot{\psi} \sin(\varphi + \psi) = 0 \quad (4.3\beta)$$

Η παράγωγος της (4.3α) είναι

$$\ddot{x} = -p\Omega \sin(\varphi + \psi) - p\Omega^2 \cos(\varphi + \psi) - p\Omega \dot{\psi} \cos(\varphi + \psi) \quad (4.4)$$

Αντικαθιστώντας την (4.4) και την (4.1α) στην (4.1) έχω ότι

$$-p\Omega \sin(\varphi + \psi) - p\Omega^2 \cos(\varphi + \psi) - p\Omega \dot{\psi} \cos(\varphi + \psi) + \omega^2 p \cos(\varphi + \psi) = f_{\delta} \Rightarrow$$

$$p(\omega^2 - \Omega^2) \cos(\varphi + \psi) - p\Omega \dot{\psi} \cos(\varphi + \psi) - \dot{p}\Omega \sin(\varphi + \psi) = f_\delta \quad (4.5\alpha)$$

$$-p\Omega \dot{\psi} \sin(\varphi + \psi) + \dot{p}\Omega \cos(\varphi + \psi) = 0 \quad (4.5\beta)$$

$$\dot{p} = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \Omega \frac{dp}{d\varphi} = \Omega p' \quad (4.6\alpha)$$

$$\dot{\psi} = \frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \Omega \frac{d\psi}{d\varphi} = \Omega \psi' \quad (4.7\beta)$$

$$(4.5\alpha) \Rightarrow \frac{dp}{d\varphi} \sin(\varphi + \psi) + p \frac{d\psi}{d\varphi} \cos(\varphi + \psi) = -f_h \quad (4.8)$$

$$(4.5\beta) \Rightarrow \frac{dp}{d\varphi} \cos(\varphi + \psi) - p \frac{d\psi}{d\varphi} \sin(\varphi + \psi) = 0 \quad (4.9)$$

όπου

$$f_h = p \left(\frac{\omega^2}{\Omega^2} - 1 \right) \cos(\varphi + \psi) - \frac{f_\delta}{\Omega^2} = p \cos(\varphi + \psi) - \frac{f_\delta}{\Omega^2} \quad (4.10)$$

$$n = \frac{\omega^2}{\Omega^2} - 1$$

$$(4.8) \sin(\varphi + \psi) + (4.9) \cos(\varphi + \psi) \Rightarrow$$

$$\frac{dp}{d\varphi} = f_h \sin(\varphi + \psi) \quad (4.11)$$

$$(4.8) \cos(\varphi + \psi) + (4.9) \sin(\varphi + \psi) \Rightarrow$$

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{f_h}{p} \cos(\varphi + \psi) \quad (4.12)$$

Θεωρώντας μικρότερες διακυμάνσεις των p και ψ τότε έχω ότι

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} f_h \sin(\varphi + \psi) dt &= \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_h \sin(\varphi + \psi) \frac{d\varphi}{\Omega} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_h \sin(\varphi + \psi) d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} p n \int_0^{2\pi} \cos(\varphi + \psi) \sin(\varphi + \psi) d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -\frac{f_\delta}{\Omega^2} \sin(\varphi + \psi) d\varphi = P \end{aligned}$$

$$P = -\frac{1}{2\pi\Omega^2} \int_0^{2\pi} f_\delta \sin(\varphi + \psi) d\varphi \quad (4.13)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{f_h}{P} \cos(\varphi + \psi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f_h}{P} \cos(\varphi + \psi) d\varphi = \frac{n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f_\delta}{P} \cos(\varphi + \psi) d\varphi = \frac{n}{2} + \frac{\Psi}{P}$$

$$\Psi = \left(-\frac{1}{2\pi\Omega^2}\right) \int_0^{2\pi} f_\delta \cos(\varphi + \psi) d\varphi \quad (4.14)$$

4.2 Σύνοψη της μεθόδου Harmonic Balance

Θέλοντας σε αυτό το σημείο να κάνουμε μια σύνοψη όλων όσων αναφέραμε στην προηγούμενη ενότητα σχετικά με την μέθοδο Harmonic Balance έχουμε τα εξής:

Θεωρώντας ένα μη γραμμικό σύστημα

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f_\delta(x, \dot{x}, \Omega t) \quad (4.15)$$

Ζητώντας την απόκριση στην μορφή

$$x = p \cos(\varphi + \psi) \quad (4.16\alpha)$$

$$\varphi = \Omega t \quad (4.16\beta)$$

$$n = \frac{\omega^2}{\Omega^2} - 1 \quad (4.17)$$

Υπολογίζοντας μέσο όρο σε μία περίοδο

$$P = -\frac{1}{2\pi\Omega^2} \int_0^{2\pi} f_\delta \sin(\varphi + \psi) d\varphi \quad (4.18\alpha)$$

$$\Psi = -\frac{1}{2\pi\Omega^2} \int_0^{2\pi} f_\delta \cos(\varphi + \psi) d\varphi \quad (4.18\beta)$$

4.3 Περιοδική διέγερση με γραμμική απόσβεση

Η πρώτη περίπτωση δυναμικού συστήματος που θα εξετάσουμε και προσπαθήσουμε να βρούμε την απόκρισή του, είναι αυτή του συστήματος με περιοδική διέγερση και γραμμική απόσβεση.

Έχουμε την εξίσωση κίνησης

$$f_s = -2\zeta\omega\dot{x} - \omega^2 X_N(x, \dot{x}) + \omega^2 X_F \cos \Omega t \quad (4.19)$$

όπου f_s είναι η διεγείρουσα δύναμη

και την απόκριση της μορφής

$$x = p \cos(\varphi + \psi) = p \cos \theta \quad (4.20)$$

$$\dot{x} = -\Omega p \sin(\varphi + \psi) = -\Omega p \sin \theta \quad (4.21)$$

Θεωρώντας ως p και ψ το πλάτος και την φάση της ταλάντωσης αντίστοιχα συναρτήσει του χρόνου και δεχόμενοι ότι είναι πολύ πιο αργές από τις από την αντίστοιχη μεταβολή του x , μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις μέσες τιμές P και Ψ στην διάρκεια μίας περιόδου.

και άρα για το πλάτος της ταλάντωσης είναι

$$\begin{aligned} P &= -\frac{1}{2\pi\Omega^2} \int_0^{2\pi} -2\zeta\omega(-\Omega p \sin \theta) \sin \theta d\theta - \frac{1}{2\pi\Omega^2} \int_0^{2\pi} \omega^2 X_F \cos \varphi \sin(\varphi + \psi) d\varphi - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi\Omega^2} \int_0^{2\pi} -\omega^2 X_N \cos \varphi \sin \theta d\theta \Rightarrow \\ P &= -\frac{\zeta\omega p}{\pi\Omega} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta - \frac{\omega^2 X_F}{2\pi\Omega^2} \int_0^{2\pi} \cos \varphi \sin(\varphi + \psi) d\varphi + \frac{\omega^2}{2\pi\Omega^2} \int_0^{2\pi} X_N \sin \theta d\theta \Rightarrow \\ P &= -\frac{\zeta\omega p}{\Omega} - \frac{\omega^2 X_F}{2\Omega^2} \sin \psi + \frac{\omega^2}{\Omega^2} P_N \end{aligned} \quad (4.22)$$

και άρα τελικά έχουμε το πλάτος της ταλάντωσης

$$P_N = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X_N \sin \theta d\theta \quad (4.23)$$

και για την φάση της ταλάντωσης είναι

$$\Psi = -\frac{1}{2\pi\Omega^2} \int_0^{2\pi} -2\zeta\omega(-\Omega p \sin \theta) \cos \theta - \frac{1}{2\pi\Omega^2} \int_0^{2\pi} \omega^2 X_F \cos \varphi \cos(\varphi + \psi) d\varphi -$$

$$-\frac{1}{2\pi\Omega^2} \int_0^{2\pi} \omega^2 X_F \cos \varphi \cos(\varphi + \psi) d\varphi - \frac{1}{2\pi\Omega^2} \int_0^{2\pi} -\omega^2 X_N \cos \theta d\theta \Rightarrow$$

$$\Psi = -\frac{\omega^2}{\Omega^2} \frac{X_F}{2} \cos \psi + \frac{\omega^2}{\Omega^2} \Psi_N \quad (4.24)$$

από όπου και τελικά προκύπτει ότι η φάση της ταλάντωσης είναι

$$\Psi_N = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X_N \cos \theta d\theta \quad (4.25)$$

παίρνοντας τώρα το πλάτος ίσο με 0 έχουμε ότι

$$P = 0 \Rightarrow \frac{X_F}{2} \sin \psi = P_N - \frac{\zeta\Omega}{\omega} P$$

$$\frac{n}{2} + \frac{\Psi}{P} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\omega^2}{\Omega^2} - 1\right) \frac{P}{2} + \frac{\omega^2}{\Omega^2} \Psi_N - \frac{\omega^2}{\Omega^2} \frac{X_F}{2} \cos \psi = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{X_F}{2} \cos \psi = \Psi_N + \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right) \frac{P}{2}$$

$$\left(\frac{X_F}{P}\right)^2 = \left(\frac{2P_N}{P} - 2\zeta\omega\right)^2 + \left[\frac{2\Psi_N}{P} + (1 - \omega^2)\right]^2 \quad (4.26)$$

4.4 Ταλαντωτής Duffing

Στην προσπάθεια μας να εξετάσουμε ορισμένες κατηγορίες δυναμικών συστημάτων θα ασχοληθούμε με την περίπτωση του ταλαντωτή Duffing. Ο ταλαντωτής Duffing αντιπροσωπεύει μία μεγάλη κατηγορία δυναμικών συστημάτων, των οποίων η δύναμη ελαστικότητας αυξάνεται ή μειώνεται με μη γραμμικό τρόπο. Η αντίστοιχη μορφή των μη γραμμικών όρων είναι

$$X_N = ax^3 \quad (4.27)$$

Η εφαρμογή της θεωρίας του συντονισμού οδηγεί στα εξής αποτελέσματα

$$P_N = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ap^3 \cos^3 \theta \sin \theta d\theta = 0 \quad (4.28)$$

$$Y_N = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ap^3 \cos^3 \theta \sin \theta d\theta = \frac{ap^3}{2\pi} \frac{3\pi}{4} = \frac{3ap^3}{8} \quad (4.29)$$

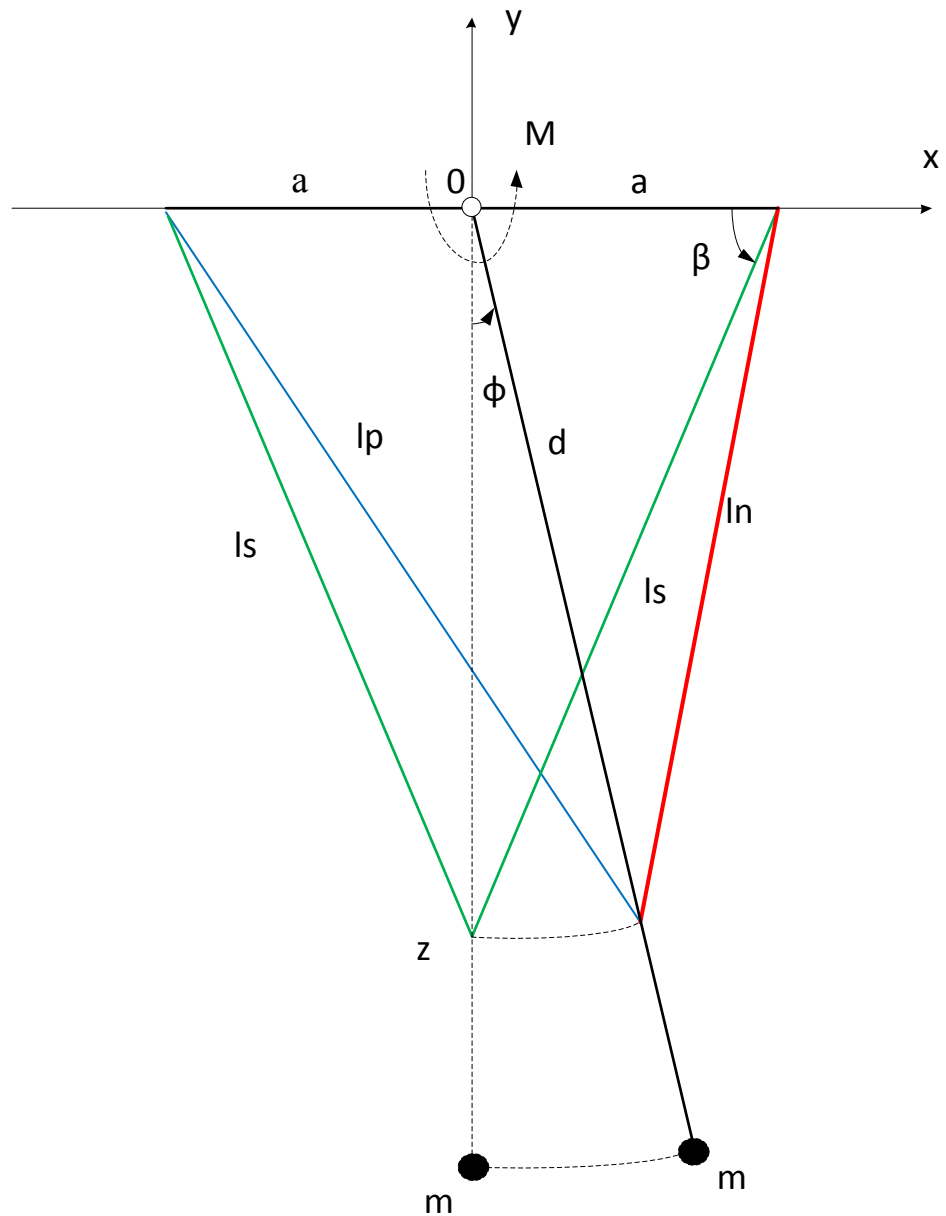
και άρα τελικά προκύπτει ότι

$$\left(\frac{x_F}{P}\right)^2 = (2\zeta\omega)^2 + \left[\frac{ap^2}{4} + (1-w^2)\right]^2 \quad (4.30)$$

Για ένα τυπικό σύστημα Duffing, μετά από ένα μεταβατικό στάδιο, στο οποίο παρουσιάζονται μεταβατικές αποκρίσεις και διελεύσεις από καταστάσεις ασταθούς ισορροπίας, εμφανίζονται οι δύο καταστάσεις ευσταθούς ισορροπίας του συστήματος, οι οποίες είναι αρμονικές ταλαντώσεις σταθερού πλάτους και συχνότητας ίσης με την συχνότητα της διεγείρουσας δύναμης. Οι δύο αποκρίσεις βρίσκονται σε διαφορά φάσης μεταξύ του. Η μικρή απόκλιση των αρχικών συνθηκών είναι δυνατόν να οδηγήσει και σε διαφορετική κατάσταση ισορροπίας. Χωρίς να είναι γενικός κανόνας, η μεγαλύτερη αρχική μετατόπιση οδηγεί στην απόκριση του μεγαλύτερου πλάτους. Εκτός από αποκρίσεις σε συχνότητες ίσες με την συχνότητα διέγερσης, τα μη γραμμικά συστήματα Duffing, για συγκεκριμένες τιμές παραμέτρων και αρμονικών συνθηκών, παρουσιάζουν και αποκρίσεις σε συχνότητες ίσες με κλάσματα ή πολλαπλάσια της συχνότητας διέγερσης. Αποκρίσεις αυτής της μορφής ονομάζονται αντίστοιχα “Υποαρμονικές” και “Υπεραρμονικές” και αναλύονται με την μέθοδο του συγχρονισμού για τις τιμές του N διαφορετικές της μονάδας.

Κεφάλαιο 5

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ



Σχήμα 5.1: Ελαστομερής κατασκευή

Η κατασκευή μας αποτελείται από δύο λάστιχα με αρχικό μήκος l_s , τα οποία συγκρατούν μία αρθρωμένη ράβδο, μήκους d , που στο άκρο της έχει μία μάζα m . Το μήκος του κάθε λάστιχου αφού ασκηθεί εξωτερική δύναμη είναι l_N και l_P .

