παράγει ἐπίσης μηχανικὸν ἔργον ἔχομεν τὰς μηχανὰς διὰ θερμοῦ ἀέρος (Heissluftmotoreu).

Γ) Ἐὰν ἡ ἐκ τῆς καύσεως τῶν καυσίμων ὑλῶν χρησιμοποιουμένη θερμότης παράγηται ἐξ ἐκρήξεως κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον ταχείας καὶ δὴ ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον ἐντὸς τοῦ κυλίνδρου τῆς μηχανῆς ἔχομεν τότε τοὺς ἐκρηκτικοὺς κινητῆρας (γκαζομηχανάς, μηχανὰς δι' οἰνοπνεύματος, μηχανὰς Diesel κτλ.).

Α) Ἀτμομηχαναί.

Αἱ ἀτμομηχαναί, ὡς εἴπομεν, χρησιμοποιοῦσι διὰ τὴν κίνησίν των ὑδρατμὸν καὶ καθόσον μὲν αἱ ἀτμομηχαναὶ χρησιμοποιοῦσι τὴν δυναμικὴν ἐνέργειαν τοῦ ἀτμοῦ ἐνεργοῦντος ὡς συνειλιγμένου ἐλατηρίου, ὅπερ ἐξελίσσεται ἔχομεν Ι) τὰς κυρίως ἀτμομηχανάς· καθόσον δὲ χρησιμοποιεῖται ἡ κινητικὴ ἐνέργεια ἢ ἡ ῥύμη τοῦ ἀτμοῦ ἔχομεν ΙΙ) τοὺς ἀτμοστροβίλους, ἐνεργοῦντας κατὰ τὴν αὐτὴν ἀρχήν, ὡς καὶ οἱ ὑδραυλικοὶ στρόβιλοι.

Ἱστορία τῶν ἀτμομηχανῶν. Τὸ ὄνομα τοῦ πρώτου ἰδόντος κάλυμμα χύτρας τινασσόμενον ὑπὸ τῆς δυνάμεως τοῦ ἀτμοῦ ζέοντος ὕδατος καὶ διανοηθέντος, ὅτι ἡ δύναμις αὕτη δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ ὡς κινητήριος δὲν δύναται νὰ εἶνε γνωστόν.

Ἐκ τῆς ἀρχαιότητος γνωστὴ μᾶς εἶνε ἡ Αἰολιπύλη τοῦ Ἥρωνος Ἀλεξανδρέως (Αὐτοματικὴ κτλ. μαθηματικὴ Ἀραβικὴ ἔκδοσις). Ἐν τῷ μεσαίωνι κατόπιν κατεσκεύασεν ὁ Ἰταλὸς Branca μίαν Αἰολιπύλην ἐν εἴδει ἀτμοστροβίλου. Σπουδαιότητα ὅμως πολὺ μείζονα ἔχουσιν αἱ ἐργασίαι τοῦ Γάλλου Papin, ὅστις ἐν ἔτει 1687 ὡς καθηγητὴς τοῦ Πανεπιστημίου Marburg ἀνεκάλυψεν, ὅτι ὁ ἀτμὸς ψυχόμενος ἐν ὕδατι συμπυκνοῦται, οὕτω δὲ παράγεται ἀραίωσις ἀέρος ἢ μᾶλλον τῆς πιέσεως ἔν τινι δοχείῳ κεκλεισμένῳ δι' ἐμβόλου· οὕτω δὲ ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις ὑπερισχύουσα κινεῖ τὸ ἔμβολον πρὸς τὸν πυθμένα τοῦ δοχείου. Τὴν ἀρχὴν ταύτην ὁ Papin ἐχρησιμοποίησε πρὸς ἄντλησιν ὡς ἑξῆς· εἰς τὸν κύλινδρον κοινῆς ἀντλίας εἰσῆγεν ἀτμὸν κάτωθεν τοῦ ἐμβόλου, ὅπερ οὕτως ὑψοῦτο πρὸς τὰ ἄνω. Μετὰ ταῦτα ἐκλείετο ὁ ἀτμός, ὁ δ' ἀτμὸς ὁ ἐν τῷ κυλίνδρῳ τῆς ἀντλίας ἐψύχετο καὶ συνεπυκνοῦτο καὶ οὕτως ὑπερίσχυεν ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις καταβιβάζουσα τὸ ἔμβολον πρὸς τὰ κάτω πάλιν. Τοῦτο ἐπανελαμβάνετο, τὸ δὲ ἀνοιγοκλείσιμον τοῦ ἀτμοῦ ἐγίνετο διὰ χειρός. Ὁ Papin κατώρθωσε μάλιστα νὰ κατασκευάσῃ καὶ ἀτμόπλοιον πλέον ἐπὶ τοῦ ποταμοῦ Weser· τοῦτο ὅμως τῷ ἔγινεν ἀφορμὴ καταστροφῆς, διότι δεισιδαίμονες ἁλιεῖς κατέστρεψαν τὴν σατανικήν, ὡς ἐνόμιζον, μηχανήν, ὁ δὲ Papin ἔχασε τὴν θέσιν του ὡς καθηγητοῦ, ἀπηλάθη καὶ ἀπέθανεν ἐν μεγίστῃ ἐνδείᾳ. Εἶνε ὁ συνήθης κλῆρος τῶν ὁπωσδήποτε εὐεργετούντων τὴν ἀνθρωπότητα!

Τὴν μηχανὴν ταύτην τοῦ Papin ὀνομασθεῖσαν ἀτμοσφαιρικὴν (διότι ὁ ἕτερος τῶν ἐμβολισμῶν ἐνηργεῖτο ὑπὸ τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως) ἐτελειοποίησαν οἱ Newcomen καὶ Savery τῷ 1706, ἐπιταχύναντες τὴν συμπύκνωσιν τοῦ ἀτμοῦ διὰ νάματος ψυχροῦ ὕδατος εἰσβιβαζομένου εἰς τὸν ἀτμοκύλινδρον· κατόπιν δὲ ἐφευρόντες μηχανικὴν τὴν κίνησιν τῶν κρουνῶν διὰ τὸ ἀνοιγοκλείσιμον τῶν βαλβίδων. Τότε ἐφευρέθη καὶ ἡ μεταβολὴ τῆς εὐθυγράμμου παλινδρομικῆς κινήσεως εἰς περιστροφικὴν τῇ βοηθείᾳ διωστῆρος καὶ στροφάλου.