Όπως φαίνεται στο σχήμα έχουμε τα μήκη l_N και l_P που με τη βοήθεια της γεωμετρίας υπολογίζονται ως εξής

$$l_N = [a^2 + d^2 - 2ad \cos(90 - \varphi)]^{1/2} \quad (5.1)$$

$$l_N = [a^2 + d^2 - 2ad \sin \varphi]^{1/2} \quad (5.2)$$

$$l_P = [a^2 + d^2 - 2ad \cos(90 + \varphi)]^{1/2} \quad (5.3)$$

$$l_P = [a^2 + d^2 + 2ad \sin \varphi]^{1/2} \quad (5.4)$$

$$x_m = z \sin \varphi \quad (5.5)$$

$$y_m = -z \cos \varphi \quad (5.6)$$

κάνοντας τώρα τις κατάλληλες παραγωγίσεις έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_P}{\partial \varphi} &= \frac{1}{2} [a^2 + d^2 + 2ad \sin \varphi]^{1/2} (2ad) \frac{\partial \sin \varphi}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial l_P}{\partial \varphi} &= \frac{ad}{l_P} \cos \varphi \end{aligned} \quad (5.7)$$

και ότι

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_N}{\partial \varphi} &= \frac{1}{2} [a^2 + d^2 - 2ad \sin \varphi]^{1/2} (-2ad) \frac{\partial \sin \varphi}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial l_N}{\partial \varphi} &= \frac{-ad}{l_P} \cos \varphi \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial x_m}{\partial t} = \dot{x}_m = z \dot{\varphi} \cos \varphi \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial y_m}{\partial t} = \dot{y}_m = z \dot{\varphi} \sin \varphi \quad (5.10)$$

5.1 Ενεργειακές εξισώσεις και εξισώσεις Lagrange

Η κινητική ενέργεια είναι

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}_m + \dot{y}_m) = \frac{1}{2} m z^2 \dot{\varphi}^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \frac{1}{2} m z^2 \dot{\varphi}^2 \quad (5.11)$$

Η δυναμική ενέργεια είναι

$$U = \frac{1}{2} k(l_P - l_0)^2 + \frac{1}{2} k(l_N - l_0)^2 \quad (5.12)$$

και η ισχύς που προκύπτει από τη ροπή

$$P_t = M \dot{\varphi} \quad (5.13)$$

άρα έχω την παράγωγο για κάθε ένα από αυτά τα μεγέθη

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m z^2 \dot{\varphi} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = m z^2 \ddot{\varphi} \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial P_t}{\partial \varphi} = M \quad (5.15)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = k(l_P - l_0) \left(\frac{\partial l_P}{\partial \varphi} \right) + k(l_N - l_0) \frac{\partial l_N}{\partial \varphi} = k(l_P - l_0) \left(\frac{ad}{l_P} \right) \cos \varphi + k(l_N - l_0) \frac{(-ad)}{l_N} \cos \varphi \Rightarrow$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = kad \cos \varphi \left\{ \left[1 - \frac{l_0}{l_P} \right] - \left[1 - \frac{l_0}{l_N} \right] \right\} \quad (5.16)$$

$$F_{el} = kad(f_P + f_N) \quad (5.17)$$

$$f_P = (1 - l_P^{-1}) \cos \varphi \quad (5.18)$$

$$f_N = -(1 - l_N^{-1}) \cos \varphi \quad (5.19)$$

$$m z^2 \ddot{\varphi} + kad(f_P + f_N) = M \quad (5.20)$$

$$\lambda_P = l_P / l_0 \quad (5.21)$$

$$\lambda_N = l_N / l_0 \quad (5.22)$$

5.2 Ελαστομερής κατασκευή

Στο σημείο αυτό θα επιχειρήσουμε να υπολογίσουμε τις δυναμικές ενέργειες για το κάθε μέρος της ελαστομερούς κατασκευής μας

$$U_P = \frac{1}{2} V_0 G [\lambda_P^2 + \lambda_P^{-2} - 2] \quad (5.23)$$

$$V_0 = l_0 A_0 \quad (5.24)$$

$$U_N = \frac{1}{2} V_0 G [\lambda_N^2 + \lambda_N^{-2} - 2] \quad (5.25)$$

Με την χρήση των παραπάνω εξισώσεων έχουμε ότι

$$\frac{\partial \lambda_P}{\partial \varphi} = \frac{1}{l_0} \frac{\partial l_P}{\partial \varphi} = \frac{ad}{l_0 l_P} \cos \varphi \quad (5.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_P}{\partial \varphi} &= V_0 G [\lambda_P - \lambda_P^{-3}] \frac{\partial \lambda_P}{\partial \varphi} = A_0 G [\lambda_P - \lambda_P^{-3}] \frac{ad}{l_P} \cos \varphi \\ &= \frac{A_0 G}{l_0} ad [\lambda_P - \lambda_P^{-3}] \frac{1}{\lambda_P} \cos \varphi = k_\theta [1 - \lambda_P^{-4}] \cos \varphi \end{aligned} \quad (5.27)$$



Σχήμα 5.2: Παράδειγμα σύνθετης ελαστομερούς κατασκευής

$$k_{\theta} = \frac{A_0 G}{l_0} ad \quad (5.28)$$

$$U_N = \frac{1}{2} V_0 G [\lambda_N^2 + \lambda_N^{-2} - 2] \quad (5.29)$$

$$\frac{\partial \lambda_N}{\partial \varphi} = -\frac{ad}{l_0 l_N} \cos \varphi \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_N}{\partial \varphi} &= V_0 G [\lambda_N - \lambda_N^{-3}] \frac{\partial \lambda_N}{\partial \varphi} = A_0 G [\lambda_N - \lambda_N^{-3}] \frac{-ad}{l_N} \cos \varphi \\ &= -\frac{A_0 G}{l_0} ad [\lambda_N - \lambda_N^{-3}] \frac{1}{\lambda_N} \cos \varphi = -k_{\theta} [1 - \lambda_N^{-4}] \cos \varphi \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$f_{el} = f_P + f_N \quad (5.32)$$

$$\gamma = \sin 2\beta \quad (5.33)$$

5.3 Αδιάστατες εξισώσεις κίνησης

Στο σημείο αυτό γίνεται η αδιαστατοποίηση των εξισώσεων που έχουν προκύψει παραπάνω

Η εξίσωση κίνησης είναι η

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 [f_P + f_N] = \omega^2 \Phi_0 \cos \Omega t \quad (5.34)$$

όπου

$$\omega^2 = kad / mz^2 \quad (5.35)$$

$$\dot{M} = M_0 \cos \Omega t \quad (5.36)$$

$$\Phi_0 = M_0 / kad \quad (5.37)$$

Με την βοήθεια της γεωμετρίας του σχήματος προκύπτει ότι

$$\lambda_{\zeta} = (a^2 + d^2)^{1/2} \quad (5.38)$$

$$\cos \beta = a / (a^2 + d^2)^{1/2} \quad (5.39)$$

$$\sin \beta = d / (a^2 + d^2)^{1/2} \quad (5.40)$$

$$\sin \varphi_z = (1 / \sin 2\beta) (\lambda_{\zeta} - 1) / \lambda_{\zeta}^2 \quad (5.41)$$

και άρα έχουμε τώρα ότι

$$\lambda_P = \frac{l_P}{l_0} = \frac{(a^2 + d^2)}{l_0} \left[1 + 2 \frac{a}{(a^2 + d^2)^{1/2}} \frac{d}{(a^2 + d^2)^{1/2}} \sin \varphi \right]^{1/2} \Rightarrow$$

$$\lambda_P = \lambda_\zeta [1 + 2 \cos \beta \sin \beta \sin \varphi]^{1/2} = \lambda_\zeta [1 + \sin 2\beta \sin \varphi]^{1/2} \quad (5.42)$$

και ότι

$$\lambda_N = \lambda_\zeta [1 - \sin 2\beta \sin \varphi]^{1/2} \quad (5.43)$$

θέλουμε τώρα να υπολογίσουμε τους περιορισμούς που προκύπτουν για την γωνία φ_z και έχουμε ότι

$$\lambda_N \geq 1 \Rightarrow \lambda_\zeta^2 (1 - \sin 2\beta \sin \varphi) \geq 1 \Rightarrow 1 - \sin 2\beta \sin \varphi \geq 1 / \lambda_\zeta^2 \Leftrightarrow$$

$$1 - \frac{1}{\lambda_\zeta^2} \geq \sin 2\beta \sin \varphi \Leftrightarrow \sin \varphi \leq \frac{1}{\sin 2\beta} \left(\frac{\lambda_\zeta^2 - 1}{\lambda_\zeta^2} \right)$$

άρα τελικά

$$\varphi \leq \varphi_z \quad (5.44)$$

και ότι

$$\lambda_P \geq 1 \Rightarrow \lambda_\zeta^2 (1 + \sin 2\beta \sin \varphi) \geq 1 \Rightarrow 1 + \sin 2\beta \sin \varphi \geq 1 / \lambda_\zeta^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\lambda_\zeta^2} - 1 \leq \sin 2\beta \sin \varphi \Leftrightarrow \sin \varphi \geq \frac{1}{\sin 2\beta} \left(\frac{1 - \lambda_\zeta^2}{\lambda_\zeta^2} \right)$$

άρα τελικά

$$\varphi \geq -\varphi_z \quad (5.45)$$

και έχουμε τώρα για τα f_P και λ_P

$$f_P = (1 - \lambda_P^{-4}) \cos \varphi \quad (5.46)$$

$$\lambda_P = \lambda_\zeta (1 + \gamma \sin \varphi)^{1/2} \Rightarrow \frac{\lambda_\zeta}{\lambda_P} = (1 + \gamma \sin 2\varphi)^{-1/2} \quad (5.47)$$

$$\frac{\partial \lambda_P}{\partial \varphi} = \lambda_\zeta (1 + \gamma \sin \varphi)^{1/2} \gamma \cos \varphi = \frac{\lambda_\zeta^2}{\lambda_P} \gamma \cos \varphi \quad (5.48)$$

θέλουμε τώρα να υπολογίσουμε την δυσκαμψία k_p

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_P}{\partial \varphi} &= -(1 - \lambda_P^{-4}) \sin \varphi - (-4) \lambda_P^{-5} \frac{\partial \lambda_P}{\partial \varphi} \cos \varphi = \\
&= 4 \lambda_P^{-5} \frac{\lambda_\zeta^2}{\lambda_P} \gamma \cos \varphi \cos \varphi + \lambda_P^{-4} \sin \varphi - \sin \varphi = \\
&= \lambda_P^{-4} \left[\frac{\lambda_\zeta^2}{\lambda_P} 4 \gamma \cos^2 \varphi + \sin \varphi \right] - \sin \varphi = \\
&= \lambda_P^{-4} \left[\frac{4 \gamma (1 - \sin^2 \varphi)}{1 + \gamma \sin \varphi} + \sin \varphi \right] - \sin \varphi = \lambda_P^{-4} \frac{4 \gamma - 4 \gamma \sin^2 \varphi + \sin \varphi + \gamma \sin^2 \varphi}{1 + \gamma \sin \varphi} - \sin \varphi \\
&= \lambda_P^{-4} \frac{4 \gamma - 3 \gamma \sin^2 \varphi + \sin \varphi}{1 + \gamma \sin \varphi} - \sin \varphi
\end{aligned}$$

και τελικά προκύπτει ότι

$$k_P = \frac{(4 \gamma + \sin \varphi - 3 \gamma \sin^2 \varphi)}{\lambda_\zeta^4 (1 + \gamma \sin \varphi)^3} - \sin \varphi \quad (5.49)$$

αντίστοιχα έχουμε για τα f_N και λ_N ότι

$$f_N = -(1 - \lambda_N^{-4}) \cos \varphi \quad (5.50)$$

$$\lambda_N = \lambda_\zeta (1 - \gamma \sin \varphi)^{1/2} \Rightarrow \frac{\lambda_\zeta}{\lambda_N} = (1 - \gamma \sin 2\varphi)^{-1/2}$$

$$\frac{\partial \lambda_N}{\partial \varphi} = \lambda_\zeta (1 - \gamma \sin \varphi)^{1/2} (-\gamma \cos \varphi) = -\frac{\lambda_\zeta^2}{\lambda_N} \gamma \cos \varphi$$

θέλουμε τώρα να υπολογίσουμε την δυσκαμψία k_N

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_N}{\partial \varphi} &= (1 - \lambda_N^{-4}) \sin \varphi - 4 \lambda_N^{-5} \frac{\partial \lambda_N}{\partial \varphi} \cos \varphi = \\
&= 4 \lambda_N^{-5} \frac{\lambda_\zeta^2}{\lambda_N} \gamma \cos \varphi \cos \varphi + (1 - \lambda_N^{-4}) \sin \varphi = \\
&= \lambda_N^{-4} \left[\frac{4 \gamma (1 - \sin^2 \varphi)}{1 - \gamma \sin \varphi} - \sin \varphi \right] + \sin \varphi = \lambda_N^{-4} \frac{4 \gamma - 4 \gamma \sin^2 \varphi - \sin \varphi + \gamma \sin^2 \varphi}{1 - \gamma \sin \varphi} + \sin \varphi
\end{aligned}$$

$$= \lambda_N^{-4} \frac{4\gamma - 3\gamma \sin^2 \varphi - \sin \varphi}{1 + \gamma \sin \varphi} + \sin \varphi$$

και τελικά προκύπτει ότι

$$k_N = \frac{(4\gamma - \sin \varphi - 3\gamma \sin^2 \varphi)}{\lambda_\zeta^4 (1 - \gamma \sin \varphi)^3} + \sin \varphi \quad (5.51)$$

5.4 Εφαρμογή της μεθόδου Harmonic Balance στο συγκεκριμένο πρόβλημα

Η εξίσωση κίνησης αποτελεί μία μη γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρου βαθμού. Για την επίλυσή της θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο Harmonic Balance.

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = -2\zeta \omega \dot{\varphi} - \omega^2 \Phi_N + \omega^2 \Phi_F \cos \Omega t \quad (5.52)$$

όπου

$$\Phi_N = -\varphi + [f_P + f_N] \quad (5.53)$$

Με βάση τα όσα αναφέραμε σε προηγούμενο κεφάλαιο της εργασίας η λύση είναι της μορφής

$$\varphi = \Phi \cos \theta \quad (5.54)$$

όπου

$$\theta = \Omega t + \psi \quad (5.55)$$

$$w = \frac{\Omega}{\omega} \quad (5.56)$$

Η απαραίτητη προϋπόθεση για την ύπαρξη λύσης είναι

$$\left(\frac{\Phi_F}{\Phi}\right)^2 = \left(\frac{2Q}{\Phi} - 2\zeta w\right)^2 + \left[2\frac{\Psi}{\Phi} + (1 - w^2)\right]^2 \quad (5.57)$$

όπου

$$Q = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_N \sin \theta d\theta \quad (5.58)$$

και

$$\Psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_N \cos \theta d\theta \quad (5.59)$$

και αντικαθιστώντας τώρα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [-\varphi + f_P + f_N] \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_P \sin \theta d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_N \sin \theta d\theta \Rightarrow \\ Q &= Q_P + Q_N \end{aligned} \quad (5.60)$$

και ότι

$$\begin{aligned} \Psi &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_P \cos \theta d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_N \cos \theta d\theta \Rightarrow \\ \Psi &= -\frac{\Phi}{2\pi} \pi + \Psi_P + \Psi_N \Rightarrow \\ \Psi &= -\frac{\Phi}{2} + \Psi_P + \Psi_N \end{aligned} \quad (5.61)$$

και τώρα θέλουμε να υπολογίσουμε ξεχωριστά τα Q_N και Ψ_N

$$Q_N = -\frac{1}{2\pi} \int_{\theta_z}^{2\pi-\theta_z} (1 - \lambda_N^{-4}) \cos \varphi \sin \theta d\theta$$

και επειδή

$$\varphi = \Phi \cos \theta \quad (5.62\alpha)$$

$$\lambda_N = \lambda_\zeta [1 - \gamma \sin \varphi]^{1/2} \quad (5.62\beta)$$

$$\cos \theta_z = \frac{\Phi_z}{\varphi} \quad (5.62\gamma)$$

τελικά έχουμε

$$Q_N = -\left(\frac{1}{\pi}\right) \int_{\theta_z}^{\pi} (1 - \lambda_N^{-4}) \cos \varphi \sin \theta d\theta \quad (5.63)$$

και

$$\Psi_N = -\frac{1}{2\pi} \int_{\theta_z}^{2\pi - \theta_z} (1 - \lambda_N^{-4}) \cos \varphi \cos \theta d\theta$$

και λόγω της (5.62) τελικά έχουμε

$$\Psi_N = -\left(\frac{1}{\pi}\right) \int_{\theta_z}^{\pi} (1 - \lambda_N^{-4}) \cos \varphi \cos \theta d\theta \quad (5.64)$$

καθώς και τα Q_P και Ψ_P όπως προκύπτουν από τα παρακάτω ολοκληρώματα

$$Q_P = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi - \theta_z} (1 - \lambda_P^{-4}) \cos \varphi \sin \theta d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi + \theta_z}^{2\pi} (1 - \lambda_P^{-4}) \cos \varphi \sin \theta d\theta$$

και επειδή

$$\varphi = \Phi \cos \theta \quad (5.65\alpha)$$

$$\lambda_P = \lambda_z [1 + \gamma \sin \varphi]^{1/2} \quad (5.65\beta)$$

$$\cos(\pi - \theta_z) = -\cos \theta_z = -\frac{\Phi_z}{\varphi} \quad (5.65\gamma)$$

τελικά έχουμε

$$Q_P = \left(\frac{1}{\pi}\right) \int_0^{\pi - \theta_z} (1 - \lambda_P^{-4}) \cos \varphi \sin \theta d\theta \quad (5.66)$$

και

$$\Psi_P = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi - \theta_z} (1 - \lambda_P^{-4}) \cos \varphi \cos \theta d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi + \theta_z}^{2\pi} (1 - \lambda_P^{-4}) \cos \varphi \cos \theta d\theta$$

και λόγω της (5.65) τελικά έχουμε

$$\Psi_P = \left(\frac{1}{\pi}\right) \int_0^{\pi - \theta_z} (1 - \lambda_P^{-4}) \cos \varphi \cos \theta d\theta \quad (5.67)$$

$$(\varphi_F)^2 = (q_F - 2\zeta\omega)^2 + (\psi_F - w^2)^2 \quad (5.68)$$

$$\varphi_F = \frac{\varphi_F}{\varphi} \quad (5.69\alpha)$$

$$q_F = \frac{2Q}{\varphi} = 0 \quad (5.69\beta)$$

$$\psi_F = 1 + \frac{2\Psi}{\Phi} \quad (5.69\gamma)$$

$$w^2 = \tau \quad (5.69\delta)$$

άρα τελικά η (5.68) γίνεται

$$\begin{aligned} \varphi_F^2 &= (2\zeta)^2 \tau + \psi_F^2 + \tau^2 - 2\tau\psi_F \Rightarrow \\ \tau^2 - 2[\psi_F - 2\zeta^2]\tau + \psi_F^2 - \varphi_F^2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.70)$$

και για θετική διακρίνουσα

$$\begin{aligned} \Delta &= (\psi_F - 2\zeta^2)^2 - (\psi_F^2 - \varphi_F^2) = \psi_F^2 + 4\zeta^4\psi_F + \varphi_F^2 - 4\zeta^2 - \psi_F^2 \Rightarrow \\ \Delta &= \psi_F^2 + 4\zeta^4 + \varphi_F^2 - 4\zeta^2\psi_F = \varphi_F^2 - (2\zeta)^2(\psi_F - \zeta^2) \Rightarrow \\ \Delta &= \varphi_F^2 - (2\zeta)^2(\psi_F - \zeta^2) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Delta \cong \varphi_F^2 \quad (5.71)$$

$$\tau_B = \psi_F - 2\zeta^2 \quad (5.72)$$

προκύπτουν δύο λύσεις

$$\tau_L = \tau_B - \sqrt{\Delta} \quad (5.73)$$

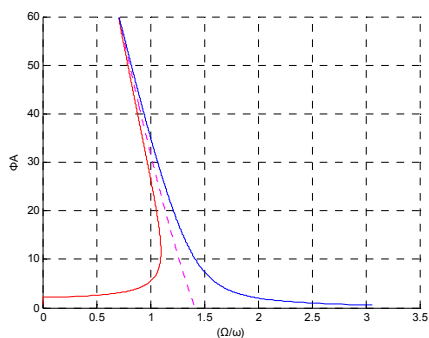
$$\tau_R = \tau_B + \sqrt{\Delta} \quad (5.74)$$