(Ἕπεται συνέχεια.)

ΑΡ. ΚΟΥΣΙΔΗΣ

ΣΥΜΒΟΛΗ ΕΙΣ ΤΑΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

(Συνέχεια ἐκ τοῦ προηγουμένου.)

Παρατήρησις. Αἱ ἐξισώσεις 6) ἰσχύουσι προφανῶς διὰ πᾶν σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων τῶν συντεταγμένων x, y, z. Ἀντὶ δὲ τῶν ἐξισώσεων τούτων δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν τὰς ἑπομένας γενικωτέρας:

$$u = l + \lambda(qz - ry) + \mu\frac{d\varphi}{dx}$$

$$v = m + \lambda(rx - pz) + \mu\frac{d\varphi}{dy}$$

$$w = n + \lambda(py - qx) + \mu\frac{d\varphi}{dz}$$

ἤ

$$u = l + \lambda(qz - ry) + M\frac{df}{dx}$$

$$v = m + \lambda(rx - pz) + M\frac{df}{dy}$$

$$w = n + \lambda(py - qx) + M\frac{df}{dz}$$

ἔνθα $\mu = M\frac{df}{d\varphi}$ καὶ f(φ) ὁμογενὲς πολυώνυμον. Τὸ δὲ μ δύναται νὰ ὁρίζηται ἐκ τῶν ἐξισώσεων

$$\frac{\text{συν}\,(\varkappa, x)}{\frac{d\varphi}{dx}} = \frac{\text{συν}\,(\varkappa, y)}{\frac{d\varphi}{dy}} = \frac{\text{συν}\,(\varkappa, z)}{\frac{d\varphi}{dz}}$$

ἐὰν κ παριστᾷ τὴν ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν $\varphi(x, y, z)=0$ κάθετον κατὰ τὸ σημεῖον x, y, z.

Ἐὰν δὲ ἦναι

$$(\varepsilon) \quad \begin{aligned} &\varphi\,(x_1\, y_1\, z_1\, x_2\, y_2\, z_2 \ldots)=0, \\ &\psi\,(x_1\, y_1\, z_1\, x_2\, y_2\, z_2 \ldots)=0, \ldots \end{aligned}$$

ὁμογενεῖς ἐξισώσεις πρὸς $x_1\, y_1\, z_1\, x_2\, y_2\, z_2 \ldots$ τοιαῦται, ὥστε

$$\varphi\,(p_1\, q_1\, r_1\, p_2\, q_2\, r_2 \ldots)=0,$$
$$\psi\,(p_1\, q_1\, r_1\, p_2\, q_2\, r_2 \ldots)=0, \ldots$$

ἔχομεν

$$u_i = l_i + \lambda_i(q_i z_i - r_i y_i) + \mu_i \frac{d\varphi}{dx_i} + \nu_i \frac{d\psi}{dx_i} + \ldots$$

$$(i) \quad v_i = m_i + \lambda_i(r_i x_i - p_i z_i) + \mu_i \frac{d\varphi}{dy_i} + \nu_i \frac{d\psi}{dy_i} + \ldots$$

$$w_i = n_i + \lambda_i(p_i y_i - q_i x_i) + \mu_i \frac{d\varphi}{dz_i} + \nu_i \frac{d\psi}{dz_i} + \ldots$$

$$(i=1, 2, 3, \ldots)$$

ἢ

$$u_i = l_i + \lambda_i(q_i z_i - r_i y_i) + M_i \frac{df}{dx_i} + N_i \frac{dg}{dx_i} + \ldots$$

$$v_i = m_i + \lambda_i(r_i x_i - p_i z_i) + M_i \frac{df}{dy_i} + N_i \frac{dg}{dy_i} + \ldots$$

$$w_i = n_i + \lambda_i(p_i y_i - q_i x_i) + M_i \frac{df}{dz_i} + N_i \frac{dg}{dz_i} + \ldots$$

ἔνθα

$$\mu_i = M_i \frac{df}{d\varphi} + N_i \frac{dg}{d\varphi} + \ldots, \quad \nu_i = M_i \frac{df}{d\psi} + N_i \frac{dg}{d\psi} + \ldots$$

καὶ $f(\varphi, \psi, \ldots)$, $g(\varphi, \psi, \ldots)$, ... ὁμογενῆ πολυώνυμα.

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (ε) προκύπτει:

$$\Sigma \frac{d\varphi}{dx_i} \delta x_i = 0, \quad \Sigma \frac{d\psi}{dx_i} \delta x_i = 0, \ldots$$

Διὰ πολλαπλασιασμοῦ δὲ ἐπὶ $\delta x_i\; \delta y_i\; \delta z_i$ καὶ προσθέσεως τῶν ἐξισώσεων (i) προκύπτει

$$(i') \quad 0 = \Sigma[(u_i - A_i)\delta x_i + (v_i - B_i)\delta y_i + (w_i - \Gamma_i)\delta z_i]$$

ὅπου πρὸς συντομίαν ἐτέθη

$$(\sigma) \quad \begin{aligned} A_i &= l_i + \lambda_i(q_i z_i - r_i y_i), \\ B_i &= m_i + \lambda_i(r_i x_i - p_i z_i), \\ \Gamma_i &= n_i + \lambda_i(p_i y_i - q_i x_i). \end{aligned}$$

Ἡ δὲ ἐξίσωσις (i′) ἔχει τὴν αὐτὴν καὶ αἱ ἐξισώσεις (i) σημασίαν. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (i′) προκύπτει:

$$\Sigma(u_i \delta x_i + v_i \delta y_i + w_i \delta z_i) = \Sigma(A_i \delta x_i + B_i \delta y_i + \Gamma_i \delta z_i)$$

ἢ

$$\left[\text{ἐπειδὴ } \frac{ds}{dt} \cdot \delta s \cdot \left(\frac{dx}{ds} \cdot \frac{\delta x}{\delta s} + \frac{dy}{ds} \cdot \frac{\delta y}{\delta s} + \frac{dz}{ds} \cdot \frac{\delta z}{\delta s}\right) = V.\delta s.\text{συν}(V, \delta s), \; (V \text{ ἡ ταχύτης})\right]$$

$$\Sigma V.\delta s.\text{συν}(V, \delta s) = \Sigma(A_i \delta x_i + B_i \delta y_i + \Gamma_i \delta z_i)$$

Καὶ ἐὰν μὲν ἡ ταχύτης V συμπίπτῃ τῇ δυνατῇ ταχύτητι, προκύπτει

$$(\vartheta) \quad \Sigma V^2 = \Sigma(A_i u_i + B_i v_i + \Gamma_i w_i)\cdot$$

ἐὰν δὲ ἦναι κάθετος ἐπ᾽ αὐτὴν

$$0 = \Sigma(A_i \delta x_i + B_i \delta y_i + \Gamma_i \delta z_i).$$

Ἐὰν δὲ ὑπάρχῃ συνάρτησίς τις U τῶν $x_i\; y_i\; z_i$ τοιαύτη, ὥστε

$$A_i = -\frac{dU}{dx_i}, \quad B_i = -\frac{dU}{dy_i}, \quad \Gamma_i = -\frac{dU}{dz_i},$$

προκύπτει ἐκ τῆς ἐξισώσεως (ϑ)

$$\Sigma V^2 = -\frac{dU}{dt} \text{ ἢ } -U + c = \int_{t_0}^{t} dt.\Sigma V^2 = T + c'$$

ἢ καὶ $\qquad T + U = \text{σταθ.}$

Ἐκ δὲ τῶν ἐξισώσεων (σ) προκύπτει

$$\Sigma[(A_i - l_i)y_i - (B_i - m_i)x_i] = \Sigma\lambda_i[(q_i z_i - r_i y_i)y_i - (r_i x_i - p_i z_i)x_i]$$

$$\Sigma[(B_i - m_i)z_i - (\Gamma_i - n_i)y_i] = \Sigma\lambda_i[(r_i x_i - p_i z_i)z_i - (p_i y_i - q_i x_i)y_i]$$

$$\Sigma[(\Gamma_i - n_i)x_i - (A_i - l_i)z_i] = \Sigma\lambda_i[(p_i y_i - q_i x)x_i - (q_i z - r_i y_i)z_i]$$

Ἐὰν δὲ τὰ δεύτερα μέλη τῶν ἐξισώσεων (i) παρασταθῶσι χάριν συντομίας διὰ

$$\int X_i dt, \quad \int Y_i dt, \quad \int Z_i dt$$

καὶ τεθῇ

$$K\xi = \Sigma\varkappa_i x_i, \quad K\eta = \Sigma\varkappa_i y_i, \quad K\zeta = \Sigma\varkappa_i z_i,$$

προκύπτει (τῶν K, κ οὐσῶν τῶν μαζῶν)

$$K'\frac{d\xi}{dt} = \Sigma X, \quad K'\frac{d\eta}{dt} = \Sigma Y, \quad K'\frac{d\zeta}{dt} = \Sigma Z.$$

2. *Γενικαὶ ἐξισώσεις τῆς ἰσορροπίας.*

Ἔστωσαν X, Y, Z αἱ ὀρθογώνιοι συνιστῶσαι ἐνεργείας δρώσης ἐπί τι σημεῖον M στερεοῦ· $\delta x, \delta y, \delta z$ αἱ μεταβολαὶ τῶν συντεταγμένων τοῦ σημείου τούτου ἔν τινι δυνατῇ κινήσει τοῦ στερεοῦ. Ἡ ἀναγκαία καὶ ἐπαρκὴς συνθήκη τῆς ἰσορροπίας παρίσταται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$11) \quad \Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0$$

τοῦ συμβόλου ἀθροίσεως Σ ἐκτεινομένου ἐπὶ πάσας τὰς ἐνεργείας τὰς ἐπὶ τοῦ στερεοῦ δρώσας.

Ἐν τῇ ἐξισώσει 11) δύνανται νὰ ἀντικατασταθῶσι τὰ δx, δy, δz διὰ τῶν συνιστωσῶν 6) τῆς ταχύτητος τοῦ σημείου M ἐν τῇ θεωρουμένῃ δυνατῇ κινήσει καὶ προκύπτει

$$\Sigma[X(l+\lambda(qz-ry)+\sigma_1)+Y(m+\lambda(rx-pz)+\sigma\,)+Z(n+\lambda(py-qx)+\sigma_3)]=0$$

ὅθεν

$$l\Sigma X+m\Sigma Y+n\Sigma Z+p\Sigma\lambda(yZ-zY)+q\Sigma\lambda(zX-xZ)+r\Sigma\lambda(xY-yX)+\Sigma(X\sigma_1+Y\sigma_2+Z\sigma_3)=0$$

Καὶ ἐπομένως (δι' οἱαδήποτε l, m, n, p, q, r)

12) $\Sigma X=\theta,\quad \Sigma Y=0,\quad \Sigma Z=0$

13) $\Sigma\lambda(yZ-zY)=0,\quad \Sigma\lambda(zX-xZ)=0,\quad \Sigma\lambda(xY-yX)=0$

14) $\Sigma(X\sigma_1+Y\sigma_2+Z\sigma_3)=0$

Ἀντιστρόφως· ἐὰν ἀληθεύωσιν αἱ ἐξισώσεις 12), 13), 14), ἡ ἐξίσωσις 11) ἀληθεύει διὰ πᾶσαν δυνατὴν κίνησιν τοῦ στερεοῦ. Αἱ ἑπτὰ ἄρα ἐξισώσεις 12), 13), 14) ἐκφράζουσι τὰς ἀναγκαίας καὶ ἐπαρκεῖς συνθήκας τῆς ἰσορροπίας ἐνεργειῶν δρωσῶν ἐπί τινος στερεοῦ.