Κεφάλαιο 6

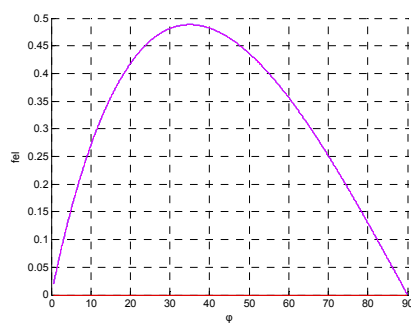
ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από την επίλυση των παραπάνω εξισώσεων. Εξετάζονται 4 διαφορετικές περιπτώσεις γωνιών ($45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 85^\circ$) για 8 διαφορετικές περιπτώσεις του λ_s (1, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 2.0, 2.5). Στο πρώτο διάγραμμα κάθε περίπτωσης παρουσιάζεται η επίλυση της εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Harmonic Balance. Στο δεύτερο και στο τρίτο φαίνεται η καμπύλη $F-\varphi$ και $k-\varphi$, δηλαδή της δυσκαμψίας συναρτήσει της γωνίας, αντίστοιχα ενώ στην συνέχεια παρουσιάζονται τρία διαγράμματα χρονικών αποκρίσεων καθώς και οι λύσεις της εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Runge Kutta 4^{ης} τάξης. Αξίζει στο σημείο αυτό να αναφέρουμε ότι στο διάγραμμα της λύσης με την μέθοδο Harmonic Balance βλέπουμε με τρία διαφορετικά χρώματα τις τρεις διαφορετικές λύσεις που προκύπτουν, με ροζ διακεκομμένη γραμμή βλέπουμε την καμπύλη του τ_B (5.72), δηλαδή της λύσης για διακρίνουσα ίση με μηδέν, με κόκκινο αυτήν του τ_L (5.73), ενώ με μπλε την καμπύλη που προκύπτει από την λύση του τ_R (5.74). Αντίστοιχα στο διάγραμμα β) κάθε περίπτωσης με μπλε χρώμα παρουσιάζεται η καμπύλη για το f_p με κόκκινο χρώμα αυτή για το f_N ενώ τέλος με ροζ χρώμα η καμπύλη για το F_{el} . Παρομοίως στο τρίτο διάγραμμα δίνεται με μπλε χρώμα η καμπύλη για το k_p με κόκκινο αυτή για το k_N και με ροζ αυτή για το άθροισμά τους. Για όλα τα διαγράμματα χρησιμοποιήθηκαν ως δεδομένα ότι $\zeta=0.05$ και ότι $\omega=2\pi$. Όλα τα διαγράμματα προέκυψαν με τη χρήση του λογισμικού Matlab. Επιπλέον πρέπει να σημειωθεί ότι οι αρχικές συνθήκες που ελήφθησαν για την χρήση της μεθόδου Runge Kutta, δηλαδή η μετατόπιση και η ταχύτητα, είναι μηδενικές.

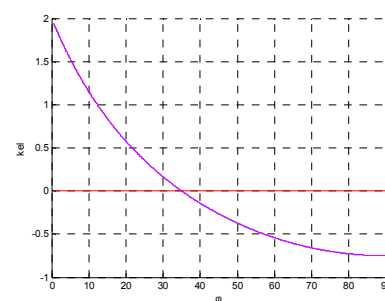
6.1 για γωνία $\beta=45^\circ$ και $\lambda_\zeta=1.0$



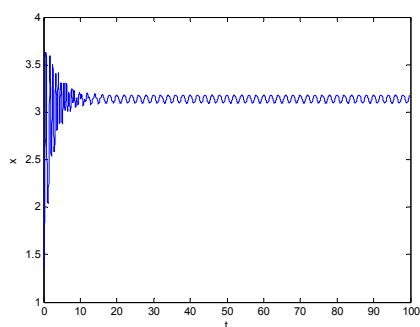
(α)



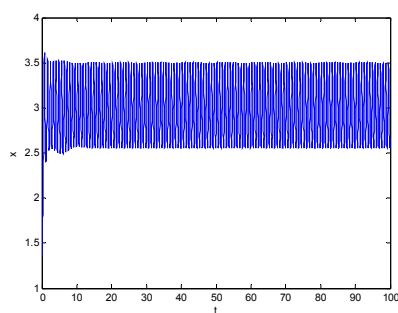
(β)



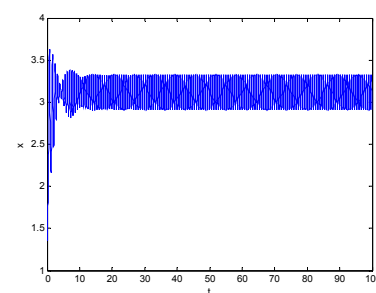
(γ)



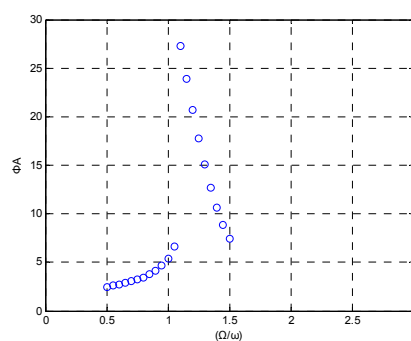
(δ)



(ε)



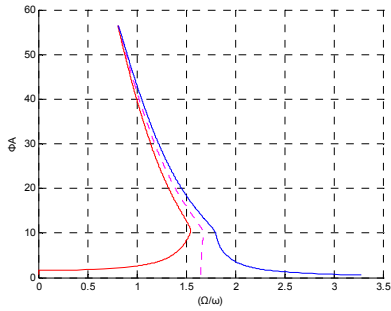
(στ)



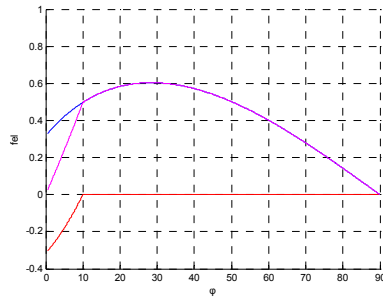
(ζ)

Σχήμα 6.1: α) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Harmonic Balance β) $F-\varphi$ γ) $k-\varphi$ δ), ε), στ) χρονική απόκριση ζ) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Runge Kutta

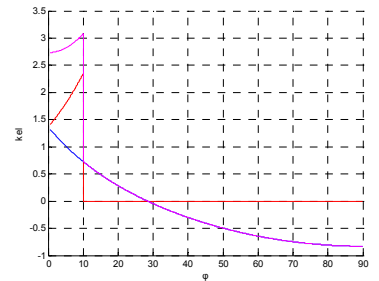
6.2 για γωνία $\beta=45^\circ$ και $\lambda_\zeta=1.1$



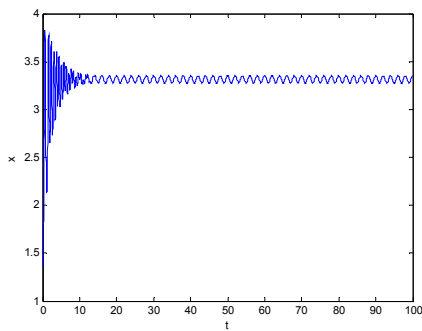
(α)



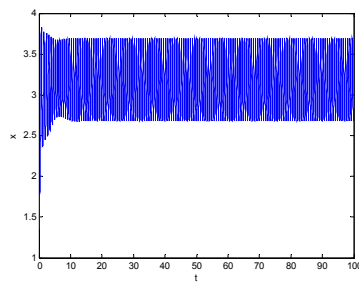
(β)



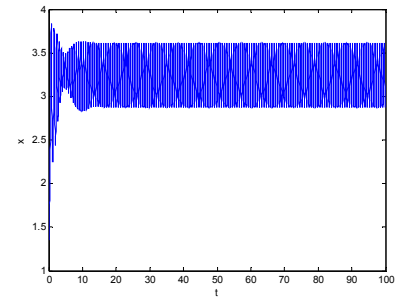
(γ)



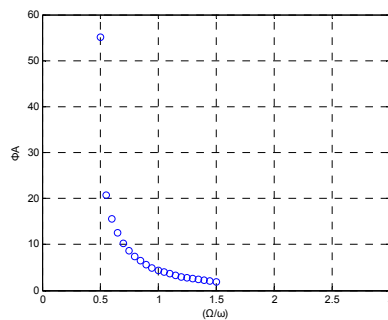
(δ)



(ε)



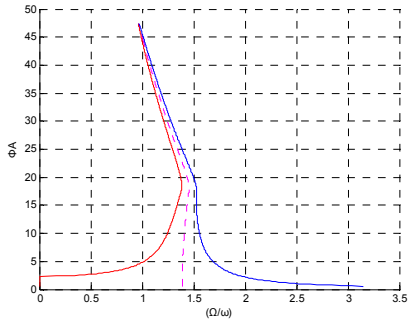
(στ)



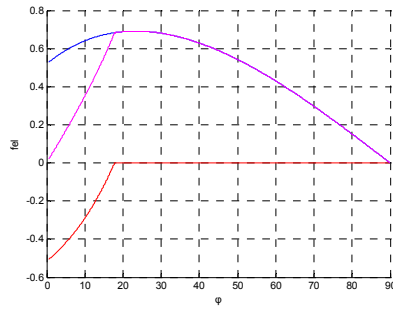
(ζ)

Σχήμα 6.2: α) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Harmonic Balance β) $F-\varphi$ γ) $k-\varphi$ δ), ε), στ) χρονική απόκριση ζ) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Runge Kutta

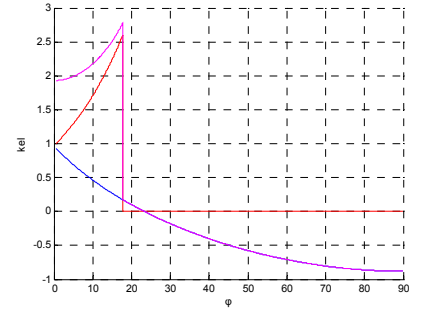
6.3 για γωνία $\beta=45^\circ$ και $\lambda_\zeta=1.2$



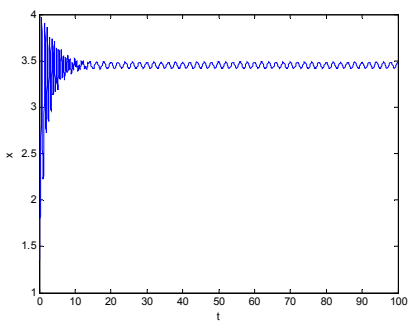
(α)



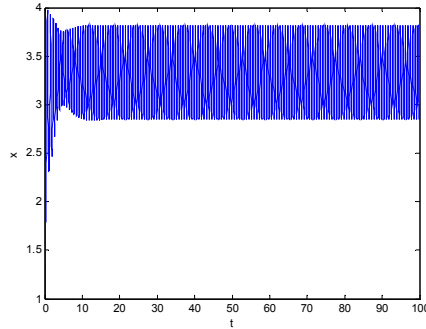
(β)



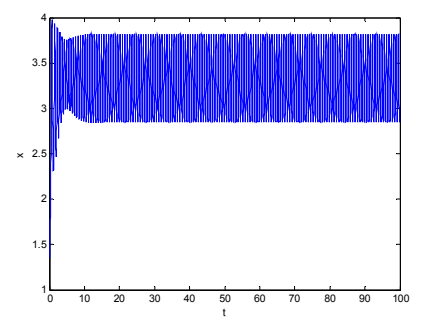
(γ)



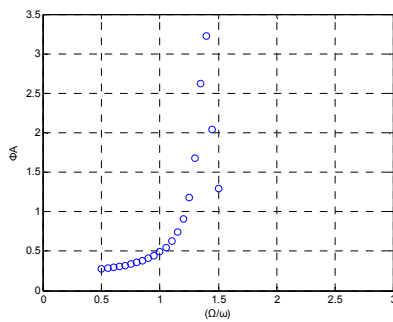
(δ)



(ε)



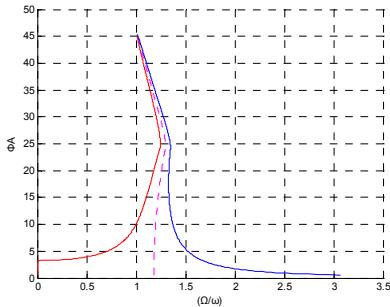
(στ)



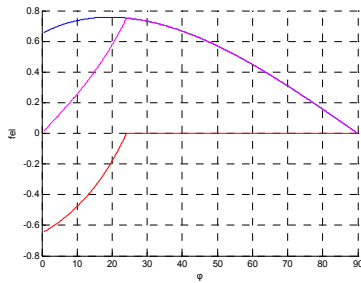
(ζ)

Σχήμα 6.3: α) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Harmonic Balance β) F-φ γ) k-φ δ), ε), στ) χρονική απόκριση ζ) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Runge Kutta

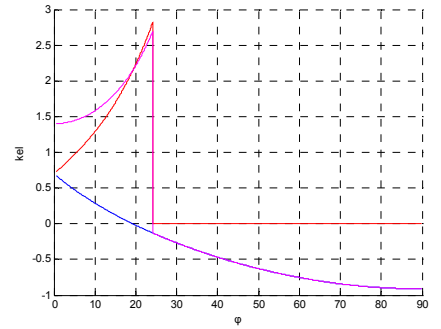
6.4 για γωνία $\beta=45^\circ$ και $\lambda_\zeta=1.3$



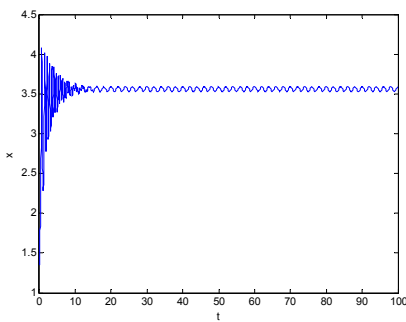
(α)



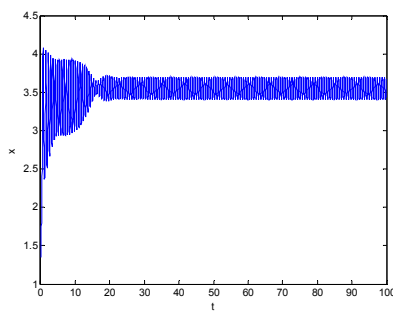
(β)



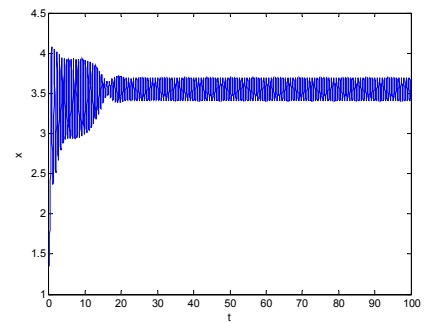
(γ)



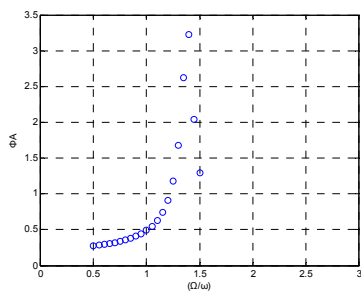
(δ)



(ε)



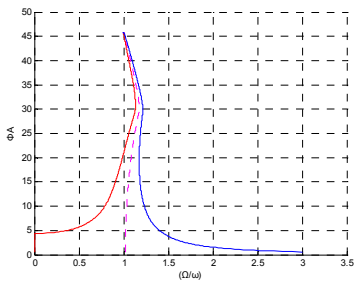
(στ)



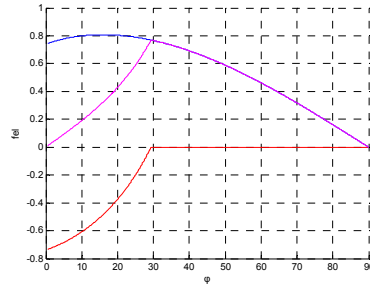
(ζ)

Σχήμα 6.4: α) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Harmonic Balance β) F-φ γ) k-φ δ), ε), στ) χρονική απόκριση ζ) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Runge Kutta

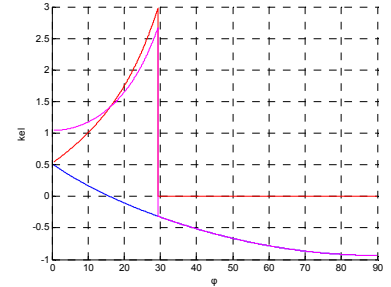
6.5 για γωνία $\beta=45^\circ$ και $\lambda_\zeta=1.4$



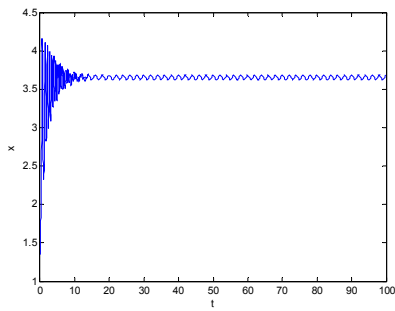
(α)



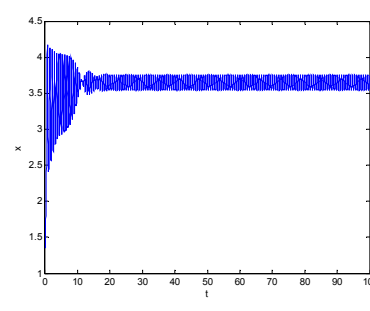
(β)



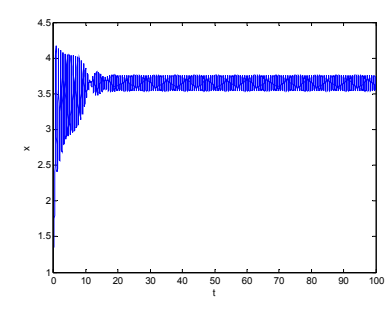
(γ)



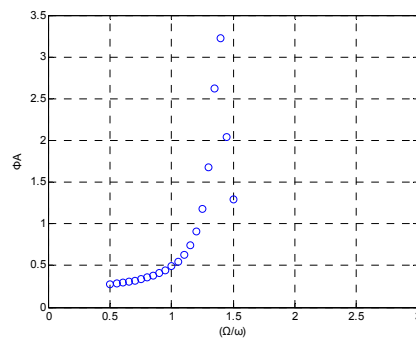
(δ)



(ε)