Καὶ ἡ μὲν ἑρμηνεία τῶν ἐξισώσεων 12) καὶ 13) εἶναι γνωστὴ ($\lambda \gtrless 0$), ἡ δὲ τῆς ἐξισώσεως 14) δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς συνθήκη τοῦ ἐν ᾧ τελεῖται ἡ ἰσορροπία συνεχοῦς μέσου.

3. *Γενικαὶ ἐξισώσεις τῆς κινήσεως.*

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων 6) εὑρίσκεται δι' ὑψώσεως εἰς τὸ τετράγωνον καὶ ἀθροίσεως τὸ τετράγωνον τῆς ταχύτητος τοῦ σημείου (x, y, z). Ἐὰν δὲ παρασταθῇ διὰ μ ἡ μᾶζα σημείου τινὸς καὶ διὰ T ἡ ρύμη κινουμένου τινὸς συστήματος, προκύπτει

$$2T=\Sigma\mu\{[l+\lambda(zq-yr)+\sigma_1]^2+[m+\lambda(xr-zp)+\sigma_2]^2+[n+\lambda(yp-xq)+\sigma_3]^2\}$$

τοῦ συμβόλου ἀθροίσεως Σ ἐκτεινομένου ἐπὶ πάντα τὰ ὑλικὰ σημεῖα τῆς μάζης μ τοῦ συστήματος. Ἀναπτυσσομένη δὲ ἡ ἐξίσωσις αὕτη καθίσταται

15)
$$\begin{aligned}2T=&(l^2+m^2+n^2)\Sigma\mu\\&+2(mr-nq)\Sigma\mu\lambda x+2(np-lr)\Sigma\mu\lambda y+2(lq-mp)\Sigma\mu\lambda z\\&+p^2\Sigma\mu\lambda^2(y^2+z^2)+q^2\Sigma\mu\lambda^2(z^2+x^2)+r^2\Sigma\mu\lambda^2(x^2+y^2)\\&-2qr\Sigma\mu\lambda^2yz-2rp\Sigma\mu\lambda^2zx-2pq\Sigma\mu\lambda^2xy\\&+2l\Sigma\mu\sigma_1+2m\Sigma\mu\sigma_2+2n\Sigma\mu\sigma_3\\&+2q\Sigma\mu\lambda(z\sigma_1-x\sigma_3)+2r\Sigma\mu\lambda(x\sigma_2-y\sigma_1)+2p\Sigma\mu\lambda(y\sigma_3-z\sigma_2)\\&+\Sigma\mu(\sigma_1{}^2+\sigma_2{}^2+\sigma_3{}^2)\end{aligned}$$

ἧς τὸ δεύτερον μέλος συνάρτησις δευτέρου βαθμοῦ πρὸς ἑκάστην τῶν 6 ποσοτήτων l, m, n, p, q, r, ὧν οἱ συντελεσταὶ ἐξαρτῶνται ἐκ τῆς μάζης τῶν σημείων, ἐκ τῆς σχετικῆς αὐτῶν θέσεως καὶ ἐκ τῆς θέσεως τῶν ἀξόνων τῶν x, y, z. Διὰ καταλλήλου δὲ ἐκλογῆς τῶν ἀξόνων δύναται τὸ T νὰ λάβῃ ἁπλουστέραν μορφήν· τὸ δὲ $\Sigma\mu(x^2+y^2)$ καλεῖται ὡς γνωστὸν ῥοπὴ ἀδρανείας τοῦ στερεοῦ πρὸς τὸν ἄξονα τῶν z κλ.

Αἱ δὲ διαφορικαὶ ἐξισώσεις τῆς κινήσεως δύνανται νὰ ἐξαχθῶσιν ἐκ τῆς ἀρχῆς τοῦ Hamilton, καθ' ἥν

16) $0=\int_{t_0}^{t_1}dt(\delta T-U),\quad [U=\Sigma(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)]$

καὶ εἶναι (πβλ. G. Kirchhoff, Mechanik, σ. 60)

17)
$$\left\{\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{dT}{dl}&=r\frac{dT}{dm}-q\frac{dT}{dn}+X\\\frac{d}{dt}\frac{dT}{dm}&=p\frac{dT}{dn}-r\frac{dT}{dl}+Y\\\frac{d}{dt}\frac{dT}{dn}&=q\frac{dT}{dl}-p\frac{dT}{dm}+Z\end{aligned}\right.$$

18)
$$\left\{\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{dT}{dp}&=n\frac{dT}{dm}-m\frac{dT}{dn}+r\frac{dT}{dq}-q\frac{dT}{dr}+L\\\frac{d}{dt}\frac{dT}{dq}&=l\frac{dT}{dn}-n\frac{dT}{dl}+p\frac{dT}{dr}-r\frac{dT}{dp}+M\\\frac{d}{dt}\frac{dT}{dr}&=m\frac{dT}{dl}-l\frac{dT}{dm}+q\frac{dT}{dp}-p\frac{dT}{dq}+N\end{aligned}\right.$$

ὅπου X, Y, Z, L, M, N συναρτήσεις τῶν x, y, z, t.

Ἄξιον δὲ παρατηρήσεως, ὅτι ἐνταῦθα ἡ συνάρτησις T ἐξαρτᾶται καὶ ἐκ τῆς συναρτήσεως λ καὶ ἐκ τῶν μερικῶν παραγώγων σ_1, σ_2, σ_3 πρὸς x, y, z τῆς συναρτήσεως σ οὖσα δευτέρου βαθμοῦ πρὸς ἑκάστην τῶν 4 τούτων ποσοτήτων.

4. *Γενικαὶ ἐξισώσεις τοῦ ἀπειροστοῦ μετασχηματισμοῦ συνεχοῦς μέσου.*

Νοήσωμεν συνεχές τι μέσον μετακινούμενον καὶ μεταμορφούμενον συνεχῶς οὕτως, ὥστε ἡ μετακίνησις PP′ παντὸς σημείου αὐτοῦ ἀπὸ P (x, y, z) μέχρι P′(x′, y′, z′) ἀπειροστὴ (παραλειπομένων τῶν τετραγώνων καὶ τῶν γινομένων τῶν μετακινήσεων τούτων). Αἱ προβολαὶ l, m, n πρὸς ὀρθογωνίους ἄξονας τῶν x, y, z τῆς μετακινήσεως PP′ ὡς καὶ αἱ μερικαὶ παράγωγοι αὐτῶν πρὸς x, y, z εἶναι ἀπειροστὰ πρώτης τάξεως (ὧν παραλείπονται τὰ τετράγωνα καὶ τὰ γινόμενα). Παραδείγματα τοιούτων ἀπειροστῶν μετασχηματισμῶν παρέχουσιν αἱ δονήσεις ἐλαστικοῦ ἠχηροῦ σώματος, ἡ κίνησις ῥευστοῦ (ὑγροῦ ἢ ἀερώδους) ἀπό τινος χρονικῆς στιγμῆς t μέχρι t+dt, κλ.

Ἄξιον παρατηρήσεως, ὅτι αἱ γενικαὶ ἐξισώσεις τῶν θεωρουμένων μετασχηματισμῶν εἶναι μερικὴ περίπτωσις τῶν γενικῶν ἐξισώσεων 6) διὰ $\lambda=1$ καὶ

$$\sigma=\frac{1}{2}(\varepsilon_1 x^2+\varepsilon_2 y^2+\varepsilon_3 z^2+\gamma_1 yz+\gamma_2 zx+\gamma_3 xy)$$

ἤτοι ἡ συνάρτησις σ εἶναι ὁμογενὴς δευτέρου βαθμοῦ πρὸς x, y, z, τῶν 6 συντελεστῶν ε_i, γ_i ἐχόντων ὡρισμένην σημασίαν (πβλ. P. Appell Traité de Mécanique rationnelle, t. III, 1903, p. 263).

Ἐὰν δὲ ἐν ταῖς ἐξισώσεσι τοῦ ἀπειροστοῦ μετασχηματισμοῦ τραπῶσι τὰ μὲν l, m, n εἰς ldt, mdt, ndt τὰ δὲ p, q, r εἰς

$$24)\quad \frac{1}{2}\left(\frac{dn}{dy}-\frac{dm}{dr}\right)dt,\quad \frac{1}{2}\left(\frac{dl}{dz}-\frac{dn}{dx}\right)dt,\quad \frac{1}{2}\left(\frac{dm}{dx}-\frac{dl}{dy}\right)dt,$$

προκύπτουσιν αἱ ἐξισώσεις τῆς δινώδους κινήσεως τοῦ συνεχοῦς μέσου (πβλ. Helmholtz, Journal für Mathematik, B. 55).

Αἱ δὲ ταχύτητες τῶν πρωτευουσῶν διαστολῶν περί τι σημεῖον ρευστοῦ τινος ἐν κινήσει εἶναι αἱ τρεῖς ρίζαι τῆς ἐξισώσεως πρὸς s:

$$25)\quad \begin{vmatrix} 2\varepsilon_1-2s & \gamma_3 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & 2\varepsilon_2-2s & \gamma_1 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & 2\varepsilon_3-2s \end{vmatrix}=0$$

5. *Γενικαὶ ἐξισώσεις τοῦ ἠλεκτρομαγνητισμοῦ.*

Οἱ γενικοὶ νόμοι, ἐφ' ὧν στηρίζεται ἡ γενικὴ θεωρία τοῦ Ἠλεκτρομαγνητισμοῦ εἶναι οἱ ἑπόμενοι:

1. *Δύο παράλληλα ρεύματα τῆς αὐτῆς ἐντάσεως ἀντιθέτου φορᾶς ἀσκοῦσιν ἐπί τινα μαγνητικὸν πόλον ἐνεργείας ἴσας μετ' ἀντιθέτων σημείων.*

2. *Ἡμιτονοειδὲς ρεῦμα ἀσκεῖ ἐνέργειαν ἴσην τῇ τοῦ εὐθυγράμμου ρεύματος τοῦ τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχοντος.*

3. *Ἡ ἐνέργεια ρεύματος ἐπί τινος μαγνητικοῦ πόλου εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος, ἤτοι πρὸς τὸ ποσὸν τοῦ ἠλεκτρισμοῦ τοῦ διερχομένου τομὴν τοῦ ἀγωγοῦ κατὰ τὴν μονάδα τοῦ χρόνου.*

Οἱ τρεῖς οὗτοι νόμοι ἀπεδείχθησαν θεωρητικῶς τε καὶ πειραματικῶς ὑπὸ Ampère, Colladon, Faraday κ. ἄ.