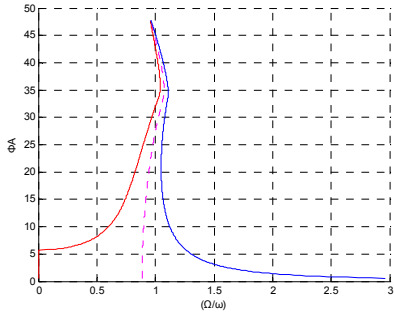
(στ)



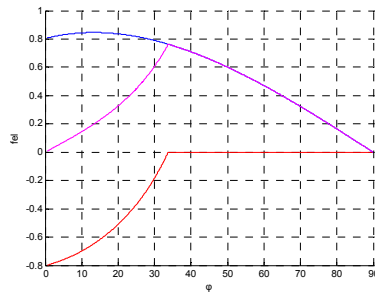
(ζ)

Σχήμα 6.5: α) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Harmonic Balance β) F-φ γ) k-φ δ), ε), στ) χρονική απόκριση ζ) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Runge Kutta

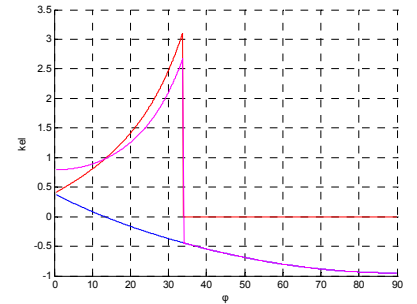
6.6 για γωνία $\beta=45^\circ$ και $\lambda_\zeta=1.5$



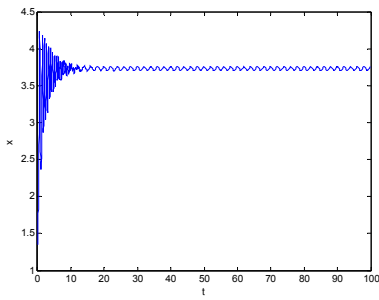
(α)



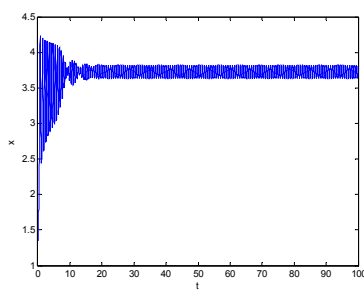
(β)



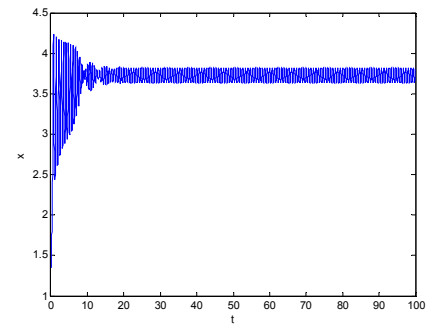
(γ)



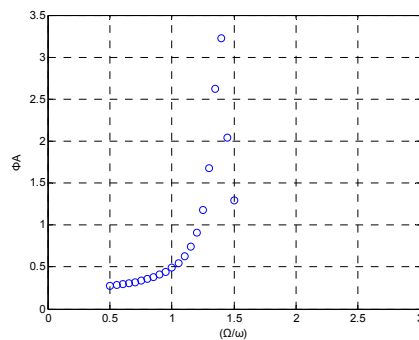
(δ)



(ε)



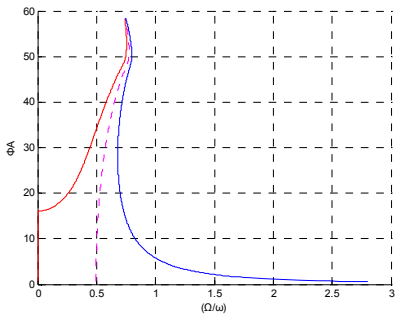
(στ)



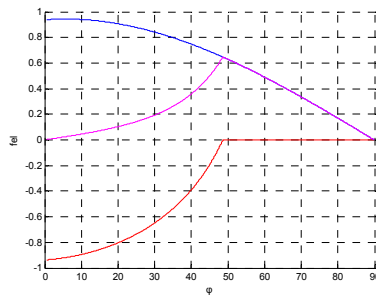
(ζ)

Σχήμα 6.6: α) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Harmonic Balance β) F-φ γ) k-φ δ), ε), στ) χρονική απόκριση ζ) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Runge Kutta

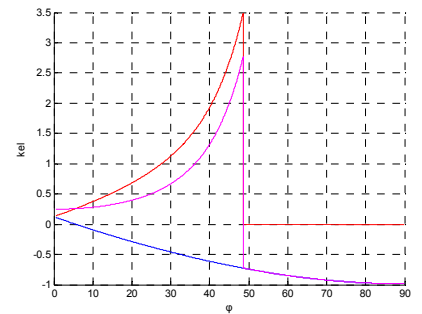
6.7 για γωνία $\beta=45^\circ$ και $\lambda_\zeta=2.0$



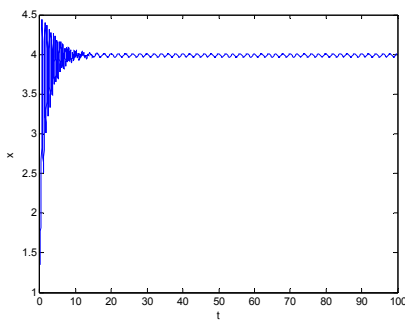
(α)



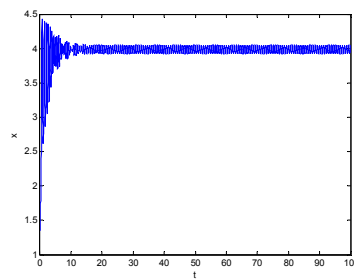
(β)



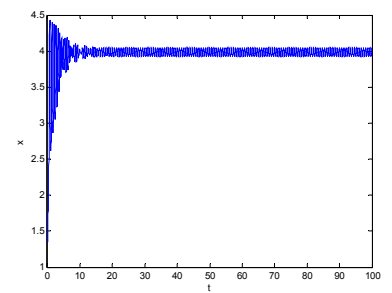
(γ)



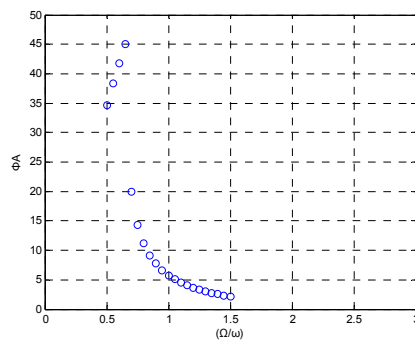
(δ)



(ε)



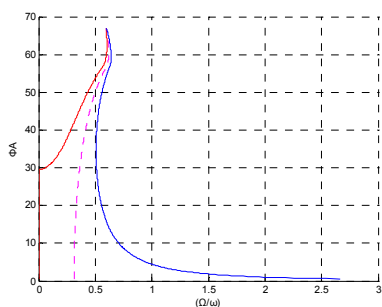
(στ)



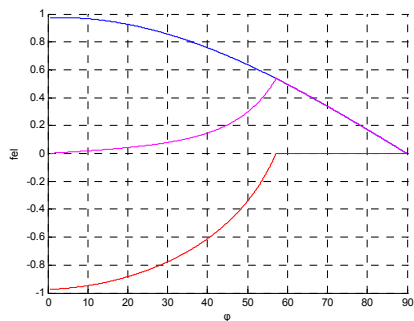
(ζ)

Σχήμα 6.7: α) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Harmonic Balance β) F-φ γ) k-φ δ), ε), στ) χρονική απόκριση ζ) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Runge Kutta

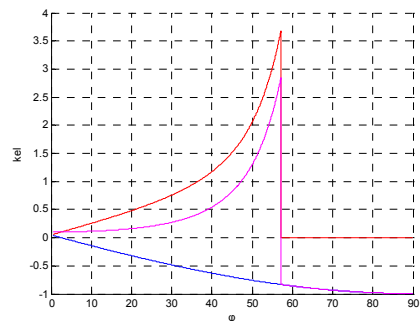
6.8 για γωνία $\beta=45^\circ$ και $\lambda_\zeta=2.5$



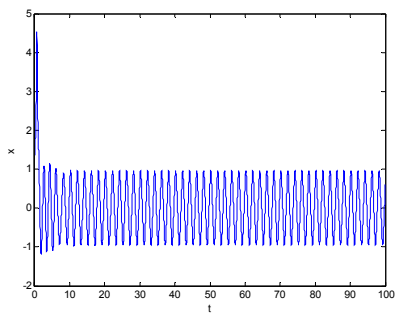
(α)



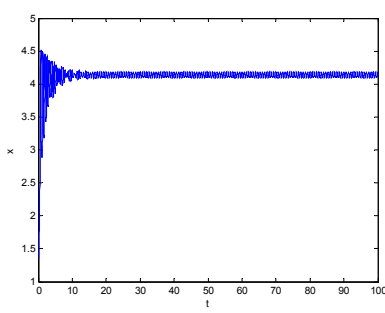
(β)



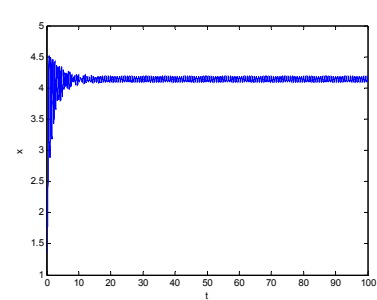
(γ)



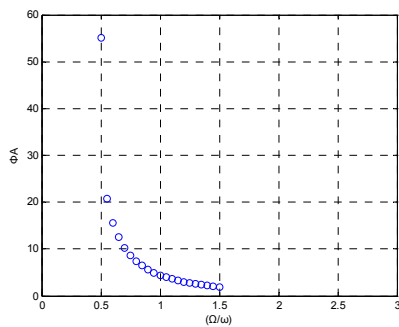
(δ)



(ε)



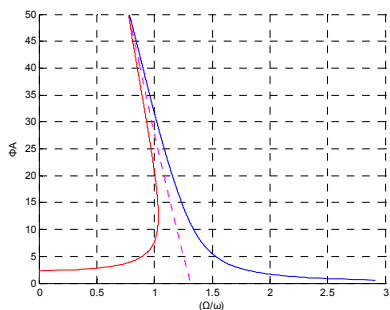
(στ)



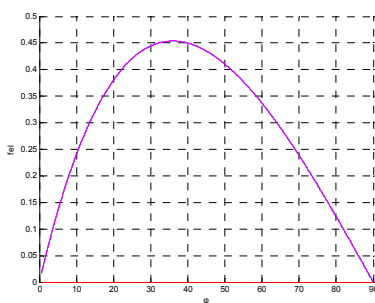
(ζ)

Σχήμα 6.8: α) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Harmonic Balance β) F-φ γ) k-φ δ), ε), στ) χρονική απόκριση ζ) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Runge Kutta

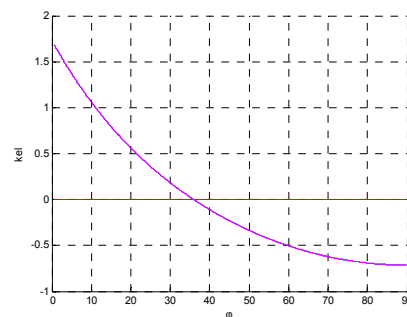
6.9 για γωνία $\beta=60^\circ$ και $\lambda_s=1.0$



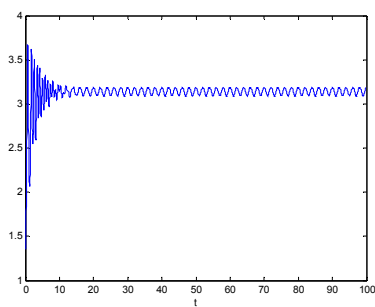
(α)



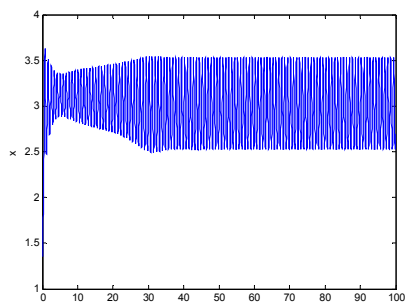
(β)



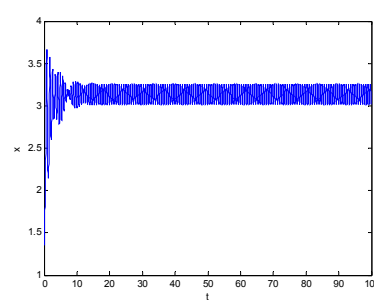
(γ)



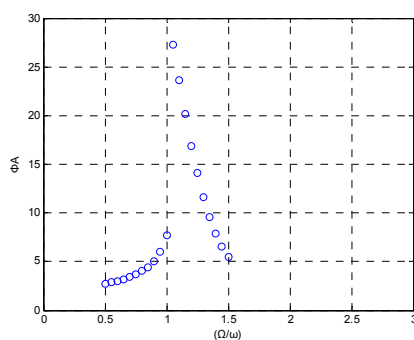
(δ)



(ε)



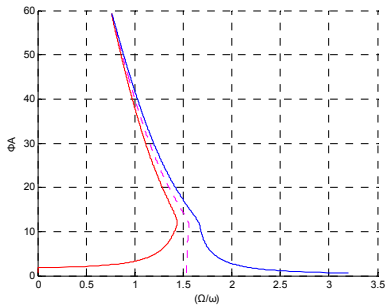
(στ)



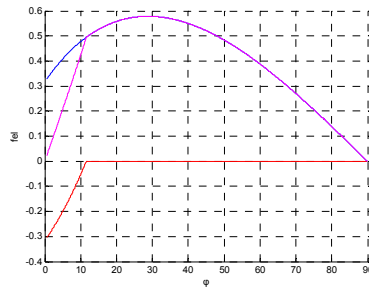
(ζ)

Σχήμα 6.9: α) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Harmonic Balance β) F-φ γ) k-φ δ), ε), στ) χρονική απόκριση ζ) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Runge Kutta

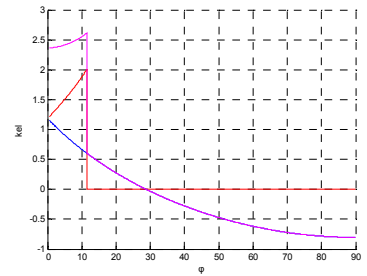
6.10 για γωνία $\beta=60^\circ$ και $\lambda\zeta=1.1$



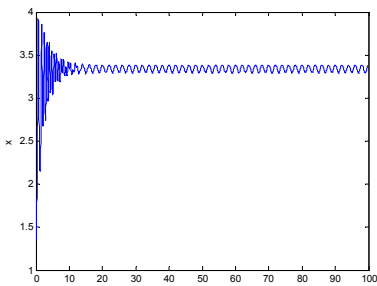
(α)



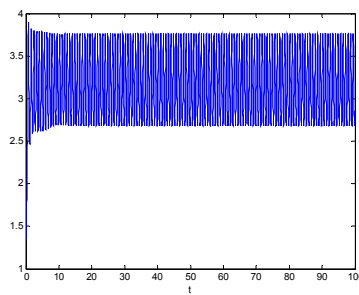
(β)



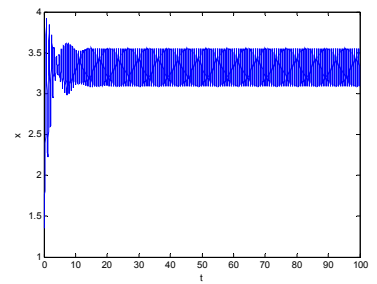
(γ)



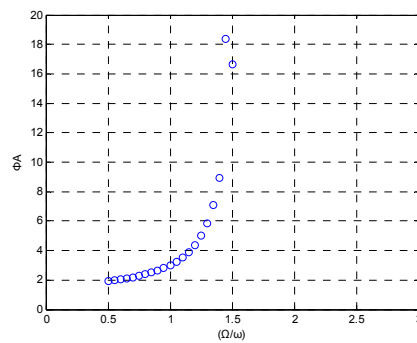
(δ)



(ε)



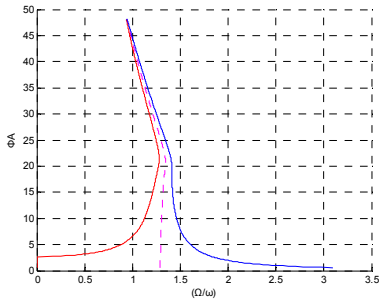
(στ)



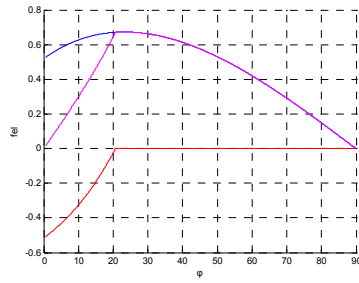
(ζ)

Σχήμα 6.10: α) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Harmonic Balance β) F-φ γ) k-φ δ), ε), στ) χρονική απόκριση ζ) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Runge Kutta

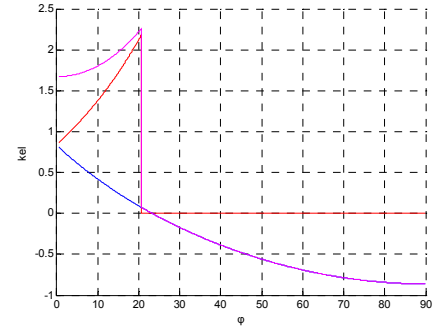
6.11 για γωνία $\beta=60^\circ$ και $\lambda_\zeta=1.2$



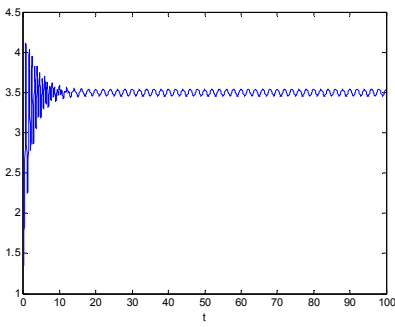
(α)



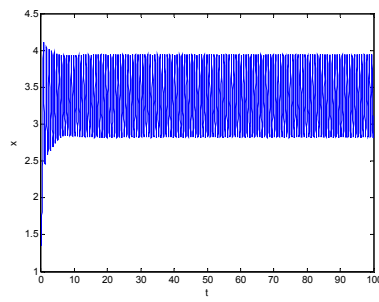
(β)