Ὁ Maxwell εὗρε διὰ μὲν τὴν θεωρίαν τοῦ Ἠλεκτρομαγνητισμοῦ τὰς ἑπομένας σχέσεις

$$26)\quad \left\{\begin{aligned} 2\pi u&=\frac{1}{2}\left(\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz}\right)\\ 2\pi v&=\frac{1}{2}\left(\frac{d\alpha}{dz}-\frac{d\gamma}{dx}\right)\\ 2\pi w&=\frac{1}{2}\left(\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}\right)\end{aligned}\right.$$

ὅπου u, v, w αἱ συνιστῶσαι τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος· α, β, γ αἱ τῆς ἠλεκτρομαγνητικῆς ἐνεργείας. Διὰ δὲ τὴν θεωρίαν τῆς ἐν τῷ ἠλεκτρισμῷ ἐπαγωγῆς τὰς ἑπομένας σχέσεις

$$27)\quad \left\{\begin{aligned} P&=cy'-bz'-\frac{dF}{dt}-\frac{d\psi}{dx}\\ Q&=az'-cx'-\frac{dG}{dt}-\frac{d\psi}{dy}\\ R&=bx'-ay'-\frac{dH}{dt}-\frac{d\psi}{dz}\end{aligned}\right.$$

ὅπου P, Q, R αἱ συνιστῶσαι τῆς ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας τῆς ἐπαγωγῆς ἐν τῇ μονάδι τοῦ μήκους· a, b, c αἱ τῆς μαγνητικῆς ἐπαγωγῆς· x′, y′, z′ αἱ παράγωγοι τῶν x, y, z πρὸς τὸν χρόνον t· F, G, H αἱ τῆς ἠλεκτρομαγνητικῆς ροπῆς· ψ συνάρτησίς τις μονότιμος τῶν x, y, z. Συνδέονται δὲ τὰ a, b, c πρὸς μὲν τὰ α, β, γ διὰ τῶν σχέσεων

$$28)\quad \left\{\begin{aligned} a&=\mu\alpha & & & a&=\alpha+4\pi A\\ b&=\mu\beta & &\text{ἢ} & b&=\beta+4\pi B\\ c&=\mu\gamma & & & c&=\gamma+4\pi C\end{aligned}\right.$$

(ὅπου μ=σταθ. καὶ A, B, C αἱ συνιστῶσαι τῆς μαγνητικῆς ἐπαγωγῆς). Πρὸς δὲ τὰ F, G, H διὰ τῶν σχέσεων

$$29)\quad \left\{\begin{aligned} a&=\frac{dH}{dy}-\frac{dG}{dz}\\ b&=\frac{dF}{dz}-\frac{dH}{dx}\\ c&=\frac{dG}{dx}-\frac{dF}{dy}\end{aligned}\right.$$

Διὰ δὲ τῶν προηγουμένων ἐξισώσεων ἑρμηνεύεται ἐν γένει ἡ ἠλεκτρομαγνητικὴ θεωρία τοῦ φωτός, ὡς καὶ ἡ τῆς δινώδους μαγνητικῆς πολώσεως τῆς τελουμένης ὑπὸ τὰς αὐτὰς σχεδὸν συνθήκας, ὑφ' ἃς καὶ αἱ δινώδεις κινήσεις ἐν τῇ Ρευστοκινητικῇ.

Αἱ δὲ ἐξισώσεις τῆς ἐπεκτάσεως τοῦ νόμου τοῦ Ohm ἐπὶ ἀγωγῶν τριῶν διαστάσεων εἶναι αἱ ἑξῆς

$$30)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{u}{c}&=-\frac{d\varphi}{dx}-\frac{dF}{dt}+X\\ \frac{v}{c}&=-\frac{d\varphi}{dy}-\frac{dG}{dt}+Y\\ \frac{w}{c}&=-\frac{d\varphi}{dz}-\frac{dH}{dt}+Z\end{aligned}\right.$$

ὅπου $\left(-\frac{d\varphi}{dx}, -\frac{d\varphi}{dy}, -\frac{d\varphi}{dz}\right)$ ἡ ἠλεκτροστατικὴ ἐνέργεια, τοῦ φ ὄντος συναρτήσεώς τινος μονοτίμου· $\left(-\frac{dF}{dt}, -\frac{dG}{dt}, -\frac{dH}{dt}\right)$ ἡ τῆς ἐπαγωγῆς ἐνέργεια· (X, Y, Z) ἡ ἐξωτερικὴ (χημικὴ κλπ.) κινητήριος ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια· $\left(-\frac{u}{c}, -\frac{v}{c}, -\frac{w}{c}\right)$ ἡ ἀντιδρῶσα κινητήριος ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια.

Πρόδηλον δέ, ὅτι αἱ ἐξισώσεις 26), 27), 30) ἔχουσιν ὁμοίαν πρὸς τὰς τῆς κινητικῆς συνεχοῦς μέσου μορφὴν κατὰ τὰ ἀνωτέρω καὶ ἑπομένως δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς μερικαὶ περιπτώσεις τῶν ἐξισώσεων 6).

6. *Γενικαὶ ἐξισώσεις τῆς ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας τῶν ἐν ἠρεμίᾳ σωμάτων.*

Καίτοι αἱ ἡμέραν παρ' ἡμέραν γιγνόμεναι θεωρητικαὶ καὶ πειραματικαὶ ἔρευναι περὶ τῆς ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας τῶν ἐν ἠρεμίᾳ σωμάτων πολλὰ παρέχουσι νέα φαινόμενα, ὑποθέσεις καὶ θεωρίας, ἐν τούτοις φαίνεται, ὅτι ἡ ὑπὸ Lorentz θεμελιωθεῖσα θεωρία εὑρίσκεται ἐγγύτερον πρὸς τὰς νεωτέρας πειραματικὰς ἢ θεωρητικὰς ἐρεύνας, οἷαι αἱ τοῦ Larmor, J. J. Thomson, Abraham, Bucherer, Einstein, Kaufmann κ. ἄ.

Αἱ ὑπὸ Lorentz δοθεῖσαι γενικαὶ ἐξισώσεις τῆς ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας τῶν ἐν ἠρεμίᾳ σωμάτων εἶναι αἱ ἑπόμεναι

$$31)\quad \begin{cases} 4\pi u = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}, & \alpha = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \\ 4\pi v = \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx}, & \beta = \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \\ 4\pi w = \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}, & \gamma = \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \end{cases}$$

$$32)\quad \begin{cases} \frac{4\pi}{K}f + \frac{dF}{dt} + \frac{d\psi}{dx} = 0, & F = -4\pi\left(u - \frac{df}{dt}\right) \\ \frac{4\pi}{K}g + \frac{dG}{dt} + \frac{d\psi}{dy} = 0, & G = -4\pi\left(v - \frac{dg}{dt}\right) \\ \frac{4\pi}{K}h + \frac{dH}{dt} + \frac{d\psi}{dz} = 0, & H = -4\pi\left(w - \frac{dh}{dt}\right) \end{cases}$$

$$\psi = \frac{4\pi}{K}\Sigma\frac{dX}{dx}, \quad \Sigma\frac{df}{dx} = \varrho = -\Sigma\frac{dX}{dx} = \text{πυκνότ.}$$

ὅπου K=σταθ., (f, g, h) ἡ διηλεκτρικὴ πόλωσις.