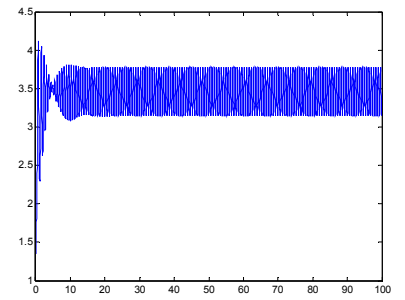
(γ)



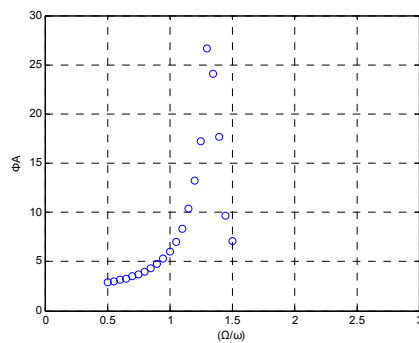
(δ)



(ε)



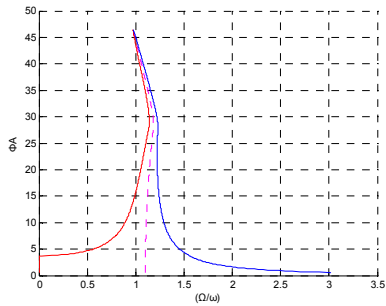
(στ)



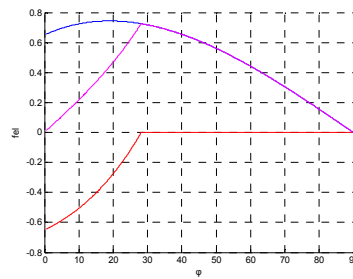
(ζ)

Σχήμα 6.11: α) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Harmonic Balance β) F-φ γ) k-φ δ), ε), στ) χρονική απόκριση ζ) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Runge Kutta

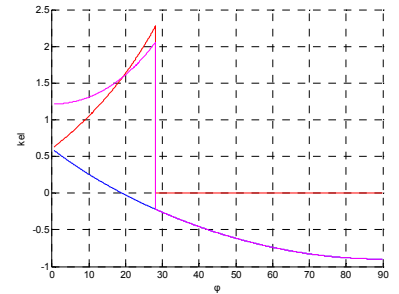
6.12 για γωνία $\beta=60^\circ$ και $\lambda\zeta=1.3$



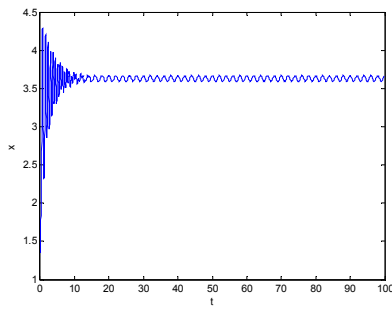
(α)



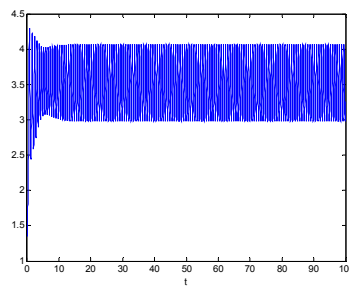
(β)



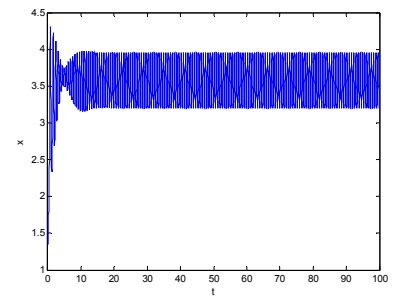
(γ)



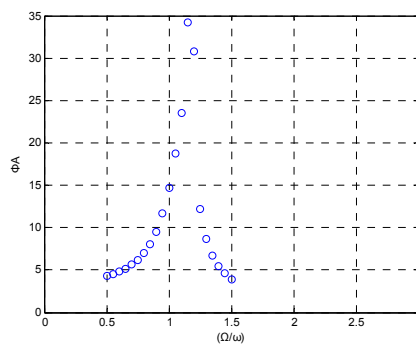
(δ)



(ε)



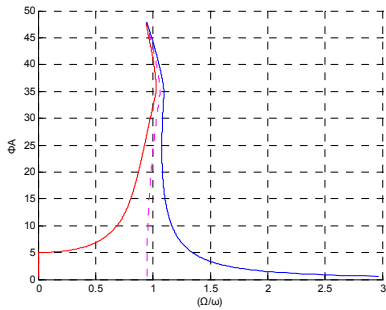
(στ)



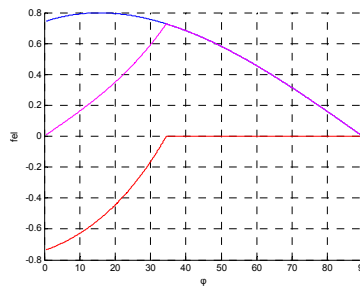
(ζ)

Σχήμα 6.12: α) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Harmonic Balance β) F-φ γ) k-φ δ), ε), στ) χρονική απόκριση ζ) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Runge Kutta

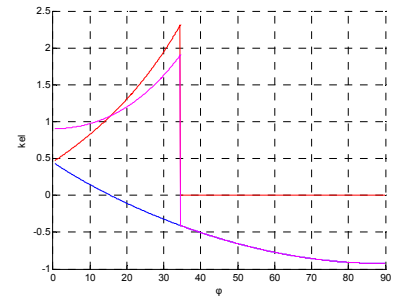
6.13 για γωνία $\beta=60^\circ$ και $\lambda_\zeta=1.4$



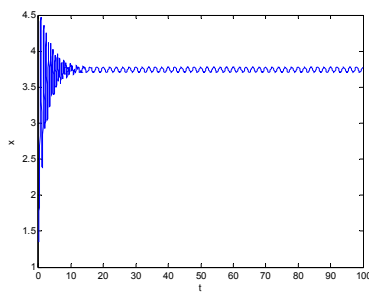
(α)



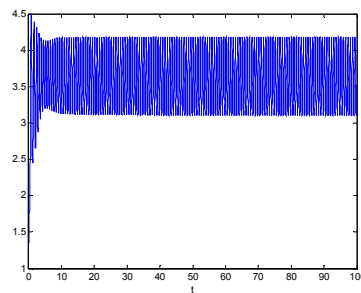
(β)



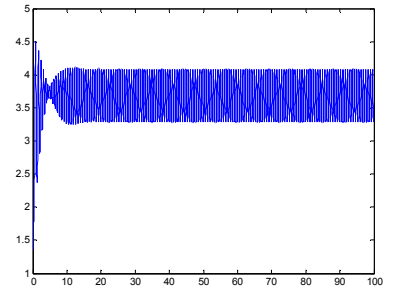
(γ)



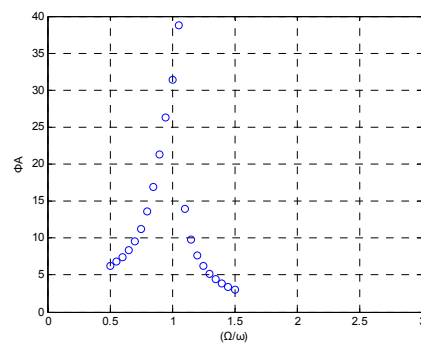
(δ)



(ε)



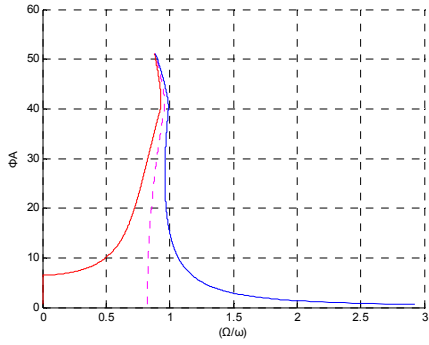
(στ)



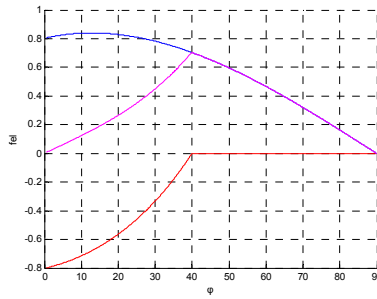
(ζ)

Σχήμα 6.13: α) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Harmonic Balance β) F-φ γ) k-φ δ), ε), στ) χρονική απόκριση ζ) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Runge Kutta

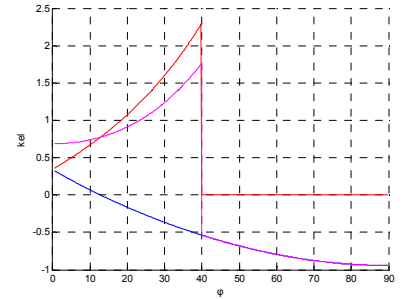
6.14 για γωνία $\beta=60^\circ$ και $\lambda\zeta=1.5$



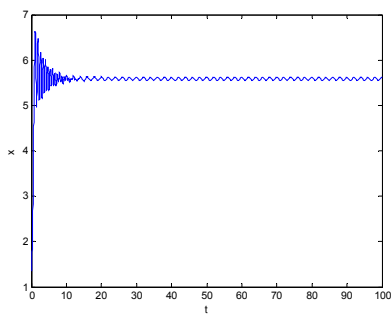
(α)



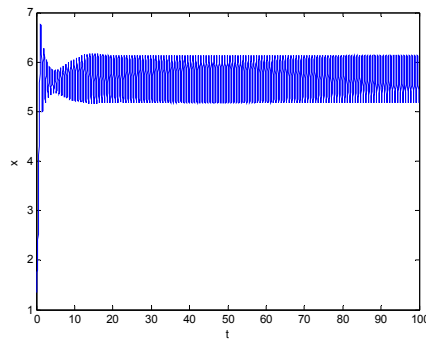
(β)



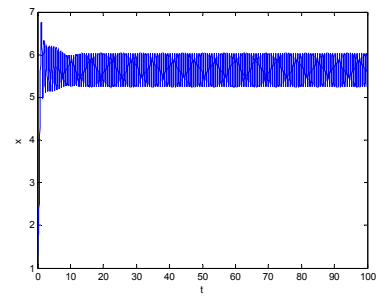
(γ)



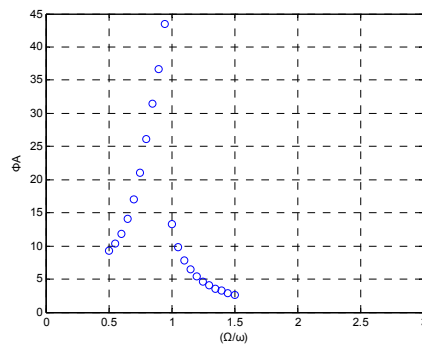
(δ)



(ε)



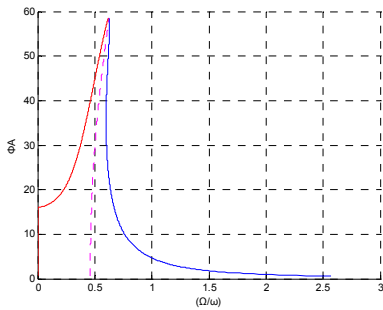
(στ)



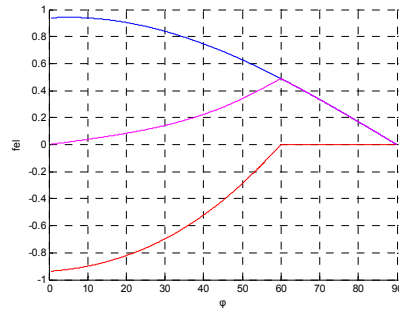
(ζ)

Σχήμα 6.14: α) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Harmonic Balance β) F-φ γ) k-φ δ), ε), στ) χρονική απόκριση ζ) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Runge Kutta

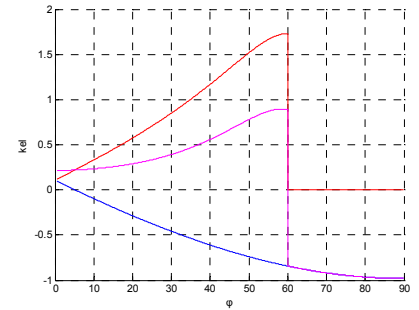
6.15 για γωνία $\beta=60^\circ$ και $\lambda\zeta=2.0$



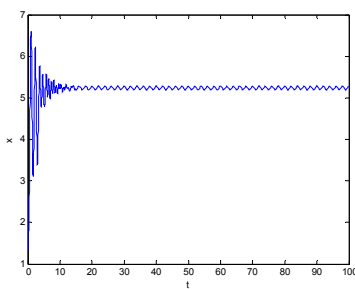
(α)



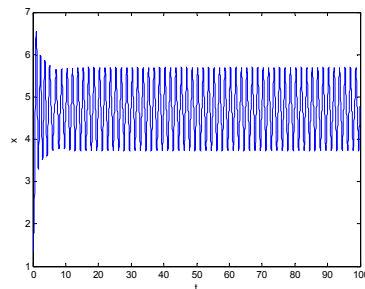
(β)



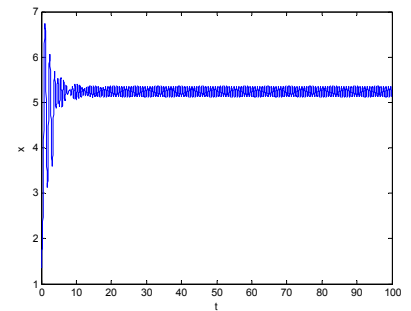
(γ)



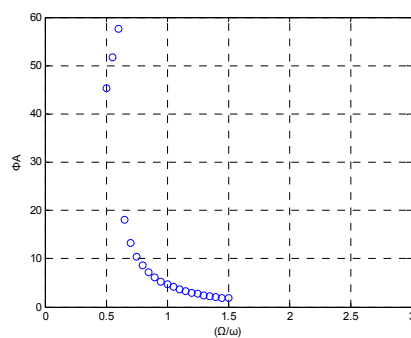
(δ)



(ε)



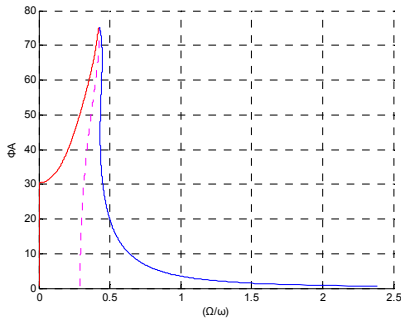
(στ)



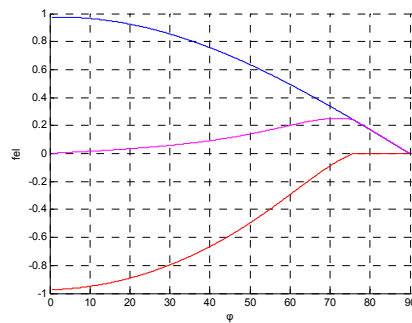
(ζ)

Σχήμα 6.15: α) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Harmonic Balance β) F-φ γ) k-φ δ), ε), στ) χρονική απόκριση ζ) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Runge Kutta

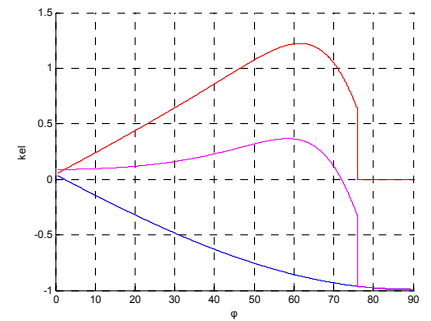
6.16 για γωνία $\beta=60^\circ$ και $\lambda_\zeta=2.5$



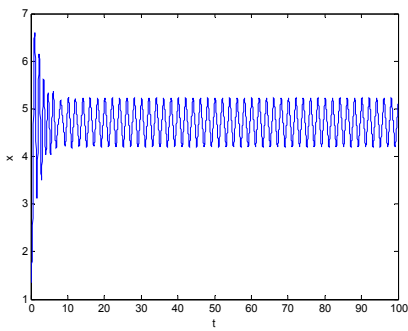
(α)



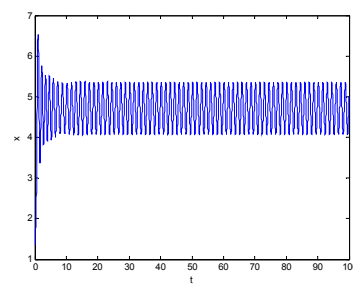
(β)



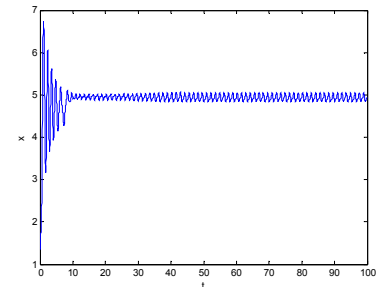
(γ)



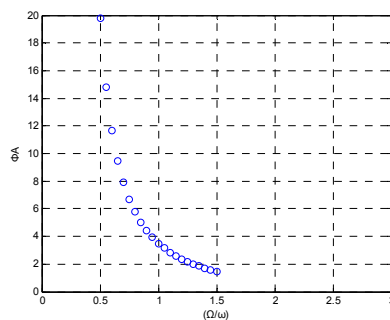
(δ)



(ε)



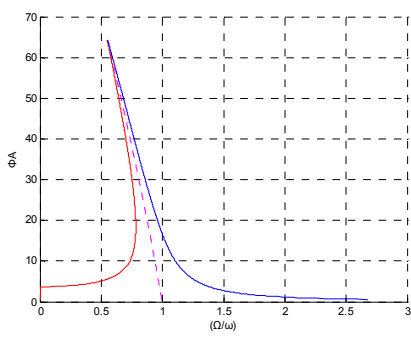
(στ)



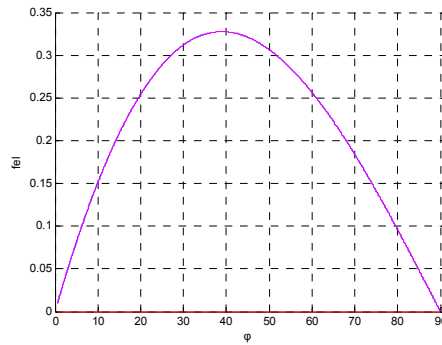
(ζ)

Σχήμα 6.16: α) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Harmonic Balance β) F-φ γ) k-φ δ), ε), στ) χρονική απόκριση ζ) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Runge Kutta

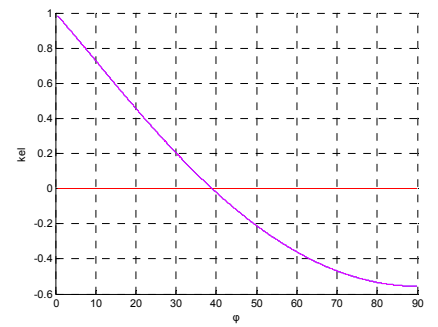
6.17 για γωνία $\beta=75^\circ$ και $\lambda_\zeta=1.0$



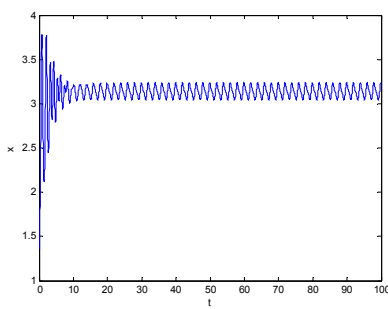
(α)



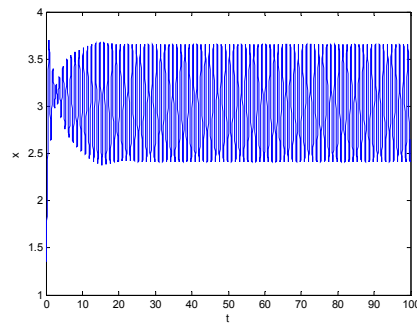
(β)



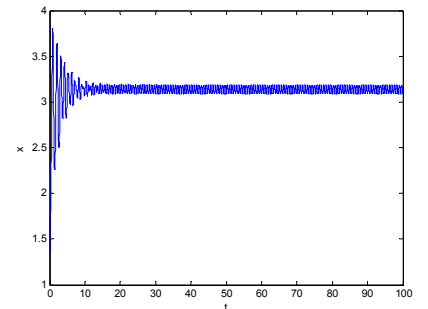
(γ)



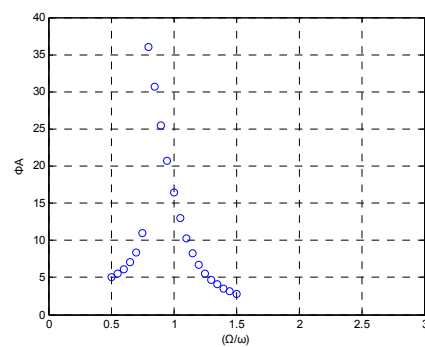
(δ)



(ε)



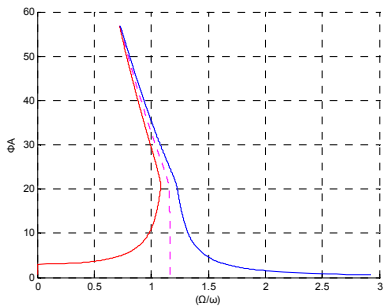
(στ)



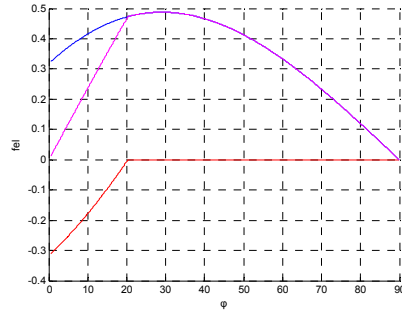
(ζ)

Σχήμα 6.17: α) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Harmonic Balance β) F-φ γ) k-φ δ), ε), στ) χρονική απόκριση ζ) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Runge Kutta

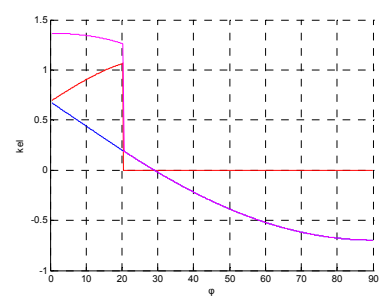
6.18 για γωνία $\beta=75^\circ$ και $\lambda\zeta=1.1$



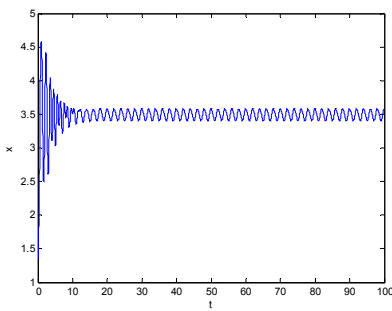
(α)



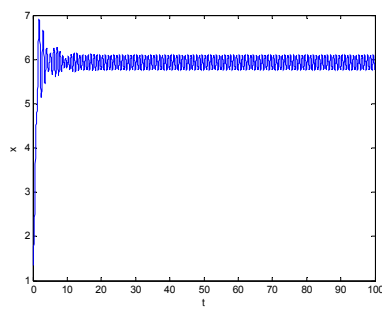
(β)



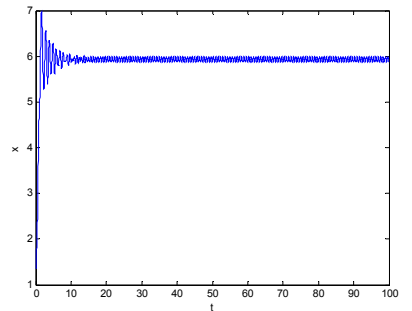
(γ)



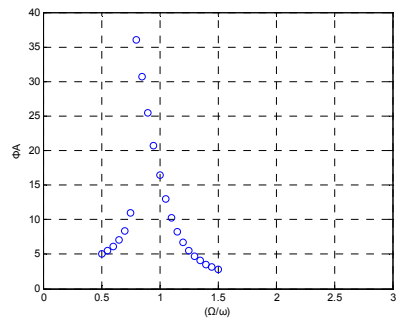
(δ)



(ε)



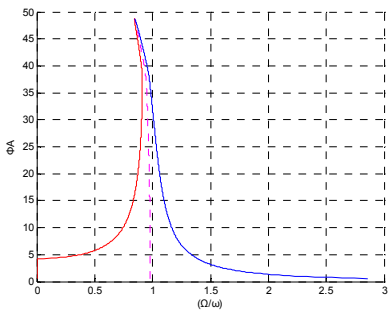
(στ)



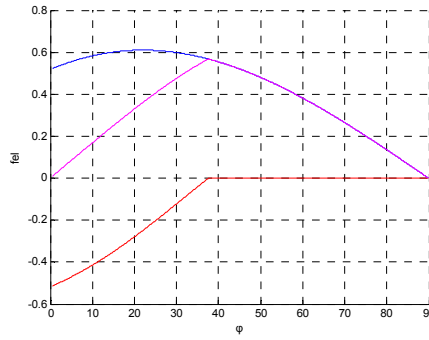
(ζ)

Σχήμα 6.18: α) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Harmonic Balance β) F-φ γ) k-φ δ), ε), στ) χρονική απόκριση ζ) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Runge Kutta

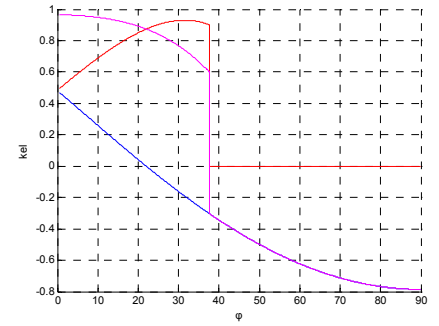
6.19 για γωνία $\beta=75^\circ$ και $\lambda_\zeta=1.2$



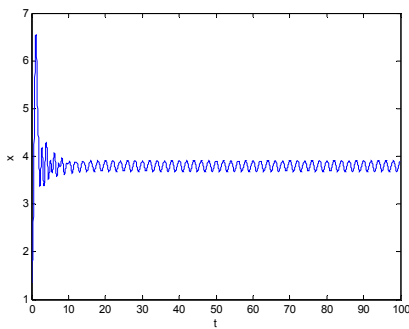
(α)



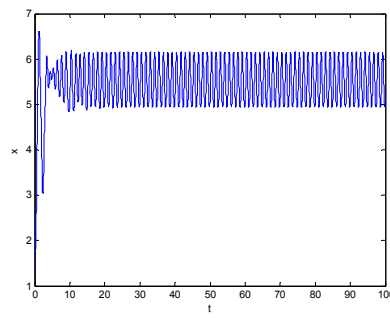
(β)



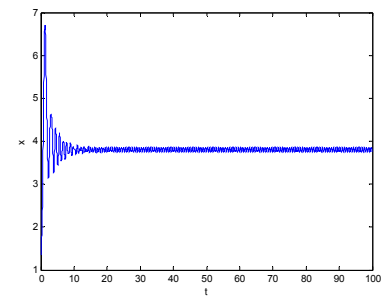
(γ)



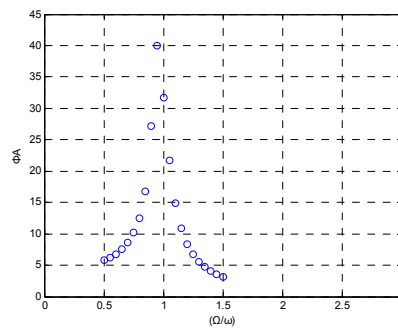
(δ)



(ε)



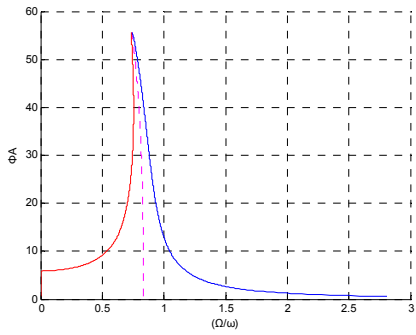
(στ)



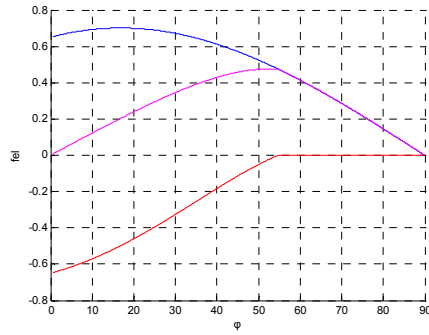
(ζ)

Σχήμα 6.19: α) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Harmonic Balance β) F-φ γ) k-φ δ), ε), στ) χρονική απόκριση ζ) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Runge Kutta

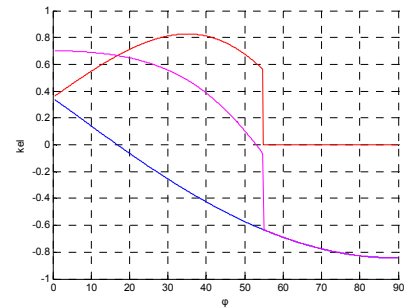
6.20 για γωνία $\beta=75^\circ$ και $\lambda_\zeta=1.3$



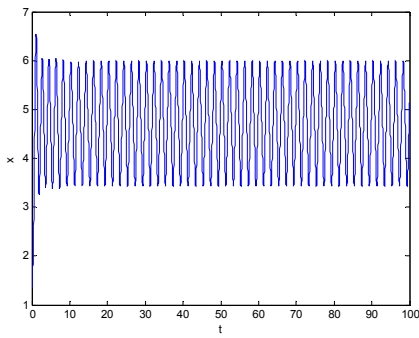
(α)



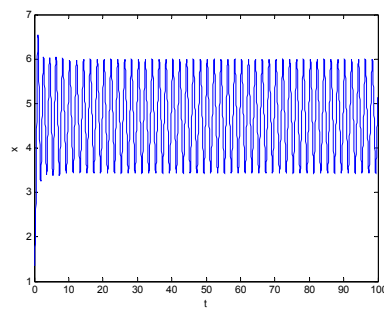
(β)



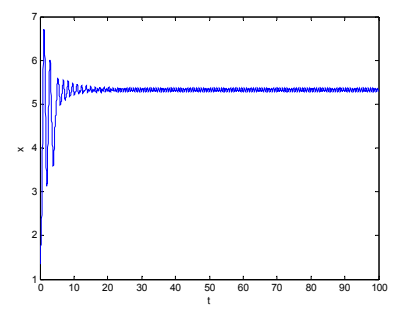
(γ)



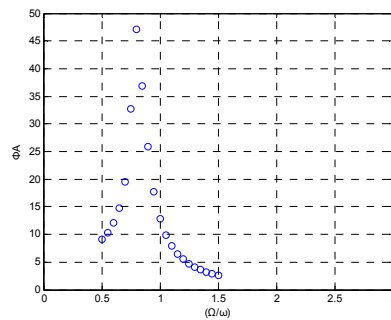
(δ)



(ε)



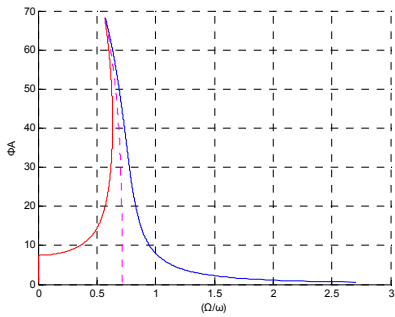
(στ)



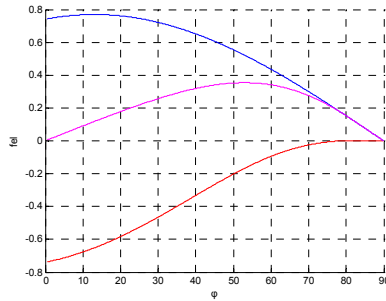
(ζ)

Σχήμα 6.20: α) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Harmonic Balance β) F-φ γ) k-φ δ), ε), στ) χρονική απόκριση ζ) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Runge Kutta

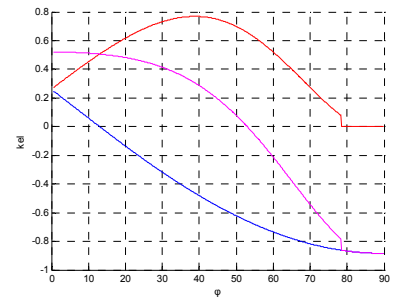
6.21 για γωνία $\beta=75^\circ$ και $\lambda_\zeta=1.4$



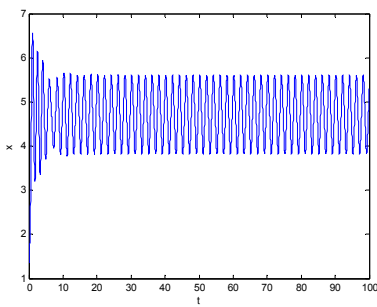
(α)



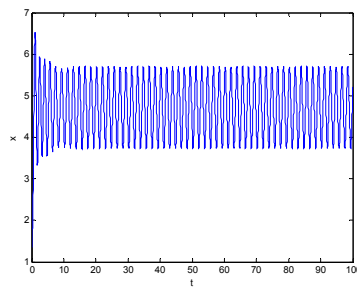
(β)



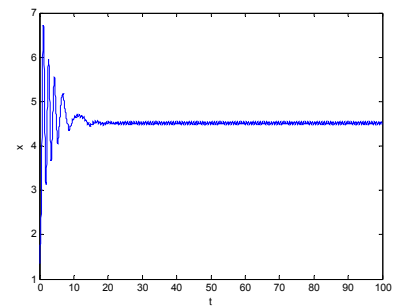
(γ)



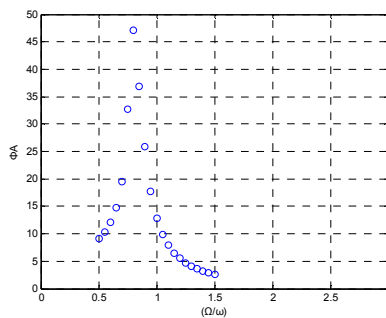
(δ)



(ε)



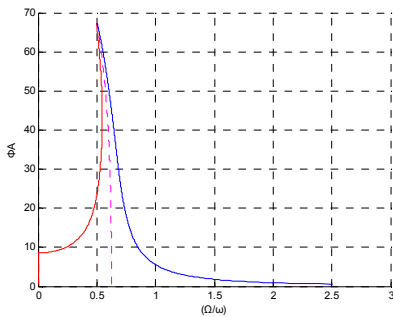
(στ)



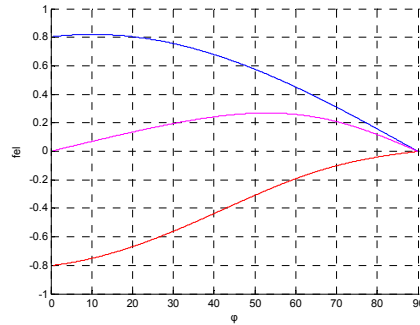
(ζ)

Σχήμα 6.21: α) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Harmonic Balance β) F-φ γ) k-φ δ), ε), στ) χρονική απόκριση ζ) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Runge Kutta

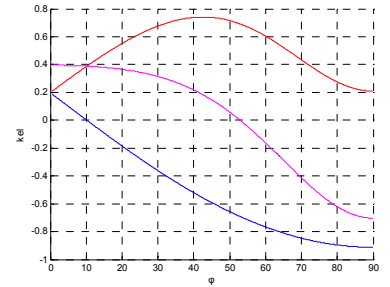
6.22 για γωνία $\beta=75^\circ$ και $\lambda_\zeta=1.5$



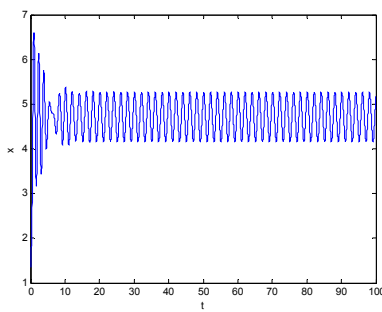
(α)



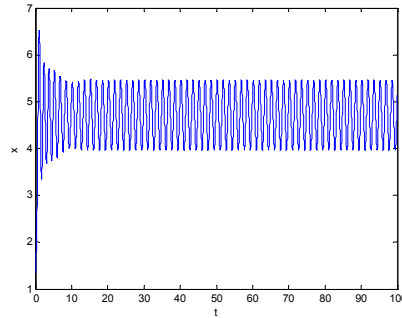
(β)



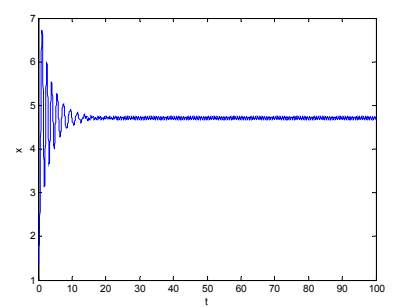
(γ)