Αἱ ἐξισώσεις 32) εἰσέρχονται προφανῶς εἰς τὰς 6) διὰ καταλλήλου μετασχηματισμοῦ καὶ ἑρμηνείας τῶν ἐν αὐταῖς γραμμάτων.

7. *Γενικαὶ ἐξισώσεις τῆς ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας τῶν ἐν κινήσει σωμάτων.*

Αἱ γενικαὶ ἐξισώσεις τοῦ Lorentz περὶ τῆς ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας τῶν ἐν κινήσει σωμάτων συνίστανται ἐκ πασῶν τῶν μνημονευθεισῶν ἀνωτέρω ἐν ἠρεμίᾳ σωμάτων καὶ προσέτι ἐκ τῶν ἑπομένων τῶν ἐκφραζουσῶν κατὰ Lorentz τὸ ὁλικὸν ῥεῦμα.

$$33)\quad \begin{cases} u = \frac{df}{dt} + \frac{dX}{dt} + \frac{d}{dr}(X\zeta - Z\xi) - \frac{d}{dy}(Y\xi - X\eta) \\ v = \frac{dg}{dt} + \frac{dY}{dt} + \frac{d}{dx}(Y\xi - X\eta) - \frac{d}{dz}(Z\eta - Y\zeta) \\ w = \frac{dh}{dt} + \frac{dZ}{dt} + \frac{d}{dy}(Z\eta - Y\zeta) - \frac{d}{dx}(X\zeta - Z\xi) \end{cases}$$

$$X + f = \frac{K}{4\pi}\left[\frac{4\pi}{K_0}f + \frac{K - K_0}{K}(\eta\gamma - \zeta\beta)\right], \ldots\ldots$$

ὅπου ξ, η, ζ παριστῶσι τὰς συνιστώσας τῆς ταχύτητος τῆς κινουμένης ὕλης.

Πρόδηλον, ὅτι καὶ αἱ ἐξισώσεις 33) εἰσέρχονται εἰς τὰς 6) διὰ καταλλήλου μετασχηματισμοῦ καὶ ἑρμηνείας τῶν ἐν αὐταῖς γραμμάτων, ἐὰν δηλονότι ἐν ταῖς 6) τεθῇ

$$l = \frac{d(f+X)}{dt}, \ldots.$$

$$\lambda(qz - rx) + \frac{d\sigma}{dx} =$$

$$\frac{d}{dr}(X\zeta - Z\xi) - \frac{d}{dy}(Y\xi - X\eta), \ldots.$$

Διὰ τῆς ἀνωτέρω θεωρίας ἀπεδείχθη καὶ τοῦτο, ὅτι ἡ κίνησις τῆς Γῆς οὐδαμῶς μὲν ἐπιδρᾷ ἐπὶ τὰ ὀπτικὰ φαινόμενα ὑπὸ ὡρισμένας συνθήκας, ἐπιδρᾷ δὲ ἐπὶ τὰ καθαρῶς ἠλεκτρικὰ φαινόμενα καὶ παρέχει ἐξήγησίν τινα τοῦ γνωστοῦ φαινομένου τοῦ Zeeman.

8. *Γενικαὶ ἐξισώσεις τῆς κινήσεως τῶν ῥευστῶν.*

Αἱ γενικαὶ ἐξισώσεις τῆς ἐσωτερικῆς κινήσεως οἱουδήποτε συνεχοῦς μέσου εἶναι αἱ ἑπόμεναι·

$$34)\quad \begin{cases} \varrho(X - j_x) = \frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz} \\ \varrho(Y - j_y) = \frac{dT_3}{dx} + \frac{dN_2}{dy} + \frac{dT_1}{dz} \\ \varrho(Z - j_z) = \frac{dT_2}{dx} + \frac{dT_1}{dy} + \frac{dN_3}{dz} \end{cases}$$

(περὶ τῆς σημασίας τῶν N καὶ T παράβαλε τὴν ἐν τῇ 'Επετηρ. τοῦ 'Εθν. Πανεπιστημίου τοῦ 1905 διατριβήν μου).

'Εκ δὲ τῶν ἐξισώσεων τούτων διὰ $T_1=T_2=T_3=0$, $N_1=N_2=N_3=p$ προκύπτουσιν αἱ γενικαὶ ἐξισώσεις τῆς κινήσεως τῶν μὴ ἰξωδῶν ρευστῶν

$$35)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dp}{dx} &= \varrho\,(X-j_x) \\ \frac{dp}{dy} &= \varrho\,(Y-j_y) \\ \frac{dp}{dz} &= \varrho\,(Z-j_z) \end{aligned}\right.$$

$$\left[\frac{d\varrho}{dt}+\varrho\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)=0\right]$$

ὅπου p ἡ πίεσις καὶ ρ ἡ πυκνότης τοῦ ρευστοῦ.