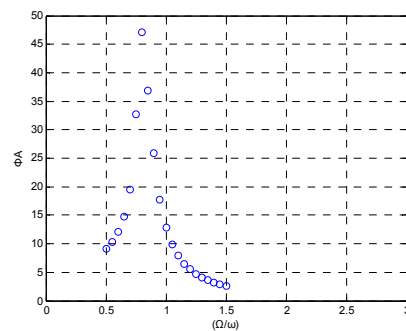
(δ)



(ε)



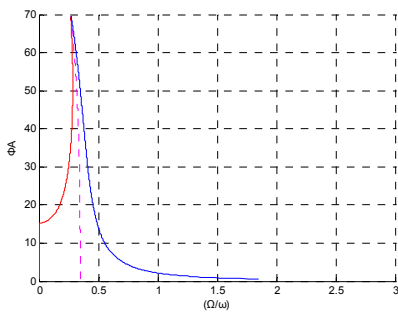
(στ)



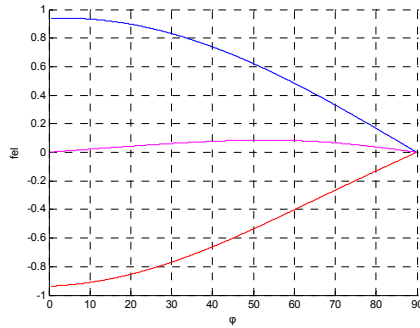
(ζ)

Σχήμα 6.22: α) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Harmonic Balance β) F-φ γ) k-φ δ), ε), στ) χρονική απόκριση ζ) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Runge Kutta

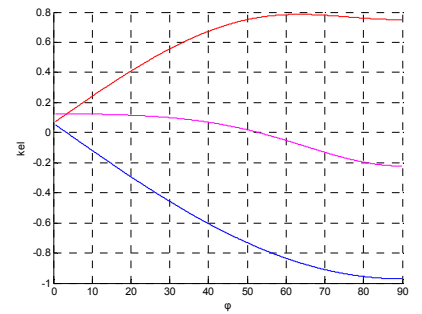
6.23 για γωνία $\beta=75^\circ$ και $\lambda_\zeta=2.0$



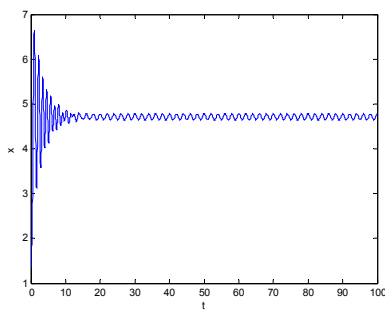
(α)



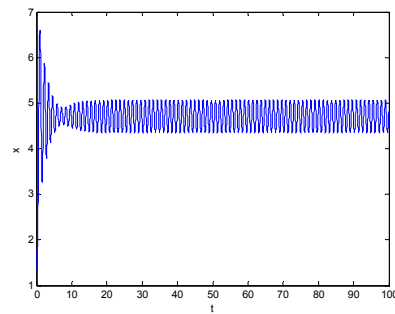
(β)



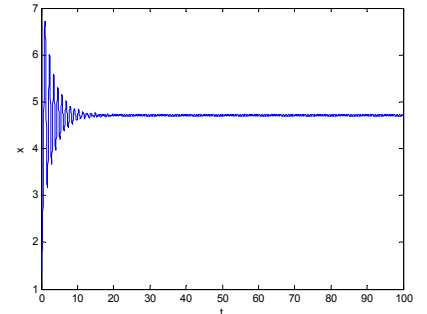
(γ)



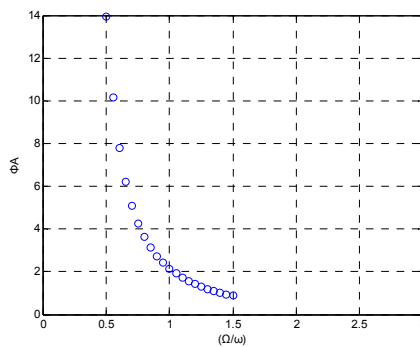
(δ)



(ε)



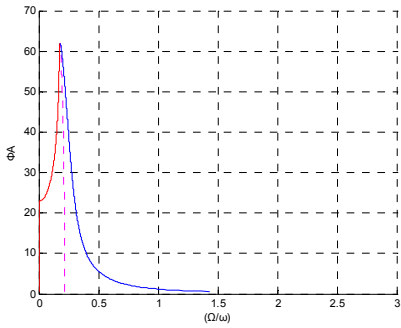
(στ)



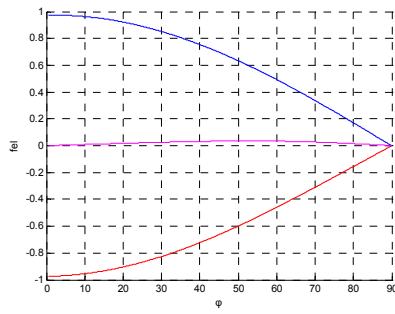
(ζ)

Σχήμα 6.23: α)λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Harmonic Balance β)F-φ γ)k-φ δ),ε),στ) χρονική απόκριση ζ)λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Runge Kutta

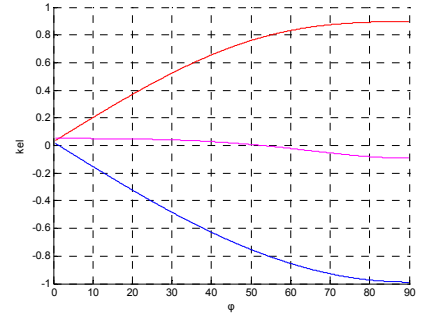
6.24 για γωνία $\beta=75^\circ$ και $\lambda_\zeta=2.5$



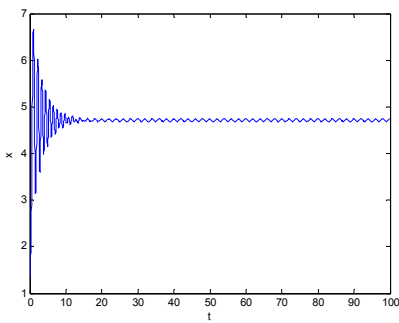
(α)



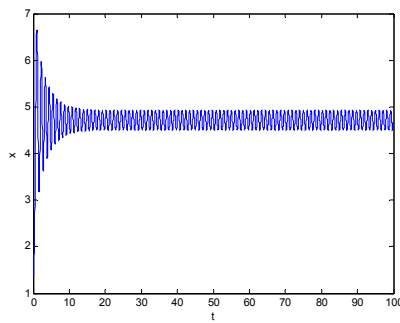
(β)



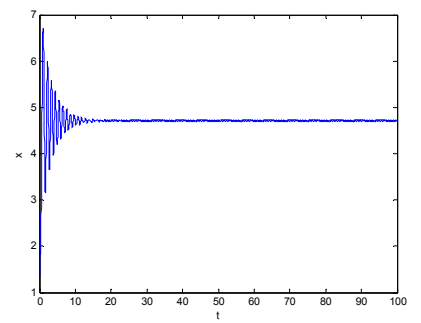
(γ)



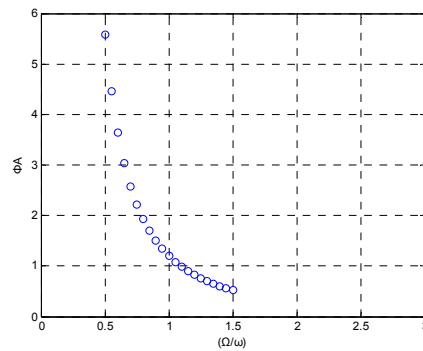
(δ)



(ε)



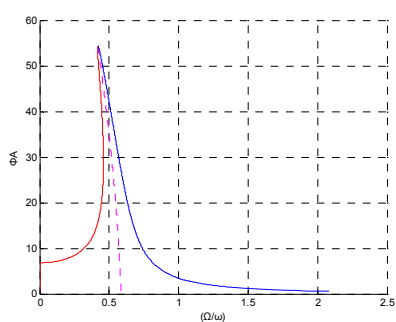
(στ)



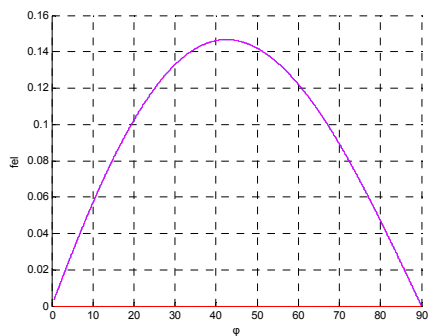
(ζ)

Σχήμα 6.24: α) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Harmonic Balance β) F-φ γ) k-φ δ), ε), στ) χρονική απόκριση ζ) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Runge Kutta

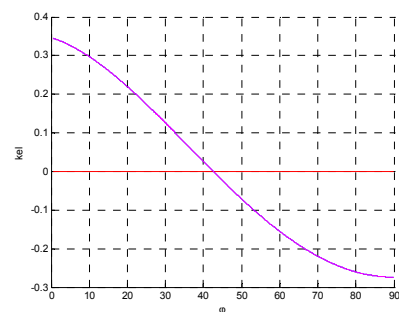
6.25 για γωνία $\beta=85^\circ$ και $\lambda_\zeta=1.0$



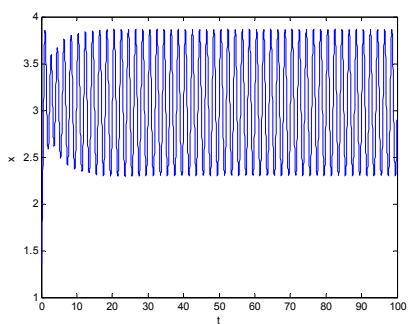
(α)



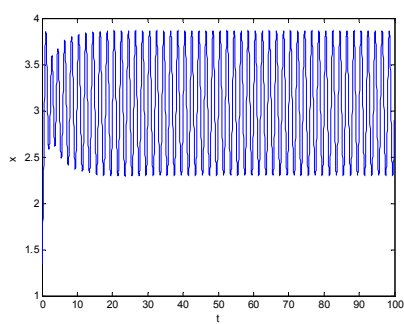
(β)



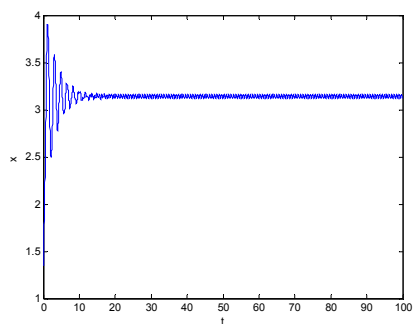
(γ)



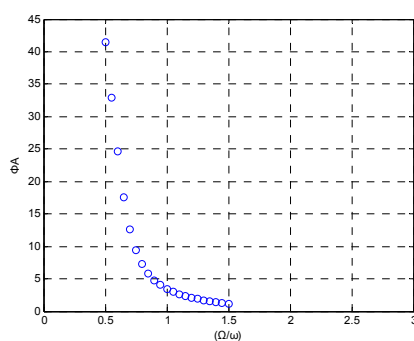
(δ)



(ε)



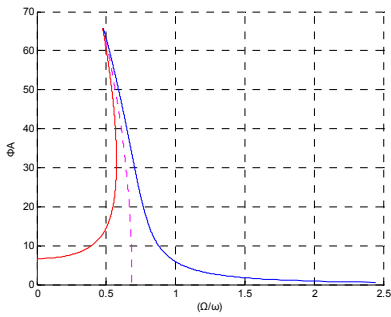
(στ)



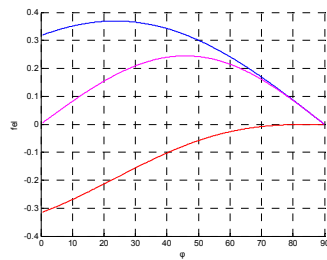
(ζ)

Σχήμα 6.25: α) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Harmonic Balance β) F-φ γ) k-φ δ), ε), στ) χρονική απόκριση ζ) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Runge Kutta

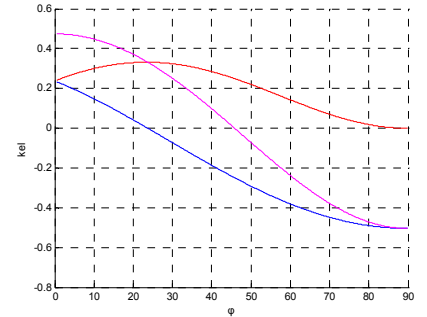
6.26 για γωνία $\beta=85^\circ$ και $\lambda_\zeta=1.1$



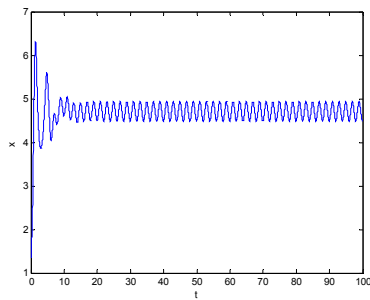
(α)



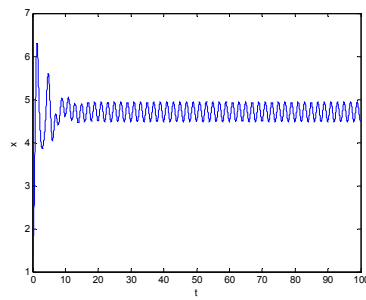
(β)



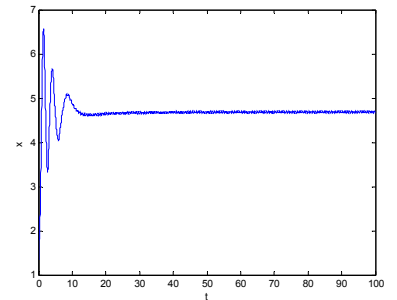
(γ)



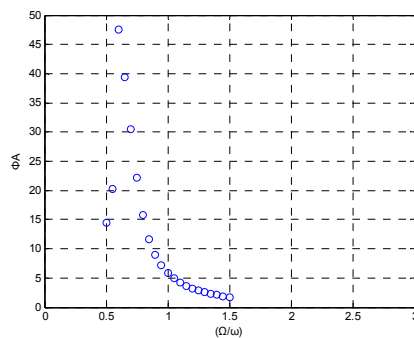
(δ)



(ε)



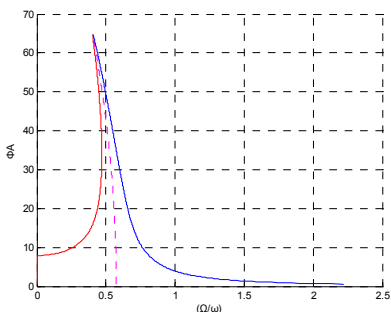
(στ)



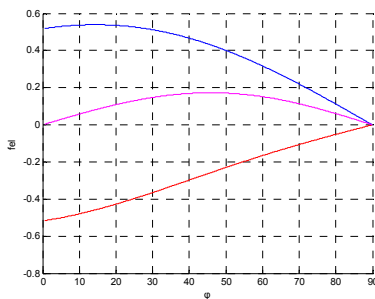
(ζ)

Σχήμα 6.26: α) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Harmonic Balance β) F-φ γ) k-φ δ), ε), στ) χρονική απόκριση ζ) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Runge Kutta

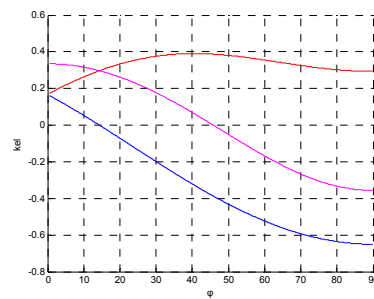
6.27 για γωνία $\beta=85^\circ$ και $\lambda_\zeta=1.2$



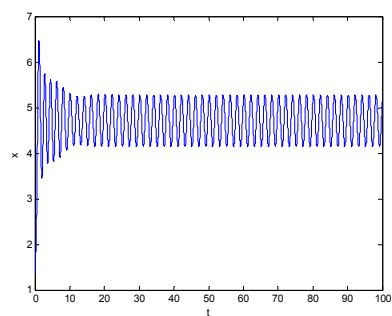
(α)



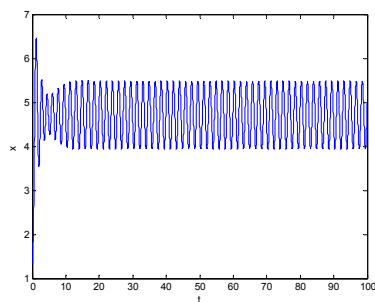
(β)



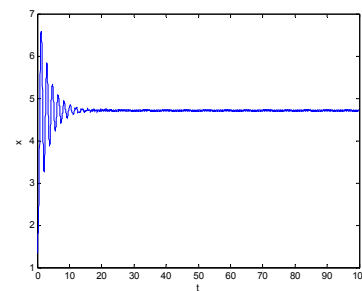
(γ)



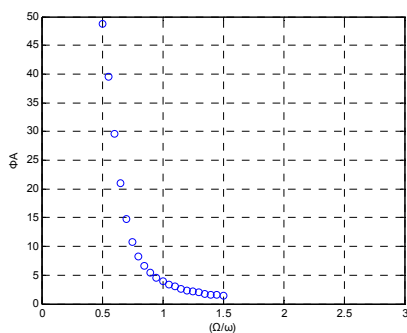
(δ)



(ε)



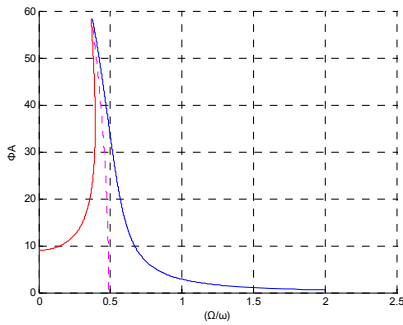
(στ)



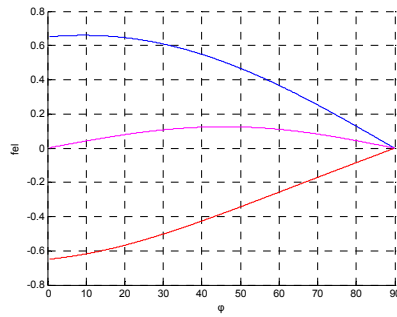
(ζ)

Σχήμα 6.27: α) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Harmonic Balance β) F-φ γ) k-φ δ), ε), στ) χρονική απόκριση ζ) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Runge Kutta

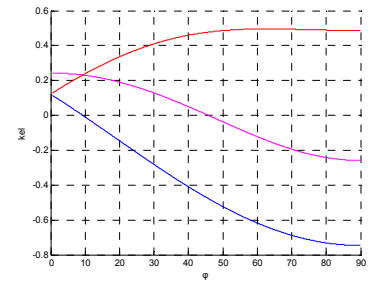
6.28 για γωνία $\beta=85^\circ$ και $\lambda_\zeta=1.3$



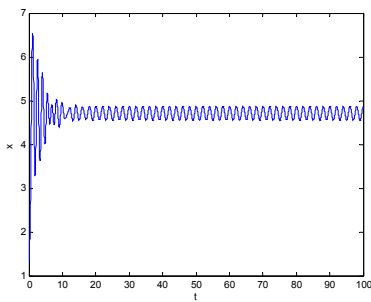
(α)



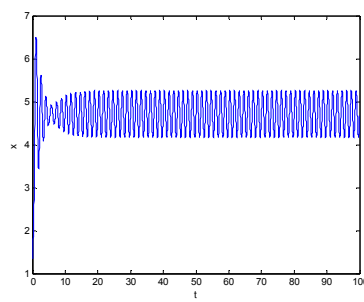
(β)



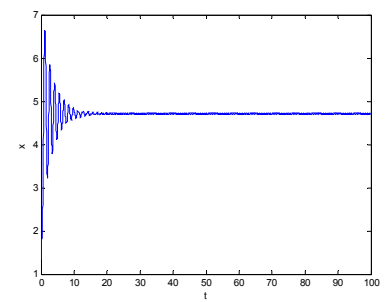
(γ)



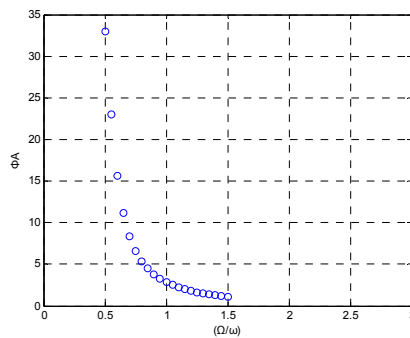
(δ)



(ε)



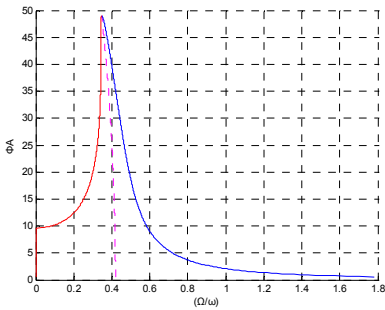
(στ)



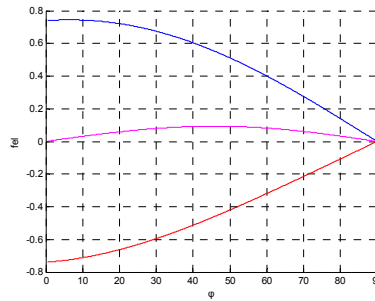
(ζ)

Σχήμα 6.28: α) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Harmonic Balance β) F-φ γ) k-φ δ), ε), στ) χρονική απόκριση ζ) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Runge Kutta

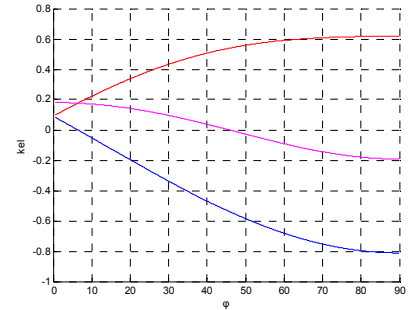
6.29 για γωνία $\beta=85^\circ$ και $\lambda\zeta=1.4$



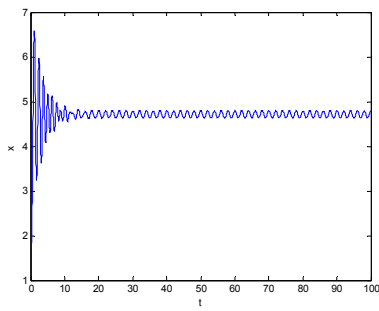
(α)



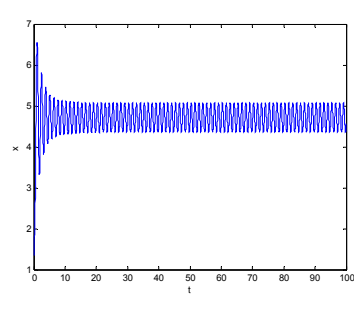
(β)



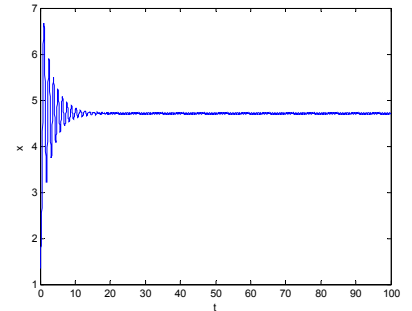
(γ)



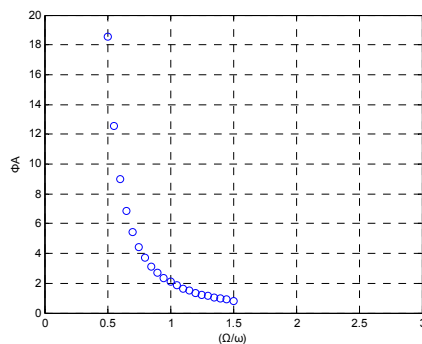
(δ)



(ε)



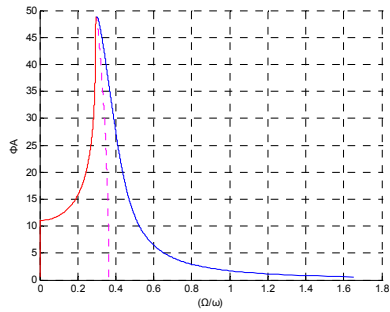
(στ)



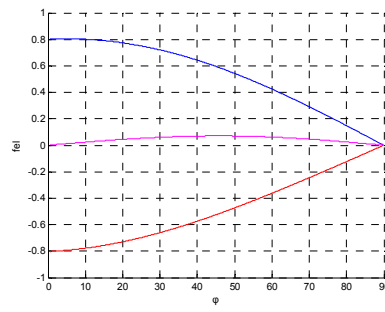
(ζ)

Σχήμα 6.29: α) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Harmonic Balance β) F-φ γ) k-φ δ), ε), στ) χρονική απόκριση ζ) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Runge Kutta

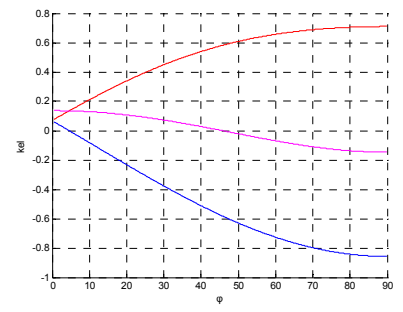
6.30 για γωνία $\beta=85^\circ$ και $\lambda_\zeta=1.5$



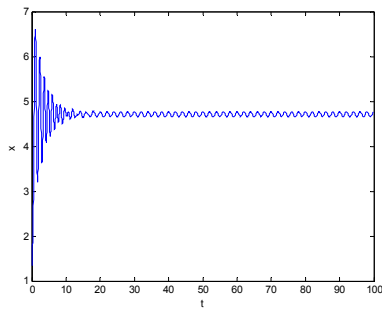
(α)



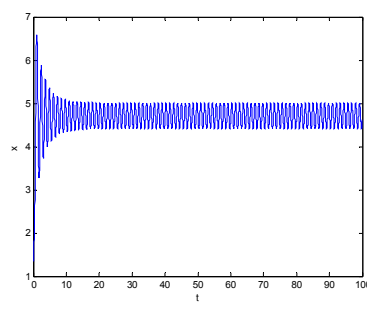
(β)



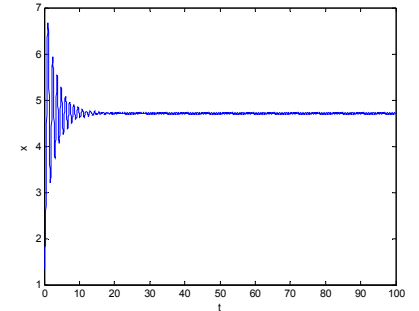
(γ)



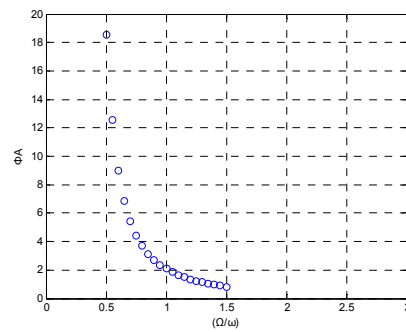
(δ)



(ε)



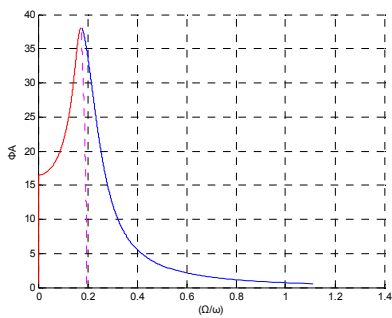
(στ)



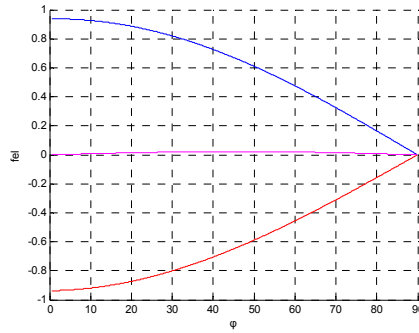
(ζ)

Σχήμα 6.30: α) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Harmonic Balance β) F-φ γ) k-φ δ), ε), στ) χρονική απόκριση ζ) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Runge Kutta

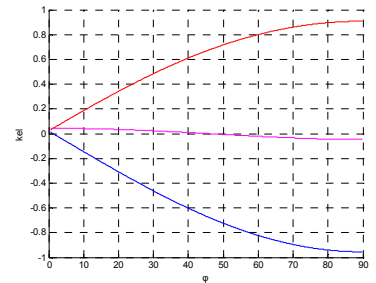
6.31 για γωνία $\beta=85^\circ$ και $\lambda_\zeta=2.0$



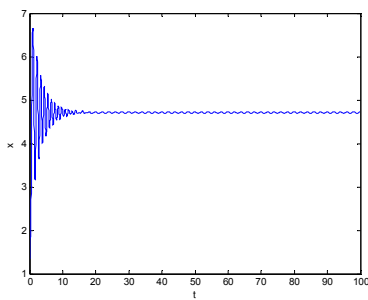
(α)



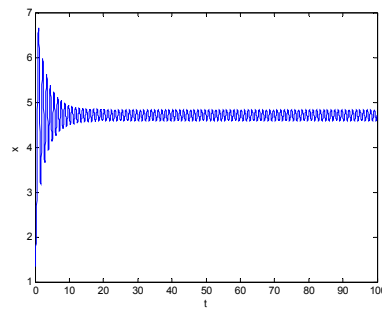
(β)



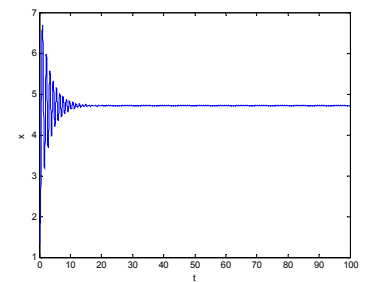
(γ)



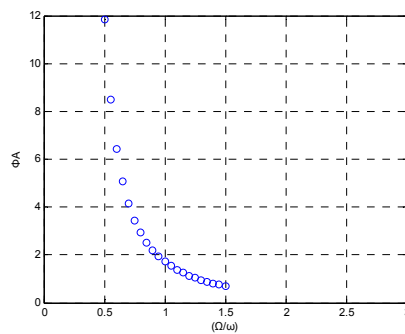
(δ)



(ε)



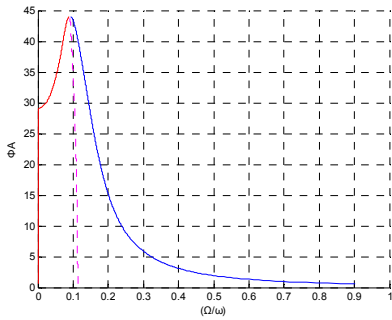
(στ)



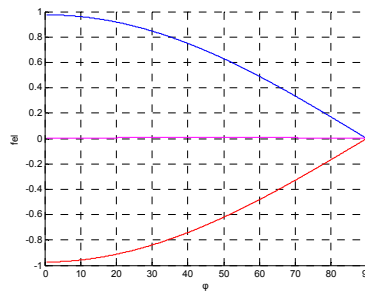
(ζ)

Σχήμα 6.31: α) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Harmonic Balance β) F-φ γ) k-φ δ), ε), στ) χρονική απόκριση ζ) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Runge Kutta

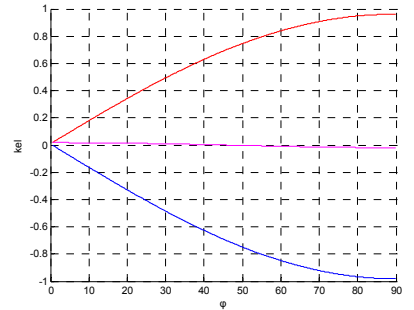
6.32 για γωνία $\beta=85^\circ$ και $\lambda_\zeta=2.5$



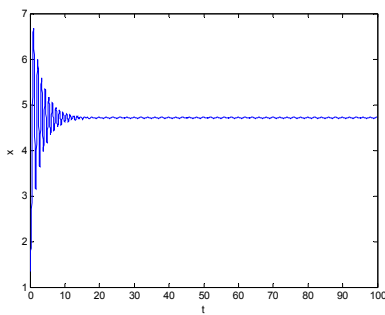
(α)



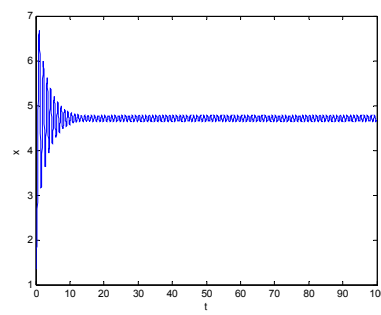
(β)



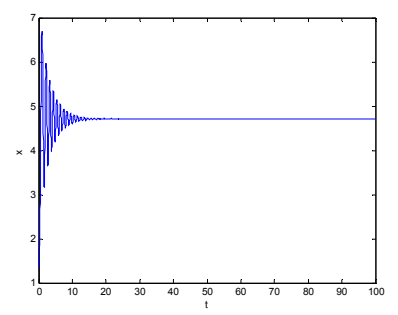
(γ)



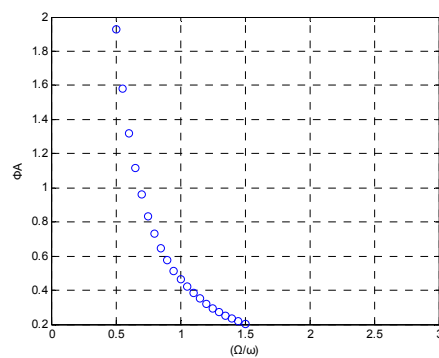
(δ)



(ε)



(στ)



(ζ)

Σχήμα 6.32: α) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Harmonic Balance β) F-φ γ) k-φ δ), ε), στ) χρονική απόκριση ζ) λύσεις εξίσωσης κίνησης με την μέθοδο Runge Kutta

Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι το πλάτος της δύναμης Φ_0 που χρησιμοποιήθηκε κατά τους υπολογισμούς δεν ήταν σταθερό καθώς σε ορισμένες περιπτώσεις το διάγραμμα που προέκυπτε από την λύση των δύο μεθόδων ξέφυγε εκτός των επιτρεπών ορίων των 90° . Για τον λόγο αυτό στον πίνακα 6.1 παρουσιάζονται όλες οι τιμές της μεταβλητής Φ_0 .

β	λ_s	Φ_0
45	1.0	0.074
	1.1	0.08
	1.2	
	1.3	
	1.4	
	1.5	
	2.0	0.076
	2.5	0.070
60	1.0	0.069
	1.1	0.079
	1.2	
	1.3	
	1.4	
	1.5	
	2.0	0.064
	2.5	0.056
75	1.0	0.062
	1.1	0.072
	1.2	
	1.3	
	1.4	0.068
	1.5	0.059
	2.0	0.033
	2.5	0.020
85	1.0	0.040
	1.1	0.055
	1.2	0.046
	1.3	0.038
	1.4	0.030
	1.5	0.026
	2.0	0.012
	2.5	0.008

Πίνακας 6.1: Τιμές πλάτους δύναμης Φ_0

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] **I.A. Antoniadis, D.T. Venetsanos, and F.G. Papaspyridis.**, (2012), DIESYS – Dynamically non-linear dielectric elastomer energy generating synergetic structures: perspectives and challenges.
- [2] **F. Papaspyridis, D. Venetsanos, I. Antoniadis**, (2012), Dynamic non-linear energy absorbers based on dielectric elastomers, *EuroEAP 2012, International conference on Electromechanically Active Polymer (EAP) transducers & artificial muscles, Potsdam, Germany 29-30 May 2012.*
- [3] **R. Ramlan, M.J. Brennan, B.R. Mace, and I. Kovacic**, (2009), Potential benefits of a non-linear stiffness in an energy harvesting device, *Springer Science+Business media B.V. 2009*, 545-558.
- [4] **R. Skelton, M. de Oliveira**, (1986), Tensegrity systems, *Springer Science+Business media.*
- [5] **A. Κανάραχος**, (2001), *Μηχανισμοί και Ρομποτικά Συστήματα.*
- [6] **A. Κανάραχος, I. Αντωνιάδης.**, (1998), *Δυναμική Μηχανών.*
- [7] **Σ. Νατσιάβας**, (2001), *Ταλαντώσεις μηχανικών συστημάτων.*
- [8] **Γ.Ι. Τσαμασφύρος**, (1991), *Μηχανική Παραμορφώσιμων Σωμάτων II*