Πρόδηλον δέ, ὅτι καὶ αἱ ἐξισώσεις 35) ἔχουσιν ὁμοίαν μορφὴν πρὸς τὰς 6) διὰ

$$-\varrho j_x=u,\ \dots,\quad \frac{dp}{px}=\sigma_1,\ \dots,$$

$$-\varrho X=l+\lambda(qz-ry),\ \dots$$

Ἔν τινι ὡρισμένῳ ρευστῷ ὑφίσταται μεταξὺ τῆς πυκνότητος ρ τῆς πιέσεως p καὶ τῆς θερμοκρασίας θ τοῦ ὄγκου στοιχείου τινὸς τοῦ ρευστοῦ χαρακτηριστική τις ἐξίσωσις $f(\varrho, p, \vartheta)=0$. Διὰ μὲν τὰ ἀέρια π. χ. ὑπάρχει

$$\frac{\varrho}{\varrho(1+\alpha\vartheta)}=\text{σταθ.}$$

ὅπου $\alpha=\frac{1}{273}$ ὁ συντελεστὴς διαστολῆς. Διὰ δὲ τὰ ὑγρὰ ἀνεπαισθήτου πιέσεως ὑπάρχει

$$\varrho=\frac{\varrho_0}{1+\beta\vartheta}$$

ὅπου β ὁ συντελεστὴς διαστολῆς καὶ ϱ_0 ἡ πυκνότης διὰ $\vartheta=0$.

Τοῦ p μὴ ἐξαρτωμένου ρητῶς ἐκ τοῦ χρόνου t, προκύπτει ἐκ τῶν ἐξισώσεων 35)

$$dp=\varrho(Xdx+Ydy+Zdz)-\varrho(j_xdx+j_ydy+j_zdz)$$

ἢ

$$36)\quad \frac{dp}{\varrho}=P.ds.\text{συν}(P,v)-(j_xdx+j_ydy+j_zdz)$$

ὅπου $P.ds.\text{συν}(P,v)$ τὸ στοιχειῶδες ἔργον.

Ἐὰν δὲ νῦν τεθῇ

$$37)\quad j_xdx+j_ydy+j_zdz=Kd\psi$$

ὅπου K σταθερὰ ποσότης καὶ ψ τὸ ἀζιμούθιον τοῦ σημείου (x, y, z), προκύπτει ὑπὸ ὡρισμένας συνθήκας (πβλ. τὴν ἐν τῇ Ἐπετηρ. τοῦ Ἐθν. Πανεπιστημίου τοῦ 1904 διατριβήν μου)

$$38)\quad r^2\frac{d\psi}{dt}=Kt+c \quad \text{(ἐμβαδιακὴ ταχύτης).}$$

$$39)\quad r^3=\lambda t^2+\mu t+\nu \quad \text{(γενικὸς νόμος τοῦ Kepler).}$$

Ἐὰν δὲ ἦναι $Kd\psi=\frac{1}{2}dv^2$, προκύπτει διὰ $ds=\tau d\psi$

$$40)\quad r^3=A\psi\pm B\sqrt{\alpha\psi+\beta}+\Gamma \quad \text{(ἑλικοειδὴς κίνησις)}$$

ὅπου v ἡ ταχύτης c, λ, μ, ν, τ A, B, Γ, α, β σταθεραὶ ποσότητες. Διὰ $\mu=\nu=0$ προκύπτει ὁ γνωστὸς νόμος τοῦ Kepler τῶν κύβων τῶν ἀξόνων πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν χρόνων. Μήπως ἡ κίνησις τῶν οὐρανίων σωμάτων ἐξηγεῖται διὰ τῆς ἐξισώσεως 40) διὰ καταλλήλου ἐκλογῆς τῶν ἐν αὐτῇ σταθερῶν ποσοτήτων καὶ τοῦ διπλοῦ σημείου ±;

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

'Εκ τῆς ἀνωτέρω ταξινομήσεως τῶν γενικῶν ἐξισώσεων τῶν συνεχῶν ἐν γένει μέσων προκύπτει, ὅτι πᾶσαι αἱ ἐξισώσεις αὗται ὑπάγονται mutatis mutandis ὑπὸ τὸν γενικὸν τύπον τῶν ἐξισώσεων 6) καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἐξηγεῖται οὕτω γενικώτερον ἡ κατὰ Newton καὶ J. Bertrand ἐν τῇ Μηχανικῇ *ὁμοιότης*. Ὑπολείπεται δὲ ἡ λεπτομερὴς ἔρευνα τῶν φυσικῶν ἐν γένει φαινομένων, καθ' ἣν ἰσχύουσιν ἰδίᾳ αἱ γενικαὶ ἐξισώσεις 6), 7), 8), 10), 13), 14), 15), 17), 18), 22) κ. ἑ.

'Εν 'Αθήναις κατὰ 'Ιανουάριον τοῦ 1907.

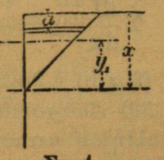
ΑΘ. ΚΑΡΑΓΙΑΝΝΙΔΗΣ

ΑΙ ΤΕΛΕΥΤΑΙΑΙ ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ ΤΟΥ ΠΡΩΣΣΙΚΟΥ ΚΡΑΤΟΥΣ ΑΦΟΡΩΣΑΙ ΤΗΝ ΕΚΤΕΛΕΣΙΝ ΟΙΚΟΔΟΜΙΚΩΝ ΕΡΓΩΝ ΕΚ ΣΙΔΗΡΟΠΑΓΟΥΣ ΣΚΙΡΡΟΚΟΝΙΑΜΑΤΟΣ

(Συνέχεια ἐκ τοῦ προηγουμένου.)

Εἶνε ἐπίσης δυνατὸν νὰ ὁρισθῇ τὸ κοινὸν κέντρον βάρους τοῦ σκιρ. καὶ τῶν σιδηρῶν ἐνθεμάτων ἐν τῇ θλιβομένῃ ζώνῃ ἐκ τῆς:

$$24)\quad y_1=\frac{\frac{bx}{2}\cdot\frac{2}{3}x\sigma_b+\sigma_e'\omega_1(x-\alpha)}{\frac{bx}{2}\sigma_b+\sigma_e'\omega_1}=\frac{\frac{bx^3}{3}+m\omega_1(x-\alpha)^2}{\frac{bx^2}{2}+m\omega_1(x-\alpha)}$$



Σχ. 4.